HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

DÖNÜŞTÜRME
Bölüm 6

DERS SORUMLULARI
DOÇ. DR. AYTEN YİĞİTER
DR. ÖĞR. ÜYESİ CEREN EDA CAN

Tek boyutlu ve çok boyutlu raslantı değişkenlerinde dönüştürmeler üç yolla yapılabilir:

1) Dağılım fonksiyonu yöntemi
2) Moment çıkaran fonksiyon yöntemi
3) Dönüştürme yöntemi

Bu bölümde, dönüştürme yöntemini inceleyeceğiz.

Dönüştürmeler

- Tek Boyutlu Raslantı Değişkenleri
  - Tek Boyutlu Kesikli Raslantı Değişkenleri
  - Tek Boyutlu Sürekli Raslantı Değişkenleri
- Çok Boyutlu Raslantı Değişkenleri
  - Çok Boyutlu Kesikli Raslantı Değişkenleri
  - Çok Boyutlu Sürekli Raslantı Değişkenleri

TEK BOYUTLU DURUM

Tek Boyutlu Kesikli Raslantı Değişkenleri için Dönüştürme

X kesikli raslantı değişkeni $p_X(x) = P(X = x)$ olasılık fonksiyonuna sahip olsun. $Y = g(X)$ şeklinde tanımlanan Y raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(X = x) = \underbrace{P\left(X = g^{-1}(y)\right)}_{y=g(x)\ \Rightarrow\ x=g^{-1}(y)} = p_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

olarak elde edilir.

X kesikli raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ olsun. Y raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu ise,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq x) = \underbrace{P\left(X \leq g^{-1}(y)\right)}_{y=g(x)\ \Rightarrow\ x=g^{-1}(y)} = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

olarak elde edilir.

Tek Boyutlu Sürekli Raslantı Değişkenleri için Dönüştürme

X sürekli raslantı değişkeni $f_X(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. $Y = g(X)$ şeklinde tanımlanan Y raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y) = f_X(x) \times \left|\frac{dx}{dy}\right| = \underbrace{f_X\left(g^{-1}(y)\right) \times \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|}_{y=g(x)\ \Rightarrow\ x=g^{-1}(y)}$$

şeklinde bulunmaktadır.

ÇOK BOYUTLU DURUM

Çok Boyutlu Kesikli Raslantı Değişkenleri için Dönüştürme

n boyutlu kesikli raslantı değişkeni $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)'$ in bileşik olasılık fonksiyonu $p_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$ olsun.

n boyutlu $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ kesikli raslantı değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem sistemi çözümlendiğinde $X_1, X_2, \cdots, X_n$ kesikli raslantı değişkenleri için k $(i = 1,2, \cdots, k)$ tane çözüm takımı elde edilsin:

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{aligned} \quad \xRightarrow{\substack{Ters\ dönüşüm \\ foksiyonları \\ elde\ edilir.}} \quad \begin{aligned} X_{1i} &= h_{1i}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \\ X_{2i} &= h_{2i}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \\ &\vdots \\ X_{ni} &= h_{ni}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \end{aligned} \quad , \qquad i = 1,2, \cdots, k$$

$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)'$ nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
p_Y(y_1,y_2,\cdots,y_n) &= \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_X\big(h_{1i}(y_1,y_2,\cdots,y_n),h_{2i}(y_1,y_2,\cdots,y_n),\cdots,h_{ni}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\big)
\end{aligned}
$$

Örnek: X_1 ve X_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu $p_{X_1X_2}(x_1,x_2)'$ dir. $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = X_2$ raslantı değişkenleri tanımlansın. $p_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)$ bileşik olasılık fonksiyonunu bulalım:

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi gerekir. Bunun için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir.

$$\begin{array}{l} y_1 = g_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \\ y_2 = g_2(x_1,x_2) = x_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = h_1(y_1,y_2) = y_1 - y_2 \\ x_2 = h_2(y_1,y_2) = y_2 \end{array}$$

X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri için bir tane çözüm takımı elde edilir. Dolayısıyla, $(Y_1,Y_2)'$ nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} p_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) &= p_{X_1X_2}(x_1,x_2) \\ &= p_{X_1X_2}\big(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)\big) \\ &= p_{X_1X_2}(y_1 - y_2\,,y_2) \end{aligned}$$

Örnek: X_1 ve X_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu $p_{X_1X_2}(x_1,x_2)'$ dir. $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = (X_2)^2$ raslantı değişkenleri tanımlansın. $p_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)$ bileşik olasılık fonksiyonunu bulalım:

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi gerekir. Bunun için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \\ y_2 &= g_2(x_1,x_2) = (x_2)^2 \end{aligned}$$

$$\nearrow 1.\, çözüm\ takımı: \begin{aligned} x_1 &= h_{11}(y_1,y_2) = y_1 - \sqrt{y_2} \\ x_2 &= h_{21}(y_1,y_2) = \sqrt{y_2} \end{aligned}$$

$$\searrow 2.\, çözüm\ takımı: \begin{aligned} x_1 &= h_{12}(y_1,y_2) = y_1 + \sqrt{y_2} \\ x_2 &= h_{22}(y_1,y_2) = -\sqrt{y_2} \end{aligned}$$

X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenleri için iki tane çözüm takımı elde edilmiştir. Dolayısıyla, $(Y_1,Y_2)'$ nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} p_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) &= \sum_{i=1}^{2} p_{X_1X_2}\left(h_{1i}(y_1,y_2)\,,h_{2i}(y_1,y_2)\right) \\ &= p_{X_1X_2}\left(y_1 - \sqrt{y_2}\,,\sqrt{y_2}\right) + p_{X_1X_2}\left(y_1 + \sqrt{y_2}\,,-\sqrt{y_2}\right) \end{aligned}$$

Örnek: X_1 ve X_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2) &= \frac{x_1x_2}{18} \quad , \quad x_1 = 1,2,3 \;\; ve \; x_2 = 1,2 \\ &= 0 \qquad , \quad diğer \; x_1 \; ve \; x_2 \; değerleri \; için \end{aligned}$$

$Y_1 = 3X_1 + X_2$ ve $Y_2 = 2X_1$ kesikli raslantı değişkenleri tanımlansın. Buna göre,

a) Y_1 ve Y_2' nin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.

b) Y_1 ve Y_2' nin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

a) X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir ve bir tane çözüm takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1,x_2) = 3x_1 + x_2 \\ y_2 &= g_2(x_1,x_2) = 2x_1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= h_1(y_1,y_2) = \frac{y_2}{2} \\ x_2 &= h_2(y_1,y_2) = \frac{2y_1 - 3y_2}{2} \end{aligned}$$

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin aldıkları değerlere göre, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin aldıkları değerler hesaplanır:

(x_1, x_2)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
(y_1, y_2)	$(4,2)$	$(5,2)$	$(7,4)$	$(8,4)$	$(10,6)$	$(11,6)$

$(Y_1, Y_2)'$ nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$p_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1X_2}\left(\frac{y_2}{2}, \frac{2y_1 - 3y_2}{2}\right) = \frac{\left(\frac{y_2}{2}\right)\left(\frac{2y_1 - 3y_2}{2}\right)}{18} = \frac{y_2(2y_1 - 3y_2)}{72}$$

$$\begin{aligned} p_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{y_2(2y_1 - 3y_2)}{72} \quad , \quad (y_1, y_2) \in \{(4,2), (5,2), (7,4), (8,4), (10,6), (11,6)\} \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y_1 \textit{ ve } y_2 \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

b) Y_1 ve Y_2 kesikli raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulalım:

$Y_2 \setminus Y_1$	4	5	7	8	10	11	$p_{Y_2}(y_2)$
2	$4/72$	$8/72$	0	0	0	0	$\mathbf{12/72}$
4	0	0	$8/72$	$16/72$	0	0	$\mathbf{24/72}$
6	0	0	0	0	$12/72$	$24/72$	$\mathbf{36/72}$
$p_{Y_1}(y_1)$	$\mathbf{4/72}$	$\mathbf{8/72}$	$\mathbf{8/72}$	$\mathbf{16/72}$	$\mathbf{12/72}$	$\mathbf{24/72}$	1

$$
\begin{aligned}
p_{Y_1}(y_1) &= 4/72 \quad , \quad y_1 = 4 \\
&= 8/72 \quad , \quad y_1 = 5,7 \\
&= 16/72 \quad , \quad y_1 = 8 \\
&= 12/72 \quad , \quad y_1 = 10 \\
&= 24/72 \quad , \quad y_1 = 11 \\
&= 0 \quad , \quad diğer\ y_1\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{Y_2}(y_2) &= \frac{6y_2}{72} \quad , \quad y_2 = 2,4,6 \\
&= 0 \quad , \quad diğer\ y_2\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

Örnek: X_1 ve X_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x_1,x_2) &= \frac{x_1+x_2}{39} \quad , \quad x_1 = 1,2,3 \;\; ve \; x_2 = 4,5 \\
&= 0 \quad , \quad diğer\; x_1 \; ve \; x_2 \; değerleri\; için
\end{aligned}
$$

$Y_1 = X_1 + 2X_2$ ve $Y_2 = (3X_1)^2$ kesikli raslantı değişkenleri tanımlansın. Buna göre,

a) Y_1 ve Y_2' nin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.
b) Y_1 ve Y_2' nin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

a) X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir ve iki tane çözüm takımı elde edilir.

$$
\begin{aligned}
& & & x_1 = h_{11}(y_1,y_2) = \frac{\sqrt{y_2}}{3} \\
& & \nearrow \; 1.\text{çözüm takımı:} & \\
& & & x_2 = h_{21}(y_1,y_2) = \frac{3y_1-\sqrt{y_2}}{6} \\
& y_1 = g_1(x_1,x_2) = x_1+2x_2 & & \\
& y_2 = g_2(x_1,x_2) = (3x_1)^2 & & \\
& & & x_1 = h_{12}(y_1,y_2) = -\frac{\sqrt{y_2}}{3} \\
& & \searrow \; 2.\text{çözüm takımı:} & \\
& & & x_2 = h_{22}(y_1,y_2) = \frac{3y_1+\sqrt{y_2}}{6}
\end{aligned}
$$

2. çözüm takımında X_1 kesikli raslantı değişkeni negatif değer almaktadır. X_1' in sadece pozitif değerler almasından dolayı, ikinci çözüm takımı kullanılmaz.

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin aldıkları değerlere göre, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin aldıkları değerler hesaplanır:

(x_1, x_2)	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,4)$	$(3,5)$
(y_1, y_2)	$(9,9)$	$(11,9)$	$(10,36)$	$(12,36)$	$(11,81)$	$(13,81)$

(Y_1, Y_2)' nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$p_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1X_2}\left(\frac{\sqrt{y_2}}{3}, \frac{3y_1 - \sqrt{y_2}}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{y_2}}{3} + \frac{3y_1 - \sqrt{y_2}}{6}}{39} = \frac{3y_1 + \sqrt{y_2}}{234}$$

$$\begin{aligned} p_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{3y_1 + \sqrt{y_2}}{234} \quad , \quad (y_1, y_2) \in \{(9,9), (11,9), (10,36), (12,36), (11,81), (13,81)\} \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ y_1\ ve\ y_2\ değerleri\ için \end{aligned}$$

b) Y_1 ve Y_2 kesikli raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulalım:

$Y_2 \setminus Y_1$	9	10	11	12	13	$p_{Y_2}(y_2)$
9	$30/234$		$36/234$			$\mathbf{66/234}$
36		$36/234$		$42/234$		$\mathbf{78/234}$
81			$42/234$		$48/234$	$\mathbf{90/234}$
$p_{Y_1}(y_1)$	$\mathbf{30/234}$	$\mathbf{36/234}$	$\mathbf{78/234}$	$\mathbf{42/234}$	$\mathbf{48/234}$	1

$$
\begin{aligned}
p_{Y_1}(y_1) &= 30/234 \quad , \quad y_1 = 9 \\
&= 36/234 \quad , \quad y_1 = 10 \\
&= 78/234 \quad , \quad y_1 = 11 \\
&= 42/234 \quad , \quad y_1 = 12 \\
&= 48/234 \quad , \quad y_1 = 13 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y_1 \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{Y_2}(y_2) &= 66/234 \quad , \quad y_2 = 9 \\
&= 78/234 \quad , \quad y_2 = 36 \\
&= 90/234 \quad , \quad y_2 = 81 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y_2 \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

Çok Boyutlu Sürekli Raslantı Değişkenleri için Dönüştürme

n boyutlu sürekli raslantı değişkeni $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)'$ in bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ olsun.

n boyutlu $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ sürekli raslantı değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem sistemi çözümlendiğinde $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sürekli raslantı değişkenleri için k $(i = 1,2, \cdots, k)$ tane çözüm takımı elde edilsin:

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{elde edilir.}]{\substack{Ters\ dönüşüm \\ foksiyonları}} \quad \begin{aligned} X_{1i} &= h_{1i}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \\ X_{2i} &= h_{2i}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \\ &\vdots \\ X_{ni} &= h_{ni}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \end{aligned} \quad , \qquad i = 1,2, \cdots, k$$

Ters dönüşüm fonksiyonlarının her birinin, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ sürekli raslantı değişkenlerine göre türevlenebilir olması gerekmektedir. Her bir çözüm takımı için aşağıda tanımlanan jakobiyen hesaplanır:

$$J_i = J_i\left(\frac{x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni}}{y_1, y_2, \cdots, y_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{1i}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{1i}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_{1i}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_{2i}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{2i}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_{2i}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{ni}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{ni}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_{ni}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$\forall\, i \in \{1,2,\cdots,k\}$ için, $J_i \neq 0'$ dir. Bu durumda, $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)'$ nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} f_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= \sum_{i=1}^{k} f_X(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni}) \times |\, J_i \,| \\ &= \sum_{i=1}^{k} f_X\big(h_{1i}(y_1, y_2, \cdots, y_n), h_{2i}(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, h_{ni}(y_1, y_2, \cdots, y_n)\big) \times |\, J_i \,| \end{aligned}$$

Örnek:

X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)'$ dir. $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = (X_2)^2$ sürekli raslantı değişkenleri tanımlansın. $f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)$ bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi gerekir. Bunun için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir.

$$\nearrow \; 1.\,\text{çözüm takımı:} \quad \begin{aligned} x_{11} &= h_{11}(y_1, y_2) = y_1 - \sqrt{y_2} \\ x_{21} &= h_{21}(y_1, y_2) = \sqrt{y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2) = (x_2)^2 \end{aligned}$$

$$\searrow \; 2.\,\text{çözüm takımı:} \quad \begin{aligned} x_{12} &= h_{12}(y_1, y_2) = y_1 + \sqrt{y_2} \\ x_{22} &= h_{22}(y_1, y_2) = -\sqrt{y_2} \end{aligned}$$

X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri için iki tane çözüm takımı elde edilmiştir. Her bir çözüm takımı için jakobiyen hesaplanır.

1. çözüm takımı için jakobiyeni hesaplayalım:

$$J_1 = J_1\left(\frac{x_{11}, x_{21}}{y_1, y_2}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{11}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_{11}}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_{21}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_{21}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x_{11}}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial x_{21}}{\partial y_2}\right) - \left(\frac{\partial x_{11}}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial x_{21}}{\partial y_1}\right)$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2\sqrt{y_2}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{y_2}} \end{vmatrix} = 1 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{y_2}}\right) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{y_2}}\right) \times 0 = \frac{1}{2\sqrt{y_2}}$$

2. çözüm takımı için jakobiyeni hesaplayalım:

$$J_2 = J_2\left(\frac{x_{12}, x_{22}}{y_1, y_2}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{12}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_{12}}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_{22}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_{22}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x_{11}}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial x_{21}}{\partial y_2}\right) - \left(\frac{\partial x_{11}}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial x_{21}}{\partial y_1}\right)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2\sqrt{y_2}} \\ 0 & -\dfrac{1}{2\sqrt{y_2}} \end{vmatrix} = 1 \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{y_2}}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{y_2}}\right) \times 0 = -\frac{1}{2\sqrt{y_2}}$$

Dolayısıyla, (Y_1, Y_2)' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= \sum_{i=1}^{2} f_X(x_{1i}, x_{2i}) \times |J_i| \\
&= f_X(x_{11}, x_{21}) \times |J_1| + f_X(x_{12}, x_{22}) \times |J_2| \\
&= f_X\left(y_1 - \sqrt{y_2}, \sqrt{y_2}\right) \times \left|\frac{1}{2\sqrt{y_2}}\right| + f_X\left(y_1 + \sqrt{y_2}, -\sqrt{y_2}\right) \times \left|-\frac{1}{2\sqrt{y_2}}\right|
\end{aligned}
$$

Örnek: X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \frac{x_1+x_2}{12} \quad , \quad 0 < x_1 < 2 \ , 1 < x_2 < 3 \\ &= \quad 0 \quad\quad , \quad diğer\ x_1\ ve\ x_2\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$Y_1 = 3X_1$ ve $Y_2 = X_1 - 4X_2$ sürekli raslantı değişkenleri tanımlansın. Buna göre,

a) Y_1 ve Y_2' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
b) Y_1' in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a) X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir ve bir tane çözüm takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1,x_2) = 3x_1 \\ y_2 &= g_2(x_1,x_2) = x_1 - 4x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= h_1(y_1,y_2) = \frac{y_1}{3} \\ x_2 &= h_2(y_1,y_2) = \frac{y_1 - 3y_2}{12} \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen çözüm takımı için jakobiyen hesaplanır:

$$J = J\left(\frac{x_1,x_2}{y_1,y_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{3}{12} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{12}\right) - 0 \times \left(\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{12}$$

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin tanım aralıklarına göre, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin tanım aralıkları hesaplanır:

$$0 < x_1 < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{y_1}{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < y_1 < 6$$

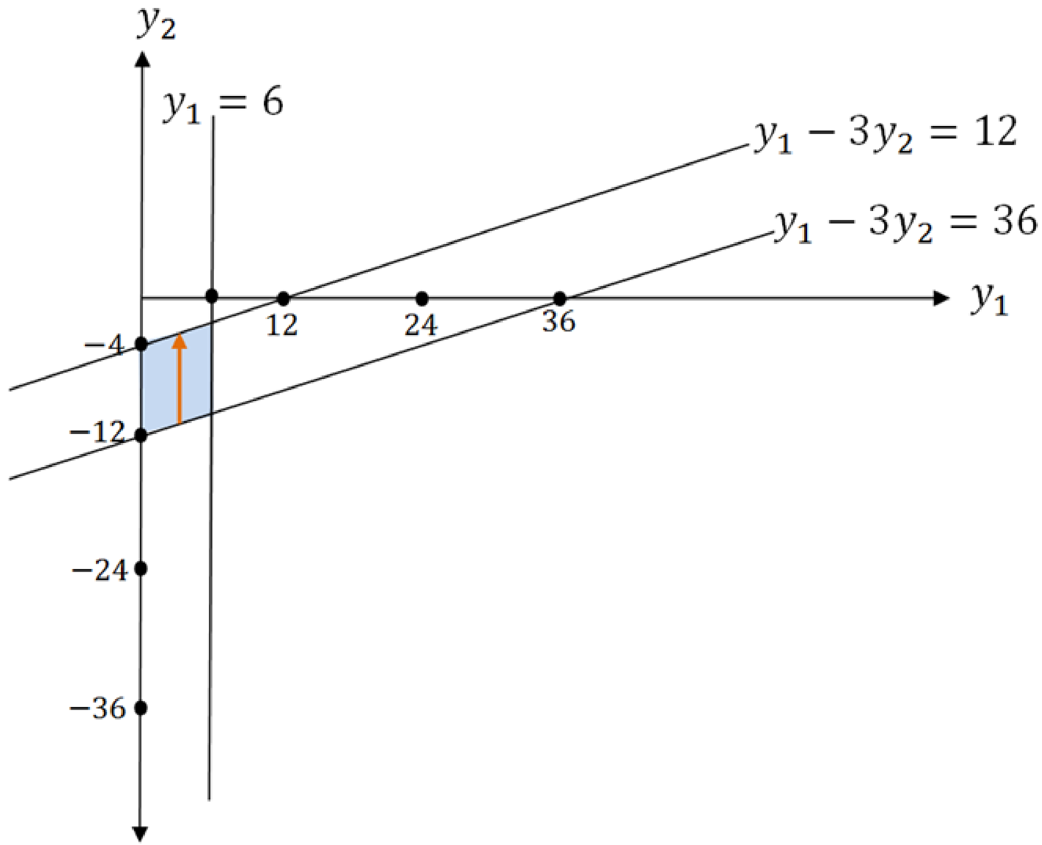
$$1 < x_2 < 3 \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{y_1 - 3y_2}{12} < 3 \quad \Rightarrow \quad 12 < y_1 - 3y_2 < 36$$

(Y_1, Y_2)' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1X_2}(x_1, x_2) \times |J| = f_{X_1X_2}\left(\frac{y_1}{3}, \frac{y_1 - 3y_2}{12}\right) \times \left|-\frac{1}{12}\right| \\ &= \frac{\frac{y_1}{3} + \frac{y_1 - 3y_2}{12}}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{5y_1 - 3y_2}{1728} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{5y_1 - 3y_2}{1728} \quad , \quad 0 < y_1 < 6 \, , \qquad 12 < y_1 - 3y_2 < 36 \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } y_1 \text{ ve } y_2 \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

b) Y_1' in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:



$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{R_{Y_2}} f(y_1, y_2) dy_2 = \int_{\frac{y_1-36}{3}}^{\frac{y_1-12}{3}} \left(\frac{5y_1 - 3y_2}{1728}\right) dy_2 \ , \qquad 0 < y_1 < 6$$

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1}(y_1) &= \int_{\frac{y_1-36}{3}}^{\frac{y_1-12}{3}} \left(\frac{5y_1-3y_2}{1728}\right) dy_2 \\
&= \frac{1}{1728}\left(5y_1y_2-\frac{3}{2}y_2{}^2\Big|_{\frac{y_1-36}{3}}^{\frac{y_1-12}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{1728}\left(5y_1\left(\frac{y_1-12}{3}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1-12}{3}\right)^2-5y_1\left(\frac{y_1-36}{3}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{y_1-36}{3}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{1728}\left(\left(\frac{5y_1{}^2-60y_1-5y_1{}^2+180y_1}{3}\right)-\frac{1}{6}\underbrace{[(y_1-12)^2-(y_1-36)^2]}_{\substack{\text{İki kare farkı özdeşliği} \\ a^2-b^2=(a+b)(a-b)}}\right) \\
&= \frac{1}{1728}\left(\left(\frac{120y_1}{3}\right)-\frac{1}{6}[\,(y_1-12+y_1-36)\,(y_1-12-y_1+36)\,]\right) \\
&= \frac{1}{1728}\left(40y_1-\frac{1}{6}[(2y_1-48)\times 24]\right) \\
&= \frac{1}{1728}\left(40y_1-4(2y_1-48)\right) \\
&= \frac{32y_1+192}{1728}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1}(y_1) \quad &= \quad \frac{32y_1 + 192}{1728} \quad , \quad 0 < y_1 < 6 \\
&= \quad 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \quad diğer\ y_1\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

Sağlama: $\int_0^6 f_{Y_1}(y_1)\, dy_1 = \int_0^6 \left(\frac{32y_1 + 192}{1728}\right) dy_1 = 1$ olmalıdır.

Örnek: X_1 ve X_2sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \frac{4x_1x_2}{3} \quad , \quad 1 < x_1 < 2\,, 0 < x_2 < 1 \\ &= \quad 0 \quad\quad , \quad diğer\ x_1\ ve\ x_2\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$Y_1 = X_1 - X_2$ ve $Y_2 = X_1 + X_2$ kesikli raslantı değişkenleri tanımlansın. Buna göre,

a) Y_1 ve Y_2' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
b) Y_2' nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a) X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir ve bir tane çözüm takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1,x_2) = x_1 - x_2 \\ y_2 &= g_2(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= h_1(y_1,y_2) = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ x_2 &= h_2(y_1,y_2) = \frac{y_2 - y_1}{2} \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen çözüm takımı için jakobiyen hesaplanır:

$$J = J\left(\frac{x_1,x_2}{y_1,y_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin tanım aralıklarına göre, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin tanım aralıkları hesaplanır:

$$1 < x_1 < 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{y_1 + y_2}{2} < 2 \quad \Longrightarrow \quad 2 < y_1 + y_2 < 4$$

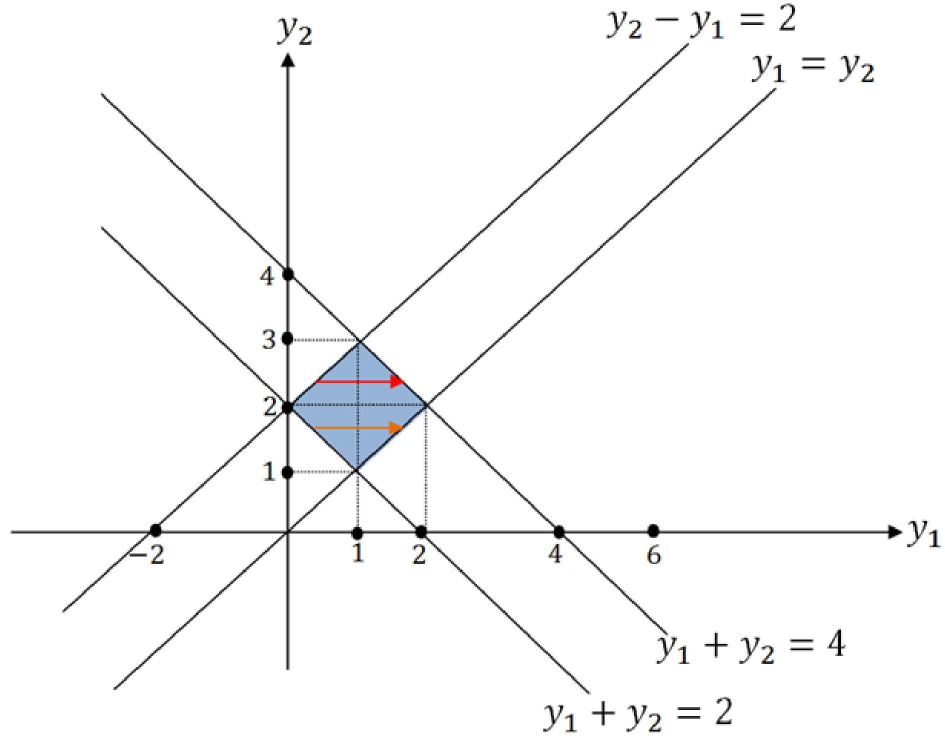
$$0 < x_2 < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{y_2 - y_1}{2} < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < y_2 - y_1 < 2$$

(Y_1, Y_2)' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1X_2}(x_1, x_2) \times |\, J \,| \\ &= f_{X_1X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right) \times \left|\frac{1}{2}\right| \\ &= \frac{4\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{{y_2}^2 - {y_1}^2}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{{y_2}^2 - {y_1}^2}{6} \quad , \quad 2 < y_1 + y_2 < 4\,, \qquad 0 < y_2 - y_1 < 2 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad , \quad \textit{diğer } y_1 \textit{ ve } y_2 \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

b) Y_2' in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:



$$
\begin{aligned}
f_{Y_2}(y_2) &= \int_{2-y_2}^{y_2} f(y_1, y_2)\,dy_1 \quad , \quad 1 < y_2 < 2 \\
&= \int_{y_2-2}^{4-y_2} f(y_1, y_2)\,dy_1 \quad , \quad 2 < y_2 < 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{2-y_2}^{y_2} f(y_1, y_2)\,dy_1 &= \int_{2-y_2}^{y_2} \left(\frac{{y_2}^2 - {y_1}^2}{6}\right) dy_1 \\
&= \frac{1}{6}\left({y_2}^2 y_1 - \frac{{y_1}^3}{3} \Big|_{2-y_2}^{y_2} \right) \\
&= \frac{1}{6}\left({y_2}^3 - \frac{{y_2}^3}{3} - {y_2}^2(2 - y_2) + \frac{(2 - y_2)^3}{3} \right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{3{y_2}^3 - {y_2}^3 - 6{y_2}^2 + 3{y_2}^3 + 8 - 12y_2 + 6{y_2}^2 - {y_2}^3}{3} \right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{4{y_2}^3 - 12y_2 + 8}{3} \right) \\
&= \frac{2{y_2}^3 - 6y_2 + 4}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{y_2-2}^{4-y_2} f(y_1,y_2)dy_1 &= \int_{y_2-2}^{4-y_2} \left(\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{6}\right)dy_1 \\
&= \frac{1}{6}\left({y_2}^2 y_1 - \frac{{y_1}^3}{3}\Bigg|_{y_2-2}^{4-y_2}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left({y_2}^2(4-y_2) - \frac{(4-y_2)^3}{3} - {y_2}^2(y_2-2) + \frac{(y_2-2)^3}{3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(6{y_2}^2 - 2{y_2}^3 + \frac{(y_2-2)^3-(4-y_2)^3}{3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{18{y_2}^2 - 6{y_2}^3 + ({y_2}^3 - 6{y_2}^2 + 12y_2 - 8) - (64 - 48y_2 + 12{y_2}^2 - {y_2}^3)}{3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{60y_2 - 4{y_2}^3 - 72}{3}\right) \\
&= \frac{30y_2 - 2{y_2}^3 - 36}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{Y_2}(y_2) &= \frac{2{y_2}^3 - 6y_2 + 4}{9} &&, \quad 1 < y_2 < 2 \\
&= \frac{30y_2 - 2{y_2}^3 - 36}{9} &&, \quad 2 < y_2 < 3 \\
&= 0 &&, \quad \textit{diğer } y_2 \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

Sağlama: $\displaystyle\int_{R_{Y_2}} f_{Y_2}(y_2)\, dy_2 = \int_1^2 \left(\frac{2{y_2}^3 - 6y_2 + 4}{9}\right) dy_2 + \int_2^3 \left(\frac{30y_2 - 2{y_2}^3 - 36}{9}\right) dy_2 = 1$ olmalıdır.

Örnek: X_1 ve X_2sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= 2 \quad , \quad 0 < x_1 < x_2 < 1 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x_1\ ve\ x_2\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$Y_1 = 3X_1 + X_2$ ve $Y_2 = 5X_2$ kesikli raslantı değişkenleri tanımlansın. Buna göre,

a) Y_1 ve Y_2' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
b) Y_1 ve Y_2' nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

a) X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri cinsinden elde edilmesi için aşağıdaki denklem sistemi çözümlenir ve bir tane çözüm takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1,x_2) = 3x_1 + x_2 \\ y_2 &= g_2(x_1,x_2) = 5x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= h_1(y_1,y_2) = \frac{5y_1 - y_2}{15} \\ x_2 &= h_2(y_1,y_2) = \frac{y_2}{5} \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen çözüm takımı için jakobiyen hesaplanır:

$$J = J\left(\frac{x_1,x_2}{y_1,y_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5}{15} & -\frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{15}\right) \times 0 = \frac{1}{15}$$

X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin tanım aralıklarına göre, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin tanım aralıkları hesaplanır:

$$0 < \frac{y_2}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < y_2 < 5$$

$$0 < x_1 < x_2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{5y_1 - y_2}{15} < \frac{y_2}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{5y_1 - y_2}{15} \quad \Rightarrow \quad y_2 < 5y_1$$

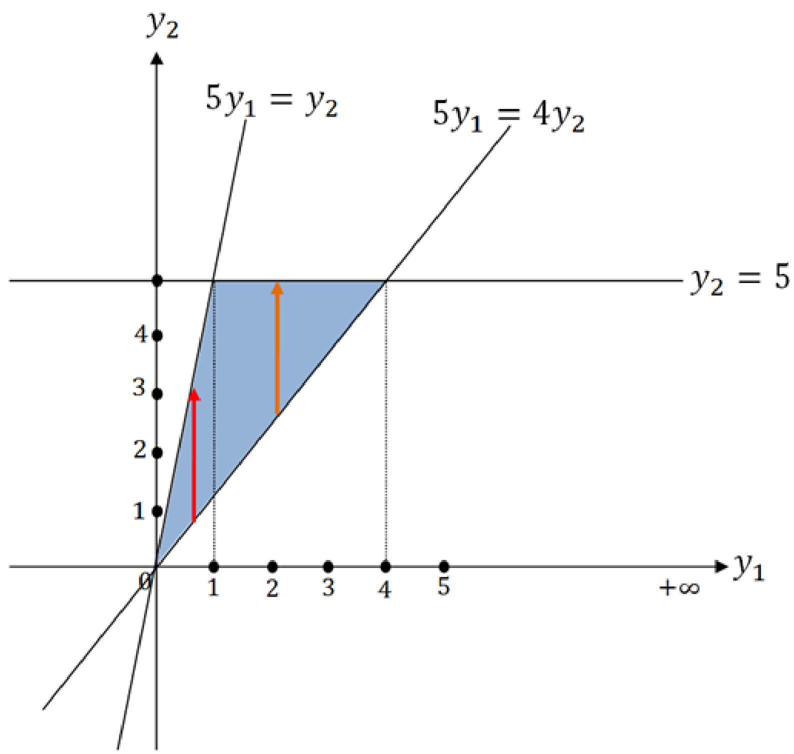
$$\frac{5y_1 - y_2}{15} < \frac{y_2}{5} \quad \Rightarrow \quad 5y_1 < 4y_2$$

(Y_1, Y_2)' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1X_2}(x_1, x_2) \times |J| = f_{X_1X_2}\left(\frac{5y_1 - y_2}{15}, \frac{y_2}{5}\right) \times \left|\frac{1}{15}\right| = 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{2}{15} \quad , \quad 5y_1 < 4y_2 \quad , y_2 < 5y_1 \quad , 0 < y_2 < 5 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ y_1\ ve\ y_2\ değerleri\ için \end{aligned}$$

b) Y_1' in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:



$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{5y_1/4}^{5y_1} f(y_1, y_2)dy_2 \quad , \quad 0 < y_1 < 1$$

$$= \int_{5y_1/4}^{5} f(y_1, y_2)dy_2 \quad , \quad 1 < y_1 < 4$$

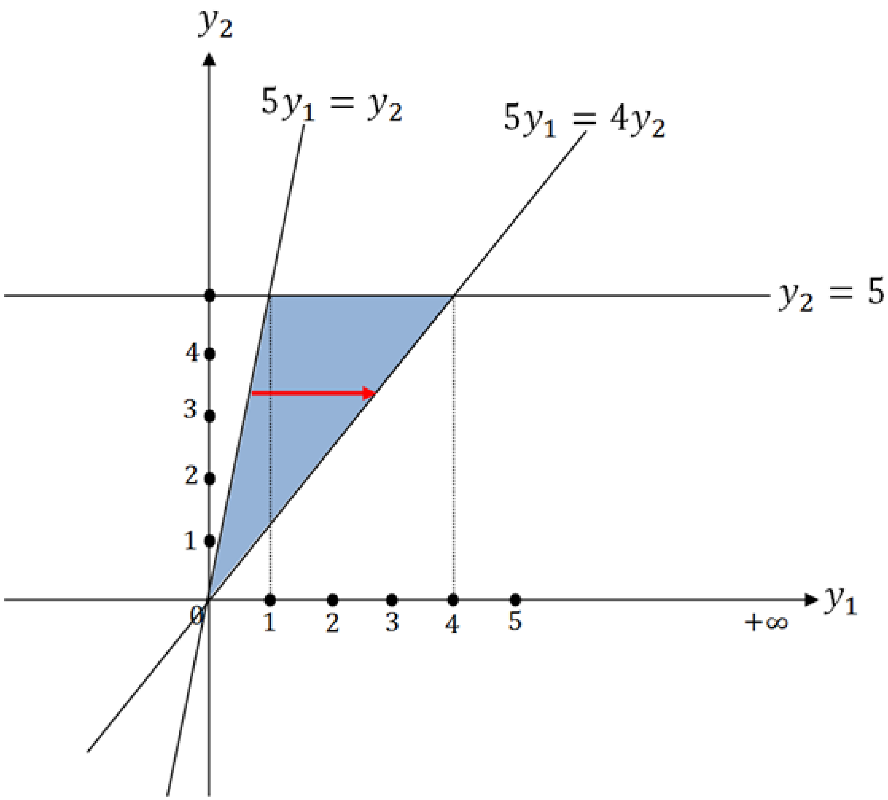
$$\int_{5y_1/4}^{5y_1} f(y_1, y_2)dy_2 = \int_{5y_1/4}^{5y_1} \frac{2}{15}dy_2 = \frac{2}{15}\left(y_2\Big|_{5y_1/4}^{5y_1}\right) = \frac{2}{15}\left(5y_1 - \frac{5y_1}{4}\right) = \frac{y_1}{2}$$

$$\int_{5y_1/4}^{5} f(y_1, y_2)dy_2 = \int_{5y_1/4}^{5} \frac{2}{15}dy_2 = \frac{2}{15}\left(y_2\Big|_{5y_1/4}^{5}\right) = \frac{2}{15}\left(5 - \frac{5y_1}{4}\right) = \frac{4 - y_1}{6}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \frac{y_1}{2} \quad , \quad 0 < y_1 < 1 \\ &= \frac{4 - y_1}{6} \quad , \quad 1 < y_1 < 4 \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } y_1 \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

Sağlama: $\int_{R_{Y_1}} f_{Y_1}(y_1)\, dy_1 = \int_0^1 \left(\frac{y_1}{2}\right) dy_1 + \int_1^4 \left(\frac{4 - y_1}{6}\right) dy_1 = 1$ olmalıdır.

Y_2' nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:



$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{y_2/5}^{4y_2/5} f(y_1, y_2)\,dy_1 \quad , \quad 0 < y_2 < 5$$

$$\int_{y_2/5}^{4y_2/5} f(y_1, y_2)dy_1 = \int_{y_2/5}^{4y_2/5} \frac{2}{15}dy_1 = \frac{2}{15}\left(y_1\Big|_{y_2/5}^{4y_2/5}\right) = \frac{2}{15}\left(\frac{4y_2}{5} - \frac{y_2}{5}\right) = \frac{2y_2}{25}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y_2) &= \frac{2y_2}{25} \quad , \quad 0 < y_2 < 5 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y_2 \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

Sağlama: $\int_{R_{Y_2}} f_{Y_2}(y_2)\, dy_2 = \int_0^5 \left(\frac{2y_2}{25}\right) dy_2 = 1$ olmalıdır.