Taban ve Boyut

Tanım: V bir vektör uzayı ve $B \subseteq V$ olsun.

Eğer i) $\mathcal{B}$, V'yi geriyor (üretiyor) ise ($\langle B \rangle = V$)

ve

ii) $\mathcal{B}$, lineer bağımsız ise

$\mathcal{B}$'ye V'nin bir tabanı (bazı) denir
$\boxed{\text{basis}}$

Örnek: $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ için

bir tabandır. { standart taban }

Örnek: $\mathcal{B} = \left\{ \overset{A_1}{\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}}, \overset{A_2}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}, \overset{A_3}{\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -11 \end{bmatrix}}, \overset{A_4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} \right\}$

kümesinin $\underline{\mathbb{R}^{2\times2}}$ uzayının bir tabanı olduğunu gösteriniz.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ olsun.

$$c_1 . A_1 + c_2 . A_2 + c_3 . A_3 + c_4 . A_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

o.ş $c_i \in \mathbb{R}$ var mıdır ?

$$\begin{bmatrix} 3c_1 & 6c_1 \\ 3c_1 & -6c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c_2 \\ -c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8c_3 \\ -12c_3 & -11c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_4 & 0 \\ -c_4 & 2c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_4 &= a \\ 6c_1 - c_2 - 8c_3 &= b \\ 3c_1 - c_2 - 12c_3 - c_4 &= c \\ -6c_1 - 11c_3 + 2c_4 &= d \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tek çözüm vardır.

O halde her $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, A_1, A_2, A_3, A_4'ün lineer kombinasyonudur.

Yani $\langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle = \mathbb{R}^{2\times 2}$

- $\mathcal{B}$ lineer bağımsız mıdır?

$$c_1 . A_1 + c_2 . A_2 + c_3 . A_3 + c_4 . A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ tek çözüm vardır (Yukarıdan!) $\{ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \}$
Neden?

Yani, $\mathcal{B} = \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$ lineer bağımsızdır.

Sonuç olarak, $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}^{2\times 2}$ uzayı için bir tabandır.

Teorem: $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, V'nin bir tabanı olsun. O halde V'nin her elemanı S'nin elemanlarının lineer kombinasyonu o.ş tek türlü yazılır.

Bazı vektör uzaylarının standart tabanları

① sıralı n'liler uzayı $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}^n$'in standart tabanı

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\
e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
e_i &= (0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1, 0, \ldots, 0}^{i.\text{ bileşen}}) \\
&\vdots \\
e_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}
$$

vektörleri o.ü $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$'dir.

② $m \times n$ boyutlu matrisler uzayı $\mathbb{R}^{m \times n}$

$E_{ij} :=$ (i, j). bileşeni 1 diğer tüm bileşenler sıfır olan $m \times n$ boyutlu matris olsun.

$$S = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$$

kümesi $\mathbb{R}^{m\times n}$ 'nin standart tabanıdır.

Örnek $\mathbb{R}^{2\times 3}$ 'ün tabanını yazınız

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

③ Polinomlar uzayının standart tabanı

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

kümesi $\mathbb{R}[x]$ 'in standart tabanıdır.

Ayrıca, $S=\{1, x, \dots, x^n\}$ kümesi P_n vektör uzayının standart tabanıdır.

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n x^n$$