— 10. BÖLÜM: SERİLER —

10.1: SERİ KAVRAMI VE TANIMI:

Bir $(a_k)_1$ dizisi verilsin. Bu durumda;

$A_1 = a_1$, $A_2 = a_1 + a_2 = A_1 + a_2$, $A_3 = a_1 + a_2 + a_3 = A_2 + a_3$,

$A_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = A_3 + a_4$, - - -

$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = A_{n-1} + a_n$, ---

biçiminde tanımlanan $(A_n)_1$ dizisini oluşturalım. Bu diziye $(a_k)_1$ dizisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

10.1.1. Örnek: (a) $(2+3k)_1$, b) $(5/2^k)_0$ dizilerinin kısmi toplamlar dizilerinin ilk 5-terimini bulunuz.

a) $a_k = 2+3k$, $k \in \mathbb{N}^+$ ise

$A_1 = 2+3.1 = 5$, $A_2 = 5 + a_2 = 5 + (2+3.2) = 13$,

$A_3 = 13 + a_3 = 13 + (2+3.3) = 24$, $A_4 = 24 + a_4 = 24 + (2+3.4) = 38$.

$A_5 = 38 + a_5 = 38 + (2+3.5) = 55$ dir.

b) $b_k = \frac{5}{2^k}$ ise $(\forall k \in \mathbb{N})$ için $B_0 = \frac{5}{2^0} = 5$, $B_1 = 5 + b_1 = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

$B_2 = \frac{15}{2} + b_2 = \frac{15}{2} + \frac{5}{4} = \frac{35}{4}$, $B_3 = \frac{35}{4} + b_3 = \frac{35}{4} + \frac{5}{8} = \frac{75}{8}$

$B_4 = \frac{75}{8} + b_4 = \frac{75}{8} + \frac{5}{16} = \frac{155}{16}$, . . . bulunur.

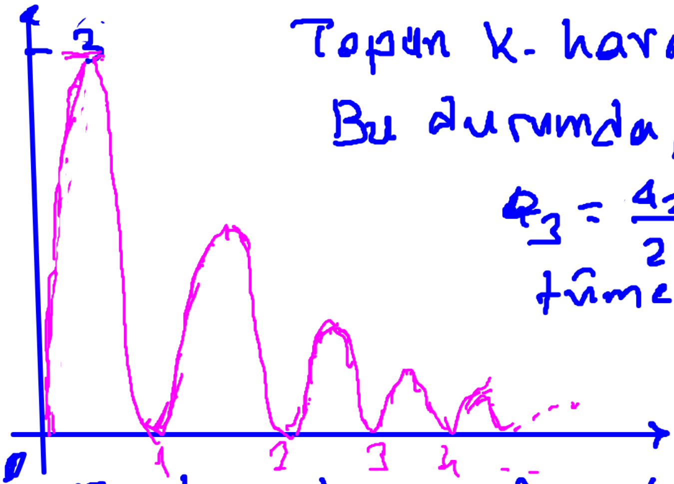
Tanım: (a_k) bir dizi olmak üzere

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots$

ifadesine bir seri, buradaki a_k ya da serinin genel terimi (veya k. terimi) denir.

$A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ olsun. (A_k)'ya serinin k. kısmi toplamı dizisi denir.

2. örnek: Fırlatılarak ilk kez 3 m. yüksekliğe çıkan bir top her bir yere değdikten sonra bir önce çıktığının yarısına kadar yükselen bu topun durmağa ana kadar aldığı toplam yolu bulunuz.



Topun k. havalanışta aldığı yol a_k olsun.

Bu durumda, $a_1 = 6$ m., $a_2 = \frac{a_1}{2} = 3$,

$a_3 = \frac{a_2}{2} = 3/2$, $a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{3}{4}$, ...

tümevarımla;

$$a_k = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

olduğu görülebilir.

Başlangıçtan n. havalanışın sonuna kadar alınan toplam yol olan A_n yi

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 6\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = 6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-1/2}$$

$= 12\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ olur. $n \to \infty$ iken topun duracağı varsayımı ile, alınan toplam yol:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{=A_n}{=} \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} 12 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$= 12 - 12 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 12 - 12 \cdot 0 = 12$ m. bulunur.

10.1.1. Tanım: Verilen bir $(a_k)_1$ dizisi için, kısmi toplamlardan oluşan $(A_n)_1$ dizisini oluşturalım. Eğer $(A_n)_1$ dizisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine yakınsaktır denir ve bu durum $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ile gösterilir.

Tersine, (A_n) dizisi ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine ıraksaktır denir.

1.3. Örnek: $d \neq 0$ olmak üzere $a_k = a + (k-1)d$ aritmetik dizisinin ürettiği $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a + (k-1) \cdot d)$ aritmetik serisinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını inceleyiniz.

Çözüm: A_n kısmi toplamı;

$$A_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1).d),$$

$$A_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + (a+d) + a \xRightarrow{\text{toplanırsa}}$$

$$2A_n = n.[2a+(n-1)d] \Rightarrow A_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

ve $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2}.\underbrace{[2a+(n-1)d]}_{\infty} = +\infty$ old. dan

(A_n) ve dolayısıyla $\sum\limits_{k=1} a_k$ aritmetik serisi ıraksaktır.

1.4. Örnek: $r \neq 0$ olmak üzere $a_k = a.r^{k-1}$ geometrik dizisi ile üretilen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a.r^k$ geometrik serisinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $a=0$ ise bu seri yakınsaktır.

$a \neq 0$ olsun ve $r=1$ ise bu seri ıraksak olur.

Onun için $a \neq 0$ ve $r \neq 1$ kabul edelim: Bu durumda;

$$A_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \xrightarrow{r \text{ ile çarpalım}}$$

$$r.A_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \xrightarrow{\text{Çıkaralım.}}$$

$$(1-r)A_n = a - ar^n = a(1-r^n) \Rightarrow A_n = a.\frac{1-r^n}{1-r} \text{ olur.}$$

Buradan, $|r|<1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ olacağı için

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a.\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$ bulunur, ki bu da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1}$ geometrik serisi $|r|<1$ için yakınsak olur ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} = \frac{a}{1-r} \text{ demektir.}$$

$|r|>1$, ya da $r=-1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ıraksak veya olmadığı için de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1}$ geo. serisi ıraksak olur.

O halde
$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} \text{ g. serisi } \begin{cases} \text{yakınsak}, = \frac{a}{1-r}, & |r|<1 \\ \text{ıraksaktır}, & |r| \geq 1 \end{cases}}$$
olur.

Geometrik seri testi.

1.5. Örnek: a) $\sum_{k=1}^{\infty} 5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1} = ?$, b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{e^k} = ?$

c) $A = 1{,}25464646\ldots\ldots46\ldots = ? = 1.25\overline{46}$

Çözüm: a) $\sum_{k=1}^{\infty} 5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$ bir geom. seri ve $r = 3/7 < 1$ olduğundan yakınsaktır, $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1} = \frac{5}{1-3/7} = \frac{35}{4}$ dür.

b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{e^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)\cdot\left(-\frac{1}{e}\right)^k = (-1)\cdot\left(-\frac{1}{e}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ g. seri

ve $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ geom. seri olup, $|r| = \left|-\frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e} < 1$ olduğundan yakınsak ve yakınsadığı değer

$= \frac{1}{1-(-1/e)} = \frac{e}{e+1}$ olur. Böylece;

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{e^k} = (-1)\cdot\left(-\frac{1}{e}\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{e}\right)^{k-1} = \frac{1}{e}\cdot\frac{e}{e+1} = \frac{1}{e+1}$ olur.

c) $A = 1{,}25 + 0.0046 + 0.000046 + 0.00000046 + \ldots\ldots$

$$= 1.25 + 0.0046\left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \ldots + \frac{1}{10^{2k}} + \ldots\right]$$

$$= 1.25 + 0.0046\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{100}\right)^k + \ldots\right]$$

$$= \frac{125}{100} + \frac{46}{10.000}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{k-1} = \frac{125}{100} + \frac{46}{10.000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}$$

$$= \frac{125}{100} + \frac{46}{10.000}\cdot\frac{100}{99} = \frac{125}{100} + \frac{46}{9900} = \frac{12421}{9900}$$ bulunur. $1.25\overline{46}$

1.6. Ör.: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{k.(k+1)}}_{=a_k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k.(k+1)} = ?$

$a_k = \frac{1}{k.(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \iff 1 = A(k+1) + Bk \Rightarrow$

$A = 1,\quad B = -1$ bulunur.

Böylece; $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cancel{\ldots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$= 1 - 1/n+1 = \frac{n}{n+1}$ ve $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ old.. dan

(A_n) ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k.(k+1)}\right)$ serisi yakınsak olur ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\lim_{n\to\infty}A_n=1 \text{ bulunur.}$$

1.1.1. Teorem: (Genel Terim Testi)

a) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ serisi yakınsak $\Longrightarrow \lim_{k\to\infty}a_k=0$ dır.

b) $\lim_{k\to\infty}a_k\neq 0$ ya da $\lim_{k\to\infty}a_k$ yok $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ıraksak olur.

Kanıt: a) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ serisi yakınsak olsun. $\Rightarrow A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

ile tanımlanan (A_n) dizisi yakınsak olur $\Rightarrow A=\lim_{n\to\infty}A_n$ olsun. $A_n=A_{n-1}+a_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}A_{n-1}=A$ olur ve böylece $a_n=A_n-A_{n-1}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(A_n-A_{n-1})=\lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}A_{n-1}=A-A=0$$

bulunur.

Böylece $\lim_{k\to\infty}a_k=0$ bulunur.

b) "$p\Longrightarrow q \equiv q'\Longrightarrow p'$" dir.

1.7. Örnek: a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k$, b) $\sum_{0}^{\infty}\cos k$ serileri yak mı?

Çözüm: a) $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k=\frac{1}{e}\neq 0$ olduğundan

1.1. Teor (b) dan seri ıraksak olur.

b) $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}(\cos k)$ yok $\overset{\text{Teor. 1.1.(b)}}{\Rightarrow}$ seri ıraksak olur.

Uyarı: Bu önermenin tersi doğru olmayabilir. Yani $\lim_{k\to\infty}a_k=0$ olup da yakınsak veya ıraksak seriler ola bilir.

Örneğin $\longrightarrow$ 1.8. Örnek: $d\neq 0$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a+(k-1)d}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}+\cdots+\frac{1}{a+(k-1)d}+\cdots$$

biçimindeki seriye Harmonik seri denir, ve özel olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$ Harmonik serisi $(a=0)$

ıraksaktır, gösteriniz. ($\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ olduğuna dikkat edelim)

İddianın tersine $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi yakınsak olsun. $\Longrightarrow A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

olmak üzere (A_n) dizisi de yakınsak olur ve $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ diyelim. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{A_n}$$

$= \frac{1}{2} + A_n$ olur, ve $\lim_{n\to\infty} A_{2n} = A$ olacağı için

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + A_n\right) = \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} A_n \Rightarrow A \geq \tfrac{1}{2} + A$$

$\Rightarrow 0 \geq 1/2$ çelişkisi elde edilir. O halde

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Harmonik serisi ıraksak olmak zorundadır.

(II. yol: $n = 2, 3, 4, \ldots$ için $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} > \frac{2}{9}$, ... olacağından

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + 1/n$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$> 1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) + \cdots +$$

$$= 1 + \frac{3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + 1/n\right) = 1 + A_n$$

çelişkisi bulunur.)

Not: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise bir değeri var ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}$ olur, ancak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksak ise böyle bir değeri olamaz.

1.2. Önerme: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak serileri ile $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Bu durumda; $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda . a_k$ serileri de yakınsak olur ve

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \mp b_k) = A \mp B$, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda . a_k = \lambda . A$ olur.

Kanıt: (i) $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ diyelim. $(A_n)+(B_n) = (A_n + B_n)$ old. dan $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = S_n$ diyelim. Bu durumda;

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = A_n + B_n \text{ dir ve böylece;}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(A_n) + \lim_{n\to\infty} B_n = A+B \text{ bulunur.}$$

(ii) de benzer şekilde elde edilir.

1.9 Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7}{4k^2-1} - \frac{1}{5^k}\right) = ?$

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ için $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1} \Longleftrightarrow A = 1/2, B = -1/2$ iken

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{2k-1} - \frac{1/2}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{5}} - \cancel{\tfrac{1}{7}}\right) + \dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{2n-1}} - \tfrac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{n}{2n+1} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = 1/2$$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ geometrik serisi ve $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1-1/5} = \frac{5}{4}$ dür

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} \text{ old. dan } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = 5/4 - 1 = 1/4 \text{ olur.}$$

Yani her iki seri de yakınsaktır $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k^2-1} - \frac{1}{5^k}\right)$ serisi de yakınsak olur ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7}{4k^2-1} - \frac{1}{5^k}\right) = 7.1/2 - 1/4 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \text{ olur}$$

10.2. İNTEGRAL TESTİ.-

Bu test için ($\forall n$, $a_n \geq 0$, pozitif terimli) olmalıdır.

Not ① $\forall n$ için $a_n \geq 0$ olmak üzere $\sum_1^\infty a_n$ serisinin n. kısmi toplamlar dizisi (A_n) $\left(\forall n,\ A_n = \sum_1^n a_k\right)$ azalmayandır. Gerçekten

$$A_{n+1} = \sum_1^{n+1} a_k = \sum_1^n a_k + a_{n+1} = A_n + a_{n+1} \underset{a_n \geq 0}{\geq} A_n \text{ bulunur.}$$

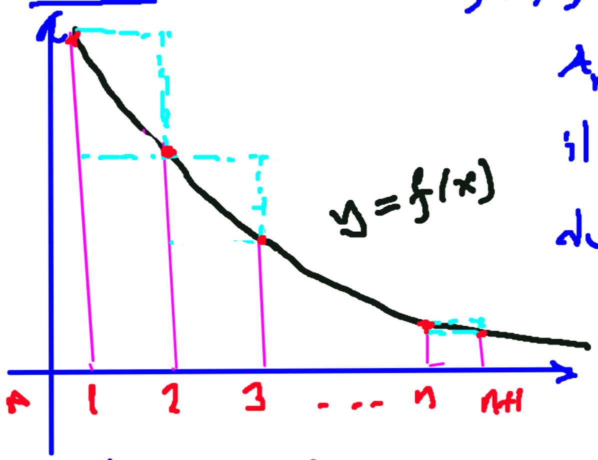
② $\forall n$ için $a_n \geq 0$ olan bir $\sum_1^\infty a_n$ serisi yakınsaktır $\Longleftrightarrow$ (A_n) kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlıdır.

10.2.1. Önerme [İntegral Testi].

Her k için $a_k \geq 0$ olmak üzere $\sum_1^\infty a_k$ serisi verilsin ve her $k \in \mathbb{N}^+$ için $f(k) = a_k$ o.ş. bir $f: [1,\infty] \to [0,\infty]$ sürekli ve artmayan fonksiyonu var olsun. Bu durumda;

$\sum_1^\infty a_k$ yakınsak (ıraksak) dır $\Longleftrightarrow$ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ yakınsak (ıraksak) dır.

Kanıt:



$f(x) \geq 0$ ve $a_k \geq 0$ verildiği için

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \int_1^n f(x)\,dx$$

ile tanımlanan (A_n), (B_n) dizileri azalmayan dırlar. Her bir $k \in \mathbb{N}^+$ için $x \in [k, k+1] \Rightarrow$

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) = a_k \quad (f \text{ artmayan})$$

$$\Rightarrow a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k \quad (\text{integral alınır})$$

olur. Böylece $n \geq 2$ için

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Rightarrow A_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq A_{n-1} \leq A_n$$

$A_n \leq B_n + a_1$ $\quad$ $B_n \leq A_n$

$\Rightarrow B_n \leq A_n \leq B_n + a_1$ bulunur.

$(\Rightarrow)$ $\sum_1^\infty a_k$ yakınsak $\Rightarrow (A_n)$ yakınsak $\Rightarrow (B_n)$ yakınsaktır $\Rightarrow$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,dx \text{ yak. olur.}$$

$(\Leftarrow)$ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ yakınsak $\Rightarrow (B_n) = \left(\int_1^n f(x)\,dx\right)$ yakınsak $\Rightarrow$ $(B_n + a_1)$ yakınsaktır $\Rightarrow (A_n)$ yakınsak $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ yakınsak olur.

10.2.2. Önerme (P-Testi). $\sum_1^\infty \frac{1}{k^p}$ serisi $p>1$ için yakınsak ve $p\le 1$ için ıraksaktır.

<u>Kanıt</u>: $p<0$ ise $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p}=\infty$ olduğundan, genel terim testi gereği seri ıraksak olur. Şimdi $p>0$ olduğunu varsayalım. $f(x)=\frac{1}{x^p}$ fonks. $[1,\infty)$ aralığında sürekli, artmayan ($f'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}<0$ dır) ve $f(x)\ge 0$ dır. O halde 10.2.1. önermeyi kullanmak için $\int_1^\infty f(x)dx$ integraline bakalım. $\Longrightarrow$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \text{yakınsak}, & p>1 \\ \text{ıraksak}, & 0<p\le 1\end{cases}$$

Has olmayan int. için p-testi.

$\overset{\text{int. test}}{\Longrightarrow} \sum_1^\infty \frac{1}{k^p}$ serisi $\begin{cases}\text{yakıns.}, & p>1 \\ \text{ıraksak}, & p\le 1\end{cases}$ elde edilir.

<u>10.2.1. Örnek</u>: $\sum_1^\infty \frac{1}{k\cdot\sqrt{k}} = \sum_1^\infty \frac{1}{k^{3/2}}$ ve $p=3/2>1 \overset{\text{p-test}}{\Longrightarrow}$ yakınsak

2) $\sum_0^\infty \frac{k^3}{e^k}$ yak mı?

$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{x^3}{e^x}\ge 0$ dır, süreklidir ve artmayandır ($f'(x)=\frac{3x^2e^x-x^3e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2}{e^x}(3-x)\le 0$ $\Longleftrightarrow 3\le x$ için). Yani f fonks $[3,\infty)$ da artmayandır ve $\int_3^\infty \frac{x^3}{e^x}dx \Longrightarrow$ (Has olmayan integrallerde yakınsak olduğu gösterildi)

$\overset{\text{int. Testi}}{\Longrightarrow} \sum_1^\infty \frac{k^3}{e^k}$ serisi de yakınsak olur.

3) $\sum_2^\infty \frac{1}{k\cdot(\ln k)^p}$ serisi $p>1$ için yakınsak ve $0\le p<1$ için ıraksaktır, gösteriniz.

<u>Çözüm</u>: $f:[2,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{1}{x\cdot(\ln x)^p}\ge 0$, sürekli ve artmayandır. Üstelik $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^p}$ $\left(\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x}\end{array}\right)$

($f'(x)\le 0$??)

$= \lim_{R\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln R}\frac{dt}{t^p} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^p} = \begin{cases}\text{yak}, & p>1\\ \text{ırak}, & p\le 1\end{cases}$ olduğu görülür.

<u>Not</u>: $\forall n$ için $B_n\le A_n\le B_{n+1} \overset{\forall n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} \int_1^n f(x)dx \le A_n \le \int_1^n f(x)dx + a_1$ olduğundan $n\to\infty$ için $\int_1^\infty f(x)dx \le \sum_1^\infty a_k \le \int_1^\infty f(x)dx + a_1$ bulunur.

Benzer düşünce ile

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx + a_{n+1}$$ ve böylece

$$0 \le \sum_{1}^{\infty} a_k - \left(A_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx\right) \le a_{n+1}$$ elde edilir. Bu eşitlik bize

$\sum_{1}^{\infty} a_k$ toplamı yerine $A_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx$ alındığında yapılacak hatanın a_{n+1} sayısını aşamayacağını gösterir.

10.2.4. Örnek: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ serisinin yakınsak olduğu biliniyor. Şimdi bu toplam yerine

$$A_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} + \lim_{R\to\infty} \int_{11}^{R} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\cong 1.53977 + \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{11}^{R} \right) = 1.53977 + \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{11} \right)$$

$$= 1.53977 + 0 + \frac{1}{11} \cong 1.63068$$ sayısının alınmasıyla yapılan hata $0 \le \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1.63068 \le \frac{1}{11^2} \le 0.0082645$ dir.

2.1. Önermede (A_n) ve (B_n) dizilerinin birlikte yakınsak, birlikte ıraksak olduğu elde edilmişti. Iraksaklık durumunda bile aşağıdaki özellik geçerlidir:

10.2.3. Önerme: $\lim_{n\to\infty} (A_n - B_n)$ vardır.

Kanıt: $C_n = A_n - B_n$ denilsin. Her n için

$A_{n+1} - A_n = a_{n+1}$

$$C_n - C_{n+1} = A_n - B_n - (A_{n+1} - B_{n+1}) = -a_{n+1} - \int_1^n f(x)\,dx + \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$$= -a_{n+1} + \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq 0$$ olduğu için (C_n) artmayan bir dizidir.

2.1 Önerme bilgiler $\Longrightarrow$ $C_n = A_n - B_n \geq 0$ elde edildiğine göre, (artmayan ve alttan sınırlı $\Rightarrow$ Tamlık Aksiyomu) (C_n) dizisi yakınsak olur.

2.5. Örnek: $C_n = \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ olan (C_n) dizisi yakınsaktır (?)

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k} \Rightarrow A_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$ ve $f(x) = 1/x \geq 0$ denirse $B_n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^n = \ln n$ dır. O halde $C_n = A_n - B_n = \left(\sum_{1}^{n} 1/k\right) - \ln n$ ile tanımlanan (C_n) dizisi yakınsak olur.

Bu dizinin yakınsadığı $\boxed{\gamma \cong 0.5772156 \text{ sayısına Euler sabiti}}$ denir.