UYGULAMA IV-ÇÖZÜMLER
(Özel Kesikli Dağılımlar)

1) X raslantı değişkeni, bir saat içerisinde TÜVTÜRK araç muayene istasyonundan ayrılan (terk eden) araç sayısını göstersin. $X \sim Poisson(\lambda = 3\ araç/saat)$

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-3}\frac{3^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 7) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 6) = 1 - \sum_{x=0}^{6} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0.0335$

b) $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = 0.049787 \cong 0.05$

2) X raslantı değişkeni, bir saatte herhangi bir kasaya gelen müşteri sayısını göstersin.
$X \sim Poisson(\lambda = 7\ müşteri/saat)$

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-7}\frac{7^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a)
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) &= \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) \\ &= \sum_{x=0}^{3} e^{-7}\frac{7^x}{x!} \\ &= e^{-7}\left(\frac{7^0}{0!} + \frac{7^1}{1!} + \frac{7^2}{2!} + \frac{7^3}{3!}\right) \\ &= e^{-7}\frac{538}{6} \\ &= 0.0818 \end{aligned}$$

b) 20 dakikada beş müşterinin kasaya gelmesi olasılığını istediği için,
λ nın 20 dakikaya göre hesaplanması gerekir.

$$\left.\begin{array}{ll} 60\ \text{dk.} & 7\ \text{müşteri} \\ 20\ \text{dk.} & \lambda^*\ \text{müşteri} \end{array}\right\} \qquad \lambda^* = \frac{20 \times 7}{60} = 2.33 \cong 2$$

Y raslantı değişkeni, yirmi dakikada herhangi bir kasaya gelen müşteri sayısını göstersin.

$Y \sim Poisson(\lambda = 2\ müşteri/\ 20dakikada)$

$$\begin{aligned} p(y) &= e^{-2}\frac{2^y}{y!} \quad , \quad y = 0,1,2,3,\cdots \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$$P(Y = 5) = e^{-2}\frac{2^5}{5!} = 0.036$$

c) S toplam hizmet süresini gösteren raslantı değişkeni olmak üzere, her müşterinin kasada geçirdiği yaklaşık süre 5 dakika olduğuna göre, S=5X olur.

E(S)=E(5X)=5E(X)=5×7=35 dk.
V(S)=V(5X)=25E(X)=25×7=175

d) 2.5 saat= 150 dakika

$$P(S > 150) = P(5X > 150) = P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - \sum_{x=0}^{30} e^{-7}\frac{7^x}{x!} = 2.234457 \times 10^{-11}$$

Yorum: $P(S > 150)$ olasılığı çok küçük bulunmuştur. Bu nedenle, toplam hizmet süresinin 2.5 saati geçmesi olası bir durum olarak görülmemektedir.

3) X raslantı değişkeni, telefon santraline herhangi bir dakikada gelen telefon konuşmalarının sayısını göstersin.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{60 dk.} & \text{240 konuşma} \\ \text{1 dk.} & \lambda \text{ konuşma} \end{array}\right\} \quad \lambda=\frac{240}{60} = 4 konuşma/dakika$$

$$X \sim Poisson(\lambda = 4\ konuşma/dakika)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-4}\frac{4^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \sum_{x=0}^{7} e^{-4}\frac{4^x}{x!} = 0.0511$$

4) X raslantı değişkeni, herhangi bir saatte havalimanına inen uçak sayısını göstermek üzere;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{24 saatte} & \text{120 uçak} \\ \text{1 saatte} & \lambda \text{ uçak} \end{array}\right\} \quad \lambda=\frac{120}{24} = 5uçak/saat$$

$$X \sim Poisson(\lambda = 5\ uçak/saat)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-5}\frac{5^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $E(X) = 5\ uçak$ Yorum: Günün herhangi bir saatinde havalimanına 5 uçak gelmesi beklenir.

b) $P(X = 7) = e^{-5}\frac{5^7}{7!} = 0.05954036$

c) $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} e^{-5}\frac{5^x}{x!} = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!}\right) = 0.4334701$

d) $P(X = 0) = e^{-5}\frac{5^0}{0!} = 0.01831564$

5) X raslantı değişkeni herhangi bir 2 dakikada Bolu tüneline giren araç sayısını göstersin.

$$X \sim Poisson(\lambda = 5\ araç/2dakika)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-5}\frac{5^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $P(X > 11) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - \sum_{x=0}^{11} e^{-5}\frac{5^x}{x!} = 0.005453092 \cong \%0.5$

b) Tünel 2 dakikalık aralıklarla 10 kez gözlensin. İki dakikalık zaman dilimlerinin en az birinde tünelden 11'den fazla araç geçmesi olasılığını bulalım:

Her 2 dakikalık zaman dilimleri birbirinden bağımsızdır. Bu zaman dilimlerin her birinde tünelden 11'den fazla araç geçmesi olasılığı p=%0.5 'tir. Buradan istenen olasılığı Binom dağılımından elde ederiz.

$Y \sim Binom(n = 10; p = \%0.5)$ n=10 (2 şer dakikalık zaman aralıklarını gösterir.)

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = 1 - (1 - 0.005)^{10} = 1 - 0.995^{10} = 0.05318$$

6) X raslantı değişkeni, 150 aşılanmış tavşandan hastalığa yakalananların sayısını göstersin.

$X \sim Binom(n = 150; p = 0.02)$

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{150}{x} p^x (1-p)^{150-x} \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{150}{x} 0.02^x (0.98)^{150-x} \\ &= 0.081876 \text{ (kesin değer)} \end{aligned}$$

Binom dağılımın Poisson dağılımına yaklaşımından bu olasılığı hesaplamak istersek;

$Binom(n = 150; p = 0.02) \xrightarrow{n \to \infty,\ p \to 0} Poisson(\lambda = np)$ (np<5 ise yaklaşım daha iyidir) olur.

$\lambda = np = 150 \times 0.02 = 3\ tavşan$

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) \cong 1 - \sum_{x=0}^{5} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0.083917\ (yaklaşık\ değer)$

7) X raslantı değişkeni, yeni üretilen bir saatin garanti süresi içerisinde bozulanlarının sayısını göstersin.

$X \sim Binom(n = 1000; p = 0.002)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \sum_{x=0}^{5} \binom{1000}{x} p^x (1-p)^{1000-x} \\ &= \sum_{x=0}^{5} \binom{1000}{x} 0.002^x (0.998)^{1000-x} \\ &= 0.9835446 \text{ (kesin değer)} \end{aligned}$$

$Binom(n=1000; p=0.002) \xrightarrow{n\to\infty,\ p\to 0} Poisson(\lambda=np)$ (np<5 ise yaklaşım daha iyidir) olur.

$\lambda = np = 1000 \times 0.002 = 2\ saat$

$P(X \leq 5) \cong \sum_{x=0}^{5} e^{-2}\frac{2^x}{x!} = 0.9834364\ (yaklaşık\ değer)$

8) X raslantı değişkeni, üretilen televizyonlardan arızalı olanlarının sayısını göstersin.

$X \sim Binom(n=500; p=0.008)$

$$\begin{aligned} P(X>2) &= 1-P(X\leq 2) \\ &= 1-\sum_{x=0}^{2}\binom{500}{x}p^x(1-p)^{500-x} \\ &= 1-\sum_{x=0}^{2}\binom{500}{x}0.008^x(0.992)^{500-x} \\ &= 0.7630728\ \text{(kesin değer)} \end{aligned}$$

$Binom(n=500; p=0.008) \xrightarrow{n\to\infty,\ p\to 0} Poisson(\lambda=np)$ (np<5 ise yaklaşım daha iyidir) olur.

$\lambda = np = 500 \times 0.008 = 4\ televizyon$

$P(X>2) = 1-P(X\leq 2) \cong 1-\sum_{x=0}^{2} e^{-4}\frac{4^x}{x!} = 0.7618962\ (yaklaşık\ değer)$

9) X raslantı değişkeni, 3000 telefon faturasından yanlış adrese giden faturaların sayısını göstersin.

$X \sim Binom(n=3000; p=0.001)$

$$P(X\geq 7) = 1-P(X\leq 6) = 1-\sum_{x=0}^{6}\binom{3000}{x}0.001^x(0.999)^{3000-x} = 0.03343291\ (kesin\ değer)$$

$Binom(n=3000; p=0.001) \xrightarrow{n\to\infty,\ p\to 0} Poisson(\lambda=np)$ (np<5 ise yaklaşım daha iyidir) olur.

$\lambda = np = 3000 \times 0.001 = 3\ fatura$

$P(X\geq 7) = 1-P(X\leq 6) \cong 1-\sum_{x=0}^{6} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0.03350854\ (yaklaşık\ değer)$

10) X raslantı değişkeni, bir çift ayakkabıda bulunan kusur sayısını göstermek üzere;

$X \sim Poisson(\lambda = 4\ kusur/bir\ çift\ ayakkabıda)$

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-4}\frac{4^x}{x!} \quad , \quad x=0,1,2,3,\cdots \\ &= 0 \qquad\quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Bir çift ayakkabıda beklenen kar: $E(Y) = E(350-2X-X^2) = 350-2E(X)-E(X^2)$

$E(X) = V(X) = \lambda = 4$ buradan $E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = 4 + 4^2 = 20$

$E(Y) = E(350 - 2X - X^2) = 350 - 2E(X) - E(X^2) = 350 - 2 \times 4 - 20 = 322TL$

1500 çift ayakkabından elde edilen kar $1500E(Y) = 1500 \times 322 = 483000TL$ olur.

11) X raslantı değişkeni, λ parametreli Poisson dağılımına sahip olsun. $P(X = 0) = P(X = 1)$ olduğuna göre; $P(X \leq 2)$ olasılığını ve Y=3X-1 raslantı değikeninin beklenen değerini ve varyansını bulalım.

$$P(X = 0) = P(X = 1) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} \\ e^{-\lambda}(\lambda - 1) &= 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1 \ olur. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^{-1}\frac{1^0}{0!} + e^{-1}\frac{1^1}{1!} + e^{-1}\frac{1^2}{2!} = \frac{5}{2}e^{-1} \\ &= 0.919686 \end{aligned}$$

$Y = 3X - 1$
$E(Y) = E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 3\lambda - 1 = 2$
$V(Y) = V(3X - 1) = 9V(X) = 9\lambda = 9$

12) X raslantı değişkeni, 12 elmadan yerine koymaksızın rasgele çekilen 5 elma içindeki çürük elmaların sayısını göstersin.

$X \sim Hipergeometrik(N = 12, n = 5, r = 3)$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{3}{x}\binom{12-3}{5-x}}{\binom{12}{5}} \quad , \quad x = 0,1,2,3 \ (r < n) \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $E(X) = n\frac{r}{N} = 5 \times \frac{3}{12} = 1.25 \cong 1$
Yorum: Yerine koymadan seçilen 5 elmadan bir tanesinin çürük olması beklenir.

b) $P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{3}}{\binom{12}{5}} = 0.1383636$

c) $P(X < 4) = 1$

d) $P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{5}}{\binom{12}{5}} = 0.1590909$

13) X raslantı değişkeni, 15 toptan yerine koymaksızın rasgele çekilen 5 top içindeki kırmızı topların sayısını göstersin.

$X \sim Hipergeometrik(N = 15, n = 5, r = 12)$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{12}{x}\binom{15-12}{5-x}}{\binom{15}{5}} \quad , \quad x = 2,3,4,5 \ (r > n) \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{\binom{12}{2}\binom{3}{3}}{\binom{15}{5}} = 0.978022$

b) $E(X) = n\frac{r}{N} = 5 \times \frac{12}{15} = 4$

Yorum: Yerine koymadan seçilen 5 toptan 4 tanesinin kırmızı olması beklenir.

c) $Kazanç\colon\ -20X + 60(5 - X) = 300 - 80X = g(X)$

$$E\big(g(X)\big) = E(300 - 80X) = 300 - 80E(X) = 300 - 80 \times 4 = -20\text{TL zarar}$$

$$\begin{aligned} V\big(g(X)\big) &= V(300 - 80X) &&= 80^2 V(X) = 6400V(X) \\ &= 6400 \times n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) &&= 6400 \times 5\left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{3}{15}\right)\left(\frac{10}{14}\right) \\ &= 3659.96TL^2 \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)} = n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

14) X raslantı değişkeni, rasgele seçilen 7 makinedeki bozukların sayısını göstersin.

$$X \sim Hipergeometrik(N = 40, n = 7, r = 6)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{6}{x}\binom{34}{7-x}}{\binom{40}{7}} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5,6 \ \ (r < n) \\ &= 0 \qquad\qquad\quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{\binom{6}{x}\binom{34}{7-x}}{\binom{40}{7}} = 0.05474705$

b) $E(X) = n\frac{r}{N} = 7 \times \frac{6}{40} = 1.05 \cong 1$

Yorum: Seçilen 7 makineden bir tanesinin bozuk olması beklenir.

c) $V(X) = \frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)} = n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 7\left(\frac{6}{40}\right)\left(\frac{34}{40}\right)\left(\frac{33}{39}\right) = 0.755159$

15) X raslantı değişkeni, işe başvuran kişilerden seçilen 6 kişi içinde istenilen özelliğe sahip adayların sayısını göstersin.

$$X \sim Hipergeometrik(N = 130, n = 6, r = 75)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{75}{x}\binom{130-75}{6-x}}{\binom{130}{6}} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5,6 \ \ (r > n) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$$\text{P(X = 3)} = \frac{\binom{75}{3}\binom{55}{3}}{\binom{130}{6}} = 0.29706\ olarak\ bulunur.$$