SERİLER UYGULAMA-3 (Oran ve Kök Testleri; Kuvvet serileri)

1) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksaklıklarını belirleyin.

a) $\sum_{0}^{\infty} \frac{2^k+5}{3^k}$, b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$, c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{k \cdot 2^k \cdot (k+1)!}{3^k \cdot k!}$

Çözüm: a) $a_k=\frac{2^k+5}{3^k}$, $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}+5}{3^{k+1}}\cdot\frac{3^k}{2^k+5}\right|$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k.2+5}{3.(2^k+5)}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k(2+5/2^k)}{3.2^k(1+5/2^k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{2+5/2^k}{3.(1+5/2^k)}=\frac{2}{3}$

<1 old. dan, Oran Testi gereği seri mutlak yakınsaktır. $\Rightarrow$ yakınsak

(2. yol, $a_k=\frac{2^k+5}{3^k}$ ve $b_k=(2/3)^k$ seçilerek limit karş. Testi uygula!)

3. yol $\rightarrow$ Kök Testi

b) $a_k=\frac{(2k)!}{(k!)^2}$ ise $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}\cdot\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)(2k+1).(2k)!}{(k+1)^2.(k!)^2}\cdot\frac{(k!)^2}{(2k)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{2.(2k+1)}{(k+1)}=4>1$

Oran testi $\Longrightarrow$ seri ıraksaktır.

c) $a_k=\frac{k.2^k.(k+1)!}{3^k.k!}=\frac{k.2^k(k+1)}{3^k}\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\,2^{k+1}(k+2)}{3^{k+1}}$

$\cdot\frac{3^k}{k.2^k.(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{2.(k+1)(k+2)}{3.k.(k+1)}=2/3<1\Rightarrow$ Oran Testinden seri mutlak yakınsak

$\Rightarrow$ seri yakınsaktır.

2) Aşağıdaki serilerin yakınsaklık veya ıraksaklıklarını inceleyin.

a) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^3}$, b) $\sum_{1}^{\infty}\frac{k^k}{2^{k^2}}$, c) $\sum_{1}^{\infty}\frac{3^k}{k^3.2^k}$

Çözüm: a) $a_k=\frac{\ln k}{k^3}\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^3}\cdot\frac{k^3}{\ln k}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{\ln k}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left[\frac{k+1}{k}\right]^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{\ln(k+1)}\cdot\frac{1}{\left(\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^3\right)}=1$

old. dan Oran testi sonuç vermez.

Ancak $b_k=\frac{1}{k^2}$ için $a_k, b_k>0$ ve $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k^3}\cdot\frac{k^2}{1}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}\overset{?}{=}0$ ve de $\sum_{1}^{\infty}b_k=\sum_{1}^{\infty}1/k^2$ yakınsak old. dan

Lim. Karş. Testinden seri yakınsak olacaktır.

b) $a_k = \frac{k^k}{2^{k^2}}$ ise $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k^k}{2^{k^2}}\right|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^k}{2^{k^2}}\right)^{1/k}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^k} = 0 < 1$ old. dan Kök Testi gereği seri mutlak yakınsaktır $\Rightarrow$ yakınsaktır

c) $a_k = \frac{3^k}{k^3 \cdot 2^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3^k}{k^3 \cdot 2^k}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{2 \cdot k^{3/k}}$

$= \frac{3}{2\cdot 1} = 3/2 > 1$ $\Big(\lim_{k\to\infty} k^{3/k} = \infty^0$ belirsiz. $\lim_{x\to\infty} x^{3/x} = \infty^0$

$y = x^{3/x} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{x} \ln x$ ve

$\lim_{x\to\infty} \frac{3 \cdot \ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3/x}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^0 = 1 \Big)$

olduğundan seri, Kök Testi gereği ıraksaktır.

3) Aşağıdaki serilerin yakınsaklık veya ıraksaklıklarını inceleyiniz. a) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n$ olan $\sum_1^\infty a_n$,

b) $\sum_1^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n] \cdot (3^n + 1)}$

Çözüm: a) $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_1 = \frac{1}{2} \cdot 3$

$a_3 = \frac{2}{3} \cdot a_2 = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = 1$, $a_4 = \frac{3}{4} \cdot a_3 = \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = \frac{3}{4}$

$a_5 = \frac{4}{5} \cdot a_4 = \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} = \frac{3}{5}$, $a_6 = \frac{5}{6} \cdot a_5 = \frac{\cancel{5}}{6} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} = \frac{3}{6}, \ldots$

$a_n = \frac{3}{n}$ olacaktır $\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{3}{n}$ alınırsa, Harmonik seri olarak bu seri ıraksaktır.

b) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n) \cdot (3^n + 1)} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}(2n+1)}{[\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot (2n+2)](3^{n+1}+1)} \cdot \frac{(\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n})(3^n+1)}{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1) \cancel{3^n}(1 + \frac{1}{3^n})}{(2n+2) \cdot \cancel{3^n}(3 + \frac{1}{3^n})}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = 1/3 < 1$ old. dan, Oran Testi gereğince seri mutlak yakınsaktır $\Rightarrow$ yakınsaktır.

4) Ayrı sorular: a) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{k!}{k^k}$, b) $\sum_{1}^{\infty}\frac{3^k k!}{k^k}$, c) $\sum_{2}^{\infty}\left(\tanh^{-1}\frac{1}{k}\right)^k$

Çözüm: a) $a_k=(-1)^{k+1}\cdot\frac{k!}{k^k}$ alınırsa;

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|(-1)^{k+2}\cdot\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{k!\,(-1)^{k+1}}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}=\frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{e}<1$$ olduğundan

Oran Testi gereğince seri mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsaktır.

b) $a_k=\frac{3^k.k!}{k^k}\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}.(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{3^k.k!}$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{3.\cancel{3^k}.\cancel{(k+1)}.k!}{(k+1)^k.\cancel{(k+1)}}\cdot\frac{k^k}{\cancel{3^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}=\frac{3}{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=3/e$$

$>1\Rightarrow$ Seri ıraksaktır.

c) $a_k=\left(\tanh^{-1}(1/k)\right)^k\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\tanh^{-1}1/k\right)^k}$

$$=\lim_{k\to\infty}\tanh^{-1}(1/k)=\tanh^{-1}\left(\lim_{k\to\infty}1/k\right)=\tanh^{-1}0=0$$

$<1\Rightarrow$ Kök testine göre seri mutlak yakınsak $\Rightarrow$ seri yakınsak olur.

---

5) a) $\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{(2k)!}{2^{k!}}}_{=a_k}=0$, b) $\lim_{k\to\infty}\frac{(k!)^k}{k^{k!}}=0$ olduğunu göst.

Çözüm: a) Bu limitin sıfır olduğunu göstermek için $\sum_{1}^{\infty}a_k$ serisinin yakınsak olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için de $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+2)!}{2^{(k+1)!}}\cdot\frac{2^{k!}}{(2k)!}\right|$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2).(2k+1).(2k)!}{2^{k.k!}.2^{k!}}\cdot\frac{2^{k!}}{(2k)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)(2k+1)}{2^{k!.k}}=0<1$$

$\Rightarrow$ Oran Testinden $\sum_1^{\infty} a_k$ serisi yakınsak $\xRightarrow[\text{Testi}]{\text{Gen. Ter.}}$ $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.
bulunur.

b) $a_k = \dfrac{(k!)^k}{k^{k!}} \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olduğunu görelim.

Bunun için de $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{k!}{k^{k!/k}}$

$= \lim_{k\to\infty} \dfrac{k!}{k^{(k-1)!}} = 0$ olduğunu görünüz (ödev olsun)

$\Rightarrow$ Kök Testine göre $\sum_1^{\infty} a_k$ serisi yakınsak

olur $\xRightarrow{\text{Gen. Ter. Testi}}$ $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ bulunmuş olur.

6) Aşağıdaki serilerin yakınsaklık aralıklarını, yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık kümelerini bulunuz.

a) $\sum_1^{\infty} \dfrac{k^k}{(2k)!} \cdot x^k$, b) $\sum_1^{\infty} k.x^k$, c) $\sum_1^{\infty} e^{kx}$

Çözüm: (a) $a_k = \dfrac{k^k}{(2k)!} x^k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{(k+1)^{k+1} \cdot x^{k+1}}{(2k+2)!} \cdot \dfrac{(2k)!}{k^k \cdot x^k}\right|$

$= \dfrac{|x|}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)^k \cdot \cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)} \cdot (2k+1)\cancel{(2k)!}} \cdot \dfrac{\cancel{(2k)}!}{k^k} = \dfrac{|x|}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k \dfrac{1}{2k+1} = e.0$

$= 0 < 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ olup, tüm $\mathbb{R}$ de seri mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsak olur. $\Rightarrow R = \infty$ ve $I = Y = \mathbb{R}$ dir.

b) $a_k = k.x^k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k.x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} k^{1/k}$

$= |x|.1 = |x| < 1$ olan $x \in \mathbb{R}$ için seri mutlak yakınsaktır.

$\Leftrightarrow x \in (-1, 1) = I$ yakınsaklık aralığı,

yakınsaklık yarıçapı $R = \dfrac{1-(-1)}{2} = 2/2 = 1$ dir.

Uç noktalarda: $x = -1$ ise $\sum_1^{\infty} (-1)^k . k$ alt. serisi ıraksaktır.

$x = 1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} k$ serisi ıraksaktır (gen. Ter. Testi)

Öyleyse $Y = I = (-1, +1)$ dir. Seri $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ da ıraksak olur.

c) $a_k = e^{kx}$ olmak üzere $\lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{e^{(k+1)x}}{e^{kx}}\right| = |e^x|$

$= e^x < 1 = e^0 \Rightarrow x<0$ olan $x \in \mathbb{R}$ noktalarında yakınsak

$x>0$ için ıraksak ve $x=0$ için ıraksak olur.

$\Rightarrow I = (-\infty, 0) = Y$ ve $R = \infty$ dır.

7) Kök testini kullanarak aşağıdaki serilerin yakınsaklık veya ıraksaklıklarını inceleyiniz.

a) $\sum_{1}^{\infty} k.x^{2k}$, b) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{x^k.(\ln k)^2}$, c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$

Çözüm: a) $a_k = k.x^{2k}$ ise $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k.x^{2k}|}$

$= x^2 . \lim_{k\to\infty} k^{1/k} \overset{?}{=} 1$ $\left(\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = [\infty^0] \Leftrightarrow y = x^{1/x} \right.$

$\Leftrightarrow \ln y = \frac{\ln x}{x}$ ve $\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\Leftrightarrow$ seri $x^2<1 \Leftrightarrow$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^0 = 1.$ $\left.\right)$

$-1<x<1$ için m.yakınsak

ve $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ için ıraksaktır. $\Rightarrow R=1$, $I=(-1,1)$

ve uç noktalarda:

$x=-1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} k.((-1)^2)^k = \sum_{1}^{\infty} k$ ıraksak

$x=1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} k$ ıraksaktır.

$\Rightarrow Y = (-1,1)$ dır.

b) $a_k = \frac{1}{x^k(\ln k)^2} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{|x|^k(\ln k)^2}}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|x|.(\ln k)^{2/k}} = \frac{1}{|x|.1} < 1$ $\left(\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{2/x} = \infty^0 \Rightarrow y = (\ln x)^{2/x} \right.$

$\Leftrightarrow \ln y = \frac{2.\ln x}{x}$ ve $\lim_{x\to\infty} \ln y = \frac{\infty}{\infty}$

$\Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ için yakınsak

L.H $= \lim_{x\to\infty} \frac{2/x}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1.$ $\left.\right)$

ve $|x|<1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ için ıraksaktır.

Uç noktalar: $x=-1 \Rightarrow \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^k(\ln k)^2}$ alternatif seri olarak yakınsaktır. $\left(b_k = \frac{1}{(\ln k)^2} > 0, \text{ azalan ve } \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(\ln k)^2} = 0. \right)$

$x=1 \Rightarrow \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^2}$ ıraksaktır (çünkü $b_k = 1/(\ln k)^2$ ve $c_k = \frac{1}{k}$ için $\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{c_k} \overset{?}{=} \infty$ ve de $\sum_{2}^{\infty} 1/k$ Harmonik serisi ıraksak $\overset{\text{Lim.Kars.}}{\Longrightarrow} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^2}$ de ıraksak)

$\Rightarrow Y = (-\infty,-1] \cup (1,\infty)$ olur.

c) $a_k = \frac{\sin kx}{k^2}$ ve $0 \le |a_k| = \left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ dır.

Ayrıca; $\sum_1^\infty 1/k^2$ (p-Testinden) yakınsak $\underset{\text{Kıyas Şartı}}{\overset{\text{Karş.}}{\Longrightarrow}} \sum_1^\infty \left|\frac{\sin kx}{k^2}\right|$ yakınsak $\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{\sin kx}{k^2}$ mutlak yakınsak $\overset{\forall x \in \mathbb{R}}{\Longrightarrow}$ yakınsak

8) Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık kümeleri ile yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

a) $\sum_1^\infty \frac{x^k}{k \cdot 4^k}$, b) $\sum_1^\infty (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k(k+2)}$, c) $\sum_1^\infty \frac{(x-1)^{3k}}{k^2 \cdot 8^k}$

Çözüm: a) $a_k = \frac{x^k}{k \cdot 4^k}$ ve $c_k = \frac{1}{k \cdot 4^k}$ olsun. Burada ilk önce $R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{c_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{k \cdot 4^k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{4 \cdot \sqrt[k]{k}}} = 4 \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 4 \cdot 1 = 4$.

(veya $R = \lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{c_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k \cdot 4^k} \cdot \frac{(k+1) \cdot 4^{k+1}}{1} = 4 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 4 \cdot 1 = 4$.)

olduğunda seri $|x| < R = 4 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$ için mutlak yakınsak ve $|x| > R = 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ için ıraksaktır.

Uç noktalar için: $x = -4 \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{k}$ Alt. seri yakınsak.

$x = 4 \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{4^k}{k \cdot 4^k} = \sum_1^\infty 1/k$ Harmonik serisi ıraksaktır.

Böylece seri $Y = [-4, 4)$ kümesinde yakınsar ve $(-\infty, -4) \cup [4, \infty)$ da ıraksak olur

b) $a_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k \cdot (k+2)}$ olmak üzere oran testini uygulayalım:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^{k+2} \cdot x^{k+1}}{(k+1)(k+3)} \cdot \frac{k \cdot (k+2)}{(-1)^{k+1} \cdot x^k}\right| = |x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}$$

$= |x| \cdot 1 = |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ için seri mutlak yakınsak

$\Rightarrow I = (-1, 1)$ ve $R = 1$ olur; ayrıca seri $|x| > 1 \Leftrightarrow$ $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ için de ıraksak olur.

Uç noktalar için:

$x=-1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k.(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{1}{k(k+2)} = -\sum_1^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

serisi yakınsaktır(?) (Yol.Göst: Limit Karşılaştırma)

$x=1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k(k+2)}$ alternatif serisi yakınsaktır.

Böylece $Y=[-1,+1]$ olmuş olur.

c) $a_k = \frac{(x-1)^{3k}}{k^2 . 8^k}$ ise Oran Testinden;

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{3k+3}}{(k+1)^2 . 8^{k+1}} \cdot \frac{k^2 . 8^k}{(x-1)^{3k}} \right| = \frac{|x-1|^3}{8} . \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{|x-1|^3}{8} . 1 = \frac{|x-1|^3}{8} < 1 \Leftrightarrow |x-1|^3 < 8 \Leftrightarrow |x-1| < 2$$

$\Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1,3)$ için seri mutlak yakınsak, $|x-2| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$ için de ıraksak olur. Bu durumda $R=2$ yakınsaklık yarıçapı ve $I=(-1,3)$ yakınsaklık aralığı.

Uç-noktalar için:

$$x=-1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{k^2 . 8^k} = \sum_1^{\infty} (-1)^{3k} \frac{2^{3k}}{k^2 . 8^k} = \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{8^k}{k^2 . 8^k}$$

$= \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ Alternatif serisi yakınsaktır(?)

$$x=3 \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{(3-1)^{3k}}{k^2 . 8^k} = \sum_1^{\infty} \frac{2^{3k}}{k^2 . 8^k} = \sum_1^{\infty} \frac{(2^3)^k}{k^2 . 8^k} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

serisi de p-Testinden yakınsak olur. Böylece serinin yakınsaklık kümesi $Y=[-1,3]$ olur.

<u>Ödev</u>: Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık kümelerini bulunuz.

a) $\sum_1^{\infty} \frac{\ln k . (x^2)^k}{\sqrt{k}}$, b) $\sum_1^{\infty} \frac{k^2 . (x+1)^{2k}}{2^k}$, $\sum_1^{\infty} (-1)^k . \frac{(x+2)^k}{k^k}$.