İST-265 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK

UYGULAMA-3 ÇÖZÜMLER

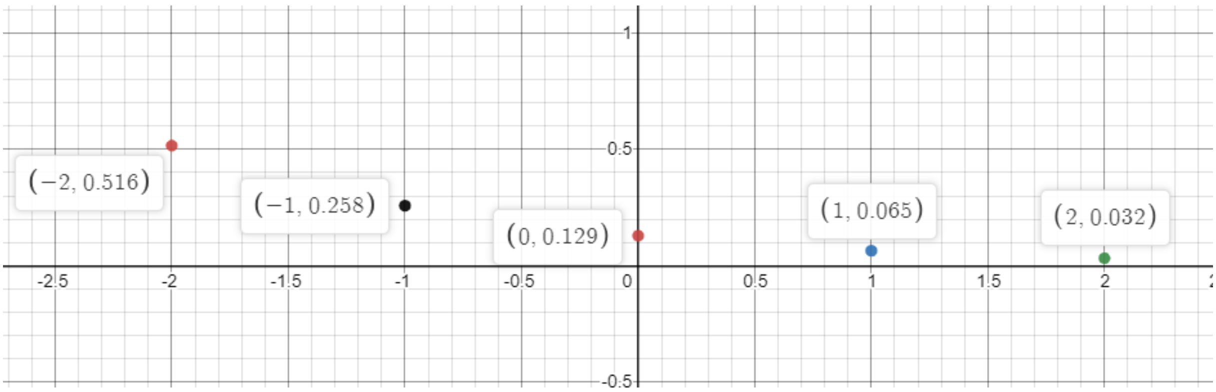
1) X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{31}.\frac{1}{2^x} & , x=-2,-1,0,1,2\\ 0 & , ö.d.\end{cases}$$

$Y=|X|$ raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f(x),\ x\ grafiği$



$Y=|X|$ için;

$Y=|X|$ $\begin{cases}y=x & \rightarrow & x_1=y\\ y=-x & \rightarrow & x_2=-y\end{cases}$ olarak bulunur.

$x=-2$ için $y=2$

$x=-1$ için $y=1$

$x=0$ için $y=0$

$x=1$ için $y=1$

$x=2$ için $y=2$

Yani $x=-2,-1,0,1,2$ için $y=0,1,2$ olarak bulunur.

$g(y)=P(Y=y)$

$$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{4}{31}.\frac{1}{2^0}=\frac{4}{31}$$

$$P(Y=1)=P(X=-1 \; veya \; X=1) = P(X=-1)+P(X=1)$$

$$=\frac{4}{31}\,\frac{1}{2^{-1}} + \frac{4}{31}\,\frac{1}{2^{1}} = \frac{8}{31}+\frac{2}{31} = \frac{10}{31}$$

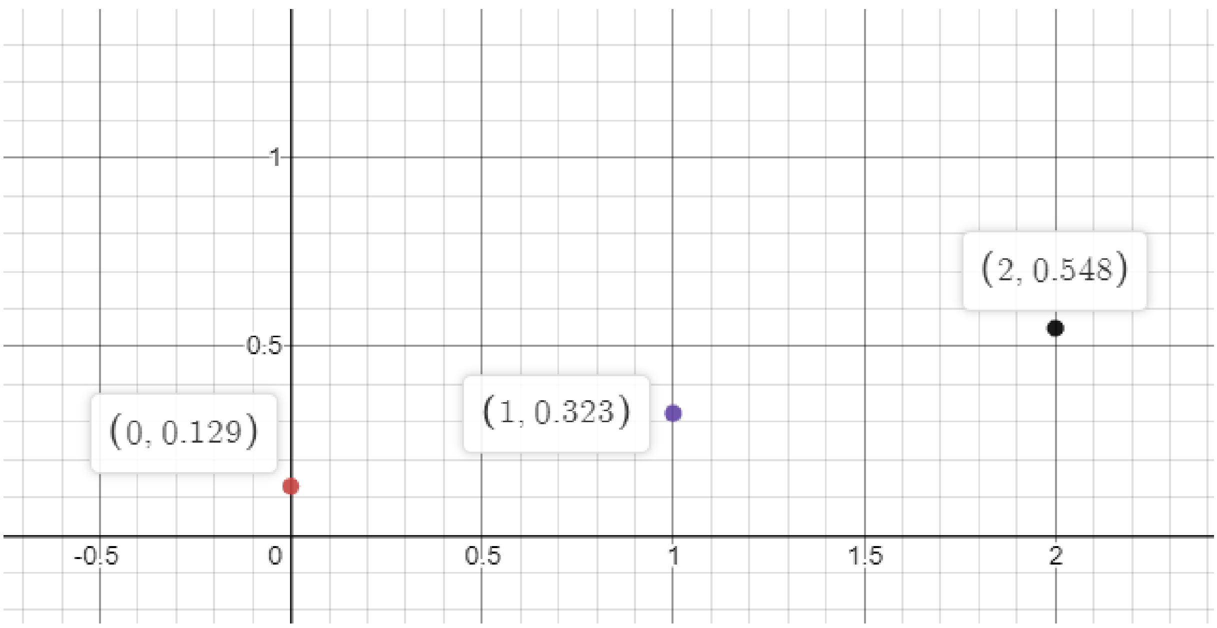
$$P(Y=2)=P(X=-2 \; veya \; X=2)=P(X=-2)+P(X=2)$$

$$=\frac{4}{31}\,\frac{1}{2^{-2}} + \frac{4}{31}\,\frac{1}{2^{2}} = \frac{16}{31}+\frac{1}{31} = \frac{17}{31}$$

$$g(y)=\begin{cases} \dfrac{4}{31}, & y=0 \\[2ex] \dfrac{10}{31}, & y=1 \\[2ex] \dfrac{17}{31}, & y=2 \end{cases}$$

olarak bulunur.

$g(y), \; y$ *grafiği*



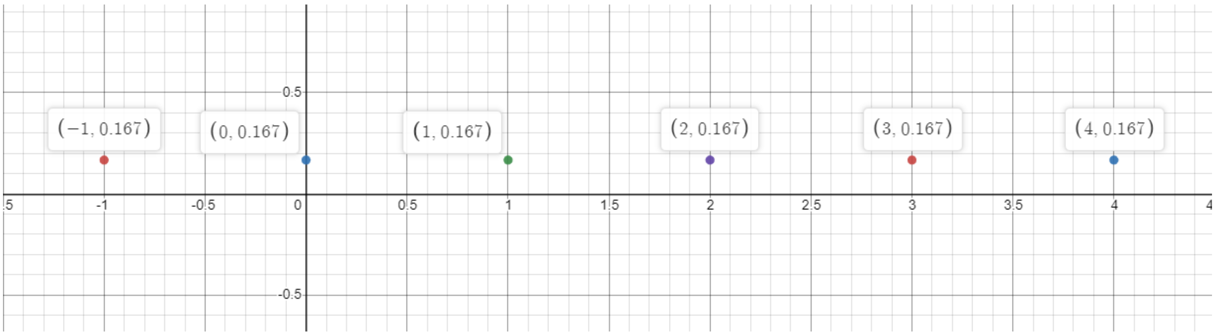
2) X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & , x = -1, 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & , ö.d. \end{cases}$$

$Y = 2X + 1$ raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$f(x),\ x\ grafiği$



$Y = 2X + 1$ verildiğinde

$$x = -1 \;\rightarrow\; y = 2(-1) + 1 = -1$$
$$x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$$
$$x = 1 \;\rightarrow\; y = 3$$
$$x = 2 \;\rightarrow\; y = 5$$
$$x = 3 \;\rightarrow\; y = 7$$
$$x = 4 \;\rightarrow\; y = 9$$

Yani $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ için $y = -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$ olur.

$$g(y) = P(Y = y)$$

$$P(Y = -1) = P(X = -1) = \frac{1}{6}$$

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{6}$$

$$P(Y = 3) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(Y = 5) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

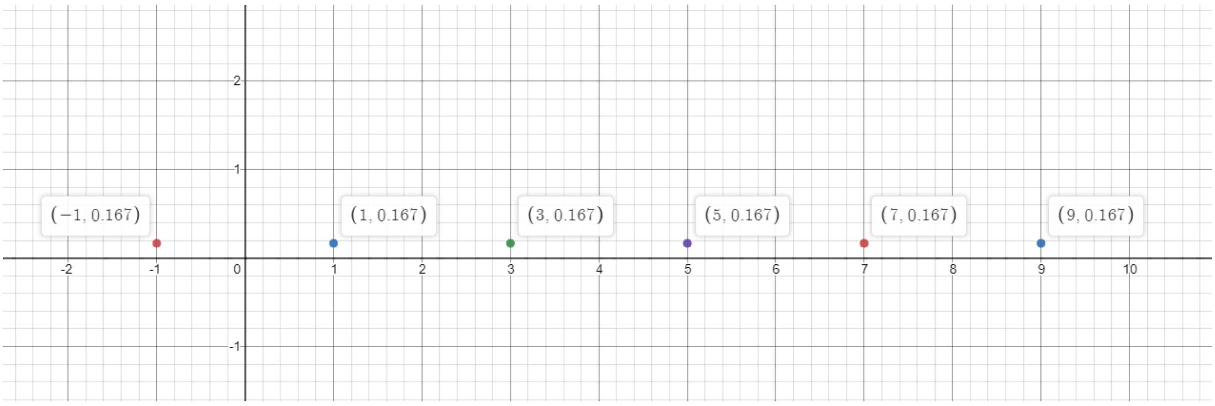
$$P(Y = 7) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(Y = 9) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$$

$$g(y)=\begin{cases}1/6\ , & y=-1\\ 1/6\ , & y=1\\ 1/6\ , & y=3\\ 1/6\ , & y=5\\ 1/6\ , & y=7\\ 1/6\ , & y=9\end{cases}$$

olarak bulunur.

$g(y),\ \ y$ *grafiği*



3) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} 42x^5(1-x) & , \ 0<x<1 \\ 0 & , \ ö.d. \end{cases}$$

$Y=X^3$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

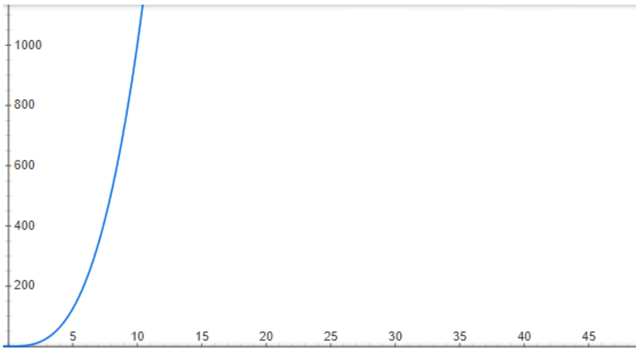
Çözüm:

I.Yol:

Hatırlatma: Sürekli durum için teorem:

$Y=h(x)$ diferansiyellenebilir ve düzgün artan/azalan bir fonksiyon ise;

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| , \ x=h^{-1}(y)$$



$Y=X^3$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

$$Y=X^3 \rightarrow X=Y^{\frac{1}{3}} , \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

Sınırlar;

$x=0$ için $y=0$

$x=1$ için $y=1$

olur.

$$g(y)=f(x)\frac{dx}{dy} = 42(y^{1/3})^5(1-y^{1/3})\frac{1}{3}y^{-2/3}=\frac{42}{3}y^{5/3}(1-y^{1/3})\,y^{-2/3}$$

$$=14y(1-y^{1/3}), \ 0<y<1$$

olarak bulunur.

II.Yol:

Hatırlatma: Dağılım Fonksiyonu Yöntemi:

$$G(y) = P(Y \le y) = P(h(x) \le y) = P(X \le h^{-1}(y))$$

$$\int_{h^{-1}(y)} f(x)dx = G(y)$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy}$$

O halde:

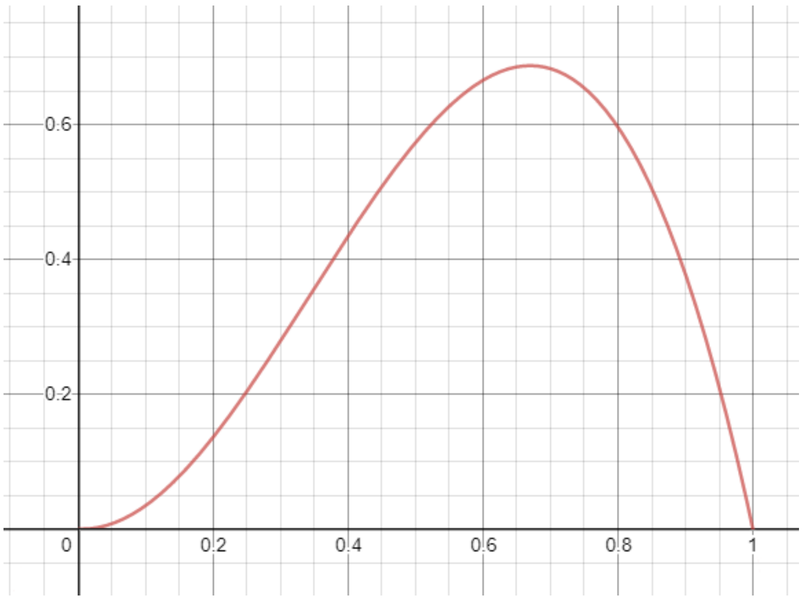
$$G(y) = P(Y \le y) = F(X^3 \le y) = P(X \le y^{1/3})$$

$$\int_0^{y^{1/3}} f(x)dx = \int_0^{y^{1/3}} 42x^5(1-x)dx = \left(7x^6 - 6x^7\right)_0^{y^{1/3}} = 7y^2 - 6y^{7/3} = G(y)$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d\left[7y^2 - 6y^{7/3}\right]}{dy} = 14y - 14y^{4/3} = 14y(1 - y^{1/3}) \text{ , } 0 < y < 1$$

olarak bulunur.

$g(y)$, y *grafiği*



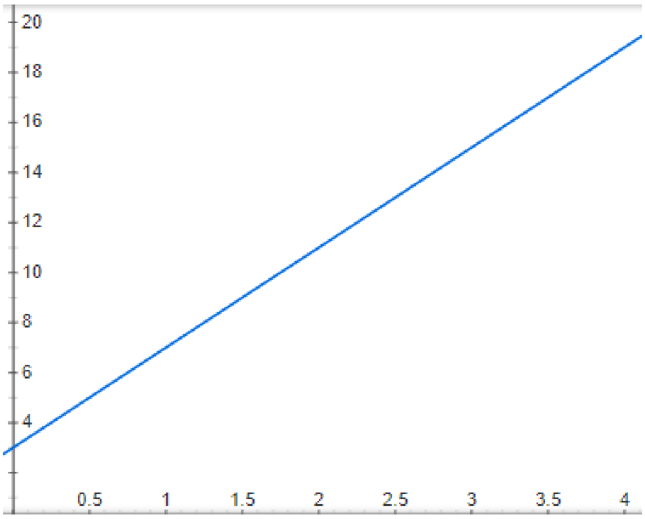
4) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases}7e^{-7x} & , \ x>0 \\ 0 & , \ ö.d.\end{cases}$$

$Y=4X+3$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

I.Yol:



$Y=4X+3$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

$$Y=4X+3 \rightarrow 4X=Y-3 \rightarrow X=\frac{Y-3}{4}, \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{4}$$

Sınırlar;

$x=0 \ \ için \ \ y=4(0)+3=3$

olur.

$$g(y)=f(x)\frac{dx}{dy} \ = \ 7e^{-7\left(\frac{y-3}{4}\right)}\frac{1}{4} \quad , \ y>3$$

olarak bulunur.

II.Yol:

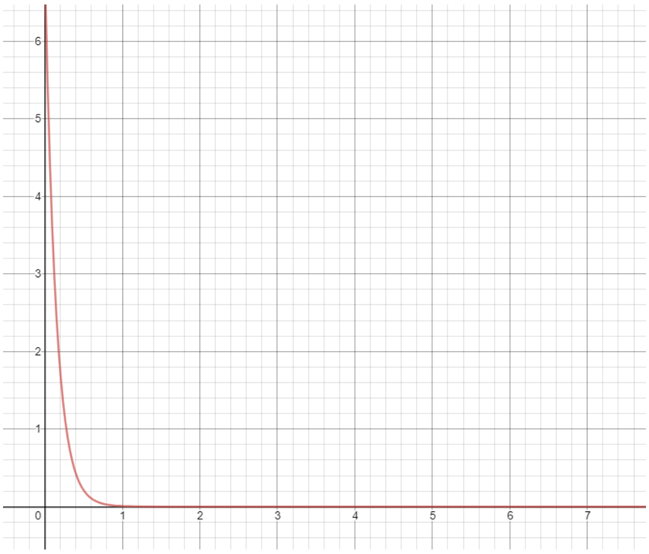
$$G(y)=P(Y\le y)=P(4X+3\le y)=P(4X\le y-3)=P\left(X\le \frac{y-3}{4}\right)$$

$$\int_0^{\frac{y-3}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{y-3}{4}} 7e^{-7x}dx=\left(\frac{7e^{-7x}}{-7}\right)_0^{\frac{y-3}{4}}=-e^{-7\left(\frac{y-3}{4}\right)}+1=G(y)$$

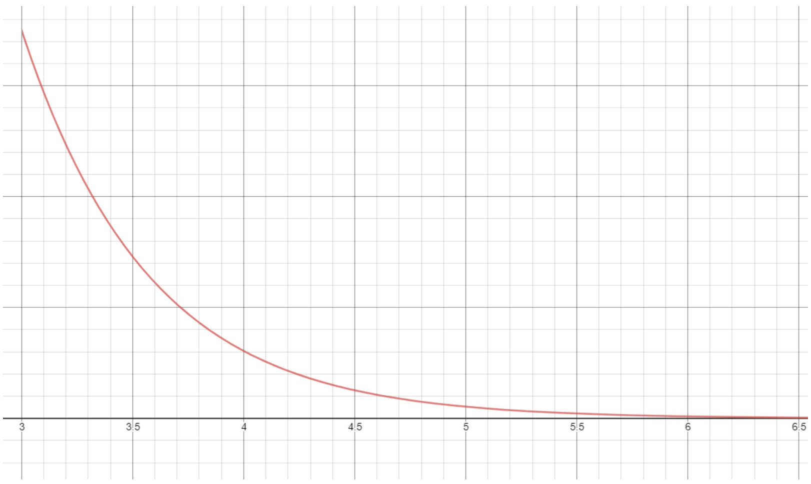
$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=-\left(-\frac{7}{4}\right)e^{-7\left(\frac{y-3}{4}\right)}=\frac{7}{4}e^{-7\left(\frac{y-3}{4}\right)}\ ,\ y>3$$

olarak bulunur.

$f(x),\ x\ grafiği$



$g(y),\ y\ grafiği$

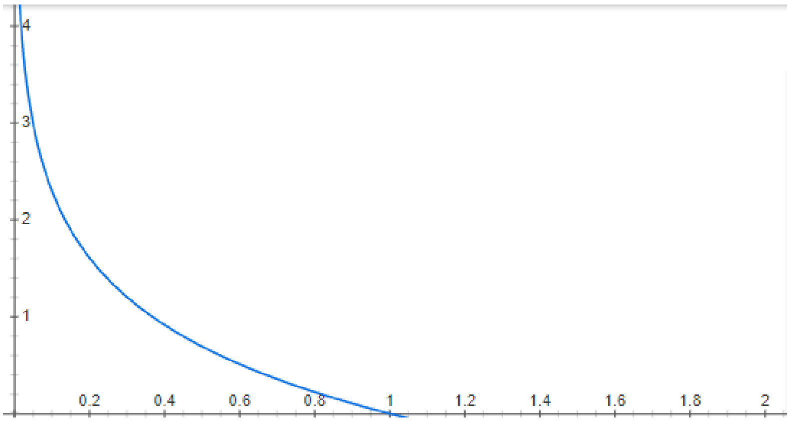


5) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(n+m+1)!}{n!\,m!}x^n(1-x)^m & ,\ 0<x<1\\ 0 & ,\ ö.d.\end{cases}$$

m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere $Y=-\ln X$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:



$Y=-\ln X$ azalan olduğu için teorem uygulanabilir.

Sınırlar;

$x=0 \ \ için \ \ y=\infty$

$x=1 \ \ için \ \ y=0$

olur.

$$Y=-\ln X \rightarrow \ln X=-Y \rightarrow e^{\ln X}=e^{-Y} \rightarrow X=e^{-Y} \quad , \quad \frac{dx}{dy}=-e^{-Y}$$

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{(n+m+1)!}{n!\,m!}\left(e^{-y}\right)^n\left(1-e^{-y}\right)^m\left|-e^{-y}\right| =$$

$$=\frac{(n+m+1)!}{n!\,m!}\,e^{-yn}\,e^{-y}\left(1-e^{-y}\right)^m =$$

$$=\frac{(n+m+1)!}{n!\,m!}\,e^{-y(n+1)}\left(1-e^{-y}\right)^m \ ,\ y>0$$

olarak bulunur.

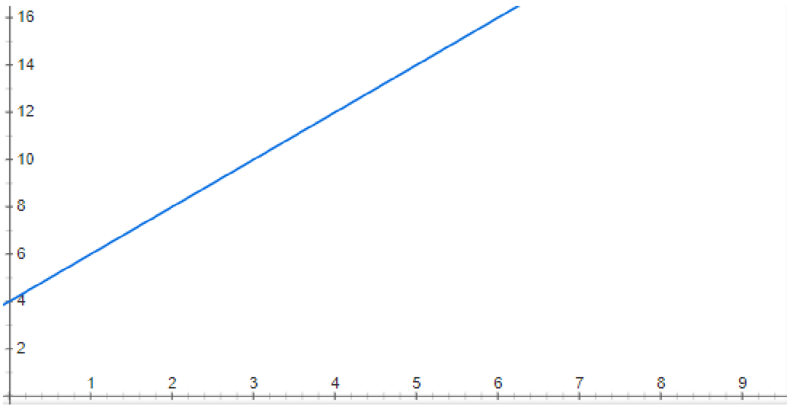
6) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x} & , \ x>0 \\ 0 & , \ ö.d. \end{cases}$$

$Y=2X+4$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

I.Yol:



$Y=2X+4$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

Sınırlar;

$x=0 \ \ için \ \ y=2(0)+4=4$

olur.

$$Y=2X+4 \ \rightarrow \ 2X=Y-4 \ \rightarrow \ X=\frac{Y-4}{2} \quad , \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$$

$$g(y)=f(x)\frac{dx}{dy} = \cancel{2}e^{-\cancel{2}\left(\frac{y-4}{\cancel{2}}\right)}\frac{1}{\cancel{2}}=e^{-(y-4)} \ , \ y>4$$

olarak bulunur.

II.Yol:

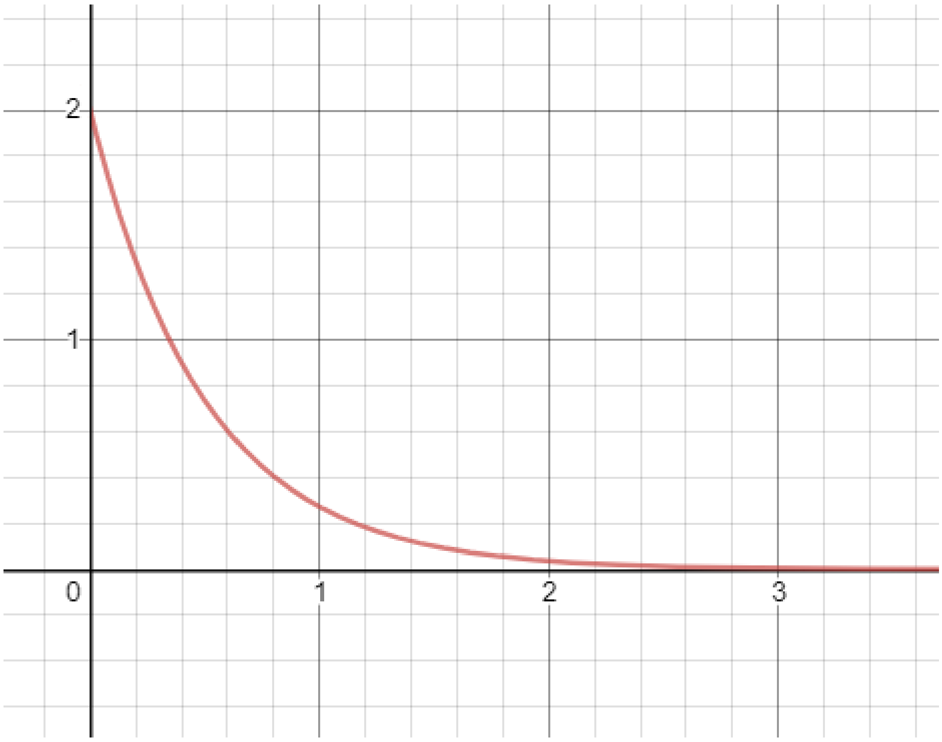
$$G(y)=P(Y\le y)=P(2X+4\le y)=P\left(X\le\frac{y-4}{2}\right)$$

$$\int_0^{\frac{y-4}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{y-4}{2}} 2e^{-2x}dx=\left(\frac{2e^{-2x}}{-2}\right)_0^{\frac{y-4}{2}}=-e^{-(y-4)}+1$$

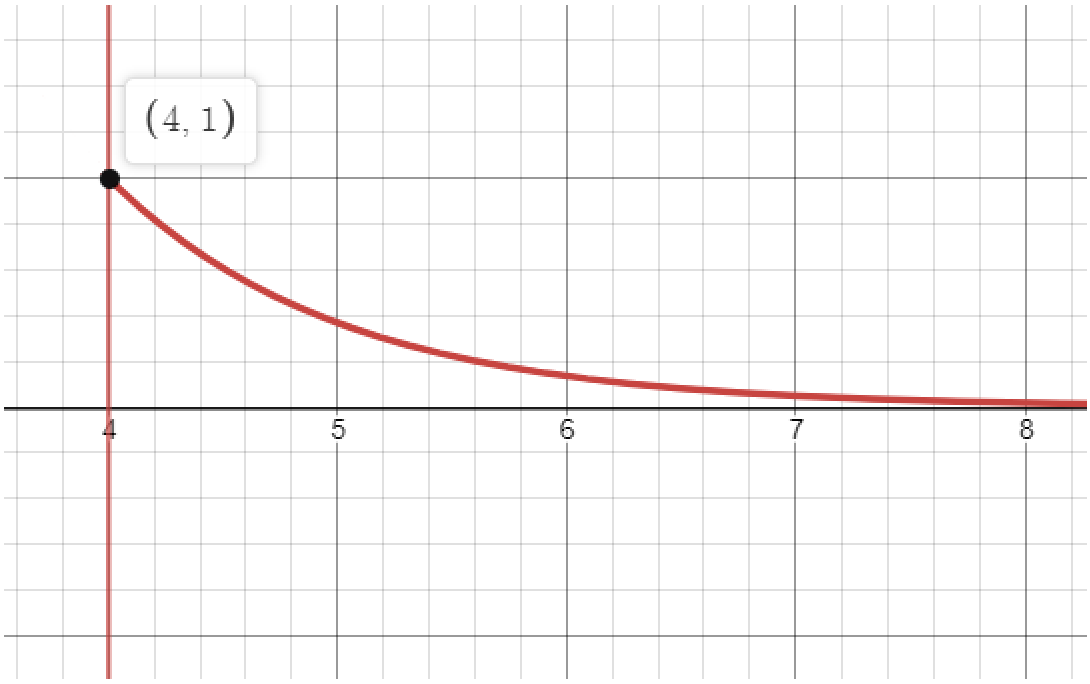
$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=-(-1)e^{-(y-4)} = e^{-(y-4)} \ , y>4$$

olarak bulunur.

$f(x)$, x grafiği



$g(y)$, y grafiği



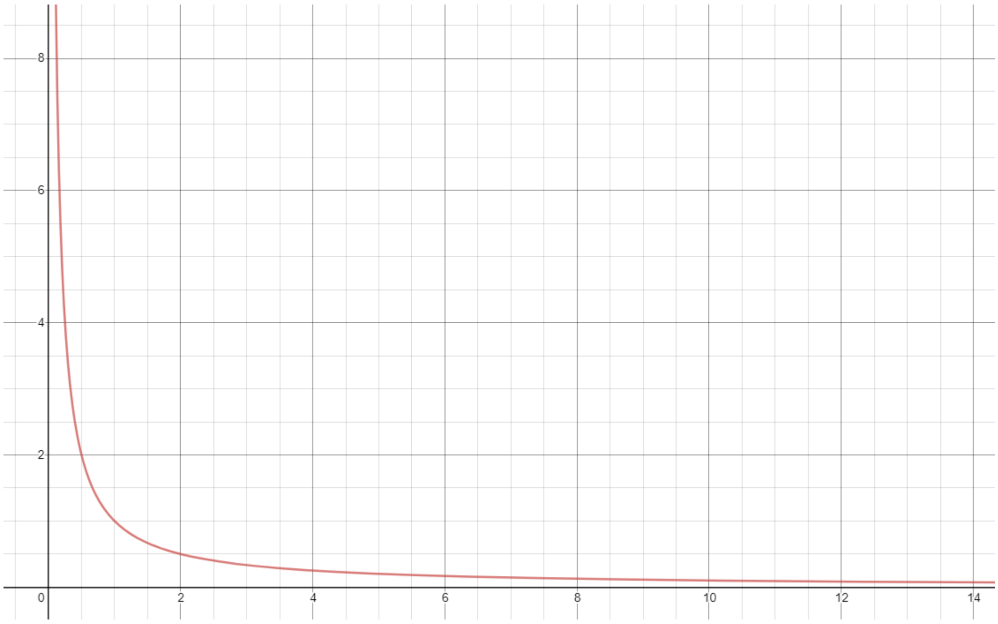
7) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \ x>0 \\ 0 & , \ ö.d. \end{cases}$$

$Y=\dfrac{1}{X}$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu dağılım fonksiyonu yöntemiyle bulunuz.

Çözüm:

$y=\dfrac{1}{x}$ *grafiği*



$$Y=\frac{1}{X} \ \rightarrow \ X=\frac{1}{Y}=Y^{-1} \ , \ \frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y^2}=-y^{-2}$$

$$G(Y)=P(Y\leq y)=P\left(\frac{1}{X}\leq y\right)=P\left(X\geq y^{-1}\right)$$

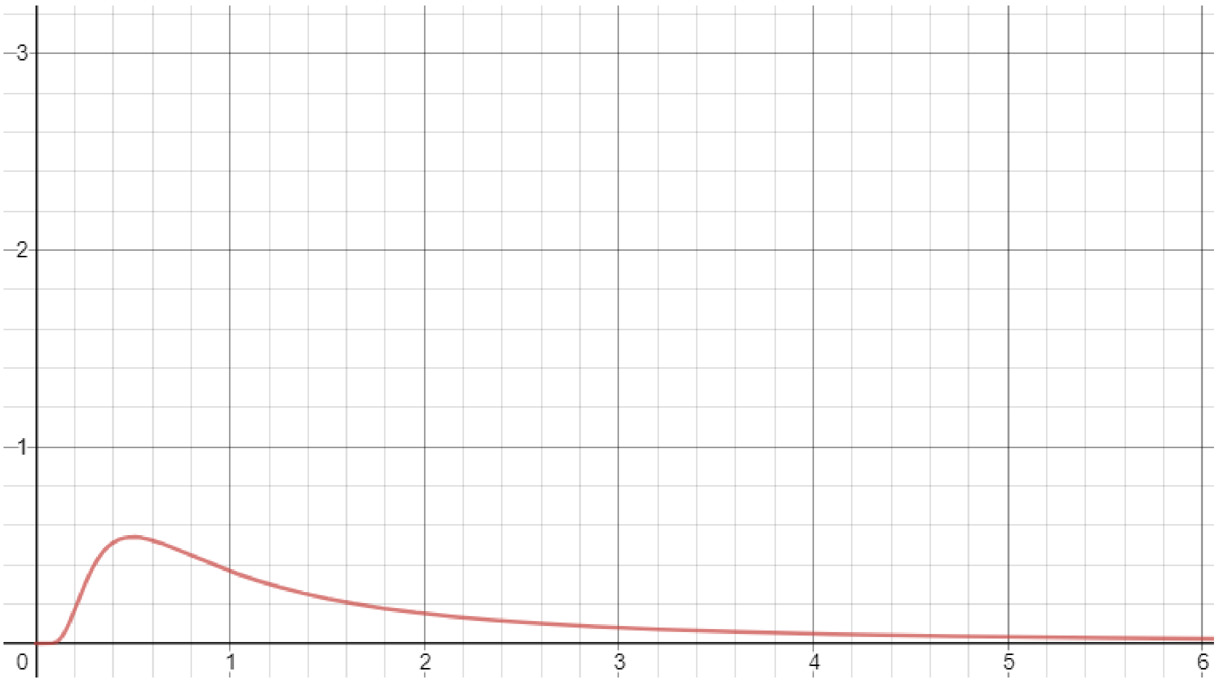
$$\int_{y-1}^{\infty} f(x)dx=\int_{y-1}^{\infty} e^{-x}dx=\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)_{y-1}^{\infty}=\underset{0}{-e^{-\infty}}-\left(-e^{-y^{-1}}\right)=e^{-y^{-1}}=G(y)$$

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=e^{-y^{-1}}\left(-(-1)y^{-2}\right)=e^{-y^{-1}}y^{-2}\ , y>0$$

olarak bulunur.

$f(x)$, x grafiği

$g(y)$, y grafiği



8) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

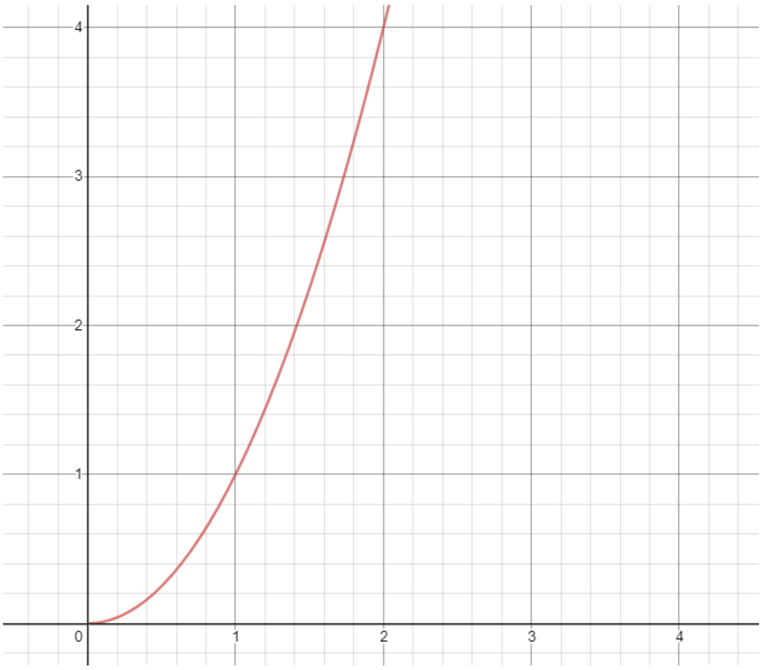
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & , \ 0<x<2 \\ 0 & , \ ö.d. \end{cases}$$

$Y=X^2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

I.Yol:

$y=x^2$ *grafiği*



$Y=X^2$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

Sınırlar;

$x=0$ *için* $y=0$
$x=2$ *için* $y=4$

olur.

$$Y=X^2 \rightarrow X=\mp\sqrt{Y} \quad , \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{\sqrt{\cancel{y}}}{2}\ \frac{1}{2\sqrt{\cancel{y}}}=\frac{1}{4}\ , \quad 0<y<4$$

olarak bulunur.

II.Yol:

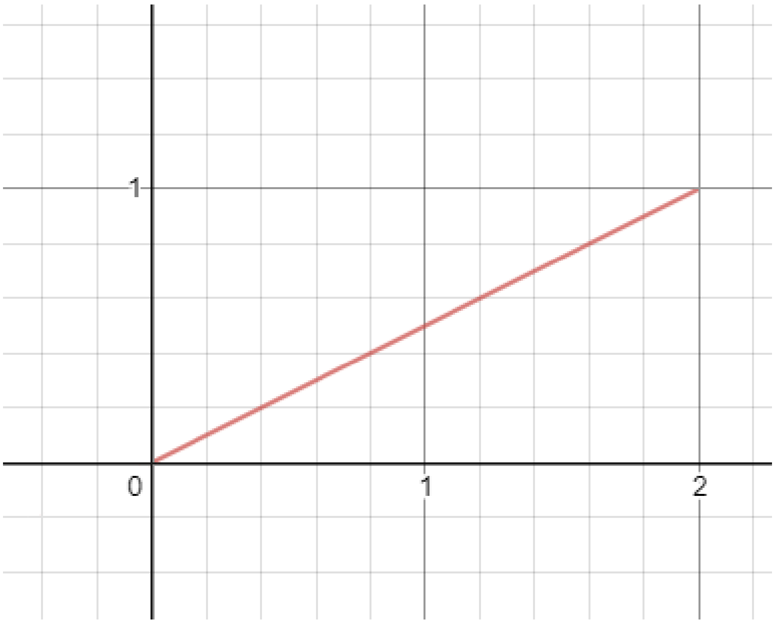
$$G(Y)=P(Y\leq y)=P\left(X^2\leq y\right)=P\left(X\leq\sqrt{y}\right) \ **$$

$$\int_0^{\sqrt{y}} f(x)dx=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^{\sqrt{y}}=\frac{y}{4}=G(y) \quad , \quad g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=\frac{1}{4}\ , \ 0<y<4$$

olarak bulunur.

** sınırlar pozitif aralıkta olmasaydı $P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ olarak yazacaktık.

$f(x),\ x\ grafiği$



$g(y),\ y\ grafiği$

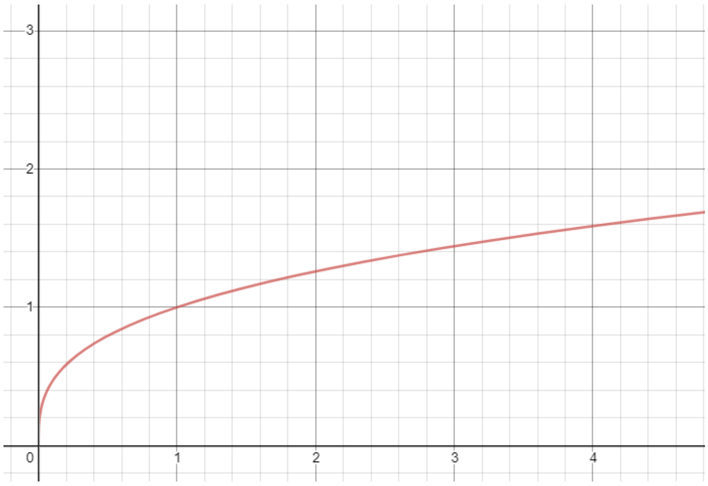
9) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}x^2} & ,\ x>0\\ 0 & ,\ ö.d.\end{cases}$$

$Y=X^{1/3}$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

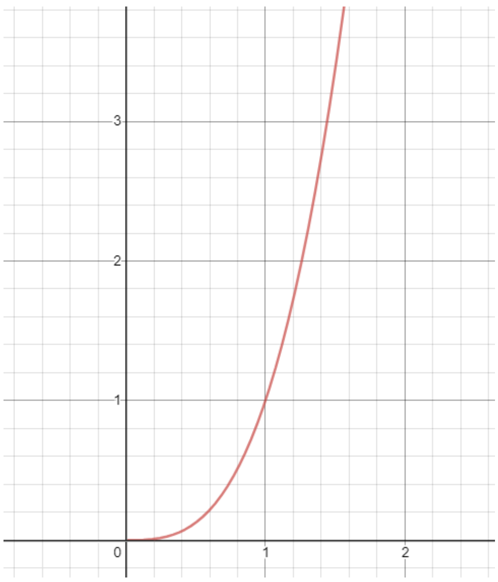
$y=x^{1/3}$ *grafiği*



$Y=X^{1/3}$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

$$Y=X^{1/3}\rightarrow X=Y^3 \quad , \quad \frac{dx}{dy}=3y^2$$

$x=y^3$ *grafiği*

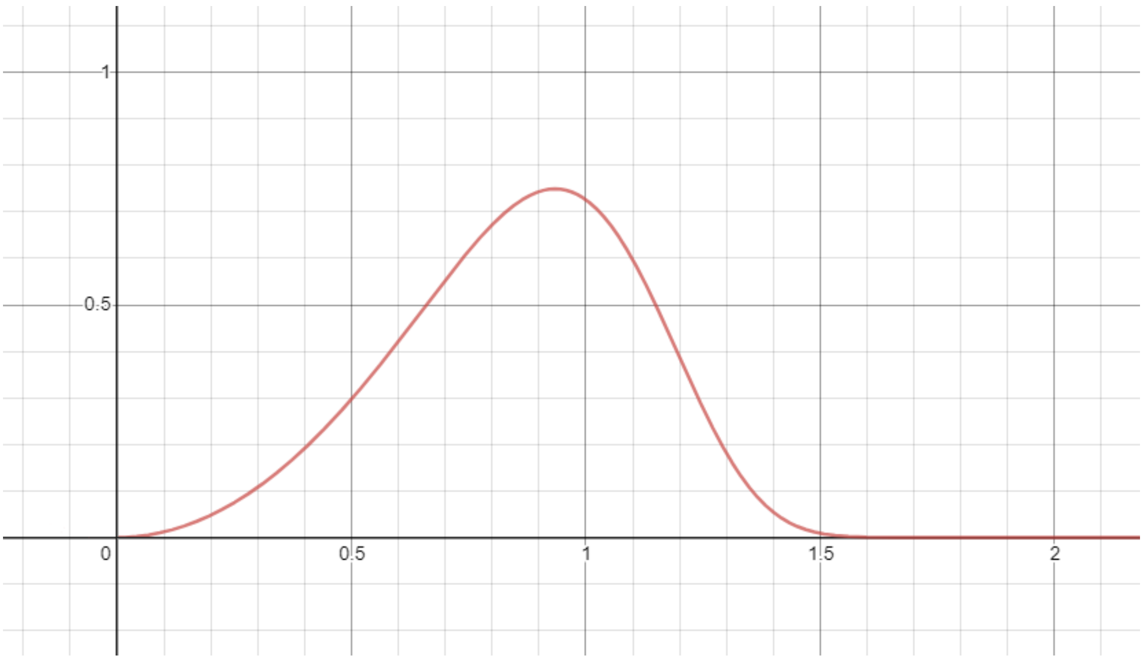


$$g(y) = f(x)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^3\right)^2} \; 3y^2 = \frac{3y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^6} \quad , \; y > 0$$

olarak bulunur.

$f(x), \; x$ *grafiği*

$g(y), \; y$ *grafiği*



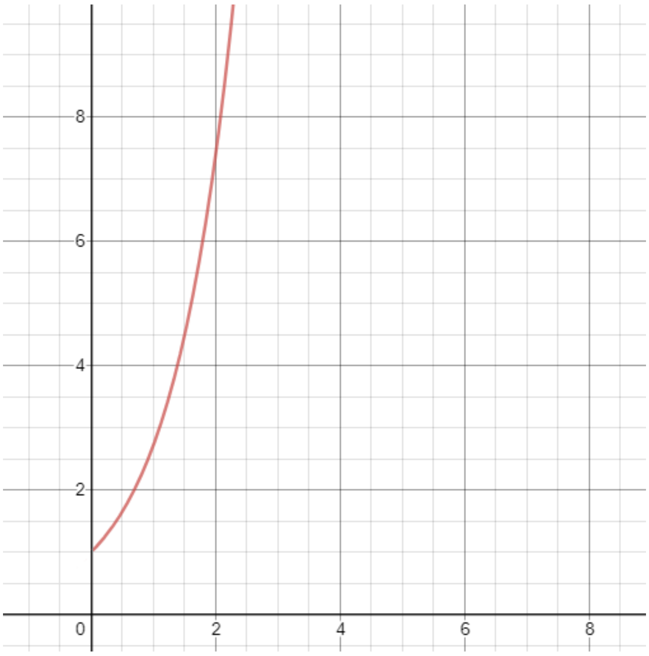
10) X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x\le 0\\ 1-e^{-2x} & , x>0\\ 1 & , x\to\infty\end{cases}$$

$Y=e^X$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$y=e^x \;\; grafiği$



$Y=e^x$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

Sınırlar;

$x=0 \;\; için \;\; y=1$

olur.

$$Y=e^X \;\rightarrow \ln Y=\ln e^X \;\;\rightarrow X=\ln Y \;\;, \;\; \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$$

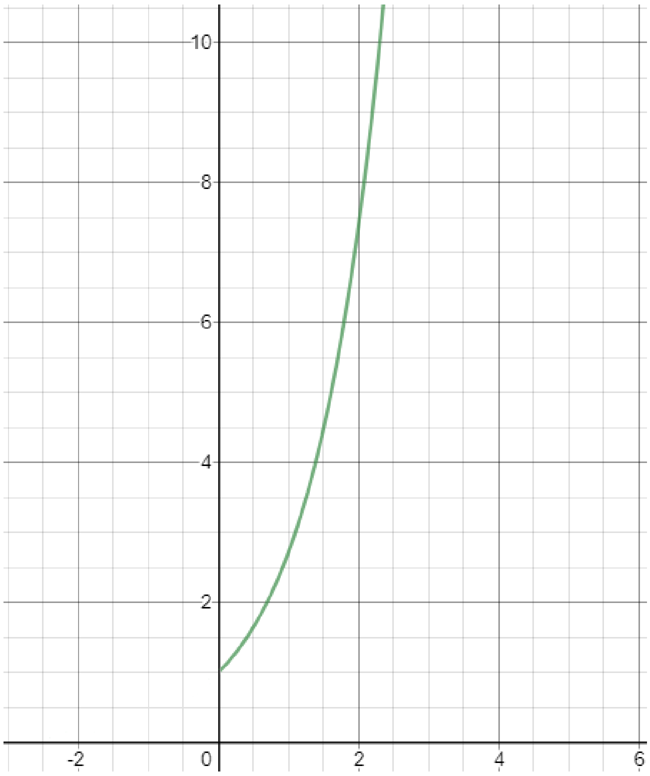
$$g(y)=f(x)\frac{dx}{dy}$$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=-(-2)e^{-2x}=2e^{-2x} \quad , x>0$$

$$g(y)=2e^{-2\ln y}\frac{1}{y}=2\underbrace{e^{\ln y^{-2}}}_{y^{-2}}\frac{1}{y}=\frac{2}{y^3} \quad , \quad y>1$$

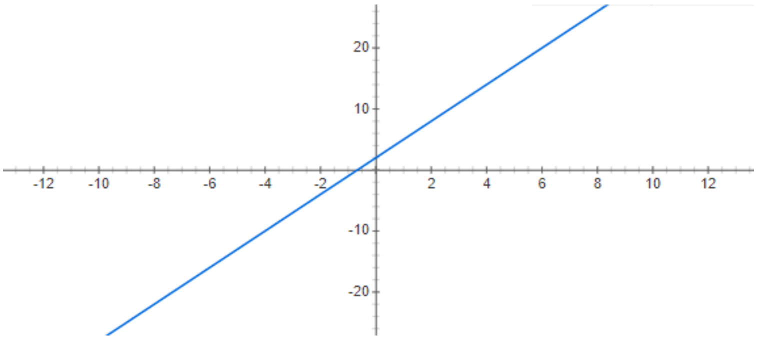
olarak bulunur.

$x = \ln y$ *grafiği*



11) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise $Y = 3X + 2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:



$Y = 3X + 2$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

$$Y = 3X + 2 \rightarrow X = \frac{Y-2}{3} \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$g(y) = f(x)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-2}{3}-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(3\mu+2)}{3\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < y < \infty$$

$$Y \sim N(3\mu + 2 \; , \; 9\sigma^2)$$

olarak bulunur.

12) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ artan olduğu için teorem uygulanabilir.

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow X - \mu = \sigma Y \rightarrow X = \sigma Y + \mu \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \sigma$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$g(y) = f(x)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{\sigma} y + \cancel{\mu} - \cancel{\mu}}{\cancel{\sigma}}\right)^2} \cancel{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad , \quad -\infty < y < \infty$$

$Y \sim N(0,1)$ Std. Normal Dağılım

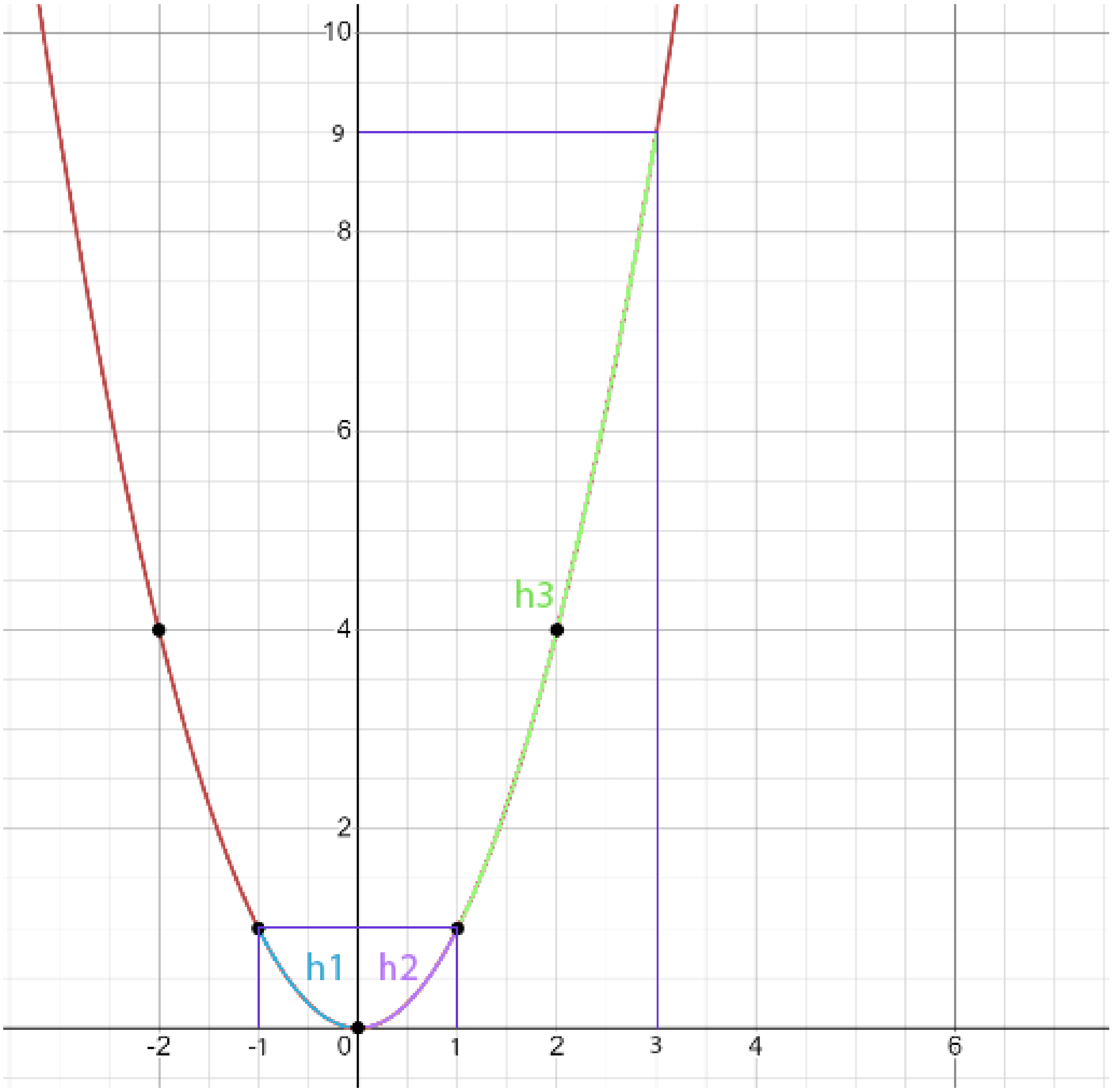
olarak bulunur.

13) X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & , \quad -1 < x < 3 \\ 0 & , \quad \ddot{o}.d. \end{cases}$$

$Y = X^2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:



$$h(x) = Y = X^2 \;\rightarrow\; h^{-1}(x) = X = \mp\sqrt{Y}$$

Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi (-1,0) aralığına h_1 , (0,1) aralığına h_2 , (1,3) aralığına ise h_3 diyelim, yani tanım aralığını 3 parçaya bölelim. Bu durumda fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilir;

$$(1)\begin{cases} h_1 : (-1,0) \xrightarrow{Y=X^2} (0,1) \;\Rightarrow\; h_1^{-1}(y) \;=\; -\sqrt{y} \\ h_2 : (0,1) \xrightarrow{Y=X^2} (0,1) \;\Rightarrow\; h_2^{-1}(y) \;=\; \sqrt{y} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} h_3 : (1,3) \xrightarrow{Y=X^2} (1,9) \;\Rightarrow\; h_3^{-1}(y) \;=\; \sqrt{y} \end{cases}$$

$f(x)$ fonksiyonunda sınırlarından bölünen 3 parça, $g(y)$ fonksiyonunda 2 parça olmaktadır. (2 tane (0,1) aralığı ve 1 tane (1,9) aralığı olmak üzere)

Bu durumda; (h_1 ve h_2 simetrik olduğu için)

$$(0,1) \Rightarrow g_1(y) = f_x(h_1^{-1}(y))\left|\frac{dh_1^{-1}(y)}{dy}\right| + f_x(h_2^{-1}(y))\left|\frac{dh_2^{-1}(y)}{dy}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{4\sqrt{y}} \quad , 0 < y < 1$$

$$(1,9) \Rightarrow g_2(y) = f_x(h_3^{-1}(y))\left|\frac{dh_3^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{8\sqrt{y}} \quad , 1 < y < 9$$

olarak bulunur. Bu durumda $g(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & , 0 < y < 1 \\ \\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}} & , 1 < y < 9 \end{cases}$$

olarak elde edilir.