9. BÖLÜM: DİZİ ve SERİLER

9.1 → DİZİLER: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$ biçimindeki bir fonksiyona ile de bir dizi denir ve $(a_n)_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$

dizinin ilk terimi — dizinin genel terimi

Örnek:

1) $(a_n)_1 = (2n)_1 = (2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots)$
2) $(a_n)_1 = (10+2n)_1 = (12, 14, 16, \ldots, 10+2n, \ldots)$
3) $(a_n)_1 = (\sqrt{n})_1 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots)$
4) $(a_n)_1 = \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\right)_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right)$
5) $(a_n)_1 = \left(\frac{n-1}{n}\right)_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right)$
6) $(a_n)_1 = \left((-1)^{n+1}\right)_1 = (1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots)$

Dizilerin Yakınsaklık veya Iraksaklıkları:

9.1.1. Tanım: $(a_n)_1$ bir dizi ve $L \in \mathbb{R}$ bir sayı olsun. Verilen herbir $\varepsilon > 0$ için

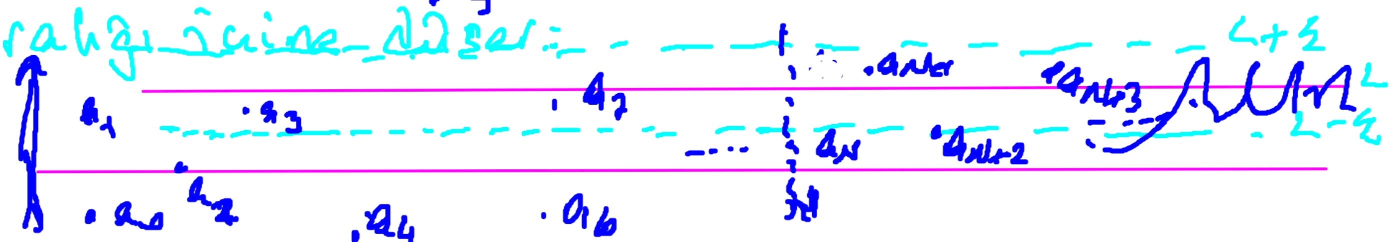
$$\text{"}\forall n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon\text{"}$$

o.ş. bir $N \in \mathbb{N}^+$ sayısı varsa, (a_n) dizisinin limiti L dir denir, ya da (a_n) dizisi L sayısına yakınsar denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ya da $a_n \to L$ ile gösterilir.

Limiti var ve bir sayı olan diziye yakınsak dizi, aksi halde ıraksak dizi adı verilir.

Bir (a_n) dizisinin bir L sayısına yakınsaması $(a_n \to L)$ nin geometrik yorumu:

İstenildiği kadar küçük her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $N \in \mathbb{N}^+$ sayısı vardır ki, indisi N den büyük olan dizinin tüm terimleri $|a_n - L| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ aralığı içine düşer:



9.1.1. Örnekler ① $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = ?$ $(=0\ ?)$

Bir $\varepsilon>0$ verilsin $\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < N$ o.ş. bir $N\in\mathbb{N}^+$ var (Arşimet özd.)

$\Rightarrow \left(\forall n\geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon\right)$ olacağından

$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ bulunur.

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a)$ (sabit dizisi) $\overset{?}{=} a$

Bir $\varepsilon>0$ verilsin. Bu durumda her $N\in\mathbb{N}^+$ ve her $n\geq N$ için $|a_n-a| = |a-a| = 0 < \varepsilon$ olur ki bu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ demektir.

3) $(a_n)_1 = ((-1)^{n+1})$ dizisi ıraksaktır gösteriniz.

Tersine; $a_n \to L$ olsun ve $\varepsilon = 1/2$ alınsın.

$a_n \to L$ old. dan $\exists N\in\mathbb{N}^+$; $\forall n>N$ için $|a_n-L| = |(-1)^n - L|$ $\overset{?}{=} |-1-1| = |3/2| \nless 1/2$ old. dan $a_n \not\to L$ dir.

Ya da $|L-1| < 1/2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < L < 3/2$ ve $\to L\in(1/2, 3/2)$

$|L-(-1)| = |L+1| < 1/2 \Leftrightarrow -3/2 < L < -1/2 \Rightarrow$ ve $L\in(-3/2, -1/2)$

olacağından bu olası değildir. $\Rightarrow (a_n)$ yakınsak değildir.

Not: $a_n \to \infty \Leftrightarrow \forall M>0$ için $\exists N\in\mathbb{N}^+$; $\forall n>N$ için $a_n > M$ dir.

$a_n \to -\infty \Leftrightarrow \forall m<0$ için $\exists N\in\mathbb{N}^+$; $\forall n>N$ için $a_n < m$ dir

9.1.1. Önerme: (a) Her yakınsak dizi sınırlıdır

(b) $a_n \to L$ ise (a_n) nin her (a_{k_n}) alt-dizisi için $a_{k_n} \to L$ dir

Kanıt: (a) $a_n \to L$ olsun. $\varepsilon = 1 > 0$ sayısı için $n>N \Rightarrow$ $|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L-1 < a_n < L+1$ o.ş. bir $N\in\mathbb{N}^+$ vardır. Yani (a_n) dizisinin N den sonraki indisli elemanları $(L-1, L+1)$ aralığı içine düşer. Bu durumda $1\leq n\leq N$ için $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N)$ sonlu bir küme olduğu için sınırlıdır. Böylece de (a_n) dizisi sınırlı olmuş olur.

(b) → Ödev):

9.1.1. Sonuç: (a) Sınırlı olmayan dizi ıraksaktır.
(b) Bir dizinin limitleri, birbirinden farklı iki alt-dizisi varsa, bu dizi ıraksaktır.

9.1.2 Örnek: $a_n = n + \frac{1}{n}$ ise (a_n) sınırlı mıdır?

Dizinin terimleri, $a_1 = 2$, $a_2 = 2 + 1/2 = 2.5$, $a_3 = 3 + \frac{1}{3} = 3.33$, $a_4 = 4 + 1/4 = 4.25$, ..., $a_{100} = 100 + \frac{1}{100}$, ... biçiminde olduğu gözönüne alınırsa; $\forall n$ için $n \leq a_n$ olup, dizinin tanım kümesi olan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ sınırlı olmadığından (a_n) de sınırlı olmayaktır. $\Rightarrow (a_n)$ ıraksaktır da.

6.1.3. Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n) = ?$

$((-1)^n)$ dizisinin
$((-1)^{2n}) = (1, 1, 1, ..., 1) \to 1$
$((-1)^{2n+1}) = (-1, -1, -1, ...,) \to -1$

alt-dizileri farklı limitlere sahip olduğundan ıraksak olur.

6.1.4 Örnek: (a) Aritmetik dizinin, (b) Geometrik dizinin yakınsaklıklarını veya ıraksaklıklarını inceleyiniz.

Çözüm: (a) Aritmetik dizinin genel terimi;

Aritmetik

$a_n = a + n \cdot d$; $(n \in \mathbb{N}$, a, d ler birer sabit$)$ dir.

(i) $d = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ olur.

(ii) $d \neq 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{sgn}(d)\infty$ olup ıraksaktır.

Geom. dizi

b) Geometrik dizi $a_n = a \cdot r^n$, $(n \in \mathbb{N}$, $a, r \neq 0$ sabitler$)$ dir.

(i) $|r| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot r^n) = 0$ dır.

Gerçekten de; $|r| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|r|} > 1$ olduğundan, $h = \frac{1}{|r|} - 1 > 0$ dır. Buradan $|a_n - 0| = |a| \cdot |r|^n$ ve $|r| = \frac{1}{1+h}$ olduğundan

$$|a_n - 0| = |a|.|r|^n = \frac{|a|}{(1+h)^n} \leq \frac{|a|}{1+h.n} < \frac{|a|}{h.n}$$ bulunur.

Şimdi $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $N > \frac{|a|}{h.\varepsilon}$ o.s. bir N doğal sayısı seçilirse ($\mathbb{R}$ nin Arşimed özell. den seçilebilir), $n > N$ için

$$|a_n - 0| < \frac{|a|}{h.n} < \frac{|a|}{h.N} \leq \frac{|a|}{h.\frac{|a|}{h.\varepsilon}} = \varepsilon$$ bulunur ki bu $a_n \to 0$ demektir.

(ii) $|r| \geq 1$ ise (a_n) geom. dizisi ıraksak olur. Çünkü $r \geq 1$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = \operatorname{Sgn}(a).\infty$ ve $r \leq -1$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n$ yoktur.

9.1.2. Önerme: (Dizilerin Cebiri):

$\lim_{n\to\infty}(a_n) = A$, $\lim_{n\to\infty}(b_n) = B$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. $\Rightarrow$

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n = A \mp B$,

2) $\lim_{n\to\infty}(r.a_n) = r.\lim_{n\to\infty} a_n = r.A$,

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = A.B$

4) $B \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1/b_n) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = 1/B$

5) $B \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = A/B$ dır.

9.1.5. Örnek: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3}{2n^2-n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1-3/n^2)}{n^2(2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2})}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-3/n^2}{2-1/n+5/n^2} = \frac{1-3.\lim_{n\to\infty}(1/n^2)}{2-2.\lim_{n\to\infty}(1/n)+5\lim_{n\to\infty} 5/n^2} = \frac{1-0}{2-0+0} = 1/2$$

9.1.3. Önerme: (Sandwich (sıkıştırma) Teoremi)

(a_n), (b_n) ve (c_n) dizileri verilsinler. Eğer bir $N \in \mathbb{N}^+$ için "her $n \geq N \Rightarrow$ için $a_n \leq b_n \leq c_n$" biçiminde ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ oluyorsa $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ olur.

Kanıt: (Fonksiyonların limitleri için verildi) → uygulamasını yapalım.

9.1.2. Sonuç: Eğer bir $N \in \mathbb{N}^+$ için $\forall n > N \Rightarrow |b_n| \leq c_n$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ dır.

9.1.6. Örnekler: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ $\left(-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq 1/n \right.$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ dır.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ $\left(0 \leq \frac{1}{2^n} \leq 1/n, \forall n \right), \left(\forall n, n \leq 2^n \text{ den} \right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right) = 0$ $\left(\forall n, -\frac{1}{n} \leq (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \leq 1/n \text{ den} \right)$

9.1.4. Önerme (Diziler için Sürekli Fonks. Teo.)
$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ bir dizi ve $a_n \to L$ olsun. Eğer bir f fonksiyonu L de sürekli ise $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$ dir.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ verilsin.
(i) f, L de sürekli old. dan $\exists \delta > 0$; $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(L)| < \varepsilon$
(ii) $a_n \to L$ old. dan, $\exists N \in \mathbb{N}^+$; $\forall n > N$ için $|a_n - L| < \delta$ dır.
O halde bu $N \in \mathbb{N}^+$ için $n > N \Rightarrow$

$$|a_n - L| < \delta \overset{(i)}{\Longrightarrow} |f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$$

bulunur ki bu $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$ demektir.

9.1.7. Örnekler: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{1/n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(1/2^n)$

d) $a_n \to 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(a_n) = ?$

Çözümler: a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonk. tüm $\mathbb{R}$ de sürekli ve dolayısıyla $\frac{1}{n} \to 0$ nokt. dan sürekli $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{1/n} = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n} = \sqrt{0} = 0$ dır.

b) $f(x) = 2^x$ tüm $\mathbb{R}$ de sürekli $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n} = 2^0 = 1$.

c) $f(x) = \cos x$, tüm $\mathbb{R}$ de sürekli $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{1}{2^{\lim_{n\to\infty} \infty}}\right) = \cos 0 = 1.$$

c) Ödev.

9.1.5. Önerme (Diziler için L'Hospital)

Bir $y=f(x)$ fonk. $x\geq N$ biçimindeki tüm noktalarda tanımlı ve $a_n=f(n)$ ($\forall n\geq N$ için) biçiminde olan bir dizi olsun.

O zaman; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ olur.

Kanıt $\longrightarrow$ ödev.

9.1.8 Örnekler: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\pi/2-\tan^{-1}n\right)=?$

Çözümler: (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot 1/\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+1/x}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/\sqrt{x}}{\sqrt{1+1/x}+1}=\frac{0}{1+1}=0.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$ olur.

b) $f(x)=x.\left(\frac{\pi}{2}-\text{arctan}x\right)$ almak üzere $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty.0$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\text{arctan}x}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hosp.}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n.\left(\pi/2-\text{arctan}\right)=1$ bulunur.

II. yol: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x.\underbrace{\left(\pi/2-\tan^{-1}x\right)}_{=\cot^{-1}x}=\lim\limits_{x\to\infty} x.\cot^{-1}x$ ($x=\cot y$ alarak)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to0^+}\cot y.\left(\cot^{-1}(\cot y)\right)=\lim_{y\to0^+} y.\cot y=\lim_{y\to0^+}\frac{y}{\tan y}=1.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to\infty} n.\left(\pi/2-\text{arctan}x\right)=1$ bulunur.

9.1.9 Örnekler

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\text{L.H.}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0 \text{ dır}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n/5n=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{5x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{L.H.}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x.\ln 2}{5}=\infty\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n=e^2$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=1^\infty \to y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x \Rightarrow \ln y=x.\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right.$ - - - -

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=1$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}=\infty^0 \to y=x^{1/x} \Rightarrow \ln y=\dfrac{1}{x}\ln x\right.$ - - -

5) $x>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n}=1$ . .

6) $|x|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ (Geometrik Dizi)

7) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ $\left(f(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \Leftrightarrow \ln y = x.\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \to \dots \right.$

8) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \; (\forall x\in\mathbb{R})$ (serilerde genel Terim Testi, $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ serisi yakınsak $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ dır)

9) $\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0$ dır göst.

$\forall n$ için $-\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!}$ dır. Buradan eğer

$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ olduğu gösterilirse $\xRightarrow{\text{S.Teor}} \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ bulunur.

O zaman $\frac{|x^n|}{n!} \to 0$ olduğunu göstermek için; $\exists M \in \mathbb{R}^+$;

$|x| < M$ dır $\Rightarrow \frac{|x|}{M} < 1$ bulunur $\Rightarrow \left(\frac{|x|}{M}\right)^n \xrightarrow{(6)} 0$ dır.

Şimdi de $n > M$ durumunun gözönüne alalım ve burada;

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1.2.3.\dots M.(M+1).(M+2)\dots n} \leq \frac{|x|^n}{M!\,M^{n-M}} = \frac{|x|^n.M^M}{M!\,M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

dır. Burada, $0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n \xrightarrow[\text{olan}]{\left(\frac{|x|}{M}\right)^n \to 0} 0$ bulunur ki bura istenen elde edilir.

<u>Tanımlar:</u> (a_n) bir dizi olsun.

1) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n \leq M$ o.ş. bir $M\in\mathbb{R}^+$ varsa, (a_n) ye üstten sınırlı dizi ve M'ye (a_n)'in üst-sınırı denir.

2) Eğer M, (a_n)'in bir üst-sınırı ve (a_n)'in M den küçük başka üst sınırları yoksa M'ye (a_n)'in e.k.ü.s.ı denir ve

e.k.ü.s.$(a_n) = M = \sup(a_n)$ ile gösterilir.

$M = \sup(a_n)$ dır $\Leftrightarrow$ (i) M, (a_n) bir üst-sınırıdır
(ii) $\forall K$ için $a_n \leq K \Rightarrow M \leq K$ dır.

Benzer şekilde $\inf(a_n)$ de tanımlanabilir.

3) (i) $\forall n$ için $a_n \leq a_{n+1} \xRightarrow{a_{n+1}-a_n \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}} (a_n)$'ye azalmayan (artan),

(ii) $\forall n$ için $a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow (a_n)$'ye artmayan (azalan) denir.

<u>Örneğin:</u> 1) $(a_n)_1 = (n)_1 \to$ azalmayan, üstten sınırlı değil.

2) $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_1$; $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)/(n+2)} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$

$\Leftrightarrow a_n \le a_{n+1} \Rightarrow$

3) $(a_n) = (3)_1$ sabit dizi azalmayan dır.

artmayan ve azalmayan dır.

4) $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)_1 \Rightarrow \sup a_n = 1$ dir.

Yinelemeli Diziler: (Genel Terimi belli olmayan diziler)

1) $a_1 = 1$ ve $a_n = a_{n-1} + 1$ $(\forall n \geq 2) \Rightarrow a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$

$\ldots \Rightarrow a_n = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \underset{=n}{a_n}, n+1, \ldots) \Rightarrow a_n = n$

2) $a_1 = 1$, $a_n = n \cdot a_{n-1}$ $(\forall n \geq 2) \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1$, $a_3 = 3 a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

$\ldots$ $a_n = n \cdot (n-1) (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ dür.

3) $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \left[\frac{(\sin x_n - x_n^2)}{\cos x_n - 2x_n}\right]$

Temel ile Teorem:

9.1.6 Önerme: 1) Bir (a_n) dizisi azalmayan ve üstten sınırlıysa, bu dizi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)$ dır.

2) Bir (a_n) dizisi artmayan ve alttan sınırlı ise bu dizi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(a_n)$ dır.

Kanıt: 1) $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots$ azalmayan dizisi üstten sınırlı ise $a = \text{e.k.ü.s}(a_n) = \sup(a_n)$ vardır. (Boştan farklı ve üstten sınırlı her kümenin sup'u vardır). Bu durumda; $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ olur. Çünkü, $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $a - \varepsilon$ sayısı $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin bir üst sınırı olmaz $\Rightarrow$

$a - \varepsilon < a_N$ o.ş. bir $N \in \mathbb{N}$ var olur $\Rightarrow \forall n \geq N$ için

$a - \varepsilon < a_N \le a_n \le a < a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ bulunur, ki bu $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup(a_n)$ demektir.

2) Benzer şekilde kanıtlanabilir.

9.1.10 Örnek: $(a_n) = \frac{2n-1}{n+1} \Rightarrow (a_n)$, dizisinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm: $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$; $f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$

f artandır $\Rightarrow f(n) = a_n$ de artandır,

Ya da, $a_n \le a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+1} \le \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2} \Leftrightarrow$
$2n^2+3n-2 \le 2n^2+3n+1 \Leftrightarrow -2 \le 1$ ✓ $\Rightarrow (a_n)$ azalmayandır.
$a_n = \frac{2n-1}{n+1} \le \frac{2n}{n} = 2 \Rightarrow \forall n$ için $a_n \le 2$ üstten sınırlı

$\underset{\Longrightarrow}{\text{9.1.6 Önerme (1)}}$ (a_n) yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$ dir.

9.1.11. Örnekler: 1) $a_0 = \sqrt{3}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ biçiminde, yinelemeli tanımlanan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz, ve limitini bulunuz.

i) (a_n) üstten sınırlıdır: $\forall n$ için $a_n \le 3$ dür (?)

Tümevarımla: $n=0$ için $a_0 = \sqrt{3} \le 3$ dür

$n=k$ için $a_k \le 3$ olsun. - - - ⊛

$n=k+1$ için $a_{k+1} = \sqrt{3+a_k} \overset{⊛}{\le} \sqrt{3+3} = \sqrt{6} \le 3$

$\Rightarrow \forall n$ için $a_n \le 3$ bulunur.

(ii) (a_n) azalmayandır: $\forall n$ için $a_n \le a_{n+1}$ (?) Tümevarımla:

$n=0$ için $a_0 = \sqrt{3} \le \sqrt{3+\sqrt{3}} = a_1$ dir.

$n=k$ için $a_k \le a_{k+1}$ olsun.

$n=k+1$ için: $a_{k+1} = \sqrt{3+a_k} \le \sqrt{3+a_{k+1}} = a_{k+2}$ olur.

$\therefore \forall n$ için $a_n \le a_{n+1}$ dir.

Böylece 9.1.6. Önermeden, (a_n) yakınsaktır. Limitini bulmak için; yakınsaklığından, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise (a_n)'in (a_{n+1}) alt-dizisi için de $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ bulunur. $\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{3+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{3+a} \Rightarrow a = \sqrt{3+a} \Rightarrow a^2 - a - 3 = 0$

$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2}$; $a_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0$, $a_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ bulunur.

2) $(a_n)_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} 1/k!\right)_0$ dizisi yakınsak mıdır?

Çözüm: Dizinin genel terimi; $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ dir.

(i) (a_n) monoton artan (azalmayandır):

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 1/k! = \sum_{k=0}^{n} 1/k! + \frac{1}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^{n} 1/k! = a_n \text{ dır.}$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için (a_n) üstten sınırlı ve $\forall n$, $a_n \leq 3$ dür.

Çünkü; $\forall n \in \mathbb{Z}_2$ için $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}$ ($\forall 2 < n$ için $2^{n-1} < n!$ olduğundan; gösteriniz lütfen)

$\Rightarrow a_n \leq 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - 1/2} \leq 1 + \frac{1}{1/2} = 3$ olur; yani $a_n \leq 3$ dür. (Burada $a_0 = 1 < 3$, $a_1 = 2 < 3$, $a_2 = 2.5 < 3$ dür.)

$\Rightarrow (a_n)$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan, yakınsak olur.

<u>9.1.3. Sonuç</u>: (Karşılaştırma Testi):

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \leq b_{n+1}$ ve $a_n \leq b_n$ o.ş. $(a_n), (b_n)$ dizileri var ve (b_n) yakınsak $\Rightarrow (a_n)$ yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ dir.

<u>Kanıt</u>: (b_n) azalmayan ve (b_n) yakınsak $\Rightarrow (b_n)$ üstten sınırlı $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \sup\{b_n\}$ olur. $\Rightarrow (a_n)$ de azalmayan ve üstten sınırlı olur (çünkü $a_n \leq b_n$ ve (b_n) sınırlı idi) $\Rightarrow (a_n)$ de yakınsak olur. Üstelik $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ olur. (?)

<u>Not</u>: "$\forall n$ için $a_{n+1} \leq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$ ve $a_n \leq b_n$ olmak üzere; (a_n) yakınsak $\Rightarrow (b_n)$ yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ dir.

<u>9.9.12. Örnek</u>; $\left(\frac{1}{3^n - n}\right)_0$ dizisi yakınsak mıdır?

<u>Çözüm</u>: $a_n = \frac{1}{3^n}$, $b_n = \frac{1}{3^n - n} \Rightarrow$ $\forall n$ için $a_n \leq b_n$ ve $a_{n+1} \leq a_n$ olduğu açıktır.

$b_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1} - (n+1)} = \frac{1}{3^{n+1} - n - 1} \overset{?}{\leq} \frac{1}{3^n - n} = b_n$ <u>$b_{n+1} \leq b_n$</u> olduğunu göstermek için;

$\Leftrightarrow 3^n - n \leq 3^{n+1} - n - 1 \Leftrightarrow 1 \leq 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3-1) = 3^n.2$ yani $1 \leq 2.3^n$ dir ✓.

Böylece $b_{n+1} \leq b_n$ ve de $(a_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right) \to 0$ olduğundan (b_n) de yakınsak olur.