Özdeğerler ve Özvektörler

Tanım: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bir matris ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$Ax = \lambda x$$

olacak şekilde $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ var ise λ'ya A'nın

özdeğeri (karakteristik değer) denir. Buradaki x vektörüne

ise A'nın özvektörü (karakteristik vektör) denir.

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0 \Rightarrow Ax - \lambda x = 0, \quad x \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda x - Ax = 0 \\ (\lambda I - A)x = 0, \; x \neq 0 \\ \quad \Downarrow \\ \lambda I - A \text{ tersinir değil} \\ |\lambda I - A| = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\overset{n\times n}{A} - \lambda \cdot \overset{n\times n}{I})}_{\text{matris}} x = 0, \quad \underbrace{x \neq 0}$$

homojen denklem sistemi ve aşikar olmayan çözüm var

$$\Rightarrow A - \lambda I \text{ tersinir değil}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I|$$
$$= \underbrace{|\lambda I - A|}_{p_A(\lambda)} = 0 \text{ olur.}$$

O zaman özdeğerler, A'nın karakteristik polinomunun kökleridir. Eğer karakteristik polinomun reel kökü yoksa ise A'nın özdeğeri yoktur denir.

Örnek: ① $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2+1$ ve $p_A(x)$'in reel kökü yoktur. O halde A matrisinin reel özdeğeri yoktur.

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$\lambda = 1$ A'nın tek özdeğeridir.

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ olsun.

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} \\ \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ -4 & 4 & x-5 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & -1 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & x-5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & x \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\left(\underbrace{x.(x-5)+4}_{x^2-5x+4}\right) + 2.\left(\overbrace{5-x-4}^{(-1).(x-1)}\right) + \left(\underbrace{-4+4x}_{4.(x-1)}\right)$$

$$= (x-1).\left[(x^2-5x+4)+(-2)+4\right]$$

$$= (x-1).\left[x^2-5x+\underset{-2\ \ -3}{6}\right]$$

$$= (x-1).(x-2)(x-3) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$, $\lambda = 2$ ve $\lambda = 3$ A'nın özdeğerleridir.

Şimdi A'nın özvektörlerini bulalım.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda X - AX = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)X = 0$$

ya da $(A - \lambda I)X = 0$ sisteminin çözümleri A'nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir.

$\lambda_1 = 1$ için

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \text{ dır}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{x_3}{2} &= 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= -x_3/2 \\ x_2 &= x_3/2 \end{aligned}$$

O halde $x_3 = 2k$ ise $x_1 = -k$, $x_2 = k$, $k \in \mathbb{R}$

olarak bulunur

Yani $\begin{bmatrix} -k \\ k \\ 2k \end{bmatrix} = k \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$ $\lambda_1 = 1$'e karşılık gelen özvektörlerdir.

Yani $W_{\lambda_1} = W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ özvektörler kümesidir.

$\lambda_2 = 2$ için

$$(2I - A)X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ise $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k \\ k \\ 4k \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$W_{\lambda_2} = W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$ alt uzay $\lambda_2 = 2$'nin özvektörleridir.

Son olarak $\lambda_3 = 3$ için

$$(3I - A)X = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ise

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ k \\ 4k \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ olup

$W_{\lambda_3} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$ alt uzayı nın elemanları $\lambda_3 = 3$'ün özvektörleridir.

$W_{\lambda_3} \leq \mathbb{R}^3$
alt uzayı