Örnekler

Ör: Aşağıdaki determinantları bulunuz.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Çöz: 1) $|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

2) $|B| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-1) - 3(2-3) = 6 + 3 = 9$

3) $|C| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(8-3) + 3(4-9) - (1-6) = 10 - 15 + 5 = 0$

Ör: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $|A| = ?$

Çöz: $|A| = -6\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6\left(2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-12) \cdot (-12) = 144$

Ör: $\begin{vmatrix} t & 4 \\ 5 & t-8 \end{vmatrix} = t(t-8) - 20 = t^2 - 8t - 20$

Ör: $\begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 6 = t^2 - 3t + 2 - 6$

$= t^2 - 3t - 4$

Ör: $\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)t(t-3)$

Ör: $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0|-| + 4\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(0-10) + 4(8+15) = -20 + 92 = 72$

Ör: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$ ise $\begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ nedir?

Çöj: $\begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3c_1 & -3c_2 & -3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= 3 + 0 + 0 = 3$

Ör: $A = A^{-1}$ ise $\det(A) = \mp 1$ dir gösteriy.

Çöj: $A = A^{-1} \Rightarrow |A| = |A^{-1}| \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \mp 1$.

Ör: A ve B nxn matrisler ise

a) $\det(A^T B^T) = \det(A) \cdot \det(B^T)$ dir.

b) $\det(A^T B^T) = \det(A^T) \det(B)$ dir.

Çöj: $\det(A) = \det(A^T)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ dir.

a) $\det(A^T B^T) = \det(A^T) \cdot \det(B^T) = \det(A) \det(B^T)$

b) $\det(A^T B^T) = \det(A^T) \det(B^T) = \det(A^T) \det(B) = |A||B|$ dır

Ör: $|A| = 2$ ise $\det(A^5) = ?$

$\det(A^5) = (\det(A))^5 = 2^5$

Ör: $A^2 = A$ ise $|A| = 1$ yada A tersinir değildir.

Çöj: $|A^2| = |A| \Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A| = 0$ yada $|A| = 1$ dir.
$|A| = 0$ ise A nın tersi yoktur.

Ör: $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix} = 4$ ise

a) $\begin{vmatrix} x^2 & ax & 2x \\ -x & 1 & b \\ ax & 2 & 3b \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} x & a+bx & 2 \\ -x & 1-bx & b \\ ax & 2+abx & 3b \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & -2a & -2 \\ -2 & 4 & 2b \\ a & 4 & 3b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & 2+3b \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix}$ determinantları hesaplayınız.

Çöz: a) $\begin{vmatrix} x^2 & ax & 2x \\ -x & 1 & b \\ ax & 2 & 3b \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & a & 2 \\ -x & 1 & b \\ ax & 2 & 3b \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix} = 4x^2$

b) $\begin{vmatrix} x & a+bx & 2 \\ -x & 1+bx & b \\ ax & 2+abx & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & 2 \\ -x & 1 & b \\ ax & 2 & 3b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & bx & 2 \\ -x & +bx & b \\ ax & abx & 3b \end{vmatrix}$

$= x \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix} + x^2 b \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & +1 & b \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 4x + 4x^2 b$

c) $\begin{vmatrix} -1 & -2a & -2 \\ -2 & 4 & 2b \\ a & 4 & 3b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2a & 2 \\ -2 & 4 & 2b \\ a & 4 & 3b \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -2 & 2 & 2b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix}$

$= (-2)2 \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix} = -16$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & 2+3b \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2 & 3b \\ -1 & 1 & b \\ a & 2 & 3b \end{vmatrix}$

$= 4 + b \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 + b.0 = 4$

Ör: $\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

Çöz: $\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ b & 1 & b \\ c & 1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 1 & a \\ -c & 1 & b \\ -a & 1 & c \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} -b & 1 & a \\ -c & 1 & b \\ -a & 1 & c \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} b & 1 & a \\ c & 1 & b \\ a & 1 & c \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$

Ör: $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

Çöz: $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ca-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \; - (*)$

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & -b+c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \; - (*)(*)$

$(*)$ ve $(*)(*)$ eşit olduğu için verilen determinantlar eşittir.

Ör: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ ise x nedir?

Çöz: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1) \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -2 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x=-1, x=1, x=-2$ olur,

Ör: A tersinir ise $ek(A)$ nın da tersinir olduğunu gösteriniz. A yı $n \times n$ li kare matris alınız.

Çöz: A tersinir ise $\det(A) \neq 0$ dır.

$A \cdot ek(A) = \det(A) \cdot I$ olduğunu biliyoruz.. o halde

$\det(A \cdot ek(A)) = \det(\det(A) \cdot I)$ olduğundan

$\det(A) \cdot \det(ek(A)) = \det(A)^n$ dır. $\det(A) \neq 0$ olduğundan da

$\det(ek(A)) = \det(A)^{n-1}$ elde ederiz. $\det(A)^{n-1} \neq 0$ olduğu

için $ek(A)$ da tersinir olur.

Soru: A $n \times n$ li kare matris olsun. $ek(A)$ tersinir ise A nın da tersinir olduğunu gösteriniz.

Ör: A $n \times n$ li tersinir matris olsun.

$$ek(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A = ek(A^{-1})$$ olduğunu gösteriniz.

Çöz: A tersinir ise $ek(A)$ da tersinirdir.

$A \cdot ek(A) = \det(A) \cdot I_n$ eşitliğini $ek(A)^{-1}$ ile çarparak

$A \cdot ek(A) \cdot ek(A)^{-1} = \det(A) \cdot ek(A)^{-1}$ elde ederiz. Buradan

$A \cdot I_n = \det(A) \cdot ek(A)^{-1}$ den $ek(A)^{-1} = \frac{A}{\det(A)}$ elde ederiz.

Diğer yandan

$A^{-1} \cdot ek(A^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdot I_n$ den her iki tarafı A ile

çarparak $ek(A^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdot A$ elde ederiz. Buradan da

$ek(A^{-1}) = \frac{A}{\det(A)}$ dır. O halde $ek(A)^{-1} = ek(A^{-1}) = \frac{A}{\det(A)}$ dır.

Ör : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

1) $\det(A) = ?$

2) $\det(A^{-1}) = ?$

3) $\det(ek(A)) = ?$

4) $\det(ek(A^{-1})) = ?$

5) $ek(A^{-1}) = ?$

Çöz 1) $\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-1) - 2 = 4$

2) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{4}$

3) $\det(ek(A)) = \det(A)^{n-1}$ old. biliyoruz. $n=3$ olduğu için $\det(ek(A)) = 4^2 = 16$ dır.

5) $ek(A^{-1}) = \dfrac{A}{\det(A)} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

4) $\det(ek(A^{-1})) = \det(ek(A)^{-1}) = \dfrac{1}{\det(ek(A))} = \dfrac{1}{16}$

Ör : $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. $\det(A) = 2$ ise

i) $\det(A^3) = ?$, ii) $\det(3A \cdot A^T) = ?$, iii) $\det(2 \cdot (2A)^{-1}) = ?$

Çöz: i) $\det(A^3) = (\det A)^3 = 2^3 = 8$

ii) $\det(3A \cdot A^T) = \det(3A) \cdot \det(A^T) = \det(3A) \cdot \det(A) = 3^3 \cdot |A| \cdot |A|$
$= 3^3 \cdot 2^2$

iii) $\det((2 \cdot I_3)(2A)^{-1}) = \det(2I_3) \cdot \det(2A)^{-1}$
$= 2^3 \cdot \dfrac{1}{\det(2A)} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{2^3 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$