HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

BİLEŞİK, MARJİNAL VE KOŞULLU DAĞILIMLAR

Doç. Dr. Yasemin Kayhan Atılgan (Şube 01)
Doç. Dr. Derya Ersel (Şube 02)

- İstatistiksel araştırmalarda genellikle birden çok raslantı değişkeni ile çalışılır. Aynı örneklem uzayında tanımlı çok sayıda farklı raslantı değişkeni söz konusu olabilir. Örneğin, bir okuldaki öğrencilerin ders çalışmak için harcadıkları zaman ile bu öğrencilerin sınavlardan aldıkları notlar birlikte araştırılabilir. Benzer şekilde, bir hastaneye gelen hastaların kan basınçları ile ağırlıkları ya da bir iş merkezindeki şirketlerin iş hacimleri ile karları birlikte araştırılabilir. Bu tür araştırmalarda bu raslantı değişkenlerin bileşik dağılımlarının bilinmesi gerekir.

- Bu bölümde öncelikli olarak, aynı örneklem uzayında tanımlanmış iki raslantı değişkeni olması durumunda bileşik ve marjinal dağılımları ele alacağız. Daha sonra, koşullu dağılımlar üzerinde duracağız. Son olarak, elde ettiğimiz sonuçları ikiden çok raslantı değişkeni olması durumu (çok değişkenli durum) için genişleteceğiz.

Raslantı Değişkenlerinin Kesikli Olması Durumunda Bileşik ve Marjinal Dağılım

Tanım 1: X ve Y, tanım kümeleri sırasıyla R_X ve R_Y olan kesikli raslantı değişkenleri olsun. X ve Y raslantı değişkenlerinin "bileşik olasılık fonksiyonu" aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p(x,y)=\begin{cases} P(X=x,Y=y), & x\in R_X,\ y\in R_Y \\ 0 & ,\text{öteki değerler için} \end{cases}$$

Terorem 1: Tanım kümeleri sırasıyla R_X ve R_Y olan X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu $p(x,y)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

- $p(x,y)\geq 0 \quad her\ x\in R_X,\ y\in R_Y\ için$
- $\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_y} p(x,y)=1$

Örnek 1: İki zar atılsın ve X r.d., üst yüze gelen küçük sayıyı, Y r.d. ise üst yüze gelen büyük sayıyı göstersin. X ve Y r.d.'lerinin bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: İki zarın atılması olayına ilişkin örneklem uzayı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} S=\{&(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\\ &(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6)\\ &(3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,6)\\ &(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6)\\ &(5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\\ &(6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\} \end{aligned}$$

Örnek olarak, $X=2$ ve $Y=3$ durumunu ele alalım. Bu değerler için olasılık $p(2,3)$, örneklem uzayındaki $(2,3)$ ve $(3,2)$ olaylarına ilişkin olasılıkların toplanmasıyla elde edilir. Bu olasılık,

$p(2,3)=P(X=2,Y=3)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}$ olarak hesaplanır.

Diğer olasılıkların benzer şekilde hesaplanmasıyla tüm durumlar için aşağıdaki tablo elde edilir.

Y							
	6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36
	5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0
	4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0
	3	2/36	2/36	1/36	0	0	0
	2	2/36	1/36	0	0	0	0
	1	1/36	0	0	0	0	0
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		X					

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{36}, & 1\le x=y\le 6 \text{ için}\\ \dfrac{2}{36}, & 1\le x<y\le 6 \text{ için}\\ 0, & \text{öteki değerler için}\end{cases}$$

$$P(X=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)+P(X=1,Y=4)+P(X=1,Y=5)+P(X=1,Y=6)$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{11}{36}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{9}{36} \qquad P(X=3)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{7}{36}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{36} \qquad P(X=5)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{3}{36} \qquad P(X=6)=\frac{1}{36}$$

$\sum_{i=1}^{6} P(X_i=x_i)=1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$$P(Y=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=4,Y=1)+P(X=5,Y=1)+P(X=6,Y=1)$$
$$=\frac{1}{36}+0+0+0+0+0=\frac{1}{36}$$

$$P(Y=2)=\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{3}{36} \qquad P(Y=3)=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$$

$$P(Y=4)=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36} \qquad P(Y=5)=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{9}{36}$$

$$P(Y=6)=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$$

Benzer şekilde, $\sum_{j=1}^{6} P(Y_j=y_j)=1$'dir.

Tanım 2: Tanım kümeleri sırasıyla R_X ve R_Y olan X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu $p(x,y)=P(X=x,Y=y)$ olsun. X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$P(X=x)=\sum_{y\in R_Y} P(X=x,Y=y), \quad \text{her } x\in R_X \text{ için}$$
$$P(Y=y)=\sum_{x\in R_X} P(X=x,Y=y), \quad \text{her } y\in R_Y \text{ için}$$

Örnek 2: Örnek 1'de elde edilen bileşik olasılık dağılımından faydalanarak X ve Y r.d.'lerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: X r.d.'nin olasılık fonksiyonu sütunlardaki olasılıkların toplanmasıyla, Y r.d.'nin olasılık fonksiyonu ise satırlardaki olasılıkların toplanmasıyla elde edilir.

X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonları, aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$P(X=x)=\sum_{y=1}^{6} p(x,y)=p(x,x)+\sum_{y>x} p(x,y)+\sum_{y<x} p(x,y)$$
$$=\frac{1}{36}+(6-x)\frac{2}{36}+0$$
$$=\frac{1}{36}[13-2x], \qquad x=1,2,\ldots,6$$

$$P(Y=y)=\sum_{x=1}^{6} p(x,y)=p(y,y)+\sum_{y>x} p(x,y)+\sum_{y<x} p(x,y)$$
$$=\frac{1}{36}+(y-1)\frac{2}{36}+0$$
$$=\frac{1}{36}[2y-1], \qquad y=1,2,\ldots,6$$

Örnek 3: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{21}(x+y), & x=1,2;\ y=1,2,3 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$P(X=x)=\sum_{y=1}^{3}\frac{1}{21}(x+y)=\frac{1}{21}(x+1)+\frac{1}{21}(x+2)+\frac{1}{21}(x+3)=\frac{1}{21}(3x+6)=\frac{x+2}{7},\quad x=1,2 \ \textit{için}$$

$$P(Y=y)=\sum_{x=1}^{2}\frac{1}{21}(x+y)=\frac{1}{21}(1+y)+\frac{1}{21}(2+y)=\frac{3+2y}{21},\quad y=1,2,3 \ \textit{için}$$

Tanım 3: X ve Y kesikli raslantı değişkenleri için bileşik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\boxed{F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\sum_{s\le x}\sum_{t\le y}p(s,t)}$$

Teorem 2: X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ aşağıdaki özellikleri sağlar. $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

- $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\qquad \lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}F(x,y)=1$
- $F_X(x)=F(x,+\infty),\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)$
- Herhangi a, b, c, d reel sayıları için,

$$P(a\le X\le b, c\le Y\le d)=F(b,d)+F(a,c)-F(a,d)-F(b,c)$$

Raslantı Değişkenlerinin Sürekli Olması Durumunda Bileşik ve Marjinal Dağılım

Tanım 4: X ve Y sürekli r.d.'lerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlayan integrallenebilir bir fonksiyondur.

$x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

- $f(x,y)\ge 0,\ \ her\ \ x,y\in\mathbb{R}\ \ için$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=1$

X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ biliniyorsa bir A olayının olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\boxed{P(A)=\int_A\int f(x,y)\,dxdy}$$

Örnek 4: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}kxy^2, & 0<x<y<1 \ \ \textit{için}\\ 0, & \textit{öteki değerler için}\end{cases}$$

olsun. k değeriniz bulunuz.

Çözüm: $f(x,y)$ bir bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu için $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=1$ olmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=1 \quad\Rightarrow\quad \int_0^1\int_0^y kxy^2\,dxdy=\int_0^1 ky^2\int_0^y x\,dxdy=1$$

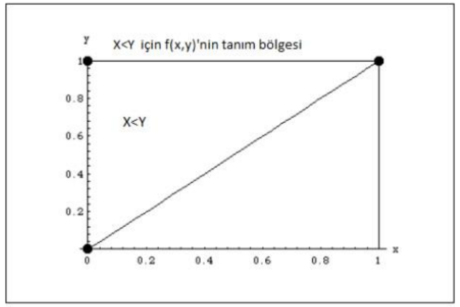
$$\Rightarrow\frac{k}{2}\int_0^1 y^4\,dy=\frac{k}{2}y^5\Big|_0^1=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{k}{10}=1$$

$$\Rightarrow k=10$$

Örnek 5: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(x^2+2xy), & 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1 \ \ \textit{için}\\ 0, & \textit{öteki değerler için}\end{cases}$$

olsun. $P(X<Y)$ olasılığını bulunuz.



$$P(X<Y)=\iint_A f(x,y)\,dxdy=\int_0^1\left[\int_0^y\frac{6}{5}(x^2+2xy)\,dx\right]dy=\frac{6}{5}\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+x^2y\right]_{x=0}^{x=y}dy$$

$$=\frac{6}{5}\int_0^1\frac{4}{3}y^3\,dy=\frac{2}{5}y^4\Big|_0^1=\frac{2}{5}$$

Tanım 4: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ olsun. $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere, X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

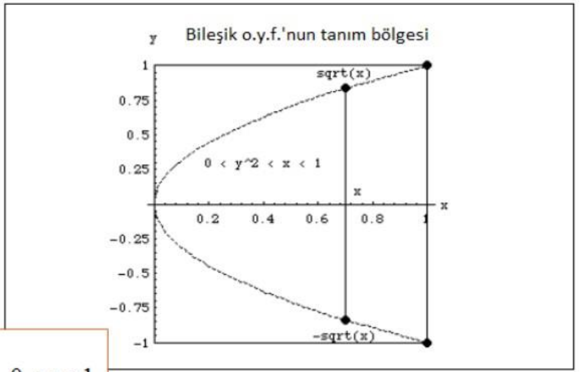
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \quad -\infty<x<\infty$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \quad -\infty<y<\infty$$

Örnek 6: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y^2<x<1 \text{ için}\\ 0, & \text{öteki değerler için}\end{cases}$$

olsun. X r.d.'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{3}{4}dy=\frac{3}{4}y\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}, \qquad 0<x<1$$

Tanım 5: X ve Y sürekli raslantı değişkenleri için bileşik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

Teorem 3: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ aşağıdaki özellikleri sağlar. $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0, \qquad \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)=1$
- $F_X(x)=F(x,+\infty), \quad F_Y(y)=F(+\infty,y)$

Teorem 4: X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ biliniyorsa bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}, & F\text{'in türevlenebildiği yerlerde}\\ 0, & \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

Örnek 7: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\left(2x^3y+3x^2y^2\right), & 0<x,y<1 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

olsun. X ve Y'nin bileşik o.y.f.'nu bulunuz.

Çözüm:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{5}\left(2x^3y+3x^2y^2\right)\right]=\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3y+3x^2y^2\right)$$

$$=\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3+6x^2y\right)=\frac{1}{5}\left(6x^2+12xy\right)=\frac{6}{5}\left(x^2+2xy\right)$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{5}\left(x^2+2xy\right), & 0<x,y<1 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

Örnek 8: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right), & x>0,\ y>0 \text{ ise}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

olsun. X ve Y r.d.'lerinin bileşik o.y.f.'nu bulunuz ve $P(1<X<3,1<Y<2)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=e^{-x}e^{-y}=e^{-(x+y)}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0 \text{ için}\\ 0, & \text{ö.d. için}\end{cases}$$

$$P(1<X<3,1<Y<2)=\int_1^2\int_1^3 e^{-(x+y)}dxdy=\left(e^{-1}-e^{-3}\right)\left(e^{-1}+e^{-3}\right)=0,074$$

X ve Y raslantı değişkenlerinin herhangi bir fonksiyonunun beklenen değeri:

X ve Y raslantı değişkenlerinin bir fonksiyonu $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı $g(X,Y)$ olarak verilsin. Bu durumda, $g(X,Y)$ de bir raslantı değişkenidir ve beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\,dydx, & X \text{ ve } Y \text{ sürekli raslantı değişkenleri ise} \\ \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} g(x,y) P(X=x, Y=y), & X \text{ ve } Y \text{ kesikli raslantı değişkenleri ise} \end{cases}$$

Tanım 6: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(X,Y)$ olsun.

a) X ile Y arasındaki kovaryans,

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

b) X ile Y arasındaki korelasyon,

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

NOT: $Y = X$ ise $Cov(X,X) = E\left[(X-E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$ olur.

Örnek 9: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik o.y.f.,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y < \infty \text{ için} \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases}$$

olsun.

a) $E(XY)$ beklenen değerini bulunuz.

b) $\rho(X,Y)$'yi bulunuz.

Çözüm:

a) $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\,dxdy$

$$E(XY) = \int_0^{\infty}\int_0^{y} xye^{-y}\,dxdy = \int_0^{\infty} ye^{-y}\left(\int_0^{y} x\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{\infty} ye^{-y}\left(\frac{y^2}{2}\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^3e^{-y}dy = \frac{\Gamma(4)}{2} = \frac{3!}{2} = 3$$

b) $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

$$f_X(x) = \int_x^{\infty} e^{-y}dy = -e^{-y}\Big|_x^{\infty} = e^{-x}, \quad x > 0$$

$$f_Y(y) = \int_0^{y} e^{-y}dx = xe^{-y}\Big|_0^{y} = ye^{-y}, \quad y > 0$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \Gamma(2) = 1! = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^{\infty} y^2e^{-y}dy = \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2f_Y(y)dy = \int_0^{\infty} y^3e^{-y}dy = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2$$

$$\rho(X,Y) = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{3-1\times 2}{\sqrt{1\times 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Koşullu Dağılımlar

Bu bölümde X ve Y sürekli ya da kesikli r.d. olmak üzere bu r.d.'lerinin koşullu dağılımları üzerinde durulacaktır.

Tanım 7: X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x,y)$, marjinal olasılık (yoğunluk) fonksiyonları da sırasıyla $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ olsun. $Y=y$ verildiğinde X'in koşullu olasılık (yoğunluk) fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}, \quad P(Y=y)>0, \ X \text{ ve } Y \text{ kesikli raslantı değişkenleri ise}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y)>0, \quad X \text{ ve } Y \text{ sürekli raslantı değişkenleri ise}$$

$X=x$ verildiğinde Y'nin koşullu olasılık (yoğunluk) fonksiyonu ise benzer şekilde aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}, \quad P(X=x)>0, \ X \text{ ve } Y \text{ kesikli raslantı değişkenleri ise}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x)>0, \ X \text{ ve } Y \text{ sürekli raslantı değişkenleri ise}$$

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \Rightarrow f(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$
- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

Bu eşitlikten yararlanılarak X ve Y raslantı değişkenleri için marjinal olasılık (yoğunluk) fonksiyonları ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

- X ve Y sürekli r.d.'leri ise,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy}$$

- X ve Y kesikli r.d.'leri ise,

$$f_X(x) = \sum_{y\in R_Y} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$$

$$f_Y(y) = \sum_{x\in R_X} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\sum_{y\in R_y} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}$$

BAYES FORMÜLÜ

Örnek 10: X ve Y kesikli r.d.'lerinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{21}(x+y), & x=1,2,3;\ \ y=1,2\ \ için\\ 0, & ö.d.\ için\end{cases}$$

Y=2 verildiğinde X'in koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} \qquad P(X=x|Y=2)=\frac{P(X=x,Y=2)}{P(Y=2)}$$

Y r.d.'nin marjinal olasılık fonksiyonu: $P(Y=y)=\sum_{x=1}^{3}\frac{1}{21}(x+y)=\frac{1}{21}(6+3y),\quad y=1,2$

Buradan, $P(Y=2)=\frac{1}{21}(6+6)=\frac{12}{21}$ bulunur.

$$P(X=x,Y=2)=\frac{1}{21}(x+2)$$

$$P(X=x|Y=2)=\frac{P(X=x,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{\frac{1}{21}(x+2)}{\frac{12}{21}}=\frac{x+2}{12},\quad x=1,2,3$$

Örnek 11: X ve Y r.d.'lerinin bileşik o.y.f.,

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y<\infty\ \ için\\ 0, & ö.d.\ için\end{cases}$$

olarak verilmiş ve marjinal o.y.f.'ları aşağıdaki gibi bulunmuştu.

$$f_X(x)=e^{-x},\quad x>0 \qquad f_Y(y)=ye^{-y},\quad y>0$$

$f_{X|Y}(x|y)$ ve $f_{Y|X}(y|x)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y},\quad 0<x<y<\infty$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{e^{-y}}{e^{-x}}=e^{x-y},\quad 0<x<y<\infty$$

Koşullu Beklenen Değer ve Varyans

Tanım 8: $Y=y$ verildiğinde X r.d.'nin koşullu beklenen değeri, $\mu_{X|Y}=E(X|Y)$ olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mu_{X|Y}=E(X|Y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)\,dx, & X\ ve\ Y\ sürekli\ raslantı\ değişkenleri\ ise\\ \sum_{x\in R_X} xP(X=x|Y=y), & X\ ve\ Y\ kesikli\ raslantı\ değişkenleri\ ise\end{cases}$$

$X=x$ verildiğinde Y r.d.'nin koşullu beklenen değeri, $\mu_{Y|X}=E(Y|X)$ benzer şekilde hesaplanabilir.

Örnek 12: Örnek 11'de verilen r.d.'leri için X verildiğinde Y r.d.'nin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\mu_{Y|X}=E(Y|X)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_{x}^{\infty} ye^{x-y}dy=e^{x}\int_{x}^{\infty} ye^{-y}dy$$

$$\left(u=y,\ dv=e^{-y}dy\ \Rightarrow\ du=dy,\ v=-e^{-y}\right)$$

$$E(Y|X)=e^{x}\left[-e^{-y}-ye^{-y}\right]_{x}^{\infty}=e^{x}\left[e^{-x}+xe^{-x}\right]=x+1$$

Teorem 5: $E(Y|X)$ koşullu beklenen değerinin beklenen değeri Y raslantı değişkeninin beklenen değerine eşittir. Yani, $E\left(E(Y|X)\right)=E(Y)$'dir.

İspat: X ve Y sürekli r.d.'leri olsun.

$E(Y|X)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x)\,dy$ beklenen değeri X raslantı değişkeninin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla $E(Y|X)$ de bir raslantı değişkenidir.

$$E\left(E(Y|X)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)f(x)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_X(x)}f_X(x)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} y\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\right]dy=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,dy=E(Y)$$

X ve Y raslantı değişkenleri kesikli ise, ispat integral sembolü yerine toplam sembolü kullanılarak benzer şekilde gerçekleştirilebilir.

- Bu teorem genel olarak, Y'nin bir fonksiyonu $g(Y)$ için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E\left(E\left(g(Y)|X\right)\right)=E\left[g(Y)\right]$$

Tanım 9: $Y = y$ verildiğinde X r.d.'nin koşullu varyansı, $\sigma^2_{X|Y} = V(X|Y)$ olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\boxed{\sigma^2_{X|Y} = V(X|Y) = E(X^2|Y) - [E(X|Y)]^2}$$

Teorem 6: X ve Y r.d.'lerinin bileşik olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x,y)$ olmak üzere Y raslantı değişkeninin varyansı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\boxed{V(Y) = E[V(Y|X)] + V[E(Y|X)]}$$

İspat: İlk olarak, $E[V(Y|X)]$ terimini açalım.

$$V(Y|X) = E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$$

$$E[V(Y|X)] = \underbrace{E[E(Y^2|X)]}_{E(Y^2)} - E\{[E(Y|X)]^2\} = E(Y^2) - E\{[E(Y|X)]^2\} \qquad (1)$$

$V[E(Y|X)]$ terimi ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V[E(Y|X)] = E\{[E(Y|X)]^2\} - \{\underbrace{E[E(Y|X)]}_{E(Y)}\}^2 = E\{[E(Y|X)]^2\} - [E(Y)]^2 \qquad (2)$$

(1) ve (2) ile gösterilen ifadeler toplanırsa,

$$E[V(Y|X)] + V[E(Y|X)] = E(Y^2) - \cancel{E\{[E(Y|X)]^2\}} + \cancel{E\{[E(Y|X)]^2\}} - [E(Y)]^2$$
$$= E(Y^2) - [E(Y)]^2 = V(Y)$$

elde edilir.

Tanım 10: X ve Y r.d.'lerinin bileşik olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x,y)$, marjinal olasılık (yoğunluk) fonksiyonları da sırasıyla $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ olsun.

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

ise X ve Y r.d.'leri bağımsızdır.

Teorem 4.7: X ve Y r.d.'leri bağımsız ise,

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \text{ ve } f_{Y|X}(y|x) = f_y(y)$$

olur.

İspat: X ve Y sürekli r.d.'leri bağımsız olsun. Bu durumda,

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

yazılabilir. Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\cancel{f_Y(y)}}{\cancel{f_Y(y)}} = f_X(x)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\cancel{f_X(x)} f_Y(y)}{\cancel{f_X(x)}} = f_Y(y)$$

olur.

Teorem 8: X ve Y r.d.'leri bağımsız ise, $E(XY) = E(X)E(Y)$ yazılabilir.

İspat: X ve Y sürekli r.d.'leri bağımsız olsun. Bu durumda,

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

yazılabilir.

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,dy\right) = E(X)E(Y)$$

X ve Y r.d.'leri kesikli ise, ispat integral sembolü yerine toplam sembolü kullanılarak benzer şekilde gerçekleştirilebilir.

Not: X ve Y r.d.'leri bağımsız ise $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)}$ **yazılamaz** ancak $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)E(Y^{-1})$ yazılabilir. Bununla birlikte, $E(Y^{-1}) \neq \frac{1}{E(Y)}$ olduğu unutulmamalıdır.

Teorem 9: X ve Y r.d.'leri bağımsız ise kovaryansları her zaman sıfırdır.

$$Cov(X,Y)=0$$

İspat: X ve Y bağımsız ise $E(XY)=E(X)E(Y)$ yazılabileceği Teorem 4.8'de verilmişti.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y)-E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sonuç: 1) X ve Y r.d.'leri bağımsız ise kovaryansları her zaman sıfır olacağından, korelasyonları da her zaman sıfırdır. Yani, X ve Y raslantı değişkenleri bağımsız ise aynı zamanda ilişkisizdir. Yani, X ve Y r.d.'leri bağımsız ise,

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{0}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=0$$

olur.

2) X ve Y r.d.'leri ilişkisiz ise bu r.d.'lerinin bağımsız olduğu her zaman **söylenemez.**

k değişkenli bileşik dağılım

Sürekli Durum:

$X_1,X_2,\ldots,X_k$ sürekli r.d.'lerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ olarak verilsin. Bu durumda $i=1,2,\ldots,k$ olmak üzere,

- $f_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_k)dx_1dx_2\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_k$
- $i\neq j$ olmak üzere; $f_{X_i,X_j}(x_i,x_j)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_k)dx_1dx_2\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_{j-1}dx_{j+1}\ldots dx_k$
- $f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k|x_i)=\dfrac{f(x_1,x_2,\ldots,x_k)}{f_{X_i}(x_i)}$
- $f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots x_k|x_i,x_j)=\dfrac{f(x_1,x_2,\ldots,x_k)}{f_{X_i,X_j}(x_i,x_j)}$

Örnek 13: X ve Y r.d.'lerinin bileşik o.y.f.,

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y<\infty \text{ için} \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases}$$

olsun. X ve Y r.d.'leri bağımsız mıdır?

Çözüm: X ve Y r.d.'lerinin marjinal o.y.f.'ları daha önce aşağıdaki gibi bulunmuştu.

$f_X(x)=e^{-x},\quad x>0 \qquad f_Y(y)=ye^{-y},\quad y>0$

$f_X(x)f_Y(y)=e^{-x}ye^{-y}=ye^{-x-y}\neq e^{-y}=f(x,y)$ olduğundan X ve Y r.d.'leri bağımsız değildir.

Örnek 14: İki zarın atılmasına ilişkin verilen örnekte (Örnek 1) X ve Y r.d.'lerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: X=1, Y=1 durumunu ele alalım ve

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$ olup olmadığını araştıralım.

$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{36},\ P(X=1)=\frac{11}{36},\ P(Y=1)=\frac{1}{36}$$

$$P(X=1)\times P(Y=1)=\frac{11}{36}\times\frac{1}{36}=\frac{11}{36}\neq\frac{1}{36}=P(X=1,Y=1)$$

olduğundan X ve Y r.d.'lerinin bağımsız olmadığı söylenir.

Tek bir durum için bile eşitlik sağlanmıyorsa r.d.'leri bağımsız değildir.

Kesikli Durum:

$X_1,X_2,\ldots,X_k$ kesikli r.d.'lerinin bileşik olasılık fonksiyonu, $p(x_1,x_2,\ldots,x_k)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_k=x_k)$ olarak verilsin. Bu durumda $i=1,2,\ldots,k$ olmak üzere,

- $P(X_i=x_i)=\sum_{x_1\in R_{X_1}}\sum_{x_2\in R_{X_2}}\cdots\sum_{x_{i-1}\in R_{X_{i-1}}}\sum_{x_{i+1}\in R_{X_{i+1}}}\cdots\sum_{x_k\in R_{X_k}} p(x_1,x_2,\ldots,x_k)$
  - $i\neq j;\ P(X_i=x_i,X_j=x_j)=\sum_{x_1\in R_{X_1}}\sum_{x_2\in R_{X_2}}\cdots\sum_{x_{i-1}\in R_{X_{i-1}}}\sum_{x_{i+1}\in R_{X_{i+1}}}\cdots\sum_{x_{j-1}\in R_{X_{j-1}}}\sum_{x_{j+1}\in R_{X_{j+1}}}\cdots\sum_{x_k\in R_{X_k}} p(x_1,x_2,\ldots,x_k)$
- $P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_{i-1}=x_{i-1},X_{i+1}=x_{i+1},\ldots,X_k=x_k|X_i=x_i)=\dfrac{P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_k=x_k)}{P(X_i=x_i)}$
- $P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_{i-1}=x_{i-1},X_{i+1}=x_{i+1},\ldots,X_{j-1}=x_{j-1},X_{j+1}=x_{j+1},\ldots,X_k=x_k|X_i=x_i,X_j=x_j)$ $=\dfrac{P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_k=x_k)}{P(X_i=x_i,X_j=x_j)}$

Dağılım Fonksiyonu:

$X_1, X_2, \ldots, X_k$ raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k)$$

olarak tanımlanır.

Raslantı değişkenleri kesikli ise,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{t_1 \le x_1} \sum_{t_2 \le x_2} \cdots \sum_{t_k \le x_k} p(t_1, t_2, \ldots, t_k);$$

sürekli ise,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \cdots \int_{-\infty}^{t_k} f(t_1, t_2, \ldots, t_k) dt_1 dt_2 \ldots dt_k$$

biçiminde hesaplanır.

Örnek 15: X_1, X_2, X_3 r.d.'lerinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{72}, \quad x_1 = 1,2;\ x_2 = 1,2,3; \quad x_3 = 1,3$$

olsun.

a) Marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

b) $P(X_1 = x_1, X_3 = x_3) = ?$

c) $P(X_1 = x_1 | X_2 = 2, X_3 = 1) = ?$

d) $P(X_1 = x_1, X_3 = x_3 | X_2 = 3) = ?$

e) X_1 ve X_3 bağımsız mıdır?

f) $P(X_1 = X_2 = X_3) = ?$

Çözüm:

a) $$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2=1}^{3} \sum_{x_3=1,3} \frac{x_1 x_2 x_3}{72} = \frac{x_1}{72} \sum_{x_2=1}^{3} \sum_{x_3=1,3} x_2 x_3 = \frac{24 x_1}{72} = \frac{x_1}{3}, \quad x_1 = 1,2$$

$$P(X_2 = x_2) = \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{x_3=1,3} \frac{x_1 x_2 x_3}{72} = \frac{x_2}{72} \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{x_3=1,3} x_1 x_3 = \frac{12 x_2}{72} = \frac{x_2}{6}, \quad x_2 = 1,2,3$$

$$P(X_3 = x_3) = \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{x_2=1}^{3} \frac{x_1 x_2 x_3}{72} = \frac{x_3}{72} \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{x_2=1}^{3} x_1 x_2 = \frac{18 x_3}{72} = \frac{x_3}{4}, \quad x_3 = 1,3$$

b) $$P(X_1 = x_1, X_3 = x_3) = \sum_{x_2=1}^{3} \frac{x_1 x_2 x_3}{72} = x_1 x_3 \sum_{x_2=1}^{3} \frac{x_2}{72} = \frac{6 x_1 x_3}{72} = \frac{x_1 x_3}{12}, \quad x_1 = 1,2;\ x_3 = 1,3$$

c) $$P(X_1 = x_1 | X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = 2, X_3 = 1)}{P(X_2 = 2, X_3 = 1)}$$

$$P(X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \sum_{x_1=1}^{2} \frac{x_1 x_2 x_3}{72} = x_2 x_3 \sum_{x_1=1}^{2} \frac{x_1}{72} = \frac{3 x_2 x_3}{72} = \frac{x_2 x_3}{24}, \quad x_2 = 1,2,3;\ x_3 = 1,3$$

$$P(X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{2 \times 1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$P(X_1 = x_1 | X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{2x_1/72}{1/12} = \frac{x_1}{3}, \quad x_1 = 1,2 \text{ için}$$

d) $$P(X_1 = x_1, X_3 = x_3 | X_2 = 3) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = 3, X_3 = x_3)}{P(X_2 = 3)} = \frac{3x_1 x_3/72}{1/2} = \frac{x_1 x_3}{12}, \quad x_1 = 1,2;\ x_3 = 1,3$$

e) $$P(X_1 = x_1) = \frac{x_1}{3}, \quad x_1 = 1,2$$

$$P(X_3 = x_3) = \frac{x_3}{4}, \quad x_3 = 1,3$$

$$P(X_1 = x_1, X_3 = x_3) = \frac{x_1 x_3}{12}, \quad x_1 = 1,2;\ x_3 = 1,3$$

$P(X_1 = x_1) \times P(X_3 = x_3) = \frac{x_1}{3} \times \frac{x_3}{4} = \frac{x_1 x_3}{12} = P(X_1 = x_1, X_3 = x_3)$ olduğundan X_1 ve X_3 bağımsızdır.

f) X_1, X_2 ve X_3 r.d.'lerinin ortak aldıkları tek değer 1'dir. Bu nedenle,

$P(X_1 = X_2 = X_3 = 1)$ olasılığı hesaplanmalıdır.

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) = \frac{1 \times 1 \times 1}{72} = \frac{1}{72}$$