

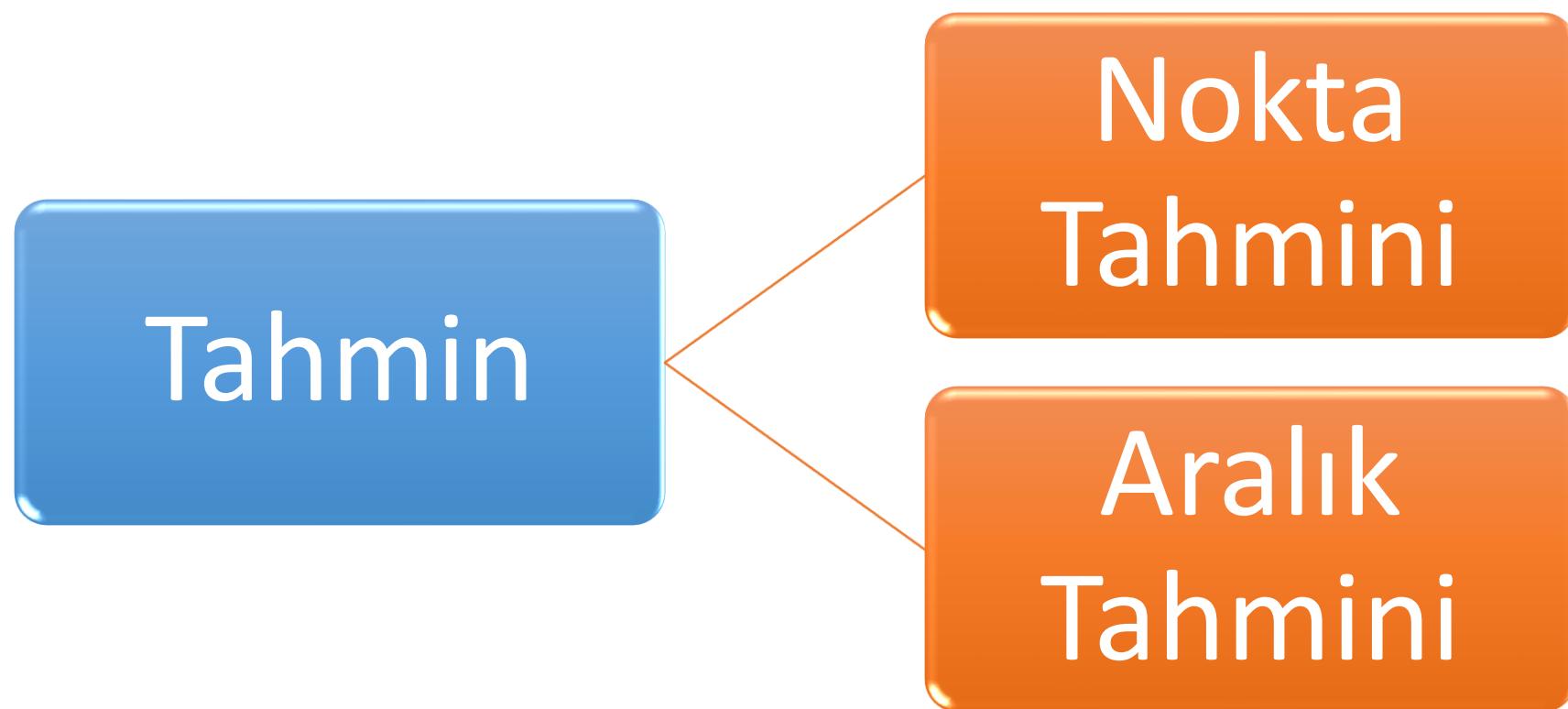


HACETTEPE
ÜNİVERSİTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

İST156 İSTATİSTİĞE GİRİŞ II

DERS 3- TEK ÖRNEKLEM GÜVEN ARALIKLARI

**Ders sorumluları: Prof.Dr.Serpil AKTAŞ ALTUNAY (01 Şubesi)
Doç.Dr. Ayten YİĞİTER (02 Şubesi)**

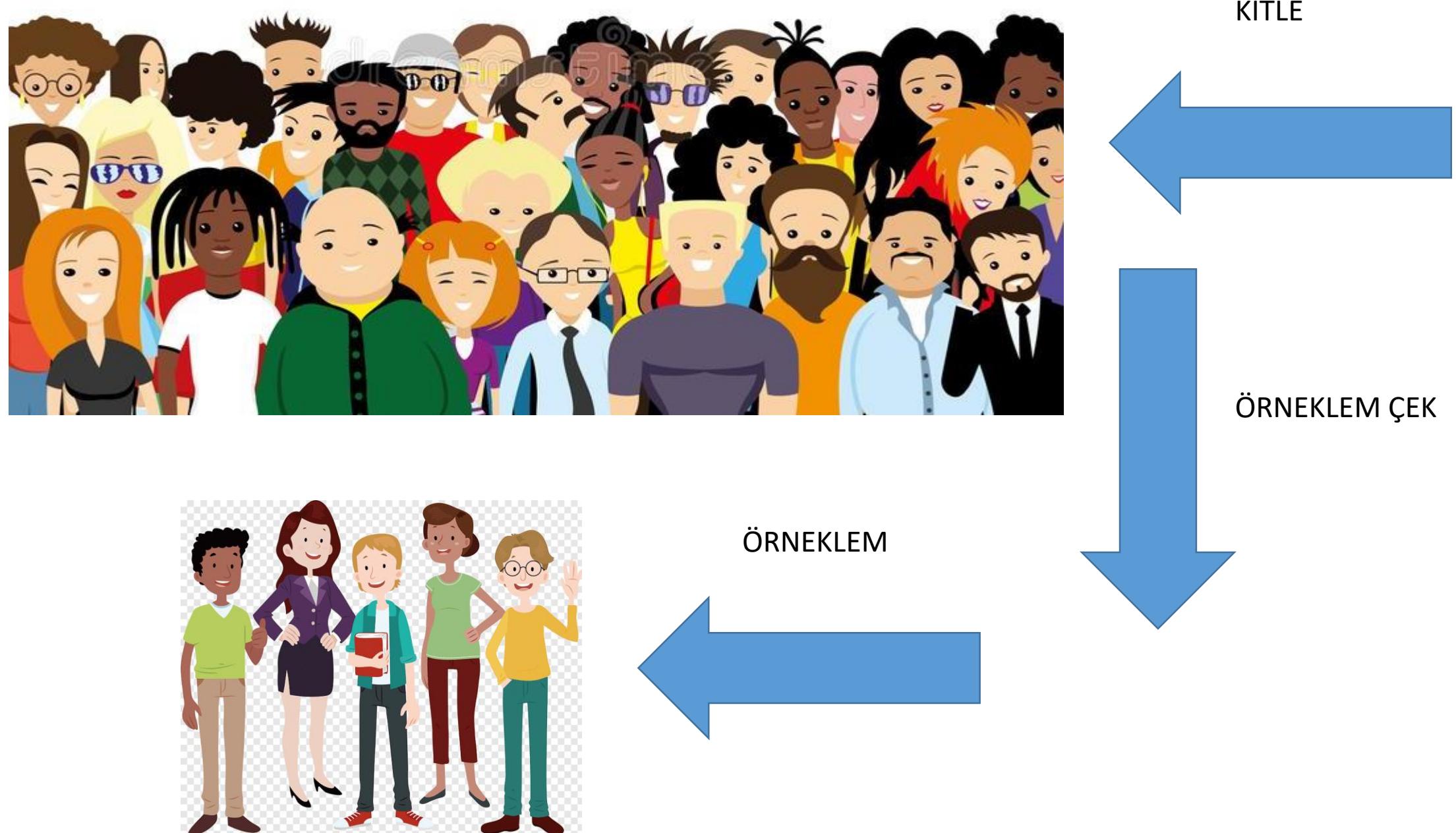




$$\theta \pm \text{tablo değeri} \times \text{standart hata}$$

$$(\theta_1 - \theta_2) \pm \text{tablo değeri} \times \text{standart hata}$$

Örneğin bir bölgede yaşayanların yaş ortalaması için bir aralık tahmini verebiliriz, 20 ile 50 arasındadır diye. Bu tahminin istatistiksel bir tahmin olabilmesi için güven aralığına göre yapılması gereklidir.



GÜVEN ARALIĞI (CONFIDENCE INTERVAL) NE DEMEKTİR?

Kitle parametresi için belli bir güven düzeyinde hesaplanan aralık tahminidir.

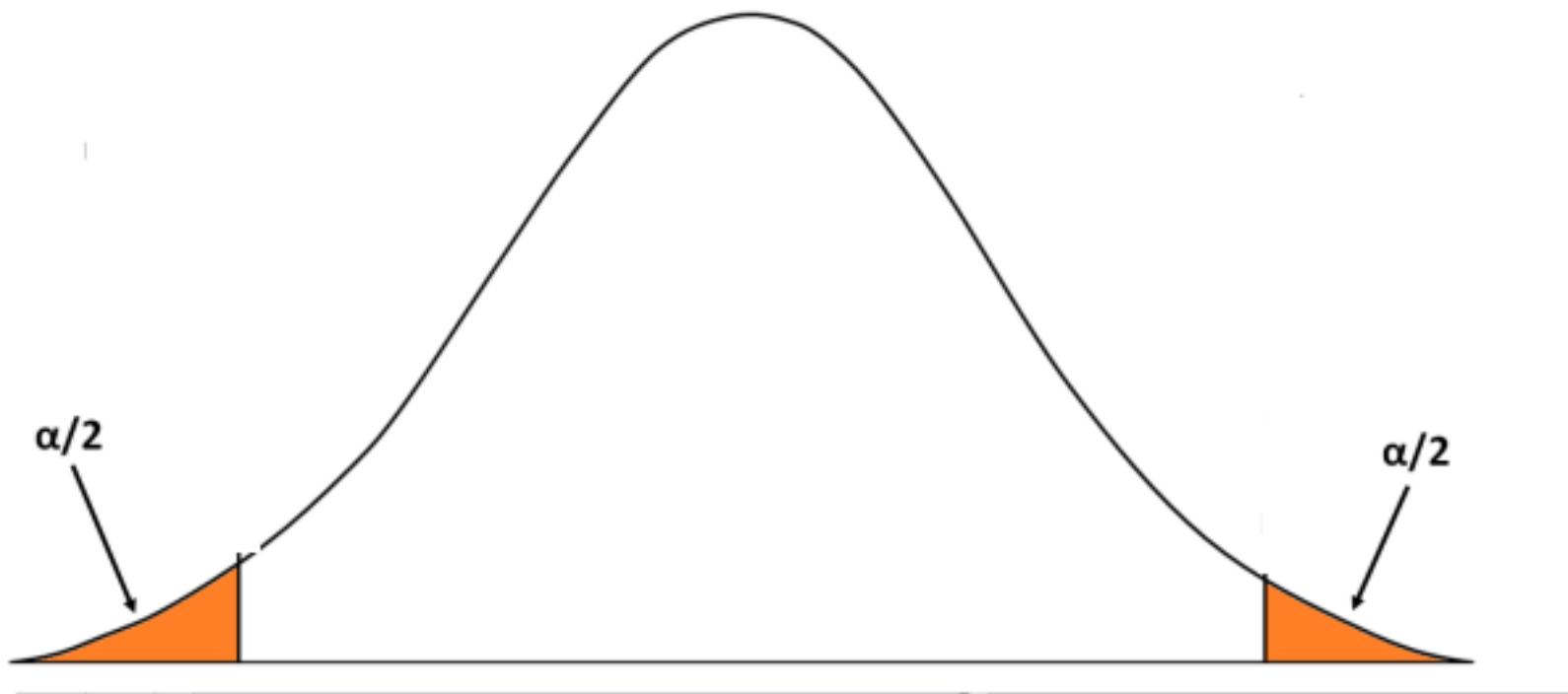
Güven Düzeyi (Confidence Level) : $100(1 - \alpha)\%$ ile gösterilir.

Aralık tahmininin kitle parametresini kapsama olasılığını gösterir.
Genellikle %99, %95, %90 kabul edilir.

Hata marjini (error margin) (E) : Nokta tahminine eklenip çıkarılan hata payıdır.

$$\text{Örneğin } \bar{X} \pm E$$

$100(1-\alpha)\%$



$1-\alpha$: güven düzeyi (confidence level)

α : anlamlılık düzeyi (significance level)

Alt limit (lower limit): LL

Üst Limit (upper limit) : UL

Güven limitleri (Confidence limits) : LL, UL

Güven aralığı uzunluğu: UL-LL

Hata marjini (margin of error) : Tablo değeri \times standart hata

Güven Aralığı hesaplarken hangi dağılımlardan yararlanacağız?

- Standart Normal Dağılım
- t dağılımı
- Ki-kare dağılımı
- F dağılımı

μ

- Kitle ortalaması için güven aralığı

 σ^2

- Kitle varyansı için güven aralığı

 P

- Kitle oranı için güven aralığı

1. KİTLE ORTALAMASI İÇİN GÜVEN ARALIĞI

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınan rastgele örneklem olsun.

Durum 1: σ^2 biliniyor ise,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

sahip olur. Buna göre kitle ortalaması μ 'nin $(1-\alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı tahmini:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınan rastgele örneklem olsun.

Durum 2 : σ^2 bilinmiyor ise, $n \geq 30$ ise,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

sahip olur. Buna göre kitle ortalaması μ 'nin $(1-\alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı tahmini:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Güven Düzeyi ($1-\alpha$)	$\alpha/2$	Z değeri
%80	0,10	1,29
%90	0,05	1,65
%95	0,025	1,96
%98	0,01	2,33
%99	0,005	2,58



STANDARD NORMAL TABLE (Z)

Entries in the table give the area under the curve between the mean and z standard deviations above the mean. For example, for $z = 1.25$ the area under the curve between the mean (0) and z is 0.3944.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0190	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2969	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3513	0.3554	0.3577	0.3529	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

%95 güven alalığı hesaplanırken
 $Z=1,96$ nasıl bulundu?
 $1-\alpha=0,95$ ise $\alpha =0,05$ olur.
Güven aralığında iki yanlı
 $\alpha/2=0,05/2=0,025$ kullanılıyordu

$0,5-0,025=0,475$.

Bu değer standart normal
dağılım tablosunun içinde aranır
ve ona karşılık gelen Z değeri
okunur.

Anlamlılık düzeyi= α



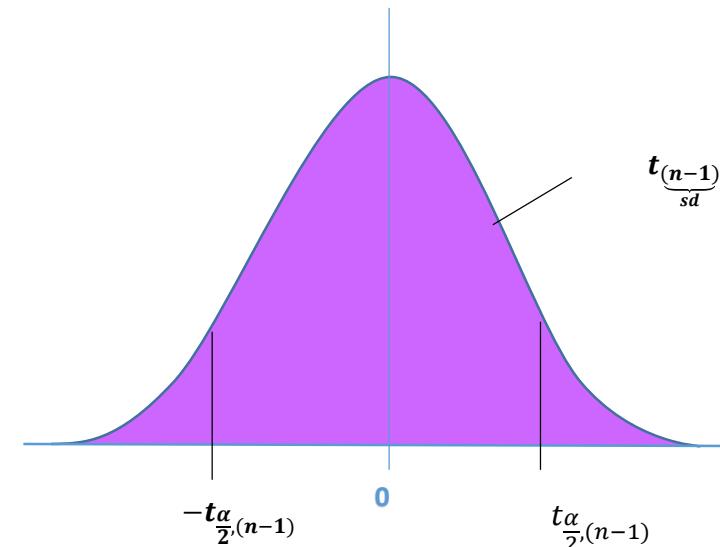
<https://twitter.com/bekirgur/status/1267449526740230144/photo/1>

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınan rastgele örneklem olsun.

Durum 3: σ^2 bilinmiyor ise, $n < 30$ ise,

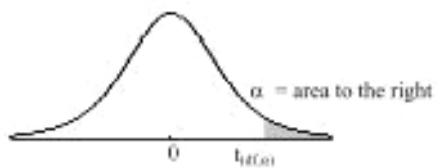
$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

Student t dağılımına sahip olur. Buna göre kitle ortalaması μ 'nin $(1-\alpha)$ güven düzeyinde güven aralığı tahmini:



$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2, (n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2, (n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Critical Values of Student's t -Distribution



df	$\alpha = \text{area to the right}$							
	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
35	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	0.680	0.850	1.049	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
55	0.679	0.848	1.046	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.67	0.84	1.04	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Sütunlardan α değeri, satırlardan serbestlik derecesi bulunur. Örneğin

$Sd=15$, $\alpha=0,05$ için t tablo değeri
=1,753'dür.

2. KİTLE ORANI İÇİN GÜVEN ARALIĞI

$X \sim Binom(n, p)$ olsun. n genişliğinde bir örneklemde x istenen olay sayısı ise

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Oranından yararlanarak kitle oranı için bir aralık tahmini yapılabilir.

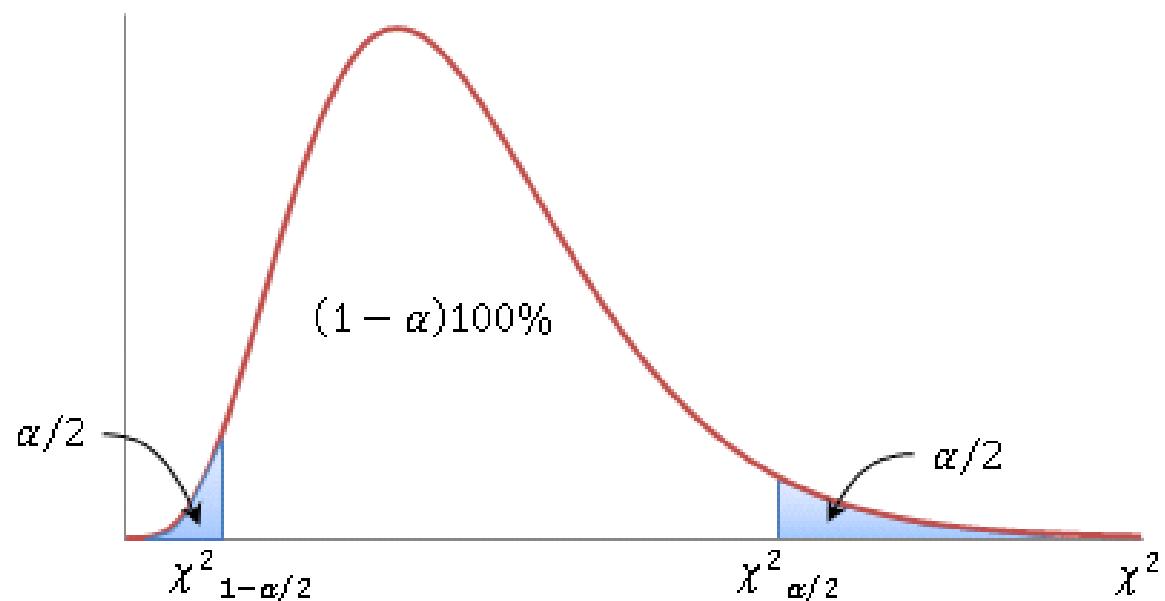
$$n \rightarrow \infty \text{ için} \quad \frac{\frac{x}{n} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < P < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

3. KİTLE VARYANSI İÇİN GÜVEN ARALIĞI

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, (n-1)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, (n-1)}}\right) = 1 - \alpha$$

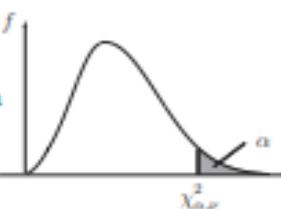


4. KİTLE STANDART SAPMASI İÇİN GÜVEN ARALIĞI

$$P\left(S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}} \leq \sigma \leq S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}\right) = 1 - \alpha$$

Kitle standart sapması aynı zamanda varyans için hesaplanmış güven limitlerinin kareköküne eşittir.

Table 1: Percentage Points $\chi_{\alpha,v}^2$ of the χ^2 distribution



α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
v											
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.01	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.28
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	31.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Sütunlardan α değeri, satırlardan serbestlik derecesi bulunur. Örneğin

$Sd=10$, $\alpha=0,05$ için ki-kare tablo değeri =18,31'dir.

Hata marjini (E)

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Çözümlü Sorular

Örnek 1: Bir spor kulubündeki sporcuların boy uzunluklarının normal dağılıma sahip olduğu kabul ediliyor. $n=50$ olan bir örneklemden boy uzunluğunun ortalaması 165 ve standart sapması 25 bulunuyor. Kitlenin boy uzunluğunun ortalaması için %90'luk güven aralığını tahmin ediniz.

σ^2 bilinmiyor ancak $n \geq 30$ olduğu için, kitle ortalaması μ 'nin güven aralığı:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ile bulunur. Buradan, $z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$

$$P\left(165 - 1,645 \frac{25}{\sqrt{50}} < \mu < 165 + 1,645 \frac{25}{\sqrt{50}}\right) = 0,90$$

$$P(159,18 < \mu < 170,82) = 0,90$$

Bu güven aralığının kitle ortalamasını kapsama olasılığı %90'dır. Bu kulüpteki sporcuların ortalama boy uzunlukları [159,18 ; 170,82] aralığındadır.

Örnek 2: Bir bankanın müşteri hizmetleri servisinde müşteriye servis zamanının 0,05sn'lik standart sapma ile normal dağıldığı varsayılıyor. 1 saat içinde müşteri hizmetlerini arayanlar içinden rastgele seçilen 25 müşteriye ortalama zamanının 0,4sn olduğu görülmüyor. Buna göre, kitle ortalaması için %95 güven düzeyindeki güven aralığını tahmin ediniz.

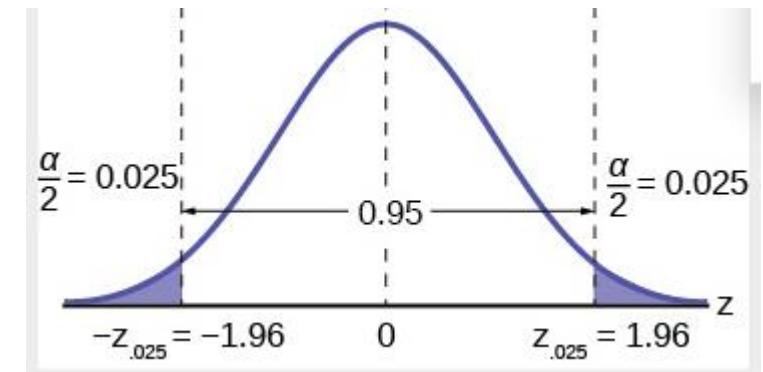
Kitle varyansı σ^2 biliniyor, $\sigma=0,05$ buna göre,

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ile bulunur. Buradan, $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$, $n=25$, $\bar{X} = 0,4sn$

$$P\left(0,4 - 1,96 \frac{0,05}{\sqrt{25}} < \mu < 0,4 + 1,96 \frac{0,05}{\sqrt{25}}\right) = 0,95$$

$$P(0,3804 < \mu < 0,4196) = 0,95$$



Örnek 3: Organik yumurta satan bir markette bulunan 10'luk paketten rastgele bir örneklem alınıyor ve ağırlıkları gram olarak veriliyor.

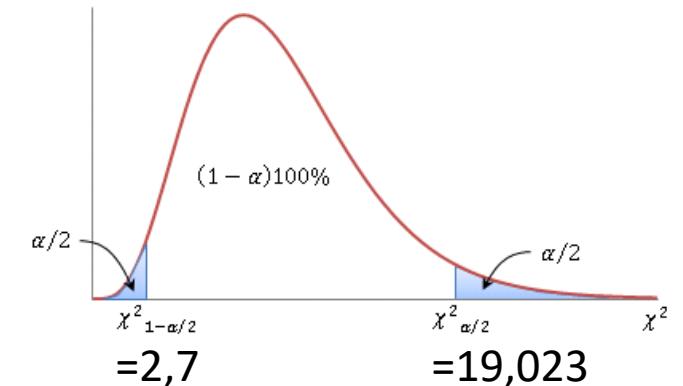
58,60,65,60,63,70,55,67,58,69

Kitle varyansı ve standart sapması için %95 güven aralığını bulunuz.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} = 26,06$$

$$\chi^2_{\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0,05, 9} = 19,023$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0,975, 9} = 2,7$$



$$P\left(\frac{9(26,06)}{19,023} \leq \sigma^2 \leq \frac{9(26,06)}{2,7}\right) = 0,95$$

$$P(12,329 \leq \sigma^2 \leq 86,867) = 0,95$$

$$P\left(5,105 \sqrt{\frac{(10-1)}{19,023}} \leq \sigma \leq 5,105 \sqrt{\frac{(10-1)}{2,7}}\right) = 0,95$$

$$P(3,51 \leq \sigma \leq 9,32) = 0,95$$

Not: Bu sonuç varyans için bulunan sınırların kareköküne eşittir.

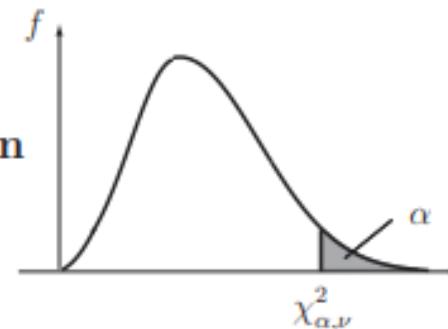


Table 1: Percentage Points $\chi^2_{\alpha,\nu}$ of the χ^2 distribution

α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
v											
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.01	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.28
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	31.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58

Örnek 4: SEC303 dersini alan öğrencilerden seçilen rastgele 25 öğrencinin final not ortalamasının 50 standart sapmasının 8 olduğu hesaplanmıştır. Kitle ortalaması için %95 güven aralığını oluşturunuz.

Kitle varyansı bilinmiyor, $n < 30$

$$P\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0,025,24} = 2,0639$$

$$P\left(50 - 2,0639 \frac{8}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 50 + 2,0639 \frac{8}{\sqrt{25}}\right) = 0,95$$

$$P(46,69 \leq \mu \leq 53,30) = 0,95$$

Güven aralığının kitle ortalamasını kapsama olasılığı %95'dir. Not ortalaması 46,69 ile 53,30 aralığındadır.

Örnek 5: Bir bölgede bir gün içinde PCR test yapılan 500 kişisinin 175'inde test sonucu pozitif çıkmıştır. Sonucu pozitif olanların kitle oranı için %98 güven düzeyinde güven aralığını hesaplayınız.

$$(1-\alpha)=0,98 \text{ ise } \alpha = 0,02 \quad z_{\alpha/2} = z_{0,01} = 2,33$$

$$\hat{p} = \frac{175}{500} = 0,35$$

$$P\left(0,35 - 2,33 \sqrt{\frac{(0,35)(0,65)}{500}} \leq P \leq 0,35 + 2,33 \sqrt{\frac{(0,35)(0,65)}{500}}\right) = 0,98$$

$$0,35 \pm 0,04975$$

$$P(0,30 \leq P \leq 0,40) = 0,98$$

Bu bölgede testin pozitif çıkma oranının 0,30 ile 0,40 aralığındadır. Bu güven aralığının gerçek kitle oranı P 'yi kapsama olasılığı %98'dir.

Örnek 6: Bir otele Kasım ayında gelen turistlerden rastgele seçilen bir örneklemde (36 kişi) yaş ortalaması 68 bulunuyor. Kitleye ait standart sapma 3 ise kitle ortalaması için %90 güven aralığını bulunuz.

σ^2 biliniyor, kitle ortalaması μ 'nin güven aralığı:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$$

$$P\left(68 - 1,645 \frac{3}{\sqrt{36}} < \mu < 68 + 1,645 \frac{3}{\sqrt{36}}\right) = 0,90$$

$$\text{E}=0,8225$$

$$P(67,1775 < \mu < 68,8225) = 0,90$$

Bu güven aralığının kitle ortalamasını kapsama olasılığı %90'dır.

Bu otele gelen müşterilerin yaş ortalamaları [67,18 ; 68,82] aralığındadır.

Örnek 7: Piyasaya yeni çıkan bir oyun bilgisayarını kullanan 3532 kişiden 1219'u bilgisayarı beğendiğini ifade etmiştir. Kitledeki beğeni oranı için %95 güven aralığını hesaplayınız.

$$(1-\alpha)=0,95 \text{ ise } \alpha = 0,05 \quad Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$$

$$\hat{p} = \frac{1219}{3532} = 0,345$$

$$0,345 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,345(1 - 0,345)}{3532}}$$

$$0,345 \pm 0,016$$

$$[0,329;0,361]$$

Beğeni oranı %33 ile %36 olduğunu %95 güven düzeyinde söyleyebiliriz.

Örnek 8: Bir sitede bulunan 20 konutun Şubat ayı için öddediği doğalgaz faturaları verilmiştir.

581	580	581	577	580	581	577	579	579	578
581	583	577	578	582	581	582	580	582	579

Kitle varyansı ve standart sapması için %95 güven aralığını bulunuz.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} = 5,3578$$

$$\chi^2_{\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0,025, 19} = 32,85$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0,975, 19} = 8,91$$

$$\frac{19(5,36)}{32,85} \leq \sigma^2 \leq \frac{19(5,36)}{8,91}$$

$$3,1 \leq \sigma^2 \leq 11,43$$

$$1,76 \leq \sigma \leq 3,38$$

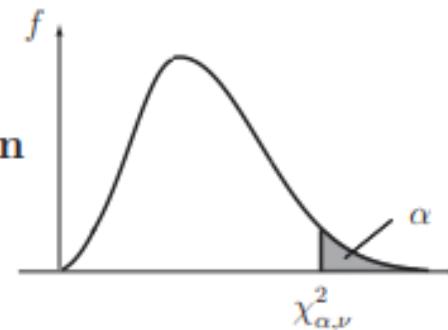


Table 1: Percentage Points $\chi^2_{\alpha,\nu}$ of the χ^2 distribution

α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
v											
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.01	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.28
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	31.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58

Çalışma Soruları

SORU 1

Bir psikolog belirli bir hastalığı olan 30 hasta üzerinde yaptığı tepki süresinin ölçümünde varyansı 0.01 olarak hesaplamıştır. Bu hastalığa sahip hastaların tepki süresinin varyansı için %90 güven düzeyinde güven aralığını elde ediniz.

Çözüm:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha$$

olmak üzere, tablo değerleri $\chi_{29, 0.005}^2 = 52.34$ $\chi_{29, 0.995}^2 = 13.12$ olarak bulunur. Buradan istenilen güven aralığı,

$$\left[\frac{29 \times 0.01}{52.34}, \frac{29 \times 0.01}{13.12}\right] = [0.0055, 0.022]$$

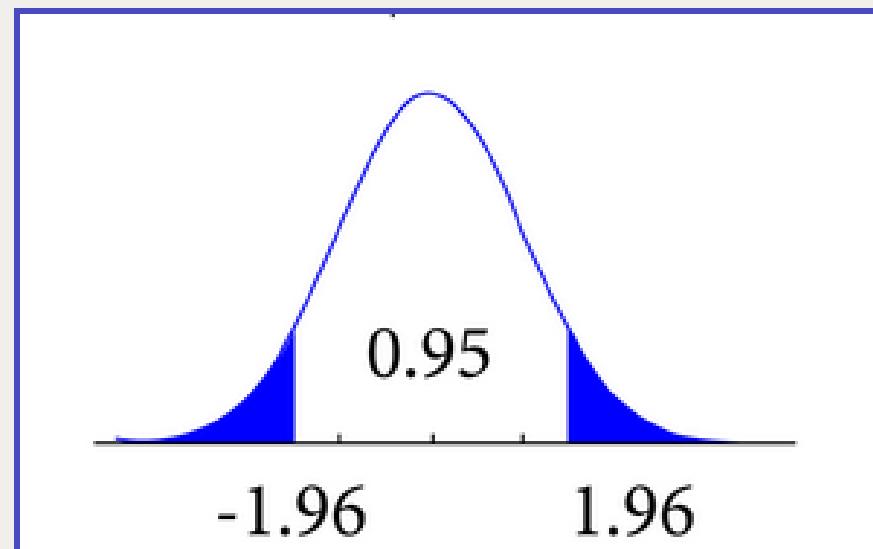
biçiminde elde edilir. Bu aralığın σ^2 'yi içeren aralıklardan biri olması olasılığı %90'dır.

(Kaynak: E. Babacan, L. Özbek, İstatistik Giriş II, TÜBITAK e-kitap)

SORU 2

Bir firmanın ürettiği şeker paketleri arasından 25 tanesi rastgele seçilmiş ve ortalama şeker sayısı 25.4 olarak bulunmuştur. Daha önce yapılan çalışmalardan varyans 4.84 olarak biliniyor ise bu firmanın ürettiği şeker paketlerindeki ortalama şeker sayısı için %95 güven düzeyinde güven aralığı elde ediniz.

Çözüm: Bir önceki örnekle benzer olarak $\alpha = 0.05$ için



olup, μ için güven aralığı

$$\left[\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[25.4 - 1.96 \frac{2.2}{\sqrt{25}}, 25.4 + 1.96 \frac{2.2}{\sqrt{25}} \right]$$

$\mu: [24.54, 26.26] \rightarrow$ olarak elde edilir. Bu aralığın μ 'yu içeren aralıklardan biri olması olasılığı %95'tir.

(Kaynak: E. Babacan, L. Özbek, İstatistik Giriş II, TÜBITAK e-kitap)

SORU 3

Bir firma ürettiği kabloların kopma dayanımlarının ortalamasını hesaplamak istiyor. Bunun için rastgele 15 tane kablo seçiyor ve kopma dayanımlarını N cinsinden aşağıdaki gibi elde ediyor. %95 güven düzeyinde kabloların kopma dayanım ortalamalarına ilişkin güven aralığını elde ediniz.

2350, 2430, 2510, 2480, 2470, 2385, 2370, 2450, 2475, 2390, 2400, 2380, 2385, 2420, 2370

Çözüm: İlk olarak örneklem ortalaması ve örneklem varyansının hesaplanması gereklidir,

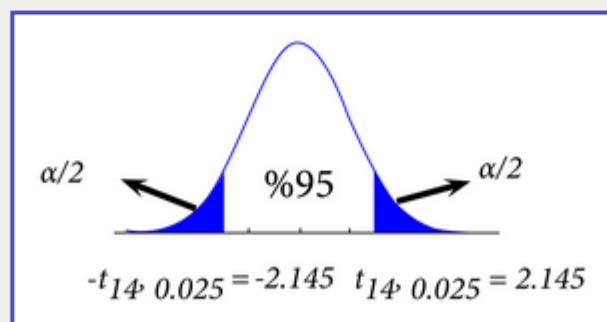
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{15} \Rightarrow \bar{x} = \frac{36265}{15} = 2417.67$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \Rightarrow s^2 = \frac{33393.33}{14} = 2385.238$$

$$s = \sqrt{2385.238} = 48.84$$

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

t tablo değerini bulmak için Ek 2 kısmında verilen Tablo 2 kullanılabilir. Bu tablo değerinin nasıl bulunacağı Ek 1 kısmında, t dağılımı başlığı altında örneklerle açıklanmıştır. Buna göre tablo değerleri bu soru için aşağıdaki biçimde bulunur:



μ için güven aralığı

$$\left[\bar{x} - 2.145 \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.145 \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[2417.67 - 2.145 \frac{48.84}{\sqrt{15}}, 2417.67 + 2.145 \frac{48.84}{\sqrt{15}}\right]$$

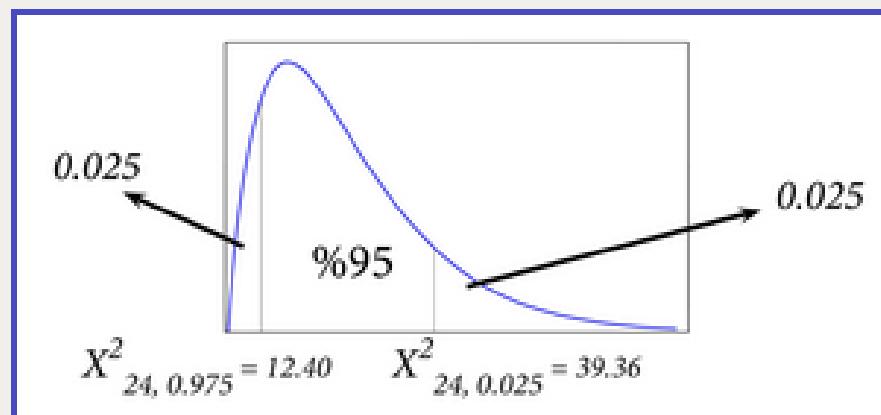
$\mu: [2390.62, 2444.72] \rightarrow$ Bu aralığın μ 'yu içeren aralıklardan biri olması olasılığı %95'tir.
biçiminde elde edilir.

(Kaynak: E. Babacan, L. Özbek, İstatistik Giriş II, TÜBITAK e-kitap)

SORU 4

25 tane elektrik lambasının ömrüne ilişkin varyans 225 olarak hesaplanmıştır. Bu elektrik lambalarının varyansı için %95 ve %99 güven düzeyinde güven aralıklarını elde ediniz.

Çözüm: İlk olarak, $\alpha = 0.05$ olduğunda güven aralığını elde edebilmek için tablo değerleri belirlenmelidir.



σ^2 için güven aralığı,

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

olmak üzere,

$$\left[\frac{24 \times 225}{39.36}, \frac{24 \times 225}{12.40}\right] = [137.2, 435.48]$$

(Kaynak: E. Babacan, L. Özbek, İstatistik Giriş II, TÜBITAK e-kitap)

SORU 5

Belirli bir programın yayından kalkıp kalkmamasına ilişkin karar vermek isteyen televizyon yöneticileri, 400 kişiye programı beğenip beğenmediklerini soran bir anket çalışması yapmıştır. 250 kişi programı beğendiğini söylemektedir, 150 kişi programı beğenmediklerini ifade etmiştir. Programı beğenendenlerin oranına ilişkin %95 güven düzeyinde güven aralığını elde ediniz.

Çözüm:

$$P\left(p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Programı beğenendenlerin oranının tahmini,

$$p = \frac{X}{n} = \frac{250}{400} = 0.625$$

$$1 - p = 0.375$$

$$\left[p - z_{0.025} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{0.025} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0.625 - 1.96 \sqrt{\frac{0.625 \times 0.375}{400}}, 0.625 + 1.96 \sqrt{\frac{0.625 \times 0.375}{400}}\right]$$

$$\pi: [0.58, 0.67]$$

olarak güven aralığı elde edilir. Bu aralığın π 'yi içeren aralıklardan biri olması olasılığı %95'dir.

(Kaynak: E. Babacan, L. Özbeğ, İstatistikte Giriş II, TÜBITAK e-kitap)

SORU 6

Bir ilkokuldaki öğrenciler arasından 100'ü rastgele seçilmiş ve bunların 40'ının gözlük takı gözlenmiştir. Bu okulda gözlük takanların oranına ilişkin %99 güven düzeyinde güven aralığını el ediniz.

Çözüm: Gözlük takanların oranının tahmini,

$$p = \frac{X}{n} = \frac{40}{100} = 0.4$$

olmak üzere,

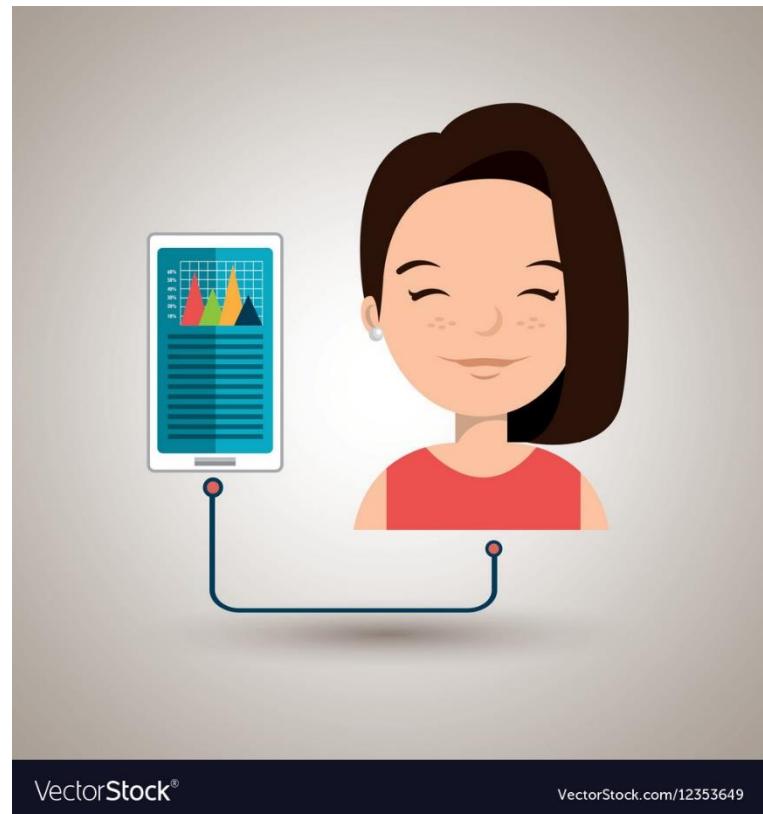
$$1 - p = 0.6$$

$$\left[p - z_{0.025} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{0.025} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0.4 - 2.275 \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{1000}}, 0.4 + 2.275 \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{1000}} \right]$$

$$\pi: [0.29, 0.51]$$

olarak güven aralığı elde edilir. Bu aralığın π 'yi içeren aralıklardan biri olması olasılığı %95'dir.

(Kaynak: E. Babacan, L. Özbek, İstatistiğe Giriş II, TÜBITAK e-kitap)



Bir sonraki derste hipotez testleri inclenecek.



KAYNAKLAR

- 1) "İstatistiksel Yöntemlere Giriş", H.Demirhan, C.Hamurkaroğlu H.Ü.Yayınları, 2011.
- 2) "Modern Elementary Statistics", John.E.Freund, Prentice Hall, 2004.
- 3) "Temel İstatistik Yöntemler", Serpil Cula, Zehra Muluk, Başkent Üniversitesi yayınları,2006.
- 4) «İstatistiğe Giriş II», E. Babacan, L. Özbek, TÜBITAK e-kitap.
- 5) "Olasılık ve Olasılık Dağılımları I", C. Hamurkaroğlu, A. Yiğiter, Ö. Akkuş, Y. Gençtürk, Nobel Yayınevi 2017.