

BÜYÜK M YÖNTEMİ

Eğer bir DP'de en bir tane \geq veya $=$ kısıtı varsa, standart forma getirilen modelden temel uygun çözüm oluşturulamadığından Simpleks Yöntem kullanılamaz. Bu durumda Büyük M yöntemi veya İki Aşamalı Simpleks yöntemi kullanılmalıdır.

Örnek: Aşağıdaki DP problemini standart biçime getirerek Simpleks Yöntemi başlatmayı deneyiniz.

$$\text{Min } Z = 40X_1 + 24X_2$$

$$20X_1 + 50X_2 \geq 4800$$

$$80X_1 + 50X_2 \geq 7200$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Standart Form:

$$\text{Min } Z = 40X_1 + 24X_2$$

$$20X_1 + 50X_2 - X_3 = 4800$$

$$80X_1 + 50X_2 - X_4 = 7200$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Simpleks yöntem için öncelikle bir temel uygun çözümün bulunması gerekir:

$X_1 = 0$ ve $X_2 = 0$ (temel olmayan değişkenler) için $X_3 = -4800$ ve $X_4 = -7200$ (temel değişkenler) elde edilir.

X_3 ve X_4 değişkenleri negatif olmama kısıtını sağlamadığından başlangıç uygun çözüm olarak alınamaz. Ayrıca standart formdaki kısıtlara ilişkin bilgiler başlangıç Simpleks tabloya aktarıldığında, fazlalık değişkenlerin katsayıları (-1) olduğundan birim matris oluşmaz.

Bu durumda Büyük M yöntemi veya İki Aşamalı Simpleks yöntem kullanılmalıdır. Büyük M yöntemi Simpleks Yöntemin bir türüdür. \geq ve $=$ kısıtlarında yapay değişkenler kullanarak başlangıç Simpleks tabloda bir temel uygun çözüm bulunmasını sağlar. Bu durumda DP'nin amaç fonksiyonu, optimal simpleks tabloda yapay değişkenlerin değerleri sıfır olacak şekilde yeniden düzenlenir. Yöntemin adımları şöyledir:

1. Öncelikle tüm kısıtların sağ yan değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir. Sağ yan değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Bu çarpım sonucu eşitsizliğin yönünün değişeceğini unutmayınız!).
2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt \leq kısıtı ise, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi bir gevşek değişken eklenir. Eğer kısıt \geq kısıtı ise, sol taraftan bir fazlalık değişken çıkarılır.
3. Tüm \geq ve $=$ kısıtlarının sol tarafına birer yapay değişken eklenir. Aynı zamanda yapay değişkenler için işaret sınırlaması ≥ 0 eklenir.
4. M çok büyük bir sayı olsun. Minimum problemlerinde, amaç fonksiyonuna (her X_i yapay değişkeni için) $-MX_i$ eklenir. Maksimum problemlerinde ise, amaç fonksiyonuna (her X_i yapay değişkeni için) $-MX_i$ eklenir.

5. Simpleks algoritmasının adımları kullanılarak (M'nin büyük bir sayı olduğu unutulmadan!) çözüme gidilir.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini uygun değişkenleri kullanarak Büyük M Yöntemi ile çözüme hazır duruma getiriniz. Kullandığınız değişkenlerin isimlerini yazınız.

$$\text{Maks } Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$(1/2)X_1 + (1/4)X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 20$$

$$X_1 + X_2 = 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Maks } Z = 2X_1 + 3X_2 - MX_5 - MX_6$$

$$(1/2)X_1 + (1/4)X_2 + X_3 = 4$$

$$X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 20$$

$$X_1 + X_2 + X_6 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

(X_3 : gevşek değişken, X_4 : fazlalık değişken,

X_5 ve X_6 : yapay değişkenler.)

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini Büyük M yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\text{Maks } Z = X_1 + 5X_2$$

$$4X_1 + 4X_2 \leq 6$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Maks } Z = X_1 + 5X_2 - MX_5$$

$$4X_1 + 4X_2 + X_3 = 6$$

$$X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 2$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

		C_j	1	5	0	0	-M
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	6	4	4	1	0	0
-M	X_5	2	1	3	0	-1	1
	Z_j	-2M	-M	-3M	0	M	-M
	$C_j - Z_j$		1+M	5+3M	0	-M	0

		C_j	1	5	0	0	-M
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	10/3	8/3	0	1	4/3	-4/3
5	X_2	2/3	1/3	1	0	-1/3	1/3
	Z_j	10/3	5/3	5	0	-5/3	5/3
	$C_j - Z_j$		-2/3	0	0	5/3	(-3M-5)/3

		C_j	1	5	0	0	-M
C_B	Temel	X_B	X₁	X₂	X₃	X₄	X₅
0	X ₄	5/2	2	0	3/4	1	-1
5	X ₂	3/2	1	1	1/4	0	0
	Z_j	15/2	5	5	5/4	0	0
	C_j-Z_j		-4	0	-5/4	0	-M

Tüm $C_j - Z_j \leq 0$ olduğundan optimalite koşulu sağlanmıştır. Optimal çözüm; $X_1^* = 0$, $X_2^* = 3/2$, $X_4^* = 5/2$ ve $Z^* = 15/2$.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini Büyük M yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 = 2$$

$$2X_1 + 2X_2 = 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + MX_3 + MX_4$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$2X_1 + 2X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

		C_j	1	1	M	M
C_B	Temel	X_B	X₁	X₂	X₃	X₄
M	X ₃	2	1	1	1	0
M	X ₄	4	2	2	0	1
	Z_j	6M	3M	3M	M	M
	C_j-Z_j		1-3M	1-3M	0	0

		C_j	1	1	M	M
C_B	Temel	X_B	X₁	X₂	X₃	X₄
1	X ₁	2	1	1	1	0
M	X ₄	0	0	0	-2	1
	Z_j	2	1	1	-2M+1	M
	C_j-Z_j		0	0	3M-1	0

Tüm $C_j - Z_j \geq 0$ olduğundan optimalite koşulu sağlanmıştır. Optimal çözüm; $X_1^* = 2$, $X_2^* = 0$, $X_4^* = 0$ ve $Z^* = 2$.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini Büyük M yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\text{Min } Z = -5X_1 + 3X_2$$

$$2X_1 - 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 4X_2 = 15$$

$$-2X_1 - 5X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = -5X_1 + 3X_2 + MX_4 + MX_5$$

$$2X_1 - 3X_2 - X_3 + X_4 = 6$$

$$X_1 + 4X_2 + X_5 = 15$$

$$-2X_1 - 5X_2 + X_6 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
M	X_4	6	2	-3	-1	1	0	0
M	X_5	15	1	4	0	0	1	0
0	X_6	4	-2	5	0	0	0	1
	Z_j	21M	3M	M	-M	M	M	0
	$C_j - Z_j$		-3M-5	-M+3	M	0	0	0

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-5	X_1	3	1	-3/2	-1/2	1/2	0	0
M	X_5	12	0	11/2	1/2	-1/2	1	0
0	X_6	10	0	-8	-1	1	0	1
	Z_j	12M-15	-5	(11M+15)/2	(M+5)/2	(-M-5)/2	M	0
	$C_j - Z_j$		0	(-11M-9)/2	(-M-5)/2	(3M+5)/2	0	0

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-5	X_1	69/11	1	0	-4/11	4/11	3/11	0
3	X_2	24/11	0	1	1/11	-1/11	2/11	0
0	X_6	302/11	0	0	-3/11	3/11	16/11	1
	Z_j	-273/11	-5	3	23/11	-23/11	-9/11	0
	$C_j - Z_j$		0	0	-23/11	M+(23/11)	M+(9/11)	0

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-5	X_1	15	1	4	0	0	1	0
0	X_3	24	0	11	1	-1	2	0
0	X_6	34	0	3	0	0	21/11	1
	Z_j	-75	-5	-20	0	0	-5	0
	C_j-Z_j		0	17	0	M	M+5	0

Tüm $C_j-Z_j \geq 0$ olduğundan optimalite koşulu sağlanmıştır. Optimal çözüm; $X_1^* = 15$, $X_2^* = 0$ ve $Z^* = -75$.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini Büyük M yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\text{Maks } Z = -X_1 + X_2$$

$$3X_1 + 2X_2 = 6$$

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Maks } Z = -X_1 + X_2 - MX_3 - MX_5$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 6$$

$$X_1 + X_2 - X_4 + X_5 = 1$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

		C_j	-1	1	-M	0	-M
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-M	X_3	6	3	2	1	0	0
-M	X_5	1	1	1	0	-1	1
	Z_j	-6M	-4M	-3M	-M	M	-M
	C_j-Z_j		4M-1	3M+1	0	-M	0

		C_j	-1	1	-M	0	-M
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-M	X_3	3	0	-1	1	3	-3
-1	X_1	1	1	1	0	-1	1
	Z_j	-3M-1	-1	M-1	-M	-3M+1	3M-1
	C_j-Z_j		0	-M+2	0	3M-1	-4M+1

		C_j	-1	1	-M	0	-M
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_4	1	0	-1/3	1/3	1	-1
-1	X_1	2	1	2/3	1/3	0	0
	Z_j	-2	-1	-2/3	-1/3	0	0
	C_j-Z_j		0	5/3	-M+1/3	0	-M

		C_j	-1	1	-M	0	-M
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_4	2	1/2	0	1/2	1	-1
1	X_2	3	3/2	1	1/2	0	0
	Z_j	3	3/2	1	1/2	0	0
	C_j-Z_j		-5/2	0	-M-1/2	0	-M

Tüm $C_j-Z_j \leq 0$ olduğundan optimalite koşulu sağlanmıştır. Optimal çözüm; $X_1^*=0$, $X_2^*=3$, $X_3^*=0$, $X_4^*=2$, ve $Z^*=3$.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini Büyük M yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\text{Min } Z = -5X_1 + 3X_2$$

$$2X_1 - 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 4X_2 = 15$$

$$-2X_1 - 5X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = -5X_1 + 3X_2 + MX_4 + MX_5$$

$$2X_1 - 3X_2 - X_3 + X_4 = 6$$

$$X_1 + 4X_2 + X_5 = 15$$

$$-2X_1 - 5X_2 + X_6 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
M	X_4	6	2	-3	-1	1	0	0
M	X_5	15	1	4	0	0	1	0
0	X_6	4	-2	-5	0	0	0	1
	Z_j	21M	3M	M	-M	M	M	0
	C_j-Z_j		-3M-5	-M+3	M	0	0	0

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X₁	X₂	X₃	X₄	X₅	X₆
-5	X ₁	3	1	-3/2	-1/2	1/2	0	0
M	X ₅	12	0	11/2	1/2	-1/2	1	0
0	X ₆	10	0	-8	-1	1	0	1
	Z_j	12M-15	-5	(11M+15)/2	(M+5)/2	(-M-5)/2	M	0
	C_j-Z_j		0	(-11M-9)/2	(-M-5)/2	(3M+5)/2	0	0

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X₁	X₂	X₃	X₄	X₅	X₆
-5	X ₁	69/11	1	0	-4/11	4/11	3/11	0
3	X ₂	24/11	0	1	1/11	-1/11	2/11	0
0	X ₆	302/11	0	0	-3/11	3/11	16/11	1
	Z_j	-273/11	-5	3	23/11	46/22	-9/11	0
	C_j-Z_j		0	0	-23/11	M+(46/22)	M+(9/11)	0

		C_j	-5	3	0	M	M	0
C_B	Temel	X_B	X₁	X₂	X₃	X₄	X₅	X₆
-5	X ₁	15	1	4	0	0	1	0
0	X ₃	24	0	11	1	-1	2	0
0	X ₆	34	0	3	0	0	21/11	1
	Z_j	-75	-5	-20	0	0	-5	0
	C_j-Z_j		0	17	0	M	M+5	0

Tüm $C_j - Z_j \geq 0$ olduğundan optimalite koşulu sağlanmıştır. Optimal çözüm; $X_1^* = 15$, $X_2^* = 0$ ve $Z^* = -75$.

Ödev: Aşağıda verilen DP problemlerini Büyük M yöntemini kullanarak çözünüz.

a)

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$$

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1^* = 3/5, \quad X_2^* = 6/5, \quad Z^* = 18/5.$$

b)

$$\text{Maks } Z = 3X_1 + X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 3$$

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 + X_2 = 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1^* = 1, \quad X_2^* = 2, \quad Z^* = 5.$$

c)

$$\text{Min } Z = 4X_1 + 4X_2 + X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 3$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1^* = 0, \quad X_2^* = 0, \quad X_3^* = 1, \quad Z^* = 1.$$

d)

$$\text{Min } Z = 600X_1 + 500X_2$$

$$2X_1 + X_2 \geq 80$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1^* = 100/3, \quad X_2^* = 40/3, \quad Z^* = 80000/3.$$