İST-265 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK

UYGULAMA-9 ÇÖZÜMLER

1) X sürekli raslantı değişkeni için moment çıkaran fonksiyon $M_x(t) = \frac{k}{k-t},\ k>0$ biçiminde tanımlanıyor. Ayrıca bu raslantı değişkeninin orijine göre 2. Momentinin 1/2 olduğu biliniyor. Buna göre,

- **a)** k sabitini hesaplayınız.
- **b)** X raslantı değişkeninin varyansını bulunuz.
- **c)** Y=4X+2 biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin moment çıkartan fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a)

$$\left.\frac{d}{dt}M_x(t)\right|_{t=0} = E(X)$$: Orijine göre 1. moment

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}M_x(t)\right|_{t=0} = E(X^2)$$: Orijine göre 2. moment

$$\left.\frac{d}{dt}M_x(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{k-t}\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{-k}{(k-t)^2}\right|_{t=0} = -\frac{1}{k^2}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}M_x(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{-k}{(k-t)^2}\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{2k}{(k-t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{k^2}$$

2. moment olan $\frac{2}{k^2}$ ifadesinin $\frac{1}{2}$ olduğu biliniyor. Bu durumda k = 2 çıkacaktır.

Son durumda moment çıkaran fonksiyon;

$M_x(t) = \frac{2}{2-t}$ olur.

b) $V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$

a şıkkında orijine göre 1. momentte k=2 olarak yerine yazarsak $E(X)=-\dfrac{1}{4}$ olarak bulunacaktır. 2. moment ise soruda $\dfrac{1}{2}$ verilmiştir. Varyansta yerlerine yazarsak;

$V(X)=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{-1}{4}\right)^2=\dfrac{7}{16}$ olarak bulunur.

c) $Y=4X+2$

$M_x(t)=E\left(e^{tX}\right)$

$M_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{t(4X-2)}\right)=E\left(e^{X4t-2t}\right)=E\left(e^{X4t}e^{-2t}\right)$

$=E\left(e^{X4t}\right)E\left(e^{-2t}\right)=M_X(4t)\,.\,e^{-2t}\;=\dfrac{2}{2-4t}e^{-2t}\;=\dfrac{e^{-2t}}{1-2t}$

olarak bulunur.

2) X sürekli raslantı değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2} & , x\geq 0\\ 0 & ,ö.d.\end{cases}$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

a) Moment çıkaran fonksiyonu bulunuz.
b) Moment çıkaran fonksiyondan yararlanarak beklenen değer ve varyansı bulunuz.

Çözüm:

a)

$$M_x(t)=E\left(e^{tX}\right)=\int_0^\infty e^{tx}f(x)dx=\int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{2}e^{-x/2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{2}-t\right)}dx=\frac{1}{2}\left(e^{-x\left(\frac{1}{2}-t\right)}\frac{-2}{\left(\frac{1}{2}-t\right)}\right)_0^\infty=\frac{1}{2}\left[0-\left(\frac{-2}{1-2t}\right)\right]=\frac{1}{1-2t}$$

olarak bulunur.

b) Orijine göre 1.moment : Beklenen değer

Orijine göre 2.moment : $E(X^2)$ olduğu biliniyor. Bu durumda moment çıkaran fonksiyonun 1. ve 2.türevini alırsak momentlere geçiş yapabiliriz.

$$E(X)=\mu_1'=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-2t}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}(1-2t)^{-1}\right|_{t=0}=\left.(-1)(-2)(1-2t)^{-2}\right|_{t=0}=2$$

$$E(X^2)=\mu_2'=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left(2(1-2t)^{-2}\right)\right|_{t=0}=\left.2(-2)(-2)(1-2t)^{-3}\right|_{t=0}=8$$

$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=8-2^2=4$ olarak bulunur.

Aslında verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu $\theta=\frac{1}{2}$ parametreli üstel dağılıma eşittir. Üstel dağılımın beklenen değerinin $\frac{1}{\theta}$, varyansının ise $\frac{1}{\theta^2}$ olduğunu bilinmektedir. $\theta=\frac{1}{2}$ yerine yazılırsa beklenen değer 2, varyans ise 4 çıkacaktır.

3) Bir yerleşim yerindeki nüfus içinde solakların oranı %1'dir. Rasgele seçilen 200 kişiden en fazla 196'sının solak olmaması olasılığı nedir?

Çözüm:

X : Rasgele seçilen bir kişinin solak olması olasılığı

dersek, istenilen olasılık $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$ olacaktır.

n=200, p=0.01 ile Binom dağılımına sahiptir.

Bilindiği üzere $n \to \infty$, $p \to 0$ iken Binom(n,p) , $\lambda = np$ ile Poission(λ) yakınsar.

$\lambda = np = 200.(0.01) = 2$ olarak elde edilir.

$$1 - P(X \leq 3) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}\ 2^0}{0!} + \frac{e^{-2}\ 2^1}{1!} + \frac{e^{-2}\ 2^2}{2!} + \frac{e^{-2}\ 2^3}{3!}\right] = 1 - 0.857 \cong 0.143$$

olarak bulunur.

Binom ile çözülürse;

$$P(X \geq 4) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\right] =$$

$$1 - \left[\binom{200}{0}(0.01)^0(0.99)^{200} + \binom{200}{1}(0.01)^1(0.99)^{199} + \binom{200}{2}(0.01)^2(0.99)^{198} + \binom{200}{3}(0.01)^3(0.99)^{197}\right]$$

$$= 1 - [0.13397 + 0.27066 + 0.27203 + 0.181355] = 1 - 0.858015 = 0.14198$$

4) İyi bir futbol kalecisinin atılan şutları kurtarması olasılığı 0.8 olarak hesaplanıyor. Bu kaleciye arka arkaya 100 şut çekiliyor. Buna göre kalecinin en az 90 şutu kurtarması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

$P(X \geq 90)$

n=100, p=0.8 ile Binom dağılımına sahiptir.

$n \to \infty$ için $Binom(n, p) \to Normal(np,\ npq)$ ile yakınsar.

$$np = 100\ (0.8) = 80$$
$$npq = 100\ (0.8)(0.2) = 16 = \sigma^2$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{89.5-80}{\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq 2.375) = 0.5 - 0.4911 = 0.0089$$

olarak bulunur.

5) X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & , x > 0 \\ 0 & , ö.d. \end{cases}$$

$Y = e^X$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$Y = e^X$ diferansiyellenebilir ve düzgün artan bir fonksiyondur. O halde;

$g(y) = f(x)\dfrac{dx}{dy}$, $x = h^{-1}(y)$ ile Y'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunabilir.

$y = e^x$ grafiği

$$Y = e^X \rightarrow \ln y = \ln e^x \rightarrow x = \ln y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

olarak bulunur. g(y) 'de yerine yazarsak;

$$g(y) = f(x)\frac{dx}{dy} = 3e^{-3(\ln y)}\frac{1}{y} = 3\frac{1}{y^3}\frac{1}{y} = \frac{3}{y^4}$$

$$g(y) = \frac{3}{y^4} \ , \ y > 1$$

olarak bulunur.

6) $X \sim U(-1\,,1)$ ise $Y = |X|$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$Y = |X|$ düzgün artan veya düzgün azalan olmadığı için dağılım fonksiyonu yönteminden yararlanırız.

Düzgün dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & ,ö.d. \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. Soruda verilen a=-1 ve b=1 yerlerine yazılırsa X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & , -1 < x < 1 \\ 0 & ,ö.d. \end{cases}$$

olur.

$$G(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = \int_{-y}^{y} f(x)dx$$

$$= \int_{-y}^{y} \frac{1}{2}dx = \left(\frac{1}{2}x\right)_{-y}^{y} = \frac{1}{2}2y = y \quad , 0 < y < 1$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d}{dy}(y) = 1 \ , \ 0 < y < 1$$

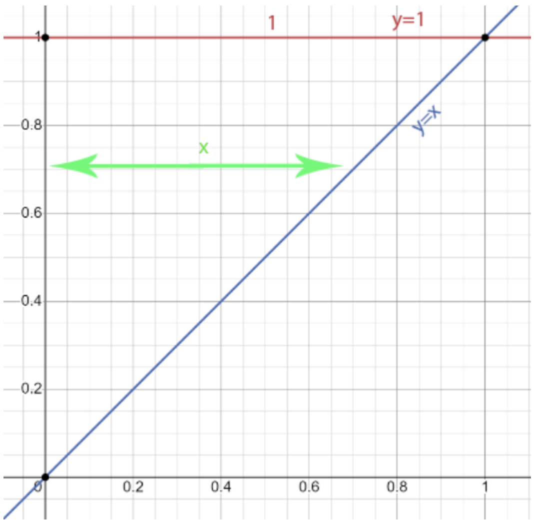
olarak bulunur.

7) X ve Y raslantı değişkenlerine ait bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(x,y)=8xy,\quad 0\le x\le y\le 1$ olarak verilmiştir. Buna göre,

- **a)** X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.
- **b)** X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.
- **c)** $f(x\mid y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
- **d)** $E\left(Y\mid X=\frac{1}{2}\right)$ bulunuz.
- **e)** $E\left(E(X\mid Y)\right)$ bulunuz.

Çözüm:



a) $f_X(x)=\int f(x,y)dy=\int_x^1 8xy\ dy=4xy^2\Big|_x^1=4x-4x^3=4x(1-x^2)$, $0\le x\le 1$

$f_Y(y)=\int f(x,y)dx=\int_0^y 8xy\ dx=4x^2y\Big|_0^y=4y^3$, $0\le y\le 1$

b) X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y)=f_X(x)\ f_Y(y)$ koşulunu sağlamalıdır.

$f_X(x)\ f_Y(y)=4x(1-x^2)4y^3\ne 8xy$ olduğundan bağımsız değillerdir.

c) $f(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{8xy}{4y^3}=\dfrac{2x}{y^2}$, $0\le x\le y\le 1$ olarak bulunur.

d) $E\left(Y/X=\frac{1}{2}\right)=\int_x^1 y\ f(y/x)dy$

$f(y/x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{8xy}{4x(1-x^2)}=\dfrac{2y}{1-x^2}$, $0\le x\le y\le 1$

$$\int_x^1 y\ f(y/x)\,dy = \int_x^1 y\ \frac{2y}{1-x^2}\,dy = \frac{2}{1-x^2}\int_x^1 y^2\ dy = \frac{2}{1-x^2}\left(\frac{y^3}{3}\right)_{y=x}^{1}$$

$$= \frac{2}{1-x^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{2(1-x^3)}{3(1-x^2)}$$

$E(Y/X=x) = \dfrac{2(1-x^3)}{3(1-x^2)}$ olarak elde edilir. Burada x=1/2 yerine yazılırsa;

$E\left(Y/X=\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2(1-(1/2)^3)}{3(1-(1/2)^2)} = \dfrac{7}{9}$ olarak bulunur.

e) $E\left(E(X/Y)\right) = E(X)$ olduğu bilinmektedir. Buna göre ;

$$E(X) = \int_0^1 x\ f_X(x)\,dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2)\ dx = \int_0^1 4x^2 - 4x^4\ dx$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{8}{15}$$

olarak bulunur.

8) X ve Y raslantı değişkenlerine ait bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{7}(x+2y)\ ,\ 0<x<1\ ,\ 1<y<2\\ 0 \qquad\qquad\qquad ,\ ö.d.\end{cases}$$

Buna göre,

a) $E(XY)$ bulunuz.

b) $\rho(X,Y)$ bulunuz.

Çözüm:

a) $E(XY)=\int_0^1\int_1^2 xy\ f(x,y)\ dy\,dx=\int_0^1\int_1^2 xy\ \frac{2}{7}(x+2y)\,dy\,dx$

$$=\frac{2}{7}\int_0^1\int_1^2(x^2y+2xy^2)\,dy\,dx=\frac{2}{7}\int_0^1\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{2xy^3}{3}\right)_1^2 dx=\frac{2}{7}\int_0^1\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{14x}{3}\right)dx$$

$$=\frac{2}{7}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{7x^2}{3}\right)_0^1=\frac{17}{21}$$

olarak bulunur.

b) $\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$ olduğu biliniyor. Bu durumda $E(X),E(Y),V(X),\,V(Y)$ bulunması lazım.

$$f_X(x)=\int_1^2\frac{2}{7}(x+2y)dy=\frac{2}{7}\left(xy+y^2\right)\Big|_1^2=\frac{2(x+3)}{7}\quad ,0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_0^1\frac{2}{7}(x+2y)dx=\frac{2}{7}\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Bigg|_0^1=\frac{4y+1}{7}\quad ,1<y<2$$

$$E(X)=\int_0^1 x\ f_X(x)dx=\int_0^1 x\ \frac{2(x+3)}{7}dx=\frac{2}{7}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)_0^1=\frac{11}{21}$$

$$E(Y)=\int_1^2 y\ f_Y(y)dy=\int_1^2 y\left(\frac{4y+1}{7}\right)dy=\frac{1}{7}\left(\frac{4y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right)_1^2=\frac{65}{42}$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\ f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\ \frac{2(x+3)}{7}dx=\frac{2}{7}\left(\frac{x^4}{4}+x^3\right)_0^1=\frac{5}{14}$$

$$E(Y^2)=\int_1^2 y^2\ f_Y(y)dy=\int_1^2 y^2\left(\frac{4y+1}{7}\right)dy=\frac{1}{7}\left(y^4+\frac{y^3}{3}\right)_1^2=\frac{38}{21}$$

Şimdi de varyansları hesaplayalım,

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{5}{14}-\left(\frac{11}{21}\right)^2=0.08277$$

-

$$V(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{38}{21}-\left(\frac{65}{42}\right)^2=0.75550$$

$\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$, de yerlerine yazarsak;

$$\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}=\frac{\frac{17}{21}-\frac{11}{21}\left(\frac{65}{42}\right)}{\sqrt{(0.08277)(0.75550)}}=-0.004531=\rho(X,Y)$$

olarak bulunur.

9) X ve Y raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x,y) = kx^2 y \ , \ x^2 < y < 1$$

Buna göre,

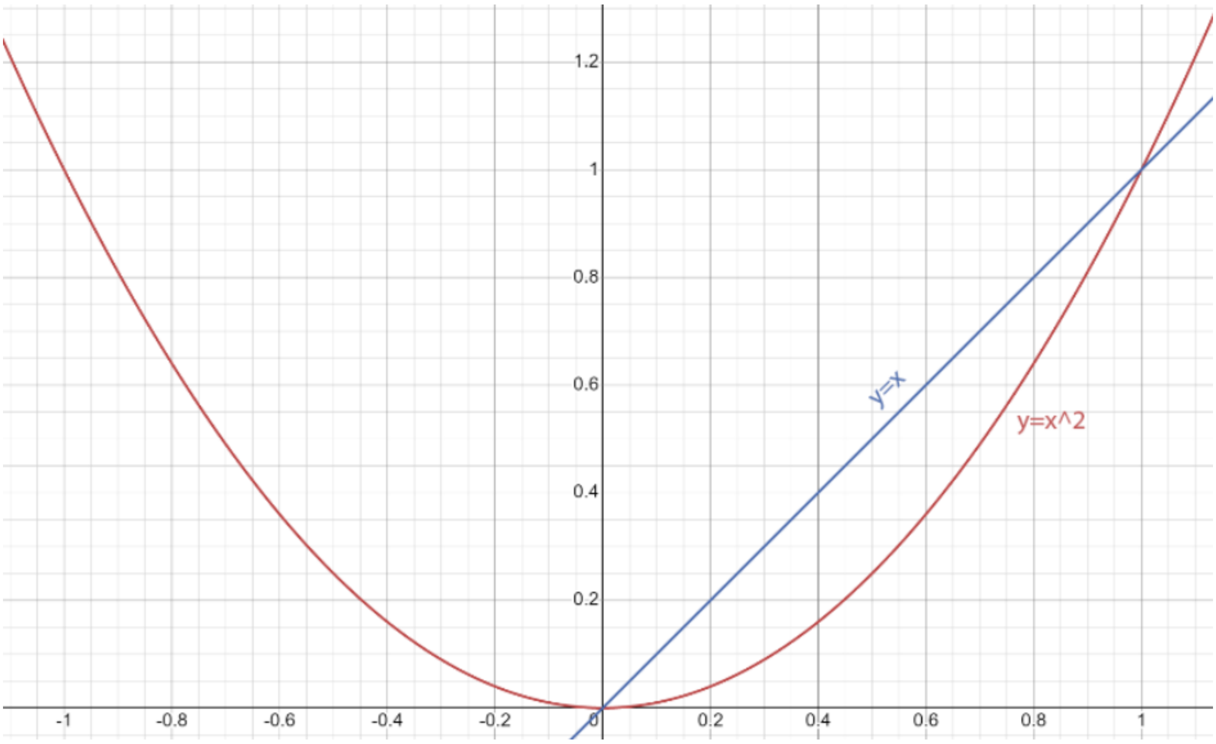
a) k sabitinin değerini bulunuz.

b) $P(X \geq Y)$ olasılığını hesaplayınız.

c) $P\left(Y \geq \frac{3}{4} \middle/ X = \frac{1}{2}\right)$ olasılığını hesaplayınız.

d) $E\left[E(X / Y)\right]$ ve $E(Y / X)$ beklenen değerlerini hesaplayınız.

Çözüm:



k sabiti bulunurken, olasılık yoğunluk fonksiyonunun sınırlar içerisinde integralinin 1 olduğunu biliyoruz;

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} k\, x^2 y \; dy\, dx = k\int_{-1}^{1} x^2 \left[\int_{x^2}^{1} y\, dy\right] dx = 1$$

$$= k\int_{-1}^{1} x^2 \frac{1-x^4}{2} dx = 1 \rightarrow \frac{4k}{21} = 1 \rightarrow k = \frac{21}{4}$$

olarak bulunur.

b)

$$P(X \geq Y) = \frac{21}{4}\int_0^1\int_{x^2}^{x} x^2 y \; dy\, dx = \frac{21}{4}\int_0^1 x^2\left[\int_{x^2}^{x} y \; dy\right] dx$$

$$= \frac{21}{4}\int_0^1 x^2\left(\frac{x^2 - x^4}{2}\right) dx \; = \frac{3}{20}$$

olarak bulunur.

c) $P\left(Y/X\right) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$f_x(x) = \frac{21}{4}\int_{x^2}^{1} x^2 \; y\, dy \; = \frac{21}{4}\left[x^2\left(\frac{y^2}{2}\right)_{x^2}^{1}\right] = \frac{21}{4}\;\frac{x^2 - x^6}{2} \; = \frac{21}{8}(x^2 - x^6) \; , \; -1 < x < 1$$

O halde;

$$P\left(Y/X\right) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2 y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = 2\frac{y}{1-x^4} \quad , \quad x^2 < y < 1$$

$$P\left(Y \geq \frac{3}{4}\middle/ X \; = \frac{1}{2}\right) = \int_{3/4}^{1} f\left(y\middle/\frac{1}{2}\right) dy = \int_{3/4}^{1} \frac{2y}{1-x^4 \,\big|_{1/2}} dy = \frac{32}{15}\int_{3/4}^{1} y\, dy = \frac{7}{15}$$

olarak bulunur.

d) $E\left[E(X/Y)\right] = E(X)$

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x \; f_X(x)\, dx = \frac{21}{8}\int_{-1}^{1} x(x^2 - x^6)\, dx = \frac{21}{8}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{8}\right]_{-1}^{1} \; = 0$$

$$E(Y/X) = \int_{x^2}^{1} y \; f(y/x) dy$$

$f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{2y}{1-x^4}$ o halde;

$$\int_{x^2}^{1} \frac{2y}{1-x^4}\, y\, dy \; = \frac{2}{1-x^4}\int_{x^2}^{1} y^2 dy \; = \frac{2}{1-x^4}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^6}{3}\right) = \frac{2(1-x^6)}{3(1-x^4)}$$

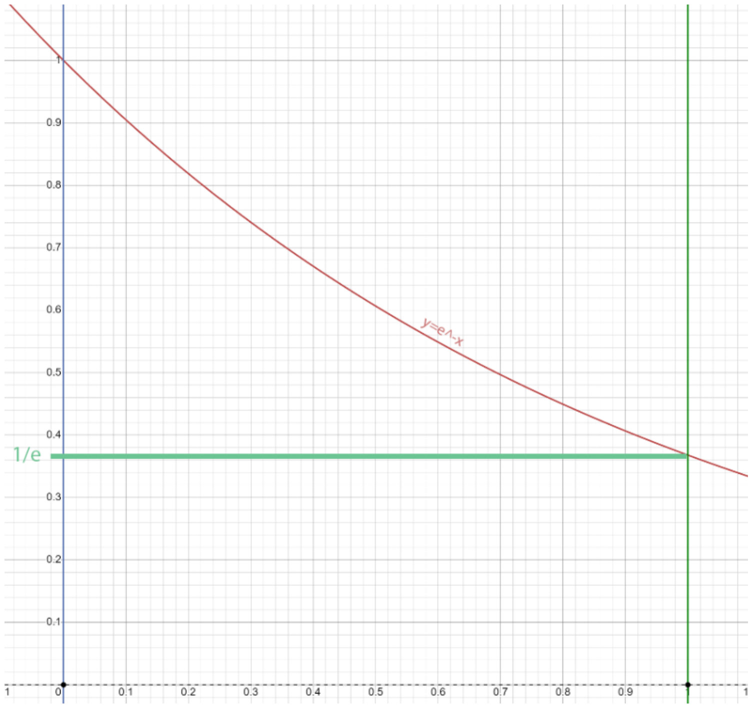
olarak bulunur.

10) X raslantı değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{6}{5}x(x+1)\ \ ,\ 0<x<1$$

Buna göre $Y=e^{-X}$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu dağılım fonksiyonu yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:



$$G(y)=P(Y\le y)=P\left(e^{-X}\le y\right)=P(-X\le \ln y)=P(X\ge -\ln y)$$

$$=\int_{-\ln y}^{1} f(x)dx=\int_{-\ln y}^{1}\frac{6}{5}x(x+1)dx=\frac{6}{5}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)_{-\ln y}^{1}=1-\frac{6}{5}\left(\frac{(-\ln y)^3}{3}+\frac{(-\ln y)^2}{2}\right),\ \frac{1}{e}<y<1$$

$G(y)=1-\frac{6}{5}\left(\frac{(-\ln y)^3}{3}+\frac{(-\ln y)^2}{2}\right)$ olarak elde edilir. Y raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunun türevi ise bize olasılık yoğunluk fonksiyonunu verir;

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=-\frac{6}{5}\left(\frac{\ln y}{y}-\frac{(\ln y)^2}{y}\right)=-\frac{6}{5}\ \frac{\ln y}{y}\ (1-\ln y)\ \ ,\ \frac{1}{e}<y<1$$ olarak bulunur.

11) X ve Y raslantı değişkenleri için bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x,y) = x e^{-x-y} \quad , \ x>0 \, , y>0$$

Buna göre Z = X+Y raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu dağılım fonksiyonu yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$G(z) = P(X+Y \le z) = \int_0^z \int_0^{z-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^z \int_0^{z-x} x e^{-x-y}\,dy\,dx = \int_0^z x e^{-x}\left(\int_0^{z-x} e^{-y} dy\right)dx$$

$$= \int_0^z x e^{-x}\left(-e^{-y}\right)_0^{z-x} dx = \int_0^z x e^{-x}(-e^{-(z-x)}+1)dx = \int_0^z (xe^{-x} - xe^{-z})dx = \underbrace{\int_0^z xe^{-x}dx}_{I} - \underbrace{\int_0^z xe^{-z}dx}_{II}$$

$\int_0^z xe^{-x}dx$: Kısmi integral alınır; $uv - \int v du \rightarrow \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{array}$

$$-xe^{-x}\Big|_{x=0}^{z} + \int_0^z e^{-x}dx = -ze^{-z} + \left(-e^{-x}\right)_0^z = -ze^{-z} - e^{-z} + 1 \ (I)$$

$$\int_0^z xe^{-z}dx = e^{-z}\int_0^z x\,dx = e^{-z}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^z = \frac{z^2}{2}e^{-z} \ (II)$$

$$G(z) = I - II = -ze^{-z} - e^{-z} - \frac{z^2}{2}e^{-z} + 1 \quad , \quad z>0$$

Bu ifadenin türevi Z raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu verir.

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = e^{-z} - e^{-z} + z\,e^{-z} + \frac{z^2}{2}e^{-z} - ze^{-z} = \frac{z^2}{2}e^{-z}$$

$$g(z) = \frac{z^2}{2}e^{-z}\ ,\ z > 0$$

olarak elde edilir.

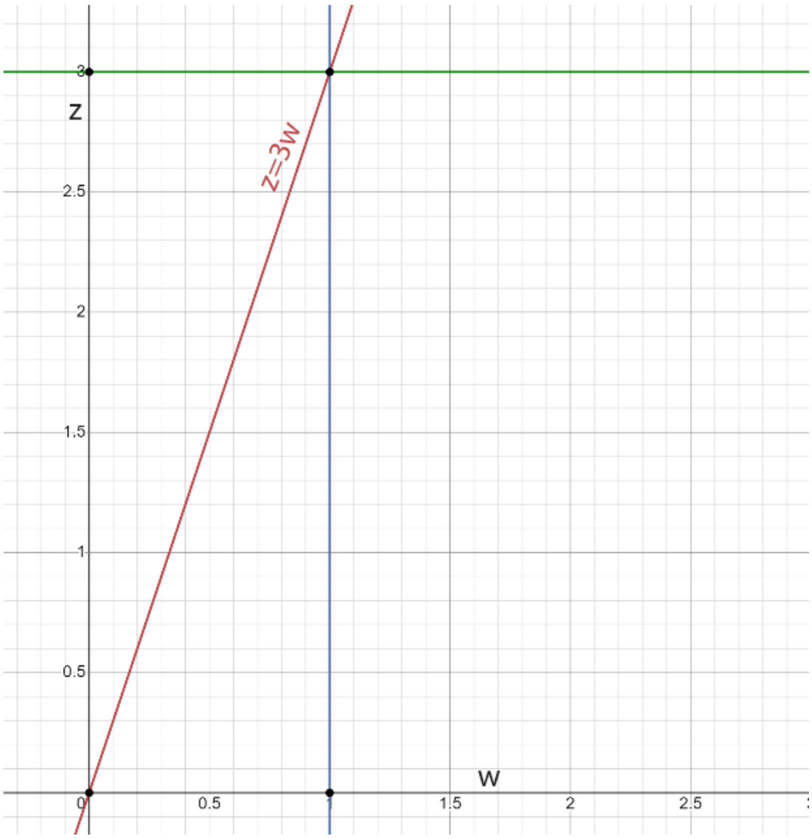
12) X ve Y sürekli ve bağımsız raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_X(x) = 2x \ , \ 0 \leq x \leq 1$$
$$f_Y(y) = \frac{y^2}{9} \ , \ 0 \leq y \leq 3$$

olarak verilmiştir. Buna göre Z = XY raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu dönüşüm yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} Z = XY \\ W = X \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = w \ \rightarrow \ h_1^{-1}(z,w) \\ y = \dfrac{z}{w} \rightarrow h_2^{-1}(z,w) \end{array}$$



olur. Şimdi Jacobian matrisini ve determinantını bulalım;

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dz} & \dfrac{dx}{dw} \\ \\ \dfrac{dy}{dz} & \dfrac{dy}{dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ \dfrac{1}{w} & -\dfrac{z}{w^2} \end{bmatrix} \ , \ \det J = -\frac{1}{w} \ , \ |\det J| = \frac{1}{w}$$ olarak bulunur.

$$g(z,w) = f\left(h_1^{-1}(z,w), h_2^{-1}(z,w)\right)\ |\det J|$$

$$= 2w\,\frac{z^2}{w^2}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{w} = \frac{2}{9}\,\frac{z^2}{w^2}\ ,\ \frac{z}{3} \le x \le 1$$

Şimdi bulunan bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunun W raslantı değişkenine göre integralini alırsak, Z raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulabiliriz.

$$g_Z(z) = \int_{z/3}^{1} g(z,w)\,dw = \int_{z/3}^{1} \frac{2}{9}\,\frac{z^2}{w^2}\,dw = \frac{2}{9}z^2\left[-\frac{1}{w}\right]_{z/3}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}z - \frac{2}{9}z^2\ \ ,0 \le z \le 3$$

olarak bulunur.

13) $X_1, X_2, \dots, X_n$ θ parametreli Üstel dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ise Y raslantı değişkeninin dağılımını moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

Üstel dağılıma sahip X raslantı değişkeni için moment çıkaran fonksiyon,

$M_X(t) = \dfrac{\theta}{\theta - t}$ olduğu bilinmektedir.

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1+tX_2+\dots+tX_n}\right) = E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)\dots E\left(e^{tX_n}\right)$$
$$= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\dots M_{X_n}(t) = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)\dots\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right) = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^n$$

Y raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu olan $\left(\dfrac{\theta}{\theta-t}\right)^n$ aynı zamanda θ, n parametreli Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonudur. Yani,

$Y \sim Gamma(n, \theta)$ dağılımına sahiptir.

14) $X_1 \sim Binom(10,\ 1/5),\ X_2 \sim Binom(24,\ 3/8),\ X_3 \sim Binom(100,\ 1/25)$ dağılımlarından bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Buna göre $Y = 4X_1 + 3X_2 - 2X_3$ doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.

Çözüm:

Binom(n,p) için beklenen değer np, varyansın ise npq olduğu bilinmektedir. Buna göre;

$$E(X_1) = 10\ \frac{1}{5} = 2, \qquad V(X_1) = 10\ \frac{1}{5}\ \frac{4}{5} = 1.6$$
$$E(X_2) = 24\ \frac{3}{8} = 9, \qquad V(X_2) = 24\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{8} = 5.625$$
$$E(X_3) = 100\ \frac{4}{25} = 16, \qquad V(X_3) = 100\ \frac{4}{25}\ \frac{21}{25} = 13.44$$

olarak hesaplanır.

$Y = 4X_1 + 3X_2 - 2X_3$ doğrusal birleşimi için; $a_1 = 4,\ a_2 = 3,\ a_3 = -2$ 'dir. O halde,

$$E(Y) = E(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) = E(4X_1 + 3X_2 - 2X_3) = 4E(X_1) + 3E(X_2) - 2E(X_3)$$
$$= 4\ (2) + 3\ (9) - 2\ (16) = 3$$

$$V(Y) = V(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) = a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + a_3^2V(X_3)$$
$= 16\ (1.6) + 9(5.625) + 4(13.44) = 129.985$ olarak bulunur.

15) X, Y, Z raslantı değişkenleri olmak üzere $E(X)=3$, $E(Y)=6$, $E(Z)=10$, $V(X)=1$ $V(Y)=3$, $V(Z)=5$, $Cov(X,Y)=-0.5$, $Cov(X,Z)=1$, $Cov(Y,Z)=0.1$ 'dir. Bu raslantı değişkenleri için $U_1 = 2X+3Y-Z$ ve $U_2 = 4X-2Y+Z$ doğrusal birleşimleri verilmiş olsun. Buna göre,

- **a)** U_1 ve U_2'nin beklenen değer ve varyanslarını bulunuz.
- **b)** Cov(U_1, U_2) bulunuz.
- **c)** $\rho(U_1,U_2)$ bulunuz.

Çözüm:

a)

$U_1 = 2X+3Y-Z$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$

$U_2 = 4X-2Y+Z$, $b_1 = 4$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$

$$E(U_1) = a_1E(X)+a_2E(Y)+a_3E(Z) = 2(3)\ +\ 3(6)\ -1(10) = 14$$

$$E(U_2) = b_1E(X)+b_2E(Y)+b_3E(Z) = 4(3)\ -\ 2(6)\ +\ 1(10) = 10$$

$$\begin{aligned} V(U_1) &= a_1^2V(X)+a_2^2V(Y)+a_3^2V(Z)+2\left[a_1a_2Cov(X,Y)+a_1a_3Cov(X,Z)+a_2a_3Cov(Y,Z)\right] \\ &= 4V(X)+9V(Y)+V(Z)+2\left[6Cov(X,Y)-2Cov(X,Z)-3Cov(Y,Z)\right] \\ &= 4(1)+9(3)+5+2\left[6(-0.5)-2(1)-3(0.1)\right] = 25.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(U_2) &= b_1^2V(X)+b_2^2V(Y)+b_3^2V(Z)+2\left[b_1b_2Cov(X,Y)+b_1b_3Cov(X,Z)+b_2b_3Cov(Y,Z)\right] \\ &= 16V(X)+4V(Y)+V(Z)+2\left[-8Cov(X,Y)+4Cov(X,Z)-2Cov(Y,Z)\right] \\ &= 16(1)+4(3)+5+2\left[-8(-0.5)+4(1)-2(0.1)\right] = 48.6 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

b)

$$\begin{aligned} Cov(U_1,U_2) &= a_1b_1V(X)+a_2b_2V(Y)+a_3b_3V(Z) \\ &\quad +(a_1b_2+a_2b_1)Cov(X,Y) \\ &\quad +(a_1b_3+a_3b_1)Cov(X,Z) \\ &\quad +(a_2b_3+a_3b_2)Cov(Y,Z) \\ &= 8V(X)-6V(Y)-V(Z)+8Cov(X,Y)-2Cov(X,Z)+5Cov(Y,Z) \\ &= 8(1)-6(3)-5+8(-0.5)-2(1)+5(0.1) = -20.5 \end{aligned}$$

bulunur.

c) $\rho(U_1,U_2) = \dfrac{Cov(U_1,U_2)}{\sqrt{V(U_1)\,V(U_2)}} = \dfrac{-20.5}{\sqrt{(25.4)(48.6)}} = -0.58347$ olarak bulunur.

16) $\theta_1 = \dfrac{1}{2}$ ve $\theta_2 = 3$ parametreli Üstel dağılımdan 25 ve 36 birimlik iki rasgele örneklem çekiliyor. Örneklem ortalamaları sırasıyla $\overline{X_1}$ ve $\overline{X_2}$ olarak veriliyor. Buna göre,

a) $E\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right)$ bulunuz.

b) $V\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right)$ bulunuz.

Çözüm:

Üstel dağılım için;

$$X_1 : E(X_1) = \frac{1}{\theta_1} = 2 \;,\; V(X_1) = \frac{1}{\theta_1^2} = 4$$

$$X_2 : E(X_2) = \frac{1}{\theta_2} = \frac{1}{3} \;,\; V(X_2) = \frac{1}{\theta_2^2} = \frac{1}{9}$$

a) $E\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right) = E(\overline{X_1}) - E(\overline{X_2}) = \dfrac{1}{\theta_1} - \dfrac{1}{\theta_2} = \dfrac{5}{3} = 1.6667$

b) $V\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right) = \dfrac{V(X_1)}{n_{X_1}} + \dfrac{V(X_2)}{n_{X_2}} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{1/9}{36} = 0.16308$ olarak bulunur.

17) Varyansı 0.16 olan θ parametreli Üstel dağılımdan çekilen n birimlik rasgele örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. Buna göre,

a) $P\left(\left|\overline{X} - 0.4\right| \le 0.1\right) = 0.95$ ise n kaçtır?

b) $P\left(\left|\overline{X} - 0.4\right| \ge 0.1\right) \le 0.05$ ise n kaçtır?

Çözüm:

a) Merkezi limit teoremi ile çözülür.

$$E(\overline{X}) = E(X) = \frac{1}{\theta} = 0.4$$

$$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{0.16}{n}$$

$$P\left(\left|\overline{X} - 0.4\right| \le 0.1\right) = P\left(\left|\overline{X} - \frac{1}{\theta}\right| \le 0.1\right) = 0.95$$

$$P\left(-0.1 \le \overline{X} - \frac{1}{\theta} \le 0.1\right) = 0.95 \;\rightarrow\; P\left(\frac{-0.1}{0.4/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X} - \frac{1}{\theta}}{0.4/\sqrt{n}} \le \frac{0.1}{0.4/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0.1}{0.4/\sqrt{n}} \le Z \le \frac{0.1}{0.4/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Standart normal dağılım tablosundan, 0.95 olasılığını veren sınırların 1.96 olduğu görülmektedir. Buna göre;

$\frac{0.1}{0.4/\sqrt{n}} = 0.95 \rightarrow n \cong 61$ olarak bulunur.

b) Chebyshev teoremi

$$P\left(\left|\overline{X} - 0.4\right| \ge 0.1\right) \le 0.05 = \frac{V(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}$$

$$\frac{V(X)}{n\varepsilon^2} = 0.05 \;\rightarrow\; \frac{0.16}{n(0.1)} = 0.05 \;\rightarrow\; n = 32$$

olarak bulunur.

18) Bir fabrika haftalık $\mu = 1500$ ortalama ve $\sigma^2 = 1$ varyans ile televizyon üretimi yapmaktadır. Seçilen bir hafta içerisinde üretilen televizyon sayılarının 1400 ile 1600 arasında olması olasılığının min değeri nedir?

Çözüm:

$$P\left(1400 \leq X \leq 1600\right) = P(1400-1500 \leq X-\mu \leq 1600-1500) = P(-100 \leq X-\mu \leq 100)$$
$$= P\left(\left|X-\mu\right| \leq 100\right)$$

Burada $\varepsilon = 100$ dersek Chebyshev eşitsizliğinden alt sınırı bulabiliriz.

$$P\left(\left|X-\mu\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \rightarrow P\left(\left|X-\mu\right| \leq 100\right) \geq 1-\frac{1}{100^2} = 0.999$$

olarak min olasılık değerini bulunur.

19) X raslantı değişkeni için olasılık fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} 1/4 \ , & x=1 \\ 3/4 \ , & x=2 \end{cases}$ biçiminde veriliyor.

Buna göre,

a) W=2X-1 raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

b) U=1/X olmak üzere $Cov(W,U)$ hesaplayınız.

Çözüm:

a) $W = 2X-1$ için,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$
$$M_W(t) = E(e^{tW}) = E(e^{t(2x-1)}) = E(e^{2xt}e^{-t}) = e^{-t}E(e^{2xt})$$
$$E(e^{2xt}) = \sum_x e^{2xt} f(x) = e^{2t}\frac{1}{4} + e^{4t}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}e^{2t}(1+3e^{2t})$$

$M_W(t) = e^{-t}\frac{1}{4}e^{2t}(1+3e^{2t}) = \frac{e^t}{4}(1+3e^{2t})$ olarak bulunur.

b) $Cov(W,U) = E(WU) - E(W)E(U)$

$$E(W) = E(2X-1) = 2E(X)-1 = 2\frac{7}{4}-1 = \frac{5}{2}$$

$$E(U) = E(X^{-1}) = \sum_x x^{-1} f(x) = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$
$$E(WU) = E\left(\frac{2X-1}{X}\right) = E\left(2-\frac{1}{X}\right) = 2-E\left(\frac{1}{X}\right) = 2-\frac{5}{8} = \frac{11}{8}$$

$Cov(W,U) = \frac{11}{8} - \frac{5}{2}\frac{5}{8} = \frac{22-25}{16} = -\frac{3}{16}$ olarak bulunur.

20) $X_1 \sim Normal(0, 1)$, $X_2 \sim Normal(2, 5)$, $X_3 \sim Normal(3, 9)$, $X_4 \sim Normal(1, 1)$ dağılımlarına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Bu raslantı değişkenlerinden yararlanarak,

a) χ_4^2 dağılımına sahip,

b) $F_{2,2}$ dağılımına sahip raslantı değişkenlerini oluşturunuz.

Çözüm:

$$X_1 \sim N(0,1) \quad \rightarrow \quad X_1^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_2 - 2}{\sqrt{5}} \sim N(0,1) \quad \rightarrow \quad \frac{(X_2 - 2)^2}{5} \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_3 - 3}{\sqrt{9}} \sim N(0,1) \quad \rightarrow \quad \frac{(X_3 - 3)^2}{9} \sim \chi_1^2$$

$$\frac{X_4 - 1}{\sqrt{1}} \sim N(0,1) \quad \rightarrow \quad (X_4 - 1)^2 \sim \chi_1^2$$

Teorem 1'e göre standartlaştırılmış raslantı değişkenlerinin kareleri alınırsa 1 serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılır (χ_1^2).

a) Teorem 2'den,

$$X_1^2 + \frac{(X_2 - 2)^2}{5} + \frac{(X_3 - 3)^2}{9} + (X_4 - 1)^2 \sim \chi_4^2$$

şeklinde oluşturulabilir.

b) F dağılımının Ki-Kare ilişkisinden;

$$\frac{\dfrac{X_1^2 + \dfrac{(X_2 - 2)^2}{5}}{2}}{\dfrac{\dfrac{(X_3 - 3)^2}{9} + (X_4 - 1)^2}{2}} \sim F_{2,2}$$

Düzenlenirse,

$$\frac{45X_1^2 + 9(X_2 - 2)^2}{5(X_3 - 3)^2 + 45(X_4 - 1)^2} \sim F_{2,2}$$ olarak bulunur.

21) X raslantı değişkeni için olasılık fonksiyonu $f(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$, $x=1,2,3,\ldots$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre,

a) Y=1/X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu ne olur?

b) $P(Y \geq 1/2)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

a) $Y=\frac{1}{X}$ için olasılık fonksiyonu için,

$$g(y)=f_X[h^{-1}(y)]=f_X(1/y)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{y}-1} \quad , \ y=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,0$$ olarak bulunur.

b) $P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right)=P\left(Y=\frac{1}{2}\right)+P(Y=1)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{9}$

olarak bulunur.