İKİ EVRELİ SİMPLEKS YÖNTEM

İki Evreli Yöntem, Büyük M yöntemine alternatif bir yöntemdir. Ancak uygulamada çoğu bilgisayar programı iki aşamalı yöntemi kullanmaktadır. Bunun nedenleri, büyük bir sayı olan M'nin yuvarlama hatasına ve diğer hesaplama zorluklarına neden olabilmesidir. İki aşamalı yöntem, büyük M sayısını içermediğinden bu tür sorunlar yaşanmamaktadır. Bu yöntem, doğrusal programlama problemini iki evrede çözer: I. Evre, bir başlangıç uygun çözüm bulmak için (eğer varsa), II. Evre, orijinal problemi çözmek için kullanılır. Yöntemin adımları şöyledir:

I. EVRE:

1. Öncelikle tüm kısıtlar sağ taraf değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir. Sağ yan değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Çarpım sonucu eşitsizliğin yönü değişecektir. Düzenlemelerden sonra her kısıt ≤, ≥ veya = kısıt olarak sınıflandırılır.

2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt ≤ kısıtsa, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi gevşek değişken eklenir. Eğer kısıt ≥ kısıtsa, sol taraftan bir fazlalık değişken çıkarılır.

3. Tüm ≥ veya = kısıtların sol tarafına bir yapay değişken eklenir.

4. I. evrenin amaç fonksiyonu 3. adımda kullanılan yapay değişkenler kullanılarak,

En büyükleme problemleri için:

Maks $Z' = -X_{n+1} - X_{n+2} - \ldots - X_{n+m} \longrightarrow$ yapay değişkenler

En küçükleme problemleri için:

Min $Z' = X_{n+1} + X_{n+2} + \ldots + X_{n+m} \longrightarrow$ yapay değişkenler

"yapay amaç fonksiyonu" kullanılarak orijinal DP problemi çözülür.

II. EVRE:

I. Evrenin sonunda üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

<u>Durum 1:</u> Optimalite koşulu sağlandığında, Maks $Z' < 0$ ya da Min $Z' > 0$ ise; bir ya da daha çok yapay değişken temelde pozitif düzeyli olarak kalmıştır. Bu durumda II. evreye geçilemez. Problemin uygun çözümü yoktur.

<u>Durum 2:</u> Optimalite sağlandığında, Maks $Z = 0$ ya da Min $Z = 0$ ve temelde yapay değişken yok ise; Evre-I'in son tablosu Evre-II'nin ilk tablosu olacak biçimde Evre-II'ye geçilir ancak bazı düzenlemeler yapılır. Orijinal amaç fonksiyonu katsayıları tabloya aktarılır ve yapay değişkenler ile ilgili sütunlar tablodan çıkarılır. Elde edilen yeni tabloya simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. II. Evredeki tablonun çözümü orijinal DP probleminin çözümüdür.

<u>Durum 3:</u> Optimalite koşulu sağlandığında Maks $Z' = 0$ ya da Min $Z' = 0$ ve en az bir yapay değişken sıfır düzeyli olarak temelde ise; temelden ayrılan değişken olarak temeldeki sıfır düzeyli yapay değişken seçilir ve ilgili satır pivot satır olarak belirlenir.

Temele girecek değişken olarak, pivot satırda katsayısı sıfırdan farklı olan (pozitif veya negatif) herhangi bir temel dışı değişken seçilerek simpleks yöntem uygulanır. II. Evredeki tablonun çözümü orijinal DP probleminin çözümüdür.

Örnek (Durum I): Aşağıdaki DP problemini iki evreli yöntem yardımıyla çözünüz.

Maks $Z = 3X_1 - 4X_2$

$X_1 + X_2 \leq 4$

$2X_1 + 3X_2 \geq 18$

$X_1, X_2 \geq 0$

Maks $Z' = -X_5$

$X_1 + X_2 + X_3 = 4$

$2X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 18$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

1. **EVRE**

		C_J	0	0	0	0	-1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
0	X_3	4	1	1	1	0	0
-1	X_5	18	2	3	0	-1	1
	Zj	-18	-2	-3	0	1	-1
	Cj-Zj		2	3	0	-1	0

		C_J	0	0	0	0	-1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
0	X_2	4	1	1	1	0	0
-1	X_5	6	-1	0	-3	-1	1
	Zj	**-6**	1	0	3	1	-1
	Cj-Zj		-1	0	-3	-1	0

$C_j - Z_j \leq 0$ olduğundan optimallik koşulu sağlanmıştır. Maks Z'= -6 < 0 olduğundan ikinci evreye geçilemez. Problemin uygun çözümü yoktur.

Örnek 2. (Durum II) : Aşağıdaki DP problemini iki evreli yöntem yardımıyla çözünüz.

Min $Z = 15X_1 + 50X_2$

$3X_1 + X_2 \geq 8$

$4X_1 + 3X_2 \geq 19$

$X_1 + 3X_2 \geq 7$

$X_1, X_2 \geq 0$

Min $Z' = X_6 + X_7 + X_8$

$3X_1 + X_2 - X_3 + X_6 = 8$

$4X_1 + 3X_2 - X_4 + X_7 = 19$

$X_1 + 3X_2 - X_5 + X_8 = 7$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \geq 0$

I. EVRE

		C_J	0	0	0	0	0	1	1	1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**
1	X_6	8	3	1	-1	0	0	1	0	0
1	X_7	19	4	3	0	-1	0	0	1	0
1	X_8	7	1	3	0	0	-1	0	0	1
	Zj	34	8	7	-1	-1	-1	1	1	1
	Cj-Zj		-8	-7	1	1	1	0	0	0

		C_J	0	0	0	0	0	1	1	1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**
0	X_1	8/3	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0
1	X_7	25/3	0	5/3	4/3	-1	0	-4/3	1	0
1	X_8	13/3	0	8/3	1/3	0	-1	-1/3	0	1
	Zj	38/3	0	13/3	5/3	-1	-1	-8/3	1	1
	Cj-Zj		0	-13/3	-5/3	1	1	11/3	0	0

		C_J	0	0	0	0	0	1	1	1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**
0	X_1	17/8	1	0	-3/8	0	1/8	3/8	0	-1/8
1	X_7	45/8	0	0	9/8	-1	5/8	-9/8	1	-5/8
0	X_2	13/8	0	1	1/8	0	-3/8	-1/8	0	3/8
	Zj	45/8	0	0	9/8	-1	5/8	-9/8	1	-5/8
	Cj-Zj		0	0	-9/8	1	-5/8	17/8	0	13/8

		C_J	0	0	0	0	0	1	1	1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**
0	X_1	4	1	0	0	-1/3	1/3	0	1/3	-1/3
0	X_3	5	0	0	1	-8/9	5/9	-1	8/9	-5/9
0	X_2	1	0	1	0	1/9	-4/9	0	-1/9	4/9
	Zj	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cj-Zj		0	0	0	0	0	1	1	1

II. EVRE

		C_J	15	50	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
15	X_1	4	1	0	0	-1/3	1/3
0	X_3	5	0	0	1	-8/9	5/9
50	X_2	1	0	1	0	1/9	-4/9
	Zj	110	15	50	0	5/9	-155/9
	Cj-Zj		0	0	0	-5/9	155/9

		C_J	15	50	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
15	X_1	7	1	3	0	0	-1
0	X_3	13	0	8	1	0	-3
0	X_4	9	0	9	0	1	-4
	Zj	105	15	45	0	0	-15
	Cj-Zj		0	5	0	0	15

Optimal çözüm, $X_1^*= 7$, $X_3^*= 13$, $X_4^*= 9$, $X_2^* = X_5^*= 0$, ve $Z^*= 105$ dir.

Örnek (Durum III): Aşağıdaki DP problemini iki evreli yöntem yardımıyla çözünüz.

Min $Z = X_1 - X_2 - X_3$

$2X_1 + 4X_2 + 4X_3 = 4$

$3X_1 - X_2 - 2X_3 = 6$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Min $Z' = X_4 + X_5$

$2X_1 + 4X_2 + 4X_3 + X_4 = 4$

$3X_1 - X_2 - 2X_3 + X_5 = 6$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

I. EVRE

		C_J	0	0	0	1	1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
1	X_4	4	2	4	4	1	0
1	X_5	6	3	-1	-2	0	1
	Zj	10	5	3	2	1	1
	Cj-Zj		-5	-3	-2	0	0

		C_J	0	0	0	1	1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
0	X_1	2	1	2	2	1/2	0
1	X_5	0	0	-7	-8	-3/2	1
	Zj	**0**	0	-7	-8	-3/2	1
	Cj-Zj		0	7	8	5/2	0

II. EVRE

		C_J	1	-1	-1	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_5**
1	X_1	2	1	2	2	0
0	X_5	0	0	-7	-8	1
	Zj	2	1	2	2	0
	Cj-Zj		0	-3	-3	0

		C_J	1	-1	-1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**
1	X_1	2	1	0	-2/7
-1	X_2	0	0	1	8/7
	Zj	2	1	2	-10/7
	Cj-Zj		0	-3	-17/7

$X_1^*= 2$, $X_2^*= 0$, $Z^*= 2$.

Örnek (Durum II): Aşağıdaki DP problemini iki evreli yöntem yardımıyla çözünüz.

Maks $Z = -2X_1 - X_3$

$-X_1 - X_2 - X_3 \leq 3$

$X_1 + X_3 \geq 2$

$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 3$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Maks $Z' = - X_6 - X_8$

$-X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 3$

$X_1 + X_3 - X_5 + X_6 = 2$

$2X_1 + X_2 + X_3 - X_7 + X_8 = 3$

$X_1,\ldots,X_8 \geq 0$

I. EVRE

		C_J	0	0	0	0	0	-1	0	-1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**
0	X_4	3	-1	-1	-1	1	0	0	0	0
-1	X_6	2	1	0	1	0	-1	1	0	0
-1	X_8	3	2	1	1	0	0	0	-1	1
	Zj	-5	-3	-1	-2	0	1	-1	1	-1
	Cj-Zj		3	1	2	0	-1	0	-1	0

		C_J	0	0	0	0	0	-1	0	-1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**
0	X_4	9/2	0	-1/2	-1/2	1	0	0	-1/2	1/2
-1	X_6	1/2	0	-1/2	1/2	0	-1	1	1/2	-1/2
0	X_1	3/2	1	1/2	1/2	0	0	0	-1/2	1/2
	Zj	-1/2	0	1/2	-1/2	0	1	-1	-1/2	1/2
	Cj-Zj		0	-1/2	1/2	0	-1	0	1/2	-3/2

		C_J	0	0	0	0	0	-1	0	-1
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**
0	X_4	5	0	0	0	1	-1	1	0	0
0	X_3	1	0	-1	1	0	-2	2	1	-1
0	X_1	1	1	1	0	0	1	-1	-1	1
	Zj	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cj-Zj		0	0	0	0	0	-1	0	-1

II. EVRE

		C_J	-2	0	-1	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_7**
0	X_4	5	0	0	0	1	-1	0
-1	X_3	1	0	-1	1	0	-2	1
-2	X_1	1	1	1	0	0	1	-1
	Zj	-3	-2	-1	-1	0	0	1
	Cj-Zj		0	1	0	0	0	-1

		C_J	-2	0	-1	0	0	0
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_7**
0	X_4	5	0	0	0	1	-1	0
-1	X_3	2	1	0	1	0	-1	0
0	X_2	1	1	1	0	0	1	-1
	Zj	-2	-1	0	-1	0	1	0
	Cj-Zj		-1	0	0	0	-1	0

Optimal çözüm, $X_1^*= 0$, $X_2^*= 1$, $X_3^*= 2$, $X_4^*= 5$, $Z^*= -2$.

Ödev : Aşağıdaki DP problemlerini iki evreli yöntem yardımıyla çözünüz.

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ &x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ &3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ &5x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

X_1= 2, X_2*= 3, Z*= 21.*

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = 4x_1 + x_2 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ &4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ &3x_1 + x_2 = 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

X_1= 3/5, X_2*= 6/5, Z*= 18/5.*

$$\begin{aligned} &\text{Maks } Z = 5x_1 + 3x_2 \\ &2x_1 + x_2 \leq 1 \\ &3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Uygun çözüm yoktur

$$\begin{aligned} &\text{Maks } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ &3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Sınırsız çözüm

$$\begin{aligned} &\text{Maks } Z = 4x_1 + x_2 \\ &3x_1 + x_2 = 3 \\ &4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ &x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

X_1= 2/5, X_2*= 9/5, Z*= 17/5.*

Ödev: Aşağıda 5 değişkeni, 2 kısıtı ve amaç fonksiyonu Min Z= $X_1 + 7X_2 + 5X_3 + X_4 + 6X_5$ olan bir DP probleminin iki evreli yöntem ile çözümündeki I. evrenin son simpleks tablosu verilmiştir. II. Evreyi uygulayarak optimal çözümü bulunuz (X_6 ve X_7 yapay değişkenlerdir).

		C_J							
C_B	**Temel**	**X_B**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**
		10	1	2	2	4	5	1	0
		0	0	0	-8	-13	-14	-3	1
	Zj								
	Cj-Zj		0	0	8	13	14	4	0