− 8.3. YAY-UZUNLUKLARI − (Eğri)

Bir $[a,b]$ aralığında sürekli olan $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ parametrik fonksiyonlarıyla belirlenen ve uç noktaları dışındaki her $t_1 \neq t_2$ için $[x(t_1)-x(t_2)]^2+[y(t_1)]^2-y(t_2)]^2>0$ eşitsizliğini gerçekleyen (x,y) noktalarının geometrik yerine bir yay (eğri) denir.

A) → $x(t)$ ve $y(t)$ fonks. $[a,b]$ aralığında sürekli türevlenebilir ($x'(t)$ ve $y'(t)$ var ve sürekli) ise bu C yayının uzunluğu;

$$l(C)=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \text{ dir.}$$

B) → Eğer C yayı; $(y=f(x),\ a\leq x\leq b)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonuyla veriliyorsa;

$$l(C)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \text{ dır}$$

(Burada A-da, $x=t$, $y=f(t)$ alınarak sonuç elde edilir)

C) → Eğer C yayı; $(x=g(y),\ c\leq y\leq d)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonuyla veriliyorsa;

$$L(C)=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \text{ dır.}$$

Burada A da: $y=t$, $x=g(t)$ alınarak A daki eşitlik bulunur.

__Örnekler__: (1) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ parametrik fonksiyonuyla verilen (a-yarıçaplı çember) eğrinin uzunluğu

__Çözüm__: $$\ell(C)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a\,dt=2\pi a \text{ bulunur.}$$

(2) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi,\ a>0)$ parametrik eğrisi (sikloid) nin yay uzunluğu?

Çözüm: $\ell(c)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$

$$=\int_0^{2\pi} a\cdot\sqrt{1-2\cos t+\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1}}\,dt=\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$\cos t=\cos(2\cdot t/2)=1-2\sin^2 t/2$

$$=\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos(2\cdot t/2)}\,dt=\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-(1-2\sin^2 t/2)}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\cdot a\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sin t/2\,dt=2a\left(-2\cos t/2\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a$ bulunur.

3) $y=f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\le x\le a)$ eğrisi (yarım-çember)nin yay uzunluğu?

Çözüm: $\ell(c)=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx$

$$=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=2a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$=2a\left(\operatorname{Arcsin}(x/a)\Big|_0^a\right)=2a\left(\underbrace{\operatorname{Arcsin}1}_{=\pi/2}-\operatorname{Arcsin}0\right)=\pi a$ bulunur.

4) $y=\frac{1}{2}x^2$ parabolünün orijinden $(1, 1/2)$ noktasına olan yay uzunluğunu bulunuz.

$$\ell=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sec t\cdot\sec^2 t\,dt$$

$x=\tan t$
$dx=\sec^2 t\,dt$

$u=\sec t\to du$
$dv=\sec^2 t\,dt\to v$

$$=\sec t\cdot\tan t\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\sec t\cdot\underbrace{\tan^2 t}_{\sec^2 t-1}\,dt$$

$$=\sec t\cdot\tan t\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\sec^3 t\,dt+\int_0^{\pi/4}\sec t\,dt$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi/4}\sec^3 t\,dt=\frac{\sec t\cdot\tan t}{2}\Big|_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|\Big|_0^{\pi/4}$$

$\Rightarrow \ell=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$ bulunur.

5) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $(0\le t\le 2\pi,\ a>0)$ eğrisinin uzunlu

$$\ell=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t$

$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$= 9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t$

$= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t \, dt$$

$$= 12a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{2} dt = 6a\left(-\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$= 3a\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = 6a \text{ dir.}$$

6) $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$, $(1 \leq y \leq 3)$ eğrisinin uzunluğu?

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2y^2}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4}}\, dy = \int_1^3 \sqrt{\frac{y^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4}}\, dy$$

$$= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right)^2}\, dy = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y}\right)\Big|_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(9 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{3} = \frac{14}{3} \text{ birim.}$$

7) $y = \ln(\sin x) = f(x)$, $\left(\pi/3 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\right)$ eğrisinin uzunluğu?

$$l = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1 + \cot^2 x}\, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \csc x \, dx$$

$$= -\ln|\csc x + \cot x|\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} = -\ln\left|\csc\frac{2\pi}{3} + \cot\frac{2\pi}{3}\right| + \ln\left|\csc\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{3}\right|$$

$$= -\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - 1/\sqrt{3}\right| + \ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} + 1/\sqrt{3}\right| = 2\ln\sqrt{3} = \ln 3.$$

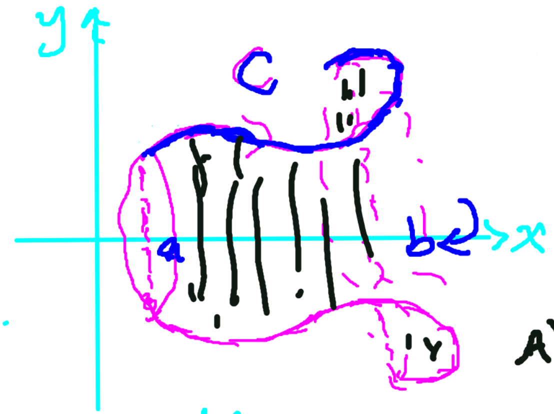
8) $x = \int_0^y \sqrt{\cosh t}\, dt = g(y)$, $0 \leq y \leq 2$ nin uzunluğu?

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\int_0^y \sqrt{\cosh t}\, dt = \sqrt{\cosh y} \Rightarrow l = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\sqrt{\cosh y}\right)^2}\, dy = \int_0^2 \sqrt{1 + \cosh y}\, dy = \int_0^2 \sqrt{1 + 2\cosh^2 \tfrac{y}{2} - 1}\, dy$$

$$= \int_0^2 \sqrt{2} \cdot \cosh y/2 \, dy = \sqrt{2} \cdot 2 \sinh y/2 \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}\sinh 1 = \sqrt{2}(e - 1/e)$$

— 8.4. DÖNEL CİSİMLERİN YÜZEY ALANLARI —



$\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right., \ (a \le t \le b) \Big\}$ parametrik

fonksiyonlarıyla verilen C eğrisini düşünelim.

A) Sürekli türevlenebilir $x=x(t)$ ve $y=y(t)$ fonksiyonları için $y=y(t)\ge 0$ olmak üzere bu C eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin yüzey alanı;

$$\boxed{A(S) = A_{0x} = 2\pi \int_a^b y(t)\cdot \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}_{ds}}$$ dır.

B) $x=x(t)$ ve $y=y(t)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar ve $x=x(t)\ge 0$ olmak üzere C eğrisinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin yüzey alanı

$$\boxed{A(S) = A_{0y} = 2\pi \int_a^b x(t)\cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$ dır.

C) Eğer C eğrisi; $y=f(x)$, $(a \le x \le b)$ biçiminde ve bu eğri x-ekseni etrafında döndürülürse elde edilen cismin yüzey alanı;

$$A_{0x} = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

aynı eğri y-ekseni etrafında döndürülürse;

$$A_{0y} = 2\pi \int_a^b x\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$ olur.

D) Eğer C eğrisi; $x=g(y)$, $(c \le y \le d)$ biçiminde ve bu eğri x-ekseni etrafında döndürülürse

$$A_{0x} = 2\pi \int_c^d y\cdot\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

y-ekseni etrafında döndürülürse;

$$A_{0y} = 2\pi \cdot \int_c^d g(y)\cdot\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$ dır.

Örnekler: 1) r-yarıçaplı kürenin yüzey alanı?

Küreyi bulmak için, $\left\{\begin{array}{l} x = r.\cos t \\ y = r.\sin t \end{array} (0 \le t \le \pi)\right\}$ parametrik yarı çember eğrisinin x-ekseni etrafında döndürmek yeterli olur. Bu durumda kürenin yüzey alanı;

$$A_K = A_{ox} = 2\pi \int_0^\pi y.\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^\pi r.\sin t.\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt = 2\pi\int_0^\pi r^2\sin t\,dt$$

$$= 2\pi r^2\int_0^\pi \sin t\,dt = 2\pi r^2\left(-\cos t\Big|_0^\pi\right) = 4\pi r^2$$ bulunur.

2) $(x-a)^2+y^2=r^2$ (torus) eğrisinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanı?

Eğriyi veren $\left\{\begin{array}{l} x = a + r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}, (0 \le t \le 2\pi)\right\}$ parametrik fonksiyonlar seçilirse;

$$A_{oy} = 2\pi\int_0^{2\pi} x(t).\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(a+r.\cos t).\sqrt{(-r\sin t)^2+(r.\cos t)^2}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(a+r.\cos t).r\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi}(ar+r^2\cos t)\,dt$$

$$= 2\pi\left(ar.t + r^3\sin t\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 r a$$ dır.

3) C eğrisi sikloid $\left(\begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array}, 0 \le t \le 2\pi\right)$ olmak üzere C'nin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S cisminin yüzey alanı?

$$A_{ox} = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t).\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t).\sqrt{\left[a(1-\cos t)\right]^2+(a\sin t)^2}\,dt = 2a^2(1-\cos t)$$

$$\cos t = \cos(2t/2) = 1-(1-2\sin^2 t/2)$$

$$= 2\pi a\int_0^{2\pi}(1-\cos t).\sqrt{4a^2.\sin^2 t/2}\,dt$$

$$= 4\pi a^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\cdot \sin t/2 \, dt = 4\pi a^2 \left[\int_0^{2\pi} \sin t/2 \, dt - \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t/2 \, dt \right.$$

$$= 4\pi a^2 \left[-2\cos t/2 \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\sin(\tfrac{1}{2}+1)t + \sin(\tfrac{1}{2}-1)t\right) dt \right]$$

$$= 4\pi a^2 \left[4 - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\cos \tfrac{3}{2}t + 2\cos \tfrac{1}{2}t\right)\Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$= 4\pi a^2 \left[4 + \frac{4}{3} \right] = \frac{64\pi a^2}{3} \text{ olur.}$$

veya

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos 2.t/2)\cdot \sin t \, dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-1+2\sin^2 t/2) \sin t/2 \, dt$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\cdot \sin^3 t/2 \, dt = 8a^2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 y \cdot 2dy = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 y \, dy$$

$t/2 = y \Rightarrow \frac{1}{2}dt = dy$

$= \ldots\ldots$

4) $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \le x \le 1$ parabol eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanı?

$$A_{ox} = 2\pi \int_0^1 y\cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 t \cdot \sec t \cdot \sec^2 t \, dt$$

$x = \tan t$
$dx = \sec^2 t \, dt$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \underbrace{\tan^2 t}_{\sec^2 t - 1} \cdot \sec^3 t \, dt = \pi \int_0^{\pi/4} (\sec^5 t - \sec^3 t)\, dt$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{4}\sec^3 t \cdot \tan t - \tfrac{1}{8}\sec t\cdot \tan t - \tfrac{1}{8}\ln|\sec t + \tan t| \right] \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\ln|\sqrt{2}+1| \right] = \frac{\pi}{8}\left(3\sqrt{2} - \ln|1+\sqrt{2}|\right] \text{ olur.}$$

5) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $0 \le x \le 1$ eğrisinin Y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin yüzey alanı?

$$A_{oy} = 2\pi \int_0^1 x\cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 x\cdot \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 2x \sqrt{1+x^2}\, dx = \pi \int_1^2 \sqrt{u}\, du = \frac{2\pi}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_1^2$$

$u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8} - \sqrt{1}\right) = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) \text{ bulunur.}$$

——— o ———

8.5. DİFERANSİYEL PROBLEMLERİ.

İçinde türev barındıran denklemlere diferansiyel denklem denir. Örneğin $\frac{dy}{dx}=f(x)$ en basit dif. denklemdir. Bu denklemin çözümü $y=\int f(x)\,dx$ olur.

Genel olarak $y=F(x)$ fonk. verilen dif. denklemin bir çözümü ise, $c\in\mathbb{R}$ sabiti için $y=F(x)+c$ de bir çözümdür.

Bu c sabitini belirlemek için, $y=F(x)$ fonksiyonunun geçtiği bir (a,d) noktası belirlenir; (başlangıç değeri problemi) yani $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x)\ ;\ x=a \text{ iken } y=d}$ dir.

Bu tür diferansiyel problemleri ile uğraşırken;

1). problemin bir çözümü var mıdır?

2). Bir çözüm varsa, bu çözüm tek midir?

sorularının yanıtlanması gerekir. Yukarıda tanımlanan diferansiyel sorunu için söz konusu her iki sorunun yanıtı da evet dir. Şöyle ki;

<u>8.5.1. Önerme</u>: Bir a noktasını içeren bir I aralığında bir f fonksiyonu verilsin. Bu durumda; $\frac{dy}{dx}=f(x)$, $x=a$ iken $y=d$ diferansiyel probleminin tek çözümü

$$\boxed{y=\int_a^x f(t)\,dt+d\ ,\ x\in I}$$ dir.

<u>Kanıt</u>: Ödev.

<u>8.5.1, Örnekler</u>: 1) Bir eğrinin her bir (x,y) noktasındaki türevi $2x$ ise ve bu eğri $(2,5)$ noktasından geçiyorsa, söz konusu eğrinin denklemi?

<u>Çözüm</u>: $\left.\begin{cases}\frac{dy}{dx}=2x\\ y(2)=5\end{cases}\right\} \Rightarrow y=\int_2^x 2t\,dt+5=t^2\Big|_2^x+5$

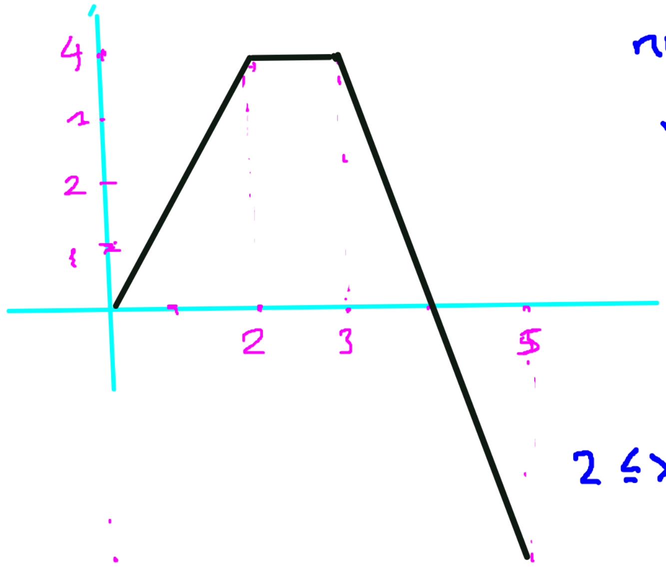
$=(x^2-4)+5=x^2+1$ bulunur.

2) Bir doğru üzerinde $t=0$ başlangıç (anı) noktasından başlayarak $[0,5]$ aralığında

$$v(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t\le 2 \text{ ise}\\ 4, & 2\le t\le 3 \text{ ise}\\ -4t+16, & 3\le t\le 5 \text{ ise}\end{cases}$$

hızıyla hareket eden bir parçacığın bulunduğu yeri bulun.

Çözüm: Bu parçacığın bir t anındaki yeri $s(t)$ dir, $v(t)$



nin grafiği yandaki gibidir. Ayrıca; $v=\frac{ds}{dt}$ olduğundan;

$\frac{ds}{dt}=v(t)$, $t=0$ iken $s=0$ dır.

Bu durumda;

$0\le x\le 2$ için $s=\int_0^x 2t\,dt+0=x^2$ dir.

$2\le x\le 3$ için $s=\int_0^x v(t)\,dt+0=\int_0^2 v(t)+\int_2^x v(t)\,dt$

$=4+\int_2^x 4\,dt=4+4(x-2)=4x-4$ dir.

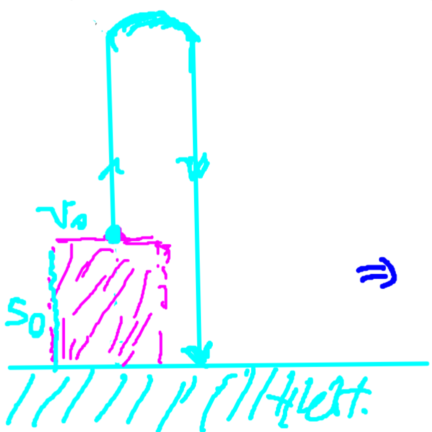
$3\le x\le 5$ için $s=s(t)=\int_0^x v(t)\,dt+0=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt+\int_3^x v(t)\,dt$

$=\int_0^2 2t\,dt+\int_2^3 4\,dt+\int_3^x(-4t+16)\,dt=4+4+\left[-2t^2+16t\right]\Big|_3^x$

$=8+\left[-2x^2+16x-(-18+48)\right]=-2x^2+16x-22$ olmak üzere

$$s=s(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t\le 2\\ 4t-4, & 2\le t\le 3\\ -2t^2+16t-22, & 3\le t\le 5\end{cases}$$ biçiminde olur.

3) s_0 lık bir yükseklikten v_0 ilk hızıyla yukarı doğru fırlatılan bir parçacığın bulunduğu yeri veren fonksiyon? parçacığın ivmesi



$a=\frac{d^2s}{dt^2}=-g$ yerçekimi ivmesi

$\Rightarrow \frac{dv}{dt}=-g$, $t=0$ iken $v=v_0$ dır.

$\Rightarrow v=\int_0^t(-g)\,dx+v_0=\left(-gx\Big|_{x=0}^{x=t}+v_0\right)=v_0-gt$

alur ve buradan, $\dfrac{ds}{dt} = v(t) = v_0 - g(t)$, $t = 0$ iken $s = s_0$ alacağından; $s = s(t) = \int_0^t v(x)\,dx + s_0 = \int_0^t (v_0 - gx)\,dx + s_0$
$= \left(v_0 x - \frac{1}{2} g x^2\right)\Big|_0^t + s_0 = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ bulunur.

4) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x^2}$, $x=0$ iken $y=0$ diferansiyel probleminin $x=1$ için yaklaşık çözümünü bulunuz.

<u>Çözüm</u>: Genel çözüm $y = \int_0^x e^{-t^2}\,dt + 0 = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ dir.
Ancak bu integrali, şu an için alamıyoruz. Onun içinde bir yaklaşık değerini bulmak istiyoruz. Dolayısıyla aranan yaklaşık değer $y(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ dir, ki bunu bulmak için Simpson Kuralını kullanalım: [$n=6$ durumunu ve $h = \frac{1-0}{6} = 1/6$ alınarak

$$y(1) \cong \frac{1/6}{3}\left[1.1 + 4.0.97260 + 2.0.89484 + 4.0.77880 + 2.0.64118 + 4.0.49935 + 1.0.36788\right]$$

$\Rightarrow y(1) \cong 0.74683$ elde edilir.

Diğer bir diferansiyel problemi: f ile g fonksiyonları sürekli ise ve $y=b$'nin komşuluğunda $g(y) \neq 0$ oluyorsa;

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}; \quad x=a \text{ iken } y=b}$$

dif denklemini gözönüne alalım. $\Rightarrow$ $\boxed{g(y)\cdot dy = f(x)\,dx}$ elde edilerek;

$$\int_b^y g(s)\,ds = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{çözümü bulunur.}$$

<u>Örnek</u>: $\dfrac{dy}{dx} = x.e^y$, $x=1$ iken $y=3$ dif. denkleminin çözümü.

<u>Çözüm</u>: $\dfrac{dy}{dx} = x.e^y \Rightarrow \dfrac{dy}{e^y} = x.dx \Rightarrow e^{-y}dy = x\,dx \Rightarrow$

$$\int_3^y e^{-s}\,ds = \int_1^x t\,dt \Rightarrow -e^{-s}\Big|_3^y = t^2/2\Big|_1^x$$

$$\Rightarrow -e^{-y} + e^{-3} = \frac{1}{2}x^2 - 1/2 \Rightarrow e^{-y} = -1/2 x^2 + 1/2 + e^{-3} \Rightarrow$$

$$-y = \ln\left(-1/2 x^2 + 1/2 + e^{-3}\right) \Rightarrow y = \ln\left(\frac{1}{-1/2 x^2 + 1/2 + e^{-3}}\right) \text{ dir.}$$