Matrislerden elde edilen alt uzaylar

① Satır uzayı

A $m\times n$ boyutlu bir matris olsun. A'nın satırlarını n'li vektörler olarak ($\mathbb{R}^n$'in elemanları olarak) düşünelim. O zaman A matrisinin satırlarına karşılık gelen vektörlerin ürettiği uzaya A'nın satır uzayı denir. Bu uzayın boyutuna ise A'nın satır rankı denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ise

A'nın satır uzayını ve satır rankını bulunuz.

$$W = \langle (1,-1,2,0,-1), (2,-1,-2,0,1), (-1,0,4,0,2), (0,-1,6,0,-3) \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{işlemleri}]{\text{elementer satır}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W = \langle (1,0,-4,0,0), (0,1,-6,0,0), (0,0,0,0,1) \rangle$

$\Rightarrow$ $\underset{\text{satır uzayı}}{\text{boy } W}$ $= 3$'tür.

A'nın satır rankı $= 3$

② Sütun Uzayı

A $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. A'nın sütunlarını m'li vektörler olarak ($\mathbb{R}^m$'in elemanları olarak) düşünelim. O zaman A matrisinin sütunlarına karşılık gelen vektörlerin ürettiği uzaya A'nın sütun uzayı denir. Bu uzayın boyutuna ise A'nın sütun rankı denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin sütun rankı kaçtır?

$$W = \langle (1,-1,1,0,1),\ (2,1,-1,1,1),\ (0,3,-3,1,1),\ (1,0,1,0,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Alıştırma}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_4 \to R_4]{R_1+R_2 \to R_2,\ -R_1+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$

$-1/3\, R_2 \to R_2$

$-3R_2 + R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$-R_2 + R_4 \to R_4$

$R_2 + R_5 \to R_5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \{ (1,-1,1,0,1),\ (2,1,-1,1,1),\ (0,3,-3,1,1),\ (1,0,1,0,1) \}$$

$\text{boy}\, W = \text{sütun rankı} = 4$ dür.

Teorem: A $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. A'nın satır rankı sütun rankına eşittir.

Tanım: Bir matrisin lineer bağımsız satır veya sütun sayısına o matrisin rankı denir.

Not: Bir matrisin rankı, satır (sütun) rankına eşittir ve $\text{rank}(A)$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 8 & 4 & 12 & 19 \end{bmatrix}$ matrisinin

satır uzayını, sütun uzayını ve rankını bulunuz.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 8 & 4 & 12 & 19 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Satır uzayı $= \langle (-1,1,3,1,4,5),(0,-3,-5,-3,-8,-14) \rangle$

sütun uzayı $= \langle (-1,2,-1),(1,1,4) \rangle$

satır rankı = sütun rankı $= 2$ //

$\text{rank}(A) = 2$ //

③ Çözüm uzayı

A $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. $AX=0$ homojen denklem sisteminin çözüm kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzaya A matrisinin çözüm uzayı denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin çözüm uzayı nedir?

$$AX = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Alıştırma}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$-x_3 + x_4 = 0 \qquad \Rightarrow x_3 = x_4 = k \qquad , k \in \mathbb{R}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -x_2$$
$$x_2 = t, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -t$$

$$\text{Ç.U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = -x_2, \quad x_3 = x_4 \}$$

$$= \{ (-t, t, k, k) \mid t, k \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ t(-1, 1, 0, 0) + k(0, 0, 1, 1) \mid t, k \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$