Uygulama X
(Dönüştürme)

1. X_1 ve X_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2) &= \frac{x_1^2+x_2^2}{25} \quad , \quad (x_1,x_2)\epsilon\{(1,1),(1,3),(2,3)\} \\ &= 0 \quad , \quad \text{ö}.d\ x_1,x_2\ için \end{aligned}$$

Buna göre, $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = X_1 - X_2$ kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{matrix} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \end{matrix} \quad \xrightarrow[ters\ fonksıyonlar]{} \quad \begin{matrix} x_1 = \dfrac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_1-y_2}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} p_{\underline{Y}}(y_1,y_2) &= p_{\underline{X}}(x_1,x_2) \\ &= p_{\underline{X}}\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2}{25} \\ &= \frac{(y_1+y_2)^2+(y_1-y_2)^2}{100} \\ &= \frac{2({y_1}^2+{y_2}^2)}{100} \\ &= \frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{50} \end{aligned}$$

(x_1,x_2)	$(y_1 = x_1+x_2 \quad , \quad y_2 = x_1 - x_2)$
(1,1)	(2,0)
(1,3)	(4,-2)
(2,3)	(5,-1)

$$\begin{aligned} p_{\underline{Y}}(y_1,y_2) &= \frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{50}, \quad (y_1,y_2)\epsilon\{(2,0),(4,-2),(5,-1)\} \\ &= 0, \quad \text{ö}.d\ y_1,y_2\ için \end{aligned}$$

2. X_1 ve X_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2) &= \frac{1}{4}, \qquad (x_1,x_2)\epsilon\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\} \\ &= 0, \qquad \text{ö}.d\ x_1,x_2\ için \end{aligned}$$

Buna göre, $Y_1 = X_1 - X_2$ ve $Y_2 = X_1$ kesikli raslantı değişkenleri tanımlansın. Y_1'in marjinal olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{matrix} Y_1 = X_1 - X_2 \\ Y_2 = X_1 \end{matrix} \quad \xrightarrow[ters\ fonksıyonlar]{} \quad \begin{matrix} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} p_{\underline{Y}}(y_1,y_2) &= p_{\underline{X}}(x_1,x_2) \\ &= p_{\underline{X}}(y_2,y_2-y_1) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(x_1,x_2)	$(y_1 = x_1 - x_2 \quad , \quad y_2 = x_1)$
(-1,-1)	(0,-1)
(-1,1)	(-2,-1)
(1,-1)	(2,1)
(1,1)	(0,1)

$$\begin{aligned} p_{\underline{Y}}(y_1,y_2) &= \frac{1}{4}, \quad (y_1,y_2)\epsilon\{(0,-1),(-2,-1),(2,1),(0,1)\} \\ &= 0, \qquad \text{ö}.d\ y_1,y_2\ için \end{aligned}$$

$Y_2 \backslash Y_1$	-2	0	2	$p(y_2)$
-1	1/4	1/4	-	1/2
1	-	1/4	1/4	1/2
$p(y_1)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\begin{aligned} p(y_1) &= \frac{1}{4}, \quad y_1 = -2, 2 \\ &= \frac{1}{2}, \quad y_1 = 0 \\ &= 0, \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

3. X_1 ve X_2 sürekli değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1\, x_2, && 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2 \\ &= 0, && ö.d\ x_1, x_2\ için \end{aligned}$$

Buna göre, $Y_1 = 2X_1 + X_2$ ve $Y_2 = 3X_1 + 2X_2$ sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{matrix} Y_1 = 2X_1 + X_2 \\ Y_2 = 3X_1 + 2X_2 \end{matrix} \quad \xrightarrow[ters\ fonksıyonlar]{} \quad \begin{matrix} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = 2y_2 - 3y_1 \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{aligned} f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= f_{\underline{X}}(x_1, x_2)\,.\,|J| \\ &= f_{\underline{X}}(2y_1 - y_2, 2y_2 - 3y_1).1 \\ &= (2y_1 - y_2)(2y_2 - 3y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= (2y_1 - y_2)(2y_2 - 3y_1), && 0 \leq 2y_1 - y_2 \leq 1, 0 \leq 2y_2 - 3y_1 \leq 2 \\ &= 0, && ö.d. \end{aligned}$$

4. X_1 ve X_2 sürekli değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 2(x_1 + x_2), && 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \\ &= 0, && ö.d\ x_1, x_2\ için \end{aligned}$$

Buna göre, $Y_1 = X_2 - X_1$ ve $Y_2 = X_2$ sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ve Y_1'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{matrix} Y_1 = X_2 - X_1 \\ Y_2 = X_2 \end{matrix} \quad \xrightarrow[ters\ fonksıyonlar]{} \quad \begin{matrix} x_1 = y_2 - y_1 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$
\begin{aligned}
f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= f_{\underline{X}}(x_1, x_2)\,.\,|J| \\
&= f_{\underline{X}}(y_2 - y_1, y_2).|-1| \\
&= 2(y_2 - y_1 + y_2) \\
&= 2(2y_2 - y_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= 2(2y_2 - y_1), \quad & 0 \le y_2 - y_1 \le y_2 \le 1 \\
&= 0, & \text{ö}.d.
\end{aligned}
$$

$$
0 \le x_1 \le x_2 \le 1 \implies 0 \le y_2 - y_1 \le y_2 \le 1 \implies \begin{matrix} 0 \le y_2 - y_1 \longrightarrow \; y_1 \le y_2 \\ \\ y_2 - y_1 \le y_2 \longrightarrow \; y_1 \ge 0 \end{matrix} \implies 0 \le y_1 \le y_2 \le 1
$$

$$
\begin{aligned}
f(y_1) &= \int_{\mathcal{R}y_2} f_{\underline{Y}}(y_1, y_2)\, dy_2 \\
&= \int_{y_1}^{1} 2(2y_2 - y_1) dy_2 \\
&= 2\left(\frac{2y_2^2}{2} - y_1 y_2\right)\Bigg|_{y_1}^{1} \\
&= 2(y_2^2 - y_1 y_2)|_{y_1}^{1} \\
&= 2(1 - y_1 - y_1^2 + y_1^2) \\
&= 2(1 - y_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(y_1) &= 2(1 - y_1), \quad & 0 \le y_1 \le 1 \\
&= 0, & \text{ö}.d.
\end{aligned}
$$

5. X_1 ve X_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x_1, x_2) &= e^{-3} \frac{2^{x_1}}{x_1!\; x_2!}, \quad & x_1, x_2 \,\epsilon\, \{0, 1,2,3, \dots\} \\
&= 0, & \text{ö}.d\; x_1, x_2\; için
\end{aligned}
$$

Buna göre, $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = X_1$ kesikli raslantı değişkenleri tanımlansın. Y_1'in marjinal olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{matrix} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \begin{matrix} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{matrix}
$$

$$ters\ fonksıyonlar$$

$$
\begin{aligned}
p_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= p_{\underline{X}}(x_1, x_2) \\
&= p_{\underline{X}}(y_2, y_1 - y_2) \\
&= e^{-3} \frac{2^{y_2}}{y_2!\ (y_1 - y_2)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= e^{-3} \frac{2^{y_2}}{y_2!\ (y_1 - y_2)!}, \quad && (y_1 - y_2) = 0,1,2, \dots ; \ \ y_2 = 0,1,2, \dots \\
&= 0, && \text{ö}.d\ y_1, y_2\ i\c{c}in
\end{aligned}
$$

$$
(y_1 - y_2) = 0,1,2, \dots ; \ \ y_2 = 0,1,2, \dots \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} y_2 \leq y_1 \\ \\ y_1 = 0,1,2, \dots \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
p(y_1) &= \sum_{\mathcal{R}y_2} p_{\underline{Y}}(y_1, y_2) \\
&= \sum_{y_2=0}^{y_1} e^{-3} \frac{2^{y_2}}{y_2!\ (y_1 - y_2)!} \\
&= e^{-3} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{2^{y_2}}{y_2!\ (y_1 - y_2)!} \cdot \left(\frac{y_1!}{y_1!}\right) \\
&= \frac{e^{-3}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{y_2!\ (y_1 - y_2)!} \cdot 2^{y_2} \\
&= \frac{e^{-3}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} 2^{y_2} \\
&= \frac{e^{-3}}{y_1!} (2+1)^{y_1} \\
&= e^{-3} \frac{3^{y_1}}{y_1!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(y_1) &= e^{-3} \frac{3^{y_1}}{y_1!}, \quad && y_1 = 0, 1, 2, \dots \\
&= 0, && \text{ö}.d.
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad Y_1 \sim Poisson(\lambda = 3)
$$

6. X_1 ve X_2 sürekli değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x_1,x_2) = 8x_1\,x_2, \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le 1$$
$$= 0, \quad ö.d\; x_1,x_2\; için$$

Buna göre, $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ ve $Y_2 = X_2$ sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve Y_1 ve Y_2'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{X_1}{X_2} \\ Y_2 &= X_2 \end{aligned} \quad \xrightarrow[ters\ fonksıyonlar]{} \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1y_2 \\ x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2$$

$$\begin{aligned} f_{\underline{Y}}(y_1,y_2) &= f_{\underline{X}}(x_1,x_2)\,.\,|J| \\ &= f_{\underline{X}}(y_1y_2,y_2)\,.\,|y_2| \\ &= 8(y_1y_2)(y_2)\,.\underbrace{|y_2|}_{y_2\ge 0} \\ &= 8y_1y_2^3 \end{aligned}$$

$$f_{\underline{Y}}(y_1,y_2) = 8y_1y_2^3, \quad 0 \le y_1y_2 \le y_2 \le 1$$
$$= 0, \quad ö.d.$$

$$0 \le x_1 \le x_2 \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le y_1y_2 \le y_2 \le 1 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 0 \le y_1y_2 \le 1 \longrightarrow y_1 \ge 0\ \ ve\ \ y_2 \ge 0 \\ \\ y_1y_2 \le y_2 \longrightarrow y_1 \le 1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \int_{\mathcal{R}y_2} f_{\underline{Y}}(y_1,y_2)dy_2 \\ &= \int_0^1 8y_1y_2^3dy_2 \\ &= 8y_1\left[\frac{y_2^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 2y_1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} f(y_1) &= 2y_1, \quad 0 \le y_1 \le 1 \\ &= 0, \quad ö.d. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(y_2) &= \int_{\mathcal{R}y_1} f_{\underline{Y}}(y_1, y_2)\, dy_1 \\
&= \int_0^1 8 y_1 y_2^3\, dy_1 \\
&= 8y_2^3 \left[\frac{y_1^2}{2}\right]_0^1 \\
&= 4y_2^3
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
f(y_2) &= 4y_2^3, && 0 \le y_2 \le 1 \\
&= 0, && ö.d.
\end{aligned}
$$

7. X_1 ve X_2 sürekli değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= 2(1 - x_1), && 0 \le x_1 \le 1; 0 \le x_2 \le 1 \\
&= 0, && ö.d\ x_1, x_2\ için
\end{aligned}
$$

Buna göre, $Y_1 = X_1 X_2$ ve $Y_2 = X_1$ sürekli raslantı değişkenleri tanımlansın. Y_1'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 X_2 \\
Y_2 &= X_1
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{ters\ fonksıyonlar} \quad
\begin{aligned}
x_1 &= y_2 \\
x_2 &= \frac{y_1}{y_2}
\end{aligned}
$$

$$
J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{y_2} & -\dfrac{y_1}{y_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y_2}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= f_{\underline{X}}(x_1, x_2)\,.\,|J| \\
&= f_{\underline{X}}\left(y_2, \frac{y_1}{y_2}\right).\left|-\frac{1}{y_2}\right| \\
&= 2(1 - y_2)\frac{1}{y_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) &= \frac{2(1 - y_2)}{y_2}, && 0 \le y_2 \le 1; 0 \le \frac{y_1}{y_2} \le 1 \\
&= 0, && ö.d.
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 \le \dfrac{y_1}{y_2} \le 1 \Rightarrow y_1 \le y_2 \end{array} \Rightarrow 0 \le y_1 \le y_2 \le 1$$

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \int_{\mathcal{R}y_2} f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_{y_1}^{1} \frac{2(1-y_2)}{y_2} dy_2 \\ &= 2\int_{y_1}^{1} \left(\frac{1}{y_2} - 1\right) dy_2 \\ &= 2(\ln(y_2) - y_2)|_{y_1}^{1} \\ &= 2(\ln(1) - 1 - (\ln(y_1) - y_1)) \\ &= 2(y_1 - \ln(y_1) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_1) &= 2(y_1 - \ln(y_1) - 1), \quad && 0 \le y_1 \le 1 \\ &= 0, && ö.d. \end{aligned}$$

8. X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız ve λ=1 ile üstel dağılma sahiptir. Buna göre, $Z_1 = X_1 + X_2$ ve $Z_2 = X_2$ sürekli raslantı değişkenleri tanımlansın. Z_1'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız olduğu için $f(x_1, x_2) = f(x_1).f(x_2)$' dir:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= e^{-x_1 - x_2}, \quad && x_1 > 0;\ x_2 > 0 \\ &= 0, && ö.d\ x_1, x_2\ için \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} Z_1 = X_1 + X_2 \\ Z_2 = X_2 \end{array} \xrightarrow[ters\ fonksıyonlar]{} \begin{array}{l} x_1 = z_1 - z_2 \\ x_2 = z_2 \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} f_{\underline{Z}}(z_1, z_2) &= f_{\underline{X}}(x_1, x_2)\,.\,|J| \\ &= f_{\underline{X}}(z_1 - z_2, z_2).\,|1| \\ &= e^{-z_1 + z_2 - z_2} \\ &= e^{-z_1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{\underline{Z}}(z_1, z_2) &= e^{-z_1}, \quad z_1 - z_2 > 0; \quad z_2 > 0 \\
&= 0, \qquad \text{ö}.d.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} z_1 - z_2 > 0 \Longrightarrow z_1 > z_2 \\ z_2 > 0 \end{matrix} \Longrightarrow 0 < z_2 \leq z_1 < +\infty
$$

$$
\begin{aligned}
f(z_1) &= \int_{\mathcal{R}z_2} f_{\underline{Z}}(z_1, z_2)\, dz_2 \\
&= \int_0^{z_1} e^{-z_1}\, dz_2 \\
&= e^{-z_1}\, z_2 \big|_0^{z_1} \\
&= z_1 e^{-z_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(z_1) &= z_1 e^{-z_1}, \quad z_1 > 0 \\
&= 0, \qquad \text{ö}.d.
\end{aligned}
$$

9. Size ödev.