

## Çözümlü Alistirmalar

1.  $A = \{(1, 2, 1), (1, 3, 3), (2, 3, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$  altkümesi  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayının bir tabanı mıdır? Araştırınız.

**Cözüm:**  $A$  kümelerinin  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayının bir tabanı olduğunu göstermek için  $A$  kümelerinin doğrusal bağımsız olduğunu ve  $\mathbb{R}^3$  uzayını ürettiğini göstereceğiz.

$$c_1(1, 2, 1) + c_2(1, 3, 3) + c_3(2, 3, -1) = (0, 0, 0)$$

olsun. Bu durumda

$$(c_1 + c_2 + 2c_3, 2c_1 + 3c_2 + 3c_3, c_1 + 3c_2 - 1c_3) = (0, 0, 0)$$

olur.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

homojen doğrusal denklem sistemi çözülürse  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  elde edilir. O halde  $A$  doğrusal bağımsızdır. Her  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  için

$$(a, b, c) = c_1(1, 2, 1) + c_2(1, 3, 3) + c_3(2, 3, -1)$$

eşitlinden  $c_1, c_2, c_3$  skalerlerini hesaplayalım. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= a \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= b \\ c_1 + 3c_2 - c_3 &= c \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$c_1 = 12a - 7b + 3c, c_2 = 3b - 5a - c, c_3 = 2b - 3a - c$$

bulunur. Yani her  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  elemanı

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (12a - 7b + 3c)(1, 2, 1) + (3b - 5a - c)(1, 3, 3) \\ &\quad + (2b - 3a - c)(2, 3, -1) \end{aligned}$$

olarak yazılır. O halde  $A$  kümeleri  $\mathbb{R}^3$  uzayını üretir. Böylece  $A$  alt-kümelerinin  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayının bir tabanını oluşturduğu görülür.

2.  $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$  altkümesini  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayının tabanı olacak şekilde tamamlayınız.

**Cözüm :** Önce  $S$  kümelerinin  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayının doğrusal bağımsız altkümesi olduğunu gösterelim.  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

olsun. Bu durumda  $(c_1, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2) = (0, 0, 0)$  olur. Buradan  $c_1 = c_2 = 0$  bulunur. O halde  $S$  doğrusal bağımsızdır.  $(1, -1, 1)$  elemanı  $(1, 2, 3), (0, 1, 2)$  vektörlerinin doğrusal birleşimi olarak yazılamadığından  $S$  kümesi  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayını üretmez. Yani  $S$  taban değildir. Aslında  $S$  kümesi taban olmadığını  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayının taban eleman sayısının 3 olduğunu kullanarak da söyleyebiliriz.  $S$  kümesini tabana tamamlayabilmek için Önerme 4.4.7 kullanalım. Şimdi  $\langle S \rangle = \{a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  altuzayında olmayan  $\mathbb{R}^3$  uzayının bir elemanını bulacağız. O halde önce  $\langle S \rangle$  altuzayını yazalım.

$$(x, y, z) \in \langle S \rangle \Leftrightarrow (x, y, z) = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) \quad \exists a, b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ 3a + 2b = z \end{cases}$$

olur. Bu denklem sistemin çözümü

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - 2x \\ 0 & 2 & z - 3x \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - 2x \\ 0 & 0 & x - 2y + z \end{array} \right]$$

olduğundan ancak  $x - 2y + z = 0$  ise vardır. O halde

$$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

olur.  $1 - 2(-1) + 1 \neq 0$  olduğundan  $(1, -1, 1) \notin \langle S \rangle$  dir. Önerme 4.4.7 den  $\langle S \rangle \cup \{(1, -1, 1)\}$  doğrusal bağımsızdır. Ayrıca  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$  olduğundan  $\langle S \rangle \cup \{(1, -1, 1)\}$  kümesi  $\mathbb{R}^3$  uzayını üretir. O halde

$$\langle S \rangle \cup \{(1, -1, 1)\} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$$

kümesi  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayının bir tabanıdır.

3.  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayında  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)$$

vektörlerinin  $\mathbb{R}^3$  uzayının bir tabanını oluşturması için  $a$  gerçel sayısı hangi özelliklerini taşmalıdır.

**Cözüm :**  $a = 0$  ise  $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$  kümesi doğrusal bağımlı olduğundan taban değildir.

$a \neq 0$  ise  $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$  kümelerinin eleman sayısı 3 ve  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$  olduğundan  $B$  kümelerinin taban olması için gerek ve yeter koşul doğrusal bağımsız olmalıdır.  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$c_1(a, 1, 0) + c_2(1, a, 1) + c_3(0, 1, a) = (0, 0, 0)$$

olsun. Buradan  $(ac_1 + c_2, c_1 + ac_2 + c_3, c_2 + ac_3) = (0, 0, 0)$  elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} ac_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + ac_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 + ac_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözelim.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{-aS_1 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & -a \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 - a^2 & -a \end{bmatrix} \xrightarrow{(a^2 - 1)S_2 + S_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 2a \end{bmatrix}$$

olduğundan denklem sisteminin çözümü olması için  $a^3 - 2a \neq 0$  olmalıdır. Yani  $a \neq 0$  ve  $a \neq \pm\sqrt{2}$  olmalıdır. Devam edersek

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 2a \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a^3 - 2a} S_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{-aS_3 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-aS_2 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece, denklem sisteminin çözümünden  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  elde edilir. O halde ( $a, 1, 0$ ), ( $1, a, 1$ ), ( $0, 1, a$ ) vektörlerinin,  $\mathbb{R}^3$  uzayının bir tabanını oluşturması için gerek ve yeter koşul  $a \neq 0$  ve  $a \neq \pm\sqrt{2}$  olmalıdır.

4.  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  kümeleri bir  $V_F$ -vektör uzayının tabanı ise

$$S = \{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\}$$

kümelerinin de  $V$  uzayının tabanı olduğunu gösteriniz.

**Cözüm:**  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  kümeleri bir  $V_F$ -vektör uzayının tabanı olduğundan  $\dim_F V = 3$  olur. Bu durumda  $S$  kümelerinin  $V_F$ -vektör uzayının tabanı olması için gerek ve yeter koşul  $S$  kümelerinin doğrusal bağımsız olmalıdır.  $c_1, c_2, c_3 \in F$  olmak üzere

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + c_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + c_3(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0_F$$

olsun. Buradan

$$(c_1 + c_2 + c_3)\alpha_1 + (-c_1 + c_2 - c_3)\alpha_2 + (c_1 + c_2 - c_3)\alpha_3 = 0_F$$

elde edilir.  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  kümesi,  $V$   $F$ -vektör uzayının tabanı olduğundan son esittir.

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0_F$$

$$-c_1 + c_2 - c_3 = 0_F$$

$$c_1 + c_2 - c_3 = 0_F$$

olmasını gerektirir. Bu homojen doğrusal denklem sistemi çözülsürse  $c_1 = c_2 = c_3 = 0_F$  olduğu görülür. O halde  $S$  kümesi doğrusal bağımsızdır.

5.  $\mathbb{R}^3$   $\mathbb{R}$ -vektör uzayında  $(2, 1, 0)$ ,  $(1, -1, 2)$ ,  $(0, 3, -4)$  vektörleri tarafından üretilen altuzayı ve bu altuzayı bir tabanını bulunuz.

**Cözüm:**  $S = \{(2, 1, 0), (1, -1, 2), (0, 3, -4)\}$  kümesi tarafından üretilen altuzayı bulalım.

$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) = c_1(2, 1, 0) + c_2(1, -1, 2) + c_3(0, 3, -4) \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$  olduğunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \langle S \rangle &\Leftrightarrow (x, y, z) = c_1(2, 1, 0) + c_2(1, -1, 2) + c_3(0, 3, -4) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (2c_1 + c_2, c_1 - c_2 + 3c_3, 2c_2 - 4c_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = x \\ c_1 - c_2 + 3c_3 = y \\ 2c_2 - 4c_3 = z \end{cases} \end{aligned}$$

gerektilmeleri sağlanır. Bu denklem sisteminin eklenmiş katsayılar matrisine uygun elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & x \\ 1 & -1 & 3 & y \\ 0 & 2 & -4 & z \end{array} \right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 3 & y \\ 0 & 1 & -2 & x - 2y - z \\ 0 & 0 & 0 & -2x + 4y + 3z \end{array} \right]$$

elde edilir. Denklem sisteminin çözümünün olması için  $-2x + 4y + 3z = 0$  olmalıdır. O halde

$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \mid -2x + 4y + 3z = 0\}$  olur. Burada,  $2x = 4y + 3z$  ve  $y = k$ ,  $z = 2t$  alımlırsa  $x = 3t + 2k$  olur. Böylece  $\langle S \rangle$

$$\langle S \rangle = \{(3t + 2k, k, 2t) \mid k, t \in \mathbb{R}\}$$

olarak da yazılır. Şimdi  $\langle S \rangle$  altuzayı bir tabanını bulalım.  $k = 1$ ,  $t = 0$  için  $(2, 1, 0) \in \langle S \rangle$  ve  $k = 0$ ,  $t = 1$  için  $(3, 0, 2) \in \langle S \rangle$  vektörleri hem doğrusal bağımsız hem de  $\langle S \rangle$  altuzayı ürettiğlerinden

$$\{(2, 1, 0), (3, 0, 2)\}$$

kümesi  $\langle S \rangle$  altuzayı için bir tabandır.

6.  $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = x + y + z\}$  küməsinin,  $\mathbb{R}^4$ -vektör nümayının altuzayı olduğunu göstəriniz və bu altuzayı üçün bir taban bulunuz.

**Cözüm:**  $(0, 0, 0, 0) \in U$  olduğundan  $U \neq \emptyset$  dir. Burada  $(x, y, z, w), (x', y', z', w') \in U$  və  $k \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} (x, y, z, w), (x', y', z', w') \in U &\Rightarrow w = x + y + z \text{ və } w' = x' + y' + z' \\ &\Rightarrow kw = kx + ky + kz \text{ və } kw' = kx' + ky' + kz' \\ &\Rightarrow kw + w' = (kx + ky + kz) + (x' + y' + z') \\ &\Rightarrow kw + w' = (kx + x') + (ky + y') + (kz + z') \\ &\Rightarrow (kx + x', ky + y', kz + z') \in U \\ &\Rightarrow (kx, ky, kz, kw) + (x', y', z', w') \in U \\ &\Rightarrow k(x, y, z, w) + (x', y', z', w') \in U \end{aligned}$$

gerektirmələri sağlandığından  $U$ ,  $\mathbb{R}^4$ -vektör nümayinin bir altuzayıdır.  $U$  altuzayının

$$U = \{(x, y, z, x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

olarak da yazabiliz. Simdi bu altuzayı üçün bir taban bulalım.  $x = 1, y = 0, z = 0$  iken  $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $x = 0, y = 1, z = 0$  iken  $\alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$  və  $x = 0, y = 0, z = 1$  iken  $\alpha_3 = (0, 0, 1, 1)$  olmak üzere  $U = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  küməsi  $U$  üçün bir tabandır. Çünki,

$$\alpha_1(1, 0, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

lənən  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  olduğundan  $U$  doğrusal bağımsız və nömrələndirilmişdir. Burada her  $(x, y, z, x + y + z) \in U$  iñin

$$(x, y, z, x + y + z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 1)$$

eşitliyi sağlandığından  $U$  küməsi  $U$  altuzayını təretifdir.

7.  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b = c + d = a + c = b + d = 0 \right\}$  küməsinin,  $\mathfrak{M}_{2 \times 2}$ -vektör nümayının altuzayı olduğunu göstəriniz və bu altuzayı üçün bir taban bulunuz.

**Cözüm:**  $W$  küməsinin,  $\mathfrak{M}_{2 \times 2}$ -vektör nümayının altuzayı olduğunu göstərmək ləğv edilir. Simdi  $W$  altuzayına bir taban oluştururadıq.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow a + b = 0, c + d = 0, a + c = 0, b + d = 0$$

olar. Buradan  $b = -a, c = -a, d = -c, d = -b$  olaraq edilir. Yani  $b = -a, c = -a, d = a$  olur. O halde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow b = -a, c = -a, d = a$$

gerektirməsi sağlanır. Bu durumda  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$  olur. Bu altuzayın

tabanı da  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  küməsidir.