HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

SAYMA KURALLARI ve BAZI ÖNEMLİ EŞİTSİZLİKLER

Doç.Dr. Yasemin Kayhan Atılgan (Şube 01)
Doç.Dr. Derya Ersel (Şube 02)

SAYMA KURALLARI

- Olasılık hesaplamalarında çoğu zaman bir denemenin olası tüm sonuçlarının sayısının bilinmesi önemli bir konudur.
- Bir çok denemede ise gözlemlenen sonuçların sayısı çok büyük sayıda olabilir ve sonuçların kesin sayısını belirlemek karmaşıklaşabilir.
- Bu bölümde bir rasgele denemenin ilgilenilen sonuçlarının gözlemlenme sayılarının belirlenmesinde kullanılan yararlı sayma teknikleri üzerinde durulacaktır.

SAYMA KURALLARI

- Olasılık problemlerinde bir durumun olası tüm farklı sonuçlarının sayısının belirlenmesinde sıklıkla kullanılan üç sayma kuralı vardır:

  Temel sayma kuralı – Permütasyon - Kombinasyon
- Temel Sayma kuralını bir örnek üzerinden açıklayalım: Bir kişi sabah işe giderken 3 gömlek ve iki pantolon arasından seçim yapacaktır. Bu kişi kaç farklı şekilde giyinebilir diye düşündüğümüzde 3.2=6 farklı kombin yapabileceğini söyleyebiliriz.

Bu durum aşağıdaki gibi genellenebilir.

TEOREM(1): İki adımdan oluşan bir sürecin ilk adımı n_1 farklı şekilde, ikinci adımı da n_2 farklı şekilde gerçekleştirilebiliyor ise tüm süreç $n_1.n_2$ farklı şekilde gerçekleştirilebilir. Eğer süreç k adım içeriyor ve her adım $n_j,\ j=1,2,\ldots,k$ farklı şekilde gerçekleştirilebiliyor ise tüm süreç $n_1.n_2\ldots n_k=\prod_{j=1}^{k} n_j$ farklı şekilde gerçekleştirilebilir.

ÖRNEK: Bir sürücünün rotası üzerince 3 farklı şehir olduğunu düşünelim. Sürücü A şehrinden B şehrine 5 farklı yoldan B şehrinden de C şehrine 10 farklı yoldan gidebiliyor ise, sürücü A şehrinden C şehrine kaç farklı şekilde gidebilir hesaplayınız.

Çözüm: Sürücü A şehrinden B şehrine $n_1=5$ farklı yoldan, B şehrinden de C şehrine $n_2=10$ farklı yoldan gidebildiğine göre sürücü C şehrine $n_1.n_2=5.10=50$ farklı şekilde gidebilir.

n farklı nesnenin kaç farklı biçimde sıralanacağı sorusu ele alınsın. Daha detaylı açıklayacak olursak n tane kutuya n nesnenin kaç farklı biçimde yerleştirilebileceğini hesaplamak isteyelim. Birinci kutu için n farklı seçim yapılabilir, ikinci kutu için (n-1) farklı seçim olacaktır. Üçüncü kutuya (n-2) farklı nesne kalacaktır ve bu şekilde devam ettirildiğinde, çarpım kuralı kullanılarak farklı seçim sayısı, $n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)=n!$ biçiminde hesaplanır. Burada kullanılan $n!$ gösterimi n-faktoriyel şeklinde okunur.

ÖRNEK: Bir rafa 6 farklı kitap kaç farklı şekilde yerleştirilebilir hesaplayınız..

Çözüm: İlk sıraya 6 kitapdan herhangi biri koyulabilir, ikinci sıraya 5 seçim kalır. Daha sonra üçüncü. sıraya 4 kitapdan biri seçilebilir ve seçim bu şekilde devam ettirildiğinde, $n!=6!=(5)(4)(3)(2)(1)=720$ farklı sırada yerleştirme yapılabilir.

Rasgele denemenin olası sonuçları sayılırken iki farklı sayma tekneği üzerinde durulur. Belli sayıdaki nesnelerin tamamının ya da içerisindeki belli sayıdaki bir kısmının kaç farklı biçimde seçilebileceğinin / sıralabileceğinin araştırıldığında bu konu bizi Permütasyon ve Kombinasyon kavramlarına götürür. Permütasyon, seçim sırasının önemli olduğu durumlarda, Kombinasyon ise seçilme sırasının önemli olmadığı durumlarda kullanılır. Şimdi bu tanımları daha detaylı ele alalım.

TANIM 1: n farklı nesnenin belirli bir sıradaki düzenine permütasyon adı verilir. n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı (farklı dizilimlerinin sayısı) ise $n!$ biçiminde hesaplanır.

TANIM 2: n nesnenin içerisinde p tanesi belirli bir özelliğe sahip geri kalanları ise farklı nesneler olsun. Bu durumda n nesnenin permütasyonlarının sayısı $\frac{n!}{p!}$ biçiminde hesaplanır.

TANIM 3: n nesnenin içerisinde p_1 tanesi 1. tip özelliğe, p_2 tanesi 2. tip özelliğe ve ... p_k tanesi de k. tip özelliğe sahip olsun. Bu durumda n objenin permütasyonlarının sayısı, $\frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_k!}$ şeklinde hesaplanır.

TANIM 4: n farklı nesneden seçilen k sayıdaki nesnenin $0<k\leq n$ farklı sıralanma sayısı ise $P(n,k)$ ile hesaplanır ve aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$P(n,k)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

ÖRNEK: A,B,C, D harflerinde 3 elemanlı kaç farklı sıralama yapılabilir hesaplayınız.

Çözüm: Olası tüm farklı sıralar şu şekildedir:

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
BCD	BDC	CDB	CDB	DBC	DCB

Burada dikkat etmemiz gereken konu ABC, ACB sıralanmasının elemanlarının aynı olmasına rağmen permütasyon hesabında bunların farklı sayılmasıdır. Permütasyonda sıra önemlidir konusu bu örnekte açık olarak görülmektedir. Sonuç olarak bu soru için

$n=4,\ k=3 \Rightarrow P(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!}=24$ farklı sıralama söz konudur. Aynı soruyu çarpım kuralını kullanarak da çözmek mümkündür. İlk seçim 4 farklı biçimde, ikinci seçim 3 farklı seçimde üçüncü seçim ise 2 farklı biçimde gerçekleştirilebileceğinden, 4.3.2=24 elde edilir.

Birçok olasılık hesabında ise permütasyonun aksine seçilen nesnelerin sıralamasından ziyade seçimi önemlidir.

TANIM 5: n farklı nesneden k tanesinin sıralama önemli olmaksızın seçim sayısı kombinasyon ile hesaplanır. Kombinasyon $C(n,k)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n nesneden çekilen k kombinasyon, bu nesnelerin k elemanlı bir alt kümesidir ve permütasyonda nesnelerin sıralaması dikkate alınırken kombinasyonda bu sıralama önemli değildir. Bir önceki örneğe geri dönecek olursak, kombinayon hesabında ABC, ACB aynı olacaktır. Dolayısıyla aynı soruda 3 harflı kombinasyonları,

ABC ABD ACD BCD

olacaktır. $n=4,\ k=3 \Rightarrow C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$ olarak hesaplanır.

Dikkat edildiğinde permütasyon ve kombinasyon arasında $P(n,k) = k!C(n,k)$ ilişkisi vardır. $C(n,k)$ gösterimi n nesneden k tanesinin seçildiğini ifade eder. Seçilen bu k nesne ise k! biçimde farklı sıralanabilir. Dolayısıyla verilen ilişki bu tanımı ifade etmektedir.

(ABC)	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
(ABD)	ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
(ACD)	ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
(BCD)	BCD	BDC	CDB	CDB	DBC	DCB

TANIM 5 ile verilen $\binom{n}{k}$ sayısı Binom katsayıları olarak adlandırılır, çünkü bu değer Binom açılımında karşımıza çıkar.

BİNOM AÇILIMI:

Herhangi bir pozitif n sayısı için $(x+y)^n$ çarpımı aşağıdaki gibi Binom açılımı ile hesaplanabilir

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,\mathrm{k}) x^{n-k} y^k$$

Bu açılımda, k tane y'yi ve n-k tane x'i içeren terim $x^{n-k}y^k$ biçimindedir ve bu terimlerin katsayısı $C(n,\mathrm{k})$ ile bulunur.

Aşağıda verilen eşitliklerin basit işlemler ile sağlandığını gösteriniz:

- $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}.\frac{(n-k+1)}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}.\frac{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- $n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$

$$n\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \frac{n!}{(n-1-k)!k!} = (k+1)\frac{n!}{(n-1-k)!k!(k+1)} = (+1)\binom{n}{k+1}$$

Binom katsayıları hesaplanırken çoğunlukla faktoriyel işlemlerinin devreye girdiği görülmektedir. Bazen bu faktoriyel işlemleri hesaplanabilsede n değeri büyüdüğünde faktoriyel işlemleri karmaşıklaşabilir ve hesaplanması güçleşebilir. Bu gibi durumlarda anlamlı sonuçlara ulaşmak için faktoriyel hesaplamalarında yakınsamalar kullanılabilir. Stirling's formülü, n! Hesabında güzel bir yakınsama sağlayan ve sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Ancak bu formülü tanımlamadan önce Taylor seri açılımının tanımlanması daha faydalı olacaktır.

TANIM 6: Taylor serisi, bir fonksiyonun belirli bir noktadaki türevini sonlu seri toplamı biçiminde hesaplamaya olanak veren bir kuvvet serisi olarak tanımlanabilir. f fonksiyonunun r. derecen türevinin tanımlı olduğunu düşünelim, bu durumda fonksiyonun bir a sabitine göre r. dereceden polinomial açılımı Taylor açılımı olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

burada $f^{(n)}(a)$ ifadesi f fonksiyonun a noktasındaki n. Dereceden türevinin ifade eder. Taylor seri açılımında özel olarak a noktası 0 alınırsa yani $a=0$ alınırsa Maclaurin serisi elde edilir ve bu özel seri aşağıdaki gibi tanımlanır

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x)^3+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

ÖRNEK: e^x fonksiyonunun $a=0$ noktasındaki Taylor açılımını (Maclaurin) yazınız.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1 \\ f''(x)=e^x \Rightarrow f''(0)=1 \\ f'''(x)=e^x \Rightarrow f''(0)=1 \\ \vdots \end{array}\right\} \begin{aligned} e^x &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x)^3+\ldots \\ &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

TANIM 7: n yeterince büyük ise Stirling's Formulü'ne göre $n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ biçiminde hesaplanır. Bu formülün çıkarsamasına burada yer verilmeyecek olsa da aşağıdaki yakınsama formülün ispatında kolaylık sağlamaktadır,

$\log n! = \sum_{k=1}^{n}\log k \approx \int_1^n \log t dt = (t\log t - t)\Big|_1^n$ bu durumda, $\log n! \approx n\log n$ ya da $n!\approx n^n e^{-n}$ olarak yazılabilir.

BAZI ÖNEMLİ EŞİTSİZLİKLER

1. MARKOV EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde olasılık, istatistik, matematiksel istatistik, hipotez testleri ve stokastik süreçler gibi çıkarsamalı istatistik alanında sıklıkla kullanılan temel eşitsizlikler hakkında bilgi verilecektir. Bu eşitsizlikler genellikle, hesaplanması güç olasılıklar ve momentler için bir alt ve üst sınır bulmada kullanılır.

Teorem: $X\geq 0$, bir raslantı değişkeni g fonksiyonu da $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ biçiminde tanımlı negatif değerler almayan bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon>0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$P(g(X)\geq\varepsilon)\leq\frac{E(g(X))}{\varepsilon}$$

2. CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ

Markov Eşitsizliği'nin önemli bir sonucu, olasılık ve istatistikte sıklıkla kullanılan ve bir raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonuna bağlı olmadan onun sadece varyansını kullanarak kendi ortalamasından ne kadar sapma gösterdiğine ilişkin olasılığın alt ya da üst sınırını belirlemede kullanılan Chebyshev Eşitsizliği'dir. X bir raslantı değişkeni, $g(x)=\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$, $\mu=E(X)$, $\sigma^2=V(X)$ olarak tanımlansın. Ayrıca, $\varepsilon=h^2$ olsun. Bu durumda Markov Eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P\left(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\geq h^2\right)\leq\frac{1}{h^2}E\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}=\frac{1}{h^2}$$

$$P(|X-\mu|>h\sigma)=P\left(|X-\mu|^2>h^2\sigma^2\right)=P\left(\frac{|X-\mu|^2}{\sigma^2}>h^2\right)$$

$$=P\left(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}>h^2\right)=P\left(g(X)>h^2\right)\leq\frac{E(g(X))}{k^2}=\frac{1}{k^2}$$

3. CAUCHY EŞİTSİZLİĞİ

X ve Y raslantı değişkenleri için,

$E(X^2)<\infty$ ve $E(Y^2)<\infty$ olmak üzere $[E(XY)]^2\leq E(X^2)E(Y^2)$ yazılabilir.

k sabit bir sayı olmak üzere $P(Y=kX)=1$ koşulu altında Cauchy Eşitsizliği'nin iki özel durumu:

a) X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu,
$P(X=a_i, Y=b_j)=\delta_{ij}/n \quad (i,j=1,\ldots,n)$
$\left(\sum a_i b_j\right)^2\leq\sum a_i^2\sum b_j^2$

b) X ve Y raslantı değişkenleri $U(a,b)$ uniform dağılıma sahip olmak üzere,
$\left(\int_a^b uv\,dx\right)^2\leq\int_a^b u^2\,dx\int_a^b v^2\,dx$ yazılabilir.

4. CAUCHY SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ

X ve Y iki raslantı değişkeni ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere Hölder's eşitsizliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$|E(XY)|\leq E|XY|\leq\left(E|X|^p\right)^{1/p}\left(E|Y|^q\right)^{1/q}$$

Burada, $p=q=2$ alınırsa Cauchy Schwarz eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılır,

$$|E(XY)|\leq E|XY|\leq\left(E|X|^2\right)^{1/2}\left(E|Y|^2\right)^{1/2}$$

Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılarak kovaryans eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilir. X ve Y raslantı değişkenleri için sırasıyla ortalamalar $\mu_X,\ \mu_Y$ ve varyanslar da $\sigma_X^2,\ \sigma_Y^2$ olsun.

$\left|E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right| \le E\left|(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right| \le \left\{E(X-\mu_X)^2\right\}^{1/2}\left\{E(Y-\mu_Y)^2\right\}^{1/2}$ eşitsizliğin her iki tarafının karesi alınırsa,

$\left(Cov(X,Y)\right)^2 \le \sigma_X^2\sigma_Y^2$ elde edilir. Her iki tarafın tekrar karekökü alınırsa,

$-\sigma_X\sigma_Y \le Cov(X,Y) \le \sigma_X\sigma_Y$ elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\sigma_X\sigma_Y$ ile bölünürse korelasyon katsayısı ρ_{XY}'nin tanım aralığı aşağıdaki gibi elde edilir,

$$-1 \le \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2\sigma_Y^2}} \le 1$$

5. JENSEN EŞİTSİZLİĞİ

TANIM 8: $J \subset \mathbb{R}$ keyfi bir aralık ve $g: J \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon, $\forall x_1, x_2 \in J$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$g\left[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\right] \le (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2)$ eşitsizliği sağlıyorsa g fonksiyonuna J'de konveks bir fonksiyon denir. Bu eşitsizlik yön değiştirdiğinde g fonksiyonu konkav olacaktır.

Konveks fonksiyonun tek bir minimum noktası vardır. Benzer şekilde, konkav fonksiyonun da tek bir maksimum noktası vardır.

X bir raslantı değişkeni, $g(x)$ de konveks bir fonksiyon olsun.

$E(g(X)) \ge g(E(X))$ eşitsizliği her zaman geçerlidir.