İST265-MATEMATİKSEL İSTATİSTİK
UYGULAMA 8

1. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ i = 1, 2, ..., n$ bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $Z \sim N(0,1)$ dağılımına sahip bir raslantı değişkeni ve X_i ve Z bağımsız olsun. $Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + Z^2$ olarak tanımlanan Y raslantı değişkenin dağılımı nedir?

Çözüm:

Bu sorunun ve diğer soruların çözümünde Ki-Kare Teoremlerinden yararlanılacaktır. Çok önemli 5 teorem aşağıda özet olarak verilmiştir.

- **<u>Teorem1</u>:** $X \sim N(0,1)$ ise $X^2 \sim \chi_1^2$'dir.
- **<u>Teorem2</u>:** $X_1, X_2, ..., X_n \sim N(0,1)$ ise $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$'dir.
- **<u>Teorem3</u>:** $X_1 \sim \chi_{\nu_1}^2, X_2 \sim \chi_{\nu_2}^2, ..., X_n \sim \chi_{\nu_n}^2$ ise $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi_\nu^2$ olur. Burada $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$'dir.
- **<u>Teorem4</u>:** $X_1 \sim \chi_{\nu_1}^2$, $X_1 + X_2 \sim \chi_\nu^2$ ise $X_2 \sim \chi_{\nu-\nu_1}^2$'dir.
- **<u>Teorem5</u>:** $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$'dir. Burada S^2,örneklem varyansıdır.

$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + Z^2$ raslantı değişkeni $Y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 + Z^2$ olacak biçimde düzenlensin. $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ ifadesi W_i raslantı değişkeni olarak tanımlansın.

$W_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \ i = 1, 2, ..., n$ olacaktır. **Teorem1'**e göre W_i raslantı değişkeninin karesi $W_i^2 \sim \chi_1^2, \ i = 1, 2, ..., n$ dağılımına sahip olur. Benzer şekilde Z raslantı değişkenin ($Z \sim N(0,1)$) karesi de $Z^2 \sim \chi_1^2$ dağılımına sahip olacaktır. O halde Y raslantı değişkeninin dağılımı,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} W_i^2 + Z^2 \sim \chi_n^2 + \chi_1^2$$

Teorem2'ye göre $\sum_{i=1}^{n} W_i^2 \sim \chi_n^2$ dağılımına sahip olacaktır. Y raslantı değişkeninde görüldüğü gibi aynı dağılımlı n+1 sayıda raslantı değişkeninin karelerinin toplamlarının($Y = W_1^2 + W_2^2 + ... + W_n^2 + Z^2$)dağılımı, **Teorem2'** den,

$$Y = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} W_i^2}_{\chi_n^2} + \underbrace{Z^2}_{\chi_1^2} \sim \chi_{n+1}^2$$ *n+1* serbestlik derecesiyle *Ki-Kare Dağılımı* olacaktır.

2. $N(10,50)$ olan normal dağılımdan 100 birimlik rasgele örneklem $X_1, X_2, ..., X_{100}$ olsun. $Z \sim N(0,1)$ ve X_i raslantı değişkenleri bağımsız olduğuna göre $Y = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{100}(X_i - 10)^2 + Z^2$ olarak tanımlanan Y raslantı değişkeninin dağılımı nedir?

Çözüm:

$Y = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{100}(X_i - 10)^2 + Z^2$ raslantı değişkeni $Y = \sum_{i=1}^{100}\left(\frac{X_i - 10}{\sqrt{50}}\right)^2 + Z^2$ olacak biçimde düzenlensin. $\frac{X_i - 10}{\sqrt{50}}$ ifadesi W_i raslantı değişkeni olarak tanımlansın.

$W_i = \frac{X_i - 10}{\sqrt{50}} \sim N(0,1),\ i = 1,2,...,100$ olacaktır. **Teorem1'**e göre W raslantı değişkeninin karesi $W_i^2 \sim \chi_1^2$ dağılımına sahip olur. Benzer şekilde Z raslantı değişkenin ($Z \sim N(0,1)$) karesi de $Z^2 \sim \chi_1^2$ dağılımına sahip olacaktır. O halde Y raslantı değişkeninin dağılımı,

$$Y = \sum_{i=1}^{100} W_i^2 + Z^2 \sim \chi_{100}^2 + \chi_1^2$$

Teorem2'ye göre $\sum_{i=1}^{100} W_i^2 \sim \chi_{100}^2$ dağılımına sahip olacaktır. Y raslantı değişkeninde görüldüğü gibi aynı dağılımlı 101 adet raslantı değişkeninin karelerinin toplamlarının($Y = W_1^2 + W_2^2 + ... + W_{100}^2 + Z^2$)dağılımı, **Teorem2'** den,

$Y = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} W_i^2}_{\chi_{100}^2} + \underbrace{Z^2}_{\chi_1^2} \sim \chi_{101}^2$ *101* serbestlik derecesiyle *Ki-Kare Dağılımı* olacaktır.

3. X_1, X_2, X_3, X_4 standart normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $Y = (X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2$ ise öyle bir α sabiti bulunuz ki $\alpha Y \sim \chi_2^2$ olsun.

Çözüm: $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0,1)$ <u>bağımsız</u> raslantı değişkenleri olarak verilmiştir. $\alpha Y \sim \chi_2^2$ olması için ilk olarak verilen Y eşitliğinde her iki taraf α sabiti ile çarpılsın. $\alpha Y = \alpha\left[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2\right]$ Ki-Kare teoremlerinden yararlanabilmek için $X_1 - X_2$ ve $X_3 - X_4$ 'ün dağılımlarının ne olduğu araştırılsın. Bunun için *Doğrusal birleşim* veya *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi* kullanılabilir.

I.yol: $W = X_1 - X_2$, $U = X_3 - X_4$ raslantı değişkenleri olsun. Normal dağılıma sahip raslantı değişkenlerinin doğrusal birleşimleri de Normal dağılıma sahip olacağından momentleri bulmak için *Doğrusal birleşim* kullanılabilir.

$W = X_1 - X_2$

$E(W) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0$

$V(W) = V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2$

$W \sim N(0,2)$

$U = X_3 - X_4$

$E(U) = E(X_3 - X_4) = E(X_3) - E(X_4) = 0$

$V(U) = V(X_3 + X_4) = V(X_3) + V(X_4) = 2$

$U \sim N(0,2)$

II.yol: $X \sim N(0,1)$ ise Moment Çıkaran fonksiyonunun $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ olduğu bilinmektedir. O halde $W = X_1 - X_2$ ve $U = X_3 - X_4$ raslantı değişkenlerinin dağılımı MÇF yöntemine göre,

$$M_W(t) = E\left(e^{Wt}\right) = E\left(e^{(X_1 - X_2)t}\right) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(-t) = e^{\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{2t^2}{2}} \Rightarrow \mu = 0, \sigma^2 = 2$$

olan $W \sim N(0,2)$ normal dağılıma sahip bir raslantı değişkenidir. Benzer işlemler $U = X_3 - X_4$ raslantı değişkeni için yapıldığında yine $U \sim N(0,2)$ normal dağılıma sahip bir raslantı değişkeni elde edilecektir. $W \sim N(0,2)$ ve $U \sim N(0,2)$ olarak dağılımları bulunduğuna göre Standartlaştırma yapılarak $N(0,1)$ dağılımlı yeni raslantı değişkenleri elde edilmelidir.

$\frac{W-0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$, $\frac{U-0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ olacaktır. **Teorem1** 'e göre bu raslantı değişkenlerinin kareleri 1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare Dağılımına sahip olacaktır.

$\left(\frac{W-0}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi_1^2$ ve $\left(\frac{U-0}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi_1^2$

Bu iki raslantı değişkenin toplamı **Teorem2'**ye göre 2 serbestlik derecesiyle Ki-Kare Dağılımına sahip olacaktır.

$$\left(\frac{W-0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U-0}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi_2^2$$

Düzenlenirse, $W = X_1 - X_2$ ve $U = X_3 - X_4$ olarak ifade edilmişti. Soruda α sabiti sorulmuştu. O halde

α , $\frac{(X_1 - X_2)^2}{2} + \frac{(X_3 - X_4)^2}{2} = \frac{1}{2}\left[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2\right]$ olduğundan $\frac{1}{2}$ olmalıdır.

4. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ standart normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $Y = \left(X_1 + X_2 + X_3\right)^2 + \left(X_4 + X_5 + X_6\right)^2$ ise öyle bir α sabiti bulunuz ki $\alpha Y \sim \chi_2^2$ olsun.

Çözüm: $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \sim N(0,1)$ <u>bağımsız</u> raslantı değişkenleri olarak verilmiştir. $\alpha Y \sim \chi_2^2$ olması için ilk olarak verilen Y eşitliğinde her iki taraf α sabiti ile çarpılsın. $\alpha Y = \alpha\left[\left(X_1 + X_2 + X_3\right)^2 + \left(X_4 + X_5 + X_6\right)^2\right]$ Ki-Kare teoremlerinden yararlanabilmek için $\left(X_1 + X_2 + X_3\right)$ ve $\left(X_4 + X_5 + X_6\right)$ 'ün dağılımlarının ne olduğu araştırılsın. Bunun için *Doğrusal birleşim* veya *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi* kullanılabilir. $W = X_1 + X_2 + X_3$ ve $U = X_4 + X_5 + X_6$ raslantı değişkenleri olsun. Dağılımları,

$W \sim N(0,3)$

$U \sim N(0,3)$

$\mu = 0, \sigma^2 = 3$ olan *Normal Dağılıma* sahip raslantı değişkenleridir. Ki-Kare Dağılımına geçiş yapabilmek için burada da standartlaştırma yapılarak Standart Normal Dağılıma sahip raslantı değişkeni elde edilmelidir.

$$\frac{W-0}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{U-0}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$$

olacaktır. **Teorem1** 'e göre bu raslantı değişkenlerinin kareleri 1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare Dağılımına sahip olacaktır.

$\left(\frac{W-0}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi_1^2$ ve $\left(\frac{U-0}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi_1^2$

Bu iki raslantı değişkenin toplamı **Teorem2'**ye göre 2 serbestlik derecesiyle Ki-Kare Dağılımına sahip olacaktır.

$$\left(\frac{W-0}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{U-0}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi_2^2$$

Düzenlenirse $W = X_1 + X_2 + X_3$ ve $U = X_4 + X_5 + X_6$ olarak ifade edilmişti. Soruda α sabiti sorulmuştu. O halde α, $\frac{\left(X_1 + X_2 + X_3\right)^2}{3} + \frac{\left(X_4 + X_5 + X_6\right)^2}{3} = \frac{1}{3}\left[\left(X_1 + X_2 + X_3\right)^2 + \left(X_4 + X_5 + X_6\right)^2\right]$ olduğundan $\frac{1}{3}$ olmalıdır.

5. $N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$ ve $N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$ olan kitlelerden 5'er birimlik rasgele örneklemler alınıyor. Bu durumda, $P\left(\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}} > 0.1\right)$ olması olasılığı nedir?

Çözüm: Sorunun çözümü için F dağılımının Ki-Kare Dağılımı ile ilişkisinin bilinmesi gerekmektedir. İlgili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem: $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ ve $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ dağılımlı iki raslantı değişkeni olsun. Buna göre,

$$\frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$$

olacaktır.

Sonuç: $N\left(\mu_1,\sigma_1^{\,2}\right)$ dağılımlı kitleden seçilmiş n_1, $N\left(\mu_2,\sigma_2^{\,2}\right)$ dağılımlı kitleden seçilmiş n_2 büyüklükte bağımsız iki örneklem olsun. **Teorem5'**e göre,

$$\frac{(n_1-1)S_1^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}} \sim \chi^2_{n_1-1} \text{ ve } \frac{(n_2-1)S_2^{\,2}}{\sigma_2^{\,2}} \sim \chi^2_{n_2-1}$$

raslantı değişkenleri bağımsızdır ve birincisi (n_1-1) serbestlik derecesiyle, ikincisi (n_2-1) serbestlik derecesiyle *Ki-Kare Dağılımı*na sahiptir. Yukarıda yer alan Teorem'e göre $\sigma_1^{\,2}=\sigma_2^{\,2}=\sigma^2$ varsayımı altında,

$$\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^{\,2}}{\sigma^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^{\,2}}{\sigma^2}\Big/(n_2-1)} = \frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}}$, (n_1-1) ve (n_2-1) serbestlik derecesiyle F dağılımına sahip olur.

$\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}} \sim F_{5-1,5-1}$, 4,4 serbestlik derecesiyle Teoreme göre F dağılımına sahiptir. $P\left(\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}} > 0.1\right) = 1 - P\left(\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}} \le 0.1\right)$ olacak şekilde işlem kolaylığı için düzenlensin.

Hatırlatma: $X \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, & x>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

şeklindedir.

$X=\dfrac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}}$ raslantı değişkeni olarak tanımlansın. O halde $X \sim F_{4,4}$ dağılımına sahip olacaktır. X raslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)\Gamma(2)}\left(\dfrac{4}{4}\right)^{\frac{4}{2}}\dfrac{x^{\frac{4}{2}-1}}{(1+x)^4}, & x>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

biçimindedir. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra soruda istenen olasılığın çözümü,

$$1-P\left(\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}}\le 0.1\right)=1-P\left(X\le 0.1\right)=1-\int_0^{0.1}6x(1+x)^{-4}dx$$

$\int_0^{0.1}6x(1+x)^{-4}dx$ integralin çözüm kolaylığı açısından değişken değiştirme yöntemi kullanılabilir. $u=(1+x)$ olsun ve diferansiyelleri $du=dx$ olacaktır. Sınırlar; alt sınırda $x=0$ için $u=1$, üst sınırda $x=0.1$ için $u=1.1$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}1-P\left(\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}}\le 0.1\right)=1-P\left(X\le 0.1\right)&=1-\int_1^{1.1}6(u-1)u^{-4}du\\ &=1-\left[6\left(\frac{u^{-2}}{-2}-\frac{u^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_1^{1.1}\right]\\ &=1-0.028\\ &=0.972\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

6. X_1, X_2, X_3, X_4 sırasıyla 0, 1, 0 ve 1 ortalama; 1, 1, 8 ve 25 varyans ile normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenlerinden yararlanarak,

a. χ_3^2 dağılımına sahip,

b. $F_{1,3}$ dağılımına sahip,

c. $F_{3,1}$ dağılımına sahip raslantı değişkenlerini oluşturunuz.

Çözüm: $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(1,1)$, $X_3 \sim N(0,8)$, $X_4 \sim N(1,25)$ Dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenlerinden yararlanabilmek için ilk olarak standartlaştırma işlemleri yapılsın. Daha sonra **Teorem1**' e göre elde edilen raslantı değişkenlerinin kareleri alınarak 1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare Dağılımına sahip yeni raslantı değişkenleri elde edilsin.

$$X_1 \sim N(0,1) \longrightarrow X_1^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_2 - 1}{\sqrt{1}} \sim N(0,1) \longrightarrow (X_2 - 1)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_3 - 0}{\sqrt{8}} \sim N(0,1) \longrightarrow \frac{X_3^2}{8} \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_4 - 1}{\sqrt{25}} \sim N(0,1) \longrightarrow \frac{(X_4 - 1)^2}{25} \sim \chi_1^2$$

a. χ_3^2 dağılımına sahip raslantı değişkeni, yukarıda elde edilen raslantı değişkenleri kullanılarak,

$$X_1^2 + (X_2 - 1)^2 + \frac{X_3^2}{8} \sim \chi_3^2$$

(**Teorem2**'ye göre) şeklinde elde edilebilir. χ_3^2 dağılımına sahip farklı raslantı değişkenleri de yazılabilir.

b. $F_{1,3}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni, F dağılımının Ki-Kare Dağılımı ile ilişkisinden,

$$\frac{X_1^{\,2}\big/1}{\left(\left(X_2-1\right)^2+\dfrac{X_3^{\,2}}{8}+\dfrac{\left(X_4-1\right)^2}{25}\right)\Big/3}\sim F_{1,3}$$

düzenlenirse,

$$\frac{600X_1^{\,2}}{200\left(X_2-1\right)^2+25X_3^{\,2}+8\left(X_4-1\right)^2}\sim F_{1,3}$$

(Teorem'e göre) şeklinde yazılabilir. Yine burada farklı raslantı değişkenleri yazılabilir.

c. $F_{3,1}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni, F dağılımın $F_{3,1}=\dfrac{1}{F_{1,3}}$ özelliğinden,

$$\frac{\left(\left(X_2-1\right)^2+\dfrac{X_3^{\,2}}{8}+\dfrac{\left(X_4-1\right)^2}{25}\right)\Big/3}{X_1^{\,2}\big/1}\sim F_{3,1}$$

düzenlenirse,

$$\frac{200\left(X_2-1\right)^2+25X_3^{\,2}+8\left(X_4-1\right)^2}{600X_1^{\,2}}\sim F_{3,1}$$

biçiminde yazılabilir.

7. X_1, X_2, X_3 sırasıyla 1, 2 ve 3 ortalama; 3, 4 ve 16 varyans ile normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. X_1, X_2, X_3 raslantı değişkenlerinden yararlanarak öyle bir Y raslantı değişkeni oluşturunuz ki $Y \sim F_{2,1}$ olsun.

Çözüm: $X_1 \sim N(1,3)$, $X_2 \sim N(2,4)$, $X_3 \sim N(3,16)$ Dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenlerinden yararlanabilmek için ilk olarak standartlaştırma işlemleri yapılsın. Daha sonra **Teorem1**' e göre elde edilen raslantı değişkenlerinin kareleri alınarak 1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare Dağılımına sahip yeni raslantı değişkenleri elde edilsin.

$$\frac{X_1-1}{\sqrt{3}} \sim N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_1-1}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_2-2}{\sqrt{4}} \sim N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_2-2}{\sqrt{4}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_3-3}{\sqrt{16}} \sim N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_3-3}{\sqrt{16}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$F_{2,1}$ dağılımına sahip Y raslantı değişkeni, yukarıda elde edilen raslantı değişkenleri kullanılarak,

$$Y = \frac{\left(\frac{X_1-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{X_2-2}{\sqrt{4}}\right)^2 \Big/ 2}{\left(\frac{X_3-3}{\sqrt{16}}\right)^2 \Big/ 1} \sim F_{2,1}$$

düzenlenirse,

$$Y = \frac{8\left(X_1-1\right)^2 + 6\left(X_2-2\right)^2}{3\left(X_3-3\right)^2} \sim F_{2,1}$$

(**Teorem**'e göre) şeklinde yazılabilir. Yine burada farklı raslantı değişkenleri yazılabilir.

8. $X_i \sim N(0,i^3),\ i=1,2,3$ olarak verilen bağımsız raslantı değişkenlerinden yararlanarak,

a. χ_3^2 dağılımına sahip,

b. $F_{1,2}$ dağılımına sahip raslantı değişkenlerini oluşturunuz.

Çözüm: $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,8)$, $X_3 \sim N(0,27)$ Dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenlerinden yararlanabilmek için ilk olarak standartlaştırma işlemleri yapılsın. Daha sonra **Teorem1**' e göre elde edilen raslantı değişkenlerinin kareleri alınarak 1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare Dağılımına sahip yeni raslantı değişkenleri elde edilsin.

$$X_1 \sim N(0,1) \longrightarrow X_1^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_2-0}{\sqrt{8}} \sim N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_2}{\sqrt{8}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_3-0}{\sqrt{27}} \sim N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_3}{\sqrt{27}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

a. χ_3^2 dağılımına sahip raslantı değişkeni, yukarıda elde edilen raslantı değişkenleri kullanılarak,

$$X_1^2+\frac{X_2^2}{8}+\frac{X_3^2}{27} \sim \chi_3^2$$ şeklinde elde edilir.

b. $F_{1,2}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni,

$$\frac{X_1^2/1}{\left(\frac{X_2^2}{8}+\frac{X_3^2}{27}\right)/2} \sim F_{1,2}$$

düzenlenirse,

$$\frac{432X_1^2}{27X_2^2+8X_3^2} \sim F_{1,2}$$

(**Teorem**'e göre) şeklinde yazılabilir.

9. X raslantı değişkeni λ parametresi ile üstel dağılıma sahip bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. $Y=\frac{2X}{\lambda} \sim \chi_2^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu sorunun çözümü iki farklı yoldan elde edilebilir. Birincisi *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi* ile İkincisi ise *c* ile elde edilebilir.

I.yol: *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi* ile,

$X \sim Üstel(\lambda)$ ise Moment Çıkaran fonksiyonunun $M_X(t)=(1-\lambda t)^{-1}$ olduğu bilinmektedir. Y raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t\frac{2X}{\lambda}}\right) = E\left(e^{X\frac{2t}{\lambda}}\right) = M_X\left(\frac{2t}{\lambda}\right)$$

$$= \left(1 - \lambda \frac{2t}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 - 2t\right)^{-1}$$

olduğuna göre $Y \sim \chi_2^2$ dağılımına sahiptir.

Hatırlatma: $X \sim \chi_\nu^2$ ise moment çıkaran fonksiyon $M_X(t) = \left(1 - 2t\right)^{-\nu/2}$'dir.

II.yol: *Dönüşüm Yöntemi* ile,

$X \sim \ddot{U}stel(\lambda)$ ise olasılık yoğunluk fonksiyonunun $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & \ddot{o}.d. \end{cases}$ olduğu bilinmektedir.

$Y = \frac{2X}{\lambda}$ raslantı değişkenin dağılımını bulmak için öncelikle ters dönüşüm fonksiyonu alınsın. $x = \frac{\lambda y}{2}$,

diferansiyelleri ise $dx = \frac{\lambda dy}{2}$ olup teoreme göre düzenlenirse, $\frac{dx}{dy} = \frac{\lambda}{2}$ olacaktır. $Y = \frac{2X}{\lambda}$ düzgün artan bir fonksiyon olduğuna göre, $g(y)$,

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(x)\frac{dx}{dy}$$

$$g(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda y}{2}\frac{1}{\lambda}} \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \ddot{o}.d. \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $Y \sim \chi_2^2$ dağılımına sahip olduğu gösterilir.

Hatırlatma: $X \sim \chi_\nu^2$ dağılımına sahip raslantı değişkeni olsun. Buna göre,olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \ddot{o}.d. \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

10. X_1, X_2, X_3, X_4 standart normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Buna göre, $c\dfrac{(X_1 - 2X_2)}{\sqrt{X_3^{\,2} + X_4^{\,2}}} \sim t_2$ dağılımına sahip olduğuna göre c sabitini bulunuz.

Çözüm: t dağılımı Standart Normal Dağılım ile Ki-Kare dağılımının bir kombinasyonudur.

$X \sim N(0,1)$ ve $Y \sim \chi^2_\nu$ dağılımlarına sahip bağımsız raslantı değişkenleri ise

$$T = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{\nu}}} \sim t_\nu \text{ ‘dir.}$$

$c\dfrac{(X_1 - 2X_2)}{\sqrt{X_3^{\,2} + X_4^{\,2}}}$ 2 serbestlik derecesiyle t dağılımına sahip olduğunu göstermek için ilk olarak pay ve paydanın dağılımları araştırılsın. $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0,1)$ olduğu biliniyor. $W = X_1 - 2X_2$ olarak tanımlansın. $W \sim N(0,5)$ Normal dağılıma sahip olduğu Doğrusal birleşimden veya MÇF yönteminden elde edilebilir. $X_3^{\,2} + X_4^{\,2} \sim \chi^2_2$ 2 serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılımına sahip olduğu Teorem2’ye göre söylenebilir. T dağılımına geçebilmek için W raslantı değişkeninin standartlaştırılması gerekmektedir.

$\dfrac{W-0}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$ olacaktır. Böylece c sabiti,

$$\frac{\dfrac{W-0}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\dfrac{X_3^{\,2} + X_4^{\,2}}{2}}} \sim t_2$$

düzenlenirse,

$$\frac{\dfrac{W-0}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\dfrac{X_3^{\,2} + X_4^{\,2}}{2}}} = \frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{X_3^{\,2} + X_4^{\,2}}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sim t_2$$

$c = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ olarak elde edilir.

11. $X_i \sim N(0,1),\ i=1,2,\ldots,5$ olan bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Buna göre, $a\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^{\,2}+X_4^{\,2}+X_5^{\,2}}} \sim t_3$ dağılımına sahip olduğuna göre a sabitini bulunuz.

Çözüm: $a\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^{\,2}+X_4^{\,2}+X_5^{\,2}}} \sim t_3$ 3 serbestlik derecesiyle t dağılımına sahip olduğunu göstermek için ilk olarak pay ve paydanın dağılımları araştırılsın. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \sim N(0,1)$ olduğu biliniyor. $W = X_1 + X_2$ olarak tanımlansın. $W \sim N(0,2)$ Normal dağılıma sahip olduğu Doğrusal birleşimden veya MÇF yönteminden elde edilebilir. $X_3^{\,2}+X_4^{\,2}+X_5^{\,2} \sim \chi_3^2$ 3 serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılımına sahip olduğu **Teorem2**'ye göre söylenebilir. T dağılımına geçebilmek için W raslantı değişkeninin standartlaştırılması gerekmektedir.

$\dfrac{W-0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ olacaktır. Böylece a sabiti,

$$\frac{\dfrac{W-0}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{X_3^{\,2}+X_4^{\,2}+X_5^{\,2}}{3}}} \sim t_3$$

düzenlenirse,

$$\frac{\dfrac{W-0}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{X_3^{\,2}+X_4^{\,2}+X_5^{\,2}}{3}}} = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^{\,2}+X_4^{\,2}+X_5^{\,2}}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sim t_3$$

$a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ olarak elde edilir.

12. $X_i, i=1,2,...,6$ bağımsız raslantı değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$M_{X_i}(t)=(1-2t)^{-i/2}$$

a. $X_1+X_2+X_3+X_4$ raslantı değişkeninin dağılımını bulunuz. Kullandığınız kuramsal bilgiyi belirtiniz.

b. $F_{20,1}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni oluşturunuz.

c. $X_7 \sim N(5,10)$ normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenini de kullanarak t_{16} dağılımına sahip raslantı değişkeni oluşturunuz.

Çözüm: $X_i, i=1,2,...,6$ bağımsız raslantı değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonu $M_{X_i}(t)=(1-2t)^{-i/2}$ olarak verilmiştir. O halde, X_i raslantı değişkenleri Ki-Kare dağılımına sahiptir.

X_1 raslantı değişenin moment çıkaran fonksiyonu, $M_{X_1}(t)=(1-2t)^{-1/2}$ olduğuna göre $X_1 \sim \chi_1^2$ dağılımına sahiptir. Diğerleri de sırasıyla, $X_2 \sim \chi_2^2, X_3 \sim \chi_3^2, X_4 \sim \chi_4^2, X_5 \sim \chi_5^2, X_6 \sim \chi_6^2$ dağılımına sahip olacaktır.

a. <u>I.yol:</u> $X_1+X_2+X_3+X_4=\sum_{i=1}^{4} X_i$ dağılımını bulmak için **Teorem3'**ten yararlanılabilir. O halde ,

$$\underset{\chi_1^2}{X_1}+\underset{\chi_2^2}{X_2}+\underset{\chi_3^2}{X_3}+\underset{\chi_4^2}{X_4}=\sum_{i=1}^{4} X_i \sim \chi_{10}^2$$ 10 serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılımına sahiptir.

<u>II.yol:</u> Moment Çıkaran Fonksiyon yönteminden yararlanılarak dağılım bilgisi elde edilebilir. Bağımsız raslantı değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonu $M_{X_i}(t)=(1-2t)^{-i/2}$ olarak verilmişti. $W=X_1+X_2+X_3+X_4$ olarak tanımlansın. W raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
M_W(t)=E\left(e^{Wt}\right)=E\left(e^{(X_1+X_2+X_3+X_4)t}\right)&=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)M_{X_3}(t)M_{X_4}(t)\\
&=(1-2t)^{-1/2}(1-2t)^{-2/2}(1-2t)^{-3/2}(1-2t)^{-4/2}\\
&=(1-2t)^{-10/2}
\end{aligned}$$

olacaktır. Böylece $W=X_1+X_2+X_3+X_4$'nun 10 serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılımına sahip olduğu görülür.

b. F dağılımına sahip raslantı değişkeni, Teoreme göre Ki-kare dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenlerinin serbestlik derecelerine bölümlerinin oranı biçiminde yazılabiliyordu. O halde pay 'da 20 serbestlik derecesiyle Ki-kare dağılımına sahip raslantı değişkeni oluşturulmalı, payda da ise 1 serbestlik derecesine sahip raslantı değişkeni yer almalıdır. $F_{20,1}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni,

$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \sim \chi^2_{20}$ (**Teorem3'**e göre)

$X_1 \sim \chi^2_1$

$$\frac{X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6/20}{X_1/1} \sim F_{20,1}$$

düzenlenirse,

$$\frac{X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{20X_1} \sim F_{20,1}$$

şeklinde elde edilir.

c. t dağılımına sahip raslantı değişkeni, Teoreme göre standart normal dağılıma sahip raslantı değişkeni ile Ki-kare dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkeninin serbestlik derecesine bölümünün kareköküne oranı biçiminde yazılabiliyordu. O halde pay' da standart normal dağılımına sahip raslantı değişkeni yer almalı , payda da ise 16 serbeslik derecesi ile Ki-Kare dağılımına sahip raslantı değişkeni yer almalıdır. t_{16} dağılımına sahip raslantı değişkeni,

$X_7 \sim N(5,10)$ ise $\frac{X_7 - 5}{\sqrt{10}} \sim N(0,1)$ 'dir.

$X_1 + X_4 + X_5 + X_6 \sim \chi^2_{16}$ (**Teorem3'**e göre)

$$\frac{\frac{X_7 - 5}{\sqrt{10}}}{\sqrt{\frac{X_1 + X_4 + X_5 + X_6}{16}}} \sim t_{16}$$

düzenlenirse,

$$\frac{4\left(X_7 - 5\right)}{\sqrt{10\left(X_1 + X_4 + X_5 + X_6\right)}} \sim t_{16}$$

şeklinde elde edilir.

13. $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim \chi_1^2$ ve $X_3 \sim \chi_4^2$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Bu raslantı değişkenlerinden yararlanarak,

a. $F_{5,1}$ dağılımına sahip raslantı değişkenini oluşturunuz.

b. χ_6^2 dağılımına sahip raslantı değişkenini oluşturunuz.

c. $P\left(X_1 > 1.376\sqrt{X_2}\right)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

a. $F_{5,1}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni,

$X_1 \sim N(0,1)$ ise $X_1^2 \sim \chi_1^2$'dir. (**Teorem1**'e göre)

$X_2 \sim \chi_1^2$, $X_3 \sim \chi_4^2$ ise $X_2 + X_3 \sim \chi_5^2$'dir. (**Teorem3**'e göre)

$$\frac{X_2 + X_3/5}{X_1^2/1} \sim F_{5,1}$$

düzenlenirse,

$$\frac{X_2 + X_3}{5X_1^2} \sim F_{5,1}$$

şeklinde elde edilir.

b. χ_6^2 dağılımına sahip raslantı değişkeni,

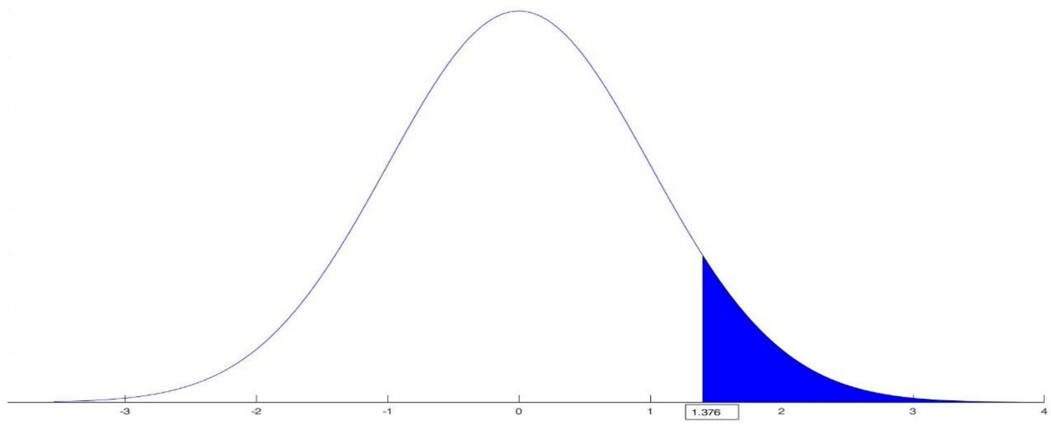
$X_1^2 \sim \chi_1^2$, $X_2 \sim \chi_1^2$, $X_3 \sim \chi_4^2$ olduğuna göre, $X_1^2 + X_2 + X_3 \sim \chi_6^2$ şeklinde elde edilir.

c. $P\left(X_1 > 1.376\sqrt{X_2}\right)$ olasılığı $P\left(\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2}} > 1.376\right)$ şeklinde düzenlensin. Burada $\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2}}$ ifadesi T raslantı değişkeni olarak tanımlansın.

$T = \dfrac{X_1}{\sqrt{X_2}}$ dikkat edilirse, $X_1 \sim N(0,1)$ iken $X_2 \sim \chi_1^2$ dağılımlarına sahiptir. O halde T,

$$T = \frac{X_1}{\sqrt{\dfrac{X_2}{1}}} \sim t_1$$

1 serbestlik derecesiyle t dağılımına sahiptir. $P(T > 1.376) = 0.20$ olasılığını bulmak için tablodan yararlanılabilir.



14. $N(\mu,100)$ normal dağılımdan n=2 birimlik rasgele örneklem olsun. S^2 örneklem varyansı olmak üzere $Y=\dfrac{S^2}{100}$ 'ün olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $Y=\dfrac{S^2}{100}$ 'ün olasılık yoğunluk fonksiyonu bulmak için **Teorem5** : $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$ kullanılabilir. Soruda $n=2$, $\sigma^2=100$ olarak verilmiştir. O halde,

$$Y=\frac{(2-1)S^2}{100}=\frac{S^2}{100}\sim\chi^2_1$$

Y raslantı değişkeni 1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılımına sahiptir. Buradan $f(y)$,

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{1/2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

15. $N(\mu,50)$ normal dağılımdan n=100 birimlik rasgele örneklem olsun. S^2 örneklem varyansı olmak üzere $E(S^2)$ ve $V(S^2)$'yi bulunuz. Yararlandığınız kuramsal bilgiyi belirtiniz.

Çözüm: $E(S^2)$ ve $V(S^2)$ 'yi bulmak için **Teorem5** : $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ kullanılabilir.

Hatırlatma: $X \sim \chi^2_\nu$ dağılımına sahip raslantı değişkenin beklenen değer ve varyansı: $E(X)=\nu$, $V(X)=2\nu$'dür.

$$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=n-1 \qquad V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2}E(S^2)=n-1 \qquad \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}V(S^2)=2(n-1)$$

$$E(S^2)=\sigma^2 \qquad V(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

olacaktır. Soruda $\sigma^2=50$, $n=100$ olarak verildiğine göre, $E(S^2)=50$ ve $V(S^2)=\dfrac{2(50^2)}{100-1}=50.505$

olarak bulunur.

16. $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2_5$ ve $Z \sim \chi^2_9$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Bu raslantı değişkenlerinden yararlanarak,

a. $F_{1,14}$ dağılımına sahip raslantı değişkenini oluşturunuz.

b. χ^2_{10} dağılımına sahip raslantı değişkenini oluşturunuz.

c. $P\left(X>0.611\sqrt{Z}\right)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

a. $F_{1,14}$ dağılımına sahip raslantı değişkeni,

$X \sim N(0,1)$ ise $X^2 \sim \chi^2_1$'dir. (**Teorem1**'e göre)

$Y \sim \chi^2_5$, $Z \sim \chi^2_9$ ise $Y+Z \sim \chi^2_{14}$'dir. (**Teorem3**'e göre)

$$\frac{X^2/1}{Y+Z/14} \sim F_{1,14}$$

düzenlenirse,

$$\frac{14X^2}{Y+Z} \sim F_{1,14}$$

şeklinde elde edilir.

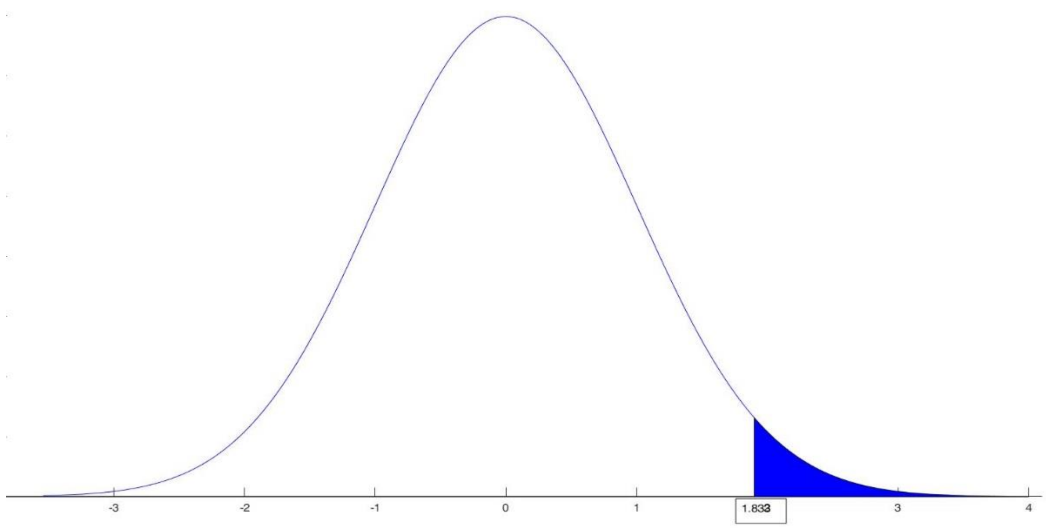
b. χ^2_{10} dağılımına sahip raslantı değişkeni,

$X^2 \sim \chi^2_1$, $Z \sim \chi^2_9$ olduğuna göre, $X^2 + Z \sim \chi^2_{10}$ şeklinde elde edilir.

c. $P\left(X > 0.611\sqrt{Z}\right)$ olasılığı $P\left(\frac{X}{\sqrt{Z}} > 0.611\right)$ şeklinde düzenlensin ve her iki taraf 3 ile çarpılsın. $P\left(3\frac{X}{\sqrt{Z}} > 1.833\right)$ olacaktır. Bunun yapılmasının sebebi t dağılımından yararlanabilmektir. Çünkü, $X \sim N(0,1)$ dağılımına, $Z \sim \chi^2_9$ dağılımına sahiptir. Böylece,

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Z}{9}}} \sim t_9$$

9 serbestlik derecesiyle t dağılımına sahiptir. $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Z}{9}}}$ olarak tanımlansın. $P(T > 1.833) = 0.05$ olasılığını bulmak için tablodan yararlanılabilir.



17. X_i, $i = 1, 2, ..., 25$ bağımsız aynı dağılıma sahip ve varyansı S^2 olan raslantı değişkenlerine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{5}\right)^2\right], & -\infty < x_i < +\infty \\ 0, & ö.d \end{cases}$$

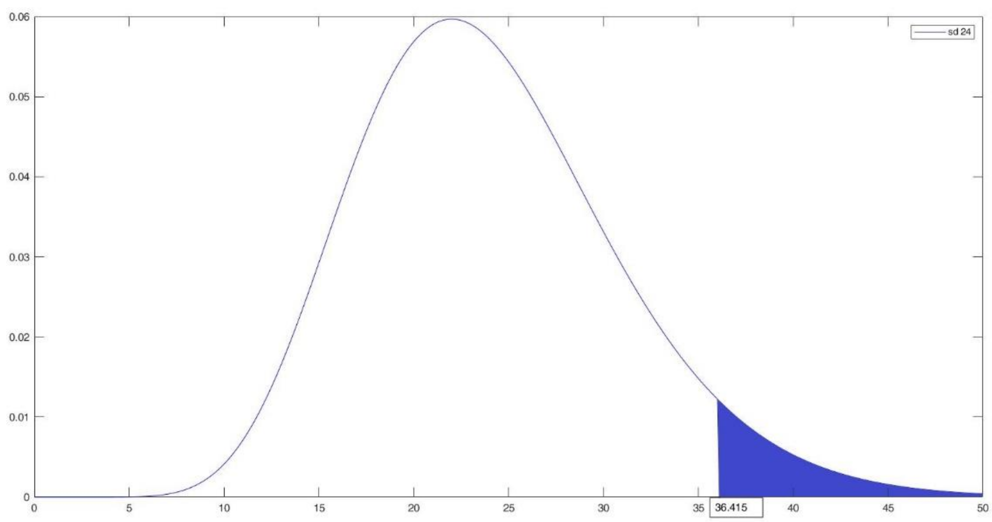
Buna göre, $P\left(S^2 > b\right) = 0.05$ ise b'yi bulunuz.

Çözüm: $X_i,\ i=1,2,\ldots,25 \sim N(\mu,25)$ raslantı değişkenlerinin normal dağılıma sahip olduğu görülmektedir. $n=25$, $\sigma^2=25$ olduğuna göre **Teorem5 '**e göre örneklem varyansı S^2 için,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{(25-1)S^2}{25} \sim \chi^2_{25-1}$$

$Y=\dfrac{24S^2}{25}$ raslantı değişkeni olarak tanımlansın. Y raslantı değişeninin 24 serbestlik derecesiyle ki-kare dağılımına sahip olduğu görülmektedir. $P\left(S^2>b\right)=0.05$ olasılığı eldeki bilgilere göre, $P\left(Y>\dfrac{24}{25}b\right)=0.05$ şeklinde düzenlensin. b değerinin bulunması için tablo değerine bakılmalıdır. Tabloda 0.05 olasılıkla 24 serbestlik derecesine karşılık gelen değerin 36.415 olduğu görülmektedir. O halde, $\dfrac{24}{25}b=36.415,\quad b\cong 37.9323$ olarak elde edilir.



18. $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ bağımsız raslantı değişkenlerine ait moment çıkaran fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$M_{Z_i}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

a. $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + n\overline{Z}^2$ olduğunu gösteriniz.

b. $\sqrt{n}\,\overline{Z}$'nın dağılımını bulunuz.

c. $P\left(n\overline{Z}^2 > 5.024\right)$ olasılığını hesaplayınız.

d. $\sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2$ ve $n\overline{Z}^2$ raslantı değişkenlerinin bağımsız olduğu biliniyor. Buna göre $\sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2$ raslantı değişkeninin dağılımını bulunuz.

Çözüm: $Z_i \sim N(0,1), \quad i = 1, 2, ..., n$ olduğu görülmektedir.

a. $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + n\overline{Z}^2$ eşitliğin sol tarafının sağ tarafına eşit olduğu aşağıdaki gibi gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(Z_i - \overline{Z}\right) + \overline{Z}\right]^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + 2\left(Z_i - \overline{Z}\right)\overline{Z} + \overline{Z}^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + 2Z_i\overline{Z} - 2\overline{Z}^2 + \overline{Z}^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + 2Z_i\overline{Z} - \overline{Z}^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + 2\overline{Z}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Z_i}_{n\overline{Z}} - n\overline{Z}^2 \qquad \overline{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Z_i = n\overline{Z} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + n\overline{Z}^2
\end{aligned}$$

b. $\sqrt{n}\,\overline{Z}$'nın dağılımını bulmak için Moment çıkaran fonksiyon yöntemi kullanılabilir. $\overline{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} \Rightarrow \sqrt{n}\,\overline{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}}$ 'dir. $V = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}}$ raslantı değişkeni olarak tanımlansın. V raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_V(t) = E\left(e^{Vt}\right) = E\left(e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}} t} \right) = E\left(e^{(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)\frac{t}{\sqrt{n}}} \right) = M_{Z_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) M_{Z_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \ldots M_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= e^{\frac{t^2}{2n}} e^{\frac{t^2}{2n}} \ldots e^{\frac{t^2}{2n}}$$

$$= e^{n\frac{t^2}{2n}}$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad V \sim N(0,1)$$

olarak elde edilir. $V = \sqrt{n}\overline{Z} \sim N(0,1)$ dağılımına sahip olduğu görülmektedir.

c. $P\left(n\overline{Z}^2 > 5.024\right)$ olasılığını hesaplamak için $n\overline{Z}^2$ ‘nin dağılımı araştırılsın. $V = \sqrt{n}\overline{Z}$ olarak tanımlanmıştı. O halde her iki tarafın karesi alınırsa, $V^2 = n\overline{Z}^2$ olacaktır. $V \sim N(0,1)$ dağılıma sahip olduğuna göre **Teorem1’**e göre, $V^2 \sim \chi_1^2$ dağılımına sahip olacaktır. $P\left(V^2 > 5.024\right) = 0.025$ olarak elde edilir.

d. $W = \sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2$ olarak tanımlansın. A şıkkında $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + n\overline{Z}^2$ eşitliği ispatlanmıştı.

Sorunun c şıkkında ise $V^2 = n\overline{Z}^2$ olarak ifade edilmişti. $U = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ raslantı değişkeni olarak gösterilsin.

O halde, $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 + n\overline{Z}^2$ eşitliği $U = W + V^2$ şeklinde olacaktır. W ve V^2 raslantı değişkenlerinin *__bağımsız__* olduğu bilgisi dahilinde W ’nun dağılımı,

$$U = W + V^2$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \Rightarrow \underset{\chi_1^2}{Z_1^2} + \underset{\chi_1^2}{Z_2^2} + \ldots + \underset{\chi_1^2}{Z_n^2} \sim \chi_n^2$$ (**Teorem2** ‘ye göre)

$V^2 \sim \chi_1^2$ (**Teorem1’** e göre) olduğu c şıkkında ifade edildi.

$$\underset{\chi_n^2}{U} = \underset{\chi_{n-1}^2}{W} + \underset{\chi_1^2}{V^2}$$

$W \sim \chi_{n-1}^2$ n-1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılımı olacaktır.

19. $X \sim N(0,1)$ ve $Y \sim \chi_1^2$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. Buna göre,

- **a.** t_1 dağılımına sahip raslantı değişkeni oluşturunuz.
- **b.** Bulduğunuz raslantı değişkenin 6.314'ten küçük olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

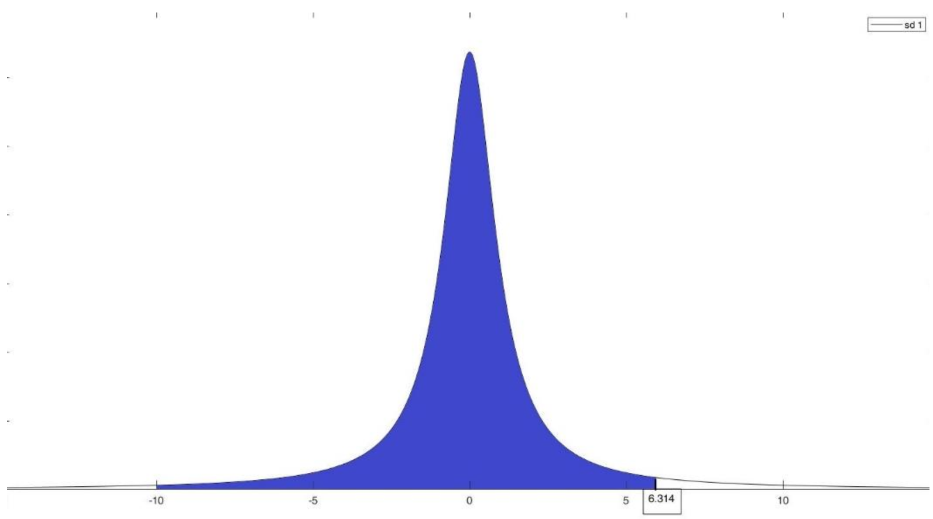
a. t_1 dağılımına sahip raslantı değişkeni,

$X \sim N(0,1)$ ve $Y \sim \chi_1^2$ dağılımlarına sahip bağımsız raslantı değişkenleri ise

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{1}}} \sim t_1 \text{ 'dir.}$$

$T = \dfrac{X}{\sqrt{Y}}$ raslantı değişkeni, 1 serbestlik derecesiyle t dağılımına sahip olacaktır.

b. $P\left(T < 6.314\right) = 0.95$ olasılığını bulmak için t tablosu kullanılabilir. 1 serbestlik derecesiyle 6.314'e karşılık gelen olasılık değerinin $1 - P\left(T < 6.314\right) = P\left(T > 6.314\right) = 0.05$ olduğu görülmektedir.



20. $X_i \sim N(0,\sigma^2)$ $i = 1,2,\ldots,n$ n=10 birimlik rasgele örneklem olsun. S^2 örneklem varyansı olmak üzere $\dfrac{10\overline{X}^2}{S^2} \sim F_{1,9}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ olduğu biliniyor. Soruda verilen bilgilere göre $\overline{X} \sim N(0, \dfrac{\sigma^2}{10})$ olacaktır. F dağılımı ile ilgili Teorem' e göre,

$\dfrac{\overline{X}-0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{10}}} \sim N(0,1)$ (**Teorem1**'e göre), $\dfrac{\overline{X}^2}{\dfrac{\sigma^2}{10}} = \dfrac{10\overline{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$ 'dir.

$\dfrac{(10-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_9^2$ (**Teorem5**'e göre)

$$\frac{\dfrac{10\overline{X}^2}{\sigma^2}\Big/1}{\dfrac{(10-1)S^2}{\sigma^2}\Big/9} \sim F_{1,9}$$

Düzenlenirse, $\dfrac{10\overline{X}^2}{S^2} \sim F_{1,9}$ olduğu görülmektedir.