ÖZEL KESİKLİ DAĞILIMLAR
Bölüm 1

DERS SORUMLULARI
DOÇ. DR. AYTEN YİĞİTER
DR. ÖĞR. ÜYESİ CEREN EDA CAN

X raslantı değişkeni, gerçel (reel) eksende sayılabilir ya da sayılabilir sonsuzlukta nokta değerlerini alıyorsa bu raslantı değişkenine **kesikli raslantı değişkeni** denir.

Örneğin,

- bir paranın bir kez atılması deneyinde “Yazı” sayısı,
- bir paranın *n* kez atılması deneyinde “Yazı” sayısı,
- bir paranın “Yazı” gelinceye dek atılması deneyinde deneme (atış) sayısı,
- belirli bir zamanda/mekanda meydana gelen depremlerin sayısı
- bir kasada belli sayıda bulunan çürük ya da sağlam elmalardan yerine koymadan belli sayıda elma seçme deneyinde seçilen çürük elmaların sayısı vb.

kesikli raslantı değişkenlerinin her biri farklı bir kesikli dağılıma sahiptir.

Özel Kesikli Dağılımlar

1) Bernoulli Dağılımı
2) Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)
3) Multinomial Dağılım (Çok Terimli Dağılım)
4) Geometrik Dağılım
5) Negatif Binom Dağılımı (Eksi İki Terimli Dağılım)
6) Hipergeometrik Dağılım
7) Poisson Dağılımı
8) Kesikli Tek Biçimli Dağılım

1. BERNOULLİ DAĞILIMI

Bir rasgele deney yapıldığında sadece iki ayrı sonuçtan biri ya da öteki gerçekleşiyorsa bu denemeye **Bernoulli denemesi** denir.

Bernoulli denemesinde örneklem uzayı iki ayrık sonuçtan oluşmaktadır. Bu sonuçlardan yalnızca biriyle ilgileniyor olalım. İlgilendiğimiz sonucun gözlenmesi "*başarı*", gözlenmemesi "*başarısızlık*" olarak adlandırılır. Bu durumda, raslantı değişkeni ***Bernoulli dağılım***ına sahiptir denir. Dağılımın adı İsviçreli bilim adamı Jacob Bernoulli anısına verilmiştir.

Örnekler:

- Çağrı merkezinin meşgul/erişilebilir olması
- Üretilen bir makinenın kusursuz/kusurlu olması
- Bir hisse senedinin fiyatının yükselmesi/düşmesi
- Bir tenişçinin maçı kazanması/kaybetmesi
- Bir okçunun hedefi vurması/vuramaması

Bernoulli denemesinde, raslantı değişkenine başarı için “1” değeri; başarısızlık için ise, “0” değeri karşılık gelir. Başarı olasılığı *p*; başarısızlık olasılığı ise, (1-p)=q olarak tanımlanır.

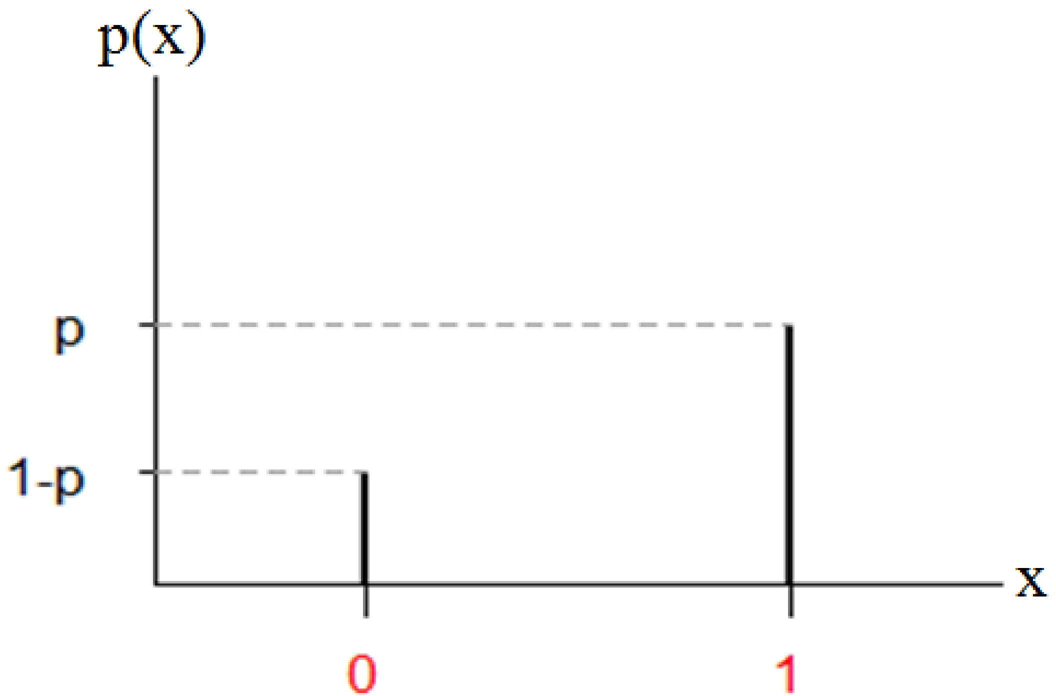
Tanım: *X* raslantı değişkeni *p* parametresi (oranı) ile Bernoulli dağılımına sahip olsun. *X* raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned} p(x) &= p \quad , \quad x = 1 \text{ } için \\ &= q \quad , \quad x = 0 \text{ } için \\ &= 0 \quad , \quad öteki \text{ } x \text{ } değerleri \text{ } için \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} p(x) &= p^x(1-p)^{1-x} \quad , \quad x = 0{,}1 \text{ } için \\ &= 0 \quad , \quad öteki \text{ } x \text{ } değerleri \text{ } için \end{aligned}$$

biçimindedir ve *X~Bernoulli*(*p*) biçiminde gösterilir.



Bernoulli(p) dağılımı

Beklenen Değeri:

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

Varyansı:

$$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) \\ &= pq \end{aligned}$$

Moment Çıkaran Fonksiyonu:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p(x) \\ &= (1-p) + e^t p \\ &= pe^t + q \end{aligned}$$

Örnek: Nergis ninenin ilaç kutusunda bulunan 15 tabletten 5 tanesi tansiyon ilacıdır. Diğer tabletler ise ağrı kesicidir. Nergis nine, tansiyon ilacını içmek istemektedir. Ninenin tansiyon ilacını seçmesi olasılığı nedir?

Çözüm: Ninenin tansiyon ilacını almak için yaptığı seçim bir Bernoulli denemesidir.

İstenen olay: Tansiyon ilacının seçilmesi (Başarı)
İstenmeyen olay: Diğer ilacın seçilmesi (Başarısızlık)

$X \sim Bernoulli\ \left(p = \frac{5}{15}\right)$. X' in olasılık fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \left(\frac{5}{15}\right)^{x}\left(1-\frac{5}{15}\right)^{1-x} &&, \quad x = 0{,}1 \text{ için} \\
&= 0 &&, \quad \text{öteki } x \text{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

Ninenin tansiyon ilacını seçmesi olasılığı:

$P(X=1) = p(1) = \left(\frac{5}{15}\right)^{1}\left(1-\frac{5}{15}\right)^{1-1} = \frac{5}{15}$ bulunur.

Örnek: Herhangi bir uzaklıkta belirlediği hareketsiz bir hedefi 0.92 olasılıkla vurabilen bir avcı olsun. Bu avcı ormanda takibe aldığı bir geyiği avlamak istemektedir. Avcının geyiği vurması olasılığı nedir?

Çözüm: Avcının, hareketsiz duran geyiğe yaptığı atışla gerçekleştirdiği deneme bir Bernoulli denemesidir.

İstenen olay: Geyiği vurması (Başarı)
İstenmeyen olay: Geyiği ıskalaması (Başarısızlık)

X~Bernoulli(p=0.92). X' in olasılık fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 0.92^x(1-0.92)^{1-x} \quad , \quad x = 0,1 \; için \\
&= 0 \quad , \quad öteki \; x \; değerleri \; için
\end{aligned}
$$

Avcının geyiği vurması olasılığı:

$P(X=1) = p(1) = 0.92^1(1-0.92)^{1-1} = 0.92$ bulunur.

Örnek: Bir kişi oynanan futbol maçında takımının kazanacağını düşünüyor ve 1000 TL'lik bahse giriyor. Bu kişinin takımının kazanması olasılığı 0.60 ise, kişinin beklenen kazancı ne olur?

Çözüm: $X \sim Bernoulli(0.60)$ olduğuna göre, bu kişinin beklentisi 0.60 olasılıkla takımının maçı kazanmasıdır.

Bu durumda, kişi $0.60 \times 1000 = 600$ TL' lik beklenti ile bahse girmiş demektir.

2. BİNOM DAĞILIMI (İKİ TERİMLİ DAĞILIM)

Yalnız iki sonucu olan Bernoulli denemesinin *n* kez birbirinden bağımsız olarak ve aynı koşular altında yinelenmesi ile oluşan deneye **Binom deneyi** denir.

Binom deneyinin koşulları aşağıda verilmiştir:
•Deney süresince, denek sayısı ya da deneme sayısı değişmezdir.
•Her denemede sadece iki olası sonuç vardır.
•Her denemede ilgilenilen olayın olasılığı (p) değişmezdir. Dolayısıyla, istenmeyen olay olasılığıda (q) değişmezdir.
•Tekrarlanan denemeler birbirinden bağımsızdır ve özdeştir.

n denemede ilgilenilen olayın ortaya çıkma sayısı, Binom raslantı değişkenidir. Bu raslantı değişkeninin dağılımı ise, Binom dağılımı (*ikiterimli dağılım)* olacaktır.

Örnekler:

- Hilesiz bir paranın 10 kez atıldığı denemede "Yazı" sayısının dağılımı Binom dağılımına uygundur.
- 3 kırmızı ve 2 beyaz topun olduğu bir torbadan ***yerine koyma*** **koşulu** altında 5 top çekilsin. 5 çekilişte gözlenen kırmızı top sayısının dağılımı Binom dağılımıdır.

Tanım: *X* raslantı değişkeni *n* ve *p* parametreleri ile binom dağılımına sahip ise olasılık fonksiyonu,

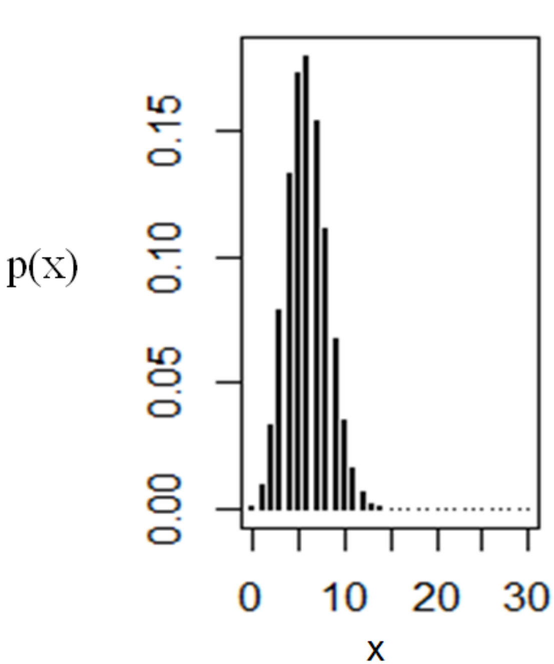
$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,\cdots,n \;\; için \\ &= 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

biçimindedir ve *X*~*B*(*n*, *p*) biçiminde gösterilir.

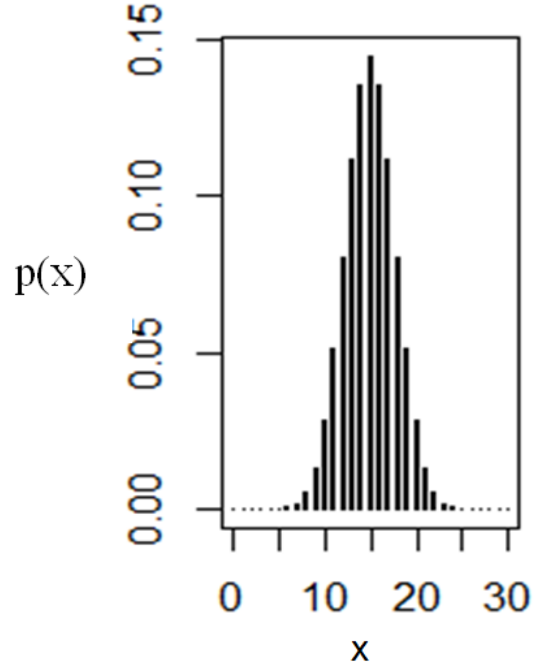
Ayrıca, binom dağılımı n=1 olduğunda, Bernoulli dağılımına dönüşür:

Bernoulli(p) = B(n=1,p)

Teorem: n tane birbirinden bağımsız ve Bernoulli(p) dağılımına sahip raslantı değişkenlerinin toplamı olan $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$' nin dağılımı, n ve p parametresi ile binom dağılımıdır.



$B(30,\ 0.2)$ dağılımı



$B(30,\ 0.5)$ dağılımı

Binom dağılımının şekli, p’ nin (ya da q’ nun) alacağı değerlere göre değişir. $p=0.5$ olduğunda dağılım simetrik bir dağılımdır. $p<0.5$ olduğunda dağılım sağa çarpık; $p>0.5$ olduğunda ise, dağılım sola çarpık olur. p’ nin sıfıra ya da bire yakın değerlerini aldığı durumlar hariç, n büyüdükçe bu çarpıklıklar ortadan kalkar ve Binom dağılımı Normal dağılıma yaklaşır.

Moment Çıkaran Fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} p(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\
&= (pe^t + q)^n
\end{aligned}
$$

Yukarıda, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ binom açılımından yararlanılmıştır.

Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla Binom dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıda elde edilmiştir.

Beklenen Değeri:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t) \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n \bigg|_{t=0} \\
&= n(pe^t + q)^{n-1} pe^t |_{t=0} \\
&= n(p + q)^{n-1} p \\
&= np
\end{aligned}
$$

Varyansı:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\, n(pe^t + q)^{n-1} pe^t\bigg|_{t=0} \\
&= np[(n-1)(pe^t + q)^{n-2} pe^{2t} + (pe^t + q)^{n-1} e^t]|_{t=0} \\
&= np[(n-1)(p+q)^{n-2} p + (p+q)^{n-1}] \\
&= n^2p^2 - np^2 + np
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 \\
&= np - np^2 \\
&= np(1-p) \\
&= npq
\end{aligned}
$$

Teorem: Eğer $X \sim B(n, p)$ ise, $Y = \frac{X}{n}$ raslantı değişkeninin beklenen değeri, $E(Y) = p$ ve varyansı, $V(Y) = \frac{pq}{n}$ biçimindedir.

Tanıt: $X \sim B(n, p)$ ise, $E(X) = np$ ve $V(X) = npq$' dur. $Y = \frac{X}{n}$ raslantı değişkeni için,

$$E(Y) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

ve

$$V(Y) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{V(X)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

olur.

$Y = \frac{X}{n}$ raslantı değişkeni, n denemedeki başarı oranını göstermektedir. Bu oranın gözlenmiş değeri binom dağılımın parametresi olan p için bir tahmindir.

Binom Dağılımının Limit Durumu

$B(n,p)$ binom dağılımının olasılık fonksiyonu $n!$ terimini içermektedir. Bu terim, n deneme sayısının artması ile hızla artar. Örneğin,

$$\begin{aligned} 10! &= 3.62 * 10^{6} \\ 50! &= 3.04 * 10^{64} \\ 100! &= 9.33 * 10^{157} \end{aligned}$$

Bu nedenle, deneme sayısının büyük değerleri için, olasılıkların hesabını yapmak yorucu ve zaman alıcı bir işlemdir. Bu durumda, ilgili olasılığı yaklaşık olarak hesaplamakta yarar vardır. Bunun için, **Poisson teoremi** ve **De-Moivre Laplace teoremi** kullanılır.

Örnek: Bir şişe üreticisi şişeleri 20'li paketler halinde dağıtıma hazırlıyor. Herhangi bir pakette kırık bir şişe olması olasılığı 0.001 ise, rasgele seçilen bir pakette en az bir kırık şişe olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: *X* raslantı değişkeni 20 şişedeki kırık şişe sayısını göstermek üzere, raslantı değişkeninin dağılımı $X \sim B(20, 0.001)$ olur. *X*' in olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{20}{x} 0.001^x 0.999^{20-x} \quad , \quad x = 0,1,\cdots,20 \;\; için \\ &= 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Dolayısıyla istenen olasılık,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{20}{0} 0.001^0 0.999^{20-0} \\ &= 1 - 0.999^{20} \\ &= 0.0198 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek: Hilesiz bir para 10 kez atılıyor.

a) 10 atışta 5 "Tura" gelmesi olasılığını bulunuz.

b) Beklenen "Tura" sayısını bulunuz.

Çözüm: Her bir atış birbirinden bağımsız ve Bernoulli dağılımlı olduğuna göre, 10 atışta "Tura" sayısını gösteren X'in dağılımı, $B(10, 0.5)$ olacaktır. X' in olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{10}{x} 0.5^x 0.5^{10-x} &, \quad & x = 0,1,\cdots,10 \ \text{\textit{için}} \\ &= 0 &, \quad & \text{\textit{öteki x değerleri için}} \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.5^5 0.5^{10-5} \cong 0.2461$ bulunur.

b) $E(X) = np = 10 \times 0.5 = 5$ olarak bulunur.

Örnek: Belli bir hastalığa ilişkin yapılan ameliyatın başarılı sonuçlanması olasılığı 0.85' tir. Bu hastalığa sahip olan 12 kişi ameliyat edilerek tedaviye alınsın.

a) Hastaların yarısının iyileşmesi olasılığını bulunuz.
b) Hastalardan en az 11' inin iyileşmesi olasılığını bulunuz.
c) En fazla 9 hastanın iyileşmesi olasılığını bulunuz.
d) Ameliyatı başarılı sonuçlanacak hastaların beklenen sayısını ve varyansını bulunuz.

Çözüm: X raslantı değişkeni ameliyat sonrası iyileşen hasta sayısını göstermek üzere, raslantı değişkeninin dağılımı $X \sim B(12, 0.85)$ olur. X' in olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{12}{x} 0.85^x 0.15^{12-x} \quad , \quad x = 0,1,\cdots,12 \ \textit{için} \\ &= 0 \quad , \quad \textit{öteki } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

a) $P(X = 6) = \binom{12}{6} 0.85^6 0.15^{12-6} = 0.003969$

b)
$$\begin{aligned} P(X \geq 11) &= P(X=11)+P(X=12) \\ &= \binom{12}{11} 0.85^{11} 0.15^{12-11} + \binom{12}{12} 0.85^{12} 0.15^{12-12} \\ &= 0.30121 + 0.14224 \\ &= 0.44345 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(X \leq 9) &= 1 - P(X > 9) \\ &= 1 - [P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)] \\ &= 1 - \left[\sum_{x=10}^{12} \binom{12}{x} 0.85^{x} 0.15^{12-x}\right] \\ &= 1 - [0.29236 + 0.30121 + 0.14224] \\ &= 1 - 0.73581 \\ &= 0.26419 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} E(X) &= np = 12 \times 0.85 = 10.2 \cong 10 \\ V(X) &= npq = 12 \times 0.85 \times 0.15 = 1.53 \end{aligned}$$

Örnek: Çikolata üreten bir firma ürettiği çikolataları ambalajlayarak satışa sunmaktadır. Ambalajlanan çikolata paketlerinin %10' unun istenen standarda uymadığı bilinmektedir. Bu ambalajlanmış çikolata paketlerinden 8 tanesi kalite kontrol uzmanı tarafından yerine konularak rasgele seçilsin.

a) Hepsininde ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
b) Sadece 2 tanesinin ambalajının istenilen standarda uygun <u>olmaması</u> olasılığı nedir?
c) En fazla 3 tanesinin ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
d) Ambalajı istenilen standarda uygun olması beklenen çikolata paketi sayısı nedir?

Çözüm: X raslantı değişkeni ambalajı istenilen standarda uygun çikolata paketi sayısını göstermek üzere, raslantı değişkeninin dağılımı $X \sim B(8, 0.90)$ olur. X' in olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{8}{x} 0.90^{x} 0.10^{8-x} \quad , \quad x = 0,1,\cdots,8 \;\; için \\ &= 0 \quad , \quad öteki\; x\; değerleri\; için \end{aligned}$$

a) $P(X=8)=\binom{8}{8}0.90^{8}0.10^{8-8}=0.43047$

b) Sadece 2 tanesinin ambalajının istenilen standarda uygun olmaması, 6 tanesinin de standarda uygun olmasını gerektirir. Bu durumda, istenen olasılık,

$$P(X=6)=\binom{8}{6}0.90^{6}0.10^{8-6}=0.1488$$

olarak bulunur.

c)

$$\begin{aligned} P(X\leq 3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\ &= \sum_{x=0}^{3}\binom{8}{x}0.90^{x}0.10^{8-x} \\ &= 0.00043165 \end{aligned}$$

d) $E(X)=np=8\times 0.90=7.2\cong 7$

3. MULTİNOMİAL DAĞILIM (ÇOK TERİMLİ DAĞILIM)

Binom dağılımında sadece iki ayrık olası sonuca sahip olan birbirinden bağımsız n tane Bernoulli denemesi söz konusu idi. Fakat, herhangi bir rasgele deney ikiden fazla sayıda ayrık sonuca sahip olabilir. Böyle bir rasgele deney göz önüne alınsın. Bu rasgele deneyin n kez birbirinden bağımsız olarak tekrar edilmesi durumunda Multinomial dağılım kullanılır. Multinomial dağılıma, genelleştirilmiş Binom dağılımı adı da verilmektedir.

Rasgele bir deney, k ayrık olası sonuçtan $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ herhangi biriyle sonuçlansın. Herhangi bir rasgele deneyde $A_1, A_2, \cdots, A_k$ olaylarının ortaya çıkma olasılıkları sırayla, $p_1, p_2, \cdots, p_k$ olarak verilsin. Burada, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1'$ dir. Yapılan n deneme sonucunda A_1 olayının x_1 kez, A_2 olayının x_2 kez, ... , A_k olayının x_k kez ortaya çıkması olasılığı aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= \frac{n!}{x_1!\ x_2! \cdots x_k!}\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n \ \ ve\ x_i \geq 0\ (i = 1,2, \cdots, k) \\
&= 0 \quad , \quad diğer\ x_i\ (i = 1,2, \cdots, k)\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

Multinomial dağılım, k=2 olduğunda binom dağılımına dönüşür. Sadece x_i sonucunun gerçekleşmesiyle ilgilenilirse ilgilenilen i-inci sonucun gerçekleşme olasılığı p_i ve diğer (k-1) sonucun gerçekleşmesi olasılığı da q_i olur. Bu durumda, X_i $(i = 1,2,\cdots,k)$ raslantı değişkeninin marjinal dağılımı Binom dağılımıdır ve

$$\begin{aligned} E(X_i) &= np_i \\ V(X_i) &= np_i q_i \\ M_{X_i}(t) &= (p_i e^t + q_i)^n \end{aligned}$$

olmaktadır.

Örnek: Bir bankanın 260 yatırım müşterisinin 110′ u dövizi, 85′ i altını ve 65′ i repoyu bir çok yatırım araçları arasından ilk sırada tercih ettiklerini belirtmişlerdir.

a) Bu yatırım müşterilerinden rasgele 40 kişi seçilsin. Bunlardan 18′ inin dövizi, 14′ ünün altını ve 8′ inin repoyu yatırım aracı olarak tercih etmesi olasılığını bulunuz.

b) 40 kişiden kaçının dövizi, altını ve repoyu yatırım aracı olarak seçmesini beklersiniz.

Çözüm:

a)

$$P(X_1 = 18, X_2 = 14, X_3 = 8) = \frac{40!}{18!\ 14!\ 8!}\left(\frac{110}{260}\right)^{18}\left(\frac{85}{260}\right)^{14}\left(\frac{65}{260}\right)^{8} = 0.0166$$

b)

$$E(X_1) = np_1 = 40 \times \left(\frac{110}{260}\right) = 16.923 \cong 17$$

$$E(X_2) = np_2 = 40 \times \left(\frac{85}{260}\right) = 13.0769 \cong 13$$

$$E(X_3) = np_3 = 40 \times \left(\frac{65}{260}\right) = 10$$

4. GEOMETRİK DAĞILIM

Bir Bernoulli denemesinin ilgilenilen olay **ilk kez** ortaya çıkıncaya dek yinelendiği durumu düşünelim. Her yinelemenin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında, yineleme sayısının dağılımı ***geometrik dağılım*** olur.

Binom dağılımında, Bernoulli denemelerinin sayısı sabittir ve elde edilen başarıların sayısı Binom raslantı değişkenidir. Geometrik dağılımda ise, başarı sayısı (1 tane) sabittir ve yapılan bağımsız Bernoulli denemelerinin toplam sayısı Geometrik raslantı değişkenidir.

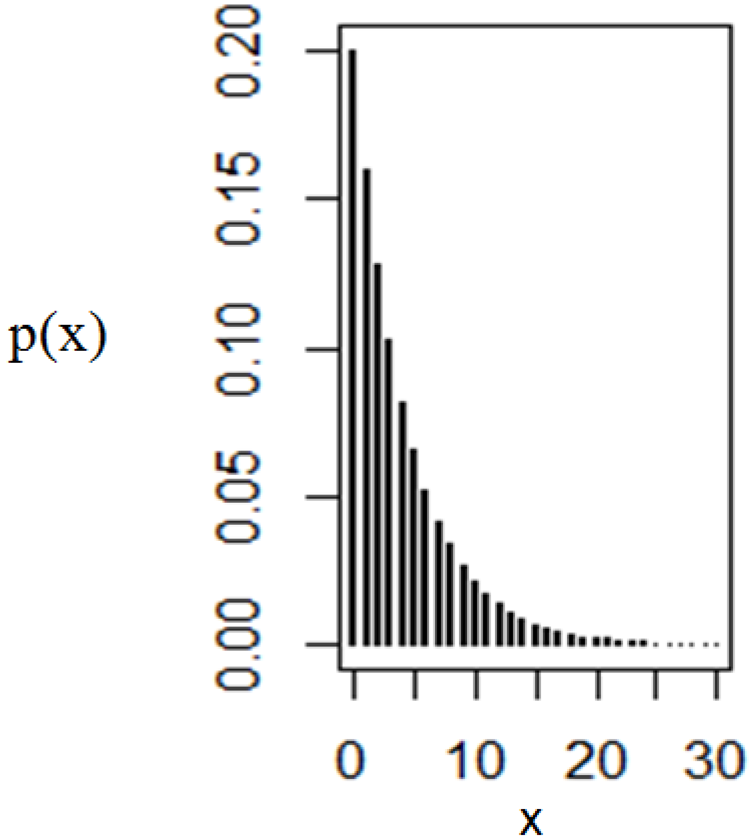
Örnekler:

- Bir paranın "Yazı" elde edilinceye dek atılması
- Her oyunda kazanma olasılığı aynı kalması koşulu altında başarı elde edilinceye dek oyunun tekrarlanması

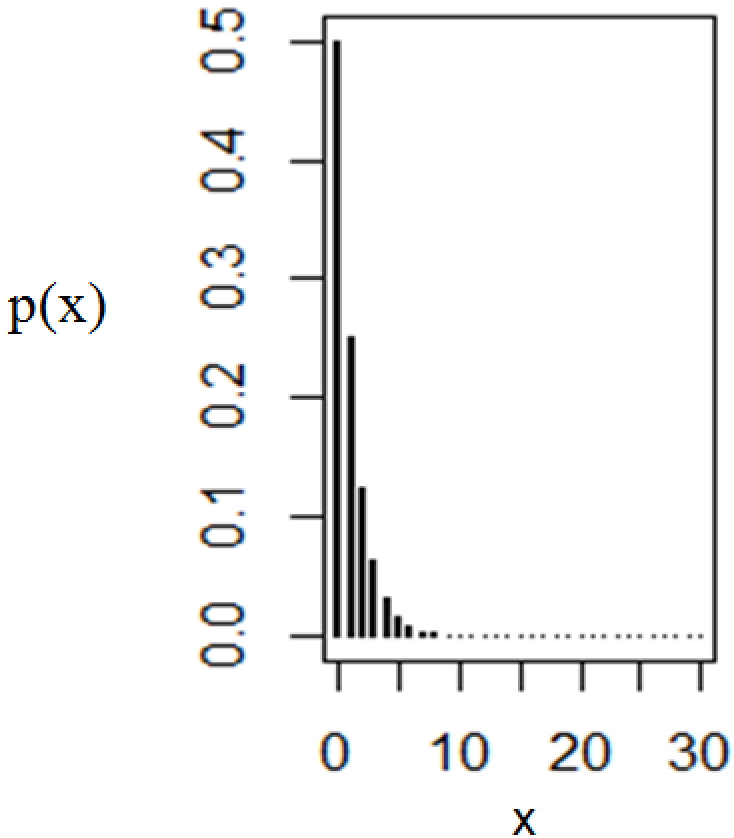
Tanım: *X* raslantı değişkeni *p* ($0<p<1$) parametresi ile geometrik dağılıma sahip olsun. *X* raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} p(x) &= p\,(1-p)^{x-1} \quad , \quad x = 1,2,3,\cdots \ \ \textit{için} \\ &= 0 \quad , \quad \textit{öteki } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

biçimindedir ve *X~Geometrik*(*p*) biçiminde gösterilir.



Geometrik (0.2) dağılımı



Geometrik (0.5) dağılımı

Moment Çıkaran Fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{x=1}^{+\infty} e^{tx} p(x) \\
&= \sum_{x=1}^{+\infty} e^{tx} p q^{x-1} \\
&= p e^{t} \sum_{x=1}^{+\infty} (q e^{t})^{(x-1)} \\
&= \frac{p e^{t}}{1 - q e^{t}} \ , \quad |q e^{t}| < 1
\end{aligned}
$$

Burada, aşağıdaki geometrik seri toplamından yararlanılmıştır:

$$
(r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots) = \frac{1}{1-r} \ , |r| < 1
$$

Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla Geometrik dağılımın beklenen değer ve varyansı aşağıda elde edilmiştir.

Beklenen Değeri:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{pe^t(1-qe^t)+pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

Varyansı:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\bigg|_{t=0} &&= \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{pe^t(1-qe^t)^2 + 2pe^t qe^t(1-qe^t)}{(1-qe^t)^4}\bigg|_{t=0} &&= \frac{pe^t(1-qe^t) + 2pe^t qe^t}{(1-qe^t)^3}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{pe^t - pe^t qe^t + 2pe^t qe^t}{(1-qe^t)^3}\bigg|_{t=0} &&= \frac{pe^t + pqe^{2t}}{(1-qe^t)^3}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{p+pq}{p^3} &&= \frac{1+q}{p^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\ &= \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

Dağılım Fonksiyonu:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{x} pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{x} q^{k-1} = p\left(\frac{1-q^x}{1-q}\right) = 1-q^x$$

olarak elde edilir. Burada, aşağıda verilen geometrik seri toplamından yararlanılmıştır:

$$(r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) = \frac{1-r^{(n+1)}}{1-r}$$

Dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F(x) \quad &= \quad 1-q^x \quad , \quad x = 1,2,3,\cdots \\ &= \quad 0 \quad , \quad x < 1 \\ &= \quad 1 \quad , \quad x \to +\infty \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem: X~$Geometrik(p)$ ise,

$$P(X > j + k \mid X > j) = P(X > k)$$

olur. Bu özellik ***hafızasızlık (belleksizlik) özelliği*** olarak adlandırılır.

Tanıt: Koşullu olasılık tanımından,

$$\begin{aligned} P(X > j + k \mid X > j) &= \frac{P(X > j + k \;\cap\; X > j)}{P(X > j)} &&= \frac{P(X > j + k)}{P(X > j)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq j + k)}{1 - P(X \leq j)} &&= \frac{1 - \left(1 - q^{j+k}\right)}{1 - (1 - q^{j})} \\ &= \frac{q^{j+k}}{q^{j}} &&= q^{k} \\ &= P(X > k) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yorumu: Bu özellik, istenen olay *j* denemeden önce ortaya çıkmadığında, *j+k* deneme sonra gözlenmesi olasılığının önceki deneme sayısına bağlı olmadığını göstermektedir. Geometrik dağılım, kesikli dağılımlar içinde hafızasızlık özelliğine sahip tek dağılımdır.

Örnek: Bir bilgisayar oyununda bir oyuncunun kazanma olasılığı 0.6' dır. Oyun, oyuncunun kazanması durumunda bir sonraki oyuna geçmesine izin vermektedir.

a) Oyuncunun iki oyun sonunda sonraki oyuna geçmesi olasılığını bulunuz.

b) Sonraki oyuna geçmek için beklenen oyun sayısını bulunuz.

Çözüm: X raslantı değişkeni oyuncunun bir sonraki oyuna geçene kadar oynadığı oyun sayısı olmak üzere, *X~Geometrik*(*0.6*)'dır. X' in olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.6 \times\ 0.4^{x-1} \quad , \quad x = 1,2,3,\cdots \ \ için \\ &= 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $P(X = 2) = 0.6 \times\ 0.4^{2-1} = 0.24$ bulunur.

b) $E(X) = (1/p) = (1/0.6) = 1.6667 \cong 2$ olur

5. NEGATİF BİNOM DAĞILIMI (NEGATİF İKİ TERİMLİ DAĞILIM)

Bağımsız Bernoulli denemeleri, ilgilenilen olay **k-ıncı kez** ortaya çıkıncaya dek yinelendiğinde, yapılan toplam Bernoulli denemelerinin sayısının dağılımı **negatif binom dağılımı** olarak bilinir. Negatif binom dağılımı, geometrik dağılımın genelleştirilmiş halidir.

Negatif Binom dağılımında, başarı sayısı (k başarı) sabittir ve birbirinden bağımsız yapılan Bernoulli denemelerinin toplam sayısı Negatif Binom raslantı değişkenidir.

Örnekler:

- Bir paranın altı kez "Yazı" elde edilinceye dek atılması
- Bir santranç turnuvasında A oyuncusunun 4 kez kazanmasına dek yapılan santranç maçlarının sayısı

Tanım: *X* raslantı değişkeni k (k>0) ve *p* $(0 < p < 1)$ parametreleri ile negatif binom dağılımına sahip olsun. *X* raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu,

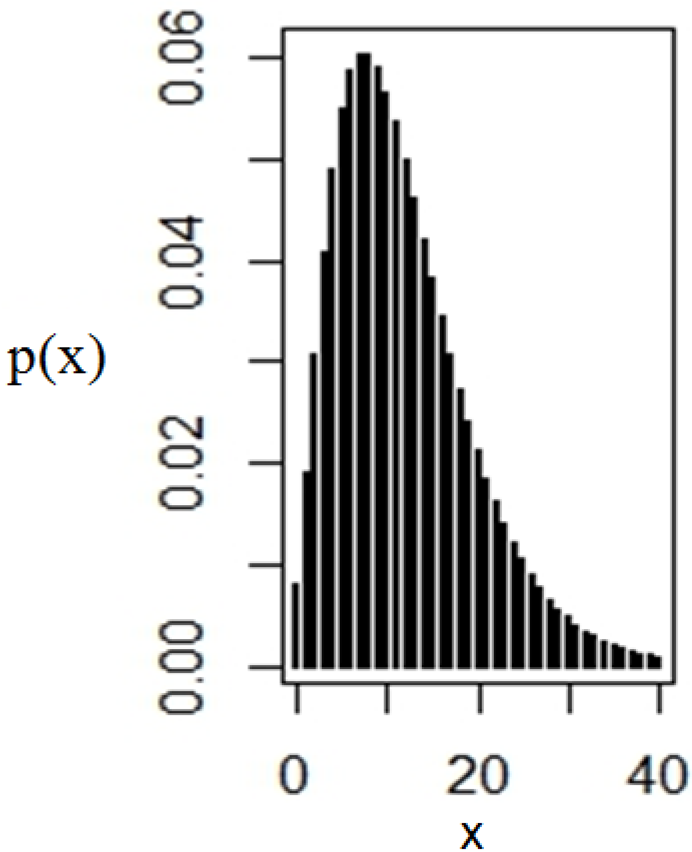
$$
\begin{aligned}
p(x) &= \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{(x-k)} \quad , \quad x = k, (k+1), (k+2), \cdots \ \textit{için} \\
&= 0 \quad , \quad \textit{öteki } x \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

biçimindedir ve *X~NB* (*k*, *p*) biçiminde gösterilir.

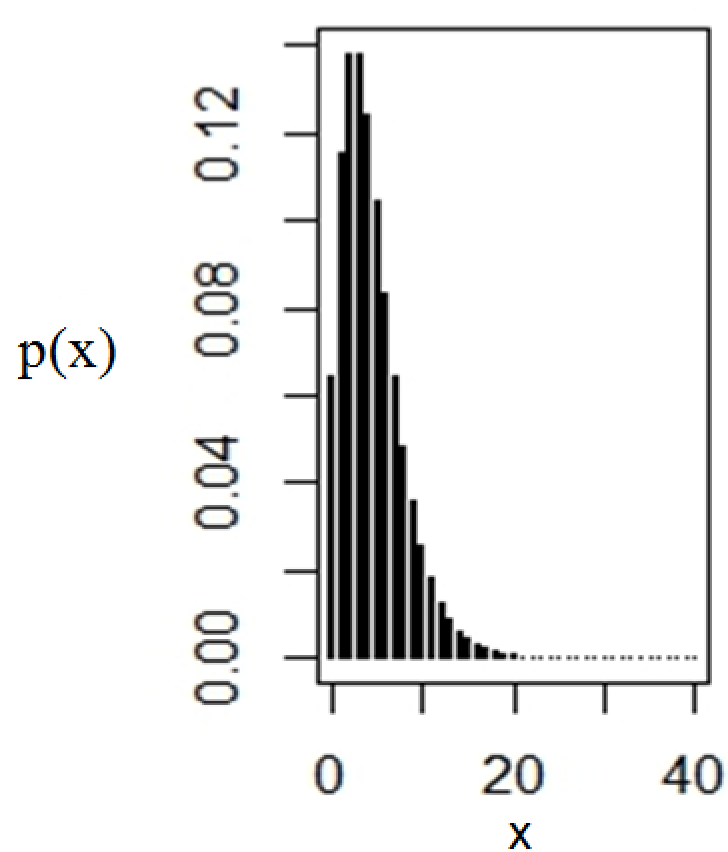
Ayrıca, negatif binom dağılımı k=1 olduğunda, geometrik dağılıma dönüşür:

Geometrik(p) = NB(k=1,p)

Teorem: *k* tane birbirinden bağımsız ve *Geometrik*(*p*) dağılımına sahip raslantı değişkenlerinin toplamı olan $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$'nin dağılımı, *k* ve *p* parametreleri ile negatif binom dağılımıdır.



NB (3, 0.2) dağılımı



NB (3, 0.5) dağılımı

Moment Çıkaran Fonksiyonu:

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k$$

Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla Negatif Binom dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıda elde edilmiştir:

Beklenen Değeri:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k \Bigg|_{t=0} \\
&= k\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{k-1}\left(\frac{pe^t(1-qe^t)+pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{k-1}\left(\frac{kpe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{k}{p}
\end{aligned}$$

Varyansı:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \left.\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k\left(\frac{k}{1-qe^t}\right)\right]\right|_{t=0} \\
&= \left.\left[\left[k\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{k-1}\left(\frac{pe^t(1-qe^t)+pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\right]\left(\frac{k}{1-qe^t}\right)+\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k\left(\frac{kqe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\right]\right|_{t=0} \\
&= \left.\left[\frac{k^2(pe^t)^k}{(1-qe^t)^{k+2}}+\frac{kqe^t(pe^t)^k}{(1-qe^t)^{k+2}}\right]\right|_{t=0} \\
&= \frac{k^2p^k+kp^kq}{p^{k+2}} \\
&= \frac{k^2+kq}{p^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2 \\
&= \frac{k^2+kq}{p^2}-\left(\frac{k}{p}\right)^2 \\
&= \frac{k^2+kq-k^2}{p^2} \\
&= k\frac{q}{p^2}
\end{aligned}
$$

Örnek: Belirli bir bankanın işe alım sınavı 3 aşamadan oluşmaktadır ve adayların her bir sınavda başarılı olması olasılığı 0.70'tir. Her bir sınavın birbirinden bağımsız olması ve adayların sınırsız sınav hakları olduğunu varsayalım.

a) Bir adayın işe alınması için beklenen sınav sayısını bulunuz.
b) Bir adayın 3 aşamayı 5 sınavda tamamlaması olasılığını bulunuz.

Çözüm: X raslantı değişkeni 3 aşamayı başarıncaya dek girilen sınav sayısını göstermek üzere, $X \sim NB(k = 3, p = 0.70)$ olur. X' in olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

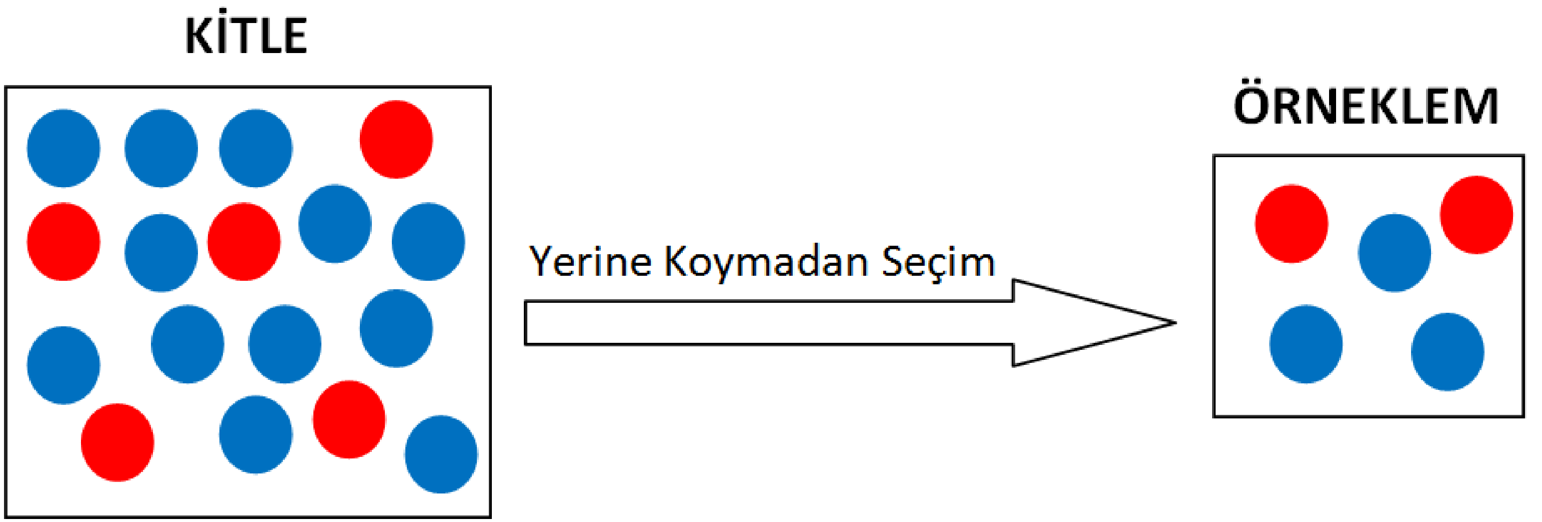
$$
\begin{aligned}
p(x) &= \binom{x-1}{2} 0.70^3\, 0.30^{(x-3)} &&, \quad x = 3,4,5,\cdots \quad \text{için} \\
&= 0 &&, \quad \text{öteki } x \text{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

a) $E(X) = (k/p) = (3/0.70) \cong 4.2857$ olarak bulunur.

b) $P(X = 5) = \binom{4}{2} 0.70^3\, 0.30^{(5-3)} = 0.1852$ olur.

6. HİPERGEOMETRİK DAĞILIMI

İki çeşit nesne bulunan sonlu sayıdaki N öğeden oluşan bir kitle içerisinde, r tane istenen türden, (N-r) tane diğer türden nesne olduğunu düşünelim. Bu kitleden **yerine koymaksızın** seçilen n birimlik örneklemdeki istenen türdeki nesnelerin sayısının dağılımı, **hipergeometrik dağılım** olarak bilinir.



Örnekler:

- 5 kişiden oluşacak bir komisyonun üyeleri, 15'i bayan olan 50 kişilik bir gruptan rasgele seçilecektir. Komisyona seçilecek bayan üye sayısı ile ilgilenirsek, bayan üye sayısının dağılımı hipergeometrik dağılıma bir örnektir. Çünkü, komisyona seçilen bir üye yeniden seçilemez ve dolayısıyla bir başka kişinin komisyona seçilmesi olasılığı seçim süreci boyunca aynı kalamaz.

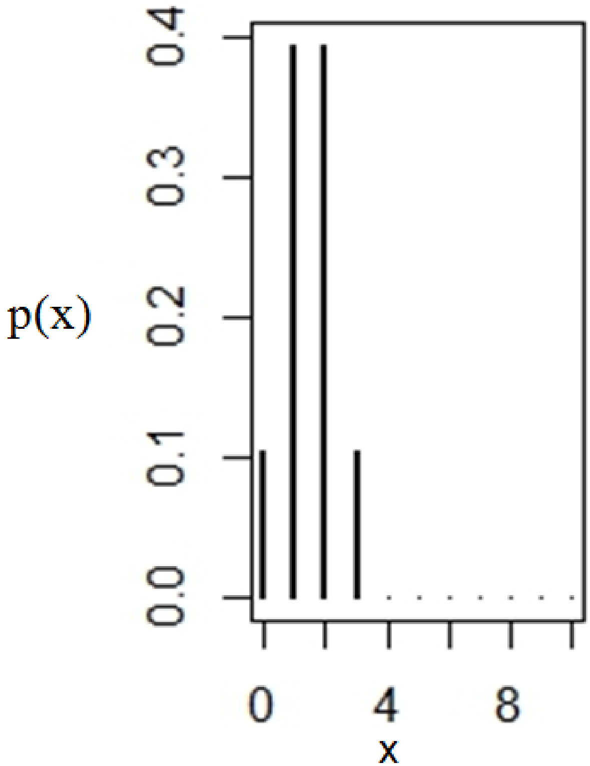
- 5 kırmızı 12 mavi topun bulunduğu torbadan 5 top yerine koymama koşulu altında çekiliyor olsun. Çekilen 5 top içindeki kırmızı top sayısı ile ilgilenelim. Kırmızı top sayısının dağılımı yerine koymama koşulu altında hipergeometrik dağılımdır. Bu seçim yerine koyma koşulu altında yapılırsa, çekilen kırmızı top sayısının dağılımı binom dağılımına dönüşecektir. Bu nedenle hipergeometrik dağılım bağımlı denemelerin (örneklemlerin) dağılımı olarak bilinir.

Önemli: Eğer kitledeki birim sayısı N çok büyük ve seçilen n birimlik örneklem bu kitleye göre çok küçük ise yani kitlenin %5’ ini geçmiyor ise, yerine koymama ya da yerine koyma koşulu altında örneklem seçme işlemi arasında çok büyük bir fark yoktur. Bu durumda, hipergeometrik dağılımın olasılıklarının yaklaşık değerleri, n ve $p=(r/N)$ parametreleri ile binom dağılımından elde edilebilir. (Miller and Miller, 1999)

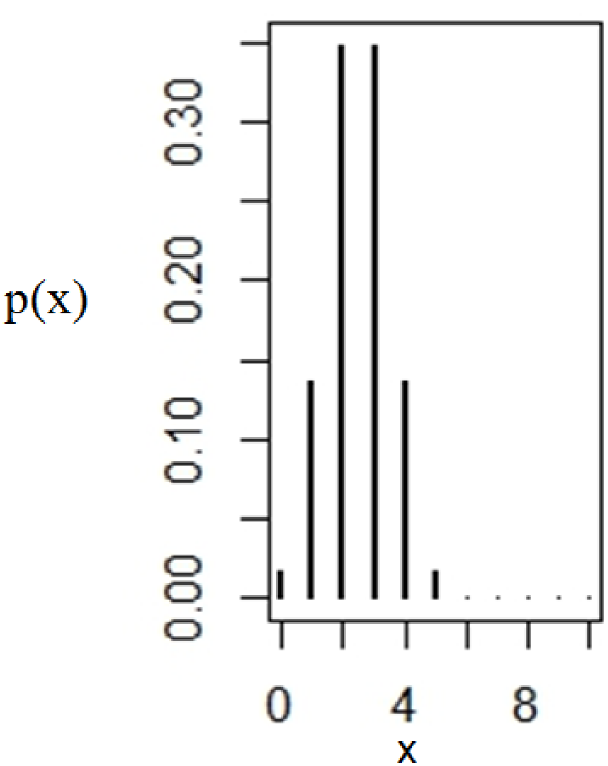
Tanım: X raslantı değişkeni hipergeometrik dağılıma sahip ise olasılık fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x \in \left\{\max\left(0, n-(N-r)\right), \cdots, \min(r,n)\right\} \text{ için} \\
&= 0 \quad , \quad \text{öteki x değerleri için}
\end{aligned}
$$

biçimindedir ve X~Hipergeometrik(n,r,N) biçiminde gösterilir.



Hipergeometrik(3, 10, 20) dağılım



Hipergeometrik(5, 10, 20) dağılım

Beklenen Değeri:

$$E(X) = \frac{nr}{N}$$

Varyansı:

$$V(X) = \frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Örnek: Bir okulun giriş sınavı, matematik ve Türkçe olmak üzere iki alanda yapılmaktadır. 100 soruluk bir sınavda, matematik alanında 40, Türkçe alanında 60 soru bulunmaktadır. Bu sınav, öğrencinin 100 soru içinden rasgele seçeceği 20 soru üzerinden değerlendirilecektir.

a) Öğrencinin matematik alanında seçtiği sınav sorusunun en çok 3 olması olasılığı nedir?

b) Öğrencinin matematik alanında kaç soru seçmesi beklenir?

Çözüm: Matematik alanında seçilen sınav soru sayısı X raslantı değişkeni olmak üzere, dağılımı hipergeometrik dağılıma uygundur. n=20, r=40, N=100 olacaktır. X' in olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{40}{x}\binom{60}{20-x}}{\binom{100}{20}} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots,20 \text{ } için \\ &= \quad 0 \quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} P(X \le 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \frac{\binom{40}{0}\binom{60}{20}}{\binom{100}{20}} + \frac{\binom{40}{1}\binom{60}{19}}{\binom{100}{20}} + \frac{\binom{40}{2}\binom{60}{18}}{\binom{100}{20}} + \frac{\binom{40}{3}\binom{60}{17}}{\binom{100}{20}} \\ &= 0.008644 \end{aligned}$$

b) $E[X] = \frac{nr}{N} = \frac{20 \times 40}{100} = 8$ matematik sorusu seçmesi beklenir.

Örnek: Bir market biri bilinen diğeri ise, yeni marka bir deterjanı aynı paketlerde sunmak ve müşterilerin yeni ürünü de almasını sağlamak istiyor. Bu amaçla, 25 tane bilinen ve 5 tane yeni marka deterjan olmak üzere, 30 tane deterjandan 8 tanesi yerine konulmadan seçilerek paketler düzenleniyor.

c) Paketteki tüm deterjanların yeni marka deterjan olması olasılığını,

d) Pakette en çok 1 deterjanın yeni marka deterjan olması olasılığını ve

e) Paketteki yeni marka deterjan sayısının beklenen değerini bulunuz.

Çözüm: Paketteki yeni marka deterjan sayısı *X* raslantı değişkeni olmak üzere, dağılımı hipergeometrik dağılıma uygundur. *n*=8, *r*=5, *N*=30 olacaktır. X' in olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{5}{x}\binom{25}{8-x}}{\binom{30}{8}} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5 \; için \\ &= \quad 0 \quad , \quad öteki\; x \; değerleri\; için \end{aligned}$$

a) $P(X = 8) = 0$

b) Pakette en çok bir deterjanın yeni marka deterjan olması olasılığı :

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{\binom{5}{0}\binom{25}{8}}{\binom{30}{8}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{25}{7}}{\binom{30}{8}} = 0.5954$$

c) $E[X] = \frac{nr}{N} = \frac{8\times5}{30} = 1.33 \cong 1$ tane yeni marka deterjan olması beklenir.

7. POISSON DAĞILIMI

Poisson dağılımı, ilgilenilen bir olayın belirli bir zaman, alan ya da hacimde rasgele ortaya çıkma sayısının olasılık dağılımıdır.

İstatistikte en sık kullanılan kesikli olasılık dağılımlarından biridir.

İlk olarak, Fransız matematikçi Siméon Denis Poisson'nun 1837 yılında "Hukuksal ve Kamusal Konularında Cezai Hükümlerin Olasılıkları Üzerine Araştırma (Research on the Probability of Judgments in Criminal and Civil Matters)" başlıklı çalışmasında tanıtılmıştır. Dağılımın ilk uygulaması olarak, Ladislaus Bortkiewich'in 1898 yılında Prusya ordusunda görevi sırasında at tepmesi sonucu ölen askerlerin sayısı üzerine araştırması örneği verilir.

Örnekler:

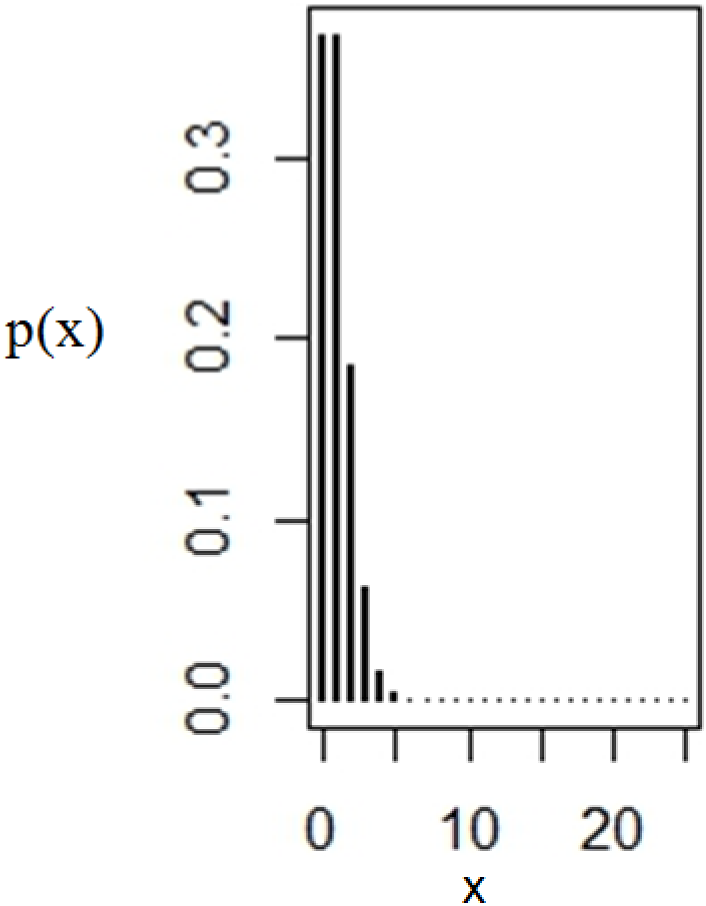
- Bir kavşakta bir ay içerisinde meydana gelen trafik kazalarının sayısı
- Bir santrale bir günde gelen telefonların sayısı
- Bir bölgede bir yıl içerisinde meydana gelen hortumların sayısı
- Bir e-posta sunucusuna bir günde gelen postaların sayısı
- Bir kitabın her sayfasındaki yazım hatalarının sayısı
- Radyoaktif bir maddeden belirli bir zaman aralığında yayılan partikül sayısı
- Belirli bir köpek cinsinde bulunan pire sayısı
- Bir saat aralığında belli bir internet sitesine yapılan bağlantıların sayısı
- Yarım saat içinde bir nakliyat deposuna yükleme-boşatılma için gelen kamyonların sayısı
- Belirli bir hava alanına her saat inen uçak sayısı
- Büyük bir bilgisayar laboratuarında bir ayda meydana gelen elektrik kesintilerinin sayısı

Tanım: X raslantı değişkeni λ (λ>0) parametresiyle Poisson dağılıma sahip ise olasılık fonksiyonu,

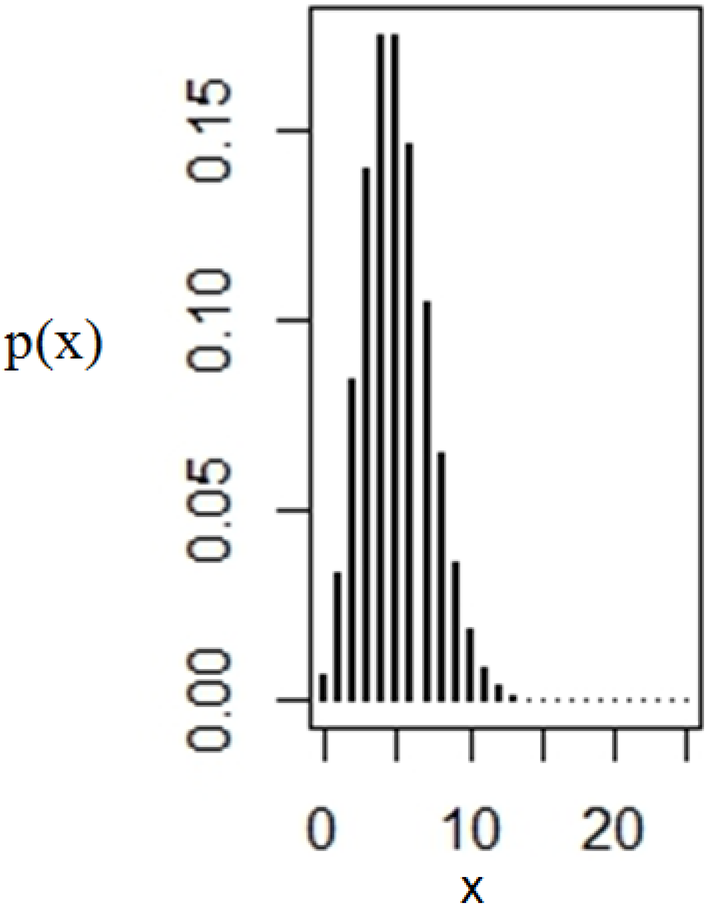
$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots \text{ için} \\ &= 0 \quad , \quad \text{öteki } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

biçimindedir ve X~*Poisson*(λ) biçiminde gösterilir.

Burada, λ, birim zaman, alan ya da hacimde ortaya çıkması beklenen olay sayısını ifade eder.



Poisson(0.5) dağılımı



Poisson(5) dağılımı

Poisson dağılımının özellikleri:

- Poisson dağılımının en önemli özelliğinden biri beklenen değerinin ve varyansının birbirine eşit olmasıdır.
- Verilen bir zaman aralığında (ya da alanda/hacimde), ilgilenilen olayın ortalama ortaya çıkma sayısı, zaman aralığının (ya da alanın/hacmin) büyüklüğü ile doğru orantılıdır.
- İlgilenilen bir olayın belirli bir zaman aralığında meydana gelmesi, farklı zaman aralıklarında meydana gelen olaylardan bağımsızdır. Diğer bir değişle, olaylar birbirinden bağımsız olarak meydana gelmektedir.

Beklenen Değeri:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{+\infty} xp(x) &&= \sum_{x=0}^{+\infty} x\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\right) \\
&= \sum_{x=1}^{+\infty} xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x\,(x-1)!} &&= e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda+\lambda^2+\frac{\lambda^3}{2!}+\cdots\right) &&= \lambda e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} &&= \lambda
\end{aligned}
$$

Burada, $(e^{\lambda})'$ nın Maclaurin açılımından yararlanılmıştır. Bu açılıma göre,

$$e^{\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots$$

olarak yazılabilir.

Varyansı:

Faktöriyel momentlerden yararlanarak varyansı elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
\mu_{[2]} &= E\big(X(X-1)\big) & &= \sum_{x=0}^{+\infty} x\,(x-1)p(x) \\
&= \sum_{x=0}^{+\infty} x\,(x-1)\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\right) & &= \sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x\,(x-1)(x-2)!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!} & &= e^{-\lambda}\left(\lambda^2+\frac{\lambda^3}{1!}+\frac{\lambda^4}{2!}+\cdots\right) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right) & &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} \\
&= \lambda^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \mu_{[2]}+\mu_{[1]}-\left(\mu_{[1]}\right)^2 \\
&= E\big(X(X-1)\big)+E(X)-\big(E(X)\big)^2 \\
&= \lambda^2+\lambda-(\lambda)^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

Örnek: Bir günde benzin istasyonuna gelen müşterilerin sayısının dağılımı, saatte ortalama λ=5 ile Poisson dağılımına uygundur. Günün herhangi bir saatinde benzin istasyonuna gelen kişilerin 3' ten çok olması olasılığını bulalım.

Çözüm: X raslantı değişkeni, bir saatte benzin istasyonuna gelen müşterilerin sayısını göstermek üzere, $X \sim Poisson(\lambda = 5)'$ tir. X' in olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-5}\frac{5^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3,\cdots \text{ } i\c{c}in \\ &= 0 \qquad\qquad , \quad \ddot{o}teki\ x\ de\breve{g}erleri\ i\c{c}in \end{aligned}$$

İstenen olasılık,

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] \\ &= 1 - \left[e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} + e^{-5}\frac{5^3}{3!}\right] \\ &= 1 - 0.2650259 \\ &= 0.7349741 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Moment Çıkaran Fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx}\, p(x) \\
&= \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{(e^t\lambda)^0}{0!} + \frac{(e^t\lambda)^1}{1!} + \frac{(e^t\lambda)^2}{2!} + \cdots \right) \\
&= e^{-\lambda}\ e^{e^t \lambda} \\
&= e^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}
$$

Burada, $(e^{e^t\lambda})$' nın Maclaurin açılımından yararlanılmıştır. Bu açılıma göre,

$$
e^{e^t\lambda} = \frac{(e^t\lambda)^0}{0!} + \frac{(e^t\lambda)^1}{1!} + \frac{(e^t\lambda)^2}{2!} + \cdots
$$

olarak yazılabilir.

Binom Dağılımının Poisson Dağılımına Yakınsaması
(POISSON TEOREMİ)

Parametreleri n ve p olan Binom dağılımında n' nin çok büyük ($n \to \infty$) ve p' nin (ya da q' nun) çok küçük ($p \to 0$ ya da $q \to 0$) olduğu durumda, np sabit kalmak üzere, Binom dağılımı, $\lambda = np$ parametreli Poisson dağılımına yakınsar.

$$B(n,p) \xrightarrow[]{\substack{n\to\infty \\ p\to 0\ (ya\ da\ q\to 0\ )}} Poisson(\lambda = np)$$

n ne kadar büyük ve p ne kadar küçük olursa yaklaşım o kadar iyi olur.

$n \geq 100$ ve $np \leq 10$ olduğunda Poisson dağılımından elde edilen olasılıklar, Binom dağılımının olasılıklarına oldukça yakın olacaktır.

$n > 50$ ve $np < 5$ (ya da $nq < 5$) olduğu durumda, bu yaklaşım güvenle kullanılabilir.

Örnek: 500 tane paradan 5 tanesi hilelidir. Bu paralardan 100 tanesi yerine koyma koşulu altında ardı ardına rasgele çekiliyor. Çekilen paraların tam 2 tanesinin hileli olması olasılığını binom dağılımının Poisson dağılımına yakınsaması teoremini kullanarak bulunuz.

Çözüm: 500 paradan 5 tanesi hileli olması nedeniyle, hileli para çekme olasılığı p=0.01 olur. Yerine konularak çekilen 100 paradaki hileli paraların sayısının dağılımı binom dağılımına uygundur: $X \sim B(n=100, p=0.01)$

X'in dağılımı $n \to \infty$ ve $p \to 0$ için, $\lambda = np = 100 \times 0.01 = 1$ ile Poisson dağılımına uygun olur.

İstenen olasılık, Poisson dağılımından $\mathrm{P(X = 2)} \cong \mathrm{e}^{-1} \frac{1^2}{2!} = 0.1839$ olarak bulunur.

Bu olasılık binom dağılımdan $\mathrm{P(X = 2)} = \binom{100}{2} 0.01^2 \ (1 - 0.01)^{98} = 0.1839$ olarak bulunur.

8. KESİKLİ TEK BİÇİMLİ DAĞILIM

X raslantı değişkeninin alacağı n farklı değer olsun. Bu raslantı değişkeni her değeri eşit olasılıkla yani $1/n$ olasılığı ile alıyorsa, X raslantı değişkeni ***kesikli tek biçimli*** dağılıma sahiptir.

Örnekler:

- Bir zar atılması denemesinde zarın üst yüzüne gelen sayıların dağılımı kesikli tek biçimli dağılıma uygundur. Çünkü zarın 1, 2,…, 6 değerlerini alması olasılıkları birbirine eşittir ve (1/6)' dır.
- İçerisinde kırmızı, mavi, siyah, mor, sarı, kahverengi ve turuncu renklerde birer kalem bulunan bir kalem kutu olsun. Bu kalem kutudan rasgele çekilen bir kalemin renginin dağılımı kesikli tek biçimli dağılıma uygundur. Çünkü, kalemin renginin kırmızı, mavi, siyah, mor, sarı, kahverengi, turuncu olması olasılıkları birbirine eşittir ve (1/7)' dir.

Tanım: *n* tane değer alan *X* raslantı değişkeni kesikli tek biçimli dağılıma sahip ise olasılık fonksiyonu,

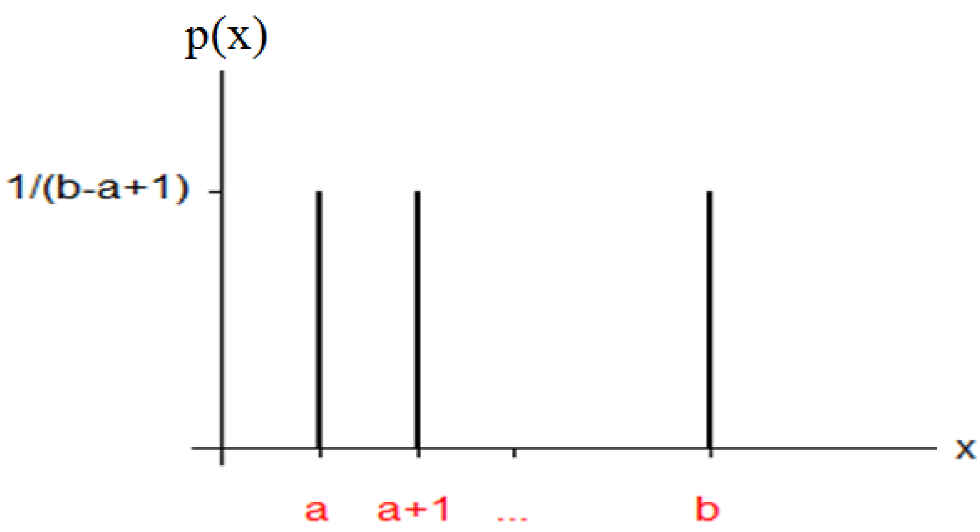
$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{n} \quad , \quad x \in \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\} \; için \\ &= 0 \quad , \quad öteki \; x \; değerleri \; için \end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım: X raslantı değişkeni, a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere, kesikli tek biçimli dağılımına sahip ise olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{b-a+1} \quad , \quad x = a, (a+1), (a+2), \cdots, b \;\; için \\ &= 0 \quad\quad\quad\quad , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

biçimindedir ve X~*Kesikli Tekbiçimli*(a, b) biçiminde gösterilir.



Kesikli Tekbiçimli(a, b) dağılım

X~*Kesikli Tekbiçimli*(a, b) raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıda elde edilmiştir:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t=a}^{x} \frac{1}{b-a+1} = \sum_{t=a-(a-1)}^{x-(a-1)} \frac{1}{b-a+1} = \sum_{t=1}^{x-a+1} \frac{1}{b-a+1} = \frac{x-a+1}{b-a+1}$$

olarak elde edilir.

Dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x-a+1}{b-a+1} \quad , \quad x = a, (a+1), (a+2), \cdots, b \\ &= 0 \quad , \quad x < a \\ &= 1 \quad , \quad x \geq b \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.

X~Kesikli Tekbiçimli$(a,\ b)$ raslantı değişkeninin beklenen değerini ve varyansını bulalım.

Beklenen Değeri:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=a}^{b} x \frac{1}{b-a+1} \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{x=a}^{b} x \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{x=a-(a-1)}^{b-(a-1)} \left(x + (a-1)\right) \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{x=1}^{b-a+1} (x + a - 1\ ) \\
&= \frac{1}{b-a+1} \left[(b-a+1)(a-1) + \frac{(b-a+1)(b-a+2)}{2} \right] \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

Burada, $\sum_{y=1}^{n} y = \frac{n(n+1)}{2}$ seri toplamından yararlandık.

Varyansı:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a+1} \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{x=a}^{b} x^2 \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{x=a-(a-1)}^{b-(a-1)} \left(x+(a-1)\right)^2 \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{x=1}^{b-a+1} \left(x+(a-1)\right)^2 \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{x=1}^{b-a+1} [x^2+2(a-1)x+(a-1)^2] \\
&= \frac{1}{b-a+1} \left[\frac{(b-a+1)(b-a+2)(2b-2a+3)}{6}\right. \\
&= \left. \qquad +2(a-1)\frac{(b-a+1)(b-a+2)}{2}+(a-1)^2(b-a+1)\right] \\
&= \frac{(b-a+2)(2b-2a+3)}{6}+(a-1)(b-a+2)+(a-1)^2 \\
&= \frac{2b^2+2ab+2a^2+b-a}{6}
\end{aligned}
$$

Burada, $\sum_{y=1}^{n} y^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ seri toplamından yararlandık.

Varyansı (Devam):

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \\
&= \frac{2b^2 + 2ab + 2a^2 + b - a}{6} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 + 2b - 2a - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} \\
&= \frac{b^2 - 2ab + a^2 + 2b - 2a}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2 + 2(b-a)}{12} \\
&= \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}
\end{aligned}
$$

X~*Kesikli Tekbiçimli*(a, b) raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{x=a}^{b} e^{tx}\, p(x) \\
&= \sum_{x=a}^{b} e^{tx} \left(\frac{1}{b-a+1}\right) \\
&= \sum_{x=a-(a-1)}^{b-(a-1)} e^{t(x+(a-1))} \left(\frac{1}{b-a+1}\right) \\
&= \frac{1}{(b-a+1)} \sum_{x=1}^{b-a+1} e^{t(x+(a-1))} \\
&= \frac{e^{t(a-1)}}{(b-a+1)} \sum_{x=1}^{b-a+1} e^{tx} \\
&= \frac{e^{t(a-1)}}{(b-a+1)} \left[e^{t} + e^{2t} + e^{3t} + \cdots + e^{t(b-a+1)}\right] \\
&= \frac{e^{ta}}{(b-a+1)} \left[1 + e^{t} + e^{2t} + \cdots + e^{t(b-a)}\right] \\
&= \frac{e^{ta}}{(b-a+1)} \left(\frac{1-e^{t(b-a+1)}}{1-e^{t}}\right) \\
&= \frac{e^{ta} - e^{t(b+1)}}{(b-a+1)(1-e^{t})}
\end{aligned}
$$

Örnek: Hilesiz bir zarın atılması denemesinde üst yüzeye gelen sayının çift sayı olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Zarın üst yüzeyine gelen sayıların dağılımı kesikli tek biçimli dağılıma uygundur: X~Kesikli Tekbiçimli(a=1, b=6).

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{6} \quad , \quad x = 1,2,3,4,5,6 \text{ için} \\ &= 0 \quad , \quad \text{öteki x değerleri için} \end{aligned}$$

Üst yüzeye çift sayı gelmesi, A olayı olarak tanımlansın.

$$P(A) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

olarak bulunur.