TANIMLAR **Taylor Serileri , Maclaurin Serileri**

f, a'yı bir iç nokta olarak içeren bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. **f tarafından $x = a$'da üretilen Taylor serisi**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

olarak tanımlanır. **f tarafından üretilen Maclaurin serisi** ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ile verilir, yani f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisidir.

f tarafından üretilen Maclaurin serisine genelde sadece f'nin Taylor serisi denir.

ÖRNEK 1 Bir Taylor Serisi Bulmak

$f(x) = 1/x$ fonksiyonunun $a = 2$'de ürettiği Taylor serisini bulun. Eğer yakınsak ise seri nerede $1/x$'e yakınsar?

Çözüm $f(2), f'(2), f''(2), \ldots$ katsayılarını bulmamız gerekir. Türev alarak,

$$f(x) = x^{-1}, \qquad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) = -x^{-2}, \qquad f'(2) = -\frac{1}{2^2},$$

$$f''(x) = 2!x^{-3}, = 2x^{-3} \qquad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3},$$

$$f'''(x) = -3!x^{-4}, = 2.(-3)x^{-4} \qquad \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{a}{1-r}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \qquad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

elde ederiz. Taylor serisi

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

şeklindedir. Bu sabit terimi $1/2$ ve oranı $r = -(x-2)/2$ olan bir geometrik seridir. $|x-2| < 2$ için mutlak yakınsaktır ve toplamı

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

$$\frac{1/2}{1 + (x-2)/2} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}$$

olarak bulunur. Bu örnekte, $f(x) = 1/x$'in $a = 2$'de ürettiği Taylor serisi, $|x-2| < 2$ veya $0 < x < 4$ için $1/x$'e yakınsar. ■

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^3}{2^3} + \cdots + (-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n$$

Taylor Polinomları

Türevlenebilir bir f fonksiyonunun a noktasındaki lineerizasyonu

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ile verilen polinomdur. Bölüm 3.8'de, a'ya yakın x değerlerinde $f(x)$'e yaklaşmak için bu lineerizasyonu kullandık. f'nin a'da daha yüksek mertebeden türevleri varsa, elde edilebilen her türev için, f'nin daha yüksek mertebeden polinom yaklaşımları da bulunur. Bu polinomlara f'nin Taylor polinomları denir.

TANIM ***n.* Mertebe Taylor Polinomu**

f, a'yı iç nokta olarak içeren bir aralıkta k. mertebeden, $k = 1, 2, \ldots, N$, türevleri var olan bir fonksiyon olsun. 0'dan N'ye kadar olan herhangi bir n tam sayısı için f'nin $x = a$'da ürettiği ***n*. mertebe Taylor polinomu**

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

ile verilir.

ÖRNEK 2 e^x için Taylor polinomları Bulmak

$f(x) = e^x$'in $x = 0$'da ürettiği Tayor serisini ve Taylor polinomlarını bulun.

Çözüm

$$f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x, \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(x) = e^x, \qquad \ldots$$

olduğundan

$$f(0) = e^0 = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(0) = 1, \qquad \ldots$$

buluruz. f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisi

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu aynı zamanda e^x'in Maclaurin serisidir. Bölüm 11.9' da, serinin her x için e^x'e yakınsadığını göreceğiz.

$x = 0$'daki n. mertebe Taylor polinomu

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

■

ÖRNEK 3 cos x için Taylor polinomları Bulmak

$f(x) =$ cos x'in $x = 0$'da ürettiği Taylor serisi ve polinomlarını bulun.

Çözüm Kosinüs ve türevleri şöyledir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\sin x, \\
f''(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(x) &= \sin x, \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin x.
\end{aligned}$$

$x = 0$'da, kosinüsler 1 ve sinüsler 0, dolayısıyla

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

olur. f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisi

$$\begin{aligned}
f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu aynı zamanda cos x'in Maclaurin serisidir. Bölüm 11.9' da, serinin her x için cos x'e yakınsayacağını göreceğiz.

$f^{(2n+1)}(0) = 0$ olduğundan mertebeleri $2n$ ve $2n + 1$ olan Taylor polinomları aynıdır:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

TEOREM 22 **Taylor Teoremi**

f fonksiyonu ve f', f'', …, $f^{(n)}$ türevleri $[a, b]$ veya $[b, a]$ aralıklarında sürekli iseler ve $f^{(n)}$ (a, b) veya (b, a) aralığında türetilebiliyorsa, a ile b arasında

$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$ (Ort. Değ. Teoremi)

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir c sayısı vardır.

Taylor Teoremi Ortalama Değer Teoreminin bir genelleştirilmesidir (Alıştırma 39). Bu bölümün sonunda Taylor teoreminin bir ispatı vardır.

Taylor teoremini uygularken, genellikle a'yı sabit tutup, b'ye bağımsız bir değişken gibi bakmak isteriz. Bu gibi durumlarda, b yerine x yazarsak, Taylor teoremini uygulamak kolaylaşır. Bu değişiklikle teorem şu şekli alır:

Taylor Formülü

a'yı içeren bir I aralığında f'nin her mertebeden türevi varsa, her pozitif n tamsayısı ve I'daki her x için,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \qquad (1)$$

dir. Burada

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (c,\ a \text{ ile } b \text{ arasında bir sayı }) \qquad (2)$$

dir.

(1) denklemine **Taylor formülü** denir. $R_n(x)$ fonksiyonuna n. mertebeden kalan veya f'nin I aralığındaki $P_n(x)$ yaklaşımının **hata terimi** denir. Her x P I için, $n \to \infty$ iken, $R_n(x) \to 0$ ise, f'nin $x = a$'da ürettiği Taylor serisinin I aralığı üzerinde f'ye **yakınsadığını** söyler ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

yazarız. Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi çoğunlukla c'deki değerini bilmeksizin R_n kalanını tahmin edebiliriz.

ÖRNEK 1 e^x için Taylor Serisi, Tekrar

$f(x) = e^x$'in $x = 0$'da ürettiği Taylor serisinin her reel x değerinde $f(x)$'e yakınsadığını gösterin.

Çözüm Fonksiyonun $I = (-\infty, \infty)$ aralığında her mertebeden türevi vardır. $f(x) = e^x$ ve $a = 0$ ile (1) ve (2) denklemleri

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

Bölüm 11.8, Örnek 2'deki polinom

ve

$0<x$ ile $\quad 1 \le e^c \le e^x$

$x<0$ ile $\quad e^c \le 1$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad 0 \text{ ile } x \text{ arasında bir } c \text{ için}$$

verir. e^x, x'in artan bir fonksiyonu olduğundan, e^c değeri $e^0 = 1$ ile e^x arasında bulunur. x negatifse, c de negatiftir, dolayısıyla $e^c < 1$ olur. x sıfırken, $e^x = 1$ ve $R_n(x) = 0$ olur. x pozitifse, c de pozitiftir ve $e^c < e^x$ olur. Yani,

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x \le 0 \text{ için} \qquad (e^c \le 1)$$

ve

$$|R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x > 0 \text{ için} \qquad (e^c < e^x)$$

olur. Son olarak,

Sandwich teoremi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{her } x \text{ için}$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ olur ve seri her x için e^x'e yakınsar. Böylece,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \tag{3}$$

bulunur. ■