

UYGULAMA VIII

1. Yerel bir süpermarkette üç adet kasa bulunmaktadır. Herhangi bir anda kasalarda hiçbir müşterinin olmadığı varsayalım. Bu durumda, iki müşteri birbirinden bağımsız olarak rasgele bir kasa seçerek ödeme yapmak için seçtiği kasaya gitmektedir. Y_1 , birinci kasayı seçen müşteri sayısı; Y_2 , ikinci kasayı seçen müşteri sayısı olsun.

- (a) (Y_1, Y_2) iki boyutlu kesikli raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.
(b) Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.
(c) $P(Y_1 = 2, Y_2 = 0)$, $P(Y_1 = 0, Y_2 = 1)$, $P(Y_1 \geq 1, Y_2 < 2)$, $P(Y_1 < 2, Y_2 \leq 0)$, $P(Y_1 < 1, Y_2 \geq 0)$, $P(Y_1 \geq 2, Y_2 > 1)$, $P(Y_1 < 1, Y_2 > 2)$ ve $P(Y_1 < 1, Y_2 \geq 2)$ olasılıklarını hesaplayınız.
(d) $E(3Y_1^2Y_2)$ beklenen değerini bulunuz.
(e) $\text{Cov}(3Y_1, 4Y_2)$ kovaryansını hesaplayınız.

2. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerine ilişkin olarak aşağıdaki fonksiyon tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{XY}}(x, y) &= \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x < 1 \text{ ise} \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) $f_{\mathbf{XY}}(x, y)$, X ve Y sürekli raslantı değişkenleri için bir bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?
(b) $P(X \leq 0.5, Y \leq 0.25)$ ve $P(X = 0.45, Y = 0.15)$ olasılıklarını hesaplayınız.

3. Y_1 ve Y_2 sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2}(y_1, y_2) &= cy_1y_2^2, \quad y_1 - 1 \leq y_2 \leq 1 - y_1 \text{ ve } 0 \leq y_1 \leq 1 \text{ ise} \\ &= 0, \quad \text{diğer } y_1 \text{ ve } y_2 \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) c sabitini bulunuz.
(b) $P(Y_1 \leq 0.5, Y_2 \leq 0.5)$ olasılığını bulunuz.

4. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{XY}}(x) &= 6x^2y, \quad 0 < x, y < 1 \text{ ise} \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.
(b) Bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.
(c) X ve Y , birbirinden bağımsız raslantı değişkenleri midir?
(d) $P(0 < X < 0.75, 0.33 \leq Y \leq 2)$, $P(X \leq -5, 0.5 \leq Y \leq 0.75)$, $P(X < 0.85, Y \leq -0.45)$, $P(X = 0.78, Y = 0.55)$, $P(X > 0.2, Y < 0.4)$, $P(0.3 < X < 0.5, 0.4 < Y < 0.9)$ ve $P(X > 0.75, Y \leq 0.35)$ olasılıklarını hesaplayınız.

5. X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{XY}}(x, y) &= \frac{x+y}{A}, \quad x = 1, 2, 3 \text{ ve } y = 1, 2 \text{ ise} \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) A sabitini bulunuz.
(b) Bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.

- (c) Marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.
- (d) Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.
- (e) $P(X < 1.5, Y = 1)$, $P(X = 2, Y = 1)$, $P(X \leq 2, Y \geq 2)$, $P(X \geq 1, Y < 2)$, $P(X > 2, Y \leq 2)$, $P(1 < X \leq 3, Y > 1)$ ve $P(X \geq 2, Y \geq 1)$ olasılıklarını bulunuz.
- (f) $E(XY)$ beklenen değerini bulunuz.
- (g) X ve Y birbirinden bağımsız raslantı değişkenleri midir?
- (h) $\rho(X, Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.
6. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{XY}}(x, y) &= A(x + y) \quad , \quad 0 \leq x, y \leq 2 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) A sabitini bulunuz.
- (b) Bileşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.
- (c) Marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.
- (d) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.
- (e) $P(X = 1, Y = 1)$, $P(X < -2, Y > 1)$, $P(X > 1, 0.5 \leq Y \leq 1)$, $P(X \leq 1.5, Y \geq 1)$ ve $P(0.5 < X < 1.5, Y \geq 1.5)$ olasılıklarını bulunuz.
- (f) $E(XY)$ beklenen değerini ve $V(XY)$ varyansını bulunuz.
- (g) $P(XY \leq 0.5)$ olasılığını hesaplayınız.
7. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{XY}}(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{4} \quad , \quad 0 \leq x \leq 2 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad x \leq 0 \text{ ve } y \leq 0 \text{ ise} \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 2 \text{ ve } y \geq 1 \text{ ise} \end{aligned}$$

- (a) Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
- (b) Marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.
- (c) X ve Y , birbirinden bağımsız raslantı değişkenleri midir?
- (d) $\text{Cov}(X, Y)$ kovaryansını hesaplayınız.
- (e) $\rho(X, Y)$ korelasyon katsayısını bulunuz.
- (f) $P\left(\frac{X + 3Y}{2} \leq 0.5\right)$ olasılığını bulunuz.
8. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{XY}}(x, y) &= kxy \quad , \quad 0 < x < y < 8 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- (a) k sabitini bulunuz.
- (b) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

9. X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{XY}}(x, y) &= \frac{2}{7} \quad , \quad x = 1, 2 \text{ ve } y = 1 \text{ ise} \\ &= \frac{1}{7} \quad , \quad x = 3 \text{ ve } y = 2, 3, 4 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x \text{ ve } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.
 - X ve Y , birbirinden bağımsız raslantı değişkenleri midir?
 - $E(X^2Y)$ beklenen değerini bulunuz.
 - $Cov(3X^2, 5Y + 7)$ ve $Cov(X + Y, X - Y)$ kovaryanslarını hesaplayınız.
10. Bir kurumda görev yapan dokuz yöneticinin 4 tanesi evlidir. 3 tanesi hiç evlenmemiştir ve 2 tanesi boşanmıştır. Yöneticilerden 3 tanesi rasgele seçilerek, seçilen yöneticilere maaşlarının üç katı promosyon verilecektir. Y_1 , seçilen evli yöneticilerin sayısı ve Y_2 , seçilen hiç evlenmemiş yöneticilerin sayısı olsun.
- (Y_1, Y_2) iki boyutlu kesikli raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.
 - Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.
 - $P(Y_1 < 2, Y_2 > 1)$, $P(Y_1 > 3, Y_2 \leq 1)$, $P(Y_1 \geq 1, Y_2 \geq 2)$ ve $P(Y_1 \geq 3, Y_2 \leq 1)$ olasılıklarını hesaplayınız.
 - Y_1 ve Y_2 birbirinden bağımsız raslantı değişkenleri midir?
 - $E(Y_1^5)$ beklenen değerini hesaplayınız.
 - $E(Y_1Y_2^2)$ beklenen değerini hesaplayınız.
11. Hilesiz bir para üç defa atılarak bir oyun oynanmaktadır. Oyunun kuralları aşağıda verilmiştir:
- İlk tura, ilk atışta gelirse 1 TL kazanılmaktadır.
 - İlk tura, ikinci atışta gelirse 2 TL kazanılmaktadır.
 - İlk tura, üçüncü atışta gelirse 3 TL kazanılmaktadır.
 - Hiç tura gelmemesi durumunda ise, 1 TL kaybedilmektedir.

Bu oyuna ilişkin olarak, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

- Y_1 , üç atışta gelen toplam tura sayısıdır.
 - Y_2 , oyundan kazanılan para miktarıdır.
- (Y_1, Y_2) iki boyutlu kesikli raslantı değişkeninin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.
 - Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?
 - $P(Y_1 \leq 2, Y_2 \leq 1)$, $P(Y_1 \geq 3, Y_2 \geq 1)$, $P(Y_1 \geq 2, Y_2 = 1)$ ve $P(Y_1 = 1, Y_2 \geq 3)$ olasılıklarını hesaplayınız.
 - $V(Y_1Y_2 + 2534)$ varyansını bulunuz.
 - $Cov(Y_1 + 100, Y_2)$ kovaryansını hesaplayınız.
 - $Z = 8(Y_1 + 2Y_2 + Y_1Y_2)$ ise, $E(Z)$ beklenen değerini hesaplayınız.
12. X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X_1X_2}}(x_1, x_2) &= k \quad , \quad 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1 \text{ ve } 2x_2 \leq x_1 \text{ ise} \\ &= 0 \quad , \quad \text{diğer } x_1 \text{ ve } x_2 \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

- k sabitini bulunuz.
- $P(X_1 \geq 3X_2)$ olasılığını bulunuz.
- Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.
- X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri birbirinden bağımsız mıdır?
- $\rho(X_1, X_2)$ korelasyon katsayısını bulunuz ve yorumlayınız.