7. KUVVET SERİLERİ İLE TANIMLANAN FONKSİYONLAR, TAYLOR VE MACLAURIN SERİLERİ — (2. Sorunun da Yanıtları)

Verilen bir $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ k. serisi Y yakınsaklık kümesi üzerinde

$$f: Y \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlar. Yakınsaklık yarıçapının sıfır olması durumunda $Y=\{x_0\}$ olacağı için burada $R \neq 0$ alacağız.

Matematikte karşılaşılan bir çok önemli fonksiyonlar (rasyonel, trigonometrik, hiperbolik, logaritmik ve üstel fonk.) burada verilen kuvvet serileriyle karakterize edilebilecek ve bu sayede daha kolay işlem yapılabileceği sağlanmış olur.

7.1. Önerme: a) $f: Y \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ fonk. süreklidir.

b) f fonksiyonu I yakınsaklık aralığında türevlenebilirdir ve her $x \in I$ için

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty} k \cdot c_k(x-x_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(x-x_0) + \dots + k c_k (x-x_0)^{k-1} + \dots$$

olur (buna terim-terime türev alma denir).

c) f fonks. her $x \in Y$ olmak üzere $[x_0, x]$ aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} = c_0(x-x_0) + \frac{c_1}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \dots$$

olur (buna da terim-terime integral alma denir).

<u>Kanıt</u>: (Ödev, ilgilenenler için).

<u>Açıklama</u>: $f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_k(x-x_0)^k + \dots$ ise her $x \in I$ için

$$D_x[f(x)] = f'(x) = D_x\left[c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_k(x-x_0)^k + \dots\right]$$

$$= D_x(c_0) + D_x(c_1(x-x_0)) + \dots + D_x(c_k(x-x_0)^k) + \dots$$

$$= 0 + c_1 + 2c_2(x-x_0) + \dots + k \cdot c_k(x-x_0)^{k-1} + \dots = \underbrace{\sum_{1}^{\infty} k \cdot c_k (x-x_0)^{k-1}}_{\text{türev serisi}} \text{ olur}$$

Yine $f(t)=\sum_{0}^{\infty} c_k(t-x_0)^k = c_0+c_1(t-x_0)+c_2(t-x_0)^2+\dots+c_k(t-x_0)^k+\dots$

ise her $x\in Y$ için

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left[\sum_{0}^{\infty} c_k(t-x_0)^k\right]dt = \int_{x_0}^{x}\left[c_0+c_1(t-x_0)+c_2(t-x_0)^2+\dots+c_k(t-x_0)^k+\dots\right]dt$$

$$=\int_{x_0}^{x} c_0\,dt+\int_{x_0}^{x} c_1(t-x_0)\,dt+\int_{x_0}^{x} c_2(t-x_0)^2dt+\dots+\int_{x_0}^{x} c_k(t-x_0)^k dt+\dots$$

$$=c_0(x-x_0)+\frac{c_1}{2}(x-x_0)^2+\frac{c_2}{3}(x-x_0)^3+\dots+\frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+\dots$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} \text{ olacaktır.} \rightarrow \text{integral serisi.}$$

<u>Uyarı</u>: Terim-terime türev veya integral, kuvvet serisi olmayan seriler için geçerli değildir.

<u>Örneğin</u>: $\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin(n!x)}{n^2}$ serisi her $x\in\mathbb{R}$ için yakınsaktır (?)

Ancak bu serinin, terim-terime türevi olan seri;

$\sum_{1}^{\infty}\frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ serisi her $x\in\mathbb{R}$ için ıraksaktır.

Çünkü bu seri bir kuvvet serisi değildir.

<u>2. Sorunun Yanıtı</u>: Bir $y=f(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasını iç-nokta olarak bulunduran bir I aralığında her mertebeden türevlenebiliyorsa, f nin x_0 noktası komşuluğunda Taylor açılımı (serisi);

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\dots$$

diye adlandırılan bir kuvvet serisi vardır. Burada $x_0=0$ alınırsa $\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\dots$ serisine de Maclaurin serisi diyeceğiz.

7.1. önermede elde edilen bir başka sonuç da, $f(x)$, $f'(x)$ ve $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ lerin yakınsaklık aralıklarının aynı olduğudur. (tümevarımla görün)

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\dots+c_k(x-x_0)^k+\dots=\sum_{0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k$$

$$\Rightarrow f'(x)=c_1+2c_2(x-x_0)+3c_3(x-x_0)^2+\dots+k\cdot c_k(x-x_0)^{k-1}+\dots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-x_0) + 12c_4(x-x_0)^2 + \cdots + k\cdot(k-1)\cdot c_k(x-x_0)^{k-2} + \cdots$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \cdots\cdots + k!\,c_k + (k+1).k(k-1)\cdots 1.c_{k+1}(x-x_0) + \cdots$$

ve burada $x=x_0$ alınırsa $\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k!\,c_k$ bulunur

$\Rightarrow \boxed{c_k = \dfrac{f^{k}(x_0)}{k!}}$, $\forall k\in\mathbb{N}$ bulunur. Dolayısıyla

$f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_k\cdot(x-x_0)^k$ fonksiyonu;

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \cdots \quad (\forall x\in I)$$ bulunur.

7.1. Tanım : x_0 noktasının bir komşuluğunda bir f fonksiyonunun tüm basamaklardan türevi varsa, bu komşulukta

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \cdots$$

ile tanımlanan kuvvet serisine f nin $x=x_0$ noktası komşuluğundaki Taylor serisi denir. $x_0=0$ özel durumunda elde edilecek Taylor serisine de f nin Mclaurin serisi denir.

Yani f nin Mclaurin serisi de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

biçiminde yazılacaktır.

Böylece, kuvvet serilerinin başlangıcında sorulan temel 2 soruya da yanıt bulmuş oldu.

7.2. Örnekler : ① Yakınsaklık kümesi $Y=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ olan

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^k}{k!} + \cdots$

fonksiyonunun her $x\in\mathbb{R}$ için terim-terime türevini alırsak,

$$f'(x) = 0 + 1 + 2.\frac{x}{2!} + 3\frac{x^2}{3!} + \dots + k.\frac{x^{k-1}}{k!} + (k+1)\frac{x^k}{(k+1)!} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} + \dots = f(x) \text{ olur.}$$

Yani $D_x[f(x)] = f(x)$ dır. Diferansiye problemleri konusunda kolayca görülebileceği gibi türevi kendine eşit olan tek fonksiyon $f(x) = c.e^x$ dir. $\Rightarrow f(0) = 1$ old. dan $c.e^0 = 1 \Rightarrow c = 1$ ve böylece $f(x) = e^x$ dir. Böylece de;

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \forall x \in \mathbb{R}}$$

dir.

2) $\ln 2 = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} . \frac{1}{k}$ olduğunu gösteriniz.

Geometrik serilerin yakınsaması ve yakınsadığı fonksiyon bilindiğinden:

$$\boxed{\frac{1}{1-t} = \sum_{0}^{\infty} t^k = 1 + t + t^2 + \dots + t^k + \dots, \ (|t| < 1)}$$

Yani $f(t) = \frac{1}{1-t}$ nin yakınsaklık aralığı $I = (-1, 1)$ dir, öyleyse her $x \in (-1, 1)$ için terim-terime integral alınırsa;

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \int_0^x [1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^k + \dots] dt$$

$$= \int_0^x 1.dt + \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2 dt + \dots + \int_0^x t^k dt + \dots \text{ integral serisi.}$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{k+1}}{k+1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \text{ dir.}$$

Diğer yandan $\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$ dir. Öyleyse $\forall x \in (-1, 1)$ için $-\ln(1-x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ olur. Ayrıca $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ serisi $x = -1$ noktasında; $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ Alternatif serisi olarak yakınsak olur. O halde $\forall x \in [-1, 1)$ için $-\ln(1-x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ olmuş olur.

Diğer yanda f fonksiyonu $x = -1$ de sürekli olacağı için

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-\ln(1-x)) = -\ln 2 \text{ bulunur.}$$

Yani $f(-1)=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{(-1)^k}{k}+\cdots$

old. dan

$$\ln 2=-f(-1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\cdots$$

$=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ elde edilmiş olur.

3) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots+\frac{(-1)^k}{2k+1}+\cdots=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ old. göst.

Çözüm. Geom. seri açılımından $|x|<1$ için

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{0}^{\infty}x^k \Longrightarrow \frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{0}^{\infty}(-x)^k=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\cdot x^k \text{ dır}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k(x^2)^k=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\cdot x^{2k} \text{ olur.}$$

O halde her $x\in I=(-1,1)$ için

$f(t)=\frac{1}{1+t^2}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\cdot t^{2k}$ nin terim-terime integr. alınır

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{Arctan}x&=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left[1-t^2+t^4-t^6+t^8+\cdots+(-1)^k t^{2k}+\cdots\right]dt\\&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cdot x^{\overset{(+\Delta)}{2k+1}}+\cdots=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k+1}}{(2k+1)} \text{ dır.}\end{aligned}}$$

$\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ serisi $x=1$ için $\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ Alter. serisi yakınsak

$\overset{x=1}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{Arctan}1=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{(2k+1)}$, yani $\pi/4=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{2k+1}$ dır.

Şimdi de 2. soruya yanıt olacak örnekler verelim:

4) a) $f(x)=e^x$, b) $f(x)=\sin x$

fonksiyonlarının McLaurin serilerini bulunuz.

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$
$\sin(\pi+x)=-\sin x$
$\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x$
$\sin(2\pi+x)=\sin x$

Çözüm: (a) $f(x)=e^x$ ise her $k\in\mathbb{N}$ için $f^{(k)}(x)=e^x \Rightarrow$

$f^{(k)}(0)=e^0=1$ dir. Öyleyse $f(x)=e^x$ in McLaurin serisi;

$e^x \rightarrow \sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ [$\forall x\in\mathbb{R}$ için] dır. $\to Y=\mathbb{R}$.

b) $f(x)=\sin x$ ise her $k\in\mathbb{N}$ için $f^{(k)}(x)=\sin(\frac{k\pi}{2}+x)$ ve dolayısıyla $f^{(k)}(0)=\sin(\frac{k\pi}{2})$ bulunur. $\therefore$ $f(x)=\sin x$ in McLaurin serisi

$Y=\mathbb{R}$

$$\boxed{\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \text{ dir.}}$$

Not: Bir $y=f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisini elde etmek f nin ilgili Taylor serisine eşit olduğunu (buna f nin Taylor açılımı veya McLaurin açılımı denilecek) gösterdiğimiz anlamına gelmez. Bunların gerçekten birbirine eşit olduğunu kanıtlayabilmek için; $k\in\mathbb{N}$ ise f'yi

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)+R_{k+1}(x);$$

$$R_{k+1}(x)=\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1};\quad c\in\overline{(x_0,x)}$$

olarak açıldığında, $\lim\limits_{k\to\infty} R_{k+1}(x)=0$ oluyorsa

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ eşitliği var olacaktır.

2. Örnekte elde edilen McLaurin serilerinin $x=0$ noktasının komşuluğunda ilgili $f(x)$ fonksiyona eşit olduğunu gösterin.

a) $\forall x\in\mathbb{R}$ ve her bir $k\in\mathbb{N}$ için e^x in Taylor formülünden yararlanarak

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+\underbrace{\frac{e^c}{(k+1)!}x^{k+1}}_{R_{k+1}(x)};\quad \left(c\in\overline{(0,x)}\right)$$

dir.

$$0\le\lim_{k\to\infty}|R_{k+1}(x)|=\lim_{k\to\infty}\frac{e^c\cdot|x|^{k+1}}{(k+1)!}\le\lim_{k\to\infty}\frac{e^{|x|}\cdot|x|^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$=e^{|x|}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}=e^{|x|}\cdot 0=0\Rightarrow\lim_{k\to\infty}R_{k+1}(x)=0 \text{ olur.}$$

Öyleyse $\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\ \forall x\in\mathbb{R}}$ olur.

b) Her $x\in\mathbb{R}$ ve her bir $k\in\mathbb{N}$ için $\sin x$ in Taylor açılımı;

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{x^k}{k!}+R_{k+1}(x) \text{ ve}$$

$$R_{k+1}(x)=\sin\left[\frac{(k+1)\pi}{2}+c\right]\frac{x^{k+1}}{(k+1)!};\quad c\in\overline{(0,x)} \text{ dır.}$$

$$0\le\lim_{k\to\infty}|R_{k+1}(x)|=\lim_{k\to\infty}\left|\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}+c\right)\cdot\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|\le\lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}=0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}R_{k+1}(x)=0$ olur. $\Rightarrow \boxed{\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \forall x\in\mathbb{R}}$ bulunur.

5) Yukarıda verilen örneklerdeki yöntem izlenerek;

1) $\boxed{\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}}$ dir.

2) $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$ ve $e^{-x} = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ olmasından yararlanarak

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_0^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cosh x = (\sinh x)' = \sum_0^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ dir}}$$

olduklarını gösteriniz.

$\text{Arctan}\, x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}, \ |x|<1$ olduğunu yukarıda gösterdik.

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_1^\infty \frac{x^k}{k}, \ |x|<1 \xRightarrow{x \to -x \text{ konularak}} \ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \ -1<x\le 1}$$ dir.

$\frac{1}{1-t^2} = \sum_0^\infty t^{2k} \ (|t|<1) \xrightarrow[\text{integral alarak}]{\text{taraf tarafa}} \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x \left(\sum_0^\infty t^{2k}\right) dt$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow \tanh^{-1} x = \text{Arctanh}\, x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}, \ (|x|<1) \text{ dır.} \end{aligned}}$$

__Örnek__: $f(x) = e^{-x^2}$ nin Maclaurin serisini bulalım.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$ idi. x yerine $-x^2$ alınarak

$$\boxed{e^{-x^2} = \sum_0^\infty \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \ (\forall x \in \mathbb{R})}$$ olur.

Örnek $\ln x$ in açılımını bulmak isteyelim:

$-1<x\le 1$ için $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \dots = \sum_1^\infty (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

$-1<x<1$ için $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^k}{k} + \dots = \sum_1^\infty \frac{x^k}{k}$

$-1<x<1$ için $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots\right] = 2\sum_1^\infty \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

bulunur. $y = \frac{1+x}{1-x}$ denirse $-1<x<1$ için $y \in (0,\infty)$ olacaktır.

$\Rightarrow$ x'i çekersek $x = \frac{y-1}{y+1}$ alınıp, $(0<y<\infty)$ için yerine konulur.

$$\boxed{\ln y = 2\left[\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\cdots+\frac{1}{2k+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k+1}+\cdots\right]}$$

bulunur.

6) $\ln 4$ değerini yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm: Yukarıda $y=4$ alınırsa $\frac{y-1}{y+1}=\frac{3}{5}=0.6$ olur, ve ilgili seride ilk 10 terimi bulmak istersek;

$$\ln 4 \cong 2\left[0.6+\frac{1}{3}(0.6)^3+\frac{1}{5}(0.6)^5+\cdots+\frac{1}{19}(0.6)^{19}\right]\cong 1.38629$$

dır.

(Taylor serilerinin kullanım alanlarından biri de yaklaşık değer hesaplamalarıdır, yukarıdaki örnek).

7) $f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel fonksiyonunun $x_0=2$ noktası komşuluğundaki Taylor serisini bulunuz.

1. yol: (Tanımı, $f(x) \longrightarrow \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, kullanmak)

$f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow f(2)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(2)=-\frac{1}{2^2}$

$f''(x)=\frac{1.2}{x^3} \rightarrow f''(2)=\frac{1.2}{2^3}$

$f'''(x)=-\frac{1.2.3}{x^4} \rightarrow f'''(2)=-\frac{1.2.3}{2^4}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x)=(-1)^k.\frac{k!}{x^{k+1}} \rightarrow f^{(k)}(2)=(-1)^k.\frac{k!}{2^{k+1}}$

$f(x)=\frac{1}{x}$ in $x_0=2$ deki Taylor serisi

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{\frac{2!}{2^3}}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{(-1)^k.\frac{k!}{2^{k+1}}}{k!}(x-2)^k+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\frac{(x-2)^3}{2^4}+\cdots+(-1)^k.\frac{(x-2)^k}{2^{k+1}}+\cdots$$

$$=\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}.(x-2)^k$$

$x_0=2\in(0,4)$ içindir.

2. Yol: Geometrik seri $\frac{1}{1-x}\overset{|x|<1}{=\!=}\sum_0^\infty x^k$ açılımını kullanmak

$\rightarrow \frac{1}{1+x}=\sum_0^\infty (-1)^k.x^k$ dır.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2+2}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}=\frac{1}{2}.\sum_0^\infty (-1)^k.\left(\frac{x-2}{2}\right)^k$$

$$=\sum_0^\infty (-1)^k.\frac{(x-2)^k}{2^{k+1}} \text{ ve } \left(\frac{|x-2|}{2}<1 \Leftrightarrow |x-2|<2 \Leftrightarrow x\in(0,4)\text{ olur}\right)$$

Bazı Önemli Eşitlikler: ① $\frac{1}{1-x}\overset{|x|<1}{=\!=}\sum_0^\infty x^k$, ② $\frac{1}{1+x}\overset{|x|<1}{=\!=}\sum_0^\infty (-1)^k.x^k$

③ $e^x \overset{\forall x\in\mathbb{R}}{=\!=} \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$, ④ $\operatorname{Arctan} x \overset{-1\le x\le 1}{=\!=} \sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$

⑤ $\frac{1}{1+x^2} \overset{|x|<1}{=\!=} \sum_0^\infty (-1)^k\cdot x^{2k}$, ⑥ $\ln(1+x) \overset{-1<x\le 1}{=\!=} \sum_1^\infty (-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k}$

⑦ $\cos x \overset{\forall x\in\mathbb{R}}{=\!=} \sum_0^\infty (-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$, ⑧ $\sin x \overset{\forall x\in\mathbb{R}}{=\!=} \sum_1^\infty (-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$ dir.

Örnekler: ① $f(x)=e^{x/2}$ nin Mclaurin serisini bulunuz.

③ eşitliğinden yararlanarak, x yerine $x/2$ alınırsa;

$$e^{x/2}=\sum_0^\infty \frac{(x/2)^k}{k!}=\sum_0^\infty \frac{x^k}{2^k\cdot k!} \quad (\forall x\in\mathbb{R}) \text{ bulunur.}$$

② $\sum_0^\infty \frac{1}{k!}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm: $e^x=\sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$, $(\forall x\in\mathbb{R})$ idi. Bu eşitlikte $x=1$ alınırsa

$$e=\sum_0^\infty \frac{1^k}{k!}=\sum_0^\infty \frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots \text{ dır.}$$

Benzer şekilde, $\pi/4 \overset{(4)}{=\!=} \sum_1^\infty (-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{(2k-1)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$

ve $\ln 2 \overset{(6)}{=\!=} \sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}+\cdots$

Böylece de yakınsak olduğunu bildiğimiz sayı serilerinin yakınsadığı değeri bulmak için kuvvet serilerini kullanabiliyoruz.

③ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun $x_0=1$ komş. daki Taylor serisi ?

1.yol: (Tanımı, $f(x)\to\sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$, yi kullanarak ... ?)

2.yol: Geo. seri açılımını kullanarak :

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1-1}=\frac{1}{1+(x-1)} \overset{|x-1|<1}{=\!=} \sum_0^\infty (-1)^k\cdot(x-1)^k, \left(\begin{matrix}|x-1|<1 \Leftrightarrow\\ 0<x<2\end{matrix} \text{ dir}\right)$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ olduğundan $\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}\right)'$ olacaktır. Böyle, ce

$$\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}\right)' \overset{\text{terim terime}}{\underset{\text{türev}}{=\!=}} -\left(\sum_0^\infty (-1)^k(x-1)^k\right)'=-\sum_1^\infty (-1)^k\cdot k\cdot(x-1)^{k-1}$$

$$=\sum_1^\infty (-1)^{k+1}\cdot k\cdot(x-1)^{k-1}=\sum_0^\infty (-1)^k\cdot(k+1)\cdot(x-1)^k;\ (|x-1|<1 \text{ dir})$$

Not: Taylor açılımlarında hata payı gözönüne alınmadan eşitlikler verildi.

④ $y = f(x) = 2^x$ in $x_0 = 1$ nokt. koms. daki Taylor serisi?

Çözüm: $f(x) = 2^x \longrightarrow f(1) = 2$

$f'(x) = 2^x . \ln 2 \longrightarrow f'(1) = 2\ln 2$

$f''(x) = 2^x . (\ln 2)^2 \longrightarrow f''(1) = 2.(\ln 2)^2$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = 2^x (\ln 2)^k \longrightarrow f^{(k)}(1) = 2(\ln 2)^k$

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \dots$$

$$= 2 + \frac{2.\ln 2}{1!}(x-1) + \frac{2.(\ln 2)^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{2.(\ln 2)^3}{3!}(x-2)^3 + \dots + \frac{2.(\ln 2)^k}{k!}(x-2)^k + \dots$$

$$= 2\sum_0^\infty \frac{(\ln 2)^k}{k!}(x-2)^k = \sum_0^\infty \frac{2.(\ln 2)^k}{k!}(x-2)^k \text{ olur.}$$

⑤ $f(x) = \cos^2 x$ in McLaurin açılımını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ ve

$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ olduğundan, $\cos 2x = \sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$

$= \sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{2^{2k}}{(2k)!} x^{2k}$ olacağından

$f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{2^{2k}}{(2k)!} . x^{2k}$

$= \dfrac{1}{2} + \sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$ elde edilir.

⑥ $f(x) = \dfrac{x^2}{1-2x} = x^2 . \dfrac{1}{1-2x} \overset{(1)}{=} x^2 . \sum_0^\infty (2x)^k = \sum_0^\infty 2^k . x^{k+2}$

$(|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/2$ içindir$)$

⑦ $g(x) = x.\ln(1+2x)$ in McLaurin serisi açılımı?

$g(x) = x.\ln(1+2x) \overset{(6)}{=} x . \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \dfrac{(2x)^k}{k} = x . \sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{(2x)^{k+1}}{k+1}$

$= \sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{2^{k+1}}{k+1} . x^{k+2}$, $(|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/2$ dır$)$

⑧ $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+2x-3}$ in McLaurin serisine açılımını bul.

$4x = A.(x+3) + B(x-1)$

$f(x) = \dfrac{4x}{x^2+2x-3} = \dfrac{4x}{(x-1)(x+3)} \underset{\text{kesirler}}{\overset{\text{basit}}{=}} \dfrac{3}{3+x} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{3}(1+\frac{x}{3})} - \dfrac{1}{1-x}$

(1) ve (2)'den $= \sum_0^\infty (-1)^k (x/3)^k - \sum_0^\infty x^k \overset{|x|<1}{=} \sum_0^\infty \left(\dfrac{(-1)^k}{3^k} - 1\right) . x^k$ olur.

$|x/3|<1 \Leftrightarrow |x|<3$ ve $|x|<1 \Rightarrow$ ortak $|x|<1$ olur.

9) $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$ nin Mclaurin serisine açılımını bulunuz.

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_0^\infty (-1)^k\cdot x^{2k}, \ (|x|<1 \text{ için}) \text{ dür.}$$

$$g'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ old. dan}$$

$f(x)=-\frac{1}{2}g'(x)$ olur. Böylece, terim-terime türev alacak;

$$g'(x)=\sum_1^\infty (-1)^k\cdot(2k)\cdot x^{2k-1} \text{ olur} \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}g'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\sum_1^\infty(-1)^k\cdot(2k)\cdot x^{2k-1}$$

$$(|x|<1 \text{ için}),\ =\sum_1^\infty(-1)^{k+1}\cdot k\cdot x^{2k-1}=\sum_0^\infty(-1)^k\cdot(k+1)\cdot x^{2k+1} \text{ dır.}$$

10) $f(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ nin Mclaurin serisine açılımını bulunuz?

$$\left(\begin{array}{l} h(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_0^\infty(-1)^k\cdot x^{2k} \\ h'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=\sum_1^\infty(-1)^k\cdot 2k\cdot x^{2k-1} \text{ dir.} \end{array} \right.$$

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$x\neq 0$

$$=\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ olan}$$

$$=\frac{1}{2x}\cdot\left(-\sum_1^\infty(-1)^k\cdot 2k\cdot x^{2k-1}\right)+\frac{1}{2}x\cdot\sum_1^\infty(-1)^k\cdot(2k)\cdot x^{2k-1}$$

$$=\sum_1^\infty(-1)^{k+1}\cdot k\cdot x^{2k-2}+\sum_1^\infty(-1)^k\cdot k\cdot x^{2k} \text{ olur.}$$

11) $\sin x\cdot\cos x=h(x)$ in McLaurin serisine açılımı!

$$h(x)=\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\overset{(8)}{=}\frac{1}{2}\sum_1^\infty(-1)^{k-1}\cdot\frac{(2x)^{2k-1}}{(2k-1)}=\dots$$

12) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^2\cdot\ln(1+x)}=?!$

$$\sin x-\arctan x=\sum_1^\infty(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}-\sum_1^\infty(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\right)$$

$$=\frac{1}{6}x^3-\frac{23}{120}x^5+\dots,$$

$$x^2\cdot\ln(1+x)=x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\dots\right)$$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5-\dots$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3-\frac{23}{120}x^5+\dots}{x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}-\frac{23}{120}x^2+\dots}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\dots}=\frac{1}{6} \text{ olur.}$$

13) a) $f(x)=\frac{1}{4+5x}$ in Mclaurin, b) $h(x)=\frac{1}{13-2x}$ in $x_0=5$ kons. Taylor.

a) $$\frac{1}{4+5x}=\frac{1}{4(1+\frac{5}{4}x)}=\frac{1}{4}\sum_0^\infty(-1)^k\cdot\left(\frac{5x}{4}\right)^k=\sum_0^\infty(-1)^k\cdot\frac{5^k}{4^{k+1}}\cdot x^k \quad \left(\left|\frac{5}{4}x\right|<1\right) \ |x|<\frac{4}{5} \text{ için}$$

b) $\frac{1}{13-2x} = \frac{1}{3-2(x-5)} = \frac{1}{3\left(1-\frac{2}{3}(x-5)\right)} = \frac{1}{3}\sum_0^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^k (x-5)^k$

$= \sum_0^\infty \frac{2^k}{3^{k+1}}\cdot(x-5)^k, \quad \left(\frac{2}{3}|x-5|<1 \Leftrightarrow |x-5|<\frac{3}{2} \text{ için}\right)$

(14) $h(x) = \frac{5x}{x^2-3x-4}$, McLaurin serisine açılımı ?

$h(x) = \frac{5x}{x^2-3x-4} = \frac{5x}{(x-4)(x+1)} = \frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{1-x/4} + \frac{1}{1+x}$

$= -\sum_0^\infty \frac{x^k}{4^k} + \sum_0^\infty (-1)^k . x^k = \sum_0^\infty \left((-1)^k - \frac{1}{4^k}\right).x^k$ olur.

(15) $A = \frac{2.1}{4^0} - \frac{3.2}{4^1} + \frac{4.3}{4^2} - \dots + (-1)^k.\frac{(k+2).(k+1)}{4^k} + \dots$ sayısını bulunuz.

$\sum_0^\infty \frac{(-1)^k.(k+2)(k+1)}{4^k}$ serisi, Oran Testi II, kullanılarak yakınsak olduğu gösterilebilir (?)

$\Rightarrow f(x) = \sum_0^\infty (k+2)(k+1)\,x^k$ fonk. tanımlayalım; $(A = f(-1/4)$ dir$)$

f yi bulmak için; $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^k \Rightarrow D_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_1^\infty k\,x^{k-1}$

$|x|<1$

$\Rightarrow D_x^2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_2^\infty k.(k-1)\,x^{k-2} = \sum_0^\infty (k+2)(k+1)\,x^k = f(x)$ olur.

O zaman $f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ elde edilir $\Rightarrow$

$; x_0 = -1/4 \in (-1,1)$

$A = f(-1/4) = \frac{2}{(1-(-1/4))^3} = \frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{128}{125}$ bulunur

(16) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = ?$

$\left(e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!} + \dots \right.$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ den

$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\dots\right) - \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \dots}{x^2} = 3/2$ bulunur.

Binom Açılımı: $(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m$ idi.

Şimdi, $m\in\mathbb{N}$ yerine bir $\alpha\in\mathbb{R}$ sayısı için $f(x) = (1+x)^\alpha$ fonksiyonunun McLaurin serisine açılımını bulalım:

$f(x) = (1+x)^\alpha$ - - - - - - - - - - $f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ - - - - - - - $f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha.(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ - - - - - $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha.(\alpha-1).\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ ve $\binom{\alpha}{0} = 1$

$f^{(k)}(x) = \alpha.(\alpha-1).\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ - - ⟶ $f^{k}(0) = \alpha.(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ dir.

⇒ $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ nın Maclaurin serisine açılımı $= \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$$\boxed{= \sum_{0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} . x^k = 1 + \alpha . x + \frac{\alpha.(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha.(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \cdots}$$ dır.

Bu serinin yakınsaklık aralığı, da Oran Testinden;

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = |x| . \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha-k|}{k+1} = |x| . 1 = |x|$$ olup $|x|<1$ için serinin mutlak yakınsak, $|x|>1$ için ıraksaktır.

Ayrıca $|x|<1$ için $f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} . x^k$ olduğu görülebilir.!

Binom Açılımı denir.

Örnek ① $(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ in Binom açılımı?

Burada $\alpha = -1/2$ dır ve $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = -1/2$, $\binom{\alpha}{2} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}$

$= \frac{1.3}{2.4}$, $\binom{\alpha}{3} = \frac{(-1/2)(-1/2-1).(-1/2-2)}{3!} = -\frac{1.3.5}{2.4.6}$, ... olduğundan;

$\binom{\alpha}{k} = (-1)^k . \frac{1.3.5.\cdots(2k-1)}{2.4.6.\cdots(2k)}$ olduğu, tümevarımla görülebilir.

⇒ $(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^k . \frac{1.3.5\cdots(2k-1)}{2.4.6\cdots(2k)} . x^k$, $(|x|<1$ için$)$ olur.

② $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ nin Maclaurin serisine açılımı?

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^k . \frac{1.3.5.\cdots(2k-1)}{2.4.6\cdots(2k)} . x^k$ idi, x yerine x^2 alınır

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots + (-1)^k . \frac{1.3.5\cdots(2k-1)}{2.4.6\cdots(2k)} x^{2k} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^k . \frac{1.3.5\cdots(2k-1)}{2.4.6\cdots(2k)} . x^{2k} \text{ dır.} \end{aligned}}$$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2k-1)}{2.4.6\cdots(2k)} . x^{2k} + \cdots$ $(|x|<1)$

4) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sinh^{-1}x = \text{Arcsinh}\,x$ old. dan ⟶ $(|x|<1)$ içindir.

$\sinh^{-1}x = \text{Arcsinh}\,x = x - \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k . \frac{1.3.5\cdots(2k-1)}{2.4.6\cdots(2k)} . \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$

5) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}x = \text{Arcsin}x$ old. dan $|x|<1$ için

$$\sin^{-1}x = \text{Arcsin}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots \text{ dır.}$$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ in Taylor açılımının yakınsaklık kümesini bul.

$$(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^k \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)} \cdot x^k, \quad |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1 \text{ için ivs.}$$

Uç noktalara bakalım:

$x=-1$ için $1 + \sum_1^\infty (-1)^k \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4 \cdots (2k)} \cdot (-1)^k = 1 + \sum_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)}$ serisi ıraksaktır; (Raabe Testi uygulanarak görülebilir).

$x=1$ için $1 + \sum_1^\infty (-1)^k \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)}$ alternatif serisi bulunur ve

$a_k = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4 \cdots (2k)}$ denirse $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k+1}{2k+2} \le 1 \Leftrightarrow a_{k+1} \le a_k \Rightarrow \right.$

$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots \ge a_k \ge a_{k+1}, \dots$ artmayan, azalan ve

$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olduğunu göstermek için $\lim_{k\to\infty} \ln(a_k) = -\infty \equiv \lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{1}{a_k}\right) = \infty$ olduğunu göstermek yeterli olur. Bunun için de;

$$\ln\left(\frac{1}{a_k}\right) = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(2k) - \ln(2k-1))$$
$$= \ln(2/1) + \ln(4/3) + \dots + \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) \text{ olduğundan ve}$$

her $k \ge 1$ için $\ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) \ge 0$ eşitsizliği gözönüne alınırsa; $\sum_1^\infty \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)$ serisinin ıraksak olduğu gösterilmelidir. Bunun için;

(!) $0 \le x \le 1$ için $\ln(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$ (?) dır. Burada $x = \frac{1}{2k-1} \in [0,1]$ alınırsa;

$\ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \ge \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{(2k-1)^2 \cdot 2} \Rightarrow \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) \ge \frac{4k-3}{2(2k-1)} \ge 0$ ve $\sum_1^\infty \frac{4k-3}{2(2k-1)}$ serisi

Oran Testinden ıraksak $\Rightarrow \sum_1^\infty \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)$ de ıraksak olur, $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Yani $Y = (-1, 1]$ bulunur.