— 10.5. ORAN VE KÖK TESTLERİ —

Bir serinin mutlak yakınsaklığını (dolayısıyla yakınsaklığını) araştırmak için kullanacağımız oran ve kök testleridir.

5.1. Önerme: (ORAN TESTİ I.)

a) Belirli bir $K \in \mathbb{N}^+$ için $\forall k \geq K \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq r < 1$ o.ş. bir $r \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa $\sum_1^\infty a_k$ serisi mutlak yakınsaktır.

b) Belirli bir $K \in \mathbb{N}^+$ için $\forall k \geq K \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ ise $\sum_1^\infty a_k$ serisi ıraksaktır.

Kanıt: (a) $\forall k \geq K$ için $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq r < 1$ olsun. O zaman her $k \geq K$ için

$$|a_{K+1}| \leq r.|a_K|,\ |a_{K+2}| \leq r.|a_{K+1}| \leq r^2.|a_K|,\ |a_{K+3}| \leq r.|a_{K+2}| \leq r^3.|a_K|, \ldots$$

tümevarımla; $0 \leq |a_k| \leq r^{k-K}.|a_K|$ bulunur. O zaman da;

$\sum_{k=K}^\infty r^{k-K}.|a_K| = |a_K|\left(1+r+r^2+\cdots+r^{k-K}+\cdots\right)$ geometrik serisi $(|r|<1$ için$)$ yakınsak old. dan, karşılaştırma Testi gereği $\sum_{k=K}^\infty |a_k|$ serisi yakınsak olur, dolayısıyla $\sum_1^\infty a_k$ mutlak yak. olur.

b) $\forall k \geq K$ için $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \Rightarrow |a_{K+1}| \geq |a_K|,\ |a_{K+2}| \geq |a_{K+1}| \geq |a_K|, \ldots$ $(|a_k|)$ artan (= azalmayan) ve üstten sınırlı değil.

Eğer $\sum_1^\infty a_k$ yakınsak olsaydı $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (var) olurdu. $\Rightarrow \forall k$ için $|a_k| = 0$ olurdu ki bu yukarıdaki sonuçla çelişirdi. Böyleyse $\sum_1^\infty a_k$ ıraksaktır.

5.1 Örnek (a) $\sum_1^\infty \frac{k}{3^k}$, (b) $\sum_0^\infty (-1)^k.\frac{1}{k!}$ serileri yak. mıdır?

Çözüm: (a) $a_k = k/3^k \Rightarrow a_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}}$ dir ve

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)/3^{k+1}}{k/3^k}\right| = \frac{k+1}{3k}$ dir. $\Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{3k} \leq \frac{2}{3} = r < 1$ old. dan

$k \geq 1 \Rightarrow k+1 \leq k+k = 2k$

5.1. Önerme gereği $\sum_1^\infty \frac{k}{3^k}$ serisi mutlak yak. $\Rightarrow$ yakınsaktır.

b) $a_k = (-1)^k.\frac{1}{k!}$ ise $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}}{(-1)^k.1/k!}\right| = \left|\frac{1}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1} \leq 1/2 = r < 1$

kalacak K sayısını belirleyelim: $\frac{1}{k+1} \le 1/2 \Leftrightarrow 2 \le k+1 \Leftrightarrow 1 \le k$ dır.

Demek ki her $k \ge 1$ için $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le 1/2 < 1$ old. dan bu seride

5.1. Önerme gereği mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsak olur.

Şimdi daha kullanışlı olan Oran Testini verelim:

5.2. Önerme: (ORAN TESTİ II.) Her k için $a_k \neq 0$ ve

(**) $A = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ olsun. Bu durumda;

a) $A < 1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_k$ mutlak yakınsaktır

b) $A > 1 \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_k$ ıraksaktır.

c) $A = 1$ ise bu test sonuç vermez.

<u>Kanıt</u>: (a) $A<1$ olduğu için $A<r<1$ o.ş. bir $r\in\mathbb{R}^+$ vardır.

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = A$ old. dan en az bir $K\in\mathbb{N}^+$; $\forall k \ge K$ için

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le r$ olur. $\overset{5.1.\text{Öner.}}{\Rightarrow} \sum_1^{\infty} a_k$ mutlak yak.

b) $A>1$ ve $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = A$ old. dan $\exists K\in\mathbb{N}^+$; $\forall k\ge K$ için

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ bulunur $\overset{5.1.\text{Ön.}}{\Rightarrow} \sum_1^{\infty} a_k$ ıraksak olur.

c) $\sum_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{=a_k}$ ve $\sum_1^{\infty} \underbrace{1/k}_{=a_k}$ serilerini gözönüne alalım. Her iki durumda, $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ dir, ancak $\sum_1^{\infty} 1/k^2$ serisi yakınsak ve $\sum_1^{\infty} 1/k$ Harmonik serisi de ıraksaktır. Dolayısıyla bu durumda test sonuç vermiyor.

<u>5.2. Örnek</u>: 1a) $\sum_1^{\infty} \frac{k!}{k^k}$, b) $\sum_1^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1.4.7.\cdots(3k+1)}{2^k . k!}$

serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.

<u>Çözüm</u>: (a) $a_k = \frac{k!}{k^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\overbrace{(k+1)!}^{=(k+1).k!}}{\underbrace{(k+1)^{k+1}}_{=(k+1).(k+1)^k}} \cdot \frac{k^k}{k!}\right|$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} < 1$ dir

$\overset{\text{Oran T. II.}}{\Longrightarrow} \sum_1^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ serisi mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsaktır.

b) $a_k = (-1)^k \cdot \dfrac{1.4.7\cdots(3k+1)}{2^k \cdot k!} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|(-1)^{k+1}\dfrac{1.4.7\cdots(3(k+1))(3k+4)}{2^{k+1}(k+1)!} \cdot \dfrac{2^k \cdot k!}{(-1)^k\, 1.4.7\cdots(3k+1)}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{3k+4}{2.(k+1)} = 3/2 > 1 \overset{\text{Oran T. II}}{\Longrightarrow}$ Seri ıraksaktır.

$2^{k+1} = 2.2^k$, $(k+1)! = (k+1).k!$

5.3. Önerme: (KÖK TESTİ I.)

(a) Belirli bir $K \in \mathbb{N}^+$ için $\forall k \geq K \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq r < 1$ o.ş. bir $r \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa $\sum_1^\infty a_k$ serisi mutlak yakınsaktır,

(b) Her k (ya da sonsuz çoklukta k) için $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ ise $\sum_1^\infty a_k$ serisi ıraksaktır.

Kanıt: (a) $\forall k \geq K$ için $\sqrt[k]{|a_k|} \leq r \Rightarrow |a_k| \leq r^k$ $r<1$ ve $\sum_1^\infty r^k$ geo. serisi $(r<1)$ yakınsak old. dan, karşılaştırma testinden $\sum_1^\infty |a_k|$ yakınsak $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ mutlak yak.

b) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ olmayacağı için $\sum_1^\infty a_k$ ıraksak olur.

5.3. Örnek $\sum_2^\infty (-1)^k \cdot \dfrac{1}{(\ln k)^k}$ serisi mutlak yakınsak olur mu.

$a_k = (-1)^k \cdot \dfrac{1}{(\ln k)^k}$ denirse $\sqrt[k]{|a_k|} = \dfrac{1}{\ln k}$ olur. Şimdi uygun bir $0<r<1$ için $\sqrt[k]{|a_k|} = \dfrac{1}{\ln k} \leq r$ eşitsizliğini sağlayan k'ları bulalım:

$\forall k \geq 8 \geq e^2 \cong 7.389 \Rightarrow \ln k \geq \ln e^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\ln k} \leq 1/2 \overset{=r}{<} 1$ dir.

Böylece $k \geq 8$ için $\sqrt[k]{|a_k|} \leq 1/2 \overset{=r}{<} 1$, olup ($r = 1/2$ için) 5.3. Önerme gereğince $\sum_2^\infty a_k$ yani $\sum_2^\infty (-1)^k \dfrac{1}{(\ln k)^k}$ mutlak yakınsak olur.

** 5.4. Önerme: (KÖK TESTİ II) $\leftrightarrow$ Daha kullanışlıdır.

$A = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ diyelim. Bu durumda;

(a) $A<1 \Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ mutlak yakınsaktır,

(b) $A>1 \Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ ıraksaktır.

(c) $A=1 \Rightarrow$ Test sonuç vermez. $\rightarrow$ Kanıt: (Ödev)

5.4. Örnek: (a) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(\ln k)^k}$, b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ serilerinin yakınsaklı-

Çözüm: (a) $a_k = (-1)^k \frac{1}{(\ln k)^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^k}{(\ln k)^k}\right|}$

$\forall k \geq 2$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1 \xrightarrow{\text{Kök testi } \mathrm{II}} \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(\ln k)^k}$ mutlak yak.

⇓ yakınlık

b) $a_k = \frac{k}{3^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{3^k}} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} k^{1/k} = \frac{1}{3}.1 < 1$

Kök Testi II.

$\Rightarrow$ seri mutlak yakınsak olur. $\Rightarrow$ yakınsak.

5.5. Örnek: $\lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(2k)!} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Not: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olduğunu göstermek için $\sum_{1}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

Dolayısıyla $\sum_{1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!}$ serisinin yakınsaklığına bakalım:

$a_k = \frac{k^k}{(2k)!}$ olsun. $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^{k+1}}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{k^k}\right|$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k . \cancel{(k+1)} . \cancel{(2k)!}}{2\cancel{(k+1)} . (2k+1) . \cancel{(2k)!} . k^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k . \frac{1}{2(2k+1)}$

$= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k . \frac{1}{4k+2} = e.0 = 0 < 1 \xrightarrow{\text{Oran test } \mathrm{II}.}$ seri mutlak yakınsaktır $\Rightarrow$ seri yakınsaktır $\xrightarrow{\text{Gen. Ter. Test.}} \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(2k)!} = 0$ bulunur.

Not: Kök testi II, Oran testi II'den daha genel bir test dir. Yani Oran testi II nin sonuç vermediği durumlarda Kök testi II sonuç verebilir:

Örnek: $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & n \text{ tek} \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ çift} \end{cases} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ yak mıdır?

Çözüm: İlk önce "Oran Testi II"yi uygulayalım, bunun için $a_n \geq 0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2n}, & n \text{ tek} \to n+1 \text{ çift} \\ \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1/2^n} = \frac{n+1}{2}, & n \text{ çift} \to n+1 \text{ tek} \end{cases}$$

dır ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ yoktur.

$\Rightarrow$ Oran Testi II sonuç vermez.

Ancak Kök Testi II ile; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$

n tek $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = 1/2$

n çift $\lim\limits_{n\to\infty} 1/2 = 1/2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1 \overset{\text{Kök. test II}}{\Longrightarrow}$ seri mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsaktır.

Önerme (Kanıtsız): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ dır.

Uygulaması.

Örnek 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ alınıp, $b_n = (a_n)^n$ alındığında;

$b_n = \frac{n^n}{n!}$ olur ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ bulunur

Not. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ bulunur.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n} = ?$ Yine $a_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdots(2n)}}{n}$

denirse, $b_n = (a_n)^n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}$ dir.

$b_n = \frac{(1.2.3\cdots n)(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(1.2.3\cdots n). n^n} = \frac{(2n)!}{n!.n^n}$ dir, ve

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!\, n^n}{(2n)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2.(2n+1).n^n}{(n+1).(n+1)^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2.(2n+1)}{n+1} . \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 4 . \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = 4/e$ olur.

Not $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a_n)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1).(n+2)\cdots(2n)}{n} = 4/e$ olur.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ dır göst.

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ serisi yakınsaktır (?) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ olur.

Soru: $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = ?$

Raabe Testi

5.5. Önerme: Her k için $a_k>0$ olmak üzere $\sum_{1}^{\infty} a_k$ serisi verilsin, ve $A = \lim_{k\to\infty} k.\left[1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right]$ olsun. Bu durumda;

a) $A>1 \Rightarrow$ seri yakınsaktır.

b) $A<1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır

c) $A=1 \Rightarrow$ Bu test sonuç vermez.

(Oran ve Kök Testlerinin sonuç vermediği durumlarda bu test sonuç verebilir.

Örnek: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1.3.5.7.\cdots(2k-1)}{2.4.6.8.\cdots(2k)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $a_k=\frac{1.3.5\cdots(2k-1)}{2.4.6\cdots(2k)}>0 \ \forall k$ dır.

Oran Testi: $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1.3.5\cdots(2k-1)(2k+1)}{2.4.6\cdots(2k)(2k+2)}\cdot\frac{2.\cdots 2k}{1.3.\cdots(2k-1)}$

$=\lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+2}=1$ sonuç yok.

Raabe Testi: $\lim_{k\to\infty} k.\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$

$=\lim_{k\to\infty} k.\left(1-\frac{2k+1}{2k+2}\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{2}<1$

olduğundan seri ıraksaktır.

İlginç Örnek: $\sum_{0}^{\infty} \frac{4^n\, n!.n!}{(2n)!}$ serisi yak. mıdır?

$a_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}>0$ olsun.

Oran Testi sonuç vermez; çünkü

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2.(n+1)}{2n+1}=1$ dir.

Raabe Testi: $\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \lim_{k\to\infty} k.\left(1-\frac{2k+2}{2k+1}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{-k}{2k+1}$
$=-1/2<1$ ıraks.

Ya da: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+2}{2n+1}$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ old.dan $a_{n+1}\geq a_n$ (çünkü $\frac{2n+2}{2n+1}\geq 1$). O halde tüm terimler 2 den büyük veya eşittir $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n\neq 0 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

— 6. KUVVET SERİLERİ —

$\int \frac{\sin x}{x} dx$

6.1. Tanım: (c_k) bir dizi ve bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı için x değişkenine bağlı;

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-x_0)^k = c_0 + c_1 (x-x_0) + c_2 (x-x_0)^2 + \dots + c_k (x-x_0)^k + \dots \text{ veya}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + \dots$$

biçiminde tanımlı serilere kuvvet serileri, (c_k) dizisinin terimlerine kuvvet serilerinin katsayıları denir.

Örneğin: a) $\sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, b) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k} (x-2)^k$, c) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$

ler birer kuvvet serileridir ve bu kuvvet serilerinin x_0 ve c_k' ları sırasıyla; $\left(x_0 = 0, \ c_k = \frac{1}{k!}\right)$, $\left(x_0 = 2, \ c_k = \frac{1}{k}\right)$ ve $\left(x_0 = 0, \ c_k = \frac{1}{(2k)!}\right)$ dir.

$\sum_1^{\infty} \frac{(\sin x)^k}{\ln(k+1)}$ bir kuvvet serisi değildir.

Not: Kuvvet serileri için iki temel soruya yanıt vermeliyiz:

1) Bir kuvvet serisi hangi x'ler için yakınsar ve yakınsadığı x'ler için nasıl bir fonksiyona yakınsar (veya eşit olur), hangi x'ler için ıraksak olduğunu belirlemek.

2) 1. sorunun tersine herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu hangi koşullar altında bir kuvvet serisi ile ifade edilir ve bu fonksiyona karşılık gelen kuvvet serisini belirlemek.

1. sorunun yanıtı için:

a) Geometrik Seri: $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot x^k = \sum_1^{\infty} a \cdot x^{k-1} \underset{|x|<1}{=\!=} \frac{a}{1-x} = f(x)$

ya da $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot (x-x_0)^k = \sum_1^{\infty} a \cdot (x-x_0)^{k-1} \underset{|x-x_0|<1}{=\!=} \frac{a}{1-(x-x_0)} = f(x)$ dir.

b) $\sum_0^{\infty} \underbrace{c_k \cdot (x-x_0)^k}_{= a_k}$ kuvvet serisi için Oran veya Kök testleri kullanılarak ve $R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$ olmak üzere:

(Burada R ye serinin yakınsaklık yarıçapı)

bu kuvvet serisi;

oran testi ... kök testi

(i) $|x-x_0|<R \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}<1$ olan x 'ler için mutlak yakınsak ($\Rightarrow$ yakınsak) olur. (Bu x'lerin kümesi olan $I=\{x \mid |x-x_0|<R\}$ ye yakınsaklık aralığı denir.)

(ii) $|x-x_0|>R \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}>1$ olan x 'lar için ıraksaktır.

(iii) $|x-x_0|=R \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=1$ olan

$\equiv \begin{cases} x=x_0+R \\ x=x_0-R \end{cases}$ uç-noktaları seride yerine konularak elde edilecek sayı serilerinin yakınsaklığı veya ıraksaklığı belirlenerek serinin yakınsadığı x'lerin kümesi olan Y yakınsaklık kümesi bulunur.

Örnekler: 1) (a) $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k\cdot\sqrt{k}}$, (b) $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^k}{k\cdot\ln(k+1)}$

kuvvet serilerinin yakınsadığı ve ıraksadığı kümeler ile yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

Çözüm: (a) $\rightarrow a_k=\dfrac{x^k}{k\cdot\sqrt{k}}$ olmak üzere, oran testinden;

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)\cdot\sqrt{k+1}}\cdot\frac{k\cdot\sqrt{k}}{x^k}\right|=|x|\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{k\cdot\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k+1}}$$

$=|x|\cdot\left(\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{k+1}\right)^{3/2}=|x|\cdot 1=|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ için yakınsak $\rightarrow I=(-1,+1)$

$|x|>1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ için ıraksak.

Uç-noktalarda: $x=-1 \Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^{3/2}}$ alternatif serisi yakınsak(?) görün.

$x=1 \Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1^k}{k^{3/2}}=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{3/2}}$ serisi de yakınsak [P-Testi].

O halde, bu serinin yakınsaklık kümesi $Y=[-1,1]$ dir.

Yakınsaklık yarıçapı; $R=\dfrac{\text{Aralık Uzunluğu}}{2}=\dfrac{1-(-1)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$,

veya $R=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right| \quad \dfrac{}{c_k=\frac{1}{k\cdot\sqrt{k}}} \quad \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{(k+1)^{3/2}}{k^{3/2}}\right|=1$ dir.

Ya da $R=1$ ise seri $|x|<R=1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$, $I=(-1,1)$ için yakınsak

$|x|>1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ için ıraksak ve uç-noktada bakılır.

b) $a_k = \frac{(x+2)^k}{k.\ln(k+1)}$ ve $c_k = \frac{1}{k.\ln(k+1)}$ olmak üzere;

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1).\ln(k+2)}{k.\ln(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}.\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)} = 1$$

$\Rightarrow$ Seri $|x+2| < R = 1 \Leftrightarrow |x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$
($\Leftrightarrow I = (-3,-1)$ yakınsaklık aralığı) de yakınsar,

$$|x+2| > R = 1 \Leftrightarrow |x+2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 1 \Leftrightarrow x > -1 \\ x+2 < -1 \Leftrightarrow x < -3 \end{cases} \equiv$$

$x \in (-\infty,-3) \cup (-1,\infty)$ için ıraksar.

Uç noktalar: $x=-3$ için $\sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{k.\ln(k+1)}$ bir Alternatif seridir ve

$$b_k = \frac{1}{k.\ln(k+1)} \quad \left.\begin{array}{l} b_k > 0 \\ (b_k) \text{ azalan} \\ \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \end{array}\right\} \text{old.dan seri yakınsaktır.}$$

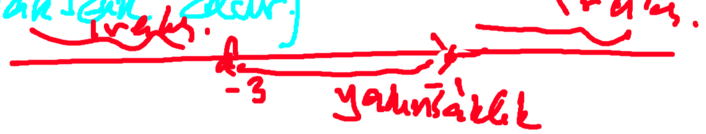
$x = -1 \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{k.\ln(k+1)}$ dır ve ıraksaktır. $\Big(0 < \underbrace{\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}}_{f(x)} < \frac{1}{x\ln(x+1)}$; azalan, >0 ve sürekli.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} \xrightarrow[du = \frac{dx}{x+1}]{u = \ln(x+1)} \lim_{R\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln(R+1)} \frac{du}{u} = \lim_{R\to\infty}\left(\ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln(R+1)}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\ln(\ln(R+1)) - \ln(\ln 2)\right) \to \infty$$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$ ıraksak $\xrightarrow[\text{İnt. Test.}]{}$ $\sum_1^\infty \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$ ıraksak

$\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{k.\ln(k+1)}$ serisi de ıraksaktır$\Big)$



Öyleyse $Y = [-3,-1)$ dır.

2) Aşağıdaki serilerin yakınsaklık kümeleri ile yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz:

a) $\sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$, b) $\sum_0^\infty \frac{k!}{k^k}(x-3)^k$, c) $\sum_0^\infty k!\,x^k$

a) $a_k = \frac{x^k}{k!}$ ve $c_k = \frac{1}{k!}$ old. dan, $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{\cancel{k!}}{x^k}\right|$; $\cancel{(k+1)\,k!}$

$= |x|.\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = |x|.0 < 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$ için) dır. $\therefore I = \mathbb{R}$
ve $R = \infty$ dır. (Yani $Y = I = \mathbb{R}$ olur).

Yani seri her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır $\Rightarrow$ yakınsaktır.

b) $a_k = \frac{k!}{k^k}\cdot(x-3)^k$ ve $c_k = \frac{k!}{k^k}$ dir. $R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!}{k^k}\cdot\right.$

$\left.\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\cdot(k+1)^k}{k^k\cdot(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$ dir.

Böylece; seri $|x-3| < R = e \iff x\in(3-e,3+e) = I$ de yakın

$|x-3| > R = e \iff x\in(-\infty,3-e)\cup(3+e,\infty)$ da ıraks

Uç-noktalarda, $x = 3-e$ için $\sum_0^\infty \frac{k!}{k^k}(-e)^k = \sum_0^\infty (-1)^k\cdot\frac{k!}{k^k}e^k$

yak mı?

$x = 3+e$ için $\Rightarrow \sum_0^\infty \frac{k!}{k^k}\cdot(e)^k$ serilerinin yakınsaklıklarını

yak mı? inceleyiniz.

c) $a_k = k!\,x^k$ ise $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!\,x^{k+1}}{k!\,x^k}\right|$

$= \lim_{k\to\infty}(k+1)\cdot|x| \overset{\forall x\neq 0}{=} \infty$ dir. Demek ki bu seri sadece $x=0$

için yakınsar ve $x\neq 0$ olan her $x\in\mathbb{R}$ için ıraksar.

Yani $I = Y = \{0\}$ dır. $R=0$.

3) a) $\sum_1^\infty \frac{k^2}{2^k}\cdot(x-1)^k$, b) $\sum_1^\infty \frac{2^k}{k!}(2x-1)^{2k}$, c) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{k^4\cdot 2^{2k}}\cdot x^k$

kuvvet serilerinin yakınsaklık kümeleri ile yakınsaklık yarıçapı?

Çözüm: (a) $a_k = \frac{k^2}{2^k}\cdot(x-1)^k \Rightarrow$ Oran Testi: $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2\cdot(x-1)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\right.$

$\left.\frac{2^k}{k^2\cdot(x-1)^k}\right| = \frac{|x-1|}{2}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{|x-1|}{2}\cdot 1 < 1 \iff |x-1| < 2 \iff$

$x\in(-1,3) = I$ de yakınsak

$|x-1| > 2 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ da ıraksaktır.

Uç-noktalar: $x=-1$ için $\sum_1^\infty (-1)^k\cdot k^2$ serisi ıraksaktır (?)

$x=3$ için $\sum_1^\infty k^2$ serisi de ıraksaktır (?)

$\Rightarrow Y = I = (-1,3)$ ve $R = \frac{3-(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$ dir.

b) $a_k = \frac{2^k}{k!}\cdot(2x-1)^{2k} \xrightarrow[\text{Testi}]{\text{Oran}} \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}\cdot(2x-1)^{2k+2}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k\cdot(2x-1)^{2k}}\right|$

$= \lim_{k\to\infty}|2x-1|^2\cdot\frac{2}{k+1} = |2x-1|^2\cdot 2\cdot 0 = 0 < 1$ ($\forall x\in\mathbb{R}$ için yakınsak)

$\Rightarrow Y = I = \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ ve $R=\infty$ dır.

c) $a_k = \frac{(-1)^k\cdot x^k}{k^4\cdot 2^{2k}} \xrightarrow[\text{Testi}]{\text{Oran}} \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\cdot x^{k+1}}{(k+1)^4\cdot 2^{2k+2}}\cdot\frac{k^4\cdot 2^{2k}}{(-1)^k x^k}\right|$

$= |x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{k^4}{(k+1)^4} = \frac{|x|}{4} \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \right)^4 = \frac{|x|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$

$\Leftrightarrow x \in (-4,4) = I$ için yakınsak, $|x| > 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$ da ıraksak.

$R = \frac{4-(-4)}{2} = \frac{8}{2} = 4$ dür ve

Uç-noktalarda: $x=-4$ için $\sum_1^\infty \frac{(-1)^k \cdot (-4)^k}{k^4 \cdot 2^{2k}} = \sum_1^\infty \frac{1}{2^{2k}} = \sum_1^\infty \frac{1}{4^k}$ yakın

$x=4$ için $\sum_1^\infty (-1)^k \cdot \frac{1}{2^{2k}} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{4^k}$ Alternatif serisi yakınsak

$\Rightarrow Y = [-4,4]$ olur.

Ödev: Aşağıdaki serilerin yakınsaklık kümelerini, ıraksadıkları noktaların kümesini ve yakınsaklık yarıçapların bulun

a) $\sum_1^\infty k^2 \cdot 3^k \cdot (x-3)^k$, b) $\sum_1^\infty \frac{(2x+3)^k}{4^k}$, c) $\sum_0^\infty k^3 \cdot (2x-3)^k$.

4) $\sum_1^\infty \frac{(\sin x)^k}{\ln(k+1)}$ serisinin yakınsadığı ve ıraksadığı noktaların kümesi ile $R = ?$

Çözüm: $a_k = \frac{(\sin x)^k}{\ln(k+1)}$ ise oran Testinden;

$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(\sin x)^{k+1}}{\ln(k+2)} \cdot \frac{\ln(k+1)}{(\sin x)^k} \right| = |\sin x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)}$

$= |\sin x| \cdot 1 = |\sin x| < 1$ olan her $x \neq (2k+1) \cdot \pi/2 = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$

için yakınsaktır. Ayrıca;

$x = 2k\pi + \pi/2$ için $\sum_1^\infty \frac{\sin(2k\pi + \pi/2)^k}{\ln(k+1)} = \sum_1^\infty \frac{1}{\ln(k+1)}$ serisi ıraksak(?)

ve $x = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$ için

$\sum_1^\infty \frac{\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^k}{\ln(k+1)} = \sum_1^\infty (-1)^k \frac{1}{\ln(k+1)}$ alternatif

serisi yakınsaktır.

Bu serinin bir kuvvet serisi olmadığına dikkat.

Kuvvet serilerde cebirsel işlemler:

$\sum_0^\infty c_k (x-x_0)^k$, $\sum_0^\infty d_k (x-x_0)^k$ k.serileri ile $\lambda \in \mathbb{R}$ verilsin $\Rightarrow$

1) $\sum_0^\infty c_k (x-x_0)^k \mp \sum_0^\infty d_k (x-x_0)^k = \sum_0^\infty (c_k \mp d_k)(x-x_0)^k$

2) $\lambda \cdot \sum_0^\infty c_k (x-x_0)^k = \sum_0^\infty \lambda \cdot c_k \cdot (x-x_0)^k$ dür.

3) $\left[\sum_0^\infty c_k (x-x_0)^k \right] \cdot \left[\sum_0^\infty d_k (x-x_0)^k \right] = \sum_0^\infty \left[\sum_{n=0}^k c_n d_{k-n} \right] \cdot (x-x_0)^k$ dür.

Örnek: (a) $\sum_0^\infty \frac{1}{2k!}x^k + \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k!}x^k = ?$

b) $\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k!}x^k\right]\cdot\left[\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!}x^k\right] = ?$

Çözüm: (a)
$$\sum_0^\infty \frac{1}{2k!}x^k + \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k!}x^k = \sum_0^\infty \frac{1}{2k!}\left[1+(-1)^k\right]\cdot x^k$$

$$= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots = \sum_0^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ dır.}$$

b) $\left[\sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}\right]\cdot\left[\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!}x^k\right] = \sum_0^\infty \left[\sum_{n=0}^k \frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^{k-n}}{(k-n)!}\right]\cdot x^k$ dır ve

$k\geq 1$ için $\sum_{n=0}^k \frac{1}{n!}\frac{(-1)^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{(-1)^k}{0!\,k!}+\frac{(-1)^{k-1}}{1!\,(k-1)!}+\cdots+\frac{(-1)^0}{k!\,0!} \overset{?}{=} 0$ old. dan (gösteriniz)

$$\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k!}x^k\right]\cdot\left[\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!}x^k\right] = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek $A(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$ ve $B(x) = \sum_0^\infty b_k x^k$ ($|x|<R$ için) olmak üzere,
$$C_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$$
$= \sum_{n=0}^k a_n\cdot b_{k-n}$ ise $\sum_{k=0}^\infty C_k x^k$ serisi de $|x|<R$ için $A(x)\cdot B(x)$'e mutlak yakınsar idi. Buna göre;

$$A(x) = \sum_0^\infty x^k \xrightarrow[\text{geo. seri}]{|x|<1} \frac{1}{1-x} \text{ dır, } B(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^k \text{ olsun.}$$

O zaman;
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} = A(x)\cdot B(x) = \sum_0^\infty C_k\cdot x^k = \sum_0^\infty (k+1)x^k \text{ dır.}$$

Çünkü, $A(x) = \sum_0^\infty x^k = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots = B(x)$ ise;

$$C_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(k+1)\text{ tane}} = (k+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = A(x)\cdot B(x) = \left(\sum_0^\infty x^k\right)\cdot\left(\sum_0^\infty x^k\right) = \sum_0^\infty C_k x^k = \sum_0^\infty (k+1)x^k \text{ dır.}$$

Ya da $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^k$, $(|x|<1)$ dır $\Rightarrow$ terim-terime türev olarak

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_0^\infty x^k\right) = \sum_1^\infty k\,x^{k-1}$$

$= \sum_0^\infty (k+1)\cdot x^k$ elde edilir ve yine ($|x|<1$ için yakınsar)