FEN FAKÜLTESİ
MAT 122 MATEMATİK II

Ders Sorumluları: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk

Kaynak: Thomas Calculus

2.2 TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

Sinüs Ve Kosinüsün Kuvvetlerinin Çarpımı

m ve n negatif **olmayan** tamsayılar olmak üzere

$$\int \sin^m x \ \cos^n x \ dx$$

biçimindeki integrallerle başlıyoruz. m ve n'nin tek veya çift olmasına göre uygun değişken dönüşümlerini üç duruma ayırabiliriz:

Durum I Eğer m tek ise m'yi $2k+1$ olarak yazar ve aşağıdaki ifadeyi elde etmek için $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ özdeşliğini kullanırız.

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x$$

Durum II Eğer m çift n tek ise, n'yi $2k+1$ olarak yazar ve aşağıdaki ifadeyi elde etmek için $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ özdeşliğini kullanırız.

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x$$

Durum III m ve n'nin her ikisi de çift ise

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \ , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

dönüşümlerini kullanırız.

örnek 1. $\int \sin^3x \cos^2x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$I = \int \sin^2x \cdot \cos^2x \, \sin x dx = \int (1-u^2)\, u^2 \,(-du)$$

$u = \cos x$, $\quad du = -\sin x \, dx$

$$= \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

örnek 2. $\int \cos^5 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$I = \int \cos^4 x \, \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x \, dx$$

$u = \sin x$, $\quad du = \cos x \, dx$

$$= \int (1-u^2)^2 \, du$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C$$

$$I = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

örnek 3. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ integralini hesaplayınız

Çözüm:

$$I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1-\cos 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x \right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x - \int \left(\cos^2 2x + \cos^3 2x \right) dx \right)$$

$\cos^2 2x$ terimi icin

$$\int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \left(1 + \cos 4x \right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right)$$

$\cos^3 2x$ terimi icin

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 2x \right) \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - u^2 \right) du$$

$u = \sin 2x$

$du = 2 \cos 2x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \sin 2x \right)$$

$$I = \frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin^3 2x \right) + C$$

Kare köklerden kurtulmak :

örnek4 : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x} \, dx$ integralini hesaplayınız

Çözüm.

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \text{veya} \quad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$$

$\theta = 2x$ yazarsak $\quad 1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$

$$I=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos 4x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2\cos^2 2x}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2}\,\sqrt{\cos^2 2x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}|\cos 2x|\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx=\sqrt{2}\,\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tanx ve Secx Kuvvetleri

örnek 5. $\int \tan^4 x\,dx$ integralini hesaplayınız

$$\int \tan^4 x\,dx=\int \tan^2 x\,\tan^2 x\,dx=\int \tan^2 x\,(\sec^2 x-1)\,dx$$

$$=\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx-\int \tan^2 x\,dx$$

$$=\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx-\int (\sec^2 x-1)\,dx$$

$$=\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx-\int \sec^2 x\,dx+\int dx$$

$u=\tan x$, $du=\sec^2 x\,dx$

$$=\int u^2\,du-\int du+x+C$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$$

örnek 6 $\int \sec^3 x\, dx$ integralini hesaplayınız

Çözüm:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$u = \sec x$, $\sec^2 x\, dx = dv$

$du = \sec x \tan x\, dx$, $\tan x = v$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \tan x (\sec x \tan x)\, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$$

$$I = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C$$

NOT:

* $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
* $(\sec x)' = \sec x \tan x$
* $(\tan x)' = \sec^2 x$

Sinüs ve Cosinüslerin Çarpımları

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \cos mx \cos nx \, dx$$

biçimindeki integraller için aşağıdaki formülleri kullanacağız

* $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$
* $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right)$
* $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$

Örnek 7. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx = ?$

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(-2x) + \sin 8x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin 8x - \sin 2x\right) dx$$

$$= -\frac{\cos 8x}{8.2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

2.3. Trigonometrik Değişken Dönüşümleri

En yaygın dönüşümler $x = a\tan\theta$, $x = a\sin\theta$ ve $x = a\sec\theta$ dönüşümleridir. Bu dönüşümleri $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$'yi içeren integralleri doğrudan hesaplanabilir integrallere dönüştürmek için kullanacağız.

$x = a\tan\theta$ ile :

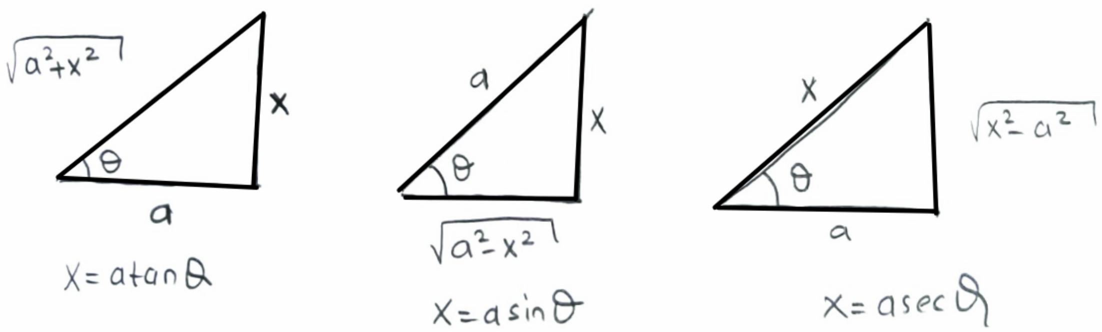
$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta$$

$x = a\sin\theta$ ile :

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$$

$x = a\sec\theta$ ile :

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta$$



Bir integrasyonda kullandığımız her bir dönüşümün işlem sonucunda tekrar orijinal değişkene dönebilmek için tersinin alınabilir olmasını isteriz.

Eğer $x = a\tan\theta$ ise integrali aldıktan sonra $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$x = a\sin\theta$ " " " " $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$x = a\sec\theta$ " " " " $\theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$

yerine koymak isteriz.

$x = a\tan\theta$ denklemi $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ile $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$x = a\sin\theta$ denklemi $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ile $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

gerektirir.

$$x = a\sec\theta \text{ denklemi } \begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, & \frac{x}{a} \geq 1 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, & \frac{x}{a} \leq -1 \end{cases} \text{ ise}$$

$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$'yı gerektirir.

$x = a\sec\theta$ dönüşümüyle hesaplamaları sadeleştirmek için integraldeki kullanımını $\frac{x}{a} \geq 1$ ile kısıtlayacağız. Bu θ'nın $[0, \frac{\pi}{2})$ aralığına kısıtlanmasını ve $\tan\theta \geq 0$ olmasını sağlar. Bu durumda $a > 0$ olmak kaydıyla $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta| = a\tan\theta$ olur.

Örnek 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$x = 2\tan\theta, \quad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$$

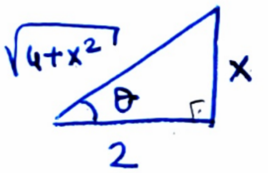
$$4+x^2 = 4+4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

O halde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta}{|\sec\theta|}\, d\theta$$

$(\sec\theta > 0)$,

$$\overset{\uparrow}{=} \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$



$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

Örnek 2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$x = 3\sin\theta, \quad dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

$$9-x^2 = 9-9\sin^2\theta = 9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta$$

o halde

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{9\sin^2\theta \; 3\cos\theta\, d\theta}{|3\cos\theta|} \underset{\cos\theta > 0}{=} 9\int \sin^2\theta\, d\theta$$

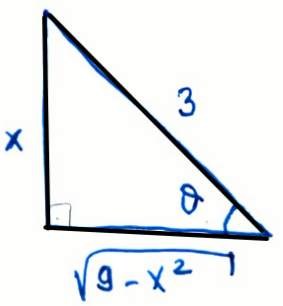
$$= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \sin\theta\cos\theta\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\left(\sin^{-1}\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$



Örnek 3 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \quad x > \frac{2}{5}$

Çözüm: Kök içini x^2-a^2 formuna dönüştürmek için

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2-\frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \quad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} = \frac{4}{25}\left(\sec^2\theta-1\right)$$

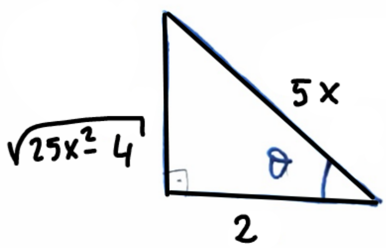
$$= \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

$$\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}\,|\tan\theta| = \tan\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2-\frac{4}{25}}} = \int \frac{(2/5)\cdot\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{5\,\frac{2}{5}\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C.$$



2.3. Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlerle Integrasyonu

Bu bölümde, bir rasyonel fonksiyonu basit kesirlerin toplamı olarak yazıp integralini alacağız.

Örneğin $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx$ integraline bakalım:

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

O zaman

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} \right) dx$$

$$= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

Rasyonel fonksiyonları, daha basit kesirlerin toplamı olarak yeniden yazma yöntemine kısmi kesirler yöntemi denir. Yukarıdaki örnekte

$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$ olacak şekilde A ve B sabitleri vardır. A ve B sabitleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) = x(A+B) - 3A + B$$

$$\Rightarrow \quad A+B=5, \quad -3A+B=-3$$

$$\Rightarrow \quad A=2, \quad B=3$$

Yöntemin Genel tanımı :

Bir $f(x)/g(x)$ rasyonel fonksiyonunu kısmi kesirlerin toplamı olarak yazmak için aşağıdakilere dikkat etmeliyiz.

- $f(x)$'in derecesi $g(x)$'in derecesinden küçük olmalıdır. Yani kesir basit kesir olmalıdır. Değilse, $f(x)$'i $g(x)$'e bölüp kalan terimle çalışmalıyız.
- $g(x)$'in çarpanlarını bilmeliyiz.

Kısmi Kesirler Yöntemi

1. $(x-r)$, $g(x)$'in lineer bir çarpanı olsun. $(x-r)^m$'nin $(x-r)$'nin $g(x)$'i bölen en büyük kuvveti olduğunu varsayalım. O zaman bu çarpanı m tane kısmi kesire ayıralım:

$$\boxed{\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-r)^m}}$$

Bunu $g(x)$'in farklı her lineer çarpanı için tekrarlamalıyız.

2. x^2+px+q, $g(x)$'in indirgenemez bir kuadradik çarpanı olsun. Bu çarpanın $g(x)$'i bölen en büyük kuvvetinin $(x^2+px+q)^n$ olduğunu varsayalım. Bu çarpanı n tane kısmi kesirin toplamı olarak yazalım:

$$\boxed{\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}}$$

Bunu $g(x)$'in reel katsayılı lineer çarpanlarına ayrılmayan her farklı kuadratik çarpanı için tekrarlayalım.

3. Orijinal $f(x) / g(x)$ kesrini bütün bu kısmi kesirlerin toplamına eşitleyelim ve katsayıları bulalım.

Örnek 1. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1).(x+1)(x+3)}\,dx$

Çözüm.

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1).(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

şeklindedir; A, B, C katsayılarını bulalım:

$$x^2+4x+1 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)$$

x^2'nin katsayıları : $A+B+C=1$

x'in katsayıları : $4A+2B=4$

Sabitler toplamı : $3A-3B-C=1$

Bu denklemleri çözersek $A=3/4$, $B=1/2$, $C=-1/4$ olur.

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1).(x+1)(x+3)}\,dx = \int\left(\frac{3}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$$

Örnek 2. $\displaystyle\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx$

Çözüm.

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 6x+7 = A(x+2) + B = Ax + 2A + B$$

$$A=6, \quad 2A+B=7, \quad B=-5$$

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{6}{x+2}\,dx - \int \frac{5}{(x+2)^2}\,dx = 6\int \frac{1}{x+2}\,dx - 5\underbrace{\int (x+2)^{-2}\,dx}$$

$x+2=u$

$dx=du$

$\int u^{-2}\,du = -u^{-1} + C$

$$= 6\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + C$$

Örnek 3. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx$

Çözüm.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-4x^2-x-3 & x^2-2x-3 \\ \hline -\;\; 2x^3-4x^2-6x & 2x \\ \hline 5x-3 & \end{array}$$

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$$

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \left(2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\right)dx$$

$$\frac{5x-3}{\underbrace{x^2-2x-3}_{(x-3).(x+1)}} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1}$$

$5x-3 = A(x+1) + B(x-3)$

$5 = A+B, \quad -3 = A-3B$

$A=3, \quad B=2$

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \left(2x + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}\right)dx$$

$$I = 2\int x\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= x^2 + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

Örnek 4. $\displaystyle\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$

Çözüm.

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1).(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$\Rightarrow$

$$-2x+4 = (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1)$$

$$= (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D)$$

x^3'ün katsayıları : $0 = A + C$

x^2'nin katsayıları : $0 = -2A + B - C + D$

x'in katsayıları : $-2 = A - 2B + C$

Sabitler toplamı : $4 = B - C + D$

Buradan; $A = 2$, $C = -2$, $B = 1$, $D = 1$

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x^2+1| + \arctan x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

örnek 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

Çözüm.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C).x(x^2+1) + (Dx+E).x$$

$$1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

$$\Rightarrow \quad A+B=0, \quad C=0, \quad 2A+B+D=0, \quad C+E=0, \quad A=1$$

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=0, \quad D=-1, \quad E=0$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \underbrace{\int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}}$$

$$x^2+1=u$$

$$2dx=du$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + C$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

$$= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$$