1-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ dizisini inceleyiniz.

<u>Çözüm</u>: Verilen seri bir alterne seridir.

$$a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

• $\forall n \geq 1$ için $\ln(n) \geq 0 \Rightarrow a_n \geq 0$.

• $f(x) := \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ tanımlayalım.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\ln x}{2}\right)}{x} = \frac{\left(1 - \frac{\ln x}{2}\right)}{x\sqrt{x}}$$

$x > 1$ $\quad \ln x > 0$

$x > e$ $\quad \ln x > 1$

$x > e^2$ $\quad \ln x > 2$

$\left(1 - \frac{\ln x}{2}\right) < 0$, $\quad x\sqrt{x} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \quad x > e^2$

> 8

• $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{L'hopital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}} = 0.$$

Alterne seri testinden $\sum_{n=8}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ serisi yakınsaktır.

Ancak ilk 8 terimi bu seriye eklersek yakınsaklığı değişmez.

Öyleyse $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$ yakınsaktır.

2-) Verilen kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

a-) $$\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{x^{n!}}^{a_n} = x + x^1 + x^2 + x^6 + x^{24} + \dots$$

Oran testinden

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x^{(n+1)!-n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|x^{n!(n+1-1)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|x^{n!\cdot n}\right|$$

$$= \begin{cases} 0 , & |x|<1 \\ \infty , & |x|>1 \end{cases}$$

old'dan $|x|<1$ için seri mutlak yakınsak, $|x|>1$ için ıraksak.

$x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} 1^{n!} = 1+1+1+\cdots \longrightarrow \infty$ (ıraksak).

$x=-1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n!} = -1-1+1+1+1 \longrightarrow \infty$ (ıraksak).

Yakınsaklık yarıçapı 1, yakınsak old. bölge

$|x|<1 \iff \underbrace{-1<x<1}$ $\iff x\in(-1,1)$ $\square$.

b-) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right]\cdot x^n$

Kök testinden ;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}}\cdot|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[n]{n}}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n}\cdot|x|$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln n^{1/n}} = e^{\frac{1}{n}\cdot\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n} \cdot |x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{e^{\frac{\ln(n)}{n}}} \cdot 1 \cdot |x|$$

$$= \frac{3}{e^0} \cdot 1 \cdot |x|$$

$$= \underline{3|x| < 1}$$

Öyleyse $\overline{|x| < \frac{1}{3}}$ için seri yakınsaktır. Ayrıca yakınsaklık yarı çapı $\frac{1}{3}$'dür.

Şimdi sınırları inceleyelim.

$x = \frac{1}{3}$ için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ıraksak}} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n^2}}_{\text{yakınsak}}$

ıraksaktır.

$x = -\frac{1}{3}$ için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{-3}\right)^n \rightarrow (-1)^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n} + (-1)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n^2} = \sum(-1)^n\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n}$$

Alterne seri ; $a_n \to 0$, azalan ve pozitif terimli.

Yakınsaktır.

Yakınsaklık bölgesi $\boxed{-\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{3}}$

c-) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln(n)} \to a_n$

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\cancel{(x+1)^{n+1}}}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{\cancel{(x+1)^n}}{n \ln(n)}} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \right| \cdot \left| \underbrace{\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}}_{\to 1} \right| \cdot |x+1|$$

$= |x+1| < 1$ iken seri mutlak yakınsaktır.

$|x+1| > 1$ iken ıraksaktır.

$$|x+1| < 1 \iff -1 < x+1 < 1$$

$$\iff -2 < x < 0 \quad \text{yakınsaktır.}$$

$x = 0$ için $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1^n}{n \ln(n)}$ ($1^n = 1$) serisinin yakınsaklığını integral testi ile araştıralım.

$f(x) := \frac{1}{x . \ln x}$ formülleyelim.

- $f(x) > 0$, $\forall x \geq 2$ için.
- $f(x)$ sürekli $\forall x \geq 2$ için.
- $f(x)$ azalandır; $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} = x^{-1} . (\ln x)^{-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = -1 . x^{-2} . (\ln x)^{-1} + x^{-1} . (-1) . (\ln x)^{-2} . \frac{1}{x}$$

$$= -1 . x^{-2} . (\ln x)^{-1} \left[1 + (\ln x)^{-1} \right]$$

pozitif

< 0, $\forall x \geq 2$ için.

Böylece integral testinden:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{\ln 2}^{\infty} \rightarrow \text{ıraksak.}$$

$\ln x = u$
$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$

öyleyse seri de ıraksaktır.

$x = -2$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2+1)^n}{n \ln(n)} = \sum (-1)^n \cdot \overbrace{\frac{1}{n \ln(n)}}^{a_n} \rightarrow \text{Alterne seridir.}$$

$\forall x \geq 2$ için

- $a_n \geq 0$
- $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \rightarrow$ azalandır.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x \ln x} \rightarrow 0$.

} Alterne Seri testinden yakınsaktır

Yakınsaklık bölgesi: $-2 \leq x < 0$ bölgesinde fonk. yakınsa

Yakınsaklık yarıçapı 1'dir.

4-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6\cdots 2n}{1.3.5\cdots(2n+1)} \cdot x^{4n} = \frac{2}{1}\cdot x^4 + \frac{8}{3}\cdot x^8 + \frac{48}{15}\cdot x^{12} + \cdots$ → a_n

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\cancel{2.4.6}\cdots \overbrace{2(n+1)}^{\cancel{2n}\,.\,2n+2}}{\cancel{1.3.5}\cdots \cancel{(}2n+3)} \cdot x^{4(n+1)}}{\frac{\cancel{2.4.6}\cdots \cancel{2n}}{\cancel{1.3.5}\cdots \cancel{2n+1}} \cdot x^{4n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot |x^4| = |x^4| < 1$$

$\Rightarrow \quad |x| < 1$

$\Rightarrow \quad -1 < x < 1$ seri yakınsaktır.

$x = 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6\cdots 2n}{1.3.5\cdots(2n+1)}$ → b_n

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ genel terimin limiti 0 olmadığından seri ıraksaktır.

$x = -1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2.4.6\cdots 2n}{1.3.5\cdots(2n+1)}\right)$ → c_n

$\lim_{n\to\infty} c_n$ = ıraksak ⇒ Seri ıraksak

$\boxed{-1 < x < 1}$ → yakınsak olduğu bölge.

5-) Verilen fonk'nun $x=0$'daki kuvvet serisi açılımı yapınız.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \quad |x|<1 \text{ için.} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \right.$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Çözüm:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^n}_{\left\{1 - x + x^2 - x^3 + \dots\right\}}$$

her tarafın türevini alalım.

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . n . x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . n . x^{n-1}$$