HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

huzem

FEN FAKÜLTESİ

MAT 122 MATEMATİK II-Uygulama

Ders Sorumluları: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk

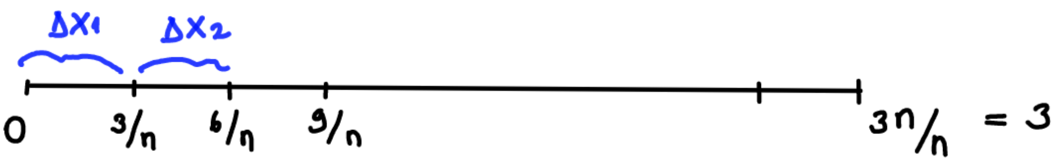
Kaynak: Thomas Calculus

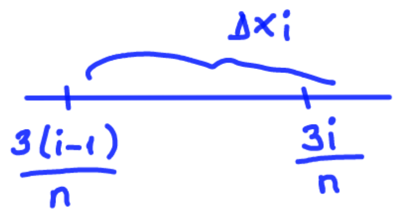
1. Belirli Integralin tanımını kullanarak

$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $[0,3]$ alt aralığını n eşit parçaya ayıralım. Her bir parçanın genişliği $\Delta x_i = \frac{3-0}{n}$ olur.





Her aralığın sağ uç noktasını c_i olarak seçelim;

yani, $c_i = \frac{3i}{n}$ olur.

$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\cdot\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{9i^2}{n^2}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{27i^2}{n^3}-\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{27}{n^3} \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{n}.n \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{9}{2} \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} - 3 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{9}{2} . 1 . \left(1+\frac{1}{n}\right) . \left(2+\frac{1}{n}\right) - 3 \right\}$$

$$= \frac{9}{2} . 1 (1+0). (2+0) - 3$$

$$= 6 //$$

2. Aşağıdaki limiti belirli integral ile ifade ediniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2.\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n} \right) . \frac{1}{n}$$

Çözüm. $c_i = \frac{i}{n}$ seçelim, $[0,1]$ aralığını n eşit parçaya ayıralım:

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$ olur.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n} \right) \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2c_i^2 + c_i\right) \Delta x_i$$

$f(x) = 2x^2 + x$ olmak üzere

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^2 + x)\,dx$$

3. Aşağıdaki limiti belirli integral ile ifade ediniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1+2n}{i-1+n} \left(\frac{1}{n}\right)$$

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1+2n}{i-1+n}\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum\frac{\frac{i-1+2n}{n}}{\frac{i-1+n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}-\frac{1}{n}+2}{\frac{i}{n}-\frac{1}{n}+1}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i-1}{n}+2}{\frac{i-1}{n}+1}\cdot\frac{1}{n}\quad,\qquad c_i=\frac{i-1}{n}\,,\ \Delta x_i=\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i+2}{c_i+1}\cdot\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\,\Delta x_i$$

$$f(x):=\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x+2}{x+1}\,dx$$

4. Integralin geometrik yorumunu kullanarak aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız.

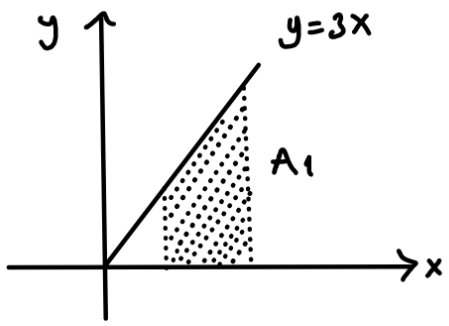
$$\int_2^4 3x + \sqrt{4x-x^2}\, dx$$

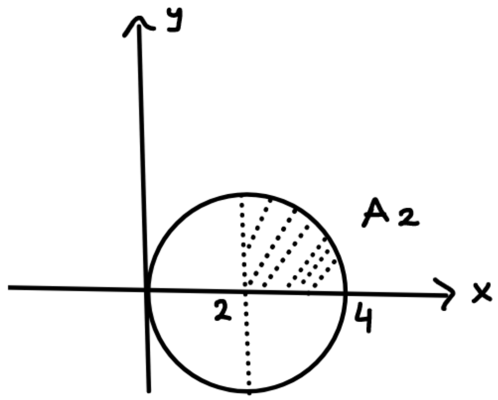
Çözüm.

$$I = \underbrace{\int_2^4 3x\, dx}_{A_1} + \underbrace{\int_2^4 \sqrt{4x-x^2}\, dx}_{A_2}$$

$2 \leq x \leq 4$ olmak üzere $y=3x$ ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını verir.

$2 \leq x \leq 4$ olmak üzere $y=\sqrt{4x-x^2}$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını verir.





$$y = \sqrt{4x-x^2}$$

$$y^2 = 4x - x^2$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$I = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \frac{12+6}{2} \cdot 2 = 18, \qquad A_2 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

$$I = 18 + \pi$$

5. Aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösteriniz

$$2e^2 \leq \int_1^3 \frac{e^{2x^2}}{x}\,dx$$

Çözüm. $f(x) = \dfrac{e^{2x^2}}{x}$ fonksiyonunun $[1,3]$ üzerinde minimum ve maksimum değerini araştıralım:

$$f'(x) = \frac{4x e^{2x^2} x - e^{2x^2}}{x^2} = \frac{e^{2x^2}}{x^2}(4x^2 - 1) = 0, \qquad x = \mp 1/2$$

		$-1/2$		$1/2$		1		3	
f'	$+$		$-$		$+$		$+$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$$\min_{x \in [1,3]} f(x) = f(1) = e^2$$

$$(b-a) \min f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \text{ maks } f$$

eşitsizliğini kullanırsak;

$$2e^2 \leq \int_1^3 \frac{e^{2x^2}}{x}\,dx \quad \text{elde edilir.}$$

6. Ters türev tanımını kullanarak aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadıklarını kontrol ediniz.

a. $\int x\sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x + C$

b. $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + C$

c. $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

Çözüm.

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\sin x + c\right) = x\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x \neq x\sin x$ (Y)

b. $\frac{d}{dx}\left(-x\cos x + c\right) = -\cos x + x\sin x \neq x\sin x$ (Y)

c. $\frac{d}{dx}\left(-x\cos x + \sin x + c\right) = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$ (D)

7. h integrallenebilir ve $\int_{-1}^{1} h(r)\,dr = 0$, $\int_{-1}^{3} h(r)\,dr = 6$ olsun. Aşağıdakileri hesaplayınız.

a. $\int_1^3 h(r)\,dr$ b. $-\int_3^1 h(r)\,dr$

Çözüm.

a. $$\underbrace{\int_{-1}^{1} h(r)\,dr}_{=0} + \int_{1}^{3} h(r)\,dr = \underbrace{\int_{-1}^{3} h(r)\,dr}_{=6}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{3} h(r)\,dr = 6$$

b. $$-\int_{3}^{1} h(r)\,dr = \int_{1}^{3} h(r)\,dr = 6$$

8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ integralinin değeri için üst ve alt sınır bulunuz.

Çözüm.

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında azalandır.

$$\text{maks } f = f(0) = 1$$
$$\min f = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\min f \cdot (1-0) \leq \int_{0}^{1} f(x)\,dx \leq \text{maks } f\,(1-0)$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_{0}^{1} f(x)\,dx \leq 1$$