Tanım: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bir matris olsun. $xI_n - A$ matrisine A matrisinin karakteristik matrisi denir.

Ayrıca $\det(xI_n - A) = |xI_n - A|$ ifadesine A matrisinin karakteristik polinomu denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$xI_2 - A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{bmatrix}$$

A'nın karakteristik matrisidir.

Ayrıca
$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-4) - 6$$

$$= x^2 - 5x - 2$$

polinomu ise A'nın karakteristik polinomudur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin

$$xI_3 - A = \begin{bmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-4 & 1 \\ 2 & 4 & x-1 \end{bmatrix}$$ A'nın karakteristik matrisidir.

$$|xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-4 & 1 \\ 2 & 4 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ 4 & x-1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & x-4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\left[(x-4)(x-1) - 4\right] + 2 \cdot \left[(-2)(x-1) - 2\right]$$

$$+ 2 \cdot \left[-8 - 2 \cdot (x-4)\right]$$

$$= x^3 - 6x^2 - 3x$$! kontrol

A'nın karakteristik polinomudur.

Özellikler: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun.

i) A ile A^T matrislerinin karakteristik polinomları aynıdır.

ii) P tersinir matris olsun. A ile $P^{-1}AP$ matrislerinin karakteristik polinomları aynıdır.

iii) $\underbrace{\det(xI_n - A)}_{P_A(x)} = |xI - A| = x^n - iz(A).x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$

şeklindedir.

Örnek: i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Yukarıdan $P_A(x) = |xI - A| = x^2 - 5x + 2$

$$P_{A^T}(x) = |xI - A^T| = \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-4) - 6 = x^2 - 5x + 2$$

ii) $\underbrace{|xI - A|}_{P_A(x)} = \underbrace{|xI - P^{-1}AP|}_{P_{P^{-1}AP}(x)}$

$$|xI - P^{-1}AP| = |xP^{-1}P - P^{-1}AP|$$

$$= | P^{-1} x I P - P^{-1} A P |$$

$$= | \underline{P^{-1}} \, \underline{(xI - A)} \, \underline{P} |$$

$$= |P^{-1}| \, . \, |xI - A| \, . \, |P|$$

$$= \frac{1}{\cancel{|P|}} \, |xI - A| \, \cancel{|P|}$$

$$= |xI - A|$$

iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ olsun.

$$\underset{\substack{\| \\ P_A(x)}}{|xI - A|} = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ -4 & 4 & x-5 \end{vmatrix}$$

Alıştırma !

$$= x^3 \overset{-iz(A)}{-6} x^2 + 11x - 6$$

baş katsayı = 1 $\quad (-1)^n \det(A)$

Gerçekten $\quad iz(A) = 1 + 0 + 5 = 6$

$\det(A) = 6$

Teorem: (Cayley–Hamilton Teoremi)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi verilsin.

$p_A(x) = |xI_n - A| = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, A'nın

karakteristik polinomu olsun. Bu durumda

$$p_A(A) = \underbrace{A^n}_{\text{matris}} + \underbrace{a_{n-1}A^{n-1}}_{\text{matris}} + \cdots + \underbrace{a_1 . A}_{\text{matris}} + \underbrace{a_0 I_n}_{\text{matris}} = \underbrace{0_{n\times n}}_{\text{matris}}$$

olur.

Cayley–Hamilton Teoremi Uygulamaları

① Bir matrisin tersini bulma

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. A^{-1}'i bulalım.

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)$$

$= x^2 - 4x + 3$ 'tür.

$\det(A) = 3$ old. A tersinirdir.

Cayley-Hamilton Teoreminden $p_A(A) = 0$ 'dır.

$$A^2 - 4A + 3.I_2 = 0$$ olur.

A^{-1} matrisi var olduğu için eşitliğin her tarafını A^{-1} ile çarpalım.

$$A^{-1}(A^2 - 4A + 3.I_2) = 0$$

$$A - 4I + 3A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow 3A^{-1} = 4I - A \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$$

$$= 1/3 \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 1/3 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

2) Matrisin kuvvetini bulma

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. A^6'yı hesaplayalım.

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1) - 3$$

$$= x^2 - x - 5$$

olur.

Cayley-Hamilton Teoreminden

$$A^2 - A - 5I = 0 \Rightarrow A^2 = A + 5I$$

o halde

$$A^6 = A^2 A^2 A^2 = (A+5I)(A+5I)(A+5I)$$

$$= (\underbrace{A^2}_{A+5I} + 5A + 5A + 25I)(A+5I)$$

$$= (11A + 30I)(A+5I)$$

$$= 11A^2 + 55A + 30A + 150I$$

$A \cdot I = A$

$$= 11(A+5I) + 85A + 150I$$

$$= 96A + 205I$$

$$= \begin{bmatrix} 397 & 288 \\ 96 & 109 \end{bmatrix}$$