HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

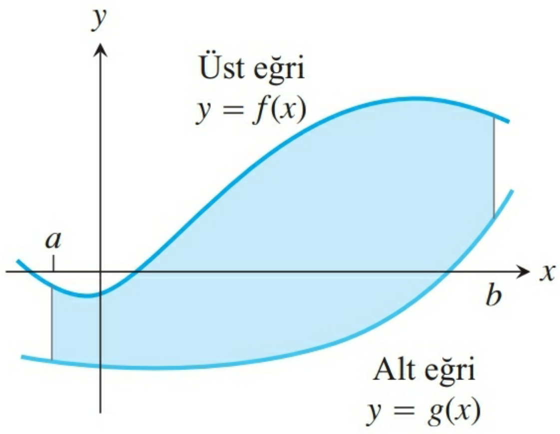
huzem

FEN FAKÜLTESİ
MAT 122 MATEMATİK II

Ders Sorumluları: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk

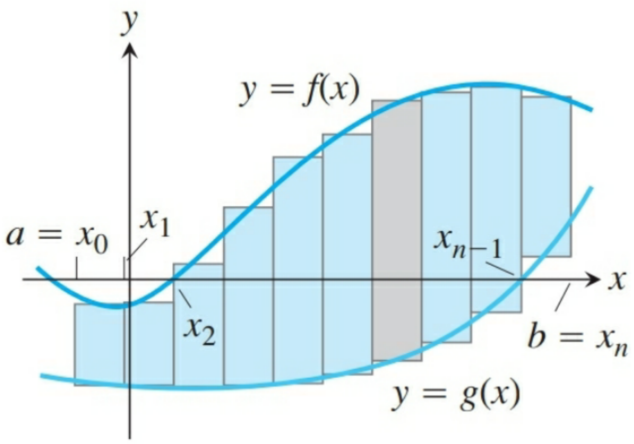
Kaynak: Thomas Calculus

Eğriler Arasındaki Alanlar

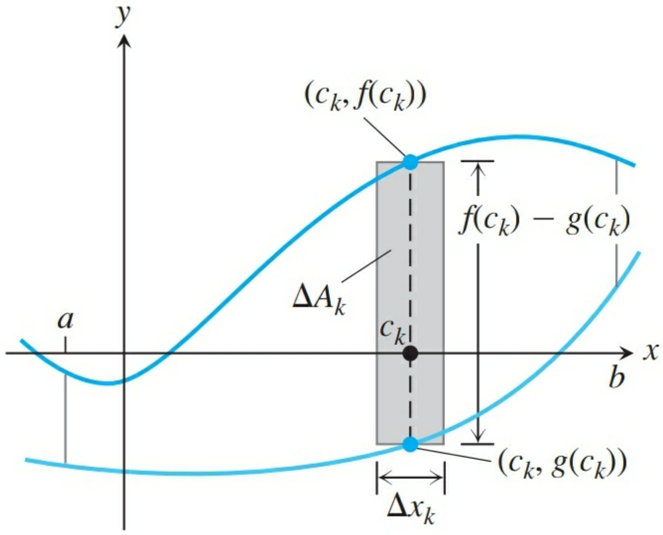


Üstten $y=f(x)$ eğrisi, alttan $y=g(x)$ eğrisi, soldan ve sağdan $x=a$ ve $x=b$ doğrularıyla sınırlanan bir bölgenin alanını bulmak istediğimizi varsayalım.

Önce bölgeyi tabanları $[a,b]$ aralığının $P=\{x_0, x_1, .., x_n\}$ bölünüşünde bulunan n düşey dikdörtgenle böleriz:



k. dikdörtgenin alanı şöyledir:



$$\Delta A_k = \text{yükseklik} \times \text{genişlik} = [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k$$

Sonra bölgenin alanına n dikdörtgenin alanını toplayarak yaklaşımda bulunuruz:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} (f(c_k) - g(c_k))\,\Delta x_k$$

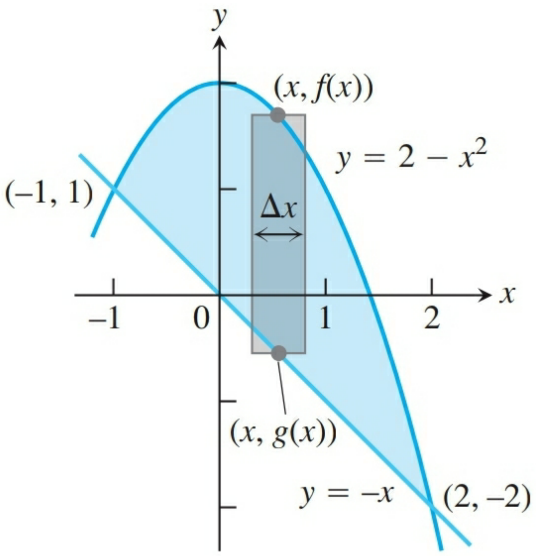
$\|P\| \to 0$ iken, sağ taraftaki toplamlar $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ limitine yaklaşır. Bölgenin alanını bu integralin değeri olarak alırız.

$$\boxed{A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(c_k) - g(c_k))\,\Delta x_k = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

Tanım: Eğer f ve g; $[a,b]$ aralığı boyunca $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere sürekli ise bu durumda a'dan b'ye kadar $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri arasındaki bölgenin alanı $(f-g)$'nin a'dan b'ye kadar integralidir:

$$A = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

Örnek. $y=2-x^2$ parabolü ve $y=-x$ doğrusuyla çevrili bölgenin alanını bulunuz.



$2-x^2=-x$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$, $x=2$

$$A = \int_{-1}^{2} (2-x^2-(-x))\,dx$$

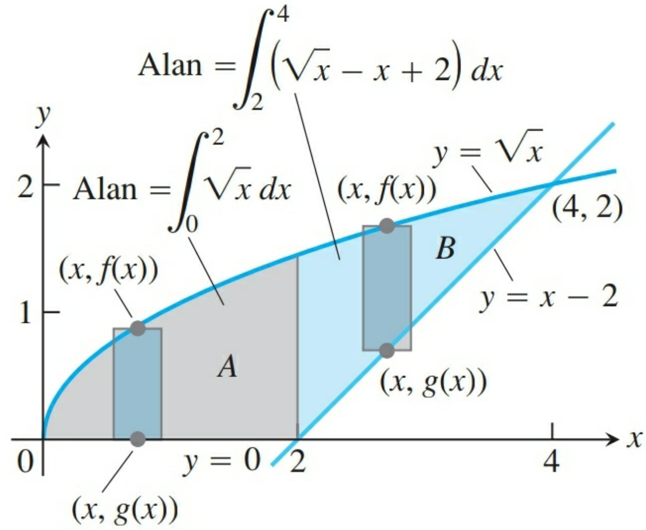
$$= \int_{-1}^{2} (2+x-x^2)\,dx = \frac{9}{2}$$

I. Her iki eğrinin grafiğini çizeriz

II. Eğrilerin kesişimini buluruz

III. Kesişimler arasındaki alan için $f-g$ fonksiyonunun integralini alırız.

Örnek. I. bölgede üstten $y=\sqrt{x}$, alttan x-ekseni ve $y=x-2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



Alt sınır, $0 \leq x \leq 2$ için $g(x)=0$'dan $2 \leq x \leq 4$ için $g(x)=x-2$'ye değişmektedir. Bölgeyi yukarıda görüldüğü gibi A ve B alt bölgelerine ayırırız.

$$\sqrt{x} = x-2 \Rightarrow x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0, \quad x=1, \; x=4$$

$$\text{Alan} = A + B = \int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right) dx$$

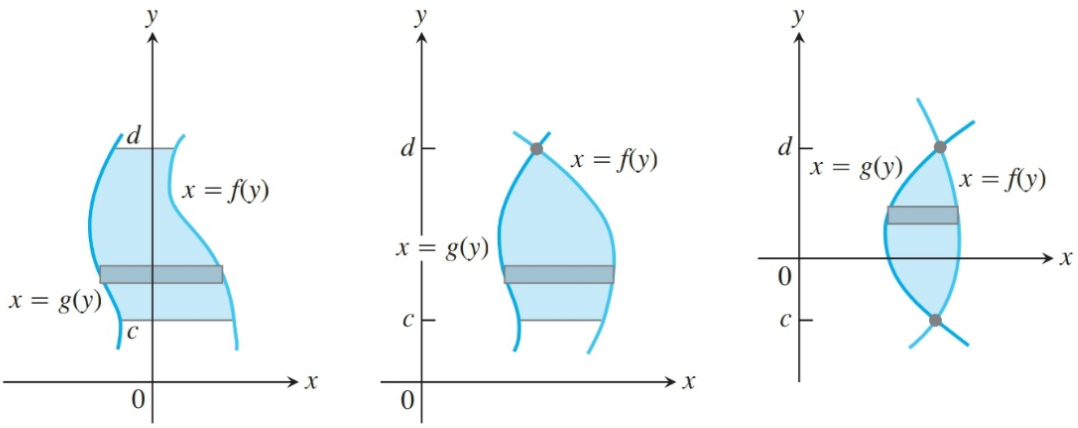
$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^4$$

$$= 10/3$$

y'ye Göre Integral :

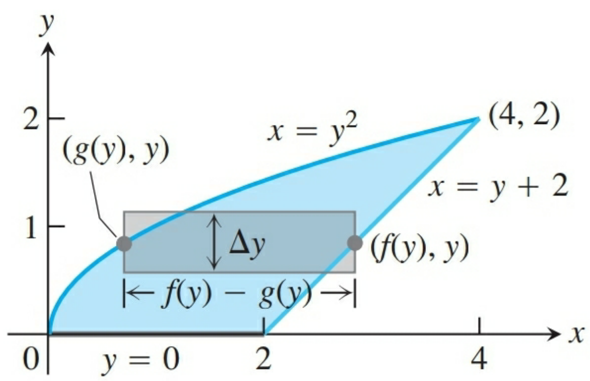
Eğer bir bölgenin sınır eğrileri y'nin fonksiyonu ile tanımlanmış ise, yaklaşım dikdörtgenleri düşey olma yerine yatay olur ve temel formülde x yerine y vardır.

Aşağıdaki grafiklerde görülen türde bölgeler için:



$$A = \int_c^d \left(f(y) - g(y) \right) dy$$

Örnek. Son çözdüğümüz örneği y'ye göre integral alarak bulalım :



$x = f(y) = y + 2$

$x = g(y) = y^2$

$y+2=y^2$ (Kesişimleri)

$y^2-y-2=0 \Rightarrow (y+1)(y-2)=0$, $y=-1$, $y=2$

$y=-1$: X- ekseni altında bir kesişim noktası verir.

$$A=\int_0^2 (f(y)-g(y))\,dy$$

$$=\int_0^2 (y+2-y^2)\,dy$$

$$=2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_0^2$$

$$=10/3$$

Örnek. Düzlemde $y=x^3-x$ ve $y=x$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.

$x^3-x=x \Rightarrow x^3-2x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=(x-\sqrt{2}).(x+\sqrt{2}).x$

$x=0$, $x=\mp\sqrt{2}$

$f(x)=x^3-x$

$g(x)=x$

$x\in[-\sqrt{2},0] \Rightarrow f(x)\geq g(x)$

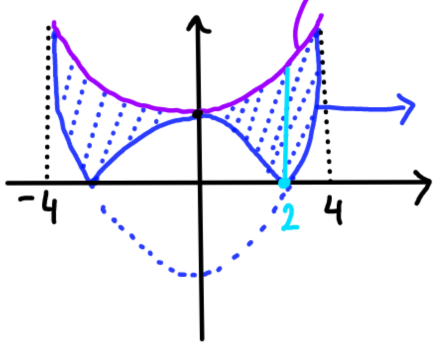
$x\in[0,\sqrt{2}] \Rightarrow g(x)\geq f(x)$

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^0 (f(x)-g(x))\,dx+\int_0^{\sqrt{2}} (g(x)-f(x))\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3-2x)\,dx+\int_0^{\sqrt{2}} (2x-x^3)\,dx=4$$

Örnek. $y = |x^2 - 4|$ ve $y = \frac{x^2}{2} + 4$ ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.



$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 \; ; & x \leq -2 \text{ veya } x \geqslant 2 \\ 4 - x^2 \; ; & -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$x \geqslant 2$ ise $\quad x^2 - 4 = \frac{x^2}{2} + 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$x \leq -2$ ise $\quad x^2 - 4 = \frac{x^2}{2} + 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = -4$

$-2 \leq x \leq 2$ ise $\quad 4 - x^2 = \frac{x^2}{2} + 4 \Rightarrow x = 0$

$$A = 2 \left[\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - 4 + x^2 \right) dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - x^2 + 4 \right) dx \right.$$

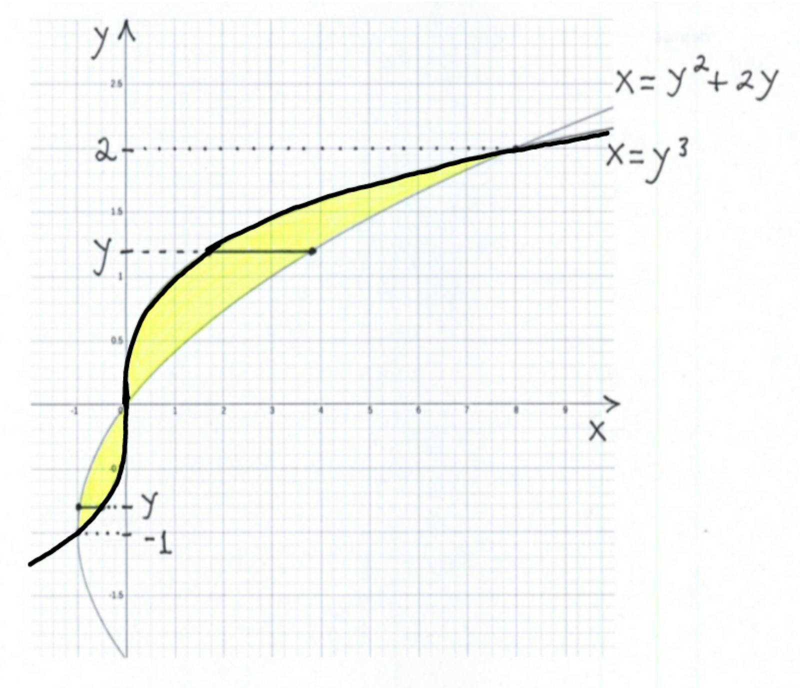
$$= 64/3$$

Örnek. $x = y^3$ ve $x = y^2 + 2y$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.

$$y^3 = y^2 + 2y \Rightarrow y^3 - y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y^2 - y - 2) = 0$$

$$y(y-2)(y+1) = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = 2,\ y = -1$$



$$f(y) = y^3, \quad g(y) = y^2 + 2y, \quad f(y) - g(y) = y(y-2)(y+1)$$

$$-1 \leq y \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq g(y)$$

$$0 \leq y \leq 2 \Rightarrow f(y) \leq g(y)$$

$$A = \int_{-1}^{0} (y^3 - y^2 - 2y)\, dy + \int_{0}^{2} ((y^2 + 2y) - y^3)\, dy$$

$$= \frac{37}{12}$$

Örnek. $y = x^2 - 2x - 2$ ve $y = 2x + 2$ ile sınırlı bölgenin alanını

a. x'e göre integral

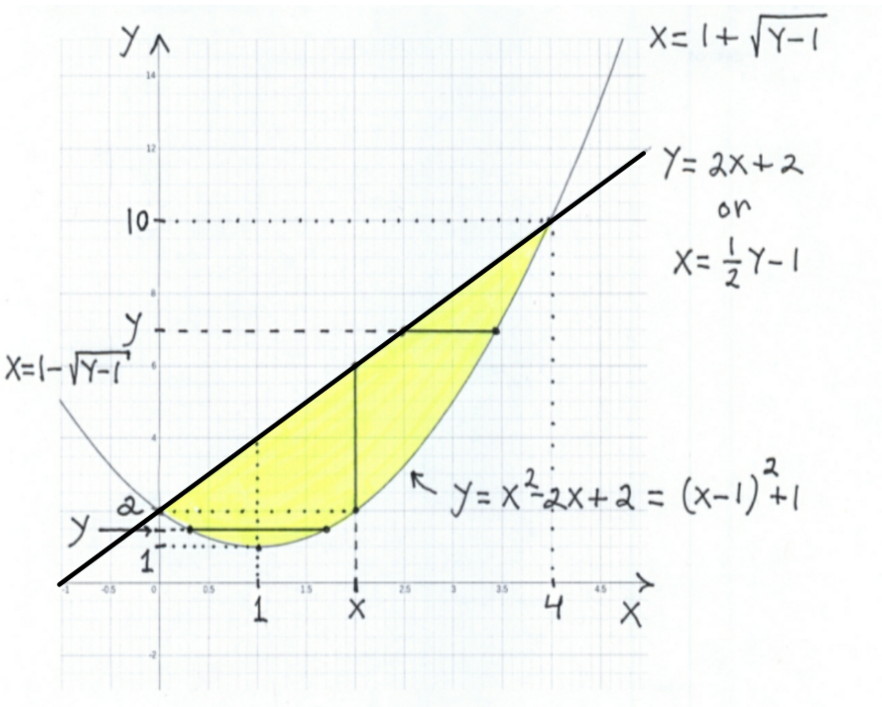
b. y'ye göre integral

ile ifade ediniz.

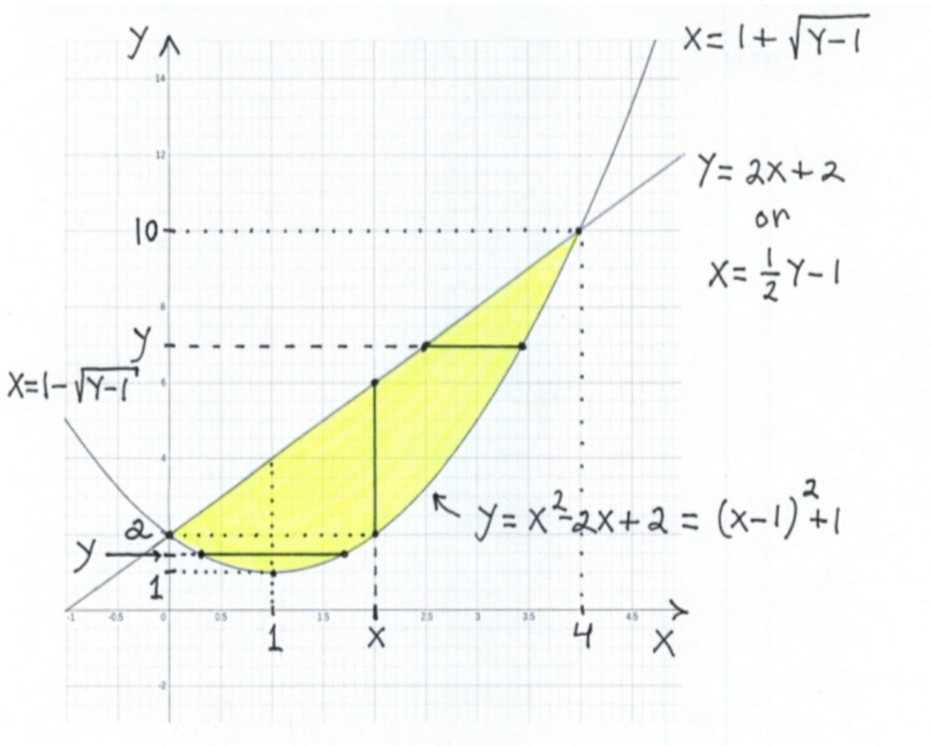
Çözüm.

$$y = x^2 - 2x + 2 \quad , \quad y = 2x + 2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 2 = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = 4$$



a. $A = \displaystyle\int_0^4 \Big((x^2 - 2x + 2) - (2x + 2) \Big)\, dx$



$$y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \quad , \quad y = 2x + 2$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{y-1} \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y - 1$$

$$A = \int_1^2 \left[\left(1 + \sqrt{y-1} \right) - \left(1 - \sqrt{y-1} \right) \right] dy$$

$$+ \int_2^{10} \left(\left(1 + \sqrt{y-1} \right) - \left(\frac{1}{2}y - 1 \right) \right) dy$$

$$= 32/3$$

2. İNTEGRAL ALMA TEKNİKLERİ

2.1 Kısmi İntegrasyon

Eğer f ve g; x'in türevlenebilir fonksiyonları ise,
Çarpım kuralı

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)\,dx = \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx$$

buradan

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Bu formül diferansiyel formunda yazıldığında daha kolay hatırlanabilir.

$u = f(x)$ ve $v = g(x)$ olsun, bu durumda $du = f'(x)\,dx$ ve $dv = g'(x)\,dx$ olur.

Kısmi İntegrasyon Formülü

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Örnek. $\int x\cos x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$u = x \quad , \quad dv = \cos x\, dx$

$du = dx \, , \quad v = \sin x$

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C$$

Bu örnekte u ve dv için dört türlü seçim mümkündür:

1. $u=1 \, , \; dv = x\cos x\, dx$
2. $u = x \, , \; dv = \cos x\, dx$
3. $u = x\cos x \, , \; dv = dx$
4. $u = \cos x \, , \; dv = x\, dx$

2. seçenek çözümde kullanılmıştır. Geriye kalan üç seçenek nasıl integre edeceğimizi bilmediğimiz integrallere yol açar.

Örneğin 3. seçenek

$$\int (x\cos x - x^2 \sin x)\, dx$$

integralini verir.

Kısmi integrasyonun amacı nasıl hesaplanacağını bilemediğimiz bir $\int u\,dv$ integralinden hesaplayabileceğimiz bir $\int v\,du$ integraline gitmektir.

Örnek. $\int \ln x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx$$

$$u = \ln x \quad , \quad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

Örnek. $\int x^2 e^x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$x^2 = u \quad , \quad e^x dx = dv$$

$$\Rightarrow 2x \, dx = du \quad , \quad e^x = v$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

$$u = x \, , \quad e^x dx = dv$$

$$\Rightarrow du = dx \quad , \quad e^x = v$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

örnek. $\int e^x \cos x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$u = e^x \quad , \qquad d\vartheta = \cos x \, dx$

$du = e^x \, dx \quad , \qquad \vartheta = \sin x$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int \sin x \, e^x \, dx$$

$\Rightarrow \quad u = e^x , \qquad d\vartheta = \sin x \, dx$

$du = e^x \, dx , \qquad \vartheta = -\cos x$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x \, dx\right) \Rightarrow$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx + C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x) + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

Örnek. $\int \cos^n x \, dx$ integralini $\cos x$'in daha düşük kuvvetinin integrali olarak ifade eden bir indirgeme formülünü bulunuz.

Çözüm.

$\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$ olarak yazalım

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$$

$u = \cos^{n-1} x$, $\quad dv = \cos x \, dx$

$du = (n-1)(\cos^{n-2} x) \cdot (-\sin x \, dx)$ ve $v = \sin x$

$$\int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

$\Rightarrow$

$$n \int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\boxed{\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx}$$

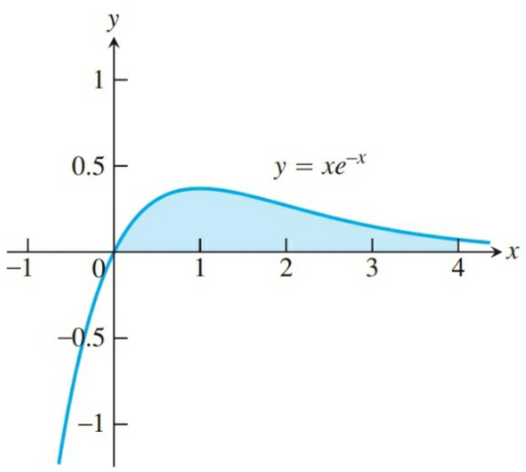
sonucu bulunur.

Belirli İntegralleri Kısmi İntegrasyonla Hesaplamak

Belirli integraller için Kısmi integrasyon formülü:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$$

Örnek. $x=0$'dan $x=4$'e kadar $y=xe^{-x}$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



$$A = \int_0^4 xe^{-x}\,dx$$

$u = x \,, \qquad dv = e^{-x}\,dx$

$\Rightarrow \; du = dx \,, \qquad v = -e^{-x}$

$$A = -xe^{-x}\Big|_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx = -4e^{-4} + \int_0^4 e^{-x}\,dx$$

$$= -4e^{-4} - e^{-x}\Big|_0^4 = -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^{0}) = 1 - 5e^{-4}$$