DUAL SİMPLEKS YÖNTEM

Dual Simpleks algoritmasında doğrusal programlama problemi optimum fakat uygun olmayan bir çözümle başlar. Birbiri ardına yapılacak yenilemeler optimumluğu bozmadan uygun çözüme yönelecek şekilde tasarlanmıştır. Uygunluğun elde edildiği yinelemede algoritma sona erer. Dual simpleks yöntemi, uygun ve optimum olmayan çözümle başlayıp uygun halini sürdürerek optimuma ulaşan normal simpleks yönteminin karşıtıdır.

Aşamaları:

1. Başlangıçtaki temel çözümün uygun olup olmadığının incelenmesi için öncelikle (≥) biçiminde olan kısıt fonksiyonların (≤) biçimine dönüştürülmesi gerekir.

2. Temeli terk edecek değişkenin belirlenmesinde kullanılan ölçüt temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerine dayanır. Temeli terk edecek değişken en yüksek negatif (mutlak değerce en büyük negatif sayı) çözüm değerine sahip olan değişkendir. Bu değişkenin bulunduğu satır pivot satırdır.

$$X_{Bi} = \mathrm{Min}_i\{X_{Bi}\ ,\ X_{Bi} < 0\}$$

3. Seçim işlemi için temel olmayan değişkenlere karşılık gelen C_j-Z_j değerleri, pivot satırın kendilerine karşılık gelen elemanlarına bölünerek oranlar hesaplanır. Sıfır veya pozitif paydaya (bölene) sahip oranlar dikkate alınmazlar. Bu oranlar arasından mutlak değerce en küçük oranın bulunduğu sütun pivot sütundur.

$$\theta = \mathrm{Min}_j\left\{\left|\frac{C_j - Z_j}{a_{ij}}\right|\ ,\quad a_{ij} < 0\right\}$$

Bu yolla pivot sayının negatif, dolayısıyla temele giren değişkenin çözüm değerinin pozitif olması sağlanır. Tüm oranların sıfır veya pozitif paydalara (bölenlere) sahip olması durumunda işlemlere son verilir. Böyle bir durumda çözüm vektörünün ilgili elemanı tekrar negatif değerli bulunacağından uygun çözüme ulaşılamaz.

4. Temele giren ve temeli terk eden değişkenlerin belirlenmesinden sonra simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle daha gelişmiş bir çözüm elde edilerek tekrar ikinci adıma dönülür. Bu yolla uygun bir en iyi çözüm varsa sonlu sayıda işlemle bu çözüme ulaşılır.

Yukarıda açıklandığı gibi, primal simpleks yöntemde önce pivot sütun sonra pivot satır belirlenirken, dual simpleks yöntemde önce pivot satır sonra pivot sütun belirlenmektedir.

Örnek: Aşağıdaki DP problemini Dual Simpleks Yöntem yardımıyla çözünüz.

Maks $Z = -3X_1 - X_2$

$X_1 + X_2 \geq 1$

$2X_1 + 3X_2 \geq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$

Maks $Z = -3X_1 - X_2$

$-X_1 - X_2 \leq -1$

$-2X_1 - 3X_2 \leq -2$

$X_1, X_2 \geq 0$

Maks $Z = -3X_1 - X_2$

$-X_1 - X_2 + X_3 = -1$

$-2X_1 - 3X_2 + X_4 = -2$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

		C_j	-3	-1	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_3	-1	-1	-1	1	0
0	X_4	-2	-2	-3	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j		-3	-1	0	0

$X_{Bi} = \mathrm{Min}_i\{X_{Bi}\ ,\ X_{Bi} < 0\} = \mathrm{Min}\ \{-1,\ -2\}$ X_4 temelden çıkan değişken olur.

$$\theta = \mathrm{Min}_j \left\{ \left| \frac{C_j - Z_j}{a_{ij}} \right| \ ,\quad a_{ij} < 0 \right\}$$

$= \mathrm{Min} \left\{ \left| \frac{-3}{-2} \right| = \frac{3}{2} \ ,\ \left| \frac{-1}{-3} \right| = \frac{1}{3} \right\}$ X_2 temele giren değişken olur.

		C_j	-3	-1	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_3	-1/3	-1/3	0	1	-1/3
-1	X_2	2/3	2/3	1	0	-1/3
	Z_j	-2/3	-2/3	-1	0	1/3
	C_j-Z_j		-7/3	0	0	-1/3

$X_{Bi} = \mathrm{Min}_i\{X_{Bi}\ ,\ X_{Bi} < 0\} = \mathrm{Min}\ \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ X_3 değişkeni temelden çıkar.

$$\theta = \text{Min}_j \left\{ \left| \frac{C_j - Z_j}{a_{ij}} \right| \ , \quad a_{ij} < 0 \right\}$$

= Min $\{ |\frac{-7/3}{-1/3}| = 7, \quad |\frac{-1/3}{-1/3}| = 1 \}$ X_4 temele girer.

		C_j	-3	-1	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**
0	X_4	1	1	0	-3	1
-1	X_2	1	1	1	-1	0
	Z_j	-1	-1	-1	1	0
	C_j-Z_j		-2	0	-1	0

Tüm $(C_j - Z_j) \leq 0$ ve tüm çözüm değerleri $(X_B) \geq 0$ olduğundan mevcut çözüm optimal uygun çözümdür.

$X_1^* = 0$, $X_2^* = 1$, $Z^* = -1$.

Örnek: Aşağıdaki DP problemini Dual Simpleks Yöntem yardımıyla çözünüz.

Min $Z = 2X_1 + X_2$

$3X_1 + 2X_2 \geq 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

Min $Z = 2X_1 + X_2$

$-3X_1 - 2X_2 \leq -3$

$-4X_1 - 3X_2 \leq -6$

$X_1 + 2X_2 \leq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

Min $Z = 2X_1 + X_2$

$-3X_1 - 2X_2 + X_3 = -3$

$-4X_1 - 3X_2 + X_4 = -6$

$X_1 + 2X_2 + X_5 = 3$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

		C_j	2	1	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
0	X_3	-3	-3	-2	1	0	0
0	X_4	-6	-4	-3	0	1	0
0	X_5	3	1	2	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	0	2	1	0	0	0

$X_{Bi} = \mathrm{Min}_i\,\{X_{Bi}\ ,\ X_{Bi} < 0\} = \mathrm{Min}\,\{-3,\ -6\}$ X_4 temelden çıkar.

$$\theta = \mathrm{Min}_j \left\{ \left| \frac{C_j - Z_j}{a_{ij}} \right| \ ,\quad a_{ij} < 0 \right\}$$

$= \mathrm{Min}\,\{ |\frac{2}{-4}| = \frac{1}{2}\ ,\ |\frac{1}{-3}| = \frac{1}{3} \}$ X_2 temele girer.

		C_j	2	1	0	0	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	-1	-5/3	0	1	-1/3	0
1	X_2	2	4/3	1	0	-1/3	0
0	X_5	-1	-5/3	0	0	2/3	1
	Z_j	2	4/3	1	0	-1/3	0
	C_j-Z_j		2/3	0	0	1/3	0

$X_{Bi} = \mathrm{Min}_i\,\{X_{Bi}\ ,\ X_{Bi} < 0\} = \mathrm{Min}\,\{-1\ ;\ -1\}$ X_5 temelden çıkan değişken olur.

$\theta = \mathrm{Min}_j \left\{ \left| \frac{C_j - Z_j}{a_{ij}} \right| \ ,\quad a_{ij} < 0 \right\} = \mathrm{Min}\,\{ |\frac{2/3}{-5/3}| = \frac{2}{5} \}$ X_1 temele giren değişken olur.

		C_j	2	1	0	0	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	0	0	0	1	-1	-1
1	X_2	6/5	0	1	0	1/5	4/5
2	X_1	3/5	1	0	0	-2/5	-3/5
	Z_j	12/5	2	1	0	-3/5	-2/5
	C_j-Z_j		0	0	0	3/5	2/5

Tüm $(C_j - Z_j) \leq 0$ ve tüm çözüm değerleri ≥ 0 olduğundan mevcut çözüm optimal uygun çözümdür.

$X_1^* = 3/5$, $X_2^* = 6/5$, $Z^* = 12/5$.

Örnek: Aşağıdaki DP problemini Dual Simpleks Yöntem yardımıyla çözünüz.

$\text{Min } Z = 50X_1 + 40X_2$

$3X_1 + 2X_2 \geq 35$

$5X_1 + 6X_2 \geq 60$

$2X_1 + 3X_2 \geq 30$

$X_1, X_2 \geq 0$

$\text{Min } Z = 50X_1 + 40X_2$	$\text{Min } Z = 50X_1 + 40X_2$
$-3X_1 - 2X_2 \leq -35$	$-3X_1 - 2X_2 + X_3 = -35$
$-5X_1 - 6X_2 \leq -60$	$-5X_1 - 6X_2 + X_4 = -60$
$-2X_1 - 3X_2 \leq -30$	$-2X_1 - 3X_2 + X_5 = -30$
$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

		C_j	50	40	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	-35	-3	-2	1	0	0
0	X_4	-60	-5	-6	0	1	0
0	X_5	-30	-2	-3	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j		50	40	0	0	0

		C_j	50	40	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	-15	-4/3	0	1	-1/3	0
40	X_2	10	5/6	1	0	-1/6	0
0	X_5	0	1/2	0	0	-1/2	1
	Z_j	400	100/3	40	0	-20/3	0
	C_j-Z_j		50/3	0	0	20/3	0

		C_j	50	40	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
50	X_1	45/4	1	0	-6/8	1/4	0
40	X_2	5/8	0	1	5/8	-9/24	0
0	X_5	-45/8	0	0	3/8	-5/8	1
	Z_j	1175/2	50	40	-25/2	-5/2	0
	C_j-Z_j		0	0	25/2	5/2	0

		C_j	50	40	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
50	X_1	9	1	0	-3/5	0	2/5
40	X_2	4	0	1	2/5	0	-3/5
0	X_4	9	0	0	-3/5	1	-8/5
	Z_j	610			-14	0	-4
	C_j-Z_j				14	0	4

$X_1^* = 9$, $X_2^* = 4$, $X_4^* = 9$, $Z^* = 610$.

Ödev: Aşağıda verilen DP problemini Dual Simpleks Yöntem yardımıyla çözünüz.

$\text{Min } Z = 5X_1 + 3X_2 + 3X_1 + 6X_2$

$-6X_1 + X_2 + 2X_3 + 4X_4 \leq 14$

$3X_1 - 2X_2 - X_3 - 5X_4 \leq -25$

$-2X_1 + X_2 + 2X_4 \leq 14$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

$\text{Min } Z = 5X_1 + 3X_2 + 3X_1 + 6X_2$

$-6X_1 + X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 14$

$3X_1 - 2X_2 - X_3 - 5X_4 + X_6 = -25$

$-2X_1 + X_2 + 2X_4 + X_7 = 14$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0$

		C_j	5	3	3	6	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**
0	X_5	14	-6	1	2	4	1	0	0
0	X_6	-25	3	-2	-1	-5	0	1	0
0	X_7	14	-2	1	0	2	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j		5	3	3	6	0	0	0

		C_j	5	3	3	6	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**
0	X_5	-6	-18/5	-3/5	6/5	0	1	4/5	0
6	X_4	5	-3/5	2/5	1/5	1	0	-1/5	0
0	X_7	4	-4/5	1/5	-2/5	0	0	2/5	1
	Z_j	30	-18/5	12/5	6/5	6	0	-6/5	0
	C_j-Z_j		43/5	3/5	9/5	0	0	6/5	0

		C_j	5	3	3	6	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**
3	X_2	10	6	1	-2	0	-5/3	-4/3	0
6	X_4	1	-3	0	1	1	2/3	1/3	0
0	X_7	2	-2	0	0	0	1/3	2/3	1
	Z_j	36	0	3	0	6	-1	-2	0
	C_j-Z_j		5	0	3	0	1	2	0

$X_1^* = 0$, $X_2^* = 10$, $X_3^* = 0$, $X_4^* = 1$, $Z^* = 36$.

Ödev. Aşağıda verilen DP problemini Dual Simpleks Yöntem yardımıyla çözünüz.

Min $Z = 3X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 7X_4$

$2X_1 - X_2 + X_3 + 6X_4 \geq 6$

$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 \geq 3$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Min $Z = 3X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 7X_4$

$-2X_1 + X_2 - X_3 - 6X_4 \leq -6$

$-X_1 - X_2 - 2X_3 - X_4 \leq -3$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Min $Z = 3X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 7X_4$

$-2X_1 + X_2 - X_3 - 6X_4 + X_5 = -6$

$-X_1 - X_2 - 2X_3 - X_4 + X_6 = -3$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

		C_j	3	4	6	7	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
0	X_5	-6	-2	1	-1	-6	1	0
0	X_6	-3	-1	-1	-2	-1	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j		3	4	6	7	0	0

		C_j	3	4	6	7	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
7	X_4	1	1/3	-1/6	1/6	1	-1/6	0
0	X_6	-2	-2/3	-7/6	-11/6	0	-1/6	1
	Z_j	7	7/3	-7/6	7/6	7	-7/6	0
	C_j-Z_j		2/3	31/6	29/6	0	7/6	0

		C_j	3	4	6	7	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
7	X_4	0	0	-3/4	-3/4	1	-1/4	1/2
3	X_1	3	1	7/4	11/4	0	1/4	3/2
	Z_j	9	3	0	3	7	-1	-1
	C_j-Z_j		0	4	3	0	1	1

$X_1^* = 3$, $X_2^* = 0$, $X_3^* = 0$, $X_4^* = 0$, $Z^* = 9$.

Ödev: Aşağıda verilen tablo optimal fakat uygun değildir. Dual Simpleks Yöntem yardımıyla optimaliteyi bozmadan uygunluğu sağlayınız (X_4, X_5 ve X_6 gevşek değişkenlerdir).

		C_j						
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
	X_4	-1	-4	0	-2/3	1	-1/3	0
	X_2	2	-1	1	1/3	0	-1/3	0
	X_6	1	2	0	2/3	0	1/3	1
	Z_j	4						
	C_j-Z_j		5	0	1/3	0	2/3	0

		C_j	**3**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
0	X_4	-1	-4	0	-2/3	1	-1/3	0
2	X_2	2	-1	1	1/3	0	-1/3	0
0	X_6	1	2	0	2/3	0	1/3	1
	Z_j	4	**-2**	**2**	**2/3**	**0**	**-2/3**	**0**
	C_j-Z_j		5	0	1/3	0	2/3	0

		C_j	3	2	1	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
1	X_3	3/2	6	0	1	-3/2	½	0
2	X_2	3/2	-3	1	0	1/2	-1/2	0
0	X_6	0	-2	0	0	1	0	1
	Z_j	9/2	0	2	1	-1/2	-1/2	0
	C_j-Z_j		-3	0	0	1/2	1/2	0

$X_1^* = 0$, $X_2^* = 3/2$, $X_3^* = 3/2$, $Z^* = 9/2$.