Örnekler

1- Aşağıda verilen kümelerden hangileri $\mathbb{R}^2$ için bir tabandır!

a) $S=\{(1,3),(1,-1)\}$; b) $S=\{(0,0),(1,2),(2,4)\}$

c) $S=\{(1,2),(2,-3),(3,2)\}$; d) $S=\{(1,3),(-2,6)\}$

Çöz: a) Hatırlatma,

S, V vektör uzayının tabanıdır $\Leftrightarrow$ i) $\langle S\rangle = V$ dir.
ii) S lineer bağımsızdır.

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$ alalım.

$$(a,b)=x(1,3)+y(1,-1)=(x+y,3x-y)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=a\\ 3x-y&=b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=\frac{a+b}{4}=\frac{a}{4}+\frac{b}{4}\\ y&=a-x=a-\frac{a+b}{4}=\frac{3a-b}{4}=\frac{3a}{4}-\frac{b}{4}\end{aligned}$$

olup $(a,b)\in\langle(1,3),(1,-1)\rangle$ olur. Yani S, $\mathbb{R}^2$ yi üretir.

$$(0,0)=x(1,3)+y(1,-1)=(x+y,3x-y)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=0\\ 3x-y&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=y=0$$ olup S lineer bağımsızdır.

O halde S, $\mathbb{R}^2$ için bir tabandır.

b) $(2,4)=2\cdot(1,2)$ olduğundan S lineer bağımsız olamaz

O halde taban değildir.

c) $(3,2)=x(1,2)+y(2,-3)=(x+2y,2x-3y)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x+2y&=3\\ 2x-3y&=2\end{aligned} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}3&2\\2&-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\2&-3\end{vmatrix}}=\frac{-13}{-7}=\frac{13}{7}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}}{-7}=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$$

O halde $(3,2)=\frac{13}{7}(1,2)+\frac{4}{7}(2,3)$ olup S lineer bağımsız değildir. Taban olamaz.

d) $(a,b) = x(1,3) + y(-2,6) = (x-2y,\ 3x+6y)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} x - 2y = a \\ 3x + 6y = b \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{3a+b}{6} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{6}$

$y = \dfrac{x-a}{2} = -\dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{12}$

olup $(a,b) \in \langle (1,3),(-2,6) \rangle$ dır. Yani S, $\mathbb{R}^2$ yi üretir.

S, $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır.

2. Aşağıdaki kümelerden hangileri $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır.

a) $S = \{(1,2,0),(0,1,-1)\}$; b) $S = \{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,1),(0,1,-1)\}$

c) $S = \{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$; d) $S = \{(1,0,0),(0,2,-1),(3,4,1),(0,1,0)\}$

Çöz: boy $\mathbb{R}^3 = 3$ olduğu için tabanın eleman sayısı tam 3 olmalıdır ve bu üç vektörden oluşan küme doğrusal bağımsız olmalıdır. O halde a, b ve d taban olamaz.

c) $(a,b,c) = x(3,2,2) + y(-1,2,1) + z(0,1,0)$

$= (3x-y,\ 2x+2y+z,\ 2x+y)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x - y = a \\ 2x + 2y + z = b \\ 2x + y = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{a+c}{5} \\ y = \dfrac{-2a+3c}{5} \\ z = \dfrac{2a+5b-8c}{5} \end{array}$

olup $\langle S \rangle = \mathbb{R}^3$ tür. Yani S, $\mathbb{R}^3$'ü üretir.

$a=b=c=0$ alırsak

$(0,0,0) = (3x-y,\ 2x+2y+z,\ 2x+y)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z = 0$ olup S doğrusal bağımsız kümedir. O halde S, $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır.

Soru : Aşağıdakilerden hangileri $\mathbb{R}^4$ için bir tabandır?

a) $S=\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$; b) $S=\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$

c) $S=\{(-2,4,6,4),(0,1,2,0),(-1,2,3,2),(-3,2,5,6),(-2,-1,0,4)\}$

d) $S=\{(0,0,1,1),(-1,1,1,2),(1,1,0,0),(2,1,2,1)\}$

e) $S=\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$

f) $S=\{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1)\}$

3) Aşağıdakilerden hangileri P_2 için bir tabandır!

a) $S=\{-x^2+x+2,\ 2x^2+2x+3,\ 4x^2-1\}$

b) $S=\{x^2+2x-1,\ 2x^2+3x-2\}$

c) $S=\{x^2+1,\ 3x^2+2x,\ 3x^2+2x+1,\ 6x^2+6x+3\}$

d) $S=\{3x^2+2x+1,\ x^2+x+1,\ x^2+1\}$

Çöz: boy $P_2=3$ olduğu için tabanda 3 eleman olmalıdır.

b ve c taban olamaz.

a) $ax^2+bx+c = A(-x^2+x+2)+B(2x^2+2x+3)+D(4x^2-1)$

$= (-A+2B+4D)x^2+(A+2B)x+(2A+3B-D)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -A+2B+4D &= a \\ A+2B &= b \\ 2A+3B-D &= c \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü olması için $a-3b+4c=0$ olmalıdır. O halde S kümesi taban olamaz. Örneğin $x^2+x+1 \notin \langle S\rangle$ dır. Yani $\langle S\rangle \subsetneq P_2$ olup S, P_2 yi üretemez.

d) $ax^2+bx+c = A(3x^2+2x+1)+B(x^2+x+1)+D(x^2+1)$

$$= (3A+B+D)x^2+(2A+B)x+(A+B+D)$$

$\Rightarrow$ $3A+B+D = a$

$2A+B = b$

$A+B+D = c$ denklemi elde edilir.

Bu denklemi çözersek

$A = \frac{a+4b-5c}{2}$, $B = -a-b+3c$, $D = \frac{a-2b+c}{2}$

elde ederiz. O halde S kümesi P_2 yi üretir.

$0 = (3A+B+D)x^2+(2A+B)x+(A+B+D)$ eşitliğinden

$A=B=D=0$ elde edilir. Bu da S nin lineer bağımsız bir küme olduğunun söyler. O halde S, P_2 için bir tabandır.

Soru: Aşağıdakilerden hangileri P_3 için bir tabandır!

a) $S=\{x^3+2x^2+3x,\ 2x^3+1,\ 6x^3+8x^2+6x+4,\ x^3+2x^2+x+1\}$

b) $S=\{x^3+x^2+1,\ x^3-1,\ x^3+x^2+x\}$

c) $S=\{x^3+x^2+x+1,\ x^3+2x^2+x+3,\ 2x^3+x^2+3x+2,\ x^3+x^2+2x+2\}$

d) $S=\{x^3-x,\ x^3+x^2+1,\ x-1\}$

e) $S=\{x^3+x^2+x+1,\ x^2+x+1,\ x+1,\ 1\}$

f) $S=\{3x^3+2x^2+x+1,\ 2x^2+x+1,\ 2x+1,\ 2\}$

g) $S=\{x^3-3,\ x^2-2,\ x-1,\ 1\}$