HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

huzem

FEN FAKÜLTESİ
MAT 122 MATEMATİK II

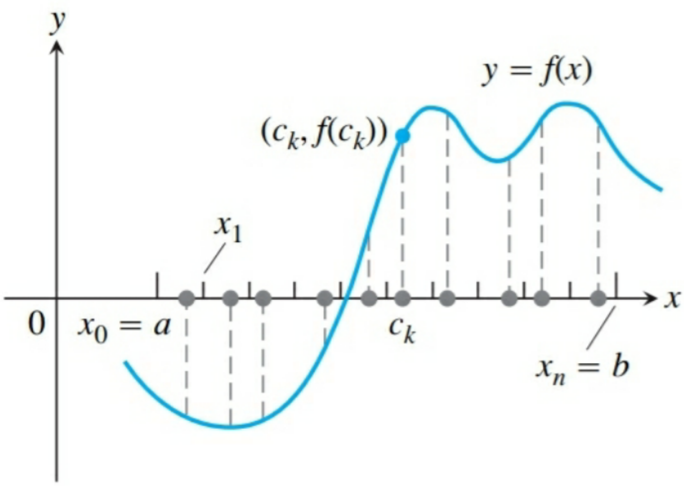
Ders Sorumluları: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk

Kaynak: Thomas Calculus

Sürekli bir fonksiyonun ortalama değeri :

n tane sayının aritmatik ortalaması bu sayıların toplamının n'e bölünmesinden elde edilir.

$[a,b]$ aralığında sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun ortalama değerini nasıl hesaplayacağız ?



$[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli $f(x)$ fonksiyonu sonsuz çoklukta değer alabilir, bu değerlerin bazılarını seçelim :

$[a,b]$ aralığını genişlikleri eşit ve $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ olan n tane alt aralığa bölelim ve $f(x)$'in her bir alt aralıktaki bir c_k noktasında hesaplayalım; bu n tane değerin ortalaması şöyledir :

$$\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

$$= \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x$$

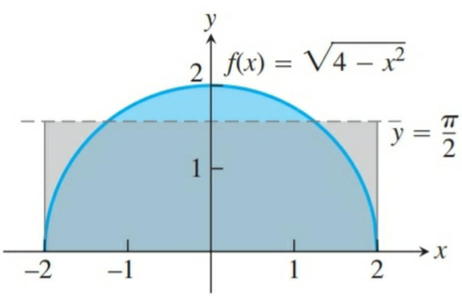
Ortalama, f'in $[a,b]$ üzerindeki bir Riemann toplamının $b-a$'ya bölünmesi ile elde edilir.
Eğer örneklerin sayısını artırır ve bölüntü normunu sıfıra götürürsek aşağıdaki tanımı elde ederiz.

Tanım: Eğer f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise $[a,b]$ üzerindeki ortalama değeri şöyledir:

$$\text{ORT}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Örnek. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun $[-2,2]$ üzerinde ortalama değerini hesaplayınız.

Çözüm:



$$\text{ort}(f) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \text{Alan}/4$$

$$\text{Alan} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\, 2^2 = 2\pi$$

$$\text{ort}(f) = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

1.4 KALKÜLÜSÜN TEMEL TEOREMİ

TEOREM (Belirli İntegraller için ortalama değer teoremi)

Eğer f, $[a,b]$ aralığında sürekli ise $[a,b]$ aralığında bir c noktasında aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

İspat. 6. Kuraldan aşağıdaki eşitsizliği biliyoruz:

$$\min f\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \text{maks}\, f\,(b-a)$$

Eşitsizliğin her tarafını $b-a$'ya bölelim;

$$\min f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \text{maks}\, f$$

olur.

f sürekli olduğundan, Ara Değer Teoreminden f'nin minimum değeri ve maksimum değeri arasındaki her değeri aldığını biliyoruz.

O zaman f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında bir c noktasında $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ değerini alır.

Böylece $c \in [a,b]$ için

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ elde edilir.

Örnek. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

ise, $[a,b]$ aralığında en az bir kere $f(x)=0$ olacağını gösteriniz.

Çözüm. $[a,b]$ aralığında f'nin ortalama değerine bakalım:

$$ort(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0$$

Ortalama değer teoremine göre bu değeri bir $c \in [a,b]$ noktasında alır.

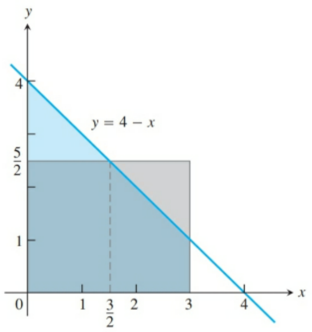
Örnek. $f(x) = 4-x$ fonksiyonunun $[0,3]$ aralığındaki ortalama değerini ve bu değeri hangi noktada aldığını bulunuz.

Çözüm.

$$ort(f) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 (4-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 4\,dx - \frac{1}{3}\int_0^3 x\,dx = \frac{1}{3}(3-0)\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(3^2-0^2)$$

$$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$



$$ort(f) = \frac{5}{2} \quad , \quad f(c) = \frac{5}{2}$$

$$4 - c = \frac{5}{2} \quad , \quad c = \frac{3}{2}$$

Ortalama değer $c = \frac{3}{2}$'de alınır.

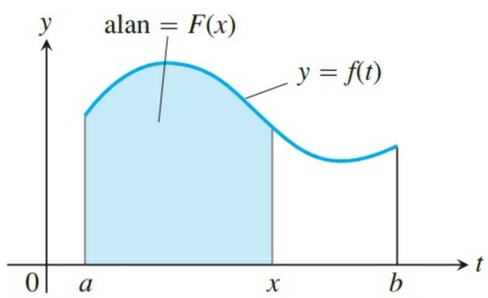
TEOREM (Kalkülüs'ün Temel Teoremi 1. kısım)

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise bu durumda

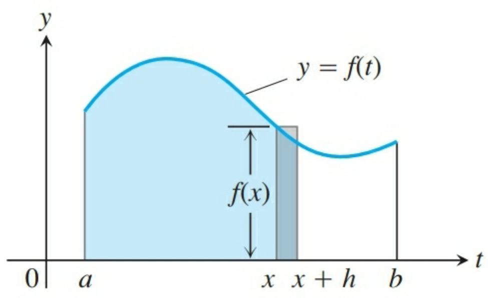
$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$, $[a,b]$ üzerinde süreklidir, (a,b)'de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$'tir.

$$\boxed{F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$$

İspat.



$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Belirli integraller için ortalama değer teoreminden son ifadede limit almadan önceki değer,

x ile $x+h$ arasındaki aralıkta f'nin aldığı değerlerden biridir. Yani $c \in (x, x+h)$ için

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$h \to 0$ iken $x+h$ x'e yaklaşır ve c'de x'e yaklaşır. f fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan $f(c)$'de $f(x)$'e yaklaşır,

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

O zaman

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c)$$

$$= f(x)$$

TEOREM (Calculus'un Temel Teoremi, 2. kısım)

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli ve F de f'nin $[a,b]$ aralığında herhangi bir ters türevi ise

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

olur.

İspat.

Temel teoremin 1. kısmı, f'nin

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

gibi bir ters türevi olduğunu söyler.

Dolayısıyla F, f'nin herhangi bir ters türevi ise bir C sabiti ve $a<x<b$ için $F(x) = G(x) + C$

O zaman

$$F(b)-F(a) = (G(b)+C) - (G(a)+C) = G(b) - G(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - 0$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

NOT. f'nin $[a,b]$ üzerindeki belirli integralini hesaplamak için

1. f'nin bir F ters türevini bulunuz.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$'yı hesaplayınız.

Örnek. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\,dt$ b. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

c. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^5 3t\sin t\,dt$ d. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2} \cos t\,dt$

Çözüm. a. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\,dt = \cos x$

b. $$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2}$$

c. $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^5 3t\sin t\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t\sin t\,dt\right)$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t\sin t\,dt$$

$$= -3x\sin x$$

d. $$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \cos t\,dt = ?$$

$$y = \int_1^{x^2} \cos t\,dt, \qquad x^2 = u \quad \text{dersek}$$

$$y = \int_1^u \cos t\,dt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos u)\cdot 2x = 2x\cos x^2$$

Örnek. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$ b. $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x \, dx$

c. $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$

Çözüm.

a. $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

b. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sec x \tan x \, dx = \sec x \Big|_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$

c. $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx = x^{3/2} + \frac{4}{x} \Big|_1^4$

$= \left(4^{3/2} + \frac{4}{4} \right) - \left(1 + 4 \right)$

$= 9 - 5 = 4$

Toplam Alan'ın bulunması

Riemann toplamları, $f(c_k)$ pozitif iken bir dikdörtgenin alanını veren $f(c_k)\Delta x_k$ gibi terimler içerirler.

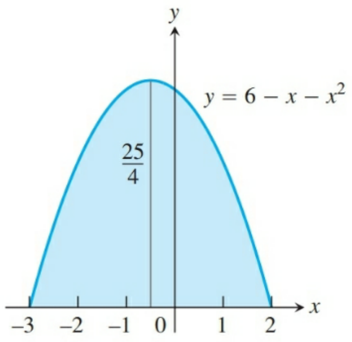
$f(c_k)$ negatif olduğunda $f(c_k)\Delta x_k$ çarpımı dikdörtgen alanının negatif işaretlisidir.

Negatif bir fonksiyon için böyle terimleri toplarsak eğri ile x-ekseni arasındaki alanının negatifini elde ederiz.

Sonra, mutlak değer alırsak gerçek alanın değerini buluruz.

Örnek. x ekseni ve $y=6-x-x^2$ parabolü ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.



$$y = 6-x-x^2 = (3+x).(2-x)$$

$$y=0 \Rightarrow x=-3, \quad x=2$$

Eğrinin x-eksenini kestiği noktalar $x=-3$ ve $x=2$'dir, $f(x)=6-x-x^2$ fonksiyonu $[-3,2]$ aralığı üzerinde negatif olamaz. O zaman

$$A = \int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{2} (6-x-x^2)\,dx$$

$$= 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^{2}$$

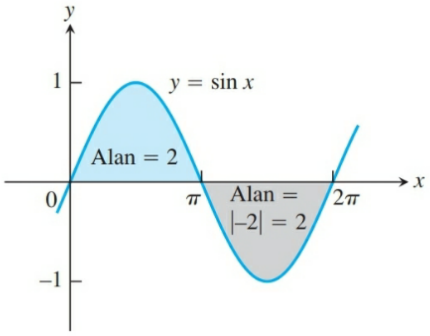
$$= \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = \frac{125}{6}$$

Örnek. $f(x) = \sin x$ ve $0 \leq x \leq 2\pi$ olmak üzere

a. $f(x)$'in $[0, 2\pi]$ üzerindeki belirli integralini hesaplayınız.

b. $[0, 2\pi]$ üzerinde $f(x)$'in grafiği ve x- ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.



a. $$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi}$$

$$= -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0$$

b. $$\text{Alan} = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right|$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) + \left| -(\cos 2\pi - \cos \pi) \right|$$

$$= -(-1-1) + \left| -(1-(-1)) \right|$$

$$= 2 + 2 = 4$$

ÖZET.

$[a,b]$ aralığı üzerinde $y=f(x)$'in grafiği ile x-ekseni arasındaki alanı bulmak için

1. $[a,b]$ aralığında $f(x)$'in negatif ve pozitif olduğu alt aralıkları belirleyiniz.

2. Her bir alt aralıkta integral alınız.

3. Integrallerin mutlak değerlerini toplayınız.

Örnek. x-ekseni ile $f(x)=x^3-x^2-2x$, $-1\le x\le 2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.

Eğrinin x-eksenini kestiği noktaları bulalım:

$$f(x)=x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2) = x(x-2)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=0, \quad x=2, \quad x=-1$$

$[-1,0]$ alt aralığında $f(x)\geq 0$

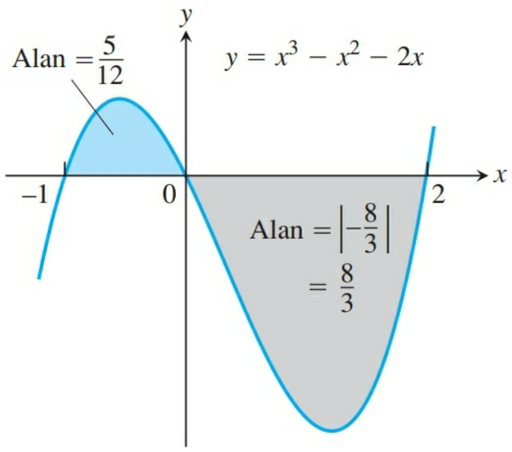
$[0,2]$ alt aralığında $f(x)\leq 0$

O zaman

$$A = \int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx + \left|\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx\right|$$

$$= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{-1}^{0} + \left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right|$$

$$= \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$



1.5 BELİRSİZ İNTEGRALLER VE DÖNÜŞÜM KURALI

u, x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve $n \neq -1$ bir rasyonel sayı olmak üzere, zincir kuralından

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}$$ olduğunu biliyoruz.

buradan

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$ elde edilir.

Bu eşitliği aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\boxed{\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C}$$

Örnek. $\int \sqrt{1+y^2}\; 2y\, dy$ belirsiz integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$u = 1+y^2 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 2y$$

$$\int \sqrt{1+y^2}\; 2y\, dy = \int \sqrt{u} \left(\frac{du}{dy}\right) dy = \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} (1+y^2)^{3/2} + C$$

Örnek. $\int \sqrt{4t-1}\; dt$ belirsiz integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$4t-1 = u \Rightarrow 4dt = du$$

$$\int \sqrt{4t-1}\; dt = \int \sqrt{u}\, \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{6} u^{3/2} + C = \frac{1}{6} (4t-1)^{3/2} + C$$

Değişken Dönüşüm Kuralı

$u = g(x)$ değer kümesi bir I aralığı olan türevlenebilir bir fonksiyon ise ve f I üzerinde sürekli ise

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du}$$

olur.

Örnek. $\int \cos(7\theta + 5)\, d\theta = ?$

Çözüm. $u = 7\theta + 5$, $\quad du = 7\, d\theta$, $\quad \frac{1}{7} du = d\theta$

$$\int \cos(7\theta+5)\, d\theta = \int \cos u \, \frac{1}{7} du = \frac{1}{7} \int \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{7} \sin u + C = \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C$$

Örnek. $\int x^2 \sin(x^3)\, dx = ?$

Çözüm. $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$

$$I = \int x^2 \sin(x^3)\, dx = \int \frac{1}{3} \sin u \, du = \frac{1}{3} \int \sin u \, du$$

$$= -\frac{1}{3} \cos u + C$$

$$= -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C$$

örnek. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx = ?$

Çözüm. $I = \displaystyle\int \sec^2 2x\,dx$, $\quad 2x = u$, $\quad 2dx = du$

$$I = \int \frac{1}{2}\sec^2 u\,du = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan(2x) + C$$

örnek. $\displaystyle\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = ?$

Çözüm. $z^2+1 = u$, $\quad du = 2z\,dz$

$$I = \int \frac{du}{u^{1/3}} = \int u^{-1/3}\,du = \frac{u^{2/3}}{2/3} + C$$

$$= \frac{3}{2}u^{2/3} + C = \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C$$

II. çözüm yolu:

$u = \sqrt[3]{z^2+1} \Rightarrow u^3 = z^2+1$, $\quad 3u^2\,du = 2z\,dz$

$$I = \int \frac{3u^2}{u}\,du = 3\int u\,du = \frac{3u^2}{2} + C$$

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{3/2} + C$$

örnek. $\int \sin^2 x \, dx = ?$, $\int \cos^2 x \, dx = ?$

Çözüm.

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (1-\cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

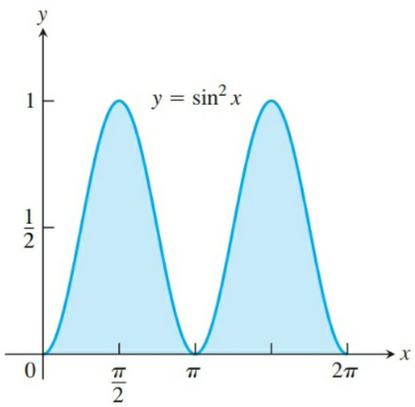
$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

örnek.



$f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiği yanda verilmiştir.

a. $\int_0^{2\pi} g(x) \, dx = ?$

b. $[0, 2\pi]$ aralığında fonksiyonun grafiği ile x-ekseni arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm.

a. $$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4} \right)$$

$$= (\pi - 0) - (0 - 0) = \pi$$

b. $\sin^2 x$ fonksiyonu negatif olmadığından

$$\text{Alan} = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \quad \text{olur.}$$

1.6. DEĞİŞKEN DÖNÜŞÜMÜ VE EĞRİLER ARASINDAKİ ALANLAR

TEOREM.

g', $[a,b]$ aralığında sürekli ise ve f, g'nin değer kümesinde sürekli ise

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du \quad , \quad u = g(x)$$

olur.

Örnek. $\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = ?$

Çözüm. $x^3+1 = u \Rightarrow 3x^2\, dx = du$

$x=-1 \Rightarrow u=0$

$x=1 \Rightarrow u=2$

$$I = \int_0^2 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 0^{3/2}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Örnek. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \cdot \csc^2\theta\, d\theta = ?$

$u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta\, d\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$

$I = \int_1^0 u \cdot (-du)$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$$= \int_0^1 u\, du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$