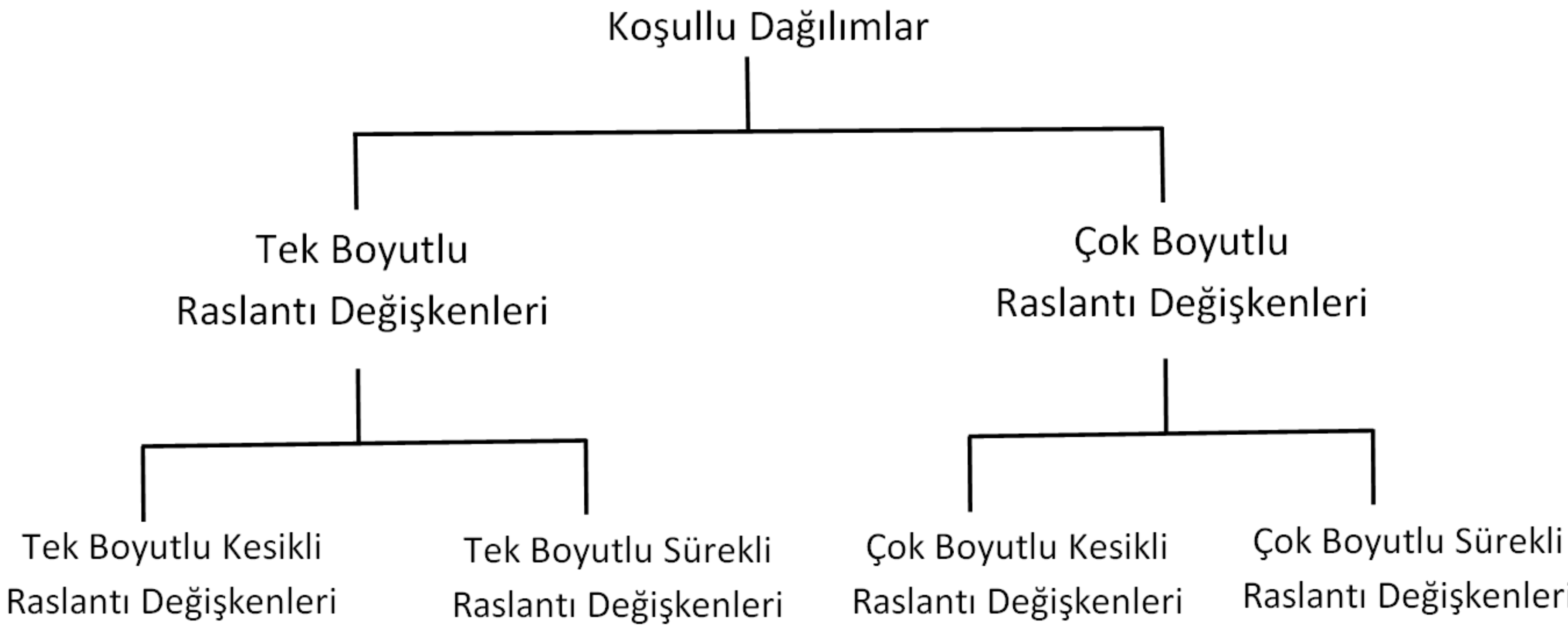
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

KOŞULLU DAĞILIMLAR
Bölüm 4

DERS SORUMLULARI
DOÇ. DR. AYTEN YİĞİTER
DR. ÖĞR. ÜYESİ CEREN EDA CAN


Koşullu Dağılımlar
Tek Boyutlu Raslantı Değişkenleri
Çok Boyutlu Raslantı Değişkenleri
Tek Boyutlu Kesikli Raslantı Değişkenleri
Tek Boyutlu Sürekli Raslantı Değişkenleri
Çok Boyutlu Kesikli Raslantı Değişkenleri
Çok Boyutlu Sürekli Raslantı Değişkenleri

İKİ BOYUTLU SÜREKLİ RASLANTI DEĞİŞKENİ İÇİN KOŞULLU DAĞILIMLAR

(X, Y) iki boyutlu sürekli raslantı değişkeni olsun.

$f_{X\,Y}(x, y)$: X ve Y' nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_X(x)$: X' in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_Y(y)$: Y' in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$F_{X\,Y}(x, y)$: X ve Y' nin bileşik dağılım fonksiyonu

$F_X(x)$: X' in marjinal dağılım fonksiyonu

$F_Y(x)$: Y' in marjinal dağılım fonksiyonu a ve b $(a < b)$ bilinen sabit değerler olsun.

$$\left.\begin{array}{r} f_{X|Y}(x|Y = a) \\ f_{X|Y}(x|Y > a) \\ f_{X|Y}(x|Y \leq a) \\ f_{X|Y}(x|a \leq Y \leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y\ bilindiğinde\ X'\ in\ \ koşullu \\ olasılık\ yoğunluk\ fonksiyonları \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} f_{Y|X}(y|X = a) \\ f_{Y|X}(y|X > a) \\ f_{Y|X}(y|X \leq a) \\ f_{Y|X}(y|a \leq X \leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} X\ bilindiğinde\ Y'\ nin\ \ koşullu \\ olasılık\ yoğunluk\ fonksiyonları \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} F_{X|Y}(x|Y = a) \\ F_{X|Y}(x|Y > a) \\ F_{X|Y}(x|Y \leq a) \\ F_{X|Y}(x|a \leq Y \leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y\ bilindiğinde\ X'in\ \ koşullu \\ dağılım\ fonksiyonları \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} F_{Y|X}(y|X = a) \\ F_{Y|X}(y|X > a) \\ F_{Y|X}(y|X \leq a) \\ F_{Y|X}(y|a \leq X \leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} X\ bilindiğinde\ Y'\ nin\ \ koşullu \\ dağılım\ fonksiyonları \end{array}$$

$Y = y$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(x|y) = P(X \leq x | Y = y)$$

$$\neq \frac{P(X \leq x\,, Y = y)}{P(Y = y)} \left.\begin{array}{l} \textit{Y sürekli bir raslantı} \\ \textit{değişkeni olması nedeniyle,} \\ P(X \leq x|Y = y) \textit{ koşullu olasılığı} \\ \textit{bu şekilde yazılamaz.} \end{array}\right.$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} P(X \leq x | y < Y \leq y + \Delta\, y)$$

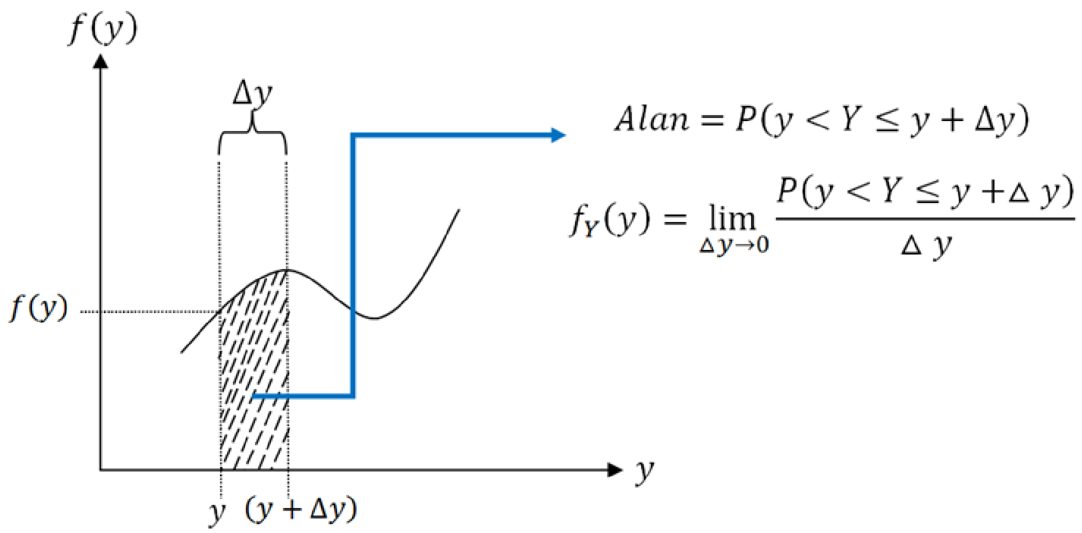
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(X \leq x\,, y < Y \leq y + \Delta\, y)}{P(y < Y \leq y + \Delta\, y)}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x\,, y + \Delta\, y) - F(x\,, y)}{P(y < Y \leq y + \Delta\, y)}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{F(x\,, y + \Delta\, y) - F(x\,, y)}{\Delta\, y}}{\dfrac{P(y < Y \leq y + \Delta\, y)}{\Delta\, y}}$$

Y sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_Y(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < Y \leq y + \Delta\, y)}{\Delta\, y}$$



Herhangi bir $h(x, y)$ fonksiyonunun x ve y' ye göre türevlerinin limit tanımı sırayla, aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(h(x, y)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta\, x\,, y) - h(x, y)}{\Delta\, x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(h(x, y)\big) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(x\,, y + \Delta\, y) - h(x, y)}{\Delta\, y}$$

$$F(x|y) = \frac{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{P(y < Y \leq y + \Delta y)}{\Delta y}} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y} F(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t, z)\, dt\, dz \right)}{f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(t, y)\, dt}{f_Y(y)}$$

$Y = y$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dfrac{\partial}{\partial y} F(x, y)}{f_Y(y)} \right) = \frac{\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad , f_Y(y) > 0$$

$X = x$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} F(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t, z)\, dt\, dz\right)}{f_X(x)} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x, z)\, dz}{f_X(x)}$$

$X = x$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(y|x) = \frac{\partial}{\partial y} F(y|x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x} F(x, y)}{f_X(x)}\right) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad , f_X(x) > 0$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik oasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x+y}{12} \quad , \quad 0<x<2 \ , 1<y<3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $f(x|y)$ ve $f(y|x)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

b) $F(x|y)$ ve $F(y|x)$ koşullu dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

c) $P(X<1|Y=2)$, $P(X>1.5\ |Y=2)$, $P(X<4|Y=2)$ ve $P(X>4|Y=2)$ koşullu olasılıkları hesaplayınız.

d) $P(1.5<Y<2.5|X=1)$, $P(Y\geq 2|X=1)$, $P(Y<0.5|X=1)$ ve $P(Y>0.5|X=1)$ koşullu olasılıkları hesaplayınız.

Çözüm:

a) Öncelikle X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım:

$$f_X(x) = \int_1^3 f(x,y)dy = \int_1^3 \left(\frac{x+y}{12}\right) dy = \frac{1}{12}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^3 = \frac{x+2}{6}$$

$$f_X(x) \;=\; \frac{x+2}{6} \quad , \quad 0 < x < 2$$
$$\;=\; 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 f(x,y)dx = \int_0^2 \left(\frac{x+y}{12}\right) dx = \frac{1}{12}\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_0^2 = \frac{1+y}{6}$$

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1+y}{6} \quad , \quad 1 < y < 3$$
$$\;=\; 0 \quad , \quad diğer\ y\ değerleri\ için$$

Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda bulunmuştur:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{x+y}{12}}{\frac{1+y}{6}} = \frac{x+y}{2(1+y)}$$

$$f(x|y) = \frac{x+y}{2(1+y)} \quad , \quad 0 < x < 2 \ \ (y \; değeri \; biliniyor \; ve \; 1 < y < 3' \; tür.)$$

$$= 0 \quad , \quad diğer \; x \; değerleri \; için$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{x+y}{12}}{\frac{x+2}{6}} = \frac{x+y}{2(x+2)}$$

$$f(y|x) = \frac{x+y}{2(x+2)} \quad , \quad 1 < y < 3 \ \ (x \; değeri \; biliniyor \; ve \; 0 < x < 2' \; dir.)$$

$$= 0 \quad , \quad diğer \; y \; değerleri \; için$$

b) Koşullu dağılım fonksiyonlarını bulalım:

$$F(x|y) = \int_0^x f(t|y)\,dt = \int_0^x \left(\frac{t+y}{2(1+y)}\right) dt = \frac{1}{2(1+y)}\left(\frac{t^2}{2} + ty\Big|_0^x\right)$$

$$= \frac{1}{2(1+y)}\left(\frac{x^2}{2} + xy\right) = \frac{x(x+2y)}{4(1+y)}$$

$$F(x|y) = \frac{x(x+2y)}{4(1+y)} \quad , \quad 0 < x < 2 \ \ (y\ değeri\ biliniyor\ ve\ 1 < y < 3'tür.)$$

$$= 0 \quad , \quad x \leq 0$$

$$= 1 \quad , \quad x \geq 2$$

Sağlama: $F(2|y) = 1$ olmalıdır.

$$F(y|x) = \int_1^y f(z|x)\,dz = \int_1^y \left(\frac{x+z}{2(x+2)}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2(x+2)}\left(xz + \frac{z^2}{2}\Big|_1^y\right) = \frac{1}{2(x+2)}\left(xy + \frac{y^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(y-1)(2x+y+1)}{4(x+2)}$$

$$\begin{aligned} F(y|x) &= \frac{(y-1)(2x+y+1)}{4(x+2)} \quad , \quad 1 < y < 3 \ \ (x\ değeri\ biliniyor\ ve\ 0 < x < 2'dir.) \\ &= 0 \quad , \quad y \leq 1 \\ &= 1 \quad , \quad y \geq 3 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(3|x) = 1$ olmalıdır.

c) Olasılık değerlerini sırayla hesaplayalım.

Birinci Yol (Koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$P(X<1|Y=2)=\int_0^1 f(x|Y=2)dx=\int_0^1\left(\frac{x+2}{2(1+2)}\right)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{12}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$P(X<1|Y=2)=F(1|Y=2)=\frac{1\times(1+2\times 2)}{4(1+2)}=\frac{5}{12}$$

Birinci Yol (Koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$\begin{aligned} P(X>1.5\,|Y=2) &= \int_{1.5}^{2} f(x|Y=2)dx &&= \int_{1.5}^{2}\left(\frac{x+2}{2(1+2)}\right)dx \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{1.5}^{2} &&= \frac{1}{6}\left(\frac{2^2}{2}+2\times 2-\frac{1.5^2}{2}-2\times 1.5\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(2+4-\frac{1.5^2}{2}-3\right) &&= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$\begin{aligned}
P(X > 1.5 \,|Y = 2) &= 1 - P(X \leq 1.5 \,|Y = 2) &&= 1 - F(1.5 \,|Y = 2) \\
&= 1 - \left(\frac{1.5 \times (1.5 + 2 \times 2)}{4(1 + 2)}\right) &&= 1 - \left(\frac{1.5 \times (1.5 + 4)}{12}\right) \\
&= 1 - \frac{11}{16} &&= \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

$$P(X < 4|Y = 2) = F(4 \,|Y = 2) = 1$$

$$P(X > 4|Y = 2) = 1 - P(X \leq 4|Y = 2) = 1 - F(4 \,|Y = 2) = 1 - 1 = 0$$

d) Olasılık değerlerini sırayla hesaplayalım.

Birinci Yol (Koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$\begin{aligned}
P(1.5 < Y < 2.5|X = 1) &= \int_{1.5}^{2.5} f(y|X = 1)dy &&= \int_{1.5}^{2.5} \frac{1 + y}{2(1 + 2)} dy \\
&= \frac{1}{6}\left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{1.5}^{2.5} &&= \frac{1}{6}\left(2.5 + \frac{2.5^2}{2} - 1.5 - \frac{1.5^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{25}{8} - \frac{9}{8}\right) &&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$\begin{aligned}
P(1.5 < Y < 2.5|X = 1) &= F(2.5|X = 1) - F(1.5|X = 1) \\
&= \left(\frac{(2.5 - 1)(2 \times 1 + 2.5 + 1)}{4(1 + 2)}\right) - \left(\frac{(1.5 - 1)(2 \times 1 + 1.5 + 1)}{4(1 + 2)}\right) \\
&= \left(\frac{1.5 \times 5.5}{12}\right) - \left(\frac{0.5 \times 4.5}{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Birinci Yol (Koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2|X=1) &= \int_2^3 f(y|X=1)dy = \int_2^3 \frac{1+y}{2(1+2)}dy = \frac{1}{6}\left(y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(3+\frac{3^2}{2}-2-\frac{2^2}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(1+\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2|X=1) &= 1-P(Y<2|X=1) = 1-F(2|X=1) \\ &= 1-\left(\frac{(2-1)(2\times 1+2+1)}{4(1+2)}\right) = 1-\left(\frac{2+3}{12}\right) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$P(Y<0.5|X=1) = F(0.5|X=1) = 0$$

$$P(Y>0.5|X=1) = 1-P(Y \leq 0.5|X=1) = 1-F(0.5|X=1) = 1-0 = 1$$

$Y \leq a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(x|Y \leq a) = P(X \leq x|Y \leq a) = \frac{P(X \leq x, Y \leq a)}{P(Y \leq a)} = \frac{F(x, a)}{F_Y(a)}$$

$Y \leq a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$Birinci\ Yol \quad : \quad f(x|Y \leq a) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|Y \leq a)$$

$$İkinci\ Yol \quad : \quad f(x|Y \leq a) = \frac{P(X = x, Y \leq a)}{P(Y \leq a)} = \frac{\int_{-\infty}^{a} f(x, y)dy}{\int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy}$$

$X \leq a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(y|X \leq a) = P(Y \leq y|X \leq a) = \frac{P(X \leq a\,, Y \leq y)}{P(X \leq a)} = \frac{F(a, y)}{F_X(a)}$$

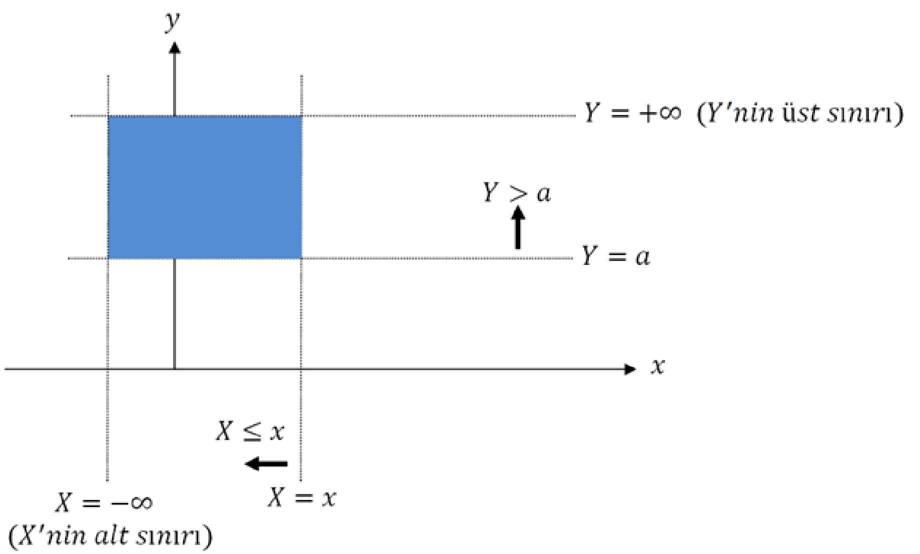
$X \leq a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$Birinci\ Yol$: $$f(y|X \leq a) = \frac{\partial}{\partial y} F(y|X \leq a)$$

$İkinci\ Yol$: $$f(y|X \leq a) = \frac{P(X \leq a\,, Y = y)}{P(X \leq a)} = \frac{\int_{-\infty}^{a} f(x, y)dx}{\int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx}$$

$Y > a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(x|Y>a) = P(X \leq x|Y>a) = \frac{P(X \leq x, Y>a)}{P(Y>a)} = \frac{F(x,+\infty) - F(x,a)}{1 - P(Y \leq a)} = \frac{F(x,+\infty) - F(x,a)}{1 - F_Y(a)}$$



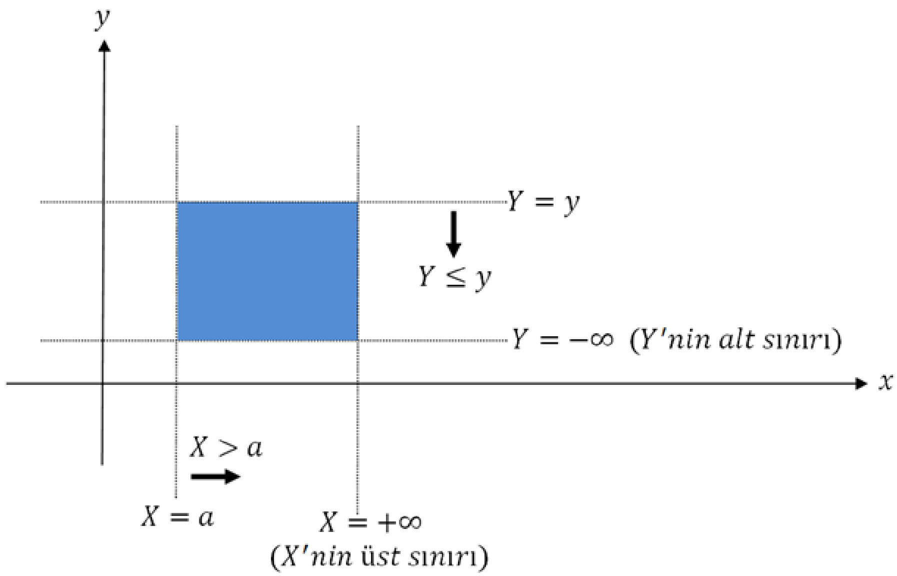
$Y > a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$Birinci\ Yol \quad : \quad f(x|Y>a) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|Y>a)$$

$$İkinci\ Yol \quad : \quad f(x|Y>a) = \frac{P(X=x, Y>a)}{P(Y>a)} = \frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)dy}{\int_a^{+\infty} f_Y(y)dy}$$

$X > a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(y|X > a) = P(Y \leq y|X > a) = \frac{P(X > a, Y \leq y)}{P(X > a)} = \frac{F(+\infty, y) - F(a, y)}{1 - P(X \leq a)} = \frac{F(+\infty, y) - F(a, y)}{1 - F_X(a)}$$



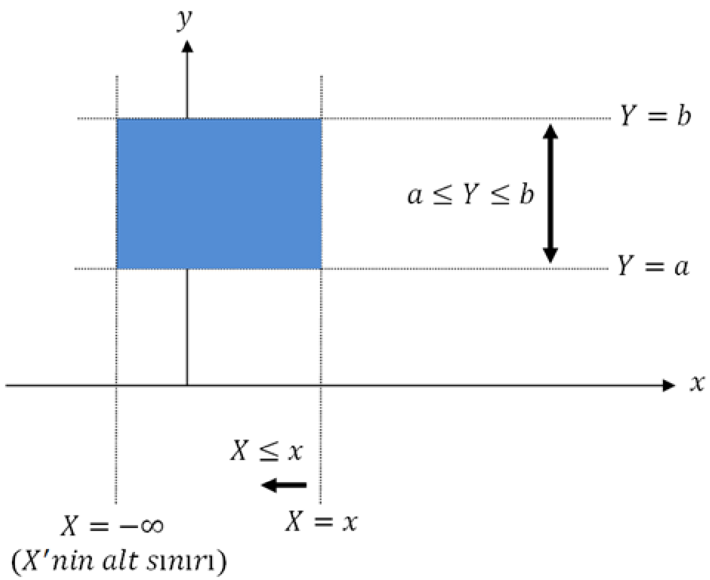
$X > a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$Birinci\ Yol$: $$f(y|X > a) = \frac{\partial}{\partial y} F(y|X > a)$$

$İkinci\ Yol$: $$f(y|X > a) = \frac{P(X > a, Y = y)}{P(X > a)} = \frac{\int_a^{+\infty} f(x, y)dx}{\int_a^{+\infty} f_X(x)dx}$$

$a \leq Y \leq b$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(x|a \leq Y \leq b) = P(X \leq x|a \leq Y \leq b) = \frac{P(X \leq x, a \leq Y \leq b)}{P(a \leq Y \leq b)} = \frac{F(x,b) - F(x,a)}{F_Y(b) - F_Y(a)}$$



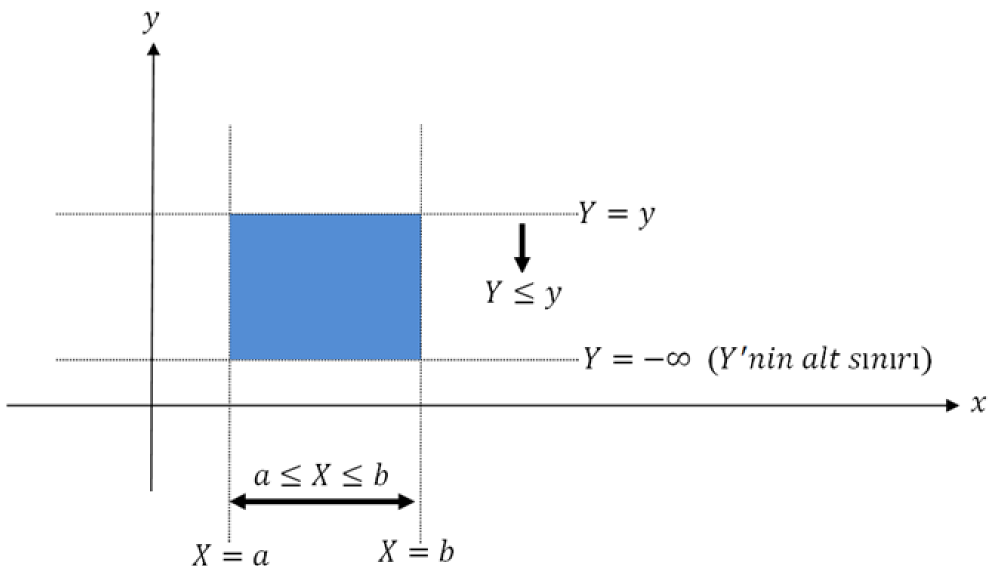
$a \leq Y \leq b$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$Birinci\ Yol$: $$f(x|a \leq Y \leq b) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|a \leq Y \leq b)$$

$İkinci\ Yol$: $$f(x|a \leq Y \leq b) = \frac{P(X = x, a \leq Y \leq b)}{P(a \leq Y \leq b)} = \frac{\int_a^b f(x,y)dy}{\int_a^b f_Y(y)dy}$$

$a \leq X \leq b$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

$$F(y|a \leq X \leq b) = P(Y \leq y|a \leq X \leq b) = \frac{P(a \leq X \leq b, Y \leq y)}{P(a \leq X \leq b)} = \frac{F(b,y) - F(a,y)}{F_X(b) - F_X(a)}$$



$a \leq X \leq b$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu:

Birinci Yol : $$f(y|a \leq X \leq b) = \frac{\partial}{\partial y} F(y|a \leq X \leq b)$$

İkinci Yol : $$f(y|a \leq X \leq b) = \frac{P(a \leq X \leq b, Y = y)}{P(a \leq X \leq b)} = \frac{\int_a^b f(x,y)dx}{\int_a^b f_X(x)dx}$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik oasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x+y}{12} \quad , \quad 0 < x < 2 \;, 1 < y < 3 \\
&= 0 \qquad\quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ ve } y \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

a) $f(x|Y \leq 2)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve $F(x|Y \leq 2)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b) $P(0.5 < X < 1|Y \leq 2)$ koşullu olasılığı bulunuz.

c) $f(y|X > 1)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve $F(y|X > 1)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

d) $P(Y \leq 2.5|X > 1)$ koşullu olasılığı bulunuz.

e) $f(x|1.5 < Y \leq 2.5)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve $F(x|1.5 < Y \leq 2.5)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

f) $P(X > 1|1.5 < Y \leq 2.5)$ koşullu olasılığı bulunuz.

Çözüm: Öncelikle X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik ve marjinal dağılım fonksiyonlarını bulalım.

X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_1^y \int_0^x f(t,z)dt\,dz &&= \int_1^y \int_0^x \left(\frac{t+z}{12}\right) dt\,dz \\
&= \frac{1}{12}\int_1^y \left(\frac{t^2}{2} + tz\Big|_0^x\right) dz &&= \frac{1}{12}\int_1^y \left(\frac{x^2}{2} + xz\right) dz \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{x^2}{2}z + x\frac{z^2}{2}\Big|_1^y\right) &&= \frac{1}{12}\left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{x\,y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{xy(x+y) - x(x+1)}{24}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \frac{xy(x+y) - x(x+1)}{24} &&, \quad 0 < x < 2\ , 1 < y < 3 \\
&= 0 &&, \quad x \le 0\, , y \le 1 \\
&= 1 &&, \quad x \ge 2\, , y \ge 3
\end{aligned}
$$

X sürekli raslantı değişkeninin marjinal dağılım fonksiyonu:

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = F(x, 3) = \frac{x \times 3 \times (x+3) - x(x+1)}{24} = \frac{3x^2 + 9x - x^2 - x}{24} = \frac{x(x+4)}{12}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{x(x+4)}{12} &&, \quad 0 < x < 2 \\ &= 0 &&, \quad x \leq 0 \\ &= 1 &&, \quad x \geq 2 \end{aligned}$$

Y sürekli raslantı değişkeninin marjinal dağılım fonksiyonu:

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = F(2, y) = \frac{2y(2+y) - 2(2+1)}{24} = \frac{2y(2+y) - 6}{24} = \frac{(y-1)(y+3)}{12}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{(y-1)(y+3)}{12} &&, \quad 1 < y < 3 \\ &= 0 &&, \quad y \leq 1 \\ &= 1 &&, \quad y \geq 3 \end{aligned}$$

a) $F(x|Y \leq 2)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$F(x|Y \leq 2) = P(X \leq x|Y \leq 2) = \frac{P(X \leq x, Y \leq 2)}{P(Y \leq 2)} = \frac{F(x,2)}{F_Y(2)}$$

$$= \frac{\frac{2x(x+2) - x(x+1)}{24}}{\frac{(2-1)(2+3)}{12}} = \frac{\frac{2x^2 + 4x - x^2 - x}{24}}{\frac{5}{12}} = \frac{x(x+3)}{10}$$

$$F(x|Y \leq 2) = \begin{cases} \dfrac{x(x+3)}{10}, & 0 < x < 2 \\ 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Sağlama: $F(2|Y \leq 2) = 1$ olmalıdır.

$f(x|Y \leq 2)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:

Birinci Yol:

$$f(x|Y \leq 2) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|Y \leq 2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x(x+3)}{10}\right) = \frac{(2x+3)}{10}$$

İkinci Yol:

$$\begin{aligned} f(x|Y \leq 2) &= \frac{P(X = x, Y \leq 2)}{P(Y \leq 2)} = \frac{\int_1^2 f(x,y)dy}{\int_1^2 f_Y(y)dy} = \frac{\int_1^2 \left(\frac{x+y}{12}\right) dy}{\int_1^2 \left(\frac{1+y}{6}\right) dy} \\ &= \frac{\frac{1}{12}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2}{\frac{1}{6}\left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2} = \frac{\frac{1}{12}\left(2x + \frac{2^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{6}\left(2 + \frac{2^2}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{(4x + 4 - 2x - 1)}{12 \times 2}}{\frac{(4 + 4 - 2 - 1)}{6 \times 2}} \\ &= \frac{(2x+3)}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x|Y \leq 2) &= \frac{(2x+3)}{10} \quad , \quad 0 < x < 2 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

b) Birinci Yol (Koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$
\begin{aligned}
P(0.5 < X < 1 | Y \leq 2) &= \int_{0.5}^{1} f(x|Y \leq 2)dx &&= \int_{0.5}^{1} \left(\frac{2x+3}{10}\right) dx \\
&= \frac{1}{10}(x^2 + 3x)|_{0.5}^{1} &&= \frac{1}{10}\left(1 + 3 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{16 - 1 - 6}{4}\right) &&= \frac{9}{40}
\end{aligned}
$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$
\begin{aligned}
P(0.5 < X < 1 | Y \leq 2) &= F(1|Y \leq 2) - F(0.5|Y \leq 2) \\
&= \frac{1 \times (1+3)}{10} - \frac{0.5 \times (0.5+3)}{10} \\
&= \frac{4}{10} - \frac{7}{40} \\
&= \frac{9}{40}
\end{aligned}
$$

c) $F(y|X>1)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$
\begin{aligned}
F(y|X>1) &= P(Y\leq y|X>1) \\
&= \frac{P(X>1, Y\leq y)}{P(X>1)} \\
&= \frac{F(2,y)-F(1,y)}{1-P(X\leq 1)} \\
&= \frac{F(2,y)-F(1,y)}{1-F_X(1)} \\
&= \frac{\left(\dfrac{2\times y\times(2+y)-2\times(2+1)}{24}\right)-\left(\dfrac{1\times y\times(1+y)-1\times(1+1)}{24}\right)}{1-\left(\dfrac{1\times(1+4)}{12}\right)} \\
&= \frac{\left(\dfrac{2y^2+4y-6-y^2-y+2}{24}\right)}{\left(\dfrac{12-5}{12}\right)} \\
&= \frac{(y-1)(y+4)}{14}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(y|X>1) &= \frac{(y-1)(y+4)}{14} \quad , \quad 1<y<3 \\
&= 0 \quad , \quad y\leq 1 \\
&= 1 \quad , \quad y\geq 3
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F(3|X>1)=1$ olmalıdır.

$f(y|X>1)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:

Birinci Yol:

$$f(y|X>1)=\frac{\partial}{\partial y}F(y|X>1)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(y-1)(y+4)}{14}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2+3y-4}{14}\right)=\frac{(2y+3)}{14}$$

İkinci Yol:

$$f(y|X>1) = \frac{P(X>1, Y=y)}{P(X>1)} = \frac{\int_1^2 f(x,y)dx}{\int_1^2 f_X(x)dx} = \frac{\int_1^2 \left(\frac{x+y}{12}\right)dx}{\int_1^2 \left(\frac{x+2}{6}\right)dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{12}\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_1^2}{\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2} = \frac{\frac{1}{12}\left(\frac{2^2}{2}+2y-\frac{1}{2}-y\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{2^2}{2}+4-\frac{1}{2}-2\right)} = \frac{\frac{(4+4y-1-2y)}{12\times 2}}{\frac{(4+8-1-4)}{6\times 2}}$$

$$= \frac{(2y+3)}{14}$$

$$f(y|X>1) = \begin{cases} \dfrac{(2y+3)}{14}, & 1<y<3 \\ 0, & \textit{diğer y değerleri için} \end{cases}$$

d) Birinci Yol (Koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq 2.5|X > 1) &= \int_{1}^{2.5} f(y|X > 1)\, dy &&= \int_{1}^{2.5} \left(\frac{2y+3}{14}\right) dy \\
&= \frac{1}{14}(y^2 + 3y)\Big|_1^{2.5} &&= \frac{1}{14}(2.5^2 + 3 \times 2.5 - 1^2 - 3 \times 1) \\
&= \frac{1}{14}\left(\frac{39}{4}\right) &&= \frac{39}{56}
\end{aligned}
$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$
P(Y \leq 2.5|X > 1) = F(2.5|X > 1) = \frac{(2.5-1)(2.5+4)}{14} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{13}{2}}{14} = \frac{39}{56}
$$

e) $F(x|1.5 < Y \leq 2.5)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$
\begin{aligned}
F(x|1.5 < Y \leq 2.5) &= P(X \leq x|1.5 < Y \leq 2.5) \\
&= \frac{P(X \leq x, 1.5 < Y \leq 2.5)}{P(1.5 \leq Y \leq 2.5)} \\
&= \frac{F(x, 2.5) - F(x, 1.5)}{F_Y(2.5) - F_Y(1.5)} \\
&= \frac{\left(\frac{x \times 2.5 \times (x + 2.5) - x(x + 1)}{24}\right) - \left(\frac{x \times 1.5 \times (x + 1.5) - x(x + 1)}{24}\right)}{\left(\frac{(2.5 - 1)(2.5 + 3)}{12}\right) - \left(\frac{(1.5 - 1)(1.5 + 3)}{12}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{4}x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x}{24}\right)}{\left(\frac{33}{12 \times 4}\right) - \left(\frac{9}{12 \times 4}\right)} \\
&= \frac{(x^2 + 4x)}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x|1.5 < Y \leq 2.5) &= \frac{(x^2 + 4x)}{12} &, \quad 0 < x < 2 \\
&= 0 &, \quad x \leq 0 \\
&= 1 &, \quad x \geq 2
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F(2|1.5 < Y \leq 2.5) = 1$ olmalıdır.

$f(x|1.5 < Y \leq 2.5)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım:

Birinci Yol:

$$f(x|1.5 < Y \leq 2.5) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|1.5 < Y \leq 2.5\,) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x^2 + 4x)}{12}\right) = \frac{(x+2)}{6}$$

İkinci Yol:

$$\begin{aligned} f(x|1.5 < Y \leq 2.5) &= \frac{P(X = x, 1.5 < Y \leq 2.5)}{P(1.5 < Y \leq 2.5)} = \frac{\int_{1.5}^{2.5} f(x,y)dy}{\int_{1.5}^{2.5} f_Y(y)dy} \\ &= \frac{\int_{1.5}^{2.5} \left(\frac{x+y}{12}\right) dy}{\int_{1.5}^{2.5} \left(\frac{1+y}{6}\right) dy} = \frac{\frac{1}{12}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{1.5}^{2.5}}{\frac{1}{6}\left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{1.5}^{2.5}} \\ &= \frac{\frac{1}{12}\left(\frac{5x}{2} + \frac{25}{8} - \frac{3x}{2} - \frac{9}{8}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{5}{2} + \frac{25}{8} - \frac{3}{2} - \frac{9}{8}\right)} = \frac{(x+2)}{6} \end{aligned}$$

$$f(x|1.5 < Y \leq 2.5) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)}{6} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{cases}$$

f) Birinci Yol (Koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonundan):

$$\begin{aligned}
P(X > 1|1.5 < Y \leq 2.5) &= \int_1^2 f(x|1.5 < Y \leq 2.5)\,dx = \int_1^2 \frac{(x+2)}{6}\,dx \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{6}\left(2 + 4 - \frac{1}{2} - 2\right) \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$\begin{aligned}
P(X > 1|1.5 < Y \leq 2.5) &= 1 - P(X \leq 1|1.5 < Y \leq 2.5) \\
&= 1 - F(1|1.5 < Y \leq 2.5) \\
&= 1 - \left(\frac{1^2 + 4 \times 1}{12}\right) \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

İKİ BOYUTLU KESİKLİ RASLANTI DEĞİŞKENİ İÇİN KOŞULLU DAĞILIMLAR

(X,Y) iki boyutlu kesikli raslantı değişkeni olsun.

$p_{XY}(x,y)$: X ve Y' nin bileşik olasılık fonksiyonu

$p_X(x)$: X' in marjinal olasılık fonksiyonu

$p_Y(y)$: Y' in marjinal olasılık fonksiyonu

$F_{XY}(x,y)$: X ve Y' nin bileşik dağılım fonksiyonu

$F_X(x)$: X' in marjinal dağılım fonksiyonu

$F_Y(x)$: Y' in marjinal dağılım fonksiyonu a ve b $(a < b)$ bilinen sabit değerler olsun.

$$\left.\begin{array}{r} p_{X|Y}(x|Y=a) \\ p_{X|Y}(x|Y\geq a) \\ p_{X|Y}(x|Y\leq a) \\ p_{X|Y}(x|a\leq Y\leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y \text{ bilindiğinde } X' \text{ in koşullu} \\ \text{olasılık fonksiyonları} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} p_{Y|X}(y|X=a) \\ p_{Y|X}(y|X\geq a) \\ p_{Y|X}(y|X\leq a) \\ p_{Y|X}(y|a\leq X\leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} X \text{ bilindiğinde } Y' \text{ nin koşullu} \\ \text{olasılık fonksiyonları} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} F_{X|Y}(x|Y=a) \\ F_{X|Y}(x|Y\geq a) \\ F_{X|Y}(x|Y\leq a) \\ F_{X|Y}(x|a\leq Y\leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y \text{ bilindiğinde } X'\text{in koşullu} \\ \text{dağılım fonksiyonları} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} F_{Y|X}(y|X=a) \\ F_{Y|X}(y|X\geq a) \\ F_{Y|X}(y|X\leq a) \\ F_{Y|X}(y|a\leq X\leq b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} X \text{ bilindiğinde } Y' \text{ nin koşullu} \\ \text{dağılım fonksiyonları} \end{array}$$

$Y = y$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \quad , p_Y(y) > 0$$

$Y = y$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{p_Y(y)} = \frac{\sum_{t=-\infty}^{x} p(t,y)}{p_Y(y)}$$

İkinci Yol:

$$F(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \sum_{t=-\infty}^{x} p(t|y)$$

$X = x$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} \quad , p_X(x) > 0$$

$X = x$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \frac{P(X = x, Y \leq y)}{p_X(x)} = \frac{\sum_{z=-\infty}^{y} p(x,z)}{p_X(x)}$$

İkinci Yol:

$$F(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \sum_{z=-\infty}^{y} p(z|x)$$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= \frac{x+3y}{114} \quad , \quad x = 1,2,3 \;\; ve \; y = 1,2,3,4 \\
&= 0 \quad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

a) $p(x|y)$ ve $p(y|x)$ koşullu olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

b) $F(x|y)$ ve $F(y|x)$ koşullu dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

c) $P(X > 1|Y = 3)$, $P(X \leq 2|Y = 3)$, $P(X \geq 7|Y = 3)$ ve $P(X < 5|Y = 3)$ koşullu olasılıkları hesaplayınız.

d) $P(Y > 2|X = 2)$, $P(Y \leq 3|X = 2)$, $P(Y < 1|X = 2)$ ve $P(Y \geq 5|X = 2)$ koşullu olasılıkları hesaplayınız.

Çözüm:

a) Öncelikle X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulalım:

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{4} p(x,y) = \sum_{y=1}^{4} \frac{x+3y}{114} = \frac{4x + 3(1+2+3+4)}{114} = \frac{2x+15}{57}$$

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{2x+15}{57} \quad , \quad x = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} p(x,y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x+3y}{114} = \frac{(1+2+3)+9y}{114} = \frac{2+3y}{38}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{2+3y}{38} \quad , \quad y = 1,2,3,4 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

Koşullu olasılık fonksiyonları aşağıda bulunmuştur:

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{x+3y}{114}}{\frac{2+3y}{38}} = \frac{x+3y}{3(2+3y)}$$

$$\begin{aligned} p(x|y) &= \frac{x+3y}{3(2+3y)} \quad , \quad x = 1,2,3 \ \ (y \ değeri \ biliniyor \ ve \ y = 1,2,3,4' \ tür.) \\ &= 0 \quad , \quad diğer \ x \ değerleri \ için \end{aligned}$$

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{x+3y}{114}}{\frac{2x+15}{57}} = \frac{x+3y}{2(2x+15)}$$

$$\begin{aligned} p(y|x) &= \frac{x+3y}{2(2x+15)} \quad , \quad y = 1,2,3,4 \ \ (x \ değeri \ biliniyor \ ve \ x = 1,2,3' \ tür.) \\ &= 0 \quad , \quad diğer \ y \ değerleri \ için \end{aligned}$$

b) Koşullu dağılım fonksiyonları aşağıda bulunmuştur:

$$F(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{p_Y(y)} = \frac{\sum_{t=1}^{x} p(t,y)}{p_Y(y)}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{x} \frac{t+3y}{114}}{\frac{2+3y}{38}} = \frac{\frac{1}{114}\left(\frac{x(x+1)}{2} + 3xy\right)}{\frac{2+3y}{38}} = \frac{x(x+1)+6xy}{6(2+3y)}$$

$$\begin{aligned} F(x|y) &= \frac{x(x+1)+6xy}{6(2+3y)} \quad , \quad x = 1,2,3 \ \ (y\ değeri\ biliniyor\ ve\ y = 1,2,3,4'\ tür.) \\ &= 0 \quad , \quad x < 1 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 3 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(3|y) = 1$ olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
F(y|x) &= P(Y \le y | X = x) = \frac{P(X = x, Y \le y)}{p_X(x)} = \frac{\sum_{z=1}^{y} p(x,z)}{p_X(x)} \\
&= \frac{\sum_{z=1}^{y} \frac{x+3z}{114}}{\frac{2x+15}{57}} = \frac{\frac{1}{114}\left(xy + \frac{3y(y+1)}{2}\right)}{\frac{2x+15}{57}} = \frac{2xy + 3y(y+1)}{4(2x+15)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(y|x) &= \frac{2xy + 3y(y+1)}{4(2x+15)} \quad , \quad y = 1,2,3,4 \ \ (x \ değeri \ biliniyor \ ve \ x = 1,2,3' \ tür.) \\
&= 0 \quad , \quad y < 1 \\
&= 1 \quad , \quad y \ge 4
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F(4|x) = 1$ olmalıdır.

c) Olasılık değerlerini sırayla hesaplayalım.

Birinci Yol (Koşulu olasılık fonksiyonundan):

$$P(X > 1|Y = 3) = \sum_{x=2}^{3} p(x|Y = 3) = \sum_{x=2}^{3} \frac{x + 3 \times 3}{3(2 + 3 \times 3)} = \sum_{x=2}^{3} \frac{x + 9}{33} = \frac{23}{33}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$\begin{aligned} P(X > 1|Y = 3) &= 1 - P(X \leq 1|Y = 3) &&= 1 - F(1|Y = 3) \\ &= 1 - \left(\frac{1 \times (1 + 1) + 6 \times 1 \times 3}{6(2 + 3 \times 3)}\right) &&= \frac{23}{33} \end{aligned}$$

Birinci Yol (Koşulu olasılık fonksiyonundan):

$$P(X \leq 2|Y = 3) = \sum_{x=1}^{2} p(x|Y = 3) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x + 3 \times 3}{3(2 + 3 \times 3)} = \sum_{x=1}^{2} \frac{x + 9}{33} = \frac{7}{11}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$P(X \leq 2|Y = 3) = F(2|Y = 3) = \frac{2 \times (2 + 1) + 6 \times 2 \times 3}{6(2 + 3 \times 3)} = \frac{7}{11}$$

$$P(X \geq 7|Y = 3) = 1 - P(X \leq 6|Y = 3) = 1 - F(6|Y = 3) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X < 5|Y = 3) = F(4|Y = 3) = 1$$

d) Olasılık değerlerini sırayla hesaplayalım.

Birinci Yol (Koşulu olasılık fonksiyonundan):

$$P(Y > 2|X = 2) = \sum_{y=3}^{4} p(y|X = 2) = \sum_{y=3}^{4} \frac{2 + 3 \times y}{2(2 \times 2 + 15)} = \sum_{y=3}^{4} \frac{2 + 3y}{38} = \frac{25}{38}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$\begin{aligned} P(Y > 2|X = 2) &= 1 - P(Y \leq 2|X = 2) &&= 1 - F(2|X = 2) \\ &= 1 - \left(\frac{2 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 \times (2 + 1)}{4(2 \times 2 + 15)}\right) &&= \frac{25}{38} \end{aligned}$$

Birinci Yol (Koşulu olasılık fonksiyonundan):

$$P(Y \leq 3|X = 2) = \sum_{y=1}^{3} p(y|X = 2) = \sum_{y=1}^{3} \frac{2 + 3 \times y}{2(2 \times 2 + 15)} = \sum_{y=1}^{3} \frac{2 + 3y}{38} = \frac{12}{19}$$

İkinci Yol (Koşulu dağılım fonksiyonundan):

$$P(Y \leq 3|X = 2) = F(3|X = 2) = \frac{2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 \times (3 + 1)}{4(2 \times 2 + 15)} = \frac{12}{19}$$

$$P(Y < 1|X = 2) = P(Y \leq 0|X = 2) = F(0|X = 2) = 0$$

$$P(Y \geq 5|X = 2) = 1 - P(Y \leq 4|X = 2) = 1 - F(4|X = 2) = 1 - 1 = 0$$

$Y \geq a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(x|Y \geq a) = P(X = x|Y \geq a) = \frac{P(X = x, Y \geq a)}{P(Y \geq a)} = \frac{\sum_{y=a}^{+\infty} p(x,y)}{\sum_{y=a}^{+\infty} p_Y(y)}$$

$Y \geq a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(x|Y \geq a) = P(X \leq x|Y \geq a) = \frac{P(X \leq x, Y \geq a)}{P(Y \geq a)} = \frac{\sum_{t=-\infty}^{x} \sum_{y=a}^{+\infty} p(t,y)}{\sum_{y=a}^{+\infty} p_Y(y)}$$

İkinci Yol:

$$F(x|Y \geq a) = P(X \leq x|Y \geq a) = \sum_{t=-\infty}^{x} p(t|Y \geq a)$$

$X \geq a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(y|X \geq a\ ) = P(Y = y|X \geq a\ ) = \frac{P(X \geq a\ , Y = y)}{P(X \geq a\ )} = \frac{\sum_{x=a}^{+\infty} p(x, y)}{\sum_{x=a}^{+\infty} p_X(x)}$$

$X \geq a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(y|X \geq a) = P(Y \leq y|X \geq a) = \frac{P(X \geq a, Y \leq y)}{P(X \geq a)} = \frac{\sum_{x=a}^{+\infty} \sum_{z=-\infty}^{y} p(x, z)}{\sum_{x=a}^{+\infty} p_X(x)}$$

İkinci Yol:

$$F(y|X \geq a) = P(Y \leq y|X \geq a) = \sum_{z=-\infty}^{y} p(z|X \geq a\ )$$

$Y \leq a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(x|Y \leq a) = P(X = x|Y \leq a) = \frac{P(X = x, Y \leq a)}{P(Y \leq a)} = \frac{\sum_{y=-\infty}^{a} p(x, y)}{F_Y(a)}$$

$Y \leq a$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(x|Y \leq a) = P(X \leq x|Y \leq a) = \frac{P(X \leq x, Y \leq a)}{P(Y \leq a)} = \frac{F(x, a)}{F_Y(a)}$$

İkinci Yol:

$$F(x|Y \leq a) = P(X \leq x|Y \leq a) = \sum_{t=-\infty}^{x} p(t|Y \leq a)$$

$X \leq a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(y|X \leq a\,) = P(Y = y|X \leq a\,) = \frac{P(X \leq a\,, Y = y)}{P(X \leq a\,)} = \frac{\sum_{x=-\infty}^{a} p(x,y)}{F_X(a)}$$

$X \leq a$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(y|X \leq a) = P(Y \leq y|X \leq a) = \frac{P(X \leq a, Y \leq y)}{P(X \leq a)} = \frac{F(a,y)}{F_X(a)}$$

İkinci Yol:

$$F(y|X \leq a) = P(Y \leq y|X \leq a) = \sum_{z=-\infty}^{y} p(z|X \leq a\,)$$

$a \leq Y \leq b$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(x|a \leq Y \leq b\ ) = P(X = x|a \leq Y \leq b\ ) = \frac{P(X = x, a \leq Y \leq b\ )}{P(a \leq Y \leq b)} = \frac{\sum_{y=a}^{b} p(x, y)}{\sum_{y=a}^{b} p_Y(y)}$$

$a \leq Y \leq b$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(x|a \leq Y \leq b\ ) = P(X \leq x|a \leq Y \leq b\ ) = \frac{P(X \leq x, a \leq Y \leq b\ )}{P(a \leq Y \leq b\ )} = \frac{\sum_{y=a}^{b} \sum_{t=-\infty}^{x} p(t, y)}{\sum_{y=a}^{b} p_Y(y)}$$

İkinci Yol:

$$F(x|a \leq Y \leq b) = P(X \leq x|a \leq Y \leq b) = \sum_{t=-\infty}^{x} p(t|a \leq Y \leq b)$$

$a \leq X \leq b$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık fonksiyonu:

$$p(y|a \leq X \leq b\ ) = P(Y = y|a \leq X \leq b\ \ ) = \frac{P(a \leq X \leq b\ \ , Y = y)}{P(a \leq X \leq b\ \ )} = \frac{\sum_{x=a}^{b} p(x,y)}{\sum_{x=a}^{b} p_X(x)}$$

$a \leq X \leq b$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu dağılım fonksiyonu:

Birinci Yol:

$$F(y|a \leq X \leq b\ ) = P(Y \leq y|a \leq X \leq b\ ) = \frac{P(a \leq X \leq b\ , Y \leq y)}{P(a \leq X \leq b\ )} = \frac{\sum_{z=-\infty}^{y} \sum_{x=a}^{b} p(x,z)}{\sum_{x=a}^{b} p_X(x)}$$

İkinci Yol:

$$F(y|a \leq X \leq b\ ) = P(Y \leq y|a \leq X \leq b\ ) = \sum_{z=-\infty}^{y} p(z|a \leq X \leq b)$$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{x+3y}{114} \quad , \quad x = 1,2,3 \ \ ve\ y = 1,2,3,4 \\ &= 0 \qquad\quad\ \ , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $p(x|Y>2)$ koşullu olasılık fonksiyonunu ve $F(x|Y>2)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b) $P(X>1|Y>2)$ koşullu olasılığı bulunuz.

c) $p(y|X<3)$ koşullu olasılık fonksiyonunu ve $F(y|X<3)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

d) $P(2<Y\leq 4|X<3)$ koşullu olasılığı bulunuz.

e) $p(x|1<Y\leq 3)$ koşullu olasılık fonksiyonunu ve $F(x|1<Y\leq 3)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

f) $P(X\leq 2|1<Y\leq 3)$ koşullu olasılığı bulunuz.

Çözüm: Öncelikle X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik ve marjinal dağılım fonksiyonlarını bulalım.

X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \sum_{z=1}^{y}\sum_{t=1}^{x} p(t,z) &&= \sum_{z=1}^{y}\sum_{t=1}^{x} \frac{t+3z}{114} \\
&= \frac{1}{114}\sum_{z=1}^{y}\left(\frac{x(x+1)}{2}+3zx\right) &&= \frac{1}{114}\left(\frac{xy(x+1)}{2}+\frac{3xy(y+1)}{2}\right) \\
&= \frac{xy(x+1)+3xy(y+1)}{228} &&= \frac{xy(x+3y+4)}{228}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \frac{xy(x+3y+4)}{228} &&, \quad x=1,2,3\ , y=1,2,3,4 \\
&= 0 &&, \quad x<1\ , y<1 \\
&= 1 &&, \quad x\geq 3\ , y\geq 4
\end{aligned}
$$

X kesikli raslantı değişkeninin marjinal dağılım fonksiyonu:

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = F(x,4) = \frac{x \times 4 \times (x + 3 \times 4 + 4)}{228} = \frac{4x(x + 12 + 4)}{228} = \frac{x(x+16)}{57}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{x(x+16)}{57} \quad , \quad x = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad x < 1 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 3 \end{aligned}$$

Y sürekli raslantı değişkeninin marjinal dağılım fonksiyonu:

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = F(3,y) = \frac{3 \times y \times (3 + 3 \times y + 4)}{228} = \frac{3y(3y+7)}{228} = \frac{y(3y+7)}{76}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{y(3y+7)}{76} \quad , \quad y = 1,2,3,4 \\ &= 0 \quad , \quad y < 1 \\ &= 1 \quad , \quad y \geq 4 \end{aligned}$$

a) $p(x|Y>2)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulalım:

$$p(x|Y>2) = P(X=x|Y>2) = \frac{P(X=x, Y>2)}{P(Y>2)} = \frac{\sum_{y=3}^{4} p(x,y)}{\sum_{y=3}^{4} p_Y(y)}$$

$$= \frac{\sum_{y=3}^{4} \frac{x+3y}{114}}{\sum_{y=3}^{4} \frac{2+3y}{38}} = \frac{\frac{1}{114}\sum_{y=3}^{4}(x+3y)}{\frac{1}{38}\sum_{y=3}^{4}(2+3y)} = \frac{2x+21}{75}$$

$$p(x|Y>2) = \begin{cases} \dfrac{2x+21}{75} & , \quad x = 1,2,3 \\ 0 & , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{cases}$$

$F(x|Y>2)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulalım:

Birinci Yol:

$$
\begin{aligned}
F(x|Y>2) &= P(X\le x|Y>2) = \frac{P(X\le x, Y>2)}{P(Y>2)} = \frac{\sum_{t=1}^{x}\sum_{y=3}^{4} p(t,y)}{\sum_{y=3}^{4} p_Y(y)} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{x}\sum_{y=3}^{4} \frac{t+3y}{114}}{\sum_{y=3}^{4}\frac{2+3y}{38}} = \frac{\frac{1}{114}\sum_{t=1}^{x}\sum_{y=3}^{4}(t+3y)}{\frac{1}{38}\sum_{y=3}^{4}(2+3y)} = \frac{\sum_{t=1}^{x}(2t+21)}{75} \\
&= \frac{x(x+1)+21x}{75} = \frac{x^2+22x}{75}
\end{aligned}
$$

İkinci Yol:

$$
F(x|Y>2) = \sum_{t=1}^{x} p(t|Y>2) = \sum_{t=1}^{x}\frac{2t+21}{75} = \frac{x(x+1)+21x}{75} = \frac{x^2+22x}{75}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x|Y>2) &= \frac{x^2+22x}{75} \quad , \quad x = 1,2,3 \\
&= 0 \quad , \quad x<1 \\
&= 1 \quad , \quad x\ge 3
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F(3|Y>2)=1$ olmalıdır.

b) Birinci Yol (Koşullu olasılık fonksiyonundan):

$$P(X>1|Y>2) = p(2|Y>2) + p(3|Y>2) = \frac{2\times 2+21}{75} + \frac{2\times 3+21}{75} = \frac{52}{75}$$

İkinci Yol (Koşullu dağılım fonksiyonundan):

$$P(X>1|Y>2) = 1 - P(X\leq 1|Y>2) = 1 - F(1|Y>2) = 1 - \left(\frac{1^2+22\times 1}{75}\right) = \frac{52}{75}$$

c) $p(y|X<3)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} p(y|X<3) &= P(Y=y|X<3) = \frac{P(X<3, Y=y)}{P(X<3)} = \frac{\sum_{x=1}^{2} p(x,y)}{F_X(2)} \\ &= \frac{\sum_{x=1}^{2} \frac{x+3y}{114}}{F_X(2)} = \frac{\frac{1+2+2\times 3y}{114}}{\frac{2(2+16)}{57}} = \frac{1+2y}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(y|X<3) &= \frac{1+2y}{24} \quad , \quad y = 1,2,3,4 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer } y \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

$F(y|X<3)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulalım:

Birinci Yol:

$$\begin{aligned} F(y|X<3) &= P(Y \leq y|X<3) = P(Y \leq y|X \leq 2) = \frac{P(X \leq 2, Y \leq y)}{P(X \leq 2)} \\ &= \frac{F(2,y)}{F_X(2)} = \frac{\frac{2y(2+3y+4)}{228}}{\frac{2(2+16)}{57}} = \frac{y(2+y)}{24} \end{aligned}$$

İkinci Yol:

$$F(y|X<3) = \sum_{z=1}^{y} p(z|X<3) = \sum_{z=1}^{y} \frac{1+2z}{24} = \frac{y+y(y+1)}{24} = \frac{y(2+y)}{24}$$

$$F(y|X<3) = \begin{cases} \dfrac{y(2+y)}{24} & , \quad y = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad y < 1 \\ 1 & , \quad y \geq 4 \end{cases}$$

Sağlama: $F(4|X<3) = 1$ olmalıdır.

d) Birinci Yol (Koşullu olasılık fonksiyonundan):

$$P(2 < Y \leq 4|X < 3\ ) = p(3|X < 3) + p(4|X < 3) = \frac{1 + 2 \times 3}{24} + \frac{1 + 2 \times 4}{24} = \frac{2}{3}$$

İkinci Yol (Koşullu dağılım fonksiyonundan):

$$P(2 < Y \leq 4|X < 3\ ) = F(4|X < 3) - F(2|X < 3) = \left(\frac{4(2+4)}{24}\right) - \left(\frac{2(2+2)}{24}\right) = \frac{2}{3}$$

e) $p(x|1 < Y \leq 3\ )$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulalım:

$$p(x|1 < Y \leq 3\ ) = P(X = x|1 < Y \leq 3\ ) = \frac{P(X = x, 1 < Y \leq 3\ )}{P(1 < Y \leq 3)} = \frac{\sum_{y=2}^{3} p(x,y)}{\sum_{y=2}^{3} p_Y(y)}$$

$$= \frac{\sum_{y=2}^{3} \frac{x+3y}{114}}{\sum_{y=2}^{3} \frac{2+3y}{38}} = \frac{\frac{2x+15}{114}}{\frac{4+15}{38}} = \frac{2x+15}{57}$$

$$p(x|1 < Y \leq 3) = \frac{2x+15}{57}\ , \quad x = 1,2,3$$

$$= 0\ , \quad diğer\ x\ değerleri\ için$$

$F(x|1 < Y \leq 3)$ kuşullu dağılım fonksiyonunu bulalım:

Birinci Yol:

$$
\begin{aligned}
F(x|1 < Y \leq 3) &= P(X \leq x|1 < Y \leq 3) &&= \frac{P(X \leq x, 1 < Y \leq 3)}{P(1 < Y \leq 3)} \\
&= \frac{\sum_{y=2}^{3}\sum_{t=1}^{x} p(t,y)}{\sum_{y=2}^{3} p_Y(y)} &&= \frac{\sum_{y=2}^{3}\sum_{t=1}^{x} \frac{t+3y}{114}}{\sum_{y=2}^{3} \frac{2+3y}{38}} \\
&= \frac{\frac{1}{114}\sum_{y=2}^{3}\left(\frac{x(x+1)}{2} + 3xy\right)}{\frac{19}{38}} &&= \frac{\frac{1}{114}(x(x+1)+15x)}{\frac{19}{38}} \\
&= \frac{x(x+16)}{57}
\end{aligned}
$$

İkinci Yol:

$$
F(x|1 < Y \leq 3) = \sum_{t=1}^{x} p(t|1 < Y \leq 3) = \sum_{t=1}^{x} \frac{2t+15}{57} = \frac{x(x+1)+15x}{57} = \frac{x(x+16)}{57}
$$

$$F(x|1 < Y \leq 3) = \begin{cases} \dfrac{x(x+16)}{57} & , \quad x = 1,2,3 \\ 0 & , \quad x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Sağlama: $F(3|1 < Y \leq 3) = 1$ olmalıdır.

f) Birinci Yol (Koşullu olasılık fonksiyonundan):

$$P(X \leq 2|1 < Y \leq 3) = p(1|1 < Y \leq 3) + p(2|1 < Y \leq 3) = \frac{2 \times 1 + 15}{57} + \frac{2 \times 2 + 15}{57} = \frac{36}{57}$$

İkinci Yol (Koşullu dağılım fonksiyonundan):

$$P(X \leq 2|1 < Y \leq 3) = F(2|1 < Y \leq 3) = \frac{2(2+16)}{57} = \frac{36}{57}$$

İKİ BOYUTLU RASLANTI DEĞİŞKENLERİ İÇİN KOŞULLU BEKLENEN DEĞER VE VARYANS

a ve b $(a < b)$ bilinen sabit değerler olsun.

$$E(X|Y = a) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in R_X} x\, p(x|Y = a) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \displaystyle\int_{R_X} x\, f(x|Y = a)\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

$$E(X|Y \geq a) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in R_X} x\, p(x|Y \geq a) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \displaystyle\int_{R_X} x\, f(x|Y \geq a)\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

$$E(X|Y \leq a) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} x\, p(x|Y \leq a) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \int_{R_X} x\, f(x|Y \leq a)\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

$$E(X|a \leq Y \leq b) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} x\, p(x|a \leq Y \leq b) & , \quad (X,Y): Kesikli \\ \int_{R_X} x\, f(x|a \leq Y \leq b)\, dx & , \quad (X,Y): Sürekli \end{cases}$$

$$V(X|Y = a) \quad = \quad E(X^2|Y = a) - [E(X|Y = a)]^2$$

$$V(X|Y \geq a) \quad = \quad E(X^2|Y \geq a) - [E(X|Y \geq a)]^2$$

$$V(X|Y \leq a) \quad = \quad E(X^2|Y \leq a) - [E(X|Y \leq a)]^2$$

$$V(X|a \leq Y \leq b) \quad = \quad E(X^2|a \leq Y \leq b) - [E(X|a \leq Y \leq b)]^2$$

Örnek: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{12} & , \quad 0 < x < 2 \;, 1 < y < 3 \\ 0 & , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{cases}$$

a) $E(3Y+4|X=1)$ koşullu beklenen değeri hesaplayınız.

b) $V(5X+7|Y \leq 2)$ koşullu varyansın değerini hesaplayınız.

c) $E(2X+3|1.5 < Y \leq 2.5)$ koşullu beklenen değeri hesaplayınız.

Çözüm:

a) $E(3Y+4|X=1) = 3E(Y|X=1)+4$ olur.

$X = x$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{x+y}{2(x+2)} \quad , \quad 1<y<3 \ \ (x \ değeri \ biliniyor \ ve \ 0<x<2' \ dir.) \\ &= 0 \quad , \quad diğer \ y \ değerleri \ için \end{aligned}$$

$$E(Y|X=1) = \int_{R_Y} yf(y|X=1)\,dy = \int_1^3 y\left(\frac{1+y}{6}\right)dy = \frac{1}{6}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\Big|_1^3\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{2}+\frac{27}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{76}{36}$$

$$E(3Y+4|X=1) = 3E(Y|X=1)+4 = 3\times\frac{76}{36}+4 = \frac{124}{12}$$

b) $V(5X+7|Y\le 2) = 25\,V(X|Y\le 2)$ olur.

$$V(X|Y\le 2) = E(X^2|Y\le 2) - [E(X|Y\le 2)]^2$$

$Y\le 2$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$\begin{aligned} f(x|Y\le 2) &= \frac{(2x+3)}{10} \quad , \quad 0<x<2 \\ &= 0 \qquad\quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{aligned}$$

$$E(X|Y\le 2) = \int_{R_X} x\, f(x|Y\le 2)\,dx = \int_0^2 x\left(\frac{2x+3}{10}\right)dx = \frac{1}{10}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\bigg|_0^2\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{16}{3}+\frac{12}{2}\right) = \frac{17}{15}$$

$$E(X^2|Y\le 2) = \int_{R_X} x^2 f(x|Y\le 2)\,dx = \int_0^2 x^2\left(\frac{2x+3}{10}\right)dx = \frac{1}{10}\left(\frac{2x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}\bigg|_0^2\right) = \frac{1}{10}(8+8) = \frac{8}{5}$$

$$\begin{aligned} V(5X+7|Y\le 2) &= 25\,V(X|Y\le 2) \\ &= 25(E(X^2|Y\le 2) - [E(X|Y\le 2)]^2) \\ &= 25\left(\frac{8}{5} - \left[\frac{17}{15}\right]^2\right) \\ &= 7.8889 \end{aligned}$$

c) $E(2X+3|1.5<Y\leq 2.5)=2E(X|1.5<Y\leq 2.5)+3$ olur.

$1.5<Y\leq 2.5$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$
\begin{aligned}
f(x|1.5<Y\leq 2.5) &= \frac{(x+2)}{6} \quad , \quad 0<x<2 \\
&= 0 \quad , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için}
\end{aligned}
$$

$$E(X|1.5<Y\leq 2.5)=\int_{R_X} xf(x|1.5<Y\leq 2.5)\,dx=\int_0^2 x\left(\frac{x+2}{6}\right)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\Big|_0^2\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{8}{3}+4\right)=\frac{10}{9}$$

$$E(2X+3|1.5<Y\leq 2.5)=2E(X|1.5<Y\leq 2.5)+3=2\times\frac{10}{9}+3=\frac{47}{9}$$

Örnek: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{x+3y}{114} \quad , \quad x = 1,2,3 \;\; ve \; y = 1,2,3,4 \\ &= 0 \qquad\quad , \quad diğer\ x\ ve\ y\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $E(3X+8|Y>2)$ koşullu beklenen değeri hesaplayınız.

b) $V(4Y+2|X<3\,)$ koşullu varyansı hesaplayınız.

Çözüm:

a) $E(3X+8|Y>2) = 3E(X|Y>2)+8$ olur.

$Y>2$ olduğu bilindiğinde, X' in koşullu olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$\begin{aligned} p(x|Y>2) &= \frac{2x+21}{75} \quad , \quad x = 1,2,3 \\ &= 0 \qquad\quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

$$E(X|Y>2) = \sum_{R_X} xp(x|Y>2) = \sum_{x=1}^{3} x\left(\frac{2x+21}{75}\right) = \frac{2+21+8+42+18+63}{75} = \frac{154}{75}$$

$$E(3X+8|Y>2) = 3E(X|Y>2)+8 = 3\times\frac{154}{75}+8 = \frac{354}{25}$$

b) $V(4Y+2|X<3)=16V(Y|X<3)$ olur.

$V(Y|X<3)=E(Y^2|X<3)-[E(Y|X<3)]^2$

$X<3$ olduğu bilindiğinde, Y' nin koşullu olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$
\begin{aligned}
p(y|X<3) &= \frac{1+2y}{24} \quad , \quad y=1,2,3,4 \\
&= 0 \qquad\quad , \quad \textit{diğer y değerleri için}
\end{aligned}
$$

$$E(Y|X<3)=\sum_{R_Y} yp(y|X<3)=\sum_{y=1}^{4} y\left(\frac{1+2y}{24}\right)=\frac{3+10+21+36}{24}=\frac{35}{12}$$

$$E(Y^2|X<3)=\sum_{R_Y} y^2p(y|X<3)=\sum_{y=1}^{4} y^2\left(\frac{1+2y}{24}\right)=\frac{3+20+63+144}{24}=\frac{115}{12}$$

$$
\begin{aligned}
V(4Y+2|X<3) &= 16V(Y|X<3) \\
&= 16(E(Y^2|X<3)-[E(Y|X<3)]^2) \\
&= 16\left(\frac{115}{12}-\left[\frac{35}{12}\right]^2\right) \\
&= \frac{155}{9}
\end{aligned}
$$

Koşullu beklenen değer ve varyans için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. Koşullu beklenen değerin beklenen değeri koşulsuz beklenen değerdir:

Örneğin: $E\big(E(X|Y)\big) = E(X)$

İspat:

X ve Y sürekli raslantı değişkenleri olsun.

$$
\begin{aligned}
E\underbrace{\big(E(X|Y)\big)}_{\substack{Y'nin\ bir\\ fonksiyonudur.}} &= \int_{R_Y} E(X|Y) f_Y(y)dy &&= \int_{R_Y}\left(\int_{R_X} x\, f(x|y)\, dx\right) f_Y(y)dy \\
&= \int_{R_Y}\left(\int_{R_X} x\, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx\right) f_Y(y)dy &&= \int_{R_Y}\left(\int_{R_X} x f(x,y)\ dx\right) dy \\
&= \int_{R_X} x\left(\int_{R_Y} f(x,y)\ dy\right) dx &&= \int_{R_X} x f_X(x) dx \\
&= E(X)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

X ve Y kesikli raslantı değişkenler olsun.

$$
\begin{aligned}
E\underbrace{\left(E(X|Y)\right)}_{\substack{Y'nin\ bir\\ fonksiyonudur.}} &= \sum_{R_Y} E(X|Y)p_Y(y) &&= \sum_{R_Y}\left(\sum_{R_X} x\, p(x|y)\right)p_Y(y)\\
&= \sum_{R_Y}\left(\sum_{R_X} x\,\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}\right)p_Y(y) &&= \sum_{R_Y}\left(\sum_{R_X} xp(x,y)\right)\\
&= \sum_{R_X} x\left(\sum_{R_Y} p(x,y)\right) &&= \sum_{R_X} x\, p_X(x)\\
&= E(X)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

ii. $V(X) = E\big(V(X|Y)\big) + V\big(E(X|Y)\big)$' dir.

İspat:

$$\begin{aligned} E\big(V(X|Y)\big) &= E\left(E(X^2|Y) - \big(E(X|Y)\big)^2\right) \\ &= E\big(E(X^2|Y)\big) - E\left(\big(E(X|Y)\big)^2\right) \\ &= E(X^2) - E\left(\big(E(X|Y)\big)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V\big(E(X|Y)\big) &= E\left(\big(E(X|Y)\big)^2\right) - \Big(E\big(E(X|Y)\big)\Big)^2 \\ &= E\left(\big(E(X|Y)\big)^2\right) - \big(E(X)\big)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\big(V(X|Y)\big) + V\big(E(X|Y)\big) &= E(X^2) - E\left(\big(E(X|Y)\big)^2\right) + E\left(\big(E(X|Y)\big)^2\right) - \big(E(X)\big)^2 \\ &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \\ &= V(X) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

X ve Y raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız ise, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- X ve Y sürekli raslantı değişkenleri için, $f(x|y) = f_X(x)$ ve $f(y|x) = f_Y(y)$' dir.
- X ve Y kesikli raslantı değişkenleri için, $p(x|y) = p_X(x)$ ve $p(y|x) = p_Y(y)$' dir.
- $F(x|y) = F_X(x)$ ve $F(y|x) = F_Y(y)$' dir.
- $E(X|Y) = E(X)$ ve $E(Y|X) = E(Y)$' dir.
- $V(X|Y) = V(X)$ ve $V(Y|X) = V(Y)$' dir.