10.3. KARŞILAŞTIRMA ve LİMİT-KARŞILAŞTIRMA (BÖLÜM) TEST-

Bu kesimde verilecek testler, sadece terimleri sıfırdan büyük ya da eşit olan serilere uygulanabilir.

10.3.1. Teorem: (Karşılaştırma Testi) $\forall k \in \mathbb{N}^+$ için $0 \le a_k \le b_k$ a.s. $\sum_1^\infty a_k$, $\sum_1^\infty b_k$ serileri verilsin. Bu durumda

(i) $\sum_1^\infty b_k$ yakınsaktır $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ yakınsaktır,

(ii) $\sum_1^\infty a_k$ ıraksaktır $\Rightarrow \sum_1^\infty b_k$ ıraksaktır,

olur ve (i) için $\sum_1^\infty a_k \le \sum_1^\infty b_k$ dır.

Kanıt: $A_n = \sum_1^n a_k \ge 0$ ve $B_n = \sum_1^n b_k \ge 0$ olmak üzere (A_n) ve (B_n) kısmi toplamlar dizisi azalmayandır. Gerçekten de $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $A_{n+1} = \sum_1^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = A_n + a_{n+1} \ge A_n$ dir ($a_{n+1} \ge 0$) ve benzer şekilde $B_{n+1} \ge B_n$ dir. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}^+$ için

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \le b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = B_n \text{ olur.}$$

Diğer yandan $\sum_1^\infty b_k$ yakınsak ise (B_n) yakınsaktır $\Rightarrow$ $\forall n$ için $A_n \le B_n$ ve (B_n) yakınsak olduğu için (A_n) ve dolayısıyla $\sum_1^\infty a_k$ da yakınsak olur.

(ii) ödev.

10.3.1. Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = 1 + 1/2^2 + \frac{1}{3^2} + \dots + 1/k^2 + \dots$ yak mı?

Çözüm: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ dir. Ayrıca, her $k \in \mathbb{N}^+$ için

$$0 \le \frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{k(k+1)}$$ olduğundan ve $\sum_1^\infty \frac{1}{k.(k+1)}$ serisi (10.1.6 Örnek gereği) yakınsak old. için $\xrightarrow{\text{K.Testi}}$ $\sum_1^\infty \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_2^\infty \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak $\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak olur.

2) (a) $\sum_1^\infty \frac{5}{5n-1}$, b) $\sum_0^\infty 1/n!$, c) $5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \dots$ $-a_n$

serileri yak mı?, ıraksak mı?

Çözüm: (a) $\forall n \geq 1$ için $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n-1/5} = \dfrac{5}{5n-1}$ dir ve $\sum_1^\infty 1/n$ Harmonik serisi ıraksak $\overset{K.Test}{\Longrightarrow}$ $\sum_1^\infty \dfrac{5}{5n-1}$ de ıraksak olur.

b) $\forall n \geq 4$ için $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^n}$ ($\overset{?}{\Leftrightarrow} 2^n \leq n!$) ve $\sum_0^\infty \dfrac{1}{2^n}$ geo. serisi yakınsaktır $\Rightarrow \sum_4^\infty \dfrac{1}{2^n}$ de yakınsaktır $\overset{K.Test}{\Longrightarrow} \sum_4^\infty \dfrac{1}{n!}$ serisi yakınsak olur $\Rightarrow \sum_0^\infty 1/n!$ de yakınsak olur.

c) $5 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{7} + 1 + \dfrac{1}{2+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2^2+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots = \sum_{n=0}^\infty \dfrac{1}{2^n+\sqrt{n}}$

sabit

$= 5 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{7} + \sum_0^\infty \dfrac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ dir. Ayrıca her $n \geq 0$ için

$0 \leq \dfrac{1}{2^n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{2^n}$ ve $\sum_0^\infty \dfrac{1}{2^n}$ geo. serisi yakınsaktır

$\overset{K.Test}{\Longrightarrow} \sum_0^\infty \dfrac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ de yakınsaktır $\Rightarrow 5 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{7} + \sum_0^\infty \dfrac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ yak..

10.3.2. Teorem (Limit Karşılaştırma Testi)

Her k için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ olmak üzere $\sum_1^\infty a_k$ ve $\sum_1^\infty b_k$ serileri verilsin.

Bu durumda, $L = \lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k}$ olmak üzere;

(i) $L \in (0,\infty)$ için $\sum_1^\infty a_k$ yak. (ırak.) $\Leftrightarrow \sum_1^\infty b_k$ yak. (ırak.) tır.

(ii) $L = 0$ için, $\sum_1^\infty b_k$ yakınsak $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ yakınsak tır,

(iii) $L = \infty$ için $\sum_1^\infty a_k$ yak. $\Rightarrow \sum_1^\infty b_k$ yak. tır

$\equiv \sum_1^\infty b_k$ ıraksak $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ ıraksak tır.

Kanıt: (a) $0 < L < \infty$ olsun. $\varepsilon = L/2 > 0$ için

$N < k \Rightarrow \left|\dfrac{a_k}{b_k} - L\right| < L/2 = \varepsilon$ o.ş. bir $N \in \mathbb{N}^+$ vardır.

O halde $N < k$ için

$L - \dfrac{L}{2} < \dfrac{a_k}{b_k} < L + L/2 \Rightarrow \dfrac{L}{2} < \dfrac{a_k}{b_k} < \dfrac{3}{2}L \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot L \cdot b_k < a_k < \dfrac{3}{2} L \cdot b_k$

bulunur ki, buradan $\sum_{N+1}^\infty a_k$ yakınsaktır $\Leftrightarrow \sum_{N+1}^\infty b_k$ yakınsak tır.

Karş. Testi

$\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ yakınsak (ıraksak) $\Leftrightarrow \sum_1^\infty b_k$ yakınsak (ıraksak) tır.

b) $L=0$ olsun ve $\varepsilon=1>0$ alalım.

$N<k \Rightarrow \left|\frac{a_k}{b_k}-0\right|<1 \overset{\text{c}}{\Leftrightarrow} 0<a_k<b_k$ ve Karş. Testinden

$\sum_{N+1}^{\infty} b_k$ yakınsak $\Rightarrow \sum_{N+1}^{\infty} a_k$ yakınsak elde edilir.

Böylece $\sum_{1}^{\infty} b_n$ yak $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.

c) → ödev.

<u>10.3.3. Örnek:</u> a) $\sum_{2}^{\infty} \frac{k+3}{k^4-1}$, b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\tan^{-1}k}{k^3}$, c) $\sum_{1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k}\right)$

serileri yakınsak mıdır?

<u>Çözüm:</u> (a) $\forall k\geq 2$ için $a_k=\frac{k+3}{k^4-1}\geq 0$ ve $b_k=\frac{k}{k^4}=\frac{1}{k^3}\geq 0$ dır.

Ayrıca, $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+3}{k^4-1}\cdot\frac{k^3}{1}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^4+3k^3}{k^4-1}=1>0$

ve de $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ yakınsak (p-testi) $\Rightarrow \sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ yakınsak $\overset{\text{L.K.T.}}{\Longrightarrow}$

$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k+3}{k^4-1}$ serisi de yakınsak olur.

b) $a_k=\frac{\tan^{-1}k}{k^3}\geq 0$, $b_k=\frac{1}{k^2}\geq 0$ ve $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\tan^{-1}k}{k^3}}{1/k^2}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{\tan^{-1}k}{k}=0$ ve de $\sum_{1}^{\infty} 1/k^2$ yakınsak (p-Testi)

old. dan L.K.T. den $\sum_{1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}k}{k^3}$ de yakınsak olur

c) $a_k=1-\cos(1/k)\geq 0$, $b_k=\frac{1}{k^2}\geq 0$ dır ve de

$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1-\cos(1/k)}{1/k^2}=1/2$ $\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(1/x)}{1/x^2}=[0/0]\right.$

$\overset{\text{L.H.}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-2/x^3}$

ve de $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ (p-Testi) yakınsak

$\left.=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}\right)$ $1/x=y$

$\overset{\text{L.K.T.}}{\Longrightarrow}\sum_{1}^{\infty}\left(1-\cos(1/k)\right)$ serisi de yakınsak.

<u>10.3.4. Örnek:</u> $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\ln(k+1)}$ serisi yak. mı?

<u>Çözüm:</u> $a_k=\frac{1}{\ln(k+1)}\geq 0$, $b_k=\frac{1}{k}\geq 0$ ve $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(k+1)}}{1/k}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\ln(k+1)}=\infty$ $\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(x+1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{L.H.}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=\infty\right)$

ve de $\sum_1^\infty \frac{1}{k}$ Harmonik serisi ıraksak $\overset{L.K.T.}{\Longrightarrow} \sum_1^\infty \frac{1}{\ln(k+1)}$ ıraksak

<u>10.3.5. Örnekler:</u> a) $\sum_1^\infty \frac{1}{k^3+4k}$, b) $\sum_2^\infty \frac{k}{k^{7/2}-1}$, c) $\sum_0^\infty \frac{1}{k!}$

d) $\sum_9^\infty \frac{1}{2k+9}$ serileri yakınsak mıdır?

<u>Çözüm</u> (a) $\forall k \geq 1$ için $0 \leq \frac{1}{k^3+4k} \leq \frac{1}{k^3}$ ve $\sum_1^\infty \frac{1}{k^3}$ yakınsak (p-Testi)

$\overset{K.T.}{\Longrightarrow} \sum_1^\infty \frac{1}{k^3+4k}$ yakınsak olur.

L.K.T. için a_k, $b_k = 1/k^3$

b) $\forall k \geq 2$ için $0 \leq \frac{k}{k^{7/2}-1} \leq \frac{k}{\frac{1}{2}k^{7/2}} = \frac{2}{k^{5/2}}$ $\frac{k}{k^{7/2}-1} = a_k$ $\rightarrow b_k = \frac{1}{k^{5/2}}$

(Çünkü; $\frac{1}{2}k^{7/2} \leq k^{7/2}-1 \iff 1 \leq \frac{1}{2}k^{7/2} \iff 2 \leq k^{7/2}$) $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$.

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$?

ve $\sum_2^\infty \frac{2}{k^{5/2}}$ (p-testi gereği) yakınsak $\overset{K.T.}{\Longrightarrow} \sum_2^\infty \frac{k}{k^{7/2}-1}$ de yakınsak

c) $\sum_0^\infty \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$ serisinin ilk dört terimi atılırsa;

$\sum_{k=4}^\infty \frac{1}{k!} = \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$ serisi bulunur.

Ayrıca $\forall k \geq 4$ için $k^2 \leq k! \iff 0 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k^2}$ ve de

$\sum_4^\infty \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsaktır (?) $\overset{K.T.}{\Longrightarrow} \sum_4^\infty \frac{1}{k!}$ yakınsak

$\Rightarrow \sum_0^\infty \frac{1}{k!}$ serisi yakınsak olur.

d) $\forall k \geq 5$ için $0 \leq \frac{1}{4k} \leq \frac{1}{2k+9}$ dır $\frac{1}{2k+9} = a_k$ ($\frac{1}{2k+9} \geq \frac{1}{4k} \iff 4k \geq 2k+9 \iff 2k \geq 9 \iff k \geq 5$ dir)

$\sum_5^\infty \frac{1}{4k} = \frac{1}{4}\sum_5^\infty \frac{1}{k}$ ıraksaktır $\overset{K.T.}{\Longrightarrow} \sum_5^\infty \frac{1}{2k+9}$ ve dolayısıyla

$\sum_9^\infty \frac{1}{2k+9}$ serisi ıraksak olacaktır.

(L.K.T. için $b_k = 1/k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1/2$ ve $\sum_1^\infty 1/k$ serisi ıraksak $\Rightarrow \sum \frac{1}{2k+9}$ ıraksak)

<u>10.3.6. Örnek:</u> $\sum_0^\infty \frac{1}{k!}$ yakınsak serisi toplamı yerine ilk 9 terimi alınırsa, yapılan hata?

$\sum_0^\infty \frac{1}{k!} = \underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{8!}}_{= 2.71827877} + \sum_{k=9}^\infty \frac{1}{k!}$ olup, yapılan E yanılgısı;

$\sum_0^\infty \frac{1}{k!} \overset{?}{=} e$

$E = \sum_{k=9}^\infty \frac{1}{k!} = \frac{1}{9!}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{10\cdot 11\cdot 12} + \dots + \frac{1}{10\cdot 11\dots} \dots\right]$

$\leq \frac{1}{9!}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots + \right) = \frac{1}{9!}\sum_0^\infty \frac{1}{10^k}$

$= \frac{1}{9!}\left(\frac{1}{1-1/10}\right) = \frac{10}{9 \cdot 9!} \leq 0.000000306$ dır. $\sum_0^\infty \frac{1}{k!} \overset{?}{=} e$ (gösteril.)

10.4. ALTERNATİF SERİLER

Daha önceki kesimlerde, pozitif terimli ($\sum_1^\infty a_n$ serisinde $\forall n$ için $a_n \geq 0$) serilerin yakınsaklık testlerini verdik. Pozitif terimli olmayan serilerin yakınsaklıkları için önce aşağıdaki tanımı verelim:

4.1. Tanım: $\sum_1^\infty |a_k|$ serisi yakınsaksa, $\sum_1^\infty a_k$ serisine mutlak yakınsaktır denir.

4.1. Önerme (Mutlak Yakınsaklık Testi)

$\sum_1^\infty a_k$ mutlak yakınsak $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty a_k$ yakınsaktır.

Kanıt: $b_k = \dfrac{|a_k| + a_k}{2}$, $c_k = \dfrac{|a_k| - a_k}{2}$ olmak üzere $\sum_1^\infty b_k$ ve $\sum_1^\infty c_k$ serilerini gözönüne alalım. Bu durumda her k için

$$0 \leq b_k \leq |a_k| \text{ ve } 0 \leq c_k \leq |a_k| \text{ dır.}$$

Ayrıca varsayımdan, $\sum |a_k|$ yakınsak old. dan karşılaştırma testi gereği $\sum_1^\infty b_k$ ve $\sum_1^\infty c_k$ serileri de yakınsak olur. Öte yandan her k için $a_k = b_k - c_k$ olduğundan

$$\sum_1^\infty a_k = \sum_1^\infty b_k - \sum_1^\infty c_k$$ serisi de yakınsak olur.

4.1. Örnek: $\sum_1^\infty \dfrac{\sin k}{k^2}$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her k için $0 \leq \left|\dfrac{\sin k}{k^2}\right| \leq \dfrac{1}{k^2}$ dir ve $\sum_1^\infty 1/k^2$ serisi p-Testi gereği yakınsak old. dan $\sum_1^\infty \left|\dfrac{\sin k}{k^2}\right|$ serisi de Karşılaştırma Testi gereği yakınsak olur. O halde $\sum_1^\infty \dfrac{\sin k}{k^2}$ serisi mutlak yakınsak olur. $\Rightarrow \sum_1^\infty \dfrac{\sin k}{k^2}$ yakınsak.

4.2. Tanım: Her k için $a_k > 0$ olmak üzere

$$\sum_1^\infty (-1)^{k+1} \cdot a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k+1} \cdot a_k + \cdots$$

biçiminde tanımlı seriye alternatif (alterne) seri denir.

4.2. Önerme: (Alternatif Seriler için Yak.lık Testi)

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq \dots$ (artmayan, azalan) ve

2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

koşullarını sağlayan $\sum\limits_1^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$ $(\forall k, a_k \geq 0)$ alternatif serisi yakınsaktır, ve

$\sum\limits_1^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k = A$ ise, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\boxed{|A - A_n| \leq a_{n+1}}$ dir.

Aksi halde bu tür seriler ıraksaktır.

Kanıt: $A_{2n} = \sum\limits_1^{2n} (-1)^{k+1} \cdot a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \underbrace{\dots}_{\geq 0} + (a_{2n-1} - a_{2n})$

$\leq (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) = A_{2n+2}$

olduğu için $A_2 \leq A_4 \leq A_6 \leq \dots \leq A_{2n} \leq \dots$ bulunur. Ayrıca,

$A_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$ dır.

O halde (A_{2n}) dizisi azalmayan (artan) ve üstten sınırlı olduğu için yakınsaktır. $\lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} = A$ olsun. Ayrıca

$A_{2n} = A_{2n-1} + a_{2n}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ verildiğinden

$\lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n-1} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} \Rightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n-1} + 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n-1} = A$

bulunur. Buradan yararlanarak $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ elde edilir ki bu serinin yakınsadığını gösterir. A yerine A_n alınarak yapılan yanılgı da;

$|A - A_n| = \left|\sum\limits_{n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k\right| = |\overbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}^{\geq 0} + \overbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}^{\geq 0} + \dots|$

$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \leq a_{n+1}$ bulunur.

4.2. Örnek: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{k}}_{= a_k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} + \dots$

alternatif serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall k$ için $a_k = 1/k > 0$ dır,

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{k} > \dots$ $(\forall k,\ a_{k+1} \leq a_k$, artmayan$)$

ve $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ dır. $\xRightarrow{A.S.\ Testi}$ $\sum\limits_1^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ serisi yakınsaktır.

Bu $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}$ yakınsak serisinin, en çok 10^{-3}'lük bir yanılgı ile serinin toplamını bulmak istersek;

$$|A-A_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le 10^{-3} \iff n \geq 999 \text{ olmalıdır.}$$

O halde A yerine $A_{999} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{999} \cong 0.69365$ dır.

4.3. Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\underbrace{\frac{k}{k^2+5}}_{=a_k}$ serisinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm: $\forall k$ için $a_k = \frac{k}{k^2+5} > 0$ dır.

1) $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$ denirse, $\forall x \in [1,\infty)$ için

$$f'(x) = \frac{x^2+5-2x\cdot x}{x^2+5} = \frac{-x^2+5}{x^2+5} = 0$$

$\iff x = \mp\sqrt{5}$ dır, böylece $x \geq \sqrt{5}$ için $f'(x) \le 0$ olacağı için f azalan (artmayan) $\Rightarrow f(k) = a_k$ de artmayandır.

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k^2+5} = 0$ dır.

$\xrightarrow{\text{A.S. Testi}}$ $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{k}{k^2+5}$ serisi (alternatif) yakınsak olur.

Ancak bu $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{k}{k^2+5}$ serisi mutlak yakınsak değildir.

(Çünkü $\sum_{1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\cdot\frac{k}{k^2+5}\right| = \sum_{1}^{\infty}\frac{k}{k^2+5}$ serisi yakınsak değildir;

$0 < \frac{1}{k} = \frac{k}{k^2} \le \frac{k}{k^2+5}$ ve $\sum 1/k$ ıraksak $\xRightarrow{\text{Kars. T.}} \sum_{1}^{\infty}\frac{k}{k^2+5}$ de ıraksak)

Tanım: Mutlak yakınsak olmayıp yakınsak olan serilere koşullu yakınsak seriler denir.

Not: 4.3. örnekteki seri bir koşullu yakınsak seridir.

Not. Mutlak Yakınsamanın, koşullu yakınsamaya üstünlüklerinden ikisini kanıtsız vereceğiz:

1) Mutlak yakınsak olan bir serinin terimleri, toplam değişmeksizin, yeniden düzenlenebilir.

2) Mutlak yakınsama durumunda, sonlu ya da sonsuz sayıda

terim yerine bunların toplamları yazılabilir.

Bu koşullar koşullu yakınsak seriler için geçerli olmayabilir.

Örneğin: (Geçerli olsaydı:) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}$ koşullu yakınsak

$A = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots + (-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k} + \cdots$ denirse;

$$2A = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{9} - \frac{2}{10} + \cdots$$

$$= 2 - 1 + \frac{2}{3} - 1/2 + \frac{2}{5} - 1/3 + \frac{2}{7} - 1/4 + \frac{2}{9} - 1/5 + \cdots$$

yeniden gruplayarak;

$$2A = (2-1) - 1/2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - 1/5\right) + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \cdots = A \text{, yani } 2A = A \Rightarrow 2 = 1$$

Gelişkisi elde edilirdi.

4.4. Örnek: $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k - \ln k}$ serisinin yakınsaklık türü?

$a_k = \frac{1}{k - \ln k} > 0$ dır. $\Rightarrow$ seri alternatif seridir.

1) (a_k) dizisi artmayandır: $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$, $x \geq 1$ için

$$f'(x) = \frac{-1}{(x - \ln x)^2}\cdot\left(1 - 1/x\right) = -\frac{(x-1)}{x\cdot(x - \ln x)^2} \leq 0 \text{ dır.}$$

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k - \ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k}{1 - \frac{\ln k}{k}} = \frac{\lim_{k\to\infty} 1/k}{1 - \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}} = \frac{0}{1-0} = 0$

dır. $\xRightarrow{A.S.T.}$ $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k - \ln k}$ alternatif serisi yakınsaktır.

Diğer taraftan $\sum_{1}^{\infty} \left|(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k - \ln k}\right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k - \ln k}$ serisi yakınsak değildir, çünkü $k \geq 1$ için $0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k - \ln k}$ eşitsizliği var ve $\sum_{1}^{\infty} 1/k$ Harmonik serisi ıraksak $\xRightarrow{K.T.}$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k - \ln k}$ de ıraksaktır.

O halde bu seri koşullu yakınsaktır.

4.5. Örnek: $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin koşullu yakınsak old. göst.

Çözüm: Bu hesaplanmayan integralin yakınsak olduğu gösterilmişti. Şimdi de $\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ in yakınsak olmadığını gösterelim. İddianın tersine bu integral yakınsak olsaydı;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx}_{=a_k}$$ serisi de yakınsak olurdu. Ancak;

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$ denirse;

$\forall x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ için $\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{|\sin x|}{k\pi} \Rightarrow$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx \leq a_k \Rightarrow \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \leq a_k$$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{2}{(k+1)\pi} \leq a_k$ olur. Yani $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$

Harmonik serisi ıraksak old. dan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de, Karşılaştırma testi gereği; ıraksak olacaktır, ki bu bir çelişkidir. O halde $\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ integrali de ıraksak olur. Yani $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ koşullu yakınsak bir integraldir.

Tanım: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ serileri verilsin. Bu iki serinin

Çarpımı $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \; ; \left(c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot b_{k-n}\right)$

biçiminde tanımlıdır.

4.3. Önerme: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$ olmak üzere $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ yakınsak serileri verilsin. Eğer bu serilerden en az biri mutlak yakınsak ise $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ çarpım serisi de mutlak yakınsak olur ve;

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = A \cdot B \text{ dir.}$$

Kanıt: Ödev olarak, ilgilenenler için, bırakılmıştır. Kanıtından sorumlu değilsiniz.

4.6. Örnek: $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right)\cdot\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)$ çarpım serisinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm. Çarpımdaki 1. seri koşullu yakınsak ve 2. seri de mutlak yakınsaktır $\xRightarrow{4.3.\text{Ön.}}$ Bu çarpım da mutlak yakınsak olur, ve çarpım serisinin ilk 5-terimini bulalım.

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ ve $c_k=\sum_{n=0}^{k}a_n\cdot b_{k-n}$ olduğundan;

$c_0=a_0 b_0$, $c_1=a_0 b_1+a_1 b_0$, $c_2=a_0 b_2+a_1 b_1+a_2 b_0$

$c_3=a_0 b_3+a_1 b_2+a_2 b_1+a_3 b_0$, $c_4=a_0 b_4+a_1 b_3+a_2 b_2+a_3 b_1+a_4 b_0$ ....

den istenenler bulunur.

4.7. örnek: $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$ serisinin yakınsaklık karakterini belirle.

$\forall k$ için $0\le\left|\frac{\sin k}{k^2}\right|\le\frac{1}{k^2}$ dır ve $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ serisi, p-testinden, yakınsaktır $\xRightarrow{\text{Karş.T.}}$ $\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{\sin k}{k^2}\right|$ serisi yakınsak olur $\Rightarrow$ $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$ mutlak yakınsak $\xRightarrow{\text{m.y.t.}}$ seri yakınsak olur.

Mutlak yakınsak serilerin, yakınsamayı bozmadan yeniden düzenlenebileceği ifade edilmişti: Buna yönelik:

Önerme: Eğer $\sum_{1}^{\infty}a_n$ mutlak yakınsak ve $b_1, b_2, \dots b_n, \dots$ de (a_n) dizisinin yeniden bir ifadesi ise $\sum_{1}^{\infty}b_n$ de mutlak yakınsaktır ve $\sum_{1}^{\infty}b_n=\sum_{1}^{\infty}a_n$ olur.

Örnek, $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ serisi mutlak yakınsaktır, ve

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

yi yeniden düzenleyelim:

$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}-\frac{1}{36}-\frac{1}{64}-\frac{1}{100}-\frac{1}{144}+\frac{1}{81}+\frac{1}{121}+\frac{1}{169}+\frac{1}{225}+\frac{1}{289}\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$ olup bunlar da mutlak yakınsaktırlar.