İST265 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK

UYGULAMA 6

1) **ÖRNEK (6.23):** X r.d. için o.y.f. ,

$$f_X(x) = x^2/81, \ -3 < x < 6$$

olsun.

a) $Y = \frac{1}{3}(12 - X)$ biçiminde verilen r.d.'nin o.y.f.'nu bulunuz.

b) $U = X^2$ biçiminde verilen r.d.'nin o.y.f.'nu bulunuz.

Çözüm:

a) $$y = h(x) = \frac{1}{3}(12 - x) \ \Rightarrow \ x = h^{-1}(y) = 12 - 3y \ \Rightarrow \ \frac{dx}{dy} = -3$$

Y r.d.'nin tanım aralığı aşağıdaki gibi elde edilir.

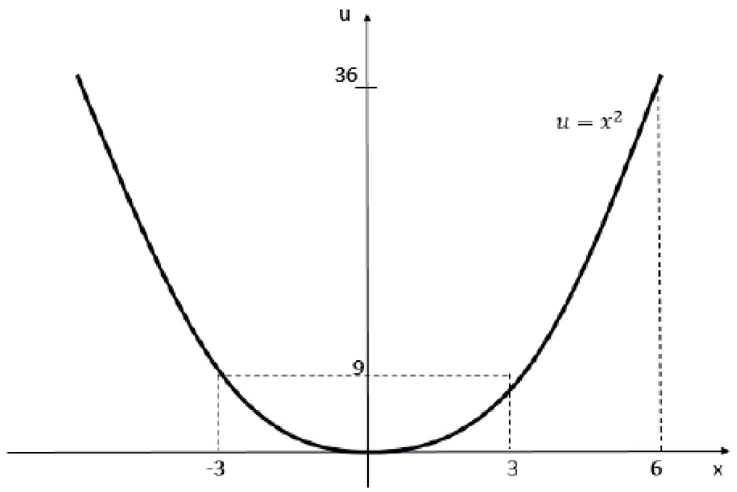
$$\left.\begin{array}{l} x = -3 \Rightarrow y = 5 \\ x = 6 \ \Rightarrow y = 2 \end{array}\right\} 2 < y < 5$$

Y r.d.'nin o.y.f. ,

$$g_Y(y) = \frac{(12 - 3y)^2}{27}, \ \ 2 < y < 5$$

olarak bulunur.

b) $u = x^2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{u}$ olduğu için fonksiyon bire-bir olma koşulunu sağlamamakta-dır.



Bu durumda teorem doğrudan uygulanamaz. X r.d.'nin tanım bölgesi parçalı olarak incele-necektir.

$-3 < x < 3 \Rightarrow 0 < u < 9$ aralığında hem pozitif hem de negatif köklerin ikisi de tanımlıdır. $-3 < x < 0$ aralığında $x = -\sqrt{u}$, $0 < x < 3$ aralığında ise $x = \sqrt{u}$ kökleri kullanılacaktır.

$$g_U(u) = f_X(\sqrt{u})\left|\frac{d\sqrt{u}}{du}\right| + f_X(-\sqrt{u})\left|\frac{d(-\sqrt{u})}{du}\right| = \frac{u}{81}\frac{1}{2\sqrt{u}} + \frac{u}{81}\frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{2u}{81} = \frac{\sqrt{u}}{81}$$

$3 < x < 6 \Rightarrow 9 < u < 36$ aralığında sadece pozitif kök tanımlıdır ve $x = \sqrt{u}$ kökü alınır.

$$g_U(u) = f_X(\sqrt{u})\left|\frac{d\sqrt{u}}{du}\right| = \frac{u}{81}\frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{162}$$

Bu sonuçlar birleştirildiğinde, U r.d.'nin o.y.f. aşağıdaki gibi elde edilir,

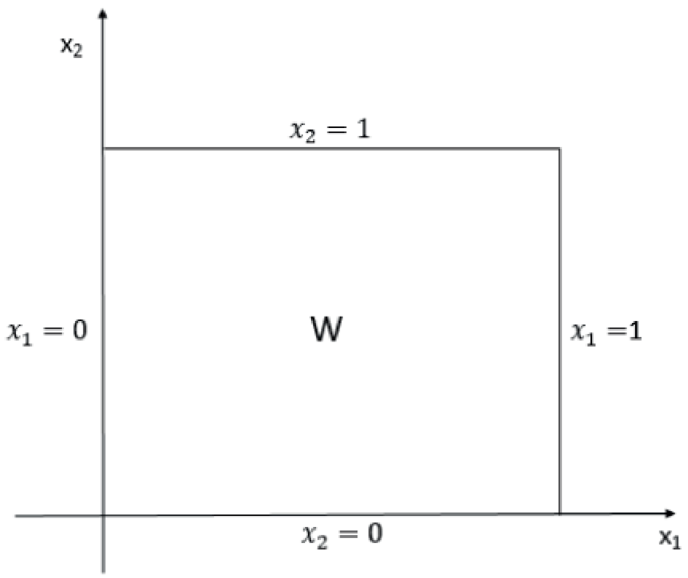
$$g_U(u) = \begin{cases} \sqrt{u}/81, & 0 \le u \le 9 \ \text{için} \\ \sqrt{u}/162, & 9 < u < 36 \ \text{için} \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases}$$

2) **ÖRNEK (6.24):** X_1 ve X_2 r.d.'leri için bileşik o.y.f.,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1, \ \ 0 < x_1, x_2 < 1$$

olarak verilsin. $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = X_1 - X_2$ olarak tanımlansın. Y_1 ve Y_2 r.d.'lerinin bileşik ve marjinal o.y.f.'larını bulunuz.

Çözüm: (x_1, x_2) noktalarının oluşturduğu bölge $W = \{(x_1,x_2): 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ olarak tanımlansın, bu bölgeyi aşağıdaki şekil ile gösterebiliriz.



$y_1 = h_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2, y_2 = h_2(x_1,x_2) = x_1 - x_2$ olarak verilmiştir. W bölgesinin bu dönüşümlere göre y_1, y_2 ekseninde oluşturacağı bölgeye T adını verelim.

$$x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$$x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

W bölgesindeki sınır değerlerinin T bölgesindeki karşılıklarına bakalım.

$$x_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 0$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = 0$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 1$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = 1$$

T bölgesini belirlemek için tüm sınırları bir arada değerlendirelim.

$$0 < x_1 < 1 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{2}(y_1 + y_2) < 1$$

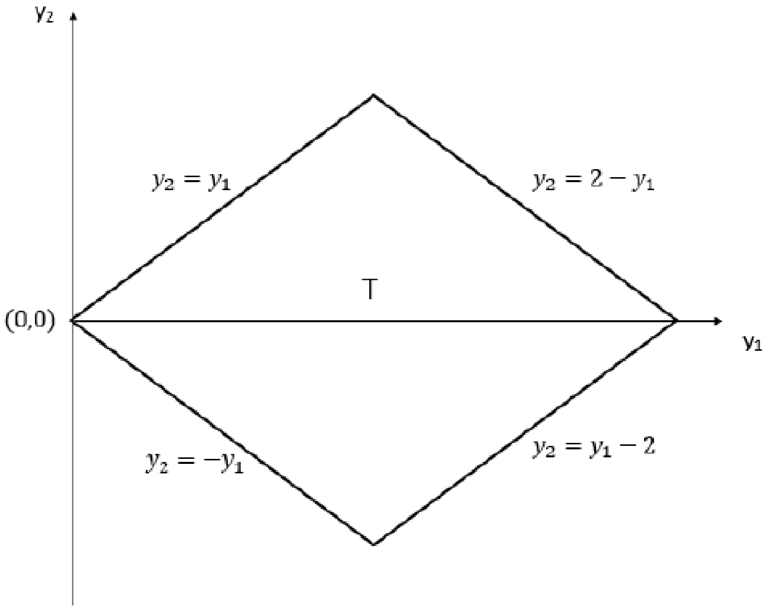
$$0 < x_2 < 1 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{2}(y_1 - y_2) < 1$$

Bu sınırlar kullanılarak,

$$0 < \frac{1}{2}(y_1 + y_2) < 1 \;\Rightarrow 0 < y_1 + y_2 < 2 \;\Rightarrow \begin{cases} -y_1 < y_2 \\ y_2 < 2 - y_2 \end{cases}$$

$$0 < \frac{1}{2}(y_1 - y_2) < 1 \;\Rightarrow 0 < y_1 - y_2 < 2 \;\Rightarrow \begin{cases} y_2 < y_1 \\ y_1 - 2 < y_2 \end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizliklerin tanımladığı doğrular tarafından sınırlandırılan T bölgesi aşağıdaki şekil ile gösterilmektedir.



x_1 ve x_2 fonksiyonlarının y_1 ve y_2 değişkenlerine göre kısmi türevleri alınarak hesaplanan Jacobian matrisinin determinantı aşağıdaki gibidir,

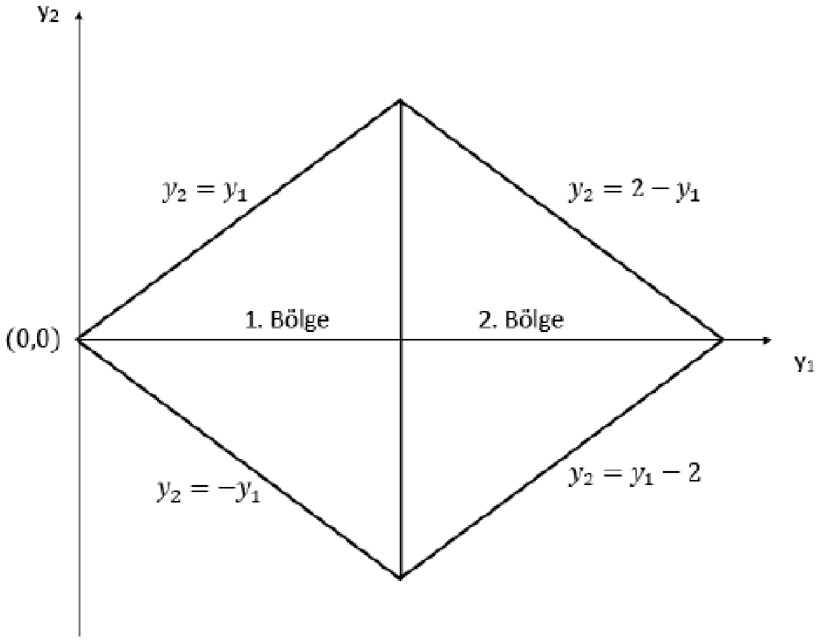
$$J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Y_1, Y_2 r.d.'lerinin bileşik o.y.f. aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}\left[\underbrace{h_1^{-1}(y_1, y_2)}_{x_1}, \underbrace{h_2^{-1}(y_1, y_2)}_{x_2}\right]|J|$$

$$= f_{X_1,X_2}\left[\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\right]\left|-\frac{1}{2}\right|$$

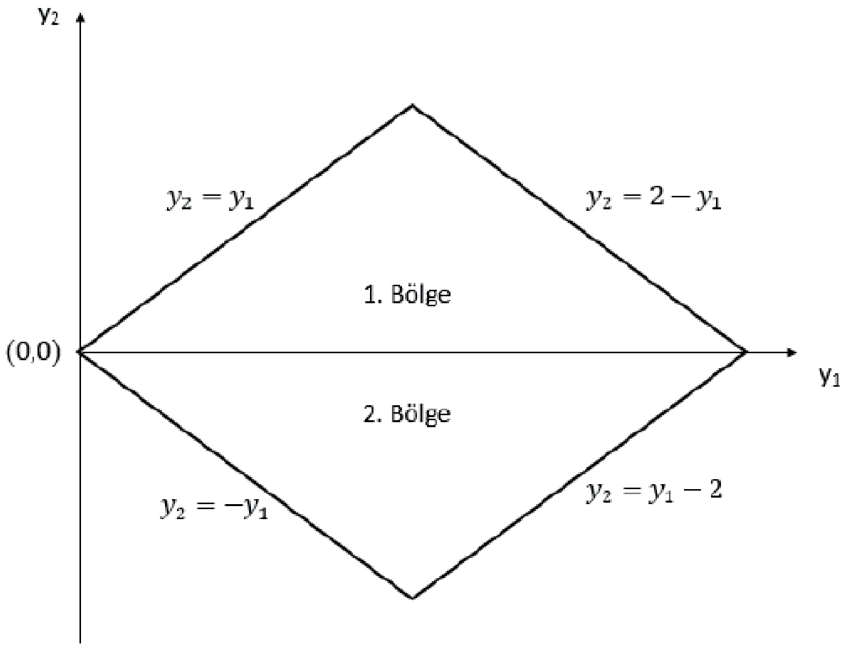
Bileşik o.y.f. üzerinden marjinal fonksiyonlara rahatlıkla ulaşılabilir. Ancak marjinal fonksiyonlar belirlenirken $g_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ fonksiyonun tanımlı olduğu T bölgesine dikkat edilmelidir. Y_1 r.d.'nin marjinal fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.



$$g_{Y_1}(y_1) = \int_{y_2} g_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\,dy_2$$

$$g_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \int_{-y_1}^{y_1} \frac{1}{2}\,dy_2 = y_1, & 0 < y_1 \leq 1 \\ \int_{y_1-2}^{2-y_1} \frac{1}{2}\,dy_2 = 2 - y_1, & 1 < y_1 < 2 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

Benzer şekilde, Y_2 r.d.'nin marjinal fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.



$$g_{Y_2}(y_2) = \int_{y_1} g(y_1, y_2)\,dy_1$$

$$g_{Y_2}(y_2)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-y_2}^{y_2+2}\frac{1}{2}dy_1=y_2+1, & -1<y_2\le 0\\ \displaystyle\int_{y_2}^{2-y_2}\frac{1}{2}dy_2=1-y_2, & 0<y_2<1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

3) **ÖRNEK (6.26):** X_1 ve X_2, aynı $\beta>0$ parametresi ile üstel dağılıma sahip bağımsız r.d.'leri olsun. $Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2}$ biçiminde tanımlanan r.d.'nin o.y.f.'nu bulunuz.

Çözüm: $Y_2=X_1+X_2$ olacak biçimde bir yapay değişken ekleyelim ve ters fonksiyonlara geçiş yapalım.

$$\begin{cases}y_1=h_1(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{x_1+x_2}\\ y_2=h_2(x_1,x_2)=x_1+x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=h_1^{-1}(y_1,y_2)=y_1y_2\\ x_2=h_2^{-1}(y_1,y_2)=y_2(1-y_1)\end{cases}$$

Daha sonra Jacobian matrisinin determinantı hesaplansın.

$$J=\begin{vmatrix}y_2 & y_1\\ -y_2 & (1-y_1)\end{vmatrix}=y_2$$

X_1 ve X_2 r.d.'leri için bileşik o.y.f,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{\beta^2}e^{(-(x_1+x_2)/\beta)},\qquad x_1,x_2>0$$

olacaktır. Buradan r.d.'lerinin bileşik o.y.f.,

$$g_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{1}{\beta^2}\exp\{-[y_1y_2+y_2(1-y_1)]/\beta\}|y_2|,\qquad y_1y_2>0,\ y_2(1-y_1)>0\ Y_1 \text{ ve } Y_2$$

$$g_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{1}{\beta^2}y_2\exp\{-y_2/\beta\},\qquad 0<y_1<1,\ y_2>0$$

olarak elde edilir. Fonksiyonun sınırlarını inceleyelim.

$$0 < y_1 y_2$$
$$0 < y_2(1-y_1)$$

olarak bulunmuştu. Buradan,

$$0 < y_2(1-y_1) = y_2 - y_2 y_1 \Rightarrow 0 < y_2 y_1 < y_2$$

yazıldığında,

$$0 < y_2 y_1 < y_2 \Rightarrow 0 < y_1 < 1$$

olur. Bu durumda, $y_1 y_2 > 0 \Rightarrow y_2 > 0$ yazılabilir.

Elde edilen bileşik o.y.f.'nun sınırlarını dikkate alarak Y_1 ve Y_2 r.d.'lerinin marjinal o.y.f.'ları

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int_0^\infty f(y_1, y_2)\,dy_2, \quad 0 < y_1 < 1 \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2} y_2 \exp\{-y_2/\beta\}\,dy_2 \\ &= 1, \quad 0 < y_1 < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y_2) &= \int_0^1 f(y_1, y_2)\,dy_1 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} y_2 \exp\{-y_2/\beta\}\,dy_1 \\ &= \frac{1}{\beta^2} y_2 \exp\{-y_2/\beta\} \quad , y_2 > 0 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Y_1 r.d. standart uniform dağılım gösterirken, Y_2 r.d.'nin dağılımı $\alpha=2$ ve β parametreleri ile gamma olarak bulunmuştur.

4) **ÖRNEK (6.28):** X ve Y, (0,1) aralığında Uniform dağılıma sahip bağımsız r.d.'leri olarak tanımlansın. Z=X+Y biçiminde tanımlı r.d.'nin o.y.f.'nu konvolüsyon integral kullanarak bulunuz.

Çözüm: X ve Y r.d.'leri aynı dağılımlı ve bağımsız olduğu için o.y.f.'ları aşağıdaki gibidir.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & ö.d. \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & ö.d. \end{cases}$$

Z= X + Y olarak tanımlandığı için $0 \le z \le 2$ aralığında değer alacaktır.

$0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq z - x \leq 1$ olduğu için $z - 1 \leq x \leq z$ sınırı dikkate alınmalıdır. Bu durumda konvolüsyon integralinin sınırları şu şekilde değişir:

- $0 \leq z \leq 1$ için $0 \leq x \leq z$ aralığı dikkate alınır.
- $1 < z \leq 2$ için $z - 1 \leq x \leq 1$ aralığı dikkate alınır.

Önce $0 \leq z \leq 1$ aralığını ele alalım ve formülü uygulayalım.

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^z f_X(z-x) f_Y(x) dx \\
&= \int_0^z 1 dx \\
&= z
\end{aligned}
$$

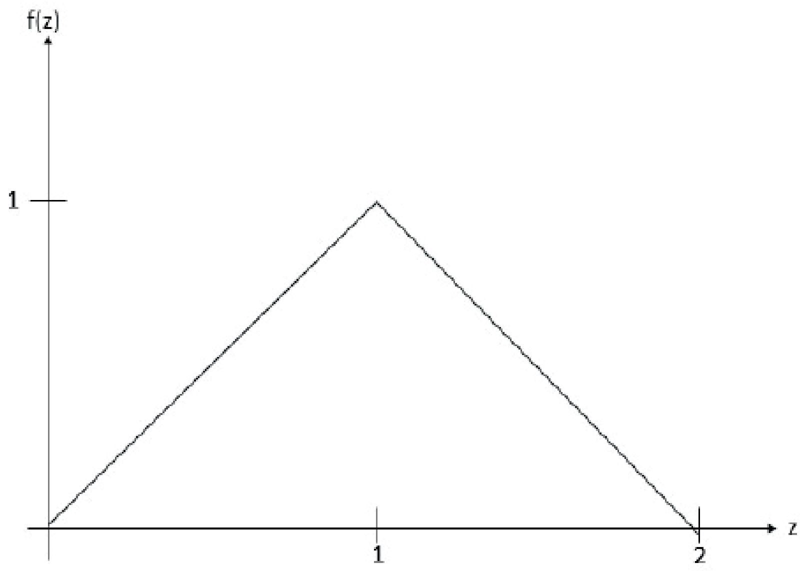
Benzer şekilde $1 < z \leq 2$ aralığını ele alalım,

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{z-1}^{1} f_X(z-x) f_Y(x) dx \\
&= \int_{z-1}^{1} 1 dx \\
&= 2 - z
\end{aligned}
$$

Bu iki sonucu bir arada değerlendirdiğimizde Z r.d. için o.y.f.,

$$
f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z < 1 \\ 2 - z & 1 \leq z < 2 \\ 0 & \ddot{o}.d. \end{cases}
$$

olarak elde edilir. Z r.d.'nin o.y.f., literatürde üçgensel dağılım olarak bilinir ve dağılımın şekli aşağıdaki gibidir.



Konvolüsyon yönemi kesikli r.d.'leri için de benzer şekilde uygulanır.

Aynı sorunun dağılım fonksiyonu yöntemiyle çözümü:

X ve Y, $U(0,1)$ dağılımına sahip bağımsız sürekli raslantı değişkenleri olarak verilsin.
$Z = X + Y$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

X ve Y, $U(0,1)$ dağılımına sahip sürekli raslantı değişkenleri olduğuna göre olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & ö.d \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & ö.d \end{cases}$$

biçimindedir.

Bu raslantı değişkenlerin bağımsız olduğu soruda belirtilmiştir. O halde $f(x,y) = f(x)f(y)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & ö.d \end{cases}$$

olacaktır. $Z = X + Y$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dağılım Fonksiyonu Yöntemi*nden yararlanılsın. Z raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$G(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = P(Y \leq z - X)$$

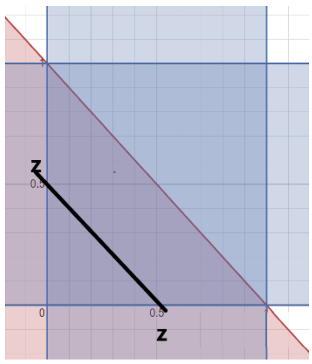
şeklinde elde edilir. Burada $Z = X + Y$ raslantı değişkenin alacağı değerlerle ilgili iki durum söz konusudur.

- Birinci durum: $0 < z < 1$
- İkinci durum: $1 < z < 2$

$I.durum$, $0 < z < 1$,

$$G(z) = P(Z \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-x} 1dydx = \int_0^z [y]\Big|_0^{z-x} dx$$

$$= \int_0^z (z-x)dx = zx - \frac{x^2}{2}\Big|_0^z = \frac{z^2}{2}, 0 < z < 1$$



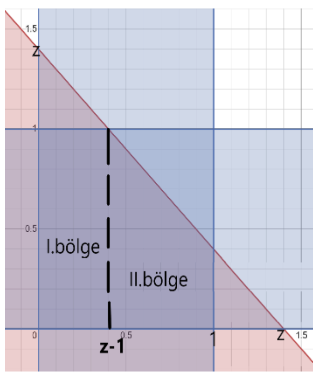
$II.durum$, $1 < z < 2$,

$$G(z) = \int_0^{z-1}\int_0^1 1dydx + \int_{z-1}^1\int_0^{z-x} 1dydx$$

$$= \int_0^{z-1} y\Big|_0^1 dx + \int_{z-1}^1 y\Big|_0^{z-x} dx$$

$$= (z-1) + \int_{z-1}^1 (z-x)\,dx = (z-1) + \left(zx - \frac{x^2}{2}\Big|_{z-1}^1 \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2, 1 < z < 2$$



$$G(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \dfrac{z^2}{2}, & 0 < z < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2}(2-z)^2, & 1 < z < 2 \\ 1, & z \to \infty \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $g(z) = \frac{dG(z)}{dz}$,

$$g(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ (2-z), & 1 < z < 2 \\ 0, & \text{ö}.d \end{cases}$$

olacaktır.

5) **ÖRNEK (6.29):** Bağımsız X ve Y r.d.leri sırasıyla λ_1 ve λ_2 parametreleri ile Poisson dağılımına sahip olsun. Bu r.d.'lerinin toplamlarının dağılımını bulunuz.

Çözüm: Sorunun çözümünde konvolüsyon formülü kullanılacaktır. Ancak formül doğrudan kullanılmadan önce biraz açıklama yapalım.

Burada X ve Y r.d.'lerinin tanım kümeleri sırasıyla, $x \in R_X = \{0,1,2,\cdots\}$; $y \in R_Y = \{0,1,2,\cdots\}$ biçiminde verilebilir. Z=X+Y r.d. için tanım kümesi hem X hem de Y r.d.'lerinin tanım kümeleri tarafından belirlenir. Z r.d. negatif değer alamaz, dolayısıyla Z 'nin n gibi bir tam sayı değerini alması için, $p_Z(n) = P(Z = n)$, X r.d. $k \in R_X$ değerini aldığında, $p_X(k) = P(X = k)$, Y r.d. de $n - k \in R_Y$ değerini almak zorundadır, $p_Y(n-k) = P(Y = n - k)$. Dolayısıyla, her zaman $k \leq n$ koşulu geçerli olacaktır. Bu bilgiler doğrultusunda konvolüsyon formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$p_Z(n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) P(Y = n-k) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k) p_Y(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\mathrm{n}!} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{n}!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\mathrm{n}!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}_{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\mathrm{n}!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

X ve Y r.d.'lerinin toplamının dağılımı $(\lambda_1 + \lambda_2)$ parametreleri ile Poisson olarak elde edilir.

6) X_1ve X_2 standart normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin.

$Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$ ise,

a) $g(y_1, y_2)$ bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
b) $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a) $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dönüşüm Yöntemi*nden yararlanılsın. X_1ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları, $x_1 = \frac{y_1 y_2}{1+y_2}$ ve $x_2 = \frac{y_1}{1+y_2}$ olacaktır.
Jacobian matrisi ve bu matrisin determinantının mutlak değeri,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2}{1+y_2} & \frac{y_1}{(1+y_2)^2} \\ \frac{1}{1+y_2} & -\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \end{bmatrix} \quad ve \quad |det\, J| = \frac{y_1}{(1+y_2)^2}$$

olarak bulunur. $g(y_1, y_2)$'nin hesaplanabilmesi için X_1ve X_2raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonuna ihtiyaç vardır. $X_i \sim N(0,1) i = 1,2$ aynı dağılımlı raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının $f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_i^2}{2}}, -\infty < x_i < +\infty, i = 1,2$ biçiminde olduğu biliniyor. Bu raslantı değişkenlerinin bağımsız oldukları da bilindiğine göre, $f(x_1, x_2)$,

$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x_1^2 + x_2^2)}{2}}, -\infty < x_1, x_2 < +\infty$ olacaktır. O halde $g(y_1, y_2)$,

$$g(y_1, y_2) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2 y_2^2}{(1+y_2)^2} + \frac{y_1^2}{(1+y_2)^2}\right)}}_{f(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2))} \underbrace{\frac{y_1}{(1+y_2)^2}}_{|det\, J|}, -\infty < y_1 < +\infty, -\infty < y_2 < +\infty, y_2 \neq -1 \text{ düzenlenirse,}$$

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right)} \frac{y_1}{(1+y_2)^2}, -\infty < y_1 < +\infty, -\infty < y_2 < +\infty, y_2 \neq -1 \\ 0, \text{ö}.d \end{cases} \text{ olacaktır.}$$

b) $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$g(y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right)} \frac{y_1}{(1+y_2)^2} d\, y_1$ 'dir.

Burada integralin çözümü için değişken değiştirme yöntemi kullanılsın ve $u = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right)$ olsun. Diferansiyelleri $du = \frac{1}{2} 2y_1 \left(\frac{(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right) dy_1 \Rightarrow \frac{du}{(1+y_2^2)} = \frac{y_1 dy_1}{(1+y_2)^2}$ olacaktır. İntegral tekrar düzenlenirse (sınırlara dikkat edilirse, y_1 'in karesel olması sebebiyle$-\infty$'dan 0'a kadar olan sınırı ile 0' dan ∞ 'a kadar olan sınırında u nun sınırları 0' dan ∞ 'a kadar olacaktır. Bu yüzden de 2 ile çarpılmıştır.),

$$= 2 \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-u} \frac{du}{(1+y_2^2)} = \frac{1}{\pi(1+y_2^2)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-u} du}_{-e^{-u}|_0^\infty = 1} = \frac{1}{\pi(1+y_2^2)}$$

$$g(y_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(1+y_2{}^2)}, -\infty < y_2 < \infty \\ 0, \text{ö.}d. \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. $Y_2 \sim Cauchy(\alpha = 0, \beta = 1)$ (standart cauchy) dağılımına sahip raslantı değişkenidir.

<u>Hatırlatma:</u> $X \sim Cauchy(\alpha, \beta)$ dağılımına sahip bir raslantı değişkeni olsun. Xraslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\beta\left[1+\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}, -\infty < x < +\infty \\ 0, \text{ö.}d. \end{cases}$$

biçimindedir.

7) X_1ve X_2, $Uniform(1, \beta)$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin.

$Y_1 = X_1X_2$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu dönüşüm yöntemiyle bulunuz.

Çözüm:

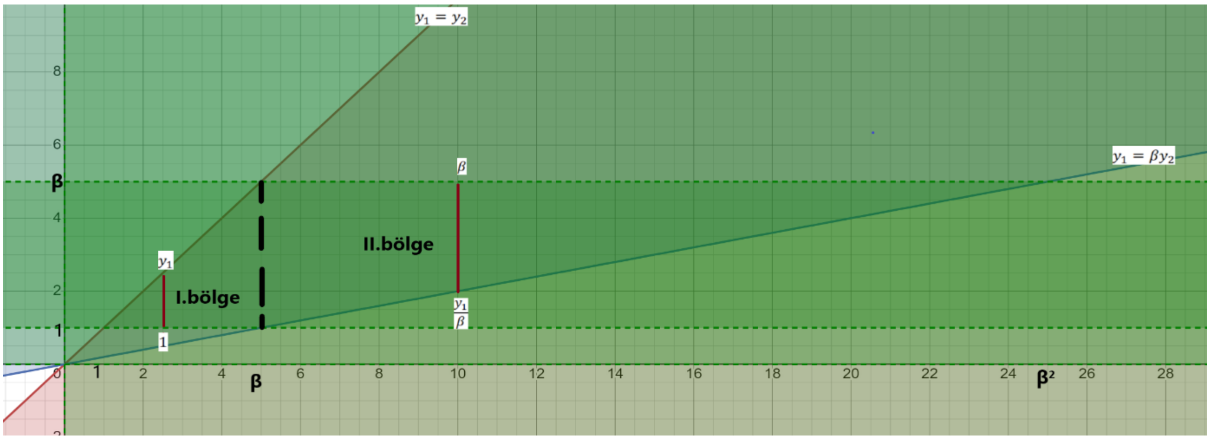
$Y_1 = X_1X_2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dönüşüm Yönteminden* yararlanılsın. İlk olarak X_1ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları elde edilsin. $Y_1 = X_1X_2$ olduğuna göre dönüşüm yönteminden yararlanabilmek için yeni bir raslantı değişkeni$Y_2 = X_2$ olarak tanımlansın. X_1 ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları, $x_1 = \frac{y_1}{y_2}$ ve $x_2 = y_2$ olacaktır.
Jacobian matrisi ve bu matrisin determinantının mutlak değeri,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y_2} & \dfrac{-y_1}{y_2{}^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ve \quad |det\,J| = \frac{1}{y_2}$$

olarak bulunur. $g(y_1, y_2)$'nin hesaplanabilmesi için X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonuna ihtiyaç vardır. $X_i \sim Uniform(1, \beta)$ $i = 1,2$ aynı dağılımlı raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının $f(x_i) = \frac{1}{\beta-1}, 1 < x_i < \beta, i = 1,2$ biçiminde olduğu biliniyor.
Bu raslantı değişkenlerinin bağımsız oldukları da bilindiğine göre, $f(x_1, x_2)$,

$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(\beta-1)^2}, 1 < x_i < \beta$, olacaktır. O halde $g(y_1, y_2)$,

$g(y_1, y_2) = \frac{1}{(\beta-1)^2}\frac{1}{y_2}, 1 < y_2 < \beta, y_2 < y_1 < \beta y_2$ şeklinde elde edilir.



$g(y_1)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(y_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^{y_1} \frac{1}{(\beta-1)^2}\frac{1}{y_2}dy_2, & 1 < y_1 < \beta \\ \displaystyle\int_{\frac{y_1}{\beta}}^{\beta} \frac{1}{(\beta-1)^2}\frac{1}{y_2}dy_2, & \beta < y_1 < \beta^2 \\ 0, & ö.d \end{cases}$$

düzenlenirse,

$$g(y_1) = \begin{cases} \dfrac{ln\, y_1}{(\beta-1)^2}, & 1 < y_1 < \beta \\ \dfrac{2\, ln\, \beta - ln\, y_1}{(\beta-1)^2}, & \beta < y_1 < \beta^2 \\ 0, & ö.d \end{cases}$$

olarak elde edilir.

8) $X_1, X_2, \dots, X_n$, sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ parametreleriyle Poisson dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. Bu değişkenlerin toplamının λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olduğunu moment çıkaran fonksiyon yöntemiyle gösteriniz.

Çözüm:

X raslantı değişkeni $X \sim P(\lambda)$ dağılımına sahip ise moment çıkaran fonksiyonun,

$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ olduğu bilinmektedir. Bu değişkenlerin toplamı $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ raslantı değişkeni ile ifade edilsin. Parametreler toplamı ise, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ olsun. O halde $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ raslantı değişkenin dağılımını bulmak için *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi*nden yararlanılsın.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E\left(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}\right) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\dots M_{X_n}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)}\dots e^{\lambda_n(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)(e^t-1)} \\ &= e^{\lambda(e^t-1)} \end{aligned}$$

Böylece $Y \sim P(\lambda)$ raslantı değişkenin λ parametresiyle Poisson dağıldığı gösterilmiştir.

9) $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(1,1)$, $X_3 \sim N(1,9)$ ve $X_4 \sim N(2,4)$ bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3 - X_4$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$X_1 \sim N(0,1)$,$X_2 \sim N(1,1)$,$X_3 \sim N(1,9)$ ve $X_4 \sim N(2,4)$ bağımsız raslantı değişkenleri için moment çıkaran fonksiyonları sırasıyla, $M_{X_1}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, $M_{X_2}(t) = e^{t+\frac{t^2}{2}}$, $M_{X_3}(t) = e^{t+\frac{9t^2}{2}}$ ve $M_{X_3}(t) = e^{2t+\frac{4t^2}{2}}$ olduğu biliniyor. Y raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E\left(e^{t(X_1-2X_2+3X_3-X_4)}\right) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(-2t)M_{X_3}(3t)M_{X_4}(-t) \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}e^{-2t+\frac{(-2t)^2}{2}}e^{3t+\frac{9(3t)^2}{2}}e^{2(-t)+\frac{4t^2}{2}} \\
&= e^{45t^2-t} \Rightarrow \mu = -1, \sigma^2 = 90
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. Y raslantı değişkenin $Y \sim N(-1,90)$ dağılımına sahiptir.

Buradan $g(y)$,

$$
g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{90}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y+1)^2}{90}}, -\infty < y < +\infty \\ 0, \text{ö}.d \end{cases}
$$ olacaktır.

10) $X_i, i = 1,2,\ldots,k$ bağımsız raslantı değişkenlerine ait moment çıkaran fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$
M_{X_i}(t) = \left(c + \frac{7}{8}e^t\right)^{n_i}
$$

a) c sabitini bulunuz.
b) $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ raslantı değişkeninin dağılımını moment çıkaran yönteminden yararlanarak bulunuz.
c) $E(Y)$ beklenen değerini bulunuz.

Çözüm:

a) Herhangi bir $X_i$raslantı değişkeni için t=0 olması durumunda $M_{X_i}(t=0) = 1$ olmalıdır.
O halde c,
$M_{X_i}(0) = \left(c + \frac{7}{8}e^0\right)^{n_i} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{8}$ olarak bulunur.

b) $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ raslantı değişkeninin dağılımı, *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi*nden yararlanılarak,

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E\left(e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_k)}\right) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_k}(t) \\
&= \left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{n_1}\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{n_2}\ldots\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{n_k} \\
&= \left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{\sum_{i=1}^{k} n_i}
\end{aligned}
$$

$Y \sim Binom\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\,, p = \frac{1}{8}\right)$ şeklinde elde edilir.

c) $Y \sim Binom\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\, , p = \frac{1}{8}\right)$ dağılıma sahip olduğu bilindiğine göre $E(Y)$,

$E(Y) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)}{8}$ olacaktır. (X raslantı değişkeni $X \sim Binom(n, p)$ ise $E(X) = np$'dir)