

UYGULAMA I-ÇÖZÜMLER
(Momentler)

1) X kesikli r.d. olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{3}{8}, \quad x = -3 \\
 &= \frac{1}{8}, \quad x = 0 \\
 &= \frac{1}{4}, \quad x = 3,4 \\
 &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için}
 \end{aligned}$$

a) Moment çıkarılan fonksiyonu bulalım:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{x \in R_X} e^{tx} p(x) = e^{-3t}P(X = -3) + P(X = 0)e^{3t} + e^{4t}P(X = 4) \\
 &= \frac{3e^{-3t}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{e^{3t}}{4} + \frac{e^{4t}}{4} = \frac{3e^{-3t} + 2e^{3t} + 2e^{4t} + 1}{8}
 \end{aligned}$$

$M_X(0) = 1$ olduğu görülür.

b) Beklenen değer ve varyansı hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{3e^{-3t} + 2e^{3t} + 2e^{4t} + 1}{8} \right] \right|_{t=0} = \left. \left[\frac{-9e^{-3t} + 6e^{3t} + 8e^{4t}}{8} \right] \right|_{t=0} = \frac{-9 + 6 + 8}{8} \\
 &= \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{-9e^{-3t} + 6e^{3t} + 8e^{4t}}{8} \right] \right|_{t=0} = \left. \left[\frac{27e^{-3t} + 18e^{3t} + 32e^{4t}}{8} \right] \right|_{t=0} \\
 &= \frac{27 + 18 + 32}{8} = \frac{77}{8}
 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2 = \frac{77}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{616 - 25}{64} = \frac{591}{64}$$

c) $Y = 3X - 2'$ nin moment çıkarılan fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned}
 M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{t(3X-2)}) = E(e^{3tX-2t}) \\
 &= e^{-2t} E(e^{3tX}) = e^{-2t} M_X(3t) \\
 &= e^{-2t} \left(\frac{3e^{-9t} + 2e^{9t} + 2e^{12t} + 1}{8} \right) = \frac{3e^{-11t} + 2e^{7t} + 2e^{10t} + e^{-2t}}{8}
 \end{aligned}$$

$Y = 3X - 2'$ nin olasılık çıkarılan fonksiyonunu bulalım:

$$M_Y(t) \rightarrow g_Y(t)$$

$e^t \rightarrow s$ yazılırsa olasılık üreten fonksiyona geçebiliriz.

$$g_Y(t) = \frac{3s^{-11} + 2s^7 + 2s^{10} + s^{-2}}{8}$$

2) X sürekli r.d. olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{7}, \quad 0 \leq x \leq 3 \\ &= \frac{1}{7}, \quad 3 < x \leq 4 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

a) Moment çıkarı fonksiyonu bulalım:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{R_X} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_0^3 e^{tx} \left(\frac{2}{7}\right) dx + \int_3^4 e^{tx} \left(\frac{1}{7}\right) dx = \left(\frac{2}{7}\right) \left(\frac{e^{tx}}{t}\right) \Big|_0^3 + \left(\frac{1}{7}\right) \left(\frac{e^{tx}}{t}\right) \Big|_3 \\ &= \frac{2(e^{3t} - 1) + e^{4t} - e^{3t}}{7t} = \frac{e^{4t} + e^{3t} - 2}{7t} \end{aligned}$$

$$M_X(0) = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var. L'hospital kuralı uygulanır: } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4e^{4t} + 3e^{3t}}{7} = 1$$

b) Beklenen değeri hesaplayalım:

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\frac{e^{4t} + e^{3t} - 2}{7t} \right] \Big|_{t=0} = \frac{(4e^{4t} + 3e^{3t})7t - (e^{4t} + e^{3t} - 2)7}{49t^2} \Big|_{t=0} = \frac{0}{0}$$

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hospital kuralı uygulanır.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(16e^{4t} + 9e^{3t})7t + (4e^{4t} + 3e^{3t})7 - (4e^{4t} + 3e^{3t})7}{98t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(16e^{4t} + 9e^{3t})7t}{98t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(16e^{4t} + 9e^{3t})}{14} = \frac{25}{14}$$

c) $Y = 8X$ raslantı değişkeninin $F_Y(s)$ Laplace fonksiyonunu bulunuz.

$$F_Y(s) = E(e^{-sY}) = E(e^{-s8X}) = F_X(8s)$$

$M_X(t) \rightarrow F_X(s)$
 $t \rightarrow -s$ yazılırsa X raslantı değişkenin Laplace fonksiyonuna geçilir.

$$F_X(s) = \frac{2 - e^{-4s} - e^{-3s}}{7s} \Rightarrow F_Y(s) = F_X(8s) = \frac{2 - e^{-32s} - e^{-24s}}{56s}$$

3) X kesikli r.d. olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{8}, \quad x = 0,3 \\ &= \frac{3}{8}, \quad x = 1,2 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

a) Moment çıkarılan fonksiyonu bulalım:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
 &= \sum_{R_X} e^{tx} p(x) \\
 &= e^{t \times 0} P(X=0) + e^{t \times 1} P(X=1) + e^{t \times 2} P(X=2) + e^{t \times 3} P(X=3) \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{3e^t}{8} + \frac{3e^{2t}}{8} + \frac{e^{3t}}{8} \\
 &= \frac{1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}}{8}
 \end{aligned}$$

b) Beklenen değer ve varyansı hesaplayalım:

$$E(X) = \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}}{8} \right] \right|_{t=0} = \left. \left[\frac{3e^t + 6e^{2t} + 3e^{3t}}{8} \right] \right|_{t=0} = \frac{3 + 6 + 3}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{3e^t + 6e^{2t} + 3e^{3t}}{8} \right] \right|_{t=0} = \left. \left[\frac{3e^t + 12e^{2t} + 9e^{3t}}{8} \right] \right|_{t=0} = \frac{24}{8} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

c) $Y = 7X - 9$ ' nin moment çıkarılan fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned}
 M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{7tX-9t}) = e^{-9t} E(e^{7tX}) = e^{-9t} M_X(7t) = e^{-9t} \left(\frac{1 + 3e^{7t} + 3e^{14t} + e^{21t}}{8} \right) \\
 &= \frac{e^{-9t} + 3e^{-2t} + 3e^{5t} + e^{12t}}{8}
 \end{aligned}$$

$$E(Y) = E(7X - 9) = 7E(X) - 9 = 7 \times \frac{3}{2} - 9 = \frac{3}{2}$$

$$V(Y) = V(7X - 9) = 49V(X) = 49 \times \frac{3}{4} = \frac{147}{4}$$

$$d) E(X - \mu)^3 = ? \quad E(X) = \mu = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 M_{X-\mu}(t) &= E(e^{t(X-\mu)}) = E(e^{tX-\mu t}) = e^{-\mu t} E(e^{tX}) = e^{-\mu t} M_X(t) = e^{-\frac{3t}{2}} \left(\frac{1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}}{8} \right) \\
 &= \frac{e^{-\frac{3t}{2}} + 3e^{-\frac{t}{2}} + 3e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{3t}{2}}}{8}
 \end{aligned}$$

$$E(X - \mu)^3 = \left. \frac{d^3}{dt^3} M_{X-\mu}(t) \right|_{t=0}$$

$$E(X - \mu) = \left. \frac{d}{dt} M_{X-\mu}(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{8} \left(\frac{-3e^{-\frac{3t}{2}} - 3e^{-\frac{t}{2}} + 3e^{\frac{t}{2}} + 3e^{\frac{3t}{2}}}{2} \right) \right|_{t=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
 E(X - \mu)^2 &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_{X-\mu}(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{1-inci \text{ turev}}{3e^{\frac{3t}{2}} + 3e^{\frac{t}{2}} - 3e^{-\frac{3t}{2}} - 3e^{-\frac{t}{2}}}}{16} \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{16} \left(\frac{9e^{\frac{3t}{2}} + 3e^{\frac{t}{2}} + 9e^{-\frac{3t}{2}} + 3e^{-\frac{t}{2}}}{2} \right) \right|_{t=0} = \frac{9+3+9+3}{32} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$E(X - \mu)^3 = \frac{d^3}{dt^3} M_{X-\mu}(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{2-inci\ turev}{9e^{\frac{3t}{2}}+3e^{\frac{t}{2}}+9e^{-\frac{3t}{2}}+3e^{-\frac{t}{2}}}}{32} \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{32} \left(\frac{\frac{27e^{\frac{3t}{2}}+3e^{\frac{t}{2}}-27e^{-\frac{3t}{2}}-3e^{-\frac{t}{2}}}{2}}{2} \right) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{27 + 3 - 27 - 3}{64} = 0$$

- 4) X sürekli r.d.'nin moment çikaran fonksiyonu $M_X(t) = \frac{k}{k-t}$, $k > 0$ olarak verilmiştir. $E(X^2) = \frac{2}{9}$ olduğuna göre,

a) $k = ?$

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{k}{k-t} \right) \Big|_{t=0} = \frac{k}{(k-t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{k}$$

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{k}{(k-t)^2} \right) \Big|_{t=0} = \frac{2k}{(k-t)^3} \Big|_{t=0} = \frac{2k}{k^3} = \frac{2}{k^2}$$

$$E(X^2) = \frac{2}{k^2} = \frac{2}{9} \rightarrow k = \pm 3 \text{ bulunur. } k > 0 \text{ verildiği için } k = 3 \text{ olur.}$$

b) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c) $Y = -2X + 3$ için $M_Y(t) = ?$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(-2X+3)}) = E(e^{-2tX+3t}) = e^{3t} E(e^{-2tX}) = e^{3t} M_X(-2t) = e^{3t} \left(\frac{3}{3+2t} \right)$$

$\varphi_Y(t) = ?$ Bunun için $M_Y(t)$ içerisinde t yerine (it) konur:

$$M_Y(t) = e^{3t} \left(\frac{3}{3+2t} \right) \Rightarrow \varphi_Y(t) = e^{3it} \left(\frac{3}{3+2it} \right)$$

d) X'in olasılık çikaran(üreten) fonksiyonu bulunamaz çünkü X sürekli raslantı değişkenidir.

e) $E(X - 5)^2 = ?$ Bunun için $X - 5$ 'in moment çikaran fonksiyonu bulunur.

$$M_{X-5}(t) = E(e^{t(X-5)}) = E(e^{tX-5t}) = e^{-5t} E(e^{tX}) = e^{-5t} M_X(t) = \frac{3e^{-5t}}{3-t}$$

$$E(X - 5)^2 = \frac{d^2}{dt^2} M_{X-5}(t) \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt} M_{X-5}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{3e^{-5t}}{3-t} \right) = \frac{-15e^{-5t}(3-t)+3e^{-5t}}{(3-t)^2} = \frac{-42e^{-5t}+15te^{-5t}}{(3-t)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} M_{X-5}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{-42e^{-5t}+15te^{-5t}}{(3-t)^2} \right) \\ &= \left(\frac{(3-t)^2[210e^{-5t}+15e^{-5t}-75te^{-5t}]+2(3-t)[-42e^{-5t}+15te^{-5t}]}{(3-t)^4} \right) \\ &= \left(\frac{(3-t)[225e^{-5t}-75te^{-5t}]+2[-42e^{-5t}+15te^{-5t}]}{(3-t)^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X - 5)^2 &= \frac{d^2}{dt^2} M_{X-5}(t) \Big|_{t=0} \\
 &= \left(\frac{(3-t)[225e^{-5t} - 75te^{-5t}] + 2[-42e^{-5t} + 15te^{-5t}]}{(3-t)^3} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{3(225) + 2(-42)}{3^3} \\
 &= \frac{197}{9}
 \end{aligned}$$

5) $E(X) = 3$ olan X kesikli r.d. moment çikanan fonksiyonu aşağıda verilmiştir. $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-e^t+pe^t}$

a) $p=?$ $M_X(0) = \frac{p}{1-1+p}=1$ bilgi sağlamıyor.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\frac{pe^t}{1-e^t+pe^t} \right] \Big|_{t=0} = \frac{pe^t(1-e^t+pe^t) - pe^t(-e^t+pe^t)}{(1-e^t+pe^t)^2} \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{p^2 - p^2 + p}{p^2} = \frac{1}{p} = 3
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p} = 3 \rightarrow p = \frac{1}{3} \rightarrow M_X(t) = \frac{\frac{1}{3}e^t}{1-e^t+\frac{1}{3}e^t} = \frac{e^t}{3-2e^t}$$

b) Fonksiyon dönüşümlerini yapalım:

$$M_X(t) \rightarrow g_X(s)$$

$e^t \rightarrow s$ yazılırsa olasılık çikanan fonksiyona geçebiliriz:

$$g_X(s) = \frac{s}{3-2s}$$

$$M_X(t) \rightarrow \varphi_X(t)$$

$t \rightarrow it$ yazılırsa karakteristik fonksiyona geçebiliriz:

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it}}{3-2e^{it}}$$

c) X'in olasılık fonksiyonunun bulunuz.

$$P(X = 0) = g_X(0) = \frac{0}{3-2.0} = 0$$

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k}{ds^k} g_X(s) \Big|_{s=0} \right)$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{ds} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{(3-2s)+2s}{(3-2s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{3}{(3-2s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2}{ds^2} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{(3-2s)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{12}{(3-2s)^3} \Big|_{s=0} \right) = \frac{2}{3^2}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{ds^3} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{6} \frac{d}{ds} \left(\frac{12}{(3-2s)^3} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{6} \left(\frac{72}{(3-2s)^4} \Big|_{s=0} \right) = \frac{2^2}{3^3}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4}{ds^4} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{24} \frac{d}{ds} \left(\frac{72}{(3-2s)^4} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{24} \left(\frac{576}{(3-2s)^5} \Big|_{s=0} \right) = \frac{2^3}{3^4}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \dots = \frac{1}{3} \overbrace{\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots \right)}^{r^0+r^1+r^2+r^3+\dots=\frac{1}{1-r}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2^{x-1}}{3^x}, \quad x = 1, 2, 3, 4, \dots \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

6) X sürekli r.d.'nin k-inci dereceden merkezsel olmayan mometleri $\mu'_k = k!$, $k = 1, 2, 3, \dots$ ise;

a) Moment çıkan fonksiyonu bulalım:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E \left(1 + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots \right) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$$

$$M_X(t) = 1 + t1! + \frac{t^2 2!}{2!} + \frac{t^3 3!}{3!} + \dots = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1$$

b) $Y = 4X - 2$ Y r.d.'nin 2 noktasına göre birinci dereceden momenti,

$$E(Y - 2) = E(4X - 2 - 2) = E(4X - 4) = 4 \underbrace{E(X)}_{E(X)=\mu'_1=1!} - 4 = 4 \times 1! - 4 = 0$$

c) Y' nin moment çıkan fonksiyonunu bulalım:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(4X-2)}) = E(e^{4tX-2t}) = e^{-2t} E(e^{4tX}) = e^{-2t} M_X(4t) = \frac{e^{-2t}}{1-4t}$$

Y' nin karakteristik fonksiyonunu bulalım:

Moment çıkan fonksiyonda $t \rightarrow it$ yazılırsa karakteristik fonksiyona geçebiliriz.

$$M_Y(t) = \frac{e^{-2t}}{1-4t} \Rightarrow \varphi_Y(t) = \frac{e^{-2it}}{1-4it}$$

d) $Z = 2X^2 - 1$ olsun. $V(Z) = ?$

$$V(Z) = V(2X^2 - 1) = 4V(X^2) = 4(E(X^4) - [E(X^2)]^2) = 4(4! - (2!)^2) = 4(24 - 4) = 80$$

7) X kesikli raslantı değişkeninin moment çıkan fonksiyonu, $M_X(t) = \frac{1}{3}e^t - a$ olarak verilmiştir.

a) $a = ?$ $M_X(0) = 1$ bilgisinden yararlanalım.

$$M_X(0) = \frac{1}{3}e^0 - a = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} - a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

b) $Y = 2X^2 + 3X$ ise, $E(Y) = ?$

$$E(Y) = E(2X^2 + 3X) = 2E(X^2) + 3E(X)$$

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{3} e^t \Big|_{t=0} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} e^t \right) \Big|_{t=0} = \frac{e^t}{3} \Big|_{t=0} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = 2E(X^2) + 3E(X) = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$$

c) Moment çıkan fonksiyonda $e^t \rightarrow s$ yazılırsa olasılık üreten fonksiyona geçebiliriz.

$$M_X(t) = \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} \Rightarrow g_X(s) = \frac{s}{3} + \frac{2}{3}$$

Moment çıkan fonksiyonda $t \rightarrow it$ yazılırsa karakteristik fonksiyona geçebiliriz.

$$M_X(t) = \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi_X(t) = \frac{e^{it}}{3} + \frac{2}{3}$$

d) X r.d.'nin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$$g_X(0) = P(X = 0) = \frac{0}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{ds} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{3} + \frac{2}{3} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$P(X = 0) + P(X = 1) = 1$ olduğundan olasılık dağılımı elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2}{3}, \quad x = 0 \\ &= \frac{1}{3}, \quad x = 1 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

e) $Z = 4X + 9$ ise $g_Z(s) = ?$

$$g_Z(s) = E(s^Z) = E(s^{4X+9}) = E(s^{4X}s^9) = s^9 E(s^{4X}) = s^9 E((s^4)^X) = s^9 g_X(s^4) = s^9 \left(\frac{s^4 + 2}{3} \right)$$

8) X sürekli r.d.'nin karakteristik fonksiyonu, $\varphi_X(t) = \frac{1}{k-it}$, $k \neq it$ verilmiştir.

a) $k=?$ $\varphi_X(0) = 1'$ olmalıdır. $\varphi_X(0) = \frac{1}{k-0} = 1 \Rightarrow k = 1$

b) $\varphi_X(t)$ yardımcı ile $V(X) = ?$

$$E(X) = \frac{1}{i} \left(\frac{d}{dt} \varphi_X(t) \Big|_{t=0} \right)$$

$$E(X) = \frac{1}{i} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-it} \right) \Big|_{t=0} \right) = \frac{1}{i} \left(\frac{i}{(1-it)^2} \Big|_{t=0} \right) = 1$$

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_X(t) \Big|_{t=0} \right)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2} \left(\frac{d}{dt} \left[\overbrace{\frac{i}{(1-it)^2}}^{1-\text{inci türev}} \right] \Big|_{t=0} \right) = \frac{1}{i^2} \left(\frac{2i^2}{(1-it)^3} \Big|_{t=0} \right) = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1^2 = 1$$

c) $\mu_3 = E[(X - \mu)^3] = ?$

$E(X) = \mu = 1$ olarak bulmuştuk.

$$E[(X - \mu)^3] = E[(X - 1)^3] = E(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = E(X^3) - 3E(X^2) + 3E(X) - 1$$

$$E(X^3) = \frac{1}{i^3} \left(\frac{d^3}{dt^3} \varphi_X(t) \Big|_{t=0} \right)$$

$$E(X^3) = \frac{1}{i^3} \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{2i^2}{(1-it)^3} \right] \Big|_{t=0} \right) = \frac{1}{i^3} \left(\frac{6i^3}{(1-it)^4} \Big|_{t=0} \right) = 6$$

$$E[(X - 1)^3] = E(X^3) - 3E(X^2) + 3E(X) - 1 = 6 - 3 \times 2 + 3 \times 1 - 1 = 2$$

2.yol: $(X - \mu)$ 'nın karakteristik fonksiyonu bulunur. 3-üncü dereceden türevinde $t=0$ değeri verilir ve i^3 değerine bölünür:

$$\mu_3 = E[(X - \mu)^3] = \frac{1}{i^3} \left(\frac{d^3}{dt^3} \varphi_{X-\mu}(t) \Big|_{t=0} \right)$$

d) $W = 7 - 5X$ r.d.'nin $M_W(t) = ?$

$$M_W(t) = E(e^{tW}) = E(e^{t(7-5X)}) = E(e^{7t-5tX}) = e^{7t} E(e^{-5tX}) = e^{7t} M_X(-5t)$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1-it} \Rightarrow M_X(t) = \frac{1}{1-t} \Rightarrow M_X(-5t) = \frac{1}{1+5t}$$

$$M_W(t) = e^{7t} M_X(-5t) = \frac{e^{7t}}{1+5t}$$

9) Bir kutuda 2 beyaz ve 3 mavi top vardır. Çekileni yerine koymama koşulu altında bu kutudan sırayla top çekilmektedir. İki mavi top gelene dek gerçekleştirilen toplam denemelerin sayısı X raslantı değişkeni olsun.

a) X r.d. olasılık çıkarılan fonksiyonunu $g_X(s) = ?$

$$S = \{(MM), (MBM), (BMM), (MBBM), (BMBM), (BBMM)\}$$

$$x \in \{2, 3, 4\}$$

$$P(X=2) = P(MM) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=3) = P(MBM) + P(BMM) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{10}$$

$$\begin{aligned} P(X=4) &= P(MBBM) + P(BMBM) + P(BBMM) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{3}{10}, \quad x=2,4 \\ &= \frac{4}{10}, \quad x=3 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{Rx} s^x p(x) = s^2 p(2) + s^3 p(3) + s^4 p(4) = \frac{3s^2 + 4s^3 + 3s^4}{10}$$

b) Beklenen değeri bulalım:

$$\mu_{[1]} = E(X) = \frac{d}{ds} g_X(s) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \left(\frac{3s^2 + 4s^3 + 3s^4}{10} \right) \Big|_{s=1} = \frac{6s + 12s^2 + 12s^3}{10} \Big|_{s=1} = 3$$

$$\mu_{[2]} = E(X(X-1)) = \frac{d^2}{ds^2} g_X(s) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\overset{1-\text{inci türev}}{6s + 12s^2 + 12s^3}}{10} \right) \Big|_{s=1} = \frac{6 + 24s + 36s^2}{10} \Big|_{s=1} = \frac{66}{10}$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X) = \frac{66}{10} \quad \Rightarrow \quad E(X^2) = \frac{66}{10} + E(X) = \frac{66}{10} + 3 = \frac{96}{10}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{96}{10} - 9 = \frac{6}{10}$$

c) $Z = 10X + 7$ 'in olasılık çikaran fonksiyonunu $g_Z(s) = ?$

$$g_Z(s) = E(s^Z) = E(s^{10X+7}) = s^7 E(s^{10X}) = s^7 E[(s^{10})^X] = s^7 g_X(s^{10})$$

$$g_X(s) = \frac{3s^2 + 4s^3 + 3s^4}{10} \Rightarrow g_X(s^{10}) = \frac{3s^{20} + 4s^{30} + 3s^{40}}{10}$$

$$g_Z(s) = s^7 g_X(s^{10}) = s^7 \left(\frac{3s^{20} + 4s^{30} + 3s^{40}}{10} \right)$$

10) X r.d.'nin olasılık çikaran fonksiyonu $g_X(s) = \frac{s(1-s^3)}{3(1-s)}$ olduğuna göre,

a) $V(X) = ?$

$$g_X(s) = \frac{s(1-s^3)}{3(1-s)} = \frac{s(1-s)(1+s+s^2)}{3(1-s)} = \frac{s+s^2+s^3}{3}$$

$$\mu_{[1]} = E(X) = \frac{d}{ds} g_X(s) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \left(\frac{s+s^2+s^3}{3} \right) \Big|_{s=1} = \frac{1+2s+3s^2}{3} \Big|_{s=1} = 2$$

$$\mu_{[2]} = E(X(X-1)) = \frac{d^2}{ds^2} g_X(s) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\overbrace{1+2s+3s^2}^{1\text{-inci türev}}}{3} \right) \Big|_{s=1} = \frac{2+6s}{3} \Big|_{s=1} = \frac{8}{3}$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X) = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad E(X^2) = \frac{8}{3} + E(X) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

b) $p(x) = ?$

1.yol:

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p(x) = s^0 p(0) + s^1 p(1) + s^2 p(2) + s^3 p(3) + \dots = \frac{s+s^2+s^3}{3}$$

Buradan yola çıkarsak, $R_x = \{1,2,3\}$ olmaktadır. Olasılık çıkarılan fonksiyona bakıldığında, X raslantı değişkeninin aldığı değerlere ilişkin olasılıklar $p(1) = p(2) = p(3) = \frac{1}{3}$ olur.

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{3}, \quad x = 1,2,3 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

2. yol:

$$g_X(0) = \frac{0+0^2+0^3}{3} = 0 = p(0)$$

$$p(1) = \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{ds} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{ds} \frac{s+s^2+s^3}{3} \Big|_{s=0} \right) = \frac{1+2s+3s^2}{3} \Big|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$p(2) = \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2}{ds^2} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{ds} \frac{\overbrace{1+2s+3s^2}^{1\text{-inci türev}}}{3} \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{2!} \left(\frac{2+6s}{3} \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{3}$$

$$p(3) = \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{ds^3} g_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{3!} \left(\frac{d}{ds} \frac{\overbrace{2+6s}^{2\text{-inci türev}}}{3} \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{3!} \left(\frac{6}{3} \Big|_{s=0} \right) = \frac{1}{3}$$

$p(1) + p(2) + p(3) = 1$ olduğu için sonraki türev alma işlemlerine gerek yoktur.

c) $g_X(s) \rightarrow M_X(t)$ için s yerine e^t konur:

$$g_X(s) = \frac{s + s^2 + s^3}{3} \Rightarrow M_X(t) = \frac{e^t + e^{2t} + e^{3t}}{3}$$

$g_X(s) \rightarrow \varphi_X(t)$ için s yerine e^{it} konur:

$$g_X(s) = \frac{s + s^2 + s^3}{3} \Rightarrow \varphi_X(t) = \frac{e^{it} + e^{2it} + e^{3it}}{3}$$

d) $W = \frac{5X}{6} \Rightarrow M_W(t) = E(e^{tW}) = E\left(e^{t\frac{5X}{6}}\right) = E\left(e^{\frac{5t}{6}X}\right) = M_X\left(\frac{5t}{6}\right) = \frac{e^{\frac{5t}{6}} + e^{\frac{10t}{6}} + e^{\frac{15t}{6}}}{3}$

e) $\mu_{[3]} = ?$

$$\mu_{[3]} = E(X(X-1)(X-2)) = \left. \frac{d^3}{ds^3} g_X(s) \right|_{s=1} = \left(\begin{array}{c} \text{3-üncü türev} \\ \frac{6}{3} \\ \hline s=1 \end{array} \right) = 2$$

f) Laplace fonksiyonu yazılamaz çünkü X, kesikli bir r.d.'dir.

11) X kesikli r.d. için $p(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \quad x = 1, 2, 3, \dots$ ise,

a) $g_X(s) = ?$

$$\begin{aligned} g_X(s) &= E(s^X) = \sum_{x=1}^{\infty} s^x p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} s^x \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = s \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^0 + s^2 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^1 + s^3 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \\ &= \frac{s}{3} \left[\left(\frac{2s}{3}\right)^0 + \left(\frac{2s}{3}\right)^1 + \left(\frac{2s}{3}\right)^2 + \dots \right] = \frac{s}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2s}{3}} \right) = \frac{s}{3 - 2s}, \quad \left| \frac{2s}{3} \right| < 1 \end{aligned}$$

b) $E(X) = ?$

$$\mu_{[1]} = E(X) = \left. \frac{d}{ds} g_X(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{3 - 2s} \right) \right|_{s=1} = \left. \frac{1 \cdot (3 - 2s) - s(-2)}{(3 - 2s)^2} \right|_{s=1} = \left. \frac{3}{(3 - 2s)^2} \right|_{s=1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\begin{aligned} \mu_{[2]} &= E(X(X-1)) = \left. \frac{d^2}{ds^2} g_X(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{(3 - 2s)^2} \right) \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} (3(3 - 2s)^{-2}) \right|_{s=1} \\ &= 3(-2)(3 - 2s)^{-3}(-2)|_{s=1} = \left. \frac{12}{(3 - 2s)^3} \right|_{s=1} = 12 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mu_{[2]} + \mu_{[1]} - (\mu_{[1]})^2 = 12 + 3 - 3^2 = 6$$

$$\begin{aligned} \mu_{[3]} &= E(X(X-1)(X-2)) = \left. \frac{d^3}{ds^3} g_X(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{12}{(3 - 2s)^3} \right) \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} (12(3 - 2s)^{-3}) \right|_{s=1} \\ &= 12(-3)(3 - 2s)^{-4}(-2)|_{s=1} = \left. \frac{72}{(3 - 2s)^4} \right|_{s=1} = 72 \end{aligned}$$

c) $g_X(s) \rightarrow M_X(t)$ için s yerine e^t konur.

$$g_X(s) = \frac{s}{3-2s} \Rightarrow M_X(t) = \frac{e^t}{3-2e^t}$$

$$M_{X-\mu}(t) = E(e^{t(X-\mu)}) = e^{-\mu t} E(e^{tX}) = e^{-\mu t} M_X(t) = e^{-\mu t} \left(\frac{e^t}{3-2e^t} \right)$$

$$\mu = 3 \Rightarrow M_{X-3}(t) = e^{-3t} \left(\frac{e^t}{3-2e^t} \right)$$

$g_X(s) \rightarrow \varphi_X(t)$ için s yerine e^{it} konur.

$$g_X(s) = \frac{s}{3-2s} \Rightarrow \varphi_X(t) = \frac{e^{it}}{3-2e^{it}}$$

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = E \left(e^{it \left(\frac{X-\mu}{\sigma} \right)} \right) = e^{-\frac{\mu it}{\sigma}} E \left(e^{it \frac{X}{\sigma}} \right) = e^{-\frac{\mu it}{\sigma}} \varphi_X \left(\frac{t}{\sigma} \right) = e^{-\frac{\mu it}{\sigma}} \left(\frac{e^{it \frac{t}{\sigma}}}{3-2e^{it \frac{t}{\sigma}}} \right)$$

$$\mu = 3 \quad \nu e \quad \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6} \Rightarrow \varphi_{\frac{X-3}{\sqrt{6}}}(t) = e^{-\frac{3it}{\sqrt{6}}} \left(\frac{e^{it \frac{t}{\sqrt{6}}}}{3-2e^{it \frac{t}{\sqrt{6}}}} \right)$$

12) X sürekli r.d. olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2e^{-2x}, \quad x > 0 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

a) Laplace fonksiyonu $F_X(s) = ?$

$$\begin{aligned} F_X(s) &= E(e^{-sx}) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} 2e^{-2x} dx = 2 \int_0^\infty e^{-(2+s)x} dx = 2 \left(\frac{-e^{-(2+s)x}}{2+s} \right) \Big|_0^\infty \\ &= 2 \left(\frac{-e^{-\infty} + e^0}{2+s} \right) = \frac{2}{2+s} \end{aligned}$$

b) $F_X(s) \rightarrow \varphi_X(t)'ye$ geçmek için s yerine $(-it)$ konur:

$$F_X(s) = \frac{2}{2+s} \Rightarrow \varphi_X(t) = \frac{2}{2-it}$$

$F_X(s) \rightarrow M_X(t)'ye$ geçmek için s yerine $(-t)$ konur:

$$F_X(s) = \frac{2}{2+s} \Rightarrow M_X(t) = \frac{2}{2-t}$$

c) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = ?$

$$E(X^k) = \frac{1}{(-1)^k} \left(\frac{d^k}{ds^k} F_X(s) \Big|_{s=0} \right)$$

$$E(X) = \frac{1}{(-1)^1} \left(\frac{d}{ds} F_X(s) \Big|_{s=0} \right) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{2}{2+s} \right) \Big|_{s=0} = -\left(\frac{-2}{(2+s)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{(-1)^2} \left(\frac{d^2}{ds^2} F_X(s) \Big|_{s=0} \right) = \frac{d}{ds} \left(\overbrace{\frac{-2}{(2+s)^2}}^{1-\text{inci türev}} \right) \Big|_{s=0} = \left(\frac{4}{(2+s)^3} \right) \Big|_{s=0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

d) $W = 3X - 7$ 'nin Laplace fonksiyonunu bulunuz. $F_W(s) = ?$

$$F_W(s) = E(e^{-sW}) = E(e^{-s(3X-7)}) = e^{7s} E(e^{-3sX}) = e^{7s} F_X(3s) = e^{7s} \left(\frac{2}{2+3s} \right)$$

13) X sürekli r.d. için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 2 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

a) $F_X(s) = ?$

$$F_X(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^2 e^{-sx} f(x) dx = \int_0^2 e^{-sx} \left(\frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-sx}}{-s} \right) \Big|_0^2 = \frac{1 - e^{-2s}}{2s}$$

b) $E(X) = ?$

$$E(X^k) = \frac{1}{(-1)^k} \left(\frac{d^k}{ds^k} F_X(s) \Big|_{s=0} \right)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{(-1)^1} \left(\frac{d}{ds} F_X(s) \Big|_{s=0} \right) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1 - e^{-2s}}{2s} \right) \Big|_{s=0} = -\left(\frac{2e^{-2s}(2s) - (1 - e^{-2s})2}{(2s)^2} \right) \Big|_{s=0} \\ &= -\left(\frac{4se^{-2s} + 2e^{-2s} - 2}{4s^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$ belirsizliği L' Hospital kuralı uygulanır. Pay ve paydanın ayrı ayrı türevleri alınır.

$$E(X) = -\frac{\frac{d}{ds}(4se^{-2s} + 2e^{-2s} - 2)}{\frac{d}{ds}(4s^2)} \Big|_{s=0} = -\frac{4e^{-2s} - 8se^{-2s} - 4e^{-2s}}{8s} \Big|_{s=0} = \frac{8se^{-2s}}{8s} \Big|_{s=0} = e^{-2s} \Big|_{s=0} = 1$$

c) $F_X(s) \rightarrow M_X(t)$ 'ye geçmek için s yerine $-t$ konur:

$$F_X(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{2s} \Rightarrow M_X(t) = \frac{1 - e^{2t}}{-2t} = \frac{e^{2t} - 1}{2t}$$

$F_X(s) \rightarrow \varphi_X(t)$ 'ye geçmek için s yerine (-it) konur:

$$F_X(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{2s} \Rightarrow \varphi_X(t) = \frac{1 - e^{2it}}{-2it} = \frac{e^{2it} - 1}{2it}$$

d) $Z = 12X + 4$ r.d.'ninin Laplace fonksiyonu:

$$F_Z(s) = E(e^{-sZ}) = E(e^{-s(12X+4)}) = E(e^{-12sX-4s}) = e^{-4s}E(e^{-12sX}) = e^{-4s}F_X(12s)$$

$$F_X(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{2s} \Rightarrow F_X(12s) = \frac{1 - e^{-24s}}{24s}$$

$$F_Z(s) = e^{-4s}F_X(12s) = e^{-4s}\left(\frac{1 - e^{-24s}}{24s}\right)$$