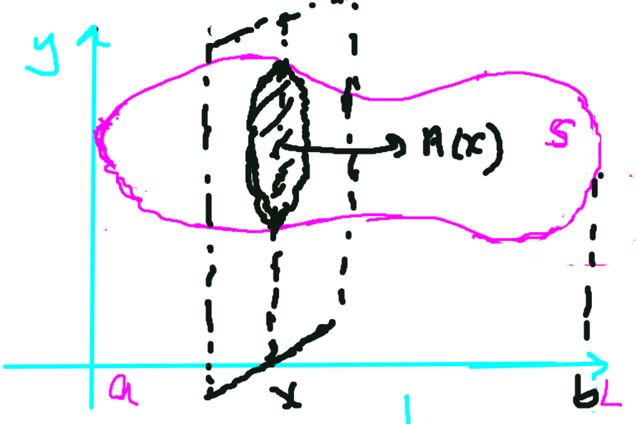
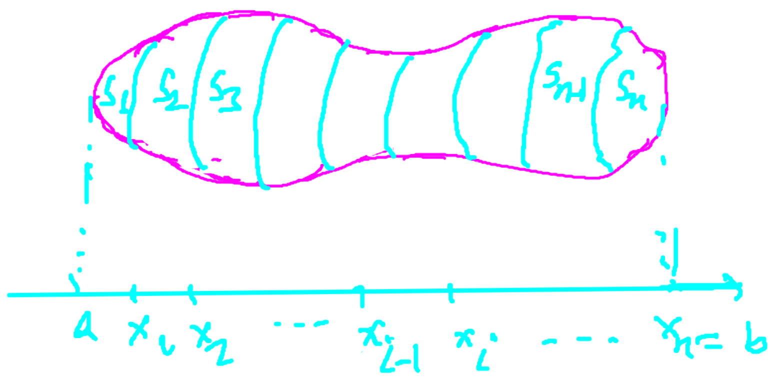
8.2. İNTEGRAL İLE HACİM BULUNMASI.

A) → KESİT YÖNTEMİ İLE HACİM BULMAK.





Şekil 1 → (a) → (b)

S, şekil 1'deki gibi 3-boyutlu uzayda bir bölge (cisim) ve L bir doğru (x-ekseni veya y-ekseni olabilir) olsun.

L'ye dik düzlemlerin S ile arakesitlerine (iki boyutlu bir bölgedir) S'nin kesitleri denir.

L'nin, koordinatı x olan noktasından geçen S nin kesitinin alanı A(x) ise aşağıdakiler sağlanmak üzere;

(i) L'ye dik bir düzlem S ile kesişir $\Leftrightarrow$ Düzlem L'yi [a,b] de keser.

(ii) A(x) fonksiyonu [a,b] de süreklidir

S cisminin hacmi $\boxed{V = \int_a^b \underbrace{A(x)}_{\text{taban alanı}} \underbrace{dx}_{\text{yükseklik}}}$ olur. kesit yöntemi ile hacim bulmak denir.

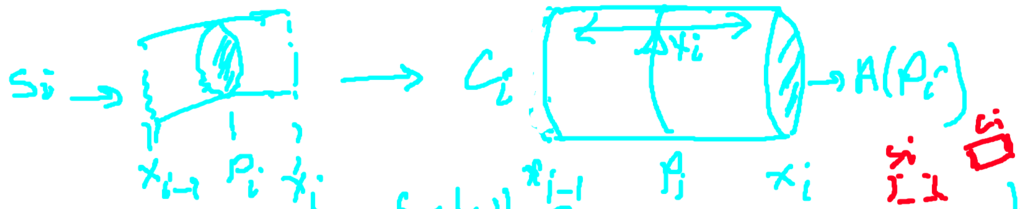
Not: [a,b] aralığının $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ bölüntüsünü gözönüne alalım. Bu durumda

$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{i-1}, x_i] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$ ve i için

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,3,\dots,n)$ ve $\mu = \text{maks}\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$

olsun. x_i, $(i = 1,2,3,\dots,n)$ noktalarında L'ye dik olan düzlemler S'yi $S_1, S_2, \dots S_n$ dilimlerine böler. S cisminin hesaplanmasında;

(i) $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bir nokta ve $[x_{i-1}, x_i]$ üzerindeki sabit değer $A(p_i)$ almak üzere sürekli A(x) fonk düşünülerek;



Şekil 2

Şekil 2 deki gibi S_i nin kenarları, genellikle eğiktir.

S_i'yi C_i dik silindiri gibi düşünürek, S nin P_i deki (Δx_i uzunluktaki) dik kesiti L'ye paralel doğrular boyunca alınır. (Dik silindirin hacmi=(taban alanı)x.yükseklik old.dan)

$V_i = V(C_i) = A(P_i)\cdot\Delta x_i$ olur. $V(S) = V(S_1)+V(S_2)+\dots+V(S_n)$

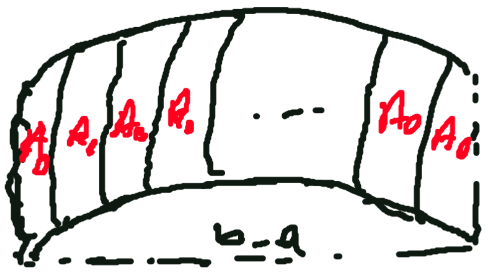
ve $V(S_i) \approx V(C_i) = A(P_i)\,\Delta x_i$ old. dan

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(P_i)\,\Delta x_i \;\text{---}\; (**)$$ bulunur.

O halde

$$V(S) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} A(P_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b A(x)\,dx \text{ olur.}$$

1. Örnek: S cisminin her kesitinin şekilde olduğu gibi aynı alana sahip $(=A_0)$ olursa $V(S)=?$

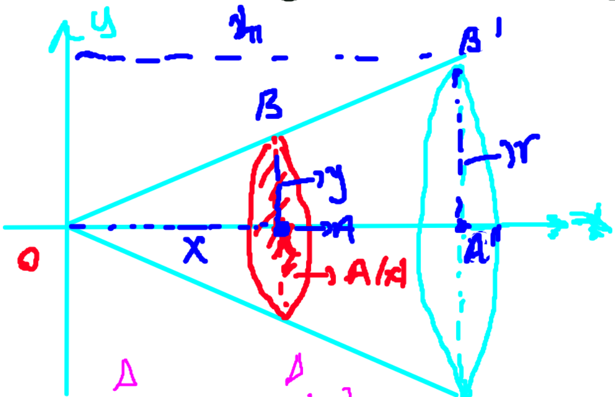


Çözüm $\forall x\in[a,b]$ için $A(x)=A_0$ sabit old. dan

$$V = V(S) = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b A_0\,dx = A_0(b-a)$$ olur ki

bu da taban alanı A_0 ve yüksekliği $(b-a)$ olan dik silindirin hacmidir.

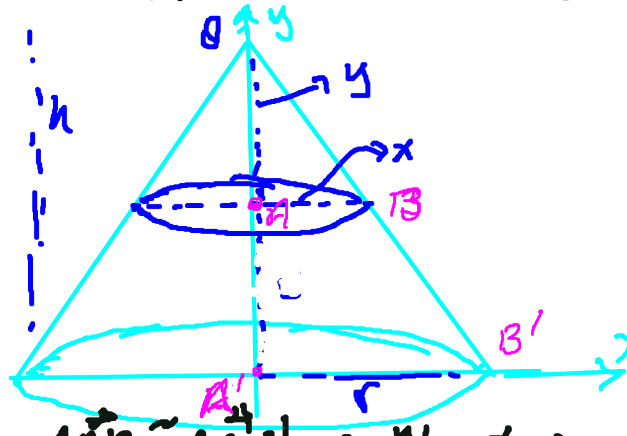
2) Taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan dairesel dik koninin hacmi.



$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ den

$y/r = x/h \Rightarrow y = \frac{r}{h}x$

$A(x) = \pi y^2 = \pi\left(r^2/h^2\right)x^2$ dir.



$\triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow y/h = x/r \Rightarrow$

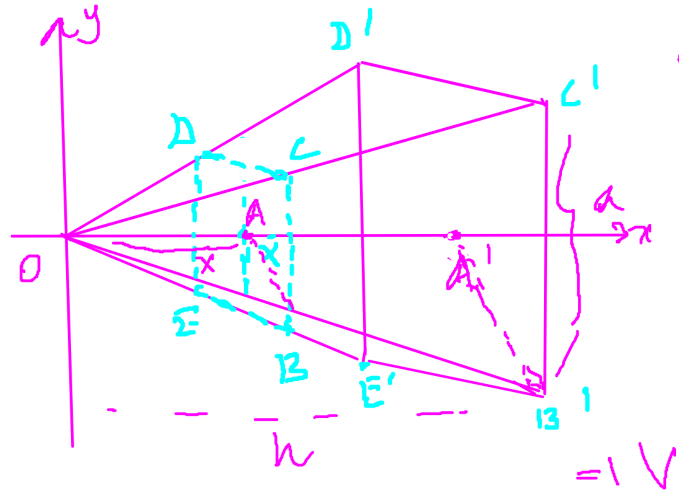
$x = \frac{r}{h}\cdot y$ ve

$A(y) = \pi\cdot x^2 = \pi\left(\frac{r^2}{h^2}\right)y^2$ den.

$$V=\int_0^h A(x)\,dx=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx \qquad V=\int_0^h A(y)\,dy=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}y^2\,dy$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{r^2}{h^2}\right)\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad =\pi\left(\frac{r^2}{h^2}\right)\cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ dir.}$$

3) Yüksekliği h ve taban kenar uzunluğu a olan kare-dik piramidin V hacmi ?



$O\hat{B}C \cong O\hat{B'}C'$ ve $O\hat{B}A \cong O\hat{B'}A'$ olduğundan;

$$\frac{|BC|}{|B'C'|}=\frac{x}{h} \Rightarrow |BC|=\frac{|B'C'|}{h}\cdot x$$

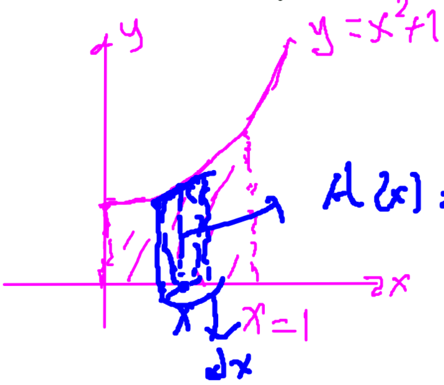
$$\Rightarrow |BC|=\frac{a}{h}x \text{ dır.}$$

$$A(x)=|BC|^2=\frac{a^2}{h^2}x^2 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow V=\int_0^h A(x)\,dx=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx$$

$$=\frac{a^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}a^2\cdot h \text{ bulunur.}$$

4) Tabanı; $y=x^2+1$ parabolü, koordinat eksenleri ve $x=1$ doğrusu ile sınırlı olan ve x-eksenine dik her düzlem kesiti kare olan S cisminin hacmi ?



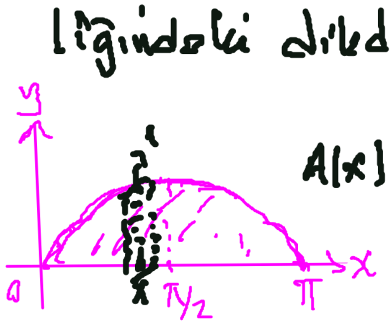
$$A(x)=y^2=(x^2+1)^2$$

$$V=\int_0^1 A(x)\,dx=\int_0^1 y^2\,dx$$

$$=\int_0^1 (x^2+1)^2\,dx=\int_0^1 (x^4+2x^2+1)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1=\frac{28}{15}\text{ br}^3$$

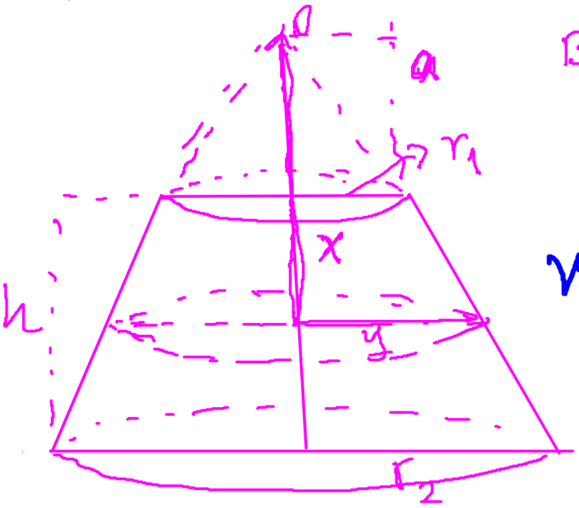
5) Tabanı; x-ekseni, $y=\sin x$ eğrisi ve $x=0$ ile $x=\pi$ doğrularıyla sınırlı olan ve x-eksenine dik her düzlem kesiti 1-birim yüksekliğindeki dikdörtgen olan S cisminin hacmi?



$$A(x)=1.y=\sin x \Rightarrow V=\int_0^\pi A(x)\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$=-\cos x\Big|_0^\pi=2\text{ br}^3.$$

6) Kesik dik koninin hacmini bulunuz.



Benzerlikten;

$$\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{a+h} \Rightarrow a = \frac{h.r_1}{r_2-r_1} \text{ olur.}$$

V_1; tepe noktası 0 ve taban yarıçapı r_1, yüksekliği a olan dik koninin hacmi;

V_2: tepe noktası 0 ve taban yarıçapı r_2, yüksekliği a+h olan dik koninin hacmi dır;

Aranan hacim $V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi r_2^2(a+h) - \frac{1}{3}\pi r_1^2 a$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{h r_2^3}{r_2-r_1} - \frac{h r_1^3}{r_2-r_1}\right] = \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{r_2^3-r_1^3}{r_2-r_1}\right)$$

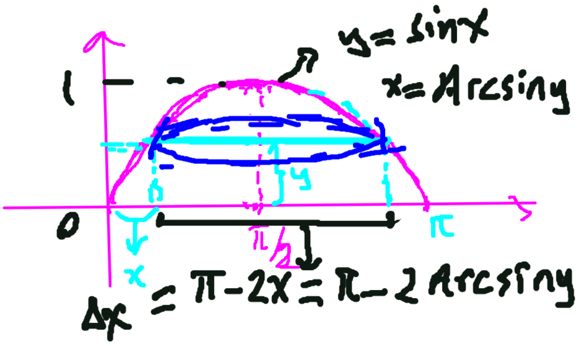
$$= \frac{1}{3}\pi.h\left(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2\right) \text{ olur.}$$

Ya da $A(x) = \pi y^2 = \pi\left(\frac{r_2-r_1}{h}\right)^2 . x^2$

(Benzerlikten $\frac{r_1}{y} = \frac{a}{x} \Rightarrow a = \frac{r_1}{y}x = \frac{hr_1}{r_2-r_1}$ $\Rightarrow y = \frac{x}{h}(r_2-r_1)$)

$$\Rightarrow V = \int_a^{a+h} A(x)\,dx = \pi.\left(\frac{r_2-r_1}{h}\right)^2 . \int_a^{a+h} x^2\,dx = \ldots$$

7) Tabanı; x-ekseni, $y=\sin x$ eğrisi ve $x=0$ ile $x=\pi$ doğrularıyla sınırlı olan ve y-eksenine dik her bir düzlem kesiti yüksekliği 1 birim olan dikdörtgen ise $V(S) = ?$



$\Delta x = \pi - 2x = \pi - 2\text{Arcsin}y$

$A(y) = 1.\Delta(x) = \pi - 2\text{Arcsin}y$

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \int_0^1 (\pi - 2\text{Arcsin}y)\,dy$$

$$= \pi - 2\int_0^1 \text{Arcsin}y\,dy$$

$u = \arcsin y \rightarrow du = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$
$dv = dy \rightarrow v = y$

$$= \pi - 2\left[y.\arcsin y + \sqrt{1-y^2}\right]\Big|_0^1$$

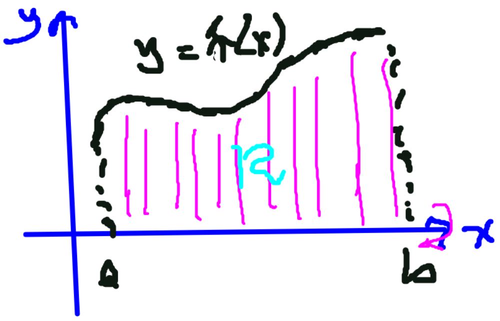
$$= \pi - 2\left[1.\underbrace{\arcsin 1}_{\pi/2} + 0 - 0.\arcsin 0 - 1\right]$$

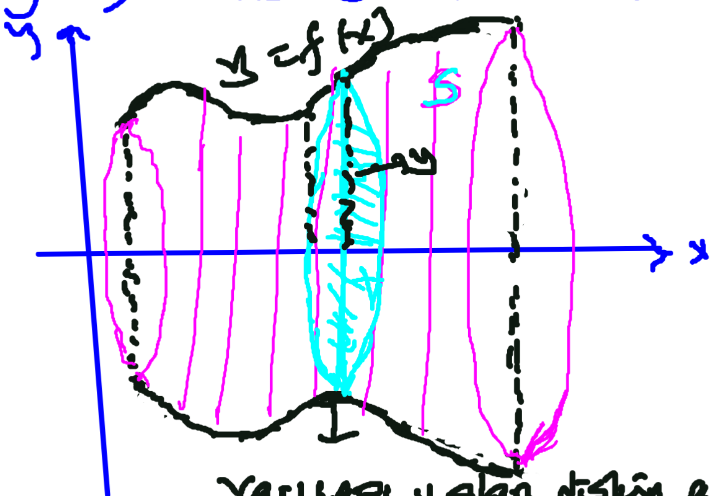
$$= \pi - 2\left(\pi/2 - 1\right) = \pi - \pi + 2.1 = 2 \text{ br}^3 \text{ olur.}$$

B) → DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİ

A → DİSK YÖNTEMİ:

Tanım: Bir R bölgesinin, bu bölgenin bulunduğu düzlemdeki bir L-doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan S cismine (L-dönme-eksenine göre) dönel cisim denir.



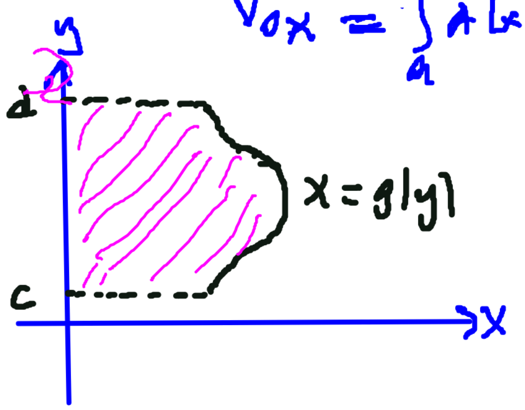


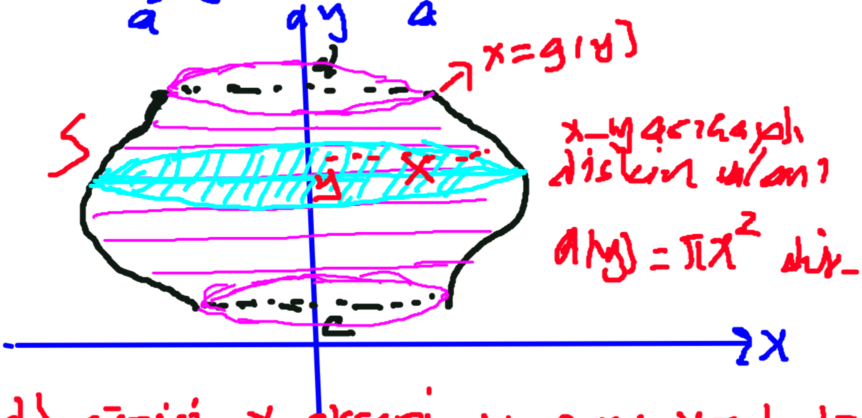
Yarıçapı y olan diskin alanı
$A(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$ dir.

XY-düzleminde;

a) $y=f(x)\geq 0$ $(a\leq x\leq b)$ eğrisi, x-ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S cisminin hacmi

$$V_{ox}=\int_a^b A(x)\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx \quad \dots (*)$$





b) $x=g(y)\geq 0$ $(c\leq y\leq d)$ eğrisi, y-ekseni, $y=c$ ve $y=d$ doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S dönel cisminin hacmi

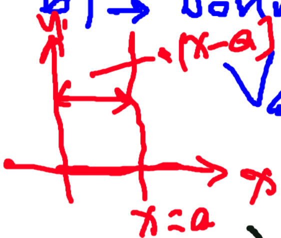
$$V_{oy}=\int_c^d A(y)\,dy=\int_c^d \pi x^2\,dy=\pi\int_c^d (g(y))^2\,dy \quad \dots (**)$$

(*) veya (**) eşitlikleri kullanılarak dönel cisimlerin hacmini bulmaya "Disk yöntemi" denir.

Not: (a) → Dönme ekseni olarak x-ekseni yerine $y=c$ doğrusu seçilirse;

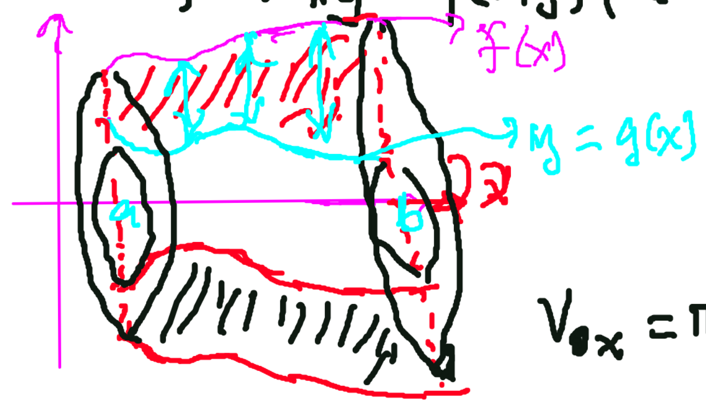
$$V_{0x} = \pi\int_a^b (y-c)^2\,dx = \pi\int_a^b (f(x)-c)^2\,dx \;;$$

b) → Dönme ekseni y-ekseni yerine $x=a$ doğrusu seçilirse



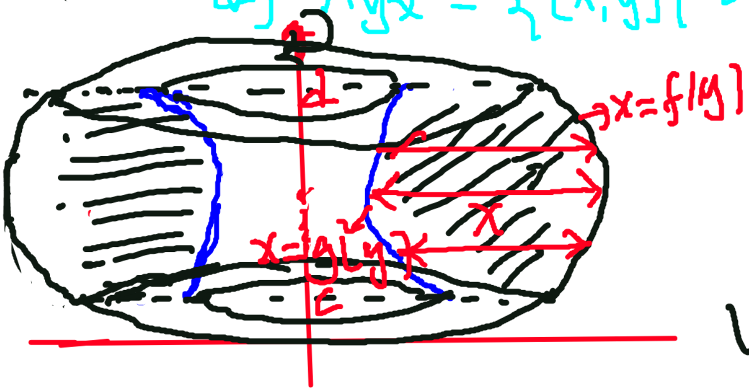
$$V_{0y} = \pi\int_c^d (x-a)^2\,dy = \pi\int_c^d (g(y)-a)^2\,dy \text{ olur.}$$

c) $R_{xy} = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$ bölgesinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;



$$V_{0x} = \pi\int_a^b \left((f(x))^2-(g(x))^2\right)dx \text{ --- } (***)$$

d) $R_{yx} = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ g(y) \le x \le f(y)\}$ bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi;

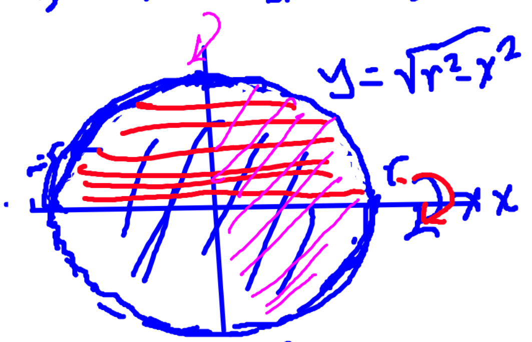


$$V_{0y} = \pi\int_c^d \left((f(y))^2-(g(y))^2\right)dy \text{ --- } (****)$$

(c) ve (d) deki (***) veya (****) eşitlikleri ile hacim bulunmaya da "Delikli Disk Yöntemi" denir.

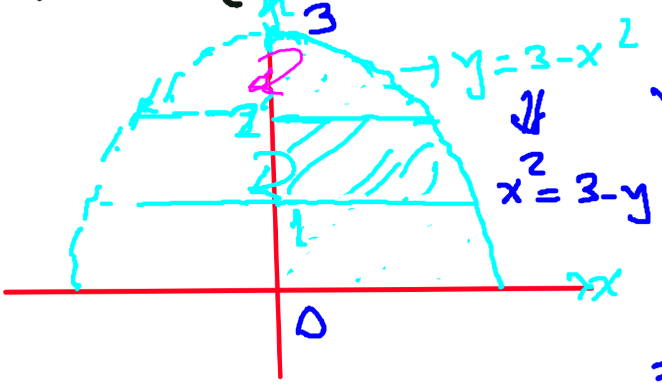
8.2. Örnekler ① r-yarıçaplı S küresinin hacmi?

a) XY-düzleminde $y=\sqrt{r^2-x^2}=f(x)\ge 0$ eğrisi, $x=-r$ ve $x=r$ doğruları ile x-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisim küre olur ve



$$V_{0x} = \pi\int_{-r}^{r} y^2\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = 2\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$ bulunur.

2) $y=3-x^2$ eğrisi, y-ekseni, $y=1$ ve $y=2$ doğrularının sınırladığı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi?

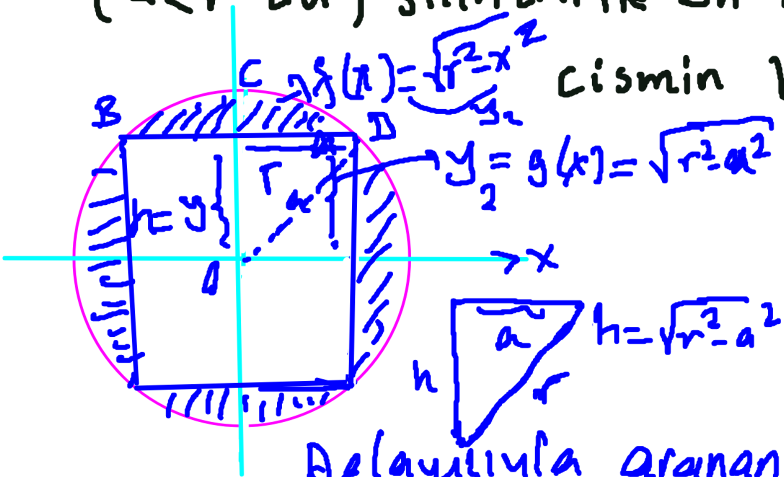


$$V_{Oy}=\pi\int_1^2 x^2\,dy=\pi\int_1^2(3-y)\,dy$$

$$=\pi\left(3y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$=\pi\left[(6-2)-\left(3-\tfrac{1}{2}\right)\right]=\pi\left(4-\tfrac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\pi$$

3) r-yarıçaplı bir kürenin çapı boyunca 2a uzunluğundaki ($a<r$ dır) silindirik bir delik açılıyor. Geriye kalan cismin hacmini bulunuz.



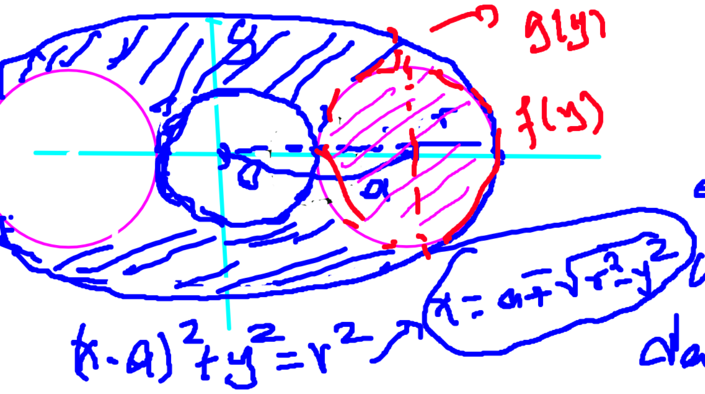
Aranan cisim; $\overset{\frown}{BCD}$ yayı ile $\overline{BD}$ doğru parçasının arasında kalan bölgenim x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşur.

Dolayısıyla aranan hacim;

$$V_{Ox}=\pi\int_{-a}^{a}\left[y_1^2-y_2^2\right]dx=\pi\int_{-a}^{a}\left(r^2-x^2-(r^2-a^2)\right)dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=2\pi\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=2\pi\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi a^3 \text{ dır.}$$

4) Bir dairesel diskin, diskin bulunduğu düzlemde olan ve diski kesmeyen doğru etrafında döndürülmesiyle oluşan S cisminin hacmi?



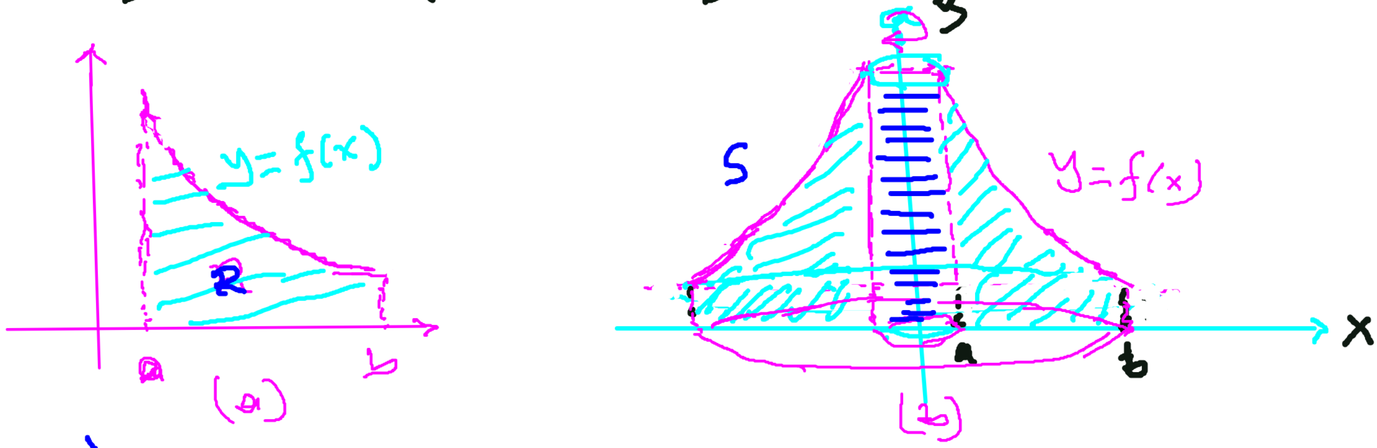
Dairesel disk (xy-düzleminde) $(x-a)^2+y^2\le r^2$ bölgesi ve dönme ekseni y-ekseni olsun. Diskin yarıçapı r, merkezi ile y-ekseni arasında kalan uzaklık $x=a$ olsun. y-ekseni diski kesmediğinden ($r<a$) dır buna TORUS (halka)

$f(y) = a+\sqrt{r^2-y^2}$, $g(y) = a-\sqrt{r^2-y^2}$ alınırsa;

$$V_{oy} = \pi\int_{-r}^{r}\left[\left(a+\sqrt{r^2-y^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{r^2-y^2}\right)^2\right]dy$$

$$= 4\pi a\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy = 8\pi a\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy = 8\pi a\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) = 2\pi^2 a r^2 \text{ dir.}$$

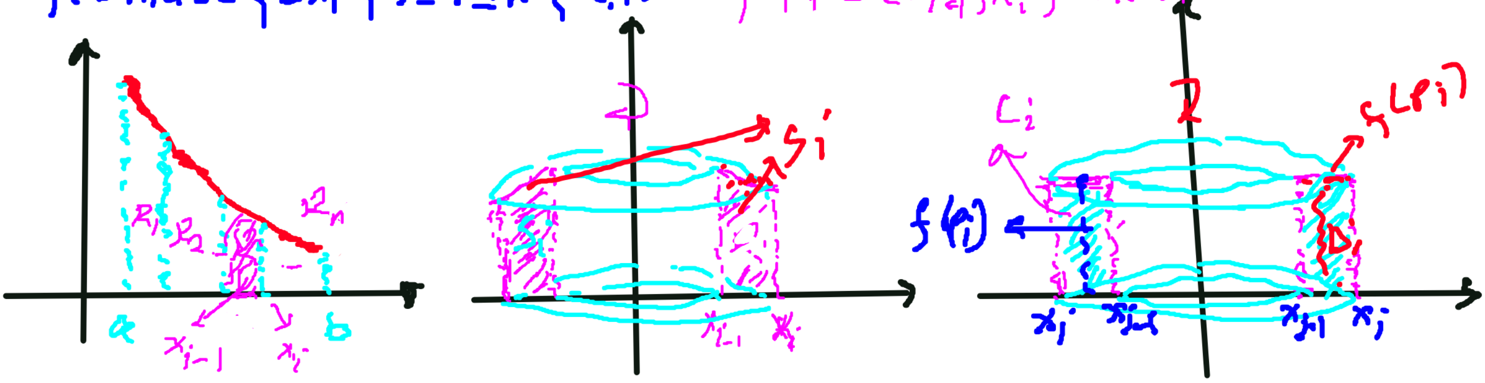
B → KABUK (SİLİNDİR) YÖNTEMİ.



(a) daki R bölgesi Y-ekseni etrafında döndürülerek (b) deki S cismi bulunur. [a,b] aralığının bir P bölüntüsü

$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\dots x_{i-1}<x_i<\dots<x_{n-1}<x_n=b\}$ ve $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$\mu = \text{maks}\{\Delta x_i \mid 1\le i\le n\}$ olsun , $p_i\in[x_{i-1},x_i]$ noktası



Özel olarak $p_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2}$ orta noktası seçilsin.

$a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n$ dikey doğruları $R_1, R_2, \dots, R_n$ bölgelerine ayırır. Buradaki R_i bölgesi, Y-ekseni etrafında döndürülerek elde edilen silindirik kabuk S_i dir. Yukarıda seçilen p_i orta noktası olmak üzere $f(x)$ yerine $f(p_i)$ sabiti alınarak, oluşan dikdörtgen bölgesinin Y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan silindirik kabuk da C_i olsun. Burada $V(S_i) \cong V(C_i)$

yaklaşımı yapılarak $V=\sum_{i=1}^{n} V(S_i) \cong \sum_{i=1}^{n} V(C_i)$ olduğundan ve da $V(C_i)$ hacmi; taban alanı πx_i^2 ve yüksekliği $f(P_i)$ olan dış-silindir hacmi ile taban alanı πx_{i-1}^2 ve yüksekliği $f(P_i)$ olan iç-silindir hacminin farkı, yani

$$V(C_i)=\pi . f(P_i)\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)=\pi f(P_i).\overbrace{(x_i+x_{i-1})}^{2P_i}.\overbrace{(x_i-x_{i-1})}^{\Delta x_i}$$

$$=\pi 2 f(P_i).P_i.\Delta x_i$$ olduğu gözönüne alınırsa;

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} 2\pi P_i . f(P_i).\Delta x_i \Rightarrow V=\lim_{\|P\|\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} P_i . f(P_i).\Delta x_i$$ old. dan

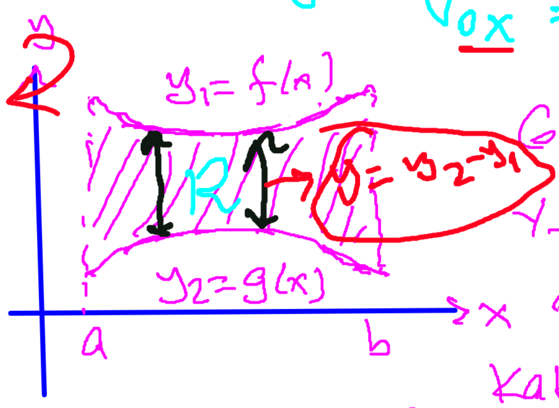
$$V_{oy}=2\pi\int_a^b x.f(x).dx = 2\pi\int_a^b x.y.dx$$ dir. ...(*)

(*) eşitliği ile hacim bulmaya **kabuk (silindir) yöntemi** denir.

Not: Buradaki $2\pi x.f(x)$ ifadesi, yarıçapı x ve yüksekliği $f(x)$ olan silindirik yüzeyin alanını vermektedir.

(*) Eğer, dönme ekseni x-ekseni olarak seçilirse (*)-eşitliği

$$V_{ox}=2\pi\int_c^d x.y.dy = 2\pi\int_c^d y.g(y)dy$$ dır.



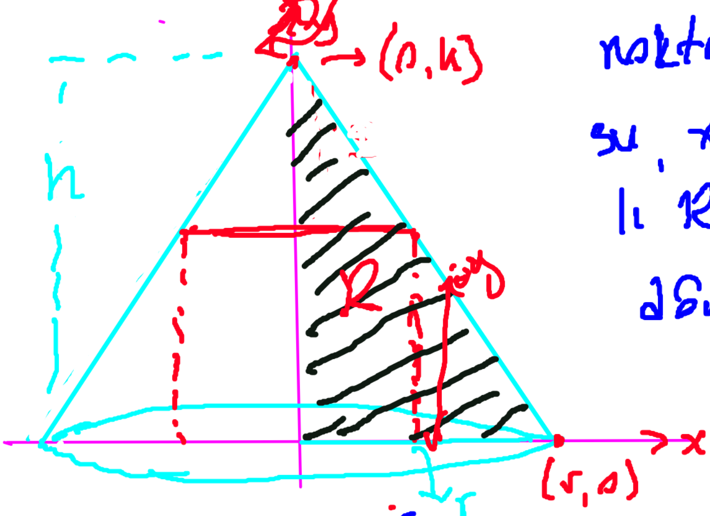
Genel olarak, yandaki R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşacak dönel cismin hacmi; kabuk yöntemi ile;

$$V_{oy}=2\pi\int_a^b x.y.dx = 2\pi\int_a^b x.(y_2-y_1)dx$$

$$=2\pi\int_a^b x.(f(x)-g(x))dx$$ ile bulunur.

Örnekler: 1) Yüksekliği h, taban yarıçapı r olan dairesel dik koninin V hacmini, kabuk yöntemi ile bulunuz.

Aşağıdaki şekilden de görüleceği gibi; (0,h) ve (r,0)



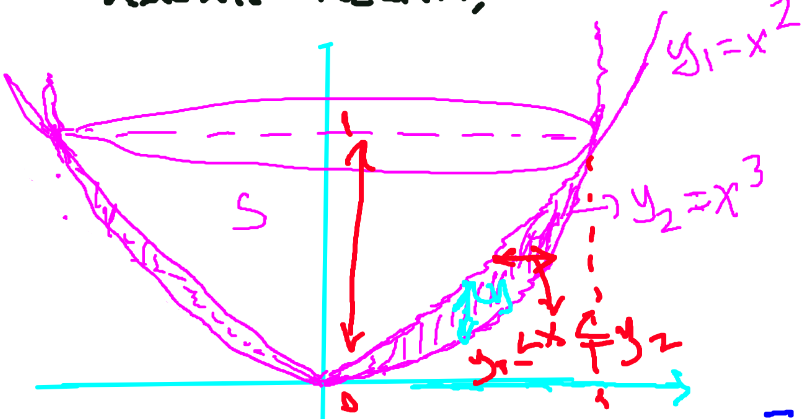
noktalarından geçen $y = h\left(1-\frac{x}{r}\right)$ doğrusu, x-ekseni ve y-ekseni ile sınırlı R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle istenen koni elde edilir. Böylece aranan hacim;

$$V_{oy} = 2\pi \int_0^r x\cdot y\,dx = 2\pi \int_0^r x\cdot h\cdot\left(1-\frac{x}{r}\right)dx$$

$$= 2\pi h \int_0^r \left(x - \frac{x^2}{r}\right)dx = 2\pi h\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3r}\right)\Big|_0^r$$

$$= 2\pi h\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3r}\right) = 2\pi h\left(\frac{r^2}{6}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ bulunur.}$$

2) $y_1 = x^2$ ve $y_2 = x^3$ eğrileri arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?



$x^2 = x^3 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

kabuk yönt.

$$V_{oy} = 2\pi \int_0^1 x\cdot y\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\cdot(y_1 - y_2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\cdot(x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

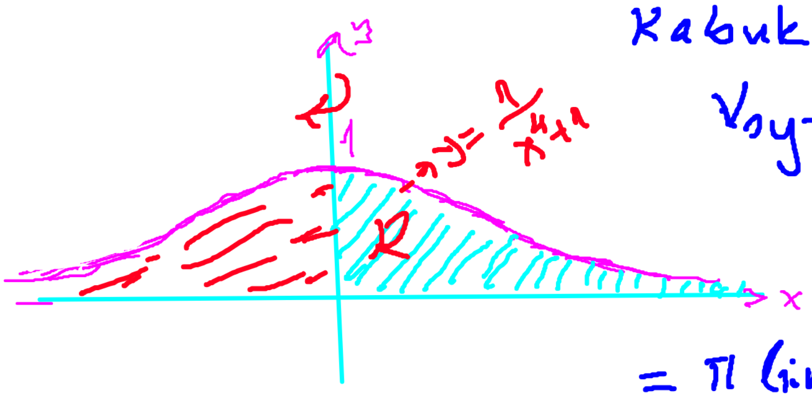
$$= 2\pi\cdot\left(1/4 - 1/5\right) = \frac{\pi}{10} \text{ br}^3.$$

II. yol Disk Yöntemi:

$$V_{oy} = \pi \int_0^1 (x_2^2 - x_1^2)\,dy = \pi \int \left((\sqrt[3]{y})^2 - (\sqrt[2]{y})^2\right)dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(-y + y^{2/3}\right)dy = \pi\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{3}{5}y^{5/3}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{10} \text{ br}^3$$

3) xy-düzleminin 1. bölgesinde; x-ekseni, y-ekseni ve $y = \frac{1}{x^4+1}$ eğrisi arasında kalan (sınırlı olmayan) bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi?



Kabuk Yöntemi ile;

$$V_{oy} = 2\pi \int_0^\infty x\cdot y\cdot dx$$ I. tip has olmayan int.

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}dx$$

$$= \pi \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{2x}{x^4+1}dx \quad \left(\begin{array}{l} x^2=t \\ 2x\,dx=dt \end{array}\right)$$

$$= \pi\cdot\lim_{A\to\infty}\int_0^{A^2}\frac{dt}{t^2+1} = \pi\cdot\lim_{A\to\infty}\left(\arctan t\Big|_0^{A^2}\right)$$

$$= \pi\lim_{A\to\infty}\left(\arctan A^2 - \arctan 0\right) = \pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$ bulunur.

Disk Yöntemi: $V_{oy} = \pi\int_0^1 x^2 dy = \pi\int_0^1 \sqrt{\frac{1-y}{y}}\,dy = ----$ II. tip has olmayan int.

4) $y=f(x)=x^{-3/2}$ eğrisinin altında kalan ve $x=0$, $x=1$ doğruları ile belirli (sınırlı olmayan) bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S cisminin hacmi?

Kabuk yöntemi:

$$V_{oy} = 2\pi\int_0^1 x\cdot y\,dx = 2\pi\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$$ II. tip has olmayan int.

$$= 2\pi\cdot\lim_{a\to0^+}\int_a^1 x\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}dx = 2\pi\lim_{a\to0^+}\int_a^1 x^{-1/2}dx$$

$$= 2\pi\lim_{a\to0^+}\left(2\sqrt{x}\Big|_a^1\right) = 2\pi\lim_{a\to0^+}\left(2-2\sqrt{a}\right) = 4\pi$$ bulunur.

Disk yöntemi: $V_{oy} = \pi\int_0^1 1^2 dy + \pi\int_1^\infty x^2 dy$

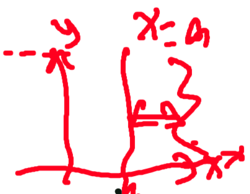
$$= \pi\int_0^1 dy + \pi\int_1^\infty\left(\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}}\right)^2 dy = ----$$

Not. a) $R=\{(x,y) \mid a\le x\le b,\ 0\le y=f(x)\}$ nin $y=d$ doğrusu etrafında...

$$V_{ox} \overset{\text{Disk}}{=} \pi\int_a^b (d-f(x))^2 dx$$

b) $R=\{(x,y) \mid c\le y\le d,\ a\le x=g(y)\}$ nin $x=a$ doğrusu...

$$V_{oy} \overset{\text{Disk}}{=} \pi\int_c^d (a-g(y))^2 dy \quad ....$$



R nin x=a doğrusu etrafında dönd. ---> Kabuk → $V_{oy}=2\pi\int_a^b (a-x)\,g(y)\,dx = ...$