HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

huzem

FEN FAKÜLTESİ

MAT 122 MATEMATİK II

Ders Sorumluları: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk

Kaynak: Thomas Calculus

1. İNTEGRAL

Ters Türevlerin bulunması

Tanım : Bir I aralığındaki her x için $\boxed{F'(x) = f(x)}$ ise, I aralığındaki F fonksiyonuna f'in ters türevi denir.

Örnek 1. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için bir ters türev bulunuz:

a. $f(x) = 2x$ b. $g(x) = \cos x$, c. $h(x) = 2x + \cos x$

Çözüm.

a. $F(x) = x^2$ b. $G(x) = \sin x$ c. $x^2 + \sin x$

TEOREM. Eğer F fonksiyonu bir I aralığı üzerinde f fonksiyonunun bir ters türevi ise, f fonksiyonunun I aralığı üzerindeki en genel ters türevi şöyledir :

$$\boxed{F(x) + C}$$

burada C keyfi sabittir.

Örnek 2. $f(x) = 3x^2$'nin $F(1) = -1$ eşitliğini sağlayan bir ters türevini bulunuz.

Çözüm. $F(x) = x^3 + c$, $F(1) = -1$

$\Rightarrow 1 + c = -1 \Rightarrow c = -2$

$F(x) = x^3 - 2$

Örnek 3. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin genel ters türevini bulunuz.

a. $f(x) = x^5$ b. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ c. $h(x) = \sin 2x$ d. $k(x) = \cos\frac{x}{2}$

Çözüm :

a. $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$

b. $G(x) = 2\sqrt{x} + C$

c. $H(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$

d. $K(x) = 2\sin\frac{x}{2} + C$

Ters Türev Formülleri

	Fonksiyon	Genel ters türev
1.	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad n \neq -1$, n rasyonel
2.	$\sin kx$	$-\frac{\cos kx}{k} + C$, k bir sabit, $k \neq 0$
3.	$\cos kx$	$\frac{\sin kx}{k} + C$, k bir sabit, $k \neq 0$
4.	$\sec^2 x$	$\tan x + C$
5.	$\csc^2 x$	$-\cot x + C$
6.	$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
7.	$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$

Ters Türevlerin Lineerlik Kuralları

		Fonksiyon	Genel ters türev
1.	*Sabit Çarpan Kuralı:*	$kf(x)$	$kF(x) + C$, k bir sabit
2.	*Negatif Kuralı:*	$-f(x)$	$-F(x) + C$,
3.	*Toplam veya Fark Kuralı:*	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Belirsiz İntegraller

Bir f fonksiyonun bütün ters türevlerini göstermek için özel bir sembol kullanılır.

TANIM **Belirsiz İntegraller, İntegrant**

f'nin bütün ters türevlerinin kümesine, f'nin x'e göre **belirsiz integrali** denir ve

$$\int f(x)\, dx$$

ile gösterilir. $\int$ sembolü bir **integral işareti**dir. f fonksiyonu integralin **integrandı**, x ise **integrasyon değişkeni**dir.

Örnek 4. Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx$$

Çözüm.

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

Örnek 5. Aşağıdaki fonksiyonların genel ters türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

b. $f(x) = \dfrac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6}$

c. $f(x) = \sin x + 2\sinh x$

d. $f(x) = \dfrac{2+x^2}{1+x^2}$

Çözüm:

a. $$F(x) = \frac{8x^{9+1}}{9+1} - \frac{3x^{6+1}}{6+1} + \frac{12x^{3+1}}{4} + C$$

$$= \frac{8x^{10}}{10} + \frac{3x^7}{7} + \frac{12x^4}{4} + C$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{4}{5}x^{10} + \frac{3}{7}x^7 + 3x^4 + C$$

b. $$f(x) = \frac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 5x^{-6} - 4x^{-3} + 2$$

$$F(x) = \frac{5x^{-5}}{-5} - \frac{4x^{-2}}{-2} + 2x + C$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = -\frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^2} + 2x + C$$

c. $$f(x) = \sin x + 2\sinh x$$

$$F(x) = -\cos x + 2\cosh x + C$$

d. $$f(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = x + \arctan x + C$$

Örnek 6 : Aşağıdaki örneklerde f fonksiyonunu bulunuz.

a. $f''(x) = 6x + \sin x$

b. $f'(t) = \frac{t^2-1}{t}$; $f(1) = 1/2$

c. $f''(t) = 2e^t + 3\sin t$; $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$

Çözüm.

a. $f''(x) = 6x + \sin x$

$f'(x) = 3x^2 - \cos x + C$

$f(x) = x^3 - \sin x + Cx + D$

b. $f'(t) = t - \frac{1}{t}$, $f(1) = \frac{1}{2}$

$f(t) = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + C$

$\Rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{2} - \ln 1 + C = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad C = 0$

$f(t) = \frac{t^2}{2} - \ln|t|$

c. $f''(t) = 2e^t + 3\sin t$; $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$

$f'(t) = 2e^t - 3\cos t + C$

$f(t) = 2e^t - 3\sin t + Ct + D$

$f(0) = 0 \Rightarrow \quad 2 + D = 0, \quad D = -2$

$f(\pi) = 0 \Rightarrow \quad 2e^\pi - 3\sin\pi + C\pi - 2 = 0$

$C = \frac{2 - 2e^\pi}{\pi}$

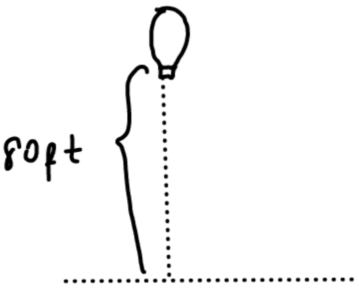
$f(t) = 2e^t - 3\sin t + \frac{2-2e^\pi}{\pi} - 2$

Ters Türev ve Hareket

Bir cismin konum fonksiyonunun türevinin cismin hızını ve hız fonksiyonunun türevinin de cismin ivmesini verdiğini biliyoruz. Bir cismin ivmesini biliyorsak, bir ters türev bularak cismin hızını ve hızının ters türevinden de cismin konum fonksiyonunu bulabiliriz.

Örnek 7. Bir balon, 80ft yükseklikten bir paket bıraktığında 12ft/sn hızla yükselmektedir. Paketin yere ulaşması ne kadar sürer?

Çözüm:



$v(t)$: paketin t anındaki hızını

$s(t)$: " " " yerden yüksekliğini

göstersin.

Dünyanın yüzeyi civarında yerçekimi ivmesi $32\ ft/sn^2$ 'dir. Bırakılan pakete başka kuvvetlerin etki etmediğini kabul ederek,

$$\frac{dv}{dt} = -32 \quad , \quad v(0) = 12$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -32t + C$$

$$v(0) = C = 12 \quad \Rightarrow \quad v(t) = -32t + 12$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = v(t) \quad \Rightarrow \quad s(t) = -16t^2 + 12t + C$$

$$s(0) = 80 \quad , \quad s(0) = 80 = C$$

$$s(t) = -16t^2 + 12t + 80$$

Paketin yere ulaşması $s(t)=0$ olması demektir.

$$\Rightarrow \quad -16t^2+12t+80=0$$

$$-4t^2+3t+20=0$$

$$t=\frac{-3\mp\sqrt{329}}{-8} \Rightarrow t_{1,2}\cong -1,89 \text{ ve } 2.64$$

Paket balondan bırakıldıktan yaklaşık 2.64 sn sonra yere çarpar.

NOT.

- $s(t)$: $v(t)$'nin ters türevidir.
- $v(t)$: $a(t)$'nin ters türevidir.

Örnek 8. $a(t)=t^2-4t+6$, $s(0)=0$, $s(1)=20$ olan parçacığın konum fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.

$$s'(t)=v(t), \quad v'(t)=s''(t)=a(t)$$

$$v(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+6t+C$$

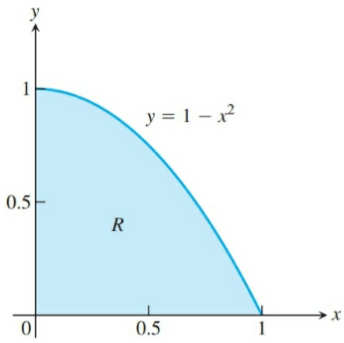
$$s(t)=\frac{1}{12}t^4-\frac{2}{3}t^3+3t^2+Ct+D$$

$$s(0)=0+D=0 \Rightarrow D=0$$

$$s(1)=\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+3+C=20$$

$$C=\frac{211}{12} \Rightarrow s(t)=\frac{1}{12}t^4-\frac{2}{3}t^3+3t^2+\frac{211}{12}t$$

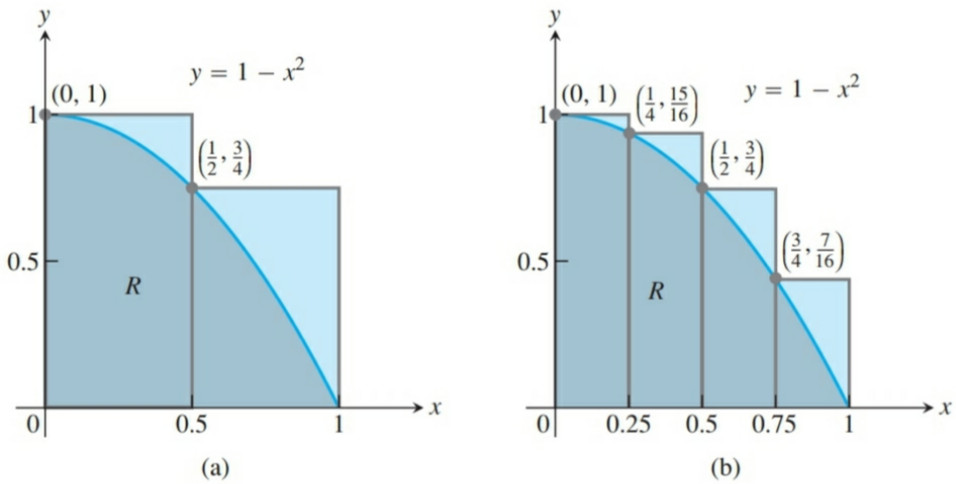
1.1. ALAN VE SONLU TOPLAMLARLA TAHMİN DE BULUNMAK



R bölgesinin alanı basit bir geometri formülü ile bulunamaz (Örnek 1).

x- ekseni üstünde, $y = 1 - x^2$ eğrisinin altında ve $x = 0$ ile $x = 1$ düşey doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulmak istediğimizi varsayalım. Ancak R bölgesi gibi bir eğri ile sınırlı genel şekillerin alanlarını hesaplamak için basit geometri formülleri yoktur. O zaman R bölgesinin alanını nasıl hesaplayabiliriz?

Aşağıdaki şekillere bakalım:



(a) R bölgesini içeren iki dikdörtgen kullanarak R'nin alanı için aslından fazla bir tahmin elde ederiz. (b) Dört dikdörtgen daha iyi bir tahmin verir. Her iki tahmin de alanın gerçek değerini aşar.

(a)'da iki dikdörtgenin birlikte R bölgesini kapsadığını görüyoruz. Her iki dikdörtgenin genişliği 1/2 ve yükseklikleri sırasıyla 1 ve 3/4'tür. Her dikdörtgenin yüksekliği f fonksiyonunun aralıktaki maksimum değeridir. İki dikdörtgenin toplam alanı R bölgesinin alanı A'ya yaklaşır.

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0.875$$

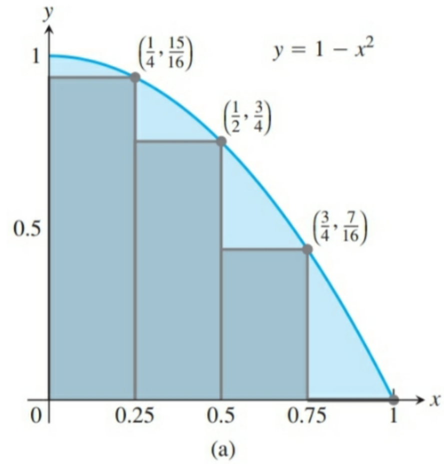
İki dikdörtgen R bölgesini içine aldığından bu tahmin gerçek alandan daha büyüktür. Bulunan 0.875 değerine **üst toplam** diyoruz. Çünkü her dikdörtgenin yüksekliği dikdörtgenin taban aralığındaki bir x noktası için f(x)'in maksimum değeri alınarak elde edilmiştir.

(b)'de ise her birinin genişliği 1/4 olan ve birlikte R bölgesini içine alan daha ince dört dikdörtgen alarak tahminimizi genişletiyoruz. Bu dört dikdörtgen ise aşağıdaki yaklaşımı verir:

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125$$

Sonuç A'dan hala büyüktür çünkü R dört dikdörtgenin içindedir.

Alanı tahmin etmek için şimdi de dikdörtgenleri R bölgesinin içinde kalacak şekilde yerleştirelim:



(a)

Her bir dikdörtgenin genişliği önceki gibi 1/4'tür, fakat dikdörtgenler daha kısadır ve tamamen f'in grafiğinin altında kalırlar. $f(x) = 1-x^2$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında azalandır ve dolayısıyla bu dikdörtgenlerden her birinin yüksekliği, dikdörtgenin tabanını oluşturan alt aralığın sağ uç noktasındaki f'nin değeridir. Dördüncü dikdörtgenin yüksekliği sıfırdır, dolayısıyla alana katkısı yoktur. Yükseklikleri, her bir alt taban aralıklarındaki bir x noktası için f(x)'in minimum değerleri olan bu dikdörtgenlerin toplam alanı R'nin alanına **alt toplam** yaklaşımını verir.

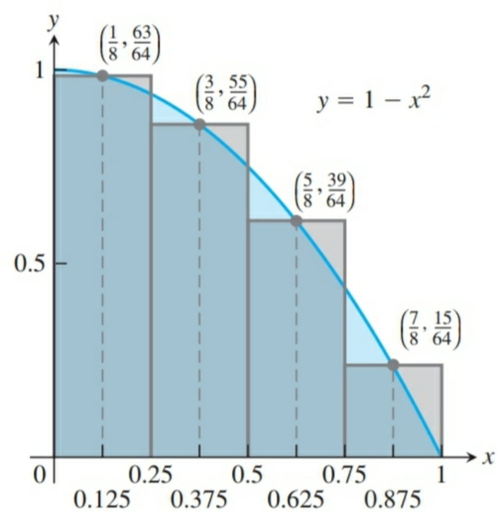
$$A \approx \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125$$

Tüm dikdörtgenler R bölgesinin içinde kaldıklarından bu tahmin A alanından daha küçüktür.

A'nın gerçek değeri bu alt ve üst toplamların arasındadır:

$$0.53125 < A < 0.78125$$

Bir diğer tahmin de yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında f'nin değerlerine eşit olan dikdörtgenler kullanılarak elde edilebilir. Bu tahmin yöntemi **orta nokta kuralı** olarak adlandırılır:



Orta nokta kuralı bir alt toplam ile bir üst toplam arasında bir tahmin verir. Fakat alanın gerçek değerinden büyük mü yoksa küçük mü olduğunu bilemeyiz.

Genişlikleri 1/4 alan dört dikdörtgen ile orta nokta kuralı R alanını şöyle tahmin eder:

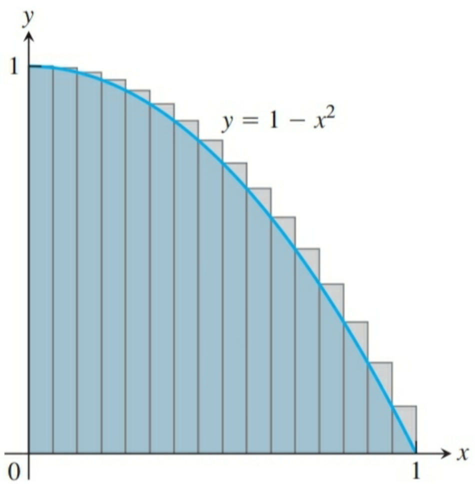
$$A \approx \frac{63}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{55}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{39}{24}\cdot\frac{1}{4} + \frac{15}{64}\cdot\frac{1}{4} = \frac{172}{64}\cdot\frac{1}{4} = 0.671875$$

Hesapladığımız her toplamda f fonksiyonunun tanımlı olduğu $[a,b]$ aralığı $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ eşit genişlikli n alt aralığa bölünmüş ve f her alt aralıktaki bir noktada hesaplanmıştır.

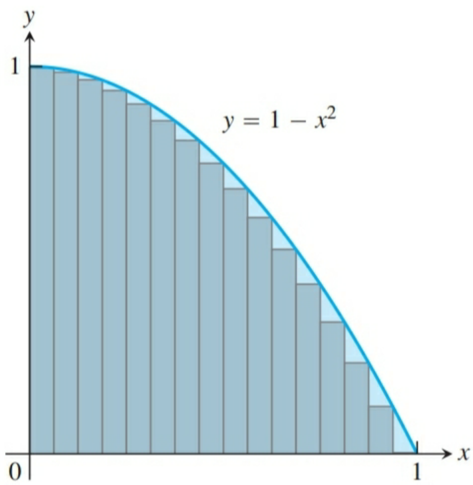
Birinci alt aralıkta c_1, ikincisinde $c_2, \dots,$ bu durumda tüm sonlu toplamlar aşağıdaki formdadır:

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x$$

NOT : Her dikdörtgen daha ince olmak üzere daha çok dikdörtgen çizildiğinde, R bölgesinin gerçek alanına çok daha iyi bir yaklaşımda bulunulacaktır.



(b)



(a)

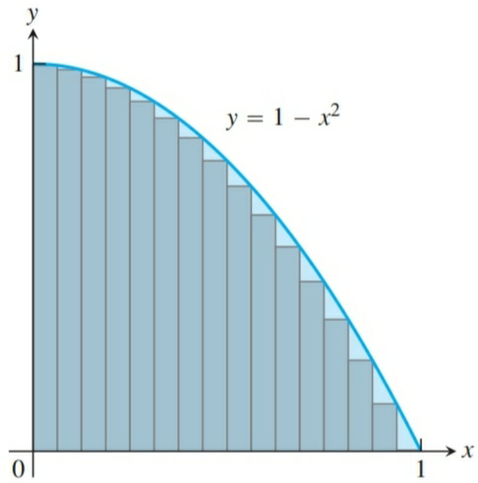
16 dikdörtgen kullanılarak R'nin alanı için üst ve alt toplamlar elde edilmiştir.

1.2 SONLU TOPLAMLARIN LİMİTLERİ

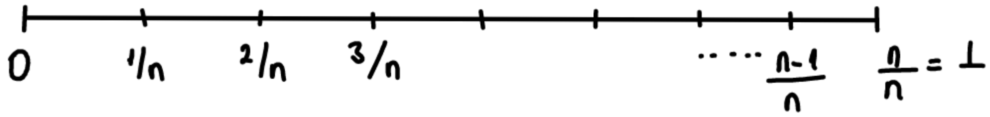
RIEMANN TOPLAMI

Sonlu toplam yaklaşımları, terim sayıları arttırıldığında ve alt aralıkların genişlikleri daraltıldığında daha doğru hale gelmektedir.

Örnek. Sayıları sonsuza giden ve genişlikleri sıfıra yaklaşan eşit genişlikli dikdörtgenler kullanarak, $y = 1 - x^2$ grafiğinin altında ve x- ekseninin $[0,1]$ aralığı üstündeki R bölgesi alanının alt toplam yaklaşımları limit değerini bulunuz.



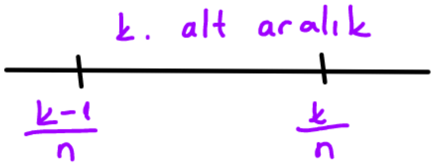
Genişlikleri eşit ve $\Delta x = \frac{(1-0)}{n}$ olan n tane dikdörtgen kullanarak bir alt toplam yaklaşımını hesaplayıp $n \to \infty$ iken ne olduğuna bakacağız.



[0,1] aralığını eşit genişlikli n tane alt aralığa böldük.

Her alt aralığın genişliği 1/n' dir.

$f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonu [0,1] aralığı üzerinde azalandır, ve bir alt aralıktaki en küçük değeri, alt aralığın sağ uç noktasında almaktadır.



Bu nedenle alt toplam $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ alt aralığı üzerindeki yüksekliği

$f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \frac{k^2}{n^2}$ olan dikdörtgenlerden oluşur.

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 1 - \frac{1}{n^3} \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

Her n için sağlanan bir alt toplam ifadesi elde ettik, $n \to \infty$ iken bu ifadenin limitini alıp, alt aralıkların sayısı artarken ve genişlikleri sıfıra yaklaşırken alt toplamların yakınsadığını elde ederiz.

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = 1 - \frac{2}{6} = 2/3$$

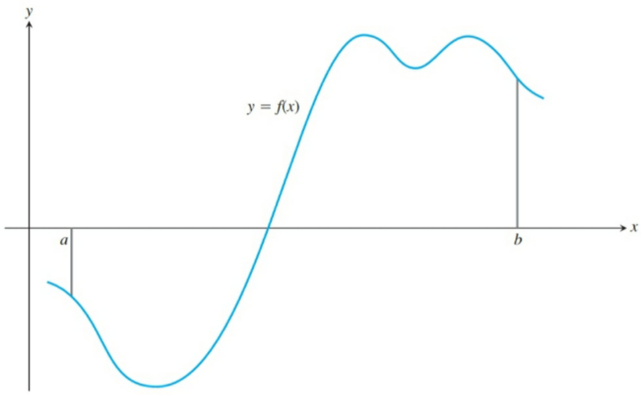
Alt toplam yaklaşımları $2/3$'e yakınsar.

ÖDEV: Yukarıdaki hesaplamayı üst toplam yaklaşımını yaparak limitin gene $2/3$ olduğunu gösteriniz.

NOT: R bölgesinin alanını bu limit değeri olarak tanımlayacağız.

RIEMANN TOPLAMLARI

Bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı herhangi bir f fonksiyonu verilsin:



$[a,b]$ kapalı aralığını eşit genişlikte olması gerekmeyen alt aralıklara ayıralım, bunun için a ve b arasında aşağıdaki koşulu sağlayan $n-1$ tane $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ noktalarını seçeriz;

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

$a = x_0$ ve $b = x_n$ ile gösterelim:

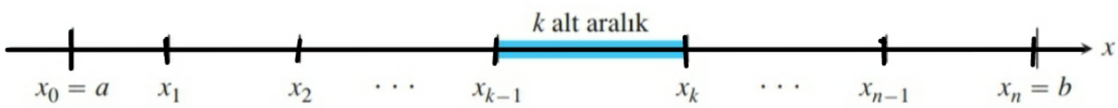
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ kümesine $[a,b]$ kapalı aralığının bölünüşü denir.

P bölünüşü $[a,b]$ aralığını n tane kapalı alt aralığa böler;

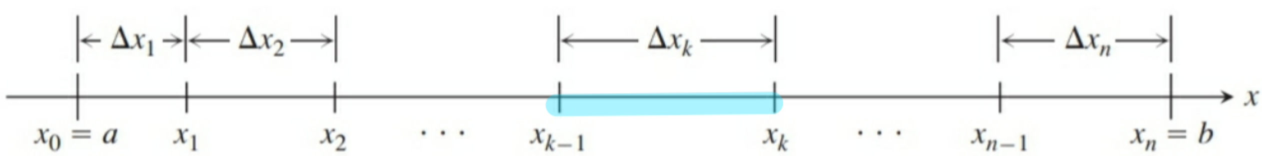
$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \dots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

Bu alt aralıkların birincisi $[x_0, x_1]$, ikincisi $[x_1, x_2]$, dir. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere k. alt aralığı $[x_{k-1}, x_k]$'dır;

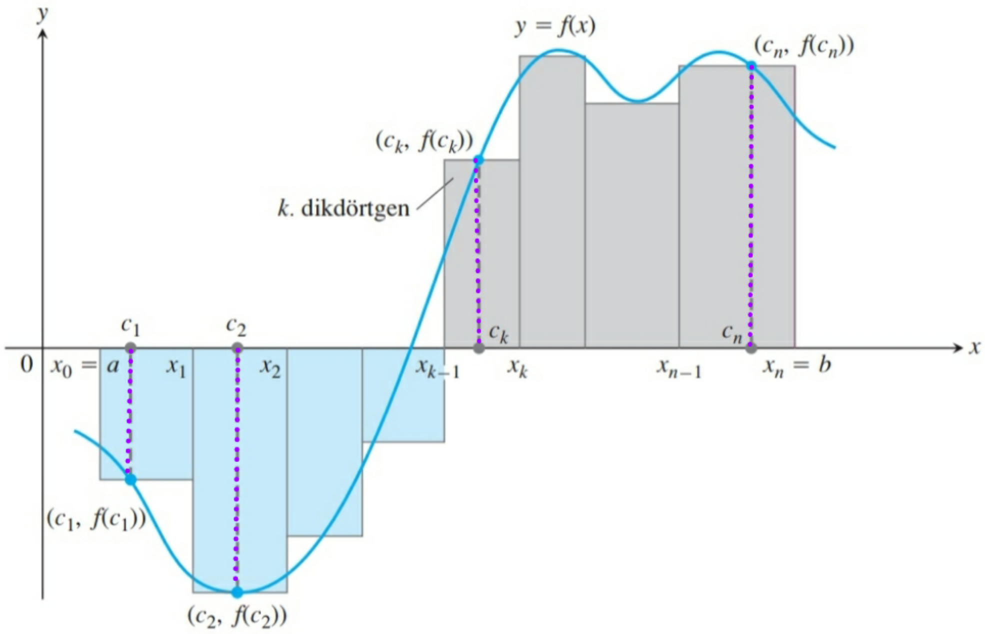


Birinci $[x_0, x_1]$ alt aralığının genişliği Δx_1,
ikinci $[x_1, x_2]$ " " " Δx_2
k. $[x_{k-1}, x_k]$ " " " Δx_k
ile gösterilir.

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$
$$\vdots$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$



Her alt aralıkta bir nokta seçeriz:
k. alt aralık $[x_{k-1}, x_k]$'dan seçilen nokta c_k olsun:



Her alt aralık üzerinde, eğriye $(c_k, f(c_k))$ noktasında değecek şekilde x- ekseninden uzanan birer düşey dikdörtgen oluştururuz. Bu dikdörtgenler $f(c_k)$'nın pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak x- ekseninin üst tarafında veya alt tarafında bulunabilir.

Her alt aralık üzerinde $f(c_k)\,\Delta x_k$ çarpımını oluştururuz. Bu çarpımları toplayarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

S_p toplamına, f fonksiyonu için $[a,b]$ aralığında Riemann Toplamı denir.

Seçtiğimiz P bölünüşüne ve alt aralıklarda seçilen c_k noktalarına bağlı olarak böyle birçok toplam elde edilebilir.

1.3 BELİRLİ İNTEGRAL

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sınırlı olsun.

$[a,b]$ aralığı için aşağıdaki bölünüşü yapalım

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$ Riemann toplamını gözönüne alalım.

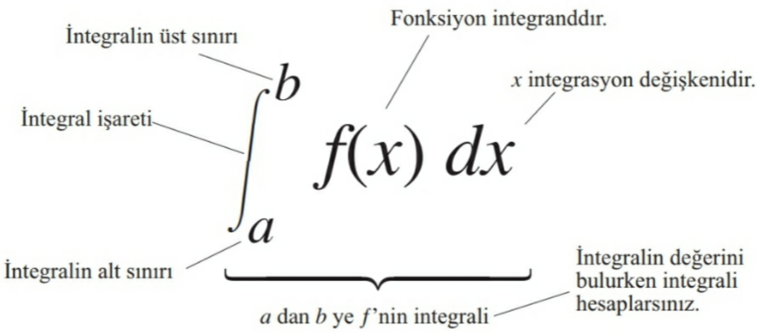
$$\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$$

$\mu \to 0$ iken S_n Riemann toplamının sonlu bir I sayısına yakınsadığını kabul edelim.

Bu I sayısına, f fonksiyonunun a'dan b'ye belirli integrali denir ve aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

TEOREM. $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir.



Eğer $f(x)$ fonksiyonu pozitif ise I bize $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x- ekseni arasında kalan bölgenin alanını verir.

Örnek. $\int_a^b 1\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

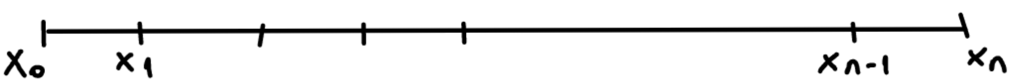
$f(x)=1$ sabit fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığında integralini hesaplayacağız:

$$\int_a^b dx = \lim_{\mu\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \lim_{\mu\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

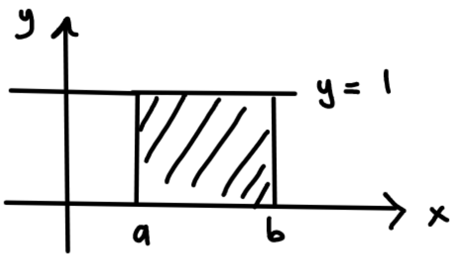
$$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})$$

$$= x_n - x_0 = b - a$$



Geometrik olarak yorumlayalım :

$\int_a^b 1\, dx$ ifadesi $y=1$ doğrusu ile $a \leq x \leq b$ olmak üzere x- ekseni arasında kalan dikdörtgenin alanıdır :



$$\text{Alan} = b-a = \int_a^b dx$$

Örnek. $\int_a^b x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\int_a^b x\, dx = ? \quad , \quad f(x) = x$$

$$\int_a^b x\, dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

$$c_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad , \quad c_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$$

$$\int_a^b x\, dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}).(x_k + x_{k-1})$$

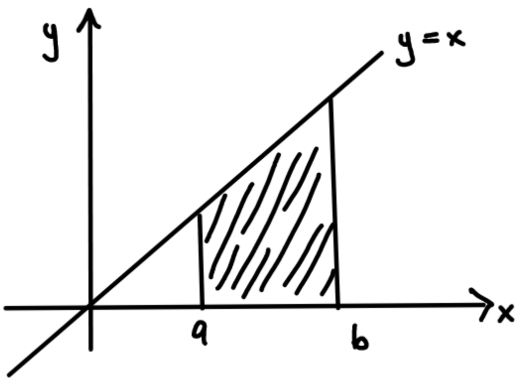
$$= \frac{1}{2} \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2} \lim_{\mu \to 0} (x_n^2 - x_0^2)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\mu \to 0} (b^2 - a^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)}$$

Geometrik olarak yorumlayalım :

$\int_a^b x\,dx$ integrali $y=x$ doğrusu ile $a \leq x \leq b$ olmak üzere x- ekseni arasında kalan bölgenin alanını vermektedir.



$$\text{Alan} = \frac{1}{2}(b-a)(b+a)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \int_a^b x\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b \qquad (1)}$$

Aşağıdaki sonuçlar Riemann toplamı hesabı kullanılarak elde edilir.

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \qquad c \text{ herhagi bir sabit} \tag{2}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b \tag{3}$$

Belirli İntegralin Özellikleri

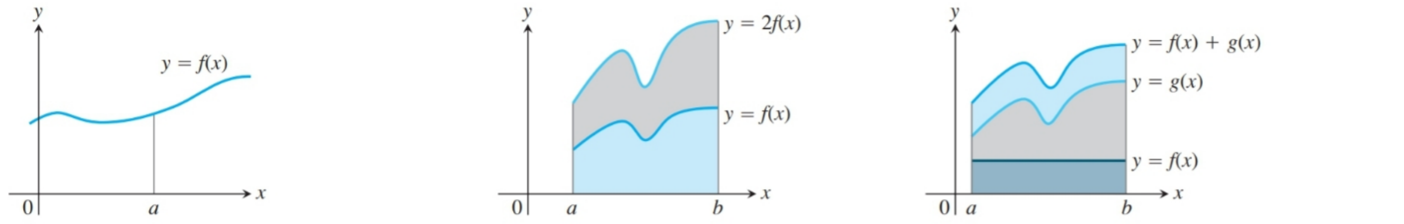
f ve g [a,b] aralığı üzerinde integrallenebilir ise Aşağıdaki kurallar sağlanır.

1. *İntegrasyon Sırası:* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
2. *Sıfır Genişliğinde Aralık:* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
3. *Sabitle Çarpım:* $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ — k herhangi bir sayı

   $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — $k = -1$
4. *Toplam ve Farklar:* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
5. *Toplanabilirlik:* $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
6. *Max-Min eşitsizliği:* max f ve min f f'nin $[a, b]$ aralığındaki maksimum ve minimum değerleri ise,

   $$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a).$$
7. *Baskınlık:* $[a, b]$ üzerinde $f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

   $[a, b]$ üzerinde $f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (Özel durum)



(a) *Sıfır Genişliğinde Aralık:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

(Bir nokta üzerindeki alan 0 dır.)

(b) *Sabitle Çarpım:*

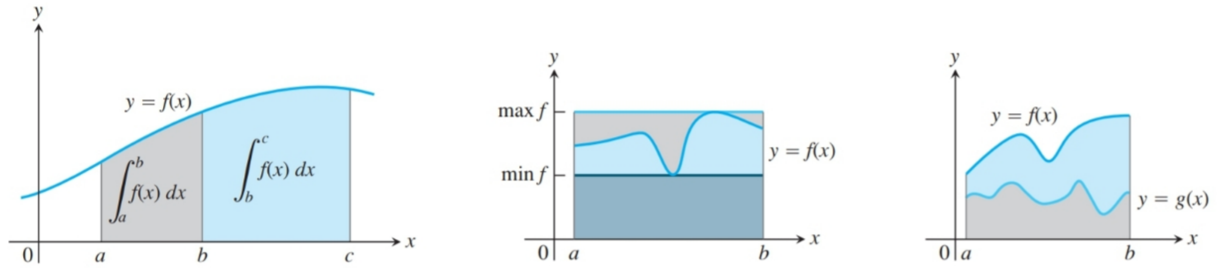
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

($k = 2$ için gösterilmiştir)

(c) *Toplam:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Alanlar toplanır)



(d) *Belirli integraller için toplanabilirlik:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(e) *Max-Min eşitsizliği:*

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a)$$

(f) *Baskınlık:*

$[a, b]$ aralığında $f(x) \ge g(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

Kural 6' nın ispatı :

$$\min f \cdot (b-a) = \min f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \min f \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \text{maks} f \cdot \Delta x_k$$

$$\Rightarrow \min f \cdot (b-a) \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \le \text{maks} f \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{maks} f \cdot (b-a)$$