Örnekler

Ör:

$$\begin{aligned} x+y-z+t+w&=1\\ -x+2y+3z-t+2w&=-1\\ 2x+y-z+2t-w&=2\\ x+6y+4z+t+4w&=1\\ 8y+7z+6w&=0\\ 3x+7y+3z+3t+3w&=3 \end{aligned}$$

denklemini çözünüz.

Çöz:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 6 & 4 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 8 & 7 & 0 & 6 & 0\\ 3 & 7 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{esi}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & +1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6/5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

şeklinde eşelon matris elde edilir. Bu matrise karşı gelen doğrusal denklem

$$\begin{aligned} x+y-z+t+w&=1\\ y-z+3w&=0\\ z-\tfrac{6}{5}w&=0 \end{aligned}$$

dir. Denklem sayısı 3, bilinmeyen sayısı 5 olduğu için $5-3=2$ adet bağımsız değişken vardır. $w=a$, $t=b$ bağımsız değişkenlerini alınak

$$z=\frac{6}{5}a$$

$$y=-\frac{9}{5}a$$

$$x=1+2a-b$$

$$w=a$$

$$t=b$$

denklemin çözümü olur. Sonsuz adet çözümü vardır.

Ör.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümü.

Çöz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 3 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{eşd.}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

eşelon matris elde edilir.

Karşı gelen denklem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y &= 1/2 \\ z &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 3/2 \\ y &= 1/2 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

tek çözümü olur.

Ör:

$$\begin{aligned} 2x - y + 2az + t &= b \\ 2x - y + (2a+1)z + (a+1)t &= 0 \\ -2x + y + (1-2a)z - 2t &= -2b-2 \end{aligned}$$

denklem sisteminin

1) Çözümsüz olması için
2) Sonsuz çözümlü olması için
3) ~~Çözümsüz~~ Tek çözümlü olması için a ve b ne olmalıdır?

Çöz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2a & 1 & \vdots & b \\ 2 & -1 & 2a+1 & a+1 & \vdots & 0 \\ -2 & 1 & 1-2a & -2 & \vdots & -2b-2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2a & 1 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 1 & a & \vdots & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -b-2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2a & 1 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 1 & a & \vdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & -1-a & \vdots & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & a & 1/2 & \vdots & b/2 \\ 0 & 0 & 1 & a & \vdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

1) $a+1=0$ ise $0=2$ olduğu için denklemin çözümü yoktur.

2) $a+1 \neq 0$ ise 4 bilinmeyen ve 3 denklem olduğundan $4-3=1$ adet bağımsız değişken vardır. O halde sonsuz çözümü vardır.

3) Bir bağımsız değişken çözümü olduğu için denklemin tek çözümlü olma durumu yoktur. Bunun için bir koşul gerekmektedir.

Ör : $x - ay + 2z - t = 0$

$-2x + 2ay - 2z + 3t = 0$

$-x + (a+1)y + (a+1)t = 0$

$-3x + 3ay - 2z + (a+4)t = 0$ homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü olması için a ne olmalıdır?

Çöz :
$$\begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & -1 \\ -2 & 2a & -2 & 3 \\ -1 & a+1 & 0 & a+1 \\ -3 & 3a & -2 & a+4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 4 & a+1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & a+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 4 & a+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

sıfırdan farklı çözüm olması için en az bir bağımsız değişkenin olması gerekir. Yani denklem sayısının bilinmeyen sayısından az olması gerekir. O halde $a-1=0$ ise 4 bilinmeyen 3 denklem olup sonsuz çözüm olur. $a=1$ olsun. Doğrusal denklem

$x - y + 2z - t = 0$

$y + 2z + t = 0$

$z + \frac{1}{2}t = 0$ olup

$t = r$ denek $z = -\frac{1}{2}r$, $y = -2(-\frac{1}{2}r) - r = 0$

$x = y - 2z + t = -2(-\frac{1}{2}r) + r = 2r$

şeklinde sonsuz çözüm olur.

Soru : $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

1) $(A - 4I_2)X = 0$ denklem sistemini çözünüz

2) $(4A - 3I_2)X = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ " " "

Ör :
$$\begin{aligned}
2x - y + 2az + t &= b \\
-2x + ay - 3z &= 4 \\
2x - y + (2a+1)z + (a+1)t &= 0 \\
-2x + y + (1-2a)z - 2t &= -2b-2
\end{aligned}$$
sisteminin

1) Tek çözümü olması için
2) Sonsuz çözümü olması için
3) Çözümsüz " " a ne olmalıdır?

Çöz :
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ -2 & a & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2a+1 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & 1-2a & -2 & -2b-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & a-1 & 2a-3 & 1 & b+4 \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -b-2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & a & 1/2 & b/2 \\ 0 & a-1 & 2a-3 & 1 & b+4 \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & -2 \end{array}\right]$$

1) $a \neq 1$ ve $a \neq -1$ ise denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı aynı olduğu için tek çözümü vardır.

3) $a \neq 1$ ve $-a-1=0$ ise denklemin çözümü yoktur.

2) $a = 1$ ve $-a-1 \neq 0$ ise denklemin sonsuz çözümü vardır.

Soru : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ olmak üzere $AX = B$ denklem sistemini çözünüz. Dikkat burada 6 adet doğrusal denklem sistemi vardır.