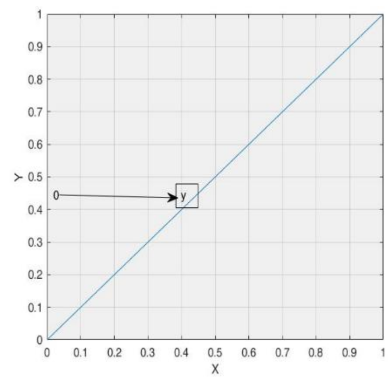
İST265-MATEMATİKSEL İSTATİSTİK
UYGULAMA 4

1. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy^2, & 0<x<y<1 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

Buna göre, k sabitini bulunuz.

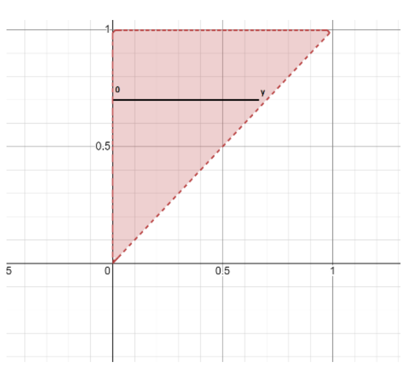


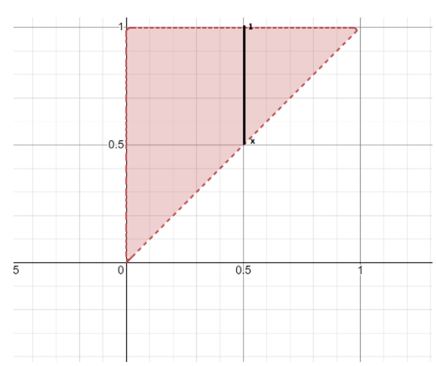
<u>**Çözüm:**</u> $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ olduğu bilinmektedir. k sabitini bulmak için bu bilgi kullanılmalıdır. Burada integralin sınırlarına dikkat edilmelidir.

$$\int_0^1\int_0^y kxy^2dxdy=\int_0^1 ky^2\left[\int_0^y xdx\right]dy=\int_0^1 ky^2\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^y\right]dy=\frac{k}{2}\int_0^1 y^4dy=\frac{k}{2}.\frac{y^5}{5}\Big|_0^1=1$$

$k=10$ olarak elde edilir. Dikkat edilirse, içerde yer alan integralin sınırları X raslantı değişkenine aittir. Tanım bölgesinin grafiğini çizmek, sınırları görme açısından oldukça kolaylık sağlamaktadır. Burada sınırlar $0<x<y<1$ biçiminde verilmiştir. $x<y$ olduğu için y=x grafiğinin sol bölgesi ilgilenilen alandır. X raslantı değişkeni için (grafikte de görüldüğü gibi) x eksenine paralel çizilmeli ve y=x denkleminde x yalnız bırakılmalıdır. Böylece içerde yer alan integralin sınırları [0,y] olarak belirlenir. Bir diğer çözüm ise içerde yer alan integralin sınırlarının Y raslantı değişkenine bağlı olarak belirlenmesidir. Burada da benzer yöntemler kullanılarak sınırlar [x,1] olarak belirlenir.

$$\int_0^1\int_x^1 kxy^2dydx=\int_0^1 kx\left[\int_0^y y^2dx\right]dy=\int_0^1 kx\left[\frac{y^3}{3}\Big|_x^1\right]dy=\frac{k}{3}\int_0^1(x-x^4)dx=\frac{k}{3}.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=1$$





2. X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x+3y}{132}, & x=1,2,3,4;\ y=1,2,3\\ 0, & \ddot{o}.d.\end{cases}$$

a. $f(x)$ ve $f(y)$ marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

b. X ve Y kesikli raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.

c. $f(y|x)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

d. $E\left(X|Y\right)$ ve $V\left(X|Y\right)$ koşullu beklenen değerini ve varyansı bulunuz.

e. $E\left[E\left(X|Y\right)\right]$ beklenen değerini bulunuz.

__**Çözüm:**__

a. Soruda X ve Y **kesikli** raslantı değişkenlerinin **bileşik olasılık fonksiyonu** verilmiştir. O halde bileşik olasılık fonksiyonundan marjinal olasılık fonksiyona geçişte, $f(x)=\sum_y f(x,y)$, $f(y)=\sum_x f(x,y)$ bilgisinden yararlanılır.

$$f(x)=\sum_{y=1}^{3}\frac{2x+3y}{132}=\left[\frac{2x+3}{132}+\frac{2x+6}{132}+\frac{2x+9}{132}\right]=\frac{6x+18}{132}=\frac{x+3}{22},\quad x=1,2,3,4$$

$$f(y)=\sum_{x=1}^{4}\frac{2x+3y}{132}=\left[\frac{2+3y}{132}+\frac{4+3y}{132}+\frac{6+3y}{132}+\frac{8+3y}{132}\right]=\frac{20+12y}{132}=\frac{5+3y}{33},\quad y=1,2,3$$

b. X ve Y kesikli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamalıdır. Yukarıda $f(x)$ ve $f(y)$ olasılık fonksiyonları bulunmuştu. Bu fonksiyonların çarpımlarının bileşik olasılık fonksiyona eşit olup olmadığına bakılsın.

$$f(x,y)\overset{?}{=}f(x)f(y)\Rightarrow\quad \frac{x+3}{22}.\frac{5+3y}{33}\neq\frac{2x+3y}{132}$$

Sonuç olarak $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamadığından X ve Y kesikli raslantı değişkenleri bağımsız değildir.

c. $f(y|x)$ koşullu olasılık fonksiyonu, $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f(x)}$,

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{2x+3y}{132}}{\frac{x+3}{22}}=\frac{2x+3y}{6\left(x+3\right)},\ \ x=1,2,3,4\ \ y=1,2,3$$ biçiminde elde edilir. d şıkkında

$f(x|y)$ bilgisine ihtiyaç duyulacaktır. O halde $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f(y)}$,

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{2x+3y}{132}}{\frac{5+3y}{33}}=\frac{2x+3y}{4\left(5+3y\right)},\ \ x=1,2,3,4\ \ y=1,2,3$$ biçiminde elde edilir.

d. $E\left(X|Y\right)$ koşullu beklenen değeri, $E\left(X|Y\right)=\sum_{x} xf(x|y)$,

$$\begin{aligned}
E\left(X|Y\right)=\sum_{x=1}^{4} xf(x|y)&=\sum_{x=1}^{4} x\left(\frac{2x+3y}{20+12y}\right)\\
&=\frac{1}{20+12y}\left[1(2+3y)+2(4+3y)+3(6+3y)+4(8+3y)\right]\\
&=\frac{60+30y}{20+12y}=\frac{15(2+y)}{2(5+3y)},\quad y=1,2,3
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $V\left(X|Y\right)$ koşullu varyansı bulmak için $E\left(X^2|Y\right)$ bilgisine ihtiyaç vardır.

$$\left[V(X|Y)=E\left(X^2|Y\right)-\left[E\left(X|Y\right)\right]^2\right]$$

$$\begin{aligned}
E\left(X^2|Y\right)=\sum_{x=1}^{4} x^2 f(x|y)&=\sum_{x=1}^{4} x^2\left(\frac{2x+3y}{20+12y}\right)\\
&=\frac{1}{20+12y}\left[1^2(2+3y)+2^2(4+3y)+3^2(6+3y)+4^2(8+3y)\right]\\
&=\frac{200+90y}{20+12y}=\frac{5(20+9y)}{2(5+3y)},\quad y=1,2,3
\end{aligned}$$

e. Teoremden $E\left[E\left(X|Y\right)\right]=E\left(X\right)$ şeklinde yazılabildiği bilindiğine göre $E\left[E\left(X|Y\right)\right]$,

$$E\left[E\left(X|Y\right)\right]=E\left(X\right)=\sum_x xf(x)=\sum_{x=1}^{4}x\left(\frac{x+3}{22}\right)=\frac{60}{22}=\frac{30}{11}$$

veya

$$E\left[E\left(X|Y\right)\right]=\sum_y f(y)E\left(X|Y\right)=\sum_{y=1}^{3}\frac{5+3y}{33}\left(\frac{15(2+y)}{2(5+3y)}\right)=\sum_{y=1}^{3}\frac{1}{11}\left(\frac{5(2+y)}{2}\right)=\frac{1}{11}\left(\frac{15}{2}+\frac{20}{2}+\frac{25}{2}\right)=\frac{30}{11}$$

şeklinde elde edilir.

3. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x,y\le 0\\ \frac{1}{5}\left(2x^3y+3x^2y^2\right), & 0<x,y<1\\ 1, & x,y\ge 1\end{cases}$$

X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

<u>**Çözüm:**</u> X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonu verildiğinde bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$ biçiminde elde edilir. O halde $f(x,y)$,

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{5}\left(2x^3y+3x^2y^2\right)\right]=\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^3+6x^2y\right]=\frac{6}{5}\left(x^2+2xy\right),\ 0<x,y<1$$

şeklinde bulunur.

4. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y<\infty\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

a. $E\left(XY\right)$ beklenen değerini bulunuz.

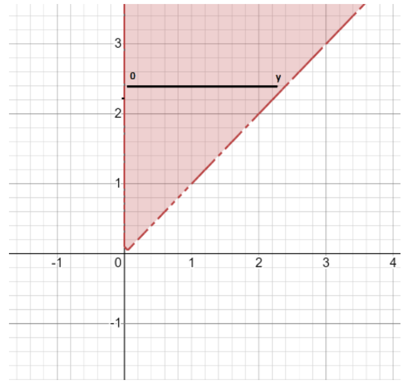
b. $\rho(X,Y)$'yi bulunuz.

c. X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.

d. $f(y|x)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

e. $E\left(Y|X\right)$ ve $V\left(Y|X\right)$ koşullu beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

Çözüm: a. $E\left(XY\right)$'nin beklenen değeri, $E\left(XY\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$ şeklinde elde edilir. Bu sorunun çözümünde de sınırlara dikkat edilmelidir. Sınırlar $0<x<y<\infty$ olarak verildiğinden tanım bölgesi şekildeki gibi olacaktır. $E\left(XY\right)$,



$$E\left(XY\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{y} xy\,e^{-y}dxdy=\int\limits_{0}^{+\infty} y\,e^{-y}\int\limits_{0}^{y}\left[xdx\right]dy=\int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{0}^{y}dy$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{y^3}{2}e^{-y}dy=\frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty} y^{4-1}e^{-y}dy}_{\Gamma(4)}=\frac{3!}{2}=3$$

olarak elde edilir.

b. $\rho(X,Y)$, $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ şeklinde elde edilir. $E\left(XY\right)$ a şıkkında bulunmuştu. Sorunun çözümü için $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ ve $V(Y)$'nin bulunması gerekmektedir. Beklenen değerler ve varyansları bulmak için X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları öncelikli olarak hesaplanmalıdır. Varyansların bulunması için de $E\left(X^2\right)$ ve $E\left(Y^2\right)$'nin elde edilmesi gerekmektedir.

$f(x), E\left(X\right), E\left(X^2\right), V(X), f(y), E\left(Y\right), E\left(Y^2\right), V(Y)$

$$f(x)=\int\limits_{x}^{\infty} e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_{x}^{\infty}=e^{-x},\, x>0$$

$$f(y)=\int\limits_{0}^{y} e^{-y}dx=-xe^{-y}\Big|_{0}^{y}=ye^{-y},\, y>0$$

$$E(X)=\int\limits_{0}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x}dx=\Gamma(2)=1!=1$$

$$E(Y)=\int\limits_{0}^{\infty} yf(y)dx=\int\limits_{0}^{\infty} y^2e^{-y}dy=\Gamma(3)=2!=2$$

$$E(X^2)=\int\limits_{0}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx=\Gamma(3)=2!=2$$

$$E(Y^2)=\int\limits_{0}^{\infty} y^2 f(y)dy=\int\limits_{0}^{\infty} y^3e^{-y}dy=\Gamma(4)=3!=6$$

$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)^2\right]=2-1=1$ $\qquad$ $V(Y)=E\left(Y^2\right)-\left[E\left(Y\right)^2\right]=6-2^2=2$

şeklinde elde edilir. Buradan $\rho(X,Y)$ ise,

$\rho(X,Y)=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\dfrac{3-2.1}{\sqrt{1.2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olarak elde edilir.

c. X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamalıdır.

$$f(x,y)\overset{?}{=}f(x)f(y)\Rightarrow \quad e^{-x}.ye^{-y}\neq e^{-y}$$

Sonuç olarak $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamadığından X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsız değildir.

d. $f(y|x)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f(x)}$,

$f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f(x)}=\dfrac{e^{-y}}{e^{-x}}=e^{-(y-x)},\ y>x$ biçiminde elde edilir.

e. $E\left(Y|X\right)$ koşullu beklenen değeri,

$$E\left(Y|X\right)=\int_x^\infty yf(y|x)dy=\int_x^\infty ye^{-(y-x)}dy=e^x\int_x^\infty ye^{-y}dy=e^x\left(-e^{-y}-ye^{-y}\Big|_x^\infty\right)$$
$$=e^x(-e^{-x}+xe^{-x})=x+1$$

şeklinde elde edilir. $V\left(Y|X\right)=E\left(Y^2|X\right)-\left[E\left(Y|X\right)\right]^2$ koşullu varyansının elde edilmesi için $E\left(Y^2|X\right)$'nin bulunması gerekmektedir.

$$E\left(Y^2|X\right)=\int_x^\infty y^2 f(y|x)dy=\int_x^\infty y^2e^{-(y-x)}dy=e^x\int_x^\infty \underbrace{y^2}_{u}\,\underbrace{e^{-y}dy}_{dv}=e^x\left(-y^2e^{-y}\Big|_x^\infty-2\int_x^\infty ye^{-y}dy\right)$$
$$=e^x\left[x^2e^{-x}+2(e^{-x}+xe^{-x})\right]=x^2+2x+2$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki çözümde kısmi integral işlemi yapılmıştır.

<u>Hatırlatma:</u> Kısmi integral,

$\int_{-\infty}^{+\infty} udv=uv\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty} vdu$ şeklindedir.

5. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2(x+2y)}{3}, & 0<x,y<1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

Buna göre ,$V\left(X\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)$koşullu varyansını bulunuz.

<u>**Çözüm:**</u> $V\left(X\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)=E\left(X^2\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)-\left[E\left(X\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)\right]^2$ şeklinde bulunmaktadır. $E\left(X\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)$ ise $E\left(X\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\middle|y=\dfrac{1}{2}\right)dx$ şeklinde bulunduğu bilinmektedir. O halde koşullu beklenen değeri bulmak için $f\left(x|y\right)$ elde edilmelidir. Buradan $f\left(x|y\right)$,

$$f\left(x|y\right)=\frac{f(x,y)}{f(y)},$$

$$f(y)=\int_0^1\frac{2(x+2y)}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}+2y-0\right]=\frac{1+4y}{3},0<y<1,$$

$f\left(x|y\right)=\dfrac{f(x,y)}{f(y)}=\dfrac{2(x+2y)}{3}.\dfrac{3}{1+4y}=\dfrac{2(x+2y)}{1+4y}$ olarak elde edilir. $Y=\dfrac{1}{2}$ olduğuna göre koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonda yerine yazılırsa,

$f\left(x\middle|y=\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{f(x,y)}{f(y)}=\dfrac{2(x+1)}{3}.\dfrac{3}{1+2}=\dfrac{2(x+1)}{3},\ 0<x<1$ şeklinde elde edilir. Buradan koşullu beklenen değer ve varyans,

$$E\left(X\middle|Y=\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x\frac{2(x+1)}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{9}$$

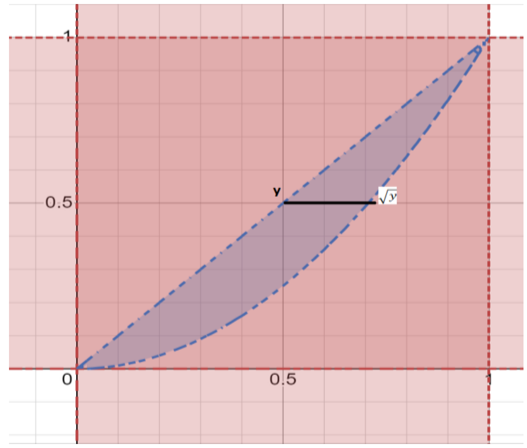
$$E\left(X^2\middle|Y=\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^2\frac{2(x+1)}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{18}$$

$V\left(X\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)=E\left(X^2\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)-\left[E\left(X\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right)\right]^2=\dfrac{7}{18}-\left(\dfrac{5}{9}\right)^2=\dfrac{13}{162}$ biçiminde elde edilir.

6. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=kx \quad ,0<x,y<1,\; x^2<y<x$$

Buna göre, $E\left[E\left(Y|X\right)\right]$ değerini hesaplayınız.



Çözüm: $f(x,y)=kx$, bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğuna göre, $\int_0^1\int_{x^2}^{x} kxdydx=1$ olmalıdır. Buradan k,

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} kxdydx=k\int_0^1 x[y]\Big|_{x^2}^{x}=k\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=\frac{k}{12}=1\Rightarrow k=12$$

olarak elde edilir. Teoreme göre, $E\left[E\left(Y|X\right)\right]=E\left(Y\right)$olduğu biliniyor. O halde Y raslantı değişkenin beklenen değerini bulmak için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilsin. Burada sınırlar X raslantı değişkenine bağlı olacağından x eksenine grafikteki gibi paralel çizilmelidir. Buna göre $f(y)$,

$$f(y)=\int_y^{\sqrt{y}}12xdx=12\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_y^{\sqrt{y}}=12\left(\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\right)=6y\left(1-y\right),\; 0<y<1$$ biçiminde elde edilir.

$E\left[E\left(Y|X\right)\right]=E\left(Y\right)$ ise,

$$E\left(Y\right)=\int_0^1 6y\left(y-y^2\right)dy=6\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}$$ olarak bulunur.

7. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}24y\left(1-x-y\right), & x>0,\; y>0,\; x+y<1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

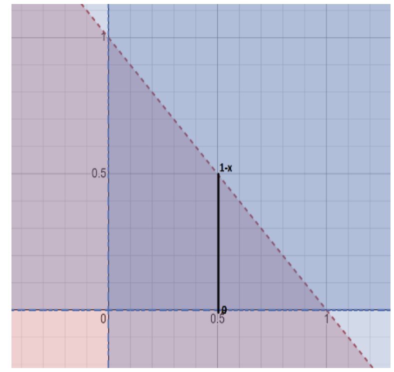
a. X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b. Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

c. X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.

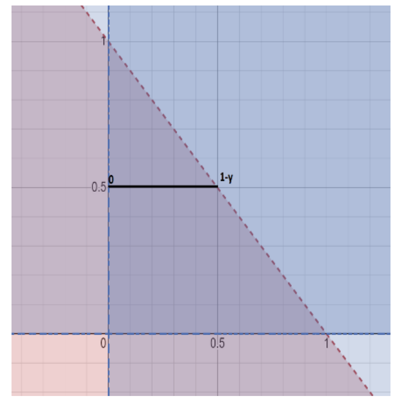
d. $E\left[E\left(Y|X\right)\right]$ beklenen değerini hesaplayınız. (ara sınav sorusu)

Çözüm: a. X raslantı değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{0}^{1-x} 24y(1-x-y)dy = \int_{0}^{1-x} \left(24y-24xy-24y^2\right)dy \\
&= \left[24\frac{y^2}{2}-24x\frac{y^2}{2}-24\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \\
&= \left[12(1-x)^2-12x(1-x)^2-8(1-x)^3\right]-0 \\
&= 4(1-x)^3, \quad 0<x<1
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. Sınırlar y eksenine paralel çizilerek ilk grafikteki gibi belirlenir.



b. Y raslantı değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
f(y) &= \int_{0}^{1-y} 24y(1-x-y)dx = \int_{0}^{1-y} \left(24y-24xy-24y^2\right)dx \\
&= \left[24xy-24y\frac{x^2}{2}-24xy^2\right]_0^{1-y} \\
&= \left[24y(1-y)-24y\frac{(1-y)^2}{2}-y(1-y)\right]-0 \\
&= 12y(1-y)^2, \quad 0<y<1
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. Sınırlar x eksenine paralel çizilerek ikinci grafikteki gibi belirlenir.

c. X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamalıdır.

$$
f(x,y)\overset{?}{=}f(x)f(y) \Rightarrow \quad 4(1-x)^3.12y(1-y)^2 \neq 24y\left(1-x-y\right)
$$

Sonuç olarak, $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamadığından X ve Y raslantı değişkenleri bağımsız değildir.

d. $E\left[E\left(Y|X\right)\right]=E\left(Y\right)$,

$$
E\left(Y\right)=\int_0^1 y12y\left(1-y\right)^2dy=12\int_0^1 y^2\left(1-2y+y^2\right)dy=12\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{2}+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{5}
$$ olarak bulunur.

8. X_1, X_2 ve X_3 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1x_2x_3}{72}, & x_1=1,2,\ x_2=1,2,3,\ x_3=1,3\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

- **a.** X_1, X_2 ve X_3 kesikli raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.
- **b.** $f(x_1,x_3)$ bileşik olasılık fonksiyonunu bulunuz.
- **c.** $f(x_1|x_2=2,x_3=1)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.
- **d.** $f(x_1,x_3|x_2=3)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.
- **e.** X_1 ve X_3 raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.
- **f.** $f(x_1=x_2=x_3)$ olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: a. X_1, X_2 ve X_3 kesikli raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonları,

$$f(x_1)=\sum_{x_2=1}^{3}\sum_{x_3=1,3}\frac{x_1x_2x_3}{72}=\sum_{x_2=1}^{3}\frac{1}{72}\left(x_1x_2+3x_1x_2\right)=\frac{24x_1}{72}=\frac{x_1}{3},\ \ x_1=1,2$$

$$f(x_2)=\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_3=1,3}\frac{x_1x_2x_3}{72}=\sum_{x_1=1}^{2}\frac{1}{72}\left(x_1x_2+3x_1x_2\right)=\frac{12x_2}{72}=\frac{x_2}{6},\ \ x_2=1,2,3$$

$$f(x_3)=\sum_{x_2=1}^{3}\sum_{x_1=1}^{2}\frac{x_1x_2x_3}{72}=\sum_{x_2=1}^{3}\frac{1}{72}\left(x_2x_3+2x_2x_3\right)=\frac{18x_3}{72}=\frac{x_3}{4},\ \ x_3=1,3$$ şeklinde elde edilir.

b. $f(x_1,x_3)$ bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f(x_1,x_3)=\sum_{x_2}f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{x_2=1}^{3}\frac{x_1x_2x_3}{72}=\frac{x_1x_3}{72}(1+2+3)=\frac{x_1x_3}{12},x_1=1,2,x_3=1,3$$ olarak bulunur.

c. $f(x_1|x_2=2,x_3=1)$ koşullu olasılık fonksiyonu,

$$f(x_1|x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_2,x_3)}$$ bulmak için $f(x_2,x_3)$'nun da bulunması gerekmektedir.

$$f(x_2,x_3)=\sum_{x_1} f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{x_1=1}^{2}\frac{x_1x_2x_3}{72}=\frac{1}{72}3(x_2x_3)=\frac{x_2x_3}{24},x_2=1,2,3,x_3=1,3$$

Burada $f(x_1 | x_2,x_3)=\dfrac{\frac{x_1x_2x_3}{72}}{\frac{x_1x_3}{24}}=\dfrac{x_1}{3},\quad x_1=1,2$ olarak bulunur. Dikkat edilirse elde edilen sonuç X_2 ve X_3 raslantı değişkenine bağlı olmadığından $x_2=2,x_3=1$ değerleri ile ilgilenilmemiştir.

d. $f(x_1,x_3 | x_2=3)$ koşullu olasılık fonksiyonu benzer şekilde,

$$f(x_1,x_3 | x_2)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_2)}=\frac{\frac{x_1x_2x_3}{72}}{\frac{x_2}{6}}=\frac{x_1x_3}{12},\ x_1=1,2,\ x_3=1,3$$

e. X_1 ve X_3 raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x_1,x_3)=f(x_1)f(x_3)$ koşulunu sağlamalıdır.

$f(x_1,x_3)\overset{?}{=}f(x_1)f(x_3)\Rightarrow\dfrac{x_1x_3}{12}=\dfrac{x_1}{3}\dfrac{x_3}{4}$ olduğundan koşul sağlanmıştır. X_1 ve X_3 raslantı değişkenleri bağımsızdır.

f. $f(x_1=x_2=x_3)=f(x_1=x_2=x_3=1)=\dfrac{1}{72}$ olarak bulunur.

9. X_1 ve X_2 ile Y_1 ve Y_2 kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

x_1 \ x_2	-1	1	$f(x_2)$
0	1/6	1/6	
1/2	1/3	1/3	
$f(x_1)$			

y_1 \ y_2	-1	1	$f(y_2)$
0	1/3	0	
1/2	1/6	1/2	
$f(y_1)$			

a. X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bağımsızlığını araştırınız.

b. Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin bağımsızlığını araştırınız.

c. $f(x_1 | x_2 = 0)$ ve $f(y_1 | y_2 = 0)$ koşullu olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Sorunun çözümü için ilk olarak X_1, X_2 ile Y_1 , Y_2 raslantı değişkenlerinin marjinalleri bulunmalıdır.

x_1 \ x_2	-1	1	$f(x_2)$
0	1/6	1/6	1/3
1/2	1/3	1/3	2/3
$f(x_1)$	1/2	1/2	1

y_1 \ y_2	-1	1	$f(y_2)$
0	1/3	0	1/3
1/2	1/6	1/2	2/3
$f(y_1)$	1/2	1/2	1

a. X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bağımsızlığı için tüm olası durumların değerlendirilerek çarpımlarının kontrol edilmesi gerekmektedir.

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

$$f(-1,0) = f(-1) f(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f(-1,1/2) = f(-1) f(1/2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(1,0) = f(1) f(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f(1,1/2) = f(1) f(1/2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2)$ koşulu tüm olası durumlar için sağlanmıştır.

b. Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin bağımsızlığı da aynı şekilde araştırılmalıdır. Burada,

$$f(1,1/2) = f(1) f(1/2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$$

$f(y_1, y_2) = f(y_1) f(y_2)$ koşulu $f(1,1/2)$ için sağlanmamıştır. Koşul sağlamayan tek bir durumun bulunması bağımsız olmadığını ifade etmek için yeterlidir. Sonuç olarak, Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenleri bağımsız değildir.

c. X_1 ve X_2 raslantı değişkenleri bağımsız olduğundan $f(x_1 | x_2 = 0)$ koşullu olasılık fonksiyonu,

$$f(x_1|x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1)f(x_2)}{f(x_2)}=f(x_1),\ \ x_1=-1,1$$

$$f(x_1)=\{1/2,\ \ x_1=-1,1$$

biçiminde ifade edilir.

$f(y_1|y_2=0)$ koşullu olasılık fonksiyonu, $f(y_1|y_2)=\dfrac{f(y_1,y_2)}{f(y_2)}=\begin{cases}\dfrac{f(-1,0)}{f(y_2=0)}=\dfrac{1/3}{1/3}=1\\ \dfrac{f(1,0)}{f(y_2=0)}=\dfrac{0}{1/3}=0\end{cases}$

şeklinde elde edilir.

10. X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2	$f(x_2)$
0	h	4h	9h	
1	2h	6h	12h	
2	3h	8h	3h	
3	4h	2h	6h	
$f(x_1)$				

a. X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bağımsızlığını araştırınız.

b. $P(X_1 \geq X_2)$ olasılığını bulunuz.

c. $P(X_1 - X_2 = 1 | X_1 + X_2 = 3)$ koşullu olasılığını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> Sorunun çözümü için ilk olarak X_1, X_2 raslantı değişkenlerinin marjinalleri bulunmalıdır.

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2	$f(x_2)$
0	h	4h	9h	14h
1	2h	6h	12h	20h
2	3h	8h	3h	14h
3	4h	2h	6h	12h
$f(x_1)$	10h	20h	30h	60h

60h=1 olacağından h=1/60 olarak elde edilir.

a. X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bağımsızlığı için $x_1 = 0, x_2 = 0$ değerlerine bakılsın.

$f(0,0) \overset{?}{=} f(0) f(0) \Rightarrow h = 14h.10h \Rightarrow h \neq 140h^2$ olduğundan raslantı değişkenleri bağımsız değildir. Burada da koşul sağlamayan tek bir durumun bulunması bağımsız olmadığını ifade etmek için yeterlidir.

b. $P(X_1 \geq X_2)$ olasılığı,

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \geq X_2) &= P(0,1) + P(2,0) + P(1,1) + P(2,1) + P(2,2) + P(0,0) \\
&= 4h + 9h + 6h + 12h + 3h + h \\
&= 35h \\
&= 35\frac{1}{60} = \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

c. $P(X_1 - X_2 = 1 | X_1 + X_2 = 3)$ koşullu olasılığı,

$$P(X_1 - X_2 = 1 | X_1 + X_2 = 3) = \frac{P(X_1 - X_2 = 1, X_1 + X_2 = 3)}{P(X_1 + X_2 = 3)}$$

biçiminde elde edilir. Burada X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin aldığı değerler elde edilmelidir.

$\left.\begin{array}{l} X_1 - X_2 = 1 \\ X_1 + X_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2X_1 = 4,\ X_1 = 2,\ X_2 = 1$ olarak elde edilir. Buradan

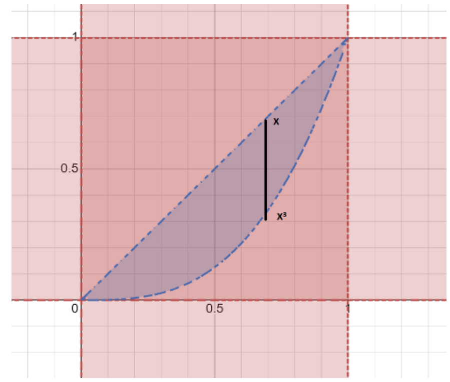
$P(X_1 - X_2 = 1 | X_1 + X_2 = 3) = \dfrac{P(2,1)}{\left[P(2,1) + P(1,2) + P(0,3)\right]} = \dfrac{12h}{24h} = \dfrac{1}{2}$ olacaktır.

11. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y) = k \quad ,0 < x, y < 1,\ x^3 < y < x$$

- **a.** k değerini hesaplayınız.
- **b.** X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz
- **c.** X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız. (2009 ara sınav sorusu)

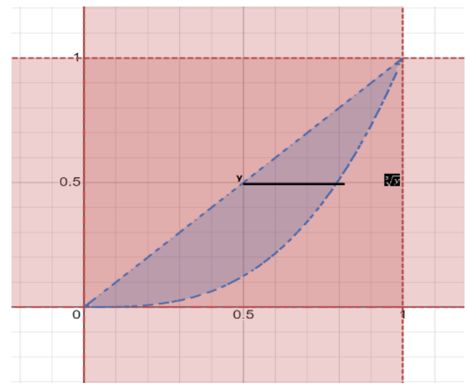
a. $f(x,y)=k$, bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğuna göre, $\int_0^1\int_{x^3}^{x} kdydx=1$ olmalıdır. Buradan k,



$$\int_0^1\int_{x^3}^{x} kdydx = k\int_0^1 [y]\Big|_{x^3}^{x} = k\int_0^1 \left(x-x^3\right)dx = k\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow k=4/3$$

olarak elde edilir.

b. X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



$$f(x)=\int_{x^3}^{x}\frac{4}{3}dy=\frac{4}{3}(y)\Big|_{x^3}^{x}=\frac{4}{3}\left(x-x^3\right),\ 0<x<1$$

Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y)=\int_{y}^{\sqrt[3]{y}}\frac{4}{3}dx=\frac{4}{3}(x)\Big|_{y}^{\sqrt[3]{y}}=\frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{y}-y\right),\ 0<y<1$$

şeklinde elde edilir.

c. X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamalıdır.

$$f(x,y)\overset{?}{=}f(x)f(y)\Rightarrow\ \frac{4}{3}\left(x-x^3\right).\frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{y}-y\right)\neq\frac{4}{3}$$

Sonuç olarak, $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamadığından X ve Y raslantı değişkenleri bağımsız değildir.

12. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

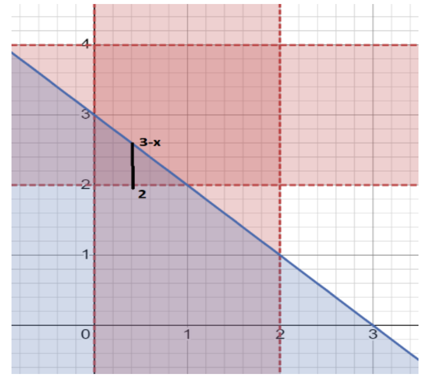
a. $P(X+Y\leq 3)$ olasılığını bulunuz.

b. $P(X\leq 1, Y\leq 3)$ olasılığını bulunuz.

c. X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

a. $P(X+Y\le 3)$ olasılığını hesaplamak için sınırların dikkatli bir şekilde belirlenmesi gerekmektedir.



$$P(X+Y\le 3)=\int_0^1\int_2^{3-x}\frac{1}{8}(6-x-y)\,dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\left[6y-xy-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_2^{3-x}$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left[\left(6(3-x)-x(3-x)-\frac{(3-x)^2}{2}\right)-\left(6.2-2x-\frac{4}{2}\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(\frac{7}{2}-4x+\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{7x}{2}-2x^2+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{5}{24}$$

olarak elde edilir.

b. $P(X\le 1, Y\le 3)$ olasılığı,

$$P(X\le 1,Y\le 3)=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)\,dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\left[6y-xy-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_2^3$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left[\left(6.3-x.3-\frac{3^2}{2}\right)-\left(6.2-2x-\frac{4}{2}\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(\frac{7}{2}-x\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{7x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{3}{8}$$

olarak elde edilir.

c. X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsızlığını araştırmak için ilk olarak marjinallerinin bulunması gerekmektedir. X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f(x)=\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\,dy=\frac{1}{8}\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=\frac{6-2x}{8},\ \ 0<x<2$$

$$f(y)=\int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)\,dy=\frac{1}{8}\left(6x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_0^2=\frac{10-2y}{8},\ \ 2<x<4$$

olarak elde edilir. X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamalıdır.

$$f(x,y)\overset{?}{=}f(x)f(y)\Rightarrow\ \ \frac{1}{8}(6-2x).\frac{1}{8}(10-2y)\neq\frac{1}{8}(6-x-y)$$

Sonuç olarak, $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamadığından X ve Y raslantı değişkenleri bağımsız değildir.

13. X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$f(x_1,x_2)=2x_1+2x_2-4x_1x_2\ \ ,0<x_1,x_2<1$$

Buna göre, $Cov(X_1,X_2)$'yi hesaplayınız.

<u>Çözüm:</u> X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin kovaryansı, $Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$

olarak hesaplandığı bilinmektedir. Buna göre $E(X_1X_2), E(X_1)$ ve $E(X_2)$'nin hesaplanması gerekmektedir. Beklenen değerlerin de hesaplanması için X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerin marjinalleri bulunmalıdır. $f(x_1)$ ve $f(x_2)$,

$$f(x_1)=\int_0^1(2x_1+2x_2-4x_1x_2)dx_2$$
$$=(4x_1+2),\ \ 0<x_1<1$$

$$f(x_2)=\int_0^1(2x_1+2x_2-4x_1x_2)dx_1$$
$$=1,\ \ \ 0<x_2<1$$

bulunur.

$$E(X_1X_2)=\int_0^1\int_0^1 x_1x_2(2x_1+2x_2-4x_1x_2)dx_1dx_2=\int_0^1\int_0^1(2x_1^2x_2+2x_1x_2^2-4x^2{}_1x_2^2)dx_1dx_2$$
$$=\int_0^1 2\frac{x_1^3}{3}x_2+2\frac{x_1^2}{2}x_2^2-4\frac{x_1^3}{3}x_2^2\Bigg|_0^1 dx_2=\int_0^1\left(\frac{2}{3}x_2+x_2^2-4\frac{x_2^3}{3}\right)dx_2$$
$$=\left(\frac{2}{3}\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_2^3}{3}-4\frac{x_2^3}{9}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{4}{9}\right)=\frac{2}{9}$$

olarak elde edilir. $E(X_1)$ ve $E(X_2)$,

$$E(X_1)=\int_0^1 x_1 f(x_1)dx_1=\int_0^1 x_1(4x_1+2)dx_1=4\frac{x_1^3}{3}+x_1^2\Bigg|_0^1=\frac{7}{3}$$

$E(X_2)=\int_0^1 x_2 f(x_2)dx_2=\int_0^1 x_2dx_2=\frac{x_2^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$ şeklinde elde edilir. $Cov(X_1,X_2)=\frac{2}{9}-\frac{7}{3}\frac{1}{2}=\frac{-51}{54}$

biçiminde elde edilir.

14. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0\ , & ö.d.\end{cases}$$

Buna göre, $P(X<\frac{1}{4}\Big|Y=\frac{1}{3})$ olasılığını bulunuz.

<u>**Çözüm:**</u> $f\left(x|y\right)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{x+y}{?}$ ‘nin hesaplanabilmesi için Y raslantı değişkenin marjinalinin bulunması gerekir. Buradan $f(y)$,

$f(y)=\int_0^1(x+y)dx=\frac{x^2}{2}+xy\Big|_0^1=\frac{1}{2}+y,\ \ 0\le y\le 1$ olarak bulunur. Tekrar $f\left(x|y\right)$,

$f\left(x|y\right)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}$ şeklinde elde edilir. Buradan, $P(X<\frac{1}{4}\Big|Y=\frac{1}{3})$,

$$P(X<\frac{1}{4}\Big|Y=\frac{1}{3})=\int_0^{1/4} f(x|y=1/3)dx=\int_0^{1/4}\frac{x+1/3}{1/2+1/3}=\frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^{1/4}=\frac{11}{80}$$ biçiminde elde edilir.

15. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0, y>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

a. X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b. Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

c. X ve Y raslantı değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.

d. $E\left[E\left(X|Y\right)\right]$ beklenen değerini hesaplayınız.

<u>Çözüm:</u> a. X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ,

$$f(x)=\int_0^{\infty}2e^{-(x+2y)}dy=2e^{-x}\int_0^{\infty}e^{-2y}dy=2e^{-x}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty}=e^{-x},\ x>0$$ şeklinde elde edilir.

b. Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y)=\int_0^{\infty}2e^{-(x+2y)}dx=2e^{-2y}\int_0^{\infty}e^{-x}dy=2e^{-2y}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty}=2e^{-2y},\ y>0$$

c. X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlamalıdır.

$$f(x,y)\overset{?}{=}f(x)f(y)\Rightarrow\quad e^{-x}.2e^{-2y}=2e^{-(x+2y)}$$

Sonuç olarak, $f(x,y)=f(x)f(y)$ koşulu sağlandığından X ve Y sürekli raslantı değişkenleri bağımsızdır.

d. $E\left[E\left(X|Y\right)\right]=E\left(X\right)$ olduğu biliniyor. O halde $E\left(X\right)$,

$$E\left(X\right)=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\underbrace{\int_0^{\infty}xe^{-x}dx}_{\Gamma(2)}=1$$ olarak bulunur.

16. X raslantı değişkenin $X \sim U(0,1)$ ve $Y|X = x \sim U(x,1)$ dağıldığı bilinmektedir.

$$f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & ö.d \end{cases}$$

a. Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b. $E\left(Y|X\right)$ beklenen değerini hesaplayınız.

Çözüm: $X \sim U(0,1)$ raslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & ö.d \end{cases}$ şeklindedir.

a. Y raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonun bulunması için ilk olarak X ve Y bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonun bulunması gerekir. $f\left(y|x\right) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)}$ olduğu biliniyor.

Buradan $f(x,y) = f\left(y|x\right) f(x)$,

$f(x,y) = f\left(y|x\right) f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$ olarak bulunur. Böylece $f(y)$,

$f(y) = \int\limits_0^y f(x,y)dx = \int\limits_0^y \dfrac{1}{1-x}dx = -\ln(1-y),\ \ 0 < y < 1$ biçiminde elde edilir.

b. $E\left(Y|X\right) = \int\limits_x^1 yf(y|x)dy = \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{y^2}{2}\bigg|_x^1\right) = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{\left(1-x^2\right)}{2} = \dfrac{x+1}{2}$ olarak bulunur.

17. X_1, X_2 ve X_3 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}(x_1+x_2)e^{-x_3}, & 0<x_1,x_2<1,\ x_3>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

Buna göre, $P\left(0<X_1<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<X_2<1,X_3<1\right)$ olasılığını bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

$$P\left(0<X_1<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<X_2<1,X_3<1\right)=\int_0^1\int_{1/2}^1\int_0^{1/2}(x_1+x_2)e^{-x_3}dx_1dx_2dx_3$$

$$=\int_0^1\int_{1/2}^1\left(\frac{1}{8}+\frac{x_2}{2}\right)e^{-x_3}dx_2dx_3$$

$$=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-x_3}dx_3$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-e^{-1}\right)=0.158$$

18. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

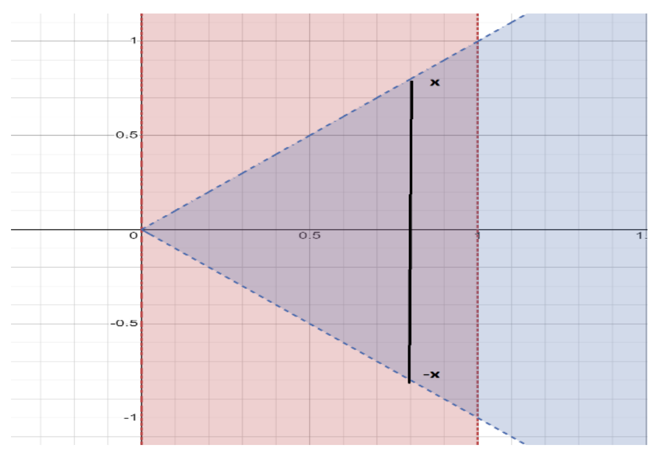
$$f(x,y)=\begin{cases}kx(x-y), & 0<x<1,-x<y<x\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

a. k değerini bulunuz.

b. X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

c. $E\left[E\left(X|Y\right)\right]$ beklenen değerini hesaplayınız.

<u>Çözüm:</u> a. k değeri,



$$\int_0^1\int_{-x}^{x} f(x,y)dydx = \int_0^1\int_{-x}^{x} kx(x-y)dydx = 1$$

$$= k\int_0^1 \left(x^2y - x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{-x}^{x} = 2k\int_0^1 x^3dx = 2k(\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1) = 1 \Rightarrow k = 2$$

olarak bulunur.

b. X raslantı değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \int_{-x}^{x} 2x(x-y)dy = \left(2x^2y - 2x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{-x}^{x} = \left[\left(2x^3 - x^3\right) - \left(2x^2(-x) - x.(-x)^2\right) \right] = 4x^3,\ 0 < x < 1$$

c. $E\left[E\left(X|Y\right)\right] = E(X)$ olduğuna göre,

$$E\left[E\left(X|Y\right)\right] = E(X) = \int_0^1 4x^3dx = 4\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = 1$$

19. X, Y, Z kesikli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} p^3q^{x+y+z-3}, & x,y,z = 1,2,\ldots \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

$p+q=1$ ve $0 < p \le 1$ olmak üzere, X, Y, Z kesikli raslantı değişkenlerinin, marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz ve bağımsız olup olmadığını araştırınız.

<u>**Çözüm:**</u> $p+q=1$ve $0 < p \le 1$ olduğundan $1+q+q^2+q^3+\ldots = \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p}$'dir.

$$f(x) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{z=1}^{\infty} p^3q^{x+y+z-3} = p^3q^{x-3}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{z=1}^{\infty} q^{y+z} = p^3q^{x-3}\sum_{y=1}^{\infty} q^y \underbrace{\left(q+q^2+q^3+\ldots\right)}_{q\underbrace{(1+q+q^2+q^3+\ldots)}_{\frac{1}{1-q}}} = p^3q^{x-3}\frac{q}{p}\frac{q}{p} = pq^{x-1},\ x = 1,2,\ldots$$

$$f(y) = \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{z=1}^{\infty} p^3q^{x+y+z-3} = p^3q^{y-3}\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{z=1}^{\infty} q^{x+z} = pq^{y-1},\ y = 1,2,\ldots$$

$$f(z) = \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} p^3q^{x+y+z-3} = p^3q^{z-3}\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} q^{x+y} = pq^{z-1},\ z = 1,2,\ldots$$

X , Y ve Z sürekli raslantı değişkenleri bağımsız ise $f(x,y,z) = f(x)f(y)f(z)$ koşulunu sağlamalıdır.

$$f(x,y,z) \overset{?}{=} f(x)f(y)f(z) \Rightarrow \quad pq^{x-1}.pq^{y-1}.pq^{z-1} = p^3 q^{x+y+z-3}$$

Sonuç olarak, $f(x,y,z) = f(x)f(y)f(z)$ koşulu sağlandığından X , Y ve Z sürekli raslantı değişkenleri bağımsızdır.

20. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1+y), & 0 < x+y < 1,\ x,y > 0 \\ 0, & \ddot{o}.d. \end{cases}$$

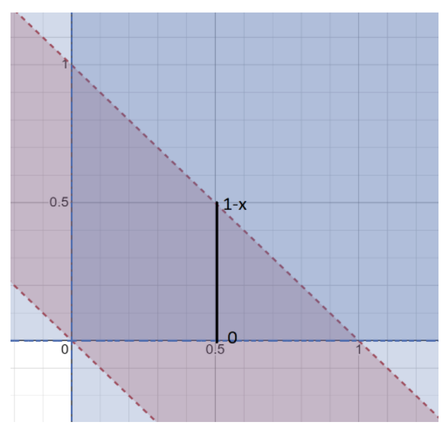
a. $f(y|x)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b. $E\left(Y|X = \dfrac{1}{2}\right)$ beklenen değerini hesaplayınız.

<u>Çözüm:</u> a. $f(y|x)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)}$

$$f(x) = \int_0^{1-x} \frac{3}{2}(y+1)dy = \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_0^{1-x} = \frac{3}{2}\left(\frac{(1-x)^2}{2} + (1-x)\right)$$

$$= \frac{x^2 - 5x + 4}{4}, 0 < x < 1$$



$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{3}{2}(1+y).\frac{4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{6(1+y)}{x^2 - 5x + 4}$$ olarak bulunur.

b. $$E\left(Y|X = \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} y\, f(y|x = 1/2)dy$$

$$f(y|x = 1/2) = \frac{6(1+y)}{(1/2)^2 - 5(1/2) + 4} = \frac{24}{7}(1+y)$$

$$E\left(Y \middle| X=\frac{1}{2}\right)=\int_0^{1/2} y\, f(y|x=1/2)dy=\int_0^{1/2} y\,\frac{24}{7}(1+y)dy=\frac{24}{7}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{4}{7}$$ beklenen

değerini hesaplayınız.

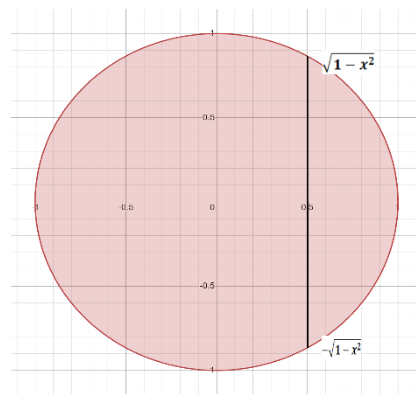
21. X ve Y raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \ddot{o}.d.\end{cases}$$

a. X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b. $f(x|y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

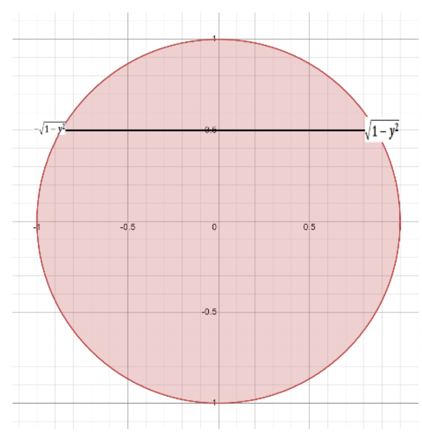
c. $E(XY)$ beklenen değerini hesaplayınız.



<u>Çözüm:</u> a. X ve Y raslantı değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu,

$$f(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{y}{\pi}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi},-1\le x\le 1$$

$$f(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{x}{\pi}\Bigg|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi},-1\le y\le 1$$



olarak bulunur.

b. $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f(y)}=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$ şeklindedir.

c. $$E(XY)=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\frac{1}{\pi}dydx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[x\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[x\,\underbrace{\left(\frac{1-x^2}{2}-\frac{1-x^2}{2}\right)}_{0}\right]dx=0$$ biçiminde

elde edilir.