UYGULAMA VII-Çözümler
(Özel Sürekli Dağılımlar)

1) X sürekli raslantı değişkeni [-α, α] (α>0) aralığında tek biçimli (uniform) dağılıma sahiptir. Buna göre,

$$P(|X| \leq 1) = P(|X| > 1)$$

eşitliğini sağlayan α değerini bulunuz.

$$f(x) = \frac{1}{2\alpha}, \quad -\alpha \leq x \leq \alpha$$
$$= 0, \quad \text{ö.}d.$$

$$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\alpha} dx = \left.\frac{x}{2\alpha}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{\alpha}$$

$$P(|X| > 1) = P(X < -1) + P(X > 1) = \int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{2\alpha} dx + \int_{1}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha} dx = \left.\frac{x}{2\alpha}\right|_{-\alpha}^{-1} + \left.\frac{x}{2\alpha}\right|_{1}^{\alpha}$$
$$= \frac{-1-(-\alpha)}{2\alpha} + \frac{\alpha-1}{2\alpha} = \frac{2\alpha-2}{2\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha(\alpha-2) = 0 \qquad \alpha = 0 \quad ya\ da\ \ \alpha = 2 \qquad$ α>0 olduğundan $\alpha = 2$ olur.

2) Bir bilgisayar merkezinde bulunan bir süper bilgisayarın devre kartının arızalanması, yeni bir kart teslim edilene kadar yapılacak işleri kesintiye uğratmaktadır. Yeni bir devre kartı, bir ile on gün arasında (en erken bir gün en geç onuncu günde) rasgele bir zamanda merkeze teslim edilmektedir. Teslim süresi, Y raslantı değişkeni ile gösterilsin. Devre kartının maliyeti, 500 TL'dir. Arızadan dolayı işlerdeki aksamanın maliyeti ise, Y^2 ile doğru orantılı olarak artmaktadır. Toplam oluşan maliyet ise, C=500+50Y^2 TL olmaktadır.

$Y \sim Tek\ Biçimli\ (1, 10)$

$$f(y) = \frac{1}{9}, \quad 1 \leq y \leq 10$$
$$= 0, \quad \text{ö.}d.$$

a) Devre kartının 2 gün içinde teslim edilmesi olasılığı nedir?

$$P(Y \leq 2) = \int_1^2 \left(\frac{1}{9}\right) dy = \left.\frac{y}{9}\right|_1^2 = \frac{1}{9} = 0.11$$

b) Teslim süresinin 6 günü aşması olasılığı nedir?

$$P(Y > 6) = \int_6^{10} \left(\frac{1}{9}\right) dy = \left.\frac{y}{9}\right|_6^{10} = \frac{4}{9} = 0.44$$

c) Ortalama kaç gün içerisinde yeni bir devre kartı merkeze teslim edilmektedir?

$$E(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2} = 5.5 \cong 6$$

d) Devre kartının arızalanması sonucu oluşan beklenen maliyeti bulunuz.

$$E(C) = E(500 + 50Y^2) = 500 + 50E(Y^2) = 500 + 50 \times 37 = 2350TL$$
$$E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2 = \frac{81}{12} + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{81}{12} + \frac{121}{4} = \frac{444}{12} = 37$$
$$V(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-1)^2}{12} = \frac{81}{12}$$

3) Bir çağrı merkezi, gece yarısı 00:00'dan başlayarak bir saatliğine aktif ve daha sonra iki saatliğine kapalı konumda oluyor. Bu işleyiş düzenli bir döngüde devam etmektedir. Uygulanan program hakkında bilgisi olmayan bir kişi, 03:00-08:00 arasında rasgele bir zamanda çağrı merkezini aramaktadır. Kişi aradığında, çağrı merkezinin aktif olması olasılığı nedir?

$X \sim Tek\ Biçimli\ (3, 8)$

$$f(x) = \frac{1}{5}, \quad 3 \leq x \leq 8$$
$$= 0, \quad ö.d.$$

X: kişinin çağrı merkezini araması için geçen süre

0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8
Aktif	Kapalı	Kapalı	Aktif	Kapalı	Kapalı	Aktif	Kapalı

$$P(3 \leq X \leq 4) + P(6 \leq X \leq 7) = \int_3^4 \frac{1}{5} dx + \int_6^7 \frac{1}{5} dx = \frac{x}{5}\Big|_3^4 + \frac{x}{5}\Big|_6^7 = \frac{2}{5}$$

4) Bir karayolu yapımı çalışmasında, hazır beton taşıyan kamyonların kalkış noktalarından şantiyeye varış süresi 50 dakika ile 70 dakika arasında rasgele bir zamanda olmaktadır.

$X \sim Tek\ Biçimli\ (50, 70)$

$$f(x) = \frac{1}{20}, \quad 50 \leq x \leq 70$$
$$= 0, \quad ö.d.$$

a) Varış süresinin 55 dakikayı aştığı biliniyorsa, kamyonların 65 dakikadan sonra şantiyeye varması olasılığı nedir?

$$P(X > 65 | X > 55) = \frac{P(X > 65)}{P(X > 55)} = \frac{\int_{65}^{70} \frac{1}{20} dx}{\int_{55}^{70} \frac{1}{20} dx} = \frac{\frac{x}{20}\Big|_{65}^{70}}{\frac{x}{20}\Big|_{55}^{70}} = \frac{70 - 65}{70 - 55} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

b) Kamyonların şantiyeye varış sürelerinin ortalama ve varyansını bulunuz.

$E(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{50+70}{2} = \frac{120}{2} = 60$ dakika

$V(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(70-50)^2}{12} = \frac{400}{12} = \frac{100}{3} = 33.333$ dakika^2

5) Bir transistorun yaşam süresi, ortalama 100 çalışma saati ile üstel dağılıma sahiptir.

$X \sim Üstel(\lambda = 100)$

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}, \quad x > 0$$
$$= 0, \quad ö.d.$$

a) Transistorun yaşam fonksiyonunu bulunuz.

$$\underbrace{P(X > x)}_{Yaşam\ fonk.} = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{t}{100}}\, dt$$
$$= \frac{1}{100}\left(\frac{e^{-\frac{t}{100}}}{-\frac{1}{100}}\Bigg|_x^{+\infty}\right) = -e^{-\frac{t}{100}}\Big|_x^{+\infty}$$
$$= -\left(e^{-\infty} - e^{-\frac{x}{100}}\right) = e^{-\frac{x}{100}}$$

$$
\begin{aligned}
P(X > x) &= e^{-\frac{x}{100}} \quad , \quad x \geq 0 \\
&= 0 \quad , \quad x \to +\infty \\
&= 1 \quad , \quad x < 0
\end{aligned}
$$

b) Transistorun en az 50 saat çalışması olasılığını bulunuz.

1. yol dağılım fonksiyonundan

$$P(X \geq 50) = 1 - P(X < 50) = 1 - F(50) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{50}{100}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = 0.6065$$

2. yol yaşam fonksiyonundan

$$P(X \geq 50) = P(X > 50) = e^{-\frac{50}{100}} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.6065$$

c) Yaşam süresinin dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{100} e^{-\frac{t}{100}} dt = -e^{-\frac{t}{100}}\Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$$

Ayrıca, $\underbrace{F(x)}_{Dağılım\ fonk.} = P(X \leq x) = 1 - \underbrace{P(X > x)}_{Yaşam\ fonk.} = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$ olarak elde edilebilir.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 1 - e^{-\frac{x}{100}}, \quad x > 0 \\
&= 0, \quad x \leq 0 \\
&= 1, \quad x \to +\infty
\end{aligned}
$$

d) Transistorun 40 ile 120 saat arasında çalışması olasılığını hesaplayınız.

Birinci Yol: olasılık yoğunluk fonksiyonundan,

$$P(40 < X < 120) = \int_{40}^{120} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx = -e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{40}^{120} = -e^{-\frac{120}{100}} + e^{-\frac{40}{100}} = e^{-0.4} - e^{-1.2} = 0.37$$

İkinci Yol: Dağılım fonksiyonundan,

$$P(40 < X < 120) = F(120) - F(40) = 1 - e^{-\frac{120}{100}} - \left(1 - e^{-\frac{40}{100}}\right) = e^{-0.4} - e^{-1.2} = 0.37$$

e) 400 saatte transistörun 3' ten fazla arıza yapması olasılığını bulunuz?

Y:Transistörün 400 saatte yaptığı arızaların sayısı $Y \sim Poisson(\lambda)$

λ: $400\ saatte\ gerçekleşen\ ortalama\ arızalanma\ sayısı$

$100 saatte \quad 1\ arıza$

$400 saatte \quad \lambda$

$$\lambda = \frac{400}{100} = 4$$

$Y \sim Poisson(\lambda = 4)$

$$
\begin{aligned}
P(Y > 3) &= 1 - P(Y \leq 3) &&= 1 - \sum_{y=0}^{3} e^{-4} \frac{4^y}{y!} \\
&= 1 - e^{-4}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right) &&= 1 - \left(\frac{142}{6}\right) e^{-4} \\
&= 0.5665
\end{aligned}
$$

6) Matematik dersinde herhangi bir öğrenci saatte ortalama 6 sınav sorusu çözebilmektedir.

a) Öğrencinin yirmi dakika içerisinde 2' den az soru çözmesi olasılığı nedir?
X: Öğrencinin yirmi dakika içerisinde çözdüğü soru sayısı $X \sim Poisson(\lambda)$

$$\begin{array}{ll} 60dak. & 6\,soru \\ 20dak. & \lambda \end{array}$$

$\lambda = \frac{20\times 6}{60} = 2\,soru/20dak.$

$X \sim Poisson(\lambda = 2\,soru/20dak.)$

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 0.406$

b) Öğrenci, bir soruyu ortalama kaç dakikada çözmektedir?
Y: Bir soru çözümü için geçen süre $Y \sim Üstel(\lambda)$

$$\begin{array}{ll} 60dak. & 6\,soru \\ \lambda & 1 soru \end{array}$$

$\lambda = \frac{60}{6} = 10\,dak.$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}}, & y > 0 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

$E(Y) = 10\,dakika$

c) Öğrencinin bir soruyu 5 ile 8 dakika arasında çözmesi olasılığı nedir?

$P(5 < Y < 8) = \int_5^8 \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}}dy = -e^{-\frac{y}{10}}\Big|_5^8 = e^{-\frac{5}{10}} - e^{-\frac{8}{10}} = 0.1572$

7) X kesikli raslantı değişkeni p parametresi ile geometrik dağılıma; Y sürekli raslantı değişkeni ise λ=3 parametresi ile üstel dağılıma sahip olsun. P(X>1)=P(Y>1) eşitliğini sağlayan p parametresini bulunuz.

$X \sim Geometrik(p)$

$$p(x) = \begin{cases} p\,q^{x-1}, & x = 1,2,3,\ldots \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

$P(X > 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - p\,q^0 = 1 - p$

$Y \sim Üstel(\lambda = 3)$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y > 0 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

$$P(Y > 1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}dy = -e^{-\frac{y}{3}}\Big|_1^{+\infty} = -\left(0 - e^{-\frac{1}{3}}\right) = e^{-\frac{1}{3}}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X > 1) & = & P(Y > 1) \\ 1 - p & = & e^{-\frac{1}{3}} \end{array} \Longrightarrow \quad p = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0.28$$

8) Kuzey Amerika bölgesinde kaydedilen depremlerin büyüklüğü, Richter ölçeğine göre ortalaması 4 olan üstel dağılıma uymaktadır. Deprem büyüklüğü, X raslantı değişkeni ile gösterilsin.

$X \sim Üstel(\lambda = 4)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x > 0 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

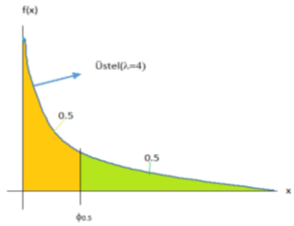
a) Bu bölgede gerçekleşen bir depremin Richter ölçeğinde 5.0' i aşması olasılığını bulunuz.

$$P(X > 5) = \int_5^{+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx = -e^{-\frac{x}{4}}\Big|_5^{+\infty} = -\left(e^{-\infty} - e^{-\frac{5}{4}}\right) = 0 + e^{-\frac{5}{4}} = 0.2865$$

b) Richter ölçeğinde depremlerin yüzde kaçı 3.0 ve 5.0 arasına düşer?

$$P(3 < X < 5) = \int_3^5 \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx = -e^{-\frac{x}{4}}\Big|_3^5 = -\left(e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{3}{4}}\right) = e^{-\frac{3}{4}} - e^{-\frac{5}{4}} = 0.186$$

c) Bir sürekli raslantı değişkeninin dağılımının ortanca değeri, P(X≤$\phi_{0.5}$)=0.5 eşitliğini sağlayan $\phi_{0.5}$ değeridir. Buna göre, X' in dağılımının ortanca değeri nedir?



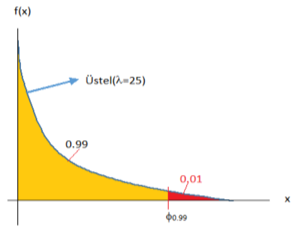
$$P(X \le \phi_{0.5}) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(X \le \phi_{0.5}) &= \int_0^{\phi_{0.5}} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx \\ &= -e^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^{\phi_{0.5}} \\ &= -\left(e^{-\frac{\phi_{0.5}}{4}} - e^{0}\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{\phi_{0.5}}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{\phi_{0.5}}{4}} &= 0.5 \\ e^{-\frac{\phi_{0.5}}{4}} &= 0.5 \\ \ln e^{-\frac{\phi_{0.5}}{4}} &= \ln(0.5) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -\frac{\phi_{0.5}}{4} &= \ln(0.5) \\ \phi_{0.5} &= -4\ln(0.5) = -4 \times (-6.6931) = 2.77 \end{aligned}$$

9) Park ve bahçelerin sulanması için kullanılan bir pompalama istasyonundaki su pompalarından talep edilen su miktarları kalite kontrol amacıyla incelenmiştir. 13:00 ile 15:00 saatleri arasında herhangi bir pompadan saniyede talep edilen su miktarı, ortalaması 25 litre olan üstel dağılıma uymaktadır. Belirlenen saatlerde herhangi bir pompa, su talebinin sadece 99%' unu karşılayabiliyordur. Aksi durumda, kapasitesini aşmaktadır. Bu durumda, pompanın kapasitesi saniyede kaç litredir?

X: Pompadan talep edilen su miktarı



$$X \sim \ddot{U}stel(\lambda = 25) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{25} e^{-\frac{x}{25}} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \quad , \quad ö.d. \end{aligned}$$

$$P(X \le \phi_{0.99}) = 0.99$$
$$P(X > \phi_{0.99}) = 0.01$$

$$\begin{aligned} P(X > \phi_{0.99}) &= \int_{\phi_{0.99}}^{+\infty} \frac{1}{25} e^{-\frac{x}{25}} dx &= -e^{-\frac{x}{25}}\Big|_{\phi_{0.99}}^{+\infty} \\ &= -\left(e^{-\infty} - e^{-\frac{\phi_{0.99}}{25}}\right) &= e^{-\frac{\phi_{0.99}}{25}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\phi_{0.99}}{25}} &= 0.01 \\ \ln e^{-\frac{\phi_{0.99}}{25}} &= \ln(0.01) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -\frac{\phi_{0.99}}{25} &= \ln(0.01) \\ \phi_{0.99} &= -25\ln(0.01) = 115.129\ litre/saniye \end{aligned}$$

10) Geçmiş araştırmalar, Amerika iç hat yolcu uçuşlarındaki ölümcül kazalar arasındaki sürelerin yaklaşık olarak üstel dağılıma sahip olduğunu göstermektedir. Kazalar arasında geçen sürenin, ortalama 44 ay olduğu varsayılsın.
X: Ölümcül uçak kazaları arasında geçen süre(ay)

$$X \sim Üstel(\lambda = 44\ ay) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{44} e^{-\frac{x}{44}} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \quad\quad\quad\ \ , \quad ö.d. \end{aligned}$$

a) Rasgele seçilen bir yılın 1 Temmuz tarihinde bir kaza gerçekleşmiş ise, aynı yılın içerisinde bir kaza daha olması olasılığı nedir?

Temmuz – Ağustos- Eylül- Ekim- Kasım- Aralık⇒6 ay içinde

$$P(X \leq 6) = \int_0^6 \frac{1}{44} e^{-\frac{x}{44}} dx = -e^{-\frac{x}{44}}\Big|_0^6 = -\left(e^{-\frac{6}{44}} - 1\right) = 1 - e^{-\frac{3}{22}} = 0.1274747 \cong \%13$$

b) Kazalar arasında geçen sürenin varyansı nedir?

$\sigma^2 = V(X) = \lambda^2 = 44^2 = 1936$ ay^2 $\quad \sigma = \sqrt{1936} = 44\ ay$

11) Bir kitapçıya gelen müşteriler arasında geçen sürenin (dakika) dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - e^{-0.05x}, \quad x > 0 \\ &= 0, \qquad\qquad\quad x \leq 0 \\ &= 1, \qquad\qquad\quad x \to \infty \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad X \sim Negatif\ Üstel(\beta = 0.05)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = 0.05 e^{-0.05x} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} f(x) &= 0.05 e^{-0.05x} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad , \quad ö.d. \end{aligned}$$

a) Birbiri ardı sıra gelen iki müşteri arasında en çok 30 dakika geçmesi olasılığını bulunuz.

$$P(X \leq 30) = F(30) = 1 - e^{-0.05 \times 30} = 1 - e^{-1.5} = 0.7769$$

ya da $P(X \leq 30) = \int_0^{30} 0.05 e^{-0.05x} dx = -e^{-0.05x}\big|_0^{30} = -(e^{-1.5} - 1) = 1 - e^{-1.5} = 0.7769$

b) İki müşteri arasında geçen ortalama süre kaç dakikadır?

$\beta = \frac{1}{\lambda} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{0.05} = 20$
$E(X) = \lambda = 20$ dakika

c) Bir saatte 2' den az müşteri gelmesi olasılığı nedir?
Z: Bir saatte gelen müşteri sayısı $\quad Z \sim Poisson(\lambda^*)$

$$\begin{array}{ll} 20 dak. & 1\ müşteri \\ 60 dak. & \lambda^* \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda^* = \frac{60}{20} = 3\ müşteri$$

$Z \sim Poisson(\lambda^* = 3 müşteri/saatte)$

$$P(Z < 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) = e^{-3} \frac{3^0}{0!} + e^{-3} \frac{3^1}{1!} = 0.1991$$

d) Y =X/10 raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bularak dağılımını belirleyiniz.
X'in moment çıkaran fonksiyonu, $M_X(t)$'yi bulalım.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) &&= \int_0^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tx}\, 0.05e^{-0.05x}dx &&= \int_0^{+\infty} 0.05e^{-x(0.05-t)}\, dx \\ &= -0.05\frac{e^{-x(0.05-t)}}{(0.05-t)}\Bigg|_0^{+\infty} &&= -\left(\frac{0.05}{(0.05-t)}\right)(e^{-\infty}-e^0) \\ &= \frac{0.05}{(0.05-t)} &&= \frac{1}{(1-20t)} \\ &= (1-20t)^{-1} \end{aligned}$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t\frac{X}{10}}\right) = E\left(e^{\frac{t}{10}X}\right) = M_X\left(\frac{t}{10}\right) = (1-20\times\frac{t}{10})^{-1} = (1-2t)^{-1}$$

Y'nin moment çıkaran fonksiyonuna baktığımızda, $Y{\sim}Üstel(\lambda = 2\, dakika)$ olduğunu söyleyebiliriz.

12) Bir anahtarcının kırk dairelik bir apartmandaki tüm dairelerin dış kapı kilitlerini değiştirmesi için harcadığı toplam süre, ortalaması 10 saat olan üstel dağılıma uymaktadır. Toplam harcanan süre, Y raslantı değişkeni ile gösterilsin. Yapılan işlemin maliyeti, $C=100+40Y+3Y^2$ TL olsun. Bu durumda, maliyetin beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

$$Y{\sim}Üstel(\lambda = 10\, saat) \qquad \begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}} &&,\quad y>0 \\ &= 0 &&,\quad ö.d. \end{aligned}$$

$$E(C) = E(100+40Y+3Y^2) = 100 + 40E(Y) + 3E(Y^2) = 100 + 40\times 10 + 3\times 200 = 1100TL$$

$$E(Y) = \lambda = 10$$
$$V(Y) = \lambda^2 = 10^2 = 100$$
$$E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2 = 100 + 10^2 = 200$$

$$V(C) = V(100+40Y+3Y^2) = 1600V(Y) + 9V(Y^2)$$

$$V(Y^2) = E(Y^4) - [E(Y^2)]^2$$

$$\begin{aligned} E(Y^4) &= \int_0^{+\infty} y^4 f(y)dy \\ &= \int_0^{+\infty} y^4 \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}}dy \\ &= \int_0^{+\infty} y^4 \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}}dy \qquad \frac{y}{10} = u \Rightarrow\ dy = 10du \quad 0<y<\infty \text{ iken } 0<u<\infty \text{ olur.} \\ &= \int_0^{+\infty} (10u)^4\, e^{-u}du \\ &= 10^4 \underbrace{\int_0^{+\infty} u^4 e^{-u}du}_{\substack{Gamma\ fonksiyonudur \\ \Gamma(5)\ değerine\ eşittir}} \\ &= 10^4\,\Gamma(5) = 10^4(5-1)! = 10^4 4! \end{aligned}$$

$$V(Y^2) = E(Y^4) - [E(Y^2)]^2 = 10^4 4! - 200^2 = 200000$$
$$V(C) = V(100+40Y+3Y^2) = 1600V(Y) + 9V(Y^2) = 1600\times 100 + 9\times 200000 = 1960000$$

13) X raslantı değişkeni, n=3 ve λ=35 parametreleriyle gamma dağılımına sahiptir.

$X \sim gamma(n = 3, \lambda = 35)$

a) X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu yazınız.

$X \sim gamma(n = 3, \lambda = 35)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(3)35^3} x^2 e^{-\frac{x}{35}} \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \quad , \quad \text{ö}.d. \end{aligned}$$

b) n=1 olması durumunda bu dağılım hangi dağılıma dönüşmektedir?

n=1 içi gamma dağılımı üstel dağılma dönüşür: $Üstel(\lambda = 35)$

c) E(X) beklenen değerini, V (X) varyansını ve $M_X(t)$ moment çıkaran fonksiyonunu yazınız.

$$E(X) = n\lambda = 3 \times 35 = 105$$
$$V(X) = n\lambda^2 = 3 \times 35^2 = 3675$$
$$M_X(t) = (1 - \lambda t)^{-n} = (1 - 35t)^{-3}$$

d) $Y = \frac{X}{7}$ raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bularak dağılımını belirleyiniz.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t\frac{X}{7}}\right) = E\left(e^{\frac{t}{7}X}\right) = M_X\left(\frac{t}{7}\right) = \left(1 - 35 \times \frac{t}{7}\right)^{-3} = \underbrace{(1 - 5t)^{-3}}_{Gamma(n=3, \lambda=5)}$$

Y'nin moment çıkaran fonksiyonuna baktığımızda, $Y \sim Gamma(n = 3, \lambda = 5)$ olduğunu söyleyebiliriz.

e) $W = \frac{3X}{5} - 2$ raslantı değişkeninin beklenen değerini, varyansını ve moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

$$\begin{aligned} M_W(t) &= E(e^{tW}) = E\left(e^{t\left(\frac{3X}{5} - 2\right)}\right) = e^{-2t} E\left(e^{\frac{3t}{5}X}\right) \\ &= e^{-2t} M_X\left(\frac{3t}{5}\right) = e^{-2t}\left(1 - 35 \times \frac{3t}{5}\right)^{-3} = e^{-2t}(1 - 21t)^{-3} \end{aligned}$$

$$E(W) = E\left(\frac{3X}{5} - 2\right) = \frac{3}{5}E(X) - 2 = \frac{3}{5} \times 105 - 2 = 61$$

$$V(W) = V\left(\frac{3X}{5} - 2\right) = \frac{9}{25}V(X) = \frac{9}{25} \times 3675 = 1323$$