(1)

11. BÖLÜM ÖZETİ

11.1 → Bir (a_n) dizisinin yakınsaklığı veya ıraksaklığı

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(i) } \lim_{n\to\infty} a_n \text{ var ve sonlu} \\ \text{(ii) Sandwich Teoremi} \\ \text{(iii) } (a_n) \text{ dizisi azalmayan ve üstten sınırlı veya artmayan ve alttan sınırlıdır} \end{array}\right\}$$

koşullarından biriyle saptanabilir. Ayrıca da karşılaştırma testi de denilen (Bir $M\in\mathbb{N}^+$ ve her $n\geq M$ için $0\leq a_n\leq b_n$ olmak üzere ve (b_n) dizisi yakınsak ise (a_n) de yakınsaktır veya (a_n) ıraksaksa (b_n) de ıraksaktır) önermesi de kullanılabilir.

11.2 SERİLER Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$ serisi için $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+\dots+a_n$ olmak üzere (S_n) dizisine serinin n. kısmi toplamlar dizisi denir. Bir serinin yakınsaklık veya ıraksaklık tanımı olarak

(S_n) dizisi yakınsaktır (ıraksaktır) $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır (ıraksaktır)

ifadesi kullanılmaktadır.

Ayrıca bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaklık veya ıraksaklığını belirleyebilmek bazı testler kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda özetlenmiştir:

1) Geometrik seri ve testi: $\sum_{n=0}^{\infty} a.r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ ($a\in\mathbb{R}$ sabit, $r\in\mathbb{R}$ değişken) biçiminde olan bir seriye geometrik seri denir ve bu şekildeki bir seri $|r|<1$ için yakınsak, $|r|\geq 1$ için ıraksaktır. Yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} a.r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} \text{ serisi} = \begin{cases} \text{yakınsak}, \to \dfrac{a}{1-r} & \text{dir, eğer } |r|<1 \\ \text{seri ıraksaktır}, & \text{eğer } |r|\geq 1 \text{ dir.} \end{cases}$$

2) Genel Terim Testi: Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır veya denk olarak $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır. [Uyarı Bir serinin genel terimi olan a_n in limiti $(\lim_{n\to\infty} a_n)=0$ ise seri yakınsak da olabilir, ıraksak da olabilir, Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Harmonik serisi ıraksak ancak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ dır.]

3) Pozitif terimli (Her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n\geq 0$) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerini yakınsaklığı: "Bir pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır $\Longleftrightarrow$ (S_n) kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlıdır." Bu tür seriler (pozitif terimli seriler) in yakınsaklık veya ıraksaklığı için:

a) İntegral Testi: Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(n)=a_n$ fonksiyonu olmak üzere, bu fonksiyon her $x\in[1,\infty)$ için (i) $f(x)\geq 0$, (ii) $f(x)$ sürekli (iii) $f(x)$ artmayan (azalan) koşullarını sağlamak üzere

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ has olmayan integrali yakınsak (ıraksak) tır $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak (ıraksak) tır.

b) p-Testi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \text{ serisi} = \begin{cases} \text{yakınsak}, & p>1 \text{ için} \\ \text{ıraksaktır}, & p\leq 1 \text{ için} \end{cases}$$

(Burada $p\in\mathbb{R}^+$ dir)

c) Karşılaştırma Testi: Bir $M\in\mathbb{N}^+$ ve her $n\geq M$ için $0\leq a_n\leq b_n$ olmak üzere

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksak $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksaktır.

d) Limit Karşılaştırma Testi Bir $M \in \mathbb{N}^+$ ve her $n \geq M$ için $a_n > 0$, $b_n > 0$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ olsun. Buna göre

(i) $A \in (0,\infty)$ ise, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak (ıraksak) tır $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak (ıraksak) tır.

(ii) $A = 0$ ise, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır

(veya $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksaktır)

(iii) $A = \infty$ ise, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsaktır (veya $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksak $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır).

e) Oran (Bölüm) Testi: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $a_n \geq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ olsun. Bu durumda

(i) $A < 1 \Rightarrow$ seri yakınsaktır

(ii) $A > 1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

(iii) $A = 1$ ise bu test sonuç vermez.

f) Kök Testi ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0$ olmak üzere) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = B$ olsun. Bu durumda

(i) $B < 1 \Rightarrow$ seri yakınsak

(ii) $B > 1 \Rightarrow$ seri ıraksak

(iii) $B = 1 \Rightarrow$ ~~bu~~ test sonuç vermez.

Not: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0$ olan bir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \text{ dır.}$$ (Kök testi daha geneldir)

4) Negatif Terimli olabilen serilerin Yakınsaklığı için

a) Alternatif Seriler ve testi: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ biçiminde tanımlı serilere *alternatif seriler* denir. **Testi:** Bir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ alternatif serisi için

(i) $\forall n$ için $a_n \geq 0$, (ii) Bir $M \in \mathbb{N}^+$ ve her $n \geq M$ için $a_{n+1} \leq a_n$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

koşulları sağlanıyorsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ alternatif serisi yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

b) Mutlak Yakınsaklık: Bir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine *mutlak yakınsaktır* denir.

Testi: Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır, Ancak yakınsak olan her seri mutlak yakınsak olmak zorunda değildir. Bu şekildeki (yakınsak ancak mutlak yakınsak olmayan) serilere *koşullu (şartlı) yakınsak seriler* denir.

Bir örnek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ koşullu yakınsak bir seridir.

c) Alternatif P-Serisi: p bir pozitif sabit, $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ dizisi artmayan ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ koşullarını sağlıyorsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ serisi $p > 0$ için yakınsaktır,

Hatta (i) $p > 1$ için seri mutlak yakınsaktır

(ii) $0 < p \leq 1$ için seri koşullu yakınsaktır.

(2) 11.7 KUVVET SERİLERİ: (Bu bölümde ve sonrasında,
1) Bir kuvvet serisinin yakınsadığı fonksiyonu bulma (yakınsaklık kümesinde)
2) Bir fonksiyonu hangi durumda bir kuvvet serisi ile ifade edebiliriz
sorularını yanıtlamaya çalışacağız.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2+\dots+c_n(x-x_0)^n+\dots$$

ifadesine bir kuvvet serisi denir. Eğer $x_0=0$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots$ biçiminde olur. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$ geometrik (kuvvet) serisini gözönüne alalım. Bu geometrik serinin $|x|<1$ için yakınsak olduğunu ve bu durumda $\frac{1}{1-x}=f(x)$ fonksiyonuna yakınsadığını biliyoruz. O halde

$$\boxed{|x|<1 \text{ için } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ dir.}}$$

örnek: $1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2+\dots+(-\frac{1}{2})^n(x-2)^n+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n(x-2)^n$ $\left(|-\tfrac{1}{2}(x-2)|<1 \Leftrightarrow 0<x<4 \text{ için}\right)$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{(x-2)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-2)^n \quad 0<x<4 \text{ dür.}$$

Bir kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-x_0)^n$ nin yakınsaklık veya (ıraksaklık) aralığını belirlemek için Oran veya Kök testleri kullanılır, (Geometrik seriye ek olarak). Yani bir $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-x_0)^n$ kuvvet serisi $|x-x_0|=R$ sayısı için

(i) $|x-x_0|<R$ olan x lerde seri mutlak yakınsak

(ii) $|x-x_0|>R$ olan x lerde ıraksak

(iii) $|x-x_0|=R$ için $\begin{cases} x-x_0=R \\ x-x_0=-R \end{cases}$ olan noktalarda seride yerine konularak ayrıca incelenir.

Buradaki R sayısına yakınsaklık yarıçapı, $I=\{x \mid |x-x_0|<R\}$ aralığına da yakınsaklık aralığı denir.

örnek ① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \to R=1,\ I=(-1,+1) \neq$ Yak. kümesi $Y=(-1,1]$, her $|x|>1$ ve $x=-1$ için ıraksak

② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $R=1$, $I=(-1,+1)$, $Y=[-1,+1]$, Her $|x|>1$ için ıraksak

③ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $R=\infty$, $I=(-\infty,\infty)$ yak. lık aralığı, ④ $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n \to R=0$, $I=\{0\}$, $\forall x\neq 0$ için ıraksaktır)

Kuvvet serilerinin terim-terime $\begin{cases} \text{türevi} \\ \text{integrali} \end{cases}$

(i) Türevi: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ k. serisi $x_0-R<x<x_0+R$ biçimindeki x ler için yakınsak ise bu yakınsaklık aralığında tanımlı bir $y=f(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Yani yakınsaklık aralığı $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $(|x-x_0|<R)$ dir. Böyle bir $f(x)$ fonksiyonu $|x-x_0|<R$ için I daki her x için her mertebeden türevlenebilirdir, yani

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n(x-x_0)^{n-1},\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot c_n\cdot(x-x_0)^{n-2},\ \dots \text{ dir.}$$

(Burada elde edilen türev serilerinin yakınsaklık aralığı da I dır).

(ii) İntegrali: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ k. serisi $|x-x_0|<R$ biçimindeki x ler için yakınsak ise bu yakınsaklık aralığında tanımlı bir $y=f(x)$ fonksiyonuna yakınsar, Yani yakınsaklık $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $(|x-x_0|<R)$ dir. Böyle bir $f(x)$ fonksiyonu $|x-x_0|<R$ aralığı I içindeki her x için ardışık olarak integrallenebilirdir, yani

$$F(x)=\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+C \Rightarrow G(x)=\int F(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot\frac{(x-x_0)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+Cx+C_0$$

(Buradaki integral serilerinin de yakınsaklık aralıkları yine I dır). $-1<x\leq 1$ dir.

Örnek: $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, (|x|<1) \Rightarrow \ln|1+x| = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^x = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots\Big|_0^x$ $= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}\dots$

11.8 TAYLOR ve MACLAURIN SERİLERİ

$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ($y=f(x)$ a noktasında her mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere)

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu bir a noktasını bulunduran bir I açık aralığının her noktasında her mertebeden türevlenebilir ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\dots$$

biçimindeki kuvvet serisine $x=a$ noktasında f ile üretilen Taylor serisi, $a=0$ ise

ve $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\dots$$

serisine de Maclaurin serisi denir (f ile üretilen).

Örnek $f(x)=\frac{1}{x}$ in $x=2$ deki Taylor serisi $\to \frac{1}{x}$

1. yol $= \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$, $0<x<4$, $x\in(0,4)$

2. yol: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \dots$

Bir $y=f(x)$ in n. dereceden Taylor polinomu: Bir a noktasını iç-nokta olarak bulunduran bir I aralığının her noktasında $y=f(x)$ fonksiyonu $k=1,2,\dots,n$ mertebeden türevlenebilir ise

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ye f ile a noktasında üretilen n. dereceden polinom fonks. denir.

Örnek $y=f(x)=e^x$ in $x=0$ da n. dereceden polinomu $\to P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ dir.

11.9 TAYLOR SERİLERİNİN YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde (1) Bir Taylor serisi ne zaman üreteci olduğu fonksiyona yakınsar? 2) Bir fonksiyona karşılık gelen Taylor polinomu (yakınsaklık aralığı içerisinde) üreteci olduğu fonksiyonu nasıl yaklaşır?) Sorularını yanıtlayacağız.

1) TAYLOR TEOREMİ: Bir $y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında n-türevlere; $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$; sahip ve burada sürekli ve de $f^{(n)}(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir ise

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

Eğer $y=f(x)$ fonksiyonu a noktasını bulunduran bir I aralığında her mertebeden türevlere sahipse her $n\in\mathbb{N}^+$ ve $x\in I$ için

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

$\left(R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a),\ c\in(a,x)\right)$ eşitliğine $y=f(x)$ in Taylor formülü denir.

Buradan $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ olur. Burada eğer, her $x\in I$ için $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ olursa f ile üretilen Taylor formülü ($x=a$ nokt. dahi), I aralığında f fonksiyonuna yakınsar ve

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$ biçiminde yazılır.

Örnek $y=f(x)=e^x$, $x_0=0$ iken $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$ idir $\Rightarrow e^x=P_n(x)+R_n(x)$ olmak üzere $R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, $c\in(0,x)$ dir. ve $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}=0$ old. dan (?)

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ dir.