

## UYGULAMA I

1.  $X$  kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{3}{8} \quad , \quad x = -3 \text{ ise} \\ &= \frac{1}{8} \quad , \quad x = 0 \text{ ise} \\ &= \frac{1}{4} \quad , \quad x = 3, 4 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
- (b)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  yardımıyla,  $E(X)$  beklenen değerini ve  $V(X)$  varyansını bulunuz.
- (c)  $Y = 3X - 2$  raslantı değişkeninin  $M_{\mathbf{Y}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu ve  $g_{\mathbf{Y}}(s)$  olasılık yaratıcı fonksiyonunu bulunuz.

2.  $X$  sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{2}{7} \quad , \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ &= \frac{1}{7} \quad , \quad 3 < x \leq 4 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
- (b)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  yardımıyla,  $E(X)$  beklenen değerini bulunuz.
- (c)  $Y = 8X$  raslantı değişkeninin  $F_{\mathbf{Y}}(s)$  Laplace fonksiyonunu bulunuz.

3.  $X$  kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{1}{8} \quad , \quad x = 0, 3 \text{ ise} \\ &= \frac{3}{8} \quad , \quad x = 1, 2 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
- (b)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  yardımıyla,  $E(X)$  beklenen değerini ve  $V(X)$  varyansını bulunuz.
- (c)  $Y = 7X - 9$  raslantı değişkeninin  $M_{\mathbf{Y}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu,  $E(Y)$  beklenen değerini ve  $V(Y)$  varyansını bulunuz.
- (d)  $X$  raslantı değişkeninin ortalamaya göre üçüncü dereceden momentini bulunuz.

4.  $X$  sürekli raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu  $k > 0$  olmak üzere,

$$M_{\mathbf{X}}(t) = \frac{k}{k-t}$$

olarak verilmiştir.  $E(X^2) = \frac{2}{9}$  olduğuna göre,

- (a)  $k$  sabitini bulunuz.
  - (b)  $V(X) = ?$
  - (c)  $Y = -2X + 3$  raslantı değişkeninin  $M_{\mathbf{Y}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu ve  $\varphi_{\mathbf{Y}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
  - (d)  $X$  raslantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu yazılabilir mi? Neden?
  - (e)  $X$  raslantı değişkeninin beş noktasına göre ikinci dereceden momentini bulunuz.
5.  $E(X) = 3$  olan  $X$  kesikli raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$M_{\mathbf{X}}(t) = \frac{pe^t}{1 - e^t + pe^t}$$

- (a)  $p$  sabitini bulunuz.
  - (b)  $g_{\mathbf{X}}(s)$  olasılık yaratıcı fonksiyonunu ve  $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
  - (c)  $g_{\mathbf{X}}(s)$  yardımıyla,  $X$  kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
6.  $X$  sürekli raslantı değişkeninin momentleri  $\mu'_k = k!$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  olarak verilmiştir. Buna göre,
- (a)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
  - (b)  $Y = 4X - 2$  raslantı değişkeninin iki noktasına göre birinci dereceden momentini bulunuz.
  - (c)  $M_{\mathbf{Y}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu ve  $\varphi_{\mathbf{Y}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
  - (d)  $Z = 2X^2 - 1$  raslantı değişkeninin  $V(Z)$  varyansını bulunuz.
7.  $X$  kesikli raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_{\mathbf{X}}(t) = \frac{1}{3}e^t - a$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

- (a)  $a$  sabitini bulunuz.
- (b)  $Y = 2X^2 + 3X$  raslantı değişkeninin  $E(Y)$  beklenen değerini bulunuz.
- (c)  $X$  raslantı değişkeninin  $g_{\mathbf{X}}(s)$  olasılık yaratıcı fonksiyonunu ve  $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
- (d)  $X$  raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
- (e)  $Z = 4X + 9$  raslantı değişkeninin  $g_{\mathbf{Z}}(s)$  olasılık yaratıcı fonksiyonunu bulunuz.

8.  $X$  sürekli raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{1}{k - it}, \quad k \neq it$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

- (a)  $k$  sabitini bulunuz.
  - (b)  $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$  yardımıyla,  $V(X)$  varyansını bulunuz.
  - (c)  $X$  raslantı değişkeninin ortalamaya göre üçüncü dereceden momentini bulunuz.
  - (d)  $W = 7 - 5X$  raslantı değişkeninin  $M_{\mathbf{W}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
9. Bir kutuda 2 beyaz ve 3 mavi top vardır. ***Çekilen yerine konulmaksızın*** bu kutudan sırayla top çekilmektedir. İki mavi top çekilene kadar gerçekleştirilen toplam denemelerin sayısı,  $X$  raslantı değişkeni olsun.
- (a)  $X$ 'in olasılık çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
  - (b)  $X$  raslantı değişkeninin  $\mu_{[1]}$  ve  $\mu_{[2]}$  faktöriyel momentlerinden yararlanarak beklenen değer ve varyansını bulunuz.
  - (c)  $Z = 10X + 7$  raslantı değişkeninin  $g_{\mathbf{Z}}(s)$  olasılık çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
10.  $X$  kesikli raslantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$g_{\mathbf{X}}(s) = \frac{s(1 - s^3)}{3(1 - s)}$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

- (a)  $g_{\mathbf{X}}(s)$  yardımıyla,  $V(X)$  varyansını bulunuz.
  - (b)  $X$  raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
  - (c)  $M_{\mathbf{X}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu ve  $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
  - (d)  $W = \frac{5X}{6}$  raslantı değişkeninin  $M_{\mathbf{W}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
  - (e)  $X$  raslantı değişkeninin  $\mu_{[3]}$  üçüncü faktöriyel momentini bulunuz.
  - (f)  $X$  raslantı değişkeninin Laplace fonksiyonu yazılabilir mi? Neden?
11.  $X$  kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots \text{ ise} \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a)  $g_{\mathbf{X}}(t)$  olasılık yaratıcı fonksiyonunu bulunuz.
- (b)  $X$  raslantı değişkeninin  $E(X)$  beklenen değerini,  $V(X)$  varyansını ve  $\mu_{[3]}$  üçüncü faktöriyel momentini bulunuz.
- (c)  $M_{\mathbf{X}-\mu}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu ve  $\varphi_{\frac{\mathbf{X}-\mu}{\sigma}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

12.  $X$  sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x) &= 2e^{-2x} \quad , \quad x > 0 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a)  $F_{\mathbf{X}}(s)$  Laplace fonksiyonunu bulunuz.
- (b)  $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu ve  $M_{\mathbf{X}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
- (c)  $F_{\mathbf{X}}(s)$ ' ten yararlanarak,  $V(X)$  varyansını bulunuz.
- (d)  $W = 3X - 7$  raslantı değişkeninin  $F_{\mathbf{W}}(s)$  Laplace fonksiyonunu bulunuz.

13.  $X$  sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x) &= \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < x < 2 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a)  $F_{\mathbf{X}}(s)$  Laplace fonksiyonunu bulunuz.
- (b)  $F_{\mathbf{X}}(s)$ ' ten yararlanarak,  $E(X)$  beklenen değerini bulunuz.
- (c)  $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$  karakteristik fonksiyonunu ve  $M_{\mathbf{X}}(t)$  moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
- (d)  $Z = 12X + 4$  raslantı değişkeninin  $F_{\mathbf{Z}}(s)$  Laplace fonksiyonunu bulunuz.