HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

İKİ YA DA DAHA ÇOK RASLANTI DEĞİŞKENİNİN BİR FONKSİYONUNUN DAĞILIMININ BULUNMASI

Doç. Dr. Yasemin Kayhan Atılgan (Şube 01)
Doç. Dr. Derya Ersel (Şube 02)

huzem

Tek değişkenli raslantı değişkenlerinin fonksiyonlarının bulunması konusunda anlatılan teknikler iki ve daha çok değişkenli durum için genelleştirilebilir. Bu bölümde, tek değişkenli fonksiyonlar için verilen tekniklerin çok değişkenli duruma nasıl genelleştirileceği üzerinde durulacaktır.

1. Dağılım Fonksiyonu Yöntemi

İki değişkenli durum için, X_1, X_2, raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1,x_2)$ olarak tanımlansın. $Y = h(x_1,x_2)$, X_1, X_2'nin herhangi bir fonksiyonu olarak verilsin. Her bir (x_1,x_2) için yalnız ve yalnız bir Y değeri karşılık gelsin. (x_1,x_2) değerleri için $Y \le y$ olacak şekilde bir bölge belirlenebilirse; $f(x_1,x_2)$ bileşik yoğunluk fonksiyonunun bu bölge üzerindeki integrali $P(Y \le y) = G(y)$ olacaktır ve buradan $g(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna basit bir türev işlemi ile geçilebilir.

ÖRNEK(1): X_1, X_2 raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$f(x_1,x_2) = 6e^{-3x_1-2x_2}, \quad x_1, x_2 > 0$$

$Y = X_1 + X_2$ biçiminde verilen raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Dağılım fonksiyonu yöntemi kullanarak soruyu çözelim.

$$G(Y) = P(Y \le y) = P(X_1 + X_2 \le y) = \int_0^y \int_0^{y-x_2} 6e^{-3x_1-2x_2}\,dx_1 dx_2$$
$$= 1 + 2e^{-3y} - 3e^{-2y}$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(2e^{-3y} - 3e^{-2y} + 1\right) = 6\left(e^{-2y} - e^{-3y}\right), \quad y > 0$$

ÖRNEK(2): X_1, X_2 raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$f(x_1,x_2) = e^{-(x_1+x_2)}, \quad x_1, x_2 > 0$$

$Y = (X_1 + X_2)/2$ biçiminde verilen raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Dağılım fonksiyonu yöntemi kullanarak soruyu çözelim.

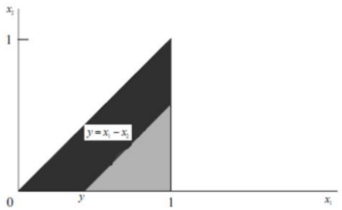
$$G(Y) = P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} \le y\right) = P(X_1 + X_2 \le 2y) = \int_0^{2y} \int_0^{2y-x_2} e^{-(X_1+X_2)}\,dx_1 dx_2$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = 4ye^{-2y}, \quad y > 0$$

ÖRNEK(3): X_1, X_2 raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$f(x_1, x_2) = 3x_1,\ 0 \le x_2 \le x_1 \le 1$$

$Y = X_1 - X_2$ biçiminde verilen raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

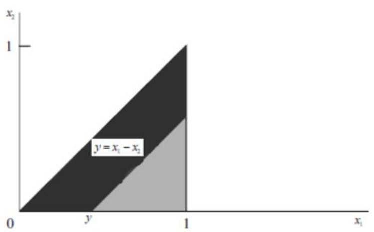


$f(x_1, x_2)$ bölgesi yandaki şekil ile verilmektedir. Dikkat edilecek olunursa 0, ile 1 arasından seçilecek herhangi bir y değeri için bir $y = x_1 - x_2$ doğrusu vardır ve her $x_1 - x_2 \le y$ koşulunu sağlayan (x_1, x_2) bu doğrunun üzerinde yer alacaktır.

$y < 0 \Rightarrow G(y) = P(X_1 - X_2 \le y) = 0$
$y > 1 \Rightarrow G(y) = P(X_1 - X_2 \le y) = 1$ olduğu şekilden görülmektedir.

$0 \le y \le 1$ aralığında $G(y) = P(X_1 - X_2 \le y)$ olasılığı ise verilen şekilde $y = x_1 - x_2$ doğrusunun üzerinde kalan koyu gri bölge üzerinde integral alınarak elde edilir. Bu bölge üzerinde integral almak yerine açık gri bölge kullanılarak integral daha kolay bir biçimde alınabileceğinden,

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \le y) = 1 - P(Y \ge y) \\ &= 1 - \int_y^1 \int_0^{x_1 - y} 3x_1 dx_2 dx_1 = 1 - \int_y^1 3x_1 (x_1 - y) dx_1 \\ &= 1 - \left[1 - \frac{3}{2}y + \frac{y^3}{2}\right] = \frac{(3y - y^3)}{2},\quad 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$



Buradan dağılım fonksiyonunun türevi alınarak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$g(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{3(1 - y^2)}{2},\ 0 \le y \le 1$$

Sonuç olarak "Dağılım Fonksiyonu Yöntemi" kullanılarak raslantı değişkenlerinin bir fonksiyonuna ilişkin olasılık dağılımı belirlenirken izlenecek yol aşağıdaki gibi genelleştirilebilir;

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ raslantı değişkenlerinin bir fonksiyonu Y olsun. Y raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için,

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uzayında $Y = y$ olan bölge belirlenir.
- Daha sonra $Y \le y$ olan bölge belirlenir
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun $Y \le y$ bölgesinde integrali alınarak $G(y) = P(Y \le y)$ olan dağılım fonksiyonu bulunur
- $G(y)$ dağılım fonksiyonunun türevi alınarak $g(y) = dG(y)/dy$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna ulaşılır.

2. Dönüşüm Yöntemi

2.1. Kesikli R.D.'leri için Dönüşüm Yöntemi

X_1, X_2, raslantı değişkenleri için bileşik olasılık fonksiyonu $p(x_1, x_2)$ olarak tanımlansın. $p(x_1, x_2) > 0$ koşulunu sağlayan (iki boyutlu) noktaların kümesi W olsun. $y_1 = h_1(x_1, x_2)$ ve $y_2 = h_2(x_1, x_2)$, W'dan T'ye bire-bir bir dönüşüm olarak tanımlansın. Bu iki yeni raslantı değişkeni olan $Y_1 = h_1(X_1, X_2), Y_2 = h_2(X_1, X_2)$ 'nin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$p(y_1, y_2) = p(h_1^{-1}(y_1, y_2), h_2^{-1}(y_1, y_2)),\ (y_1, y_2) \in T$$

olarak elde edilir. Burada $x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2)$ ve $x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2)$, $y_1 = h_1(x_1, x_2)$ ve $y_2 = h_2(x_1, x_2)$ 'nin tek-değerli ters fonksiyonlarıdır. $p(y_1, y_2)$ bileşik olasılık fonksiyonu yardımı ile $Y_1 = h_1(X_1, X_2), Y_2 = h_2(X_1, X_2)$ biçiminde tanımlı raslantı değişkenlerinin sorasıyla $p(y_1)$ ve $p(y_2)$ biçimindeki marjinal olasılık fonksiyonları da kolayca elde edilebilir.

ÖRNEK(4): X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri sırasıyla (n_1, p) ve (n_2, p) parametreleri ile Binom dağılımına sahip bağımsız değişkenler olarak tanımlansın. Bu iki raslantı değişkeninin toplamlarının dağılımının da $(n_1 + n_2, p)$ parametreleri ile Binom dağılımı olacağını dönüşüm yöntemi kullanarak gösteriniz.

Çözüm: X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin tanım kümeleri sırasıyla $R_{X_1} = \{0,1,2,3,\ldots,n_1\}$ ve $R_{X_2} = \{0,1,2,3,\ldots,n_2\}$ olduğundan W uzayı, negatif olmayan (x_1, x_2) tam sayılardan oluşacaktır. Dönüşüm yöntemi ile soruyu çözebilmek için bir dummy değişken $Y_2 = X_2$ olarak alınsın. Buradan, $y_1 = x_1 + x_2$ ve $y_2 = x_2$ W uzayından $T = \{(y_1, y_2) : y_1 = 0,1,\ldots,n_1 + n_2 \ \ ve \ \ y_2 = 0,1,\ldots,y_1\}$ uzayına bire-bir bir dönüşüm olarak tanımlanır. Burada her $\forall (y_1, y_2) \in T$, $0 \le y_2 \le y_1$ olacağına dikkat edilmelidir. Şimdi ters fonksiyonlara geçildiğinde $x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = y_1 - y_2$ ve $x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) = y_2$ olacaktır.

X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri bağımsız olduğu için Y_1 raslantı değişkeninin marjinal fonksiyonu doğrudan aşağıdaki biçimde eldedilebilir,

$$
\begin{aligned}
p(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} p_{x_1}(y_1 - y_2) p_{x_2}(y_2) \\
&= \sum_{y_2=0}^{y_1} \left[\binom{n_1}{y_1 - y_2} p^{y_1 - y_2} (1-p)^{n_1 - y_1 + y_2} \right] \left[\binom{n_2}{y_2} p^{y_2} (1-p)^{n_2 - y_2} \right] \\
&= \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{n_1}{y_1 - y_2} \binom{n_2}{y_2} p^{y_1} (1-p)^{(n_1+n_2) - y_1} \\
&= p^{y_1} (1-p)^{(n_1+n_2) - y_1} \underbrace{\sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{n_1}{y_1 - y_2} \binom{n_2}{y_2}}_{\binom{n_1+n_2}{y_1}} \\
&= \binom{n_1+n_2}{y_1} p^{y_1} (1-p)^{(n_1+n_2) - y_1}, \ \ y_1 = 0,1,2,\ldots,(n_1+n_2) \Rightarrow Y_1 \sim \mathrm{B}(n_1 + n_2, p)
\end{aligned}
$$

ÖRNEK(5): X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri sırasıyla λ_1 ve λ_2 parametreleri ile Poisson dağılımına sahip bağımsız değişkenler olarak tanımlansın. Bu iki raslantı değişkeninin toplamlarının dağılımının da $(\lambda_1 + \lambda_2)$ parametreleri ile Poisson dağılımı olacağını dönüşüm yöntemi kullanarak gösteriniz.

Çözüm: X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin tanım kümeleri sırasıyla $R_{X_1} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ ve $R_{X_2} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ olduğundan W uzayı, negatif olmayan (x_1, x_2) tam sayılarından oluşacaktır. Dönüşüm yöntemi ile soruyu çözebilmek için bir dummy değişken $Y_2 = X_2$ olarak alınsın. Buradan, $y_1 = x_1 + x_2$ ve $y_2 = x_2$ W uzayından $T = \{(y_1, y_2) : y_1 = 0,1,\ldots, \ \ ve \ \ y_2 = 0,1,\ldots,y_1\}$ uzayına bire-bir bir dönüşüm olarak tanımlanır. Burada her $\forall (y_1, y_2) \in T$, $0 \le y_2 \le y_1$ olacağına dikkat edilmelidir. Şimdi ters fonksiyonlara geçildiğinde $x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = y_1 - y_2$ ve $x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) = y_2$ olacaktır.

X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri bağımsız olduğu için Y_1 raslantı değişkeninin marjinal fonksiyonu doğrudan aşağıdaki biçimde eldedilebilir,

$$
\begin{aligned}
p(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} p_{x_1}(y_1 - y_2) p_{x_2}(y_2) \\
&= \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{\lambda_1^{y_1 - y_2} e^{\lambda_1}}{(y_1 - y_2)!} \frac{\lambda_2^{y_2} e^{\lambda_2}}{y_2!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{1}{(y_1 - y_2)! \, y_2!} \lambda_1^{y_1 - y_2} \lambda_2^{y_2} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y_1!} \underbrace{\sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{(y_1 - y_2)! \, y_2!} \lambda_1^{y_1 - y_2} \lambda_2^{y_2}}_{(\lambda_1+\lambda_2)^{y_1}} \\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{y_1} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y_1!}, \ \ y_1 = 0,1,2,\ldots \Rightarrow Y_1 \sim \mathrm{P}(\lambda_1 + \lambda_2)
\end{aligned}
$$

Not: $(\lambda_1 + \lambda_2)^{y_1} = \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \lambda_1^{y_1 - y_2} \lambda_2^{y_2}$ olarak yazıldığına dikkat etmek gerekir.

2.2. Sürekli R.D.'leri için Dönüşüm Yöntemi

X_1, X_2 sürekli r.d.leri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(x_1,x_2)$ olarak verilsin. $f(x_1,x_2)>0$ koşulunu sağlayan (x_1,x_2) noktalarının oluşturduğu uzay W ile gösterilsin. $(Y_1,Y_2)=T(X_1,X_2)$ dönüşümünde T bire-bir ve sürekli bir dönüşüm olarak kabul edilsin. Bu durumda $\mathcal{T}$ uzayı $\mathcal{T}=T(W)$ olarak tanımlanır ve $f(y_1,y_2)>0$ koşulunu sağlayan (y_1,y_2) noktalarının oluşturduğu uzaydır. Tanımlanan T dönüşümünde , $(Y_1,Y_2)=T(X_1,X_2)=\left[h_1(X_1,X_2),h_2(X_1,X_2)\right]$ karşılık gelen fonksiyonlar $y_1=h_1(x_1,x_2)$ ve , $y_2=h_2(x_1,x_2)$ olacaktır. T dönüşümü bire-bir olduğu için verilen fonksiyonların tersleri yani T^{-1} tanımlı olacaktır. Buradan ters fonksiyonlara geçildiğinde $x_1=h_1^{-1}(y_1,y_2)$ ve $x_2=h_2^{-1}(y_1,y_2)$ olur. Son olarak y_1, y_2 değişkenlerine göre kısmi kısmi türevlerden elde edilen Jacobian matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$J=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial h_2^{-1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2^{-1}}{\partial y_2}\end{pmatrix}=\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1}\frac{\partial h_2^{-1}}{\partial y_2}-\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_2}\frac{\partial h_2^{-1}}{\partial y_1}\neq 0$$

Burada Jakobian matrisinin tek değişkenli dönüşümde $\dfrac{dh^{-1}(y)}{dy}$ türevinin oynadığı rolu üstlendiği görülmektedir. Ayrıca Jacobian matrisindeki tüm birinci derecen kısmi türevlerin sürekli olduğunu ve Jacobian matrisinin sıfırdan farklı olduğu kabul edilsin. Buradan $Y_1=h_1(x_1,x_2), Y_2=h_2(x_1,x_2)$ r.d.leri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyou aşağıdaki gibi elde edilir,

$$f(y_1,y_2)=f_{X_1X_2}\left(h_1^{-1}(y_1,y_2),h_2^{-1}(y_1,y_2)\right)|J|$$

Eğer teoremde bahsedilen bire-bir dönüşüm koşulu sağlanmaz ise elde edilecek olasılık yoğunluk fonksiyonu, o.y.f. olma özelliklerini sağlamayacaktır.

ÖRNEK(6): X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{4}\exp\left(-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right),\ 0<x_1,x_2<\infty$ olarak verilsin. $Y_1=\dfrac{1}{2}(X_1-X_2)$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Burada birebir dönüşüm elde edebilmek için $Y_2=X_2$ biçiminde bir dummy değişkeni çözüme dahil ederiz. Dolayısıyla dönüşümler,

$y_1=h_1(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)$, $y_2=h_2(x_1,x_2)=x_2$ olur. Daha sonra ters fonksiyonlara geçiş yaparız,

$$x_1=h_1^{-1}(y_1,y_2)=2y_1+y_2,\quad x_2=h_2^{-1}(y_1,y_2)=y_2$$

$W=\{(x_1,x_2):0<x_1<\infty, 0<x_2<\infty\}$ olarak verilmiştir bu bölgenin bire-bir dönüşümünden elde edilen yeni bölge $\mathcal{T}=\{(y_1,y_2):-2y_1<y_2,\ 0<y_2<\infty,\ -\infty<y_1<\infty\}$ olacaktır.

Jacobian matrisinin determinantı, $\det J=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$

olur. Y_1,Y_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}\left[2y_1+y_2,y_2\right]|2|=\frac{1}{2}e^{-y_1-y_2},\ 0<2y_1+y_2<\infty,\ 0<y_2<\infty$$

Y_1 raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$f(y_1)=\int_{y_2} f(y_1,y_2)dy_2$$

$$f(y_1)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-2y_1}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-y_1-y_2}dy_2=\frac{1}{2}e^{y_1} & -\infty<y_1\leq 0\\ \displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-y_1-y_2}dy_2=\frac{1}{2}e^{-y_1} & 0\leq y_1<\infty\\ 0 & \ddot{o}.d.\end{cases}\Rightarrow f(y_1)=\frac{1}{2}e^{|y_1|},\ -\infty<y_1<\infty$$

Y_1 raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu Çift üstel dağılım olarak adlandırılır.

ÖRNEK(7): X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(x_1,x_2)=8x_1x_2,\ 0<x_1<x_2<1$ olarak verilsin. $Y_1=X_1/X_2, Y_2=X_2$ olarak tanımlansın. Y_1,Y_2 raslantı değişkenlerinin bileşik ve marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle ters fonksiyonlara geçiş yapalım,

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{x_1}{x_2} \\ y_2=x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1y_2 \\ x_2=y_2 \end{cases} \text{ olur.}$$

Daha sonra Jacobian matrisinin determinantını bulalım,

$$\det J=\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=y_2$$

Y_1,Y_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y_1,y_2)=8(y_1y_2)y_2|y_2|=8y_1y_2^3,\ \ 0<y_1,y_2<1$$

ÖRNEK(8): X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(x_1,x_2)=x_1x_2/96,\ 0<x_1<4,\ 1<x_2<5$ olarak verilsin. $Y_1=X_1+2X_2, Y_2=X_1$ olarak tanımlansın. Y_1 raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Öncelikle ters fonksiyonlara geçiş yapalım,

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2 \\ y_2=x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_2 \\ x_2=\dfrac{1}{2}(y_1-y_2) \end{cases} \text{ olarak elde edilir.}$$

Daha sonra Jacobian matrisinin determinantını bulalım,

$$\det J=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

Şimdi sınırları inceleyelim,

$$\begin{cases} 0<x_1<4 \Rightarrow 0<y_2<4 \\ 1<x_2<5 \Rightarrow 2<y_1-y_2<10 \end{cases} \qquad 2<y_1-y_2,\ \ y_1-y_2<10$$

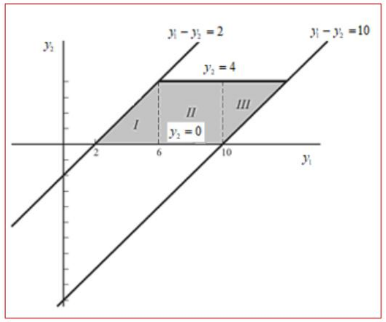
Y_1,Y_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y_1,y_2)=y_2(y_1-y_2)/384,\ \ 2<y_1-y_2<10,\ \ 0<y_2<4$$

Buradan Y_1 raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(y_1)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{y_1-2}\frac{y_2(y_1-y_2)}{384}dy_2 & 2<y_1<6 \\ \displaystyle\int_0^{4}\frac{v(y_1-y_2)}{384}dy_2 & 6<y_1<10 \\ \displaystyle\int_{y_1-10}^{4}\frac{v(y_1-y_2)}{384}dy_2 & 10<y_1<14 \\ 0 & ö.d. \end{cases}$$

$$g(y_1)=\begin{cases} (y_1-2)^2(y_1+4)/2304 & 2<y_1<6 \\ (3y_1-8)/144 & 6<y_1<10 \\ (348y_1-y_1^3-2128)/2304 & 10<y_1<14 \\ 0 & ö.d. \end{cases}$$



3. Moment Çıkaran Fonksiyon (MÇF) Yö

Daha önce yaratıcı fonksiyonlar konusunda X ve Y gibi iki raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonları aynı ise yani, $\forall t,\ M_X(t)=M_Y(t)$ eşitliği geçerli ise bu iki raslantı değişkeninin aynı olasılık dağılımına sahip olacağını söylemiştik. Moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile $X_1,X_2,\ldots,X_n$ bağımsız raslantı değişkenlerinin bir fonksiyonunun olasılık dağılımını bulmak bu düşünceye dayanmaktadır. Bu yöntem raslantı değişkenlerinin lineer fonksiyonlarının bulunmasında etkin olarak uygulanmaktadır.

X_1 ve X_2 bağımsız r.d.leri olsun, $M_{X_1+X_2}(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)$ olacaktır ve bu sonuç X+Y toplamının dağılımını belirlemede kullanılabilir.

Teorem: $X_1,X_2,\ldots,X_n$ bağımsız raslantı değişkenleri ve bunlarınmoment çıkaran fonksiyonları da $M_{X_1}(t),M_{X_n}(t),\ldots,M_{X_n}(t)$ olsun. $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ biçiminde tanımlanan r.d.nin MÇF, $M_Y(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)$ olur.

İspat:
$$\begin{aligned} M_Y(t)&=E\left[e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}\right]=E\left(e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_n}\right)=E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)\ldots E\left(e^{tX_n}\right) \\ &=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t) \end{aligned}$$

ÖRNEK(9): X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri sırasıyla λ_1, λ_2 parametreleri ile Poisson dağılımına sahip bağımsız değişkenler olsun. Bunların toplamının dağılımını belirleyiniz.

Çözüm: Moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile Y raslantı değişkeninin olasılık dağılımını bulmak istiyoruz. Poisson dağılımı özel bir dağılım olduğundan elimizde X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin MÇFları vardır ve $M_{X_1+X_2}(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)$ eşitliğini kullanılarak Y raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu kolayca elde edilebilir.

$$M_{X_1}(t)=e^{\lambda_1(e^t-1)},\ M_{X_2}(t)=e^{\lambda_2(e^t-1)} \Rightarrow M_{X_1+X_2}(t)=e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)}$$

$$M_{X_1+X_2}(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)},\sim \mathrm{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$p(y)=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^y}{\text{y!}},\quad y=0,1,2,\dots$$

Görüldiiği gibi raslantı değişkenlerinin toplamlarından elde edilen yeni Y raslantı değişkeninin MÇFu X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin MÇFlarına benzemektedir. Sadece X_1 raslantı değişkeninin MÇFda λ_1 yerine $(\lambda_1+\lambda_2)$ gelmiştir. Dolayısı ile Y raslantı değişkeninin de olasılık dağılımı $(\lambda_1+\lambda_2)$ parametreleri ile Poisson dağılımı olacaktır.

Sonuç: $X_1, X_2, \dots, X_n$ raslantı değişkenleri sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ parametreleri ile Poisson dağılımına sahip bağımsız değişkenler olarak verilsin. $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ bu raslantı değişkenlerinin toplamı olsun. Y raslantı değişkeninin olasılık dağılımı $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ parametresi ile Poisson dağılımı olacaktır.

ÖRNEK(10): Bir havaalanında belirli bir zaman aralığında check in noktasına gelen müşterilerin dağılımı λ parametresi ile Poisson olsun. X_1 r.d. ilk gelen müşteri için geçen süreyi, X_2 ilk müşteri ile ikincisi arasında geçen süreyi göstersin. Bu şekilde aynı dağılımlı ve birbirinden bağımsız $X_1, X_2, \dots, X_n$ değişkenleri elde edilsin. Bu raslantı değişkenleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu λ parametresi ile Üstel dağılım olacaktır.

$$f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-x_i/\lambda} & x_i>0\\ 0 & ö.d.\end{cases}$$

n. müşteri gelene kadar check in masasının açık kalma süresine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.

X raslantı değişkenleri Üstel dağılıma sahip olduğu için MÇFları,

$M_{X_i}(t)=(1-\lambda)^{-1},\ i=1,2,\dots,n$ olacaktır.

$$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda)^{-1}=(1-\lambda)^{-n}\sim \text{Gamma}(n,\lambda)$$

$$f(y)=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}y^{n-1}e^{-y/\lambda},\quad y>0$$

Görüldüğü gibi Y raslantı değişkeninin dağılımı n ve λ parametreleri ile Gamma dağılımıdır.

Sonuç: $X_1, X_2, \dots, X_n$ raslantı değişkenleri sırasıyla λ parametresi ile Üstel dağılımına sahip bağımsız değişkenler olarak verilsin. $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ bu raslantı değişkenlerinin toplamı olsun. Y raslantı değişkeninin olasılık dağılımı (n,λ) parametreleri ile Gamma dağılımı olur.

ÖRNEK(11): X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri α, β parametreleri ile Gamma dağılımına sahip bağımsız değişkenler olsun. Bunların toplamının olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile $Y = X_1 + X_2$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.

$$M_{X_1}(t) = M_{X_2}(t) = (1-\beta)^{-\alpha}$$
$$M_{X_1+X_2}(t) = (1-\beta)^{-\alpha}(1-\beta)^{-\alpha} = (1-\beta)^{-2\alpha}, \quad \sim \text{Gamma}(\beta, 2\alpha)$$

Y raslantı değişkeni $(2\alpha, \beta)$ parametreleri ile Gamma olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olur.

Sonuç: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ raslantı değişkenleri sırasıyla $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta), \ldots, (\alpha_n, \beta)$ parametreleri ile Gamma dağılımına sahip bağımsız değişkenler olarak verilsin. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ bu raslantı değişkenlerinin toplamı olsun. Y raslantı değişkeninin olasılık dağılımı $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$ parametreleri ile Gamma dağılımı olur.

Teorem: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ortalaması $E(X_i) = \mu_i$ ve varyansı $V(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ile Normal dağılıma sahip bağımsız r.d.leri olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabit sayılar olarak tanımlansın.

$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ şeklinde tanımlanan r.d. dağılımı yine Normal dağılım olacaktır ancak dağılımın parametreleri,

$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$, $V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2{}_i$ biçimindedir.

İspat: Her bir X_i , ortalaması μ_i ve varyansı σ_i^2 ile Normal dağılıma sahip olduğu için MÇF,

$M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{1}{2} t^2 \sigma_i^2}$ olacaktır. MÇF özelliğinden

$M_{a_i X_i}(t) = M_{X_i}(a_i t) = e^{\mu_i a_i t + \frac{1}{2} a_i^2 t^2 \sigma_i^2}$ yazılabilir. Raslantı değişkenleri bağımsız olduğu için,

$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu_i a_i t + \frac{1}{2} a_i^2 t^2 \sigma_i^2} = e^{t \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2} \sim \text{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$ biçiminde elde edilir.

Sonuç olarak moment çıkaran fonksiyon yöntemi kullanılarak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ raslantı değişkenlerinin bir foksiyonunun, $Y = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ olasılık dağılımı belirlenmek istenildiğinde,

- MÇF tanımından Y raslantı değişkeninin MÇF nu, $M_Y(t)$ bulunur.
- $M_Y(t)$, bilinen dağılımların yine iyi bilinen MÇFları ile karşılaştırılır.
- Her t değeri için $M_Y(t) = M_V(t)$ gibi bir eşitlik bulunursa, Y ve V dağılımları aynıdır denir ve Y raslantı değişkeninin olasılık dağılımı belirlenir.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ raslantı değişkenleri bağımsız ve MÇFları biliniyor olsun. Y raslantı değişkeni bunların linear bir fonksiyonu olarak tanımlanırsa örneğin $Y = h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum X_i$ biçiminde verilirse $M_Y(t) = \prod M_X(t)$ eşitliği kullanılabilir.