İST-265 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK

UYGULAMA-1 ÇÖZÜMLER

1) Aşağıdaki fonksiyonları Mac- Laurent serisinden yararlanarak yeniden yazınız.

   a. $f(x)=\exp\left[\dfrac{-e_1}{2(N+1)}\left(\dfrac{e_1}{2(N+1)}+1\right)^{-1}\right]$

   b. $f(x)=\exp\left[\dfrac{e_1}{2}\left(\dfrac{e_1}{2}+1\right)^{-1}\right]$

Çözüm:

<u>Hatırlatma</u>: Mac- Laurent serisinin açılımı:

$f(x)=f(0)+\dfrac{x}{1!}f'(0)+\dfrac{x^2}{2!}f''(0)+\dfrac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots$ şeklindedir. $f(x)=e^x$ ise;

$f(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$ biçiminde ifade edilir.

a. $f(x)=\exp\underbrace{\left[\dfrac{-e_1}{2(N+1)}\left(\dfrac{e_1}{2(N+1)}+1\right)^{-1}\right]}_{A}$ fonksiyonu $f(x)=e^A$ olarak yeniden düzenlensin.

Böylece, fonksiyonun Mac-Laurent serisine göre açılımı:

$f(x)=1+\dfrac{A}{1!}+\dfrac{A^2}{2!}+\dfrac{A^3}{3!}+\dots$

şeklinde olur. $A=\dfrac{-e_1}{2(N+1)}\left(\dfrac{e_1}{2(N+1)}+1\right)^{-1}$ düzenlenirse,

$A=\dfrac{-e_1}{2(N+1)}\dfrac{2(N+1)}{(e_1+2(N+1))}=\dfrac{-e_1}{(e_1+2(N+1))}$ biçiminde elde edilir. Sonuç olarak fonksiyonun Mac- Laurent serisinden yararlanılarak yeniden düzenlenmiş hali,

$f(x)=1+\dfrac{-e_1}{(e_1+2(N+1))}+\dfrac{(-e_1)^2}{2!(e_1+2(N+1))^2}+\dfrac{(-e_1)^3}{3!(e_1+2(N+1))^3}+\dots$ olarak elde edilir.

b. şıkkının çözümü de yine benzer şekilde olacaktır. $f(x)=\exp\underbrace{\left[\dfrac{e_1}{2}\left(\dfrac{e_1}{2}+1\right)^{-1}\right]}_{A}$ düzenlenirse,

$A=\dfrac{e_1}{2}\dfrac{2}{(e_1+2)}=\dfrac{e_1}{(e_1+2)}$ biçiminde elde edilir. Sonuç olarak fonksiyonun Mac- Laurent serisinden yararlanılarak yeniden düzenlenmiş hali,

$f(x)=1+\frac{e_1}{(e_1+2)}+\frac{(e_1)^2}{2!(e_1+2)^2}+\frac{(e_1)^3}{3!(e_1+2)^3}+\dots$ olarak elde edilir.

2) X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \ddot{o}.d.i\c{c}in\end{cases}$$

olarak verilmiştir. Buna göre $E(X)$, $\varphi_X(t)$, $M_X(t)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: X sürekli raslantı değişkeni için beklen değerin $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ şeklinde bulunduğu bilinmektedir. O halde $E(X)$;

- $E(X)=\int_0^2 x\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=\frac{1}{4}(4-0)=1$ biçiminde elde edilir.
- Moment çıkaran fonksiyonun $M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)$ olduğu bilinmektedir. $M_X(t)$;

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\int_0^2 e^{tx}f(x)dx=\int_0^2 e^{tx}\frac{1}{2}dx$$

$E\left(e^{tX}\right)=\int_0^2 e^{tx}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2t}\left(e^{tx}\Big|_0^2\right)=\frac{e^{2t}-1}{2t}$ şeklinde olacaktır.

- Karakteristik fonksiyonun $\varphi_X(t)=E\left(e^{itx}\right)$ olduğu bilinmektedir. Moment çıkaran fonksiyonda t yerine it yazılması ile karakteristik fonksiyon,

$\varphi_X(t)=E\left(e^{itx}\right)=\frac{e^{2it}-1}{2it}$ şeklinde elde edilir.

3) X raslantı değişkeni için $P_X(t)=ke^{t^2+t}$, $k=0,1,2,\dots$ ve $P(X=k)=p_k$ olmak üzere,

a. $P_X(t)$'nin bir olasılık çıkaran fonksiyonu olması için k kaç olmalıdır?

b. p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 değerlerini bulunuz.

c. Beklenen değer ve varyansı $P_X(t)$'den yararlanarak bulunuz.

d. $P(X>x_0)<0.4$ olan X'in minimum x_0 değeri nedir?

Çözüm:

Hatırlatma: $P(X=k)=p_k \quad k=0,1,2,...$ olsun. X kesikli raslantı değişkeni için Olasılık çıkaran fonksiyon,

$$P_X(t)=E(t^x)=\sum_{x=0}^{\infty} t^x P(X=x)$$
$$=p_0+tp_1+t^2p_2+t^3p_3+...$$

Olasılık çıkaran fonksiyondan olasılığa geçiş: $\left.\frac{1}{k!}\frac{d^kP_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=P(X=k)=p_k$

biçimindedir. Faktöriyel moment ise, $\mu_{[k]}=E\left[X(X-1)(X-2)...(X-k+1)\right]=\left.\frac{d^kP_X(t)}{dt^k}\right|_{t=1}$

a. $P_X(t)=ke^{t^2+t}$'nin olasılık çıkaran fonksiyonu olması için:

$t=1$ ise $P_X(1)=E(1^x)=1$'dir. $P_X(1)=ke^{1+1}=1 \Rightarrow k=e^{-2}$ olmalıdır.

b. p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 değerlerini bulmak için $\left.\frac{1}{k!}\frac{d^kP_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=P(X=k)=p_k$ özelliğinden yararlanılmalıdır.

$$p_0=P_X(0)=e^{-2}=0.1353$$

$p_1=P(X=1)=\left.\frac{1}{1!}\frac{dP_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.e^{-2}(2t+1)e^{t^2+t}\right|_{t=0}=e^{-2}=0.1353$ Burada k=1 durumuyla ilgilenildiği için bir kez türev alma işlemi yapılmalıdır.

$p_2=\left.\frac{1}{2!}\frac{d^2P_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.e^{-2}\left(2e^{t^2+t}+(2t+1)^2e^{t^2+t}\right)\right|_{t=0}=\frac{3}{2}e^{-2}=0.2030$ Burada k=2 durumuyla ilgilenildiği için iki kez türev alma veya bir önceki türev alınmış işlem üzerinden bir kez türev alma işlemi yapılmalıdır. Benzer şekilde k=3 ve k=4 için de türev alma işlemleri yapılmalıdır.

$$p_3=\left.\frac{1}{3!}\frac{d^3P_X(t)}{dt^3}\right|_{t=0}=\left.\frac{e^{-2}}{3!}\left(2(2t+1)^2e^{t^2+t}+4(2t+1)e^{t^2+t}+(2t+1)^3e^{t^2+t}\right)\right|_{t=0}=\frac{7}{6}e^{-2}=0.1579$$

$$p_4=\left.\frac{1}{4!}\frac{d^4P_X(t)}{dt^4}\right|_{t=0}=\left.\frac{e^{-2}}{4!}\left(4e^{t^2+t}+\ 2(2t+1)^2e^{t^2+t}+8e^{t^2+t}+4(2t+1)^2e^{t^2+t}+6(2t+1)^2e^{t^2+t}+(2t+1)^4e^{t^2+t}\right)\right|_{t=0}$$
$$=\frac{25}{24}e^{-2}=0.1409$$

biçimindedir.

c. Beklenen değer ve varyansı $P_X(t)$'den yararlanarak bulmak için Faktöriyel moment ile olasılık çıkaran fonksiyon arasındaki geçiş kullanılmalıdır $\mu_{[k]} = \left.\frac{d^k P_X(t)}{dt^k}\right|_{t=1}$.

Beklenen değer $E(X)$,

$$\mu_{[1]} = E(X) = \left.\frac{dP_X(t)}{dt}\right|_{t=1} = e^{-2}(2t+1)e^{t^2+t}\Big|_{t=1} = 3$$

şeklinde elde edilir. Varyansın $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ olduğu bilinmektedir. $E(X)$ yukarıda elde edilmişti. Varyansın hesaplanması için $E(X^2)$'nin de bilinmesi gerekmektedir. O halde, ikinci faktöriyel momentten yararlanarak $E(X^2)$,

$$\mu_{[2]} = E(X(X-1)) = \left.\frac{d^2 P_X(t)}{dt^2}\right|_{t=1} = e^{-2}\left[2e^{t^2+t} + (2t+1)^2 e^{t^2+t}\right]\Big|_{t=1} = 11$$

$$E(X^2 - X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)}_{3} = 11 \Rightarrow E(X^2) = 14$$

şeklinde elde edilir. Buradan $V(X) = 14 - 3^2 = 5$ olarak bulunur.

d. $P(X > x_0) < 0.4$ olan X 'in minimum x_0 değerini bulmak için aşağıdaki bilgiye ihtiyaç vardır.

<u>Tanım</u>: X kesikli raslantı değişkenin tanım kümesi üzerinden olasılıkların toplamı 1 olduğundan herhangi bir $x_0 \in D_{x_0}$ için,

$P(X < x_0) + P(X = x_0) + P(X > x_0) = 1$'dir.

O halde, $P(X > x_0) < 0.4$ ise $\underbrace{P(X < x_0) + P(X = x_0)}_{>0.6} + \underbrace{P(X > x_0)}_{<0.4} = 1$'in sağlanabilmesi için $P(X < x_0) + P(X = x_0) > 0.6$ olmalıdır. Buna göre b şıkkında elde edilen olasılık değerlerinden yararlanarak minimum x_0 değeri,

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \ldots + P(X = x_0) > 0.6$$
$$\underbrace{\underbrace{0.1353 + 0.1353 + 0.2030}_{0.4736} + 0.1579}_{0.6315} > 0.6$$

$x_0 = 3$ olarak elde edilir.

4) X sürekli raslantı değişkeninin momentleri $\mu'_k = k!,\ k = 1,2,\ldots$ olarak verilmiştir. Buna göre;

   a. X raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

b. $Y = 4X - 2$ olarak tanımlanan rastlantı değişkeninin 2 noktasına göre 1. dereceden momenti bulunuz.

Çözüm: Orijine göre momentler $\mu'_k = E\left(X^k\right) = k!,\ k = 1,2,\ldots$ olarak verilmiştir. O halde momentler,

$$\mu'_1 = E\left(X\right) = 1!$$
$$\mu'_2 = E\left(X^2\right) = 2!$$
$$\mu'_3 = E\left(X^3\right) = 3!$$
$$\vdots$$
$$\mu'_k = E\left(X^k\right) = k!$$

şeklinde elde edilir.

a. X raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bulmak için $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$'den yararlanılsın. Burada fonksiyona dair herhangi bir bilgi verilmemiştir. İlk olarak e^{tx} ifadesinin Mac-Laurent serisine göre açılımı yapılıp daha sonra beklenen değer özellikleri kullanıldığında moment çıkaran fonksiyon,

$$e^{tX} = 1 + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \ldots$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = E\left[1 + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \ldots\right] = 1 + \frac{E\left(tX\right)}{1!} + \frac{E\left((tX)^2\right)}{2!} + \frac{E\left((tX)^3\right)}{3!} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{t}{1!}E\left(X\right) + \frac{t^2}{2!}E\left(X^2\right) + \frac{t^3}{3!}E\left(X^3\right) + \ldots$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen momentler eşitlikte yerine yazılırsa MÇF, $M_X(t) = 1 + \frac{t}{1!}1! + \frac{t^2}{2!}2! + \frac{t^3}{3!}3! + \ldots = \frac{1}{t-1},\ 0 < |t| < 1$ şeklinde elde edilir.

<u>**Hatırlatma**</u>**:** $0 < |r| < 1$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ olur.

b. **I.yol:** $Y = 4X - 2$ olarak tanımlanan rastlantı değişkeninin 2 noktasına göre 1. dereceden momentini bulmak için ilk olarak Y raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunun bulunması gerekmektedir. O halde $M_Y(t)$,

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(4X-2)}\right) = E\left(e^{4Xt-2t}\right) = e^{-2t}E\left(e^{4Xt}\right)$$
$$= e^{-2t}M_X(4t)$$
$$= e^{-2t}\frac{1}{1-4t}$$

Soruda istenen Y raslantı değişkeninin 2 noktasına göre 1. dereceden momentidir. Yani $E(Y-2)=E(Y)-2$'nin bulunması gerekmektedir. Moment çıkaran fonksiyondan momentlere,

$$\mu_r' = E\left(X^r\right) = \left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}, \quad r=1,2,\ldots$$

biçiminde geçiş yapıldığı bilindiğine göre Y raslantı değişkeninin 1. dereceden momenti,

$$\mu_1' = E\left(Y\right) = \left.\frac{dM_Y(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{-2e^{-2t}(1-4t)-(-4)e^{-2t}}{(1-4t)^2}\right|_{t=0} = 2\text{'dir.}$$

Sonuç olarak, $E(Y-2)=E(Y)-2=2-2=0$'dır.

II.yol: Moment çıkaran fonksiyon özelliği kullanılarak gerekli çözümleme yapılabilir.

Hatırlatma: $M_{X+a}(t)=e^{at}M_X(t)$

Burada $a=-2$'dir. $M_{Y-2}(t)=e^{-2t}M_Y(t)$ şeklinde yazılabilir. $M_Y(t)$ yukarıda $e^{-2t}\dfrac{1}{1-4t}$ olarak bulunmuştu. O halde $M_{Y-2}(t)$,

$M_{Y-2}(t)=e^{-4t}\dfrac{1}{1-4t}$ olarak bulunur. $M_{Y-2}(t)$'den ortalamaya göre momente geçişte yine türev alma işlemi yapılmaktadır. Buna göre,

$$E\left(Y-2\right) = \left.\frac{dM_{Y-2}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{-4e^{-4t}(1-4t)+4e^{-4t}}{(1-4t)^2}\right|_{t=0} = 0 \text{ olarak elde edilir.}$$

5) X raslantı değişkeninin aldığı değerler 0,1,2,3'tür. Raslantı değişkeninin bu değerleri alma olasılıkları,

$$P(X=0)=\frac{1}{8},\ P(X=1)=\frac{3}{8},\ P(X=2)=\frac{3}{8},\ P(X=3)=\frac{1}{8}$$

'dir. Buna göre;

a. $M_X(t)$'yi bulunuz.
b. $E(X)$ ve $V(X)$'i moment çıkaran fonksiyonu yardımıyla bulunuz.
c. $Y=3X-2$ olarak tanımlanan rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: X raslantı değişkeninin aldığı değerler 0,1,2,3 ve bu değerleri alma olasılıkları soruda verilmiştir. Bu bilgiler kullanılarak moment çıkaran fonksiyon,

a. $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{3} e^{tx} P(X = x) = e^0 \frac{1}{8} + e^t \frac{3}{8} + e^{2t} \frac{3}{8} + e^{3t} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left(1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}\right)$

şeklinde elde edilir.

b. $E\left(X\right) = \mu_1' = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{8}\left(3e^t + 6e^{2t} + 3e^{3t}\right)\right|_{t=0} = \frac{3}{2}$’dir.

$E\left(X^2\right) = \mu_2' = \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{8}\left(3e^t + 12e^{2t} + 9e^{3t}\right)\right|_{t=0} = 3$’tür.

Buradan varyans, $V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ biçiminde elde edilir.

c. $Y = 3X - 2$ olarak tanımlanan rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu da 4. sorunun b şıkkında yer alan çözüme benzer şekilde elde edilecektir. $M_Y(t)$,

$M_Y(t) = M_{3X-2}(t) = e^{-2t} M_X(3t) = e^{-2t}\frac{1}{8}\left[1 + 3e^{3t} + 3e^{6t} + e^{9t}\right] = \frac{1}{8}\left[e^{-2t} + 3e^t + 3e^{4t} + e^{7t}\right]$ ‘dir.

6) X kesikli rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t) = \frac{1}{3}e^t - a$$

olarak verilmiştir. Buna göre;

a. a sabitinin değerini bulunuz.
b. $Y = 2X^2 + 3X$ olarak tanımlanan raslantı değişkenin beklenen değerini bulunuz.
c. X kesikli rastlantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
d. X rastlantı değişkenin olasılık çıkaran ve karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a. X kesikli rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $M_X(t) = \frac{1}{3}e^t - a$

olarak verilmiştir. t=0 için $M_X(0) = E\left(e^0\right) = \frac{1}{3}e^0 - a = 1$ olmalıdır. Buradan $a = \frac{-2}{3}$ olarak elde edilir. Böylece, $M_X(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}$ olacaktır.

b. $Y = 2X^2 + 3X$ olarak tanımlanan raslantı değişkenin beklenen değeri,

$E\left(Y\right) = E\left(2X^2 + 3X\right) = 2E\left(X^2\right) + 3E\left(X\right)$ olacaktır. Burada moment çıkaran fonksiyon kullanılarak momentlere geçiş sağlanmalıdır. X raslantı değişkeninin orijine göre birinci ve ikinci momentleri,

$E\left(X\right) = \mu_1' = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{3}e^t\right|_{t=0} = \frac{1}{3}$

$$E\left(X^2\right)=\mu_2'=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{3}e^t\right|_{t=0}=\frac{1}{3}$$

olarak elde edilir. Buradan $E\left(Y\right)=2\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ şeklinde bulunur.

c. X kesikli rastlantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulmak için moment çıkaran fonksiyondan yararlanılsın. X kesikli rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}e^{tx}P(X=x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada X raslantı değişkenin üst sınırına dair herhangi bir bilgi bulunmamaktadır. X , Negatif olmayan kesikli raslantı değişkeni olduğu için alt sınırı sıfırdan başlatarak toplam işlemi moment çıkaran fonksiyona eşit olacak şekilde açılsın.

$$M_X(t)=\sum_{x=0}e^{tx}P(X=x)=e^0\underline{P(X=0)}+e^t\underline{P(X=1)}+e^{2t}P(X=2)+...=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^t$$

Burada moment çıkaran fonksiyona bakıldığında e^t'ye kadar olasılık değerinin olduğu görülmektedir. x=2,3,... için olasılık değerleri sıfırdır. Böylece, negatif olmayan X raslantı değişkenin alacağı değerler: $x=0,1$ olacaktır. Olasılık fonksiyonu ise,

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & x=0\\ \frac{1}{3}, & x=1\\ 0, & \ddot{o}.d.için\end{cases}$$

şeklindedir. Burada verilen X kesikli rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $X\sim Benoulli(p=\frac{1}{3})$ dağılımına sahip olduğundan doğrudan da yazılabilir.

__Hatırlatma:__ $X\sim Benoulli(p)$ ise, X raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$M_X(t)=pe^t+q$ biçimindedir.

d. X rastlantı değişkenin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$P_X(t)=E(t^X)=\sum_{x=0}^{1}t^xP(X=x)=t^0P(X=0)+tP(X=1)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t$$

şeklinde elde edilir. Moment çıkaran fonksiyonda e^t yerine t yazılarak da olasılık çıkaran fonksiyon elde edilebilir. Karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{itx} P(X=x) = e^{0} P(X=0) + e^{it} P(X=1)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{it}$$

şeklinde elde edilebilir. Daha önce de bahsedildiği üzere moment çıkaran fonksiyonda t yerine it yazılarak karakteristik fonksiyon elde edilebilir.

7) X kesikli rastlantı değişkeninin olasılık fonksiyonu, $n \in N$ için,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...,n$$

olarak verilmiştir. Buna göre;

a. Olasılık çıkaran fonksiyonu bulunuz.

b. $\mu_{[2]}$'yi bulunuz.

Çözüm:

<u>Hatırlatma:</u> Bu çözümde binom açılımından yararlanılmıştır. Binom açılımı:

$\left(a+b\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ biçimindedir.

a. X rastlantı değişkenin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$P_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{n} t^x P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} t^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} pt^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \left[pt + (1-p)\right]^n$$

olarak bulunur (Binom açılımı eşitliğinde i=x, (1-p)=a,pt=b'dir).

b. $\mu_{[2]}$ (ikinci faktöriyel moment),

$\mu_{[2]} = E\left[X(X-1)\right] = \left.\frac{d^2 P_X(t)}{dt^2}\right|_{t=1} = \left.\left\{\frac{d\left[np(pt+(1-p))^{n-1}\right]}{dt}\right\}\right|_{t=1} = n(n-1)p^2$ biçiminde elde edilir.

8) X kesikli rastlantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$P_X(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^3$$

olarak verilmiştir. Buna göre, X raslantı değişkenin dağılımını bulunuz.

Çözüm: X raslantı değişkenin dağılımını bulmak için $\left.\frac{1}{k!}\frac{d^k P_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = P(X=k) = p_k$ özelliğinden yararlanılacaktır.

$P(X=0) = p_0 = P_X(0) = 0$

$$P(X=1) = \frac{1}{1!}\left.\frac{d\left[\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^3\right]}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{1}{4}+t+\frac{3}{4}t^2\right)\right|_{t=0} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\left[\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^3\right]}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{1}{4}+t+\frac{3}{4}t^2\right)\right|_{t=0} = \frac{1}{2!}\left.\left(1+\frac{3}{2}t\right)\right|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3\left[\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^3\right]}{dt^3}\right|_{t=0} = \frac{1}{3!}\frac{d}{dt}\left.\left(1+\frac{3}{2}t\right)\right|_{t=0} = \frac{1}{3!}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Burada türev alma işlemine devam etmeye gerek yoktur. Çünkü X raslantı değişkenin aldığı değerler üzerinden o değerleri alması olasılıklarının toplamı 1'e eşittir. $\sum_x P(X=x) = 1$

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1,3 \\ \frac{1}{2}, & x = 2 \\ 0, & \ddot{o}.d.i\c{c}in \end{cases}$$

9) X sürekli rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} x^{n-1}e^{-x/\lambda}, & x \geq 0 \\ 0, & \ddot{o}.d.i\c{c}in \end{cases}$$

$\lambda > 0$ ve $n > 0$ için, olarak verilmiştir. Buna göre;

a. X raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$'yi bulunuz.

b. Bulduğunuz moment çıkaran fonksiyonundan yararlanarak beklenen değer ve varyansını bulunuz.

Çözüm:

a. X raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}f(x)dx=\int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}x^{n-1}e^{-x/\lambda}dx=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x\left(\frac{1}{\lambda}-t\right)}dx$$

bulunur. Burada $u=x\left(\frac{1}{\lambda}-t\right)$ değişken değiştirme işlemi yapılması gerekmektedir. $du=dx\left(\frac{1-\lambda t}{\lambda}\right)$,dx yalnız bırakılmak istenirse $dx=\frac{\lambda}{1-\lambda t}du$ olacaktır. Dolayısıyla moment çıkaran fonksiyon,

$$\begin{aligned}
M_X(t)&=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\int_0^\infty\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)^{n-1}u^{n-1}e^{-u}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)du\\
&=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)^n\underbrace{\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du}_{\Gamma(n)}\\
&=\left(\frac{1}{1-\lambda t}\right)^n=\left(1-\lambda t\right)^{-n}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada Gamma fonksiyonun $\Gamma(n)=\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du$ olduğunu hatırlamak gerekmektedir. Moment çıkaran fonksiyon bulunduğuna göre momentlerin bulunması aşamasına geçilebilir.

b. İlk olarak beklenen değer yani 1. moment elde edilmeye çalışılacaktır. $E\left(X\right)$,

$E\left(X\right)=\mu_1'=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left[n\lambda(1-\lambda t)^{-n-1}\right]\Big|_{t=0}=n\lambda$ olarak bulunur.

Varyansı bulmak için ikinci momentin bulunması gerekmektedir. $E\left(X^2\right)$,

$$E\left(X^2\right)=\mu_2'=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{d\left[n\lambda(1-\lambda t)^{-n-1}\right]}{dt}\right|_{t=0}=\left[n(n+1)\lambda^2(1-\lambda t)^{-n-2}\right]\Big|_{t=0}=n(n+1)\lambda^2$$

şeklinde bulunur. Böylece varyans, $V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2=n(n+1)\lambda^2-n^2\lambda^2=n\lambda^2$ biçiminde elde edilir.

10) X kesikli rastlantı değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-1}}{x!}, & x=0,1,2...\\ 0, & ö.d.için\end{cases}$$

olarak verilmiştir. Buna göre;

a. X raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$'yi bulunuz.

b. Bulduğunuz $M_X(t)$'den yararlanarak μ_1' ve μ_2''i bulunuz.

Çözüm: a. X raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-1}}{x!}=e^{-1}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}}{x!}$$

bulunur. Burada toplam işlemi açılmak istenirse Mac-Laurent seri açılımından yararlanılmalıdır ($A=e^t$ olarak değişken değiştirip çözüm yapılabilir).Böylece $M_X(t)$,

$$M_X(t)=e^{-1}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}}{x!}=e^{-1}\left[\underbrace{1+\frac{e^t}{1!}+\frac{\left(e^t\right)^2}{2!}+\frac{\left(e^t\right)^3}{3!}+\ldots}_{e^{e^t}}\right]=e^{\left(e^t-1\right)}$$

olarak elde edilir.

b. İlk olarak beklenen değer yani 1. moment μ'_1 elde edilmeye çalışılacaktır. $\mu'_1=E\left(X\right)$,

$E\left(X\right)=\mu'_1=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left[\frac{d}{dt}e^{\left(e^t-1\right)}\right]_{t=0}=\left.e^te^{\left(e^t-1\right)}\right|_{t=0}=1$ olarak bulunur. 2. moment $\mu'_2=E\left(X^2\right)$ ise,

$$E\left(X^2\right)=\mu'_2=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left[\frac{d^2}{dt^2}e^{\left(e^t-1\right)}\right]_{t=0}=\left[\frac{d}{dt}\left(e^te^{\left(e^t-1\right)}\right)\right]_{t=0}=\left[e^te^{\left(e^t-1\right)}+e^{2t}e^{\left(e^t-1\right)}\right]_{t=0}=2$$

olarak bulunur.

11) X rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=\frac{pe^t}{1-e^t+pe^t}$$

olarak verilmiştir. Bu X raslantı değişkeninin orijine göre 1. momenti $\mu'_1=3$ olduğuna göre p değerini bulunuz.

Çözüm: t=0 için $M_X(0)=E\left(e^0\right)=1$ olduğu biliniyor. O halde t=0 için,

$M_X(0)=\frac{pe^0}{1-e^0+pe^0}=\frac{p}{p}=1$ elde edilir. Ancak bu eşitlikten p değeri elde edilememektedir. Soruda $\mu'_1=3$ olduğu bilgisi verilmiştir. Burada $E\left(X\right)=\mu'_1=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}$ bilgisi kullanılarak p,

$$E\left(X\right)=\mu'_1=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left[\frac{pe^t}{1-e^t+pe^t}\right]_{t=0}=\left.\frac{pe^t\left(1-e^t+pe^t\right)-\left(-e^t+pe^t\right)pe^t}{\left(1-e^t+pe^t\right)^2}\right|_{t=0}$$

$$=\left.\frac{pe^t}{\left(1-e^t+pe^t\right)^2}\right|_{t=0}=\frac{p}{p^2}=3\qquad\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$ olarak elde edilir.

12) X kesikli rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\right)^{10}$$

olarak verilmiştir. Bu X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: X kesikli rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunun $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$ şeklinde yazılabildiği biliniyor. Burada verilen $M_X(t) = \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\right)^{10}$ eşitliği, Binom açılımı: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ kullanılarak, $i = x, a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}e^t, n = 10$ olacak şekilde yeniden yazılsın. Böylece,

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{10} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{3}e^t\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} = \sum_{x=0}^{10} e^{tx} \underbrace{\binom{10}{x} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^x}_{p=\frac{1}{3}} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}}_{1-p=\frac{2}{3}}}_{f(x)}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada X kesikli rastlantı değişkeni $B(10, \frac{1}{3})$ dağılımına sahiptir. Olasılık fonksiyonu ise, $f(x) = \binom{10}{x} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^x}_{p=\frac{1}{3}} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}}_{1-p=\frac{2}{3}}$ 'dir.

13) X kesikli rastlantı değişkeninin olasılık fonksiyonu, $\lambda > 0$ için,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,...$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

a. X raslantı değişkeninin ikinci faktöriyel momenti $E\left[X(X-1)\right]$'i bulunuz.

b. Bulduğunuz faktöriyel momentten yararlanarak X raslantı değişkeninin varyansını hesaplayınız.

Çözüm: I.yol: Beklenen değer tanımından yararlanarak çözüm elde edilebilir.

$$E\left(X\right)=\sum_{x=0}^{\infty}xf(x)=\sum_{x=0}^{\infty}xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!}=e^{-\lambda}\left(\lambda+\lambda^2+\frac{\lambda^3}{2!}+\ldots\right)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(\underbrace{1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots}_{e^{\lambda}}\right)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

$$=\lambda$$

ve

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}=e^{-\lambda}\left(\lambda^2+\lambda^3+\frac{\lambda^4}{2!}+\ldots\right)$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\underbrace{\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots\right)}_{e^{\lambda}}=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2$$

olur. Dolayısıyla varyans,

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=E\left[X^2-X\right]=E\left(X^2\right)-\underbrace{E\left(X\right)}_{\lambda}=\lambda^2\Rightarrow E\left(X^2\right)=\lambda^2+\lambda$$

$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$ olarak elde edilir.

II.yol: Olasılık Çıkaran fonksiyondan yararlanılarak çözüm elde edilebilir.

$$P_X(t)=E(t^X)=\sum_{x=0}^{\infty}t^xf(x)$$

İlk olarak olasılık çıkaran fonksiyon yukarıdaki eşitlikten elde edilir. Daha sonra olasılık çıkaran fonksiyonun $\mu_{[2]}=E\left[X(X-1)\right]=\left.\frac{d^2P_X(t)}{dt^2}\right|_{t=1}$ özelliği kullanılır ve ikinci faktöriyel moment elde edilir. Olasılık Çıkaran fonksiyon,

$$P_X(t)=E(t^X)=\sum_{x=0}^{\infty}t^xf(x)=\sum_{x=0}^{\infty}t^x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda t^x}{x!}=e^{-\lambda}\underbrace{\left[1+\frac{\lambda t}{1!}+\frac{\left(\lambda t\right)^2}{2!}+\ldots\right]}_{e^{\lambda t}}=e^{\lambda(t-1)}$$

olarak elde edilir. İkinci faktöriyel momenti $E\left[X(X-1)\right]$,

$$\mu_{[2]}=E\left[X(X-1)\right]=\left.\frac{d^2P_X(t)}{dt^2}\right|_{t=1}=\left.\frac{d^2}{dt^2}\left[e^{\lambda(t-1)}\right]\right|_{t=1}=\left.\frac{d}{dt}\left[\lambda e^{\lambda(t-1)}\right]\right|_{t=1}=\left.\left[\lambda^2e^{\lambda(t-1)}\right]\right|_{t=1}=\lambda^2$$

olarak elde edilir. Buradan varyans yine I.yol çözümde elde edildiği gibi bulunabilir.

III.yol: Moment Çıkaran fonksiyondan yararlanılarak çözüm elde edilebilir. $M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_x e^{tx} f(x)$ Burada da ilk olarak $M_X(t)$ elde edilir ve türev işlemi gerçekleştirilerek momentler elde edilir. İkinci faktöriyel moment ise momentler türünden

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=E\left[X^2-X\right]=\underbrace{E\left(X^2\right)}_{\mu_2'}-\underbrace{E\left(X\right)}_{\mu_1'}=\mu_2'-\mu_1'$$

yukarıdaki gibi yazılabilir. Moment Çıkaran fonksiyon $M_X(t)$,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x)=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!}=e^{-\lambda}\underbrace{\left[1+\frac{\left(\lambda e^t\right)}{1!}+\frac{\left(\lambda e^t\right)^2}{2!}+\dots\right]}_{e^{\lambda e^t}}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}$$

olarak elde edilir. Birinci ve ikinci moment,

$$E\left(X\right)=\mu_1'=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)\right|_{t=0}=\left.\lambda e^t\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)\right|_{t=0}=\lambda$$

$$E\left(X^2\right)=\mu_2'=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left[\lambda e^t\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)\right]\right|_{t=0}=\left.\left[\lambda e^t\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)+\lambda^2e^{2t}\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)\right]\right|_{t=0}=\lambda+\lambda^2$$

olarak elde edilir. Buradan ikinci faktöriyel moment,

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=E\left[X^2-X\right]=\underbrace{E\left(X^2\right)}_{\mu_2'}-\underbrace{E\left(X\right)}_{\mu_1'}=\mu_2'-\mu_1'=\lambda+\lambda^2-\lambda=\lambda^2$$

olarak elde edilir. Varyans yine I.yol çözümde elde edildiği gibi bulunabilir.

14) X sürekli rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=e^{-x},\quad x>0$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

a. X raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$'yi bulunuz.

b. Bulduğunuz $M_X(t)$'den yararlanarak ortalamaya göre 2. Momenti μ_2'yi hesaplayınız.

Çözüm: a. X raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^{\infty} e^{tx} f(x)dx=\int_0^{\infty} e^{tx}e^{-x}dx=\int_0^{\infty} e^{-x(1-t)}dx$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-x(1-t)}dx=\frac{1}{(1-t)}(-e^{-x(1-t)})\Big|_0^{\infty}=\left(1-t\right)^{-1}$$

olarak elde edilir. Buradan birinci ve ikinci moment,

$$E\left(X\right)=\mu_1'=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left(\left(1-t\right)^{-1}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{\left(1-t\right)^2}\right|_{t=0}=1$$

$$E\left(X^2\right)=\mu_2'=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\left(1-t\right)^2}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{2}{\left(1-t\right)^3}\right|_{t=0}=2$$

şeklinde elde edilir.

15) X rastlantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$P_X(t)=\frac{t}{2-t}$$

$t>2$ için, olarak verilmiştir. Buna göre,

a. X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
b. Olasılık çıkaran fonksiyonunu kullanarak orijine göre 1. Momentini μ_1' hesaplayınız.

Çözüm: X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulmak için $\left.\frac{1}{k!}\frac{d^kP_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=P(X=k)=p_k$ özelliğinden yararlanılmalıdır.

$P_X(0)=0$

$$P(X=1)=\frac{1}{1!}\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{t}{2-t}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{2}{\left(2-t\right)^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{2}{\left(2-t\right)^2}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{2}{\left(2-t\right)^3}\right|_{t=0}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{3!}\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{4}{\left(2-t\right)^3}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{2}{\left(2-t\right)^4}\right|_{t=0}=\frac{1}{8}$$

$P(X=4)=\frac{1}{4!}\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{12}{\left(2-t\right)^4}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{2}{\left(2-t\right)^5}\right|_{t=0}=\frac{1}{16}$ … şeklinde devam etmektedir. Dikkat edilecek olursa k>0 değerine karşılık $\frac{1}{2^k}$ olasılığı denk gelmektedir. O halde olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\quad x=1,2,3...$$
$$=0,\qquad ö.d.için$$

olarak bulunur.

Olasılık çıkaran fonksiyonunu kullanarak orijine göre 1. momenti μ_1' $\mu_{[1]} = E(X) = \mu_1' = \left.\dfrac{dP_X(t)}{dt}\right|_{t=1}$ özelliğinden bulunabilir. μ_1',

$$\mu_{[1]} = E(X) = \mu_1' = \left.\frac{dP_X(t)}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2-t}\right)\right|_{t=1} = \left.\frac{2}{\left(2-t\right)^2}\right|_{t=1} = 2$$ şeklinde elde edilir.