

SİMPLEKS YÖNTEM (ÖZEL DURUMLAR)

Simpleks yöntem uygulanırken bazı durumlar ortaya çıkabilir. Bu özel durumlar;

1. Bozulma,
2. Uygun çözümün olmaması,
3. Sınırsız çözüm,
4. Alternatif optimal çözümler.

1. Bozulma

Simpleks yöntem uygulanırken temelde çıkacak değişkenin seçiminde minimum oran kuralında eşitlik olabilir. Birden fazla aynı minimum orana sahip değer varsa, çıkan değişken bu eşit oranlardan birinin rastgele seçilmesiyle belirlenir.

Problemde böyle bir durum gerçekleştiğinde bir sonraki iterasyonda bir ya da birden fazla temel değişken sıfır değerini alarak tabloda kalacaktır. Bu yeni çözüme bozulmuş uygun çözüm adı verilmektedir. Bozulma durumu, başlangıç simpleks tabloda yada ileriki simpleks tablolarda görülebilir ve modelde en az bir gereksiz kısıt olduğuna işaret eder.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini çözümüz ve sonucu yorumlayınız.

$$\text{Maks } Z = 3X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 8 \quad (1)$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Maks } Z = 3X_1 + 9X_2$$

$$X_1 + 4X_2 + X_3 = 8$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

| | | | | | | |
|----------------------|------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | C_j | 3 | 9 | 0 | 0 |
| C_B | Temel | X_B | X₁ | X₂ | X₃ | X₄ |
| 0 | X ₃ | 8 | 1 | 4 | 1 | 0 |
| 0 | X ₄ | 4 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| | Z_j | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | C_j-Z_j | | 3 | 9 | 0 | 0 |

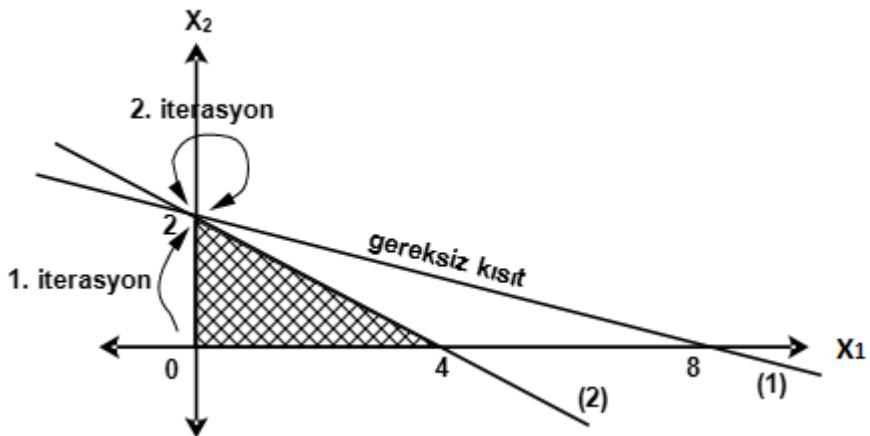
Temelden çıkacak değişkeni belirlemek için minimum oranlara bakılırsa; $8/4= 2$ ve $4/2= 2$ eşit çıkmaktadır. Dolayısıyla X₃ ve X₄ ün her ikisi de temelden çıkacak değişken olabilir. Burada rastgele bir seçim sözkonusu olacağı için X₃ değişkenini çıkarılarak ve iterasyona devam edilir.

| | | | | | | |
|----------------------|------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | C_j | 3 | 9 | 0 | 0 |
| C_B | Temel | X_B | X₁ | X₂ | X₃ | X₄ |
| 9 | X ₂ | 2 | 1/4 | 1 | 1/4 | 0 |
| 0 | X ₄ | 0 | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 |
| | Z_j | 18 | 9/4 | 9 | 9/4 | 0 |
| | C_j-Z_j | | 3/4 | 0 | -9/4 | 0 |

| | | | | | | |
|----------------------|------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | C_j | 3 | 9 | 0 | 0 |
| C_B | Temel | X_B | X₁ | X₂ | X₃ | X₄ |
| 9 | X ₂ | 2 | 0 | 1 | 1/3 | -1/2 |
| 3 | X ₁ | 0 | 1 | 0 | -1 | 2 |
| | Z_j | 18 | 3 | 9 | 3/2 | 3/2 |
| | C_j-Z_j | | 0 | 0 | -3/2 | -3/2 |

Temel değişkenlerden X₁ sıfır değerini aldığından problemin bozulmuş optimal çözümü vardır ($X_1^*=0$, $X_2^*=2$ ve $Z^*=18$).

Not: 2. ve 3. Simpleks tablolardaki temel uygun çözümler geometrik olarak aynı noktaya karşılık geldiğinden amaç fonksiyonunun değerleri de bu tablolarda değişmemiştir ($Z=18$). Bozulmanın sonucu olarak ardışık iki iterasyonda amaç fonksiyonunun değerinde iyileşme olmamış, bozulma ekstra iterasyonlara neden olmuştur.



2. Uygun Olmayan Çözüm

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini çözümünüz ve sonucu yorumlayınız.

$$\text{Maks } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 2$$

$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Maks } Z = 3X_1 + 2X_2 - MX_5$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$3X_1 + 4X_2 - X_4 + X_5 = 12$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

| | | C_j | 3 | 2 | 0 | 0 | $-M$ |
|-------|-------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 |
| 0 | X_3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $-M$ | X_5 | 12 | 3 | 4 | 0 | -1 | 1 |
| | Z_j | $-12M$ | $-3M$ | $-4M$ | 0 | M | $-M$ |
| | $C_j - Z_j$ | | $3+3M$ | $2+4M$ | 0 | $-M$ | 0 |

| | | C_j | 3 | 2 | 0 | 0 | $-M$ |
|-------|-------------|---------|---------|-------|---------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 |
| 2 | X_2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $-M$ | X_5 | 4 | -5 | 0 | -4 | -1 | 1 |
| | Z_j | $-4M+4$ | $5M+4$ | 2 | $4M+2$ | M | $-M$ |
| | $C_j - Z_j$ | | $-5M-1$ | 0 | $-4M-2$ | $-M$ | 0 |

Tüm $C_j - Z_j \leq 0$ olduğundan optimalite koşulu sağlanmıştır. Ancak X_5 yapay değişkeni temelde pozitif değerli olarak kaldığından problemin uygun çözümü yoktur.

3. Sınırsız Çözüm:

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini çözümünüz ve sonucu yorumlayınız.

$$\text{Maks } Z = -3X_1 + 2X_2$$

$$X_1 \leq 3$$

$$X_1 - X_2 \leq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Maks } Z = -3X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$X_1 - X_2 + X_4 = 0$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

| | | C_j | -3 | 2 | 0 | 0 |
|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 |
| 0 | X_3 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | X_4 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 |
| | Z_j | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $C_j - Z_j$ | | -3 | 2 | 0 | 0 |

Temele girecek değişken X_2 olarak belirlenmiştir. Ancak temelden çıkacak değişken, X_2 kolonunun tüm elemanları sıfır ve negative değerler olduğundan belirlenemiyor. Bu nedenle problemin sınırsız çözümü vardır.

4. Alternatif Optimal Çözüm

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini çözümünüz ve sonucu yorumlayınız.

$$\text{Maks } Z = 6X_1 + 4X_2$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 24$$

$$X_1 + X_2 \geq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Maks } Z = 6X_1 + 4X_2 - MX_6$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 30$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_4 = 24$$

$$X_1 + X_2 - X_5 + X_6 = 3$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

| | | C_j | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | -M |
|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 |
| 0 | X_3 | 30 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | X_4 | 24 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| -M | X_6 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| | Z_j | -3M | -M | -M | 0 | 0 | M | -M |
| | $C_j - Z_j$ | | 6+M | 4+M | 0 | 0 | -M | 0 |

| | | C_j | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | -M |
|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 |
| 0 | X_3 | 24 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | -3 |
| 0 | X_4 | 15 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 | -3 |
| 6 | X_1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| | Z_j | 18 | 6 | 6 | 0 | 0 | -6 | 6 |
| | $C_j - Z_j$ | | 0 | -2 | 0 | 0 | 6 | -M-6 |

| | | C_j | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | -M |
|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 |
| 0 | X_3 | 14 | 0 | 5/3 | 1 | -2/3 | 0 | -1 |
| 0 | X_5 | 5 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 | 1 | -1 |
| 6 | X_1 | 8 | 1 | 2/3 | 0 | 1/3 | 0 | 0 |
| | Z_j | 48 | 6 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| | $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | -M |

Tüm $C_j - Z_j \leq 0$ olduğundan optimalite koşulu sağlanmıştır.

Optimal çözüm; $X_1^* = 8, X_2^* = 0, X_3^* = 14, X_4^* = 0, X_5^* = 8$ ve $Z^* = 48$.

Optimal simpleks tablonun temelinde yer almayan X_2 değişkeninin de $C_j - Z_j$ değeri sıfır çıktığından problemin alternatif optimal çözümleri vardır. Alternatif optimal çözüm, X_2 değişkeninin temele alınması ile bulunur.

| | | C_j | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | -M |
|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 |
| 0 | X_3 | 14 | 0 | 5/3 | 1 | -2/3 | 0 | -1 |
| 0 | X_5 | 5 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 | 1 | -1 |
| 6 | X_1 | 8 | 1 | 2/3 | 0 | 1/3 | 0 | 0 |
| | Z_j | 48 | 6 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| | $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | -M |

| | | C_j | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | -M |
|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | Temel | X_B | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 |
| 4 | X_2 | 42/5 | 0 | 1 | 3/5 | -2/5 | 0 | -3/5 |
| 0 | X_5 | 39/5 | 0 | 0 | 1/5 | 1/5 | 1 | -6/5 |
| 6 | X_1 | 12/5 | 1 | 0 | -2/5 | 3/5 | 0 | 2/5 |
| | Z_j | 48 | 6 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| | $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | -M |

Alternatif optimal çözüm; $X_1^* = 12/5$, $X_2^* = 42/5$, $X_3^* = 0$, $X_4^* = 0$, $X_5^* = 39/5$ ve $Z^* = 48$.

Ödev: Aşağıda verilen DP problemlerini Simpleks Yöntem ile çözümünüz ve sonucu yorumlayınız.

1) Maks $Z = 40X_1 + 30X_2$

$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Optimal çözüm I: $X_1 = 30$, $X_2 = 10$ $Z = 1200$

Optimal çözüm II: $X_1 = 24$, $X_2 = 8$ $Z = 1200$

Alternatif Optimal Çözüm

2) Maks $Z = X_1 + 2X_2$

$$6X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Optimal çözüm I: $X_1 = 2$, $X_2 = 2$, $X_3 = 4$, $X_5 = 1$ $Z = 6$

Optimal çözüm II: $X_1 = 3$, $X_2 = 3/2$, $X_5 = 5/2$, $X_6 = 1/2$ $Z = 6$

Alternatif Optimal Çözüm

3) Maks $Z = 5X_1 + 3X_2$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$X_1 \geq 4$$

$$X_2 \geq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Uygun Olmayan Çözüm

4) Maks $Z = 4X_1 + 3X_2$

$$X_1 + 4X_2 \leq 3$$

$$3X_1 + X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Uygun Olmayan Çözüm

5) Maks $Z = 4X_1 + 3X_2$

$$X_1 - 6X_2 \leq 5$$

$$3X_1 \leq 11$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Sınırsız Çözüm

6) Maks $Z = 5X_1 + 6X_2 + X_3$

$$9X_1 + 3X_2 - 2X_3 \leq 5$$

$$4X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 2$$

$$X_1 - 4X_2 + X_3 \leq 3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Sınırsız Çözüm

7) Maks $Z = 6X_1 + 6X_2$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$5X_1 + 4X_2 \leq 20$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 32$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Bozulma

8) Maks $Z = X_1 + X_2 + X_3$

$$X_1 + X_2 \leq 8$$

$$-X_2 + X_3 \leq 0$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Bozulma