İST-265 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK

UYGULAMA-6 ÇÖZÜMLER

1) X_1, X_2, X_3 bağımsız raslantı değişkenlerinin beklenen değer ve varyansları aşağıdaki tabloda verilmiştir. $Y = X_1 - 2X_2 + 4X_3$ ise $E(Y)$ ve $V(Y)$ nedir?

	Beklenen Değer	Varyans
X_1	1	3
X_2	3	5
X_3	0	10

Çözüm:

<u>Hatırlatma:</u>

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) \ \rightarrow \ \text{Bağımsız ise}$$

$Y = X_1 - 2X_2 + 4X_3 \rightarrow$ doğrusal birleşimden $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 4$ yerine yazılırsa;

$$E(Y) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + a_3 E(X_3) = E(X_1) - 2E(X_2) + 4E(X_3)$$
$$= 1 - 2(3) + 4(0) = -5$$

$$V(Y) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + a_3^2 V(X_3) = V(X_1) + 4\,V(X_2) + 16\,V(X_3)$$
$$= 3 \ + \ 4(5) \ + 16(10) = 183$$

olarak bulunur.

2) $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(1,1)$, $X_3 \sim N(0,9)$ dağılımlarına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $Y = X_1 - 2X_2 - X_3$ olmak üzere $V(Y)$ ne olur?

Çözüm:

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) \ \rightarrow \ \text{Bağımsız ise}$$

$Y = X_1 - 2X_2 - X_3 \rightarrow$ doğrusal birleşimden $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = -1$ yerine yazılırsa;

$$V(Y) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + a_3^2 V(X_3) = 1^2\,V(X_1) + (-2)^2\ V(X_2) + (-1)^2\ V(X_3)$$
$$= 1(1) \ + \ 4(1) \ + 1(9) = 14$$

olarak bulunur.

3) X, Y, Z raslantı değişkenleri olmak üzere $E(X)=-2$, $E(Y)=1$, $E(Z)=3$, $V(X)=1$,
$V(Y)=1$, $V(Z)=4$, $Cov(X,Y)=-0.05$, $Cov(X,Z)=1$, $Cov(Y,Z)=1$'dir. Buna göre,

a. $U_1 = X-2Y-3Z$'nin beklenen değeri ve varyansını bulunuz.
b. $U_2 = 5X-2Y-3Z$ ise $Cov(U_1,U_2)$ nedir?

Çözüm:

a. $U_1 = X-2Y-3Z$ doğrusal birleşimden; $a_1=1,\ a_2=-2,\ a_3=-3$ yerine yazılırsa;

$$E(Y)=a_1E(X)+a_2E(Y)+a_3E(Z) = E(X)-2E(Y)-3E(Z)$$
$$=1(-2)-2(1)-3(3)=-13$$

$$V(Y)=a_1^2V(X)+a_2^2V(Y)+a_3^2V(Z) + 2\left[a_1a_2Cov(X,Y)+a_1a_3Cov(X,Z)+a_2a_3Cov(Y,Z)\right]$$
$$=(1)^2(1)+(-2)^2(1)+(-3)^2(4)+2\left[1(-2)(-0.05)+1(-3)(1)+(-2)(-3)1\right]$$
$$=1+4+36+2[3.1]=47.2$$

olarak bulunur.

b. I.Yol:

$$Cov(U_1,U_2)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i V(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}}_{i<j}(a_i b_j + a_j b_i)Cov(X_i, X_j)$$

$U_1 = X-2Y-3Z$ için $a_1=1$, $a_2=-2$, $a_3=-3$
$U_2 = 5X-2Y$ için $b_1=5$, $b_2=-2$, $b_3=0$

$$\begin{aligned}Cov(U_1,U_2)&=a_1b_1V(X_1)+a_2b_2V(X_2)+a_3b_3V(X_3)\\&+(a_1b_2+a_2b_1)Cov(X_1,X_2)\\&+(a_1b_3+a_3b_1)Cov(X_1,X_3)\\&+(a_2b_3+a_3b_2)Cov(X_2,X_3)\end{aligned}$$
$$=(1)(5)(1)+(-2)(-2)1+(-3)(0)(4)$$
$$+[1(-2)+(-2)5](-0.05)$$
$$+[1(0)+(-3)5](1)$$
$$+[(-2)(0)+(-3)(-2)](1)$$
$$=9+0.6-15+6=0.6$$

olarak bulunur.

II.Yol:

$$Cov(U_1,U_2)=Cov(X-2Y-3Z\ ,\ 5X-2Y)$$
$$=5Cov(X,X)-2Cov(X,Y)-10Cov(Y,X)+4Cov(Y,Y)-15Cov(Z,X)+6Cov(Z,Y)$$
$$=5Var(X)+4Var(Y)-12Cov(X,Y)-15Cov(X,Z)+6Cov(Y,Z)$$
$=5(1)+4(1)-12(-0.05)-15(1)+6(1) = 5+4+0.6-15+6=0.6$ olarak bulunur.

4) X_1, X_2, X_3 raslantı değişkenleri için varyanslar sırasıyla 5,4,7 olarak veriliyor. X_1 ve X_2 arasındaki kovaryans 3, X_2 ve X_3 arasındaki kovaryans -2 olarak veriliyor. X_1 ve X_3 değişkenlerinin ise bağımsız olduğu biliniyor. $Y_1 = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ ve $Y_2 = -2X_1 + 3X_2 + 4X_3$ şeklinde verilen raslantı değişkenleri arasındaki kovaryansı hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
&V(X_1) = 5 \qquad Cov(X_1, X_2) = 3 \\
&V(X_2) = 4 \qquad Cov(X_1, X_3) = 0 \\
&V(X_3) = 7 \qquad Cov(X_2, X_3) = -2
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 - 2X_2 + 3X_3 \\
Y_2 &= -2X_1 + 3X_2 + 4X_3
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_1 = 1 \ , \ a_2 = -2 \ , \ a_3 = 3 \\
&b_1 = -2 \ , \ b_2 = 3 \ , \ b_3 = 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_2) = {} & a_1b_1V(X_1) + a_2b_2V(X_2) + a_3b_3V(X_3) \\
& + (a_1b_2 + a_2b_1)Cov(X_1, X_2) \\
& + (a_1b_3 + a_3b_1)Cov(X_1, X_3) \\
& + (a_2b_3 + a_3b_2)Cov(X_2, X_3) \\
= {} & 1(-2)(5) + (-2)(3)(4) + (3)(4)(7) \qquad \to 50 \\
& + [(1)(3) + (-2)(-2)](3) \qquad \to 21 \\
& + [(1)(4) + (3)(-2)](0) \qquad \to 0 \\
& + [(-2)(4) + (3)(3)](-2) \qquad \to -2 \\
= {} & 69
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

5) Bir içecek otomatı bardaklara ortalama 200ml ve standart sapması 15ml olacak şekilde içecek doldurmaktadır. Belirli bir günde 121 adet içecek satılmıştır. İlgili günde her bardağa doldurulan ortalama içeceğin (ml) beklenen değer ve varyansını bulunuz.

Çözüm:

$\mu = 200\,\text{ml}, \ \sigma = 15\,\text{ml}$

$\overline{X}$:İlgili günde bardak başına doldurulan ortalama içecek miktarı (ml)

$$E(\overline{X}) = \mu = 200$$

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{15^2}{121} = \frac{225}{121} = 1.8595$$

olarak bulunur.

6) İki rakip internet servis sağlayıcı müşterilerine memnuniyet anketi uygulamışlardır. Anket 1 ile 5 arasında, 1 memnun değilim, 5 oldukça memnunum olacak şekilde uygulanmıştır. 1 numaralı servis sağlayıcının 100 müşterisine uyguladığı anket sonucu 3.51 memnuniyet ortalaması ve 0.51 standart sapma ile, 2 numaralı servis sağlayıcının 175 müşterisine uyguladığı anket sonucu ise 3.24 memnuniyet ortalaması ve 0.75 standart sapma ile bilinmektedir. Buna göre $E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ ve $V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ bulunuz.

Çözüm:

$$\mu_{X_1} = 3.51 \ , \quad \sigma^2_{X_1} = (0.51)^2 = 0.2601 \ , \quad n_1 = 100$$
$$\mu_{X_2} = 3.24 \ , \quad \sigma^2_{X_2} = (0.75)^2 = 0.5625 \ , \quad n_2 = 175$$

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 = 3.51 - 3.24 = 0.27$$
$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma^2_{X_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{X_2}}{n_2} = \frac{0.2601}{100} + \frac{0.5625}{175} = 0.002601 + 0.00375 = 0.00635$$

olarak bulunur.

7) X ve Y bağımsız raslantı değişkenlerinin ortalama ve varyansları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Buna göre $E(\overline{X} - \overline{Y})$ ve $V(\overline{X} - \overline{Y})$ bulunuz.

	X	Y
n	25	36
Beklenen Değer	5	4
Varyans	9	4

Çözüm:

$$E(\overline{X} - \overline{Y}) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = 5 - 4 = 1$$

$$V(\overline{X} - \overline{Y}) = V(\overline{X}) + V(\overline{Y}) = \frac{\sigma^2_X}{n_X} + \frac{\sigma^2_Y}{n_Y} = \frac{9}{25} + \frac{4}{36} = 0.4711$$

olarak bulunur.

8) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ p parametresi ile Bernoulli dağılımından alınan bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ olarak tanımlansın. X raslantı değişkeninin varyansını hesaplayınız.

Çözüm:

Hatırlatma:

$X \sim Bernoulli(p)$ için $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$ 'dir.

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) \rightarrow X_1, X_2, \ldots X_n \text{ bağımsız ise}$$
$$V(X) = p(1-p).\ p(1-p).\ \ldots\ .p(1-p) = p^n(1-p)^n$$

olarak bulunur.

9) X ve Y raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$f(x,y) = \frac{1}{3}(x+y),\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2$ olarak veriliyor. $W = 3X + 4Y - 5$ biçiminde verilen raslantı değişkeninin beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.

Çözüm:

Önce marjinalleri alırız.

$$f_x(x) = \int_0^2 f(x,y)dy = \int_0^2 \frac{1}{3}(x+y)dy = \frac{1}{3}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}(x+1)$$
$$f_y(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)dy = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

olur.

$V(X) = E(X^2) + [E(X)]^2$ bilinmektedir. Bu sebeple $E(X), E(X^2), E(Y), E(Y^2)$ hesaplanacaktır.

$$E(X) = \int_0^1 x\, f_X(x)\, dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x(x+1)\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{9}$$
$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\, f_X(x)\, dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^2(x+1)\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{18}$$

$$E(Y) = \int_0^2 y\, f_Y(y)\, dx = \frac{1}{3}\int_0^2 y\left(y + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{11}{9}$$
$$E(Y^2) = \int_0^2 y\, f_Y(y)\, dx = \frac{1}{3}\int_0^2 y^2\left(y + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{9}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2 xy\; f(x,y)\,dy\,dx\;=\int_0^1\left(\frac{1}{3}\int_0^2\left(x^2y+xy^2\right)dy\right)dx=\int_0^1\frac{1}{3}\left(2x^2+\frac{8x}{3}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\;E(Y)=\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{9}\;\frac{11}{9}\right)=-0.01234$$

Şimdi ise W doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansını hesaplayalım;

$$E(W)=E(3X+4Y-5)=3E(X)+4E(Y)-5$$
$$=3\frac{5}{9}+4\frac{11}{9}-5=\frac{14}{9}=1.5556$$
$$V(W)=V(3X+4Y-5)=9V(X)+16V(Y)+2\left[(3)(4)Cov(X,Y)\right]$$
$$=9(0.080247)+16(0.28395)+24(-0.01234)=4.96926$$

olarak bulunur.

10) θ_1 parametresi ile Bernoulli dağılımından n_1 birimlik ve θ_2 parametresi ile Bernoulli dağılımından n_2 birimlik rasgele örneklemler çekiliyor. Örneklemlerin ortalamaları sırasıyla $\bar{X}_1,\bar{X}_2$ olarak veriliyor. Buna göre

a) $E\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)$

b) $V\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)$ bulunuz.

Çözüm:

$$Bernoulli\;\theta_1\rightarrow n_1\,birim\rightarrow E(X_1)=\theta_1\;\;,\;V(X_1)=\theta_1(1-\theta_1)$$
$$Bernoulli\;\theta_2\rightarrow n_2\,birim\rightarrow E(X_2)=\theta_2\;\;,\;V(X_2)=\theta_2(1-\theta_2)$$

olduğu bilinmektedir.

a) $E\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)=E(\bar{X}_1)-E(\bar{X}_2)=\theta_1-\theta_2$

b) $V\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)=V(\bar{X}_1)+V(\bar{X}_2)=\dfrac{\sigma_{X_1}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_{X_2}^2}{n_2}=\dfrac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\dfrac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}$

olarak bulunur.

11) X ve Y raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(x,y)=\frac{2}{75}\left(2x^2y+xy^2\right),\ 0<x<3\ 1<y<2$ olarak veriliyor. $V(X+Y)$ ile $V(X)+V(Y)$ değerlerini karşılaştırarak sonucu yorumlayınız.

$$V(X+Y)=\frac{939}{2000}$$
$$V(X)+V(Y)=\frac{4747}{10000}$$

Çözüm:

Eğer X ve Y bağımsız olsaydı; W = X+Y doğrusal birleşimi olarak düşünürsek

$$V(W)=V(X+Y)\rightarrow a_1=1, a_2=1\ ,\ n=2$$
$$V(W)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2V(X_i)$$
$$V(W)=V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

eşitliği sağlanacaktı.

V(X+Y)=0.4695 $\neq$ V(X)+V(Y)=0.4747 olduğundan X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsız olmadıkları sonucuna varılmaktadır. Bağımsız olmadıklarından dolayı V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y) ifadesi gelecektir. Bu durumda Cov(X,Y) = V(X+Y)-(V(X)+V(Y)) olacağından;

Cov(X,Y)=0.4695-0.4747 = -0.0052

olarak bulunacaktır.

12) X ve Y raslantı değişkenleri için bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki tablo ile veriliyor

	P(X=x)		
P(Y=y)	0	1	2
0	0	1/4	0
1	1/4	0	1/4
2	0	1/4	0

$\rho(-2X+7{,}5Y-3)$ şeklinde verilen korelasyon katsayısını hesaplayınız.

Çözüm:

$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$; $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ olduğu bilinmektedir. Bu sebeple öncelikle E(XY), E(X) ve E(Y) değerlerini bulalım;

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= (0)(0)P(X=0,Y=0)+(0)(1)P(X=0,Y=1)+(0)(2)P(X=0,Y=2)\\
&\quad +(1)(0)P(X=1,Y=0)+(1)(1)P(X=1,Y=1)+(1)(2)P(X=1,Y=2)\\
&\quad +(2)(0)P(X=2,Y=0)+(2)(1)P(X=2,Y=1)+(2)(2)P(X=2,Y=2)\\
&= P(X=1,Y=1)+2P(X=1,Y=2)+2P(X=2,Y=1)+4P(X=2,Y=2)\\
&= 0+2\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)+4(0)=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0P(X=0,Y=0)+0P(X=0,Y=1)+0P(X=0,Y=2)\\
&\quad +1P(X=1,Y=0)+1P(X=1,Y=1)+1P(X=1,Y=2)\\
&\quad +2P(X=2,Y=0)+2P(X=2,Y=1)+2P(X=2,Y=2)\\
&= 1\left(\frac{1}{4}\right)+1(0)+1\left(\frac{1}{4}\right)+2(0)+2\left(\frac{1}{4}\right)+2(0)=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= 0P(X=0,Y=0)+0P(X=1,Y=0)+0P(X=2,Y=0)\\
&\quad +1P(X=0,Y=1)+1P(X=1,Y=1)+1P(X=2,Y=1)\\
&\quad +2P(X=0,Y=2)+2P(X=1,Y=2)+2P(X=2,Y=2)\\
&= 1\left(\frac{1}{4}\right)+1(0)+1\left(\frac{1}{4}\right)+2(0)+2\left(\frac{1}{4}\right)+2(0)=1
\end{aligned}
$$

olarak bulunmaktadır. Buradan Cov(X,Y) = 1 – (1)(1) = 0 çıkacaktır. Dolayısı ile X ve Y bağımsız oldukları için $\rho\left(X,Y\right)$ 0 çıkacaktır.

$\rho\left(-2X+7,5Y-3\right)=0$ olarak bulunur.

13) $N\left(3,2\right)$ dağılımından 16 birimlik ve $N\left(2,6\right)$ dağılımından da 15 birimlik iki rasgele örneklem çekiliyor. Örneklemlerin ortalamaları sırasıyla $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ olarak veriliyor. Buna göre

a) $E\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)$

b) $V\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)$ bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
&X_1 : N(3,2) \rightarrow \mu_{X_1}=3\ ,\ \sigma^2_{X_1}=2\ \ ,n_1=16\\
&X_2 : N(2,6) \rightarrow \mu_{X_2}=2\ ,\ \sigma^2_{X_2}=6\ ,n_2=15
\end{aligned}
$$

a) $E\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)=E(\bar{X}_1)-E(\bar{X}_2)=\mu_{X_1}-\mu_{X_2}=3-2=1$

b) $V\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)=V(\bar{X}_1)+V(\bar{X}_2)=\dfrac{\sigma^2_{X_1}}{n_1}+\dfrac{\sigma^2_{X_2}}{n_2}=\dfrac{2}{16}+\dfrac{6}{15}=0.525$

olarak bulunur.

14) $\{1,2,\ldots,100\}$ biçiminde verilen sonlu kitleden n=10 birimlik bir örneklem seçilen birim yerine konulmadan oluşturuluyor. Aşağıda verilenleri hesaplayınız.

a) μ,σ^2

b) $E\left(\bar{X}\right),V\left(\bar{X}\right)$

c) $Y=\sum_{i=1}^{10}X_i$ olmak üzere $E\left(Y\right),\ V\left(Y\right)$

Çözüm:

a) $\mu=\dfrac{N+1}{2}=\dfrac{100+1}{2},\ \sigma^2=\dfrac{\left(N+1\right)\left(N-1\right)}{12}=\dfrac{101*99}{12}$

b) $E\left(\bar{X}\right)=\dfrac{N+1}{2}=\dfrac{100+1}{2},\ V\left(\bar{X}\right)=\dfrac{\left(N+1\right)\left(N-n\right)}{12n}=\dfrac{101*90}{12*10}$

c) $E\left(Y\right)=\dfrac{n\left(N+1\right)}{2}=\dfrac{10*101}{2},\ V\left(Y\right)=\dfrac{n\left(N+1\right)\left(N-n\right)}{12}=\dfrac{10*101*90}{12}$