1-) $x_1=\sqrt{2}$ ve $x_{n+1}=(\sqrt{2})^{x_n}$ her $n=1,2,3,\dots$ dizisi verilmiş olsun.

a-) (x_n) yakınsaktır, gösteriniz.

b-) (x_n) dizisinin yakınsadığı yeri bulunuz.

Çözüm: Hatırlatma: Eğer x_n (monoton) artan ve üstten sınırlı ise yakınsaktır.
x_n azalan ve alttan " " " .

a-) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ≥ 1, $x_3=(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}$ ___

iddia: x_n dizisi 2 tarafından üstten sınırlıdır.

ispat: Tümevarımla ispatlayalım.

$n=1$ için $x_1\leq 2$ old. açıktır.

⋮

$n=m$ için $\underline{x_m\leq 2}$ olsun. Amacımız $n=m+1$ için $\underline{x_{m+1}\leq 2}$ göstermek.

$$x_{m+1}=\sqrt{2}^{\,x_m}\leq \sqrt{2}^{\,2}=2 \;.\;\Rightarrow\; x_{m+1}\leq 2. \quad \square$$

iddia: x_n dizisi artandır.

ispat: Amacımız $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\underline{x_n\leq x_{n+1}}$ göstermek.

Tümevarımla ispatı tamamlayalım.

$n=1$ için $x_1\leq x_2 (?)$. $x_1=\sqrt{2}^{\,1}$, $x_2=\sqrt{2}^{\,\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $\underline{x_1\leq x_2}$.

⋮

$n=m$ için $\boxed{x_m\leq x_{m+1}}$ $\overline{x_{m+1}\geq x_m}$ olsun. Amacımız $x_{m+1}\leq x_{m+2}$.

$$x_{m+2}=\sqrt{2}^{\,x_{m+1}}\geq \sqrt{2}^{\,x_m}=x_{m+1} \Rightarrow x_{m+2}\geq x_{m+1} \Rightarrow x_{m+1}\leq x_{m+2}. \quad \square$$

Böylece x_n artan ve üstten sınırlı ve dolayısıyla yakınsaktır.

b-) $x_n \to x \in \mathbb{R}$ olsun. Not edelim; eğer $x_n \to x$ ise $x_{n+1} \to x$ dahası $\sqrt{2}^{x_n} \to \sqrt{2}^{x}$.

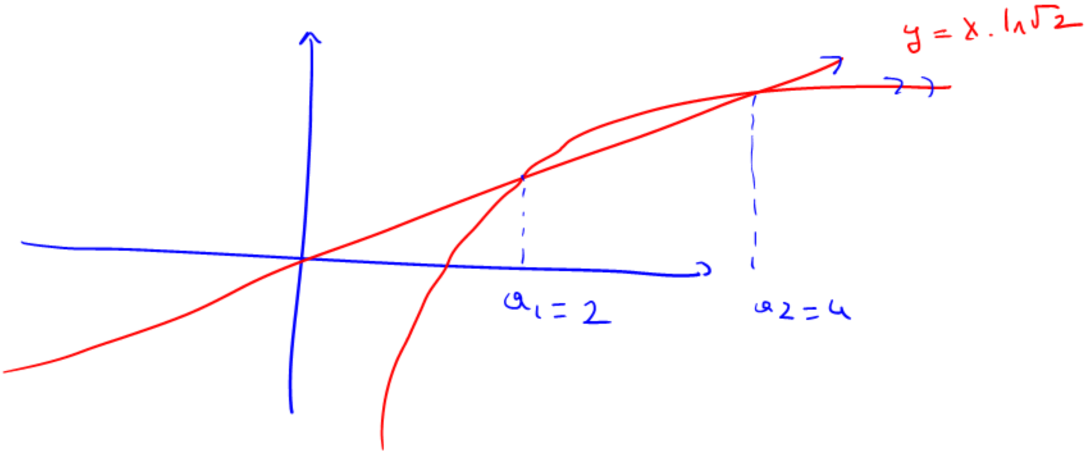
$$x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n} \longrightarrow x = \sqrt{2}^{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln x = \ln \sqrt{2}^{x}} = x . \ln \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $\ln x = x . \ln \sqrt{2}$, Burada $x=2$ ve $x=4$'ün denklemin kökü old. gözlemliyoruz.

$$\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \ln \sqrt{2} > \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = x . \ln\sqrt{2} \text{ pozitif bir doğrudur.}$$



Yandaki grafik göz önüne alınarak $\ln x = x \ln\sqrt{2}$ denkleminin 2 kökü old. karar veriyoruz.

$x=4$ limit noktası olamaz çünkü $x_n \le 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için. Öyleyse $x=2$ olmalıdır. Yani

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2 .$$

2-) Verilen seri yakınsak ise toplamını bulunuz değil ise ıraksak old. gösteriniz.

a-) $\underbrace{\frac{3}{1.2}}_{a_1} - \underbrace{\frac{5}{2.3}}_{a_2} + \underbrace{\frac{7}{3.4}}_{a_3} - \underbrace{\frac{9}{4.5}}_{a_4} + \cdots$

Hatırlatma

$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \Sigma$

Σ serisinin yakınsaklığı S_n kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklığıdır.

Çözüm:

Serinin n. terimi (genel terimi)

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2n+1)}{n.(n+1)} \quad \text{dur.}$$

Öyleyse seri şu. gibi ifade edilebilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Basit kesirlere ayıralım.

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow A = 1 \qquad B = 1$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)}_{\alpha}$$ dur. Şimdi kısmi toplamlar dizisini düzenelim.

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha = \left(1 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) - \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} + \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) - \cdots + (-1)^{m+1} \cdot \left(\cancel{\tfrac{1}{m}} + \tfrac{1}{m+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} 1 + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

$\square$

3-) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)}$.

Hatırlatma

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots \rightarrow$ yakınsak

$\frac{1}{n} \to 0$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \rightarrow$ ıraksak.

Thm: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $a_n \to 0$.

Çözüm: $a_n = \frac{n}{\ln(n)}$ dizisini inceleyelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$f(x) = x$ ve $g(x) = \ln x$ fonk. tanımlayalım.

Not edigiiz $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{L'hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$$ işleyse $a_n \to \infty \Rightarrow \sum a_n$ yakınsak değildir.

4-) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan(n+1) - \arctan(n)\right)$

Çözüm:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \left(\arctan(n+1) - \arctan(n)\right) = \begin{bmatrix} \cancel{\arctan 2} - \arctan 1 \\ \cancel{\arctan 3} - \cancel{\arctan 2} \\ \cancel{\arctan 4} - \cancel{\arctan 3} \\ \vdots \\ \arctan(m+1) - \cancel{\arctan m} \end{bmatrix}$$

$$= \arctan(m+1) - \arctan 1$$

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \arctan(m+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

5-) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)=J$

Gözüm: yakınsak.

$J=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}}$

$\sum n = \sum_{n=0} n - \sum_{n=0} n$

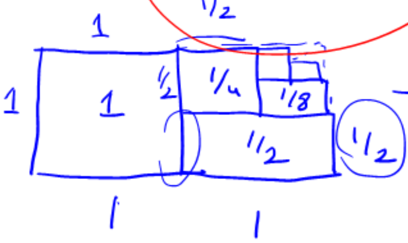
$=\infty-\infty$

Tanımsız.

Hatırlatma

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$



$\rightarrow 2$ (Geometrik ispat.)

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$, $|r|<1.$

$1+r+r^2+\dots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

$$J = 3\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}_{1} - 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} = 3\cdot 1 - 2\cdot\frac{1}{6} = 3-\frac{1}{3} = \frac{8}{3} \quad \blacksquare$$

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$

$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{3}-1$

$\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$

6-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n}+1)^3}$

$$a_n=\frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n}+1)^3} \le \frac{1}{n^{3/2}+3\cdot n\cdot 1+3\cdot\sqrt{n}\cdot 1+1}$$

$$\le \frac{1}{n^{3/2}}$$

Hatırlatma

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ yakınsaktır

$\Leftrightarrow$

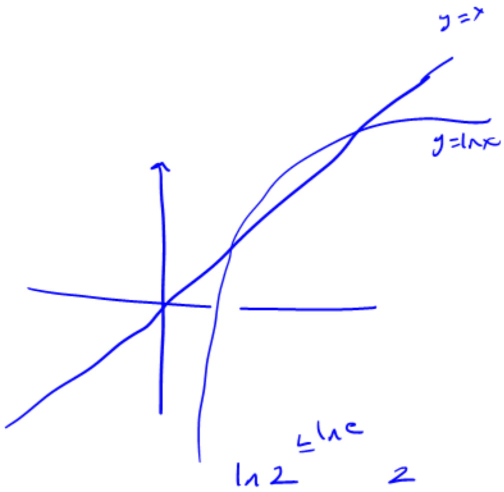
$p>1$

Eğer a_n, b_n pozitif ve $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n \le \sum a_n$ sağlanıyorsa $\sum b_n$ yakınsaktır.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \longrightarrow$ yakınsaktır çünkü $p = 3/2 > 1$.

$\Rightarrow \sum a_n$ yakınsaktır.

7-) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$



iddia: $\forall n \geq 3$ için $\ln(n) < n$.

ispat: ödev.

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}}$ elde edilir.

Ayrıca $\ln(n) \geq \sqrt[n]{\ln(n)} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)} < \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan dolayı

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$ ıraksaktır.