

UYGULAMA I

1. X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{3}{8}, \quad x = -3 \text{ ise} \\
 &= \frac{1}{8}, \quad x = 0 \text{ ise} \\
 &= \frac{1}{4}, \quad x = 3, 4 \text{ ise} \\
 &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için}
 \end{aligned}$$

- (a) $M_{\mathbf{X}}(t)$ moment çıkan fonksiyonunu bulunuz.
 - (b) $M_{\mathbf{X}}(t)$ yardımıyla, $E(X)$ beklenen değerini ve $V(X)$ varyansını bulunuz.
 - (c) $Y = 3X - 2$ raslantı değişkeninin $M_Y(t)$ moment çıkan fonksiyonunu ve $g_Y(s)$ olasılık yaratıcı fonksiyonunu bulunuz.
2. X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:
- $$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{2}{7}, \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\
 &= \frac{1}{7}, \quad 3 < x \leq 4 \text{ ise} \\
 &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için}
 \end{aligned}$$
- (a) $M_{\mathbf{X}}(t)$ moment çıkan fonksiyonunu bulunuz.
 - (b) $M_{\mathbf{X}}(t)$ yardımıyla, $E(X)$ beklenen değerini bulunuz.
 - (c) $Y = 8X$ raslantı değişkeninin $F_Y(s)$ Laplace fonksiyonunu bulunuz.
3. X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{1}{8}, \quad x = 0, 3 \text{ ise} \\
 &= \frac{3}{8}, \quad x = 1, 2 \text{ ise} \\
 &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için}
 \end{aligned}$$

- (a) $M_{\mathbf{X}}(t)$ moment çıkan fonksiyonunu bulunuz.
- (b) $M_{\mathbf{X}}(t)$ yardımıyla, $E(X)$ beklenen değerini ve $V(X)$ varyansını bulunuz.
- (c) $Y = 7X - 9$ raslantı değişkeninin $M_Y(t)$ moment çıkan fonksiyonunu, $E(Y)$ beklenen değerini ve $V(Y)$ varyansını bulunuz.
- (d) X raslantı değişkeninin ortalamaya göre üçüncü dereceden momentini bulunuz.

4. X sürekli raslantı değişkeninin moment çikaran fonksiyonu $k > 0$ olmak üzere,

$$M_{\mathbf{x}}(t) = \frac{k}{k-t}$$

olarak verilmiştir. $E(X^2) = \frac{2}{9}$ olduğuna göre,

- (a) k sabitini bulunuz.
 - (b) $V(X) = ?$
 - (c) $Y = -2X + 3$ raslantı değişkeninin $M_Y(t)$ moment çikaran fonksiyonunu ve $\varphi_Y(t)$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
 - (d) X raslantı değişkeninin olasılık çikaran fonksiyonu yazılabilir mi? Neden?
 - (e) X raslantı değişkeninin beş noktasına göre ikinci dereceden momentini bulunuz.
5. $E(X) = 3$ olan X kesikli raslantı değişkeninin moment çikaran fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$M_{\mathbf{x}}(t) = \frac{pe^t}{1 - e^t + pe^t}$$

- (a) p sabitini bulunuz.
 - (b) $g_{\mathbf{x}}(s)$ olasılık yaratıcı fonksiyonunu ve $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
 - (c) $g_{\mathbf{x}}(s)$ yardımıyla, X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
6. X sürekli raslantı değişkeninin momentleri $\mu'_k = k!$, $k = 1, 2, 3, \dots$ olarak verilmiştir. Buna göre,
- (a) $M_{\mathbf{x}}(t)$ moment çikaran fonksiyonunu bulunuz.
 - (b) $Y = 4X - 2$ raslantı değişkeninin iki noktasına göre birinci dereceden momentini bulunuz.
 - (c) $M_Y(t)$ moment çikaran fonksiyonunu ve $\varphi_Y(t)$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
 - (d) $Z = 2X^2 - 1$ raslantı değişkeninin $V(Z)$ varyansını bulunuz.

7. X kesikli raslantı değişkeninin moment çikaran fonksiyonu,

$$M_{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{3}e^t - a$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

- (a) a sabitini bulunuz.
- (b) $Y = 2X^2 + 3X$ raslantı değişkeninin $E(Y)$ beklenen değerini bulunuz.
- (c) X raslantı değişkeninin $g_{\mathbf{x}}(s)$ olasılık yaratıcı fonksiyonunu ve $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
- (d) X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
- (e) $Z = 4X + 9$ raslantı değişkeninin $g_{\mathbf{z}}(s)$ olasılık yaratıcı fonksiyonunu bulunuz.

8. X sürekli raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi_{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{k - it}, \quad k \neq it$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

- (a) k sabitini bulunuz.
 - (b) $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ yardımıyla, $V(X)$ varyansını bulunuz.
 - (c) X raslantı değişkeninin ortalamaya göre üçüncü dereceden momentini bulunuz.
 - (d) $W = 7 - 5X$ raslantı değişkeninin $M_{\mathbf{w}}(t)$ moment çikaran fonksiyonunu bulunuz.
9. Bir kutuda 2 beyaz ve 3 mavi top vardır. *Cekilen yerine konulmaksızın* bu kutudan sırayla top çekilmektedir. İki mavi top çekilene kadar gerçekleştirilen toplam denemelerin sayısı, X raslantı değişkeni olsun.
- (a) X 'in olasılık çikaran fonksiyonunu bulunuz.
 - (b) X raslantı değişkeninin $\mu_{[1]}$ ve $\mu_{[2]}$ faktöriyel momentlerinden yararlanarak beklenen değer ve varyansını bulunuz.
 - (c) $Z = 10X + 7$ raslantı değişkeninin $g_{\mathbf{z}}(s)$ olasılık çikaran fonksiyonunu bulunuz.
10. X kesikli raslantı değişkeninin olasılık çikaran fonksiyonu,

$$g_{\mathbf{x}}(s) = \frac{s(1-s^3)}{3(1-s)}$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

- (a) $g_{\mathbf{x}}(s)$ yardımıyla, $V(X)$ varyansını bulunuz.
 - (b) X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
 - (c) $M_{\mathbf{x}}(t)$ moment çikaran fonksiyonunu ve $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
 - (d) $W = \frac{5X}{6}$ raslantı değişkeninin $M_{\mathbf{w}}(t)$ moment çikaran fonksiyonunu bulunuz.
 - (e) X raslantı değişkeninin $\mu_{[3]}$ üçüncü faktöriyel momentini bulunuz.
 - (f) X raslantı değişkeninin Laplace fonksiyonu yazılabılır mı? Neden?
11. X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:
- $$p_{\mathbf{x}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, 3, \dots \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{cases}$$
- (a) $g_{\mathbf{x}}(t)$ olasılık yaratıcı fonksiyonunu bulunuz.
 - (b) X raslantı değişkeninin $E(X)$ beklenen değerini, $V(X)$ varyansını ve $\mu_{[3]}$ üçüncü faktöriyel momentini bulunuz.
 - (c) $M_{\mathbf{x}-\mu}(t)$ moment çikaran fonksiyonunu ve $\varphi_{\frac{\mathbf{x}-\mu}{\sigma}}(t)$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

12. X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x) &= 2e^{-2x}, \quad x > 0 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) $F_{\mathbf{X}}(s)$ Laplace fonksiyonunu bulunuz.
- (b) $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$ karakteristik fonksiyonunu ve $M_{\mathbf{X}}(t)$ moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
- (c) $F_{\mathbf{X}}(s)$ ' ten yararlanarak, $V(X)$ varyansını bulunuz.
- (d) $W = 3X - 7$ raslantı değişkeninin $F_{\mathbf{W}}(s)$ Laplace fonksiyonunu bulunuz.

13. X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 2 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) $F_{\mathbf{X}}(s)$ Laplace fonksiyonunu bulunuz.
- (b) $F_{\mathbf{X}}(s)$ ' ten yararlanarak, $E(X)$ beklenen değerini bulunuz.
- (c) $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$ karakteristik fonksiyonunu ve $M_{\mathbf{X}}(t)$ moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
- (d) $Z = 12X + 4$ raslantı değişkeninin $F_{\mathbf{Z}}(s)$ Laplace fonksiyonunu bulunuz.