

İST-265 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK
UYGULAMA-7 ÇÖZÜMLER

1) Bir fabrika oyuncak araba üretimi yapmaktadır. Bir haftalık üretim ortalamasının 1500 ve standart sapmasının 15 olduğu varsayılsa haftalık üretimin 1400 ile 1600 arasında olması olasılıklı en az kaçtır?

Çözüm:

Hatırlatma: Chebyshev Eşitsizliği

$$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{yada} \quad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(1400 < X < 1600) = P(-100 < X - \mu < 100) = P(|X - \mu| < 100) \quad \varepsilon$$

Burada $\varepsilon = 100$ 'dür. Chebyshev eşitsizliğinden;

$$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{yerine yazılırsa;}$$

$$P(|X - \mu| \leq 100) \geq 1 - \frac{15^2}{100^2}$$

$$P(|X - \mu| \leq 100) \geq 0.9775$$

olarak bulunur.

2) Bir deterjan fabrikasında haftalık üretimin maliyetinin ortalaması 1000\$ ve varyansı 400\$ olarak belirlenmiştir. Haftalık maliyet için öyle bir aralık belirleyiniz ki en az %75 olasılıkla haftalık maliyeti kapsayan bir aralık olsun.

Çözüm:

$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \geq 0.75$ eşitliğinin sonucundan çıkacak aralık istenmektedir.

$$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 1 - \frac{400}{\varepsilon^2} = 0.75 \rightarrow \frac{400}{\varepsilon^2} = 0.25 \rightarrow \varepsilon = 40$$

$$P(|X - 1000| \leq 40) \geq 0.75 \rightarrow P(-40 \leq X - 1000 \leq 40) \geq 0.75$$

$$P(-40 + 1000 \leq X \leq 40 + 1000) \geq 0.75 \rightarrow P(960 \leq X \leq 1040) \geq 0.75$$

Yani; En az %75 olasılıkla haftalık üretim maliyeti 960 ile 1040 aralığı arasındadır.

3) $X \sim Binom\left(10, \frac{1}{3}\right)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda $\min P\left(\left|\frac{X}{10} - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{2}\right)$ olasılığı ne olur?

Çözüm:

$$Binom \rightarrow E(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \rightarrow V(X) = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$$

$P\left(\left|\frac{X}{10} - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{2}\right)$ için; $Y = \frac{X}{10}$ olsun. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olduğu görülmektedir.

$$E(Y) = E\left(\frac{X}{10}\right) = \frac{1}{10} E(X) = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{3}$$

$$V(Y) = V\left(\frac{X}{10}\right) = \frac{1}{10^2} V(X) = \frac{1}{100} \cdot \frac{20}{9} = \frac{1}{45}$$

olur.

$P\left(\left|\frac{X}{10} - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{2}\right) = P(|Y - E(Y)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$ ile Chebyshev eşitsizliği olur. Yerine yazarsak;

$$1 - \frac{V(Y)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1/45}{1/4} = \frac{41}{45} \text{ Bu durumda } \min P\left(\left|\frac{X}{10} - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{41}{45} \text{ olarak bulunur.}$$

4) Varyansı $\sigma^2 = 0.04$ olan ve bağımsız olduğu bilinen bir kitle için $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.05) \geq 0.95$ olduğu bilindiğine göre örneklem büyüklüğü nedir?

Çözüm:

$P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.05) \geq 0.95$ için $\varepsilon = 0.05$ olduğu buradan görülmektedir.

$E(\bar{X}) = \mu$, $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ olduğu bilinmektedir. Buradan Chebyshev eşitsizliğinde;

$P(|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2}$ yerine yazılırsa;

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.05) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot 0.05^2} = 1 - \frac{0.04}{n \cdot 0.05^2} = 0.95$$

$$\frac{0.04}{n \cdot 0.05^2} = 0.05 \rightarrow n \geq 320$$

olarak bulunur.

5) Belirli bir ilde bir radyo istasyonunun müzik programlarının haftalık dinlenme süresi (saat) $\mu = 4$ ortalama ve $\sigma = 1$ standart sapma ile ölçülmüştür. Bu ilden 36 kişilik bir rasgele örneklem alınmıştır. Buna göre $P\left(|\bar{X} - \mu| \geq \frac{1}{2}\right)$ olasılığı nedir?

Çözüm:

Hatırlatma: Merkezi Limit Teoremi

$$n \rightarrow \infty (n > 30) \text{ iken } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\mu = 4, \sigma = 1, n = 36 \rightarrow E(\bar{X}) = \mu = 4, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{36}$$

Soruda istenen olasılık; $P\left(|\bar{X} - \mu| \geq \frac{1}{2}\right)$. Bu ifadeyi önce mutlak değerden kurtarmamız lazım. Bunun için 1'den çıkartmamız yeterlidir.

$$P\left(|\bar{X} - \mu| \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(-\frac{1}{2} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{1}{2}\right)$$

Burada ifadede her tarafı $\sqrt{V(\bar{X})}$ 'e böldüğümüzde ilgili olasılığı standartlaştırmış oluruz.

$$\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = Z \right)$$

$$1 - P\left(-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{V(\bar{X})}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{V(\bar{X})}} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{V(\bar{X})}}\right) = 1 - P\left(-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{36}}} \leq Z \leq \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{36}}}\right)$$

$$= 1 - P(-3 \leq Z \leq 3) = 1 - 0.9974 = 0.0026$$

olarak bulunur.

6) Ortalamaları μ ve varyansları σ^2 olan iki kitleden $n_1 = n_2 = n$ şeklinde aynı büyüklükte iki bağımsız örneklem alınıyor. Bu örneklem ortalamaları sırasıyla \bar{X}_1 ve \bar{X}_2 olmak üzere;

$$a) P\left(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \leq \frac{\sigma}{4}\right) \geq 0.95 \text{ ise } n=?$$

$$b) P\left(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \leq \frac{\sigma}{4}\right) = 0.95 \text{ ise } n=?$$

Çözüm:

a) $Y = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ olsun. Bu durumda;

$$E(Y) = E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu - \mu = 0$$

$$V(Y) = V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2\sigma^2}{n}$$

olarak hesaplanır.

$P\left(|Y| \leq \frac{\sigma}{4}\right)$ olasılığında $\varepsilon = \frac{\sigma}{4}$ olduğu görülmektedir. Chebyshev eşitsizliğinden;

$P(|Y - E(Y)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$ olacaktır. Buradan yerine yazarsak;

$$P\left(|Y| \leq \frac{\sigma}{4}\right) \geq 1 - \frac{\frac{2\sigma^2}{n}}{\left(\frac{\sigma}{4}\right)^2} = 1 - \frac{2\sigma^2}{n} \cdot \frac{16}{\sigma^2} = 1 - \frac{32}{n}$$

$$1 - \frac{32}{n} = 0.95 \rightarrow n = 640 \text{ olarak bulunur.}$$

b) $P\left(|Y| \leq \frac{\sigma}{4}\right) = P\left(-\frac{\sigma}{4} < Y < \frac{\sigma}{4}\right) = 0.95$ olarak verilmiştir. Olasılığa sırasıyla $-E(Y)$ eklenir ve $\sqrt{V(Y)}$ ifadesine bölünürse;

$$P\left(-\frac{\sigma}{4} < Y < \frac{\sigma}{4}\right) = P\left(\frac{-\frac{\sigma}{4} - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} < \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} < \frac{\frac{\sigma}{4} - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right) = P\left(\frac{-\frac{\sigma}{4}}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} < Z < \frac{\frac{\sigma}{4}}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}\right) = 0.95$$

0.95 olasılığını veren tablo değeri 1.96'dır. Yani;

$\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{4}{2\sigma^2}}} = 1.96$ olması gerekmektedir. $\frac{\sigma}{4} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma/\sqrt{2}} = 1.96 \rightarrow \sqrt{n} = 1.96 \cdot 4\sqrt{2} \rightarrow n \approx 122$ olarak bulunur.

7) Varyansı 0.25 olan p parametreli Bernoulli dağılımından n büyüklükte çekilen rasgele örneklem X_1, X_2, \dots, X_n olsun. Buna göre;

a) $P(|\bar{X} - p| \leq 0.1) = 0.95$ ise n örneklem büyüklüğü kaçtır?

b) $P(|\bar{X} - p| \leq 0.1) \geq 0.95$ ise n örneklem büyüklüğü kaçtır?

c) $P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - np\right| \geq 0.1n\right) \leq 0.05$ ise n örneklem büyüklüğü kaçtır?

Çözüm:

$$X_i \sim Bernoulli(p) \rightarrow E(X) = p, V(X) = p(1-p)$$

$$E(\bar{X}) = p, V(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0.25}{n}$$

a) $P(|\bar{X} - p| \leq 0.1) = P(-0.1 < \bar{X} - p < 0.1) = P\left(\frac{-0.1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - p}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95$

$$P\left(\frac{-0.1}{0.5/\sqrt{n}} < Z < \frac{0.1}{0.5/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Bu olasılığı 0.95 yapan sınırlar standart normal dağılım tablosundan 1.96 olarak bulunur. Yani;

$$\frac{0.1}{0.5/\sqrt{n}} = 1.96 \rightarrow \sqrt{n} = \frac{(1.96)(0.5)}{0.1} \rightarrow n \approx 96 \text{ olarak bulunur.}$$

b) $P(|\bar{X} - p| \leq 0.1) \geq 0.95$ olasılığında $\varepsilon = 0.1$ olduğu görünmektedir. Ayrıca $E(\bar{X}) = p$ olduğu bilinmektedir. O halde Chebyshev eşitsizliğinden;

$$P(|\bar{X} - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2} = 0.95$$

$$1 - \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} = 0.95 \rightarrow \frac{0.25}{n 0.1^2} = 0.05 \rightarrow n = 500$$

olarak bulunur.

c) $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ olsun. Bu durumda $E(Y) = np$, $V(Y) = n\sigma^2 = np(1-p)$ olur.

$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - np\right| \geq 0.1n\right) \leq 0.05 = P(|Y - E(Y)| \geq 0.1n) \leq 0.05$, $\varepsilon = 0.1n$ olduğu
görünmektedir. Buradan yerine yazarsak;

$$P(|Y - E(Y)| \geq 0.1n) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{n\sigma^2}{0.1^2 n} = \frac{0.25}{0.1^2} = 0.05$$

$$\frac{0.25}{0.1^2 n} = 0.05 \rightarrow n = 500$$

olarak bulunur.

8) $f(x) = 4x^3$, $0 < x < 1$ olarak veriliyor. $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ olasılığını hesaplayınız.
Aynı olasılığın alt sınırını elde edip iki sonucu karşılaştırınız.

Çözüm:

$$E(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 4x^4 dx = \left(\frac{4x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 4x^5 dx = \left(\frac{4x^6}{6}\right)_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75} = 0.163$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(0.8 - 2(0.163) < X < 0.8 + 2(0.163))$$

$$= P(0.474 < X < 1.126) = \int_{0.474}^1 f(x) dx = \int_{0.474}^1 4x^3 dx = x^4 \Big|_{0.474}^1 = 1 - (0.474)^4 \approx 0.95$$

Alt sınır Chebyshev eşitsizliğinden;

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(\mu - 2\sigma - \mu < X - \mu < \mu + 2\sigma - \mu) = P(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma) \\ = P(|X - \mu| < 2\sigma) \rightarrow 2\sigma = \varepsilon$$

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 0.75$$

olarak elde edilir.

9) $\mu = 128$ ve $\sigma = 6.3$ olan bir kitleden 81 birimlik rasgele örneklem alınıyor.

\bar{X} 'nın [126.6, 129.4] aralığında olmaması olasılığını ve bu olasılığın max. değerini bulunur.

Çözüm:

$$\text{MLT'den } n=81 > 30 \rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} P(126.6 \leq \bar{X} \leq 129.4) &= P(126.6 - \mu \leq \bar{X} - \mu \leq 129.4 - \mu) = P(126.6 - 128 \leq \bar{X} - \mu \leq 129.4 - 128) \\ &= P\left(\frac{-1.4}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{1.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{-1.4}{6.3/9} \leq Z \leq \frac{1.4}{6.3/9}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) \end{aligned}$$

Aralıkta olmaması olasılığı ise; $1 - P(-2 \leq Z \leq 2)$ olur.

Standart normal dağılım tablosundan bu olasılık; $1 - 0.9544 = 0.0456$ olarak bulunur.

$\max[1 - P(126.6 \leq \bar{X} \leq 129.4)]$:

$$\begin{aligned} P(126.6 \leq \bar{X} \leq 129.4) &= P(126.6 - \mu \leq \bar{X} - \mu \leq 129.4 - \mu) = P(126.6 - 128 \leq \bar{X} - \mu \leq 129.4 - 128) \\ &= P(-1.4 \leq \bar{X} - \mu \leq 1.4) = P(|\bar{X} - \mu| \leq 1.4) \end{aligned}$$

olur. Burada $\varepsilon = 1.4$ olduğu görülmektedir.

$P(126.6 \leq \bar{X} \leq 129.4)$ olasılığı [126.6, 129.4] aralığında olması olasılığını verirken, bize olmaması olasılığı lazım. Bu yüzden 1'den bu olasılığı çıkarmak yeterli olacaktır.

$1 - P(126.6 \leq \bar{X} \leq 129.4) = 1 - P(|\bar{X} - \mu| \leq 1.4) = P(|\bar{X} - \mu| \geq 1.4)$ olur. Chebyshev eşitsizliğinden;

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq 1.4) \leq \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} = \frac{(6.3)^2}{81 \cdot (1.4)^2} = 0.25$$

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq 1.4) \leq 0.25$$

olduğu için üst sınır 0.25 olarak bulunur.

10) Bir gökbilimci gözlem evi ile belirli bir yıldız arasındaki mesafeyi ışık yılı olarak ölçmek istiyor. Gökbilimcinin güvenilir ölçüm tekniği olmasına rağmen, atmosferik değişiklikler ve hatalar nedeniyle her bir ölçümde gerçek uzaklık yerine sadece tahmini değere ulaştığı biliniyor. Bu nedenle bir dizi ölçüm yapıyor ve ölçüm değerlerinin ortalamasını gerçek uzaklığın bir tahmini olarak hesaplamayı planlıyor. Gökbilimci, ölçüm değerlerinin ortalaması d ve varyansı 4 olan aynı dağılımlı ve bağımsız raslantı değişkenleri olduğunu biliyor. Tahmin değeri ile gerçek değeri arasındaki farkı ± 0.5 hata ile (ışık yılı) tahmin edebileceğini en az %95 güven düzeyinde söyleyebilmesi için kaç ölçüm yapması gerekmektedir?

Çözüm:

$$E(X_i) = d, \quad V(X_i) = 4, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$E(\bar{X}) = d, \quad V(\bar{X}) = \frac{4}{n}$$

$\varepsilon = 0.5$ olmak üzere Chebyshev eşitsizliğinde yerine yazarsak;

$$P(|\bar{X} - E(\bar{X})| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2} = 0.95$$

$$P(|\bar{X} - d| \leq 0.5) \geq 1 - \frac{4}{n \cdot 0.5^2} = 0.95$$

$$\frac{4}{n \cdot 0.5^2} = 0.05 \rightarrow n = 320$$

olarak bulunur. Yani gökbilimcinin en az %95 güven düzeyinde tahmin edebileceğini söyleyebilmesi için 320 adet ölçüm yapması gerekmektedir.

11) Bir akademisyenin değerlendirmesi gereken 50 sınav kağıdı vardır. Akademisyen not teslim tarihinden önce değerlendirmeyi tamamlamak istemektedir. Akademisyen her bir kağıdın değerlendirilmesi için gereken sürenin, ortalaması 20 ve standart sapması 4 dakika olan aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri olduğunu biliyor. Akademisyenin tüm sınav kağıtlarını en fazla 900 dakika içinde değerlendirmesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\text{MLT'den } n \rightarrow \infty (n = 50 > 30) \text{ ise } \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i < 900\right) = ?$$

$$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i \text{ dersek,}$$

$$E(Y) = n\mu = 50(20) = 1000$$

$$V(Y) = n\sigma^2 = 50(16) = 800$$

olarak elde edilir. Bu durumda;

$$P(Y < 900) = P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} < \frac{900 - 1000}{\sqrt{800}}\right) = P(Z < -3.5)$$

$P(Z < -3.5)$ olasılığı için standart normal dağılım tablosuna bakılır.

$$P(Z < -3.5) = 0.5 - 0.4998 = 0.0002 \text{ olarak bulunur.}$$

12) $\mu = 75$ ve $\sigma^2 = 256$ olan bir kitleden 100 birimlik rasgele örneklemler alınıyor.

$$\text{a)} \min P(67 \leq \bar{X} \leq 83) = ?$$

$$\text{b)} P(67 \leq \bar{X} \leq 83) = ?$$

Çözüm:

$$E(\bar{X}) = \mu = 75$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{256}{100}$$

$$\text{a)} P(67 \leq \bar{X} \leq 83) \rightarrow P(\mu - \varepsilon \leq \bar{X} \leq \mu + \varepsilon) \rightarrow P(-\varepsilon \leq \bar{X} - \mu \leq \varepsilon) = P(|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon) \text{ olur.}$$

Bu da Chebyshev eşitsizliğine denk gelir. Bu durumda;

$$\mu + \varepsilon = 83 \rightarrow 75 + \varepsilon = 83$$

$$\mu - \varepsilon = 67 \rightarrow 75 - \varepsilon = 67$$

$$\varepsilon = 8$$

bulunur. Yerine yazarsak;

$$P(67 \leq \bar{X} \leq 83) = P(|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2}$$

$$= P(|\bar{X} - 75| \leq 8) \geq 1 - \frac{256}{100 \cdot 8^2} = 0.96$$

olarak bulunur.

b) MLT uygulanır.

$$P(67 \leq \bar{X} \leq 83) = P\left(\frac{67 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{83 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{67 - 75}{\sqrt{256/10}} \leq Z \leq \frac{83 - 75}{\sqrt{256/10}}\right)$$

$$= P(-5 \leq Z \leq 5) \cong 1$$

13) $N(\mu, 1)$ normal dağılımından 40 birimlik bağımsız rasgele örneklem alınıyor.

a) $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.3) = ?$

b) $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.3) = 0.95$ ise n kaçtır?

Çözüm:

$$\text{MLT'den } n=40 > 30 \rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{40}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.3) &= P(-0.3 \leq \bar{X} - \mu \leq 0.3) = P\left(\frac{-0.3}{1/\sqrt{40}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{0.3}{1/\sqrt{40}}\right) \\ &= P(-1.90 \leq Z \leq 1.90) = 0.9426 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\text{b)} \quad P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.3) = P(-0.3 \leq \bar{X} - \mu \leq 0.3) = P\left(\frac{-0.3}{1/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{0.3}{1/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$P\left(\frac{-0.3}{1/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{0.3}{1/\sqrt{n}}\right) = 0.95$ Standart normal dağılım tablosundan 0.95 olasılığını veren sınırların 1.96 olduğu görülmektedir. Yani ;

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95 \text{ olacağı için sınırlarda yerine yazarsak } n \text{ değerini bulabiliyoruz;}$$

$$\frac{0.3}{1/\sqrt{n}} = 1.96 \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96}{0.3} \rightarrow n \approx 43 \text{ olarak bulunur.}$$

14) $E(X) = 0$ ve $V(X) = 8$ olan bir X raslantı değişkeni verilsin.

a) $\min P(-3 \leq X \leq 3) = ?$

b) $P(|X| \leq \varepsilon) \geq 0.96$ olması için ε ne olmalıdır?

Çözüm:

a) $P(-3 \leq X \leq 3) = P(-3 - E(X) \leq X - E(X) \leq 3 - E(X)) = P(|X - E(X)| \leq 3)$

Buradan $\varepsilon = 3$ olduğu görülmektedir. Chebyshev eşitsizliğinde yerine yazarsak;

$$P(|X - E(X)| \leq 3) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{8}{9} = 0.8888$$

olarak bulunur.

b) $P(|X| \leq \varepsilon) \geq 0.96$

$$= P(-\varepsilon \leq X \leq \varepsilon) = P(-\varepsilon - E(X) \leq X - E(X) \leq \varepsilon - E(X)) = P(|X - E(X)| \leq \varepsilon)$$

elde edilir. Chebyshev eşitsizliğinden;

$$P(|X - E(X)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = 0.96$$
 olduğu bilinmektedir. Yerine yazarsak;

$$\frac{V(X)}{\varepsilon^2} = 0.04 \rightarrow \frac{8}{\varepsilon^2} = 0.04 \rightarrow \varepsilon^2 = \frac{8}{0.04} \rightarrow \varepsilon = 14.14$$
 olarak bulunur.

15) $X \sim Poisson(100)$ dağılımına sahip olsun. $\min P(80 \leq X \leq 120)$ nedir?

Çözüm:

$X \sim Poisson(\lambda)$ için $E(X) = V(X) = \lambda = 100$

$$P(80 \leq X \leq 120) = P(80 - E(X) \leq X - E(X) \leq 120 - E(X))$$

$$= P(-20 \leq X - E(X) \leq 20) = P(|X - E(X)| \leq 20)$$

bulunan bu olasılık da $\varepsilon = 20$ olduğu görülmektedir. Bu durumda Chebyshev eşitsizliğinde yerine yazarsak;

$$P(|X - E(X)| \leq 20) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{100}{20^2} = 0.75$$
 olarak bulunur.