

RASLANTI DEĞİŞKENLERİNİN DOĞRUSAL BİRLEŞİMİ

Doç. Dr. Yasemin Kayhan Atılğan (Şube 01)

Doç. Dr. Derya Ersel (Şube 02)



1

> ⋮

Google Slic

İspat: Sürekli X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olmak üzere, $g(x) = aX + b$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\text{a. } E[g(X)] = E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = aE(X) + b$$

$$\text{b. } V[g(X)] = E[g(X)^2] - [E[g(X)]]^2 = E[(aX + b)^2] - [E(aX + b)]^2$$

$$= E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - [aE(X) + b]^2$$

$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)^2 - 2abE(X) - b^2$$

$$= a^2[E(X^2) - E(X)^2] = a^2V(X)$$

Not: Kesikli raslantı değişkeni için ispat, integral sembolü yerine toplam sembolü alınarak benzer şekilde yapılabilir.

3

> ⋮

Google Slic

Raslantı değişkenlerinin bir doğrusal birleşimi, raslantı değişkenlerinin kendisiyle veya başka bir raslantı değişkeniyle çarpılmayacak şekilde, sabitlerle çarpılarak, basit toplama işlemi ile bir araya getirilmesidir.

X, Y ve Z r.d.'lerinin doğrusal birleşimi $aX + bY + cZ$ olarak yazılabilir, burada a, b ve c sabittir. Bu sabitler, pozitif, negatif ya da sıfır olabilir.

Bir Doğrusal Birleşimin Beklenen Değer ve Varyansı

Bir doğrusal birleşimi oluşturan raslantı değişkenlerin tek tek ortalaması, varyansı ve kovaryansı biliniyorsa, doğrusal birleşimin ortalaması ve varyansı hesaplanabilir. Ayrıca, bu bilgilerle iki doğrusal birleşimin kovaryansını da hesaplamak mümkündür.

TEOREM 1: a ve b sabit sayılar ve X bir raslantı değişkeni olmak üzere,

$$\text{a. } E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\text{b. } V(aX + b) = a^2V(X)$$

yazılabilir.

2

> ⋮

Google Slic

TEOREM 2: a ve b sabit sayılar, X ve Y raslantı değişkenleri olmak üzere, $aX + bY$ ifadesi bir doğrusal birleşimdir. Bu doğrusal birleşimin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{a. } E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$\text{b. } V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$$

İspat: X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla $f(x)$ ve $f(y)$, bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ olsun.

$$\begin{aligned} \text{a. } E(aX + bY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by)f(x, y) dx dy = a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} yf(y) dy = aE(X) + bE(Y) \end{aligned}$$

4

> ⋮

Google Slic

$$\begin{aligned}
b. \quad V(aX + bY) &= E[(aX + bY - E(aX + bY))^2] = E[(aX + bY - aE(X) - bE(Y))^2] \\
&= E[(a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))^2] \\
&= E[a^2(X - E(X))^2 + b^2(Y - E(Y))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
&= a^2E[(X - E(X))^2] + b^2E[(Y - E(Y))^2] + 2abE[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
&= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)
\end{aligned}$$

TEOREM 3: n tane raslantı değişkeni X_1, X_2, \dots, X_n ve a_1, a_2, \dots, a_n sabit sayılar olmak üzere $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i$ doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
a. \quad E(Y) &= \sum_{i=1}^n a_iE(X_i) \\
b. \quad V(Y) &= \sum_{i=1}^n a_i^2V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

Özel Durum: Teorem 3'ün iki özel durumu aşağıdaki gibi verilebilir.

- I. $i = 1, 2, \dots, n$ için $\forall a_i = \frac{1}{n}$ ise $Y = \bar{X}$ olur.
- II. X_1, X_2, \dots, X_n raslantı değişkenleri bağımsız ise her $i \neq j = 1, 2, \dots, n$ için $Cov(X_i, X_j) = 0$ olur. Bu durumda, $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i$ doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır.
 - a. $E(Y) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i)$
 - b. $V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2V(X_i)$

ÖRNEK(1): $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j)$, $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j)$ ve $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

terimlerinin açılımını yapınız.

5



Google Slic

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^3 [a_i a_i Cov(X_i, X_i) + a_i a_2 Cov(X_i, X_2) + a_i a_3 Cov(X_i, X_3)]$$

$$= a_1 a_1 Cov(X_1, X_1) + a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + a_2 a_1 Cov(X_2, X_1) + a_2 a_2 Cov(X_2, X_2) + a_2 a_3 Cov(X_2, X_3) + a_3 a_1 Cov(X_3, X_1) + a_3 a_2 Cov(X_3, X_2) + a_3 a_3 Cov(X_3, X_3)$$

$$= a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + a_3^2 V(X_3) + 2a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + 2a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + 2a_2 a_3 Cov(X_2, X_3)$$

Kural : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j = \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^n a_i a_j$ ifadesinde her zaman

$\frac{n(n-1)}{2}$ tane terim vardır.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j) =$$

$$= a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + a_2 a_3 Cov(X_2, X_3)$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 a_i a_j Cov(X_i, X_j) = a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + a_2 a_3 Cov(X_2, X_3)$$

$$+ a_2 a_1 Cov(X_2, X_1) + a_3 a_1 Cov(X_3, X_1) + a_3 a_2 Cov(X_3, X_2) = 2a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + 2a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + 2a_2 a_3 Cov(X_2, X_3)$$

6



Google Sli

ÖRNEK : X_1, X_2 ve X_3 bağımsız r.d.'lerinin ortalamaları sırasıyla 3, 0 ve 4; varyansları ise 1, 10 ve 7'dir. $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3$ olmak üzere $E(Y)$ beklenen değerini ve $V(Y)$ varyansını hesaplayınız.

Çözüm: $n = 3, a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 3$

$$E(X_1) = 3, E(X_2) = 0, E(X_3) = 4, V(X_1) = 1, V(X_2) = 10, V(X_3) = 7$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^3 a_i E(X_i) = 2E(X_1) + (-1)E(X_2) + 3E(X_3) = (2)(3) + (-1)(0) + (3)(4) = 18$$

X_1 ve X_2 r.d.'leri bağımsız olduğundan $Cov(X_1, X_2) = 0$ olacaktır.

$$V(Y) = \sum_{i=1}^3 a_i^2 V(X_i) = (4)^2 V(X_1) + (1)^2 V(X_2) + (3)^2 V(X_3)$$

$$= (4)(1) + (1)(10) + (9)(7) = 77$$

7



Google Slic

8



Google Sli

ÖRNEK : Önceki örnekte X_1, X_2 ve X_3 raslantı değişkenleri bağımlı ve $Cov(X_1, X_2) = 1, Cov(X_1, X_3) = 5, Cov(X_2, X_3) = -1$ olsun. $E(Y)$ beklenen değerini ve $V(Y)$ varyansını hesaplayınız.

Çözüm: $E(Y)$ beklenen değeri değişmez:

$$E(Y) = 2E(X_1) - E(X_2) + 3E(X_3) = 2(3) - 0 + 3(4) = 18$$

$V(Y)$ hesaplanırken kovaryans terimleri de dahil edilir.

$$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{i=1}^3 a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j) \\ &= a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + a_3^2 V(X_3) + 2a_1 a_2 Cov(X_1, X_2) + 2a_1 a_3 Cov(X_1, X_3) + 2a_2 a_3 Cov(X_2, X_3) \\ V(Y) &= 4^2 V(X_1) + (1)^2 V(X_2) + 3^2 V(X_3) \\ &\quad + 2[(2)(-1)Cov(X_1, X_2) + (2)(3)Cov(X_1, X_3) + (-1)(3)Cov(X_2, X_3)] \\ &= 4(1) + 1(10) + 9(7) + 2(31) = 139 \end{aligned}$$

TEOREM 4: X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri için $E(X) = E(Y) = 0$ olsun. Bu durumda, $V(XY) = V(X)V(Y)$ olur.

İspat: X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri için

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$E(X) = 0 \Rightarrow V(X) = E(X^2) - \left[\frac{E(X)}{0} \right]^2 = E(X^2)$$

$$E(Y) = 0 \Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - \left[\frac{E(Y)}{0} \right]^2 = E(Y^2)$$

$$\begin{aligned} V(XY) &= E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 = E[(XY)^2] - \left[\frac{E(X)E(Y)}{0} \right]^2 \\ &= E[(XY)^2] = \underbrace{E(X^2 Y^2)}_{X \text{ ve } Y \text{ bağımsız raslantı değişkenleri olduğu için}} = E(X^2)E(Y^2) = V(X)V(Y) \end{aligned}$$

9



Google Slic

10



Google Slic

ÖRNEK: X ve Y raslantı değişkenleri, $U(-\theta, \theta)$ dağılımına sahip aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri olsun. $V(XY) = \frac{64}{9}$ olarak verilsin, θ 'nın değerini bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & -\theta < x < \theta \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & -\theta < y < \theta \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} x \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\theta}^{\theta} = 0$$

X ve Y r.d.'lerinin oyfları aynı olduğundan $E(Y) = 0$. Bu durumda, Teorem 4'ten $V(XY) = V(X)V(Y)$ yazılabilir

$$V(XY) = V(X)V(Y) \Rightarrow \frac{64}{9} = E(X^2)E(Y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{64}{9} = \left(\int_{-\theta}^{\theta} x^2 \frac{1}{2\theta} dx \right) \left(\int_{-\theta}^{\theta} y^2 \frac{1}{2\theta} dy \right) \Rightarrow \frac{64}{9} = \left(\frac{\theta^2}{3} \right) \left(\frac{\theta^2}{3} \right) \Rightarrow \frac{64}{9} = \frac{\theta^4}{9} \Rightarrow \theta = 2\sqrt{2}$$

11



Google Slic

12



Google Slic

İki Doğrusal Birleşimin Kovaryansı

TEOREM 5: n tane raslantı değişkeni X_1, X_2, \dots, X_n ve a_1, a_2, \dots, a_n ile b_1, b_2, \dots, b_n sabit sayılar olmak üzere $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ ve $Y_2 = \sum_{i=1}^n b_i X_i$ doğrusal birleşimlerinin kovaryansı aşağıdaki eşitlikten hesaplanır.

$$Cov(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_j b_i) Cov(X_i, X_j)$$

Özel Durum: X_1, X_2, \dots, X_n raslantı değişkenleri bağımsız ise, her $i \neq j$ için $Cov(X_i, X_j) = 0$ olduğundan, $Cov(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i)$ olur.

ÖRNEK: $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = X_1 - X_2$ doğrusal birleşimlerinin kovaryansını bulunuz.

Çözüm: $n = 2, a_1 = 1, a_2 = -1, b_1 = 1, b_2 = -1$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^2 a_i b_i V(X_i) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (a_i b_j + a_j b_i) \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= a_1 b_1 V(X_1) + a_2 b_2 V(X_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= (1)(1)V(X_1) + (1)(-1)V(X_2) + ((1)(-1) + (-1)(1))\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= V(X_1) - V(X_2) \end{aligned}$$

TEOREM 6: X ve Y raslantı değişkenleri; a, b, c ve d sabit sayılar olmak üzere,

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y) \text{ 'dir.}$$

ÖRNEK: X ve Y r.d.'leri için $E(XY) = 3, E(X) = E(Y) = 2$ olmak üzere

$$\text{Cov}\left(2X + 10, -\frac{5}{2}Y + 3\right) = ?$$

$$\text{Çözüm: } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$$

$$a = 2, b = 10, c = -\frac{5}{2}, d = 3$$

$$\text{Cov}\left(2X + 10, -\frac{5}{2}Y + 3\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)\text{Cov}(X, Y) = (-5)(-1) = 5$$

TEOREM 7: (Teorem 6'nın genelleştirilmiş hali) X, Y ve Z raslantı değişkenleri için

$$\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$$

ve

$$\text{Cov}(X, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z)$$

yazılabilir.

13



Google Slic

14



Google Slic

Bağımsız Örneklerde Örneklem Ortalamasının Beklenen Değer ve Varyansı

TEOREM 8: X_1, X_2, \dots, X_n , $E(X_i) = \mu$ ortalama ve $V(X_i) = \sigma^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) varyansı ile aynı dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenleri olsun. \bar{X} örneklem ortalamasının beklenen değer ve varyansı,

- $E(\bar{X}) = \mu$
- $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ 'dir.

İspat: X_1, X_2, \dots, X_n bağımsız r.d.'lerinin bir doğrusal birleşimi

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ olmak üzere bu doğrusal birleşimin beklenen değer ve varyansı,

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i), \quad V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) \text{ 'dir.}$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_n \text{ örneklem ortalaması her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için}$$

$a_i = \frac{1}{n}$ olan bir doğrusal birleşimdir. Bu durumda,

$$E(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mu = n \frac{1}{n} \mu = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Not: \bar{X} örneklem ortalamasının standart hatası, $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 'dir.

ÖRNEK: σ^2 varyanslı bir kitleden $n_1 = 30$ ve $n_2 = 120$ birimlik iki örneklem alınıyor. Bu iki örneklem ortalamalarının standart hatalarını bulunuz.

$$\text{Çözüm: } n_1 = 30 \text{ için } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{30}} \quad n_2 = 120 \text{ için } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{120}}$$

Bu durumda örneklem büyüklüğü arttıkça standart hatanın küçüldüğünü söyleyebiliriz.

15



Google Slic

16



Google Slic

ÖRNEK: X_1, X_2, \dots, X_{50} , aşağıdaki o.y.f.'na sahip dağılımdan çekilen 50 birimlik rasgele örneklem olsun. Örneklem ortalamasının ortalamasını ve varyansını bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \text{ için} \\ 0, & \text{ö.d. için} \end{cases}$$

Çözüm: Üstel dağılımın ortalaması $E(X_i) = \theta$, varyansı $V(X_i) = \sigma_X^2 = \theta^2$ 'dir.

Bu durumda,

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} E(X_i) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \theta = \frac{1}{50} 50\theta = \theta$$

$$V(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right)^2 = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \sum_{i=1}^{50} V(X_i) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \theta^2 = \left(\frac{1}{50}\right)^2 50\theta^2 = \frac{\theta^2}{50}$$

TEOREM 9: X_1, X_2, \dots, X_n aynı σ^2 varyanslı bağımsız r.d.'leri olsun. $r = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\text{Cov}(X_r - \bar{X}, \bar{X}) = 0$$

İspat: $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ ve $Y_2 = \sum_{i=1}^n b_i X_i$ doğrusal birleşimlerinin kovaryansı:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_i b_j + a_j b_i) \text{Cov}(X_i, X_j)$$

X_1, X_2, \dots, X_n r.d.'leri bağımsız ise, $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i)$

$$Y_1 = X_r - \bar{X} = X_r - \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = X_r - \frac{X_1}{n} - \frac{X_2}{n} - \dots - \frac{X_r}{n} - \dots - \frac{X_n}{n}$$

$$= -\frac{1}{n} X_1 - \frac{1}{n} X_2 - \dots - \frac{(n-1)}{n} X_r - \dots - \frac{1}{n} X_n$$

$$Y_2 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_r}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

17



Google Slic

18



Google Slic

Y_1 ve Y_2 , katsayıları sırasıyla $a_1 = -\frac{1}{n}$, $a_2 = -\frac{1}{n}$, ..., $a_r = \frac{(n-1)}{n}$, ..., $a_n = -\frac{1}{n}$ ve

$b_1 = b_2 = \dots = b_r = \dots = b_n = \frac{1}{n}$ olan iki doğrusal birleşimdir. Bu durumda, bu iki doğrusal birleşimin kovaryansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i V(X_i) = -\frac{1}{n^2} V(X_1) - \frac{1}{n^2} V(X_2) - \dots + \left(\frac{n-1}{n^2}\right) V(X_r) - \dots - \frac{1}{n^2} V(X_n) = (n-1) \left(-\frac{1}{n^2}\right) \sigma^2 + \left(\frac{n-1}{n^2}\right) \sigma^2 = 0$$

TEOREM 10: $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$, ortalamaları μ_1 , varyansları σ_1^2 olan aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri; $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$, ortalamaları μ_2 , varyansları σ_2^2 olan aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri olsun. Bu durumda n_1 ve n_2 büyüklüğünde iki bağımsız örneklem vardır.

1. örneklem ortalaması $\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$ 2. örneklem ortalaması $\bar{X}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

şeklinde. Bu bağımsız örneklemelerin ortalamalarının farkının beklenen değeri ve varyansı,

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 \quad V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$\text{İspat: } E(Y) = E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E\left(\frac{X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n_1}}{n_1} - \frac{X_{21} + X_{22} + \dots + X_{2n_2}}{n_2}\right)$$

$$Y = \frac{1}{n_1} X_{11} + \frac{1}{n_1} X_{12} + \dots + \frac{1}{n_1} X_{1n_1} - \frac{1}{n_2} X_{21} - \frac{1}{n_2} X_{22} + \dots + \frac{1}{n_2} X_{2n_2} \text{ doğrusal birleşimi için,}$$

$$a_i = \frac{1}{n_1}, \quad i = 1, \dots, n_1; \quad a_i = -\frac{1}{n_2}, \quad i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$$

$$E(Y) = E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} a_i E(X_i) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} E(X_{1i}) - \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} E(X_{2i}) = \frac{1}{n_1} (n_1) \mu_1 - \frac{1}{n_2} (n_2) \mu_2 = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(Y) = V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} a_i^2 V(X_i) = \frac{1}{n_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} V(X_{1i}) + \frac{1}{n_2^2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} V(X_{2i}) = \frac{1}{n_1^2} (n_1) \sigma_1^2 + \frac{1}{n_2^2} (n_2) \sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

19



Google Slic

20



Google Slic

Bağımlı Örneklerde Örneklem Ortalamasının Beklenen Değer ve Varyansı

Bir kitleden örneklem çekme işlemi, "yerine koyarak" ve "yerine koymadan" olmak üzere iki farklı şekilde yapılabilir. Örneklem çekme işlemi "yerine koyarak" yapılırsa elde edilen örneklem "bağımsız", "yerine koymadan" yapılırsa elde edilen örneklem "bağımlı" dır.

N birimlik sonlu kitle $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ olarak verilsin. Bu sonlu kitleden n büyüklükte "yerine koymadan" örneklem çekilirse, örnekleme alınacak birimler ve bu örneklem birimlerini seçme olasılıkları aşağıdaki gibi yazılabilir.

Örneklem birimi	Olasılık
x_1	$f(x_1) = \frac{1}{N}, \quad x_1 = s_1, s_2, \dots, s_N$
x_2	$f(x_1, x_2) = \frac{1}{N(N-1)}, \quad x_1, x_2 = s_1, s_2, \dots, s_N; \quad x_1 \neq x_2$
\vdots	\vdots
x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{N(N-1) \dots [N-(n-1)]}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n = s_1, s_2, \dots, s_N$ $x_i \neq x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$

Benzer şekilde, N büyüklükte sonlu bir kitleden x_r ve x_s örneklem birimlerini çekme olasılıkları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x_r) = \frac{1}{N}, \quad x_r = s_1, s_2, \dots, s_N$$

$$f(x_r, x_s) = \frac{1}{N(N-1)}, \quad x_r, x_s = s_1, s_2, \dots, s_N; \quad x_r \neq x_s$$

İlgilendiğimiz sonlu kitlenin ortalaması μ ve varyansı σ^2 olsun. Bu ortalama ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mu = E(X_r) = \sum_{i=1}^N s_i \cdot \frac{1}{N} \quad \sigma^2 = E(X_r - \mu)^2 = \sum_{i=1}^N (s_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{N}$$

Bu eşitliklerden,

$$\sum_{i=1}^N s_i = N\mu \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^N (s_i - \mu)^2 = N\sigma^2 \quad \text{elde edilir.}$$

21



Google Slic

22



Google Slic

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_r, X_s) &= E[(X_r - \mu)(X_s - \mu)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (s_i - \mu)(s_j - \mu) \frac{1}{N(N-1)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{(s_i - \mu)(s_j - \mu)}{N(N-1)} - \sum_{i=1}^N \frac{(s_i - \mu)^2}{N(N-1)} = \frac{\sum_{i=1}^N (s_i - \mu) \sum_{j=1}^N (s_j - \mu)}{N(N-1)} - \sum_{i=1}^N \frac{(s_i - \mu)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{\left[\sum_{i=1}^N (s_i - \mu) \right]^2}{N(N-1)} - \sum_{i=1}^N \frac{(s_i - \mu)^2}{N(N-1)} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N s_i - n\mu \right]^2}{N(N-1)} - \frac{N\sigma^2}{N(N-1)} = -\frac{\sigma^2}{N-1} \end{aligned}$$

TEOREM 11: Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyüklükte bir sonlu kitleden alınan n büyüklükteki bağımlı örneklem ortalaması \bar{X} ise,

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{ve} \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

İspat: $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ doğrusal birleşiminin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \quad i < j$$

$\bar{X} = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_n$ olduğundan her $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = \frac{1}{n}$ olan bir doğrusal birleşimdir. Bu durumda,

$$E(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(-\frac{\sigma^2}{N-1} \right) = n \frac{1}{n^2} \sigma^2 - 2 \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\sigma^2}{N-1} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Not: Kitle sonsuz elemanlı ise (kitle çok büyükse), çekilen örneklem ortalamasının varyansı, bağımsız örneklem ortalamasının varyansına eşit olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{\sigma^2}{n}$$

23



Google Slic

24



Google Slic

ÖRNEK(15): Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyüklükte bir sonlu kitleden alınan n büyüklükteki bağımlı örneklem birimlerinin toplamı Y r.d. ile gösterilsin. Y r.d.'nin beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.

Çözüm: $Y = \sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$

$$E(Y) = E(n\bar{X}) = nE(\bar{X}) = n\mu \quad V(Y) = V(n\bar{X}) = n^2V(\bar{X}) = n\sigma^2 \frac{N-n}{N-1}$$

Kotlanmış Birimlerin Dağılımı

N birimlik sonlu bir kitlenin birimleri $1, 2, \dots, N$ biçiminde tamsayılarla kotlansın. Bu kitle, $\{1, 2, \dots, N\}$ biçiminde yazılabilir. Bu sonlu kitlenin beklenen değer ve varyansını bulmak için aşağıdaki eşitliklerden yararlanılır.

$$1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Bu eşitliklerden yararlanarak beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N} = \frac{(N+1)}{2}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

TEOREM 12: $\{1, 2, \dots, N\}$ biçiminde verilen sonlu kotlanmış kitleden yerine koymadan alınan n birimlik bağımlı örneklem ortalaması \bar{X} ise, bu örneklem beklenen değer ve varyansı,

$$E(\bar{X}) = \frac{(N+1)}{2} \quad V(\bar{X}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

İspat: Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyüklükte bir sonlu kitleden alınan n büyüklükteki bağımlı örneklem ortalaması \bar{X} ise,

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{ve} \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$$

biçimindedir. Kotlanmış kitle için,

$$\mu = \frac{(N+1)}{2} \Rightarrow E(\bar{X}) = \mu = \frac{(N+1)}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12} \Rightarrow V(\bar{X}) = \frac{(N+1)(N-1)}{12n} \frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

25



Google Slic

Sonuç: Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan N büyüklükte bir sonlu kitleden alınan n büyüklükteki bağımlı örneklem birimlerinin toplamı $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ise,

$$E(Y) = E(n\bar{X}) = \frac{n(N+1)}{2} \quad V(Y) = V(n\bar{X}) = n^2V(\bar{X}) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}$$

ÖRNEK: $\{1, 2, \dots, 60\}$ biçiminde verilen sonlu kotlanmış kitleden 10 birimlik bağımlı örneklem alınsın.

- Kitlenin beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.
- Örneklem beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.
- Örneklemdeki birimlerin toplamının beklenen değer ve varyansını bulunuz.

Çözüm:

$$\text{a. } \mu = \frac{(N+1)}{2} = \frac{61}{2} = 30,5 \quad \sigma^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12} = \frac{(61)(59)}{12} \approx 300$$

$$\text{b. } E(\bar{X}) = \mu = 30,5 \quad V(\bar{X}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n} = \frac{(61)(50)}{120} = 25,4$$

$$\text{c. } E(Y) = n\mu = (10)(30,5) = 305$$

$$V(Y) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12} = \frac{(10)(61)(50)}{12} = 2541,67$$

27



Google Slic

26



Google Slic