ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Doğrusal programlama problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan iki yöntem Grafik yöntem ve Simpleks yöntemdir. Bu yöntemlerin kullanımı matematiksel modelde bulunan değişken ve kısıt sayısına göre değişkenlik gösterir. İki veya üç değişkenin bulunması durumunda grafik yöntemle DP problemlerinin çözümü yapılabilirken, binlerce hatta milyonlarca değişkene sahip DP problemleri artık modern bilgisayarlarda Simpleks yöntemi kullanılarak kolaylıkla çözülebilmektedir.

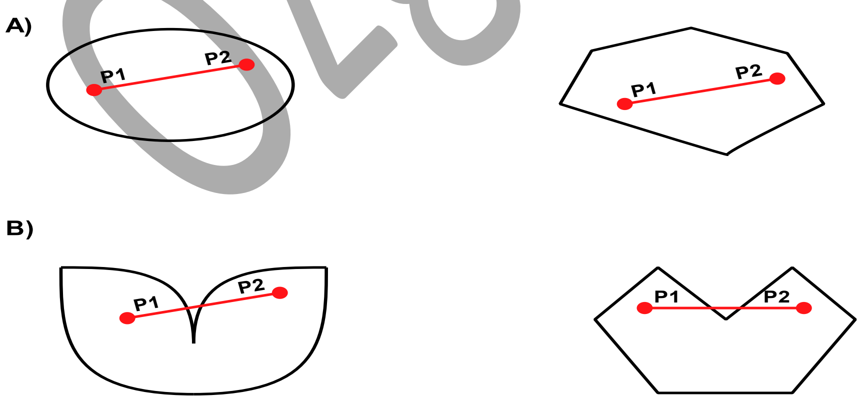
GRAFİK YÖNTEM

DP problemlerinin çözüm yöntemlerinden en basit olanı iki veya üç değişkenli modeller için grafik yöntemdir. Her ne kadar, gerçek hayatta iki değişkenli modellere nadiren rastlansa da grafik yöntemden çıkan fikirlerin simpleks yöntemin bulunmasında önemli bir rolü olmuştur.

İki değişkenli doğrusal programlama problemlerinin grafik yöntemle çözümünde yapılacak işlemler:

- Modeldeki tüm kısıtların sağlandığı uygun çözüm bölgesinin bulunması,
- Uygun çözüm bölgesinin köşe noktalarından optimal olanının belirlenmesi.

Bir DP probleminde tüm kısıtları sağlayan noktaların yer aldığı uygun çözüm bölgesi konveks bir bölgedir. Geometrik olarak konveks alan, kenarlarında çukurlaşmalar olmayan ve içinde delikler bulunmayan alandır. Diğer bir ifadeyle, bir kümeden alınan iki nokta bir doğru ile birleştirildiğinde bu doğru aynı küme içinde kalıyorsa bu noktaların kümesi konvekstir.



A) *Konveks alanlar* B) *Konveks olmayan alanlar*

Grafik yöntemde problemin optimal çözümü 2 farklı yoldan bulunabilir:

1) **Eş kar (Eş maliyet) doğrusu yöntemi:**

En iyi çözümü bulmak için, Z değerleri aynı olan bir doğru çizilir. Maksimum problemleri için bu çizgi eş kar (isoprofit) doğrusu; minimum problemleri içinse eş maliyet (isocost) doğrusu olarak isimlendirilir. Problemin tek bir optimal çözümü varsa, maksimum problemlerinde eş kar doğrusu uygun çözüm bölgesini terk ederken bir köşe ile kesişir. Bu köşe noktası, optimal çözümü veren köşe noktasıdır.

2) **Köşe noktası yöntemi**

Uygun çözüm bölgesinin tüm köşe noktalarının koordinatlarının bulunması ve bu noktalarda amaç fonksiyonunun değerinin hesaplanarak optimal (maks. veya min.) Z değerinin ve köşe noktasının belirlenmesi.

ÖRNEK: Can Çömlekçilik, hediyelik el işi kase ve kupa üreten küçük bir atölyedir. Atölye, kase ve kupa üretirken yetenekli işçiler istihdam etmektedir. Üretimde kullanılan iki temel kaynak kil ve işçiliktir. Bu iki ürünün üretiminde gereken kaynak miktarları ve ürün başına kar aşağıda verilmiştir:

Kaynak gereksinimleri			
Ürün	**İş gücü (saat/adet)**	**Kil (kg/adet)**	**Kar ($/adet)**
Kase	1	4	40
Kupa	2	3	50

Üretim için her gün 40 saat işçilik ve 120 kg kil mevcuttur. Şirket, bu sınırlı kaynaklar göz önüne alındığında, karını maksimum yapmak için günlük kaç kase ve kaç kupa üretmelidir?

X_1 = Her gün üretilecek kase sayısı,

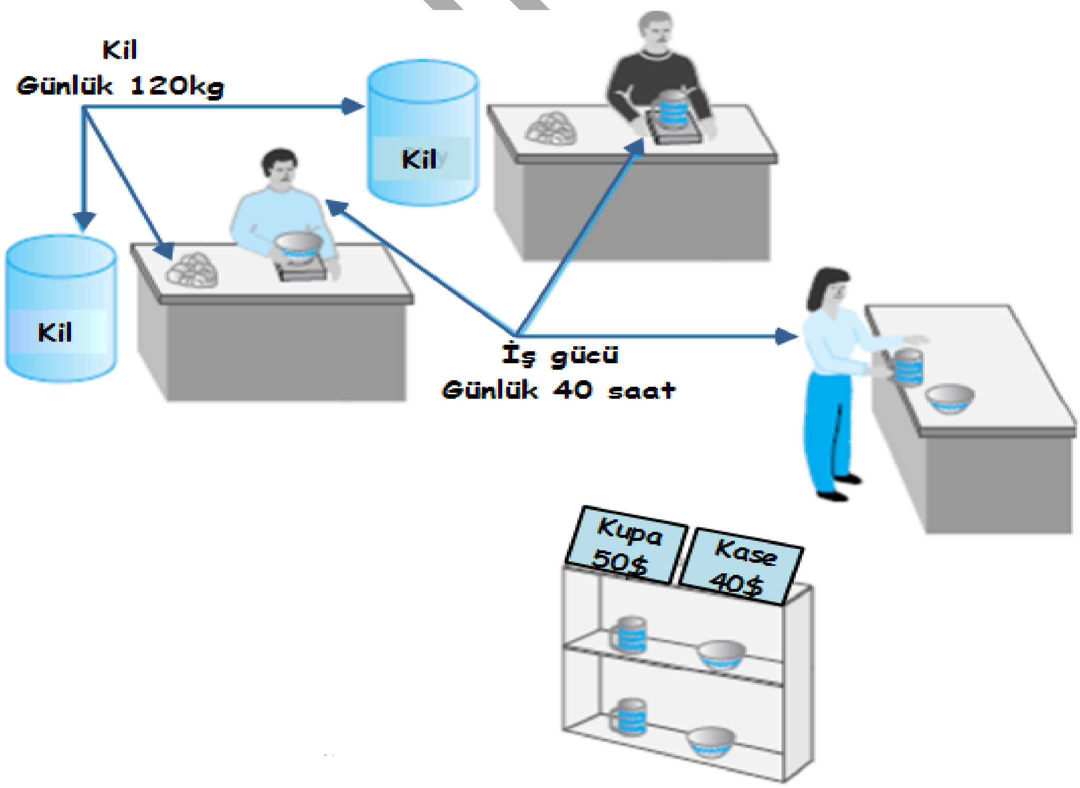
X_2 = Her gün üretilecek kupa sayısı.

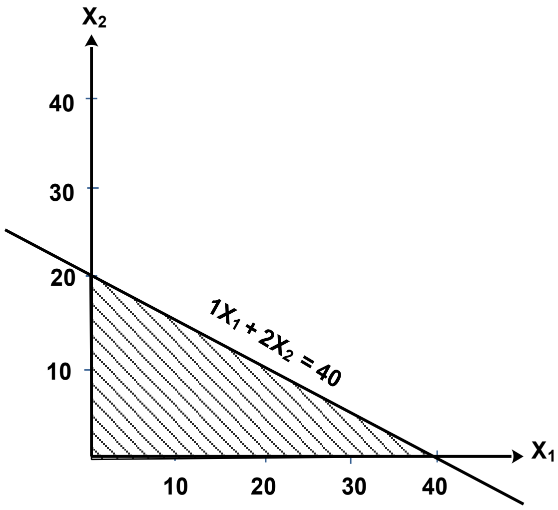
Maks $Z = 40X_1 + 50X_2$

$1X_1 + 2X_2 \leq 40$ saat (İş gücü kısıtı)

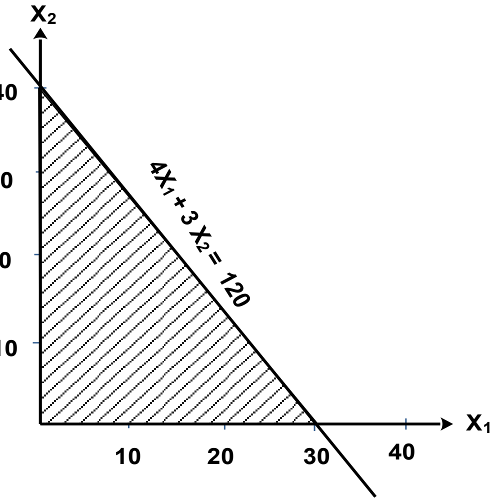
$4X_1 + 3X_2 \leq 120$ kg (Kil kısıtı)

$X_1,\ X_2 \geq 0$ (Negative olmama kısıtı)

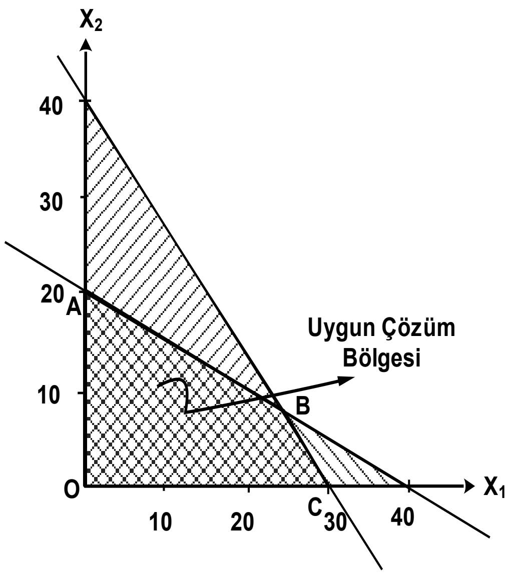




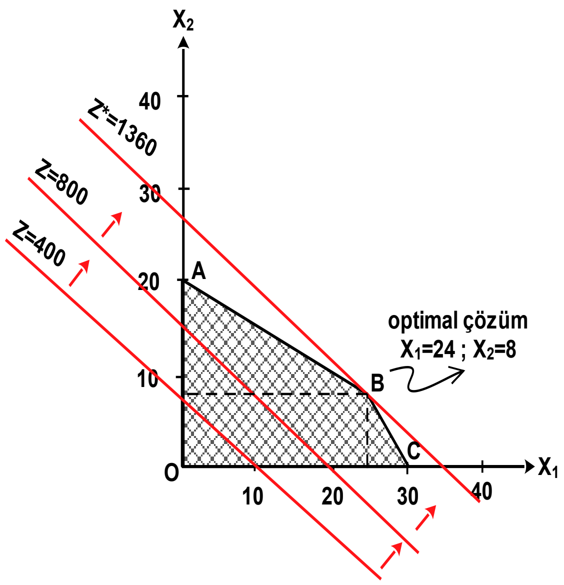
$1X_1 + 2X_2 \leq 40$ *eşitsizliğinin sağlandığı bölge.*



$4X_1 + 3X_2 \leq 120$ *eşitsizliğinin sağlandığı bölge.*



$1X_1 + 2X_2 \leq 40$ *ve* $4X_1 + 3X_2 \leq 120$ *eşitsizliklerinin ikisinin de sağlandığı uygun çözüm bölgesi (OABC).*



Bazı değerler için amaç fonksiyonu doğruları, Z'nin artış yönü ve bu yönde uygun bölgeyi terk ettiği son nokta (B).

Son şekilde Z= 400 ve Z= 800 için eş kar doğruları çizilmiştir. Eş kar doğrusu Z nin artış yönünde hareket ettiğinde uygun bölgeyi terk ederken son olarak B köşesi ile kesişir. B noktası için $(X_1, X_2) = (24, 8)$ $Z^*=1360$ şeklindedir.

B noktasının koordinatları bu köşeyi veren doğrular yardımıyla bulunur;

$1X_1 + 2X_2 = 40 \rightarrow \quad -4X_1 - 8X_2 = -160$

$4X_1 + 3X_2 = 120 \rightarrow \quad \underline{4X_1 + 3X_2 = 120}$

$-5X_2 = -40$

$X_2^* = 8, \; X_1^* = 24 \qquad$ Maks $Z^* = 40(24) + 50(8) = 1360\$$

Can Çömlekçilik, günlük 24 adet kase, 8 adet kupa üretirse günlük 1360$ kar elde eder.

- 1*(24) + 2*(8) = 40 iş gücü kısıtının sol tarafı kısıtın sağ tarafına eşit olduğundan günlük artan (kullanılmayan) işgücü yoktur.
- 4*(24) + 3*(8) = 120 kil kısıtının sol tarafı kısıtın sağ tarafına eşit olduğundan günlük artan (kullanılmayan) kil yoktur.

ÖRNEK: Aşağıda verilen DP problemini (LEGO örneği) eş kar (eş maliyet) doğrusu yöntemi ve köşe noktası yöntemi yardımıyla çözünüz.

Maks $Z = 16X_1 + 10X_2$

$2X_1 + X_2 \leq 6$

$2X_1 + 2X_2 \leq 8$

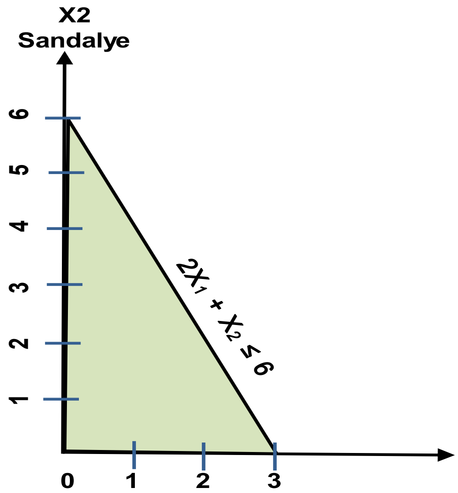
$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0$

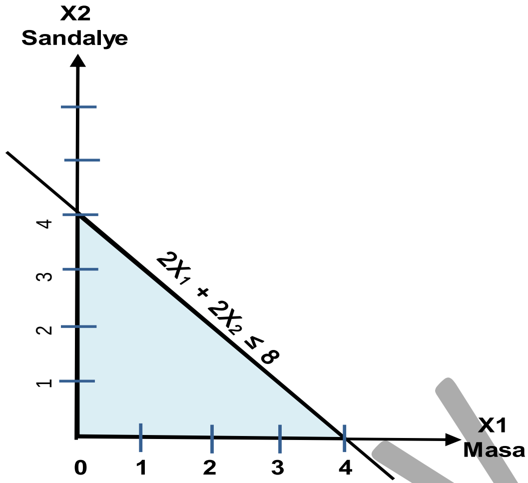
I. Yol: (Eş kar doğrusu yöntemi)

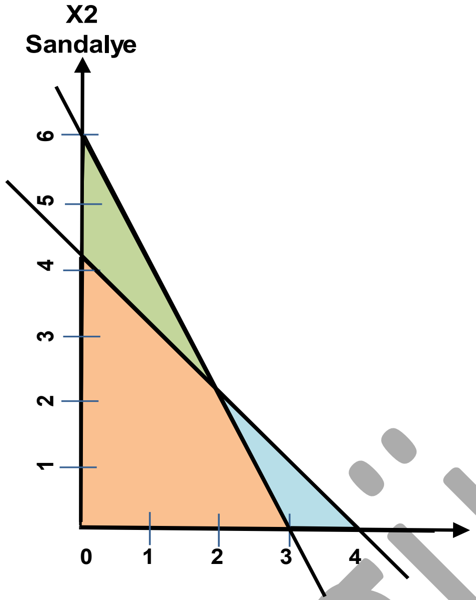
Doğruların çizilmesiyle ilgili aritmetik işlemler aşağıda gösterilmiştir.

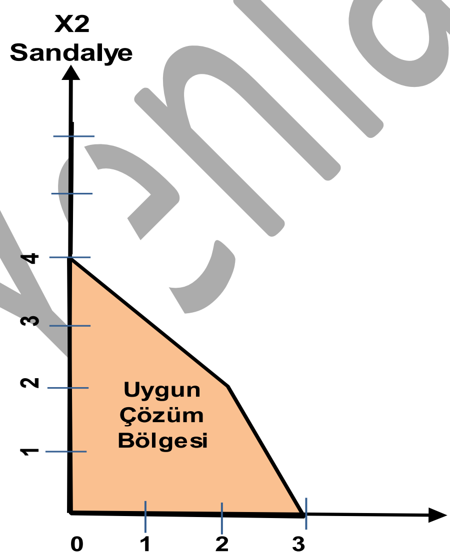
• $2X_1 + X_2 = 6$ eşitliğinde $X_1 = 0$ için $X_2 = 6$, $X_2 = 0$ için $X_1 = 3$

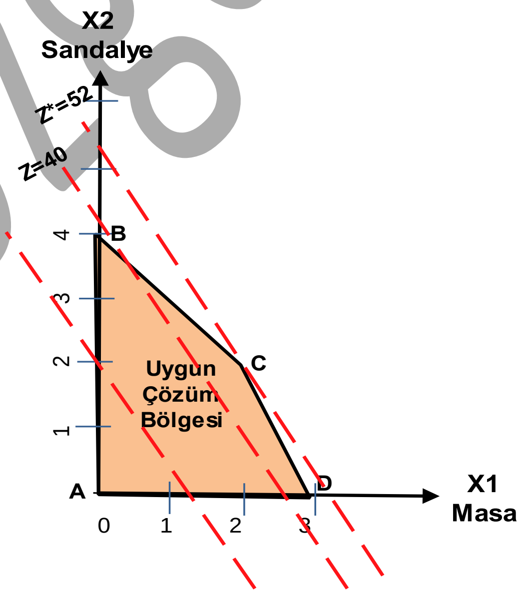
• $2X_1 + 2X_2 = 8$ eşitliğinde $X_1 = 0$ için $X_2 = 4$, $X_2 = 0$ için $X_1 = 4$


X2
Sandalye
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
$2X_1 + X_2 \le 6$


X2
Sandalye
4
3
2
1
$2X_1 + 2X_2 \le 8$
X1
Masa
0
1
2
3
4


X2
Sandalye
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4


X2
Sandalye
4
3
2
1
Uygun
Çözüm
Bölgesi
0
1
2
3


X2
Sandalye
Z*=52
Z=40
B
C
D
A
4
3
2
1
Uygun
Çözüm
Bölgesi
X1
Masa
0
1
2
3

C noktasını kesen doğrular yardımıyla;

$2X_1 + X_2 = 6$

$\underline{2X_1 + 2X_2 = 8}$

$X_2^* = 2$ ve $X_1^* = 2$ bulunur. $Z^* = 16*(2) + 10*(2) = 52\$$.

Lego parçalarıyla 2 masa ve 2 sandalye üretilirse maksimum kara (52$) ulaşılır.

II. Yol: (Köşe nokta yöntemi)

Köşe Noktası	$Z=16X_1 + 10X_2$
A (0;0)	0
B (0;4)	40
C (2;2)	**52 (optimal)**
D (3;0)	48

ÖRNEK: Aşağıda verilen DP problemini grafik yöntem yardımıyla çözünüz.

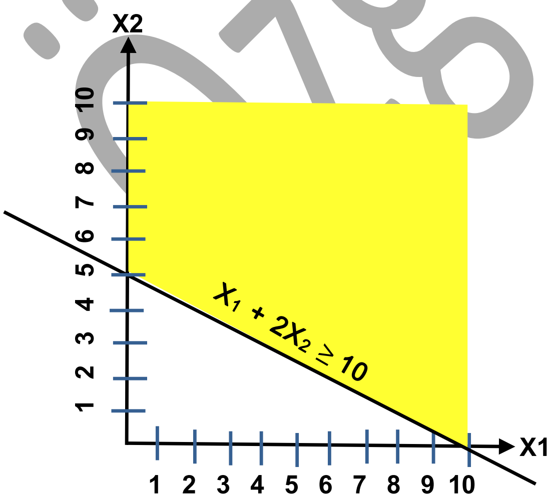
Min $Z = 16X_1 + 20X_2$

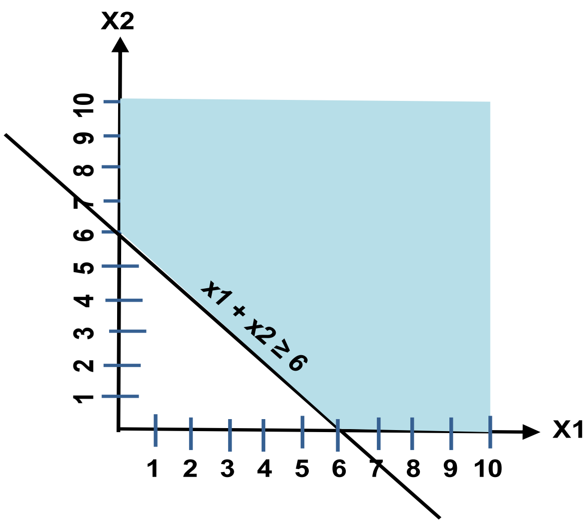
$X_1 + 2X_2 \geq 10$

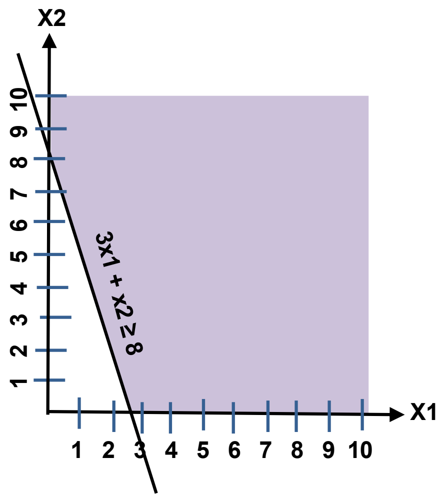
$X_1 + X_2 \geq 6$

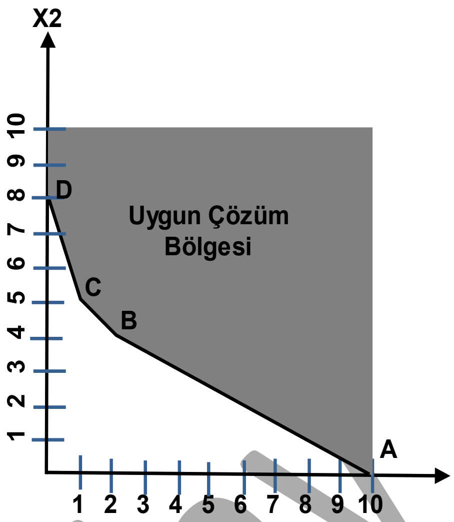
$3X_1 + X_2 \geq 8$

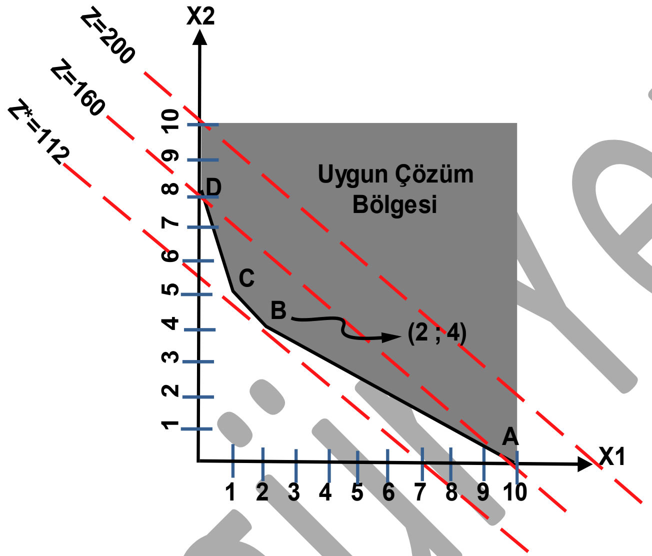
$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$











B noktasını veren doğrular yardımıyla;

$X_1 + 2X_2 = 10$
$\underline{X_1 + X_2 = 6}$
$X_2^* = 4$ ve $X_1^* = 2$ elde edilir. Bulunan değerler amaç fonksiyonunda yerlerine konulursa,

$Z^* = 16*2 + 20*4 = 112$ bulunur.

Köşe Noktaları	$Z = 16X_1 + 20X_2$
A (10;0)	160
B (2;4)	**112 (optimal)**
C (1;5)	116
D (0;8)	160

ÖRNEK:

Maks $Z = 20X_1 + 10X_2$

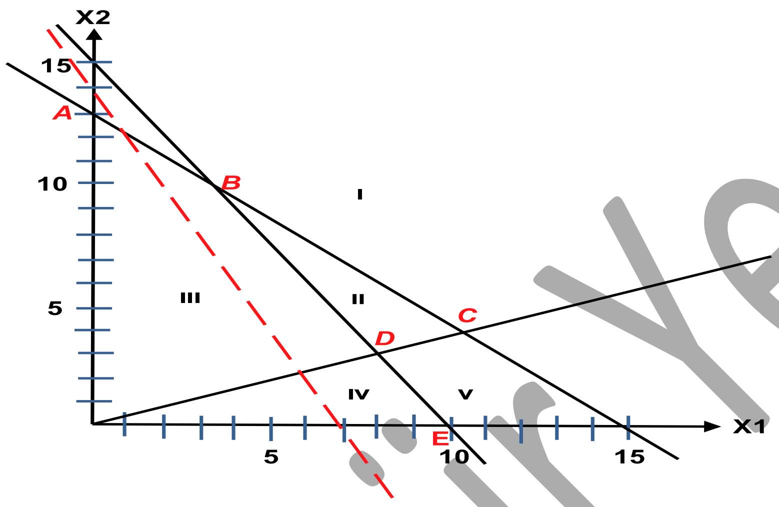
$12X_1 + 15X_2 \leq 180$ (1)

$15X_1 + 10X_2 \leq 150$ (2)

$3X_1 - 8X_2 \leq 0$ (3)

$X_1, \; X_2 \geq 0$

Yukarıdaki DP problemi için, hangi alan (I, II, III, IV, V) uygun bölgeyi göstermektedir ve hangi nokta (A, B, C, D, E) optimaldir?



Uygun çözümler III. bölgede yer alır ve D noktası optimaldir. (2) ve (3) numaralı doğrular yardımıyla optimal çözüm bulunursa;

$$15X_1 + 10X_2 = 150$$

$$\underline{3X_1 - 8X_2 = 0} \qquad (-15X_1 + 40X_2 = 0)$$

$$X_2^* = 3, \quad X_1^* = 8 \qquad Z^* = 20*(8) + 10*(3) = 190$$

ÖRNEK: Aşağıda verilen DP problemini grafik yöntem yardımıyla çözünüz.

Maks $Z = 5X_1 + X_2$

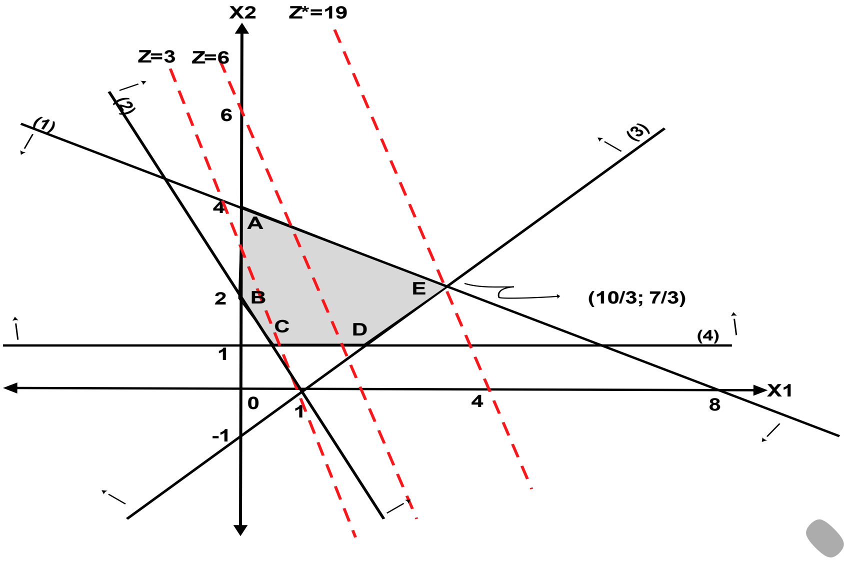
$X_1 + 2X_2 \leq 8$ (1)

$2X_1 + X_2 \geq 2$ (2)

$X_1 - X_2 \leq 1$ (3)

$X_2 \geq 1$ (4)

$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0$



(1) ve (3) numaralı eşitlikler yardımıyla optimal çözüm bulunur;

$X_1 + 2X_2 = 8$

$\underline{X_1 - X_2 = 1}$

$X_2^* = 7/3$, $X_1^* = 10/3$ ve $Z^* = 19$

ÖDEV: Aşağıda verilen DP probleminde uygun çözüm bölgesini bulunuz. Optimal çözümü

a) Köşe noktası çözüm yöntemi ve
b) Eş kar (Eş maliyet) doğrusu çözüm yöntemiyle bulunuz.

Min $Z = 5X_1 + 7X_2$

$2X_1 + 3X_2 \geq 6$ (1)

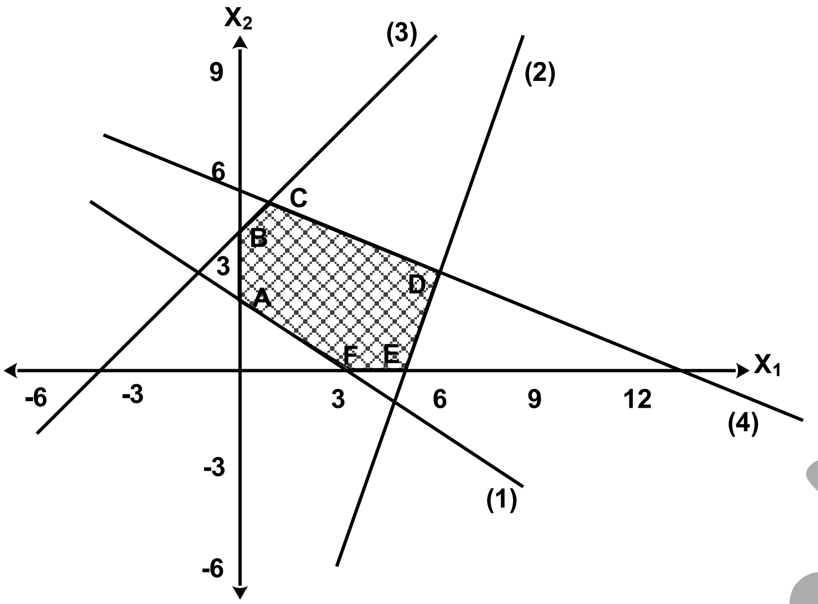
$3X_1 - X_2 \leq 15$ (2)

$-X_1 + X_2 \leq 4$ (3)

$2X_1 + 5X_2 \leq 27$ (4)

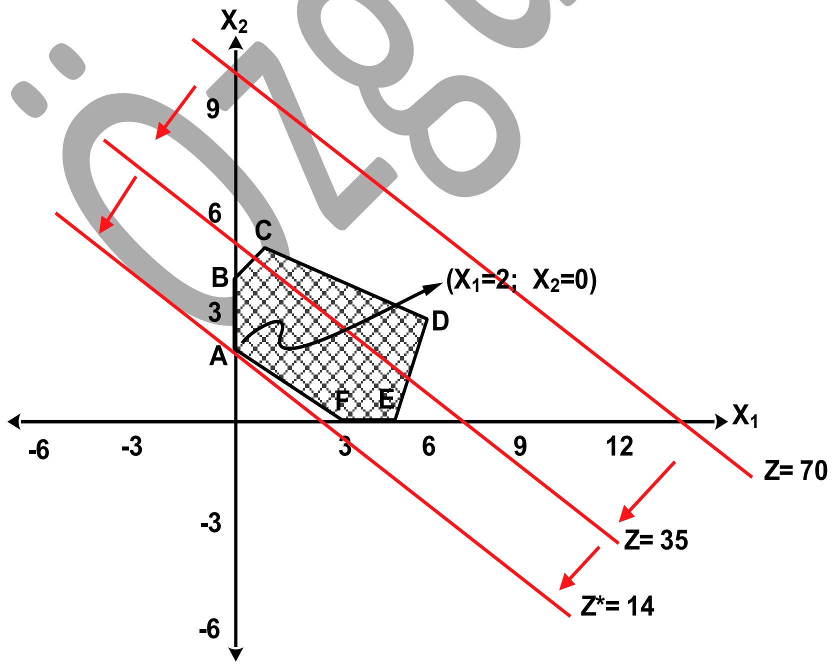
$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

a)



Köşe noktası	$Z=5X_1+7X_2$
A (0, 2)	Z=14* (Min)
B (0, 4)	Z=28
C (1, 5)	Z=40
D (6, 3)	Z=51 (Maks)
E (5, 0)	Z=25
F (3, 0)	Z=15

b)



ÖDEV: Aşağıdaki DP problemini grafik yöntem yardımıyla çözünüz.

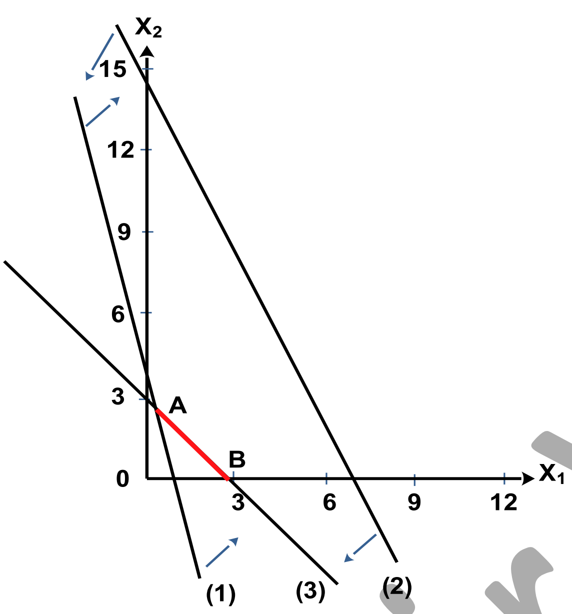
Maks $Z = 4X_1 + 7X_2$

$4X_1 + X_2 \geq 4$ (1)

$2X_1 + X_2 \leq 14$ (2)

$X_1 + X_2 = 3$ (3)

$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$



A noktasının koordinatları için:

$4X_1 + X_2 = 4$

$\underline{-X_1 - X_2 = -3}$

$X_1^* = 1/3, \qquad X_2^* = 8/3$

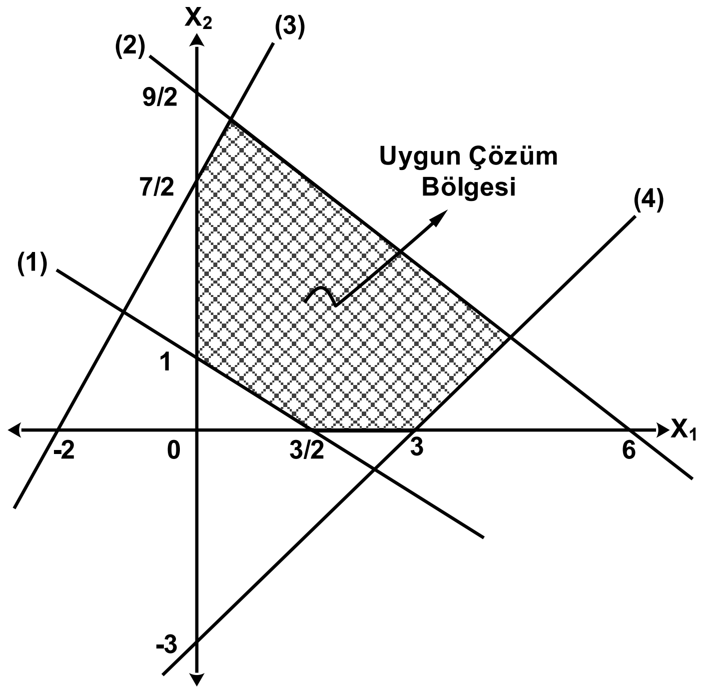
$Z^* = 4(1/3) + 7(8/3) = 20$ (Maksimum)

B noktasının koordinatları için:

$X_1 = 3 \quad X_2 = 0$

$Z = 4(3) + 7(0) = 12$

ÖDEV: Bir DP probleminin 4 kısıtı ve bu kısıtların sağlandığı uygun çözüm bölgesi aşağıda verilmiştir. Grafikten yararlanarak DP probleminin kısıtlarını yazınız.



$2X_1 + 3X_2 \geq 3$ (1)

$3X_1 + 4X_2 \leq 18$ (2)

$-7X_1 + 4X_2 \leq 14$ (3)

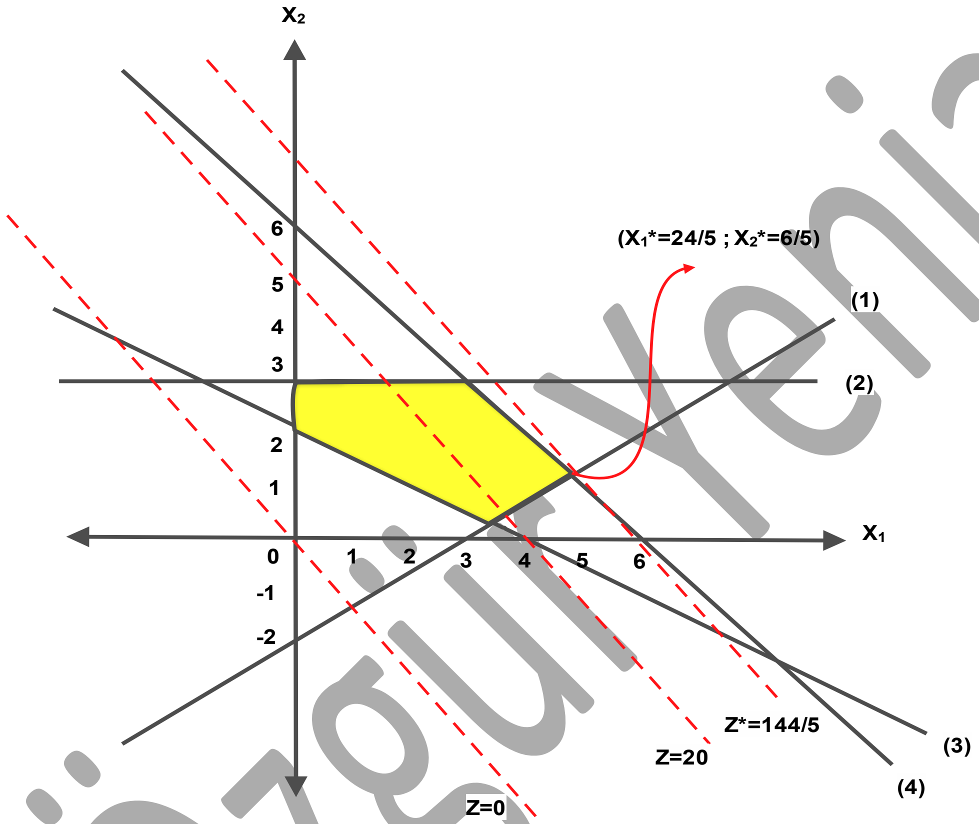
$X_1 - X_2 \leq 3$ (4)

$X_1, \ X_2 \geq 0$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR:

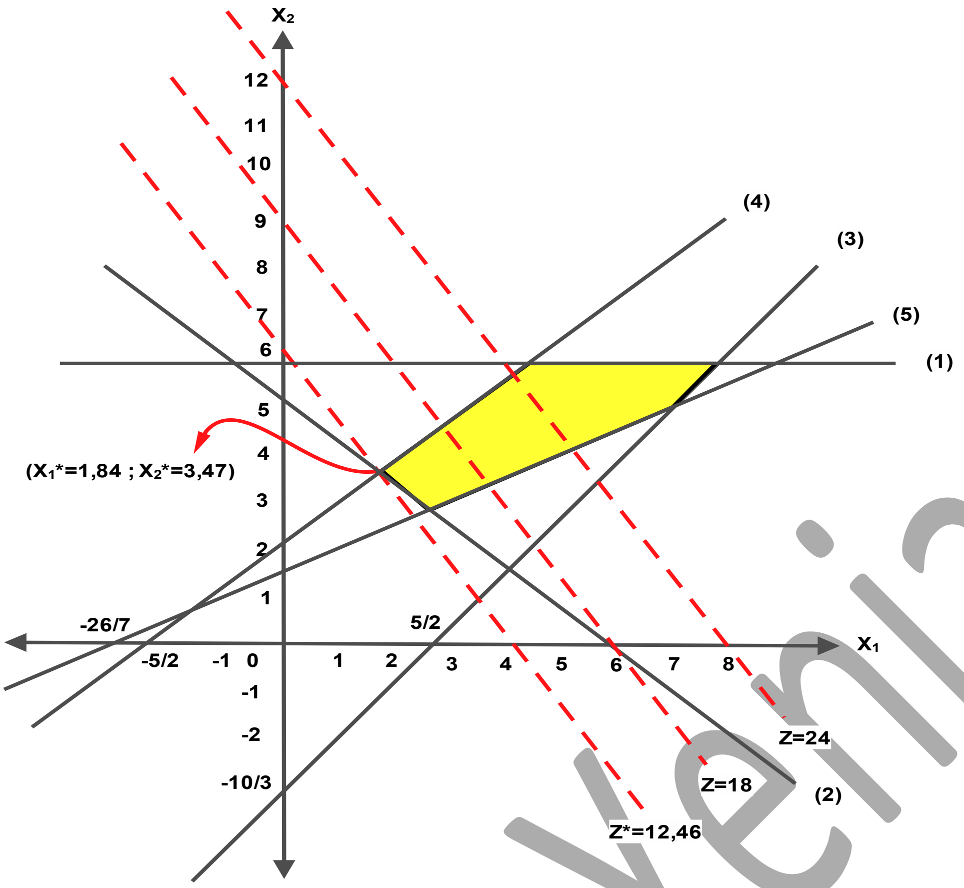
SORU 1. Maks $Z = 5X_1 + 4X_2$

$2X_1 - 3X_2 \leq 6$	(1)
$X_2 \leq 3$	(2)
$X_1 + 2X_2 \geq 4$	(3)
$X_1 + X_2 \leq 6$	(4)
$X_1, X_2 \geq 0$	



SORU 2. Min $Z = 3X_1 + 2X_2$

$X_2 \leq 6$	(1)
$5X_1 + 6X_2 \geq 30$	(2)
$4X_1 - 3X_2 \leq 10$	(3)
$-4X_1 + 5X_2 \leq 10$	(4)
$-7X_1 + 16X_2 \geq 26$	(5)
$X_1, X_2 \geq 0$	



SORU 3. Min $Z = 3X_1 + 4X_2$

$5X_1 + 6X_2 \leq 30$ (1)

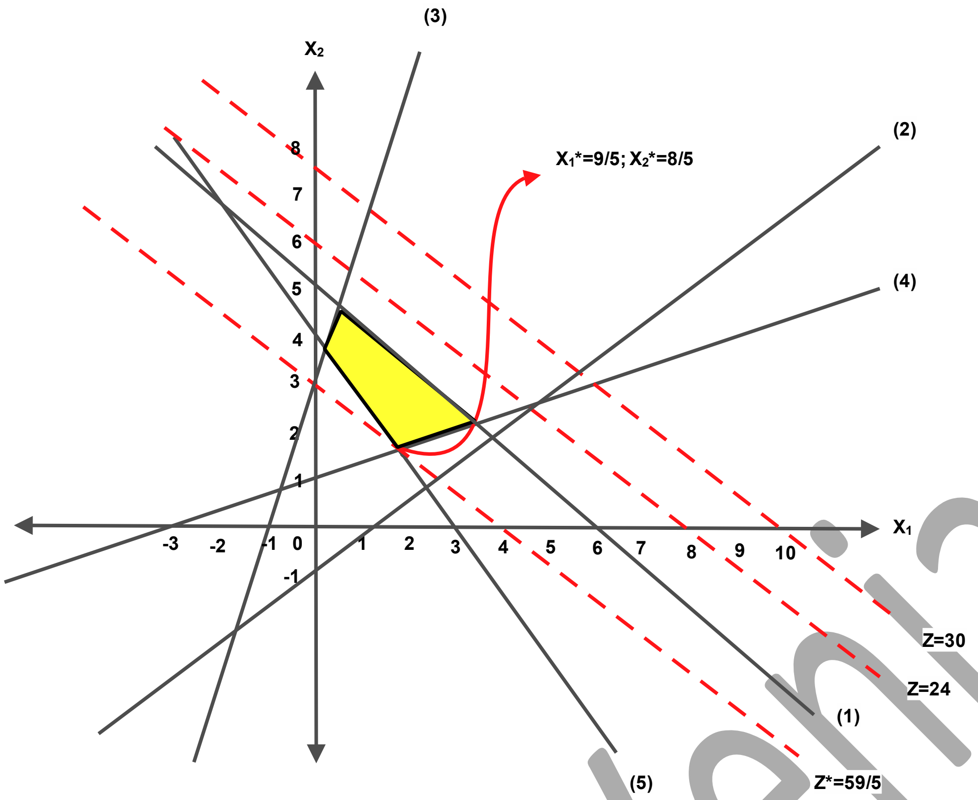
$X_1 - X_2 \leq 1$ (2)

$-3X_1 + X_2 \leq 3$ (3)

$-X_1 + 3X_2 \geq 3$ (4)

$4X_1 + 3X_2 \geq 12$ (5)

$X_1, X_2 \geq 0$



Uygun çözüm bölgesinin sınırları üzerinde yer almayan kısıta (çıkarıldığında uygun çözüm bölgesinin değişmediği) gereksiz (reductant) kısıt denir. 2 numaralı X_1-$X_2 \leq 1$ kısıtı bu örnekte gereksiz kısıttır.

SORU 4. Maks $Z = 2X_1 + X_2$

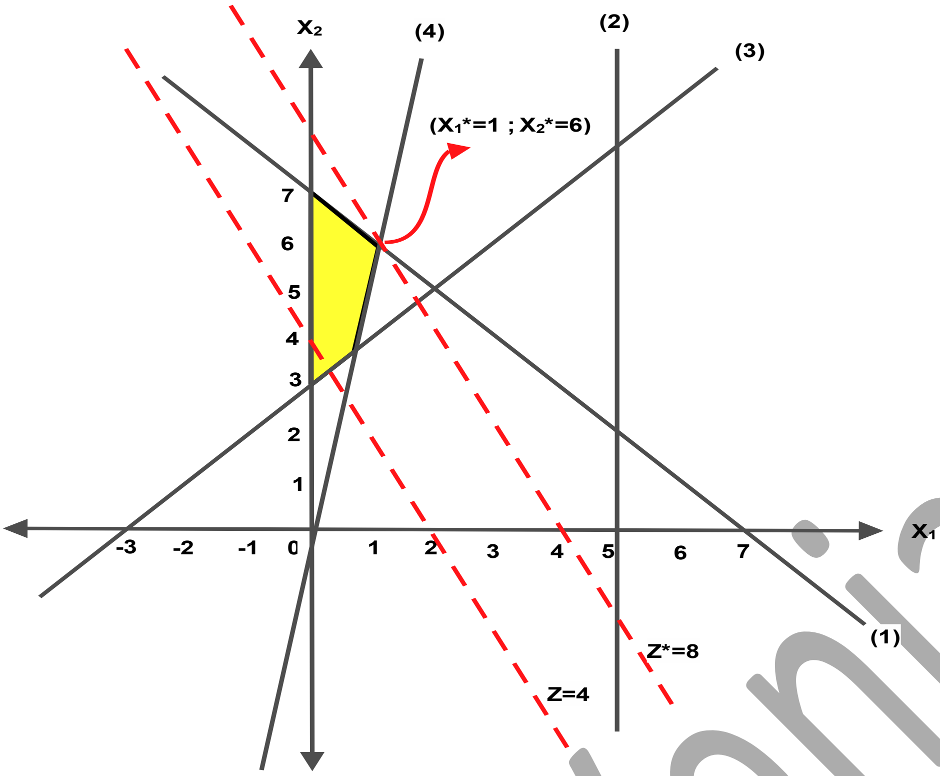
$X_1 + X_2 \leq 7$ (1)

$X_1 \leq 5$ (2)

$-X_1 + X_2 \geq 3$ (3)

$6X_1 - X_2 \leq 0$ (4)

$X_1, X_2 \geq 0$



GRAFİK YÖNTEM (ÖZEL DURUMLAR)

Sınırsız Çözüm

Bazı doğrusal programlama modellerinin amaç fonksiyonu değeri, uygun çözüm alanı üzerinde istenen yönde sonlu değilse, optimum değeri bulunamayacağından, sınırsız çözüm vardır denir. Bu durum karar vericiye hiçbir öneri getiremez. Sınırsız çözümün varlığı, grafik çözümde, grafik üzerinde kolaylıkla görülebilir.

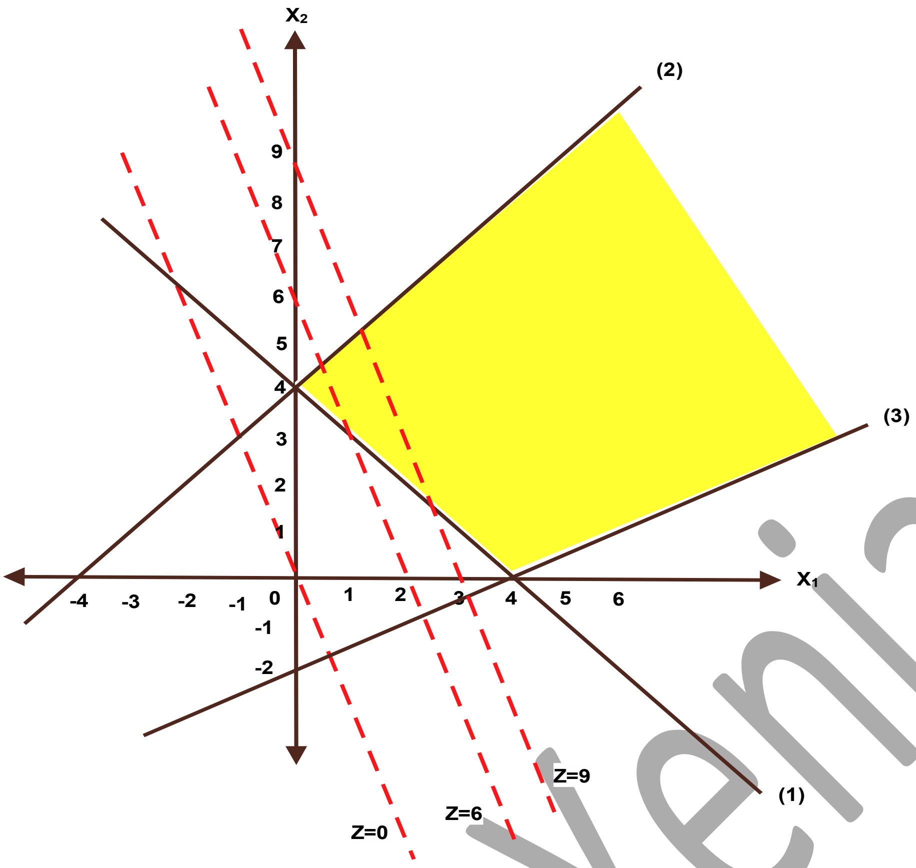
SORU 8. Maks $Z= 3X_1 + X_2$

$X_1 + X_2 \geq 4$ (1)

$-X_1 + X_2 \leq 4$ (2)

$X_1 - 2X_2 \leq 4$ (3)

$X_1, X_2 \geq 0$



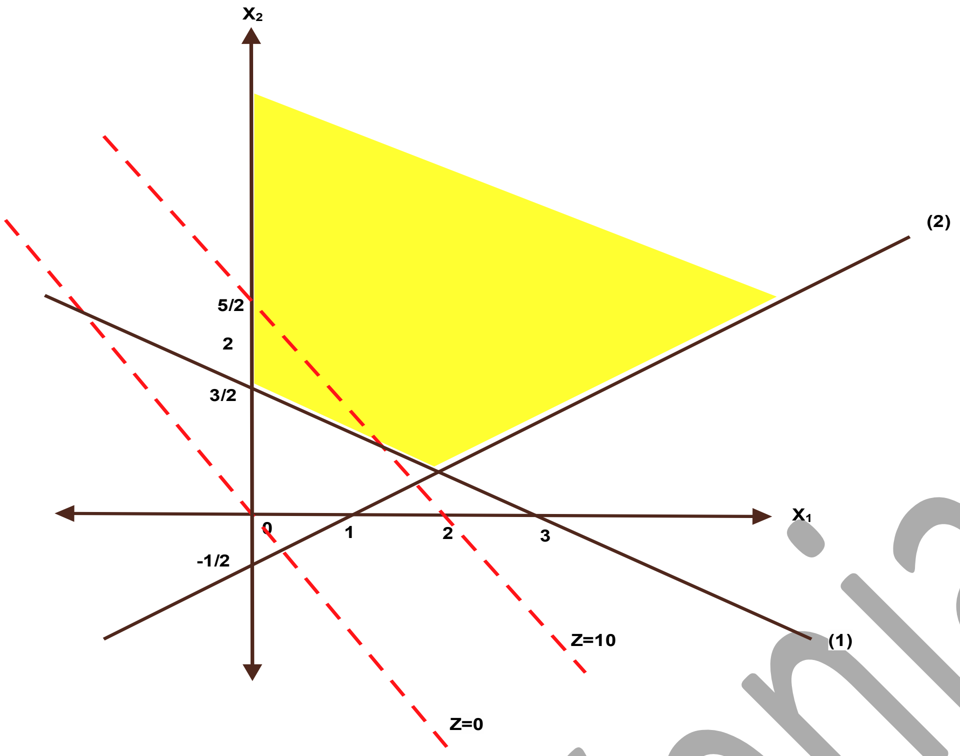
Problemin sınırsız çözümü vardır. Bu durumun nedeni, problemin modelleme aşamasında hata yapılması olabilir.

SORU 9. Maks $Z = 5X_1 + 4X_2$

$X_1 + 2X_2 \geq 3$ (1)

$X_1 - 2X_2 \leq 1$ (2)

$X_1, X_2 \geq 0$



Problemin sınırsız çözümü vardır.

Uygun Olmayan Çözüm

DP modelinin kısıtlarının grafiği çizildiğinde, uygun çözüm alanı oluşmuyor (boş) ise, problemin çözümü yoktur denir.

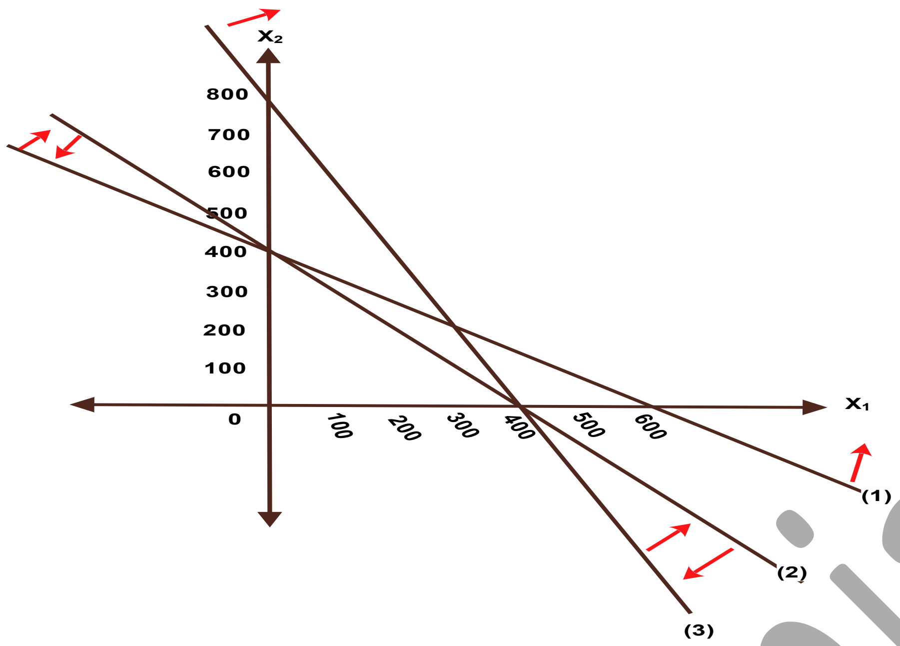
SORU 10. Min $Z=200X_1+300X_2$

$2X_1 + 3X_2 \geq 1200$ (1)

$X_1 + X_2 \leq 400$ (2)

$2X_1 + X_2 \geq 800$ (3)

$X_1, X_2 \geq 0$



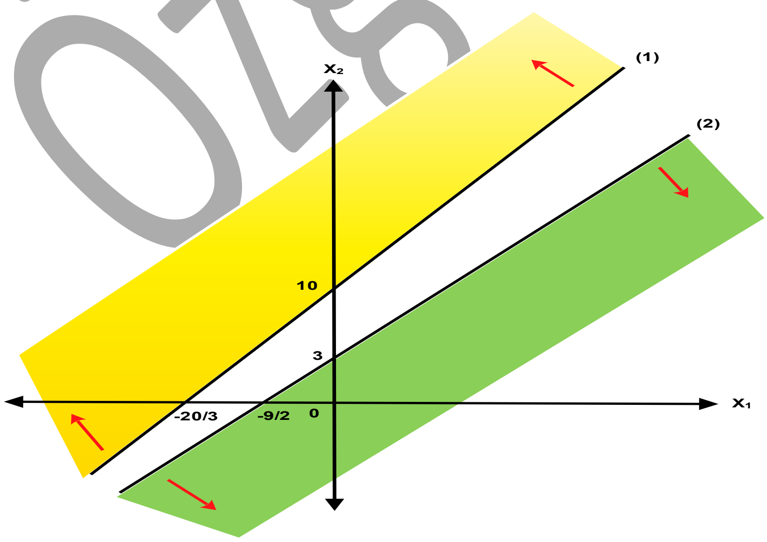
Problemin uygun çözümü yoktur. Uygun çözüm bulunmaması, problemin yapısından kaynaklanabileceği gibi, modelleme hataları da (bir kısıtlayıcının yönünün ters olması gibi) uygun çözüm alanının boş olmasına neden olabilmektedir.

SORU 11. Maks $Z=3X_1 + 2X_2$

$-2X_1 + 3X_2 \leq 9$ (1)

$-3X_1 + 2X_2 \geq 20$ (2)

$X_1, X_2 \geq 0$



Problemin uygun çözümü yoktur.

Alternatif Optimal Çözüm

Doğrusal programlama problemleri birden çok optimum çözüme sahip olabilir. Karar modelinin amaç fonksiyonunun optimum değeri, uygun çözüm alanında iki ayrı noktada aynı değeri alıyorsa, modelin alternatif çözümü vardır denir.

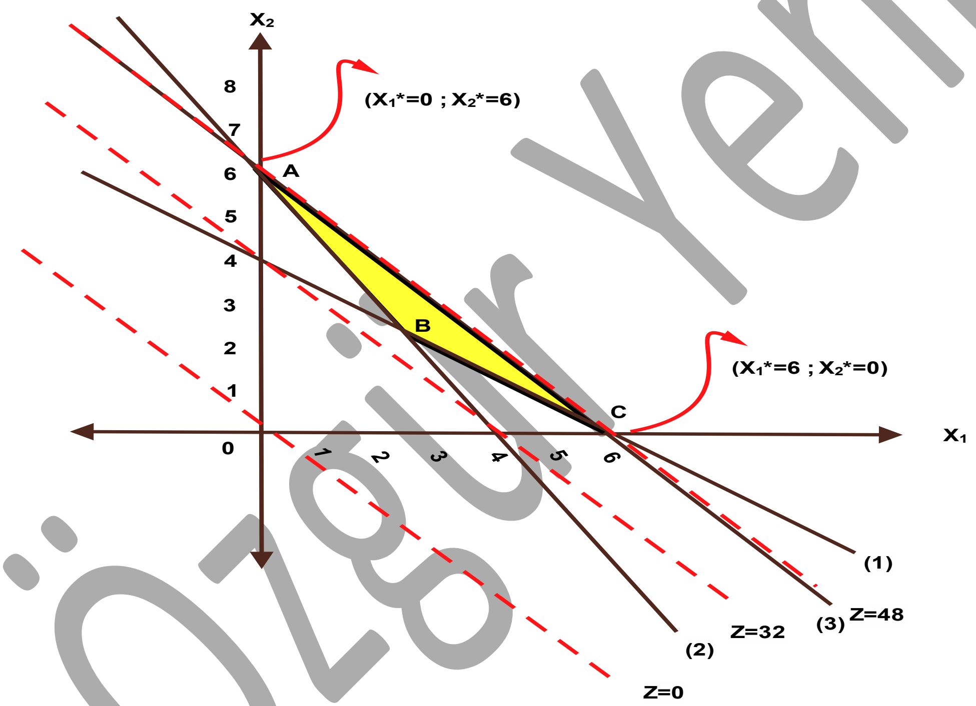
SORU 12. Maks $Z= 8X_1 + 8X_2$

$2X_1 + 3X_2 \geq 12$ (1)

$3X_1 + 2X_2 \geq 12$ (2)

$X_1 + X_2 \leq 6$ (3)

$X_1, X_2 \geq 0$



Problemin alternatif optimal çözümleri vardır. (AC doğru parçası üzerinde yer alan her bir nokta optimal çözümdür). Bu çözümlerden ikisi, $X_1^*=0$, $X_2^*=6$, $Z^*=48$ (A noktası) ve $X_1^*=6$, $X_2^*=0$, $Z^*=48$ dir (C noktası).

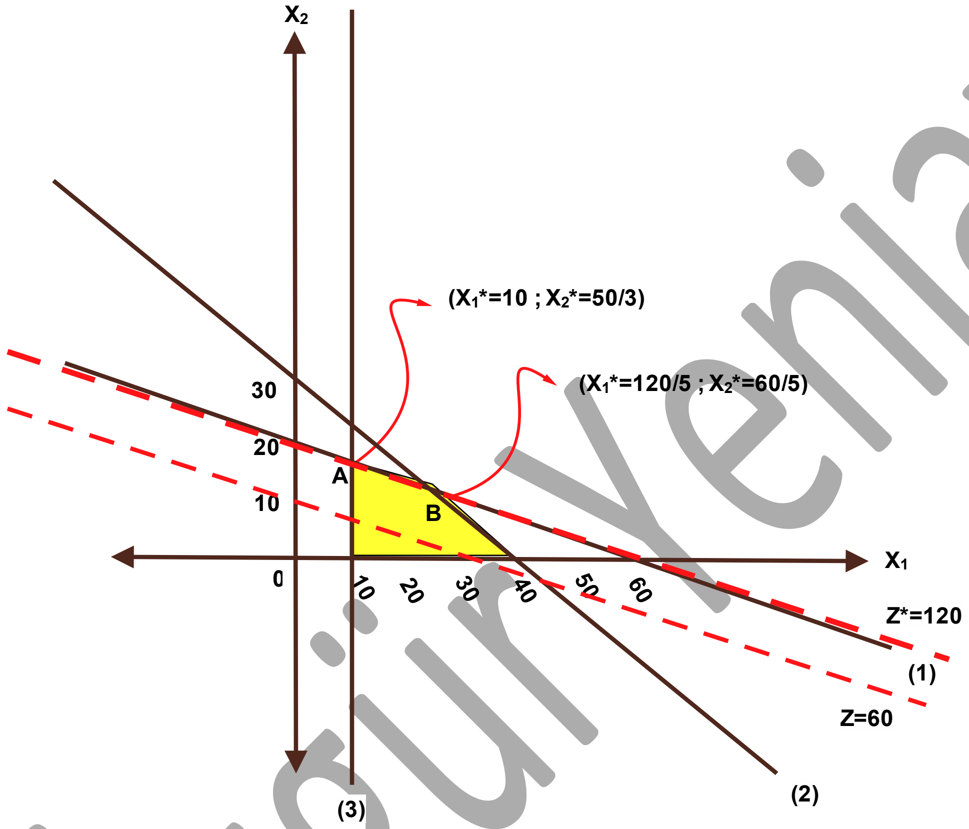
SORU 13. Maks $Z = 2X_1 + 6X_2$

$X_1 + 3X_2 \leq 60$ (1)

$3X_1 + 4X_2 \leq 120$ (2)

$X_2 \geq 10$ (3)

$X_1, X_2 \geq 0$



Problemin alternatif optimal çözümleri vardır. (AB doğru parçası üzerinde yer alan her bir nokta optimal çözümdür). Bu çözümlerden ikisi; $X_1^*=10$, $X_2^*=50/3$, $Z^*=120$ (A noktası) ve $X_1^*=120/5$, $X_2^*=60/5$, $Z^*=120$ dir (B noktası).

ÖDEV:

Aşağıda verilen DP problemlerini çözüp hangi özel durum olduğunu (varsa) belirleyiniz.

1) Maks $Z = 3X_1 + 2X_2$

$3X_1 + 2X_2 \leq 120$

$X_1 + X_2 \leq 50$

$X_1 \geq 30$

$X_2 \geq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$

2) Maks $Z = 2X_1 - X_2$

$X_1 - X_2 \leq 1$

$2X_1 + X_2 \geq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$

3) Maks $Z = 4X_1 + X_2$

$8X_1 + 2X_2 \leq 16$

$5X_1 + 2X_2 \leq 12$

$X_1, X_2 \geq 0$

4) Maks $Z = 6X_1 - 2X_2$

$2X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

5) Maks $Z = 50X_1 + 40X_2$

$3X_1 + 5X_2 \leq 150$

$X_2 \leq 20$

$8X_1 + 5X_2 \leq 300$

$X_1 + X_2 \geq 50$

$X_1, X_2 \geq 0$

6) Min $Z = -4X_1 + X_2$

$X_1 - 2X_2 \leq 2$

$-2X_1 + X_2 \leq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$