SİMPLEKS ALGORİTMA

DP problemlerinin çözümünde kullanılan simpleks algoritması Dantzig tarafından 1947 yılında geliştirilmiştir. Simpleks yöntem optimal çözümün (eğer var ise) temel uygun çözümlerden (uygun çözüm bölgesinin köşe noktaları) birisi olduğu prensibine dayanır. Bu nedenle Simpleks yöntem cebirsel bir yöntem olmasına rağmen dayandığı temel fikir geometriktir. Başlangıçta uygun bölgenin bir köşesi (tüm orijinal değişkenlerin sıfır olduğu başlangıç uygun çözüm) ile işleme başlanır ve eğer söz konusu köşe en iyi çözümü vermezse yeni bir adım (iterasyon) işletilerek amaç fonksiyonunu iyileştiren (veya aynı bırakan) başka bir komşu köşeye geçilir. Bu adımlar en iyi DP çözümü bulununcaya kadar sürer. Simpleks yöntem sadece karar değişkenlerinin optimal çözümünü ve maksimum karı (minimum maliyeti) değil ayrıca önemli ekonomik bilgiler de vermektedir.

Simpleks Yöntemin Adımları:

1. DP problemi standart biçime çevrilir.

2. Bir temel uygun çözüm bulunur.

3. Mevcut temel uygun çözümün en iyi çözüm olup olmadığını araştırılır. En iyi ise problem çözülmüştür ve durulur.

4. Mevcut temel uygun çözüm en iyi çözüm değilse, amaç fonksiyon değerini daha da iyileştirmek için hangi temel dışı değişkenin temel değişken olacağını (çözüme gireceğini) ve hangi temel değişkenin çözümden çıkıp temel dışı değişken olacağını (minimum oran testi) saptayarak yeni bir temel uygun çözüm bulunur.

5. Adım 3'e dönülür.

Standart Form:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maks / Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\quad . \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\quad . \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \\
&b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0
\end{aligned}
$$

Matris formunda yazılırsa,

Maks/Min Z= $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{b} \geq 0$

Standart formun özellikleri,

1) Amaç fonksiyonu maksimizasyon ya da minimizasyon amaçlı olabilir.
2) Tüm kısıtlar eşitlik formundadır (Negatif olmama kısıtları hariç)
3) Her eşitlik kısıtının sağ yan değeri negatif değildir (≥ 0).
4) Tüm değişkenler negatif değildir (≥ 0).

Bu forma uymayan DP problemleri aşağıdaki işlemlerle standart forma dönüştürülürler:

1) (≤) şeklindeki bir kısıt denklemi, denkleme negatif sapma değişkeninin eklenmesi ile (=) şeklinde ifade edilebilir. Eklenen bu değişkene "gevşek (**aylak**) değişken" adı verilir. Bu değişken, ilgili kısıtta kullanılamayan, boşa harcanan ya da kaybedilen kaynak miktarını gösterir. Gevşek değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayı değeri sıfırdır.

Örnek: $x_1 \leq 8$

$x_1 + x_2 = 8$

Eşitlik haline getirilen bu kısıtta, $x_2 \geq 0$ ile gösterilen gevşek (aylak) değişken kullanılmayan kaynak miktarını göstermektedir.

2) (≥) şeklindeki bir kısıt denklemi, denkleme pozitif sapma değişkeninin çıkartılması ile (=) şeklinde ifade edilebilir. Çıkartılan bu değişkene "fazlalık (**artık**) değişken" adı verilir. Fazlalık değişkeni, ilgili kısıtın gerektirdiği minimum düzeyini aşan miktarı göstermektedir.

Örnek: $x_1 \geq 10$

$x_1 - x_2 = 10$

Eşitlik haline getirilen bu kısıtta, $x_2 \geq 0$ ile gösterilen artık değişken minimum gereksinimi geçme miktarını göstermektedir

3) Sağ taraf sabiti (-) değerli olan eşitlik ya da eşitsizlik şeklindeki bir kısıt denklemi, (-1) ile çarpılıp sağ taraf sabitinin (+) değer alması sağlanır.

Örnek: $-2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -10$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

4) İşareti sınırlandırılmamış bir değişken (pozitif, negatif veya sıfır değeri alabilen değişkenler) iki tane negatif olmayan değişkenin farkı olarak tanımlanabilir. Bu dönüşüm tüm kısıtlarda ve amaç fonksiyonunda uygulanmalıdır.

Örnek: $\text{Min } Z = x_1 - 2x_2$

$x_2 \geq 0, \qquad x_1$ işareti sınırlandırılmamış.

$x_1 = (x_1' - x_1'')$ yazılır. Burada $x_1' \geq 0, \qquad x_1'' \geq 0.$

$\text{Min } Z = x_1' - x_1'' - 2x_2$

$x_1', x_1'', x_2 \geq 0$

5) Bir fonksiyonun maksimizasyonu aynı fonksiyonun (-1) ile çarpımının minimizasyonuna eşittir. Diğer bir ifadeyle, aynı kısıtlar kümesi kullanıldığında, her iki durumda da değişkenlerin optimal değerleri eşit amaç fonksiyon değerlerinin büyüklüğü aynı fakat ters işaretli olacaktır.

$\text{Min } Z = \text{Maks } (-Z) = \text{Maks } (Z') \qquad -Z^* = Z'^*$

Örnek: $\text{Min } Z = 3X_1 + X_2 = \text{Maks } (-Z) = -3X_1 - X_2$

Kısıt eşitsizliklerinin eşitlik haline getirilmesinde kullanılan yardımcı değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları ve başlangıç simpleks tabloda yer alabilme durumu aşağıda özetlenmiştir:

Kısıt Tipi	**Gerekli Yardımcı Değişkenler**	**Amaç Fonksiyonundaki Katsayısı**		**Başlangıç Simpleks Tabloda Bulunabilir mi?**
		Maks	**Min**	
≤	Aylak değişken $(+X_{n+1})$	0	0	Evet
≥	Artık değişken $(-X_{n+1})$ ve	0	0	Hayır
	Yapay değişken $(+X_{n+2})$	- M	+M	Evet
=	Yapay değişken $(-X_{n+1})$	-M	+M	Evet

Örnek 1: Aşağıda verilen DP problemini standart formda yazınız.

$\text{Min } Z = X_1 - 2X_2 + 3X_3$

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 7$

$X_1 - X_2 + X_3 \geq 2$

$3X_1 - X_2 - 2X_3 = -5$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

$\text{Min } Z = X_1 - 2X_2 + 3X_3$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 7$

$X_1 - X_2 + X_3 - X_5 = 2$

$-3X_1 + X_2 + 2X_3 = 5$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Örnek 2: Aşağıda verilen DP problemini standart formda yazınız.

$\text{Maks } Z = 18X_1 + 16X_2$

$6X_1 + X_2 \geq 12$

$X_1 - X_2 \geq 8$

$3X_1 - X_2 = 24$

$X_1 \leq 5$

$X_2 \leq 5$

$X_1, X_2 \geq 0$

$\text{Maks } Z = 18X_1 + 16X_2$

$6X_1 + X_2 - X_3 = 12$

$X_1 - X_2 - X_4 = 8$

$3X_1 - X_2 = 24$

$X_1 + X_5 = 5$

$X_2 + X_6 = 5$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

Temel Çözüm, Temel Olmayan Çözüm ve Temel Uygun Çözüm

Ax = **b** biçimindeki doğrusal bağımsız vektörlerden oluşan, m denklem ve n değişkenin olduğu (n>m) bir eşitlik sistemin çözümünde, (n-m) tane değişkene sıfır değeri verilerek denklem sayısı (m) kadar çözüm bulunabilir. Burada, sıfır değeri verilen değişkenlere "temel dışı değişken", değer alması için çözüme alınan değişkenlere ise "temel değişken" denir. Bir çözümde tüm temel değişkenler sıfır veya sıfırdan büyük değer aldıysa bu çözüme bir "temel uygun çözüm" denir ve bir temel uygun çözüm aynı zamanda bir köşe nokta demektir.
m eşitlik ve n değişken için,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

temel çözüm (köşe noktası) vardır. (n değişkenden m temel değişken seçme sayısı)

m=2, n=5 için 10,

m=8, n=10 için 45,

m=10, n=15 için 3003,

m =10, n=20 için 184756

farklı temel değişken seçimi yapılabilir. Bu kadar fazla çözüm içerisinden temel uygun çözümleri bulmak ve amaç fonksiyonunu eniyileyen temel uygun çözümü belirlemek oldukça zor bir iştir. Bu nedenle tüm köşe noktalarını değerlendirmeden optimal çözüme ulaşan sistematik ve etkin bir algoritmaya ihtiyaç vardır.

Örnek: Aşağıdaki DP problemini standart forma dönüştürünüz. Tüm temel ve temel uygun çözümleri cebirsel yolla belirleyiniz.

Maks $Z = 2X_1 + 3X_2$

$2X_1 + X_2 \leq 4$

$X_1 + 2X_2 \leq 5$

$X_1,\ X_2 \geq 0$

$2X_1 + X_2 + X_3 = 4$

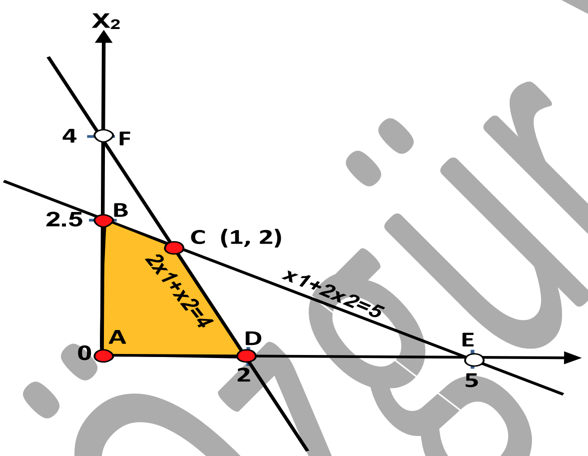
$X_1 + 2X_2 + X_4 = 5$

$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0,\ X_4 \geq 0$

n=4 (değişken sayısı) m=2 (kısıt sayısı=temel değişken sayısı) n-m=2 (temel dışı değişken sayısı)

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$ temel çözüm vardır.

Temel olmayan (sıfır) değişkenler	Temel Değişkenler	Temel Çözüm	Köşe Noktası	Uygun çözüm mü?	Z değeri
X_1, X_2	X_3, X_4	(0, 0, 4, 5)	A	Evet	0
X_1, X_3	X_2, X_4	(0, 4, 0, -3)	F	Hayır	
X_1, X_4	X_2, X_3	(0, 5/2, 3/2, 0)	B	Evet	15/2
X_2, X_3	X_1, X_4	(2, 0, 0, 3)	D	Evet	4
X_2, X_4	X_1, X_3	(5, 0, -6, 0)	E	Hayır	
X_3, X_4	X_1, X_2	(1, 2, 0, 0)	C	Evet	**8 (Optimal)**



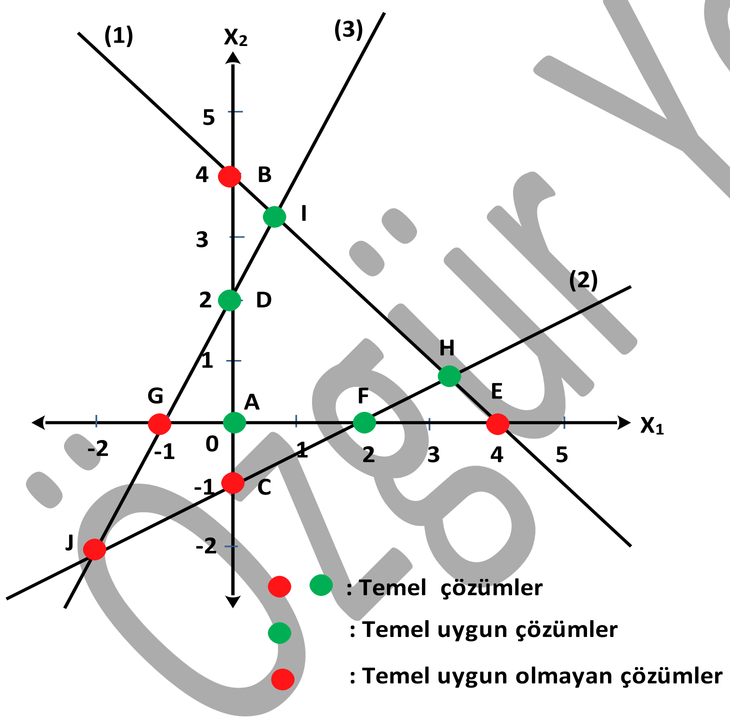
Örnek: Aşağıdaki DP problemini standart forma dönüştürünüz. Tüm temel uygun ve temel uygun olmayan çözümleri cebirsel yolla belirleyiniz.

Maks $Z= X_1 + 2X_2$		Maks $Z= X_1 + 2X_2$
$X_1 + X_2 \leq 4$	(1)	$X_1 + X_2 + X_3 = 4$
$X_1 - 2X_2 \leq 2$	(2)	$X_1 -2X_2 + X_4 = 2$
$-2X_1 + X_2 \leq 2$	(3)	$-2X_1 + X_2 + X_5 = 2$
$X_1, X_2 \geq 0$		$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

n= 5, m= 3, n-m= 5-3= 2 (temel olmayan değişken sayısı)

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$ temel çözüm (uygun ve uygun olmayan) vardır:

Temel çözümler	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Köşe noktası	Uygun çözüm mü?	Maks $Z= X_1 + 2X_2$
1	0	0	4	2	2	A	**Evet**	0
2	0	4	0	10	-2	B	Hayır	
3	0	-1	5	0	3	C	Hayır	
4	0	2	2	6	0	D	**Evet**	4
5	4	0	0	-2	10	E	Hayır	
6	2	0	2	0	6	F	**Evet**	2
7	-1	0	5	3	0	G	Hayır	
8	10/3	2/3	0	0	8	H	**Evet**	14/3
9	2/3	10/3	0	8	0	I	**Evet**	**22/3 Optimal**
10	-2	-2	8	0	0	J	Hayır	0



Tüm temel çözümleri değerlendirerek optimali bulmak yerine, sadece temel uygun çözümlerin küçük bir bölümünü kullanarak optimale ulaşan Simpleks Yöntem gibi zeki bir arama algoritmasına ihtiyaç vardır.

Başlangıç Simpleks Tablo:

		C_J	C_1	C_2	C_3	...	C_n	0	0	0	...	0
C_B	Temel değişkenler	Çözüm X_B	X_1	X_2	X_3	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	X_{n+3}	...	X_{n+m}
0	X_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	1	0	0	...	0
0	X_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	0	1	0	...	0
0	X_{n+3}	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}	0	0	1	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	0	0	0	...	1
	Z_j	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	...	Z_n	Z_{n+1}	Z_{n+2}	Z_{n+3}	...	Z_{n+m}
	C_j-Z_j		C_1-Z_1	C_2- Z_2	C_3-Z_3	...	C_n-Z_n	C_{n+1}-Z_{n+1}	C_{n+2}-Z_{n+2}	C_{n+3}-Z_{n+3}	...	C_{n+m}-Z_{n+m}

C_J: Amaç fonsiyonundaki tüm değişkenlerin katsayıları,

C_B: Temeldeki değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları,

X_B: Temel değişkenlerin çözüm değerleri,

b_i: i. kısıtın sağ taraf değeri,

a_{ij}: i. kısıtın j. değişkeninin katsayısı,

Z_0: Amaç fonsiyonunun değeri:

$$Z_0 = C_B^T X_B = \sum_{i=1}^{m} C_{Bi} X_{Bi}$$

Z_j Satırı: Temelde olmayan bir değişkenin 1 biriminin temele girmesi ile amaç fonksiyonunun değerinde meydana gelecek azalmayı “vazgeçilen kar miktarını” gösterir:

$$Z_j = C_B^T a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} C_{Bi} a_{ij} \qquad j = 1, \dots, n+m$$

C_j-Z_j Satırı: (net değerlendirme satırı=indeks satırı): Temelde olmayan bir değişkenin 1 biriminin temele girmesi ile amaç fonksiyonunun değerinde meydana gelecek “net değişim miktarını=iyileşme” gösterir. C_j satırındaki değerler ile Z_j satırındaki değerlerin farkına eşittir.

Örnek 1. Bir firma A ve B ürünlerini üretmektedir. Bu ürünlerin iki farklı makinada işlem görmesi gerekiyor. Birinci makinada 300 saat ikinci makinada 110 saat kullanılabilecek kapasite bulunuyor. A ürününün her biri birinci makinada 30 saat ikinci makinada 5 saat işlem gerektiriyor. B ürünün her biri birinci makinada 20 saat ikinci makinada 10 saat işlem gerektiriyor. A ürününden 6$, B ürününden 8$ kar elde ediliyor. Karını maksimum yapmak isteyen firma, A ve B ürünlerinden kaçar adet üretmelidir? Problemin DP modelini kurup, simpleks yöntem yardımıyla çözünüz.

Maks $Z = 6X_1 + 8X_2$ (Kar fonksiyonu)

$30X_1 + 20X_2 \leq 300$ (I. makinanın kullanım süresine ilişkin kısıt)

$5X_1 + 10X_2 \leq 110$ (II. makinanın kullanım süresine ilişkin kısıt)

$X_1, X_2 \geq 0$

Standart form:

Maks $Z = 6X_1 + 8X_2 + 0X_3 + 0X_4$

$30X_1 + 20X_2 + X_3 = 300$

$5X_1 + 10X_2 + \quad X_4 = 110$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

n=4 m=2 (temel değişken sayısı) (n-m) = 4 – 2 = 2 (temel olmayan değişken sayısı)

Temel olmayan değişkenler: (X_1 X_2)

Temel değişkenler: (X_3 X_4)

Başlangıç temel uygun çözüm: (X_1= 0, X_2= 0, X_3= 300, X_4= 110)

Başlangıçta A ve B ürünleri sıfır adet üretiliyor. Bu nedenle, I. makinada 300 saat, II. makinada 110 saat kullanılmayan makine süresi mevcut)

Amaç fonsiyonunun başlangıç değeri: Maks Z= 6*(0) + 8*(0) = 0

Başlangıç Simpleks Tablo:

		C_J	6	8	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_3	300	30	20	1	0
0	X_4	110	5	10	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		6	8	0	0

$\underline{Z_j \text{ ve } C_j\text{-}Z_j \text{ satırlarındaki değerler:}}$

$$Z_0 = C_B^T X_B = \sum_{i=1}^{2} (0 \quad 0) \binom{300}{110} = 0$$

$$Z_1 = C_B^T a_{i1} = \sum_{i=1}^{2} (0 \quad 0) \binom{30}{5} = 0 \qquad Z_2 = C_B^T a_{i2} = \sum_{i=1}^{2} (0 \quad 0) \binom{20}{10} = 0$$

$$Z_3 = C_B^T a_{i3} = \sum_{i=1}^{2} (0 \quad 0) \binom{1}{0} = 0 \qquad Z_4 = C_B^T a_{i4} = \sum_{i=1}^{2} (0 \quad 0) \binom{0}{1} = 0$$

$$C_1 - Z_1 = 6 - 0 = 6 \qquad C_2 - Z_2 = 8 - 0 = 8$$

$$C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0 \qquad C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0$$

Çözümün Optimal Olup Olmadığının Kontrolü:

Çözümün optimal olup olmadığını anlamak için $C_j - Z_j$ satırındaki değerlere bakılır.

Maks problemlerinde (C_j - Z_j) satırındaki tüm değerler sıfır yada sıfırdan küçük ise, optimal çözüme ulaşıldığı anlaşılır, yani tüm (C_j - Z_j) ≤ 0 olmalıdır.

Min problemlerinde (C_j - Z_j) satırındaki tüm değerler sıfır yada sıfırdan büyük ise, optimal çözüme ulaşıldığı anlaşılır, yani tüm (C_j - Z_j) ≥ 0 olmalıdır.

$C_1 - Z_1 = 6$ ve $C_2 - Z_2 = 8 > 0$ olduğundan çözüm optimal değildir.

Yeni Simpleks Tablonun Oluşturulması:

Simpleks yöntem ile en iyi çözümü bulmak için, başlangıç simpleks tablo oluşturulduktan sonra, iterasyon (ardışık çözüm) işlemlerine geçilir. 1. simpleks tabloyu oluşturmak için sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır:

1. **Pivot sütunun (=temele girecek değişkenin) belirlenmesi**

Maksimum problemlerinde, (C_j - Z_j) satırındaki en büyük pozitif sayının bulunduğu sütun pivot sütun olarak belirlenir: Maks $\{C_j - Z_j \;,\; C_j - Z_j > 0\}$.

Minimum problemlerinde, (C_j - Z_j) satırındaki <u>en küçük negatif</u> sayının bulunduğu sütun pivot sütun olarak belirlenir: $\text{Min}\left\{C_j - Z_j \;\;,\;\; C_j - Z_j < 0\right\}$.

Maksimum ($C_1 - Z_1 = 6$, $C_2 - Z_2 = \mathbf{8}$) X_2 değişkeni temele girer. Bu değişken, mevcut çözümde birim başına en büyük iyileşmeyi vermektedir.

		C_J	6	8	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_3	300	30	20	1	0
0	X_4	110	5	10	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j - Z_j		6	8	0	0

2. **Pivot satırın (=temelden çıkacak değişkenin) belirlenmesi:**

X_B çözüm sütununda yer alan değerler pivot sütundaki (r. sütun belirlenmiş olsun, X_r değişkeni) elemanlara oranlanır ve elde edilen <u>en küçük pozitif</u> değerin bulunduğu satır pivot satır olarak belirlenir. Minimum oranı hesaplarken pivot kolon elemanları içinde sıfır yada negatif değerli a_{ir} değerleri dikkate alınmaz. (Minimum oran kuralı maksimum ve minimum problemlerinde aynıdır.)

$$\text{Min}\left\{\frac{X_{Bi}}{a_{ir}} \quad , \quad a_{ir} > 0\right\}$$

Min (300/20 = 15, 110/10=**11**) X_4 değişkeni temelden çıkar.

		C_J	6	8	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_3	300	30	20	1	0
0	X_4	110	5	10	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j - Z_j		6	8	0	0

3. **Pivot sayının belirlenmesi**

Pivot satır ile pivot sütunun kesişim noktasında yer alan sayı pivot sayıdır.

Pivot sayı= **10**

Bu aşamadan sonra 1. simpleks tablonun oluşturulmasına geçilir.

Birinci simpleks tablo oluşturulurken:

I) Pivot satırda yer alan tüm değerler pivot sayıya bölünür.

II) Diğer satırlardaki yeni değerler ise aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$yeni\ değer =$$
$$eski\ değer - \{(pivot\ satırda\ karşılık\ gelen\ değer * pivot\ kolonda\ karşılık\ gelen\ değer)\ /pivot\}$$

X_3 satırındaki yeni değerler:

300 – {(110∗20) / 10} = 80

30 – {(5∗20) / 10} = 20

20 – {(10∗20) / 10} = 0

1 – {(0∗20) / 10} = 1

0 – {(1∗20) / 10} = -2

Z_j ve C_j-Z_j satırlarındaki yeni değerler:

$$Z_0 = C_B^T X_B = \sum_{i=1}^{2} (0\ \ 8) \binom{80}{11} = 88$$

$$Z_1 = C_B^T a_{i1} = \sum_{i=1}^{2} (0\ \ 8) \binom{20}{5/10} = 4 \qquad Z_2 = C_B^T a_{i2} = \sum_{i=1}^{2} (0\ \ 8) \binom{0}{1} = 8$$

$$Z_3 = C_B^T a_{i3} = \sum_{i=1}^{2} (0\ \ 8) \binom{1}{0} = 0 \qquad Z_4 = C_B^T a_{i4} = \sum_{i=1}^{2} (0\ \ 8) \binom{-2}{1/10} = 8/10$$

$$C_1 - Z_1 = 6 - 4 = 2 \qquad C_2 - Z_2 = 8 - 8 = 0$$

$$C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0 \qquad C_4 - Z_4 = 0 - \frac{8}{10} = -8/10$$

		C_J	6	8	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_3	80	20	0	1	-2
8	X_2	11	5/10	1	0	1/10
	Z_j	88	4	8	0	8/10
	C_j - Z_j		2	0	0	-8/10

$C_1 - Z_1 = 2 > 0$ olduğundan çözüm optimal değildir.

Pivot sütunun belirlenmesi:

$\text{Maks}\{C_1 - Z_1 = 2\}$ X_1 değişkeni temele girer.

Pivot satırın belirlenmesi:

$\text{Min}\left\{\frac{80}{20} = \mathbf{4}\ ;\ \frac{11}{(5/10)} = 22\right\}$ X_3 değişkeni temelden çıkar.

		C_J	6	8	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_3	80	20	0	1	-2
8	X_2	11	5/10	1	0	1/10
	Z_j	88	4	8	0	8/10
	C_j - Z_j		2	0	0	-8/10

Pivot satırda yer alan tüm değerler pivot sayıya bölünür.

<u>X_2 satırlardaki yeni değerler</u>:

11 − {(80 ∗ (5/10)) / 20} =9

(5/10) − {(20 ∗ (5/10)) / 20} = 0

1 − {(0 ∗ (5/10)) / 20} = 1

0 − {(1 ∗ (5/10)) / 20} = -1/40

(1/10) − {(-2 ∗ (5/10)) / 20} = 3/20

<u>Z_j ve C_j-Z_j satırlarındaki yeni değerler:</u>

$$Z_0 = C_B^T X_B = \sum_{i=1}^{2} (6\ \ 8)\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} = 96$$

$$Z_1 = C_B^T a_{i1} = \sum_{i=1}^{2} (6\ \ 8)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 6 \qquad Z_2 = C_B^T a_{i2} = \sum_{i=1}^{2} (6\ \ 8)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 8$$

$$Z_3 = C_B^T a_{i3} = \sum_{i=1}^{2} (6\ \ 8)\begin{pmatrix}1/20\\-1/40\end{pmatrix} = -1/10 \qquad Z_4 = C_B^T a_{i4} = \sum_{i=1}^{2} (6\ \ 8)\begin{pmatrix}-1/10\\3/20\end{pmatrix} = 6/10$$

$C_1 - Z_1 = 6 - 6 = 0$ $C_2 - Z_2 = 8 - 8 = 0$

$C_3 - Z_3 = 0 - \frac{1}{10} =$ -1/10 $C_4 - Z_4 = 0 - 6/10 = -6/10$

		C_J	6	8	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4
6	X_1	4	1	0	1/20	-1/10
8	X_2	9	0	1	-1/40	3/20
	Z_j	96	6	8	1/10	6/10
	$C_j - Z_j$		0	0	-1/10	-6/10

$C_j - Z_j$ satırındaki tüm değerler ≤ 0 olduğundan çözüm optimaldir.

X_1*= 4 adet A ürünü ve X_2*= 9 adet B ürünü üretilirse Z*= 96$ kar elde edilir.

X_3*= 0 üretimde A makinesinin tüm kapasitesi kullanılmış, kullanılmayan süre kalmamıştır.

X_4*= 0 üretimde B makinesinin tüm kapasitesi kullanılmış, kullanılmayan süre kalmamıştır.

Örnek 2. Aşağıda verilen DP probleminin optimal çözümünü bulunuz.

$\text{Min } Z = X_1 - 3X_2 + 2X_3$

$3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$

$-2X_1 + 4X_2 \leq 12$

$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Yöntem 1:

$\text{Min } Z = X_1 - 3X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$

$3X_1 - X_2 + 2X_3 + X_4 = 7$

$-2X_1 + 4X_2 + X_5 = 12$

$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 + X_6 = 10$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

		C_J	1	-3	2	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_4	7	3	-1	2	1	0	0
0	X_5	12	-2	4	0	0	1	0
0	X_6	10	-4	3	8	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		1	-3	2	0	0	0

		C_J	1	-3	2	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_4	10	5/2	0	2	1	1/4	0
-3	X_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0
0	X_6	1	-5/2	0	8	0	-3/4	1
	Z_j	-9	3/2	-3	0	0	-3/4	0
	$C_j - Z_j$		-1/2	0	2	0	3/4	0

		C_J	1	-3	2	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_1	4	1	0	4/5	2/5	1/10	0
-3	X_2	5	0	1	2/5	1/5	3/10	0
0	X_6	11	0	0	10	1	-1/2	1
	Z_j	-11	1	-3	-2/5	-1/5	-8/10	0
	$C_j - Z_j$		0	0	8/5	1/5	8/5	0

$C_j - Z_j$ satırındaki tüm değerler ≥ 0 olduğundan çözüm optimaldir.

Optimal Çözüm: $X_1^* = 4$, $X_2^* = 5$, $X_3^* = 0$, $X_6^* = 11$ $Z^* = -11$.

Yöntem 2:

$\text{Min } Z = X_1 - 3X_2 + 2X_3$	$\text{Maks } Z' = -X_1 + 3X_2 - 2X_3$	$\text{Maks } Z' = -X_1 + 3X_2 - 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$
$3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$	$3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$	$3X_1 - X_2 + 2X_3 + X_4 = 7$
$-2X_1 + 4X_2 \leq 12$	$-2X_1 + 4X_2 \leq 12$	$-2X_1 + 4X_2 + X_5 = 12$
$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$	$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$	$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 + X_6 = 10$
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

		C_J	-1	3	-2	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_4	7	3	-1	2	1	0	0
0	X_5	12	-2	4	0	0	1	0
0	X_6	10	-4	3	8	0	0	1
	Z'_j	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		-1	3	-2	0	0	0

		C_J	-1	3	-2	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_4	10	5/2	0	2	1	1/4	0
3	X_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0
0	X_6	1	-5/2	0	8	0	-3/4	1
	Z'_j	9	-3/2	3	0	0	3/4	0
	$C_j - Z_j$		1/2	0	-2	0	-3/4	0

		C_J	-1	3	-2	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-1	X_1	4	1	0	4/5	2/5	1/10	0
3	X_2	5	0	1	2/5	1/5	3/10	0
0	X_6	11	0	0	10	1	-1/2	1
	Z'_j	11	-1	3	2/5	1/5	8/10	0
	$C_j - Z_j$		0	0	-8/5	-1/5	-8/5	0

$C_j - Z_j$ satırındaki tüm değerler ≤ 0 olduğundan bulunan çözüm optimaldir.

Maks $Z'^* = 11$ Optimal Çözüm: $X_1^* = 4$, $X_2^* = 5$, $X_3^* = 0$, $X_6^* = 11$ Min $Z^* = -11$.