1-) Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyin.

a-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$

Çözüm: 1. Çözüm:

$n < n+1 \quad , \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$n+1 < n+2 \quad , \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)(n+2).(n+2)}}}_{=\frac{1}{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1).(n+2)}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}}_{} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} = \Sigma$$

↳ Harmonik seri ıraksak olduğundan Σ ıraksak.

2. Çözüm:

$a_n = \frac{1}{n}$ dizisini düzenlim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{\underbrace{(n^2+n)(n+2)}_{n^3+2n^2+n^2+2n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}$$

$$= 1$$

$\sum \frac{1}{n}$ ıraksak old. $\sum$ serisi ıraksaktır.

Harmonik seri neden ıraksaktır?

Alternatif ispat:

y -16 oranında 8 sayı var.

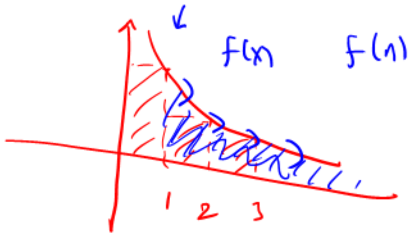
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{9} + \dots , \frac{1}{16} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

6-) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-2n} \cdot \sinh n}_{a_n}$



$\sum f(n)$

$f(n) = (f(1), f(2), \dots)$

Hatırlatma:

$f(x)$ bir fonk olsun.

- $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ için
- $f(x)$ sürekli
- $f(x)$ azalan

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ yakınsak (ıraksak)

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ yakınsak (ıraksak).

$f(x) = e^{-2x} \cdot \sinh x$ ve $f(n) = a_n$ old. görülür.

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$, $\forall x > 1$ için.

öyleyse $f(x) = e^{-2x} \cdot \sinh x > 0$, $\forall x > 1$ için.

• f süreklidir.

(Azalanlığın tanımı $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

• f'nin azalan old. göstermek için türevinin negatif old. göstermek yeterlidir. $e > 2 \Rightarrow e^2 > 4$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3 - e^{2x}}{e^{3x}}\right) < 0 \quad , \quad \forall x > 1.$$

Öyleyse $x > 1$ o.ü. f azalandır.

Artık integral testini uygulayabiliriz.

$$\int_1^{\infty} e^{-2x} \cdot \sinh x \, dx = \int_1^{\infty} e^{-2x} \cdot \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) dx$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_1^{R} \frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{2} \, dx$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left. \frac{e^{-x}}{-2} + \frac{e^{-3x}}{+6} \right|_1^{R}$$

$$= -\left[\frac{e^{-1}}{-2} + \frac{e^{-3}}{6}\right]$$

Öyleyse integral yakınsak ve böylece seri yakınsaktır.

2-) Verilen serilerin mutlak ve koşullu yakınsak veya ıraksak olup olmadığını inceleyin.

Hatırlatma:

a_n bir dizi o.ü. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \sum a_n$ mutlak yakınsak denir.

Teorem: Mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsak.

a-) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(n)}{n^2}}_{a_n} = ? \leftarrow$

(p - test)

$|a_n| = \underbrace{\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|} = \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ yakınsak.

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|$ yakınsak, ve dolayısıyla $\sum$ yakınsaktır.

b-) $a - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{4} a^4 + \dots \dots ? \; (a > 0)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{a^n}{n}$ mutlak yakınsaklığı inceleyelim.

$\left| \frac{(-1)^n \cdot a^n}{n} \right| = \frac{a^n}{n} \leq \underbrace{a^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a^n|$ yakınsaktır $\Leftrightarrow \underbrace{|a| < 1} \Rightarrow \underbrace{0 < a < 1}$

$a \in (0,1)$ için $\sum$ yakınsaktır. $a > 1$ için şimdilik $\rightarrow \sum$ hakkında yorum yapamıyoruz.

$\underline{a = 1}$ olma durumunu özel olarak inceleyelim.

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{a^n}{n} = \underbrace{\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$, elbette bu seri mutlak yakınsak değil.

<u>Alterne seri testi</u>

$\underbrace{\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n}$ alterne serisi için :

- $u_n \geq 0$.
- u_n azalan.
- $u_n \to 0$.

sağlanırsa $\sum (-1)^n \cdot u_n$ yakınsaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n}$$

- $u_n > 0$
- u_n azalan
- $u_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Alterne seri testinden yakınsaktır. Öyleyse koşullu yakınsaktır.

$u_n = -a_n$, $a_n > 0$.

u_n artan olsun.

$u_n < u_{n+1}$.

$-u_n > -u_{n+1}$

$a_n > a_{n+1} \Rightarrow$

a_n azalan.

$$\sum^{\infty} (-1)^n . u_n = \sum (-1)^n . (-a_n)$$

$$= \sum^{\infty} (-1)^{n+1} . a_n$$

4-) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(n!)^2}{e^{n^2}}}_{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{e^{(n+1)^2}}}{\dfrac{(n!)^2}{e^{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 . \cancel{e^{n^2}}}{\cancel{e^{(n+1)^2}} . \cancel{(n!)^2}}$$

$(n+1)^2 \, \cancel{n!^2}$

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{2n+1}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{e^{2x+1}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

L'hopital

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(x+1)}{2e^{2x+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{4e^{2x+1}} = 0 < 1$$

Öyleyse oran testinden seri yakınsaktır.

5-) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n}_{a_n}$

Kök testi uygulayalım; $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n}$

$$= \frac{n!}{n^n}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 < 1$

İspat; $\left|\frac{n!}{n^n}\right| = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdots n}$

$\leq 1 \cdot 1 \cdots \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow$ Kök testinden yakınsaktır.

6-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 \cdot e^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{(n+1)^2 \cdot \cancel{e^{n+1}}\, e}}{\frac{\cancel{n!}}{n^2 \cdot \cancel{e^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(n+1) \cdot n^2}^{3.\ \text{der}}}{(n+1)^2 \cdot e} = \infty > 1$$

Oran testten ıraksaktır.

7-) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

Oran testi: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^{1/n}}{(n+1) \cdot (n+1)^{1/n+1}} = 1$

olan test uygulanamaz.

Kök testi: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n} \cdot n^{1/n^2}} = 1$

kök test uygulanamaz.

Limit karşılaştırma testi

$b_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\sum \frac{1}{n}$ ıraksak old. $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ıraksak oluyor.