1) a) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

kritik nok. bulup sınıflandırınız.

b) $f(x,y) = x\sin y$

a) $f_x(x,y) = 6x^2 + y^2 + 10x = 0$

$f_y(x,y) = 2xy + 2y = 0 \Rightarrow 2y(x+1) = 0$

$y=0$ veya $x=-1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$6x^2 + 10x = 0$ $\quad$ $6 + y^2 - 10 = 0$

$2x(3x+5) = 0$ $\quad$ $y^2 = 4$

$x=0,\ x=-5/3$ $\quad$ $y = \mp 2$

$(0,0),\ (-5/3, 0)$ $\quad$ $(-1, \mp 2)$

$f_{xx} = 12x + 10 \qquad f_{yy} = 2x + 2 \qquad f_{xy} = 2y$

$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (12x+10)(2x+2) - 4y^2$

$(x,y) = (0,0)$ $\quad$ $D(0,0) = 20 > 0$ $\quad$ $f_{xx}(0,0) = 10 > 0$

$\Downarrow$

yerel minimum

$(x,y) = (-5/3, 0)$ $\quad$ $D(-5/3, 0) = 40/3 > 0$ $\quad$ $f_{xx}(-5/3, 0) = -10 < 0$

$\Downarrow$

yerel max.

$(x,y) = (-1, \mp 2)$ $\quad$ $D(-1, \mp 2) < 0$

$\Downarrow$

eyer nok.

b) $f_x = \sin y \qquad f_y = x.\cos y$

$f_x = \sin y = 0 \Leftarrow y = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ $\qquad$ $f_y = x.\cos(n\pi) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(0, n\pi)$ kritik noktalar

$f_{xx} = 0 \qquad f_{yy} = -x\sin y \qquad f_{xy} = \cos y \qquad D = -x\sin y - \cos^2 y$

$D(0, n\pi) = -\cos^2(n\pi) < 0$

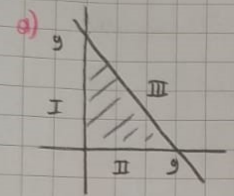
Tüm kritik noktalar eyer noktasıdır.

2) a) $f(x,y) = 2+2x+2y-x^2-y^2$ D: $x=0$, $y=0$, $y=9-x$ ile sınırlı bölge.

b) $f(x,y) = 2x^3+y^4$ $D=\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$

D üzerinde mutlak max./min. değerleri bulunuz

a)



Mutlak max/min değerleri kritik nok. ya da sınırda alır.

D bölgesinin içi: $f_x = 2-2x = 0$, $f_y = 2-2y = 0$ $\Rightarrow$ $(x,y)=(1,1)$ kritik nok.

$\boxed{f(1,1) = 4}$

D'nin sınırı:

I üzerinde: $x=0$, $0 \le y \le 9$

$f(0,y) = 2+2y-y^2$ $f'(0,y) = 2-2y = 0 \Rightarrow y=1$ kritik nok,

$\boxed{f(0,0)=2}$ $\boxed{f(0,1)=3}$ $\boxed{f(0,9)=-61}$

II üzerinde: $y=0$, $0 \le x \le 9$

$f(x,0) = 2+2x-x^2$ $f'(x,0) = 2-2x = 0 \Rightarrow x=1$

$\boxed{f(0,0)=2}$ $\boxed{f(1,0)=3}$ $\boxed{f(9,0)=-61}$

III üzerinde: $y=9-x$ $0 \le x \le 9$

$f(x,9-x) = 2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2 = -61+18x-2x^2$

$f'(x,9-x) = 18-4x = 0 \Rightarrow x = 9/2$

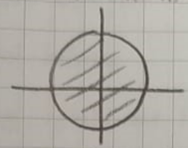
$\boxed{f(0,9)=-61}$ $\boxed{f(9/2, 9/2) = -41/2}$ $\boxed{f(9,0)=-61}$

Mutlak max: $f(1,1)=4$

Mutlak min: $f(9,0) = f(0,9) = -61$

b) D'nin içinde $\qquad f_x = 6x^2 = 0 \qquad f_y = 4y^3 = 0 \qquad (0,0)$ kritik nok $\boxed{f(0,0)=0}$

D'nin sınırında



$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2$

$f(x,y) = 2x^3 + (1-x^2)^2 = x^4+2x^3-2x^2+1 \qquad -1 \leq x \leq 1$

$f' = 4x^3+6x^2-4x = 0 \Rightarrow x=0, \; x=-2, \; x=1/2$

$\boxed{f(0,\mp 1)=1} \qquad x=-2 \notin D \qquad \boxed{f(1/2, \mp\sqrt{3}/2) = 13/16}$

$\boxed{f(-1,0)=-2}$ $\qquad \boxed{f(1,0)=2}$

$\searrow$ mutlak min. $\qquad \searrow$ mutlak max

3) $x-y+z=4$ düzleminin $(1,2,3)$ noktasına en yakın nok. bulunuz.

$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$ min. olacak şekilde (x,y,z) nok. bulmalıyız.

(x,y,z) düzlem üzerinde olduğundan, $z = 4-x+y$.

$f(x,y) = (x-1)^2+(y-2)^2+(1-x+y)^2$ min. o.ş (x,y,z) nok. bulalım.

$f_x = 4x-2y-4=0$

$f_y = 4y-2x-2=0$

$\Rightarrow x=5/3 \quad y=4/3 \qquad (5/3, 4/3)$ kritik nok.

$(x,y,z) = (5/3, 4/3, 11/3)$ nok. $(1,2,3)$'e en yakın noktadır.

Kontrol edelim. $\quad f_{xx}=4 \quad f_{yy}=4 \quad f_{xy}=-2 \quad D=12>0$

$f_{xx}>0$

olduğundan bu nokta lokal min. olur.

4) $17x^2+12xy+8y^2-100=0$ elipsi ile orijin arasındaki min ve max. uzaklığı bulunuz.

$d=\sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y)=x^2+y^2$ mutlak max / min değerini bulalım.

kısıtlama fonk. $g(x,y)=17x^2+12xy+8y^2-100=0$

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2+y^2+\lambda(17x^2+12xy+8y^2-100)$

$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(34x+12y)=0$ -- (1)

$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(12x+16y)=0$ -- (2)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=17x^2+12xy+8y^2-100=0$ -- (3)

(1) ve (2)'den $\frac{-x}{17x+6y}=\frac{-y}{6x+8y}$

$-6x^2-8xy=-17xy-6y^2 \Rightarrow 2x^2-3xy-2y^2=0$ -- (4)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8x^2-12xy-8y^2=0 \\ 17x^2+12xy+8y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 25x^2=100 \Rightarrow x=\mp 2$

$x=2 \overset{(4)}{\Rightarrow} 8-6y-2y^2=0 \Rightarrow y=1,\ y=-4$

$x=-2 \overset{(4)}{\Rightarrow} 8+6y-2y^2=0 \Rightarrow y=-1 \quad y=4$

$(2,1),\ (2,-4),\ (-2,-1),\ (-2,4)$ kritik noktalar

$f(-2,-1)=f(2,1)=5 \qquad f(2,-4)=f(-2,4)=20$

Max. uzaklık $d=\sqrt{20}$
Min uzaklık $d=\sqrt{5}$

5) $x^3+y^3+3x^2y=15$ eşitliğini sağlayan, negatif olmayan x, y sayılarının toplamının max. / min değerini bulunuz.

$f(x,y) = x+y$ fonk. max. / min değerini bulmalıyız.

$g(x,y) = x^3+y^3+3x^2y-15=0$

$L(x,y,\lambda) = x+y + \lambda(x^3+y^3+3x^2y-15)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 1+\lambda(3x^2+6yx)=0 \Rightarrow -1 = 3\lambda x^2 + 6\lambda xy$ ... (1)

$\frac{\partial L}{\partial y} = 1+\lambda(3y^2+3x^2)=0 \Rightarrow -1 = 3\lambda x^2 + 3\lambda y^2$ ... (2)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^3+3x^2y-15=0$ ... (3)

$(1)-(2) = 6\lambda xy - 3\lambda y^2 = 0 \Rightarrow 3\lambda y(2x-y)=0$

$y=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} x^3=15 \Rightarrow x=\sqrt[3]{15}$

$y\neq 0$, $y=2x \overset{(3)}{\Rightarrow} x^3+8x^3+6x^3=15$
$\Rightarrow x^3=1$
$\Rightarrow x=1,\ y=2$

(Ayrıca (1) ve (2)'den $\lambda\neq 0$ old. biliyoruz.)

$f(\sqrt[3]{15}, 0) = \sqrt[3]{15}$ $\Downarrow$ min

$f(1,2) = 3$ $\downarrow$ max.