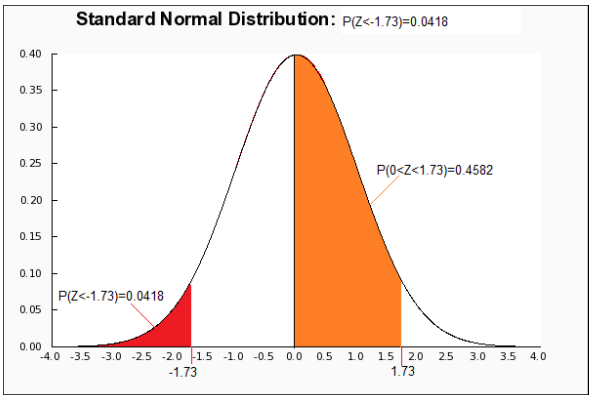
UYGULAMA VI-Çözümler
(Özel Sürekli Dağılımlar)

1) İskoç askerlerinin göğüs ölçüsü, ortalaması 101 cm ve standart sapması 5.2 cm olan normal dağılıma uymaktadır.

$$X \sim N(\mu = 101, \sigma^2 = 5.2^2)$$

a) Göğüs ölçüsü 92 cm' den az olan askerler, diğerlerine göre haftada iki saat daha fazla yüzme antrenmanı yapacaktır. Herhangi bir askerin yüzme antrenmanını iki saat fazla yapması olasılığı nedir?

$$\begin{aligned} P(X < 92) = \; &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{92-101}{5.2}\right) \\ &= P(Z < -1.73) \\ &= 0.5 - 0.4582 \\ &= 0.0418 \end{aligned}$$



b) 300 İskoç askeri arasından en fazla 18 tanesinin göğüs ölçüsünün 92 cm' den az olması olasılığı nedir?

Y: 300 askerden göğüs ölçüsü 92cm'den az olanların sayısını göstermek üzere,

$Y \sim Binom(n = 300, p = 0.0418)$

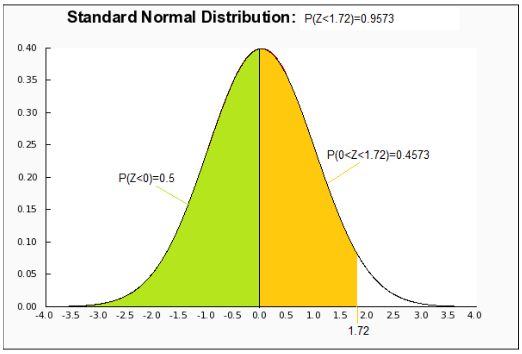
$E(Y) = np = 300 \times 0.0418 = 12.54$

$V(Y) = npq = 300 \times 0.0418 \times 0.9582 = 12$

$P(Y \leq 18) = ?$

$Binom(n = 300, p = 0.0418) \xrightarrow{n \to \infty} N(\mu = np = 12.54, \sigma^2 = npq = 12)$

$$\begin{aligned} P(Y \leq 18) &\cong P\left(\overbrace{Y \leq 18 + 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right) \\ &\cong P(Y \leq 18.5) \\ &\cong P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{18.5-12.54}{\sqrt{12}}\right) \\ &\cong P(Z \leq 1.72) \\ &\cong 0.5 + 0.4573 = 0.9573 \end{aligned}$$



2) Bir bilim merkezinde, bulutlardan düşen yağış miktarını veya türünü değiştirmek amacıyla bir takım deneyler yapılmaktadır. Yapılan deneylerde havaya çeşitli maddeler yayarak bulut içindeki mikro fiziksel süreçler değiştirilmektedir. Bu işleme bulut tohumlama denilmektedir. Bilim merkezinde önceden yapılan deneylerde, gümüş iyodür ile tohumlanan bulutların %68'inin aşırı büyüme gösterdiği saptanmıştır. Gümüş iyodür ile 125 tane bulut tohumlansın. Aşırı büyüme gösteren bulutların sayısının 80' den fazla 110'dan az olması olasılığı %75'in üstündeyse, yöntem kuraklık sıkıntısı çeken yerlerde uygulanacaktır. Bu durumda, yöntem uygulanabilir midir?

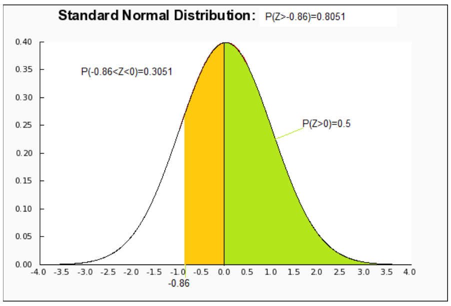
X: aşırı büyüme gösteren bulutların sayısı olmak üzere,

$X \sim Binom(n = 125, p = 0.68)$

$$E(X) = np = 125 \times 0.68 = 85$$
$$V(X) = npq = 125 \times 0.68 \times 0.32 = 27.2$$

$$Binom(n = 125, p = 0.68) \xrightarrow{n\to\infty} N(\mu = np = 85, \sigma^2 = npq = 27.2)$$

$$\begin{aligned}
P(80 < X < 110) &\cong P\left(\overbrace{80 + 0.5 < X < 110 - 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right) \\
&\cong P\left(\frac{80.5-85}{\sqrt{27.2}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{109.5-85}{\sqrt{27.2}}\right) \\
&\cong P(-0.86 < Z < 4.7) = P(Z > -0.86) \\
&\cong P(Z > -0.86) \\
&\cong P(-0.86 < Z < 0) + 0.5 \\
&\cong P(0 < Z < 0.86) + 0.5 \\
&\cong 0.3051 + 0.5 = 0.8051 > 0.75
\end{aligned}$$



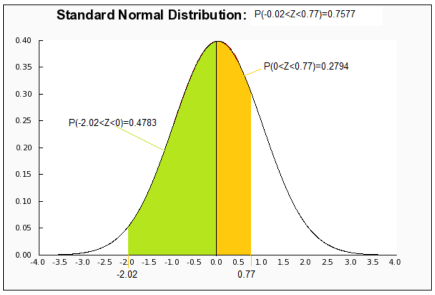
Bu yöntem uygulanabilir.

3) Bir otelin mutfak bölümünde kullanılmak üzere, satın alınan günlük yumurtaların %8'inin kırık olduğu bilinmektedir. Herhangi bir günde 700 adet yumurta istensin.
$$X \sim Binom(n = 700, p = 0.08)$$
$$E(X) = np = 700 \times 0.08 = 56$$
$$V(X) = npq = 700 \times 0.08 \times 0.92 = 51.52$$

$$Binom(n = 700, p = 0.08) \xrightarrow{n\to\infty} N(\mu = np = 56, \sigma^2 = npq = 51.52)$$

a) Kırık yumurtaların sayısının 41' den fazla ve 62' den az olması olasılığı nedir?

$$\begin{aligned}
P(41 < X < 62) &\cong P\left(\overbrace{41 + 0.5 < X < 62 - 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right) \\
&\cong P\left(\frac{41.5-56}{\sqrt{51.52}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{61.5-56}{\sqrt{51.52}}\right) \\
&\cong P(-2.02 < Z < 0.77) \\
&\cong P(-2.02 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.77) \\
&\cong P(0 < Z < 2.02) + P(0 < Z < 0.77) \\
&\cong 0.4783 + 0.2794 = 0.7577
\end{aligned}$$



b) 100' den fazla kırık yumurta olması mümkün müdür?

$$\begin{aligned}
P(X > 100) &\cong P\left(\overbrace{X > 100 + 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right) \\
&\cong P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{100.5-56}{\sqrt{51.52}}\right) \\
&\cong P(Z > 6.2) = 0
\end{aligned}$$

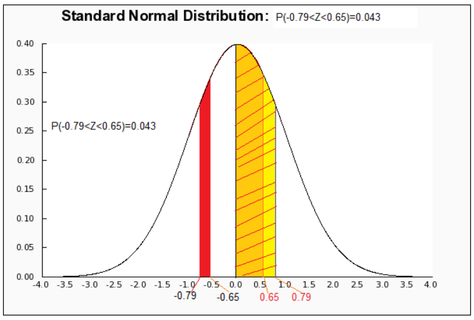
Mümkün değildir.

4) Bir otomobil yıkama şirketinin muhasebe kayıtlarına bakıldığında, müşterilerin %40' ının kredi kartıyla ödeme yaptığı görülmektedir. Rasgele 200 müşteri seçilsin. Buna göre, X, kredi kartı ile ödeme yapan müşteri sayısını göstermek üzere;
$$X \sim Binom(n = 200, p = 0.40)$$
$$E(X) = np = 200 \times 0.40 = 80$$
$$V(X) = npq = 200 \times 0.40 \times 0.60 = 48$$

$$Binom(n = 200, p = 0.40) \xrightarrow{n\to\infty} N(\mu = np = 80, \sigma^2 = npq = 48)$$

a) 75 tane müşterinin kredi kartıyla ödemesi olasılığının kesin ve yaklaşık değerini bulunuz.

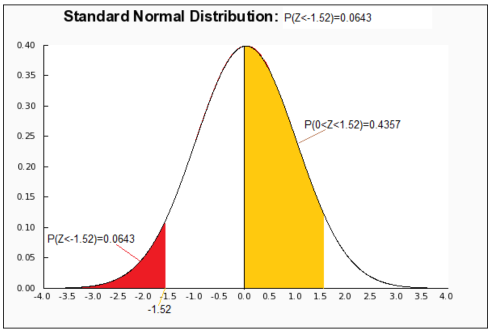
$$\begin{aligned} P(X = 75) &= \binom{200}{75} 0.40^{75} 0.60^{200-75} \\ &= 0.04476171\ (kesin\ değer) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(X = 75) &\cong P\left(\overbrace{75 - 0.5 < X < 75 + 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right) \\ &\cong P\left(\frac{74.5-80}{\sqrt{48}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{75.5-80}{\sqrt{48}}\right) \\ &\cong P(-0.79 < Z < -0.65) \\ &\cong P(0 < Z < 0.79) - P(0 < Z < 0.65) \\ &\cong 0.2852 - 0.2422 \\ &\cong 0.043\ (yaklaşık\ değer) \end{aligned}$$

b) 70'ten daha az müşterinin kredi kartıyla ödemesi olasılığının kesin ve yaklaşık değerini bulunuz.

$$\begin{aligned} P(X < 70) &= \sum_{x=0}^{69} \binom{200}{x} 0.40^{x} 0.60^{200-x} \\ &= 0.06390257\ (kesin\ değer) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(X < 70) &\cong P\left(\overbrace{X < 70 - 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right) \\ &\cong P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{69.5-80}{\sqrt{48}}\right) \\ &\cong P(Z < -1.52) \\ &\cong 0.5 - P(0 < Z < 1.52) \\ &\cong 0.5 - 0.4357 \\ &\cong 0.0643\ (yaklaşık\ değer) \end{aligned}$$

c) 70 ile 75 arasında (sınırlar dâhil) müşterinin kredi kartıyla ödemesi olasılığının kesin ve yaklaşık değerini bulunuz.

$$P(70 \le X \le 75) = \sum_{x=70}^{75} \binom{200}{x} 0.40^{x} 0.60^{200-x} = 0.1950533\ (kesin\ değer)$$

$$\begin{aligned} P(70 \le X \le 75) &\cong P\left(\overbrace{70 - 0.5 \le X \le 75 + 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right) \\ &\cong P\left(\frac{69.5-80}{\sqrt{48}} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{75.5-80}{\sqrt{48}}\right) \\ &\cong P(-1.52 \le Z \le -0.65) \\ &\cong 0.4357 - 0.2422 \\ &\cong 0.1935\ (yaklaşık\ değer) \end{aligned}$$

5) Bir havayolu şirketi, yurt dışı uçuşlarında müşterilerine üç çeşit tatlı seçeneği sunmaktadır. Bunlar, dondurma, elmalı pasta ve çikolatalı kektir. Geçmiş uçuşlarda müşterilerin tatlı tüketimlerine bakıldığında, %35 dondurmanın, %53 elmalı pastanın ve %12 çikolatalı kekin tercih edildiği görülmüştür. Herhangi bir yurtdışı seferinde uçakta 152 kişi seyahat edecek olsun. Bilet satın alımlarından 60'dan az kişinin dondurma tercih edeceği bilindiğinde, uçuş esnasında 40 ve daha fazla kişinin dondurma yemesi olasılığını bulunuz.

X, dondurma tercih eden kişi sayısını göstermek üzere;
$X \sim Binom(n = 152, p = 0.35)$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 40 | X < 60) &= \frac{P(X \geq 40 \cap X < 60)}{P(X < 60)} &&= \frac{P(40 \leq X < 60)}{P(X < 60)} \\
&= \frac{\sum_{x=40}^{59} \binom{152}{x} (0.35)^x (0.65)^{152-x}}{\sum_{x=0}^{59} \binom{152}{x} (0.35)^x (0.65)^{152-x}} &&= \frac{0.8490158}{0.8577609} \\
&= 0.9898 \ (kesin\ değer)
\end{aligned}
$$

$E(X) = np = 152 \times 0.35 = 53.2$
$V(X) = npq = 152 \times 0.35 \times 0.65 = 34.58$

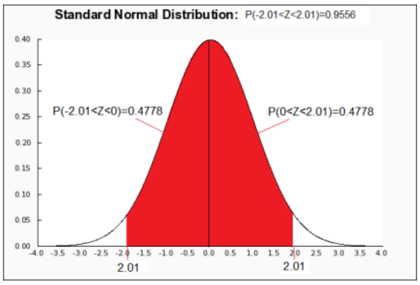
$$Binom(n = 152, p = 0.35) \xrightarrow{n \to \infty} N(\mu = np = 53.2, \sigma^2 = npq = 34.85)$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 40 | X < 60) &= \frac{P(X \geq 40 \cap X < 60)}{P(X < 60)} &&= \frac{P(40 \leq X < 60)}{P(X < 60)} \\
&\cong \frac{P\left(\overbrace{40 - 0.5 \leq X < 60 - 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right)}{P\left(\overbrace{X < 60 - 0.5}^{süreklilik\ düzeltmesi}\right)} &&= \frac{P\left(\frac{39.5 - 53.2}{\sqrt{34.58}} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{59.5 - 53.2}{\sqrt{34.58}}\right)}{P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{59.5 - 53.2}{\sqrt{34.58}}\right)} \\
&\cong \frac{P(-2.33 \leq Z < 1.07)}{P(Z < 1.07)} &&= \frac{0.4901 + 0.3577}{0.5 + 0.3577} \\
&\cong \frac{0.8478}{0.8577} &&= 0.9884 \ (yaklaşık\ değer)
\end{aligned}
$$

6) Bir para n=10000 kez atılıyor. X raslantı değişkeni, üst yüzeye gelen yazı sayısını göstersin. $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq 0.01\right)$ olasılığını bulunuz.

$X \sim Binom(n = 10000, p = 0.5)$
$E(X) = np = 10000 \times 0.5 = 5000$
$V(X) = npq = 10000 \times 0.5 \times 0.5 = 2500$

$$Binom(n = 10000, p = 0.5) \xrightarrow{n \to \infty} N(\mu = np = 5000, \sigma^2 = npq = 2500)$$



$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right| \leq 0.01\right) &= P\left(-0.01 \leq \frac{X}{n}-\frac{1}{2} \leq 0.01\right) \\
&= P\left(0.49 \leq \frac{X}{n} \leq 0.51\right) \\
&= P(4900 \leq X \leq 5100) \\
&\cong P\left(\overbrace{4900-0.5 \leq X \leq 5100+0.5}^{\text{süreklilik düzeltmesi}}\right) \\
&\cong P\left(\frac{4899.5-5000}{50} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5100.5-5000}{50}\right) \\
&\cong P\left(\frac{-100.5}{50} \leq Z \leq \frac{100.5}{50}\right) \\
&\cong P(-2.01 \leq Z \leq 2.01) \\
&\cong 2 \times P(0 < Z \leq 2.01) \\
&\cong 2 \times 0.4778 = 0.9556
\end{aligned}
$$

7) Ücretli bir otoyolda bulunan herhangi bir gişeye bir dakikada ortalama 3 araba gelmektedir. Bir saat içerisinde bu gişeye 173 ile 210 arasında arabanın gelmesi olasılıklarının kesin ve yaklaşık değerlerini bulunuz.

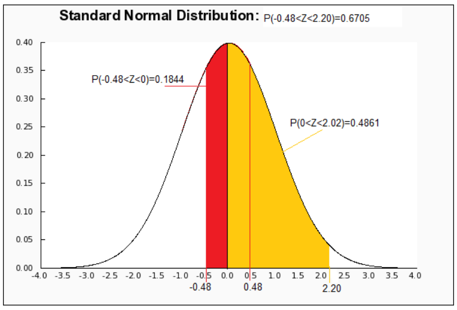
X, 1 saatte gelen araba sayısını göstermek üzere;

$$
\begin{array}{ll}
1\ dakika & 3\ araba \\
60\ dakika & \lambda \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\lambda = 180\ araba}
\end{array}
\qquad X \sim Poisson(\lambda = 180\ araba/saatte)
$$

$$Poisson(\lambda = 180) \xrightarrow{\lambda\to\infty\ (\lambda>20)} N(\mu = \lambda = 180, \sigma^2 = \lambda = 180)$$

$$P(173 < X < 210) = \sum_{x=174}^{209} e^{-180}\frac{180^x}{x!} = 0.6669874\ (kesin\ değer)$$

$$
\begin{aligned}
P(173 < X < 210) &\cong P\left(\overbrace{173+0.5 < X < 210-0.5}^{\text{süreklilik düzeltmesi}}\right) \\
&\cong P\left(\frac{173.5-180}{\sqrt{180}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{209.5-180}{\sqrt{180}}\right) \\
&\cong P(-0.48 < Z < 2.20) \\
&\cong 0.1844 + 0.4861 \\
&\cong 0.6705\ (yaklaşık\ değer)
\end{aligned}
$$



8) Büyük bir alışveriş merkezinde film CD' si satan bir dükkanda, başka bir film CD' si ile değiştirmek amacıyla haftada ortalama 17 CD geri getirilmektedir. Buna göre, bir ayda 75'ten fazla CD'nin geri getirilmesi olasılığının gerçek ve yaklaşık değerlerini bulunuz.

X, 1 ayda geri getirilen CD sayısını göstermek üzere;

$$
\begin{array}{ll}
1\ haftada & 17\ CD \\
4\ haftada & \lambda \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\lambda = 68\ CD}
\end{array}
\qquad X \sim Poisson(\lambda = 68\ CD/dört\ haftada)
$$

$$Poisson(\lambda = 68) \xrightarrow{\lambda\to\infty\ (\lambda>20)} N(\mu = \lambda = 68, \sigma^2 = \lambda = 68)$$

$$P(X > 75) = 1 - P(X \le 75) = 1 - \sum_{x=0}^{75} e^{-68}\frac{68^x}{x!} = 0.1805157 \text{ (kesin değer)}$$

$$\begin{aligned} P(X > 75) &\cong P\left(\overbrace{X > 75 + 0.5}^{s\ddot{u}reklilik\ d\ddot{u}zeltmesi}\right) \\ &\cong P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{75.5-68}{\sqrt{68}}\right) \\ &\cong P(Z > 0.91) \\ &\cong 0.5 - 0.3186 \\ &\cong 0.1814\ (yaklaşık\ değer) \end{aligned}$$