KESİKLİ DAĞILIMLAR (1)				
DAĞILIM	**OLASILIK FONKSİYONU**	**BEKLENEN DEĞER**	**VARYANS**	**MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON**
Bernoulli Dağılımı Bir rasgele deneyin iki ayrı sonuçtan oluştuğu kabul edilsin. Bu rasgele deneyin sonuçları, **“1: Başarı”** ve **“0: Başarısızlık**” olarak ifade edilsin. X raslantı değişkeni, bu rasgele deneyde elde edilecek başarı sayısıdır. $X \sim Bernoulli\ (p) = B(n = 1, p)$ **Parametre:** $0 < p < 1\ ,\ p \in R$	$P(X = x\, ; p) = \begin{cases} p^{X}(1-p)^{1-X} & , \quad x = 0{,}1 \text{ için} \\ 0 & , \text{ öteki } x \text{ değerleri için} \end{cases}$	$E(X) = p$	$V(X) = p(1-p)$	$M_X(t) = pe^t + q$ $(q = 1 - p)$
Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım) Bernoulli dağılımının genelleştirilmiş halidir. X raslantı değişkeni, birbirinden bağımsız n tane Bernoulli denemesinden elde edilen başarıların sayısıdır. • n rasgele deney birbirinden bağımsızdır ve bu deneyler özdeştir. • Her deneme için yalnız iki sonuç (Örneğin: Başarı/Başarısızlık;Sağlam/Bozuk; Evet/Hayır; Var/Yok; Açık/Kapalı) vardır. • Tek bir deneme için başarı olasılığı (p), her deneme için aynıdır. (Başarısızlık olasılığı ise, q’ dur.) Bu olasılıklar denemeden denemeye değişmezler. Çünkü her deneme birbirinden bağımsız olarak gerçekleşmektedir. $X \sim B(n, p)$ **Parametre:** $n \in \{0,1,2,3, \dots\} = N_0$ $0 \le p \le 1\ ,\ p \in R$	$P(X = x\, ; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x} & , \quad x = 0,1,2, \dots, n \text{ için} \\ 0 & , \text{ öteki } x \text{ değerleri için} \end{cases}$	$E(X) = np$	$V(X) = np(1-p)$	$M_X(t) = (pe^t + q)^n$ $(q = 1 - p)$

KESİKLİ DAĞILIMLAR (2)				
DAĞILIM	**OLASILIK FONKSİYONU**	**BEKLENEN DEĞER**	**VARYANS**	**MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON**
Poisson Dağılımı X raslantı değişkeni, tanımlanan belirli bir sürekli ortamda meydana gelen olayların sayısıdır. Sürekli ortam olarak; zaman aralığı, alan, hacim veya uzunluk düşünülebilir. Belirlenen sürekli ortamda, olayların ortalama ortaya çıkma sayısı λ' dır ve bu λ değeri sürekli ortamın uzunluğu/büyüklüğü/genişliği ile doğru orantılıdır. Sürekli ortamın çok küçük alt parçalara bölündüğü varsayılsın. Poisson dağılımında, bu alt parçalarda bir olayın meydana gelmesi olasılığının çok küçük olduğu varsayılır. Ayrıca, ilgilenilen bir olayın belirli bir aralıkta meydana gelmesi, farklı aralıklarda meydana gelen olaylardan bağımsızdır. Diğer bir değişle, olaylar birbirinden bağımsız olarak meydana gelmektedir. Aşağıda belirtilen olayların her biri birer Poisson raslantı değişkeni tanımlamaktadır: • Bir saat aralığında belli bir Internet sitesine gelen bağlantıların sayısı • Yarım saat içinde bir nakliyat deposuna yükleme-boşatılma için gelen kamyonların sayısı • Belirli bir hava alanına her saat inen uçak sayısı • Bir telefon santralinde her bir beş dakika için gerçekleşen telefon görüşmelerinin sayısı • Belli bir trafik kavşağından 1 dakika içinde geçen otomobillerin sayısı • Büyük bir bilgisayar laboratuarında üç ay içinde meydana gelen elektrik kesintilerinin sayısı $X \sim Poisson\ (\boldsymbol{\lambda})$ **Parametre:** $\lambda > 0\ ,\ \lambda \in R$	$P(X=x\,;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda} & ,\quad x=0,1,2,3,\ldots\ \ için \\ 0 & ,\ öteki\ x\ değerleri\ için\end{cases}$	$E(X)=\lambda$	$V(X)=\lambda$	$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$

KESİKLİ DAĞILIMLAR (3)

BİNOM DAĞILIMININ LİMİT DURUMU

$B(n,p)$ binom dağılımının olasılık fonksiyonu $n!$ terimini içermektedir. Bu terim, n deneme sayısının artması ile hızla artar. Örneğin,

$$\begin{aligned} 10! &= 3.62 * 10^{6} \\ 50! &= 3.04 * 10^{64} \\ 100! &= 9.33 * 10^{157} \end{aligned}$$

Bu nedenle, deneme sayısının büyük değerleri için olasılıkların hesabını yapmak yorucu ve zaman alıcı bir işlemdir. Bu durumda, ilgili olasılığı yaklaşık olarak hesaplamakta yarar vardır. Bunun için, Poisson teoremi ve De-Moivre Laplace teoremi kullanılır.

BİNOM DAĞILIMININ POİSSON DAĞILIMINA YAKINSAMASI (POISSON TEOREMİ)

Poisson dağılımı aşağıdaki koşullar altında, Binom dağılımının limit halidir. Binom dağılımındaki olasılıkların limiti, Poisson dağılımındaki olasılıkları vermektedir. **Koşullar:**

- Gözlenen olayın ortaya çıkma olasılığı (p) veya ortaya çıkmama olasılığından (q) biri sıfıra yakınsarken; öteki bire yakınsamalıdır.
- Birbirinden bağımsız denemelerin sayısı n büyük olmalıdır ($n \to \infty$).
- $n > 50$ ve $np < 5$ (ya da $nq < 5$) olduğu durumda, yaklaşım güvenilir olacaktır.
- $n \geq 100$ ve $np \leq 10$ olduğunda Poisson dağılımından elde edilen olasılıklar, Binom dağılımının olasılıklarına oldukça yakın olacaktır.

Yukarıdaki koşullar altında, parametreleri n ve p olan Binom dağılımı; parametresi λ=np olan Poisson dağılımına dönüşmektedir.

$$B(n,p) \xrightarrow[p\to 0\ (ya\ da\ q\to 0\ )]{n\to\infty} Poisson(\lambda = np)$$

NOT: De-Moivre Laplace teoremi, Binom dağılımının Normal dağılıma yakınsamasını açıklayan bir teoremdir. Burada, kesikli dağılımlar üzerinde durulduğundan bu teorem verilmemiştir.

TANIT

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X = x\,; n,p) &= \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n!}{(n-x)!\,n^{x}}\right) * \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(x-1))}{n^{x}}\right) * \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{(x-1)}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right] \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!}\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right]} \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right]} \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\Big/\frac{1}{n-x}\right]} \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{\lambda}{n^{2}}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\Big/\frac{-1}{(n-x)^{2}}\right]} \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{\lambda(n-x)^{2}}{n^{2}}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\right)\right]} \\
&= \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{-\lambda} \quad ,x = 0,1,2,3,4,\cdots
\end{aligned}$$

KESİKLİ DAĞILIMLAR (4)				
DAĞILIM	**OLASILIK FONKSİYONU**	**BEKLENEN DEĞER**	**VARYANS**	**MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON**
Geometrik Dağılım X raslantı değişkeni, ilk başarının elde edilmesi için gerekli denemelerin sayısıdır. $X \sim Geometrik\ (p) = NB(k=1, p)$ **Parametre:** $0 < p \leq 1, p \in R$	$P(X=x\,;p) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & , \quad x = 1,2,3,\ldots \quad için \\ 0 & , \ öteki\ x\ değerleri\ için \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$	$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$ $(q = 1-p)$
Negatif Binom Dağılımı (1) **(Eksi İki Terimli Dağılım)** X raslantı değişkeni, k. başarının elde edilmesi için gerekli denemelerin sayısıdır. **<u>ÖNEMLİ:</u>** Binom dağılımında, denemelerin sayısı sabit ve elde edilecek başarıların sayısı rastgele değişkendir. Bunu tersi olarak, Negatif Binom dağılımında, elde edilecek başarıların sayısı sabit ve denemelerin sayısı bir raslantı değişkenidir. $X \sim NB\ (k, p)$ **Parametre:** $k \in \{1,2,3,\ldots\}$ $0 < p \leq 1\ ,\ p \in R$	$P(X=x\,;k,p) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & , \quad x = k, (k+1), (k+2), \ldots \quad için \\ 0 & , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{cases}$	$E(X) = \frac{k}{p}$	$V(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$	$M_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-qe^t}\right]^k$ $(q = 1-p)$
Negatif Binom Dağılımı (2) **(Eksi İki Terimli Dağılım)** X raslantı değişkeni, k. başarının elde edilmesi için gerekli başarısızlıkların sayısıdır. $X \sim NB\ (k, p)$ **Parametre:** $k \in \{1,2,3,\ldots\}$ $0 < p \leq 1\ ,\ p \in R$	$P(X=x\,;k,p) = \begin{cases} \binom{x+k-1}{x} (1-p)^x p^k & , \quad x = 0,1,2,\cdots \quad için \\ 0 & , \ öteki\ x\ değerleri\ için \end{cases}$	$E(X) = \frac{k(1-p)}{p}$	$V(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$	$M_X(t) = \left[\frac{p}{1-qe^t}\right]^k$ $(q = 1-p)$

KESİKLİ DAĞILIMLAR (5)				
DAĞILIM	**OLASILIK FONKSİYONU**	**BEKLENEN DEĞER**	**VARYANS**	**MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON**
Hipergeometrik Dağılım İki çeşit nesneden oluşan bir kitle düşünülsün. Bu kitlede, sonlu sayıda nesne bulunsun. Sonlu sayıdaki N tane nesneden; r tanesi istenen türden ve (N-r) tanesi diğer türden olsun. X raslantı değişkeni, yerine konmaksızın seçilen n birimli örneklemdeki istenen tür sayısıdır. **<u>ÖNEMLİ:</u>** Burada, sonlu sayıdaki kitleden yerine konulmadan nesneler seçilmektedir. Bu nedenle, denemeler birbirinden bağımsız değildir ve bağımlı örneklem mevcuttur. $X \sim Hipergeometrik(N, n, r)$ **Parametre:** $N \in \{1,2,3,\ldots\}$ $n \in \{1,2,\ldots,N\}$ $r \in \{0,1,2,\ldots,N\}$	$P(X = x\,; N, n, r) = \begin{cases} \dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , \quad x \in \{max(\,0, n-(N-r)\,), \ldots, \min(\,r, n\,)\}\ için \\ 0 & , \quad öteki\ x\ değerleri\ için \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{nr}{N}$	$V(X) = \dfrac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$	KARMAŞIK

KESİKLİ DAĞILIMLAR (6)

Kesikli Dağılımlar Arasındaki İlişkiler

Binom Dağılımı

(Yerine Koyarak Seçim → Bağımsız Örneklem)

p:İlgilenilen olayın ortaya çıkma olasılığı

n: Deneme sayısı

$p \to 0$ (ya da $q \to 0$) ve $n \to \infty$ ise; (np) çarpımı sabit kalma koşulu altında, n ve p parametreli Binom dağılımı, $\lambda = np$ parametreli Poisson dağılımına yakınsar.

Poisson Dağılımı

Deneme sayısı (n) arttırıldığında; p parametreli Bernoulli dağılımı, n ve p parametreli Binom dağılımına dönüşür.

Bernoulli Dağılımı

Kitle büyüklüğü (N) ve ilgilenilen tür sayısı (r), çekilen örneklem büyüklüğünden (n) çok daha büyük olduğunda; N, r ve n parametreli Hipergeometrik dağılım, n ve $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{N}}$ parametreli Binom dağılımına yakınsar.

Çekilen örneklem büyüklüğü n=1 olduğunda; N, r ve n parametreli Hipergeometrik dağılım, $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{N}}$ parametreli Bernoulli dağılımına dönüşür.

Hipergeometrik Dağılım

(Yerine Koymadan Seçim → Bağımlı Örneklem)

SÜREKLİ DAĞILIMLAR (1)

DAĞILIM	OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU	BEKLENEN DEĞER	VARYANS	MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON
Normal Dağılım $X \sim N\,(\mu, \sigma^2)$ **Parametre:** $\sigma^2 > 0\,,\ \mu \in R$ μ ve σ^2 parametreli Normal dağılım, $X = \mu$ noktasına göre simetriktir ve çan eğrisi şeklindedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x\,;\mu,\sigma^2)$, $X = \mu$ noktasında maksimum değere sahiptir. $X = \mu + \sigma$ ve $X = \mu - \sigma$ noktaları dönüm noktalarıdır. Bu noktalarda, olasılık yoğunluk fonksiyonu konkavlıktan konveksliğe geçmektedir.	$f_X(x\,;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ , -\infty < x < +\infty$	$E(X) = \mu$	$V(X) = \sigma^2$	$M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)}$
Standard Normal Dağılım $Z \sim SN\,(0,1) = N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ **<u>DÖNÜŞTÜRME:</u>** $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}\,(\mu, \sigma^2)$ olsun. X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P(X \le x)$; Z raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu $\Phi\,(z) = P(Z \le z)$ ile gösterilir. Buna göre; $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}\ ,\ Z \sim SN\,(0,1)$ $F_X(x) = P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $\Phi\,(z) = P(Z \le z) = 1 - P(Z \le -z) = 1 - \Phi\,(-z)$ $\Phi\,(-z) = P(Z \le -z) = 1 - P(Z \le z) = 1 - \Phi\,(z)$ $\Phi\,(z) + \Phi\,(-z) = 1$	$\phi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\ ,\qquad -\infty < z < +\infty$ $\phi_Z(z) = \phi_Z(-z)$	$E(Z) = 0$	$V(Z) = 1$	$M_Z(t) = e^{\left(\frac{1}{2}t^2\right)}$

SÜREKLİ DAĞILIMLAR (2)

Binom Dağılımının Normal Dağılıma Yakınsaması (DE MOIVRE LAPLACE TEOREMİ)

$X \sim B(n,p)$ olsun. n, birbirinden bağımsız denemelerin sayısıdır. p, başarı olasılığı ve q, başarısızlık olasılığıdır $(p+q=1)$. Binom dağılımında denemelerin sayısı büyüdükçe, X raslantı değişkeninin dağılımı, $\mu = np$ ve $\sigma^2 = npq$ parametreleri ile Normal dağılıma yakınsayacaktır. $np \geq 5$ ve $nq \geq 5$ koşulları sağlandığında iyi bir yakınsama sağlanır ve n değeri büyüdükçe yakınsama daha iyi olur.

$$X \sim B(n,p) \xrightarrow{n\to\infty\ ,\ \ np\geq 5\ \ ve\ \ nq\geq 5} X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq) \quad , \qquad Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X=x\,;n,p) = \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$$

NOT: Decker ve Fitzgibbon'in 1991 yılında yaptıkları çalışmada, Binom dağılımının

i. $n^{0.31}p \geq 0.47$ durumunda Normal dağılıma yakınsamasının,

ii. $p \to 0$ ise, $n^{0.31}p < 0.47$ durumunda; $q \to 0$ ise, $n^{0.31}q < 0.47$ durumunda Poisson dağılımına yakınsamasının,

kullanılmasını önermiştir.

Kaynak: Decker, R., and D. Fitzgibbon, 1991 The normal and Poisson approximations to the binomial: a closer look. Technical Report 82.3. Department of Mathematics, University of Hartford, Hartford, CT.

Poisson Dağılımının Normal Dağılıma Yakınsaması

$X \sim Poisson(\lambda)$ olsun. Poisson dağılımında $\lambda > 20$ olması durumunda, X raslantı değişkeninin dağılımı, $\mu = \lambda$ ve $\sigma^2 = \lambda$ parametreleri ile Normal dağılıma yakınsayacaktır. λ değeri büyüdükçe, yakınsama daha iyi olur.

$$X \sim Poisson(\lambda) \xrightarrow{\lambda > 20} X \sim N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda) \quad , \qquad Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1)$$

SÜREKLİ DAĞILIMLAR (3)

Süreklilik Düzeltmesi

X, kesikli bir raslantı değişkeni olsun. X, Binom ya da Poisson dağılımına sahip olabilir. Bu durumda, X kesikli raslantı değişkenine ilişkin olasılıkların yaklaşık değerlerini sürekli bir dağılım olan normal dağılımla hesaplayabilmek için süreklilik düzeltilmesi yapılması gerekmektedir. Bunun için, herhangi bir $\varepsilon > 0$ keyfi değeri kullanılır. Bu değere, düzeltme terimi denir. Genellikle, $\varepsilon = 0.5$ veya $\varepsilon = 0.05$ olarak alınır.

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= P(x - \varepsilon \leq X \leq x + \varepsilon) = P\left(\frac{(x-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) \\
P(X \leq x) &= P(X \leq x + \varepsilon) = P\left(Z \leq \frac{(x+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) \\
P(X < x) &= P(Z < x - \varepsilon) = P\left(Z < \frac{(x-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x_1 \leq X \leq x_2) &= P(x_1 - \varepsilon \leq Z \leq x_2 + \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) \\
P(x_1 < X < x_2) &= P(x_1 + \varepsilon \leq Z \leq x_2 - \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) \\
P(x_1 < X \leq x_2) &= P(x_1 + \varepsilon \leq Z \leq x_2 + \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2+\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) \\
P(x_1 \leq X < x_2) &= P(x_1 - \varepsilon \leq Z \leq x_2 - \varepsilon) = P\left(\frac{(x_1-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq Z \leq \frac{(x_2-\varepsilon) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)
\end{aligned}
$$

SÜREKLİ DAĞILIMLAR (4)

DAĞILIM	OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU	BEKLENEN DEĞER	VARYANS	MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON
Tek Biçimli Dağılım $X \sim U\,(a,b)$ **Parametre:** $-\infty < a < b < +\infty$ X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P(X \leq x)$ aşağıda verilmiştir: $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x < b \text{ için} \\ 0 & , \quad x < a \text{ için} \\ 1 & , \quad x \geq b \text{ için} \end{cases}$	$f_X(x\,;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \text{ için} \\ 0 & , \quad \text{öteki } x \text{ değerleri için} \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$	$M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & , \quad t \neq 0 \\ 1 & , \quad t = 0 \end{cases}$
Üstel Dağılım (1) $X \sim \text{Üstel}\,(\lambda) = Gamma(n = 1, \lambda)$ **Parametre:** $\lambda > 0\,,\ \lambda \in R$ X raslantı değişkeninin, dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P(X \leq x)$ aşağıda verilmiştir: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x \geq 0 \text{ için} \\ 0 & , \quad x < 0 \text{ için} \\ 1 & , \quad x \to +\infty \end{cases}$	$f_X(x\,;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \quad x \geq 0 \text{ için} \\ 0 & , \quad x < 0 \text{ için} \end{cases}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda^2$	$M_X(t) = (1 - \lambda t)^{-1}$
Üstel Dağılım (2) $X \sim \text{Üstel}(\beta) = Gamma(n = 1, \beta)$ **Parametre:** $\beta > 0\,, \beta: Oran\ Parametresi$ X raslantı değişkeninin, dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P(X \leq x)$ aşağıda verilmiştir: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x} & , \quad x \geq 0 \text{ için} \\ 0 & , \quad x < 0 \text{ için} \\ 1 & , \quad x \to +\infty \end{cases}$	$f_X(x\,;\beta) = \begin{cases} \beta\, e^{-\beta x} & , \quad x \geq 0 \text{ için} \\ 0 & , \quad x < 0 \text{ için} \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\beta}$	$V(X) = \dfrac{1}{\beta^2}$	$M_X(t) = \left(1 - \dfrac{t}{\beta}\right)^{-1}$

SÜREKLİ DAĞILIMLAR (5)				
DAĞILIM	**OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU**	**BEKLENEN DEĞER**	**VARYANS**	**MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON**
Gamma Dağılımı (1) $X \sim Gamma\ (n, \lambda)$ **Parametre:** $n > 0$, $\lambda > 0$ n: $Şekil\ Parametresi$, $n \in R$ λ: $Ölçek\ Parametresi$, $\lambda \in R$	$f_X(x\,; n, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n\,\Gamma(n)}\, x^{n-1}\, e^{-\frac{x}{\lambda}} & , x \geq 0\ için \\ 0 & , x < 0\ için \end{cases}$	$E(X) = n\lambda$	$V(X) = n\lambda^2$	$M_X(t) = (1 - \lambda t)^{-n}$
Gamma Dağılımı (2) $X \sim Gamma\ (n, \beta)$ **Parametre:** $n > 0$, $\beta > 0$ n: $Şekil\ Parametresi$, $n \in R$ β: $Ölçek\ Parametresi$, $\beta \in R$	$f_X(x\,; n, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1}\, e^{-\beta x} & , x \geq 0\ için \\ 0 & , x < 0\ için \end{cases}$	$E(X) = \frac{n}{\beta}$	$V(X) = \frac{n}{\beta^2}$	$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-n}$

GAMMA FONKSİYONU

1. Her $n > 0$ için, gamma fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

2. $\Gamma(1) = 1$' dir.

3. n ; pozitif bir tamsayı ise; $\Gamma(n) = (n-1)!$ ' dir:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\ \ \Gamma(n-1) \\ &= (n-1)\ \ (n-2)\ \ \Gamma(n-2) \\ &= (n-1)\ \ (n-2)\ \ (n-3)\ \ \Gamma(n-3) \\ &= (n-1)\ \ (n-2)\ \ (n-3)\ \ (n-4)\ \cdots\ 1\ \ \Gamma(1) \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

4. $n > 1$ ise, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ ' dir.

5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ' dir.

<u>(5. Özellik) TANIT</u> : $X \sim N(0,1)$ olsun. Buna göre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi} \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^2}{2} = u\ , \qquad x = \sqrt{2u} \longrightarrow \frac{2\,x\,dx}{2} = xdx = du\ , \qquad dx = \frac{du}{x} = \frac{du}{\sqrt{2u}}$$

$$x \to 0\ iken\ u \to 0\ \ ;\ \ x \to +\infty\ iken\ u \to +\infty\ :\ 0 \leq u < +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2u}} e^{-u} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u} du = \sqrt{\pi} \longrightarrow \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ .$$

SÜREKLİ DAĞILIMLAR (6)				
DAĞILIM	**OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU**	**BEKLENEN DEĞER**	**VARYANS**	**MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON**
Beta Dağılımı $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ **Parametre:** $\alpha > 0$, $\beta > 0$ α: $Şekil\ Parametresi$, $\alpha \in R$ β: $Şekil\ Parametresi$, $\beta \in R$	$f_X(x\,;\alpha,\beta\,) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & , \quad 0 \le x \le 1\ için \\ 0 & , \ öteki\ x\ değerleri\ için \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$V(X) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	KARMAŞIK

BETA FONKSİYONU

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, beta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$B(\alpha\,,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

<u>TANIT</u>:

$$\int_0^1 f_X(x\,;\alpha,\beta\,)dx = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}dx = 1$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 1 \longrightarrow \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Beta fonksiyonu simetriktir: $B(\alpha\,,\beta) = B(\,\beta,\alpha)$.

SÜREKLİ DAĞILIMLAR (7)			
DAĞILIM	**OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU**	**KARAKTERİSTİK FONKSİYON**	**DAĞILIM FONKSİYONU**
Cauchy Dağılımı $X \sim$ Cauchy (σ, μ) **Parametre:** $\sigma > 0$ $\mu: Konum\ Parametresi\ ,\ \mu \in R$ σ: Ölçek $Parametresi\ ,\ \sigma \in R$ **<u>ÖNEMLİ</u>:** • Cauchy dağılımında, beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyonu tanımlı değildir. • Cauchy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $\boldsymbol{X = \mu}$ **noktasında simetriktir ve çan eğrisi şeklindedir.** • Cauchy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, **Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre daha kalın kuyrukludur.**	$f_X(x\,;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\pi\sigma\left[1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} \quad ,-\infty < x < +\infty$	$\varphi_X(t) = e^{(\mu i t - \sigma\lvert t\rvert)}$	$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\, arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & , \quad -\infty < x < +\infty \ \ için \\ 0 & , \quad x \to -\infty \ \ için \\ 1 & , \quad x \to +\infty \ \ için \end{cases}$

Standart Cauchy Dağılımı

$X \sim$ Cauchy $(\mu = 0, \sigma = 1)$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu: $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \quad ,-\infty < x < +\infty$

Karakteristik Fonksiyonu: $\varphi_X(t) = e^{(-\lvert t\rvert)}$

Dağılım Fonksiyonu: $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\, arctan(x) & , \quad -\infty < x < +\infty \ \ için \\ 0 & , \quad x \to -\infty \ \ için \\ 1 & , \quad x \to +\infty \ \ için \end{cases}$