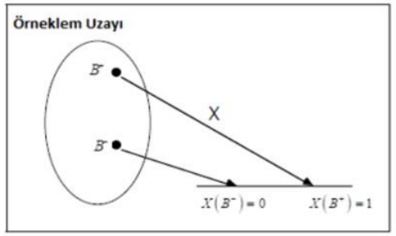
Binom Dağılımı ve İlişkili Dağılımlar

- Bir rasgele denemenin olası tüm sonuçlarını içeren kümeye örneklem uzayı denir.
- Örneklem uzayındaki elemanların her zaman sayısal olması gerekmez. Bu gibi durumlarda örneklem uzayındaki elemanların özelliklerinin ölçülebilir bir tabana taşınması için raslantı değişkeni kullanılır.
- Bir raslantı değişkeni onun olasılık fonksiyonu ya da dağılım fonksiyonu yardımı ile karakterize edilebilir.
- Bu bölümde istatistikte sıklıkla kullanılan bazı özel tanımlı raslantı değişkenleri ve onların olasılık dağılımları ile bu dağılımlar arasındaki ilişkiler üzerinde durulacaktır.

Bernoulli Dağılımı

Bir rasgele deneme bir defa tekrar ediyor ise ve denemenin, başarı (B^+) ve başarısızlık (B^-) biçiminde iki sonucu var ise örneklem uzayı da iki noktadan oluşur $\{B^+, B^-\}$.

Raslantı değişkeni örneklem uzayındaki bu iki sonucun her biri için reel sayılarda bir karşılık atayan fonksiyon olarak düşünülebilir,



Bu denemede başarılı sonucun gözlemlenmesi olasılığının p olduğunu düşünelim.

Bu durumda X raslantı değişkeninin 1 değerini alma olasılığı $P(X=1)=p$ olacaktır.

Rasgele denemede başarısızlık sonucuna ilişkin olasılık ise, X raslantı değişkeninin 0 değerini alma olasılığı olur ve bu değer $P(X=1)=p$ olacaktır.

Bu rasgele denemede tanımlanan X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır ve Bernuolli dağılımı olarak adlandırılır,

$$f(x)=p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1$$

Bernoulli Dağılımı

Bernoulli dağılımının parametresi p'dir.

Dağılımın beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi kolayca hesaplanabilir,

$$E(X)=\sum_{x=0}^{1} xp^x(1-p)^{1-x}=p$$
$$V(X)=\sum_{x=0}^{1}(x-p)^2 p^x(1-p)^{1-x}=p^2(1-p)+p(1-p)^2$$
$$=p(1-p)[p+(1-p)]$$
$$=p(1-p)$$

Bu dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{1} e^{tx}f(x)=pe^{t}+(1-p)$$

biçiminde kolayca elde edilir.

Binom Dağılımı

Bernoulli denemesinin n defa tekrar edildiği, her bir denemenin birbirinden bağımsız gerçekleştirildiği ve denemelerdeki p başarısı olasılığının değişmediği bir rasgele deneme ele alınsın. Bu rasgele denemede X raslantı değişkeni, n denemenin kaçında başarılı durumun gözlemlendiğini göstersin. Bu durumda X raslantı değişkeninin alacağı değerler $0,1,\ldots,n$ olacaktır.

Başarılı ve başarısız sonuçların gözlemlendiği n deneme: $\underbrace{B^+B^-B^+B^+B^-\ldots B^+B^-B^-}_{n\ deneme}$

Şimdi bu n deneme içerisinde x tanesinde başarılı durum gözlemlensin bu durumda (n-x) tanesinde başarısız durum gözlemlenecektir: $\underbrace{B^+B^+B^+\ldots B^+}_{x\ defa}\underbrace{B^-B^-\ldots B^-B^-}_{n-x\ defa}$

Herbir denemede başarı olasılığı sabit kaldığı için, n denemede x defa başarı gözlemlenme olasılığı

$$\underbrace{pppp\ldots p}_{x\ defa}\underbrace{qqq\ldots qq}_{n-x\ defa}=p^x(1-\text{p})^{n-x}, \qquad p+q=1 \text{ olacaktır.}$$

Binom Dağılımı

Bu x başarının hangi denemelerde gerçekleşeceği bilinmediği için, n denemede x başarılı sonuç kaç farklı şekilde elde edilir sorusunun cevabı $\binom{n}{x}$ kombinasyonu ile hesaplanır.

Tüm bu bilgiler birleştirildiğinde X raslantı değişkeni Binom dağılımı'na sahiptir denir ve olasılık fonksiyonu,

$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x=0,1,\ldots,n, \quad 0\le p\le 1$ biçiminde tanımlanır.

Binom dağılımının parametreleri n ve p'dir. Dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}f(x)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x+(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(pe^t\right)^x+(1-p)^{n-x}=\left[pe^t+(1-p)\right]^n$$

MÇF kullanarak dağılımın beklenen değerinin $E(X)=np$, varyansının ise $V(X)=np(1-p)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

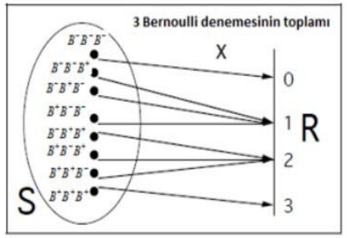
TEOREM 1: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ aynı p parametresi ile Bernoulli dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Bu raslantı değişkenlerinin toplamının dağılımı n ve p parametreleri ile Binom dağılımı olacaktır. $\sum_{i=1}^{n}X_i \sim \mathrm{B}(n,p)$

ÖRNEK: X_1, X_2, X_3 aynı p parametresi ile Bernoulli dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $X=X_1+X_2+X_3$ şeklinde verilen raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu ne olur.

Çözüm: Bağımsız 3 Bernoulli denemesine ilişkin örneklem uzayı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$S=\left\{B^+B^+B^+, B^+B^+B^-, B^+B^-B^+, B^-B^+B^+, B^+B^-B^-, B^-B^+B^-, B^-B^-B^+, B^-B^-B^-\right\}$$

Bu soruda X raslantı değişkeni S örneklem uzayının herbir noktasında gerçekleşen başarılı sonuç sayısını gösterir.



p başarı olasılığını gösterdiğine göre,

$f(0)=P(X=0)=(1-p)^3$

$f(1)=P(X=1)=3p(1-p)^2$

$f(2)=P(X=2)=3p^2(1-p)$

$f(3)=P(X=3)=p^3$

Elde edilen olasılıklara ilişkin olasılık fonksiyonu,

$f(x)=\binom{3}{x}p^x(1-p)^{3-x}, \qquad x=0,1,2,3 \quad 0\le p\le 1$

$B(3,p)$ parametreleri ile Binom dağılımı olur.

Poisson Dağılımı

İstatistikte önemli yer tutan bir başka dağılım Poisson dağılımıdır.

Poisson dağılımı belirli bir zaman / mekan aralığında nadir gözlemlenen olayların sayısına ilişkin olasılık dağılımını belirlemek amacıyla kullanılır.

Örneğin belirli bir zaman diliminde bir kavşakta meydana gelen kazaların sayısına ilişkin olasılık hesaplamalarında bu dağılımdan yararlanılır.

Dağılımın parametresi λ olup, ilgilenilen durumun ortalama kaç defa gözlemlendiğini ifade eder.

X raslantı değişkeni λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olsun, $X\sim \mathrm{P}(\lambda)$ bu durumda olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x=0,1,\ldots \quad \lambda>0$$

Poisson dağılımının moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^x}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

olarak elde edilir.

MÇF yardımıyla dağılımın beklenen değeri

$E(X)=\lambda$ ve varyansı

$V(X)=\lambda$ kolayca hesaplanabilir.

Şimdi kavşakta belirli bir zaman aralığında meydana gelen araç kazalarının sayısının olasılık dağılımını örneğimize geri dönelim. X raslantı değişkeni araç kazalarının sayısını göstersin.

Bu örnek ile Binom dağılımı ile Poisson dağılımı arasındaki ilişki açıklanmaya çalışılacaktır. Örneğin, ilgilendiğimiz zaman dilimi 1 hafta olsun. Bu 1 haftalık zaman dilimini n sayıda alt zaman dilimlerine böldüğümüzü varsayalım. Böldüğümüz alt zaman aralıkları öyle küçük aralıklar olsun ki o zaman dilimi içerisinde en fazla 1 tane kazanın gerçekleşebileceğini varsayalım. n zaman aralığının her birinde bir araba kazasının gerçekleşme olasılığını p ile gösterelim. Bu noktada n değerimiz çok büyük p değerimiz ise çok küçük olacaktır.

$P(\textit{alt zaman aralığında 1 kaza gerçekleşmesi})=p$

$P(\textit{alt zaman aralığında 1 kaza gerçekleşmemesi})=1-p$

$P(\textit{alt zaman aralığında 1'den çok kaza gerçekleşmesi})=0$ olarak tanımlansın.

Bu durumda bir hafta boyunca toplam kaza sayısı, 1 kaza gerçekleşen alt aralıkların sayılarının toplamına eşit olacaktır. Her bir alt aralıkta kaza gerçekleşmesi durumlarını da birbirinden bağımsız olarak kabul edersek, X raslantı değişkeninin dağılımı Binom dağılımına dönüşecektir. O zaman n ve p parametreleri ile Binom dağılımına sahip bir raslantı değişkeninin dağılımının n değerimiz çok büyük p değerimiz ise çok küçük olduğunda Poisson dağılımına yakınsayacağı aşağıdaki gibi gösterilebilir.

λ parametresi 1 hafta içerisinde ortalama kaç kazanın gerçekleşeceğini gösterir.

Bu durumda $\lambda = np$ olacaktır. $n \to \infty$ da,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \\
&= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) \\
&= \frac{\lambda^x}{x!}\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{1}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}_{1}\right] \\
&= \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla X raslantı değişkeninin dağılımı Poisson dağılımına yakınsar.

Daha önce yaratıcı fonksiyonlardan bahsederken her bir olasılık fonksiyonuna (olasılık yoğunluk fonksiyonuna) karşılık gelen bir tane moment çıkaran fonksiyon olduğu söylenmişti.

Bu ispatı MÇF'lar üzerinden göstermek istersek,

$$X \sim B(n,p) \Rightarrow M_X(t) = \left(1+p\left(e^t-1\right)\right)^n$$

$$Y \sim P(\lambda) \Rightarrow M_Y(t) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$M_X(t) = \left(1+p\left(e^t-1\right)\right)^n = \left(1+\frac{\lambda}{n}\left(e^t-1\right)\right)^n = e^{\lambda\left(e^t-1\right)} = M_Y(t)$$

TEOREM 2: X raslantı değişkeni n ve p parametreleri ile Binom dağılımına sahip olsun. $n \to \infty,\ p \to 0$ durumunda $\lambda = np$ ile X raslantı değişkeninin olasılık dağılımı $\lambda > 0$ parametresi ile Poisson dağılımına yakınsar.

$$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\quad x = 0,1,2,\dots$$

Teoreme dikkat edilirse büyük n değerleri için $\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ ifadesinin hesaplanması kolay olmayacaktır. Bu nedenle p yeterince küçük olduğu sürece $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ yakınsak değeri kullanılır.

Hipergeometrik Dağılım

Bu dağılımı bir örnek üzerinden açıklayalım. N elemanlı bir veri kümesinde, m tane aynı özelliğe sahip birimler olsun. Örneğin bir torbanın içinde N tane bilye bulunsun ve bu bilyelerden m tanesi kırmızı renkte, geri kalanları ise siyah renkte olsun. N elemandan n bilye, çekilen bilye yerine konmamak koşulu altında, $\binom{N}{n}$ farklı şekilde seçilebilir. Her bir örneklemin seçilme olasılığı eşit kabul edileceğinden n elemanlı bir S örnekleminin seçilmesi olasılığı,

$P(E_i) = \frac{1}{\binom{N}{n}},\ \forall E_i \in S,$ olarak hesaplanır.

X r.d. seçilen örneklemdeki kırmızı bilyelerin sayısını göstersin. Bu durumda S örnekleminde x tane kırmızı bilye var ise, (n-x) tane de siyah bilye olacaktır. m tane kırmızı bilyenin içerisinden x tanesi, $\binom{m}{x}$ farklı şekilde seçilir. Benzer şekilde siyah bilyeler için de $\binom{N-m}{n-x}$ olacaktır. Bu bilgileri kullanarak X r.d. hipergeometrik dağılıma sahip ise olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}},\quad x = 0,1,\dots,n,\quad x \le m,\quad n-x \le N-m$$

Poisson dağılımında bahsettiğimiz gibi m ve n değerleri çok büyük olduğunda $\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$ olasılıklarının hesaplanması da karmaşıklaşacaktır. Dolayısıyla Hipergeometrik ve Binom dağılımları arasında aşağıdaki yakınsama kullanılır,

TEOREM 3: X raslantı değişkeni Hipergeometrik dağılıma sahip olsun. $m,n \to \infty$ da $\frac{m}{m+n} = p,\ 0 < p < 1$ koşulu altında

$$\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x = 0,1,\dots,n \text{ olur.}$$

$$f(x)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{m!}{(m-x)!x!}\frac{(N-m)!}{(n-x)!(N-m-n+x)!}\frac{(N-n)!n!}{N!}$$

$$=\binom{n}{x}\frac{m!}{(m-x)!}\frac{(N-m)!}{(N-m-n+x)!}\frac{(N-n)!}{N!}$$

$$=\binom{n}{x}\frac{\left[m(m-1)(m-2)\dots(m-x+1)\right]\left[(N-m)(N-m-1)\dots(N-m-(n-x)+1)\right]}{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}$$

$$=\binom{n}{x}\frac{m^x}{m^x}m(m-1)(m-2)\dots(m-x+1)\frac{(N-m)^{n-x}}{(N-m)^{n-x}}(N-m)(N-m-1)\dots(N-m-(n-x)+1)$$
$$\frac{N^n}{N^n}\frac{1}{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}$$

$$=\binom{n}{x}m^x\left[1\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{(x-1)}{m}\right)\right](N-m)^{n-x}\left[1\left(1-\frac{1}{N-m}\right)\dots\left(1-\frac{(n-x-1)}{N-m}\right)\right]$$
$$\frac{1}{N^n}\left[\frac{1}{1\left(1-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}\right]$$

$$=\binom{n}{x}\frac{m^x(N-m)^{n-x}}{N^n}\dots(kesirli\ kısımlar)$$

$$=\binom{n}{x}\left(\frac{m}{N}\right)^x\left(\frac{N-m}{N}\right)^{n-x}=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

Hipergeometrik dağılım $\lambda=\frac{mn}{N}$ ile Poisson dağılımına yakınsar.

Binom ve Poisson Dağılımlarının Normal Dağılıma Yakınsaması

TANIM 1: X raslantı değişkeni ortalaması $-\infty<\mu<\infty$ ve varyansı $0<\sigma^2<\infty$ ile Normal dağılıma sahip olsun. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\qquad -\infty<x<\infty \text{ olarak tanımlanır.}$$

Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu: $M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

MÇF yardımı ile dağılımın beklenen değerinin $E(X)=\mu$ ve varyansının da $V(X)=\sigma^2$ olduğu kolayca gösterilebilir.

TANIM 2: Ortalaması 0 ve varyansı 1 olan Normal dağılım, Standart Normal dağılım olarak adlandırılır ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\qquad -\infty<x<\infty$$

Moment çıkaran fonksiyonu: $M_Z(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$

X r.d. n ve p parametreleri ile Binom dağılımına sahip olsun. $n\to\infty$ da r.d.nin dağılımı parametreleri $\mu=np$ $\sigma^2=np(1-p)$ olan Normal dağılıma yakınsar. Yakınsama hesaplanırken kesikli r.d. den sürekli r.d.nine geçiş için gerekli olan süreklilik düzeltmesi unutulmamalıdır. Binom dağılımında k negatif olmayan tam sayısı, normal dağılımda $\left[k-\frac{1}{2};k+\frac{1}{2}\right]$ aralığı şeklinde ele alınmalıdır. Verilen bu aralık süreklilik düzeltmesi olarak da adlandırılır.

TEOREM 5: X raslantı değişkeni n ve p parametreleri ile Binom dağılımına sahip olsun. $Z=\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ standart değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $n\to\infty$ da Standart Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonuna yakınsar.

$$M_Z(t)=M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=e^{-\mu t/\sigma}\left[1+p\left(e^{t/\sigma}-1\right)\right]^n \qquad \mu=np \quad \sigma=\sqrt{np-np^2}$$

$$\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=\frac{-\mu t}{\sigma}+n\ln\left[1+p\left(e^{t/\sigma}-1\right)\right]$$

$$=\frac{-\mu t}{\sigma}+n\ln\left[1+p\left\{\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3+\ldots\right\}\right]$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots$$

$$=\frac{-\mu t}{\sigma}+np\left[\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3+\ldots\right]-\frac{np^2}{2}\left[\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3+\ldots\right]^2$$

$$+\frac{np^3}{3}\left[\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3+\ldots\right]^3-\ldots$$

$$=\left(\frac{-\mu}{\sigma}+\frac{np}{\sigma}\right)t+\left(\frac{np}{2\sigma^2}-\frac{np^2}{2\sigma^2}\right)t^2+\left(\frac{np}{6\sigma^3}-\frac{np^2}{2\sigma^3}+\frac{np^3}{3\sigma^3}\right)t^3+\ldots \qquad \mu=np \text{ olduğu unutulmamalı}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{np-np^2}{2}\right)t^2+\frac{n}{\sigma^3}\left(\frac{p-3p^2+2p^3}{6}\right)t^3+\ldots \qquad \sigma=\sqrt{np(1-p)}$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{n}{\sigma^3}\left(\frac{p-3p^2+2p^3}{6}\right)t^3+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=\frac{1}{2}t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}M_Z(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$$

ÖRNEK: Albino hastalığı nadir görülen genetik bir bozukluktur. Avrupa'da 20000 kişiden 1'inde gözlenmektedir. Rasgele seçilen 1000 Avrupalı'dan 2 tanesinde bu rahatsızlığın gözlenmesi olasılığı nedir?

Çözüm: X: hastalık gözlenen kişi sayısı $X\sim \mathrm{B}\left(1000,\frac{1}{20000}\right)$

$$P(X=2)=\binom{1000}{2}\left(\frac{1}{20000}\right)^2\left(1-\frac{1}{20000}\right)^{1000-2}=0,001187965$$

n>50 ve p<0,1 ($np<5$ koşuluna da bakılabilir) olduğu için Binom dağılımının Poisson dağılımına yakınsaması ile de soru çözülebilir,

$$\lambda=np=1000\frac{1}{20000}=0,05$$

$$P(X=2)=\frac{(0,05)^2e^{-0,05}}{2!}=0,001189037$$

TEOREM 6: X raslantı değişkeni λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olsun. $Z=\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ standart değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $n\to\infty$ da Standart Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonuna yakınsar.

$$M_X(t)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

$$M_Z(t)=\exp\left(-t\sqrt{\lambda}\right)M_X\left(t/\sqrt{\lambda}\right)=\exp\left(-t\sqrt{\lambda}\right)\exp\left(\lambda\left(e^{t/\sqrt{\lambda}}-1\right)\right)$$

$$=\exp\left(-t\sqrt{\lambda}+\lambda\left(t\lambda^{-1/2}+\frac{t^2\lambda^{-1}}{2}+\frac{t^3\lambda^{-3/2}}{6}+\ldots\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}M_Z(t)=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3\lambda^{-1/2}}{6}+\ldots\right)$$

$$=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Bu durumda,

$\lim_{n\to\infty}M_Z(t)=e^{t^2/2}$, $Z\sim \mathrm{N}(0,1)$ olacaktır. $n\to\infty$ da $Z=\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ raslantı değişkeninin limit dağılımı Standart Normal dağılım olduğu için, X raslantı değişkeninin dağılımı da ortalaması $\mu=\lambda$ ve varyansıda $\sigma^2=\lambda$ olan Normal dağılıma yakınsar, $X\sim \mathrm{N}(\lambda,\lambda)$.

ÖRNEK: Bir fabrikada üretilen elektrik çiplerinden ortalama 50 tanesinden 1 tanesi hatalı çıkmaktadır. Üretim bandından 300 çip rasgele seçiliyor. En fazla 8 tanesinin hatalı bulunması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: X: Hatalı üretilen çip sayısı $X\sim \mathrm{B}\left(300,\frac{1}{50}\right)$

$$P(X\geq 8)=1-P(X\leq 7)$$

$$=1-\{P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=7)\}$$

$$=1-\left\{\binom{300}{0}\left(\frac{1}{50}\right)^0\left(\frac{49}{50}\right)^{300}+\ldots+\binom{300}{7}\left(\frac{1}{50}\right)^7\left(\frac{49}{50}\right)^{293}\right\}$$

$$=1-0,745382\approx 0,25641$$

n>50 ve p<0,1 olduğu için Binom dağılımının Poisson dağılımına yakınsaması ile de soru çözülebilir,

$$\lambda=np=300\frac{1}{50}=6$$

$$P(X\geq 8)=1-P(X\leq 7)$$

$$=1-\left\{\frac{e^{-6}6^0}{0!}+\ldots+\frac{e^{-6}6^7}{7!}\right\}=1-0,7440=0,2560$$

ÖRNEK: Devam eden bir üretim sürecinde üretilen lastiklerin %8'i kusurlu çıkmaktadır. Bu süreçten 1600 lastik rasgele seçiliyor en fazla 150 tanesinin kusurlu çıkması olasılığı nedir?

Çözüm: n>30 olduğu için Binom dağılımının Normal dağılıma yakınsaması özelliği kullanılabilir.

$$X \sim \mathrm{B}(1600, 0.08) \quad \Rightarrow \quad \mu = np = 128 \quad \sigma = \sqrt{npq} = 10.85$$

$$P(X \le 150) = P(X \le 150.5) = P\left(Z \le \frac{150.5 - 128}{10.85}\right) = P(Z \le 2.07) = 0.9808$$

Bu soruda tam olarak 150 hatalı lastik çıkması olasılığı sorulsaydı,

$$P(X = 150) = P(149.5 < X < 150.5) = P\left(\frac{149.5 - 128}{10.85} < Z < \frac{150.5 - 128}{10.85}\right)$$

$$= P(1.98 < Z < 2.07) = 0.9808 - 0.9761 = 0.0047$$

ÖRNEK: Bir web sitesi saniyede ortalama 5/3 tane talep almaktadır. Web sitesinin bağlı olduğu server bir dakika içerisinde 120 veya daha fazla talep geldiğinde çökmektedir. Server'ın önümüzdeki 1 dakika da çökme olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Web sitesi saniyede 5/3 talep alıyorsa bir dakika içerisinde 60(5/3)=100 talep almaktadır. Buna göre soruyu çözmeden önce $\lambda = 100$ olarak değiştirilmelidir. X raslantı değişkeni, $\lambda = 100$ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olacaktır. Şimdi istenilen olasılık aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$P(X \ge 120) = 1 - \sum_{x=0}^{119} e^{-100} \frac{100^x}{x!} \approx 0.0282$$

Şimdi aynı olasılığı Poisson dağılımının Normal dağılıma yakınsaması özelliğini kullanarak tekrar hesaplayalım,

$$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(100, 100)$$

$$P(X \ge 120) \approx P(X > 119.5) = P\left(\frac{X - 100}{10} > \frac{119.5 - 100}{10}\right)$$

$$= P(Z > 1.95)$$

$$= 0.0256$$