HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

MOMENTLER VE YARATICI FONKSİYONLAR

Doç.Dr. Yasemin Kayhan Atılgan (Şube 01)
Doç.Dr. Derya Ersel (Şube 02)

huzem

MOMENTLER

μ ve σ^2 parametreleri, bir X r.d.'nin $f(x)$ dağılımının konum ve yayılımını tanımlamada anlamlı sayısal tanımlayıcı ölçütler olsa da dağılımı tek olarak tanımlamada yeterli olmayacaklardır. Bir çok dağılım aynı ortalama ve standart sapma değerlerine sahip olabilir. İşte bu noktada $f(x)$ dağılımını tek olarak tanımlamak için sayısal tanımlayıcı ölçütlerin bir kümesi olarak da düşünülebilen momentler önemli olacaktır. Momentler, aşağıdaki gibi genel bir eşitlik ile verilebilir.

$$E\left((aX+b)^n\right)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^iE\left(X^{n-i}\right)$$

Yukarıdaki eşitliğe Binom açılımı yardımıyla aşağıdaki gibi ulaşılır.

$$E\left((aX+b)^n\right)=E\left\{(aX+b)^n\right\}=E\left\{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(ax)^{n-i}b^i\right\}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^iE\left(X^{n-i}\right)$$

Orijine Göre ve Ortalamaya Göre Moment

Yukarıdaki eşitlikte $a=1$ ve $b=0$ alınırsa X r.d.'nin orijine göre momentlerine, $a=1$ ve $b=\mu$ alınırsa da ortalamaya göre momentlerine ulaşılır.

TANIM 1: X r.d.nin, μ_r' ile gösterilen, orijine göre r. momenti $E(X^r)$ olarak tanımlanır.

$r=0,1,2,\ldots$ için orijine göre moment,

X r.d. kesikli ise, $\mu_r'=E(X^r)=\sum_x x^r f(x)$ biçiminde,

X r.d. sürekli ise, $\mu_r'=E(X^r)=\int_{-\infty}^{\infty}x^r f(x)\,dx$ biçiminde gösterilir.

Özel olarak, $r=0$ olarak alınırsa, orijine göre sıfırıncı moment, $\mu_0'=E(X^0)=E(1)=1$ elde edilir. Ayrıca, $r=1$ olarak alındığında, orijine göre birinci moment, $\mu_1'=E(X)=\mu$ ve $r=2$ olarak alındığında, orijine göre ikinci moment, $\mu_2'=E(X^2)$ elde edilir. Orijine göre birinci moment X r.d.nin dağılımının merkezini ifade eder ve dağılımın 'ortalaması' olarak adlandırılır. Orijine göre ikinci moment ise dağılımın varyansını bulmak için kullanılır.

İstatistiksel olarak önemli olan bir diğer moment ise, X r.d.nin ortalamasına göre alınan momentlerdir ve r.d.ninin dağılımının şeklini belirlemede kullanılır.

TANIM 2: X r.d.nin, μ_r ile gösterilen, ortalamaya göre r. momenti $E\left[(X-\mu)^r\right]$ olarak tanımlanır.

$r=0,1,2,\ldots$ için ortalamaya göre moment,

X r.d. kesikli ise, $\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \sum_x (x-\mu)^r f(x)$ biçiminde,

X r.d. sürekli ise, $\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$ biçiminde gösterilir.

Özel olarak $r=0$ olarak alınırsa, ortalamaya göre sıfırıncı moment, $\mu_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1$ elde edilir. Ayrıca, $r=1$ olarak alındığında, ortalamaya göre birinci moment, $\mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X)-\mu = \mu-\mu = 0$ ve $r=2$ olarak alındığında, ortalamaya göre ikinci moment, $\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X) = \sigma^2$ elde edilir. Ortalamaya göre ikinci momentin istatistiksel olarak ayrı bir önemi vardır, çünkü μ_2, r.d.nin dağılımının yayılımını gösteren "varyans (σ^2)" olarak tanımlanır.

Birçok durumda, ortalamaya göre momentler, orijine göre momentler türünden tanımlanabilir. $(X-\mu)^r$ ifadesinin Binom açılımından faydalanarak ortalamaya göre r'inci moment aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-\mu)^i E\left(X^{r-i}\right)$$

Eşitlikteki $E\left(X^{r-i}\right)$ terimi orijine göre $(r-i)$'inci momenttir.

Buradan yola çıkarak, ortalamaya göre ikinci moment olan varyansı, orijine göre momentler türünden aşağıdaki gibi yazabiliriz. Eşitlikte $r=2$ alalım. Bu durumda ortalamaya göre ikinci moment,

$$\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} (-\mu)^i E\left(X^{2-i}\right)$$

$$= \binom{2}{0}(-\mu)^0 E\left(X^2\right) + \binom{2}{1}(-\mu)^1 E(X) + \binom{2}{2}(-\mu)^2 E\left(X^0\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 = \mu_2' - \mu^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

biçiminde orijine göre birinci ve ikinci momentten yararlanılarak yazılabilir.

Ortalamaya göre üçüncü moment (μ_3) çarpıklık katsayısının, ortalamaya göre dördüncü moment (μ_4) ise basıklık katsayısının hesaplanmasında kullanılır. Çarpıklık ve basıklık katsayısı aşağıdaki formüllerden yararlanılarak hesaplanır.

Çarpıklık katsayısı: $\alpha_3 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$

Basıklık katsayısı: $\alpha_4 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$

Bir r.d.'nin dağılımını belirlemek için momentlerden yararlanılabilir ancak sonsuz momentler kümesi bir dağılımı kesin olarak belirlemeye her zaman yeterlidir demek yanlış bir çıkarsama olacaktır. Çünkü tamamen aynı momentlere sahip iki farklı dağılım olabilir.

İki r.d. tamamen farklı o.y.f.larına sahip olsa da tüm momentleri aynı olabilir. Eğer r.d.ninin tanım kümesi 'sınırlı' ise bu sorun ile karşılaşılmaz ve r.d.ninin sonsuz sayıdaki momentlerinin kümesi onun dağılımını kesin olarak tanımlamada yeterlidir denir.

Yaratıcı Fonksiyonlar

Gerçel değerli bir r.d.'nin bir yaratıcı fonksiyonu, genel olarak, başka bir deterministik değişken ile birlikte ilgili r.d.'nin bir dönüşümünün beklenen değeri olarak tanımlanabilir. Bu yaratıcı fonksiyonlar r.d.'nin dağılımının ya da momentlerinin belirlenmesinde kullanılır. Bu bölümde bu yaratıcı fonksiyonlardan,

- Moment çıkaran (yaratıcı) fonksiyon
- Olasılık çıkaran fonksiyon
- Karakteristik fonksiyon
- Kümülant çıkaran fonksiyon

üzerinde durulacaktır.

Moment Çıkaran Fonksiyonu

TANIM 3: Bir X r.d. için moment çıkaran fonksiyon (MÇF), $M_X(t)=E(e^{tX})$ olarak tanımlanır. X r.d. MÇF'nun tanımlı olabilmesi için bu fonksiyonun b bir pozitif sabit olmak üzere $|t|\le b$ komşuluğunda sonlu olması istenir.

X r.d. kesikli ise MÇF,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_x e^{tx}f(x)$$

eşitliği ile;

X r.d. sürekli ise MÇF,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx$$

eşitliği ile hesaplanır. MÇF, t değişkeninin bir fonksiyonudur.

$E(e^{tX})$ ifadesinin neden MÇF olarak adlandırıldığını anlamak için e^{tX} teriminin Maclaurin açılımını inceleyelim.

$$e^{tx}=1+tx+\frac{(tx)^2}{2!}+\frac{(tx)^3}{3!}+\ldots+\frac{(tx)^r}{r!}+\ldots$$

$$M_X(t)=\sum_x\left[1+tx+\frac{(tx)^2}{2!}+\frac{(tx)^3}{3!}+\ldots+\frac{(tx)^r}{r!}+\ldots\right]f(x)$$

$$=\sum_x f(x)+t\sum_x xf(x)+\frac{t^2}{2!}\sum_x x^2f(x)+\ldots+\frac{t^r}{r!}\sum_x x^rf(x)+\ldots$$

$$=1+tE(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\ldots+\frac{t^r}{r!}E(X^r)+\ldots$$

$$=1+\mu_1't+\mu_2'\frac{t^2}{2!}+\ldots+\mu_r'\frac{t^r}{r!}+\ldots$$

Açıkça görülüyor ki, X r.d.'nin MÇF'nun Maclaurin seri açılımında $\frac{t^r}{r!}$ teriminin katsayısı μ_r', r.d.'nin orijine göre r'inci momentini vermektedir.

ÖRNEK: X r.d.'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \text{ için} \\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

olarak verilsin. Bu r.d.'nin orijine göre r'inci momentini (μ_r') bulunuz.

Çözüm: X r.d.'nin MÇF'u Tanım 2.3'ten aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}f(x)\,dx=\int_0^\infty e^{tx}e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{-x(1-t)}dx=\frac{1}{1-t},\quad t<1 \text{ için}$$

$|t|<1$ için bu MÇF'un Maclaurin seri açılımı en genel haliyle,

$$M_X(t)=M_X(0)+\frac{M_X'(0)}{1!}t+\frac{M_X''(0)}{2!}t^2+\frac{M_X'''(0)}{3!}t^3+\ldots+\frac{M_X^{(r)}(0)}{r!}t^r+\ldots$$

$$M_X(0)=1=0!,\ M_X'(0)=1=1!,\ M_X''(0)=2=2!,\ M_X'''(0)=6=3!,\ \ldots,\ M_X^{(r)}(0)=r!,\ \ldots$$

$$M_X(t)=1+1!\frac{t}{1!}+2!\frac{t^2}{2!}+3!\frac{t^3}{3!}+\ldots+r!\frac{t^r}{r!}+\ldots$$

Bu durumda, $r=0,1,2,\ldots$ için orijine göre r'inci moment $\mu_r'=r!$ olarak bulunur.

Bir raslantı değişkeninin momentlerini belirlemek için MÇF'u Maclaurin serisine açmak yerine daha kolay bir başka yaklaşım kullanılır. Bu yaklaşım aşağıdaki teorem ile verilebilir.

TEOREM 1: X r.d. için $M_X(t)$ var ise herhangi bir r tamsayısı için,

$$\mu_r'=\left.\frac{d^rM_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}=E(X^r)$$

yazılabilir.

İspat: X r.d. için $M_X(t)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_X(t)=1+\mu_1't+\mu_2'\frac{t^2}{2!}+\ldots+\mu_r'\frac{t^r}{r!}+\ldots$$

Bu MÇF'un birinci türevi:

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=\mu_1'+\frac{2t}{2!}\mu_2'+\frac{3t^2}{3!}\mu_3'+\ldots+\frac{rt^{r-1}}{r!}\mu_r'+\ldots \qquad \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\mu_1'$$

MÇF'un ikinci türevi:

$$\frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = \mu_2' + \frac{2t}{2!}\mu_3' + \ldots + \frac{r(r-1)t^{r-2}}{r!}\mu_r' + \ldots \qquad \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mu_2'$$

Türev işlemi benzer şekilde devam ettirilirse, $\left.\dfrac{d^rM_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \mu_r' \;, \quad r = 1,2,3,\ldots \;\; için$

yazılabileceği görülür.

MÇF'un önemli bir özelliği raslantı değişkenlerinin momentlerinin hesaplanmasında kolaylık sağlamasıdır. Bir diğer önemli özelliği ise, bir r.d. nin MÇF tanımlı ise yani varsa bu fonksiyon tek bir olasılık dağılımına işaret eder. Her olasılık dağılımının MÇF'u kendisine özgüdür. Eğer Y ve Z gibi iki r.d.nin MÇF'ları aynı ise bu iki r.d.nin olasılık dağılımları da aynı olacaktır.

ÖRNEK: X r.d.'nin MÇF'u, $M_X(t) = e^{3.2(e^t-1)}$ olarak bulunmuş ise bu r.d.'nin olasılık dağılımı nedir?

Çözüm: Poisson dağılımının MÇF'u $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ biçimindedir. Dikkat edilecek olursa örnekte verilen MÇF, Poisson dağılımında $\lambda = 3.2$ alınarak elde edilmiştir. Bu durumda X r.d.'nin $\lambda = 3.2$ parametresi ile Poisson dağılımına $(X \sim P(3.2))$ sahip olduğu söylenebilir.

ÖRNEK: X r.d.'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\binom{3}{x}, & x = 0,1,2,3 \;\; için \\ 0, & ö.d. \;\; için \end{cases}$$

X r.d.'nin MÇF'unu bulunuz ve bunu orijie göre birinci ve ikinci momenti bulmak için kullanınız.

Çözüm:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x e^{tx} f(x) = \sum_{x=0}^{3} e^{tx}\frac{1}{8}\binom{3}{x} = \frac{1}{8}\left(1+3e^t+3e^{2t}+e^{3t}\right) == \frac{1}{8}\left(1+e^t\right)^3$$

Teorem 1'den yararlanarak μ_1' ve μ_2' aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu_1' = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{8}\left[3\left(1+e^t\right)^2 e^t\right]_{t=0} = \frac{3}{2}$$

$$\mu_2' = \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{8}\left[6\left(1+e^t\right)e^t + e^t 3\left(1+e^t\right)^2\right]_{t=0} = 3$$

ÖRNEK: X r.d. λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olsun. Raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz. Bulduğunuz fonksiyondan yararlanarak ortalamasını ve varyansını hesaplayınız.

Çözüm: λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip X r.d.'nin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,2,\ldots \;\; için \\ 0, & ö.d. \;\; için \end{cases}$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Ortalama: $\mu = \mu_1' = \left.\dfrac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right)\right|_{t=0} = \lambda$

Varyans: $V(X) = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$$\mu_2' = \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right)\right|_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow V(X) = \mu_2'' - (\mu_1')^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

Moment Çıkaran Fonksiyonun Özellikleri:

a ve b sabit sayılar olmak üzere,

1) $M_{X+a}(t) = E\left(e^{(X+a)t}\right) = e^{at}M_X(t)$

2) $M_{bX}(t) = E\left(e^{(bX)t}\right) = M_X(bt)$

3) $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left(e^{\left(\frac{X+a}{b}\right)t}\right) = e^{\frac{a}{b}t}M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

Özellik 3'te $a=-\mu$, $b=\sigma$ alınırsa,

$$M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = E\left(e^{\left(\frac{X+a}{b}\right)t}\right) = e^{\frac{\mu}{\sigma}t}M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Özellik 2'de $a=-\mu$ alınırsa,

$$M_{X-\mu}(t) = e^{-\mu t}M_X(t)$$

TEOREM 2: X r.d. için $M_X(t)$ var ise herhangi bir r tamsayısı için,

$$\mu_r = \left.\frac{d^r M_{X-\mu}(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E\left[(X-\mu)^r\right]$$

yazılabilir.

ÖRNEK: X r.d. λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olsun. Raslantı değişkeninin varyansını Teorem 2.2'den yararlanarak hesaplayınız.

Çözüm: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ olarak bulunmuştu. MÇF'un özelliklerinden,

$$M_{X-\lambda}(t) = e^{-\lambda t}M_X(t) = e^{-\lambda t}e^{\lambda(e^t-1)} = e^{\lambda(e^t-t-1)}$$

elde edilir. Buradan varyans, Teorem 2'den yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V(X) = E(X-\lambda)^2 = \frac{d^2}{dt^2}M_{X-\lambda}(t)\Big|_{t=0} = \lambda$$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

Kesikli bir X r.d. $x=0,1,2,\ldots$ biçiminde sayım değerleri alıyorsa bu r.d.'ne "integral-değerli" denir. Binom, Geometrik, Hiprgeometrik ve Poisson dağılımına dahip raslantı değişkenlerinin tümü integral-değerlidir. Örneğin, bir bankada hizmet alıncaya kadar aynı sırada beklenen kişi sayısı, belirli bir hastalıktan etkilenen kişi sayısı, bir kavşakta belirli bir sürede gerçekleşen kaza sayısı integral-değerli r.d.'lerine örnektir. İntegral-değerli raslantı değişkenlerinin olasılık dağılımlarının ve diğer bazı özelliklerinin bulunmasında kullanılan önemli bir araç Olasılık Çıkaran Fonksiyon (OÇF)'dur.

TANIM 2.4: İntegral-değerli bir X r.d. için $P(X=i)=p_i$ $(i=0,1,2,\ldots)$ olarak tanımlansın. Bu r.d.'nin OÇF'u $P_X(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_X(t) = E\left(t^X\right) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i,$$

$P_X(t)$'nin tanımlı olduğu tüm t değerleri için.

OÇF'un art arda türevleri alındığında X r.d.'nin faktöriyel momentleri elde edilir.

TANIM 5: k pozitif bir tamsayı olmak üzere, X r.d.'nin k'ıncı faktöriyel momenti,

$$\mu_{[k]} = E\left[X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)\right]$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilecek olursa, birinci faktöriyel moment $\left(\mu_{[1]} = E(X) = \mu\right)$ ortalamaya karşılık gelirken , ikinci faktöriyel moment $\left(\mu_{[2]} = E\left[X(X-1)\right]\right)$ varyans hesabında kullanılan bir terim olarak karşımıza çıkmaktadır.

TEOREM 3: Kesikli bir X r.d.'nin olasılık çıkaran fonksiyonu $P_X(t)$ ve k pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\frac{d^k}{dt^k}P_X(t)\Big|_{t=1} = \mu_{[k]}$$

yazılabilir.

İspat: $P_X(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \ldots$

$$P_X'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = p_1 + 2p_2 t + 3p_3 t^2 + \ldots$$

$$P_X''(t) = \frac{d^2P(t)}{dt^2} = (2)(1)p_2 + (3)(2)p_3 t + \ldots.$$

$$\vdots$$

$$P_X^{(k)}(t) = \frac{d^kP(t)}{dt^k} = \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)p(y)t^{y-k}$$

$t = 1$ alınırsa,

$$P_X'(1) = \left.\frac{dP(t)}{dt}\right|_{t=1} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = E(X) = \mu_{[1]}$$

$$P_X''(1) = \left.\frac{d^2P(t)}{dt^2}\right|_{t=1} = (2)(1)p_2 + (3)(2)p_3 + \ldots = E(X(X-1)) = \mu_{[2]}$$

$$\vdots$$

$$P_X^{(k)}(1) = \left.\frac{d^kP(t)}{dt^k}\right|_{t=1} = \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)p(y)$$
$$= E(X(X-1)\ldots(X-k+1)) = \mu_{[k]}$$

ÖRNEK: Geometrik dağılıma sahip X r.d.'nin OÇF'nu bulunuz. Bu OÇF'dan yararlanarak geometrik dağılımın ortalamasını ve varyansını hesaplayınız.

Çözüm: Geometrik dağılım olasılık fonksiyonu,

$$p(x) = \begin{cases} pq^{x-1}, & x = 1,2,3,\ldots \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases}$$

$$P_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=1}^{\infty} t^x pq^{x-1} = \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty}(qt)^x = \frac{p}{q}\left[qt + (qt)^2 + (qt)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{p}{q}qt\left[1 + qt + (qt)^2 + (qt)^3 + \ldots\right] = pt\left[1 + qt + (qt)^2 + (qt)^3 + \ldots\right]$$

Yukarıdaki $\left[1 + qt + (qt)^2 + (qt)^3 + \ldots\right]$ terimi, sonsuz geometrik seri toplamıdır. $t \le 1$ alınırsa $qt \le 1$ olacağından,

$$P_X(t) = pt\left[1 + qt + (qt)^2 + (qt)^3 + \ldots\right] = \frac{pt}{1-qt}$$

$\left.\frac{d}{dt^k}P_X(t)\right|_{t=1} = \mu_{[k]}$ olduğundan, $k = 1$ alınırsa ortalama elde edilir.

$$\mu = \mu_{[1]} = \left.\frac{d}{dt}P_X(t)\right|_{t=1} = \left.\frac{p(1-qt) + qpt}{(1-qt)^2}\right|_{t=1} = \left.\frac{p}{(1-qt)^2}\right|_{t=1} = \frac{1}{p}$$

Geometrik dağılımın varyansını elde etmek için $\left.\frac{d}{dt^k}P_X(t)\right|_{t=1} = \mu_{[k]}$ ifadesinde $k = 2$ alınır.

$$\mu_{[2]} = \left.\frac{d}{dt^2}P_X(t)\right|_{t=1} = \left.\frac{2q(1-qt)p}{(1-qt)^4}\right|_{t=1} = \frac{2qp^2}{p^4} = \frac{2q}{p^2}$$

$$\mu_{[2]} = \left.\frac{d}{dt^2}P_X(t)\right|_{t=1} = E\left[X(X-1)\right] = E(X^2) - E(X) = \frac{2q}{p^2}$$

Buradan, varyansın hesaplanması için gerekli olan $E(X^2)$ teriminin değeri hesaplanır.

$$E(X^2) - E(X) = \frac{2q}{p^2} \Rightarrow E(X^2) - \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} \Rightarrow E(X^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$E(X^2)$ ve $E(X)$ değerleri yerine yazılarak varyans aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Olasılık Çıkaran Fonksiyonun Özellikleri:

1) $P_X(0) = p_0$

İspat: $P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \ldots$

$t = 0 \Rightarrow P(0) = p_0$

2) $P_X(1) = 1$

İspat: $P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \ldots$

$t = 1 \Rightarrow P(0) = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = 1$

TEOREM 4: Kesikli bir X r.d.'nin olasılık çıkaran fonksiyonu $P_X(t)$ ve k pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}P_X(t)\right|_{t=0} = k!\,p_k, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

yazılabilir.

ÖRNEK: Kesikli X r.d.'nin OÇF'u $P_X(t)=\frac{t}{5}\left(2+3t^2\right)$ olsun.

X r.d.'nin olasılık dağılımını bulunuz.

Çözüm: $P_X(t)=\frac{t}{5}\left(2+3t^2\right)=\frac{2}{5}t+\frac{3}{5}t^3$

$t=0 \Rightarrow P(0)=p_0=0$

$$P_X'(t)\Big|_{t=0}=\frac{2}{5}+\frac{9}{5}t^2\Big|_{t=0}=\frac{2}{5}=1!\,p_1 \Rightarrow p_1=\frac{2}{5}$$

$$P_X''(t)\Big|_{t=0}=\frac{18}{5}t\Big|_{t=0}=0=2!\,p_2 \Rightarrow p_2=0$$

$$P_X'''(t)\Big|_{t=0}=\frac{18}{5}=3!\,p_3 \Rightarrow p_3=\frac{3}{5}$$

$$P_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=0=k!\,p_k \Rightarrow p_k=0,\quad k=4,5,6,\ldots \text{ için}$$

Sonuç olarak, X r.d.'nin olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{2}{5}, & x=1 \text{ için}\\ \frac{3}{5}, & x=3 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

olarak elde edilir.

$\frac{d^k}{dt^k}P_X(t)\Big|_{t=0}=k!\,p_k$ eşitliği, $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ tüm olasılık değerlerinin OÇF ve $t=0$ noktasındaki türevleri ile belirlenebileceğini gösterir. OÇF yardımıyla belirlenen bu olasılıkların kümesi tek (uniqe)'tir.

İki kuvvet serisi sıfır içeren herhangi bir aralık üzerinde eşit ise iki serinin tüm terimleri eşittir. O halde, tanım kümesi sıfır içeren iki rastlantı değişkenin aynı OÇF'a sahip olduğu gösterilebilirse bu raslantı değişkenlerinin aynı dağılıma sahip olduğu söylenebilir. Bu aynı zamanda, X r.d.'nin OÇF'unun X'in dağılımı hakkındaki tüm bilgiyi taşıdığı anlamına gelir.

Kümülant Çıkaran Fonksiyon

TANIM 6: MÇF'u $M_X(t)$ olan bir X r.d. için kümülant çıkaran fonksiyon,

$$K_X(t)=\log M_X(t)$$

biçiminde tanımlanır ve fonksiyonun Maclauren seri açılımında r'inci terimin katsayısı r'inci kümülant (κ_r) olarak adlandırılır.

$$K_X(t)=\log M_X(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\underbrace{\left[\frac{d^r}{dt^r}K_X(0)\right]}_{\kappa_r}$$

Buna göre, herhangi bir X r.d. için için birinci ve ikinci kümülant aşağıdaki gibi elde edilir.

$K_X(t)=\log M_X(t)$ olduğundan, kümülant çıkaran fonksiyonun birinci türevi,

$$\frac{d}{dt}K_X(t)=\frac{d}{dt}\log M_X(t)=\frac{\frac{d}{dt}M_X(t)}{M_X(t)}$$

olarak elde edilir.

$t=0$ alınırsa birinci kümülant,

$$\kappa_1=\frac{d}{dt}K_X(0)=\frac{\frac{d}{dt}M_X(0)}{M_X(0)}=\frac{E(X)}{1}=E(X)$$

Kümülant çıkaran fonksiyonun ikinci türevi,

$$\frac{d^2}{dt^2}K_X(t)=\frac{d^2}{dt^2}\log M_X(t)=\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)M_X(t)-\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2}{\left[M_X(t)\right]^2}$$

olarak elde edilir. $t=0$ alınırsa ikinci kümülant,

$$\kappa_2=\frac{d^2}{dt^2}K_X(0)=\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(0)\right)M_X(0)-\left(\frac{d}{dt}M_X(0)\right)^2}{\left[M_X(0)\right]^2}=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=V(X)$$

ÖRNEK: X r.d. $N(\mu,\sigma^2)$ dağılımına sahip olmak üzere tüm kümülantlarını bulunuz.

Çözüm: $N(\mu,\sigma^2)$ dağılımına sahip X r.d.'nin MÇF'u: $M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

$$K_X(t)=\log\left(e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\right)=\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2$$

r'inci kümülant: $\kappa_r=\frac{d^r}{dt^r}K_X(t)\Big|_{t=0}$

Birinci kümülant: $\kappa_1=\frac{d}{dt}K_X(t)\Big|_{t=0}=\left[\mu+\frac{1}{2}2t\sigma^2\right]_{t=0}=\mu$,

ikinci kümülant: $\kappa_2=\frac{d^2}{dt^2}K_X(t)\Big|_{t=0}=\left[\sigma^2\right]_{t=0}=\sigma^2$

$r=3,4,5,\ldots$ için tüm kümülantlar: $\kappa_r=\frac{d^r}{dt^r}K_X(t)\Big|_{t=0}=0$

ÖRNEK: X r.d. $P(\lambda)$ dağılımına sahip olmak üzere tüm kümülantlarını bulunuz.

Çözüm: $P(\lambda)$ dağılımına sahip X r.d.'nin MÇF'u: $M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$

Kümülant çıkaran fonksiyon: $K_X(t)=\log\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)=\lambda\left(e^t-1\right)$

r'inci kümülant: $\kappa_r=\frac{d^r}{dt^r}K_X(t)\Big|_{t=0}$

Birinci kümülant: $\kappa_1=\frac{d}{dt}K_X(t)\Big|_{t=0}=\left[\lambda e^t\right]_{t=0}=\lambda$,

ikinci kümülant: $\kappa_2=\frac{d^2}{dt^2}K_X(t)\Big|_{t=0}=\left[\lambda e^t\right]_{t=0}=\lambda$

Görüldüğü gibi kümülant çıkaran fonksiyonun tüm türevleri eşit ve $\frac{d^r}{dt^r}K_X(t)=\lambda e^t$ olduğundan Poisson dağılımının tüm kümülantları λ olarak belirlenir.

$$\kappa_r=\frac{d^r}{dt^r}K_X(t)\Big|_{t=0}=\lambda,\ r=1,2,3,\ldots \text{ için}$$

Karakteristik Fonksiyon

TANIM 7: Olasılık fonksiyonu (olasılık yoğunluk fonksiyonu) $f(x)$ olarak verilen bir X r.d. için karakteristik fonksiyon, $\phi_X(t)$,

$$\phi_X(t)=E\left(e^{itx}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Daha açık bir şekilde,

$$\phi_X(t)=E\left(\cos(tx)+i\sin(tx)\right)=E\left(\cos(tx)\right)+iE\left(\sin(tx)\right)$$

eşitliği ile de verilebilir.

X r.d. kesikli ise karakteristik fonksiyon: $\phi_X(t)=E\left(e^{itx}\right)=\sum_x e^{itx}f(x)$;

X r.d. sürekli ise karakteristik fonksiyon: $\phi_X(t)=E\left(e^{itx}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)\,dx$;

eşitliklerinden hesaplanır. $\phi_X(t)$, t'nin sürekli bir fonksiyonudur ve pozitif tanımlıdır.

Karakteristik fonksiyonu $\phi_X(t)$ olan bir sürekli bir X r.d.'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$, türevlenebilir olduğu tüm noktalarda, aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{itx}\phi_X(t)\,dt$$

Moment çıkaran fonksiyonun aksine, bir raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu her zaman mevcuttur. Örneğin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\quad -\infty<x<\infty$$

olan standart Cauchy dağılımına sahip X r.d.'nin MÇF'u bulunamaz ancak karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi_X(t)=E\left(e^{itx}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=e^{-|t|}$$

Karakteristik Fonksiyonun Özellikleri

1) $\phi_X(0) = 1$ 'dir.

2) $t \in \mathbb{R}$ için $|\phi_X(t)| \leq 1$ 'dir.

3) $a, b \in \mathbb{R}$ için $\phi_{a+bX}(t) = e^{iat}\phi_X(bt)$

MÇF'a benzer olarak karakteristik fonksiyon her bir olasılık dağılımına özgüdür. İki r.d.'nin karakteristik fonksiyonları aynı ise olasılık dağılımları da aynı olacaktır.

Karakteristik fonksiyon ve MÇF arasında bir ilişki kurmak istersek,

$$\phi_X(t) = M_X(it)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, MÇF'dan bir olasılık dağılımının momentlerini nasıl elde ediyorsak, karakteristik fonksiyondan da çok benzer şekilde elde edebiliriz.

TEOREM 5: X r.d. için karakteristik fonksiyon $\phi_X(t)$ olmak üzere herhangi bir r tamsayısı için orijine göre r'inci moment,

$$\mu_r' = i^{-r} \left. \frac{d^r \phi_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = E(X^r)$$

eşitliğinden elde edilir.

Benzer şekilde, $\phi_{X-\mu}(t) = e^{-i\mu t}\phi_X(t)$ olduğundan herhangi bir r tamsayısı için ortalamaya göre r'inci moment,

$$\mu_r = i^{-r} \left. \frac{d^r \phi_{X-\mu}(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = E\left[(X-\mu)^r\right]$$

eşitliğinden elde edilir.

ÖRNEK: X r.d. $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahip olmak üzere karakteristik fonksiyonundan yararlanarak orijine göre birinci ve ikinci momentini bulunuz.

Çözüm: $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahip X r.d.'nin MÇF'u aşağıdaki gibidir.

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Bu MÇF'dan yararlanarak karakteristik fonksiyon, $\phi_X(t) = M_X(it) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$ olarak bulunur.

Orijine göre birinci moment, $\mu_1' = E(X) = i^{-1} \left. \frac{d\left(e^{i\mu t - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}\right)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{i}\left[i\mu e^{i\mu t} - t\sigma^2\right]_{t=0} = \mu$;

Orijine göre ikinci moment,

$$\mu_2' = E(X^2) = i^{-2} \left. \frac{d^2\left(e^{i\mu t - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}\right)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{i^2}\left[i^2\mu^2 e^{i\mu t} - \sigma^2\right]_{t=0} = \mu^2 - \sigma^2$$

bulunur. Buradan varyans da elde edilmek istenirse,

$$V(X) = \mu_2' - (\mu_1') = \mu^2 - \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

ÖRNEK: X r.d. $P(\lambda)$ dağılımına sahip olmak üzere karakteristik fonksiyonundan yararlanarak orijine göre birinci ve ikinci momentini bulunuz.

Çözüm: $P(\lambda)$ dağılımına sahip X r.d.'nin MÇF'u: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Bu MÇF'dan yararlanarak karakteristik fonksiyon, $\phi_X(t) = M_X(it) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ olarak bulunur. Orijine göre birinci moment,

$$\mu_1' = E(X) = i^{-1} \left. \frac{d\left(e^{\lambda(e^{it}-1)}\right)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{i}\left[i\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}\right]_{t=0} = \lambda \text{ ;}$$

Orijine göre ikinci moment,

$$\mu_2' = E(X^2) = i^{-2} \left. \frac{d^2\left(e^{\lambda(e^{it}-1)}\right)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{i^2}\left[i^2\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + i^2\lambda^2 e^{2it} e^{\lambda(e^{it}-1)}\right]_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

bulunur. Buradan varyans da elde edilmek istenirse,

$$V(X) = \mu_2' - (\mu_1') = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$