HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

BİLEŞİK DAĞILIMLAR
Bölüm 3

DERS SORUMLULARI
DOÇ. DR. AYTEN YİĞİTER
DR. ÖĞR. ÜYESİ CEREN EDA CAN

Şu ana kadar tek boyutlu raslantı değişkenlerinin olasılık dağılımları incelendi. Gerçek hayat uygulamalarında karşılaşılan sorunların çoğunda ise birden çok değişken vardır. Yapılan rasgele bir deney sonucunda birden çok raslantı değişkeni tanımlanabilir ve aynı örneklem uzayında tanımlanan bu raslantı değişkenleri ile eşanlı olarak ilgilenebilinir.

Örnekler:

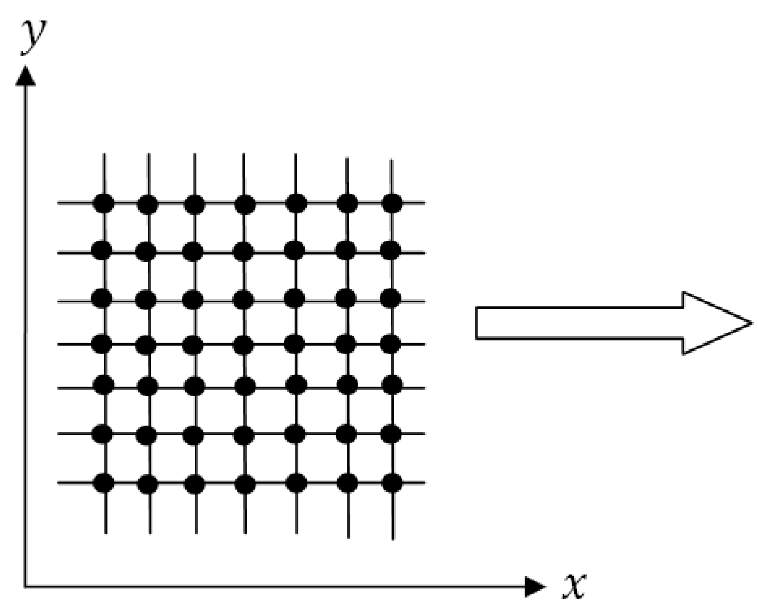
- Av sezonunda avlanan sazan balıklarının boyları, yaşları ve ağırlıkları
- Bir çiftlikte yetiştirilen ineklerin ağırlıkları, verdikleri günlük süt miktarı, tükettikleri günlük yem miktarı ve bir yıl içerisinde doğurdukları yavru sayısı
- Bir fabrikada üretilen belli bir seriye ait çamaşır makinesinin ömrü, bir saatte tükettiği enerji miktarı, bir yıkamada kullandığı su miktarı ve iç hacmi

$X_1, X_2, \cdots, X_k$ raslantı değişkenleri birlikte inceleniyor ise $(X_1, X_2, \cdots, X_k)'$ ya **k boyutlu raslantı değişkeni** denir.

İki boyutlu raslantı değişkenini ele alalım:

Kesikli Durum:

X ve Y raslantı değişkenlerinin her ikisinin de olası değerleri sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta ise (X, Y) **iki boyutlu kesikli raslantı değişkenidir**.

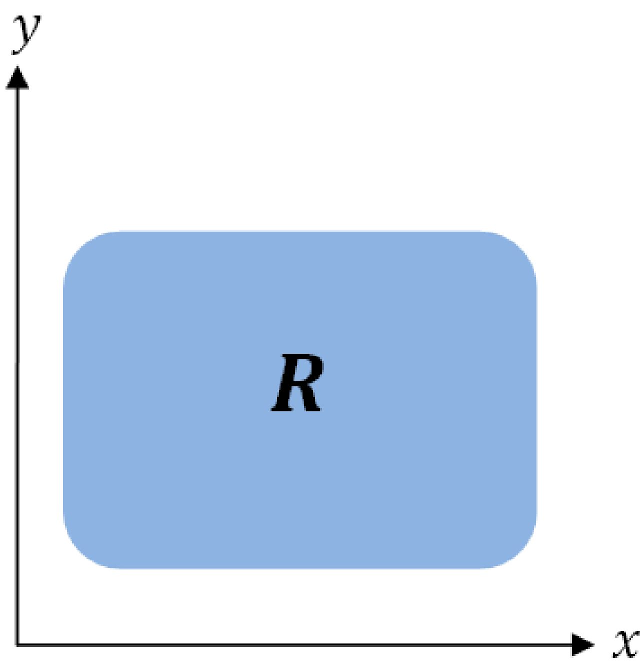


Grid düzlemde yer alan her bir nokta (x_i, y_j) , $i = 1,2, \cdots, n$; $j = 1,2, \cdots, m$ ikilisini verir.

$(X, Y)'$ nin Tanım Kümesi

Sürekli Durum:

X ve Y raslantı değişkenleri, Öklid düzleminde tanımlı bir bölgedeki (R) tüm değerleri alıyor ise (X, Y) **iki boyutlu sürekli raslantı değişkenidir**.



(X, Y)' nin Tanım Aralığı

BİLEŞİK OLASILIK FONKSİYONU

(X, Y), iki boyutlu kesikli bir raslantı değişkeni olsun.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ fonksiyonuna X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu denir:

1) $0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1 \quad , \ \forall x_i \in R_X \ \ ve \ \forall y_j \in R_Y \ \ için$

2) $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1\,'dir.$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenleri için aşağıdaki bileşik fonksiyon tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= axy \quad , \quad x = 1,2,3,4 \;\; ve \; y = 1,2,3 \\ &= 0 \quad\quad , \quad diğer\; x\; ve\; y\; değerleri\; için \end{aligned}$$

$p(x,y)$ bileşik fonksiyonunun X ve Y' nin bileşik olasılık fonksiyonu olması için a sabitini bulunuz.

Çözüm:

$$\sum_{R_X}\sum_{R_Y} p(x,y) = 1'\, dir.$$

$$\begin{aligned} \sum_{R_X}\sum_{R_Y} p(x,y) &= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3} axy = a\sum_{x=1}^{4} x(1+2+3) = 6a\sum_{x=1}^{4} x \\ &= 6a\,(1+2+3+4) = 60a \end{aligned}$$

$$60a = 1 \;\rightarrow a = \frac{1}{60} \;\; olarak\; bulunur.$$

BİLEŞİK OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU

(X, Y), Öklid düzleminin belirli bir R_{XY} bölgesinde ki tüm değerleri alan, iki boyutlu sürekli bir raslantı değişkeni olsun.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonuna X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu denir:

1) $f(x, y) \geq 0 \quad , \ \forall (x, y) \in R_{XY} \ için$

2) $\iint_{R_{XY}} f(x, y) dx dy = 1\,'dir.$

$f(x, y)$ denklemiyle verilen yüzey ile R_{XY} bölgesinin arasında kalan hacmin bire eşit olduğunu belirtir.

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenleri için aşağıdaki bileşik fonksiyon tanımlanmıştır:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= k(x^2 - y) \quad , \quad 1 < x < 3\,, 0 < y < 1 \\
&= \quad 0 \quad\quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ ve } y \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

$f(x,y)$ bileşik fonksiyonunun X ve Y' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için k sabitini bulunuz.

Çözüm:

$$\int_1^3 \int_0^1 f(x,y)\, dydx = 1'\, dir.$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \int_0^1 f(x,y)\, dydx &= \int_1^3 \int_0^1 k(x^2 - y)\, dydx &&= k \int_1^3 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) dx \\
&= k \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) dx &&= k \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} \Big|_1^3 \right) \\
&= k \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) &&= k \frac{23}{3}
\end{aligned}
$$

$$k \frac{23}{3} = 1 \rightarrow k = \frac{3}{23} \;\; \textit{olarak bulunur.}$$

BİLEŞİK DAĞILIM FONKSİYONU

(X,Y); iki boyutlu bir raslantı değişkeni olsun. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$' dir.

$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$: İki boyutlu kesikli raslantı değişkeni:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{t=-\infty}^{x} \sum_{z=-\infty}^{y} p(t,z)$$

$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$: İki boyutlu sürekli raslantı değişkeni:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,z)\, dz\, dt$$

Bileşik Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

1) $\forall (x, y) \in R_{XY}$ için, $0 \le F(x, y) \le 1$' dir.
2) $F(x, y)$, sağdan sürekli bir fonksiyondur.
3) $F(x, y)$, monoton artan bir fonksiyondur.
4) $(-\infty)$ ve $(+\infty)$ ifadeleri raslantı değişkenlerinin sırasıyla alt sınırını ve üst sınırını göstermek üzere,

$$\begin{aligned} F(+\infty, +\infty) &= 1 \quad , \quad & F(-\infty, -\infty) &= 0 \\ F(-\infty, y) &= 0 \quad , \quad & F(x, -\infty) &= 0 \end{aligned}$$

olmaktadır.

5) İki boyutlu **sürekli** bir raslantı değişkeninin bileşik dağılım fonksiyonu aşağıdaki üç özelliğe sahiptir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F(x, y) &= f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) &= \int_{-\infty}^{y} f(x, z)\, dz \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) &= \int_{-\infty}^{x} f(t, y)\, dt \end{aligned}$$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{xy}{60} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \;\; ve \;\; y = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $F(x,y)$ bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b) $P(X \leq 3, Y < 2)$, $P(X < 2, Y > 1)$ ve $P(X \geq 3, Y \geq 2)$ olasılıklarını bulunuz.

Çözüm:

a) $F(x,y)$ bileşik dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sum_{t=1}^{x}\sum_{z=1}^{y}\frac{tz}{60} = \sum_{t=1}^{x}\frac{t}{60}\left(\sum_{z=1}^{y} z\right) = \sum_{t=1}^{x}\frac{t}{60}\left(\frac{y(y+1)}{2}\right) \\ &= \frac{y(y+1)}{120}\sum_{t=1}^{x} t = \frac{y(y+1)}{120}\times\frac{x(x+1)}{2} = \frac{xy(x+1)(y+1)}{240} \end{aligned}$$

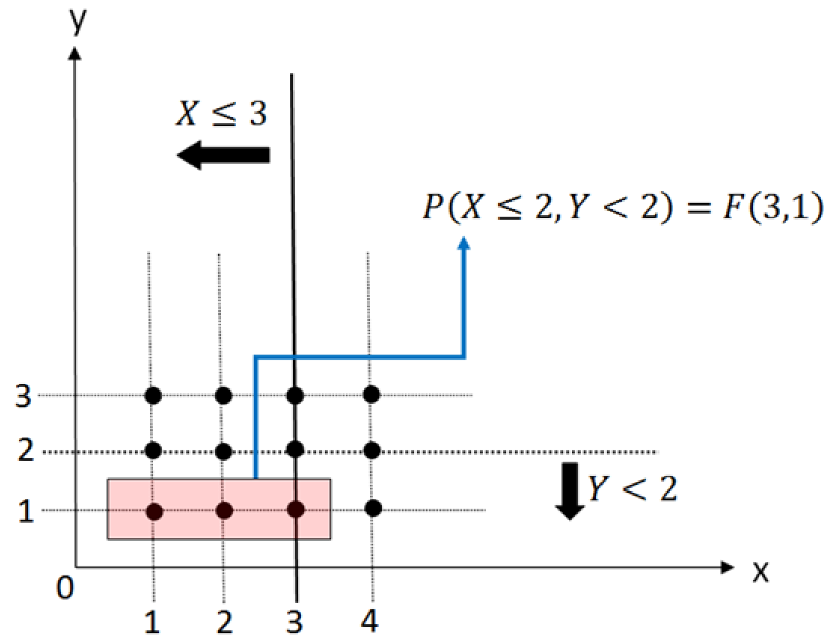
$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{xy(x+1)(y+1)}{240} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \;\; ve \;\; y = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad x \leq 0 \;\; , y \leq 0 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 4 \;\; , y \geq 3 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(4,3) = 1$ olmalıdır.

b) Olasılıkları sırayla hesaplayalım:

Birinci Yol (Bileşik dağılım fonksiyonundan):

$$P(X \leq 3, Y < 2) = F(3{,}1) = \frac{3(3+1)(1+1)}{240} = \frac{1}{10}$$

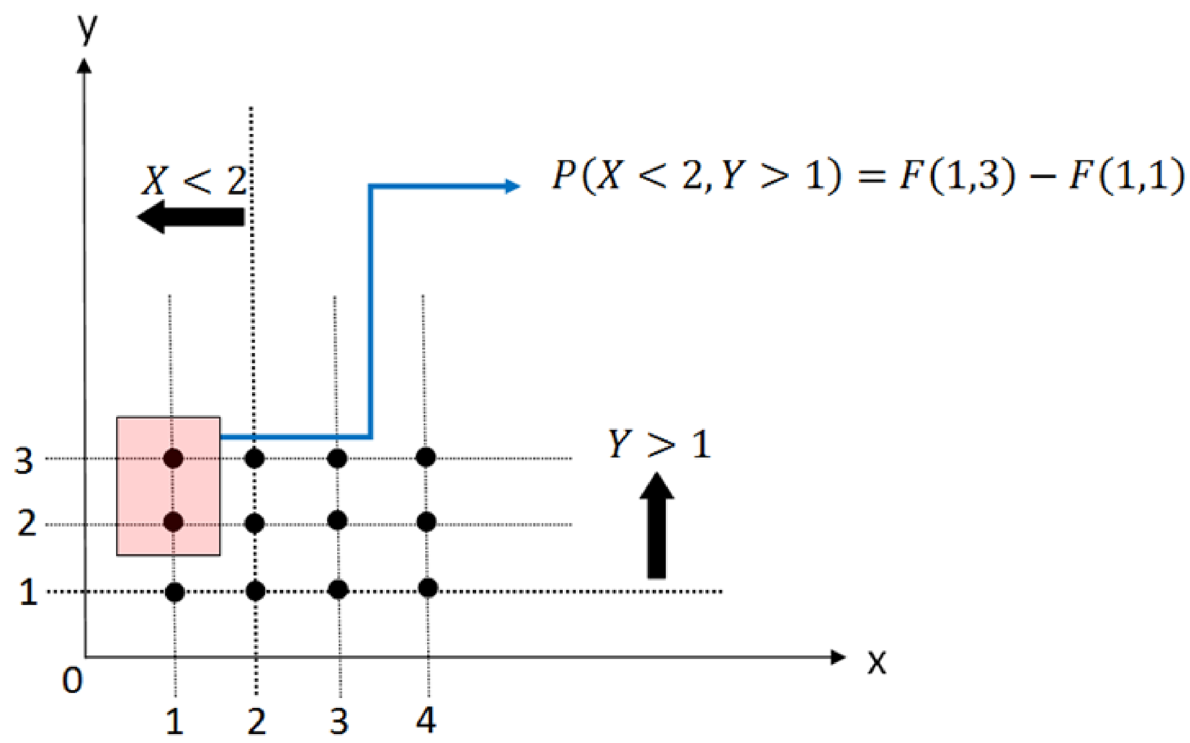


İkinci Yol (Bileşik olasılık fonksiyonundan):

$$P(X \leq 3, Y < 2) = p(1{,}1) + p(2{,}1) + p(3{,}1) = \frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \frac{3}{60} = \frac{1}{10}$$

Birinci Yol (Bileşik dağılım fonksiyonundan):

$$P(X < 2, Y > 1) = F(1,3) - F(1,1) = \frac{3(1+1)(3+1)}{240} - \frac{(1+1)(1+1)}{240} = \frac{1}{12}$$

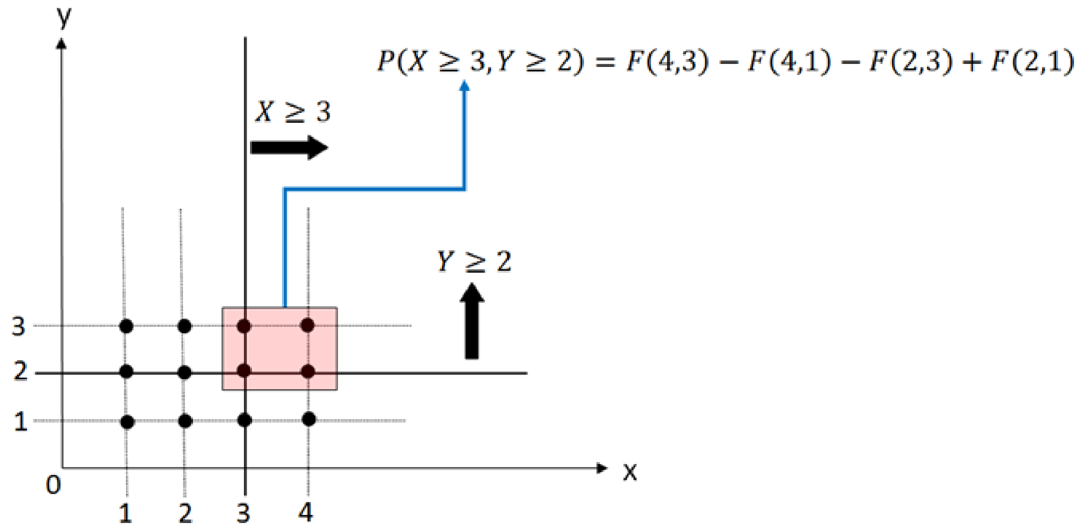


İkinci Yol (Bileşik olasılık fonksiyonundan):

$$P(X < 2, Y > 1) = p(1,2) + p(1,3) = \frac{2}{60} + \frac{3}{60} = \frac{1}{12}$$

Birinci Yol (Bileşik dağılım fonksiyonundan):

$$\begin{aligned}P(X \geq 3, Y \geq 2) &= F(4,3) - F(4,1) - F(2,3) + F(2,1)\\ &= \frac{12 \times 5 \times 4}{240} - \frac{4 \times 5 \times 2}{240} - \frac{6 \times 3 \times 4}{240} + \frac{2 \times 3 \times 2}{240}\\ &= \frac{240 - 40 - 72 + 12}{240}\\ &= \frac{140}{240} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$



İkinci Yol (Bileşik olasılık fonksiyonundan):

$$P(X \geq 3, Y \geq 2) = p(3,2) + p(3,3) + p(4,2) + p(4,3) = \frac{6}{60} + \frac{9}{60} + \frac{8}{60} + \frac{12}{60} = \frac{7}{12}$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{3(x^2-y)}{23} \quad , \quad 1<x<3\,,0<y<1 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $F(x,y)$ bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.
b) $P(X \leq 2, Y < 0.5)$ ve $P(X > 2, Y > 0.2)$ olasılıklarını bulunuz.

Çözüm:

a) $F(x,y)$ bileşik dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_1^x \int_0^y f(t,z)\,dz\,dt &&= \int_1^x \int_0^y \frac{3(t^2-z)}{23}\,dz\,dt \\ &= \frac{3}{23}\int_1^x \left(t^2 z - \frac{z^2}{2}\Big|_0^y \right) dt &&= \frac{3}{23}\int_0^x \left(t^2 y - \frac{y^2}{2} \right) dt \\ &= \frac{3}{23}\left(\frac{t^3 y}{3} - \frac{t y^2}{2}\Big|_1^x \right) &&= \frac{3}{23}\left(\frac{x^3 y}{3} - \frac{x y^2}{2} - \frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right) \\ &= \frac{3}{23}\left(\frac{2x^3 y - 3xy^2 - 2y + 3y^2}{6} \right) &&= \frac{2y(x^3-1) - 3y^2(x-1)}{46} \end{aligned}$$

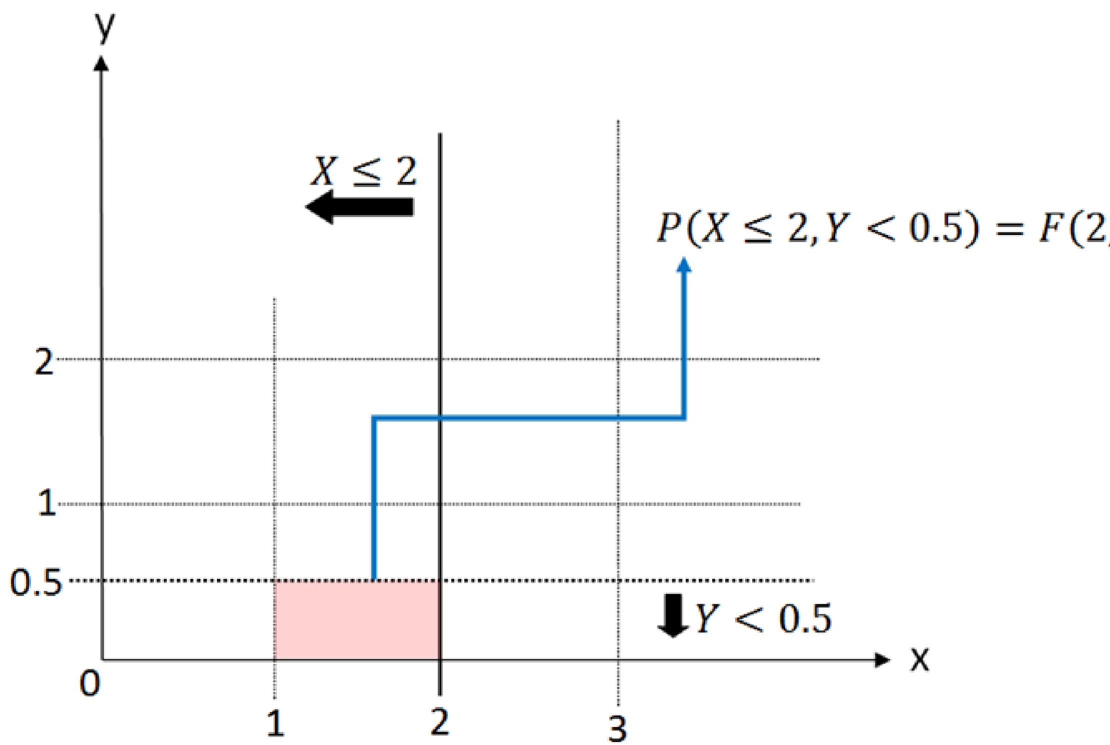
$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y(x^3-1) - 3y^2(x-1)}{46} & , \quad 1 < x < 3\,, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad x \le 1\,, y \le 0 \\ 1 & , \quad x \ge 3\,, y \ge 1 \end{cases}$$

Sağlama: $F(3,1) = 1$ olmalıdır.

b) Olasılıkları sırayla bulalım:

Birinci Yol (Bileşik dağılım fonksiyonundan):

$$P(X \leq 2, Y < 0.5) = F(2{,}0.5) = \frac{2 \times 0.5(2^3 - 1) - 3(0.5)^2(2 - 1)}{46} = \frac{25}{184}$$

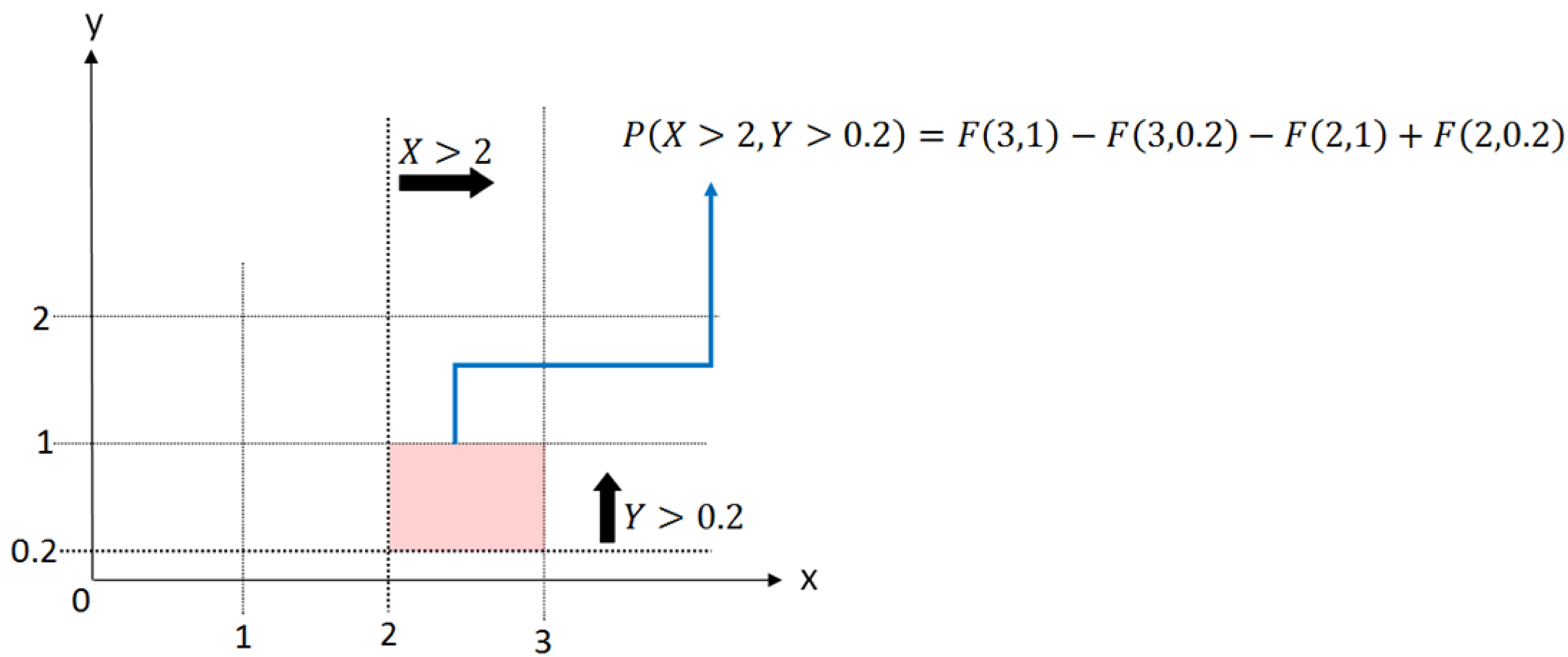


İkinci Yol (Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2, Y < 0.5) &= \int_1^2 \int_0^{0.5} f(x,y)\,dy\,dx &&= \int_1^2 \int_0^{0.5} \frac{3(x^2-y)}{23}\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{23}\int_1^2 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{0.5} \right) dx &&= \frac{3}{23}\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) dx \\
&= \frac{3}{23}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{8} \Big|_1^2 \right) &&= \frac{3}{23}\left(\frac{8}{6} - \frac{2}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{25}{184}
\end{aligned}
$$

Birinci Yol (Bileşik dağılım fonksiyonundan):

$$
\begin{aligned}
P(X > 2, Y > 0.2) &= F(3,1) - F(3,0.2) - F(2,1) + F(2,0.2) \\
&= \frac{2(3^3-1)-3(3-1)}{46} - \frac{2\times 0.2(3^3-1)-3(0.2)^2(3-1)}{46} \\
&\quad - \frac{2(2^3-1)-3(2-1)}{46} + \frac{2\times 0.2(2^3-1)-3(0.2)^2(2-1)}{46} \\
&= \frac{27.52}{46} = 0.598
\end{aligned}
$$



İkinci Yol (Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$
\begin{aligned}
P(X > 2, Y > 0.2) &= \int_2^3 \int_{0.2}^1 f(x,y)\,dy\,dx &&= \int_2^3 \int_{0.2}^1 \frac{3(x^2 - y)}{23}\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{23}\int_2^3 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \Big|_{0.2}^{1} \right) dx &&= \frac{3}{23}\int_2^3 \left(x^2 - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{5} + \frac{1}{50} \right) dx \\
&= \frac{3}{23}\int_2^3 \left(\frac{4x^2}{5} - \frac{24}{50} \right) dx &&= \frac{3}{23}\left(\frac{4x^3}{15} - \frac{24x}{50} \Big|_2^3 \right) \\
&= \frac{3}{23}\left(\frac{108}{15} - \frac{72}{50} - \frac{32}{15} + \frac{48}{50} \right) &&= \frac{344}{575} \\
&= 0.598
\end{aligned}
$$

MARJİNAL (BİLEŞEN) OLASILIK FONKSİYONU

(X,Y) iki boyutlu kesikli raslantı değişkeni için X ve Y' nin marjinal olasılık fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in R_Y} p(x,y)$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in R_X} p(x,y)$$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{xy}{60} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \;\; ve\; y = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\; x\; ve\; y\; değerleri\; için \end{aligned}$$

X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$p_X(x) = \sum_{y\,\in\,R_Y} p(x,y) = \sum_{y=1}^{3} \frac{xy}{60} = \frac{x(1+2+3)}{60} = \frac{x}{10}$$

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{x}{10} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\; x\; değerleri\; için \end{aligned}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x\,\in\,R_X} p(x,y) = \sum_{x=1}^{4} \frac{xy}{60} = \frac{(1+2+3+4)y}{60} = \frac{y}{6}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{y}{6} \quad , \quad y = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\; y\; değerleri\; için \end{aligned}$$

MARJİNAL (BİLEŞEN) OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU

(X, Y) iki boyutlu sürekli raslantı değişkeni için X ve Y' nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f(x, y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f(x, y)\, dx$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{3(x^2-y)}{23} \quad , \quad 1<x<3\,, 0<y<1 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ ve } y \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{3(x^2-y)}{23}\,dy = \frac{3}{23}\left(x^2y - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{3}{23}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3(2x^2-1)}{46}$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{3(2x^2-1)}{46} \quad , \quad 1<x<3 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f(x,y)\,dx = \int_1^3 \frac{3(x^2-y)}{23}\,dx = \frac{3}{23}\left(\frac{x^3}{3} - xy\Big|_1^3\right) = \frac{3}{23}\left(9 - 3y - \frac{1}{3} + y\right) = \frac{26-6y}{23}$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{26-6y}{23} \quad , \quad 0<y<1 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

MARJİNAL (BİLEŞEN) DAĞILIM FONKSİYONLARI

X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X < +\infty, Y \leq y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = F(+\infty,y)$$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{xy(x+1)(y+1)}{c} &&, \quad x = 1,2,3,4 \;\; ve \; y = 1,2,3 \\ &= 0 &&, \quad x \leq 0 \;\;, y \leq 0 \\ &= 1 &&, \quad x \geq 4 \;\;, y \geq 3 \end{aligned}$$

a) c sabitini bulunuz.

b) X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

a) $F(+\infty, +\infty) = 1$ bilgisini kullanarak c sabitini buluruz:

$$\begin{aligned} F(4,3) &= 1 \\ \frac{4 \times 3 \times (4+1) \times (3+1)}{c} &= 1 \\ \frac{240}{c} &= 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 240 \;\; bulunur. \end{aligned}$$

b) X' in marjinal dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = F(x,3) = \frac{3x(x+1)(3+1)}{240} = \frac{12x(x+1)}{240} = \frac{x(x+1)}{20}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{x(x+1)}{20} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \\ &= 0 \quad , \quad x \leq 0 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 4 \end{aligned}$$

Y' in marjinal dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = F(4,y) = \frac{4y(4+1)(y+1)}{240} = \frac{20y(y+1)}{240} = \frac{y(y+1)}{12}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{y(y+1)}{12} \quad , \quad y = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad y \leq 0 \\ &= 1 \quad , \quad y \geq 3 \end{aligned}$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \frac{b\,y(x^3-1)-3y^2(x-1)}{46} &&, \quad 1<x<3\,,0<y<1 \\
&= 0 &&, \quad x\le 1\,,y\le 0 \\
&= 1 &&, \quad x\ge 3\,,y\ge 1
\end{aligned}
$$

a) b sabitini bulunuz.

b) X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

c) $f(x,y)$ bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a) $F(+\infty,+\infty)=1$ bilgisini kullanarak c sabitini buluruz:

$$
\begin{aligned}
F(3,1) &= 1 \\
\frac{b\,(3^3-1)-3(3-1)}{46} &= 1 \\
\frac{26\,b-6}{46} &= 1
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
26\,b-6 &= 46 \\
26b &= 52 \\
b &= 2 \quad bulunur.
\end{aligned}
$$

b) X' in marjinal dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = F(x, 1) = \frac{2(x^3 - 1) - 3(x - 1)}{46} = \frac{(x - 1)(2x^2 + 2x - 1)}{46}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{(x - 1)(2x^2 + 2x - 1)}{46} &&, \quad 1 < x < 3 \\ &= 0 &&, \quad x \leq 1 \\ &= 1 &&, \quad x \geq 3 \end{aligned}$$

Y' nin marjinal dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = F(3, y) = \frac{2y(3^3 - 1) - 3y^2(3 - 1)}{46} = \frac{26y - 3\,y^2}{23}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{26y - 3\,y^2}{23} &&, \quad 0 < y < 1 \\ &= 0 &&, \quad y \leq 0 \\ &= 1 &&, \quad y \geq 1 \end{aligned}$$

c) Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F(x,y) &&= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{2y(x^3-1)-3y^2(x-1)}{46}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2(x^3-1)-6y(x-1)}{46}\right) &&= \left(\frac{6\,x^2-6y}{46}\right) \\
&= \frac{3}{23}(x^2-y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{3(x^2-y)}{23} \quad , \quad 1<x<3\,,0<y<1 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ ve } y \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

İKİ BOYUTLU RASLANTI DEĞİŞKENİNİN BİR FONKSİYONUNUN BEKLENEN DEĞERİ

$H(X,Y)$, X ve Y raslantı değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun.

$$E\big(H(X,Y)\big) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} h(x,y)p(x,y) \quad , \quad (X,Y): Kesikli \\ \displaystyle\int_{R_X} \int_{R_Y} h(x,y)f(x,y)\, dy\, dx \quad , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

Örnekler:

- $$E(XY) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xyp(x,y) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \int_{R_X} \int_{R_Y} xyf(x,y)\, dy\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

- a,b ve c sabit değerler olsun.

$$E(aX + bY + c) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (ax + by + c)\, p(x,y) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \int_{R_X} \int_{R_Y} (ax + by + c) f(x,y)\, dy\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

Burada, X ve Y' nin marjinal olasılık / olasılık yoğunluk fonksiyonlarından yararlanılarak, $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ şeklinde de bulunabilir.

İKİ BOYUTLU RASLANTI DEĞİŞKENİNİN BİR FONKSİYONUNUN VARYANSI

$$V\big(H(X,Y)\big) = E\left(\big(H(X,Y)\big)^2\right) - \left[E\big(H(X,Y)\big)\right]^2$$

Örnekler:

- $V(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2$
- $V(X+Y) = E((X+Y)^2) - [E(X+Y)]^2$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= \frac{xy}{60} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \;\; ve \; y = 1,2,3 \\
&= 0 \quad\;\; , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

a) $E(3X+4Y)$ beklenen değerini bulunuz.

b) $V(XY)$ varyansını bulunuz.

Çözüm:

a)
$$
\begin{aligned}
E(3X+4Y) &= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3}(3x+4y)p(x,y) \\
&= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3}(3x+4y)\frac{xy}{60} \\
&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3}(3x^2y+4xy^2) \\
&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}(3x^2+4x+6x^2+16x+9x^2+36x) \\
&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}(18x^2+56x) \\
&= \frac{1}{60}(18+56+18\times 4+56\times 2+18\times 9+56\times 3+18\times 16+56\times 4) \\
&= \frac{1100}{60}
\end{aligned}
$$

b) $V(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2$' dir.

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3} xyp(x,y) &&= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3} xy\left(\frac{xy}{60}\right) \\
&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3}(x^2y^2) &&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}(x^2+4x^2+9x^2) \\
&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}(14x^2) &&= \frac{14}{60}(1^2+2^2+3^2+4^2) \\
&= 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2Y^2) &= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3} x^2y^2p(x,y) &&= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3} x^2y^2\left(\frac{xy}{60}\right) \\
&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{3}(x^3y^3) &&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}(x^3+8x^3+27x^3) \\
&= \frac{1}{60}\sum_{x=1}^{4}(36x^3) &&= \frac{36}{60}(1^3+2^3+3^3+4^3) \\
&= 60
\end{aligned}
$$

$$V(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = 60 - [7]^2 = 11$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3(x^2-y)}{23} & , \quad 1<x<3\,,0<y<1 \\ 0 & , \quad \textit{diğer } x \textit{ ve } y \textit{ değerleri için} \end{cases}$$

a) $E(3X^2Y)$ beklenen değerini bulunuz.

b) $V(2XY+7)$ varyansını bulunuz.

Çözüm:

a)

$$\begin{aligned} E(3X^2Y) &= \int_1^3\int_0^1 3x^2y\,f(x,y)\,dy\,dx &&= \int_1^3\int_0^1 3x^2y\,\frac{3(x^2-y)}{23}\,dy\,dx \\ &= \frac{9}{23}\int_1^3\int_0^1 (x^4y-x^2y^2)\,dy\,dx &&= \frac{9}{23}\int_1^3\left(\frac{x^4y^2}{2}-\frac{x^2y^3}{3}\Bigg|_0^1\right)dx \\ &= \frac{9}{23}\int_1^3\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{3}\right)dx &&= \frac{9}{23}\left(\frac{x^5}{10}-\frac{x^3}{9}\Bigg|_1^3\right) \\ &= \frac{9}{23}\left(\frac{3^5}{10}-\frac{3^3}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right) &&= \frac{1918}{230} \end{aligned}$$

b) $V(2XY+7) = V(2XY) = 4V(XY)'$ dir.

$$V(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2$$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_1^3\int_0^1 xyf(x,y)\,dy\,dx &&= \int_1^3\int_0^1 xy\,\frac{3(x^2-y)}{23}\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{23}\int_1^3\int_0^1 (x^3y - xy^2)\,dy\,dx &&= \frac{3}{23}\int_1^3 \left(\frac{x^3y^2}{2} - \frac{xy^3}{3}\bigg|_0^1\right) dx \\
&= \frac{3}{23}\int_1^3 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{3}\right) dx &&= \frac{3}{23}\left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{6}\bigg|_1^3\right) \\
&= \frac{3}{23}\left(\frac{3^4}{8} - \frac{3^2}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) &&= \frac{208}{184}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2Y^2) &= \int_1^3\int_0^1 x^2y^2\, f(x,y)\,dy\,dx &&= \int_1^3\int_0^1 x^2y^2\,\frac{3(x^2-y)}{23}\,dy\,dx\\
&= \frac{3}{23}\int_1^3\int_0^1 (x^4y^2 - x^2y^3)\,dy\,dx &&= \frac{3}{23}\int_1^3\left(\frac{x^4y^3}{3}-\frac{x^2y^4}{4}\bigg|_0^1\right)dx\\
&= \frac{3}{23}\int_1^3\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^2}{4}\right)dx &&= \frac{3}{23}\left(\frac{x^5}{15}-\frac{x^3}{12}\bigg|_1^3\right)\\
&= \frac{3}{23}\left(\frac{3^5}{15}-\frac{3^3}{12}-\frac{1}{15}+\frac{1}{12}\right) &&= \frac{419}{230}
\end{aligned}
$$

$$V(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = \frac{419}{230} - \left[\frac{208}{184}\right]^2 = 0.54$$

$$V(2XY+7) = 4V(XY) = 4\times 0.54 = 2.16\ \ olarak\ \ bulunur.$$

BAĞIMSIZLIK

(X, Y) iki boyutlu raslantı değişkenini ele alalım:

- X ve Y kesikli/sürekli raslantı değişkenleri için,

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

  eşitliği sağlanıyorsa X ve Y birbirlerinden bağımsız kesikli/sürekli raslantı değişkenlerdir.

- X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinde $\forall(x, y) \in R_{XY}$ için,

$$p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

  eşitliği sağlanıyorsa X ve Y birbirlerinden bağımsız kesikli raslantı değişkenlerdir.

- X ve Y sürekli raslantı değişkenleri için,

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

  eşitliği sağlanıyorsa X ve Y birbirlerinden bağımsız sürekli raslantı değişkenlerdir.

$(X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k)$ k boyutlu raslantı değişkenini ele alalım:

- $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ kesikli/sürekli raslantı değişkenleri için,

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k) = F_{X_1}(x_1)\ F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_{k-1}}(x_{k-1})\ F_{X_k}(x_k)$$

eşitliği sağlanıyorsa $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ birbirlerinden bağımsız kesikli/sürekli raslantı değişkenlerdir.

- $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ kesikli raslantı değişkenlerinin tanım kümesindeki tüm değerler için,

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k) = p_{X_1}(x_1)\ p_{X_2}(x_2) \cdots p_{X_{k-1}}(x_{k-1})\ p_{X_k}(x_k)$$

eşitliği sağlanıyorsa $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ birbirlerinden bağımsız kesikli raslantı değişkenlerdir.

- $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ sürekli raslantı değişkenleri için,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k) = f_{X_1}(x_1)\ f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_{k-1}}(x_{k-1})\ f_{X_k}(x_k)$$

eşitliği sağlanıyorsa $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ birbirlerinden bağımsız sürekli raslantı değişkenlerdir.

İki boyutlu durum:

- X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız ise $E(XY) = E(X)E(Y)$ eşitliği sağlanmaktadır.
- X ve Y birbirine bağımlı raslantı değişkenler ise $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ olmaktadır.

k boyutlu durum:

- $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız ise

$$E(X_1 X_2 \cdots X_{k-1} X_k) = E(X_1)\ E(X_2)\ \cdots\ E(X_{k-1})\ E(X_k)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

- $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k$ birbirine bağımlı raslantı değişkenler ise

$$E(X_1 X_2 \cdots X_{k-1} X_k) \neq E(X_1)\ E(X_2)\ \cdots\ E(X_{k-1})\ E(X_k)$$

olmaktadır.

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= \frac{xy}{60} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \;\; ve \; y = 1,2,3 \\
&= 0 \quad\;\; , \quad diğer\; x \; ve \; y \; değerleri \; için
\end{aligned}
$$

X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?

Çözüm:

1.Yol: Daha önce bulunan $p_X(x)$ ve $p_Y(y)$ marjinal olasılık fonksiyonlarından yararlanılsın:

$$p_X(x)p_Y(y) = \left(\frac{x}{10}\right)\left(\frac{y}{6}\right) = \frac{xy}{60} = p_{XY}(x,y)$$

Eşitlik sağlandığından dolayı, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsızdır.

2.Yol: Daha önce bulunan $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ marjinal dağılım fonksiyonlarından yararlanılsın:

$$F_X(x)F_Y(y) = \left(\frac{x(x+1)}{20}\right)\left(\frac{y(y+1)}{12}\right) = \frac{xy(x+1)(y+1)}{240} = F_{XY}(x,y)$$

Eşitlik sağlandığından dolayı, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsızdır.

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3(x^2-y)}{23} & , \quad 1 < x < 3\,, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{cases}$$

X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?

Çözüm:

1.Yol: Daha önce bulunan $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından yararlanılsın:

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{3(2x^2-1)}{46}\right)\left(\frac{26-6y}{23}\right) \neq \frac{3(x^2-y)}{23} = f_{XY}(x,y)$$

Eşitlik sağlanmadığından dolayı, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız değildir.

2.Yol: Daha önce bulunan $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ marjinal dağılım fonksiyonlarından yararlanılsın:

$$F_X(x)F_Y(y) = \left(\frac{(x-1)(2x^2+2x-1)}{46}\right)\left(\frac{26y-3y^2}{23}\right) \neq \frac{2y(x^3-1)-3y^2(x-1)}{240} = F_{XY}(x,y)$$

Eşitlik sağlanmadığından dolayı, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız değildir.

ÇARPIMLAR MOMENTİ

(X, Y) iki boyutlu raslantı değişkeni olsun.

- X ve Y raslantı değişkenlerinin r-inci ve s-inci çarpımlar momenti:

$$E(X^r Y^s) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} x^r y^s p(x,y) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \int_{R_X} \int_{R_Y} x^r y^s f(x,y)\, dy\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

- X ve Y raslantı değişkenlerinin ortalamaya göre r-inci ve s-inci çarpımlar momenti:

$$E((X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s p(x,y) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \int_{R_X} \int_{R_Y} (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s f(x,y)\, dy\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız ise

- $E(X^r Y^s) = E(X^r)\, E(Y^s)$
- $E((X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s) = E((X-\mu_X)^r) E((Y-\mu_Y)^s)$

olarak yazılabilir. X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımlı oldukları durumda ise bu eşitlikler sağlanmaz.

KOVARYANS

Bir raslantı değişkeninin varyansı, bu değişkenin dağılımının değişkenliğinin bir ölçüsüdür. Kovaryans (ortak varyans) ise, iki raslantı değişkeninin birlikte değişiminin bir ölçüsüdür.

Tanım: X ve Y arasındaki kovaryans, raslantı değişkenlerinin kendi ortalamalarından ayrılışlar çarpımının ortalamasıdır ve $Cov(X,Y)$ ile gösterilir:

$$Cov(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$$

Yukarıda kovaryansın tanımında verilen eşitlikteki çarpım açılarak beklenen değer özelliklerinden yararlanıldığında,

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] \\ &= E\left[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Kovaryansın Özellikleri

1) Kovaryansın tanım aralığı, $-\infty < \mathrm{Cov}(X,Y) < +\infty$' dur.

2) Kovaryans, X ve Y raslantı değişkenleri arasındaki ilişkinin yönü hakkında bilgi verir:

- Değişkenlerden birinin değerleri artarken diğerinin değerleri de artıyor ya da birinin değerleri azalırken diğerinin değerleri de azalıyor ise iki değişken arasındaki kovaryans değeri pozitiftir: $Cov(X,Y) > 0$.

- Değişkenlerden birinin değerleri artarken diğerinin değerleri azalıyor ya da birinin değerleri azalırken diğerinin değerleri artıyor ise iki değişken arasındaki kovaryans değeri negatiftir: $Cov(X,Y) < 0$.

- X ve Y değişkenleri birbirinden bağımsız ise $Cov(X,Y) = 0$' dır:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
&= \underbrace{\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}_{\substack{\text{X ve Y bağımsız} \\ \text{olması nedeniyle,} \\ \text{E(XY)=E(X)E(Y) olur.}}} - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$Cov(X,Y) = 0$ ise "X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsızdır" <u>denilemez</u>. X ve Y raslantı değişkenleri bağımlı olmalarına rağmen, $Cov(X,Y) = 0$ olabilir.

a, b, c ve d sabit değerler olsun.

3) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

4) $V(X) = Cov(X,X)$

5) $$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y) \\ V(X-Y) &= V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y) \end{aligned}$$

X ve Y birbirinden bağımsız ise, $V(X+Y) = V(X-Y) = V(X)+V(Y)$' dir.

6) $Cov(aX,Y) = Cov(X,\mathrm{a}Y) = \mathrm{a}Cov(X,Y)$

7) $$\begin{aligned} Cov(X_1+X_2\,,Y) &= Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y) \\ Cov(\mathrm{X}\,,Y_1+Y_2) &= Cov(\mathrm{X},Y_1)+Cov(\mathrm{X},Y_2) \end{aligned}$$

8) $Cov(aX+b,\mathrm{c}Y+d) = \mathrm{ac}Cov(X,Y)$

9) $Cov(aX+bY,\mathrm{c}Z+dW) = \mathrm{ac}Cov(X,Z)+\mathrm{ad}Cov(X,W)+\mathrm{bc}Cov(Y,Z)+\mathrm{bd}Cov(Y,W)$

10) $$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\,,\sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i,Y_j)$$

KORELASYON

Herhangi bir değişkenin aldığı değerler, başka bir değişkenin aldığı değerler değişirken, sistematik bir biçimde değişme eğiliminde ise bu iki değişken arasında bir ilişki (korelasyon) vardır. İlgilenilen iki değişken arasındaki ilişkinin gücü ve yönü, basit korelasyon katsayısı ile belirlenmektedir.

Örnekler:

- Bir kişinin aylık geliri (TL) ile aylık benzin tüketim miktarı (lt) arasındaki ilişki
- Bir malın fiyatı (TL) ile talep miktarı (kg) arasındaki ilişki
- Bir firmadaki satış personeli sayısı ile satış gelirleri (TL) arasındaki ilişki
- Bir çiftlikteki inek sayısı ile çiftlikte günlük elde edilen süt miktarı (lt) arasındaki ilişki
- Bir şirketin yaptığı reklam harcamaları ile elde ettiği kar arasındaki ilişki

İki değişken arasındaki ilişkinin yönü hakkında bilgi veren Kovaryans, değişkenlerin ölçü birimlerine bağlıdır. Bu nedenle, kovaryans üzerinden iki değişkenin arasındaki ilişkinin derecesi hakkında bir yorum yapmak mümkün değildir. Bu durumda, hem ilişkinin yönü hem de ilişkinin derecesi hakkında bilgi veren ve ölçü birimlerinden bağımsız bir ölçü kullanılır. Bu ölçü standartlaştırılmış değişkenler arasındaki kovaryanstır ve bu ölçüye Pearson' ın korelasyon katsayısı denir.

Pearson korelasyon katsayısı, iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin yönü ve derecesini belirtir. Pearson korelasyon katsayısının anlamlı yorum verebilmesi için, X ve Y değişkenlerinin bileşik olasılık dağılımının iki değişkenli normal dağılım göstermesi ve bu değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olması gerekmektedir. Değişkenler arasındaki ilişki doğrusal değil ise, hesaplanan Pearson korelasyon katsayısı ilişkinin gerçek durumunu yansıtmaz.

Pearson korelasyon katsayısı,

$$\begin{aligned}
\rho &= Cov\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right),\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right) \\
&= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
&= \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sqrt{E[(X-\mu_X)^2]E[(Y-\mu_Y)^2]}} \\
&= \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\left(E(X^2)-\left(E(X)\right)^2\right)\left(E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2\right)}}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

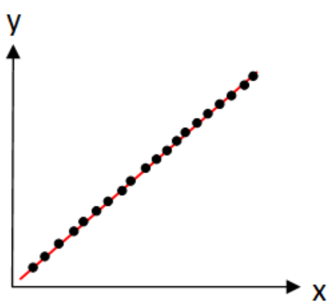
Korelasyon Katsayısının Özellikleri

- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$ arasında değer alır.
- Korelasyon katsayısı ve kovaryansın işaretleri aynıdır.
  - $\rho(X,Y) > 0$ ise, pozitif (aynı) yönlü bir ilişki vardır.
  - $\rho(X,Y) < 0$ ise, negatif (ters) yönlü bir ilişki vardır.
- X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız ise $\rho(X,Y) = 0'$ dır.
- $\rho(X,Y) = 0$ ise X ve Y raslantı değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğu söylenemez. $\rho(X,Y) = 0$ ise X ve Y arasında doğrusal bir ilişki yoktur. Fakat doğrusal olmayan bir ilişki mevcut olabilir. Pearson korelasyon katsayısı doğrusal olmayan ilişkileri temsil etmemektedir.
- $\rho(X,Y) = +1$ ise X ve Y arasında pozitif yönde mükemmel bir doğrusal ilişki vardır.
- $\rho(X,Y) = -1$ ise X ve Y arasında negatif yönde mükemmel bir doğrusal ilişki vardır.

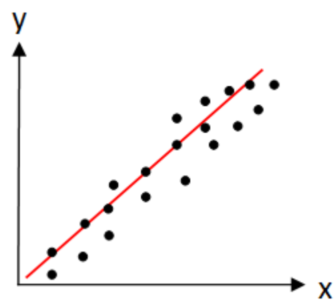
- Pearson korelasyon katsayısının aldığı değerlere göre, X ve Y değişkeni arasındaki ilişkinin derecesinin açıklanması aşağıda verilmiştir:

Pozitif yönde mükemmel ilişki	:	$\rho(X,Y) = 1.00$
Pozitif yönde çok kuvvetli ilişki	:	$0.90 \leq \rho(X,Y) < 1$
Pozitif yönde kuvvetli ilişki	:	$0.70 \leq \rho(X,Y) < 0.90$
Pozitif yönde orta düzeyde ilişki	:	$0.40 \leq \rho(X,Y) < 0.70$
Pozitif yönde zayıf ilişki	:	$0.20 \leq \rho(X,Y) < 0.40$
Pozitif yönde çok zayıf ilişki	:	$0 < \rho(X,Y) < 0.20$
İlişki yok	:	$\rho(X,Y) = 0$
Negatif yönde çok zayıf ilişki	:	$-0.20 < \rho(X,Y) < 0$
Negatif yönde zayıf ilişki	:	$-0.40 < \rho(X,Y) \leq -0.20$
Negatif yönde orta düzeyde ilişki	:	$-0.70 < \rho(X,Y) \leq -0.40$
Negatif yönde kuvvetli ilişki	:	$-0.90 < \rho(X,Y) \leq -0.70$
Negatif yönde çok kuvvetli ilişki	:	$-1 < \rho(X,Y) \leq -0.90$
Negatif yönde mükemmel ilişki	:	$\rho(X,Y) = -1$

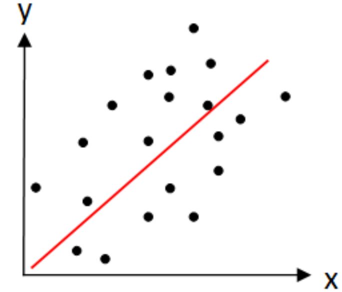
Değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü görebilmek ve derecesini kabaca yorumlayabilmek için saçılım grafiğinden yararlanılır. Çeşitli ilişkileri gösteren saçılım grafikleri aşağıda verilmiştir:



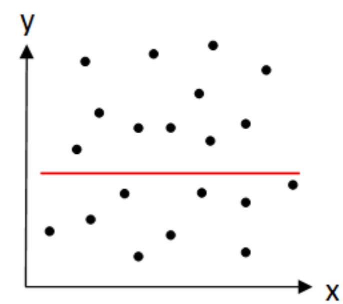
Pozitif Yönde
Mükemmel İlişki



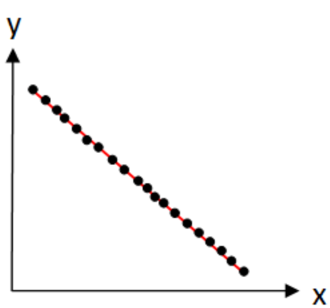
Pozitif Yönde
Kuvvetli İlişki



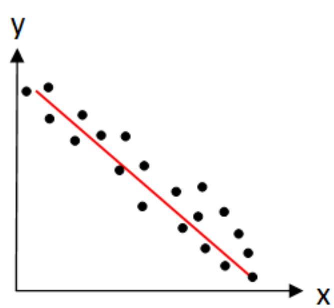
Pozitif Yönde
Zayıf İlişki



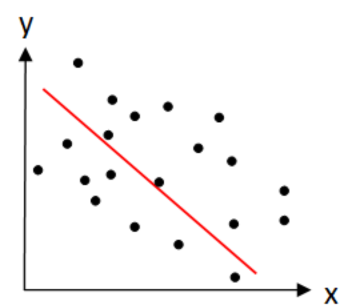
İlişki Yok



Negatif Yönde
Mükemmel İlişki



Negatif Yönde
Kuvvetli İlişki



Negatif Yönde
Zayıf İlişki

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{xy}{60} \quad , \quad x = 1,2,3,4 \ \ ve\ y = 1,2,3 \\ &= 0 \qquad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $Cov(X,Y)$ kovaryans değerini bulunuz.

b) $\rho(X,Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.

Çözüm:

Daha önce, X ve Y raslantı değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğu gösterilmişti.

a) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız olması nedeniyle, $E(XY) = E(X)E(Y)$' dir.

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$ olarak bulunur.

b) X ve Y' nin birbirinden bağımsız olması, bu değişkenlerin aralarında ilişki olmadığını gösterir. Bu nedenle, $\rho(X,Y) = 0$' dır.

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{3(x^2-y)}{23} \quad , \quad 1<x<3\,, 0<y<1 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ ve } y \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

a) $Cov(X,Y)$ kovaryans değerini bulunuz.

b) $\rho(X,Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.

Çözüm:

a) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$' dir.

Daha önce elde edilen $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları kullanılarak, $E(X)$ ve $E(Y)$ beklenen değerlerini bulalım:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_1^3 x\, f_X(x)\, dx &&= \int_1^3 x\left(\frac{3(2x^2-1)}{46}\right) dx \\
&= \frac{3}{46}\int_1^3 (2x^3-x)\, dx &&= \frac{3}{46}\left(\frac{2x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3\right) \\
&= \frac{3}{46}\left(\frac{3^4}{2} - \frac{3^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) &&= \frac{54}{23}
\end{aligned}
$$

$$E(Y) = \int_0^1 y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y\left(\frac{26-6y}{23}\right) dy$$

$$= \frac{1}{23}\int_0^1 (26y - 6y^2)\, dy = \frac{1}{23}\left(\frac{26y^2}{2} - \frac{6y^3}{3}\bigg|_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{23}\left(\frac{26}{2} - \frac{6}{3}\right) = \frac{11}{23}$$

Daha önceden, $E(XY) = \frac{208}{184}$ olarak hesaplanmıştı.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{208}{184} - \left(\frac{54}{23} \times \frac{11}{23}\right) = 0.00756 \ \ olarak\ bulunur.$$

b) $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ 'dir.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ değerini hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_1^3 x^2 f_X(x)\,dx &&= \int_1^3 x^2 \left(\frac{3(2x^2-1)}{46}\right) dx \\
&= \frac{3}{46}\int_1^3 (2x^4 - x^2)\,dx &&= \frac{3}{46}\left(\frac{2x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\Big|_1^3\right) \\
&= \frac{3}{46}\left(\frac{2\times 3^5}{5} - \frac{3^3}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) &&= \frac{661}{115}
\end{aligned}
$$

$E(X) = \frac{54}{23}$ olarak hesaplanmıştı.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{661}{115} - \left[\frac{54}{23}\right]^2 = 0.23554$$

$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$ değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 f_Y(y)\,dy &&= \int_0^1 y^2\left(\frac{26-6y}{23}\right)dy \\
&= \frac{1}{23}\int_0^1 (26y^2 - 6y^3)\,dy &&= \frac{1}{23}\left(\frac{26y^3}{3} - \frac{6y^4}{4}\Bigg|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{23}\left(\frac{26}{3} - \frac{6}{4}\right) &&= \frac{43}{138}
\end{aligned}$$

$E(Y) = \frac{11}{23}$ olarak hesaplanmıştı.

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{43}{138} - \left[\frac{11}{23}\right]^2 = 0.08286$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{0.00756}{\sqrt{0.23554 \times 0.08286}} = 0.05411$$

Yorum: X ve Y arasında pozitif yönde çok zayıf bir ilişki olduğu söylenebilir.

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenleri sırasıyla belli bir zamanda bir trafik ışığında sıralanan otomobil ve otobüs sayılarını göstersin. X ve Y' nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0.025	0.050	0.125	0.150	0.100	0.050
1	0.015	0.030	0.075	0.090	0.060	0.030
2	0.010	0.020	0.050	0.060	0.040	0.020

a) X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

b) Aşağıda tanımlanan olayların olasılıklarını hesaplayınız:

A: Dört otomobil olması ve hiç otobüs olmaması

B: Sadece üç otomobil olması

C: Sadece bir otobüs olması

D: En fazla iki otomobil ve en az bir otobüs olması

E: En az dört otomobil ve ikiden az otobüs olması

F: İkiden az otomobil olması

G: Birden fazla otobüs olması

c) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?

d) $Cov(X,Y)$ kovaryans değerini bulunuz.

e) $\rho(X,Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.

a) Tabloda satır toplamları Y' nin marjinal olasılık fonksiyonunu; sütun toplamları ise X' in marjinal olasılık fonksiyonunu verir.

Y \ X	0	1	2	3	4	5	$p_Y(y)$
0	0.025	0.050	0.125	0.150	0.100	0.050	**0.500**
1	0.015	0.030	0.075	0.090	0.060	0.030	**0.300**
2	0.010	0.020	0.050	0.060	0.040	0.020	**0.200**
$p_X(x)$	**0.050**	**0.100**	**0.250**	**0.300**	**0.200**	**0.100**	**1**

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= 0.05 &&, \quad x = 0 \\
&= 0.10 &&, \quad x = 1,5 \\
&= 0.25 &&, \quad x = 2 \\
&= 0.30 &&, \quad x = 3 \\
&= 0.20 &&, \quad x = 4 \\
&= 0 &&, \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= 0.50 &&, \quad y = 0 \\
&= 0.30 &&, \quad y = 1 \\
&= 0.20 &&, \quad y = 2 \\
&= 0 &&, \quad diğer\ y\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

b) $P(A) = P(X = 4, Y = 0) = p_{XY}(4,0) = 0.10$

$P(B) = P(X = 3) = p_X(3) = 0.30$

$P(C) = P(Y = 1) = p_Y(1) = 0.30$

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(X \leq 2, Y \geq 1) \\
&= p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,1) + p_{XY}(2,2) \\
&= 0.015 + 0.010 + 0.030 + 0.020 + 0.075 + 0.050 \\
&= 0.200
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(X \geq 4, Y < 2) \\
&= p_{XY}(4,0) + p_{XY}(4,1) + p_{XY}(5,0) + p_{XY}(5,1) \\
&= 0.10 + 0.06 + 0.05 + 0.03 \\
&= 0.24
\end{aligned}
$$

$P(F) = P(X < 2) = p_X(0) + p_X(1) = 0.05 + 0.10 = 0.15$

$P(G) = P(Y > 1) = p_Y(2) = 0.20$

c) $\forall (x,y) \in R_{XY}$ için, $p(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$ eşitliği sağlanıyorsa X ve Y birbirinden bağımsız kesikli raslantı değişkenlerdir.

(0,0) noktası	$p_X(0)\, p_Y(0) = 0.05 \times 0.50 = 0.025 = p(0,0)$ sağlandı.
(0,1) noktası	$p_X(0)\, p_Y(1) = 0.05 \times 0.30 = 0.015 = p(0,1)$ sağlandı.
(0,2) noktası	$p_X(1)\, p_Y(2) = 0.05 \times 0.20 = 0.010 = p(0,2)$ sağlandı.
(1,0) noktası	$p_X(1)\, p_Y(0) = 0.10 \times 0.50 = 0.05 = p(1,0)$ sağlandı.
(1,1) noktası	$p_X(1)\, p_Y(1) = 0.10 \times 0.30 = 0.03 = p(1,1)$ sağlandı.
(1,2) noktası	$p_X(1)\, p_Y(2) = 0.10 \times 0.20 = 0.02 = p(1,2)$ sağlandı.
(2,0) noktası	$p_X(2)\, p_Y(0) = 0.25 \times 0.50 = 0.125 = p(2,0)$ sağlandı.
(2,1) noktası	$p_X(2)\, p_Y(1) = 0.25 \times 0.30 = 0.075 = p(2,1)$ sağlandı.
(2,2) noktası	$p_X(2)\, p_Y(2) = 0.25 \times 0.20 = 0.05 = p(2,2)$ sağlandı.
(3,0) noktası	$p_X(3)\, p_Y(0) = 0.30 \times 0.50 = 0.15 = p(3,0)$ sağlandı.
(3,1) noktası	$p_X(3)\, p_Y(1) = 0.30 \times 0.30 = 0.09 = p(3,1)$ sağlandı.
(3,2) noktası	$p_X(3)\, p_Y(2) = 0.30 \times 0.20 = 0.06 = p(3,2)$ sağlandı.
(4,0) noktası	$p_X(4)\, p_Y(0) = 0.20 \times 0.50 = 0.10 = p(4,0)$ sağlandı.
(4,1) noktası	$p_X(4)\, p_Y(1) = 0.20 \times 0.30 = 0.06 = p(4,1)$ sağlandı.
(4,2) noktası	$p_X(4)\, p_Y(2) = 0.20 \times 0.20 = 0.04 = p(4,2)$ sağlandı.
(5,0) noktası	$p_X(5)\, p_Y(0) = 0.10 \times 0.50 = 0.05 = p(5,0)$ sağlandı.
(5,1) noktası	$p_X(5)\, p_Y(1) = 0.10 \times 0.30 = 0.03 = p(5,1)$ sağlandı.
(5,2) noktası	$p_X(5)\, p_Y(2) = 0.10 \times 0.20 = 0.02 = p(5,2)$ sağlandı.

Sonuç: Bütün nokta çiftlerinde eşitlik sağlandığı için, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsızdır.

d) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız olduğu için, $Cov(X,Y) = 0'$ dır.

e) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız olduğu için, $\rho(X,Y) = 0'$ dır.

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{-x-y} \quad , \quad x > 0\,, y > 0 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $F_{XY}(x,y)$ bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.
b) $P(0.8 \leq X < 1.5\,, 0.6 < Y \leq 1.2)$ olasılığını bulunuz.
c) $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.
d) $P(-1 \leq X < 1\,, -2 < Y \leq 2)$ olasılığını bulunuz.
e) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?
f) $Cov(X,Y)$ kovaryans değerini bulunuz.
g) $\rho(X,Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz.

Çözüm:

a) X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu:

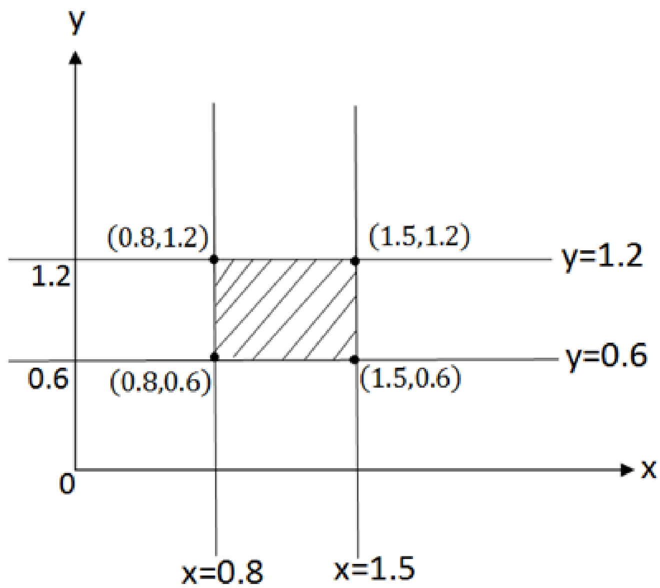
$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) &&= \int_0^x \int_0^y f(t,z)\,dz\,dt \\
&= \int_0^x \int_0^y e^{-t-z}\,dz\,dt &&= \int_0^x e^{-t}\left(\int_0^y e^{-z}\,dz\right)dt \\
&= \int_0^x e^{-t}\left(\left.\frac{e^{-z}}{(-1)}\right|_0^y\right)dt &&= \int_0^x e^{-t}(1-e^{-y})\,dt \\
&= (1-e^{-y})\left(\left.\frac{e^{-t}}{(-1)}\right|_0^x\right) &&= (1-e^{-x})(1-e^{-y})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= (1-e^{-x})(1-e^{-y}) &&, \quad x > 0\,, y > 0 \\
&= 0 &&, \quad x \le 0\,, y \le 0 \\
&= 1 &&, \quad x \to +\infty\,, y \to +\infty
\end{aligned}
$$

b) 1.Yol:

$$
\begin{aligned}
P(0.8 \leq X < 1.5\,, 0.6 < Y \leq 1.2) &= \int_{0.8}^{1.5}\int_{0.6}^{1.2} f(x,y)dydx \\
&= \int_{0.8}^{1.5}\int_{0.6}^{1.2} e^{-x-y}dydx \\
&= \int_{0.8}^{1.5} e^{-x}\left(\frac{e^{-y}}{(-1)}\Bigg|_{0.6}^{1.2}\right)dx \\
&= \int_{0.8}^{1.5} e^{-x}(e^{-0.6}-e^{-1.2})\,dx \\
&= (e^{-0.6}-e^{-1.2})\left(\frac{e^{-x}}{(-1)}\Bigg|_{0.8}^{1.5}\right) \\
&= (e^{-0.6}-e^{-1.2})(e^{-0.8}-e^{-1.5}) \\
&= 0.2476 \times 0.2262 \\
&= 0.056
\end{aligned}
$$

b)2.Yol:



$$
\begin{aligned}
P(0.8 \leq X < 1.5\,,0.6 < Y \leq 1.2) &= F(1.5,1.2) - F(1.5,0.6) - F(0.8,1.2) + F(0.8,0.6) \\
&= (1-e^{-1.5})(1-e^{-1.2}) - (1-e^{-1.5})(1-e^{-0.6}) \\
&\qquad -(1-e^{-0.8})(1-e^{-1.2}) + (1-e^{-0.8})(1-e^{-0.6}) \\
&= 0.5429 - 0.3505 - 0.3848 + 0.2485 \\
&= 0.056
\end{aligned}
$$

c) X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\,dy = \left(\frac{e^{-x-y}}{-1}\bigg|_0^{+\infty}\right) = -e^{-\infty} + e^{-x} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= e^{-x} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\,dx = \left(\frac{e^{-x-y}}{-1}\bigg|_0^{+\infty}\right) = -e^{-\infty} + e^{-y} = e^{-y}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= e^{-y} \quad , \quad y > 0 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} P(-1 \leq X < 1\,,-2 < Y \leq 2) &= P(0 \leq X < 1\,, 0 < Y \leq 2) \\ &= P(X < 1\,, Y \leq 2) \\ &= F(1,2) \\ &= (1 - e^{-1})(1 - e^{-2}) \\ &= 0.5466 \end{aligned}$$

e) $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ eşitliği sağlanıyor ise X ve Y raslantı değişkeni birbirinden bağımsızdır:

$$f_X(x) f_Y(y) = (e^{-x})(e^{-y}) = e^{-x-y} = f_{XY}(x,y)$$

Eşitlik sağlandığından dolayı, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsızdır.

f) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız olduğu için, $Cov(X,Y) = 0'$ dır.

g) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız olduğu için, $\rho(X,Y) = 0'$ dır.

Örnek: Bir apartman yöneticisi, kira ödemesinin zamanında ödenmemiş apartman aidatlarıyla ilgili olup olmadığını görmeye karar verir. X, son üç ayda zamanında yapılan kira ödemelerinin sayısını; Y ise son dört ayda zamanında ödenmemiş apartman aidatı sayısını göstermek üzere, X ve Y' nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0.01	0.06	0.07
1	0.01	0.03	0.08	0.04
2	0.03	0.08	0.09	0.02
3	0.06	0.11	0.08	0.01
4	0.14	0.06	0.02	0

a) X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

b) Aşağıda tanımlanan olayların olasılıklarını hesaplayınız:

A: Kiranın üç kez zamanında ödenmesi ve aidatın bir kez gecikmesi

B: Kiranın zamanında hiç ödenmemesi

C: Aidatların bir kez zamanında ödenmemesi

D: En az üç kez zamanında kira ödenmesi ve an fazla bir kez aidatın geciktirilmesi

c) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?

d) $Cov(X, Y)$ kovaryans değerini bulunuz.

e) $\rho(X, Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.

Çözüm:

a) Tabloda satır toplamları Y' nin marjinal olasılık fonksiyonunu; sütun toplamları ise X' in marjinal olasılık fonksiyonunu verir.

Y \ X	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	0	0.01	0.06	0.07	**0.14**
1	0.01	0.03	0.08	0.04	**0.16**
2	0.03	0.08	0.09	0.02	**0.22**
3	0.06	0.11	0.08	0.01	**0.26**
4	0.14	0.06	0.02	0	**0.22**
$p_X(x)$	**0.24**	**0.29**	**0.33**	**0.14**	**1**

$$\begin{aligned} p_X(x) &= 0.24 \quad , \quad x = 0 \\ &= 0.29 \quad , \quad x = 1 \\ &= 0.33 \quad , \quad x = 2 \\ &= 0.14 \quad , \quad x = 3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= 0.14 \quad , \quad y = 0 \\ &= 0.16 \quad , \quad y = 1 \\ &= 0.22 \quad , \quad y = 2{,}4 \\ &= 0.26 \quad , \quad y = 3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

b) Olayların olasılıkları aşağıda hesaplanmıştır:

$P(A) = P(X = 3, Y = 1) = p_{XY}(3,1) = 0.04$

$P(B) = P(X = 0) = p_X(0) = 0.24$

$P(C) = P(Y = 1) = p_Y(1) = 0.16$

$P(D) = P(X \geq 3, Y \leq 1) = p_{XY}(3,0) + p_{XY}(0,1) = 0.07 + 0.04 = 0.11$

c) $\forall(x, y) \in R_{XY}$ için, $p_{XY}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$ eşitliği sağlanıyorsa X ve Y birbirinden bağımsız kesikli raslantı değişkenlerdir.

(0,0) noktası:

$p_X(0)\, p_Y(0) = 0.24 \times 0.14 = 0.0336 \neq 0 = p(0,0)$ sağlanmadı.

Sonuç: Bağımsızlık için tüm nokta çiftlerinde eşitlik sağlanması gerekmektedir. (0,0) nokta çiftinde eşitlik sağlanmadığından diğer noktalar için eşitlik incelenmeyebilir. X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız değildir.

d) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$' dir.

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xy\, p_{XY}(x,y) \\
&= (0 \times 0 \times 0) + (0 \times 1 \times 0.01) + (0 \times 2 \times 0.03) + (0 \times 3 \times 0.6) + (0 \times 4 \times 0.14) \\
&\quad + (1 \times 0 \times 0.01) + (1 \times 1 \times 0.03) + (1 \times 2 \times 0.08) + (1 \times 3 \times 0.11) + (1 \times 4 \times 0.06) \\
&\quad + (2 \times 0 \times 0.06) + (2 \times 1 \times 0.08) + (2 \times 2 \times 0.09) + (2 \times 3 \times 0.08) + (2 \times 4 \times 0.02) \\
&\quad + (3 \times 0 \times 0.07) + (3 \times 1 \times 0.04) + (3 \times 2 \times 0.02) + (3 \times 3 \times 0.01) + (3 \times 4 \times 0) \\
&= 2.25
\end{aligned}
$$

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x) = 0 \times 0.24 + 1 \times 0.29 + 2 \times 0.33 + 3 \times 0.14 = 1.37$$

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y\, p_Y(y) = 0 \times 0.14 + 1 \times 0.16 + 2 \times 0.22 + 3 \times 0.26 + 4 \times 0.22 = 2.26$$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2.25 - (1.37 \times 2.26) = -0.8462$ olarak bulunur.

e) Korelasyon katsayısı, $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$, dir.

$$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2\, p_X(x) = 0^2 \times 0.24 + 1^2 \times 0.29 + 2^2 \times 0.33 + 3^2 \times 0.14 = 2.87$$

$$E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 p_Y(y) = 0^2 \times 0.14 + 1^2 \times 0.16 + 2^2 \times 0.22 + 3^2 \times 0.26 + 4^2 \times 0.22 = 6.9$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2.87 - [1.37]^2 = 0.9931$$
$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 6.9 - [2.26]^2 = 1.7924$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{-0.8462}{\sqrt{0.9931 \times 1.7924}} = -0.6342$$

Yorum: X ve Y arasında negatif yönde orta düzeyde bir ilişki olduğu söylenebilir.

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \frac{k\,x^3\,y + 3\,x^2\,y^2}{28} &&, \quad 0 < x \le 1\,, 0 < y \le 2 \\
&= 0 &&, \quad x < 0\,, y < 0 \\
&= 1 &&, \quad x \ge 1\,, y \ge 2
\end{aligned}
$$

a) k sabitini bulunuz.

b) $f(x,y)$ bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

c) $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

d) $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

e) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?

f) $Cov(X,Y)$ kovaryans değerini bulunuz.

g) $\rho(X,Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.

a) $F(+\infty,+\infty)=1$ bilgisini kullanarak k sabitini buluruz:

$$
\begin{aligned}
F(1,2) &= 1 \\
\frac{k\times\ 1^3\ \times 2+3\ \times 1^2\times\ 2^2}{28} &= 1 \\
\frac{2k+12}{28} &= 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
2k+12 &= 28 \\
k &= \frac{16}{2} \\
k &= 8
\end{aligned}
$$

b) Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F(x,y) &&= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{8\,x^3\,y+3\,x^2\,y^2}{28}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{8\,x^3+6\,x^2\,y}{28}\right) &&= \left(\frac{24\,x^2+12x\,y}{28}\right) \\
&= \frac{3}{7}(2\,x^2+x\,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{3}{7}(2\,x^2+x\,y) \quad , \quad 0<x\le 1\,,0<y\le 2 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ ve } y \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

c) Marjinal dağılım fonksiyonlarını bulalım:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F(x,+\infty) = F(x,2) = \frac{8x^3y+3x^2y^2}{28} \\ &= \frac{8x^3 2+3x^2 2^2}{28} = \frac{4x^3+3x^2}{7} = \frac{x^2(4x+3)}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{x^2(4x+3)}{7} \quad , \quad 0 < x \le 1 \\ &= 0 \quad , \quad x \le 0 \\ &= 1 \quad , \quad x \ge 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F(+\infty,y) = F(1,y) = \frac{8x^3y+3x^2y^2}{28} \\ &= \frac{8(1^3)y+3(1^2)y^2}{28} = \frac{8y+3y^2}{28} = \frac{y(3y+8)}{728} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{y(3y+8)}{28} \quad , \quad 0 < y \le 2 \\ &= 0 \quad , \quad y \le 0 \\ &= 1 \quad , \quad y \ge 2 \end{aligned}$$

d) X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{3}{7}(2\,x^2 + x\,y)\,dy = \frac{3}{7}\left(2x^2y + \frac{xy^2}{2}\bigg|_0^2\right) = \frac{3}{7}(4x^2 + 2x) = \frac{6x(2x+1)}{7}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{6x(2x+1)}{7} \quad , \quad 0 \le x \le 1 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{7}(2\,x^2 + x\,y)\,dx = \frac{3}{7}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2y}{2}\bigg|_0^1\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{y}{2}\right) = \frac{(4+3y)}{14}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{(4+3y)}{14} \quad , \quad 0 \le y \le 2 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

e) $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ eşitliği sağlanıyor ise X ve Y raslantı değişkeni birbirinden bağımsızdır:

$$F_X(x)F_Y(y) = \left(\frac{x^2(4\,x+3)}{7}\right)\left(\frac{y(3y+8)}{28}\right) = \frac{x^2y(4\,x+3)(3y+8)}{196} \neq \frac{8\,x^3\,y+3\,x^2\,y^2}{28} = F_{XY}(x,y)$$

Eşitlik sağlanmadığından dolayı, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız değildir.

f) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$' dir.

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1\int_0^2 xyf(x,y)\,dy\,dx &&= \int_0^1\int_0^2 xy\left(\frac{3}{7}(2\,x^2 + x\,y)\right)dy\,dx \\
&= \frac{3}{7}\int_0^1\left(x^3y^2 + \frac{x^2y^3}{3}\Bigg|_0^2\right)dx &&= \frac{3}{7}\int_0^1\left(4x^3 + \frac{8x^2}{3}\right)dx \\
&= \frac{3}{7}\left(x^4 + \frac{8x^3}{9}\Bigg|_0^1\right) &&= \frac{3}{7}\left(1 + \frac{8}{9}\right) \\
&= \frac{17}{21}
\end{aligned}
$$

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x\left(\frac{6x(2x+1)}{7}\right)dx = \frac{6}{7}\left(\frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{7}$$

$$E(Y) = \int_0^2 yf(y)dy = \int_0^2 y\left(\frac{4+3y}{14}\right)dx = \frac{1}{14}\left(\frac{4y^2}{2} + y^3\Bigg|_0^2\right) = \frac{1}{14}(8+8) = \frac{8}{7}$$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{17}{21} - \left(\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}\right) = -0.0068$ bulunur.

g) Korelasyon katsayısı, $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$, dir.

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{6x(2x+1)}{7}\right) dx = \frac{6}{7}\left(\frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{39}{70}$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2 f(y)dy = \int_0^2 y^2 \left(\frac{4+3y}{14}\right) dx = \frac{1}{14}\left(\frac{4y^3}{3} + \frac{3y^4}{4}\Big|_0^2\right) = \frac{1}{14}\left(\frac{32}{3} + \frac{48}{4}\right) = \frac{68}{42}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{39}{70} - \left[\frac{5}{7}\right]^2 = 0.046939$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{68}{42} - \left[\frac{8}{7}\right]^2 = 0.312925$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{-0.0068}{\sqrt{0.046939 \times 0.312925}} = -0.056$$

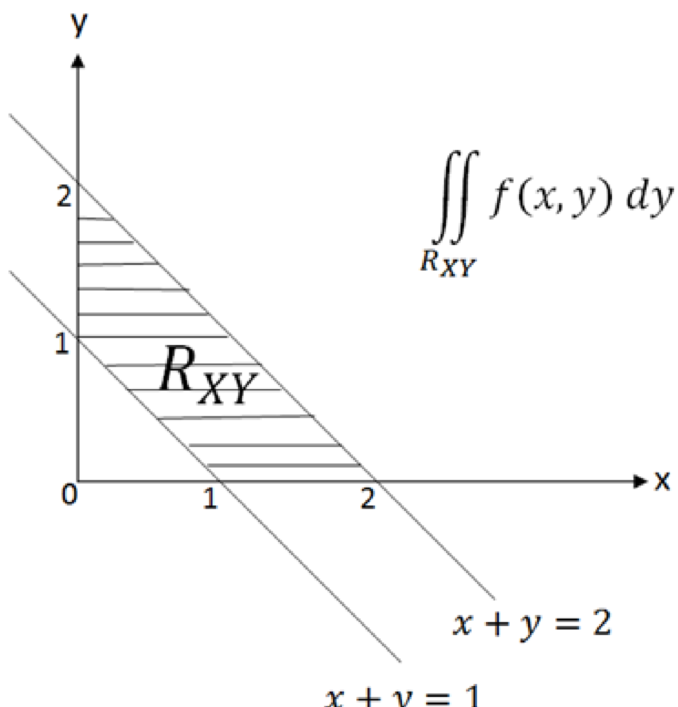
Yorum: X ve Y arasında negatif yönde çok zayıf bir ilişki olduğu söylenebilir.

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

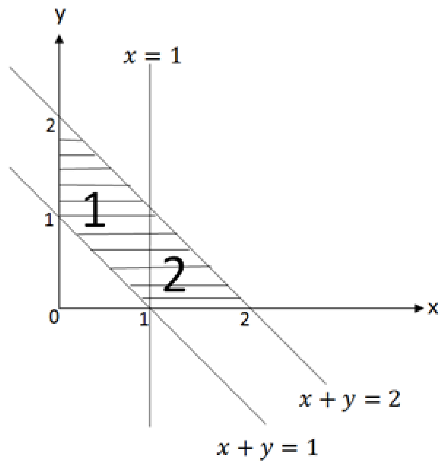
$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= cxy \quad , \quad x>0\,, y>0, 1 \leq x+y<2 \\
&= 0 \quad\quad , \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

c sabitini bulunuz.

Çözüm: X ve Y raslantı değişkenlerinin tanım bölgesi (R_{XY}) aşağıda verilen taralı alandır:



$$\iint\limits_{R_{XY}} f(x,y)\,dy\,dx = 1$$



$$\int_0^1\int_{1-x}^{2-x} cxy\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{2-x} cxy\,dy\,dx = \int_0^1 cx\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{1-x}^{2-x}\right)dx+\int_1^2 cx\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{cx}{2}\left((2-x)^2-(1-x)^2\right)dx+\int_1^2 \frac{cx}{2}(2-x)^2\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{cx}{2}(3-2x)\,dx+\int_1^2 \frac{cx}{2}(4-4x+x^2)dx$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{4x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\Big|_1^2\right)$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{2^4}{2}-\frac{2^5}{3}+\frac{2^4}{4}-\frac{4}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5c}{12}+\frac{5c}{24}$$

$$= \frac{15c}{24}$$

$$\frac{15c}{24}=1 \quad\rightarrow\quad c=\frac{8}{5} \quad \textit{olarak bulunur.}$$

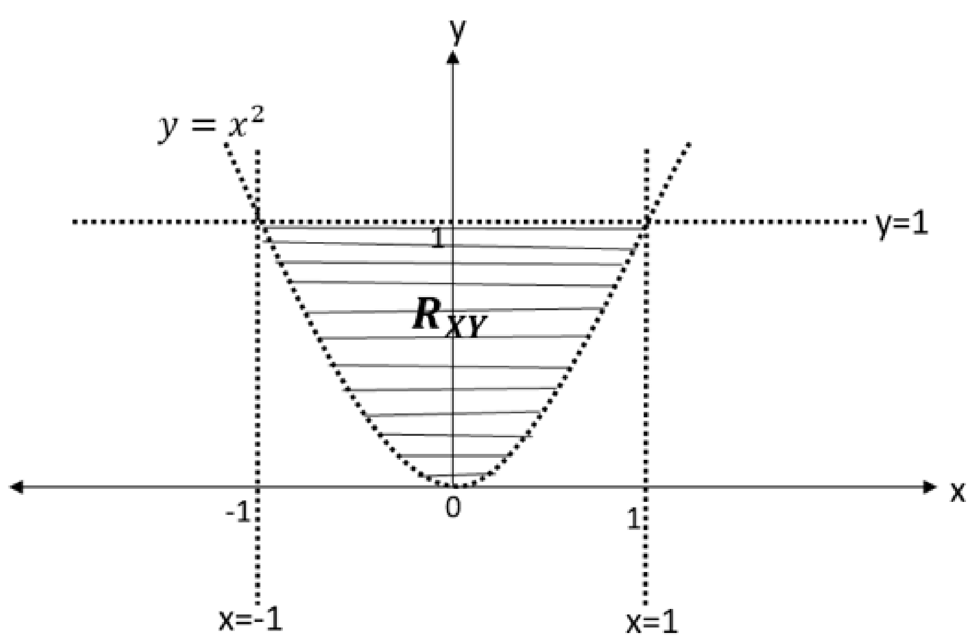
Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= cx^2y \quad , \quad 0 < x^2 \leq y < 1 \\ &= 0 \qquad\quad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) c sabitini bulunuz.

b) $P\left(0 < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \leq Y < 1\right)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm: X ve Y' nin tanımlı olduğu $R_{XY}: 0 < x^2 \leq y < 1$ bölgesi aşağıda verilmiştir. Bu bölge üzerinde çalışacağız.



a)

$$\iint_{R_{XY}} f(x,y)\,dy\,dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} cx^2y\,dy\,dx = 1$$

$$c\int_{-1}^{1}\left(\left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_{x^2}^{1}\right)dx = 1$$

$$\frac{c}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^4)\,dx = 1$$

$$\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-x^6)\,dx = 1$$

$$\frac{c}{2}\left(\left.\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right|_{-1}^{1}\right) = 1$$

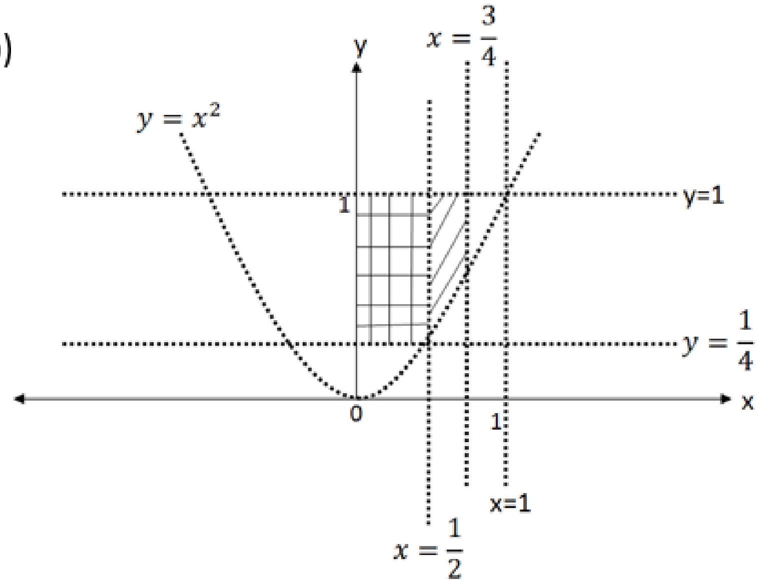
$$\frac{c}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)\right] = 1$$

$$\frac{c}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\right) = 1$$

$$\frac{c}{2}\left(\frac{14-6}{21}\right) = 1$$

$$c = \frac{21}{4}$$

b)



$$
\begin{aligned}
P\left(0 < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \le Y < 1\right) &= \int_0^{1/2} \int_{1/4}^{1} \frac{21x^2y}{4}\, dy\, dx + \int_{1/2}^{3/4} \int_{x^2}^{1} \frac{21x^2y}{4}\, dy\, dx \\
&= \frac{21}{4} \int_0^{1/2} \left(\frac{x^2y^2}{2} \Big|_{1/4}^{1} \right) dx + \frac{21}{4} \int_{1/2}^{3/4} \left(\frac{x^2y^2}{2} \Big|_{x^2}^{1} \right) dx \\
&= \frac{21}{8} \int_0^{1/2} x^2 \left(1 - \frac{1}{16}\right) dx + \frac{21}{8} \int_{1/2}^{3/4} x^2(1 - x^4) dx \\
&= \frac{21 \times 15}{8 \times 16} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^{1/2} \right) + \frac{21}{8} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \Big|_{1/2}^{3/4} \right) \\
&\cong 0.102539 + 0.212639 \\
&\cong 0.315178
\end{aligned}
$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{6}{5}(x+y^2) \quad , \quad 0 \le x \le 1 \,, 0 \le y \le 1 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad\;\; , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

b) $F(x,y)$ bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(X > 0.5\,, Y > 0.75)$ olasılığını bileşik dağılım fonksiyonundan yararlanarak bulunuz.

d) X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?

Çözüm:

a) X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dy = \frac{6}{5}\left(xy + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right) = \frac{2(3x+1)}{5}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{2}{5}(3x+1) \quad , \quad 0 \le x \le 1 \\ &= \quad 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2} + xy^2\Big|_0^1\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+y^2\right) = \frac{3(1+2y^2)}{5}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{3}{5}(2y^2+1) \quad , \quad 0 \le y \le 1 \\ &= \quad 0 \quad , \quad \textit{diğer } y \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

b) X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu:

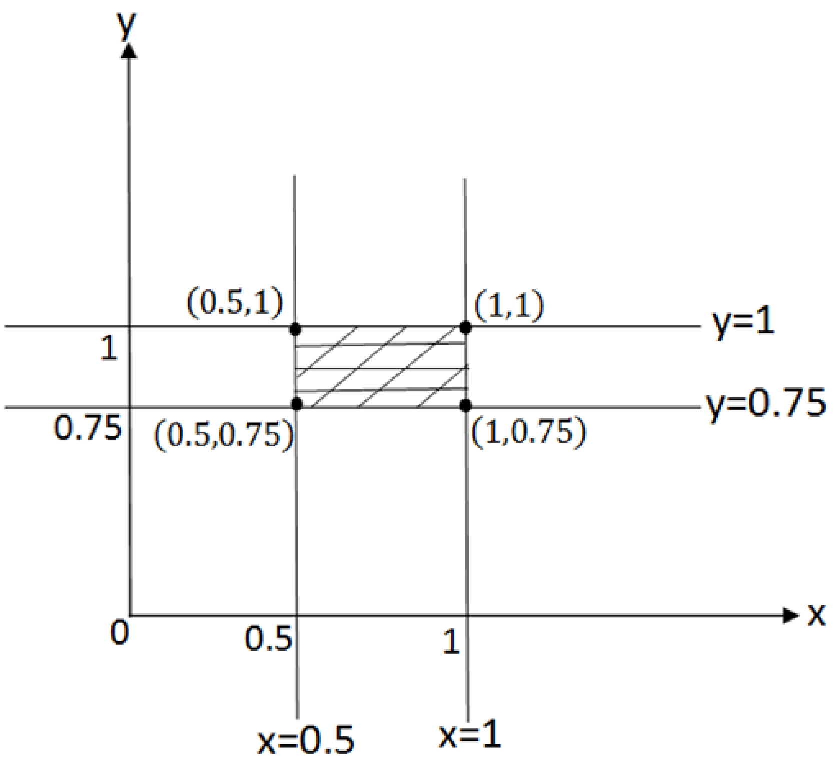
$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^x \int_0^y f(t,z)\, dz\, dt$$

$$= \int_0^x \int_0^y \frac{6}{5}(t+z^2)\, dz\, dt = \frac{6}{5}\int_0^x \left(tz + \frac{z^3}{3}\Big|_0^y \right) dt$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^x \left(ty + \frac{y^3}{3} \right) dt = \frac{6}{5}\left(\frac{t^2 y}{2} + \frac{t y^3}{3}\Big|_0^x \right) = \frac{3x^2y + 2xy^3}{5}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y+2xy^3}{5} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \,, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \,, y < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \,, y \geq 1 \end{cases}$$

c)



$$
\begin{aligned}
P(X > 0.5\,, Y > 0.75) &= F(1,1) - F(0.5,1) - F(1,0.75) + F(0.5,0.75) \\
&= \frac{3+2}{5} - \frac{3(0.5)^2 + 2(0.5)}{5} - \frac{3(0.75) + 2(0.75)^3}{5} \\
&\quad + \frac{3(0.5)^2(0.75) + 2(0.5)(0.75)^3}{5} \\
&= 1 - 0.215 - 0.61875 + 0.196875 \\
&= 0.363125
\end{aligned}
$$

d) $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ eşitliği sağlanıyor ise X ve Y raslantı değişkeni birbirinden bağımsızdır:

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{2(3x+1)}{5}\right)\left(\frac{3(2y^2+1)}{5}\right) = \frac{6(3x+1)(2y^2+1)}{25} \neq \frac{6}{5}(x+y^2) = f_{XY}(x,y)$$

Eşitlik sağlanmadığından dolayı, X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız değildir.