HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ VE MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

Doç. Dr. Yasemin Kayhan Atılgan (Şube 01)
Doç. Dr. Derya Ersel (Şube 02)

huzem

OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİ

Olasılıksal eşitsizlikler uygulamalı problemlerde hesaplanması zor olabilecek değerler üzerine sınır koymak için kullanılırlar. Olasılık teorisinde ise "yakınsaklıklar" konusunda çıkarsamalarda sıklıkla yer alır. İlk eşitsizliğimiz aşağıdaki teorem ile verilen Markov Eşitsizliğidir.

TEOREM 1 (Markov Eşitsizliği): X negatif değerler almayan bir raslantı değişkeni olarak tanımlansın. X raslantı değişkeninin beklenen değerinin tanımlı olduğu kabul edilsin, $E(X)<\infty$. Herhangi bir $t>0$ için,

$$P(X>t)\le \frac{E(X)}{t}\ .$$

İspat: $X>0$ olarak tanımlı raslantı değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun. X raslantı değişkeninin belenen değeri aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^t xf(x)dx+\int_t^\infty xf(x)dx\\&\ge\int_t^\infty xf(x)dx\\&\ge t\int_t^\infty f(x)dx=tP(X>t)\end{aligned}$$

Rus matematikçi P. L. Chebyshev bir raslantı değişkeninin dağılımının kendi ortalamasından simetrik iki değer arasında kalmasına ilişkin olasılığın dağılımın standart sapma değeri ile ilişkili olduğunu aşağıdaki teorem ile ispatlamıştır.

TEOREM 2: Chebyshev's eşitsizliği. X raslantı değişkeninin ortalaması μ ve varyansı σ^2 tanımlı olsun. Herhangi bir $k>0$ için,

$$P(|X-\mu|<k\sigma)\ge 1-\frac{1}{k^2}\ .$$

İspat: X sirekli raslantı değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun. X raslantı değişkeninin varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\sigma^2=E\left[(X-\mu)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx$$

Verilen bu integrali aşağıdaki şekil ile gösterilen üç bölgede tekrar tanımlayalım,

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma}(x-\mu)^2f(x)dx+\int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma}(x-\mu)^2f(x)dx+\int_{\mu+k\sigma}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx$$

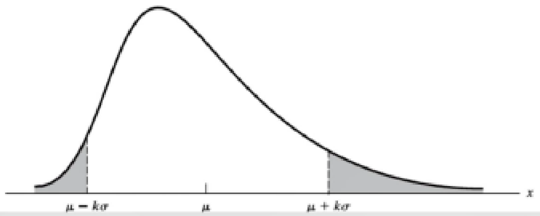
$\int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma}(x-\mu)^2f(x)dx$ integrali negatif olmayacağı için aşağıdaki eşitsizlik geçerli olacaktır.

$$\sigma^2\ge\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma}(x-\mu)^2f(x)dx+\int_{\mu+k\sigma}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx$$

$$x\in(-\infty,\mu-k\sigma)\ \Rightarrow\ x\le\mu-k\sigma\ \Rightarrow\ k\sigma\le\mu-x\ \Rightarrow\ k^2\sigma^2\le(\mu-x)^2$$
$$x\in(\mu-k\sigma,\infty)\ \Rightarrow\ x\ge\mu+k\sigma\ \Rightarrow\ k\sigma\le x-\mu\ \Rightarrow\ k^2\sigma^2\le(\mu-x)^2$$

$(x-\mu)^2\ge k^2\sigma^2$ olduğu için $x\le\mu-k\sigma$ ya da $x\ge\mu+k\sigma$ olacaktır. Buradan,

$$\sigma^2\ge\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma}k^2\sigma^2f(x)dx+\int_{\mu+k\sigma}^{\infty}k^2\sigma^2f(x)dx$$
$$\frac{1}{k^2}\ge\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma}f(x)dx+\int_{\mu+k\sigma}^{\infty}f(x)dx$$



Sürekli raslantı değişkenleri üzerinden yapılan ispat kesikli raslantı değişkenleri için integral işlemi yerine toplam işlemi konularak gerçekleştirilebilir.

Örneğin X raslantı değişkeninin kendi ortalamasından iki standart sapma uzaklıkdaki aralık içinde değer alması olasılığı en az $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=0,75$ olarak hesaplanır. Benzer şekilde 3 standart sapma uzaklıkta değer alması olasılığı da en az $1-\frac{1}{3^2}=\frac{8}{9}\approx 0,89$ olacaktır. Bu açıdan değerlendirildiğinde X raslantı değişkeninin dağılımının yayılım miktarını σ değeri kontrol edecektir. Dikkat ederseni burada Chebyshev teoremi ile verilen olasılığa ilişkin bir alt sınır söylenebilmektedirç X raslantı değişkeninin kendi ortalamasından $\pm k\sigma$ uzaklık içerisinde değer alması olasılığının $1-\frac{1}{k^2}$ değerinden fazla olacağı belirtilmektedir. Bu olasılığın kesin değeri ancak X raslantı değişkeninin olasılık dağılımı belirli ise hesaplanabilir.

ÖRNEK: X raslantı değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin,

$$f(x)=630x^4(1-x)^4,\ 0<x<1$$

Bu raslantı değişkeninin kendi ortalamasından iki standart sapma uzaklık içerisinde değer alması oalsılığını hesaplayınız ve bulduğunuz bu sonucu Chebyshev ile bulduğunuz sınır ile karşılaştırınız.

Çözüm: X raslantı değişkeninin dağılımı incelendiğinde $\alpha=\beta=5$ parametreleri ile Beta dağılımına sahip olduğu görülmektedir. Buradan raslantı değişkeninin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=0,5=\mu$$

$$V(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\frac{25}{1100}=\frac{1}{44}=\sigma^2 \Rightarrow \sigma=\sqrt{1/44}\approx 0,15$$

$$P\big(0,5-2(0,15)<X<0,5+2(0,15)\big)=P(0,20<X<0,80)=\int_{0,20}^{0,80}630x^4(1-x)^4\,dx=0,96$$

Bu olasılığa ilişkin alt sınırın Chebyshev eşitsizliği ile hesaplandığında 0,75 olacağını söylemiştir. Görüldüğü gibi 0,96 olasılığı bu değerin çok üzerindedir. Dolayısıyla Chebyshev ilgili olasılık için sadece bir alt sınır vermektedir ve bu sınırın çoğu durumda gerçek olasılık değerine çok yakın olmayacaktır.

Sonuç: Chebyshev teoreminde $k\sigma=\varepsilon$ olarak alınırsa eşitlikler aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)\ge 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},\ P(|X-\mu|>\varepsilon)\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},\ \varepsilon>0$$

ÖRNEK: X raslantı değişkeninin ortalaması 25 ve varyansı da 16 olarak hesaplanıyor. Bu raslantı değişkeninin $P(17<X<33)$ arasında değer almasına ilişkin olasılık için bir alt sınır bulunuz.

Çözüm: Verilen olasılık için alt sınır Cehbyshev eşitsizliği ile aşağıdaki gib bulunur.

$$P(17<X<33)=P(|X-25|<8)\ge 1-\frac{16}{64}=0.75$$

Dikkat edilecek olunursa bulunan bu sınır raslantı değişkeninin kendi ortalamasından iki standart sapma uzaklıkta olması olasılığına eşittir,

$$P(17<X<33)=P(|X-25|<8)=P(|X-25|<2\sigma)\ge 1-\frac{1}{4}=0.75$$

Sonuç: Markov ve Chebyshev eşitsizlikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir,

Markov eşitsizliğinde negatif değerler almayan raslantı değişkeni $Y=(X-\mu)^2$ olarak tanımlansın. Bu durumda eşitsizlik,

$P(Y\ge\varepsilon^2)\le\frac{E(Y)}{\varepsilon^2}$ biçiminde yazılabilir.

$$P(Y\ge\varepsilon^2)=P\big((X-\mu)^2\ge\varepsilon^2\big)=P(|X-\mu|\ge\varepsilon)\le\frac{E(Y)}{\varepsilon^2}=\frac{E\big[(X-\mu)^2\big]}{\varepsilon^2}=\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Dolayısıyla,

$P(|X-\mu|\ge\varepsilon)\le\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ ya da $P(|X-\mu|<\varepsilon)\ge 1-\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ eşitsizlikleri geçerlidir.

ÖRNEK: Bir fabrikanın bir hafta boyunca ürettiği birim sayısı ortalama 50 olsun. X raslantı değişkeni de haftalık üretim miktarını göstersin.

a) Bir hafta da üretim miktarının 75'den fazla olması olasılığı için ne söylenebilir?

b) Haftalık üretim miktarının varyansının 25 olduğu bilindiğinde. Bu üretimin 40 ile 60 arasında olması olasılığı için ne söylenebilir?

Çözüm:

a) Markov Eşitsizliği ile

$$P(X>75)\leq\frac{E(X)}{75}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$$

b) Chebyshev's Eşitsizliği ile

$$P(40<X<60)=P(|X-50|\leq 10)\geq 1-\frac{V(X)}{10^2}=\frac{3}{4}$$

Merkezi Limit Teoremi

Doğrusal birleşim konusu anlatılırken ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan herhangi bir kitleden çekilen n birimlik rasgele örneklemin ortalaması $\bar{X}$ 'nın beklenen değer ve varyansının,

$$E(\bar{X})=\mu \text{ ve } V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

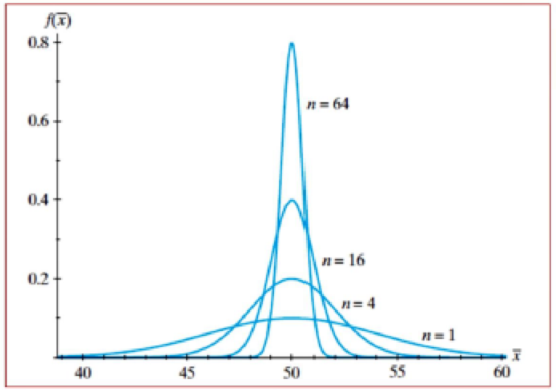
olacağını göstermiştik. Burada $\bar{X}$ 'nın varyansının n değeri arttıkça azalacağı görülmektedir. Dolayısıyla $\bar{X}$ 'nın dağılımının n değerine bağlı olacağı söylenebilir. Bu bölümde örneklemin çekildiği kitlenin dağılımına bağlı olmaksızın $\bar{X}$ 'nın örneklem dağılımına ilişkin bir yakınsama yapmaktır. Ancak bu konuya geçmeden önce aşağıdaki teoremin dikkate alınması gerekir,

TEOREM 3: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ortalamaları ve varyansları sırasıyla $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ve $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ olan Normal dağılımlardan alınan n birimlik rasgele örneklem olsun. Bunların lineer bir fonksiyonu $Y=\sum a_i X_i$ olarak verilsin. Y raslantı değişkeninin dağılımı ortalaması $\sum c_i \mu_i$ ve varyansı $\sum c_i^2 \sigma_i^2$ ile Normal dağılım olacaktır.

Sonuç: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan Normal dağılımdan alınmış n birimlikl rasgele örneklem olsun. Bu durumda örneklem ortalaması, $\bar{X}$ 'nın dağılımı yine ortalaması μ ve varyansı σ^2/n olan Normal dağılım olacaktır.

Bu sonuç aslında bizi şunu söylemektedir, $\bar{X}$ 'nın μ parametresini içeren bir aralıkta değer alması olasılığı, aynı dağılımdan çekilen herhangi bir X_i raslantı değişkeninin o aralıkta değer alması olasılığından daha büyük olacaktır. Örneğin $\mu=50$ ve $\sigma^2=16$ olan Normal dağılımdan n=16 birimlik bir rasgele örneklem çekilsin. $P(49<X_i<51)=0.1974$ iken $P(49<\bar{X}<51)=0.9544$ olacaktır.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $\mu=50$ ve $\sigma^2=16$ olan Normal dağılımdan alınan n birimlik rasgele örneklem olsun. Örneklem ortalamasının dağılımının $\bar{X}\sim N(50,16/n)$ olacağını biliyoruz. Şimdi n=1,4,16,64 alarak $\bar{X}$ 'nın dağılımının n değerine bağlı olarak nasıl etkilendiğini aşağıdaki grafik ile görebiliriz,



Bu gösterimden n=1 ve n=64 durumlarında $P(49<X_i<51)$ ve $P(49<\bar{X}<51)$ olasılıkları için karşılık gelen eğrinin altındaki alan aradaki farkın nedenini açıklayabilmektedir. Bu grafikten yararlanarak aslında n değeri artıkça $\bar{X}$ 'nın, kitle ortalaması μ parametresine yakınsama ya da $(\bar{X}-\mu)$ 'nün 0'a yakınsama eğiliminde olduğunu düşünebiliriz.

Şimdi dağılım bilgisini dikkate almaz ve daha genel bir ifade ile konuşmak istersek ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir dağılımdan alınan n birimlik rasgele örneklemde Y raslantı değişkeni raslantı değişkenlerinin toplamı olarak tanımlansın, Daha sonra bir W değişkeni tanımlayalım, W ve Y arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibi verilsin,

$$W=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{Y-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

$$E(W)=E\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right]=\frac{\mu-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=0 \text{ ve } V(W)=E(W^2)=E\left[\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right]=\frac{E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]}{\sigma^2/n}=\frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n}=1$$

olarak bulunacaktır. Eğer kitle dağılımı Normal dağılım olsaydı W raslantı değişkeni N(0,1) ile Standart Normal dağılıma sahip bir raslantı değişkeni olacaktı. Merkezi Limit Teoremi ise bize kitle dağılımından bağımsız olarak W raslantı değişkeninin limit durumundaki dağılımının N(0,1) dağılımına yakınsayacağını söylemektedir.

TEOREM 4 (Merkezi Limit Teoremi): $X_1,X_2,\dots,X_n$ ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir dağılımdan alınan n birimlik rasgele örneklem olsun.

$\bar{X}$ örneklem ortalaması olarak tanımlansın. $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin dağılımı $n\to\infty$ da $N(0,1)$ dağılımına yakınsar.

İspat: Moment çıkaran fonksiyon yöntemi kullanılarak ispat gerçekleştirilecektir. . Öncelikle X_i raslantı değikeninin moment çıkara fonksiyonu $M_X(t)$ 'nin sonlu ve tanımlı olduğu kabul edilsin.

$$M_Z(t)=M_{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t)=e^{-\sqrt{n}\mu t/\sigma}M_{\bar{X}}\left(\frac{\sqrt{n}t}{\sigma}\right)=e^{-\sqrt{n}\mu t/\sigma}M_{n\bar{X}}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$X_1+X_2+\dots+X_n=n\bar{X}$ olduğundan Z raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yeniden yazalım,

$M_Z(t)=e^{-\sqrt{n}\mu t/\sigma}M_{n\bar{X}}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=e^{-\sqrt{n}\mu t/\sigma}\left[M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$ şimdi eşitliğin her iki tarafının ln'i alınsın

$$\ln M_Z(t)=-\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma}+n\ln M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ moment çıkaran fonksiyonunu Mac Laurin serisi açılımı biçiminde yazalım,

$$\ln M_Z(t)=-\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma}+n\ln\left[1+\mu_1'\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}+\mu_2'\frac{t^2}{2\sigma^2 n}+\mu_3'\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}}+\dots\right]$$

n yeterince büyük olduğunda verilen ifadeyi ln(1+x) açılımı şeklinde yeniden düzenleyebiliriz,

$$\ln M_Z(t)=-\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma}+n\ln\left[1+\underbrace{\mu_1'\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}+\mu_2'\frac{t^2}{2\sigma^2 n}+\mu_3'\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}}+\dots}_{x}\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma}+n\left\{\begin{array}{l}\left(\mu_1'\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}+\mu_2'\frac{t^2}{2\sigma^2 n}+\mu_3'\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}}+\dots\right)-\frac{1}{2}\left(\mu_1'\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}+\mu_2'\frac{t^2}{2\sigma^2 n}+\mu_3'\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}}+\dots\right)^2\\+\frac{1}{3}\left(\mu_1'\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}+\mu_2'\frac{t^2}{2\sigma^2 n}+\mu_3'\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}}+\dots\right)^3-\dots\end{array}\right\}$$

elde edilen ifade t'nin kuvvetleri şeklinde tekrar düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\ln M_Z(t)=\left(-\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}+\frac{\sqrt{n}\mu_1'}{\sigma}\right)t+\left(\frac{\mu_2'}{2\sigma^2}-\frac{\mu_1'}{2\sigma^2}\right)t^2+\left(\frac{\mu_3'}{6\sigma^3\sqrt{n}}-\frac{\mu_1'\mu_2'}{2\sigma^3\sqrt{n}}+\frac{\mu_1'^3}{3\sigma^3\sqrt{n}}\right)t^3+\dots$$

Burada $\mu_1'=\mu$ ve $\mu_2'-(\mu_1')^2=\sigma^2$ olduğu için yukarıda verilen ifade aşağıdaki biçimde yazılabilir,

$$\ln M_Z(t)=\frac{1}{2}t^2+\left(\frac{\mu_3'}{6}-\frac{\mu_1'\mu_2'}{2}+\frac{\mu_1'^3}{3}\right)\frac{t^3}{\sigma^3\sqrt{n}}+\dots$$

Eşitlik incelendiğinde t^3 'ün katsayısı sabit bir değer ile $\frac{1}{\sqrt{n}}$ çarpımıdır. Seri açılımında $r\geq 2$ için t^r 'nin katsayısı bir sabit ile $\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}$ 'nin çarpımı olacaktır. Bu bilgiyi kullanarak limit işlemine geçildiğinde,

$\lim_{n\to\infty} \ln M_Z(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ olarak elde edilir. $M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ Standart Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu olduğu için Z raslantı değişkeninin dağılımı da Standart Normal dağılıma yakınsayacaktır.

Bu teoremin bir sonucu olarak da $\bar{X}$, ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir dağılımdan alınan n birimlik rasgele örneklem ortalaması olmak üzere n yeterince büyük olduğunda $\bar{X}$ 'nın örneklem dağılımı $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ dağılımına yakınsar. Uygulama da $n \geq 30$ olduğunda yakınsama kullanılabilir olarak kabul edilir.

ÖRNEK: Ortalaması 15 ve varyansı 4 olan Noral dağılımdan alınan 25 birimlik rasgele örneklemin ortalaması $\bar{X}$ olsun. $\bar{X}$'nın 14.4 ile 15.6 arasında değer alması olasılığını hesaplayınız

Çözüm: Örneklemin çekildiği kitle Normal dağılım oldğu için $\bar{X}$'nın dağılımı $N(15, 4/25)$ olacaktır. Bu durumda istenen olasılık aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$P(14,4 < \bar{X} < 15,6) = P\left(\frac{14,4-15}{0,4} < \frac{\bar{X}-15}{0,4} < \frac{15,6-15}{0,4}\right)$$
$$= P(-1,5 < Z < 1,5) = 0,8664$$

17 > ⋮ Google Slides

ÖRNEK: Ortalması 5 ve standart sapması 0,1 olan bir kitleden seçilen 100 birimlik rasgele örneklemin ortalaması 5.027 olarak bulunuyor. $P(|\bar{X}-5| \geq 0,027)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Örneklemin çekildiği kitle dağılımı bilinmiyor ancak n=100 yeterince büyük bir örneklem çekildiği için MLT bu soruda geçerli olacaktır.

$$P(|\bar{X}-5| \geq 0,027) = P(\bar{X}-5 \geq 0,027) + P(\bar{X}-5 \leq -0,027)$$
$$= 2P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-5}{0,1/\sqrt{100}}}_{N(0,1)} \geq 2,7\right) = P(Z \geq 2,7) = 2(0,0035) = 0,007$$

18 > ⋮ Google Slides

ÖRNEK: Bir sokete ampuller arka arkaya yerleştirilmektedir. Her bir lambanın çalışma ömrünün ortalamasının 2 ay, standart sapmasının da 0,25 ay olduğunu kabul edersek yerleştirilecek 40 lambanın en az 7 yıl çalışması olasılığı nedir?

Çözüm: X_i raslantı değişkeni i. lambanın çalışma süresini göstersin. 40 ampul toplamda $S_{40} = X_1 + \ldots + X_{40}$ süre çalışacaktır.

MLT'den $$\frac{\sum_{i=1}^{40} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1), \quad n \to \infty$$

$$\frac{S_{40} - (40)(2)}{\sqrt{40(0,25)^2}} = \frac{S_{40} - 80}{1,581} \sim N(0,1)$$

$$P(S_{40} \geq 7(12)) = P\left(\frac{S_{40}-80}{1,581} \geq \frac{84-80}{1,581}\right) = P(Z \geq 2,530) = 0,0057$$

19 > ⋮ Google Slides

Soketin %95 olasılık ile en az 5 yıl çalışması için kaç adet lamba yerleştirilmesi gerektiğini bulunuz.

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad E(S_n) = 2n, \ V(S_n) = \frac{n}{16}$$
$$0,95 = P(S_n \geq 60) = P\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}/4} \geq \frac{60-2n}{\sqrt{n}/4}\right) = P\left(Z \geq \frac{240-8n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{240-8n}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\frac{240-8n}{\sqrt{n}} = -1,645 \qquad \Rightarrow \qquad n \cong 32$$

20 > ⋮ Google Slides

TEOREM 5: Ortalamaları μ_1, μ_2 ve varyansları σ_1^2, σ_2^2 olan iki kitleden sırasıyla n_1, n_2 büyüklükte rasgele örneklemler alınsın. Bu öneklemlerin ortalamaları ise $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$ olarak verilsin. Ortalamalar arası fark için

$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$ ve $V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ olduğunu daha önce göstermiştik. Merkezi limit teoreminden,

$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}$ şeklinde tanımlanan raslantı değişkeninin dağılımı

$n \to \infty$ da N(0,1) olan Standart Normal dağılıma yakınsar.

21 Google Sli

ÖRNEK: İki farklı kitleden alınan rasgele örneklemler ve kitlelere ilişkin bilgi aşağıdaki tablo ile veriliyor.

Kitle I	Kitle II
Ortalama=6,5	Ortalama=6
Standart Sapma=0,9	Standart Sapma=0,8
Çekilen Örneklem Büyüklüğü=36	Çekilen Örneklem Büyüklüğü=49

Çekilen örneklemlerin ortalamaları arasındaki farkın 1'den büyük olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Sorunun çözümünde MLT'den yararlanılacaktır.

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 = 6,5 - 6 = 0,5$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0,81}{36} + \frac{0,64}{49}} = 0,189$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 1) = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0,5}{0,189} \geq \frac{1 - 0,5}{0,189}\right) = P(Z \geq 2,65)$$

$$= 1 - 0,9960 = 0,004$$

22 Google Sli