

Çözümlü Alıştırmalar

1. $A = \{(1, 2, 1), (1, 3, 3), (2, 3, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ altkümesi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayının bir tabanı mıdır? Araştırınız.

Çözüm: A kümesinin \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayının bir tabanı olduğunu göstermek için A kümesinin doğrusal bağımsız olduğunu ve \mathbb{R}^3 uzayını ürettiğini göstereceğiz.

$$c_1(1, 2, 1) + c_2(1, 3, 3) + c_3(2, 3, -1) = (0, 0, 0)$$

olsun. Bu durumda

$$(c_1 + c_2 + 2c_3, 2c_1 + 3c_2 + 3c_3, c_1 + 3c_2 - c_3) = (0, 0, 0)$$

olur.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

homojen doğrusal denklem sistemi çözülürse $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ elde edilir. O halde A doğrusal bağımsızdır. Her $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(a, b, c) = c_1(1, 2, 1) + c_2(1, 3, 3) + c_3(2, 3, -1)$$

eşitlenden c_1, c_2, c_3 skalerlerini hesaplayalım. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= a \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= b \\ c_1 + 3c_2 - c_3 &= c \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$c_1 = 12a - 7b + 3c, c_2 = 3b - 5a - c, c_3 = 2b - 3a - c$$

bulunur. Yani her $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ elemanı

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (12a - 7b + 3c)(1, 2, 1) + (3b - 5a - c)(1, 3, 3) \\ &\quad + (2b - 3a - c)(2, 3, -1) \end{aligned}$$

olarak yazılır. O halde A kümesi \mathbb{R}^3 uzayını üretir. Böylece A alt-kümesinin \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayının bir tabanını oluşturduğu görülür.

2. $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ altkümesini \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayının tabanı olacak şekilde tamamlayınız.

Çözüm : Önce S kümesinin \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayının doğrusal bağımsız altkütmesi olduğunu gösterelim. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

olsun. Bu durumda $(c_1, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2) = (0, 0, 0)$ olur. Buradan $c_1 = c_2 = 0$ bulunur. O halde S doğrusal bağımsızdır. $(1, -1, 1)$ elemanı $(1, 2, 3), (0, 1, 2)$ vektörlerinin doğrusal birleşimi olarak yazılamadığından S kümesi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayını üretmez. Yani S taban değildir. Ashında S kümesi taban olmadığını \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayının taban eleman sayısının 3 olduğunu kullanarak da söyleyebiliriz. S kümesini tabana tamamlayabilmek için Önerme 4.4.7 kullanalım. Şimdi $\langle S \rangle = \{a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ altuzayında olmayan \mathbb{R}^3 uzayının bir elemanını bulacağız. O halde önce $\langle S \rangle$ altuzayını yazalım.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \langle S \rangle &\Leftrightarrow (x, y, z) = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) \quad \exists a, b \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ 3a + 2b = z \end{cases} \end{aligned}$$

olur. Bu denklem sistemin çözümü

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - 2x \\ 0 & 2 & z - 3x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - 2x \\ 0 & 0 & x - 2y + z \end{bmatrix}$$

olduğundan ancak $x - 2y + z = 0$ ise vardır. O halde

$$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

olur. $1 - 2(-1) + 1 \neq 0$ olduğundan $(1, -1, 1) \notin \langle S \rangle$ dir. Önerme 4.4.7 den $\langle S \rangle \cup \{(1, -1, 1)\}$ doğrusal bağımsızdır. Ayrıca $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ olduğundan $\langle S \rangle \cup \{(1, -1, 1)\}$ kümesi \mathbb{R}^3 uzayını üretir. O halde

$$\langle S \rangle \cup \{(1, -1, 1)\} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$$

kümesi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayının bir tabanıdır.

3. \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayında $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)$$

vektörlerinin \mathbb{R}^3 uzayının bir tabanını oluşturması için a gerçel sayısı hangi özellikleri taşımalıdır.

Çözüm : $a = 0$ ise $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ kümesi doğrusal bağımlı olduğundan taban değildir.

$a \neq 0$ ise $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ kümesinin eleman sayısı 3 ve $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ olduğundan B kümesinin taban olması için gerek ve yeter koşul doğrusal bağımsız olmasıdır. $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$c_1(a, 1, 0) + c_2(1, a, 1) + c_3(0, 1, a) = (0, 0, 0)$$

olsun. Buradan $(ac_1 + c_2, c_1 + ac_2 + c_3, c_2 + ac_3) = (0, 0, 0)$ elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} ac_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + ac_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 + ac_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözelim.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} &\xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{-aS_1 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & -a \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 - a^2 & -a \end{bmatrix} \xrightarrow{(a^2 - 1)S_2 + S_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 2a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan denklem sisteminin çözümü olması için $a^3 - 2a \neq 0$ olmalıdır. Yani $a \neq 0$ ve $a \neq \pm\sqrt{2}$ olmalıdır. Devam edersek

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 2a \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a^3 - 2a} S_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} -aS_3 + S_2 \\ -S_3 + S_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-aS_2 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, denklem sisteminin çözümünden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ elde edilir. O halde $(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)$ vektörlerinin, \mathbb{R}^3 uzayının bir tabanını oluşturması için gerek ve yeter koşul $a \neq 0$ ve $a \neq \pm\sqrt{2}$ olmasıdır.

4. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi bir V F -vektör uzayının tabanı ise

$$S = \{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\}$$

kümesinin de V uzayının tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi bir V F -vektör uzayının tabanı olduğundan $\dim_F V = 3$ olur. Bu durumda S kümesinin V F -vektör uzayının tabanı olması için gerek ve yeter koşul S kümesinin doğrusal bağımsız olmasıdır. $c_1, c_2, c_3 \in F$ olmak üzere

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + c_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + c_3(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0_F$$

olsun. Buradan

$$(c_1 + c_2 + c_3)\alpha_1 + (-c_1 + c_2 - c_3)\alpha_2 + (c_1 + c_2 - c_3)\alpha_3 = 0_F$$

elde edilir. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi, V F -vektör uzayının tabanı olduğundan son eşitlik

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0_F$$

$$-c_1 + c_2 - c_3 = 0_F$$

$$c_1 + c_2 - c_3 = 0_F$$

olmasını gerektirir. Bu homojen doğrusal denklem sistemi çözülürse $c_1 = c_2 = c_3 = 0_F$ olduğu görülür. O halde S kümesi doğrusal bağımsızdır.

5. \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -vektör uzayında $(2, 1, 0)$, $(1, -1, 2)$, $(0, 3, -4)$ vektörleri tarafından üretilen alt-uzayı ve bu altuzayın bir tabanını bulunuz.

Çözüm: $S = \{(2, 1, 0), (1, -1, 2), (0, 3, -4)\}$ kümesi tarafından üretilen altuzayı bulalım.

$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) = c_1(2, 1, 0) + c_2(1, -1, 2) + c_3(0, 3, -4) \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ olduğunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \langle S \rangle &\Leftrightarrow (x, y, z) = c_1(2, 1, 0) + c_2(1, -1, 2) + c_3(0, 3, -4) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (2c_1 + c_2, c_1 - c_2 + 3c_3, 2c_2 - 4c_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = x \\ c_1 - c_2 + 3c_3 = y \\ 2c_2 - 4c_3 = z \end{cases} \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. Bu denklem sisteminin eklenmiş katsayılar matrisine uygun elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & x \\ 1 & -1 & 3 & y \\ 0 & 2 & -4 & z \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & y \\ 0 & 1 & -2 & x - 2y - z \\ 0 & 0 & 0 & -2x + 4y + 3z \end{bmatrix}$$

elde edilir. Denklem sisteminin çözümünün olması için $-2x + 4y + 3z = 0$ olmalıdır. O halde

$$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \mid -2x + 4y + 3z = 0\}$$

olur. Burada, $2x = 4y + 3z$ ve $y = k$, $z = 2t$ alınırsa $x = 3t + 2k$ olur. Böylece $\langle S \rangle$ altuzayı

$$\langle S \rangle = \{(3t + 2k, k, 2t) \mid k, t \in \mathbb{R}\}$$

olarak da yazılır. Şimdi $\langle S \rangle$ altuzayının bir tabanını bulalım. $k = 1$, $t = 0$ için $(2, 1, 0) \in \langle S \rangle$ ve $k = 0$, $t = 1$ için $(3, 0, 2) \in \langle S \rangle$ vektörleri hem doğrusal bağımsız hem de $\langle S \rangle$ altuzayını ürettiklerinden

$$\{(2, 1, 0), (3, 0, 2)\}$$

kümesi $\langle S \rangle$ altuzayı için bir tabandır.

6. $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = x + y + z\}$ kümesinin, \mathbb{R}^4 \mathbb{R} -vektör uzayının altuzayı olduğunu gösteriniz ve bu altuzay için bir taban bulunuz.

Çözüm: $(0, 0, 0, 0) \in U$ olduğundan $U \neq \emptyset$ dir. Her $(x, y, z, w), (x', y', z', w') \in U$ ve $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} (x, y, z, w), (x', y', z', w') \in U &\Rightarrow w = x + y + z \text{ ve } w' = x' + y' + z' \\ &\Rightarrow kw = kx + ky + kz \text{ ve } w' = x' + y' + z' \\ &\Rightarrow kw + w' = (kx + ky + kz) + (x' + y' + z') \\ &\Rightarrow kw + w' = (kx + x') + (ky + y') + (kz + z') \\ &\Rightarrow (kx + x', ky + y', kz + z', kw + w') \in U \\ &\Rightarrow (kx, ky, kz, kw) + (x', y', z', w') \in U \\ &\Rightarrow k(x, y, z, w) + (x', y', z', w') \in U \end{aligned}$$

gerektilmeleri sağlandığından U , \mathbb{R}^4 \mathbb{R} -vektör uzayının bir altuzayıdır. U altuzayını

$$U = \{(x, y, z, x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

olarak da yazabiliriz. Şimdi bu altuzay için bir taban bulalım. $x = 1, y = 0, z = 0$ iken $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1)$, $x = 0, y = 1, z = 0$ iken $\alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$ ve $x = 0, y = 0, z = 1$ iken $\alpha_3 = (0, 0, 1, 1)$ olmak üzere $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi U için bir tabandır. Çünkü,

$$c_1(1, 0, 0, 1) + c_2(0, 1, 0, 1) + c_3(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

iken $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olduğundan B doğrusal bağımsız ve aynı zamanda her $(x, y, z, x + y + z) \in U$ için

$$(x, y, z, x + y + z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 1)$$

eşitliği sağlandığından B kümesi U altuzayını üretir.

7. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b = c + d = a + c = b + d = 0 \right\}$ kümesinin, $M_{2 \times 2}$ \mathbb{R} -vektör uzayının altuzayı olduğunu gösteriniz ve bu altuzay için bir taban bulunuz.

Çözüm: W kümesinin, $M_{2 \times 2}$ \mathbb{R} -vektör uzayının altuzayı olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi W altuzayına bir taban oluşturalım.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow a + b = 0, c + d = 0, a + c = 0, b + d = 0$$

olur. Buradan $b = -a, c = -a, d = -c, d = -b$ elde edilir. Yani $b = -a, c = -a, d = a$ olur. O halde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow b = -a, c = -a, d = a$$

gerektilmesi sağlanır. Bu durumda $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ olur. Bu altuzayın

tabanı da $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesidir.