DİZİLER UYGULAMA

1. Aşağıdaki dizilerin limitini varsa bulunuz.

a. $a_n = \dfrac{4+4n^2}{n+8n^2}$ b. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{4^n}$ c. $a_n = \ln(8n^2+7) - \ln(n^2+7)$

Çözüm.

a. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{4}{n^2}+4\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n}+8\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{4^n} = ?$$

$$-1 \le \cos n \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos^2 n \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\cos^2 n}{4^n} \le \frac{1}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$$

Sandviç Teoreminden $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olur.

c. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln(8n^2+7) - \ln(n^2+7)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{8n^2+7}{n^2+7}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+7}{n^2+7}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(8+7/n^2)}{\cancel{n^2}(1+7/n^2)}\right) = \ln 8$$

2. Aşağıdaki dizilerin limitini varsa bulunuz

a. $a_n = \dfrac{5^{n+2}}{9^n}$ b. $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 4}$ c. $a_n = \ln(n+2)! - \ln(n+5)!$

Çözüm.

a. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot 25}{9^n} = \lim_{n\to\infty} 25\left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$$

b. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{e^n + \frac{1}{e^n}}{(e^2)^n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}\left(e^n - \frac{4}{e^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

c. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{(n+2)!}{(n+5)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\cancel{(n+2)!}}{(n+5)(n+4)(n+3)\cancel{(n+2)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{(n+5)(n+4)(n+3)} = -\infty$$

a_n ıraksaktır.

3. $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ dizisi yakınsak mıdır? Eğer öyleyse limiti bulunuz.

Çözüm. Bu limit 1^∞ belirsizliğine girer. a_n teriminin logaritmasını alarak, L'Hopital kuralını uygulayalım:

$$\ln a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \quad (\infty.0 \text{ belirsizliği})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} \quad (0/0 \text{ belirsizliği})$$

$$\underset{(L.H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-2/n^2-1}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2$$

$\ln a_n \to 2$ olduğundan ve $f(x) = e^x$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$f(\ln a_n) \to f(2)$ olur. Buradan

$e^{\ln a_n} \to e^2$ yani $a_n \to e^2$ elde edilir.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a_n = n^{\frac{1}{n}}$, $\ln a_n = \frac{1}{n} \ln n$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \quad (\infty/\infty)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \ln a_n \to 0 \text{ olur.}$$

O zaman $e^{\ln a_n} \to e^0$ yani $a_n \to 1$ elde edilir.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = ?$

Çözüm. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}} = 1.1 = 1$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2)}{n} = ?$

Çözüm. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 \ln n}{n}$

$$\underset{(L.H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2 \, 1/n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 . 2 . 3 . \ldots\ldots (n-1) . n}{n \; n \; n \; \ldots \; n \; n} \leq \frac{1}{n}$$

$<1 \quad <1 \quad <1$

$0 \leq \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}$ ve $\dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ olur.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n = ?$

Çözüm. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$, $\ln a_n = n \ln \dfrac{3n+1}{3n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{3n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n+1/3n-1)}{1/n}$$

$$\underset{(L.H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3}{3n+1} - \dfrac{3}{3n-1}}{-\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{(3n+1)(3n-1)} = \frac{6}{9}$$

$\ln a_n \to \dfrac{6}{9}$ olduğundan $a_n \to e^{2/3}$ olur.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n . 6^n}{2^{-n} . n!} = ?$ $\left(\text{NOT: } \dfrac{x^n}{n!} \to 0, \; \forall x \in \mathbb{R}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{36^n}{n!} = 0.$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \sin(1/n)}{2n-1} = ?$

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \underset{(LH)}{\overset{(0/0)}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{-\cos\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{-\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(1/n)}{-2+\frac{2}{n}} = 1/2$$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = ?$

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{(L.H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0.$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^{200}}{n} = ?$

Çözüm. $$\underset{(LH)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{200(\ln n)^{199}}{n} \underset{(LH)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(200)(199)(\ln n)^{198}}{n}$$

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{200!}{n} = 0.$$

13. $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = ?$

Çözüm.

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \quad , \quad \ln a_n = n \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-1/n^2)}{1/n} \underset{(0/0)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^3}\cdot\frac{n^2}{n^2-1}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{n^2-1} = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = e^0 = 1 .$$

14. $\lim_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2-n}\right) = ?$

Çözüm. $\lim_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2-n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right).\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{n+\sqrt{n^2-n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(n^2-n)}{n+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{n}}^{\,0}}\right)} = \frac{1}{2} .$$

15. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}} = ?$$

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}}{\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2-1)-(n^2+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}}{-1-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0}} + \cancel{n}\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}}{\cancel{n}\left(-\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}-1\right)} = -2.$$

16. $$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$$ hangi p sayıları için limit vardır.

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\right)\Bigg|_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-1\right) = \frac{1}{1-p}, \quad p>1 \text{ için yakınsar.}$$

17. $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3+x_1}$, ..., $x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}$

tekrarlı tanımla verilen dizinin yakınsak olduğunu gösterip, limitini bulunuz.

Çözüm.

Artan ve üstten sınırlı olduğunu görelim.

$\forall n$ için $x_n \leq x_{n+1}$ olduğu açıktır.

Tümevarım yöntemi ile $x_n<3$ olduğunu ispatlayalım.

$n=1$ için $x_1=\sqrt{3}<3$ doğrudur.

$n-1$ için iddia doğru olsun; $x_{n-1}<3$

n için doğru olduğunu gösterelim

$$x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}<\sqrt{6}<3$$

$\{x_n\}$ artan ve üstten sınırlı oldu, o halde yakınsaktır.

$x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{3+x_{n-1}} \Rightarrow L=\sqrt{3+L}$$

$$L^2=3+L$$

$$L^2-L-3=0 \Rightarrow$$

$$L_1, L_2=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$$

$\forall n$ için $x_n>0$ olduğundan

$$\lim x_n=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ 'dir.}$$