HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

UYGULAMA II-Çözümler
(Özel Kesikli Dağılımlar)

1) 3 kırmızı ve 2 siyah bilye bulunun bir kutudan rasgele seçilen bir bilye kırmızı gelmesi X raslantı değişkeninin göstermek üzere;

$X \sim Bernoulli(p = 3/5) \qquad q = 1 - p = 1 - 3/5 = 2/5$

$$p(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x} \quad , \quad x = 0,1$$
$$= 0 \quad , \quad \text{ö}.d.$$

P(X=1)=$\frac{3}{5}$'tir. x=1 değerini alması olasılığı seçilen bilyenin Kırmızı olması olasılığına karşılık gelir.

2) Homojen bir zar 50 defa atılmaktadır. X raslantı değişkeni, 1 ya da 5 sayılarının üst yüze gelme sayısını göstersin.

$A = \{Zarın\ üst\ yüze\ 1\ ya\ da\ 5\ gelmesi\}$ olayı olarak tanımlanırsa, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ olur.

Zarın 50 kez atılması deneyinde, A olayının gelme sayılarının dağılımı Binom dağılımı olur:

$X \sim Binom(n = 50, p = \frac{1}{3}) \quad q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ olur.

$$p(x) = \binom{50}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{50-x} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots,50$$
$$= 0 \quad , \quad \text{ö}.d.$$

$Y = \frac{5X}{3} + 250$'nin moment çıkaran fonksiyonunu bulmak için X'in moment çıkaran fonksiyonunu bulalım:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{50} e^{tx} p(x) = \sum_{x=0}^{50} e^{tx}\binom{50}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{50-x} = \sum_{x=0}^{50}\binom{50}{x}\left(\frac{e^t}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{50-x}$$
$$= \left(\frac{e^t}{3} + \frac{2}{3}\right)^{50}$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t\left[\frac{5X}{3}+250\right]}\right) = e^{250t}E\left(e^{\frac{5t}{3}X}\right) = e^{250t}M_X\left(\frac{5t}{3}\right) = e^{250t}\left(\frac{e^{\frac{5t}{3}}}{3} + \frac{2}{3}\right)^{50}$$

3) X raslantı değişkeni 5' i bozuk olan 20 ampulün bulunduğu kutudan *çekileni yerine koyma* koşulu altında rasgele seçilen 4 ampul içindeki bozuk ampullerin sayısını göstermek üzere;

$X \sim Binom(n = 4, p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}) \qquad q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ olur.

$$p(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4$$
$$= 0 \quad , \quad \text{ö}.d.$$

a) $P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

b) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$

c) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\sum_{x=0}^{2}\binom{4}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}=0.81$

d) Seçilen 4 ampul içinde, $E(X)=np=4\times\frac{1}{4}=1$ ampulün kusurlu olması beklenir

4) X raslantı değişkeni borsada değer kaybeden hisse senetlerinin sayısını göstermek üzere;

$X\sim Binom(n=15, p=0.80)$

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{15}{x}(0.80)^{x}(0.20)^{15-x} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,15 \\ &= 0 \quad , \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

a) Portföyde $E(X)=np=15\times 0.80=12$ tane hisse senedinin değer kaybetmesini bekleriz.

b) $P(X=15)=\binom{15}{15}(0.80)^{15}(0.20)^{0}=(0.80)^{15}=0.03518$

c) 2 ya da daha az hisse senedinin değer kazanması olasılığını bulmak için, Y raslantı değişkeni borsada değer kazanan hisse senedi sayısını göstersin.

$Y\sim Binom(n=15, p=0.20)$

$$\begin{aligned} p(y) &= \binom{15}{y}(0.20)^{y}(0.80)^{15-y} \quad , \quad y=0,1,2,\dots,15 \\ &= 0 \quad , \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

Buna göre, $P(Y\leq 2)=\sum_{y=0}^{2}\binom{15}{y}(0.20)^{y}(0.80)^{15-y}=0.3980$ olur.

2.yol:
2 ya da daha az hisse senedinin değer kazanması, 13 ve daha fazla hisse senedinin değer kaybetmesi demektir. Buna göre,

$P(Y\leq 2)=P(X\geq 13)=\sum_{x=13}^{15}\binom{15}{x}(0.80)^{x}(0.20)^{15-x}=0.3980$ olur.

5) A ve B iki satranç oyuncusu 10 kez oyun oynuyorlar ve her bir oyun birbirinden bağımsızdır. A oyuncusunun kazanması olasılığı 0.30' dur.

X raslantı değişkeni 10 oyunda A oyuncusunun kazandığı oyun sayısını göstermek üzere,

$X\sim Binom(n=10, p=0.30)$

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{10}{x}(0.30)^{x}(0.70)^{10-x} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,10 \\ &= 0 \quad , \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

a) A oyuncusunun B oyuncusundan daha fazla kazanması olasılığını, A oyuncusunun en az 6 oyun kazanması demektir:

$$P(X \geq 6) = \sum_{x=6}^{10} \binom{10}{x} (0.30)^x (0.70)^{10-x} = 0.0473$$

b) A oyuncusunun kazanması beklenen oyun sayısı $E(X) = np = 10 \times 0.30 = 3$ oyundur.

c) A oyuncusunun hiç oyun kazanmaması olasılığı:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0.30)^0 (0.70)^{10} = (0.70)^{10} = 0.028$$

6) 200 homojen bilye 100 farklı kutuya rasgele dağıtılmaktadır.

a) X: 200 homojen bilyeden ilk 50 kutuda bulunanların sayısı

Herhangi bir bilyenin ilk 50 kutuda bulunması olasılığı, $p = (50/100) = 0.5$' tir.
$X \sim Binom(n = 200, p = 0.5)$

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{200}{x} (0.50)^x (0.50)^{200-x} \quad , \quad x = 0,1,2,\dots,200 \\ &= 0 \quad , \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

İlk 50 kutuda tam 27 tane bilye olması olasılığı:

$$P(X = 27) = \binom{200}{27} (0.50)^{27} (0.50)^{200-27} = 1.22 \times 10^{-27}$$

b) X: 200 homojen bilyeden tek numaralı kutularda bulunanların sayısı

100 kutunun 50 tanesi tek numaralıdır. Bu durumda, herhangi bir bilyenin tek numaralı kutuda bulunması olasılığı, $p = (50/100) = 0.5$' tir.

$X \sim Binom(n = 200, p = 0.5)$

Bilyelerden $E(X) = np = 200 \times 0.5 = 100$ tanesinin tek numaralı kutularda olması beklenir.

7) X raslantı değişkeni rasgele işaretlediği 20 sorudaki doğru cevap sayısı olmak üzere;

$X \sim Binom(n = 20, p = 1/4)$

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{20}{x} (0.25)^x (0.75)^{20-x} \quad , \quad x = 0,1,2,\dots,20 \\ &= 0 \quad , \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

15 puan alabilmesi için bildiği ilk 10 sorudan 10 puan alır ve en az 5 puanı rasgele işaretlediği 20 sorudan alması gerekir:

$$P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{20} \binom{20}{x} (0.25)^x (0.75)^{20-x} = 0.5852$$