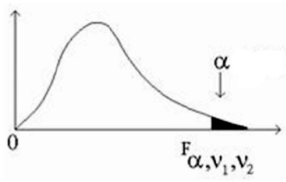
TEOREM: $X \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ ise $\dfrac{1}{X} \sim F_{\nu_2,\nu_1}$ olur.

F Tablosu:

F tablosunun sütunları pay serbestlik derecesini (ν_1), satırları payda serbestlik derecesine (ν_2) karşılık gelir. Tablo F_{ν_1,ν_2}, değerinin sağında kalan alanı (α) verir. Farklı α değerleri için hazırlanmış farklı F tabloları vardır.



Yukarıdaki şekilden, $f(x)$, F_{ν_1,ν_2} dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere $\int_{F_{\nu_1,\nu_2}}^{\infty} f(x)dx = \alpha$ olduğu söylenebilir.

ÖRNEK: $N(0,1)$ standart normal dağılımdan $n_1 = 4$ ve $n_2 = 5$ birimlik iki rasgele örneklem X_1, X_2, X_3, X_4 ve Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 olsun. $T = \left(\dfrac{5}{4}\right)\dfrac{X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2}{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2+Y_5^2}$ raslantı değişkeninin varyansını bulunuz.

Çözüm:

$X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2 \sim \chi_4^2$ ve $Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2+Y_5^2 \sim \chi_5^2$ olduğundan

$$T = \frac{\left(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2\right)/4}{\left(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2+Y_5^2\right)/5} = \left(\frac{5}{4}\right)\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2}{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2+Y_5^2} \sim F_{4,5} \text{ olur.}$$

Buradan varyans,

$$V(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} = \frac{2(5)^2(4+5-2)}{4(5-2)^2(5-4)} = 9{,}72 \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK: $X_1 \sim N(0,1)$ ve $X_2 \sim N(1,16)$ iki bağımsız raslantı değişkeni verilsin.

- **a.** χ_2^2 dağılımına sahip bir raslantı değişkeni yazınız.
- **b.** $F_{1,2}$ dağılımına sahip bir raslantı değişkeni yazınız.

Çözüm:

a. χ_2^2 dağılımlı raslantı değişkeni aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$X_1 \sim N(0,1) \Rightarrow X_1^2 \sim \chi_1^2$ olur.

$X_2 \sim N(1,16) \Rightarrow \dfrac{X_2-1}{4} \sim N(0,1)$ olduğundan $\left(\dfrac{X_2-1}{4}\right)^2 \sim \chi_1^2$ olur.

O halde, $Y = X_1^2 + \left(\dfrac{X_2-1}{4}\right)^2 \sim \chi_2^2$ yazılabilir.

b. $F_{1,2}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni farklı biçimlerde yazılabilir. Bunlardan bir tanesi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{X_1^2/1}{Y/2} \sim F_{1,2}$$

T DAĞILIMI

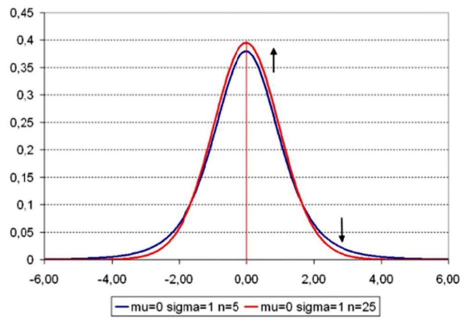
Student'ın t dağılımı olarak da bilinen bu dağılım, özellikle Normal dağılıma sahip bir kitlenin varyansı bilinmediğinde kitle ortalaması hakkında çıkarsamalar yapmak için kullanılan bir örneklem dağılımıdır.

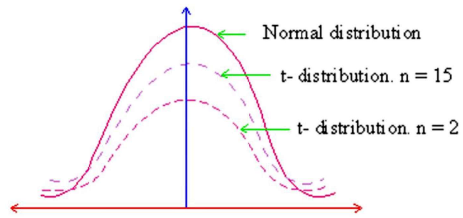
TANIM: Sürekli bir X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabiliyorsa bu raslantı değişkeni ν serbestlik derecesi ile t dağılımına sahiptir $(X \sim t_\nu)$

.

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, & -\infty < x < \infty \text{ için} \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases}$$

t dağılımının farklı serbestlik derecelerine göre grafiği aşağıda verilmiştir. t dağılımı standart normal dağılıma benzer. Bu dağılım, standart normal dağılıma göre daha basıktır. Büyük örneklemlerde (n>30) t dağılımı standart normal dağılıma yaklaşır.





ν serbestlik derecesi ile t dağılımına sahip bir X raslantı değişkeni $(X \sim t_\nu)$ için,

- X raslantı değişkeninin beklenen değeri $E(X) = 0$ 'dır.
- X raslantı değişkeninin varyansı, $V(X) = \dfrac{\nu}{\nu-2}$ $(\nu > 2$ için)'dir.
- t dağılımının moment çıkaran fonksiyonu yoktur.

Bir raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunun olması için k'ıncı momentinin tüm $k \in \mathbb{N}$ için tanımlı olması gerekmektedir. t dağılımının k'ıncı momenti yalnızca $k < \nu$ için tanımlıdır. Bu nedenle moment çıkaran fonksiyonu yoktur.

TEOREM: $X \sim N(0,1)$ ve $Y \sim \chi^2_\nu$ biçiminde bağımsız raslantı değişkenleri olsun.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$$

olarak tanımlanan T raslantı değişkeni ν serbestlik derecesi ile t dağılımına $(T \sim t_\nu)$ sahip olur.

İspat: $X \sim N(0,1)$ ise $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$

$Y \sim \chi^2_\nu$ ise $f(y) = \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} y^{\nu/2-1} e^{-y/2}, \quad y > 0$

X ve Y raslantı değişkenleri bağımsız olduğundan bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x,y) = f(x)f(y) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} y^{\nu/2-1} e^{-y/2}, \quad -\infty < x < \infty,\ y > 0$$

Dönüşüm yöntemi ile $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{\sqrt{y/\nu}} \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \left(\sqrt{y/\nu}\right)t \\ y = y \end{matrix} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{y}{\nu}}$$

Buna göre,

$$g(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} y^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)} e^{-\frac{y(1+t^2/\nu)}{2}}, \quad -\infty < t < \infty,\ y > 0$$

elde edilir.

T raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} y^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)} e^{-\frac{y(1+t^2/\nu)}{2}} dy$$

$z = \dfrac{y(1+t^2/\nu)}{2} \Rightarrow y = \dfrac{2z}{(1+t^2/\nu)} \Rightarrow dy = \dfrac{2dz}{(1+t^2/\nu)}$ dönüşümü yapıldığında,

$f(t) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} (1+t^2/\nu)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty$ elde edilir.

TEOREM: $N(\mu,\sigma^2)$ normal dağılımdan $(\mu \text{ ve } \sigma^2 \text{ bilinmiyor})$ rasgele örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. Bu rasgele örnemlemin ortalaması ve varyansı sırasıyla $\bar{X}$ ve S^2 olmak üzere,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

olur.

İspat: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$ olduğundan,

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ olur. Ayrıca, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ olduğu ve $\bar{X}$ ile S^2'nin bağımsız olduğu biliniyor.

Bu durumda,

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\cancel{\sigma}/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\cancel{(n-1)}S^2}{\cancel{\sigma^2}} \Big/ \cancel{(n-1)}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

NOT: t dağılımının beklenen değer ve varyansı, t dağılımına sahip raslantı değişkeninin $T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$ olarak tanımlanması yoluyla da bulunabilir.

$X \sim N(0,1)$ ve $Y \sim \chi^2_\nu$ biçiminde bağımsız raslantı değişkenleri olduğuna göre, beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(T) = E\left(\frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}\right) = E(X)\cdot E\left(\sqrt{\frac{\nu}{Y}}\right) = 0\cdot E\left(\sqrt{\frac{\nu}{Y}}\right) = 0$$

$$V(T) = E(T^2) - \left[\underbrace{E(T)}_{0}\right]^2 = E(T^2) = E\left(\frac{X^2}{Y/\nu}\right) = E(X^2)E\left(\frac{\nu}{Y}\right)$$

$X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_1$ olduğundan $E(X^2) = 1$ olur.

$$V(T) = E\left(\frac{\nu}{Y}\right) = \int_0^\infty \frac{\nu}{y}\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} y^{\nu/2-1}e^{-y/2}dy = \frac{\nu}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty y^{(\nu/2-1)-1}e^{-y/2}dy$$

$x = \frac{y}{2}$ dönüşümü yapılsın.

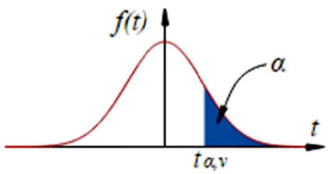
$x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$

$$V(T) = \frac{\nu}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty (2x)^{(\nu/2-1)-1}e^{-x}2dx = \frac{\nu 2^{(\nu/2-1)}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\underbrace{\int_0^\infty x^{(\nu/2-1)-1}e^{-x}dx}_{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}$$

$$V(T) = \frac{\nu}{2\Gamma(\nu/2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right) = \frac{\nu}{2\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\cancel{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}}\cancel{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} = \frac{\nu}{\nu-2}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} V(T) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{\nu-2} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{\nu}} = 1$$

T Tablosu



T tablosu, yukarıdaki şekilden de anlaşılabileceği gibi, sağ tarafındaki alan α olan $t_{\alpha,\nu}$ değerini verir. Tablonun sol tarafında ν serbestlik dereceleri, tablonun üstünde ise α olasılıkları yer alır.

$X \sim t_\nu$ volsun. Bu durumda t tablosu, α olasılığını ya da $t_{\alpha,\nu}$ değerini aşağıdaki eşitlikten yararlanarak bulmamızı sağlar.

$$\alpha = P(X > t_{\alpha,\nu}) = \int_{t_{\alpha,\nu}}^{\infty} f(x)dx$$

Tabloda ν değerleri genellikle 30'a kadardır çünkü serbestlik derecesi (ν) 30'dan büyük değer aldığında t dağılımı SND'a yakınsar. Bu durumda Z tablosundan yararlanılabilir.

TEOREM: X raslantı değişkeni t_v sahip olmak üzere, X^2 raslantı değişkeni $F_{1,v}$ dağılımına sahip olur.

İspat: Teorem 9.9'dan,

$Z \sim N(0,1)$ ve $Y \sim \chi_v^2$ biçiminde bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere,

$$X = \frac{Z}{\sqrt{Y/v}} \sim t_v$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan,

$X^2 = \dfrac{Z^2}{Y/v}$ yazabiliriz.

Ki-kare Teorem 1'den $Z^2 \sim \chi_1^2$ 'dir.

$X^2 = \dfrac{Z^2}{Y/v} = \dfrac{Z^2/1}{Y/v}$ olduğundan X^2 'nin $F_{1,v}$ dağılımına sahip olduğu söylenebilir.

ÖRNEK: X_1, X_2, X_3, X_4, standart normal dağılımdan 4 birimlik rasgele örneklem olsun.

$$W = \frac{X_1 - X_2 + X_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}}$$

biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm:

$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0,1)$ olduğundan,

$X_1 - X_2 + X_3 \sim N(0,3)$ ve $\dfrac{X_1 - X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$ olur.

Ayrıca, $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \sim \chi_4^2$ yazılabileceği için, Teorem 9.9'dan,

$$\frac{\dfrac{X_1 - X_2 + X_3}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}{4}}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) W \sim t_4 \text{ dağılımına sahiptir.}$$

$E\left[\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) W\right] = 0 \Rightarrow E(W) = 0$ olur.

ÖRNEK: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımdan rasgele örneklem olsun. $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $V^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ve X_{n+1}, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bağımsız bir raslantı değişkeni olarak verilsin. $\dfrac{m(\bar{X} - X_{n+1})}{V}$ bir t dağılımına sahipse m'i bulunuz.

Çözüm: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ olduğundan, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ olur.

$$\Rightarrow \bar{X} - X_{n+1} \sim N\left(\mu - \mu, \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2\right) \Rightarrow \bar{X} - X_{n+1} \sim N\left(0, \left(\frac{n+1}{n}\right)\sigma^2\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}} \sim N(0,1)$$

Ayrıca, $(n-1)S^2 = (n-1)\dfrac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = nV^2$

olduğundan $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{nV^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ yazılabilir.

$$\frac{\dfrac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{nV^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right)\frac{\bar{X} - X_{n+1}}{V} \sim t_{n-1} \quad \text{olduğundan} \quad m = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \text{ olarak bulunur.}$$