DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Doğrusal programlama (DP), belirli doğrusal eşitlik ya da eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında doğrusal bir amaç fonksiyonunun optimum sonucunu bulmak olarak tanımlanabileceği gibi belirli bir amacı gerçekleştirmek için sınırlı kaynakların en etkin kullanımını ve çeşitli alternatifler arasında optimum dağılımını sağlayan bir matematiksel programlama tekniği şeklinde de tanımlanabilir. Buradaki “doğrusal” terimi modeldeki tüm fonksiyonların doğrusal olduğunu anlatırken; “programlama” terimi ise bir hareket tarzının veya planının seçilmesi anlamına gelmektedir. 1947’ de, George Dantzig, Doğrusal Programlama problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir yol olan Simpleks Algoritma’yı bulmuş, sonrasında sıklıkla ve hemen hemen her sektörde kullanılmaya başlanmıştır.

DP’nin Varsayımları

- Orantısallık,
- Toplanabilirlik,
- Bölünebilirlik,
- Belirlilik,
- Negatif olmama.

Orantısallık: Her değişkenin amaç fonksiyonuna ve kısıtlara olan katkısı ilgili değişkenin değeri ile orantılıdır. Eğer bir değişkenin değerini iki katına çıkarırsak o değişkenin amaç fonksiyonuna ve yer aldığı her kısıta katkısı iki katına çıkar. Örneğin x_j değişkeninin bir birimi amaç fonksiyonuna c_j birim ve i. kısıta a_{ij} birim katkı sağlarken, x_j değişkeninin iki birimi amaç fonksiyonuna tam olarak $2c_j$ birim ve i. kısıtta tam olarak $2a_{ij}$ birim katkı sağlar. Bu varsayım sağlanmadığı durumda doğrusal olmayan programlama kullanılır.

Toplanabilirlik: Amaç fonksiyonunun ve her kısıt fonksiyonunun toplam değeri her bir karar değişkeninin katkılarının toplamından elde edilir. Diğer ifadeyle herhangi bir karar değişkeninin amaç fonksiyonuna ve herhangi bir kısıta katkısı diğer karar değişkenlerin değerlerinden bağımsızdır.

Bölünebilirlik: Karar değişkenlerinin kesirli değer alabileceği kabul edilir. Diğer bir ifadeyle karar değişkenlerinin tamsayı olmayan değerler almasına izin verilir.

Belirlilik: Doğrusal Programlama modeli deterministiktir. Modeldeki her parametre (c_j, a_{ij} ve b_i) kesin olarak bilinir. Doğrusal programlama probleminde olasılıksal ve stokastik eleman yer almaz.

Negatif Olmama: DP'deki tüm değişkenlerin negatif olmayan değerler alması gerekmektedir. Negatif üretimden söz edilemeyeceği için değişkenlerin pozitif ya da en azından sıfıra eşit olması gerekmektedir.

DP PROBLEMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ

Doğru matematiksel modelin kurulması (formülasyonu), ilgili karar probleminin çözümündeki en önemli aşamalardan biridir. Doğrusal Programlama Problemi matematiksel olarak modellenirken, üç önemli kısma sahiptir:

- Amaç fonksiyonu,
- Kısıtlar (koşullar),
- Negatif olmama koşulu.

1) Amaç Fonksiyonu

Karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu olan amaç fonksiyonu kar, gelir, üretim gibi maksimum yada maliyet, risk, çalıştırılan işçi sayısı, fire miktarı gibi minimum yapılmak istenen bir niceliği temsil eder.

$\mathrm{Maks\ (Min)\ Z} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ ya da

$$\mathrm{Maks\ (Min)\ Z} = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

biçiminde yazılır.

2) Kısıtlar

Kısıtlar; kullanılabilir kapasite, günlük çalışma süresi, kullanılabilir hammadde miktarı gibi sınırlamaları temsil eden doğrusal eşitlik ya da eşitsizliklerdir. Kısıtlar bazen karar değişkenleri arasındaki ilişkileri göstermek için kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + a_{1n}x_n \le, =, \ge b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + a_{2n}x_n \le, =, \ge b_2 \\
&\qquad\qquad\quad \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + a_{mn}x_n \le, =, \ge b_m
\end{aligned}$$

ya da

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq, =, \geq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

biçiminde yazılır.

3) Negatif olmama koşulu

Doğrusal programlama modellerinde karar değişkenlerinin negatif değerler alamayacağını belirten doğrusal eşitsizlikler (karar değişkenleri sıfır ya da pozitif değerler alabilir).

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0$ ya da

$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

biçiminde yazılır.

DP modelinde;

x_j: Karar vericinin amacına ulaşması için alması gereken kararları temsil eden kontrol edilebilir değişkenleridir. Bunlar modele ilişkin bilinmeyenler olup değerleri modelin çözümünden sonra belirlenir.

c_j: j. karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkı katsayısı (birim kar, birim fiyat, birim maliyet vb.),

a_{ij}: j. karar değişkeninin i. kısıta katkı katsayısı,

b_i: i. sınırlı kaynak miktarı (sağ taraf sabiti) göstermektedir.

Doğrusal Programlama modelinin matematiksel yazılımı toplu halde aşağıdaki şekilde olacaktır:

Maks / Min (Z) = $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq, =, \geq b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq, =, \geq b_2$

$\dots$

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq, =, \geq b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

DP modeli matris formunda da yazılabilir:

Maks (Min) Z = $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$

$\mathbf{Ax} \leq, =, \geq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq 0$

Burada;

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

DP modelinde negatif olmama kısıtları ile birlikte diğer tüm kısıtları sağlayan x_j karar değişkenlerinin değer aldığı tüm çözümlere **uygun çözüm** denir.

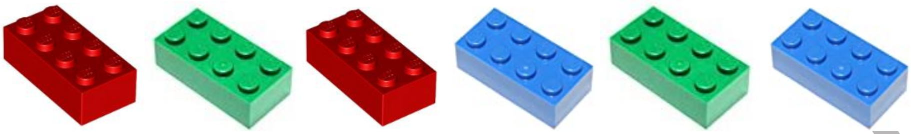
Amaç fonksiyonunu en iyileyen uygun çözüme ise **optimum çözüm** denir. Doğrusal programlamada amaç, optimum çözüme ulaşmaktır.

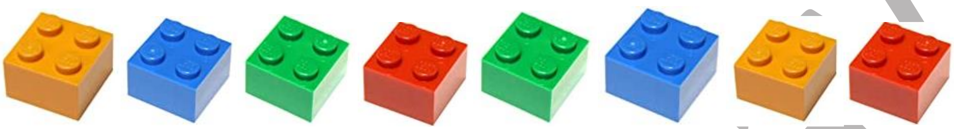
Doğrusal Programlamanın Uygulama Alanları:

Günümüzde binlerce değişken ve binlerce kısıta sahip problemler, bilgisayar yardımıyla çözülebildiğinden, doğrusal programlamanın uygulama alanı sadece kıt kaynakların dağıtımı ile sınırlı kalmamış, diğer birçok alanda da önemli uygulamaları olmuştur. Aşağıda DP'nin bazı uygulama alanları verilmiştir:

- Personel programlama,
- Beslenme (diyet) problemleri,
- Üretim planlama ve envanter kontrolü,
- Ulaştırma ve lojistik problemleri,
- Atama problemleri,
- Tarımsal planlama,
- Hava kirliliğinin kontrolü,
- Sermaye bütçeleme problemi,
- Kısa dönemli finansal planlama,
- Dinamik yatırım planlama,
- Reklam seçimi problemleri,
- Portföy seçimi problemi,
- Karışım problemleri.

ÖRNEK: Elinizde 6 büyük ve 8 küçük Lego parçası olsun. Bu Lego parçalarını kullanarak aşağıdaki masa ve sandalyeden üretmeniz isteniyor. Ürettiğiniz her masadan 16$ her sandalyeden 10$ kar ettiğinizi varsayarak maksimum kar elde edebilmeniz için masa ve sandalyeden kaçar tane üretmelisiniz?

Büyük Legolar: 

Küçük Legolar: 

Masa

Kar: 16$

Sandalye

10$

Karar Değişkenleri:

X_1 = Üretilecek masa sayısı,

X_2 = Üretilecek sandalye sayısı.

Maks $Z = 16X_1 + 10X_2$	Amaç fonksiyonu
$2X_1 + X_2 \leq 6$	Büyük Lego kısıtı
$2X_1 + 2X_2 \leq 8$	Küçük Lego kısıtı
$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$	Negatif olmama kısıtı

- $X_1 = 2,\ X_2 = 1$ uygun çözüm müdür?

$2*(2) + 1*(1) = 5 \leq 6$	Büyük Lego kısıtı sağlanıyor ✓
$2*(2) + 2*(1) = 6 \leq 8$	Küçük Lego kısıtı sağlanıyor ✓
$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$	$X_1 = 2 \geq 0,\ X_2 = 1 \geq 0$ Negatif olmama kısıtı sağlanıyor ✓

Tüm kısıtlar sağlandığı için $X_1 = 2,\ X_2 = 1$ uygun bir çözümdür.

- $X_1 = 3$, $X_2 = 1$ uygun çözüm müdür?

$2*(3) + 1*(1) = 7 \nleq 6$ Büyük Lego kısıtı sağlanmıyor **X**

$2*(3) + 2*(1) = 8 \leq 8$ Küçük Lego kısıtı sağlanıyor ✓

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ $X_1 = 3 \geq 0$, $X_2 = 1 \geq 0$ Negatif olmama kısıtı sağlanıyor ✓

Tüm kısıtlar aynı anda sağlanmadığı için $X_1 = 3$, $X_2 = 1$ uygun bir çözüm değildir.

SORU 1: Aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerden hangileri doğrusaldır ve bir Doğrusal Programlama modelinde bulunabilir?

a) $2X_1 + X_2 - 3X_3 \geq 50$ (doğrusal)

b) $2X_1 + \sqrt{X_2} \geq 60$ (doğrusal değil)

c) $4X_1 - \frac{1}{4} X_2 = 75$ (doğrusal)

d) $\frac{3X_1 + 2X_2 - 3X_3}{X_1 + X_2 + X_3} \leq 0.5$ (doğrusal, $2.5 X_1 + 1.5 X_2 - 3.5X_3 \leq 0$ olarak yazılabilir)

e) $3X_1^2 + 7X_2 = 45$ (doğrusal değil, 2. dereceden terim var)