Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Tanım: V bir vektör uzayı, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$

olsun. Eğer en az biri sıfırdan farklı $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

için $$c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise S'ye lineer (doğrusal) bağımlı

küme denir.

Eğer $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$ iken

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n \quad 0$$

oluyorsa S'ye lineer (doğrusal) bağımsız küme

denir $\left(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0 \right)$

$\therefore$ Lineer bağımlı olmayan kümeye lineer bağımsız küme denir.

Örnek: ① $S = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \} \subseteq \mathbb{R}^3$

kümesi lineer bağımsızdır : $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$c_1 (1,0,0) + c_2 . (0,1,0) + c_3 \cdot (0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (c_1, c_2, c_3) = (0,0,0) \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

(2) $S = \{ \underset{v_1}{(1,-3,2)}, \underset{v_2}{(2,2,-1)}, \underset{v_3}{(1,5,-3)} \} \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi

lineer bağımlıdır: $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olan.

$$c_1 . (1,-3,2) + c_2 . (2,2,-1) + c_3 . (1,5,-3) = (0,0,0)$$

iken $c_1, c_2, c_3 = ?$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ -3c_1 + 2c_2 + 5c_3 &= 0 \\ 2c_1 - c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sonsuz çözümü var!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[e.s.i]{} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

$$c_2 + c_3 = 0 \underset{\substack{c_3 = t \\ t \in \mathbb{R}}}{\Longrightarrow} c_2 = -c_3 \Rightarrow c_2 = -t$$

$$c_1 = -2c_2 - c_3 = 2t - t = t$$

$t_1 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$

$$v_1 - v_2 + v_3 = (1,-3,2) - (2,2,-1) + (1,5,-3)$$

$$= (0, 0, 0)$$

$v_2 = v_1 + v_3$

$\therefore$ S kümesi lineer bağımlıdır.

(3) $S = \{ \underset{v_1}{x^2+x+2}, \underset{v_2}{2x^2+x}, \underset{v_3}{3x^2+2x+2} \} \subseteq P_2$'nin

lineer bağımlılık durumunu araştırınız.

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olsun.

$c_1(x^2+x+2) + c_2.(2x^2+x) + c_3.(3x^2+2x+2) = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 2c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{Sonsuz çözüm vardır (ÖDEV!)}$$

Mesela $c_1 = 1 = c_2$, $c_3 = -1$ için sağlanır. O halde

S lineer bağımlıdır.

(4) $\{0_V\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Çünkü $0 \neq c \in \mathbb{R}$ için

$$c . 0_V = 0_V$$

Teorem: V vektör uzayı, S ve T sonlu iki alt kümesi ve $S \subseteq T$ olsun. Bu durumda

i) T lineer bağımsız ise S'de lineer bağımsızdır.

ii) S lineer bağımlı ise T'de lineer bağımlıdır.

Sonuç: Sıfır vektörünü içeren herhangi bir küme lineer bağımlıdır.

Teorem $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$, V vektör uzayı olsun. S lineer bağımlıdır ancak ve ancak bir v_j vektörü

$$v_j = c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_n v_n$$

o.ş hepsi birden sıfır olmayan $c_1, \dots, c_{j-1}, c_j, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ vardır. Yani, v_j diğer vektörlerin bir lineer kombinasyonudur.

Sonuç: i) $S=\{v_1\}$ ve $v_1 \neq 0$ ise S lineer bağımsızdır.

ii) $S=\{v_1, v_2\}$ ve $v_1 = c.v_2$ o.ş $c \in \mathbb{R}$ yoksa ise S lineer bağımsızdır.

Örnek: $S=\{ \overset{v_1}{(1,2,-1)}, \overset{v_2}{(1,-2,1)}, \overset{v_3}{(-3,2,-1)}, \overset{v_4}{(2,0,0)} \}$

için $v_1 + v_2 - v_4 = 0$ dır. yani

$v_4 = 1.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3$ olur.

Yukarıdaki teoremden S lineer bağımlıdır.

Örnek: $v_1=(1,1,0,0)$, $v_2=(1,0,1,0)$, $v_3=(0,1,1,0)$

ve $v_4=(2,1,1,0)$ için

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

i) $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

ii) $v_1 + v_2 = v_4$ olduğundan $v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$'tür.

O halde $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\therefore \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$