Determinant

Bu dersimizde lineer cebirde çok önemli yere sahip olan ve kare matrisleri bir reel sayı ile eşleyen determinant fonksiyonuna değineceğiz.

Determinant fonksiyonunun tanımını vermeden önce aşağıdaki tanımlara değinmemiz gerekir.

Tanım: $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun. A matrisinden i. satır ve j. sütunun silinmesiyle elde edilen matrise A'nın bir alt matrisi denir ve M_{ij} ile göstereceğiz. M_{ij}, $(n-1) \times (n-1)$ boyutludur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ $\qquad M_{11} = \begin{bmatrix} e & f \\ h & k \end{bmatrix}$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} a & b \\ g & h \end{bmatrix}$$

Tanım: $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun. M_{ij} matrisinin determinantına A matrisinin (i,j)-minörü denir.

Tanım: $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun. $\underbrace{(-1)^{i+j} \underbrace{\det M_{ij}}_{(i,j)\text{-minörü}}}_{(i,j)\text{-kofaktörü}}$ değerine A matrisinin (i,j)-kofaktörü denir ve $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olsun.

$M_{2,3} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (2,3)\text{-minör} = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$\underset{\downarrow \atop (2,3)\text{-kofaktör}}{A_{2,3}} = (-1)^{2+3} \det M_{2,3} = (-1)^5 \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\right)$

Şimdi determinant fonksiyonunun tümevarımsal tanımını verebiliriz.

Tanım: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun.

$n=1$ ise $A = [a_{11}]$ ise $\det A = a_{11}$ olarak tanımlanır

$n=2$ için $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ için

$$\det A = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \underbrace{\det(M_{11})}_{=a_{22}} . a_{11} + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{=-1} \det(M_{12}) . a_{12}$$

$$= a_{11} . a_{22} - a_{21} . a_{12}$$

keyfi bir n için: bir i satırına göre

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

$$= a_{i1} \overbrace{(-1)^{i+1} . \det(M_{i1})}^{A_{i1}} + a_{i2} \overbrace{(-1)^{i+2} \det(M_{i2})}^{A_{i2}} + \cdots$$

$$+ a_{in} \underbrace{(-1)^{i+n} \det(M_{in})}_{A_{in}}$$

$$= a_{i1} . A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma kofaktör açılımı denir.

Not: Determinant değeri istenilen satır ve sütuna göre hesaplanabilir ve değişmezdir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi için $\det(A) = ?$

$$\det(A) = a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det(M_{31}) + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det(M_{32}) + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \det(M_{33})$$

$\det(A) = |A|$ determinant gösterimleri

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot (-16) + (-1) \cdot (10) + 2 \cdot (19)$$

$$= -84$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ için $\det A = ?$

3. satıra göre kofaktör açılımı yapılırsa

$$\det A = a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \det M_{31} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_{32}}} \cdot (-1)^{3+2} \det M_{32}$$

$$+ \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_{33}}} (-1)^{3+3} \det M_{33} + a_{34} \cdot (-1)^{3+4} \det M_{34}$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}_{\shortparallel \atop (-4)}$$

! Alıştırma

$$= 3 \cdot 20 + 3 \cdot (-4) = 48$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det M_{31} + (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det M_{32}$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+3} \det M_{33}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 = 20$$