UYGULAMA VIII

(Bileşik Dağılımlar)

1. Yerel bir süpermarkette üç adet kasa bulunmaktadır. Herhangi bir anda kasalarda hiçbir müşterinin olmadığı varsayılsın. Bu durumda, iki müşteri birbirinden bağımsız olarak rasgele bir kasa seçerek ödeme yapmak için seçtiği kasaya gitmektedir. Y_1, birinci kasayı seçen müşteri sayısı; Y_2, ikinci kasayı seçen müşteri sayısı olsun.

   a) (Y_1,Y_2) iki boyutlu raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.
   Müşterilerin kasayı seçmesi deneyinde örneklem uzayı
   S={ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)}

Y_1:	2	1	1	1	0	0	1	0	0
Y_2:	0	1	0	1	2	1	0	1	0

   $y_1 \in \{0,1,2\}$ ve $y_2 \in \{0,1,2\}$

$P(Y_1 \geq 1, Y_2 < 2)$

Y_2 \ Y_1	0	1	2	$p(y_2)$
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
$p(y_1)$	4/9	4/9	1/9	1

Y_2'nin marjinal olasılık fonksiyonu

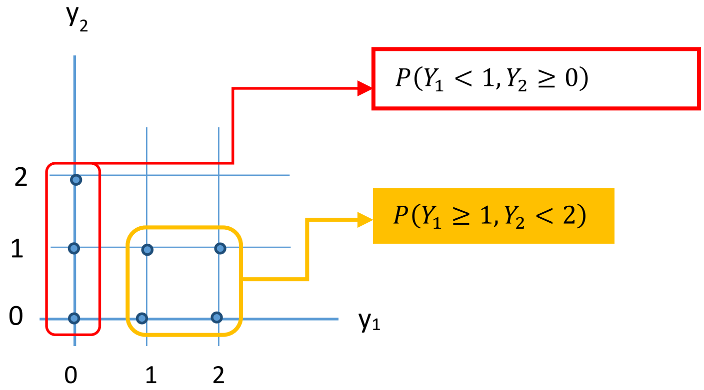
Y_1'in marjinal olasılık fonksiyonu

   b) Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

$$p_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{4}{9} & , \quad y_1 = 0{,}1 \\ \frac{1}{9} & , \quad y_1 = 2 \\ 0 & , \quad diğer\ y_1\ değerleri\ için \end{cases}$$

$$p_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} \frac{4}{9} & , \quad y_2 = 0{,}1 \\ \frac{1}{9} & , \quad y_2 = 2 \\ 0 & , \quad diğer\ y_2\ değerleri\ için \end{cases}$$

c) $P(Y_1 = 2, Y_2 = 0)$, $P(Y_1 = 0, Y_2 = 1)$, $P(Y_1 \geq 1, Y_2 < 2)$, $P(Y_1 < 2, Y_2 \leq 0)$, $P(Y_1 < 1, Y_2 \geq 0)$, $P(Y_1 \geq 2, Y_2 > 0)$, $P(Y_1 < 1, Y_2 > 2)$, $P(Y_1 < 1, Y_2 \geq 2)$ olasılıklarını bulunuz.



$P(Y_1 = 2, Y_2 = 0) = \frac{1}{9}$ $\quad$ $P(Y_1 = 0, Y_2 = 1) = \frac{2}{9}$

$P(Y_1 \geq 1, Y_2 < 2) = p(1,0) + p(1,1) + p(2,0) + p(2,1) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{5}{9}$

$P(Y_1 < 2, Y_2 \leq 0) = p(0,0) + p(1,0) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$P(Y_1 < 1, Y_2 \geq 0) = p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

$P(Y_1 \geq 2, Y_2 > 1) = p(2,2) = 0$

$P(Y_1 < 1, Y_2 > 2) = 0$

$P(Y_1 < 1, Y_2 \geq 2) = p(0,2) = \frac{2}{9}$

d) $E(3Y_1^2 Y_2)$ beklenen değeriniz bulunuz.

$$
\begin{aligned}
E(3Y_1^2 Y_2) &= \textstyle\sum_{Ry_1} \sum_{Ry_2} 3y_1^2 y_2 p(y_1, y_2) \\
&= 3.0^2.0.p(0,0) + 3.1^2.0.p(1,0) + 3.2^2.0.p(2,0) \\
&\quad +3.0^2.1.p(0,1) + 3.1^2.1.p(1,1) + 3.0^2.2.p(0,2) \\
&= 3p(1,1) = 3 \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

e) Cov$(3Y_1, 4Y_2)$ kovaryansını bulunuz.

$$Cov(3Y_1, 4Y_2) = 3 \times 4 \times cov(Y_1, Y_2) = 12[E(Y_1\, Y_2) - E(Y_1)E(\,Y_2)]$$

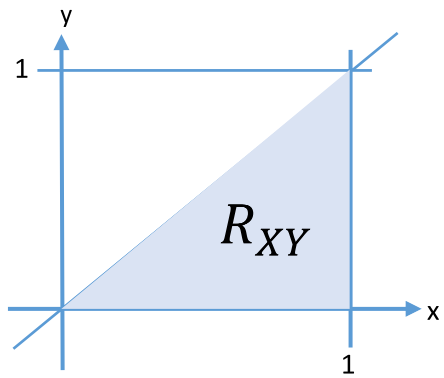
$$
\begin{aligned}
E(Y_1\, Y_2) &= 0.0.p(0,0) + 1.0.p(1,0) + 2.0.p(2,0) + \\
&\quad +0.1.p(0,1) + 1.1.p(1,1) + 0.2.p(0,2) \\
&= p(1,1) = \tfrac{2}{9}
\end{aligned}
$$

$E(Y_1) = 0.\frac{4}{9} + 1.\frac{4}{9} + 2.\frac{1}{9} = \frac{6}{9}$ $\qquad E(Y_2) = 0.\frac{4}{9} + 1.\frac{4}{9} + 2.\frac{1}{9} = \frac{6}{9}$

$$\begin{aligned} Cov(3Y_1, 4Y_2) &= 3 \times 4cov(Y_1, Y_2) \\ &= 12[E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)] \\ &= 12\left(\tfrac{2}{9} - \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3}\right) \\ &= -\tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

2. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerine ilişkin olarak aşağıdaki fonksiyon tanımlanmıştır.

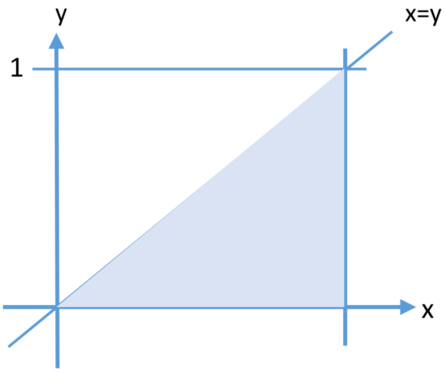
$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x < 1 \\ &= 0, \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$



a) $f_{X,Y}(x,y)$, X ve Y sürekli raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?

i. $\forall(x,y)\ için\ f_{X,Y}(x,y) \geq 0'dır.$

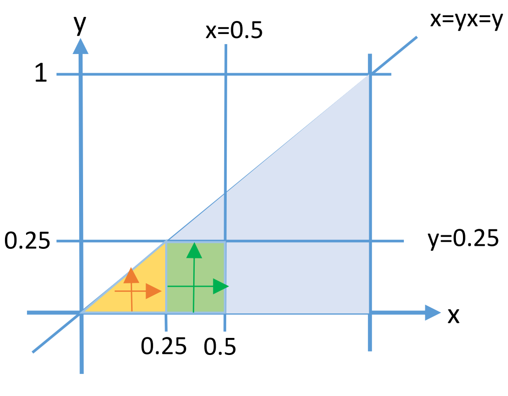
ii. $\int_{Rx}\int_{Ry} f(x,y)dydx = 1\ olmalıdır.$



$$\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x}\, dy dx = \int_0^1 \frac{y}{x}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{1}{x}(x-0)\, dx = \int_0^1 1\, dx = x|_0^1 = (1-0) = 1$$

Koşullar sağlanmaktadır. Dolayısıyla, $f_{X,Y}(x,y)$, X ve Y sürekli raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) $P(X \leq 0.5, Y \leq 0.25)$ ve $P(X = 0.45, Y = 0.15)$ olasılıklarını bulunuz.

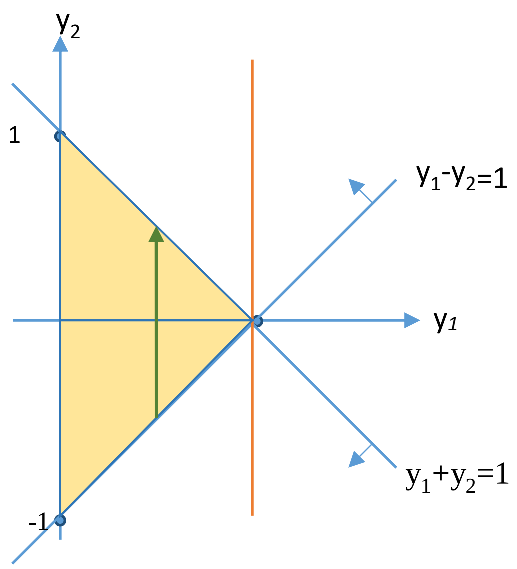


$$
\begin{aligned}
P(X \leq 0.5, Y \leq 0.25) &= \int_0^{0.25}\int_0^{x}\frac{1}{x}dydx + \int_{0.25}^{0.5}\int_0^{0.25}\frac{1}{x}dydx \\
&= \int_0^{0.25}\frac{1}{x}(y|_0^x)dx + \int_0^{0.25}\frac{1}{x}\left(y|_0^{0.25}\right)dx \\
&= \int_0^{0.25}\frac{1}{x}(x-0)dx + \int_{0.25}^{0.5}\frac{1}{x}(0.25-0)dx \\
&= \int_0^{0.25}dx + \int_{0.25}^{0.5}\frac{0.25}{x}dx \\
&= \left(x|_0^{0.25}\right) + 0.25\left(lny|_{0.25}^{0.5}\right) \\
&= 0.25 + 0.25(\ln(0.5) - \ln(0.25)) \\
&= 0.25 + 0.25(-0.6932 - (-1.3863)) \\
&= 0.25 + 0.25(0.6931) = 0.4233
\end{aligned}
$$

$P(X = 0.45, Y = 0.15) = 0$ olur.

3. Y_1 ve Y_2 iki boyutlu raslantı değişkeninin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= cy_1y_2^2, \quad y_1 - 1 \leq y_2 \leq 1 - y_1 \; ve \; 0 \leq y_1 \leq 1 \\
&= 0, \quad ö.d.
\end{aligned}
$$



a) c sabitini bulunuz.

$$
\begin{aligned}
\int_{Ry_1}\int_{Ry_2} f(y_1,y_2)dy_2dy_1 &= \int_0^1\int_{y_1-1}^{1-y_1} cy_1y_2^2dy_2dy_1 \\
&= \int_0^1 cy_1\left(\frac{y_2^3}{3}\Big|_{y_1-1}^{1-y_1}\right)dy_1 \\
&= \frac{c}{3}\int_0^1 y_1[(1-y_1)^3-(y_1-1)^3]dy_1 \\
&= \frac{c}{3}\int_0^1 y_1[1-3y_1+3y_1^2-y_1^3-y_1^3+3y_1^2-3y_1+1]dy_1 \\
&= \frac{c}{3}\int_0^1 y_1[2-6y_1+6y_1^2-2y_1^3]dy_1 \\
&= \frac{c}{3}\left(\frac{2y_1^2}{2}-\frac{6y_1^3}{3}+\frac{6y_1^4}{4}-\frac{2y_1^5}{5}\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{c}{3}\left(\frac{2}{2}-\frac{6}{3}+\frac{6}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{c}{30}=1\rightarrow c=30
\end{aligned}
$$

b) $P(Y_1\le 0.5, Y_2\le 0.5)$ olasılığını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
P(Y_1\le 0.5, Y_2\le 0.5) &= \int_0^{1/2}\int_{y_1-1}^{1/2} 30y_1y_2^2dy_2dy_1 \\
&= 30\int_0^{1/2} y_1\left(\frac{y_2^3}{3}\Big|_{y_1-1}^{1/2}\right)dy_1 \\
&= 10\int_0^{1/2} y_1\left(\frac{1}{8}-(y_1-1)^3\right)dy_1 \\
&= 10\int_0^{1/2} y_1\left(\frac{1}{8}-y_1^3+3y_1^2-3y_1+1\right)dy_1 \\
&= 10\int_0^{1/2}\left(\frac{y_1}{8}-y_1^4+3y_1^3-3y_1^2+y_1\right)dy_1 \\
&= 10\left(\frac{y_1^2}{16}-\frac{y_1^5}{5}+\frac{3y_1^4}{4}-\frac{3y_1^3}{3}+\frac{y_1^2}{2}\Big|_0^{1/2}\right) \\
&= 10\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{160}+\frac{3}{64}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{9}{16}
\end{aligned}
$$

4. X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= 6x^2y \quad , \quad 0<x<1, 0<y<1 \\
&= 0 \quad\quad , \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{Ry} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_0^1 6x^2 y dy \\ &= 6x^2\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) \\ &= 6x^2\left(\frac{1}{2}-0\right) = 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) = &\quad 3x^2, \quad 0 < x < 1 \\ = &\quad 0, \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{Rx} f_{X,Y}(x,y)dx \\ &= \int_0^1 6x^2 y dx \\ &= 6y\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) \\ &= 6y\left(\frac{1}{3}-0\right) = 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = &\quad 2y, \quad 0 < y < 1 \\ = &\quad 0, \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

b) Bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \int_0^x \int_0^y f_{X,Y}(t,z)dzdt \\ &= \int_0^x \int_0^y 6t^2 z dzdt \\ &= 6\int_0^x t^2\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^y\right)dt \\ &= 3y^2 \int_0^x t^2 dt \\ &= 3y^2\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^x\right) = x^3y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= x^3y^2, \quad 0 < x,y < 1 \\ &= 0, \quad x \le 0, y \le 0 \\ &= 1, \quad x \ge 1, y \ge 1 \end{aligned}$$

Sağlama: $F_{X,Y}(1,1) = 1$ olmalıdır.

c) X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri midir?

Bağımsızlık koşulu: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ ya da $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

$$f_X(x)f_Y(y) = (3x^2)(2y) = 6x^2y = f_{X,Y}(x,y)$$

eşitlik sağlandığı için X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsızdır.

d) $P(0 < X < 0.75, 0.33 \le Y \le 2)$, $P(X \le -5, 0.5 \le \; Y \le 0.75)$,

$P(X < 0.85, Y \leq -0.45)$, $P(X = 0.78, Y = 0.55)$, $P(X > 0.2, Y < 0.4)$, $P(0.3 < X < 0.5, 0.4 < Y < 0.9)$, $P(X > 0.75, Y \leq 0.35)$ olasılıklarını bulunuz.

$$P(0 < X < 0.75, 0.33 \leq Y \leq 2) = F\left(\frac{3}{4}, 1\right) - F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 1^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X \leq -5, 0.5 \leq Y \leq 0.75) = 0$$

$$P(X < 0.85, Y \leq -0.45) = 0$$

$$P(X = 0.78, Y = 0.55) = 0$$

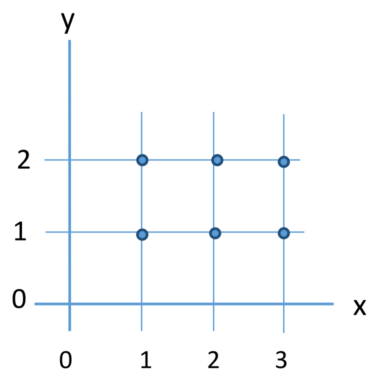
$$P(X > 0.2, Y < 0.4) = F(1, 0.4) - F(0.2, 0.4) = 1^3(0.4)^2 - (0.2)^3(0.4)^2 = 0.15872$$

$$\begin{aligned} P(0.3 < X < 0.5, 0.4 < Y < 0.9) &= F(0.5, 0.9) - F(0.3, 0.9) - F(0.5, 0.4) + F(0.3, 0.4) \\ &= 0.5^3 0.9^2 - 0.3^3 0.9^2 - 0.5^3 0.4^2 + 0.3^3 0.4^2 \\ &= 0.0637 \end{aligned}$$

$$P(X > 0.75, Y \leq 0.35) = F(1, 0.35) - F(0.75, 0.35) = 1^3 0.35^2 - 0.75^3 0.35^2 = 0.0708$$

5. X ve Y kesikli raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= \frac{x + y}{A} \quad x = 1,2,3 \; ve \; y = 1,2 \\ &= 0, \quad ö.d. \end{aligned}$$



a) A sabitini bulunuz.

$$\sum_{Rx} \sum_{Ry} p(x, y) = 1 \;\; olmalıdır.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} p(x,y) &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} \frac{x+y}{A} \\
&= \frac{1}{A}\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(x+y) \\
&= \frac{1}{A}[(1+1)+(1+2)+(2+1)+(2+2)+(3+1)+(3+2)] \\
&= \frac{1}{A}[2+3+3+4+4+5] \\
&= \frac{21}{A}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{Rx}\sum_{Ry} p(x,y) = 1 \;\Longrightarrow\; \frac{21}{A} = 1 \;\Longrightarrow\; \mathrm{A} = 21
$$

b) Bileşik dağılım fonksiyonu bulunuz.

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \sum_{t=1}^{x}\sum_{z=1}^{y} p(t,z) \\
&= \frac{1}{21}\sum_{t=1}^{x}\sum_{z=1}^{y}(t+z) \\
&= \frac{1}{21}\left[\sum_{t=1}^{x}\sum_{z=1}^{y} t + \sum_{t=1}^{x}\sum_{z=1}^{y} z\right] \\
&= \frac{1}{21}\left[\sum_{t=1}^{x} ty + \sum_{t=1}^{x}\frac{y(y+1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{21}\left[y\frac{x(x+1)}{2} + x\frac{y(y+1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{21}\left[\frac{xy(x+1)}{2} + \frac{xy(y+1)}{2}\right] = \frac{xy(x+y+2)}{42}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \frac{xy(x+y+2)}{42}, && x = 1,2,3, y = 1,2 \\
&= 0, && x < 1, y < 1 \\
&= 1, && x \geq 3, y \geq 2
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F_{X,Y}(3,2) = 1$ olmalıdır.

c) Marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

$$
F_X(x) = \lim_{y\to 2} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,2) = \frac{2x(x+2+2)}{42} = \frac{x(x+4)}{21}
$$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \frac{x(x+4)}{21}, && x = 1,2,3 \\
&= 0, && x < 1, \\
&= 1, && x \geq 3
\end{aligned}
$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to 3} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(3,y) = \frac{3y(3+y+2)}{42} = \frac{y(y+5)}{14}$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \frac{y(y+5)}{14}, && y = 1,2 \\
&= 0, && y < 1 \\
&= 1, && y \geq 2
\end{aligned}
$$

d) Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= \textstyle\sum_{Ry} p(x,y) &&= \textstyle\sum_{y=1}^{2} \frac{x+y}{21} \\
&= \frac{1}{21}[(x+1)+(x+2)] &&= \frac{1}{21}(2x+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_X(x) = & \frac{(2x+3)}{21} &&, \quad x = 1,2,3 \\
= & \ 0 &&, \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

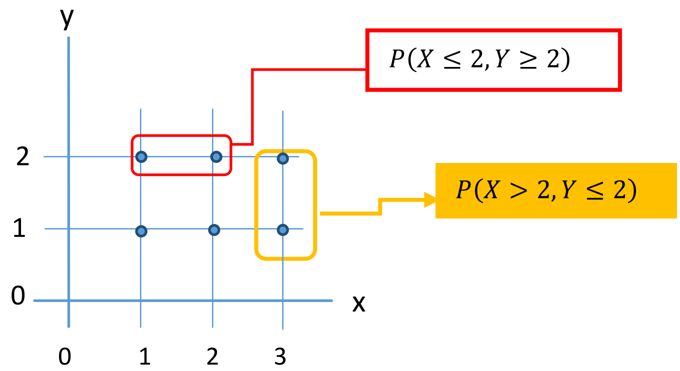
$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= \textstyle\sum_{Rx} p(x,y) &&= \textstyle\sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{21} \\
&= \frac{1}{21}[(1+y)+(2+y)+(3+y)] &&= \frac{1}{21}(3y+6) \\
&= \frac{(y+2)}{7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) = & \frac{(y+2)}{7} &&, \quad y = 1,2 \\
= & \ 0 &&, \quad diğer\ y\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

e) $P(X < 1.5, Y = 1)$, $P(X = 2, Y = 1)$, $P(X \leq 2, Y \geq 2)$, $P(X \geq 1, Y < 2)$, $P(X > 2, Y \leq 2)$, $P(1 < X < 3, Y > 1)$, $P(X \geq 2, Y \geq 1)$ olasılıklarını bulunuz.

$$P(X < 1.5, Y = 1) = p(1,1) = \frac{1+1}{21} = \frac{2}{21}$$

$$P(X = 2, Y = 1) = p(2,1) = \frac{2+1}{21} = \frac{1}{7}$$



$$P(X \le 2, Y \ge 2) = F(2,2) - F(2,1) = \frac{2\times2(2+2+2)}{42} - \frac{2\times1(2+1+2)}{42} = \frac{1}{3}$$
$$P(X \ge 1, Y < 2) = F(3,1) = \frac{3\times1(3+1+2)}{42} = \frac{3}{7}$$
$$P(X > 2, Y \le 2) = F(3,2) - F(2,2) = \frac{3\times2(3+2+2)}{42} - \frac{2\times2(2+2+2)}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$
$$P(1 < X < 3, Y > 1) = p(2,2) = \frac{4}{21}$$
$$P(X \ge 2, Y \ge 1) = F(3,2) - F(1,2) = \frac{3\times2(3+2+2)}{42} - \frac{1\times2(1+2+2)}{42} = \frac{32}{42} = \frac{16}{21}$$

f) E(XY) beklenen değerini bulunuz.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} xyp(x,y) = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} xy\frac{(x+y)}{21} \\ &= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(x^2y+xy^2) \\ &= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}(\underbrace{x^2+x+2x^2+4x}_{3x^2+5x}) = \frac{1}{21}(3+5+12+10+27+15) \\ &= \frac{72}{21} = \frac{24}{7} = 3.42587 \end{aligned}$$

g) X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri midir?

Bağımsızlık koşulu: $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x).p_Y(y)$ ya da $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$

$$p_X(x).p_Y(y) = \left(\frac{2x+3}{21}\right)\left(\frac{y+2}{7}\right) = \frac{2xy+4x+3y+6}{147} \neq \frac{(x+y)}{21} = p_{X,Y}(x,y)$$

Eşitlik sağlanmadığı için X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız değildir.

h) ρ(X,Y) korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$E(X)=\sum_{x=1}^{3}xp_X(x)=\sum_{x=1}^{3}x\frac{(2x+3)}{21}=\sum_{x=1}^{3}\frac{(2x^2+3x)}{21}=\frac{1}{21}(5+14+27)=\frac{46}{21}$$

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{3}x^2p_X(x)=\sum_{x=1}^{3}x^2\frac{(2x+3)}{21}=\sum_{x=1}^{3}\frac{(2x^3+3x^2)}{21}=\frac{1}{21}(5+28+81)=\frac{114}{21}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{114}{21}-\left(\frac{46}{21}\right)^2=\frac{278}{21^2}$$

$$E(Y)=\sum_{y=1}^{2}yp_Y(y)=\sum_{y=1}^{2}y\frac{(y+2)}{7}=\sum_{y=1}^{2}\frac{(y^2+2y)}{7}=\frac{1}{7}(3+8)=\frac{11}{7}$$

$$E(Y^2)=\sum_{y=1}^{2}y^2p_Y(y)=\sum_{y=1}^{2}y^2\frac{(y+2)}{7}=\sum_{y=1}^{2}\frac{(y^3+2y^2)}{7}=\frac{1}{7}(3+16)=\frac{19}{7}$$

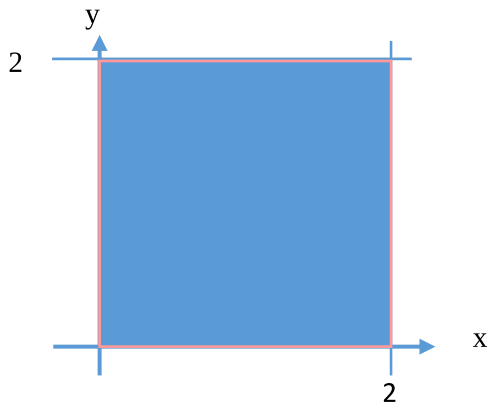
$$V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{19}{7}-\left(\frac{11}{7}\right)^2=\frac{12}{7^2}$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{24}{7}-\frac{46}{21}.\frac{11}{7}=\frac{504-506}{147}=\frac{-2}{147}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{\frac{-2}{147}}{\sqrt{\frac{278}{21^2}\times\frac{12}{7^2}}}=\frac{-2}{\sqrt{3336}}=-0.0346$$

6. X ve Y sürekli raslantı değişkeninin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= A(x+y) \quad 0\le x,y\le 2 \\ &= 0, \qquad \text{ö}.d. \end{aligned}$$



a) A sabitini bulunuz.

$$\int_{Rx}\int_{Ry} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^2\int_0^2 A(x+y)dydx = 1 \ olmalıdır.$$

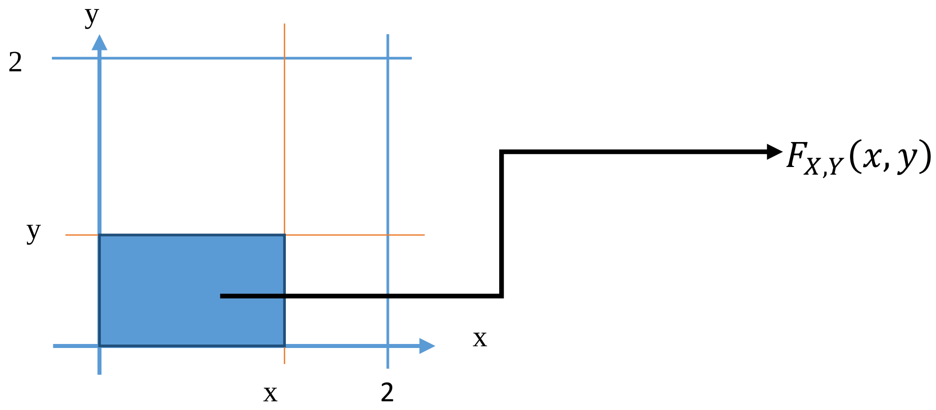
$$\int_0^2\int_0^2 A(x+y)dydx = A\int_0^2 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 dx = A\int_0^2 (2x+2)dx = A(x^2+2x)|_0^2 = 8A$$

$$\int_0^2\int_0^2 A(x+y)dydx = 1 \quad \Longrightarrow \quad 8A = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{8}$$

b) Bileşik dağılım fonksiyonu bulunuz.

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \int_0^x\int_0^y f_{X,Y}(t,z)dzdt &&= \int_0^x\int_0^y \tfrac{1}{8}(t+z)dzdt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^x \left(tz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^y dt &&= \frac{1}{8}\int_0^x \left(ty+\frac{y^2}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{8}\left(y\frac{t^2}{2}+\frac{y^2}{2}t\right)\Big|_0^x &&= \frac{1}{8}\left(\frac{yx^2}{2}+\frac{xy^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16}(x^2y+xy^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \frac{(x^2y+xy^2)}{16}, \quad && 0 \le x, y \le 2 \\
&= 0, && x < 0, y < 0 \\
&= 1, && x \ge 2, y \ge 2
\end{aligned}$$



c) Marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

$$F_X(x) = \lim_{y \to 2} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,2) = \frac{1}{16}(2x^2 + x.2^2) = \frac{2x^2+x}{8}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{2x^2+x}{8}, \quad 0 \le x \le 2 \\ &= 0, \quad x < 0 \\ &= 1, \quad x \ge 2 \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to 2} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(2,y) = \frac{1}{16}(y\,2^2 + 2y^2) = \frac{2y^2+y}{8}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{2y^2+y}{8}, \quad 0 \le y \le 2 \\ &= 0, \quad y < 0 \\ &= 1, \quad y \ge 2 \end{aligned}$$

d) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

$$f_X(x) = \int_0^2 f(x,y)dy = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dy = \frac{1}{8}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{8}(2x+2) = \frac{(x+1)}{4}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{(x+1)}{4} \quad , \quad 0 \le x \le 2 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 f(x,y)dx = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{8}(2+2y) = \frac{(y+1)}{4}$$

$$f_Y(y) = \frac{(y+1)}{4} \quad , \quad 0 \leq y \leq 2$$
$$= 0 \quad , \quad diğer\ y\ değerleri\ için$$

e) $P(X = 1, Y = 1)$, $P(X < -2, Y > 1)$, $P(X > 1, 0.5 \leq Y \leq 1)$, $P(X \leq 1.5, Y \geq 1)$, $P(0.5 < X < 1.5, Y \geq 1.5)$ olasılıklarını bulunuz.

$P(X = 1, Y = 1) = 0$
$P(X < -2, Y > 1) = 0$

1.yol:

$$\begin{aligned} P(X > 1, 0.5 \leq Y \leq 1) &= \int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2} f_{X,Y}(x,y)dxdy &&= \int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2}\left(\tfrac{x+y}{8}\right)dxdy \\ &= \tfrac{1}{8}\int_{1/2}^{1}\left(\tfrac{x^2}{2}+xy\Big|_1^2\right)dy &&= \tfrac{1}{8}\int_{1/2}^{1}(1.5+y)dy \\ &= \tfrac{1}{8}\left(1.5y+\tfrac{y^2}{2}\Big|_{1/2}^{1}\right) &&= \tfrac{1}{8}\left(1.5+0.5-\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{8}\right) \\ &= \frac{9}{64} &&= 0.140625 \end{aligned}$$

2.yol:

$$\begin{aligned} P(X > 1, 0.5 \leq Y \leq 1) &= F(2,1) - F(1,1) - F(2,0.5) + F(1,0.5) \\ &= \tfrac{1}{16}[(2^2.1+2.1^2)-(1^2.1+1.1^2) \\ &\quad -(2^2 \times 0.5 + 2 \times 0.5^2) + (1^2 \times 0.5 + 1 \times 0.5^2)] \\ &= \tfrac{1}{16}[6-2-2.5+0.75] \\ &= \frac{2.25}{16} \\ &= 0.140625 \end{aligned}$$

1.yol:

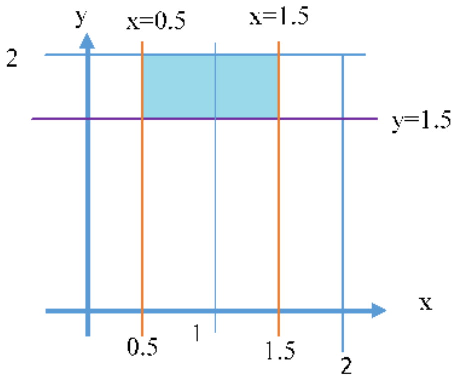
$$\begin{aligned} P(X \leq 1.5, Y \geq 1) &= F(1.5,2) - F(1.5,1) \\ &= \tfrac{1}{16}[(1.5^2\times 2+1.5\times 2^2)-(1.5^2\times 1+1.5\times 1^2)] \\ &= \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{42-15}{4}\right) \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

2.yol:

$$P(X \leq 1.5, Y \geq 1) = \int_0^{1.5}\int_1^2 f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^{1.5}\int_1^2 \left(\frac{x+y}{8}\right)dydx$$

1.yol:

$$
\begin{aligned}
P(0.5 < X < 1.5, Y \geq 1.5) &= F(1.5,2) - F(1.5,1.5) - F(0.5,2) + F(0.5,1.5) \\
&= \tfrac{1}{16}\Big[\Big(\big(\tfrac{3}{2}\big)^2 2 + \big(\tfrac{3}{2}\big)2^2\Big) - \Big(\big(\tfrac{3}{2}\big)^2 \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\big(\tfrac{3}{2}\big)^2\Big) \\
&\qquad - \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)^2 2 + \big(\tfrac{1}{2}\big) 2^2\Big) + \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)^2 \big(\tfrac{1}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{2}\big)\big(\tfrac{1}{2}\big)^2\Big)\Big] \\
&= \tfrac{1}{16}[10.5 - 6.75 - 2.5 + 1.5] \\
&= \tfrac{2.25}{16} \\
&= 0.171875
\end{aligned}
$$



2.yol:

$$
P(0.5 < X < 1.5, Y \geq 1.5) = \int_{0.5}^{1.5}\int_{1.5}^{2} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_{0.5}^{1.5}\int_{1.5}^{2}\left(\frac{x+y}{8}\right)dydx
$$

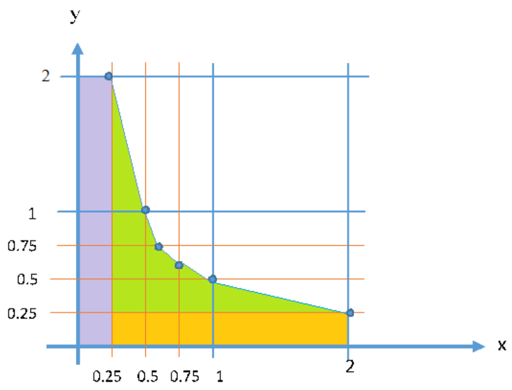
f) E(XY) beklenen değerini ve V(XY) varyansını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^2\int_0^2 xy f_{X,Y}(x,y)\,dxdy &&= \int_0^2\int_0^2 xy\left(\frac{x+y}{8}\right)dxdy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2\left(\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^2\right)dy &&= \frac{1}{8}\int_0^2\left(\frac{8y}{3}+2y^2\right)dy \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{8y^2}{6}+\frac{2y^3}{3}\Big|_0^2\right) &&= \frac{8}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2Y^2) &= \int_0^2\int_0^2 x^2y^2 f_{X,Y}(x,y)\,dxdy &&= \int_0^2\int_0^2 x^2y^2\left(\frac{x+y}{8}\right)dxdy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2\left(\frac{x^4y^2}{4}+\frac{x^3y^3}{3}\Big|_0^2\right)dy &&= \frac{1}{8}\int_0^2\left(4y^2+\frac{8}{3}y^3\right)dy \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{4y^3}{3}+\frac{2y^4}{3}\Big|_0^2\right) &&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

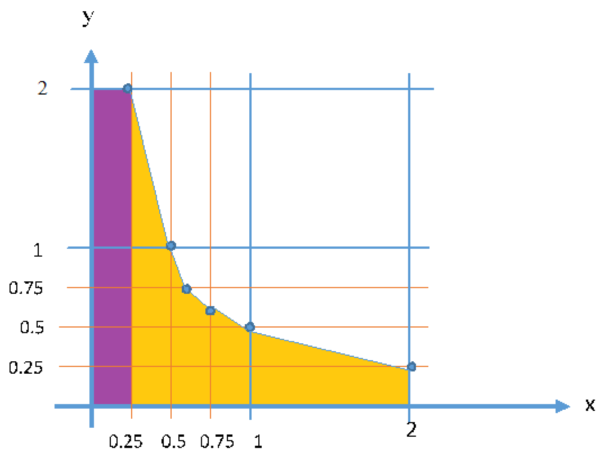
$$
V(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{6}\right)^2 = 0.89
$$

g) $P(XY \leq 0.5)$ olasılığını bulunuz.



1.Yol:

$$
\begin{aligned}
P(XY \leq 0.5) &= \int_{\frac{1}{4}}^{2}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2y}} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + \int_{0}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{4}} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + \int_{0}^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{1}{4}}^{2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{\frac{1}{4}}^{2}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2y}} \left(\tfrac{x+y}{8}\right) dxdy + \int_{0}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{4}} \left(\tfrac{x+y}{8}\right) dxdy + \int_{0}^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{1}{4}}^{2} \left(\tfrac{x+y}{8}\right) dxdy \\
&= \frac{1}{8}\left[\int_{\frac{1}{4}}^{2}\left(\frac{x^2}{2} + xy\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2y}}\right) dy + \int_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{2} + xy\Big|_{0}^{\frac{1}{4}}\right) dy + \int_{0}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2} + xy\Big|_{\frac{1}{4}}^{2}\right) dy\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\int_{\frac{1}{4}}^{2}\left(\frac{1}{8y^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{y}{4}\right) dy + \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{32} + \frac{y}{4}\right) dy + \int_{0}^{\frac{1}{4}}\left(2 + 2y - \frac{1}{32} - \frac{y}{4}\right) dy\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(-\frac{1}{8y} + \frac{15y}{32} - \frac{y^2}{8}\Big|_{\frac{1}{4}}^{2}\right) + \left(\frac{y}{32} + \frac{y^2}{8}\Big|_{0}^{2}\right) + \left(y^2 + \frac{63y}{32} - \frac{y^2}{8}\Big|_{0}^{\frac{1}{4}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(-\frac{1}{16} + \frac{30}{32} - \frac{4}{8} + \frac{1}{2} - \frac{15}{128} + \frac{1}{128}\right) + \left(\frac{2}{32} + \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{63}{128} - \frac{1}{128}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{-8 + 120 - 15 + 1}{128}\right) + \left(\frac{18}{32}\right) + \left(\frac{62 + 8}{128}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{98 + 72 + 70}{128}\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{240}{128}\right] = \frac{30}{128} = \frac{15}{64}
\end{aligned}
$$



2.Yol:

$$
\begin{aligned}
P(XY \le 0.5) &= \int_0^{0.25}\int_0^2 f_{X,Y}(x,y)\,dydx + \int_{0.25}^2\int_0^{\frac{1}{2x}} f_{X,Y}(x,y)\,dydx \\
&= \int_0^{0.25}\int_0^2 \left(\tfrac{x+y}{8}\right) dydx + \int_{0.25}^2\int_0^{\frac{1}{2x}} \left(\tfrac{x+y}{8}\right) dydx \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{0.25}\left(xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2\right)dx + \frac{1}{8}\int_{0.25}^2\left(xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2x}}\right)dx \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{0.25}(2x+2)\,dx + \frac{1}{8}\int_{0.25}^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8x^2}\right)dx \\
&= \frac{2}{8}\left(\frac{x^2}{2} + x\Big|_0^{0.25}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8x}\Big|_{0.25}^2\right) \\
&= \frac{2}{8}\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{8}\times\frac{9}{32} + \frac{1}{8}\times\frac{21}{16} \\
&= \frac{15}{64}
\end{aligned}
$$

7. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \frac{x^2y^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \\
&= 0, \qquad x \le 0, y \le 0 \\
&= 1, \qquad x \ge 2, y \ge 1
\end{aligned}
$$

a) Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunuz.

$$
f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x^2y^2}{4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{2}\right) = xy
$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy & , \quad 0 \le x \le 2, \ \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{cases}$$

b) Marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x,1) \begin{aligned} &= \frac{x^2}{4} \quad , \quad 0 \le x \le 2 \\ &= 0 \quad , \quad x < 0 \\ &= 1 \quad , \quad x \ge 2 \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(2,y) \begin{aligned} &= y^2 \quad , \quad 0 \le y \le 1 \\ &= 0 \quad , \quad y < 0 \\ &= 1 \quad , \quad y \ge 1 \end{aligned}$$

c) X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri midir?

$$F_X(x)F_Y(y) = \left(\frac{x^2}{4}\right)y^2 = \frac{x^2y^2}{4} = F_{X,Y}(x,y)$$

Eşitlik sağlandığı için X ve Y birbirinden bağımsız raslantı değişkenlerdir.

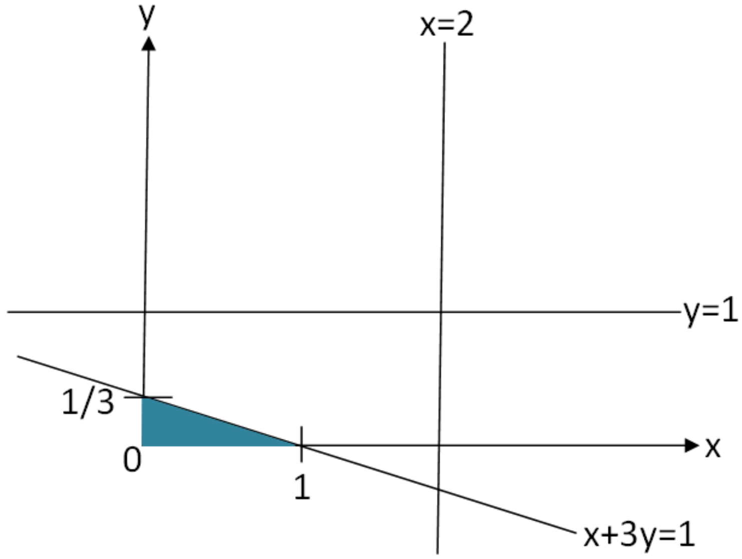
d) Cov(X, Y) kovaryansını bulunuz.

$$Cov(X,Y) = E\Bigg(\underbrace{XY}_{bağımsız}\Bigg) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

e) ρ(X,Y) korelasyon katsayısını bulunuz.

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0$$

f) $P\left(\frac{X+3Y}{2} \leq 0.5\right)$ olasılığını bulunuz.

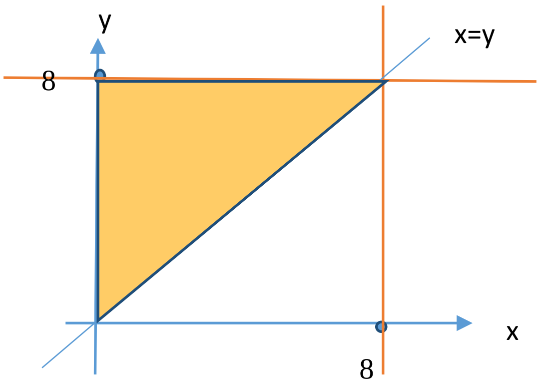


$$P\left(\frac{X+3Y}{2} \leq 0.5\right) = P(X+3Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{\frac{(1-x)}{3}} xydydx = \int_0^{1/3} \int_0^{1-3y} xydxdy$$

$$\begin{aligned}
P(X+3Y \leq 1) &= \int_0^{1/3} \int_0^{1-3y} xydxdy &&= \int_0^{1/3} \left(\frac{x^2 y}{2} \Big|_0^{1-3y} \right) dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(1-3y)^2 y}{2} dy &&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} (y - 6y^2 + 9y^3)\, dy \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{6y^3}{3} + \frac{9y^4}{4} \Big|_0^{\frac{1}{3}} \right) &&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{18} - \frac{2}{27} + \frac{1}{36} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{6-8+3}{108} \right) &&= \frac{1}{216}
\end{aligned}$$

8. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= kxy \quad 0 < x < y < 8 \\
&= 0, \quad ö.d.
\end{aligned}$$



a) k sabitini bulunuz.

$$\int_0^8 \int_x^8 kxydydx = 1 \quad ya\ da \quad \int_0^8 \int_0^y kxydxdy = 1 \ \ olmalıdır.$$

$$\int_0^8 \int_0^y kxydxdy = k \int_0^8 \left(\frac{x^2 y}{2} \Big|_0^y \right) dy = k \int_0^8 \frac{y^3}{2} dy = \frac{k}{2} \left(\frac{y^4}{4} \Big|_0^8 \right) = k8^3$$

$$\int_0^8 \int_0^y kxydxdy = 1 \implies k8^3 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{512}$$

b) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

$$f_X(x) = \int_x^8 \frac{xy}{512} dy = \frac{xy^2}{1024}\Big|_x^8 = \frac{64x - x^3}{1024} \quad , \quad 0 < x < 8$$
$$= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için$$

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{xy}{512} dx = \frac{x^2 y}{1024}\Big|_0^y = \frac{y^3}{1024} \quad , \quad 0 < y < 8$$
$$= 0 \quad , \quad diğer\ y\ değerleri\ için$$

9. X ve Y kesikli raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= \frac{2}{7} \quad x = 1,2\ ve\ y = 1 \\ &= \frac{1}{7} \quad x = 3\ ve\ y = 2,3,4 \\ &= 0, \quad ö.d. \end{aligned}$$

a) Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

y \ x	1	2	3	p(y)
1	2/7	2/7	0	4/7
2	0	0	1/7	1/7
3	0	0	1/7	1/7
4	0	0	1/7	1/7
p(x)	2/7	2/7	3/7	1

$$\begin{aligned} p(x) &= \tfrac{2}{7} \quad , \quad x = 1,2 \\ &= \tfrac{3}{7} \quad , \quad x = 3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(y) &= \tfrac{4}{7} \quad , \quad y = 1 \\ &= \tfrac{1}{7} \quad , \quad x = 2,3,4 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

b) X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri midir?

$\forall(x,y)$ için $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ ise X ve Y birbirinden bağımsız raslantı değişkenlerdir.

$$P(X = 1, Y = 1) = p(1,1) = \frac{2}{7}$$

$$P(X = 1) = p_X(1) = \tfrac{2}{7} \ , \quad P(Y = 1) = p_Y(1) = \tfrac{4}{7}$$

$$p_X(1)p_Y(1) = \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} \neq \frac{2}{7} = p(1,1)$$

eşitlik sağlanmadığı için, X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri <u>değildir.</u>

c) $E(X^2Y)$ beklenen değerini bulunuz.

$$\begin{aligned} E(X^2Y) &= \textstyle\sum_{Rx}\sum_{Ry} x^2yp(x,y) \\ &= 1^2.1\underbrace{p(1,1)}_{2/7} + 2^2.1\underbrace{p(2,1)}_{2/7} + 3^2.2\underbrace{p(3,2)}_{1/7} + 3^2.3\underbrace{p(3,3)}_{1/7} + 3^2.4\underbrace{p(3,4)}_{1/7} \\ &= \tfrac{2}{7} + \tfrac{8}{7} + \tfrac{18}{7} + \tfrac{27}{7} + \tfrac{36}{7} = \tfrac{91}{7} \end{aligned}$$

d) $Cov(3X^2, 5Y + 7)$ ve $Cov(X + Y, X - Y)$ kovaryanslarını hesaplayınız.

$$Cov(3X^2, 5Y + 7) = 15Cov(X^2, Y) = 15[E(X^2Y) - E(X^2)E(Y)]$$

$$E(X^2) = 1^2\underbrace{p_X(1)}_{2/7} + 2^2\underbrace{p_X(2)}_{2/7} + 3^2\underbrace{p_X(3)}_{3/7} = \frac{2+8+27}{7} = \frac{37}{7}$$

$$E(Y) = 1\underbrace{p_Y(1)}_{4/7} + 2\underbrace{p_Y(2)}_{1/7} + 3\underbrace{p_Y(3)}_{1/7} + 4\underbrace{p_Y(4)}_{1/7} = \frac{4+2+3+4}{7} = \frac{13}{7}$$

$$\begin{aligned} Cov(3X^2, 5Y+7) &= 15[E(X^2Y) - E(X^2)E(Y)] \\ &= 15\left(\frac{91}{7} - \frac{37}{7}\times\frac{13}{7}\right) \\ &= \frac{2340}{49} \\ &= 47.755 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X+Y, X-Y) &= Cov(X,X) + Cov(X,-Y) + Cov(Y,X) + Cov(Y,-Y) \\ &= V(X) - Cov(X,Y) + Cov(X,Y) - V(Y) \\ &= V(X) - V(Y) \end{aligned}$$

$$E(X) = 1\underbrace{p_X(1)}_{2/7} + 2\underbrace{p_X(2)}_{2/7} + 3\underbrace{p_X(3)}_{3/7} = \frac{15}{7}$$

$$E(X^2) = 1^2\underbrace{p_X(1)}_{2/7} + 2^2\underbrace{p_X(2)}_{2/7} + 3^2\underbrace{p_X(3)}_{3/7} = \frac{37}{7}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{37}{7} - \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{34}{49}$$

$$E(Y) = 1\underbrace{p_Y(1)}_{4/7} + 2\underbrace{p_Y(2)}_{1/7} + 3\underbrace{p_Y(3)}_{1/7} + 4\underbrace{p_Y(4)}_{1/7} = \frac{13}{7}$$

$$E(Y^2) = 1^2\underbrace{p_Y(1)}_{4/7} + 2^2\underbrace{p_Y(2)}_{1/7} + 3^2\underbrace{p_Y(3)}_{1/7} + 4^2\underbrace{p_Y(4)}_{1/7} = \frac{33}{7}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{33}{7} - \left(\frac{13}{7}\right)^2 = \frac{62}{49}$$

$$Cov(X+Y, X-Y) = V(X) - V(Y) = \frac{34}{49} - \frac{62}{49} = -\frac{28}{49} = -\frac{4}{7} = -0.5714$$

10. A Bir kurumda görev yapan dokuz yöneticinin 4 tanesi evlidir. 3 tanesi hiç evlenmemiştir ve 2 tanesi boşanmıştır. Yöneticilerden 3 tanesi rasgele seçilerek, seçilen yöneticilere maaşlarının üç katı ek maaş (promosyon) verilecektir. Y_1, seçilen evli yöneticilerin sayısı ve Y_2, seçilen hiç evlenmemiş yöneticilerin sayısı olsun.

a) (Y_1,Y_2) iki boyutlu kesikli raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$$p(y_1, y_2) = \frac{\binom{4}{y_1}\binom{3}{y_2}\binom{2}{3-y_1-y_2}}{\binom{9}{3}}, \qquad y_1, y_2 \geq 0, \; y_1 + y_2 \leq 3$$
$$= 0, \qquad \text{ö.} d.$$

b) Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

y_2 \ y_1	0	1	2	3	$p(y_2)$
0	0	4/84	2/7	0	20/84
1	3/84	24/84	18/84	0	45/84
2	6/84	12/84	0	0	18/84
3	1/84	0	0	0	1/84
$p(y_1)$	10/84	40/84	30/84	4/84	1

$$p_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{10}{84}, & y_1 = 0 \\ \frac{40}{84}, & y_1 = 1 \\ \frac{30}{84}, & y_1 = 2 \\ \frac{4}{84}, & y_1 = 3 \\ 0, & \textit{diğer } y_1 \textit{ değerleri için} \end{cases}$$

$$p_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} \frac{20}{84}, & y_2 = 0 \\ \frac{45}{84}, & y_2 = 1 \\ \frac{18}{84}, & y_2 = 2 \\ \frac{1}{84}, & y_2 = 3 \\ 0, & \textit{diğer } y_2 \textit{ değerleri için} \end{cases}$$

c) $P(Y_1 < 2, Y_2 > 1)$, $P(Y_1 > 3, Y_2 \leq 1)$, $P(Y_1 \geq 1, Y_2 \geq 2)$, $P(Y_1 \geq 3, Y_2 \leq 1)$ olasılıklarını bulunuz.

$$P(Y_1 < 2, Y_2 > 1) = p(0,2) + p(1,2) + p(0,3) + p(1,3) = \frac{6}{84} + \frac{12}{84} + \frac{1}{84} + 0 = \frac{19}{84}$$

$$P(Y_1 > 3, Y_2 \leq 1) = 0$$

$$P(Y_1 \geq 1, Y_2 \geq 2) = p(1,2) = \frac{12}{84} = \frac{3}{21}$$

$$P(Y_1 \geq 3, Y_2 \leq 1) = p(3,0) + p(3,1) = \frac{4}{84} + 0 = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

d) Y_1 ve Y_2 bağımsız raslantı değişkenlerini midir?

$\forall(y_1, y_2)$ için $p(y_1, y_2) = p_{Y_1}(y_1)\, p_{Y_2}(y_2)$ ise Y_1 ve Y_2 birbirinden bağımsız raslantı değişkenlerdir.

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 2) = \underbrace{p(1,2)}_{12/84} \neq \underbrace{p_{Y_1}(1)}_{40/84}\, \underbrace{p_{Y_2}(2)}_{18/84}$$

eşitlik sağlanmadığı için, Y_1 ve Y_2 bağımsız raslantı değişkenleri değillerdir.

e) $E(Y_1^5)$ beklenen değerini bulunuz.

$$E(Y_1^5) = \sum_{y_1=0}^{3} y_1^5 p(y_1) = 0^5\left(\frac{10}{84}\right) + 1^5\left(\frac{40}{84}\right) + 2^5\left(\frac{30}{84}\right) + 3^5\left(\frac{4}{84}\right) = \frac{299}{84}$$

f) $E(Y_1 Y_2^2)$ beklenen değeriniz bulunuz.

$$\begin{aligned}
E(Y_1Y_2^2) &= \textstyle\sum_{y_1=0}^{3}\sum_{y_2=0}^{3} y_1 y_2^2 p(x,y) \\
&= 1.0^2p(1,0) + 2.0^2p(2,0) + 3.0^2p(3,0) + 0.1^2p(0,1) + 0.2^2p(0,2) \\
&\quad +0.3^2p(0,3) + 1.1^2p(1,1) + 1.2^2p(1,2) + 2.1^2p(2,1) \\
&= \frac{24}{84} + 4 \times \frac{12}{84} + 2 \times \frac{18}{84} \\
&= \frac{108}{84}
\end{aligned}$$

11. Hilesiz bir para üç defa atılarak bir oyun oynanmaktadır. Oyunun kuralları aşağıda verilmiştir:
    - İlk tura, ilk atışta gelirse 1TL kazanılmaktadır.
    - İlk tura, ikinci atışta gelirse 2 TL kazanılmaktadır.
    - İlk tura, üçüncü atışta gelirse 3 TL kazanılmaktadır.
    - Hiç tura gelmemesi durumunda ise, 1 TL kaybedilmektedir.

    Bu oyuna ilişkin olarak, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri aşağıda gibi tanımlanmaktadır:

    Y_1: 3 atışta gelen toplam tura sayısı
    Y_2: oyundan kazanılan para miktarı

a) (Y_1,Y_2) iki boyutlu kesikli raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Y_1: 3 atışta gelen toplam tura sayısı
Y_2: oyundan kazanılan para miktarı

S={ TTT, TTY, TYT, YTT, TYY, YTY, YYT, YYY}
y_1: 3 2 2 2 1 1 1 0
y_2: 1 1 1 2 1 2 3 -1

y_2 \ y_1	0	1	2	3	$p(y_2)$
-1	1/8	0	0	0	1/8
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
2	0	1/8	1/8	0	2/8
3	0	1/8	0	0	1/8
$p(y_1)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

b) Y_1 ve Y_2 bağımsız raslantı değişkenlerini midir?

$\forall(y_1,y_2)$ için $p(y_1,y_2) = p_{Y_1}(y_1)\, p_{Y_2}(y_2)$ ise Y_1 ve Y_2 birbirinden bağımsız raslantı değişkenlerdir.

$$p_{y_1}(3)p_{y_2}(1) = \left(\frac{3}{8}\right) \times \left(\frac{4}{8}\right) \neq \frac{1}{8} = p(3,1)$$

eşitlik sağlanmadığı için Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri bağımsız <u>değillerdir</u>.

c) $P(Y_1 \leq 2, Y_2 \leq 1)$, $P(Y_1 \geq 3, Y_2 \geq 1)$, $P(Y_1 \geq 2, Y_2 = 1)$, $P(Y_1 = 1, Y_2 \geq 3)$, olasılıklarını bulunuz.

$P(Y_1 \leq 2, Y_2 \leq 1) = p(0,-1) + p(1,1) + p(2,1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$
$P(Y_1 \geq 3, Y_2 \geq 1) = p(3,1) = \frac{1}{8}$
$P(Y_1 \geq 2, Y_2 = 1) = p(2,1) + p(3,1) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

d) $V(Y_1Y_2 + 2534)$ varyansını bulunuz.

$V(Y_1Y_2 + 2534) = V(Y_1Y_2) = E(Y_1^2Y_2^2) - [E(Y_1Y_2)]^2$

$$\begin{aligned}
E(Y_1^2Y_2^2) &= \sum_{Ry_1}\sum_{Ry_2} y_1^2y_2^2\, p(y_1,y_2)\\
&= 0^2(-1)^2p(0,-1)+1^21^2p(1,1)+1^22^2p(1,2)\\
&\quad +1^23^2p(1,3)+2^21^2p(2,1)+2^22^2p(2,2)+3^21^2p(3,1)\\
&= \frac{1}{8}+\frac{4}{8}+\frac{9}{8}+\frac{8}{8}+\frac{16}{8}+\frac{9}{8}\\
&= \frac{47}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y_1Y_2) &= \sum_{Ry_1}\sum_{Ry_2} y_1\, y_2p(y_1,y_2)\\
&= 0.(-1)p(0,-1)+1.1p(1,1)+1.2p(1,2)\\
&\quad +1.3p(1,3)+2.1p(2,1)+2.2p(2,2)+3.1p(3,1)\\
&= \frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{8}\\
&= \frac{17}{8}
\end{aligned}$$

$$V(Y_1Y_2+2534)=V(Y_1Y_2)=E(Y_1^2Y_2^2)-[E(Y_1Y_2)]^2=\frac{47}{8}-\left(\frac{17}{8}\right)^2=\frac{87}{64}$$

e) $Cov(Y_1+100,Y_2)$ kovaryansını bulunuz.

$$Cov(Y_1+100,Y_2)=Cov(Y_1Y_2)=\underbrace{E(Y_1Y_2)}_{17/8}-E(Y_1)E(Y_2)$$

$$E(Y_1)=\sum_{Ry_1} y_1p_{y_1}(y_1)=0.\frac{1}{8}+1.\frac{3}{8}+2.\frac{3}{8}+3.\frac{1}{8}=\frac{12}{8}$$

$$E(Y_2)=\sum_{Ry_2} y_2p_{y_2}(y_2)=(-1).\frac{1}{8}+1.\frac{4}{8}+2.\frac{2}{8}+3.\frac{1}{8}=\frac{10}{8}$$

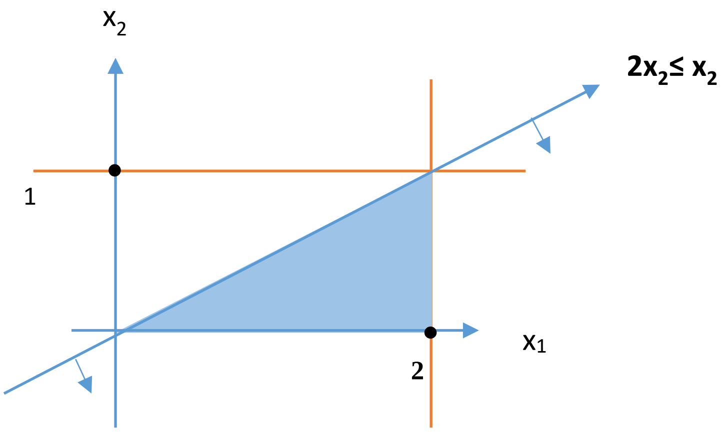
$$Cov(Y_1+100,Y_2)=Cov(Y_1Y_2)=\frac{17}{8}-\left(\frac{12}{8}\times\frac{10}{8}\right)=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$$

f) $Z=8(Y_1+2Y_2+Y_1Y_2)$ ise, E(Z) beklenen değerini hesaplayınız.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= 8E(Y_1+2Y_2+Y_1Y_2)\\
&= 8\left[\underbrace{E(Y_1)}_{12/8}+2\underbrace{E(Y_2)}_{10/8}+\underbrace{E(Y_1Y_2)}_{17/8}\right]\\
&= (12+20+17)\\
&= 49
\end{aligned}$$

12. X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= k, \quad 0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 1\ \ ve\ 2x_2 \le x_1 \\
&= 0, \quad \text{ö}.d.
\end{aligned}
$$



a) k sabitini bulunuz.

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{x_1}{2}} k dx_2\, dx_1 = \int_0^1 \int_{2x_2}^2 k dx_1\, dx_2 = 1 \ \ olmalıdır.$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{x_1}{2}} k dx_2\, dx_1 = k \int_0^2 \left(x_2 \Big|_0^{\frac{x_1}{2}} \right) dx_1 = k \int_0^2 \frac{x_1}{2} dx_1 = k \left(\frac{x_1^2}{4} \Bigg|_0^2 \right) = k(1-0) = k$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{x_1}{2}} k dx_2\, dx_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = 1 \ olarak\ bulunur.$$

b) $P(X_1 \ge 3X_2)$ olasılığını bulunuz.

$$P(X_1 \ge 3X_2) = \int_0^2 \int_0^{\frac{x_1}{3}} 1\, dx_2\, dx_1 = \int_0^2 \left(x_2 \Big|_0^{\frac{x_1}{3}} \right) dx_1 = \int_0^2 \frac{x_1}{3} dx_1 = \left(\frac{x_1^2}{6} \Bigg|_0^2 \right) = \frac{2}{3}$$

c) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = \int_0^{\frac{x_1}{2}} 1 dx_2 = \left(x_2 \Big|_0^{\frac{x_1}{2}} \right) &= \frac{x_1}{2} \quad , \quad 0 \le x_1 \le 2 \\
&= 0 \quad , \quad diğer\ x_1\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

$$f(x_2)=\int_{2x_2}^{2}1dx_1=\left(x_1\Big|_{2x_2}^{2}\right)=2-2x_2 \quad = \quad 2(1-x_2) \quad , \quad 0\le x_2\le 1$$

$$= \quad 0 \quad , \quad diğer\ x_2\ değerleri\ için$$

d) X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenleri bağımsız mıdır?

$$f(x_1)f(x_2)=\left(\frac{x_1}{2}\right)\times\left(2(1-x_2)\right)\neq 1=f(x_1,x_2)$$

eşitliği sağlanmadığı için X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri bağımsız <u>değillerdir</u>.

e) $\rho(X_1,X_2)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.

$$\rho(X_1,X_2)=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}}=\frac{E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}}$$

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \int_0^2\int_0^{\frac{x_1}{2}}x_1x_2f(x_1,x_2)dx_2\,dx_1 &&= \int_0^2\int_0^{\frac{x_1}{2}}x_1x_2dx_2\,dx_1\\
&= \int_0^2 x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\Big|_0^{\frac{x_1}{2}}\right)dx_1 &&= \int_0^2 x_1\frac{x_1^2}{8}dx_1\\
&= \frac{x_1^4}{32}\Big|_0^2 &&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$E(X_1)=\int_0^2 x_1f(x_1)\,dx_1=\int_0^2 x_1\left(\frac{x_1}{2}\right)dx_1=\left(\frac{x_1^3}{6}\Big|_0^2\right)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$E(X_2)=\int_0^1 x_2f(x_2)\,dx_2=\int_0^1 x_2(2-2x_2)dx_2=2\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_2^3}{3}\Big|_0^1\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$Cov(X_1,X_2)=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

$$E(X_1^2)=\int_0^2 x_1^2f(x_1)\,dx_1=\int_0^2 x_1^2\left(\frac{x_1}{2}\right)dx_1=\left(\frac{x_1^4}{8}\Big|_0^2\right)=\frac{16}{8}=2$$

$$E(X_2^2)=\int_0^1 x_2^2f(x_2)\,dx_2=\int_0^1 x_2^2(2-2x_2)dx_2=2\left(\frac{x_2^3}{3}-\frac{x_2^4}{4}\Big|_0^1\right)=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$$

$$V(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$V(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{18}}} = \frac{1}{2}$$