Hatırlatma :

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dizi denir.
$n \to f(n) = f_n$

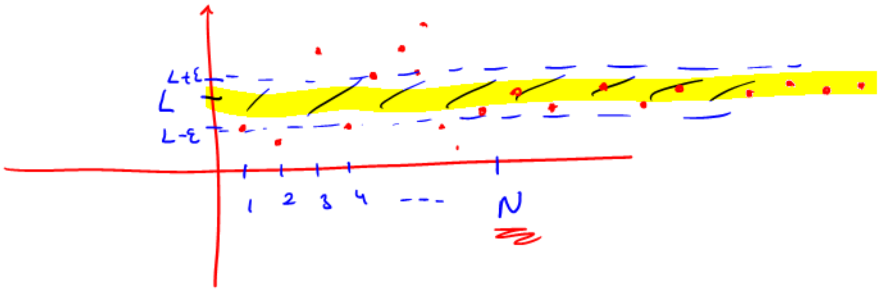
$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \to$ limit varsa $f_n$ yakınsak, aksi halde ıraksak denir.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = L \iff f_n \to L \iff \forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\forall n > N$ için $|f_n - L| < \varepsilon$.

$-\varepsilon < f_n - L < \varepsilon$

$L - \varepsilon < f_n < L + \varepsilon$

$f_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$




1-) Aşağıdaki dizilerin limitlerini (eğer varsa) hesaplayınız.

a-) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

Çözüm : $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$

$= \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \dots\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{2^n}}\right)}{\cancel{2^n}\left(1 + \underset{\to 0}{\frac{1}{2^n}}\right)} = 1$$

$\frac{1}{2^n} \to \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \to 0$

b-) $a_n = n^{(-1)^n}$

Hatırlatma: Alt dizi: $a_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$a_{n_k} = b_n = (a_2, a_5, a_7, a_{28}, \ldots) \to$ Alt dizi

$a_{\phi(n)}$ , $\phi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ artan bir fonk.

$1 \to 3$

$2 \to 5$

$3 \to 8$

$(-1)^n = a_n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

$a_{n_k} = (-1, -1, -1, -1, \ldots) \to -1$ Tek indisli terimler

$a_{n_p} = (1, 1, 1, \ldots) \to 1$ çift indisli terimler.

Thm: $a_n$ yakınsak ise her alt dizisi yakınsaktır.

$P \Rightarrow q \Leftrightarrow -q \Rightarrow -p$

$a_n = n^{(-1)^n}$ dizisini ele alalım.

$m = 2n$ olmak üzere $a_m$, $a_n$'nin bir alt dizisidir.

$a_m = (a_2, a_4, a_6, \ldots)$

$a_m = m^{(-1)^m} = m^{(-1)^{2n}} = m \to \infty$

$\lim_{m \to \infty} a_m = \lim_{m \to \infty} m = \infty$

Iraksaktır.

$k = 2n+1$ olsun. $a_k$, $a_n$'nin bir alt dizisidir.

$a_k = k^{(-1)^k} = k^{(-1)^{2n+1}} = k^{-1} = \frac{1}{k} \to 0$

c-) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n}$ $(a_n) = (0, \frac{2}{4}, 0, \frac{2}{8}, 0, \frac{2}{16}, \ldots)$

iddia: $a_n \to 0$.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ iken $|a_n - 0| < \varepsilon.$

$n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1+(-1)^n}{2n}\right| \leq \left|\frac{1}{2n}\right| + \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \rightarrow 0{,}01$$

$$\boxed{\frac{1}{N} < \varepsilon}$$

$\frac{1}{0{,}01} < N$

$100 < N$

Ayrıca $N$'yi tam olarak belirlemek istersek

$\frac{1}{\varepsilon} < N$ $\boxed{N = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1}$

---

2-) $(a_n)$ sınırlı bir dizi ve $(b_n)$ sıfıra yakınsayan bir dizi olsun. Buna göre $(a_n \cdot b_n) \rightarrow 0$ ispatlayınız.

Hatırlatma: sınırlı dizi: $a_n$ sınırlıdır $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+$ vardır $\ni$ $|a_n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için.

Biliyoruz ki $b_n \rightarrow 0$ ise $|b_n - 0| < \varepsilon/M$, $\exists N' \in \mathbb{N}$ ve $\forall n > N'$ için.

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad \forall n > N = N',$$

Dolayısıyla $a_n b_n \rightarrow 0.$

3-) Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

a-) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-3n}$ $(\infty-\infty)$ $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3n}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4n}{n^2+n-(n^2-3n)}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n}}$$

$$\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \sqrt{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)}_{2}} = \underline{\underline{2}}$$

b-) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = I \left( \underline{|a|<1},\ |b|<1 \right)$

$$(1+a+a^2+\cdots+a^n)(1-a) = (1+a+a^2+\cdots+a^n) - (a+a^2+a^3+\cdots+a^{n+1})$$

$$= 1-a^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad 1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a^{n+1} \to 0 \\ \text{çünkü} \quad |a|<1 \end{array}}$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{\dfrac{1}{1-a}}{\dfrac{1}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a} \quad \text{II}$$

4-) Öyle bir dizi bulunuz ki

a-) Hem en büyük hem en küçük terime sahip olsun.

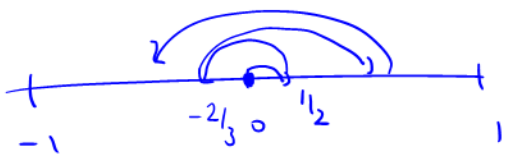
$a_n = \left(\frac{1}{n}\right) \to 0$

en küçük terimi yok.

Cevap: $a_n = (-1)^n$ dizisinin en küçük terimi $-1$ ve en büyük terimi $1$'dir. Ayrıca $-1, 1 \in (a_n)$.

b-) Ne en küçük ne de en büyük terime sahip olsun.

$a_n = \left( (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} \right)$ dizisi




$$a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \to 1 & n \text{ çift iken} \\ \frac{1-n}{n} \to -1 & n \text{ tek iken} \end{cases}$$

$$|a_n| = \left| (-1)^n \cdot \frac{(n-1)}{n} \right| = \frac{n-1}{n} < 1$$

5-) Öyle bir iki ıraksak dizi bulunuz ki $((a_n), (b_n))$

a-) $(a_n + b_n)$ yakınsak olsun.

$a_n = n$ seçelim.

$b_n = -n$ seçelim.

$$\begin{cases} a_n & \text{ıraksaktır.} \\ b_n & \text{"} \end{cases}$$

$(a_n + b_n) = (n + (-n)) = 0 = (0, 0, 0, \ldots) \to 0.$

b-) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ yakınsak olsun.

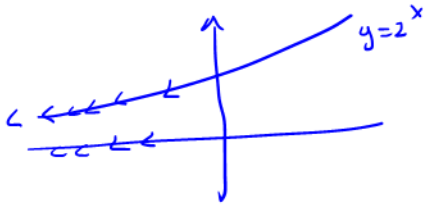
$$\left.\begin{aligned} a_n &= n^2 \\ b_n &= 2n^2 \end{aligned}\right\} \text{ ıraksak}$$

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{n^2}{2n^2}\right) = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right) \longrightarrow \frac{1}{2} \ \checkmark$$

c-) $(a_n \cdot b_n)$ yakınsak olsun.

$$\frac{1}{n^2} \to 0 \ \checkmark$$

$$2^{\overset{-\infty}{(1-n)}} \longrightarrow 0$$

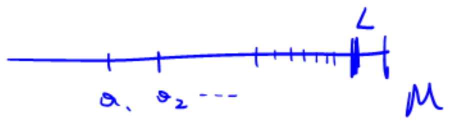


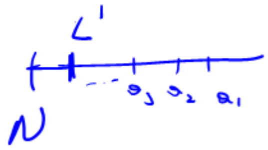

$$\left.\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \\ b_n &= (-1)^n \end{aligned}\right\} \text{ ıraksak.}$$

$$(-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$$

Hatırlatma: Eğer $a_n$ dizisi sınırlı ve monoton ise yakınsaktır.

Daha özel olarak $\left\{\begin{array}{l} \text{üstten sınırlı ve monoton artan} \\ \text{alttan sınırlı ve monoton azalan} \end{array}\right.$ ise yakınsaktır.




Örnek: $a_1 = -4$ ve $a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$ olsun. Buna göre $a_n$'nin yakınsak old. gösterin.

$a_1 = -4$

$a_2 = 0$

$a_3 = \sqrt{8}$

$a_4 = \sqrt{8 + 2\sqrt{8}}$

İddia: $a_n$ artandır.

$n=1$ için $a_1 < a_2$ ✓ old. göstermeliyiz.

$\underset{-4}{a_1} < \underset{0}{a_2}$

$\boxed{a_n < a_{n+1}}$

$n=k-1$ için $\overline{\underline{a_{k-1} < a_k}}$ olsun. Amacımız $\underline{a_k < a_{k+1}}$ old. göstermek.

$$a_{k+1} = \sqrt{8+2a_k} > \underbrace{\sqrt{8+2a_{k-1}}} = a_k \Rightarrow a_k < a_{k+1}$$

$\Rightarrow (a_n)$ monoton artandır.

$\underline{a_n \text{ üstten sınırlı mı?}}$