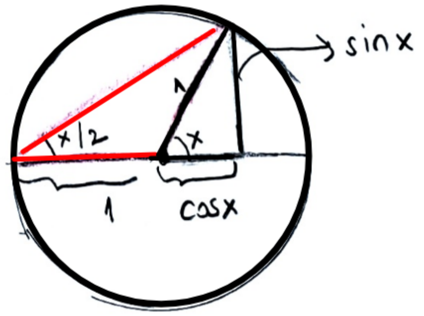
FEN FAKÜLTESİ
MAT 122 MATEMATİK II

Ders Sorumluları: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk

Kaynak: Thomas Calculus

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

$\boxed{u = \tan\frac{x}{2}}$ dönüşümü, $\sin x$ ve $\cos x$ içeren rasyonel bir ifadenin integralini u'nun rasyonel bir fonksiyonunun integralini alma problemine dönüştürür.



$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2\frac{x}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+u^2} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2(x/2)$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}}$$

$$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\tan^{-1}u \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2} \text{ olur.}$$

Örnek 1. $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = ?$

Çözüm:

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx \underset{u=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{1+u^2}{2} \cdot \frac{2du}{1+u^2}$$

$$= \int du = u + C = \tan\frac{x}{2} + C$$

Örnek 2. $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{1+u^2}{2+2u+2u^2} \cdot \frac{2du}{1+u^2}$$

$$= \int \frac{du}{u^2+u+1} = \int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}, \quad u+\frac{1}{2} = z, \quad du = dz$$

$$= \int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta, \quad dz = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{(\sqrt{3}/2)\cancel{\sec^2\theta}\, d\theta}{\frac{3}{4}\cdot(\cancel{\tan^2\theta+1})} = \frac{2}{\sqrt{3}}\theta + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right) + C, \quad u = \tan\frac{x}{2}$$

örnek 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2} = ?$

Çözüm.

$$I = \int \frac{1}{\frac{6u}{1+u^2} + 2\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2} + 2} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du, \qquad u = \tan\frac{x}{2}$$

$$= \int \frac{2}{6u + 2(1-u^2) + 2(1+u^2)}\, du = \int \frac{du}{3u+2}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|3u+2| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left|3\tan\frac{x}{2} + 2\right| + C$$

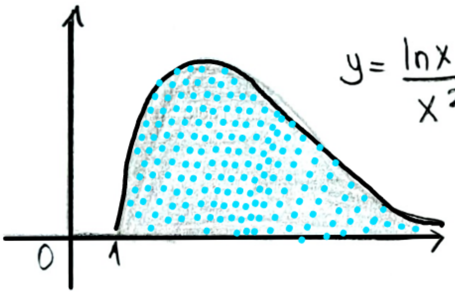
GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

Şimdiye kadar belirli integralin iki özelliğinin olmasını istedik:

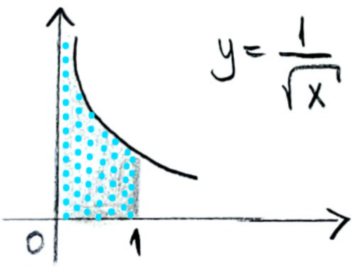
1. Integrasyonun $[a,b]$ tanım aralığının sonlu olması

2. Bu aralıkta integralini aldığımız fonksiyonun sonlu olması

Pratikte bu şartların sağlanmadığı problemlerle karşılaşabiliriz:

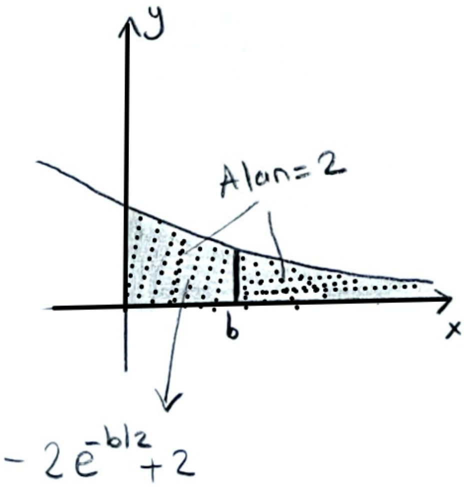


$y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ eğrisinin $x=1$'den $x=\infty$'a kadar kısmı altında kalan alan için, integral tanım aralığının sonsuz olmasına örnektir.



$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisinin $x=0$'dan $x=1$'e kadar kısmı altında kalan alana karşılık gelen integral fonksiyonun sonsuz olmasına örnektir.

Birinci bölgede $y = e^{-x/2}$ eğrisi altında kalan bölgeyi ele alalım:



Bu bölgenin sonsuz bir alana sahip olduğunu düşünebilirsiniz, fakat değerin sonlu olduğunu göreceğiz. Bölgenin $x=b$ ile sınırlı kısmının alanını $A(b)$ ile gösterelim

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\,dx = -2e^{-b/2} + 2$$

Sonra $b \to \infty$ iken $A(b)$'nin limitini bulalım:

$$\lim_{b \to \infty} A(b) = \lim_{b \to \infty} \left(-2e^{-b/2} + 2\right) = 2$$

Tanım: Sonsuz sınırlı integrallere I. tip genelleştirilmiş integral denir.

1. Eğer $f(x)$, $[a, \infty)$ aralığında sürekli ise; o halde

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx .}$$

2. Eğer $f(x)$ $(-\infty, b)$ aralığında sürekli ise; o halde

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

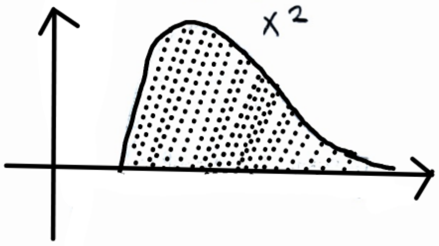
3. Eğer $f(x)$ $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli ise, c herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx}$$

Her bir durumda, limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve limit değeri genelleştirilmiş integralin değeridir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

örnek1. $y = \frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi altında $x=1$'den $x=\infty$'a kadar alan sonlu mudur?

Çözüm:



Eğri altında kalan alanı $x=1$'den $x=b$'ye kadar hesaplayıp sonra $b \to \infty$ iken limitini araştıracağız.

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = (\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=b} - \int_1^b \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & \frac{1}{x^2}dx = dv \\ du = \frac{1}{x}dx, & -\frac{1}{x} = v \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{x}\Bigg|_1^b$$

$$= \frac{-\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1$$

$b \to \infty$ iken alanın limiti

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right)$$

$$= -\left(\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{b}\right) - 0 + 1$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

L'Hopital

Alan sonludur ve değeri 1'dir.

Örnek 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız

Çözüm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

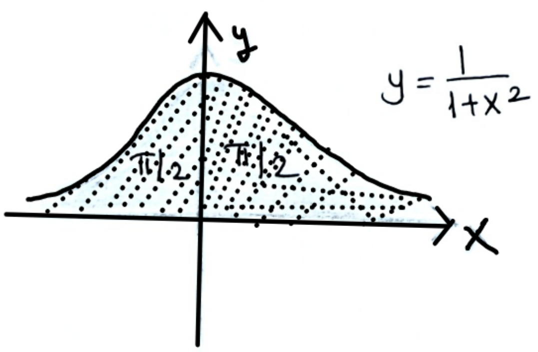
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1}x \Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}a\right) = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}x \Big|_{0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1}b - \tan^{-1}0\right) = \frac{\pi}{2}$$

O zaman $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$



$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ integrali :

p' nin hangi değerleri için $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ integrali yakınsar ?

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1-p} \, x^{-p+1} \Big|_{x=1}^{x=b} \right), \qquad p \neq 1$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1-p} \left(b^{1-p} - 1 \right) \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{cases}$$

$p=1$ ise

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1)$$

$$= \infty$$

Eğer $p>1$ ise yakınsaktır, değeri $\frac{1}{p-1}$'dir.

$p \leq 1$ ise ıraksar.

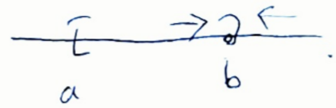
Tanım : Integral aralığında bir noktada sonsuz olan fonksiyon integrallerine II. tip genelleştirilmiş integral adı verilir.

1. Eğer $f(x)$, $(a,b]$ aralığında sürekli ve a'da süreksiz ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

2. Eğer $f(x)$, $[a,b)$ aralığında sürekli ve b'de süreksiz ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$



3. Eğer $f(x)$, $a<c<b$ iken c'de süreksiz ve $[a,c) \cup (c,b]$'de sürekli ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Her bir durumda, eğer limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve limit değeri genelleştirilmiş integralin değeridir. Eğer limit yoksa integral ıraksaktır.

Örnek 4 : Aşağıdaki integralin yakınsaklığını araştırınız

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$$

Çözüm : $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonu $[0,1)$ aralığında sürekli fakat $x=1$'de süreksizdir.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 1^-} -\ln|1-x| \Big|_{x=0}^{x=c} = \lim_{c\to 1^-} \left(-\ln|1-c| + \ln|1|\right)$$

$$= \lim_{c\to 1^-} \left(-\ln(1-c)\right) = \infty$$

limit sonsuzdur, dolayısıyla integral ıraksar.

Örnek 5 : $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_{x=0}^{x=c}$$

$$= \lim_{c\to 1^-} \left(3(c-1)^{1/3} + 3\right) = 3$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^+} \int_b^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_{x=b}^{x=3}$$

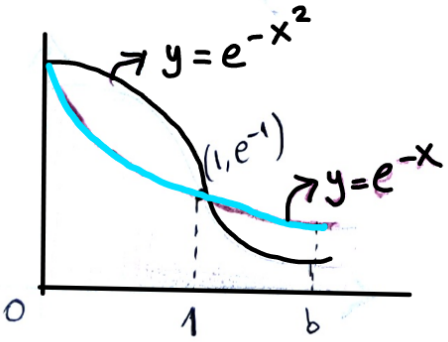
$$= \lim_{b\to 1^+} \left(3\sqrt[3]{2} - 3(b-1)^{1/3}\right) = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$

YAKINSAKLIK VE IRAKSAKLIK İÇİN TEST

Örnek 6: $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm:



Tanıma göre $\int_1^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x^2}dx$

$$\int_1^b e^{-x^2}dx \leq \int_1^b e^{-x}dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1}$$

$\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ integrali belirli bir sonlu değere yakınsar.

TEOREM - Doğrudan Karşılaştırma Testi

f ve g fonksiyonları $[a,\infty)$ aralığında sürekli ve her $x \geqslant a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. O zaman

1. Eğer $\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ de yakınsar.

2. Eğer $\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^\infty g(x)dx$ de ıraksar.

örnek 7 :

a. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ integrali yakınsak mıdır?

$[1,\infty)$ aralığında $0 \leq \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ ve $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ yakınsak olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ de yakınsar.

b. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}$ integrali yakınsak mıdır?

$[1,\infty)$ aralığında $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} \geqslant \dfrac{1}{x}$'tir $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ ıraksaktır

O zaman $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}dx$ integrali de ıraksar.

TEOREM - Limit Karşılaştırma Testi

Eğer f ve g pozitif fonksiyonları $[a,\infty)$ aralığında sürekli ve eğer

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L \quad , \quad 0<L<\infty$$

ise o halde

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{ve} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

integralleri aynı davranışı gösterir. (her ikisi de yakınsak veya her ikisi de ıraksak.)

Örnek 8 : $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ integrali ile karşılaştırarak $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu görelim

Çözüm : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonları $[1,\infty)$ aralığında pozitif ve süreklidir.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 1$$

O zaman

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ yak. olduğundan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ 'de yakınsar.

Örnek 9 : $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ integralinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\frac{x}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-x}\right)=1.$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ integrali ıraksak old. dan $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ integrali de ıraksaktır.

Örnek 10 : $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm :

$$I=\int_{-1}^{\infty}\frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}=\lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{a}\frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}=\lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{a}\frac{d\theta}{(\theta+2)(\theta+3)}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{a}\left(\frac{1}{\theta+2}-\frac{1}{\theta+3}\right)d\theta=\lim_{a\to\infty}\left(\ln|\theta+2|-\ln|\theta+3|\Big|_{\theta=-1}^{\theta=a}\right)$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\ln\frac{|\theta+2|}{|\theta+3|}\Big|_{\theta=-1}^{\theta=a}\right)=\lim_{a\to\infty}\left(\ln\frac{|a+2|}{|a+3|}+\ln 2\right)=\ln 2$$

$$\left(\ln\left(\lim_{a\to\infty}\left|\frac{a+2}{a+3}\right|\right)=\ln 1=0\right)$$

Örnek 11 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

Çözüm.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} + 2\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$\leq \underbrace{2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}}_{\text{sonlu belirli integral}} + \underbrace{2\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{yakınsak integral.}}$$

$x^4 < x^4+1$

$$\left[\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a x^{-2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^a\right) = \lim_{a\to\infty} \left(1-\frac{1}{a}\right) = 1\right]$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ kıyaslama testinden yakınsak çıkar.

Örnek 12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Çözüm:

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1} < \frac{e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \leq \underbrace{2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x}\,dx}_{\text{yakınsak}}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{0}^{a} \frac{1}{e^x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left(-e^{-x}\Big|_0^a\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(-e^{-a}+1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \text{ yakınsaktır}$$

Örnek 13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

Çözüm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^2} + \underbrace{\int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}}$$

$$= \underbrace{\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^2}}_{\text{ıraksak}} + \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{b \to -1^-} \int_{-2}^{b} \frac{dx}{(x+1)^2} = -\lim_{b \to -1^-} \left(\frac{1}{x+1} \Big|_{x=-2}^{x=b} \right)$$

$$= \lim_{b \to -1^-} \left(\frac{1}{b+1} + 1 \right) = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^2}}_{\text{yak.}} + \underbrace{\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^2}}_{\text{ıraksak}} + \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2}}_{\text{ırak.}} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}}_{\text{yak.}}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$ ıraksar.

örnek 14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^5+1}\,dx$

Çözüm:

$$\frac{x^2}{x^5+1} \leq \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}, \quad (\forall x > 0 \text{ için})$$

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^5+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^5+1}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^2}{x^5+1}\,dx$$

$$\leq \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{x^5+1}\,dx}_{\text{belirli integral}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx}_{I_2 - \text{yak.}}$$

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{x^{-2}}{2} \Big|_1^a \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2} \right) = 1/2$$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^5+1}\,dx$ yakınsar.