İST-265 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK

UYGULAMA-2 ÇÖZÜMLER

1) Bir serumun herhangi bir hasta üzerinde yan etki yapması olasılığı 0.001'dir. Bu serum 2000 kişi üzerinde uygulandığında;

a. 3 kişi üzerinde yan etki bırakması olasılığı nedir?

b. 2'den fazla kişide yan etki bırakması olasılığı nedir?

c. Serumun yan etki bırakması beklenen kişi sayısı nedir?

Çözüm:

Hatırlatma: $n \to \infty,\ p \to 0$ iken $Binom(n, p),\ \ \lambda = np$ ile $Poisson(\lambda)$ yakınsar.

Yan etki yapma olasılığı p=0.001, n=2000 kişi ise;

$\lambda = np = 2000\,(0.001) = 2$ olarak bulunur.

$P(X = x;\ \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-2}2^{x}}{x!}, x = 0,1,2,\ldots$ olarak yerine yazılır.

Not: $e^{-2} \cong 0.13533$

a. 3 kişi üzerinde yan etki bırakması olasılığı;

$P(X = 3) = \dfrac{e^{-2}2^{3}}{3!} = \dfrac{(0.13533)8}{6} = 0.18044$ olarak bulunur.

Not: $Binom(3; 2000, 0.001) = \dbinom{2000}{3}(0.001)^{3}(0.999)^{997}$

b. 2'den fazla kişide yan etki bırakması olasılığı;

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) =$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$
$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}2^{0}}{0!} + \frac{e^{-2}2^{1}}{1!} + \frac{e^{-2}2^{2}}{2!}\right] =$$
$$= 1 - \left[\frac{(0.13533)1}{1} + \frac{(0.13533)\,2}{1} + \frac{(0.13533)\,4}{2}\right] = 1 - 0.67655 = 0.32335$$

olarak bulunur.

c. Serumun yan etki bırakması **beklenen** kişi sayısı;

$Poisson(\lambda)$ için $E(X) = \lambda = n.p = 2$ olarak bulunur.

2) Bir sigorta şirketinin müşterilerinin trafik kazası sonucu hayatlarını kaybetmeleri olasılığı 0.003 olarak hesaplanmıştır. Sigorta şirketinin müşterilerinden 1000 kişilik bir örneklem alındığında;

a. 4 müşterinin trafik kazasında hayatını kaybetmesi olasılığı nedir?

b. En az 2 müşterinin trafik kazasında hayatını kaybetmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

$p = 0.003, \quad n = 1000$ olarak verilmiştir. $n \to \infty, \quad p \to 0$ iken $Binom(n, p) \to Poisson(\lambda = np)$ yakınsadığını biliyoruz.

$\lambda = np = 1000(0.003) = 3$ ve Poisson dağılımı olasılık fonksiyonu da buradan;

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-3}3^{x}}{x!}, \; x = 0,1,2,...$$ olarak bulunur.

<u>**Not**</u>: $e^{-2} \cong 0.04978$

a. 4 müşterinin trafik kazasında hayatını kaybetmesi olasılığı;

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3}3^{x}}{x!} = \frac{e^{-3}3^{4}}{4!} = \frac{(0.04978)81}{24} = 0.1680075$$ olarak bulunur.

<u>**Not**</u>: $Binom(4;1000, 0.003) = \binom{1000}{4}(0.003)^{4}(0.997)^{996}$

b. En az 2 müşterinin trafik kazasında hayatını kaybetmesi olasılığı;

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$
$$= 1 - \left[\frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!}\right] =$$
$$= 1 - \left[\frac{(0.04978)1}{1} + \frac{(0.04978)3}{1}\right] =$$
$$= 1 - 0.19912 \cong 0.801$$

olarak bulunur.

!

NOT: 1 ve 2.sorulardan görüleceği gibi, n büyüdüğünde ve p olasılığı azaldığında Binom ile çözmek oldukça zorlaşmaktadır. Bu durumda Binom -> Poisson yakınsamasını kullanmak faydalı olacaktır.

3) Bir atıcının hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{3}$ ’tür. Atışların bağımsız olduğu varsayımı altında ve X raslantı değişkeni hedefi vurma sayısını göstermek üzere;

a. Atıcı yalnız 1 atış yapsın. Hedefi vurma olasılığı nedir?

b. Atıcı 5 atış yapsın. 3’ünde hedefi vurması olasılığı nedir?

Çözüm:

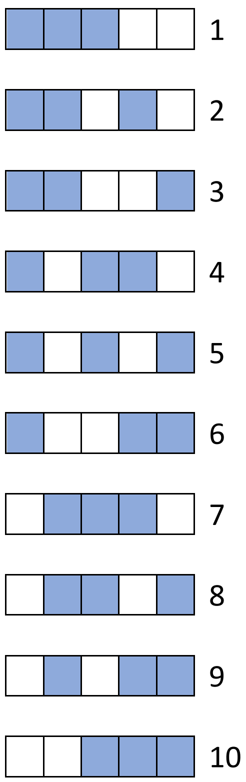
Hatırlatma:

$$Bernoulli(x;p) = p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0,1$$
$$Binom(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x},\ \ x = 0,1,\ldots,n$$

a. Atıcı yalnız 1 atış yapmakta. Tek deneme, olası 2 durum (başarı, başarısızlık) olduğundan Bernoulli dağılımı kullanılır.

$$X \sim Bernoulli(x;p)\ için\ P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}$$
$$P(X=1) = (2/3)^1.(1/3)^0 = 2/3$$

b. Bernoulli => Binom yakınsaması mevcut.



$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{5!}{3!\ 2!}\right)}_{10}\left(\frac{8}{27}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = 0.3292$$

olarak bulunur.

Toplam 10 durum

4) 20 adet elektronik parçanın bulunduğu bir torbanın içerisinde 5 parçanın kusurlu olduğu bilinmektedir. Buna göre;

a. Torbadan alınan bir elektronik parçanın kusurlu olması olasılığı nedir?

b. Torbadan <u>her seferinde yerine koyularak</u> 4 elektronik parça rasgele alınsın. En az 2 parçanın kusurlu olması olasılığı nedir?

Çözüm:

$$p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

a. Tek deneme ve olası iki durum mevcut olduğundan Bernoulli dağılımı kullanılır.

$$Bernoulli(p=\frac{1}{4})=p^{x}(1-p)^{1-x}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}=\frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

b. Bernoulli => Binom yakınsaması mevcut.

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=$$

$$=1-\left[\binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}+\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right]=$$

$$=1-\left[\left(\underbrace{\frac{4!}{0!\,4!}}_{1}\right)1\left(\frac{81}{256}\right)+\left(\underbrace{\frac{4!}{1!\,3!}}_{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{27}{64}\right)\right]=$$

$$=1-\left[\frac{81}{256}+\frac{108}{256}\right]=\frac{67}{256}\cong 0.26171$$

olarak bulunur.

5) Bir işe başvuran 120 adaydan yalnız 80'i bu işe uygun niteliktedir. Ayrıntılı bir görüşme için adaylardan 5 tanesi rasgele seçildiğinde, bunlardan yalnızca 2'sinin uygun nitelikte olması olasılığı nedir?

Çözüm:

Hatırlatma:

$p=\frac{r}{N}$ olmak üzere $Hipergeometrik(x;n,r,N)\rightarrow Binom\left(x;n,p=\frac{r}{N}\right)$

$$X \sim Hipergeometrik(x;n,r,N),\quad P(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$X \sim Binom(x;n,p),\quad P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x},\ \ x=0,1,...,n$$

$N=120$ *Aday*
$r=80$ *Uygun aday*
$n=5$ *Görüşmeye çağırılan aday*
X : *Rasgele seçilen adaylardan uygun olanların sayısı*

- *Binom dağılımı ile çözüm:*

  $p=\frac{r}{N}=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$ olmak üzere;

  $$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{5!}{3!\,2!}\ \frac{4}{9}\ \frac{1}{27}\cong 0.1646$$

  olarak bulunur.

- *Hipergeometrik dağılım ile çözüm;*

  $$P(X=2)=\frac{\binom{r}{2}\binom{N-r}{n-2}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{80}{2}\binom{120-80}{5-2}}{\binom{120}{5}}=$$

  $$=\frac{\binom{80}{2}\binom{40}{3}}{\binom{120}{5}}=\frac{\frac{80!}{2!\,72!}\ \frac{40!}{3!\,37!}}{\frac{120!}{5!\,115!}}=\frac{9880\ .\ 3160}{190578024}\cong 0.164$$

6) Bir torbada 500 top bulunmaktadır. Bunlardan 150 tanesi beyaz, geri kalan 350 tanesi ise siyahtır. Bu torbadan yerine koyulmaksızın 10 top çekildiğinde 5 tanesinin beyaz olması olasılığı nedir?

Çözüm:

Hipergeometrik -> Binom yakınsaması kullanılır.

$N = 500 \ \ Top$

$r = 150 \ Beyaz \ top$

$n = 10 \ Çekilen \ top \ sayısı$

$X \ :Çekilen \ beyaz \ top \ sayısı$

- Binom dağılımı ile çözüm;

$$p = \frac{r}{N} = \frac{150}{500} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^5 \left(\frac{7}{10}\right)^5 = \frac{10!}{5!\,5!}(0.3)^5(0.7)^5 = 0.10292$$

olarak bulunur.

- Hipergeometrik dağılım ile çözüm;

$$P(X = 5) = \frac{\binom{150}{5}\binom{350}{5}}{\binom{500}{10}} = \frac{\frac{150!}{145!\,5!}\ \frac{350!}{345!\,5!}}{\frac{500!}{490!\,10!}} = 0.10235$$ olarak bulunur.

!

NOT: 5 ve 6. Sorulardan görüleceği üzere N büyüdükçe Hipergeometrik dağılım yöntemi ile çözmek oldukça zorlaşmaktadır. Zaman kaybı ve işlem gücü açısından, bu gibi sorularda Hipergeometrik -> Binom yakınsamasını kullanmak oldukça faydalı ve mantıklı olacaktır.

7) Beş seçenekli bir test sınavında toplam 100 soru bulunmaktadır. Seçenekleri rasgele işaretleyen bir kişinin bu sınavda,

a. Tam 26 soruya doğru cevap vermesi olasılığını bulunuz.

b. 26 soruya doğru cevap vermesi olasılığını De-Moivre Laplace teoremi ile bulunuz.

c. En az 18 soruya doğru cevap vermesi olasılığını bulunuz.

Çözüm:

<u>Hatırlatma:</u>

$n \to \infty$ $için$ $Binom(x;n,p) \to Normal(np, npq)$ ile yakınsar.

$n = 100$

$p = \frac{1}{5}(5\ seçenekte\ 1\ doğru\ cevabı\ bulma\ olasılığı)$

a. $P(X = x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1,2,...,n$

$$P\left(X = 26, 100, \frac{1}{5}\right) = \binom{100}{26}\left(\frac{1}{5}\right)^{26}\left(\frac{4}{5}\right)^{74} = 0.031$$

b. $P(X = 26)$ olasılığını De-Moivre Laplace teoremi ile bulalım:

Hatırlatma:

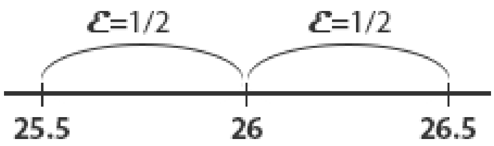
$n \to \infty$ $için$ $\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$

$np = 100.(0.2) = 20$

$npq = 100.(0.2).(0.8) = 16$

$Binom\left(100, \frac{1}{5}\right) \to Normal(\underset{\mu}{20}, \underset{\sigma^2}{16})$ oldu.

NOT: Kesikli rasgele değişkeni sürekli hale getirmek için "süreklilik düzeltmesi" kullanılır.

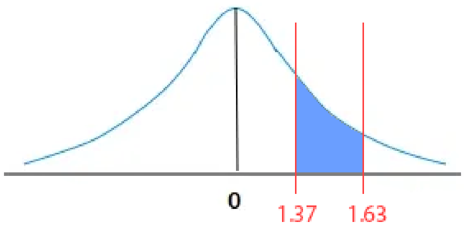


Genellikle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olarak alınır.

ε komşuluğunda aralık belirledik.

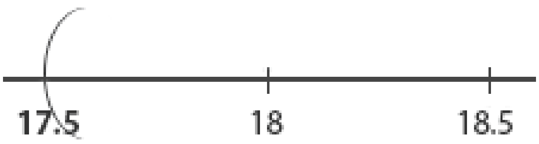
$P(X = 26) = P(25.5 \le X \le 26.5) \quad \Leftarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ yerine yazıldığında;

$= P\left(\dfrac{25.5-20}{4} \le Z \le \dfrac{26.5-20}{4}\right) = P(1.38 \le Z \le 1.63)$ 1.38 ve 1.63 değerleri Std. Normal dağılım tablosundan yerlerine yazıldığında;



$0.4484 - 0.4161 = 0.032$ olarak bulunur.

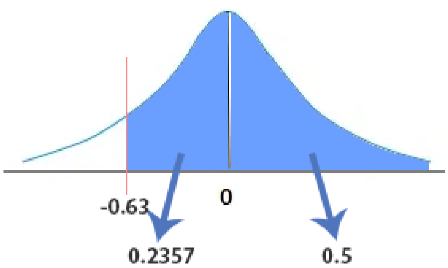
c. $P(X \ge 18) \rightarrow$ Sürekli hale getirmeliyiz.



$P(X \ge 17.5) = P\left(Z \ge \dfrac{17.5-20}{4}\right) =$

$= P(Z > -0.63) = 0.5 + 0.2357 = 0.7357$

olarak bulunur.



8) Bir şehirde yaşayan hanelere istatistiksel bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaya göre; şehirde yaşayan her 10 taneden 1'inde sigara içilmektedir. Bu şehirden 400 adet haneden oluşan bir örneklem çekilmektedir. Buna göre;

a. Tam 32 hanede sigara içilmesi olasılığını,

b. En az 45 hanede sigara içilmesi olasılığını,

c. En çok 30 hanede sigara içilmesi olasılığını,

De-Moivre Laplace teoremi ile bulunuz.

Çözüm:

$$n \to \infty \text{ için } Binom(x; n, p) \to Normal(np, npq)$$

$$n = 400$$

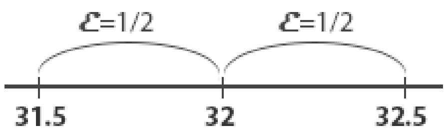
$$p = \frac{1}{10}$$

$$np = 400\ \frac{1}{10} = 40$$

$$npq = 400\ \frac{1}{10}\ \frac{9}{10} = 36$$

$$Normal(np, npq) = Normal(40, 36)$$

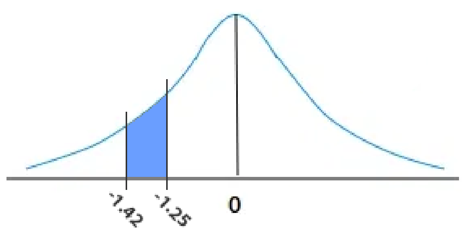
a. $P(X = 32)$ => Süreklilik düzeltmesi yapılır.



$P(X = 32) = P(31.5 \le X \le 32.5) \quad \Leftarrow Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ dönüşümü de yapıldıktan sonra son durum aşağıdaki gibi olur;

$$P\left(\frac{31.5 - 40}{6} \le Z \le \frac{32.5 - 40}{6}\right) = P(-1.42 \le Z \le -1.25) =$$

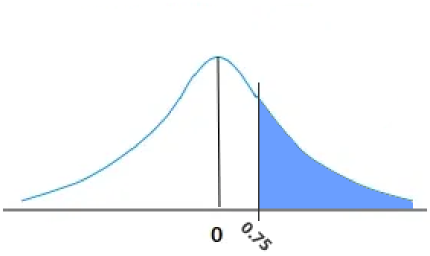
$$= 0.4222 - 0.3944 = 0.0278$$



b. $P(X \geq 45)$ Süreklilik düzeltmesinden sonra;

$P(X \geq 44.5)$ olur.

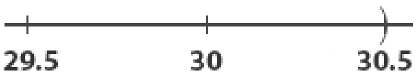
$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ dönüşümü de yapıldıktan sonra;



$$P\left(Z \geq \frac{44.5-40}{6}\right) = P(Z \geq 0.75) = 0.5 - 0.2734 = 0.2266$$

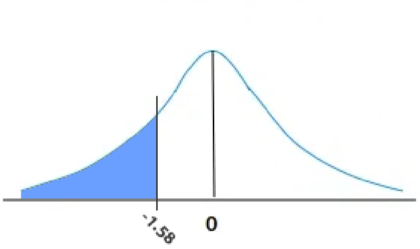
olarak bulunur.

c. $P(X \leq 30)$ Süreklilik düzeltmesinden sonra;



$P(X \leq 30.5)$ olur.

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ dönüşümü de yapıldıktan sonra;



$$P\left(Z \leq \frac{30.5-40}{6}\right) = P(Z \leq 0.-1.58) = 0.5 - 0.4429 = 0.0571$$

olarak bulunur.