8. $Y = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a + b + c = 0, a + b + d = 0\}$ kümesinin, $P_3(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}-$vektör uzayının altuzayı olduğunu gösteriniz ve bu altuzay için bir taban bulunuz.

Çözüm : Y kümesinin, $P_3(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}-$vektör uzayının altuzayı olduğunu gösterelim. Her $a + bx + cx^2 + dx^3, a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 \in Y$ ve $k \in \mathbb{R}$ için

$$a + b + c = 0,\ a + b + d = 0$$
$$a' + b' + c' = 0,\ a' + b' + d' = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ka + kb + kc = 0, & ka + kb + kd = 0 \\ a' + b' + c' = 0, & a' + b' + d' = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ka + kb + kc + a' + b' + c' = 0, \\ ka + kb + kd + a' + b' + d' = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (ka + a') + (kb + b') + (kc + c') = 0 \\ (ka + a') + (kb + b') + (kd + d') = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (ka + a') + (kb + b')x + (kc + c')x^2 + (kd + d')x^3 \in Y$$
$$\Rightarrow ka + kbx + kcx^2 + kdx^3 + a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 \in Y$$
$$\Rightarrow k(a + bx + cx^2 + dx^3) + (a' + b'x + c'x^2 + d'x^3) \in Y$$

gerektirmeleri sağlandığından Y kümesi $P_3(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}-$vektör uzayının altuzayıdır. Şimdi Y altuzayının bir tabanını bulalım.

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 + dx^3 \in Y &\Leftrightarrow a + b + c = 0, a + b + d = 0 \\ &\Leftrightarrow c = -(a + b) \text{ ve } d = -(a + b) \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından

$$Y = \{a + bx - (a + b)x^2 - (a + b)x^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

yazabiliriz. Burada $a = 1$, $b = 0$ ve $a = 0$, $b = 1$ için elde edilen $1 - x^2 - x^3$ ve $x - x^2 - x^3$ vektörleri Y altuzayının bir tabanını oluşturur.

9. $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}-$vektör uzayında

$$U = \{(2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ ve } W = \{(0, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

altuzayları veriliyor. $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ olup olmadığını araştırınız.

Çözüm : Bunun için $\mathbb{R}^2 = U + W$ ve $U \cap W = \{(0, 0)\}$ olduğunu göstereceğiz. $U + W \subseteq \mathbb{R}^2$ olduğu açıktır. $\mathbb{R}^2 \subseteq U + W$ olduğunu gösterelim. $U = \{(2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ altuzayının tabanı $\{(2, 1)\}$ ve $W = \{(0, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ altuzayının tabanı $\{(0, 3)\}$ olur. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} (x, y) &= \frac{x}{2}(2, 1) + \frac{2y - x}{6}(0, 3) \\ &= \left(2\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \left(0, 3\frac{2y - x}{6}\right) \in U + W \end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{R}^2 \subseteq U + W$ ifadesi sağlanır. Şimdi de $U \cap W = \{(0,0)\}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(x,y) \in U \cap W &\Rightarrow (x,y) \in U \text{ ve } (x,y) \in W\\ &\Rightarrow x = 2y \text{ ve } x = 0\\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ve } y = 0\\ &\Rightarrow (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından $U \cap W = \{(0,0)\}$ olur. O halde $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ dir.

10. $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$–vektör uzayında

$$U = \{(x,y,z) \mid y = -z\} \text{ ve } W = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$$

altuzayları veriliyor. $U + W$ ve $U \cap W$ altuzaylarının tabanlarını bulunuz.

Çözüm : $U = \{(x,y,z) \mid y = -z\} = \{(x,-z,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$ altuzayının bir tabanının $\{(1,0,0),(0,-1,1)\}$ olduğunu göstermek kolaydır. O halde $U + W$ altuzayı

$$\{(1,0,0),(0,-1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

kümesi ile üretilir. Şimdi $U + W$ altuzayının bir tabanını araştıralım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ve son matrisin sıfırdan farklı satırları doğrusal bağımsız olduğundan

$$\{(1,0,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$$

kümesi $U + W$ altuzayının bir tabanı olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in W &\Rightarrow (x,y,z) = a(1,1,0) + b(0,1,1) \quad \exists a,b \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow (x,y,z) = (a,a,0) + (0,b,b) \quad \exists a,b \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow (x,y,z) = (a,a+b,b) \quad \exists a,b \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow y = x + z\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. Buradan $W = \{(x,y,z) \mid y = x + z\}$ elde edilir. Şimdi $U \cap W$ altuzayını yazalım.

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in U \cap W &\Rightarrow (x,y,z) \in U \text{ ve } (x,y,z) \in W\\ &\Rightarrow y = -z \text{ ve } y = x + z\\ &\Rightarrow y = -z \text{ ve } -z = x + z\\ &\Rightarrow y = -z \text{ ve } x = -2z\end{aligned}$$

olduğundan $U \cap W = \{(-2z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ eşitliği sağlanır. O halde $\{(-2,-1,1)\}$ kümesi $U \cap W$ altuzayının bir tabanıdır.

11. $\mathbb{R}^3$ uzayında $S = \{(x,y,z) \mid 3x - 2y + 5z = 0\}$ düzlemi için bir taban bulunuz.

Çözüm: $y = c$ ve $z = k$ alırsak $x = \frac{2c-5k}{3}$ olur. Bu durumda her $(x,y,z) \in S$ için

$$(x,y,z) = \left(\frac{2c-5k}{3}, c, k\right) = c\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right) + k\left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

eşitliği sağlanır. O halde $u = \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right)$ ve $v = \left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)$ vektörleri verilen düzlemi üretir. Şimdi u ve v vektörlerinin doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim. $k_1 u + k_2 v = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= k_1\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right) + k_2\left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)\\ &= \left(\frac{2}{3}k_1, k_1, 0\right) + \left(-\frac{5}{3}k_2, 0, k_2\right)\\ &= \left(\frac{2}{3}k_1 - \frac{5}{3}k_2, k_1, k_2\right)\end{aligned}$$

olur. Bu ise $k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ olmasını gerektirir. Böylece u ve v vektörlerinin doğrusal bağımsız olduğu görülür. O halde, $\{u, v\}$ verilen düzlem için bir tabandır.

12. $u_1 = \cos^2 x$, $u_2 = \sin^2 x$, $u_3 = \cos 2x$ vektörleri ile üretilen vektör uzayı V olsun.

a) V vektör uzayını yazınız ve $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ kümesinin V için bir taban olup olmadığını araştırınız.

b) $B = \{1, \sin^2 x\}$ kümesinin V için bir taban olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: a) $V = \{k_1 \cos^2 x + k_2 \sin^2 x + k_3 \cos 2x \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$ biçimindedir. Ancak

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot \sin^2 x$$

olarak yazılabildiğinden $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ kümesi doğrusal bağımlıdır. O halde $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ kümesi V için bir taban değildir.

b) $k_1 \cos^2 x + k_2 \sin^2 x + k_3 \cos 2x \in S$ alalım.

$$\begin{aligned}k_1 \cos^2 x + k_2 \sin^2 x + k_3 \cos 2x &= k_1(1 - \sin^2 x) + k_2 \sin^2 x + k_3\left(1 - 2\sin^2 x\right)\\ &= (k_1 + k_3) + (-k_1 + k_2 - 2k_3)\sin^2 x\\ &= 1(k_1 + k_3) + (-k_1 + k_2 - 2k_3)\sin^2 x\end{aligned}$$

olduğundan $\{1, \sin^2 x\}$ kümesi V vektör uzayını üretir. Üstelik $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c_1 1 + c_2 \sin^2 x = 0$ iken $c_1 = c_2 = 0$ olduğundan $\{1, \sin^2 x\}$ kümesi doğrusal bağımsızdır. O halde $\{1, \sin^2 x\}$ kümesi V uzayının bir tabanıdır.

13. $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a + b - 2c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathfrak{M}_{2\times 2}$ ile verilen altuzayın tabanını bulunuz,

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in V$ olması için $a + b - 2c = 0$ olmalıdır. Yani $a = -b + 2c$ eşitliği sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{bmatrix} -b+2c & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in R \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in R \right\} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesinin, V altuzayını ürettiği açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} k \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -k+2l & k \\ l & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ k = 0 \text{ ve } l &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{B}$ kümesi doğrusal bağımsızdır. O halde $\mathcal{B}$ kümesi V altuzayının bir tabanıdır.

4.5 Koordinatlar

Teorem 4.5.1 *V bir $F-$vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq V$ olsun. $\mathcal{B}$ kümesinin V $F-$vektör uzayının tabanı olması için gerek ve yeter koşul her $v \in V$ vektörünün $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ olmak üzere*

$$v = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n$$

formunda tek türlü yazılabilmesidir.

İspat. $\Rightarrow$: *$\mathcal{B}$ kümesi V $F-$vektör uzayının tabanı olsun. Her $v \in V$ vektörü $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimi şeklinde yazılır. Bu yazılım tek türlü olmasın. Yani*

$$\begin{aligned} v &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \quad \exists c_1, c_2, \ldots, c_n \in F \\ v &= d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \cdots + d_n\alpha_n \quad \exists d_1, d_2, \ldots, d_n \in F \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \cdots + d_n\alpha_n$$