Örnekler

1- W_1 ve W_2 bir V vektör uzayının alt-uzayı olsun.

i) $W_1+W_2=\{u+v \mid u\in W_1, v\in W_2\}$ kümesi alt-uzaydır gösteriniz.

ii) $W_1\cap W_2$ bir alt-uzaydır gösteriniz.

Çöz. i) $\alpha=u+v$, $\beta=u'+v'\in W_1+W_2$, $a\in\mathbb{R}$ olsun.

$\alpha+\beta=(u+v)+(u'+v')=(u+u')+(v+v')\in W_1+W_2$

$a\alpha=a(u+v)=au+av\in W_1+W_2$ olduğu için alt-uzaydır.

ii) $\alpha,\beta\in W_1\cap W_2$, $a\in\mathbb{R}$ olsun. Kesişimin tanımından $\alpha,\beta\in W_1$ ve $\alpha,\beta\in W_2$ dir. W_1 ve W_2 alt-uzay olduğundan $\alpha+\beta, a\alpha\in W_1$ ve $\alpha+\beta, a\alpha\in W_2$ dir. Alt-uzay kriterinden o halde $\alpha+\beta, a\alpha\in W_1\cap W_2$ dir. $W_1\cap W_2$ bir alt-uzaydır.

2- $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ olsun. $W=\{X\in\mathbb{R}^{n\times 1} \mid AX=0\}\subseteq\mathbb{R}^{n\times 1}$ bir alt-uzaydır.

Çöz: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ve $X, X'\in W$, $a\in\mathbb{R}$ olsun. $AX=0$, $AX'=0$ dır.

Buradan $AX=0$, $AX'=0$ $\Rightarrow X+X'\in W$

$A(X+X')=AX+AX'=0+0=0$

$A(aX)=a(AX)=a\cdot 0=0\in W$. O halde W alt-uzaydır.

3- $W=\{(a,b,1)\in\mathbb{R}^3 \mid a,b\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3$ ün alt-uzayı mıdır.

Çöz: $\alpha=(9,10,1)$, $\beta=(1,1,1)\in W$ olduğu halde

$\alpha+\beta=(9,10,1)+(1,1,1)=(10,11,2)\notin W$ olduğundan

W bir alt-uzay değildir.

4- $W = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A^T = A\} \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ alt-uzay olur mu?

Çöz: $A, B \in W$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $A^T = A$ ve $B^T = B$ dir.

O halde $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$ olduğundan $A+B \in W$ dır.

$(aA)^T = aA^T = aA$ olduğundan $aA \in W$ dır.

Alt-uzay testinden W bir alt-uzaydır.

5- $V = \mathbb{R}^2$ olmak üzere

i) $W = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

ii) $U = \{(x, 3x+1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

alt-uzay olup olmadığını araştırınız.

Çöz: i) $\alpha = (x, 3x)$, $\beta = (x', 3x') \in W$, $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$\alpha + \beta = (x, 3x) + (x', 3x') = (x+x', 3(x+x')) \in W$

$a\alpha = a(x, 3x) = (ax, 3ax) \in W$ olduğundan W bir alt-uzaydır.

ii) $(0,0) \notin U$ olduğu için U alt-uzay değildir.

6- $W = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ alt-uzay olur mu?

Çöz: $(1,1) \in W$, $(2,4) \in W$ olmasına rağmen

$(1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W$ olduğundan W alt-uzay değildir.

Ör: $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y \geq 0\}$ alt-uzay olur mu

Çöz: $(-4,-1) \in W$ ve $(3,4) \in W$ olmasına rağmen

$(-4,-1) + (3,4) = (-4+3, -1+4) = (-1,3)$ ve $(-1) \cdot 3 = -3 < 0$

olduğundan $(-1,3) \notin W$ dır. Alt-uzay değildir

Ör: $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T=-A\}$ alt-uzay olur mu?

Çöz: $A,B\in W$, $a\in\mathbb{R}$ olsun. $A^T=-A$, $B^T=-B$ dir.

$(A+B)^T = A^T+B^T=-A-B=-(A+B) \Rightarrow A+B\in W$ olur.

$(aA)^T=aA^T=a(-A)=-(aA) \Rightarrow aA\in W$ olur. O halde bir alt-uzaydır.

Ör: $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ alt-uzay durumu?

Çöz: $\alpha=(x,y,z)$, $\beta=(x',y',z')\in W$, $a\in\mathbb{R}$ olsun.

$x+y+z=0$, $x'+y'+z'=0$ dır.

$\alpha+\beta=(x+x', y+y', z+z')$ ve

$(x+x')+(y+y')+(z+z')=(x+y+z)+(x'+y'+z')=0+0=0$ dır.

o halde $\alpha+\beta\in W$ dir.

$a\alpha=a(x,y,z)=(ax,ay,az)$ olup

$ax+ay+az=a(x+y+z)=a\cdot 0=0$ dır. o halde $a\alpha\in W$ dir.

Alt-uzay kriteri sağlandığından W bir alt-uzaydır.

Ör: $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x+y+1\}$ alt-uzay olur mu?

Çöz: $\alpha=(x,y,z)$, $\beta=(x',y',z')\in W \Rightarrow z=x+y+1$, $z'=x'+y'+1$

$\Rightarrow \alpha+\beta=(x+x', y+y', z+z')$ ve $z+z'=x+y+1+x'+y'+1$

$\Rightarrow z+z'=(x+x')+(y+y')+2 \notin W$ olduğundan W alt uzay değildir.

SORU: $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\leq 0\}$ $\mathbb{R}^2$ nin alt-uzayı olup olmadığını araştırınız.

Ör: $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathbb{R}^{3\times 1}$ in alt uzayı olurmu?

Çöz: $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} x' \\ 2x'+3y' \\ 4x'+5y' \end{bmatrix} \in W$ ve $a \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} x \\ 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ 2x'+3y' \\ 4x'+5y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+x' \\ 2(x+x')+3(y+y') \\ 4(x+x')+5(y+y') \end{bmatrix} \in W$$

$$a\alpha = a \begin{bmatrix} x \\ 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ 2(ax)+3(ay) \\ 4(ax)+5(ay) \end{bmatrix} \in W \text{ oldiğundan}$$

W bir alt-uzaydır.

Ör: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ veriliyor.

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;\middle|\; A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ alt-uzayını bulunuz.

Çöz: $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+y+z+t \\ 2x+y+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. O halde

$$x+y+z+t = 0$$
$$2x+y+t = 0 \quad , \quad t = a,\; z = b \text{ denek}$$

$$\left. \begin{aligned} x+y &= -a-b \\ 2x+y &= -a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x+y &= -a \\ -x-y &= a+b \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x+y &= -a \\ x &= b \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= b \\ y &= -2b-a \end{aligned}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ -a-2b \\ b \\ a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ör: $W = \{ f(x) \in C[a,b] \mid f''(x) + f(x) = 0 \}$ 2. mertebeden türevli fonksiyonların kümesinin bir alt-uzayı olur mu?

Çöz: $f(x) \in W$, $g(x) \in W$, $a \in \mathbb{R}$ olsun

$$f'' + f = 0$$
$$g'' + g = 0 \quad \text{dır.}$$

$(f+g)'' + (f+g) = f'' + g'' + f + g = f'' + f + g'' + g = 0$

ve $(af)'' + af = a f'' + af = a(f'' + f) = a \cdot 0 = 0$ dır.

o halde $f+g \in W$ ve $af \in W$ olduğu için alt-uzaydır.

Soru: Aşağıda tanımlı kümelerin $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nin alt-uzayı olur mu?

1) Tüm 2x2 boyutlu köşegen matrislerin kümesi.
2) " 2x2 " üçgensel " " .
3) " 2x2 " matrisler öyleki 1. satırı sıfırdır.
4) $\left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$
5) $\left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \right\}$
6) $\left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
7) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad - bc = 0 \right\}$
8) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b = c + d \right\}$
9) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \det A \neq 0 \right\}$