Gram-Schmidt Yöntemi

Tanım: V bir iç çarpım uzayı olsun. $S \subseteq V$ (alt küme) olsun.

i) Eğer her $v \neq w$, $v, w \in S$ için $\langle v, w \rangle = 0$ oluyorsa S'ye ortogonal (dik) küme denir. Özel olarak, S bir taban ise S'ye ortogonal taban denir.

ii) Eğer S ortogonal ve her $v \in S$ için $\|v\| = 1$ ise S'ye ortonormal küme denir. Özel olarak S bir taban ise S'ye ortonormal taban denir.

her vektörün normunu (uzunluğunu) 1'e bölerek

Not: Bir ortogonal tabanda vektörleri normalleştirerek ortonormal bir taban elde edilir.

Örnek: $S_1 = \{ \underset{w_1}{(1,1,1)}, \underset{w_2}{(-2,1,1)}, \underset{w_3}{(0,-1,1)} \} \subseteq \mathbb{R}^3$ ve

$S_2 = \{ \underset{v_1}{(3, 1/2, -1)}, \underset{v_2}{(-1, 2, -2)} \} \subseteq \mathbb{R}^3$ kümeleri ortogonaldir.

$\langle v_1, v_2 \rangle = -3 + 1 + 2 = 0$ $\quad (v_1 \perp v_2)$

$\langle w_1, w_2 \rangle = -2 + 1 + 1 = 0$

$\langle w_1, w_3 \rangle = 0 - 1 + 1 = 0$

$\langle w_2, w_3 \rangle = 0 - 1 + 1 = 0$

(Neden?)

Ayrıca S_1, $\mathbb{R}^3$ için bir taban old. için S_1

ortogonal tabandır.

$$S_3 = \{ (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}),$$
$$(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \}$$

ortonormal bir tabandır.

$$\|w_1\| = \sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = w_1' \Rightarrow \|w_1'\| = 1$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = w_2' \Rightarrow \|w_2\| = 1$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\langle w_3, w_3 \rangle} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$\frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = w_3' \Rightarrow \|w_3'\| = 1$$

Teorem (Gram-Schmidt)

V bir iç çarpım uzayı ve $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ lineer bağımsız bir küme olsun. O zaman

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot w_2$$

$$\vdots$$

$$w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot w_2 - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} \cdot w_{n-1}.$$

vektörleri ortogonal vektörlerdir.

Not: Yukarıdaki teoremle birlikte

$$w_i' = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

vektörleri için $\{w_1', w_2', \dots, w_n'\}$ kümesi ortonormal bir kümedir.

Örnek: $\underset{=}{S} = \{(1,-1,1), (2,0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi yardımıyla
$\qquad\qquad v_1 \qquad\qquad v_2$

ortogonal bir küme bulunuz.

S lineer bağımsız old. Gram-Schmidt teoremi uygulanır.

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1$$

$$= \underbrace{(2,0,-1)}_{\text{vektör}} - \underbrace{\frac{\langle (2,0,-1),(1,-1,1)\rangle}{\langle (1,-1,1),(1,-1,1)\rangle}}_{\text{skaler}} \cdot \underbrace{(1,-1,1)}_{\text{vektör}}$$

$$= (2,0,-1) - \frac{1}{3}(1,-1,1)$$

$$= (2-1/3, \; 1/3, \; -4/3) = (5/3, \; 1/3, \; -4/3)$$

$\{w_1, w_2\}$ kümesi ortogonaldir.

$$w_1' = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_2' = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(5/3, 1/3, -4/3)}{\sqrt{25/9 + 1/9 + 16/9}}$$

$$= \left(\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{-4}{\sqrt{42}}\right)$$

$\{w_1', w_2'\}$ kümesi ortonormaldir.

Örnek: $\langle 1, x, x^2 \rangle$ tarafından üretilen $C[0,1]$ (iç çarpım?) uzayının altuzayı için ortogonal bir taban bulunuz.

$$W = \langle \underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{x}_{v_2}, \underbrace{x^2}_{v_3} \rangle$$

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1$$

$$= x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1$$

$$! \quad \langle x, 1\rangle = \int_0^1 x\,dx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1\,dx = x \Big|_0^1 = 1$$

$$= x - \frac{1}{2} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} \cdot w_2$$

$$= x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle x^2, x-1/2\rangle}{\langle x-1/2, x-1/2\rangle} \cdot (x - 1/2)$$

$$! \quad \langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = x^3/3 \Big|_0^1 = 1/3$$

$$\langle x^2, x-1/2\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot (x-1/2)\,dx = \int_0 \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[x^4/4 - \frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

$$= 1/4 - 1/6 = 2/24 = 1/12$$

$$\langle x-1/2, x-1/2\rangle = \int_0^1 (x-1/2)^2\,dx = \int_0 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$4 - 6 + 3$$

$$= \underset{(4)}{1/3} - \underset{(6)}{1/2} + \underset{(3)}{1/4} = 1/12$$

$$= x^2 - 1/3 \quad - \quad \frac{1/12}{1/12} \; (x - 1/2)$$

$$= x^2 - x \; - 1/3 + 1/2 \quad = x^2 - x + 1/6$$