

RASLANTI DEĞİŞKENLERİNİN DOĞRUSAL BİRLEŞİMİ

Doç. Dr. Yasemin Kayhan Atılgan (Şube 01)

Doç. Dr. Derya Ersel (Şube 02)



1 > ::

Google Slides

2 > ::

Google Slides

İspat: Sürekli X raslanti değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olmak üzere, $g(x) = aX + b$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\text{a. } E[g(X)] = E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = aE(X) + b$$

$$\text{b. } V[g(X)] = E[g(X)^2] - [E[g(X)]]^2 = E[(aX + b)^2] - [E(aX + b)]^2$$

$$= E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - [aE(X) + b]^2$$

$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)^2 - 2abE(X) - b^2$$

$$= a^2[E(X^2) - E(X)^2] = a^2V(X)$$

Not: Kesikli raslanti değişkeni için ispat, integral simbolü yerine toplam simbolü alınarak benzer şekilde yapılabilir.

Raslanti değişkenlerinin bir doğrusal birleşimi, raslanti değişkenlerinin kendisiyle veya başka bir raslanti değişkeniyle çarpılmayacak şekilde, sabitlerle çarpılarak, basit toplama işlemi ile bir araya getirilmesidir.

X, Y ve Z r.d.'lerinin doğrusal birleşimi $aX + bY + cZ$ olarak yazılabilir, burada a, b ve c sabittir. Bu sabitler, pozitif, negatif ya da sıfır olabilir.

Bir Doğrusal Birleşimin Beklenen Değer ve Varyansı

Bir doğrusal birleşimi oluşturan raslanti değişkenlerin tek tek ortalaması, varyansı ve kovaryansı biliniyorsa, doğrusal birleşimin ortalaması ve varyansı hesaplanabilir. Ayrıca, bu bilgilerle iki doğrusal birleşimin kovaryansını da hesaplamak mümkündür.

TEOREM 1: a ve b sabit sayılar ve X bir raslanti değişkeni olmak üzere,

- a. $E(aX + b) = aE(X) + b$
- b. $V(aX + b) = a^2V(X)$

yazılabilir.

TEOREM 2: a ve b sabit sayılar, X ve Y raslanti değişkenleri olmak üzere, $aX + bY$ ifadesi bir doğrusal birleşimdir. Bu doğrusal birleşimin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

- a. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- b. $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)$

İspat: X ve Y raslanti değişkenlerinin marginal olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla $f(x)$ ve $f(y)$, bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ olsun.

$$\begin{aligned} \text{a. } E(aX + bY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by)f(x, y)dxdy = a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dxdy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dxdy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \right) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \right) dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy = aE(X) + bE(Y) \end{aligned}$$

3 > ::

Google Slides

4 > ::

Google Slides

$$\begin{aligned}
 b. \quad V(aX + bY) &= E[(aX + bY - E(aX + bY))^2] = E[(aX + bY - aE(X) - bE(Y))^2] \\
 &= E[(a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))^2] \\
 &= E[a^2(X - E(X))^2 + b^2(Y - E(Y))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
 &= a^2E[(X - E(X))^2] + b^2E[(Y - E(Y))^2] + 2abE[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
 &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)
 \end{aligned}$$

TEOREM 3: n tane raslantı değişkeni X_1, X_2, \dots, X_n ve a_1, a_2, \dots, a_n sabit sayılar olmak üzere $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i$ doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a. \quad E(Y) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i)$$

$$b. \quad V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2V(X_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Özel Durum: Teorem 3'ün iki özel durumu aşağıdaki gibi verilebilir.

$$I. \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ için } \forall a_i = \frac{1}{n} \text{ ise } Y = \bar{X} \text{ olur.}$$

II. X_1, X_2, \dots, X_n raslantı değişkenleri bağımsız ise her $i \neq j = 1, 2, \dots, n$ için $Cov(X_i, X_j) = 0$ olur. Bu durumda, $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i$ doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a. \quad E(Y) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i)$$

$$b. \quad V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2V(X_i)$$

$$\text{ÖRNEK(1): } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j), \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j) \text{ ve } \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

terimlerinin açılımını yapınız.

5

Google Slides

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^3 [a_i a_1 Cov(X_i, X_1) + a_i a_2 Cov(X_i, X_2) + a_i a_3 Cov(X_i, X_3)]$$

$$= a_1 a_1 Cov(X_1, X_1) + a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + a_2 a_1 Cov(X_2, X_1)$$

$$+ a_2 a_2 Cov(X_2, X_2) + a_2 a_3 Cov(X_2, X_3) + a_3 a_1 Cov(X_3, X_1) + a_3 a_2 Cov(X_3, X_2)$$

$$+ a_3 a_3 Cov(X_3, X_3)$$

Kural: $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n a_i a_j = \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^n a_i a_j$ ifadesinde her zaman

$\frac{n(n-1)}{2}$ tane terim vardır.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j) =$$

$$= a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + a_2 a_3 Cov(X_2, X_3)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j) = a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + a_2 a_3 Cov(X_2, X_3)$$

$$+ a_2 a_1 Cov(X_2, X_1) + a_3 a_1 Cov(X_3, X_1) + a_3 a_2 Cov(X_3, X_2)$$

$$= 2a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + 2a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + 2a_2 a_3 Cov(X_2, X_3)$$

6

Google Slides

ÖRNEK : X_1, X_2 ve X_3 bağımsız r.d.'lerin ortalamaları sırasıyla 3, 0 ve 4; varyansları ise 1, 10 ve 7'dir. $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3$ olmak üzere $E(Y)$ beklenen değerini ve $V(Y)$ varyansını hesaplayınız.

Çözüm: $n = 3, a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 3$

$$E(X_1) = 3, \quad E(X_2) = 0, \quad E(X_3) = 4, \quad V(X_1) = 1, \quad V(X_2) = 10, \quad V(X_3) = 7$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^2 a_i E(X_i) = 2E(X_1) + (-1)E(X_2) + 3E(X_3) = (2)(3) + (-1)(0) + (3)(4) = 18$$

X_1 ve X_2 r.d.'leri bağımsız olduğundan $Cov(X_1, X_2) = 0$ olacaktır.

$$V(Y) = \sum_{i=1}^2 a_i^2 V(X_i) = (4)^2 V(X_1) + (1)^2 V(X_2) + (3)^2 V(X_3)$$

$$= (4)(1) + (1)(10) + (9)(7) = 77$$

7

Google Slides

8

Google Slides

ÖRNEK : Önceki örnekte X_1 , X_2 ve X_3 raslantı değişkenleri bağımlı ve $\text{Cov}(X_1, X_2) = 1$, $\text{Cov}(X_1, X_3) = 5$, $\text{Cov}(X_2, X_3) = -1$ olsun. $E(Y)$ beklenen değerini ve $V(Y)$ varyansını hesaplayınız.

Çözüm: $E(Y)$ beklenen değeri değişmez:

$$E(Y) = 2E(X_1) - E(X_2) + 3E(X_3) = 2(3) - 0 + 3(4) = 18$$

$V(Y)$ hesaplanurken kovaryans terimleri de dahil edilir.

$$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{i=1}^3 a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + a_3^2 V(X_3) + 2a_1 a_2 \text{Cov}(X_1, X_2) + 2a_1 a_3 \text{Cov}(X_1, X_3) + 2a_2 a_3 \text{Cov}(X_2, X_3) \\ V(Y) &= 4^2 V(X_1) + (1)^2 V(X_2) + 3^2 V(X_3) \\ &\quad + 2[(2)(-1) \text{Cov}(X_1, X_2) + (2)(3) \text{Cov}(X_1, X_3) + (-1)(3) \text{Cov}(X_2, X_3)] \\ &= 4(1) + 1(10) + 9(7) + 2(31) = 139 \end{aligned}$$

9 > :

Google Slides

10 > :

Google Slides

ÖRNEK: X ve Y raslantı değişkenleri, $U(-\theta, \theta)$ dağılımına sahip aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $V(XY) = \frac{64}{9}$ olarak verilsin, θ 'nın değerini bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & -\theta < x < \theta \\ 0, & \text{o.d. için} \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & -\theta < y < \theta \\ 0, & \text{o.d. için} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} x \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\theta}^{\theta} = 0$$

X ve Y r.d.'lerinin oyfları aynı olduğundan $E(Y) = 0$. Bu durumda, Teorem 4'ten $V(XY) = V(X)V(Y)$ yazılabilir

$$\begin{aligned} V(XY) &= V(X)V(Y) \Rightarrow \frac{64}{9} = E(X^2)E(Y^2) \\ &\Rightarrow \frac{64}{9} = \left(\int_{-\theta}^{\theta} x^2 \frac{1}{2\theta} dx \right) \left(\int_{-\theta}^{\theta} y^2 \frac{1}{2\theta} dy \right) \Rightarrow \frac{64}{9} = \left(\frac{\theta^2}{3} \right) \left(\frac{\theta^2}{3} \right) \Rightarrow \frac{64}{9} = \frac{\theta^4}{9} \Rightarrow \theta = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

11 > :

Google Slides

TEOREM 4: X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri için $E(X) = E(Y) = 0$ olsun. Bu durumda, $V(XY) = V(X)V(Y)$ olur.

İspat: X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri için

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$E(X) = 0 \Rightarrow V(X) = E(X^2) - \left[\underbrace{E(X)}_{0} \right]^2 = E(X^2)$$

$$E(Y) = 0 \Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - \left[\underbrace{E(Y)}_{0} \right]^2 = E(Y^2)$$

$$V(XY) = E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 = E[(XY)^2] - \left[\underbrace{E(X)E(Y)}_{0} \right]^2$$

$$= E[(XY)^2] = \underbrace{E(X^2Y^2)}_{X \text{ ve } Y \text{ bağımsızsa fonksiyonları da} \atop \text{bağımsızdır.}} = E(X^2)E(Y^2) = V(X)V(Y)$$

İki Doğrusal Birleşimin Kovaryansı

TEOREM 5: n tane raslantı değişkeni X_1, X_2, \dots, X_n ve a_1, a_2, \dots, a_n ile b_1, b_2, \dots, b_n sabit sayılar olmak üzere $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ ve $Y_2 = \sum_{i=1}^n b_i X_i$ doğrusal birleşimlerinin kovaryansı aşağıdaki eşitlikten hesaplanır.

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n (a_i b_j + a_j b_i) \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Özel Durum: X_1, X_2, \dots, X_n raslantı değişkenleri bağımsız ise, her $i \neq j$ için $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ olduğundan, $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i)$ olur.

12 > :

Google Slides

Google Slides

ÖRNEK: $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = X_1 - X_2$ doğrusal birleşimlerinin kovaryansını bulunuz.

Cözüm: $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^2 a_i b_j V(X_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (a_i b_j + a_j b_i) \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = a_1 b_1 V(X_1) + a_2 b_2 V(X_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$= (1)(1)V(X_1) + (1)(-1)V(X_2) + ((1)(-1) + (1)(1))\text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$= V(X_1) - V(X_2)$$

TEOREM 6: X ve Y raslantı değişkenleri; a , b , c ve d sabit sayılar olmak üzere,

$\text{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\text{Cov}(X, Y)$ 'dır.

ÖRNEK: X ve Y r.d.'leri için $E(XY) = 3$, $E(X) = E(Y) = 2$ olmak üzere

$$\text{Cov}\left(2X+10, -\frac{5}{2}Y+3\right) = ?$$

$$\text{Çözüm: } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\text{Cov}(X, Y)$$

$$a = 2, \quad b = 10, \quad c = -\frac{5}{2}, \quad d = 3$$

$$\text{Cov}\left(2X+10, -\frac{5}{2}Y+3\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)\text{Cov}(X, Y) = (-5)(-1) = 5$$

TEOREM 7: (Teorem 6'nın genelleştirilmiş hali) X , Y ve Z raslantı değişkenleri için

$$\text{Cov}(X+Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$$

ve

$$\text{Cov}(X, Y+Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z)$$

yazılabilir.

13 > :

Google Slides

14 > :

Google Slides

Bağımsız Örneklemelerde Örneklem Ortalamasının Beklenen Değer ve Varyansı

TEOREM 8: X_1, X_2, \dots, X_n , $E(X_i) = \mu$ ortalama ve $V(X_i) = \sigma^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) varyansı ile aynı dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenleri olsun. \bar{X} örneklem ortalamasının beklenen değer ve varyansı,

a. $E(\bar{X}) = \mu$

b. $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ 'dır.

İspat: X_1, X_2, \dots, X_n bağımsız r.d.'lerinin bir doğrusal birleşimi

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ olmak üzere bu doğrusal birleşimin beklenen değer ve varyansı,

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i), \quad V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) \text{ 'dir.}$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_n \text{ örneklem ortalaması her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için}$$

$a_i = \frac{1}{n}$ olan bir doğrusal birleşimdir. Bu durumda,

$$E(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mu = n \frac{1}{n} \mu = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Not: \bar{X} örneklem ortalamasının standart hatası, $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 'dir.

ÖRNEK: σ^2 varyanslı bir kitleden $n_1 = 30$ ve $n_2 = 120$ birimlik iki örneklem almıyor. Bu iki örneklem ortalamalarının standart hatalarını bulunuz.

$$\text{Çözüm: } n_1 = 30 \text{ için } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{30}} \quad n_2 = 120 \text{ için } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{120}}$$

Bu durumda örneklem büyüklüğü arttıkça standart hatanın küçüldüğünü söyleyebiliriz.

15 > :

Google Slides

16 > :

Google Slides

ÖRNEK: X_1, X_2, \dots, X_{50} , aşağıdaki o.y.f.'na sahip dağılımdan çekilen 50 birimlik rasgele örneklemler olsun. Örneklem ortalamasının ortalamasını ve varyansını bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \text{ için} \\ 0, & \delta.d. \text{ için} \end{cases}$$

Çözüm: Üstel dağılımın ortalaması $E(X_i) = \theta$, varyansı $V(X_i) = \sigma_{X_i}^2 = \theta^2$ 'dır.

Bu durumda,

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} E(X_i) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \theta = \frac{1}{50} \cdot 50\theta = \theta$$

$$V(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right)^2 = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \sum_{i=1}^{50} V(X_i) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \theta^2 = \left(\frac{1}{50}\right)^2 50\theta^2 = \frac{\theta^2}{50}$$

TEOREM 9: X_1, X_2, \dots, X_n aynı σ^2 varyanslı bağımsız r.d.'leri olsun. $r = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\text{Cov}(X_r - \bar{X}, \bar{X}) = 0$$

İspat: $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ ve $Y_2 = \sum_{i=1}^n b_i X_i$ doğrusal birleşimlerinin kovaryansı:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (a_i b_j + a_j b_i) \text{Cov}(X_i, X_j)$$

X_1, X_2, \dots, X_n r.d.'leri bağımsız ise, $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i)$

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_r - \bar{X} = X_r - \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = X_r - \frac{X_1}{n} - \frac{X_2}{n} - \dots - \frac{X_r}{n} - \dots - \frac{X_n}{n} \\ &= -\frac{1}{n} X_1 - \frac{1}{n} X_2 - \dots + \frac{(n-1)}{n} X_r - \dots - \frac{1}{n} X_n \end{aligned}$$

$$Y_2 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_r}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

Y_1 ve Y_2 , katsayıları sırasıyla $a_1 = -\frac{1}{n}$, $a_2 = -\frac{1}{n}$, ..., $a_r = \frac{(n-1)}{n}$, ..., $a_n = -\frac{1}{n}$ ve

$b_1 = b_2 = \dots = b_r = \dots = b_n = \frac{1}{n}$ olan iki doğrusal birleşimdir. Bu durumda, bu iki doğrusal birleşimin kovaryansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -\frac{1}{n^2} V(X_1) - \frac{1}{n^2} V(X_2) - \dots + \left(\frac{n-1}{n^2}\right) V(X_r) - \dots - \frac{1}{n^2} V(X_n) = (n-1)\left(-\frac{1}{n^2}\right) \sigma^2 + \left(\frac{n-1}{n^2}\right) \sigma^2 = 0$$

TEOREM 10: $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$, ortalamaları μ_1 , varyansları σ_1^2 olan aynı dağılımlı bağımsız

raslantı değişkenleri; $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$, ortalamaları μ_2 , varyansları σ_2^2 olan aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Bu durumda n_1 ve n_2 bütünlüğünde iki bağımsız örneklem vardır.

$$1. \text{ örneklemin ortalaması } \bar{X}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} \quad 2. \text{ örneklemin ortalaması } \bar{X}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$$

şeklindedir. Bu bağımsız örneklemelerin ortalamalarının farkının beklenen değeri ve varyansı,

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= \mu_1 - \mu_2 \\ V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \end{aligned}$$

İspat: $E(Y) = E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E\left(\frac{X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n_1}}{n_1} - \frac{X_{21} + X_{22} + \dots + X_{2n_2}}{n_2}\right)$

$$Y = \frac{1}{n_1} X_{11} + \frac{1}{n_1} X_{12} + \dots + \frac{1}{n_1} X_{1n_1} - \frac{1}{n_2} X_{21} - \frac{1}{n_2} X_{22} - \dots - \frac{1}{n_2} X_{2n_2} \text{ doğrusal birleşimi için,}$$

$$a_i = \frac{1}{n_1}, \quad i = 1, \dots, n_1; \quad a_i = \frac{1}{n_2}, \quad i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$$

$$E(Y) = E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} a_i E(X_i) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} E(X_{1i}) - \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} E(X_{2i}) = \frac{1}{n_1}(n_1)\mu_1 - \frac{1}{n_2}(n_2)\mu_2 = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(Y) = V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} a_i^2 V(X_i) = \frac{1}{n_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} V(X_{1i}) + \frac{1}{n_2^2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} V(X_{2i}) = \frac{1}{n_1^2}(n_1)\sigma_1^2 + \frac{1}{n_2^2}(n_2)\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Bağımlı Örneklemelerde Örneklem Ortalamasının Beklenen Değer ve Varyansı

Bir kitleden örneklem çekme işlemi, "yerine koymak" ve "yerine koymadan" olmak üzere iki farklı şekilde yapılabilir. Örneklem çekme işlemi "yerine koymak" yapılrsa elde edilen örneklem "bağımsız", "yerine koymadan" yapılrsa elde edilen örneklem "bağımlı" dir.

N birimlik sonlu kitle $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ olarak verilsin. Bu sonlu kitleden n büyülüklükte "yerine koymadan" örneklem çekilirse, örneklemde alınacak birimler ve bu örneklem birimlerini seçme olasılıkları aşağıdaki gibi yazılabilir.

Örneklem birimi	Olasılık
x_1	$f(x_1) = \frac{1}{N}, \quad x_1 = s_1, s_2, \dots, s_N$
x_2	$f(x_1, x_2) = \frac{1}{N(N-1)}, \quad x_1, x_2 = s_1, s_2, \dots, s_N; \quad x_1 \neq x_2$
\vdots	\vdots
x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{N(N-1)\dots[N-(n-1)]}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n = s_1, s_2, \dots, s_N$ $x_i \neq x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$

21



Google Slides

22



Google Slides

$$\begin{aligned} Cov(X_r, X_i) &= E[(X_r - \mu)(X_i - \mu)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N (s_i - \mu)(s_j - \mu) \frac{1}{N(N-1)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{(s_i - \mu)(s_j - \mu)}{N(N-1)} - \sum_{i=1}^N \frac{(s_i - \mu)^2}{N(N-1)} = \frac{\sum_{i=1}^N (s_i - \mu) \sum_{j=1}^N (s_j - \mu)}{N(N-1)} - \sum_{i=1}^N \frac{(s_i - \mu)^2}{N(N-1)} \\ &= \left[\sum_{i=1}^N (s_i - \mu) \right]^2 - \sum_{i=1}^N \frac{(s_i - \mu)^2}{N(N-1)} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N s_i - n\mu \right]^2}{N(N-1)} - \frac{N\sigma^2}{N(N-1)} = -\frac{\sigma^2}{N-1} \end{aligned}$$

TEOREM 11: Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyülüklükte bir sonlu kitleden alınan n büyülüklükteki bağımlı örneklem ortalaması \bar{X} ise,

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{ve} \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

İspat: $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

23



Google Slides

24



Google Slides

Benzer şekilde, N büyülüklükte sonlu bir kitkeden x_r ve x_i örneklem birimlerini çekme olasılıkları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x_r) = \frac{1}{N}, \quad x_r = s_1, s_2, \dots, s_N$$

$$f(x_r, x_i) = \frac{1}{N(N-1)}, \quad x_r, x_i = s_1, s_2, \dots, s_N; \quad x_r \neq x_i$$

İlgilendirdiğimiz sonlu kitlenin ortalaması μ ve varyansı σ^2 olsun. Bu ortalama ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mu = E(X_r) = \sum_{i=1}^N s_i \cdot \frac{1}{N} \quad \sigma^2 = E(X_r - \mu)^2 = \sum_{i=1}^N (s_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{N}$$

Bu eşitliklerden,

$$\sum_{i=1}^N s_i = N\mu \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^N (s_i - \mu)^2 = N\sigma^2 \quad \text{elde edilir.}$$

$\bar{X} = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_n$ olduğundan her $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = \frac{1}{n}$ olan bir doğrusal birlesimdir. Bu durumda,

$$E(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(-\frac{\sigma^2}{N-1} \right) = n \frac{1}{n^2} \sigma^2 - 2 \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\sigma^2}{N-1} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Not: Kitle sonsuz elemanlı ise (kitle çok büyükse), çekilen örneklem ortalamasının varyansı, bağımsız örneklem ortalamasının varyansına eşit olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{\sigma^2}{n}$$

ÖRNEK(15): Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyülükte bir sonlu kitleden alınan n büyülükteki bağımlı örneklemin birimlerinin toplamı Y r.d. ile gösterilsin. Y r.d.'nin beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } Y = \sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$$

$$E(Y) = E(n\bar{X}) = nE(\bar{X}) = n\mu \quad V(Y) = V(n\bar{X}) = n^2V(\bar{X}) = n\sigma^2 \frac{N-n}{N-1}$$

Kotlanmış Birimlerin Dağılımı

N birimlik sonlu bir kitlenin birimleri $1, 2, \dots, N$ biçiminde tamsayılarla kotlansın. Bu kitle, $\{1, 2, \dots, N\}$ biçiminde yazılabilir. Bu sonlu kitlenin beklenen değer ve varyansını bulmak için aşağıdaki eşitliklerden yararlanılır.

$$1+2+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\dots+N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Bu eşitliklerden yararlanarak beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi elde edilir.

25 > :

Google Slides

26 > :

Google Slides

Sonuç: Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyülükte bir sonlu kitleden alınan n büyülükteki bağımlı örneklemin birimlerinin toplamı $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ise,

$$E(Y) = E(n\bar{X}) = \frac{n(N+1)}{2} \quad V(Y) = V(n\bar{X}) = n^2V(\bar{X}) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}$$

ÖRNEK: $\{1, 2, \dots, 60\}$ biçiminde verilen sonlu kotlanılmış kitleden 10 birimlik bağımlı örnekle alınınsın.

- a. Kitlenin beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.
- b. Örneklemin beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.
- c. Örneklemdeki birimlerin toplamının beklenen değer ve varyansını bulunuz.

Çözüm:

$$a. \mu = \frac{(N+1)}{2} = \frac{61}{2} = 30,5 \quad \sigma^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12} = \frac{(61)(59)}{12} \cong 300$$

$$b. E(\bar{X}) = \mu = 30,5 \quad V(\bar{X}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n} = \frac{(61)(50)}{120} = 25,4$$

$$c. E(Y) = n\mu = (10)(30,5) = 305$$

$$V(Y) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12} = \frac{(10)(61)(50)}{12} = 2541,67$$

27 > :

Google Slides

$$\mu = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N} = \frac{(N+1)}{2}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

TEOREM 12: $\{1, 2, \dots, N\}$ biçiminde verilen sonlu kotlanmış kitleden yerine koymadan alınan n birimlik bağımlı örneklemin ortalaması \bar{X} ise, bu örneklemin beklenen değer ve varyansı,

$$E(\bar{X}) = \frac{(N+1)}{2} \quad V(\bar{X}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

Ispat: Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyülükte bir sonlu kitleden alınan n büyülükteki bağımlı örneklemin ortalaması \bar{X} ise,

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{ve} \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

birimindedir. Kotlanmış kitle için,

$$\mu = \frac{(N+1)}{2} \Rightarrow E(\bar{X}) = \mu = \frac{(N+1)}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12} \Rightarrow V(\bar{X}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$