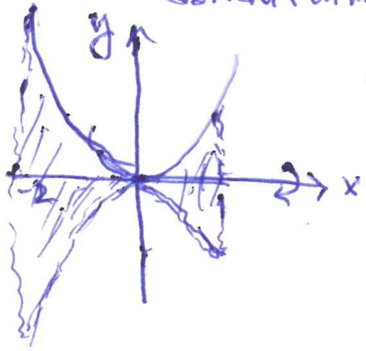
DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİ İÇİN ALIŞTIRMALAR.

1) $y = x^2$ eğrisinin $-2 \le x \le 1$ için belirlediği bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



Disk Yöntemi ile

$$V_{ox} = \pi \int_{-2}^{1} y^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} x^4 dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} \Big|_{-2}^{1} \right)$$

$$= \frac{33\pi}{5} \text{ br}^3.$$

Kabuk Yöntemi ile

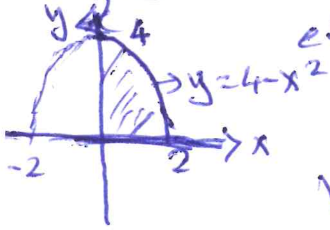
$$V_{ox} = 2\pi \int_0^1 (1-\sqrt{y})\, y\, dy + 2\pi \int_0^4 y\,(2-\sqrt{y})\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y - y^{3/2})\, dy + 2\pi \int_0^4 (2y - y^{3/3})\, dy$$

$= \ldots\ldots = \frac{33}{5}\pi$ bulunur.

---

2) $y = 4 - x^2$ eğrisinin, $0 \le x \le 2$ için belirlediği bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle ...... dönel cismin hacmi?



Disk Yöntemi ile:

$$V_{oy} = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 (4-y)\, dy$$

$$= \pi \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \ldots = 8\pi$$

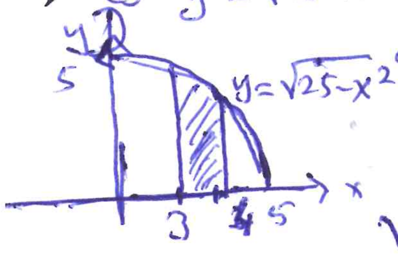
Kabuk Yöntemi ile

$$V_{oy} = 2\pi \int_0^2 x.(4-x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4x - x^3)\, dx = \ldots = 8\pi$$

---

3) $y = \sqrt{25-x^2}$ eğrisinin $3 \le x \le 4$ için belirlediği bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle ...... dönel cismin hacmi?



Kabuk Yöntemi ile:

$$V_{oy} = 2\pi \int_3^4 x\, y\, dx = 2\pi \int_3^4 x.\sqrt{25-x^2}\, dx$$

$$= -\frac{2\pi}{3} (25-x^2)^{3/2} \Big|_3^4 = \ldots = \frac{74}{3}\pi.$$

Disk Yöntemi ile

$$V_{oy} = \pi \int_0^3 (x_2^2 - x_1^2)\, dy + \pi \int_3^4 (x_2^2 - x_1^2)\, dy$$

$$= \pi \int_0^3 (16-9)\, dy + \pi \int_3^4 ((25-y^2) - 9)\, dy$$

$$= 21\pi + \pi \int_3^4 (16 - y^2)\, dy = 21\pi + \pi \left(16y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_3^4$$

$= 21\pi + \frac{11\pi}{3} = \frac{63+11}{3}\pi = \frac{74}{3}\pi$ br^3 olur.

17.01.2008

SINAV PROGRAMI

MELİS ERTÜRK
LİSE 1 NO:664

$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = (x\ln x - x)$ ✓

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \rightarrow v = x$

- K. CZERNY	Exercises 50,	Op.740, No:17
- F. LISZT	Liebesträume,	Notturno III, La b Maj.

$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e \ln x \cdot \ln x\,dx = \ln x \overbrace{(x\ln x - x)}^{x(\ln x - 1)}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{(\ln x - 1)}\,dx$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$ $\quad - (x.\ln x - x) + x$

$dv = \ln x\,dx \Rightarrow v = (x\ln x - x)$

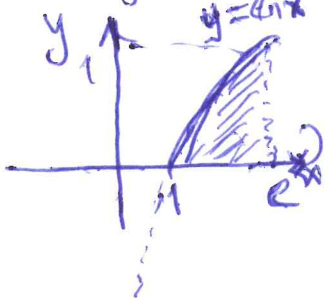
$= 1.\underbrace{(e.1 - e)}_{=0} - (e.1 - e) + 1 + (e - 1) = e$

Not 1) $R=\{(x,y) \mid 0\le y\le f(x),\ a\le x\le b\}$ bölgesinin $y=d$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, Disk Yöntemi ile $\boxed{V_{0x}=\pi\int_a^b (d-f(x))^2\,dx}$ ile hesaplanır.

2) $R=\{(x,y) \mid 0\le x\le g(y),\ c\le y\le d\}$ bölgesinin $x=a$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, Disk Yöntemi ile $\boxed{V_{0y}=\pi\int_c^d (a-g(y))^2\,dy}$ ile hesaplanır.

3) Kabuk Yöntemi ile $\boxed{V_{0y}=2\pi\int_c^d (a-x)\,g(y)\,dy}$ ---- ile hesaplanır.

4) $y=\ln x$ eğrisinin, $1\le x\le e$ için belirlediği bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle ---- dönel cismin hacmi?



Disk Yöntemi ile:

$$V_{0x}=\pi\int_1^e y^2\,dx=\pi\int_1^e (\ln x)^2\,dx$$

$$=\pi\left[(x\ln x-x)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e(\ln x-1)\,dx\right]$$

$$=\pi\left[1.(e1-e)-0(...)\right]-\pi\left(x\ln x-x\Big|_1^e+x\Big|_1^e\right)$$

$$=-\pi(e-e-0+1)+(e-1)\pi=\pi(e-2)\ \text{dir.}$$

Kabuk Yöntemi ile

$$V_{0x}=2\pi\int_0^1 y(e-e^y)\,dy$$

$$=2\pi\left(e\frac{y^2}{2}-ye^y+e^y\right)\Big|_0^1$$

$$=\pi(e-2)\ \text{bulunur.}$$

5) $y=x^{-4/3}$, $0<x\le 1$ bölgesinin y-ekseni etrafında ----

Kabuk Yöntemi ile $V_{0y}=2\pi\int_0^1 xy\,dx=2\pi\int_0^1 x.x^{-4/3}\,dx$

$$=2\pi\int_0^1 x^{-1/3}\,dx=2\pi.\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_a^1\right)=2\pi\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}a^{2/3}\right)$$

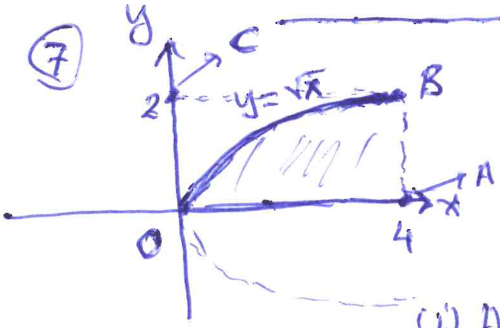
$$=2\pi.\ 3/2=3\pi\ \text{bulunur.}$$

6) $y=(x^2+1)^{-3/2}$ eğrisinin $0\le x<\infty$ için belirlediği bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan ..... dönel cismin hacmi,

Disk Yöntemi ile; $V_x=\pi\int_0^\infty y^2dx=\pi\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\pi\lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{dx}{(x^2+1)^3}$

$$=\pi\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\mathrm{Arctan}x\right]_0^A$$

$$=\pi\lim_{A\to\infty}\left[\frac{A}{4(A^2+1)^2}+\frac{3A}{8(A^2+1)}+\frac{3}{8}\mathrm{Arctan}A-0\right]=\pi\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi^2}{16} \text{ dür.}$$

7) 

şeklini gözönüne alarak

(a) OAB nin belirlediği bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle ...

(i) Disk Yöntemi ile

$$V_{ox}=\pi\int_0^4y^2dx=\pi\int_0^4x\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\right)=8\pi \text{ bulunur}$$

(ii) Kabuk Yöntemi ile,

$$V_{ox}=2\pi\int_0^2xy\,dy=2\pi\int_0^2(4-y^2)y\,dy$$

$$=2\pi\int_0^2(4y-y^3)dy=\cdots=8\pi \text{ dür}$$

(b) OBC nin belirlediği bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle ...

(i) Disk Yöntemi ile,

$$V_{ox}=\pi\int_0^4(2^2-y^2)dx=\pi\int_0^4(4-x)\,dx$$

$$=\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4\cdot\pi=8\pi \text{ dür.}$$

(ii) Kabuk Yöntemi ile

$$V_{ox}=2\pi\int_0^2xy\,dx=2\pi\int_0^2y^2\cdot y\,dy$$

$$=2\pi\int_0^2y^3dy=2\pi\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^2\right)=8\pi.$$

(c) OBC nin Y-ekseni etrafında döndürülmesiyle ---- hacim?

(i) Disk (silindir) Yöntemi ile

$$V_{oy}=\pi\int_0^2x^2dy=\pi\int_0^2y^4dy$$

$$=\pi\left(\frac{y^5}{5}\Big|_0^2\right)=\frac{32}{5}\pi$$

(ii) Kabuk Yöntemi ile

$$V_{oy}=2\pi\int_0^4x\cdot(2-y)\,dx$$

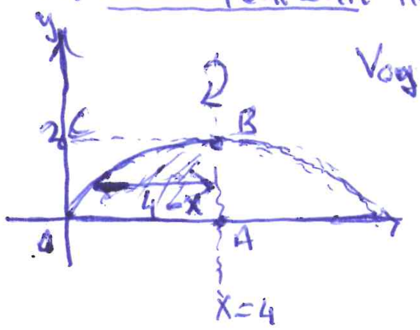
$$=2\pi\int_0^4x(2-\sqrt{x})dx=2\pi\int_0^4(2x-x^{3/2})dx$$

$$=2\pi\left(x^2-\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Big|_0^4=\frac{32}{5}\pi \text{ br}^3.$$

(4)

(d) OAB nin $x=4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle ---- hacim?

(i) Disk Yöntemi ile

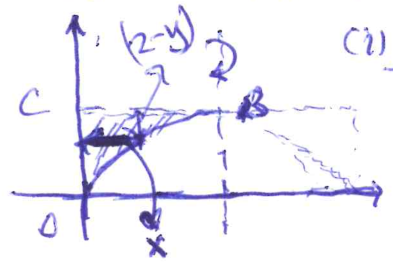


$$V_{oy}=\pi\int_0^2\left(4-y^2\right)^2dy$$
$$=\pi\int_0^2\left(16-8y^2+y^4\right)dy$$
$$=\pi\left(16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^2$$
$$=\cdots=\frac{256}{15}\pi.$$

(ii) Kabuk Yöntemi ile:

$$V_{oy}=2\pi\int_0^4(4-x)y\,dx=2\pi\int_0^4(4-x)\sqrt{x}\,dx$$
$$=2\pi\int_0^4\left(4\sqrt{x}-x^{3/2}\right)dx$$
$$=2\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)\Big|_0^4$$
$$=\cdots\cdots=\frac{256}{15}\pi\ br^3.$$

(e) OBC nin $x=4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle ---- hacim?



(i) Disk Yöntemi

$$V_{oy}=\pi\int_0^2\left(4^2-(4-x)^2\right)dy$$
$$=\pi\int_0^2\left(8x-x^2\right)dy$$
$$=\pi\int_0^2\left(8y^2-y^4\right)dy=\frac{224\pi}{15}$$

(ii) Kabuk Yöntemi ile

$$V_{oy}=2\pi\int_0^4(4-x)\cdot(2-y)\,dx$$
$$=2\pi\int_0^4(4-x)\left(2-\sqrt{x}\right)dx$$
$$=2\pi\int_0^4\left(8-4\sqrt{x}-2x+x^{3/2}\right)dx=\frac{224}{15}\pi$$

(f) OBC nin $y=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle ---- hacim?

(i) Disk Yöntemi ile: $V_{ox}=\pi\int_0^4(2-y)^2dx$

$$=\pi\int_0^4\left(2-\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(4-4\sqrt{x}+x\right)dx$$
$$=\left(4x-\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4\pi=\frac{8}{3}\pi\ br^3$$

Kabuk Yöntemi ile

$$V_{ox}=2\pi\int_0^2 x\cdot(2-y)\,dy$$
$$=2\pi\int_0^2 y^2(2-y)\,dy=\cdots$$

(g) OAB nin $y=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle, ---- hacim?

(i) Disk Yöntemi ile $V_{ox}=\pi\int_0^4\left(2^2-(2-y)^2\right)dx$

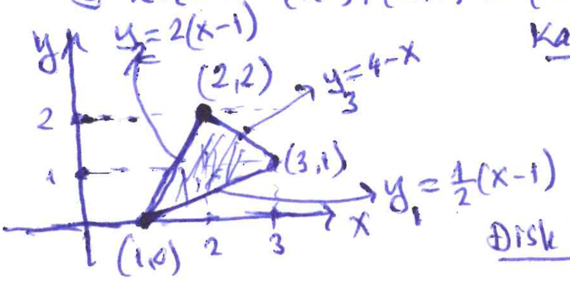
$$=\pi\int_0^4\left(\cancel{4}-\cancel{4}+4y-y^2\right)dx=\pi\int_0^4\left(4\sqrt{x}-x\right)dx$$
$$=\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4=\frac{40}{3}\pi.$$

Kabuk Yöntemi ile:

$$V_{ox}=2\pi\int_0^2(4-x)(2-y)\,dy$$
$$=2\pi\int_0^2\left(4-y^2\right)(2-y)\,dy=\cdots$$

---

(8) Köşeleri (1,0), (3,1) ve (2,2) noktaları olan üçgen bölgesinin y-ekseni etrafında ----



Kabuk Yöntemi $V_{oy}=2\pi\int_1^2(y_2-y_1)x\,dx+2\pi\int_2^3(y_3-y_1)x\,dx$

$$=2\pi\left[\int_1^2\left(2(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)\right)x\,dx+\int_2^3\left((4-x)-\frac{1}{2}(x-1)\right)x\,dx\right]$$
$$=\cdots\cdots=6\pi\ br^3.$$

Disk Yöntemi: $V_{oy}=\pi\int_0^1\left(x_1^2-x_2^2\right)dy+\pi\int_1^2\left(x_3^2-x_2^2\right)dy$

$$=\pi\int_0^1\left((2y+1)^2-\left(\frac{y+1}{2}\right)^2\right)dy+\pi\int_1^2\left((4-y)^2-\left(\frac{1+y}{2}\right)^2\right)dy=\cdots$$

EĞRİ UZUNLUKLARI İÇİN ALIŞTIRMALAR.

① $x = \ln t,\ y = 1/t,\ (1 \le t \le 2)$ parametrik eğrisinin uzunluğu?

$$\ell = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(-1/t^2\right)^2}\, dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\, dt$$

$$= -\frac{1}{t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \operatorname{Arcsinh}(t)\Big|_1^2 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

② $x = g(y) = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y},\ (1 \le y \le 3)$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz

$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^3 \sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^2}\right)^2 + 1}\, dy = \int_1^3 \sqrt{\frac{y^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4}}\, dy$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2}\, dy = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y}\right)\Big|_1^3 = \dots = \frac{14}{3} \text{ birim.}$$

③ $y = \ln(\sin x),\ \left(\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}\right)$ eğrisinin yay uzunluğunu bulunuz.

$$y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\ell = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1+(\underbrace{\cot x}_{=1/\sqrt{3}})^2}\, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{\underbrace{1+\cot^2 x}_{=\csc^2 x}}\, dx$$

$3/\sqrt{3}$

$$= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x|\,\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} = -\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| + \ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= \ln\left(\frac{3/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}}\right) = \ln 3 \ //$$

④ $x = \int_0^y \sqrt{\cosh t}\, dt,\ (0 \le y \le 2)$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^y \sqrt{\cosh t}\, dt\right) = \sqrt{\cosh y} = g(y) \text{ dır.}$$

$$\ell = \int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^2 \sqrt{1+\left(\sqrt{\cosh y}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+\cosh y}\, dy = \int_0^2 \sqrt{2\cosh^2 \tfrac{y}{2}}\, dy = \sqrt{2}\int_0^2 \cosh(y/2)\, dy = 2\sqrt{2}\sinh y/2 \Big|_0^2$$

$$= 2\sqrt{2}\sinh(1) = \sqrt{2}\left(e - 1/e\right) \text{ dır.}$$

⑤ $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $(0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\cdot\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cdot\cos t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t = 9a^2\cos^2 t\cdot\sin^2 t\,\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = 9a^2\cos^2 t\cdot\sin^2 t$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^2 t\cdot\sin^2 t}\, dt$$

$$= \frac{3a}{2}\int_0^{2\pi} |2\cos t\cdot\sin t|\, dt = \frac{3}{2}a\cdot 4\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 4\, a\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 6a \text{ bulunur.}$$

YÜZEY ALANLARI İÇİN ALIŞTIRMALAR.

① $x=t^3,\ y=\frac{3}{2}t^2,\ (0\le t\le 1)$ parametrik eğrisi ile belirlenen bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını bulunuz.

$$A_{ox}=2\pi\int_0^1 y\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=2\pi\int_0^1\frac{3}{2}t^2\sqrt{9t^4+\frac{9}{4}t^2}\,dt=9\pi\int_0^1 t^3\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$1+t^2=u$, $du=2t\,dt$

$$=\frac{9\pi}{2}\int_1^2(u-1)\cdot\sqrt{u}\,du=\frac{9}{2}\pi\left(\frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^2=\frac{6}{5}\pi\left(\sqrt2+1\right)\text{ dır.}$$

② $x=1/t,\ y=\ln t\ \left(\frac{1}{2}\le t\le 1\right)\equiv\left(t=1/x\text{ için }y=\ln(1/x)=-\ln x,\ 1\le x\le 2\right)$ eğrisi ile belirlenen bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını bulunuz.

$$A_{oy}=2\pi\int_1^2 x\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=2\pi\int_1^2 x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=2\pi\int_1^2\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$=\pi\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right]\Big|_1^2$$

$$=\pi\left(2\sqrt5+\ln|2+\sqrt5|-\sqrt2-\ln|1+\sqrt2|\right)$$

$$=\pi\left[2\sqrt5-\sqrt2+\ln\left|\frac{2+\sqrt5}{1+\sqrt2}\right|\right]$$

bulunur.

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\sec^3t\,dt$$

$x=\tan t$, $dx=\sec^2t\,dt$

$$=\int\sec t\cdot\sec^2t\,dt=\sec t\tan t-\int\sec t\,\underbrace{\tan^2t}_{=\sec^2t-1}\,dt$$

$u=\sec t\to du=\sec t\tan t\,dt$

$dv=\sec^2t\,dt\to v=\tan t$

$$\Rightarrow\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\sec^3t\,dt=\frac{1}{2}\sec t\tan t+\int\sec t\,dt$$

$$=\frac{\sec t\tan t}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|$$

$$=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\text{ dır.}$$

③ $x=y^{1/3},\ 0\le y\le 1$ eğrisinin belirlediği bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını bulunuz.

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}y^{-2/3}$

$$A_{oy}=2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=2\pi\int_0^1 y^{1/3}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{3y^{2/3}}\right)^2}\,dy=2\pi\int_0^1 y^{1/3}\frac{\sqrt{(3y^{2/3})^2+1}}{3y^{2/3}}\,dy$$

$u=3y^{2/3}\to du=2y^{-1/3}dy$

$$=\frac{2\pi}{3\cdot2}\int 2y^{-1/3}\cdot\sqrt{1+(3\cdot y^{2/3})^2}\,dy=\frac{\pi}{3}\int_0^3\sqrt{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right]_0^3$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[3\sqrt{10}+\ln|3+\sqrt{10}|-0\right]=\frac{\sqrt{10}}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\ln|3+\sqrt{10}|\text{ br}^2\text{ olur.}$$

④ $y=e^{-x},\ (0\le x<\infty)$ eğrisinin belirlediği bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin yüzey alanını bulunuz (varsa).

$$A_{ox}=2\pi\int_0^\infty y\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=2\pi\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1+(-e^{-x})^2}\,dx=2\pi\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\cdot\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$$

$u=e^{-x}\to du=-e^{-x}dx$

$$=2\pi\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\cdot\sqrt{1+(e^{-x})^2}\,dx=2\pi\lim_{R\to\infty}\int_1^{e^{-R}}\sqrt{1+u^2}\,(-du)=2\pi\lim_{R\to\infty}\int_{e^{-R}}^1\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$=2\pi\cdot\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}u\cdot\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right]_{e^{-R}}^1=\pi\lim_{R\to\infty}\left[\sqrt2+\ln(1+\sqrt2)-e^{-R}\sqrt{1+e^{-2R}}-\ln\left|e^{-R}+\sqrt{1+e^{-2R}}\right|\right]$$

$$=\pi\cdot\lim_{R\to\infty}\left(\underbrace{-e^{-R}\cdot\sqrt{1+e^{-2R}}}_{=0}-\underbrace{\ln\left|e^{-R}+\sqrt{1+e^{-2R}}\right|}_{=0}+\sqrt2+\ln|1+\sqrt2|\right)=\pi\cdot\left(\sqrt2+\ln|1+\sqrt2|\right)$$

bulunur.