DUALİTE

Her doğrusal programlama modelinin ilişkili olduğu bir dual (ikiz) problem bulunmaktadır. Bir doğrusal programlama probleminin kendisi ile aynı verileri kullanan ve dolayısıyla aynı optimal çözümü veren eş değer modeline ikiz veya dual adı verilmektedir. Primal problemlerde optimizasyon amacı maksimizasyonsa, bu durumda dual problemde amaç minimizasyon olmaktadır. Doğrusal programlama modelleri için dual formülasyon tanımlanmasının bazı avantajları vardır:

Doğrusal programlamada kısıt sayısı arttıkça problemin çözümü zorlaşmakta, genellikle dual model primal modele göre daha az kısıt içerdiğinden, daha az hesaplama yapılarak sonuç elde edilebilmektedir.

Bir primal problemin dual çözümü matematiksel özelliklerinin yanı sıra önemli ekonomik yorumlar getirir. Diğer taraftan dual modelin çözülmesi sonucunda birtakım ek yorumlara da ulaşılabilmektedir.

Normal Maksimum / Minimum Problemlerin Dualinin Alınması

Normal Maksimum Problemi:

Primal Model

$$\text{Maks } Z_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Dual Model

$$\text{Min } Z_D = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$
$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$$

Normal Minimum Problemi:

Primal Model	Dual Model
$\text{Min } Z_P = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$	$\text{Maks } Z_D = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$	$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leq c_2$
.	.
.	.
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$	$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n$
$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$	$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$

Normal DP Problemleri için Primal Problemden Dual Problemi Bulma Kuralları:

1) Eğer primal problem maksimizasyon formunda ise, dual problem minimizasyon formundadır. Eğer primal problem minimizasyon formunda ise dual problem maksimizasyon formundadır.
2) Dual problemdeki karar değişkenlerinin sayısı, primal problemdeki kısıt sayısına eşittir.
3) Primal problemin kısıtlarının sağ taraf değerleri (b_i) dual problemin amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayıları (c_j) olur.
4) Dual problemdeki kısıt sayısı primal problemdeki değişken sayısına eşittir.
5) Primalin i. kısıtının j. değişkeninin katsayısı (a_{ij}), dual problemin j. kısıtının i. değişkenin katsayısı (a_{ij}) olur.
6) Eğer primal problem ≤ türünde kısıtlara sahipse dual problem ≥ türünde kısıtlara sahip olur. Eğer primal problem ≥ türünde kısıtlara sahipse, dual problem ≤ türünde kısıtlara sahip olur.
7) Primal problemde amaç fonksiyonunun katsayıları dual problemin kısıtlarının sağ taraf değerleri olur.
8) Hem primal hem de dual modelin değişkenleri sıfırdan büyük eşit olarak tanımlanmıştır.

Örnek: Aşağıda verilen DP probleminin dualini yazınız.

Primal Problem:

$$\text{Maksimum } Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3$$

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 16$$

$$4X_1 - 2X_2 + 5X_3 \leq 15$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3 \geq 0$$

Dual Problem:

$$\text{Minimum } Z = 16Y_1 + 15Y_2$$

$$2Y_1 + 4Y_2 \geq 3$$

$$3Y_1 - 2Y_2 \geq 4$$

$$4Y_1 + 5Y_2 \geq 1$$

$$Y_1,\ Y_2 \geq 0$$

Örnek: Aşağıda verilen DP probleminin dualini yazınız.

Primal Problem

Min Z = 40x1 + 200x2

4x1 + 40 x2 ≥ 160

3x1 + 10x2 ≥ 60

8x1 + 10x2 ≥ 80

x1 ≥ 0, x2 ≥ 0

Dual Problem

Maks Z = 160y1 + 60y2 + 80y3

4y1 + 3y2 + 8y3 ≤ 40

40y1 + 10y2 + 10y3 ≤ 200

y1 ≥ 0, y2 ≥ 0, y3 ≥ 0

Genel Bir Modelin Dualinin Bulunması

En iyi değerini aradığımız doğrusal karar modeli, her zaman normal biçimde olmayabilir. Modelin kısıtları, kullanılan kaynak miktarlarına göre “ ≥” , “≤” veya “=” tipinde verilebilir. Karar değişkenlerinin bazılarının sıfırdan küçük eşit olması istenirken, bazılarının serbest işaretli olması (−, 0, + işaretli değer alabilen) istenebilir. Normal biçimde olmayan bir doğrusal programlama modelinin, aşağıdaki iki yoldan birini kullanarak dualini oluşturmak mümkündür:

1. Uygun işlemlerle DP modelini normal biçime dönüştürmek ve dual modelini yazmak.

2. Dönüştürme işlemini yapmadan, genel kuralları uygulayarak doğrudan dual modeli yazmak.

1) Uygun işlemlerle DP modelinin normal biçime dönüştürülmesi ve dual modelin yazılması

Maksimizasyon Problemleri:

Kısıt/Değişken Türü	Yapılacak İşlem
1) Eğer kısıt ≤ türünde ise	Değişiklik yapılmaz.
2) Eğer kısıt ≥ türünde ise	Kısıtı -1 ile çarparak eşitsizlik ≤ türüne dönüştürülür.
3) Eğer kısıt = türünde ise	a) Eşitlik ≤ ve ≥ türünde iki eşitsizliğe dönüştürülür. b) ≥ türündeki eşitsizlik -1 ile çarpılarak ≤ türüne dönüştürülür.
4) İşareti belirtilmemiş bir karar değişkeni	İşareti belirtilmemiş bir X_i karar değişkeni, $X_i = X_i' - X_i''$ biçiminde iki negatif olmayan karar değişkeninin ($X_i' \geq 0$ ve $X_i'' \geq 0$) farkı olarak yazılır.

Minimizasyon Problemleri:

Kısıt/Değişken Türü	Yapılacak İşlem
1) Eğer kısıt ≥ türünde ise,	Değişiklik yapılmaz
2) Eğer kısıt ≤ türünde ise,	Kısıt -1 ile çarparak eşitsizlik ≥ türüne dönüştürülür.
3) Eğer kısıt = türünde ise,	a) Eşitlik ≤ ve ≥ türünde iki eşitsizliğe dönüştürülür. b) ≤ türündeki eşitsizlik -1 ile çarpılarak ≥ türüne dönüştürülür.
4) İşareti belirtilmemiş bir karar değişkeni varsa,	İşareti belirtilmemiş bir X_i karar değişkeni, $X_i = X_i' - X_i''$ biçiminde iki negatif olmayan karar değişkeninin ($X_i' \geq 0$ ve $X_i'' \geq 0$) farkı olarak yazılır.

Örnek: Aşağıdaki DP probleminin dualini bulunuz.

Maks $Z = 6x1 + 4x2 + 6x3 + x4$

$4x1 + 5x2 + 4x3 + 8x4 = 21$

$3x1 + 7x2 + 8x3 + 2x4 \leq 48$

$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0,\ x3 \geq 0,\ x4 \geq 0$

Primal problem düzenlenirse,

Maks $Z = 6x1 + 4x2 + 6x3 + x4$

$4x1 + 5x2 + 4x3 + 8x4 \leq 21$

$4x1 + 5x2 + 4x3 + 8x4 \geq 21$ $\quad (- 4x1 - 5x2 - 4x3 - 8x4 \leq -21)$

$3x1 + 7x2 + 8x3 + 2x4 \leq 48$

$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0,\ x3 \geq 0,\ x4 \geq 0$

Dual Problem

Min $Z= 21y1 - 21y2 + 48y3$

$4y1 - 4y2 + 3y3 \geq 6$

$5y1 - 5y2 + 7y3 \geq 4$

$4y1 - 4y2 + 8y3 \geq 6$

$8y1 - 8y2 + 2y3 \geq 1$

$y1 \geq 0,\ y2 \geq 0,\ y3 \geq 0$

Dual problemdeki karar değişkenlerin sayısı primal problemdeki kısıtların sayısına eşit olmalıdır. Orijinal primal problemde 4 değişken 2 kısıt var. Fakat bulduğumuz dual problemde 4 kısıt ve 3 değişken bulunuyor. Bu tutarsızlığı gidermek için $(y1 - y2) = y'$ alınırsa, Dual problem

Min $Z= 21y' + 48y3$

$4y' + 3y3 \geq 6$

$5y' + 7y3 \geq 4$

$4y' + 8y3 \geq 6$

$8y' + 2y3 \geq 1$

y': işareti belirtilmemiş, $y3 \geq 0$ biçiminde elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki DP probleminin dualini bulunuz.

Maks $Z = 6x1 + 8x2$

$2x1 + 3x2 \leq 16$

$4x1 + 2x2 \geq 16$

$2x1 + x2 = 16$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

Primal problem düzenlenirse,

Maks $Z = 6x1 + 8x2$

$2x1 + 3x2 \leq 16$

$-4x1 - 2x2 \leq -16$

$2x1 + x2 \leq 16$

$2x1 + x2 \geq 16 \rightarrow \quad -2x1 - x2 \leq -16$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

Min $Z= 16y1 - 16y2 + 16y3 - 16y4$

$2y1 - 4y2 + 2y3 - 2y4 \geq 6$

$3y1 - 2y2 + y3 - y4 \geq 8$

$y1 \geq 0, \; y2 \geq 0, \; y3 \geq 0, \; y4 \geq 0$

$(y3-y4) = y'$ alınırsa,

Min $Z= 16y1 - 16y2 + 16y'$

$2y1 - 4y2 + 2y' \geq 6$

$3y1 - 2y2 + y' \geq 8$

$y1 \geq 0, y2 \geq 0$, y': işareti belirsiz

biçiminde dual model elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki DP probleminin dualini bulunuz.

Maks $Z = 3x1 + 5x2 + 7x3$

$x1 + x2 + 3x3 \leq 10$

$4x1 - x2 + 2x3 \geq 15$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$, x3: işareti belirsiz.

Maks $Z = 3x1 + 5x2 + 7(x3'-x3'')$

$x1 + x2 + 3(x3'- x3'') \leq 10$

$-4x1 + x2 - 2(x3'- x3'') \leq -15$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0, x3' \geq 0, x3'' \geq 0$

$\text{Min } Z = 10y_1 - 15y_2$

$y_1 - 4y_2 \geq 3$

$y_1 + y_2 \geq 5$

$3y_1 - 2y_2 \geq 7$

$-3y_1 + 2y_2 \geq -7$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

3. ve 4. eşitsizlik eşitlik formunda yazılırsa,

$\text{Min } Z = 10y_1 - 15y_2$

$y_1 - 4y_2 \geq 3$

$y_1 + y_2 \geq 5$

$3y_1 - 2y_2 = 7$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$ biçiminde dual model elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki DP probleminin dualini bulunuz.

$\text{Maks } 2x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 = 2$

$2x_1 - x_2 \geq 3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0$, x_2 işareti belirsiz.

$\text{Maks } Z = 2x_1 + x_2$

$(x_1 + x_2 \leq 2 \qquad x_1 + x_2 \geq 2)$

$-x_1 - x_2 \leq -2$

$-2x_1 + x_2 \leq -3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0$, x_2 işareti belirsiz.

$\text{Maks } Z = 2x_1 + x_2' - x_2''$

$x_1 + x_2' - x_2'' \leq 2$

$-x_1 - x_2' + x_2'' \leq -2$

$-2x_1 + x_2' - x_2'' \leq -3$

$x_1 - x_2' + x_2'' \leq 1$

$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$

$\text{Min } Z = 2y_1 - 2y_2 - 3y_3 + y_4$

$y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 2$

$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq 1$

$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq -1$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

$y' = (y_1 - y_2)$ alınır ve 3. ve 4. eşitsizlik eşitlik kısıtı olarak yazılırsa,

$\text{Min } Z = 2y' - 3y_3 + y_4$

$y' - 2y_3 + y_4 \geq 2$

$y' + y_3 - y_4 = 1$

y': işareti belirsiz; $y_3, y_4 \geq 0$

biçiminde dual model elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki DP probleminin dualini bulunuz.

Min $Z = x1 - 3x2 - 2x3$

$3x1 - x2 + 2x3 \leq 7$

$2x1 - 4x2 \geq 12$

$-4x1 + 3x2 + 8x3 = 10$

$x1, x2 \geq 0$, x3 işareti belirsiz.

Min $Z = x1 - 3x2 - 2(x3' - x3'')$

$-3x1 + x2 - 2(x3' - x3'') \geq -7$

$2x1 - 4x2 \geq 12$

$-4x1 + 3x2 + 8(x3' - x3'') \geq 10$

$4x1 - 3x2 - 8(x3' - x3'') \geq -10$

$x1, x2 \geq 0, x3', x3'' \geq 0$

Maks $Z = -7y1 + 12y2 + 10y3 - 10y4$

$-3y1 + 2y2 - 4y3 + 4y4 \leq 1$

$y1 - 4y2 + 3y3 - 3y4 \leq -3$

$-2y1 + 8y3 - 8y4 \leq -2$

$2y1 - 8y3 + 8y4 \leq 2$

$y1, y2, y3, y4 \geq 0$

$(y3 - y4) = y'$ alınır ve 3. ve 4.

eşitsizlik eşitlik olarak yazılırsa,

Maks $Z = -7y1 + 12y2 + 10y'$

$-3y1 + 2y2 - 4y' \leq 1$

$y1 - 4y2 + 3y' \leq -3$

$2y1 - 8y' = 2$

$y1, y2 \geq 0$, y': işareti belirsiz.

biçiminde dual model elde edilir.

2. Dönüştürme işlemini yapmadan, genel kuralları uygulayarak doğrudan dual modelin yazılması

Amaç Fonksiyonu: Maksimum	$\leftrightarrow$	**Amaç Fonksiyonu: Minimum**
i. kısıt $\leq$	$\leftrightarrow$	i. değişken ≥ 0
i. kısıt $=$	$\leftrightarrow$	i. değişkenin işareti belirsiz
i. kısıt $\geq$	$\leftrightarrow$	i. değişken ≤ 0
j. değişken ≥ 0	$\leftrightarrow$	j. kısıt $\geq$
j. değişken işareti belirsiz	$\leftrightarrow$	j. kısıt $=$
j. değişken ≤ 0	$\leftrightarrow$	j. kısıt $\leq$

Örnek: Aşağıdaki DP problemlerinin duallerini bulunuz.

1) Maks $Z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3$

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 40$

$-4x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 25$

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 15$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3 işareti belirsiz.

Min $Z = 40y_1 + 25y_2 + 15y_3$

$2y_1 - 4y_2 + y_3 \geq 3$

$4y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 5$

$3y_1 - 3y_2 + 5y_3 = 7$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \leq 0$ y_3: işareti belirsiz.

2) Min $Z = x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$

$x_1 - 2x_2 \leq 3$

$2x_2 - x_3 \geq 4$

$x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ x_2 işareti belirsiz

Maks $Z = 5y_1 + 3y_2 + 4y_3$

$y_1 - y_2 \leq 1$

$-3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = 1$

$4y_1 - y_3 \leq 1$

y_1 iş. bel. $y_2 \leq 0$ $y_3 \geq 0$

3) Maks $Z = x_1 - 4x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$

$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, x_3 işareti belirsiz

Min $Z = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$

$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$

$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -4$

$-y_1 - 5y_2 + 2y_3 = -1$

$y_1 \leq 0$, $y_2 \geq 0$, y_3 : işareti belirsiz

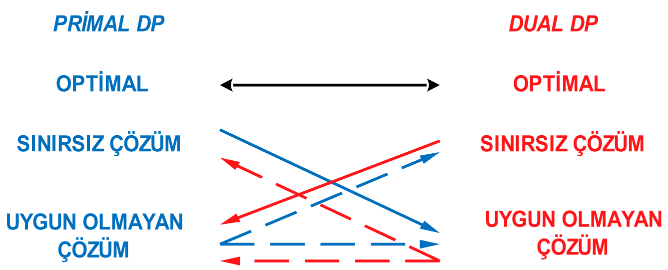
DUALİTE TEOREMLERİ:

1) Dual problemin duali Primaldir.
2) **x** primal (Maksimizasyon) DP probleminin uygun çözümü, **y** dual (Minimizasyon) DP probleminin uygun çözümü olsun.

   $\mathbf{c^T x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ yani $Z_x \leq Z_y$ dir.
3) **x** Primal problemin uygun çözümü, **y** Dual probleminin uygun çözümü olsunlar.

   Eğer $\mathbf{c^T x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ ise, **x** Primal problemin, **y** Dual problemin optimal çözümüdür.
4) Primal (Dual) DP problemi sınırsız çözüme sahipse, karşılık gelen Dual (Primal) problemin uygun çözümü yoktur.
5) Eğer Primal yada Dual problemlerden birinin optimal çözümü varsa, karşılık gelen diğer probleminde optimal çözümü vardır ve iki problemin amaç fonksiyonlarının optimal değerleri birbirine eşittir:

   Maks Z_{x^*} **= Min** Z_{y^*}
6) Eğer Primal (Dual) problem uygun olmayan çözüme sahipse, Dual (Primal) problem sınırsız veya uygun olmayan çözüme sahiptir.



Optimal Primal - Optimal Dual Simpleks Tablolar Arasındaki İlişkiler

DP problemlerinden birini çözmek, aynı anda diğer problemin çözümüne eşdeğerdir. Problemlerden birinin optimal çözümü biliniyorsa, diğerinin optimal çözümü $C_j - Z_j$ satırından'dan okunabilir.

Örnek: Aşağıdaki Primal problemin ve Dualinin optimal tabloları aşağıda verilmiştir. Tablolar arasındaki ilişkileri yazınız.

Primal Problem

Maks $Z_P = 4X_1 + 5X_2$

$X_1 + 2X_2 \leq 10$

$6X_1 + 6X_2 \leq 36$

$8X_1 + 4X_2 \leq 40$

$X_1, X_2 \geq 0$

Dual Problem

Min $Z_D = 10y_1 + 36y_2 + 40y_3$

$y_1 + 6y2 + 8y3 \geq 4$

$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Primal Problemin Optimal Tablosu

		C_J	4	5	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**
5	X2	4	0	1	1	-1/6	0
4	X1	2	1	0	-1	1/3	0
0	X5	8	0	0	4	-2	1
	Z_j	28	4	5	1	1/2	0
	Cj-Zj		0	0	-1	-1/2	0

(X_3, X_4 ve X_5: gevşek değişkenler)

Dual Problemin Optimal Tablosu:

		C_J	10	36	40	0	M	0	M
C_B	**Temel**	**X_B**	**y1**	**y2**	**y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**y7**
36	y2	1/2	0	1	2	-1/3	1/3	1/6	-1/6
10	y1	1	1	0	-4	1	-1	-1	1
	Z_j	28	10	36	32	-2	2	-4	4
	Cj-Zj		0	0	8	2	M-2	4	M-4

(y_4 ve y_6: fazlalık; y_5 ve y_7: yapay değişkenler)

1) Amaç fonksiyonunun optimal değeri primal ve dual problemler için aynıdır; $Z_P^* = Z_D^* = 28$.

2) Dual problemin temel değişkenlerinin optimal çözüm değerleri, primal simpleks tablosunda gevşek değişkenlerin altındaki $C_j - Z_j$ satırında ters işaretli olarak bulunur.

3) Primal değişkenlerin optimal değerleri, dual optimal simpleks tabloda fazlalık değişkenlerin altındaki $C_j - Z_j$ satırında bulunur.

DUALİTENİN EKONOMİK YORUMU

Örnek: Bir marangoz sandalye ve masa üretmektedir. Bu iki mobilya da 3 makinada (M1, M2 ve M3) işlem görmektedir. Marangoz sandalyeden 20$ ve masadan 30$ kar ediyor. Her mobilyanın üretimi için makinalardaki işlem süresi (saat) ve makinaların haftalık çalışma kapasiteleri (saat) aşağıda verilmiştir.

Primal Problem

X_1 = bir haftada üretilecek sandalye sayısı, X_2 = bir haftada üretilecek masa sayısı

Maks $Z_P = 20 X_1 + 30 X_2$

$3 X_1 + 3 X_2 \leq 36$

$5 X_1 + 2 X_2 \leq 50$

$2 X_1 + 6 X_2 \leq 60$

$X_1, X_2 \geq 0$

Maks $Z = 20 X_1 + 30 X_2$

$3 X_1 + 3 X_2 + X_3 = 36$

$5 X_1 + 2 X_2 + X_4 = 50$

$2 X_1 + 6 X_2 + X_5 = 60$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Primalin Optimal Simpleks Tablosu:

		C_j	20	30	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**
20	X1	3	1	0	1/2	0	-1/4
0	X4	17	0	0	-13/6	1	3/4
30	X2	9	0	1	-1/6	0	1/4
	Zj	330	20	30	5	0	5/2
	Cj-Zj		0	0	**-5**	**0**	**-5/2**

Marangoz, haftada X_1= 3 adet sandalye ve X_2= 9 sandalye üretirse haftada 330$ kar eder. 1. ve 3. Makinaların kapasiteleri tamamen kullanılırken, 2. makinede 17 saat kullanılmayan süre kalmıştır.

Dual Problem (Makinaları alacak kişinin problemi)

Marangozun tüm makinalarını size kiraya vereceğini ve bu nedenle her makine için haftalık minimum kira ücretini bulmak istediğimizi düşünelim. Makinaların toplam kira fiyatı Z_D olsun.

Makinalar	**1 saatlik değeri ($)**	**Haftalık mevcut süre (saat)**	**Haftalık değeri ($)**
M_1	Y_1	36	$36 Y_1$
M_2	Y_2	50	$50 Y_2$
M_3	Y_3	60	$60 Y_3$

Y_1: M_1 makinasının bir saati için ödenecek fiyat,

Y_2: M_2 makinasının bir saati için ödenecek fiyat,

Y_3: M_3 makinasının bir saati için ödenecek fiyat

Min $Z_D = 36\,Y_1 + 50\,Y_2 + 60\,Y_3$ (Kiralayıcı makinaların haftalık kira toplamını min. yapmak ister)

$3Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 \geq 20$ (1 adet sandalye üretimi için kullanılan kaynakların toplam fiyatı en az marangozun ürettiği sandalyeden karı kadar olacaktır)

$3Y_1 + 2Y_2 + 6Y_3 \geq 30$ (1 masa üretimi için kullanılan kaynakların toplam fiyatı en az marangozun ürettiği masadan karı kadar olacaktır)

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

Dual Problemin Optimal Simpleks Tablosu:

		C_j	36	50	60	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**Y5**
36	Y1	5	1	2/3	0	-1/2	1/6
60	Y3	5/2	0	0	1	1/4	1/4
	Zj	330	36	24	60	-3	-9
	Cj-Zj		0	26	0	3	9

Dual değişkenlerin yorumu:

Y_1= 5 : M_1 makinası haftalık çalışma kapasitesinden 1 saat fazla çalıştırılırsa (36+1 saat) mobilyacıya ek 5$ kazandırır. M1 makinasının dual değeri=marjinal değeri (marginal value) =gölge fiyatı (shadow price) 5$ dır.

Y_2= 0 : M_2 makinası haftalık çalışma kapasitesinden 1 saat fazla çalıştırılırsa (50+1 saat) mobilyacıya ek 0$ kazandırır. Primal Optimal tabloya bakıldığında M_2 makinasında kullanılmayan kapasite olduğu görülmektedir. (X_4= M_2 makinesindeki haftalık 17 saat kullanılmayan süre).

Y_3= 5/2 : M_3 makinası haftada ek 1 saat daha (60+1 saat) çalıştırılırsa mobilyacıya ek (5/2)$ kazandırır.

Örnek: Bir firma üç farklı modelde masa lambası üretiyor: standart, özel ve lüks. Ürünlerin satış fiyatları sırasıyla, 30$, 40$ ve 50$ dır. Her lamba üretimi için gereken kaynak miktarları ve firmanın sahip olduğu toplam kaynak kapasiteleri verilmiştir:

Masa Lambası Türü	İşleme (Saat)	Montaj (saat)	Boyama (saat)
Standart	3	2	1
Özel	4	2	2
Lüks	4	3	3
Firmanın kapasitesi (saat)	20000	10000	6000

X_1 = üretilecek standart lamba sayısı,

X_2 = üretilecek özel lamba sayısı,

X_3 = üretilecek lüks lamba sayısı,

Maks $Z = 30X_1 + 40X_2 + 50X_3$

$3X_1 + 4X_2 + 4X_3 \leq 20000$ (işleme süresi kısıtı)

$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 10000$ (montaj süresi kısıtı)

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 6000$ (boyama süresi kısıtı)

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Optimal Simpleks Tablo:

		C_j	30	40	50	0	0	0
C_B	**Temel**	X_B	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**
0	X4	4000	0	0	-2	1	-1	-1
30	X1	4000	1	0	0	0	1	-1
40	X2	1000	0	1	3/2	0	-1/2	1
	Zj	160000	30	40	60	0	10	10
	Cj-Zj		**0**	**0**	**-10**	**0**	**-10**	**-10**
			İndirgenmiş maliyetler			**Dual değişkenler= Gölge fiyatlar**		

Optimal çözüm X_1^*= 4000 standart lamba, X_2^*= 1000 özel lamba, X_3^*= 0 lüks lamba. Z^*= 160000$ kar.

Üretimde X_4^* = 4000 saat işleme süresi kullanılmamıştır. Firmanın montaj ve boyama kapasiteleri tamamen kullanılmıştır (X_5^*=0 ve X_6^*=0).

Dual değişkenlerin yorumu:

Y_1= 0 : Firmanın işleme kapasitesi 1 saat artırılırsa (20000+1 saat) firmaya ek 0$ kazandırır. Zaten firmanın işleme süresi 4000 saat artmıştır.

Y_2= 10 : Firmanın montaj kapasitesi 1 saat artırılışa (10000+1 saat) firmanın karı 10$ artar.

Y_3= 10 : Firmanın boyama kapasitesi 1 saat artırılışa (6000+1 saat) firmanın karı 10$ artar. Eğer boyama kapasitesi 200 saat artırılışa firmanın karı 200*10=2000$ artar. Gölge fiyatların tüm artış değerleri için geçerli olmayacağı sadece küçük değişimlerde geçerli olduğu unutulmamalıdır.

İndirgenmiş maliyetlerin yorumu:

Firma 0 adet lüks lamba (X_3*= 0) üretmektedir. Bu duruma ilişkin yapılabilecek yorumlar:

Yorum 1: Optimal tabloda yer almayan (temel olmayan) bir orijinal değişkenin (X_3*=0), optimal çözümde 1 birim (X_2=1) ile yer almaya zorlanması (firmanın 1 adet lüks lamba üretmesi) firma karında indirgenmiş maliyet kadar azalmaya neden olur: Z= 16000-10= 159990$ olur. Temel değişkenlerin indirgenmiş maliyet değerleri sıfırdır.

Yorum 2: Eğer firma lüks lambanın satış fiyatını 10$ artırırsa (50+10=60$), optimal çözümde X_3 değişkeni pozitif değerli olarak yer alır.

Örnek: Aşağıdaki DP probleminin optimal simpleks tablosu verilmiştir:

X_1: Üretilecek U1 ürünü sayısı,

X_2: Üretilecek U2 ürünü sayısı,

Maks $Z = 4X_1 + 5X_2$

$X_1 + X_2 \leq 10$ (A makinesi kapasite kısıtı)

$X_2 \leq 13$ (B makinesi kapasite kısıtı)

$X_1, X_2 \geq 0$

Problemin Optimal Simpleks Tablosu

		C_j	4	5	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**
5	X2	10	1	1	1	0
0	X4	3	1	0	-1	1
	Zj	50	5	5	5	0
	Cj-Zj		**-1**	0	**-5**	**0**

a) Optimal çözüm nedir?

b) Üretim sonrası A ve B makinalarında kullanılmayan süreler nedir? Hangi makine tam kapasite kullanılmıştır?

c) Bir müşteri 1 adet U1 ürününden normal fiyatının üzerinde ödemeyi kabul ederek talep etseydi mevcut karımızda azalma olmaması için bu ürünün fiyatı en az ne kadar artırılmalıdır?

d) A makinası gelecek hafta 2 saat süren bir bakıma alınacaktır. Kar üzerindeki etkisi ne olacaktır?

e) Gelecek hafta A ve B makinalarının 1 saatlik ek kapasiteleri için ne kadar ödenmelidir?

f) 1/2 saat A makinesi ve 20 dk B makinesinde işlem gerektiren ve tanesi 3$ kar getiren U3 yeni ürünü üretilmeli midir?

a) X_1*= 0, X_2*= 10, X_3*= 0, X_4*= 3   Z*= 50$

b) A makinesi tam kapasite kullanılıyor (X_3*=0). B makinesinde 3 saat kullanılmayan süre vardır.

c) 1 birim U_1 üretimi karda 1$ lık azalmaya yol açıyor C_1-Z_1= -1. Bu nedenle U_1 in fiyatı en az 1$ artırılmalıdır ki mevcut karda azalma olmasın.

d) A makinası kısıtı için gölge fiyat 5$ olduğundan 2 saatlik bakım 2*5=10$ karda azalmaya neden olur.

e) A makinesi ve B makinesi için gölge fiyatlar sırasıyla 5$ ve 0$ dır. Bu fiyatlar ekstra 1 saat makine süreleri için ödemek isteyeceğimiz maksimum fiyatlardır.

f) A makinesi ve B makinesi için gölge fiyatlar sırasıyla 5$ ve 0$ dır. Yeni ürün üretilirse karı, (1/2)*5 + (1/3)*0 = 2,5$ azaltacaktır. Yeni üründen kar 3$ olduğundan, birim başı 0,5$ net artış olur. Üretilmesi gerekir.

Örnek: Bir fabrika 4 kaynak (K1, K2, K3, K4) kullanarak 4 farklı ürün (Ü1, Ü2, Ü3, Ü4) üretiyor. Aşağıdaki tablo her üründen 1 birim üretmek için her kaynaktan ihtiyaç duyulan miktarları fabrikanın sahip olduğu kaynak miktarlarını ve her ürünün bir biriminin satışından sağlanan karı vermektedir.

	Ü1	**Ü2**	**Ü3**	**Ü4**	**Mevcut kaynak miktarı**
K1	10	15	20	20	130
K2	1	2	3	1	13
K3	3	1	12	3	45
K4	2	4	7	3	23
Kar ($)	51	102	132	89	

Problemin DP modeli, gölge fiyatlar ve üretim sırasında tüketilen kaynak miktarları aşağıdadır:

Maks Z= 51x1 + 102x2 + 132x3 + 89x4

$10x1 + 15x2 + 20x3 + 20x4 \leq 130$

$x1 + 2x2 + 3x3 + x4 \leq 13$

$3x1 + x2 + 12x3 + 3x4 \leq 45$

$2x1 + 4x2 + 7x3 + 3x4 \leq 23$

$x_J \geq 0 \quad j=1, 2, 3, 4$

Kaynak	**Gölge fiyat ($)**	**Tüketilen kaynak miktarı**
K1	1.429	130
K2	0	9
K3	0	17
K4	20.143	23

Sorular;

1) Fabrika, başka bir fabrikaya birim başına 1.1 $’dan 20 birim K1 kaynağını satma seçeneğine sahiptir. Fabrikanın bu seçeneği tercih edip etmeyeceğini belirtiniz.

Fabrika bu seçeneği tercih etmemelidir. K1'in miktarını 20 birim azaltmak, amaç fonksiyonu değerini 20 x 1.429 = 28.58 $ azaltır. Bu değer, şirketin kaynağı başka bir fabrikaya satmasından elde ettiği 20 x 1.1 = 22 $’dan fazladır.

2) Şirketin yeni bir ürün (Ü5), üretip birimini 10 $’dan satma imkânı vardır. 1 birim yeni ürünü üretmek için fabrikanın 2 birim K2 ve 4 birim K3'e ihtiyacı vardır. Fabrikanın bu seçeneği dikkate alıp almayacağını belirtiniz.

Fabrika bu seçeneği değerlendirmelidir. 2. Kısıt ve 3. Kısıt için gölge fiyatlar sıfırdır. K2'nin 2 birim, K3'ün 4 birim azalması amaç fonksiyonu değerinde azalmaya neden olmaz. (Çünkü bu kaynakların sahip olunan miktarları tamamıyla tüketilmemiştir). Oysa fabrika, Ü5'in satışından kar sağlayacaktır.

3) Firma yeni bir Ü6 ürünü üretme imkanına sahiptir. Yeni üründen 1 birim üretmek için fabrikanın 3 birim K1, 2.4 birim K2 ve 5.1 birim K4'e ihtiyacı vardır. Ü6'nın minimum fiyatı ne olmalı ki fabrika bu seçeneği değerlendirsin?

3 birim K1, 2.4 birim K2 ve 5.1 birim K4'ün Ü6'nın üretimine aktarılması, amaç fonksiyonu değerinin 3 x 1.429 + 5.1 x 20.143 = 107.0163 $ azalmasına neden olur. Dolayısıyla fabrikanın bu seçeneği düşünmesi için Ü6 fiyatı en az bu değere eşit olmalıdır.

DUAL SİMPLEKS YÖNTEM

Doğrusal Programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir yöntem Dual Simpleks Yöntemdir. Bu yöntem, çözümün optimal ancak uygun olmadığı durumlarda kullanılır. Maksimum amaçlı bir probleme ait tablonun C_j - Z_j satırındaki değerler "0" veya "-" değerli iken çözüm sütunundaki (X_B) değerlerin en az biri "-" işaretliyse veya minimizasyon amaçlı bir probleme ait tablonun C_j - Z_j satırındaki değerlerin tümü "+" veya "0" iken çözüm sütununda yer alan değerlerin en az biri "-" işaretli ise dual simpleks yönteme başvurulur.

Dual Simpleks Yöntem, primal simpleks yöntemde olduğu gibi çözüme giren ve çözümden çıkan değişkenlerin seçimiyle başlar. Ancak, Dual Simpleks Yöntemde önce çözümden çıkacak değişken, sonra çözüme girecek değişken belirlenir. Temelden çıkacak değişken çözüm sütununda negatif değere sahip değişkenler arasından seçilir. Çözüm sütununda mutlak değerce en büyük "-"değerli değişken temelden çıkacak olan değişkendir (pivot satır). Eğer çözüm sütunundaki tüm değişkenler "+" ise mevcut çözüm uygun bir çözümdür. Temele girecek değişken çözümde bulunmayan değişkenler arasından seçilir. Bunun için C_j - Z_j satırındaki değerler pivot satırdaki karşı gelen değerlere bölünür. Paydaya gelen sayılar arasında "0" veya "+" değerli olanlar dikkate alınmaz. Problem ister maksimum amaçlı ister minimum amaçlı bir problem olsun, mutlak değerce en küçük oranın elde edildiği sütuna ait değişken temele girecek değişken olarak seçilir (pivot sütun). Çözümle ilgili diğer işlemler primal simpleks yöntemle aynıdır. Bir sonraki tabloda çözüm sütunundaki değerlerin en az biri "-" işaretli ise Dual Simpleks Yönteme devam edilir. Elde edilen tablonun çözüm sütunundaki değerlerin hiçbiri "-" işaretli değilse uygun çözüm elde edilmiş demektir.

Dual Simpleks Yöntem, çoğunlukla,

- Sağ taraf sabitlerindeki değişikliklerden sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde
- Modele yeni bir kısıt ilave edildikten sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde ve
- Normal minimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır.