HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

ÖZEL SÜREKLİ DAĞILIMLAR
Bölüm 2

DERS SORUMLULARI
DOÇ. DR. AYTEN YİĞİTER
DR. ÖĞR. ÜYESİ CEREN EDA CAN

X raslantı değişkeni, gerçel (reel) eksende bir aralık ya da aralıklar kümesinde değer alıyorsa bu raslantı değişkenine **sürekli raslantı değişkeni** denir.

Örneğin,

- bir çiftlikte üretilen devekuşu yumurtalarının ağırlığı,
- bir market zincirinin günlük cirosu,
- bir arabanın 1km' de tükettiği benzin miktarı,
- bir ineğin günlük verdiği süt miktarı,
- bir radyoaktif maddenin bozulması (parçalanması) için geçen süre (yarılanma süresi),
- belirli bir hastalıktan ölüm oranı vb.

sürekli raslantı değişkenlerinin her biri sürekli bir olasılık dağılımına sahiptir.

Özel Sürekli Dağılımlar

1) Normal Dağılım
2) Tek Biçimli Dağılım
3) Üstel Dağılım
4) Gamma Dağılımı
5) Beta Dağılımı
6) Cauchy Dağılımı

1. NORMAL DAĞILIMI

Normal dağılım, ilk kez 1733 yılında Fransız matematikçi Abraham DeMoivre (1667-1754) tarafından Binom dağılımının limit şekli olarak elde edilmiştir. Daha sonra, 1778 yılında Pierre-Simon Laplace' ın (1749-1827) merkezi limit teoremini geliştirmesi sonucu aynı dağılımı keşfetmiştir.

DeMoivre ve Laplace' ın çalışmalarından bağımsız olarak, 1809 yılında Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ölçüm hatalarının dağılımı olarak Normal dağılımı keşfetmiştir. Bu nedenle, Normal dağılım eğrisine "**Gauss eğrisi**" de denilmektedir. Eğrinin şekli çan' a benzediği için "**çan eğrisi**" adı da kullanılmaktadır.

Normal dağılım, sürekli raslantı değişkenlerine ilişkin olasılık dağılımlarının en önemlisidir ve çok yaygın olarak kullanılır. Bunun nedenlerini aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- Birçok sürekli raslantı değişkeni, doğal olarak Normal ya da yaklaşık olarak Normal dağılım göstermektedir. Herhangi bir değişken Normal dağılım göstermiyorsa, uygun dönüşümler yapıldıktan sonra Normal dağılım gösterebilir.
- Birçok kesikli olasılık dağılımları için olasılıkların elde edilmesinde Normal dağılım yaklaşımları kolaylık sağlamaktadır.
- Normal dağılımın olasılıklarını bulmak için, ayrıntılı tabloların hazırlanmış olması, araştırmacıların işini büyük ölçüde kolaylaştırır.
- Kuramsal olarak sahip olduğu özellikler nedeniyle de yaygın olarak kullanılır. Bu özelliklerden en önemlisi, örneklem büyüklüğü arttırıldığında asıl dağılım ne olursa olsun, örneklem ortalamasının dağılımının yaklaşık olarak Normal dağılım göstermesidir. Bu özellik, merkezi limit teoremi olarak bilinir.

Tanım: X raslantı değişkeni μ $(-\infty < \mu < +\infty)$ ve σ^2 $(\sigma > 0)$ parametreleri ile Normal dağılıma sahip olsun. X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < +\infty$$

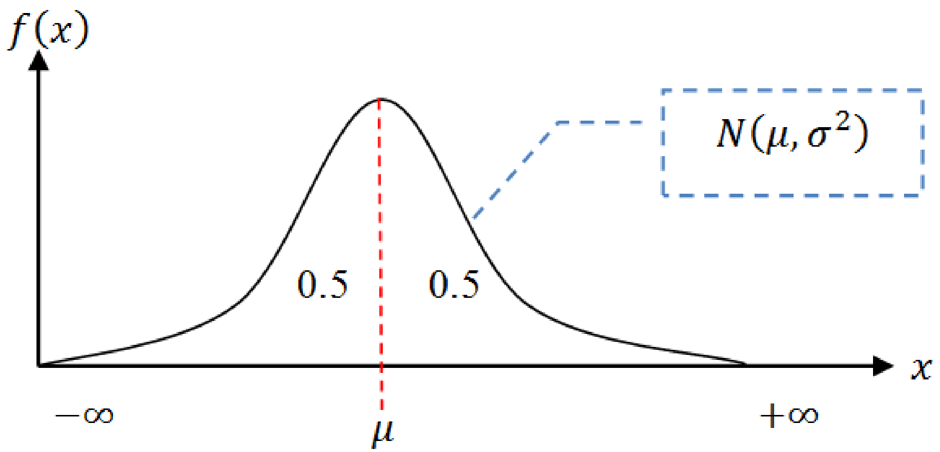
biçimindedir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ biçiminde gösterilir. Burada, μ konum (location) parametresidir; σ ise, ölçek (scale) parametresidir. $e = 2.72$ doğal logaritma tabanıdır ve $\pi = 3.14$ pi sayısıdır.

Normal dağılımın özellikleri:

1) Konum parametresi μ, dağılımın beklenen değerine; ölçek parametresi σ ise, dağılımın varyansının kareköküne yani standart sapmasına karşılık gelir:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ V(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

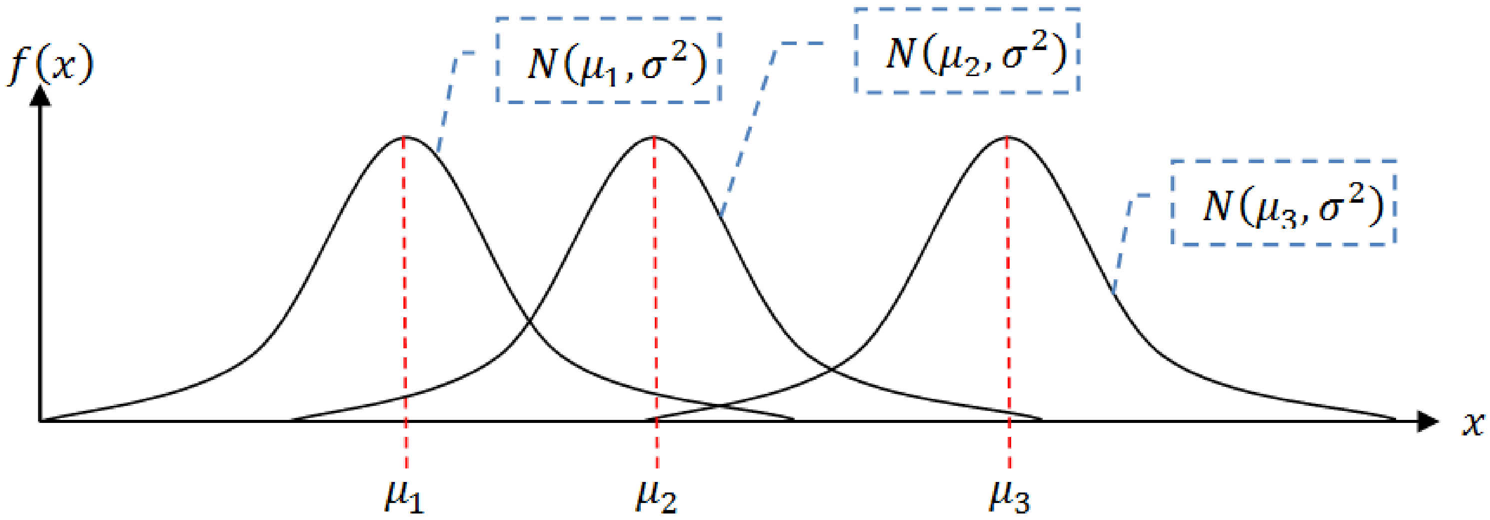
2) Çan eğrisi şeklindedir.
3) Tek tepelidir.
4) $x = \mu$ doğrusuna göre simetriktir. Yani, ortalama ortadadır ve alanı iki eşit parçaya ayırır. $f(x)$ eğrisinin altındaki ve x ekseninin üstündeki alan bire eşittir.



Normal Dağılım Eğrisi

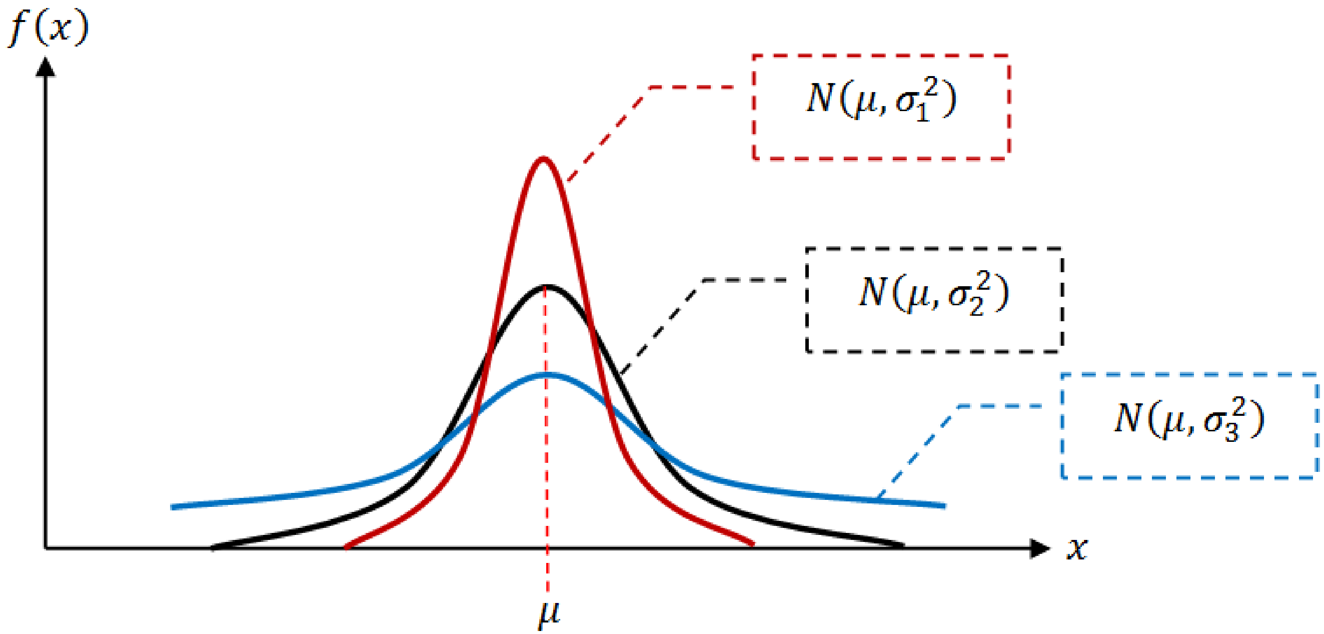
5) Dağılımın parametreleri değiştikçe şekli de değişir.

- μ konum parametresi, dağılımın merkezinin yerini belirler.



Aynı standart sapmalı farklı ortalamalı 3 Normal dağılım eğrisi ($\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$)

- σ ölçek parametresi ise, x değerlerinin ortalama etrafındaki dağılımını belirler. Yani, dağılımın yüksekliğini ve genişliğini belirler. σ arttıkça, dağılım basıklaşır ve kalın kuyruklu olur. σ azaldıkça, dağılım sivrileşir ve daha ince kuyruklu olur.



Aynı ortalamaya sahip farklı standart sapmalı 3 Normal dağılım Eğrisi $(\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2)$

6) $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki biçimdedir:

$$M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)}$$

7) $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

8) a ve b sabit değerler (a<b) olmak üzere, X raslantı değişkeninin a ile b arasında değer alması olasılığı

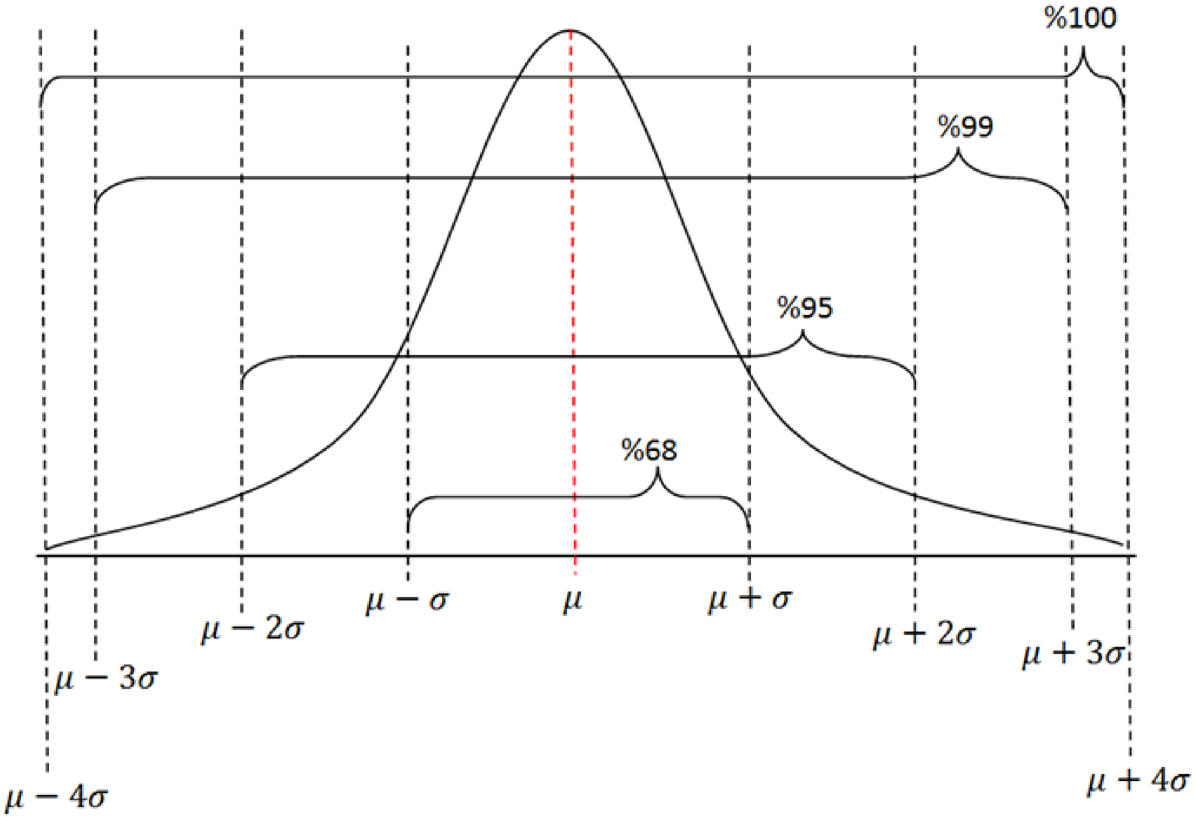
$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

9) Deneysel kurala uymaktadır. Yani, verilerin yaklaşık %68.26' sı $\mu \pm 1\sigma$ sınırları içinde; yaklaşık %95.46' sı $\mu \pm 2\sigma$ sınırları içinde; yaklaşık %99.74' ü $\mu \pm 3\sigma$ sınırları içerisinde ve yaklaşık %100' ü $\mu \pm 4\sigma$ sınırları içerisinde yer alır:

$$
\begin{aligned}
P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) &\cong 0.6827 \\
P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) &\cong 0.9546 \\
P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) &\cong 0.9974 \\
P(\mu-4\sigma \le X \le \mu+4\sigma) &\cong 1
\end{aligned}
$$



STANDART NORMAL DAĞILIM

Olasılıklar ve momentler hesaplanırken, Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun biçimi integral işlemini zorlamaktadır. Bu nedenle, $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ raslantı değişkeni standartlaştırılarak bu standart değişken üzerinden ilgili olasılıklar, momentler ve diğer işlemler yapılır.

Tanım: Ortalaması $\mu = 0$ ve varyansı $\sigma^2 = 1$ olan Normal dağılım, Standart Normal dağılım olarak adlandırılır ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty < z < +\infty$$

biçimindedir ve $Z \backsim N(0,1)$ biçiminde gösterilir.

Standartlaştırma: Herhangi bir X raslantı değişkeninden ortalaması çıkartılıp elde edilen değer standart sapmasına bölündüğünde, X raslantı değişkeni standartlaştırılmış olur. $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ ise aşağıdaki sonuç elde edilir:

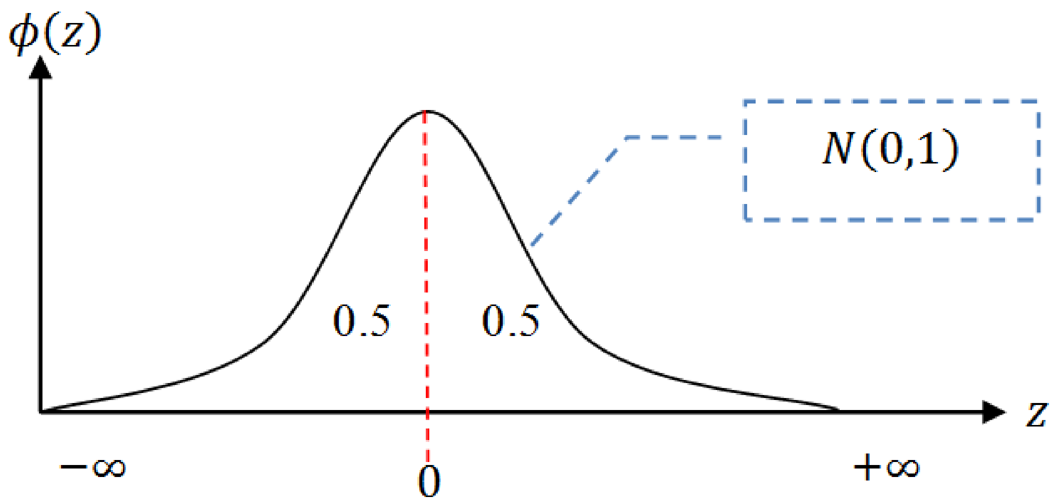
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \backsim N(0,1)$$

Standart Normal dağılımın özellikleri:

1) Standart raslantı değişkeninin ortalaması sıfır ve varyansı birdir:

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= 0 \\
V(Z) &= 1
\end{aligned}
$$

2) Dağılım, $z = 0$ doğrusuna göre simetriktir.



Standart Normal Dağılım Eğrisi

3) $\phi(z) = \phi(-z)$' dir.

4) $Z \backsim N(0,1)$ standart raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\mathrm{F}(z) = P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

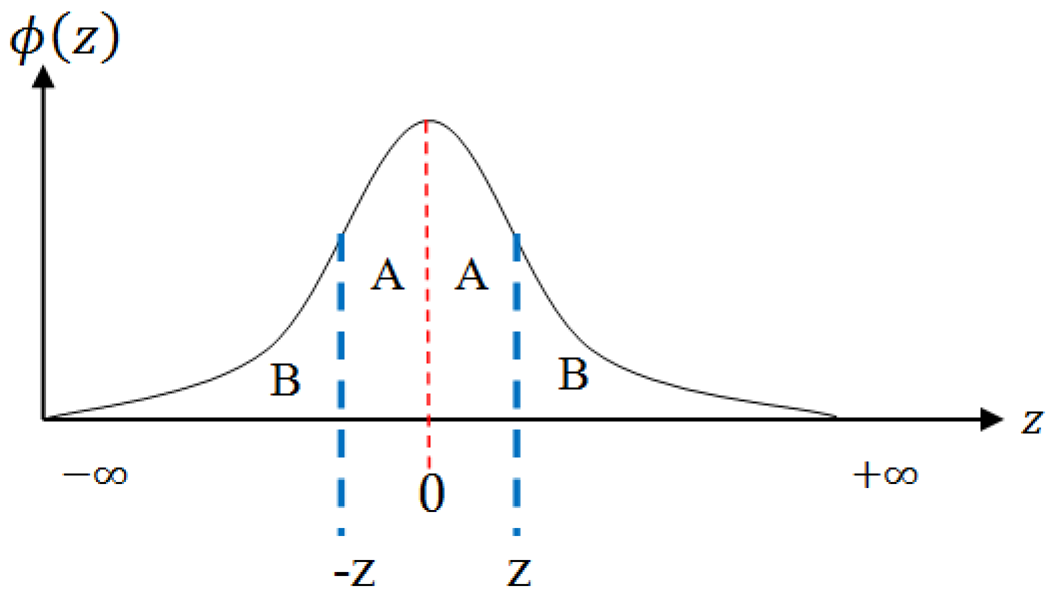
5) $Z \backsim N(0,1)$ standart raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$M_Z(t) = e^{\left(\frac{1}{2}t^2\right)}$$

6) $P(-z \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq z) = A$

$P(Z \geq z) = P(Z \leq -z) = B$

$P(Z \leq z) = P(Z \geq -z) = 2A + B$



7) $P(Z \leq z) = 1 - P(Z \leq -z)$' dir. Buradan, $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$ olur.

8) a ve b sabit değerler (a<b) olmak üzere, $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ raslantı değişkenine ilişkin olasılıklar aşağıdaki gibi Standart Normal dağılım aracılığıyla hesaplanabilir:

$$P(X \leq b) \quad = \quad P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) \quad = \quad P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > b) \quad = \quad 1 - P(X \leq b) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Standart normal dağılım tablosunun kullanımı

Standart normal dağılım tablosu z değerleri noktadan sonra iki hane olacak şekilde düzenlenmiştir. Standart normal dağılım tablosunun daha iyi anlaşılabilmesi için, $P(0<Z<0.32)$ olasılığının tablodan nasıl bulunacağına bakalım:

$$P(0<Z<0.32)=P(0<Z<0.30+\boxed{0.02})=0.1255$$

Standart Normal Dağılım $P(0<Z<z)=\int_0^z \phi(t)dt$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.00	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199
0.10	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596
0.20	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987
0.30	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368
0.40	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736
0.50	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
0.60	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422
0.70	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734
0.80	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
0.90	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289
1.00	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531

Örnek: $Z \backsim N(0,1)$ olsun.

a) $P(Z \leq 1.65)$,

b) $P(Z < -0.55)$,

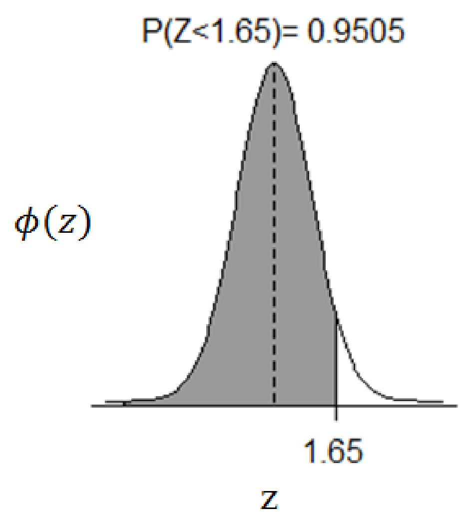
c) $P(-0.35 < Z < 0.35)$ ve

d) $P(0.44 < Z \leq 2.02)$ olasılıklarını bulunuz.

Çözüm:

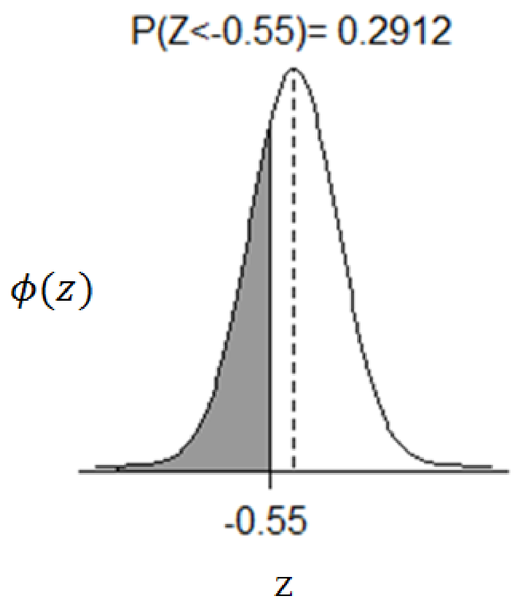
a) $P(Z \leq 1.65)$ olasılığı aşağıdaki şekilde verilen taralı alandır. Standart normal dağılım tablosunda, $P(0 < Z \leq 1.65)$'e karşılık gelen olasılık 0.4505'tir ve bu değere 0.5 eklenerek istenen olasılık bulunur:

$$P(Z \leq 1.65) = P(-\infty < Z \leq 0) + P(0 < Z \leq 1.65) = 0.5 + 0.4505 = 0.9505$$



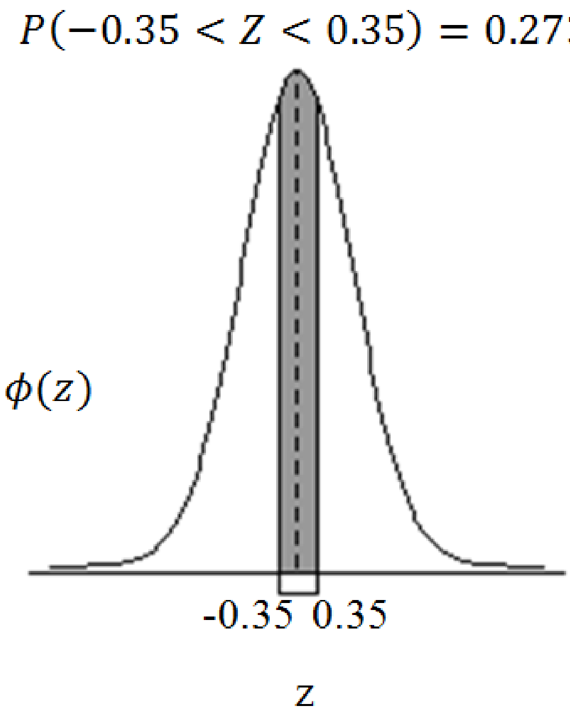
b) $P(Z < -0.55)$ olasılığı aşağıdaki şekilde verilen taralı alandır. Bu olasılık, dağılımın simetriklik özelliğinden yararlanılarak elde edilir. Standart normal dağılım tablosunda, $P(0 < Z < 0.55)'$ e karşılık gelen olasılık $0.2088'$ dir. Bu olasılık, 0.5' ten çıkarıldığında istenen olasılık bulunur:

$$P(Z < -0.55) = 0.5 - P(0 < Z < 0.55) = 0.5 - 0.2088 = 0.2912$$



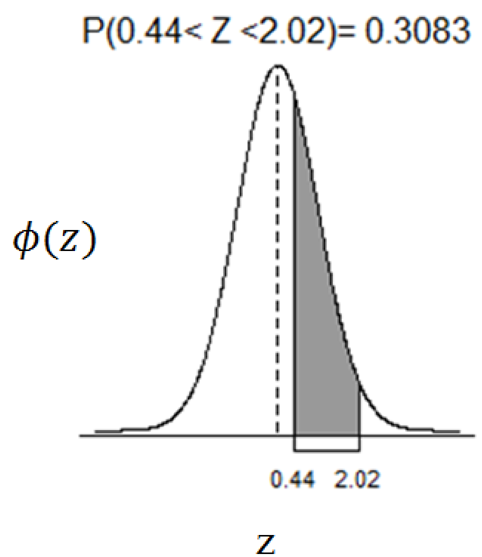
c) $P(-0.35 < Z < 0.35)$ olasılığı aşağıdaki şekilde verilen taralı alandır. Bu olasılık, dağılımın simetriklik özelliğinden dolayı, $2\,P(0 < Z < 0.35)$' e eşittir. Standart normal dağılım tablosundan, $P(0 < Z < 0.35) = 0.1368$' dir. Bu durumda istenen olasılık aşağıdaki gibi bulunur:

$$P(-0.35 < Z < 0.35) = 2P(0 < Z < 0.35) = 2 \times 0.1368 = 0.2736$$



d) Aşağıdaki şekilde verilen taralı olan $P(0.44 < Z \leq 2.02)$ olasılığını göstermektedir. İstenen olasılık, $P(0 < Z \leq 2.02) = 0.4783$ olasılığından $P(0 < Z < 0.44) = 0.17$ olasılığı çıkartılarak elde edilir:

$$\begin{aligned} P(0.44 < Z \leq 2.02) &= P(0 < Z \leq 2.02) - P(0 < Z < 0.44) \\ &= 0.4783 - 0.17 \\ &= 0.3083 \end{aligned}$$



Örnek: Bir zeytinyağı fabrikasında 500 ml şişelere dolum yapılmaktadır. Şişelerin dolum yapıldıktan sonraki ağırlıklarının dağılımının 455 gr ortalama ve 5 gr standart sapma ile normal dağılıma uyduğu bilinmektedir.

a) Tüm şişelerin en düşük %33'ünde en yüksek ağırlığı bulalım.

b) 1000 şişe içinde ağırlığı 450 ve yukarı olan şişelerin beklenen sayısını bulalım.

Çözüm:

a) X: Şişelerin dolum sonrası ağırlıkları $X \backsim N(\mu = 455 \, , \sigma^2 = 25)$

$P(X \leq k) = 0.33$ eşitliğindek k' nın çözümü tüm şişelerin en düşük %33' ü içindeki en yüksek ağırlığa karşılık gelir:

$$P(X \leq k) = P\left(Z \leq \frac{k-455}{5}\right) = 0.33$$

$$P\left(\frac{k-455}{5} \leq Z \leq 0\right) = 0.5 - 0.33 = 0.17$$

Standart Normal dağılım tablosunda 0.17 tablo olasılık değerini veren z değeri 0.44' tür. Negatif tarafta çalışıldığı için,

$$\frac{k-455}{5} = -0.44$$

olarak elde edilir. Bu durumda, $k = 452.8$ gr olarak bulunur.

b) Herhangi bir şişenin dolum sonrası ağırlığının 450 ve yukarısında olması olasılığı,

$$\begin{aligned} P(X \geq 450) &= P\left(Z \geq \frac{450-455}{5}\right) \\ &= P(Z \geq -1) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, 1000 şişe içerisinde ağırlığı 450 ve yukarı olan şişelerin beklenen sayısı $1000 \times 0.8413 = 841.3 \cong 841$ olarak bulunur.

Binom Dağılımının Normal Dağılıma Yakınsaması (DE MOIVRE LAPLACE TEOREMİ)

$X \sim B(n,p)$ olsun. n denemelerin sayısı arttıkça, X raslantı değişkeninin dağılımı, $\mu = np$ ve $\sigma^2 = npq$ parametreleri ile Normal dağılıma yakınsar. Binom dağılımının Normal dağılıma yakınsaması, merkezi limit teoreminin bir sonucudur.

$$X \sim B(n,p) \xrightarrow{n \to \infty} X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$$

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

$np \geq 5$ ve $nq \geq 5$ koşulları sağlandığında iyi bir yakınsama sağlanır ve n değeri arttıkça yakınsama daha iyi olur.

$p = 0.5$ durumunda, Binom dağılımı simetriktir. Bu nedenle, p başarı olasılığının 0.5 değerine yakın olması durumunda, n denemelerin sayısı arttıkça, Binom dağılımı Normal dağılıma daha hızlı yakınsar.

p' nin değeri 0 veya 1' e yakın ise, herhangi bir n değeri için Binom dağılımına Normal yaklaşım fazla iyi sonuç vermez.

Poisson Dağılımının Normal Dağılıma Yakınsaması

$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ olsun. Poisson dağılımında, $\lambda > 20$ olması durumunda, X raslantı değişkeninin dağılımı, $\mu = \lambda$ ve $\sigma^2 = \lambda$ parametreleri ile Normal dağılıma yakınsar. λ değeri büyüdükçe, yakınsama daha iyi olur.

$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda) \xrightarrow{\lambda > 20} X \sim N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$$

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1)$$

Süreklilik Düzeltmesi

Binom ve Poisson kesikli dağılımlara ilişkin olasılıkların yaklaşık değerlerini sürekli bir dağılım olan Normal dağılımla hesaplayabilmek için, süreklilik düzeltilmesi yapılması gerekmektedir.

Bunun için, herhangi bir $\varepsilon > 0$ keyfi değeri kullanılır. Bu değere, düzeltme terimi denir. Genellikle, $\varepsilon = 0.5$ veya $\varepsilon = 0.05$ olarak alınır.

$$P(X = x) \cong P(x - \varepsilon \leq X \leq x + \varepsilon) = P\left(\frac{(x-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

$$P(X \leq x) \cong P(X \leq x + \varepsilon) = P\left(Z \leq \frac{(x+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

$$P(X < x) \cong P(X < x - \varepsilon) = P\left(Z < \frac{(x-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

Süreklilik Düzeltmesi (Devamı)

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \cong P(x_1 - \varepsilon \leq X \leq x_2 + \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1 - \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2 + \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

$$P(x_1 < X < x_2) \cong P(x_1 + \varepsilon \leq X \leq x_2 - \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1 + \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2 - \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) \cong P(x_1 + \varepsilon \leq X \leq x_2 + \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1 + \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2 + \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) \cong P(x_1 - \varepsilon \leq X \leq x_2 - \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1 - \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2 - \varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

Örnek: Hilesiz bir para 100 kez atılıyor. 50 tane "*yazı*" gelmesi olasılığını binom dağılımın normal dağılıma yakınsaması teoremini kullanarak bulalım.

Çözüm:

$n \to \infty$ olması nedeniyle, Binom olasılığı Normal dağılım kullanılarak tahmin edilecektir:

$$B(n = 100, p = 0.5) \xrightarrow{n\to\infty} N(\mu = 50, \sigma^2 = 25)$$

$$\mu = np = 100 \times 0.5 = 50$$

$$\sigma^2 = npq = 100 \times 0.5 \times 0.5 = 25$$

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$

50 tane "*yazı*" gelmesi olasılığı:

$$\begin{aligned}
P(X = 50) &\cong P(50 - 0.5 < X < 50 + 0.5) \qquad (süreklilik\ düzeltmesi\ yapılmıştır.) \\
&\cong P\left(\frac{49.5 - 50}{5} < Z < \frac{50.5 - 50}{5}\right) \\
&\cong P(-0.1 < Z < 0.1) \\
&\cong 2\,P(0 < Z < 0.1) \\
&\cong 2 \times 0.0398 \\
&\cong 0.0796
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir otoyolda 1 ay içerisinde ortalama 8 kaza olmaktadır. Bu otoyolda gerçekleşen kazalar Poisson dağılımına uymaktadır.

a) 1 yıl içerisinde 75 kaza olması olasılığını bulunuz.
b) 1 yıl içinde 110' dan az kaza olması olasılığını bulunuz.

Çözüm:

1 ayda		8 kaza
12 ayda		λ kaza

$$\lambda = 12 \times 8 = 96\ kaza/yıl$$

X: Otoyolda bir yılda gerçekleşen kaza sayısı $X \sim Poisson(\lambda = 96\ kaza/yıl\ )$

$\lambda > 20$ olması nedeniyle, istenen Poisson olasılığı Normal dağılım kullanılarak tahmin edilecektir:

$$\text{Poisson}(\lambda = 96) \xrightarrow{\lambda > 20} \text{N}(\mu = 96, \sigma^2 = 96)$$

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 96$$

$$Z = \frac{X - 96}{\sqrt{96}} \sim N(0,1)$$

a) 75 kaza olması olasılığı:

$$\begin{aligned}
P(X=75) &\cong P(75-0.5<X<75+0.5) \qquad (\textit{süreklilik düzeltmesi yapılmıştır.})\\
&\cong P\left(\frac{74.5-96}{\sqrt{96}}<Z<\frac{75.5-96}{\sqrt{96}}\right)\\
&\cong P(-2.19<Z<-2.09)\\
&\cong 0.4857-0.4817\\
&\cong 0.004
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) 110' dan az kaza olması olasılığı:

$$\begin{aligned}
P(X<110) &\cong P(X<110-0.5) \qquad (\textit{süreklilik düzeltmesi yapılmıştır.})\\
&\cong P\left(Z<\frac{109.5-96}{\sqrt{96}}\right)\\
&\cong P(Z<1.38)\\
&\cong 0.5+0.4162\\
&\cong 0.9162
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2. SÜREKLİ TEK BİÇİMLİ DAĞILIM

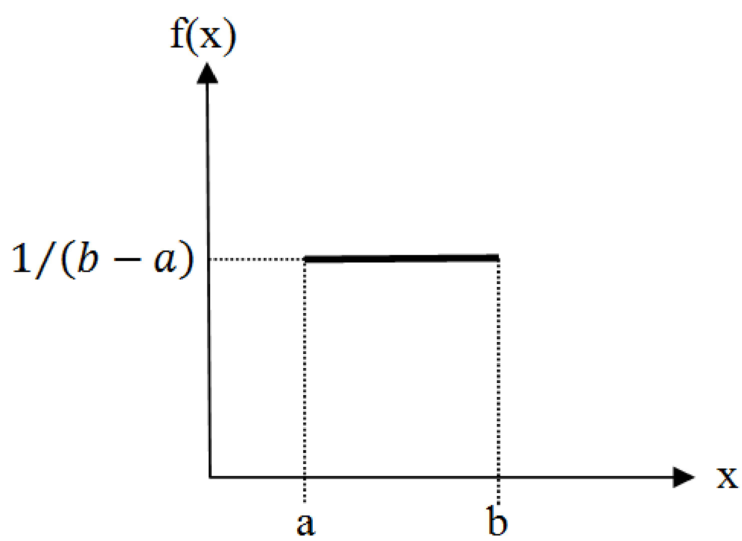
Sürekli tek biçimli dağılım, örneklem uzayında her bir noktasının olasılığının eşit olduğu kesikli tek biçimli dağılımın sürekli haline karşılık gelmektedir.

Örneğin, bir otobüsün her sabah 8:00 ile 8:10 arasında rasgele bir zamanda belirli bir durağa vardığı varsayılsın. X raslantı değişkeni, saat tam 8:00' da belirlenen durakta olan bir kişinin otobüs için beklediği süre olsun. Otobüsün 8:00 ile 8:10 arasında herhangi bir zaman aralığında durağa varması olasılığı, bu zaman aralığının uzunluğu ile doğru orantılıdır. Yani, 8:00 ile 8:02 arasında durağa varması ile 8:06 ile 8:08 arasında durağa varması eşit olasılığa sahiptir. Bu durumda, X raslantı değişkeni sürekli tek biçimli dağılıma sahiptir.

Tanım: X sürekli raslantı değişkeni a ve b (a<b) parametreleriyle tek biçimli dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

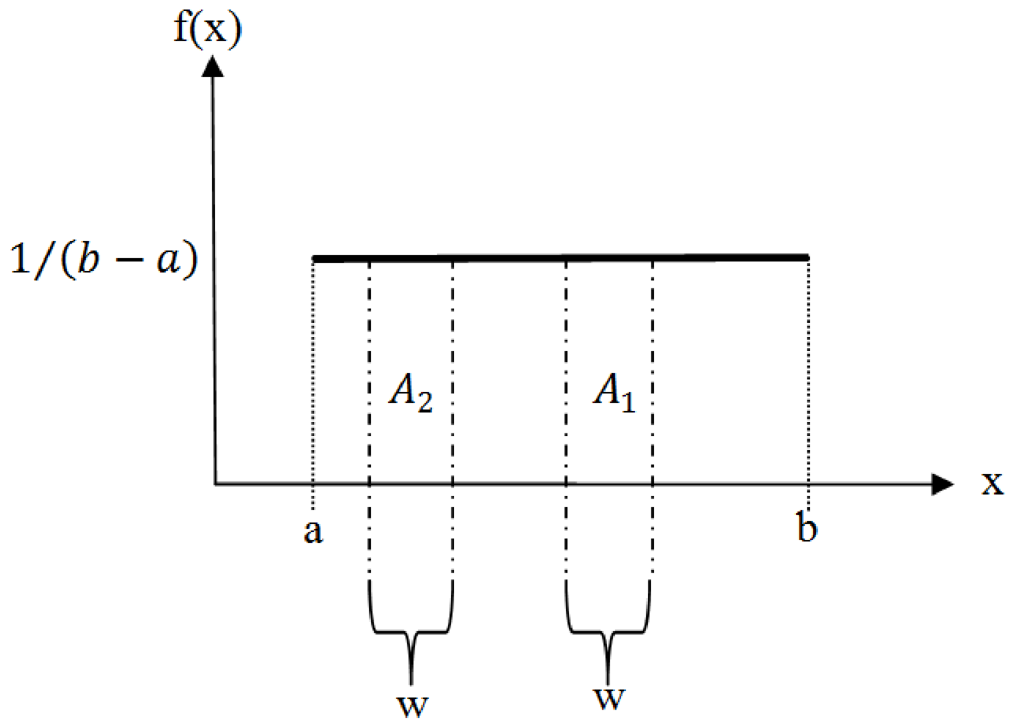
$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{b-a} \quad , \quad a \leq x \leq b \; için \\
&= 0 \qquad\quad , \quad öteki \; x \; değerleri \; için
\end{aligned}
$$

biçimindedir ve $X \sim Tekbiçimli(a, b)$ biçiminde gösterilir.



Tek biçimli dağılım

Sürekli tek biçimli dağılımda tanım aralığı eşit aralıklara bölündüğünde, her aralığın olasılığı birbirine eşittir: $A_1 = A_2$



$Tekbiçimli(a,b)$ dağılımı

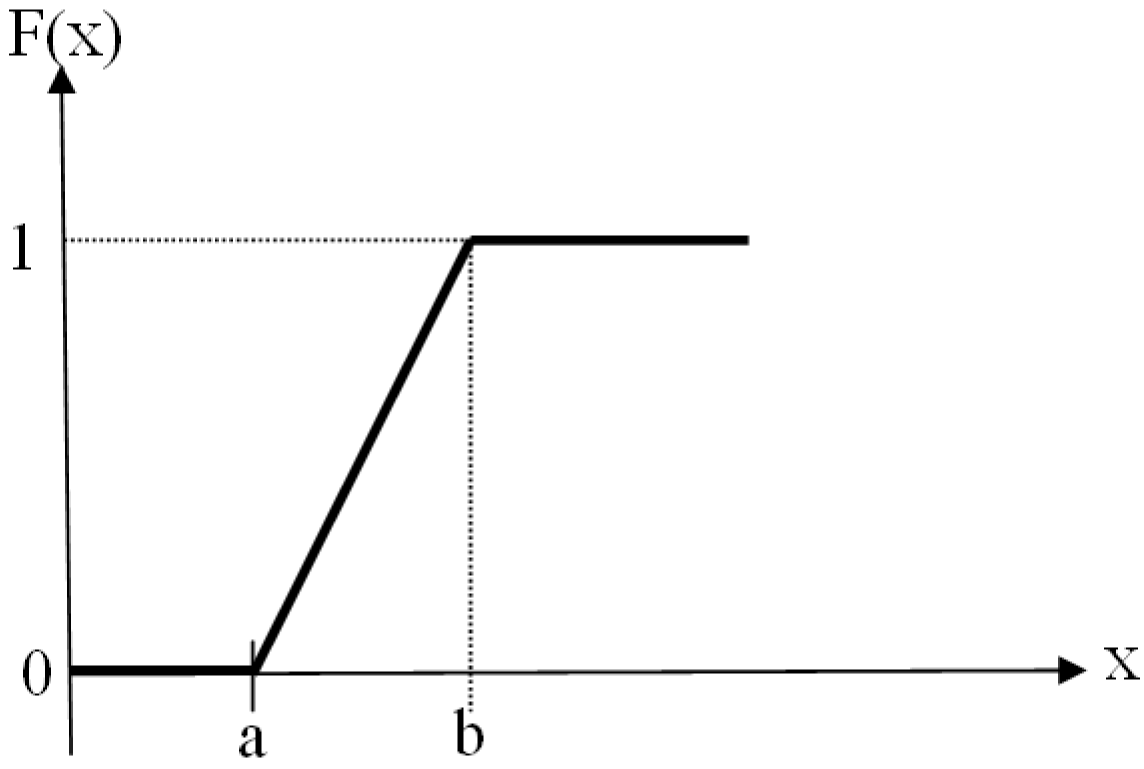
Dağılım Fonksiyonu:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{(b-a)} dt = \left. \frac{t}{(b-a)} \right|_a^x = \frac{x-a}{(b-a)}$$

olarak elde edilir. Tek biçimli dağılıma sahip *X* raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x-a}{(b-a)} \quad , \quad a < x < b \ \ için \\ &= 0 \quad , \quad x \leq a \ \ için \\ &= 1 \quad , \quad x \geq b \ \ için \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.



Dağılım fonksiyonu

Beklenen Değeri:

$$E(X) = \int_{R_X} xf(x)\,dx = \int_a^b x\frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Burada, iki kare farkı özdeşliği olan $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$' dir.

Varyansı:

$$E(X^2) = \int_{R_X} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b x^2\frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Burada, iki küp farkı özdeşliği $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$' dir.

Moment Çıkaran Fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \int_a^b e^{tX} f(x)\,dx \\
&= \int_a^b e^{tX} \frac{1}{(b-a)}\,dx \\
&= \left.\frac{e^{tX}}{t\,(b-a)}\right|_a^b \\
&= \frac{e^{bt}-e^{at}}{t\,(b-a)}
\end{aligned}
$$

Örnek: Belediyenin şikâyet kutusuna gelen e-postaların cevaplanma süresi, en geç 120 saattir (5 gündür). E-postaların cevaplanma süreleri tek biçimli dağılıma sahip olduğuna göre gelen herhangi bir e-postanın en çok 72 saatte cevaplandırılması olasılığını bulalım.

Çözüm: *X* raslantı değişkeni belediyenin şikayet kutusuna gelen e-postaların cevaplanma süresini göstersin. X' in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{120} \quad , \quad 0 < x < 120\ (saat)\ için \\ &= 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

biçimindedir ve istenen olasılık,

$$P(X \leq 72) = \int_0^{72} \frac{1}{120} dx = \frac{x}{120}\bigg|_0^{72} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0.6$$

olarak bulunur.

3. ÜSTEL DAĞILIM

Üstel dağılım, geometrik dağılımın sürekli benzeri olarak bilinir. Meydana gelen iki olay arasında geçen süre veya ilgilenilen bir olayın ilk kez ortaya çıkması için geçen sürenin dağılımı, üstel dağılımdır. Bu nedenle de *bekleme zamanları* (*waiting times*) üstel dağılım ile modellenir.

Ayrıca, ortalama etrafında simetrik olan Normal dağılımdan farklı olarak, bazı raslantı değişkenleri sadece pozitif değerler alır ve çarpık bir dağılım gösterirler. Üstel dağılımda, böyle bir dağılımdır.

Örnekler:

- Bir hastanenin acil servisine gelen hastalar arasında geçen süre
- Bir taksi durağına gelen müşteriler arasında geçen süre
- Bir bölgede meydana gelen depremlerin büyüklüğü
- Bir bölgede meydana gelen depremler arasında geçen süre

Tanım: X raslantı değişkeni λ $(\lambda > 0)$ parametresiyle üstel dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

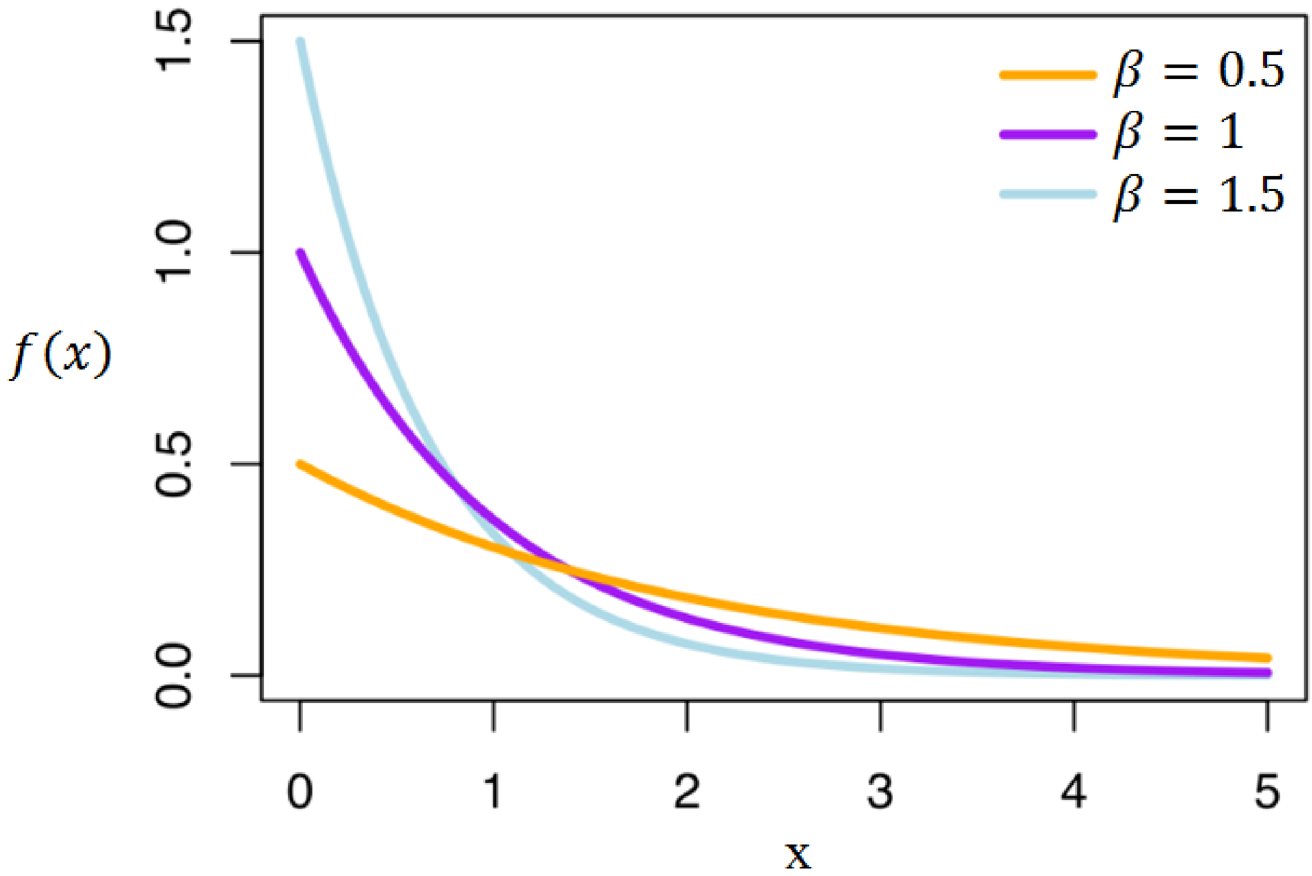
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad , \quad x \geq 0 \ \textit{için} \\ &= 0 \quad , \quad \textit{öteki } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

biçimindedir ve $X \sim \ddot{U}stel(\lambda)$ biçiminde gösterilir. Burada λ, ölçek parametresidir.

$\lambda = (1/\beta)$ olarak alınırsa, üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \beta\, e^{-\beta x} \quad , \quad x \geq 0 \ \textit{için} \\ &= 0 \quad , \quad \textit{öteki } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

biçimini alır ve negatif üstel dağılım olarak adlandırılır. $X \sim \text{Negatif}\, \ddot{U}stel(\beta)$ biçiminde gösterilir. Burada β $(\beta > 0)$, oran parametresidir.



Negatif Üstel(0.5), Negatif *Üstel*(1) ve Negatif *Üstel*(1.5) dağılımları

Dağılım Fonksiyonu:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda} dt = -e^{-t/\lambda}\Big|_0^x = -e^{-x/\lambda} - (-e^0) = 1 - e^{-x/\lambda}$$

olarak elde edildiğinden dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-x/\lambda} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \quad , \quad x \leq 0 \\ &= 1 \quad , \quad x \to +\infty \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.

Yaşam Fonksiyonu:

İlgilenilen bir olayın henüz x zamanına kadar gerçekleşmemesi olasılığını verir:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \left(1 - e^{-x/\lambda}\right) = e^{-x/\lambda}$$

Bu durumda, yaşam fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} P(X > x) &= e^{-x/\lambda} \quad , \quad x \geq 0 \\ &= 0 \quad , \quad x \to +\infty \\ &= 1 \quad , \quad x < 0 \end{aligned}$$

Teorem: $X \sim \text{Üstel}(\lambda)$ ise, herhangi $s > 0$ ve $t > 0$ için,

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

biçimindedir. Bu eşitlik, geometrik dağılımda olduğu gibi ***hafızasızlık özelliği*** olarak adlandırılır.

Tanıt: Koşullu olasılık tanımından,

$$\begin{aligned}
P(X > s + t | X > s) &= \frac{P(X > s + t \; \cap \; X > s)}{P(X > s)} &&= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq s + t)}{1 - P(X \leq s)} &&= \frac{1 - \left(1 - e^{-(s+t)/\lambda}\right)}{1 - \left(1 - e^{-s/\lambda}\right)} \\
&= \frac{e^{-(s+t)/\lambda}}{e^{-s/\lambda}} &&= e^{-t/\lambda} \\
&= P(X > t)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yorumu: İlgilenilen olay gözleme başlandığından itibaren s birim zaman içerisinde gerçekleşmedi ise, sonraki t birim zamanda da gözlenmemesi olasılığı, ilk s birim zamandan bağımsızdır ve sonraki t birim zamanda gerçekleşmemesi olasılığı ile aynıdır.

Moment Çıkaran Fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) &&= \int_0^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{tx}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\right)dx &&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{1}{\lambda}-t\right)}\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\left.\frac{e^{-x\left(\frac{1}{\lambda}-t\right)}}{-\left(\frac{1}{\lambda}-t\right)}\right|_0^{+\infty} &&= \left.\frac{e^{-x\left(\frac{1}{\lambda}-t\right)}}{-(1-\lambda t)}\right|_0^{+\infty} \\
&= \frac{e^{-\infty}-e^{0}}{-(1-\lambda t)} &&= \frac{-1}{-(1-\lambda t)} \\
&= \frac{1}{(1-\lambda t)} &&= (1-\lambda t)^{-1}
\end{aligned}
$$

Beklenen Değeri:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} &&= \frac{d}{dt}\frac{1}{(1-\lambda t)}\Big|_{t=0} \\
&= (-1)(1-\lambda t)^{-2}(-\lambda)|_{t=0} &&= \frac{\lambda}{(1-\lambda t)^2}\Big|_{t=0} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

Varyansı:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t=0} &&= \frac{d}{dt}\frac{\lambda}{(1-\lambda t)^2}\Big|_{t=0} \\
&= \lambda(-2)(1-\lambda t)^{-3}(-\lambda)|_{t=0} &&= \frac{2\,\lambda^2}{(1-\lambda t)^3}\Big|_{t=0} \\
&= 2\,\lambda^2
\end{aligned}
$$

$$
V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\,\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2
$$

X~Negatif Üstel(β) ise,

$$E(X) = \frac{1}{\beta}$$

$$V(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-1}$$

olmaktadır.

Örnek: Batarya kapasitesi 2900 mAh olan bir akıllı telefonun kullanım süresi ortalama 8 saat ile üstel dağılıma sahip olsun. Telefonun bataryasının en az 10 saat dayanması olasılığını bulunuz.

Çözüm: X: Akıllı telefonun kullanım süresi (saat) $\qquad X \sim Üstel(\lambda = 8)$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{8}\, e^{-(x/8)} \quad , \quad x \geq 0 \;\; için \\ &= 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

İstenen olasılık,

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{8}\, e^{-(x/8)} dx &&= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{-(x/8)}}{\left(-\frac{1}{8}\right)} \Bigg|_{10}^{+\infty} \right] \\ &= -e^{-(x/8)}\Big|_{10}^{+\infty} &&= -e^{-\infty} + e^{-(10/8)} \\ &= e^{-(10/8)} &&\cong 0.2865 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek: X raslantı değişkeni bir posta memurunun müşterisiyle geçirdiği süre (dakika) olsun. X' in ortalaması 4 dakika olan bir üstel dağılıma sahip olduğu bilinmektedir.

a) Posta memurunun rastgele seçilen bir müşteriyle dört ile beş dakika arasında zaman geçirmesi olasılığını bulun.
b) Dağılımın medyan(ortanca) değerini bulunuz ve yorumlayınız.

Çözüm: *X:* Posta memurunun bir müşteriye harcadığı zaman (dakika)

$$X \sim \ddot{U}stel\ (\lambda = 4)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{4}\, e^{-(x/4)} \quad , \quad x \geq 0 \ \ için \\ &= 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Dağılım fonksiyonu:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-(x/4)} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \quad , \quad x \leq 0 \\ &= 1 \quad , \quad x \to +\infty \end{aligned}$$

a) İstenen olasılık,

$$\begin{aligned} P(4 < X < 5) &= F(5) - F(4) \\ &= \left(1 - e^{-(5/4)}\right) - \left(1 - e^{-(4/4)}\right) \\ &= e^{-1} - e^{-(5/4)} \\ &\cong 0.0814 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) Bir dağılımın medyanı (ortancası), o dağılımı ortadan ikiye bölen değerdir. Medyan değeri, k ile gösterilsin. Bu durumda, $P(X \leq k) = 0.5$' tir.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq k) &= 0.5 \\
F(k) &= 0.5 \\
1 - e^{-(k/4)} &= 0.5
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
e^{-(k/4)} &= 0.5 \\
\ln e^{-(k/4)} &= \ln 0.5 \\
-(k/4) &= \ln 0.5 \\
-(k/4) &= -0.6931 \\
k &= 4 \times 0.6931 \\
k &= 2.7724 \quad dakika
\end{aligned}
$$

Yorum: Posta memuru gelen müşterilerin yarısına 2.7724 dakikadan daha az süre harcamıştır. Ayrıca, medyan değerinin ortalamadan küçük olması nedeniyle, dağılımın sağa çarpık olduğunu söyleyebiliriz.

Poisson Dağılımı ve Üstel Dağılımın İlişkisi

Belirli bir zaman aralığında ilgilenilen bir olayın ortaya çıkma sayısı, X raslantı değişkeni olarak gösterilsin. İlgilenilen olayların ortaya çıkmaları arasında geçen zaman ise, Y raslantı değişkeni olsun.

Bir birim zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısı X, ortalaması λ olan Poisson dağılımına sahip ise, iki olay arasında geçen ortalama zaman $(1/\lambda)$ olur. Dolayısıyla, iki olay arasında geçen zaman Y, ölçek parametresi $(1/\lambda)$ olan (ya da oran parametresi λ olan) üstel dağılıma sahip olacaktır:

$$
\begin{aligned}
X \sim Poisson(\lambda) \quad &\Rightarrow \quad Y \sim Üstel\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
&\Rightarrow \quad Y \sim Negatif\ Üstel(\beta = \lambda)
\end{aligned}
$$

Örnek: Bir kavşakta yılda ortalama 24 maddi hasarlı kaza meydana gelmektedir. Kazalar arası geçen zamanın üstel dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Bu kavşakta en az 1 ay süresince hiç maddi hasarlı kaza olmaması olasılığını bulunuz.

Çözüm: *X:* Kazalar arasında geçen zaman (ay)
12 ayda ortalama 24 maddi hasarlı kaza olmasından dolayı, iki kaza arasında geçen ortalama zaman $E(X) = (12/24) = 0.5$ ay olmaktadır. Bu durumda, X raslantı değişkeni ölçek parametresi 0.5 olan üstel dağılıma sahip olacaktır: $X \sim \ddot{U}stel\ (\lambda = 0.5)$

X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 2\,e^{-2x} \quad , \quad x \geq 0 \ \text{için} \\ &= 0 \qquad\quad , \quad \text{öteki } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

X'in dağılım fonksiyonu:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-2x} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \qquad\qquad , \quad x \leq 0 \\ &= 1 \qquad\qquad , \quad x \to +\infty \end{aligned}$$

İstenen olasılık,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-2 \times 1}) = e^{-2} \cong 0.1353$$

olarak bulunur.

4. GAMMA DAĞILIM

Gamma dağılımı, teorik olarak üstel dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenlerinin toplamının dağılımı olarak bilinir. Ayrıca, ilgilenilen bir olayın n-inci kez ortaya çıkması için geçen sürenin dağılımıdır. Yaşam süreleri, genellikle Gamma dağılımı kullanılarak modellenir.

Örnekler:

- Kurşun kalem üreten bir fabrikanın üretim hattında 4 hatalı kurşun kalem üretene kadar geçen süre
- Belli bir hastalık için, kritik seviye 1000 hasta olsun. Bu hastalıkta kritik seviyeye ulaşma süresi

GAMMA FONKSİYONU

Tanım: Her $n > 0$ için, gamma fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Özellikleri:

1. $\Gamma(1) = 1$′dir.

2. $n > 1$ ise, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$′dir.

3. n ; pozitif bir tamsayı ise; $\Gamma(n) = (n-1)!$′ dir:

$$\begin{array}{lllllllll}
\Gamma(n) & = & (n-1) & \Gamma(n-1) & & & & & \\
 & = & (n-1) & (n-2) & \Gamma(n-2) & & & & \\
 & = & (n-1) & (n-2) & (n-3) & \Gamma(n-3) & & & \\
 & = & (n-1) & (n-2) & (n-3) & (n-4) & \Gamma(n-4) & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & = & (n-1) & (n-2) & (n-3) & (n-4) & (n-5) & \ldots \quad 1 & \Gamma(1) \\
 & = & (n-1)! & & & & & &
\end{array}$$

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$′ dir.

Tanım: X raslantı değişkeni n $(n > 0)$ ve λ $(\lambda > 0)$ parametreleriyle gamma dağılımına sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

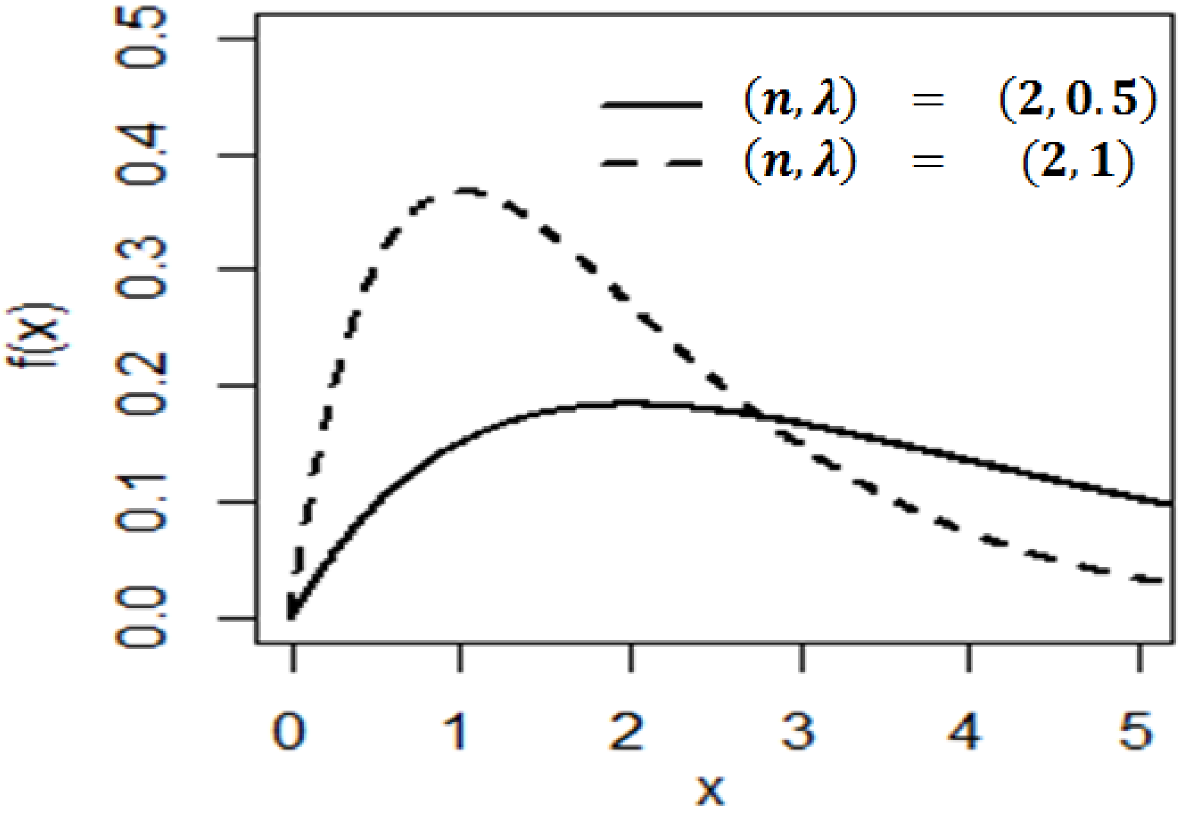
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^n\,\Gamma(n)}\, x^{n-1}\, e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x \geq 0 \ \textit{için} \\ 0 & , \quad x < 0 \ \textit{için} \end{cases}$$

biçimindedir ve $X \sim Gamma\,(n, \lambda)$ biçiminde gösterilir. Burada, n şekil parametresi; λ ise ölçek parametresidir.

Üstel dağılımda olduğu gibi, $\beta = \frac{1}{\lambda}$ olarak alınsın. Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, n $(n > 0)$ ve β $(\beta > 0)$ parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^n}{\Gamma(n)}\, x^{n-1}\, e^{-\beta x} & , \quad x \geq 0 \ \text{için} \\ 0 & , \quad x < 0 \ \text{için} \end{cases}$$

Burada n, şekil parametresi; β ise oran parametresidir. Gamma dağılımı, $X \sim \mathrm{Gamma}\,(n, \beta)$ biçiminde gösterilir.



Gamma (2, 0.5) ve *Gamma* (2, 1) dağılımları

Gamma dağılımının özel durumları:

- $n = 1$ olması durumunda gamma dağılımı, üstel dağılıma dönüşür:

$$Gamma\ (n = 1, \lambda) = \ddot{U}stel(\lambda)$$

- n, pozitif bir tamsayı ise, bu dağılım **Erlang dağılımı** olarak adlandırılır.
- ν, pozitif bir tamsayı olmak üzere, $n = \frac{\nu}{2}$ ve $\lambda = 2$ alındığında, gamma dağılımı, ν serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımına dönüşür:

$$Gamma\ \left(n = \frac{\nu}{2}, \lambda = 2\right) = \chi^2_\nu$$

	$X \sim Gamma\ (n, \lambda)$	$X \sim Gamma\ (n, \beta)$
Beklenen Değeri	$E(X) = n\lambda$	$E(X) = \frac{n}{\beta}$
Varyansı	$V(X) = n\lambda^2$	$V(X) = \frac{n}{\beta^2}$
Moment Çıkaran Fonksiyonu	$M_X(t) = (1 - \lambda t)^{-n}$	$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-n}$

Örnek: X~$Gamma(2,\ 1)$ dağılımına sahip olsun. X raslantı değişkeninin en çok 1 değerini alması ve en az 1 değerini alması olasılıklarını bulalım.

Çözüm: $X \sim Gamma\ (n = 2, \lambda = 1)$

X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\Gamma(2)}\, x\, e^{-x} \quad , \quad x \geq 0 \ için \\ &= 0 \quad , \quad x < 0 \ için \end{aligned}$$

İstenen olasılıkları sırasıyla bulalım:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(2)}\, x\, e^{-x} dx &&= \int_0^1 x\, e^{-x} dx \\ &= x(-e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx &&= -\frac{1}{e} + \left[\frac{e^{-x}}{-1} \Big|_0^1 \right] \\ &= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 &&= 1 - 2e^{-1} \\ &= 0.2642 \end{aligned}$$

Yukarıda yapılan integral alma işleminde kısmi integrasyon yöntemi kullanılmıştır. $u = x$ ve $e^{-x}dx = dv$ olarak alınmıştır:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0.2642 = 0.7358$$

5. BETA DAĞILIMI

Oran ya da yüzde olarak ölçülen rasgele değişkenlerin dağılımı olarak kullanılır.

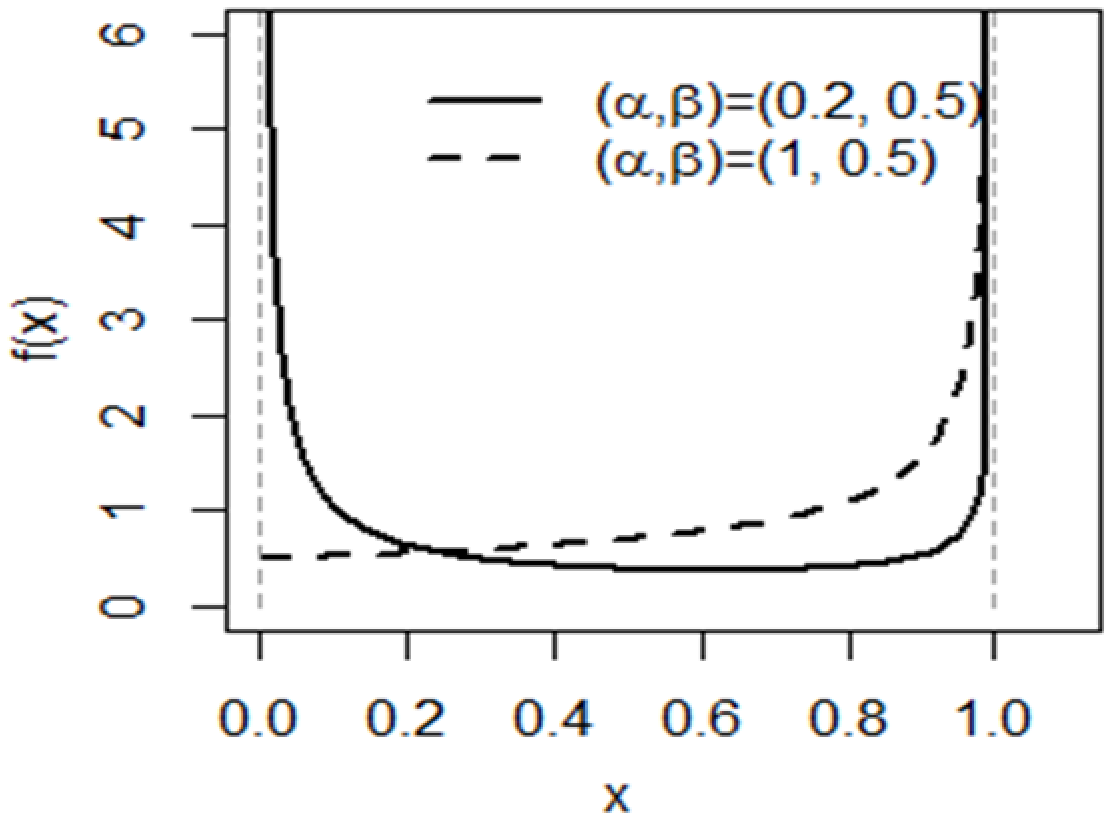
Örnekler:

- Trafiğe kayıtlı dizel yakıt kullanan otomobillerin oranı
- Bir fabrikanın ürettiği mallardaki kusurlu ürünlerin oranı
- Bir ülkenin uzun dönem işsizlik oranı
- Resmi dairelerde net elektrik tüketim oranı

Tanım: X raslantı değişkeni α $(\alpha > 0)$ ve β $(\beta > 0)$ parametreleriyle beta dağılımına sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \ için \\
&= 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

biçimindedir ve $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ biçiminde gösterilir. Burada, α ve β, beta dağılımının şekil parametreleridir.



Beta (0.2, 0.5) ve *Beta* (1, 0.5) dağılımları

BETA FONKSİYONU

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, Beta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Beta fonksiyonu simetriktir: $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

Tanıt: $X \sim Beta(\alpha,\beta)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_X(x)dx &= 1 \\
\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx &= 1 \\
\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx &= 1 \\
\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Beklenen Değeri:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x f_X(x)\,dx && = \int_0^1 x \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1} dx && = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ B(\alpha+1\,,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} && = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\ \frac{\alpha!\,(\beta-1)!}{(\alpha+\beta)!} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

Varyansı:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x)dx &&= \int_0^1 x^2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}dx &&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\; B(\alpha+2\,,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} &&= \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\;\frac{(\alpha+1)!\,(\beta-1)!}{(\alpha+\beta+1)!} \\
&= \frac{(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

$$
V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right]^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}
$$

Örnek: Yılın belli bir döneminde bir göldeki kirlilik oranı α ve $\beta = 1$ parametreleri ile beta dağılımına sahip olsun. Kirlilik oranının %50'den az olması olasılığının 0.8 olması için α ne olmalıdır?

Çözüm: X: Göldeki kirlilik oranı $\quad X \sim Beta(\alpha, \beta = 1)$

X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \quad , \quad 0 \le x \le 1 \; için \\
&= 0 \quad , \quad öteki \; x \; değerleri \; için
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \le 0.5) &= 0.8 \\
\int_0^{0.5} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} dx &= 0.8 \\
\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \left[\left. \frac{x^{\alpha}}{\alpha} \right|_0^{0.5} \right] &= 0.8
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\frac{\alpha!}{(\alpha-1)!} \frac{0.5^{\alpha}}{\alpha} &= 0.8 \\
0.5^{\alpha} &= 0.8 \\
\log_{0.5} 0.5^{\alpha} &= \log_{0.5} 0.8 \\
\alpha &= \log_{0.5} 0.8
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

6. CAUCHY DAĞILIMI

Cauchy dağılımı adını, 17. yüzyılda yaşayan Fransız matematikçi Augustin Cauchy' den almaktadır. "*Cauchy–Lorentz dağılımı*" olarak da adlandırılan Cauchy dağılımı, *zorlanan tınlaşım* (*forced resonance*) olayını açıklayan diferansiyel denklemin çözümü olduğu için fizikte iyi bilinen bir dağılımdır. Ayrıca, normal dağılımlı iki raslantı değişkeninin oranı Cauchy dağılımı gösterir. Cauchy dağılımının momentleri bulunamadığı için dağılım, istatistikte **patolojik dağılım** olarak nitelendirilir.

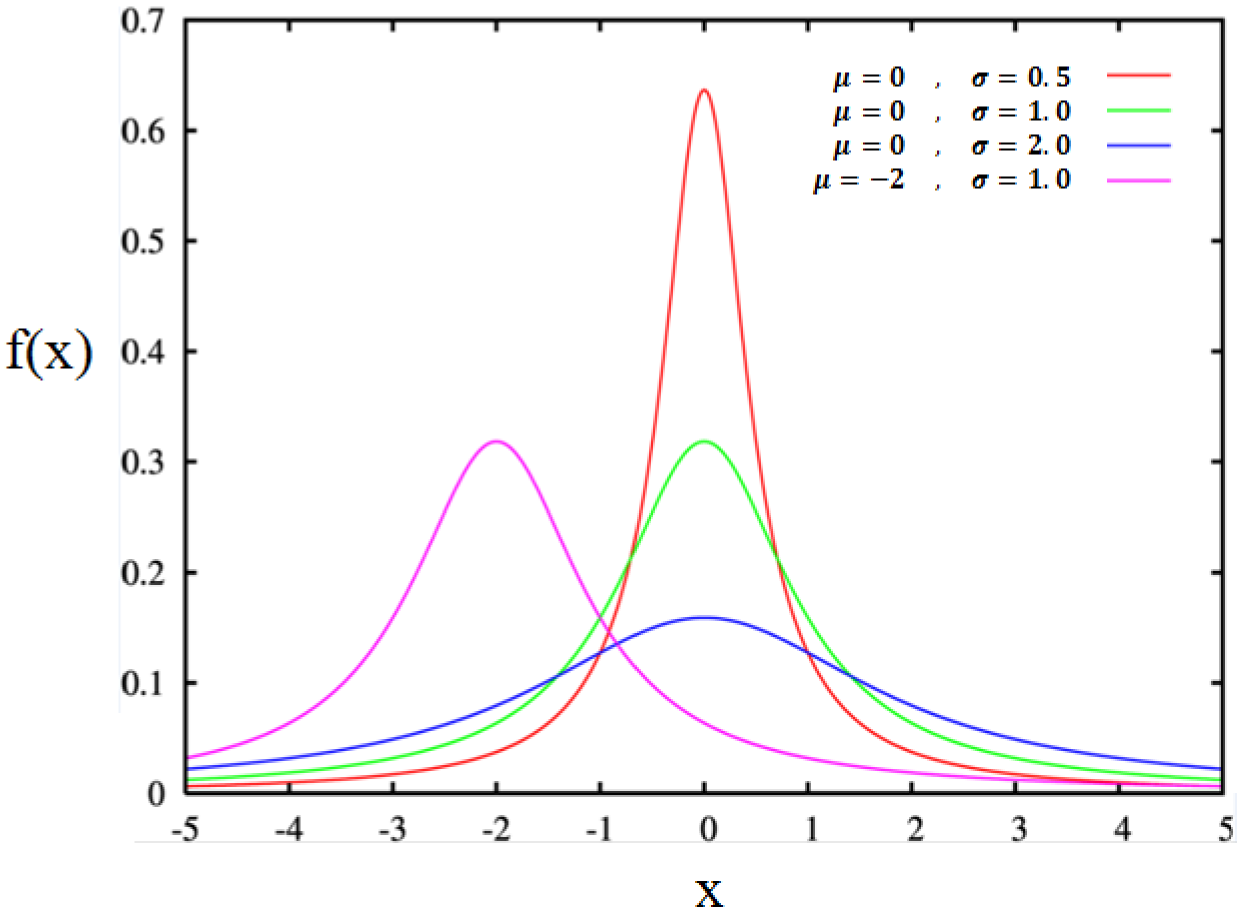
Tanım: X raslantı değişkeni μ ($\mu \in R$) ve σ $(\sigma > 0)$ parametreleriyle Cauchy dağılımına sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma\left[1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} \quad , -\infty < x < +\infty$$

biçimindedir ve $X \sim$ Cauchy(μ, σ) biçiminde gösterilir. Burada, μ, konum parametresi; σ ise ölçek parametresidir.

Cauchy dağılımı, $X = \mu$ noktasında simetriktir ve çan eğrisi şeklindedir. Ayrıca, normal dağılıma göre daha kalın kuyrukludur.

$\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ durumunda, standart Cauchy dağılımı olarak adlandırılır.



Cauchy dağılımı

Cauchy dağılımının beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyonu tanımlı değildir.

Karakteristik fonksiyonu ise, $\varphi_X(t) = e^{(\mu i t - \sigma|t|)}$, dir.

Dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\, arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & , \quad -\infty < x < +\infty \ \ için \\ 0 & , \quad x \to -\infty \ \ için \\ 1 & , \quad x \to +\infty \ \ için \end{cases}$$

Örnek: X raslantı değişkeni standart Cauchy dağılımına sahip ise, $P(X > x)$ olasılığını bulalım.

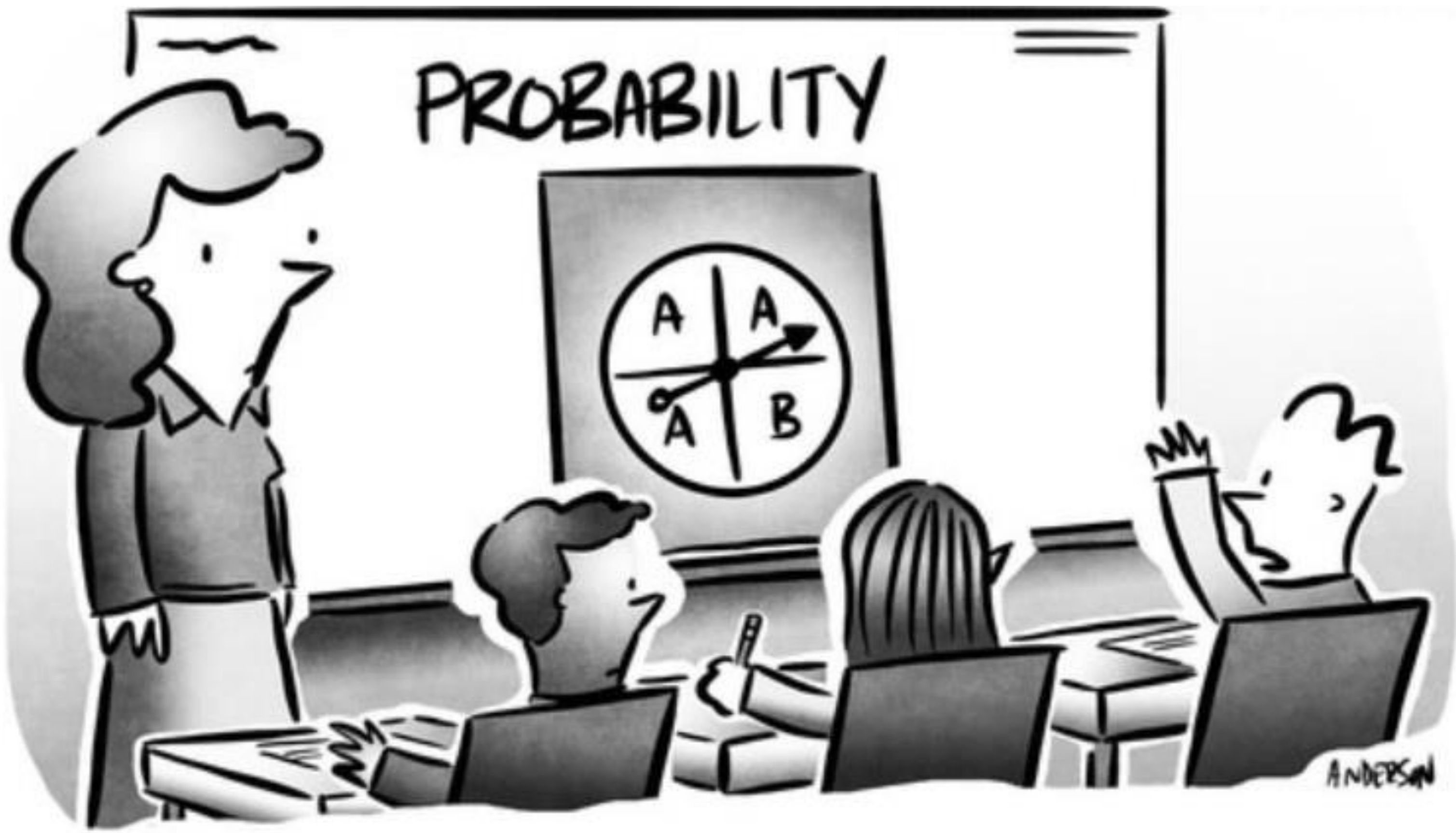
Çözüm: $P(X > x)$ olasılığı, literatürde ***yaşam (survival) fonksiyonu*** olarak adlandırılır ve bu olasılık, $1 - F(x)$'e eşittir. Cauchy dağılımının dağılım fonksiyonunda $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ alındığında, standart Cauchy dağılımı için dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\, arctan(x) & , \quad -\infty < x < +\infty \ \ için \\ 0 & , \quad x \to -\infty \ \ için \\ 1 & , \quad x \to +\infty \ \ için \end{cases}$$

biçiminde bulunur. Böylece, istenen olasılık

$$P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\, arctan(x)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\, arctan(x)$$

olarak elde edilir.



"I know mathematically that A is more likely, but I gotta say, I feel like B wants it more."