SERİLER UYGULAMA – 1

1) (a) $0.0\bar{6} = 0.0666....$, (b) $1.24\overline{123} = 1.24123123....$

devirli ondalık sayılarını iki sayının oranı olarak yazınız.

a) $0.0\bar{6} = \frac{1}{10}\cdot 0.\bar{6} = \frac{1}{10}\left(\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\cdots+\cdots\right)$

$= \frac{1}{10}\cdot\frac{6}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\cdots\right) = \frac{6}{100}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k \rightarrow$ geo. seri yakınsak

$= \frac{6}{100}\cdot\frac{1}{1-1/10} = \frac{6}{100}\cdot\frac{10}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ olur.

b) $1.24\overline{123} = \frac{124}{100} + \left(\frac{123}{10^5}+\frac{123}{10^8}+\frac{123}{10^{11}}+\cdots\right)$

$= \frac{124}{100}+\frac{123}{10^5}\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right) = \frac{124}{100}+\frac{123}{10^5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^3}\right)^k$

geo. serisi yak.

$= \frac{124}{100}+\frac{123}{10^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{124}{100}+\frac{123}{10^5}\cdot\frac{10^3}{999}$

$= \frac{124}{100}+\frac{123}{99900} = \frac{124\cdot 999+123}{99900}$

$= \frac{123999}{99900} = \frac{124123-124}{99900} = \frac{\text{Tümü} - \text{Devretmeyen}}{(\text{Devreden kadar } 9)(\text{Devretmeyen kadar } 0)}$

2) $\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots+\frac{9}{100^n}+\cdots$ biçimindeki serinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$= \frac{9}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right) = \frac{9}{100}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{9}{(100)^{k+1}}$

Bu serinin n. kısmi toplamlar dizisi $A_n = \frac{9}{100}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{100}\right)^k$

$= \frac{9/100\left(1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right)}{1-1/100} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{9/100\left(1-(1/100)^n\right)}{1-1/100}$

$= \frac{9/100\cdot 1}{99/100} = 9/99 = \frac{1}{11}$ dür.

Dolayısıyla seri yakınsak ve toplamı $= \frac{1}{11}$ dür.

3) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ serisinin yakınsaklığını ?

$A=1,\ B=-1$

$1 = A(k+2)+B(k+1)$

$S_n = \sum_{1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{1}^{n}\left(\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+2}\right) = \sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$ ve

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$, yani (S_n) yakınsak $\Rightarrow$ seri de yakınsak ve $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$ dur

4) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, b) $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ serilerinin yakınsaklıklarını inceleyiniz, yakınsak top?

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{40k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} 5\cdot\left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right)$

$\frac{40k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{(2k-1)^2} + \frac{C}{2k+1} + \frac{D}{(2k+1)^2}$

$\Leftrightarrow A=0,\ C=0,\ B=5,\ D=-5$

$= 5\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right) + \left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right\}$

$= 5\cdot\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ dır.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 5\cdot\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = 5 \Rightarrow (S_n)$ yakınsak $\Rightarrow$ seri yakınsak ve

$\sum_{1}^{\infty} \frac{40 n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = 5$ bulunur.

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{1}^{n} (\ln k - \ln(k+1)) = (\overset{=0}{\ln 1} - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n) - \ln(n+1)) = 0 - \ln(n+1)$ dır ve

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (-\ln(n+1)) = \lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = -\infty \Rightarrow (S_n)$ ıraksak

$\Rightarrow$ Seri de ıraksak olur.

5) a) $\sum_{2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$, b) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{2^n}$ serileri yak mı? yak ise toplamı?

<u>Çözüm</u>: (a) $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$ dir
geo. seri ($r = \frac{1}{2} < 1$ yak)

$\Rightarrow \sum_{2}^{\infty} 1/2^n$ de yakınsak ve $\sum_{2}^{\infty} 1/2^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - (1+1/2) = 2 - 3/2 = 1/2$

$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ geo. serisi yakınsak $\rightarrow = \frac{1}{1+1/5} = \frac{5}{6}$ dır

$\Rightarrow \sum_{2}^{\infty} (-1)^n/5^n$ de yakınsak ve

$\sum_{2}^{\infty} (-1)^n/5^n = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n/5^n - (1 - 1/5) = \frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{1}{30}$ dır.

Böylece $\sum_{2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$ de yakınsak ve $= \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ dır.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{2^n} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2.3}{2^{n+1}} = \sum_{1}^{\infty} 6.\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \frac{\text{geo.seri}}{\text{yak}} \frac{6.1}{1+1/2} = \frac{12}{3} = 4.$

6) a) $\sum_{1}^{\infty}(1-1/n)^n$, b) $\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{5^k}$, c) $\sum_{1}^{\infty}\ln\left(\frac{k}{2k+1}\right)$

serilerinin yakınsaklık veya ıraksaklıklarını inceleyiniz.

Çözüm: a) $a_n=(1-1/n)^n$ ve $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n$ $=e^{-1}=\frac{1}{e}\neq 0$ olduğundan, genel terim Testi gereği bu seri ıraksaktır.

b) $\cos(k\pi)=(-1)^k$ dır. $\Rightarrow \sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{5^k}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^k}=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^k$ geometrik serisi yakınsaktır ve $=\frac{1}{1+1/5}=\frac{5}{6}$ bulunur.

c) $a_k=\ln\left(\frac{k}{2k+1}\right)$ ve $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\ln\left(\frac{k}{2k+1}\right)=\ln(1/2)\neq 0$ old.dan, Genel Terim Testi, gereği seri ıraksak olur.

7) a) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\arctan k}{1+k^2}$, b) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{e^k+e^{-k}}$, c) $\sum_{3}^{\infty}\frac{1}{k.\ln k(\ln(\ln k))^p}$

serilerinin yakınsaklık veya ıraksaklıklarını inceleyiniz.

Çözüm: (a) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\arctan x}{1+x^2}$ fonk. alınırsa;

(i) $\forall x\in[1,\infty)$ için $f(x)\geq 0$

(ii) $f(x)$ azalan: $f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)-2x.\arctan x}{(1+x^2)^2}\leq 0$

(iii) f, $[1,\infty)$ da süreklidir. Ayrıca

$$\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_{\pi/4}^{\arctan R}u.du$$

$u=\arctan x \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{u^2}{2}\Big|_{\pi/4}^{\arctan R}=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\left((\arctan R)^2-\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{3\pi^2}{32}$$ olup

integral yakınsak $\xRightarrow{\text{Int. Testi}}$ $f(k)=a_k$ old.dan $\sum_{1}^{\infty}\frac{\arctan k}{1+k^2}$ serisi de yakınsak olur.

b) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ $(f(k)=a_k)$ fonks.; $\forall x\in[1,\infty)$ için $f(x)\geq 0$, f sürekli ve azalandır(?) Ayrıca, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx=\int_1^{\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx \overset{e^x=u}{=} \lim_{R\to\infty}\int_e^{e^R}\frac{du}{u^2+1}=\lim_{R\to\infty}(\arctan u\Big|_e^{e^R}$$

$= \lim_{R\to\infty} \left(\arctan(e^R) - \arctan e \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(e) \in \mathbb{R}$, yani integral yakınsak $\xrightarrow{\text{int. test}}$ seri de yakınsak.

c) $f:[3,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln(\ln x))^p}$ olsun.

(i) $\forall x \in [3,\infty)$ için (ii) $f(x) \geq 0$ ve f sürekli midir?)

(iii) $f(x)$ azalan; $f'(x) = -----$ $\ln(\ln R)$ (?)

$\Rightarrow \displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln x (\ln(\ln x))^p} = \lim_{R\to\infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln R)} \frac{du}{u^p} = \lim_{R\to\infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln R)} u^{-p} du$

$u = \ln(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x \cdot \ln x} dx.$

$= \displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{u^{-p+1}}{-p+1} \Bigg|_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln R)} = \frac{1}{-p+1} \lim_{R\to\infty} \left((\ln(\ln R))^{-p+1} - (\ln(\ln 3))^{-p+1} \right)$

$= \begin{cases} \text{yakınsak}, & p > 1 \\ \text{ıraksak} & p \leq 1 \end{cases}$ olduğundan;

$\displaystyle\sum_3^\infty \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot (\ln(\ln k))^p} = \begin{cases} \text{yakınsak}, & p > 1 \\ \text{ıraksak}, & p \leq 1 \end{cases}$ olacaktır.

8) a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{k+1}{k \cdot (k+2)}$, b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{3^{\ln k}}$ serileri yak mı?

Çözüm: (a) $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x \cdot (x+2)}$ fonk. $\forall x \in [1,\infty)$ ni

(i) $f(x) \geq 0$, (ii) f sürekli ve (iii) f azalan (?)

ayrıca $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x(x+2)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{x+1}{x(x+2)} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \right) dx$

$x+1 = A(x+2) + Bx$
den $A = 1/2$, $B = 1/2$

$= \displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln x + \ln(x+2) \right) \Big|_1^R$

$= \displaystyle\frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \ln(x \cdot (x+2)) \Big|_1^R = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left(\ln[R(R+2)] - \ln 2 \right)$
$= \infty.$

Integral ıraksak $\xRightarrow{\text{int-test.}}$ seri de ıraksaktır.

b) $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3^{\ln x}}$ denirse f sürekli, $f > 0$, f azalan ve

$\displaystyle\int^\infty \frac{dx}{3^{\ln x}} dx$ $\left(3^{\ln x} = e^{\ln 3^{\ln x}} = e^{\ln x \cdot \ln 3} = e^{\ln 3 \cdot \ln x} = e^{\ln x^{\ln 3}} = x^{\ln 3} \text{ dir.} \right.$

p-Testi: $\ln 3 = p > 1 \Rightarrow$ yakınsak)

$= \displaystyle\int^\infty \frac{dx}{x^{\ln 3}} \Longrightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{3^{\ln x}}$ de yakınsak olur.

$\xRightarrow{\text{int. testi}}$ $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{3^{\ln k}}$ serisi yakınsaktır.

9) $a_k = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{k}$ biçiminde olan (a_k) dizisi yakınsak mıdır?, Neden?

Çözüm: $a_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{k}$ dir, yani $a_k = S_k - 2\sqrt{k}$ olur.

Diğer taraftan $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ ve $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ için

$f \geq 0$, f sürekli ve f azalandır. Ayrıca;

$$B_k = \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^k \frac{dx}{x^{1/2}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^k = 2\sqrt{k} - 2 = A_k = \sum_1^k \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ dir.}$$

O zaman $a_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{k} = 2\cancel{\sqrt{k}} - 2 - 2\cancel{\sqrt{k}} = -2$

bulunur ki bu dizinin yakınsak olduğunu göst.

10) Aşağıdaki serilerin yakınsaklık veya ıraksaklıklarını inceleyiniz. Nedenlerini açıklayınız.

a) $\sum_{1}^{\infty} k/e^{k/5}$, b) $\sum_{1}^{\infty} \left(2 + \frac{3}{k}\right)^k$, c) $\sum_{1}^{\infty} \text{Arctank}$

Çözüm: a) $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^{x/5}}$ $f \geq 0$, f sürekli, f azalan.

ve $\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x/5}} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x \cdot e^{-x/5} dx$

$\int x \cdot e^{-x/5} dx = -5xe^{-x/5} + \int e^{-x/5} dx$

$u = x \to du = dx$

$dv = e^{-x/5} dx \to v = -5e^{-x/5}$

$= -5xe^{-x/5} - 5e^{-x/5}$

$= \lim_{R\to\infty} \left(-5e^{-x/5}(x+1)\Big|_1^R\right)$

$= \lim_{R\to\infty} \left(-5e^{-R/5}(R+1) + 10e^{-1/5}\right) = 10e^{-1/5} \Rightarrow$ int. yakınsak

$\xRightarrow{\text{int. testi}}$ seri de yakınsak olur.

b) Genel Terim Testi: $\lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{3}{k}\right)^k = \infty$, yok $\Rightarrow$ seri ıraksak.

c) $\lim_{k\to\infty} \arctan(k) = \pi/2 \neq 0 \xRightarrow{\text{G.T. Testi}}$ seri ıraksak olur.