HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

RASLANTI DEĞİŞKENLERİNİN FONKSİYONLARI

Doç.Dr. Yasemin Kayhan Atılgan (Şube 01)
Doç.Dr. Derya Ersel (Şube 02)

Bu bölümde, bir ya da daha çok raslantı değişkeninin fonksiyonlarının dağılımı ile ilgileneceğiz. Bir çok istatistiksel uygulamada, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ r.d.'lerinin dağılımı kullanılarak, $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ r.d.'ninin dağılımını bulmak avantajlar sağlamaktadır. Örneğin, X r.d.'nin olasılık dağılımı biliniyor ise $Y = u(X) = \ln X$ fonksiyonu ile elde edilen Y r.d.'nin de dağılımını belirlemek mümkündür. Tek bir X r.d. ile ilgilenilmesi durumunda en çok karşılaşılan fonksiyonlardan bazıları, $Y = X^2$, $Y = |X|$, $Y = \sqrt{|X|}$, $Y = \ln X$, $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ve $Y = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$ biçimindedir. Benzer şekilde, X_1 ve X_2 gibi iki r.d. olması durumunda ise en çok karşılaşılan fonksiyonlardan bazıları $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$, $X_1 X_2$, $\frac{X_1}{X_2}$, $\min\{X_1, X_2\}$, $\max\{X_1, X_2\}$ ve $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ olarak verilebilir.

Buradan da anlaşıldığı gibi, tek değişkenli, iki değişkenli ya da çok değişkenli raslantı değişkenlerinin fonksiyonlarının dağılımlarını belirlemek mümkündür.

Raslantı değişkenlerinin foksiyonlarının dağılımlarını bulmak amacıyla kullanılan pek çok yöntem vardır. Bunlardan bazıları;

- Dağılım Fonksiyonu Yöntemi
- Dönüşüm Yöntemi
- Konvülüsyon Yöntemi
- Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi

olarak verilebilir. Verilen bu yöntemlerin içerisinde en çok kullanılanı ve en kolay olanı dönüşüm yöntemidir ve aslında konvülüsyon yöntemi dönüşüm yönteminin özel bir biçimidir. Dağılım fonksiyonu yöntemi sadece sürekli r.d.'leri için kullanılırken, MÇF yöntemini kullanmak için verilen r.d.lerinin bağımsız olması gerekmektedir.

Bir Raslantı Değişkeninin Fonksiyonunun Dağılımının Bulunması

Tek bir r.d. söz konusu olduğunda bu r.d.'nin dağılımını dağılım fonsiyonu yöntemi ya da dönüşüm yöntemi ile bulabiliriz. Daha önce de belirtildiği gibi r.d. kesikli ise dağılım fonksiyonu yöntemi kullanılmaz. Kesikli r.d.'lerinin fonksiyonlarının dağılımları bulunurken dönüşüm yöntemi kullanılır.

1. Dağılım Fonksiyonu Yöntemi

Sürekli raslantı değişkenlerinin herhangi bir fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonunu belirlemede kullanılan bir yöntemdir. Önce ilgili raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu bulunur, daha sonra türev işlemi ile olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçilir.

1. Dağılım Fonksiyonu Yöntemi

X r.d.'nin o.y.f.'u $f(x)$ olsun. $Y = u(X)$ biçiminde tanımlanan r.d.nin o.y.f.'u bulunurken önce dağılım fonksiyonu $G(y)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$G(y) = P(Y \le y) = P(u(X) \le y)$$

Daha sonra, bu dağılım fonksiyonunun türevi alınarak Y r.d.'nin o.y.f.'u $g(y)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy}$$

NOT: O.y.f'u $f(x)$, dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan X r.d.'nin bir fonksiyonu $Y = u(X) = X^2$ biçiminde verilsin. Y r.d.'nin o.y.f.'nu bulalım.

$Y = X^2$ olarak tanımlandığından Y r.d. negatif değerler alamaz. Bu durumda Y r.d.'nin dağılım fonksiyonu,

$$y \le 0 \Rightarrow G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = 0$$

$$y > 0 \Rightarrow G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y})\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) + f(-\sqrt{y})\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right), & y > 0 \quad için \\ 0 \qquad , & ö.d. \quad için \end{cases}$$

$f(x)$ simetrik ise,

$$G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = 2F(\sqrt{y}) - 1$$

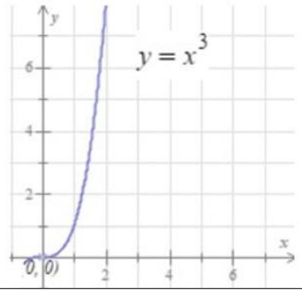
$$g(y) = 2f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = f(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}}$$

ÖRNEK: X r.d.'nin o.y.f.'u, $f(x) = \begin{cases} 6x(x-1), & 0 < x < 1 \ için \\ 0 \quad , & ö.d. \ için \end{cases}$ olarak verilsin. $Y = X^3$ r.d.'nin o.yf.'nu bulunuz.

Çözüm: Y r.d.'nin dağılım fonksiyonu $G(y)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$G(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{1/3}) = \int_0^{y^{1/3}} 6x(1-x)dx = 3y^{2/3} - 2y$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d(3y^{2/3} - 2y)}{dy} = 2(y^{1/3} - 1)$$



X r.d.'nin tanım aralığı $0 < x < 1$ olduğundan Y r.d.'nin tanım aralığı da $0 < y < 1$'dir.

$$0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ için \ y = 0^3 = 0 \\ x = 1 \ için \ y = 1^3 = 1 \end{cases}$$

ÖRNEK: Rafine şeker üretilen bir süreçte günlük 1 ton'a kadar üretim yapılabilmektedir. Ancak makine arızası ya da süreci yavaşlatabilecek başka etkenler olduğu için günlük üretim miktarı o.y.f. aşağıda verilen Y r.d. ile tanımlanmıştır. Üretilen her 1 ton şeker için şirkete 300 bin lira ödenmekte ve şirketin bu süreçdeki günlük gideri 100 bin lira olarak bilinmektedir. Dolayısıyla şirketin günlük karı $U = 3Y - 1$ olmaktadır. Buna göre, günlük kara ilişkin o.y.f. ne olacaktır?

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \ için \\ 0, & ö.d. \ için \end{cases}$$

Çözüm: $G(u) = P(U \le u) = P(3Y - 1 \le u) = P\left(Y \le \frac{u+1}{3}\right) = \int_0^{\left(\frac{u+1}{3}\right)} 2ydy = \left(\frac{u+1}{3}\right)^2$

$$0 < y < 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \ için \ u = 3(0) - 1 = -1 \\ y = 1 \ için \ u = 3(1) - 1 = 2 \end{cases}$$

$$G(u) = \begin{cases} 0, & u < -1 \\ \left(\frac{u+1}{3}\right)^2, & -1 \le u \le 2 \\ 1, & u > 2 \end{cases} \qquad g(u) = \frac{dG(u)}{du} = \begin{cases} \frac{2(u+1)}{9}, & -1 \le u \le 2 \ için \\ 0, & ö.d. \ için \end{cases}$$

ÖRNEK: Y r.d.'nin o.y.f., $f(y)=\begin{cases}\dfrac{y+1}{2}, & -1\le y\le 1 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$ olarak verilsin.

$U=Y^2$ şeklinde verilen r.d.nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $U=Y^2$ biçimindeki fonksiyonlar için o.y.f.'nun aşağıdaki gibi yazılabileceği gösterilmişti.

$$g(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\left[f(\sqrt{u})+f(-\sqrt{u})\right]$$

$$g(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\left[\dfrac{\sqrt{u}+1}{2}+\dfrac{-\sqrt{u}+1}{2}\right]=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}, & 0<u\le 1 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

Y r.d. sadece $-1\le y\le 1$ aralığında pozitif yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu için, U r.d. de sadece $0<u\le 1$ aralığında pozitif yoğunluk fonksiyonuna sahip olacaktır.

ÖRNEK: X r.d.'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f(x)=\begin{cases}1/2, & -1<x<1 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

$Y=X^2$ biçiminde tanımlanan r.d.nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $g(y)$'yi hesaplayınız.

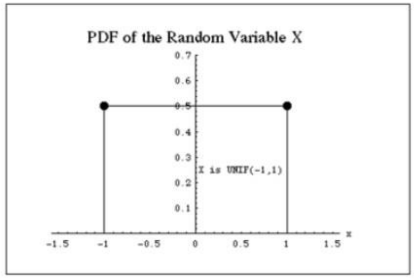
Çözüm: $f(x)$ fonksiyonu simetriktir ve verilen aralıkta her iki kökü de alır. Dolayısıyla,

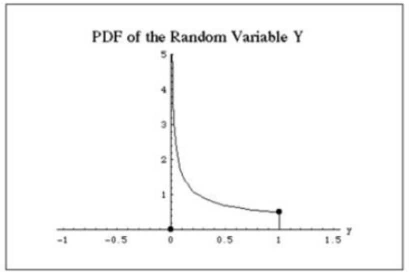
$$g(y)=f(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

Klasik yoldan çözersek aynı sonuç elde edilecektir.

$$G(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\sqrt{y}$$

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=\frac{d\sqrt{y}}{dy}==\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$





2. Dönüşüm Yöntemi

X, kesikli r.d. olsun ve $f(x)$ bu r.d.nin olasılık fonksiyonu olarak verilsin. $Y=h(X)$ sadece X'in bir fonksiyonu olmak üzere, X'in her bir değerine karşılık yalnızca bir y değeri geliyorsa, ve bunun tersi de geçerli ise; bir başka ifade ile $h(X)$ bire bir fonksiyon ise, Y r.d.'nin olasılık fonksiyonu;

$g(y)=f\left(h^{-1}(y)\right),\quad x=h^{-1}(y)$ biçiminde elde edilir.

Eğer tersi alınan fonksiyonun birden çok kökü var ise,

$$Y=h(X)\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}x_1&=h_1^{-1}(y)\\x_2&=h_2^{-1}(y)\\&\vdots\\x_k&=h_k^{-1}(y)\end{aligned}$$

X'in tanım bölgesinde tanımlı her bir kök dikkate alınarak,

$g(y)=\sum_{i=1}^{k}f_X\left(h_i^{-1}(y)\right)$ ile bulunur.

ÖRNEK: Hilesiz bir paranın dört atışında gelen yazı sayısı X ise, $Y=\dfrac{1}{1+X}$'in olasılık dağılımını bulalım.

Çözüm: X r.d. n=4 ve p=1/2 ile Binom dağılımı gösterir. X'in olasılık dağılımını aşağıdaki çizelge ile gösterebiliriz.

x	0	1	2	3	4
f(x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

$y=\dfrac{1}{1+x}$ ilişkisinden yararlanarak $R_X=\{0,1,2,3,4\}$ değerleri için Y r.d.'nin $R_Y=\left\{\dfrac{1}{1+x}\middle| x\in R_X\right\}=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}\right\}$ değerlerini aldığını görebiliriz.

$g(1)=P(Y=1)=P(X=0)=1/16$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X=1)=4/16$

$g\left(\frac{1}{3}\right)=P\left(Y=\frac{1}{3}\right)=P(X=2)=6/16$

$g\left(\frac{1}{4}\right)=P\left(Y=\frac{1}{4}\right)=P(X=3)=4/16$

$g\left(\frac{1}{5}\right)=P\left(Y=\frac{1}{5}\right)=P(X=4)=1/16$

Y r.d.'nin olasılık dağılımı:

y	1	1/2	1/3	1/4	1/5
g(y)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Y r.d.'nin olasılık fonksiyonunu doğrudan Binom dağılımının olasılık fonksiyonundan yararlanarak da bulabiliriz. $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad x = 0,1,2,3,4 \text{ için}$$

$Y = h(X) = \frac{1}{1+X}$ olduğundan $y = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 1 = h^{-1}(y)$ yazılabilir. Y r.d.'nin olasılık fonksiyonu $g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)$ işlemi ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \binom{4}{\frac{1}{y}-1}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \text{ için}$$

Görüldüğü gibi, her bir x değerine karşılık bir y değeri karşılık geldiğinden $Y = h(X) = \frac{1}{1+X}$ fonksiyonu bire birdir.

ÖRNEK: Önceki örnekteki X raslantı değişkeninin bir fonksiyonu $Z = (X-2)^2$ olarak verilsin. Z r.d.'nin olasılık dağılımını bulunuz.

Çözüm: $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$

x	0	1	2	3	4
f(x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

$Z = (X-2)^2$ ilişkisinden yararlanarak $R_X = \{0,1,2,3,4\}$ değerleri için Z r.d.'nin aldığı değerler,

$x = 0 \Rightarrow z = (0-2)^2 = 4$ $\quad x = 1 \Rightarrow z = (1-2)^2 = 1$ $\quad x = 2 \Rightarrow z = (2-2)^2 = 0$

$x = 3 \Rightarrow z = (3-2)^2 = 1$ $\quad x = 4 \Rightarrow z = (4-2)^2 = 4$

$$R_Z = \left\{(x-2)^2 \middle| x \in R_X\right\} = \{0,1,4\}$$

$g(0) = P(Z=0) = P(X=2) = 6/16$

$g(1) = P(Z=1) = P(X=1) + P(X=3) = 4/16 + 4/16 = 8/16$

$g(2) = P(Z=2) = P(X=0) + P(X=4) = 1/16 + 1/16 = 2/16$

Z r.d.'nin olasılık dağılımı:

z	0	1	4
g(z)	6/16	8/16	2/16

ÖRNEK: X r.d. geometrik dağılıma sahip olsun, $Y = X/3$ biçiminde tanımlanan r.d. için o.f. ne olur?

Çözüm: p parametresi ile Geometrik dağılım o.f., $f(x) = p(1-p)^x$, $x = 0,1,2,\ldots$

$y = h(x) = \frac{x}{3} \Rightarrow x = h^{-1}(y) = 3y$ olduğundan, Y r.d'nin o.f. aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g(y) = f(3y) = p(1-p)^{3y}, \quad y = 0, 1/3, 2/3, \ldots$$

ÖRNEK: X r.d. λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olsun. $Y = X^2 + 2X - 3$ biçiminde tanımlanan r.d.ninin o.f. nunu bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$

$$x^2 + 2x - 3 = y \Rightarrow x^2 + 2x - (y+3) = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{y+4}$$

Burada X r.d. negatif değerler almadığı için $-1-\sqrt{y+4}$ kökü alınmaz. Bu durumda Y r.d.'nin o.f. aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g(y) = f\left(-1+\sqrt{y+4}\right) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{-1+\sqrt{y+4}}}{\left(-1+\sqrt{y+4}\right)!}, \quad y = -3, 0, 5, 12, \ldots$$

X, sürekli r.d. olsun . Sürekli r.d.'lerinin fonksiyonlarının dağılımının dönüşüm yöntemi ile elde edilmesine ilişkin teoremi vermeden önce artan ve azalan fonksiyon kavramlarını hatırlayalım.

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu için x değerleri artarken y değerleri de artıyorsa 'artan'; x değerleri artarken y değerleri azarlıyorsa 'azalan' fonksiyon denir.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ *ise* $f(x)$ artan fonksiyondur.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$ *ise* $f(x)$ kesinlikle artan fonksiyondur.

Bu durumda, $\dfrac{df(x)}{dx}>0$ olur.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$ *ise* $f(x)$ azalan fonksiyondur.

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$ *ise* $f(x)$ kesinlikle azalan fonksiyondur.

Bu durumda, $\dfrac{df(x)}{dx}<0$ olur.

TEOREM: X sürekli r.d.'nin o.y.f. $f(x)$ olsun. $Y=h(X)$ biçiminde verilen fonksiyonun türevi alınabiliyorsa ve X r.d.'nin $f(x)\neq 0$ koşulunu sağlayan bütün değerlerinde artan ya da azalan bir fonksiyonsa, x'in bu değerleri için $y=h(x)$ fonksiyonunun $x=h^{-1}(y)$ biçiminde tek bir çözümü vardır ve $Y=h(X)$ r.d.'nin o.y.f. aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|,\quad x=h^{-1}(y);\ \ h'(x)\neq 0\ \ ise$$

İspat: Teoremin ispatında dağılım fonksiyonu yönteminden yararlanılır.

$y=h(x)$ artan foksiyon olsun. Y r.d.'nin dağılım fonksiyonu,

$$G(y)=P(Y\le y)=P(h(X)\le y)=P\left(X\le h^{-1}(y)\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=F(x)$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=\frac{dF(x)}{dy}=\frac{dF\left(h^{-1}(y)\right)}{dy}=f_X\left(h^{-1}(y)\right)\frac{dh^{-1}(y)}{dy},\quad x=h^{-1}(y)$$

$y=h(x)$ azalan foksiyon olsun. Y r.d.'nin dağılım fonksiyonu,

$$G(y)=P(Y\le y)=P(h(X)\le y)=P\left(X\ge h^{-1}(y)\right)=1-P\left(X\le h^{-1}(y)\right)$$
$$=1-\int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} f(x)dx=1-\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=1-F(x)$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=\frac{dF(x)}{dy}=\frac{d\left(1-F\left(h^{-1}(y)\right)\right)}{dy}=-f_X\left(h^{-1}(y)\right)\underbrace{\frac{dh^{-1}(y)}{dy}}_{<0},\quad x=h^{-1}(y)$$

Bu iki durumu bir arada değerlendirirsek,

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|,\quad x=h^{-1}(y)$$

Eğer ters dönüşüm fonksiyonu birden fazla kök içeriyor ise,

$$Y=h(X)\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1&=h_1^{-1}(y)\\ x_2&=h_2^{-1}(y)\\ &\vdots\\ x_k&=h_k^{-1}(y)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

X'in tanım bölgesinde tanımlı her bir kök dikkate alınarak,

$$g(y)=\sum_{i=1}^{k} f_X\left(h_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}h_i^{-1}(y)\right|$$

NOT: X r.d., $f(x)$ o.y.f. sahip $(-\infty,\infty)$ aralığında değer alan bir değişken olarak verilsin. $Y=X^2$ dönüşümü göz önüne alınsın.

$$x_1=h_1^{-1}(y)=\sqrt{y},\ \ x_2=h_2^{-1}(y)=-\sqrt{y},\quad \frac{dh_1^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad \frac{dh_2^{-1}(y)}{dy}=-\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Bu durumda $y>0$ aralığında,

$$g(y)=f\left(h_1^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh_1^{-1}(y)}{dy}\right|+f\left(h_2^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh_2^{-1}(y)}{dy}\right|$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right]$$

ÖRNEK: X r.d. için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)=2x,\quad 0\le x\le 1$ olarak verilsin. $Y=3X-1$ biçiminde tanımlansın. Y r.d.nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $f(x)>0$ olan bölge o.y.f. tanımından $0<x\le 1$ bölgesidir.

$y=3x-1$ fonksiyonu bu bölgede artan bir fonksiyon olduğu için teorem doğrudan uygulanabilir.

$$y=3x-1 \Rightarrow x=h^{-1}(y)=\frac{y+1}{3} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}$$

$$g(y)=f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|=2(y+1)/9,\quad -1\le y\le 2$$

ÖRNEK: X r.d. için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)=2x,\quad 0\le x\le 1$ olarak verilsin. $Y=-4X+3$ biçiminde tanımlansın. Y r.d.nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $y=-4x+3 \Rightarrow x=h^{-1}(y)=\frac{3-y}{4}, \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{1}{4}<0$

Fonksiyonun türevi $0<x\le 1$ bölgesinde azalandır. Doalyısıyla teorem doğrudan uygulanabilir.

$$g(y)=2\left(\frac{3-y}{4}\right)\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{3-y}{8},\quad -1\le y\le 3$$

ÖRNEK: X r.d. için o.y.f. $f(x)=x^2/81,\ -3<x<6$ olsun.

a) $Y=\frac{1}{3}(12-X)$ biçiminde verilen r.d.nin o.y.f. nu bulunuz.

b) $U=X^2$ biçiminde verilen r.d.nin o.y.f.nu bulunuz.

Çözüm:

a) $y=h(x)=\frac{1}{3}(12-x) \Rightarrow x=h^{-1}(y)=12-3y \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-3$

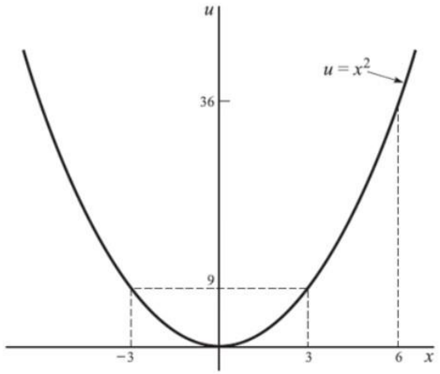
elde edilir. Y r.d.'nin tanım aralığı aşağıdaki gibi elde edilir.

$x=-3 \Rightarrow y=5$
$x=6 \Rightarrow y=2 \quad 2<y<5$

Bu durumda Y r.d.'nin o.y.f. aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g(y)=\frac{(12-3y)^2}{27},\quad 2<y<5$$

b) $u=x^2,\ x=\pm\sqrt{u}$ olduğu için fonksiyon bire bir olma koşulunu sağlamamaktadır. Her bir x değeri için bir tane u değeri karşılık gelirken, her bir u değeri için iki tane x değeri elde edilmektedir.



Bu durumda teorem doğrudan uygulanamaz. Ya dağılım yöntemi kullanılacaktır ya da X r.d. için tanım bölgesi parçalı olarak incelenecektir.

$-3<x<3 \Rightarrow 0<u<9$ aralığında hem pozitif hem de negatif köklerin ikisi de tanımlıdır.

$$g(u)=f\left(\sqrt{u}\right)\left|\frac{d\sqrt{u}}{du}\right|+f\left(-\sqrt{u}\right)\left|\frac{d\left(-\sqrt{u}\right)}{du}\right|=\frac{u}{81}\frac{1}{2\sqrt{u}}+\frac{u}{81}\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{2u}{81}=\frac{\sqrt{u}}{81}$$

$3<x<6 \Rightarrow 9<u<36$ aralığında sadece pozitif kök tanımlıdır.

$$g(u)=f\left(\sqrt{u}\right)\left|\frac{d\sqrt{u}}{du}\right|=\frac{u}{81}\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{\sqrt{u}}{162}$$

Bu sonuçlar birleştirildiğinde,

$$g(u)=\begin{cases}\sqrt{u}/81, & 0\le u\le 9 \ \textit{için}\\ \sqrt{u}/162, & 9<u<36 \ \textit{için}\\ 0, & \textit{ö.d. için}\end{cases}$$

elde edilir.