İST265-MATEMATİKSEL İSTATİSTİK
UYGULAMA 5

1. X ve Y bağımsız sürekli raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & ö.d. \end{cases} \qquad\qquad f(y)=\begin{cases} \dfrac{e^{-y/3}}{3}, & y>0 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

$Z=X+\dfrac{Y}{2}$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

X ve Y **bağımsız** sürekli raslantı değişkenleri olduğuna göre bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=f(x)f(y)$$

$$f(x,y)=e^{-x}\frac{1}{3}e^{-y/3}, \quad x>0, y>0$$
$$=0, \qquad ö.d.$$

şeklinde elde edilir. $Z=X+\dfrac{Y}{2}$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dağılım Fonksiyonu Yöntemi*nden yararlanılsın. Z raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

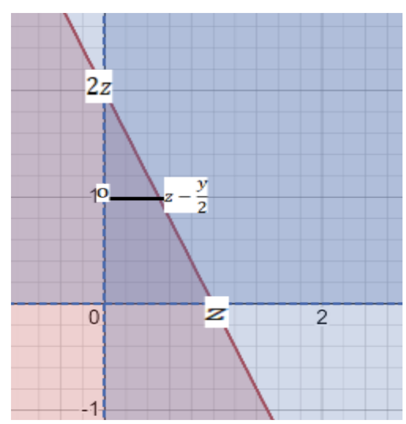
$$G(z)=P\left(Z\le z\right)=P\left(X+\frac{Y}{2}\le z\right)=P\left(X\le z-\frac{Y}{2}\right)$$

biçimindedir. Burada sınırlara dikkat edilmelidir. $Z=X+\dfrac{Y}{2}$ eşitliğinde, $x=0$ için $Y=2z$, $y=0$ için $X=z$ olacaktır. Buradan $G(Z)$,

$$G(z)=P\left(X\le z-\frac{Y}{2}\right)=\int_0^{2z}\int_0^{z-\frac{y}{2}} e^{-x}\frac{1}{3}e^{-y/3}dxdy=\frac{1}{3}\int_0^{2z} e^{-y/3}\left[-e^{-x}\right]_0^{z-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2z} e^{-\frac{y}{3}}\left(1-e^{\frac{y}{2}-z}\right)dy=\frac{1}{3}\left(-3e^{-\frac{y}{3}}-6e^{\frac{y}{6}}e^{-z}\Big|_0^{2z}\right)$$

$$=1-3e^{-\frac{2z}{3}}+2e^{-z}$$



şeklinde elde edilir. Buradan olasılık yoğunluk fonksiyonu $g(z)=\dfrac{dG(z)}{dz}$,

$$g(z)=\frac{d\left(1-3e^{-\frac{2z}{3}}+2e^{-z}\right)}{dz}=\begin{cases}2e^{-\frac{2z}{3}}-2e^{-z}, & z>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$ biçiminde elde edilir.

2. X ve Y sürekli raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2(x+y)}, & x,y>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

$Z=X-Y$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

$Z=X-Y$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dağılım Fonksiyonu Yöntem*inden yararlanılsın. Z raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$G(z)=P\left(Z\le z\right)=P\left(X-Y\le z\right)=P\left(X\le z+Y\right)$ şeklinde elde edilir. Burada $Z=X-Y$ raslantı değişkenin alacağı değerlerle ilgili iki durum söz konusudur.

- <u>Birinci durum($x>y$):</u> X raslantı değişkeninin Y raslantı değişkeninden daha büyük değerler alması ile $z>0$ olacaktır.
- <u>İkinci durum($x<y$):</u> X raslantı değişkeninin Y raslantı değişkeninden daha küçük değerler alması ile $z<0$ olacaktır. İki durum için de sınırlar ve bölgeler farklılık gösterecektir.

O halde $G(z)=P\left(Z\le z\right)=\begin{cases}I.durum, & z>0\\ II.durum, & z<0\end{cases}$ olacak şekilde, $I.durum$, $z>0$,

$$=\int_0^\infty\int_0^z f(x,y)dxdy+\int_0^\infty\int_z^{y+z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^z 4e^{-2x}e^{-2y}dxdy+\int_0^\infty\int_z^{y+z} 4e^{-2x}e^{-2y}dxdy$$

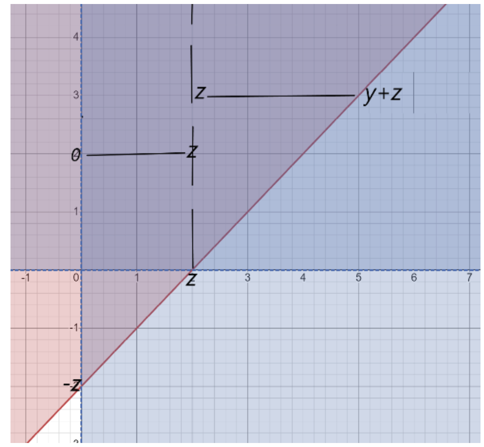
$$=\int_0^\infty e^{-2y}\left[4\frac{e^{-2x}}{-2}\right]\Bigg|_0^z dy+\int_0^\infty e^{-2y}\left[4\frac{e^{-2x}}{-2}\right]\Bigg|_z^{2z} dy$$

$$=\int_0^\infty e^{-2y}\left[2-2e^{-2z}\right]dy+\int_0^\infty e^{-2y}\left[2e^{-2z}-2e^{-2y-2z}\right]dy$$

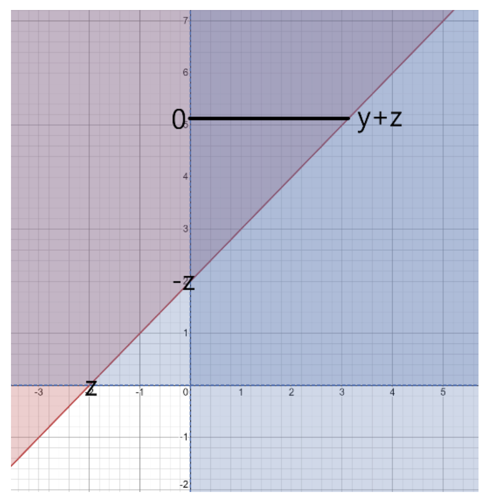
$$=\left[2\frac{e^{-2y}}{-2}-2\frac{e^{-2y}e^{-2z}}{-2}\right]\Bigg|_0^\infty+\left[2\frac{e^{-2y}e^{-2z}}{-2}-2\frac{e^{-4y}e^{-2z}}{-4}\right]\Bigg|_0^\infty$$

$$=1-e^{-2z}+\frac{1}{2}e^{-2z}$$

$$=1-\frac{1}{2}e^{-2z} \qquad \Rightarrow \frac{dG(z)}{dz}=\frac{-1}{2}(-2)e^{-2z}=e^{-2z}, \quad z>0$$



şeklindedir. $II.durum$, $z<0$,



$$=\int_{-z}^\infty\int_0^{y+z} 4e^{-2x-2y}dxdy=4\int_{-z}^\infty e^{-2y}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]\Bigg|_0^{y+z}$$

$$=2\int_{-z}^\infty\left(e^{-2y}-e^{-4y-2z}\right)dy=2\left(\frac{e^{-2y}}{-2}+\frac{1}{4}e^{-4y}e^{-2z}\right)\Bigg|_{-z}^\infty$$

$$=\frac{1}{2}e^{2z} \qquad \Rightarrow \frac{dG(z)}{dz}=2\frac{1}{2}e^{2z}=e^{2z}, \quad z<0$$

şeklindedir. O halde Z raslantı değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$G(z)=P\left(Z\le z\right)=\begin{cases}1, & z\to\infty\\ 1-\frac{1}{2}e^{-2z}, & z>0\\ \frac{1}{2}e^{2z}, & z<0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

biçiminde elde edilir. Buradan olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(z)=\begin{cases} e^{-2z}, & z>0 \\ e^{2z}, & z<0 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$ şeklinde olacaktır.

3. X_1 ve X_2 bağımsız sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

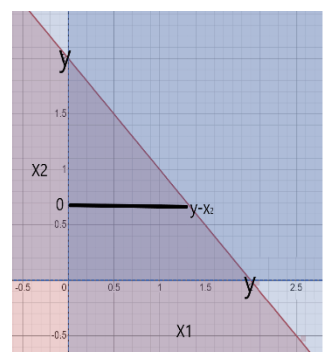
$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}e^{-\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}, & x_1,x_2>0 \\ 0, & ö.d. \end{cases}$$

$Y=X_1+X_2$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

__**Çözüm:**__

$Y=X_1+X_2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dağılım Fonksiyonu Yöntemi*nden yararlanılsın. Y raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$G(y)=P\left(Y\le y\right)=P\left(X_1+X_2\le y\right)=P\left(X_1\le y-X_2\right)$ şeklinde elde edilir. Buradan $G(y)$,



$$G(y)=P(Y\le y)=\int_0^y\int_0^{y-x_2}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}e^{-\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}dx_1dx_2$$

$$=\int_0^y\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}e^{-\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\left[-\lambda_1 e^{-\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)}\right]\Bigg|_0^{y-x_2}dx_2=\int_0^y\frac{1}{\lambda_2}e^{-\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\left[1-e^{-\left(\frac{y-x_2}{\lambda_1}\right)}\right]dx_2$$

$$=\int_0^y\left[\frac{1}{\lambda_2}\underbrace{e^{-\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}.-e^{-\left(\frac{y-x_2}{\lambda_1}\right)}}_{-\frac{x_2\lambda_1-\lambda_2y+x_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}}+\frac{1}{\lambda_2}e^{-\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\right]dx_2=\left[\frac{1}{\lambda_2}.\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\frac{x_2\lambda_1-\lambda_2y+x_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}}-e^{-\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\right]_0^y$$

$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\frac{y}{\lambda_2}}-e^{-\frac{y}{\lambda_2}}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\frac{y}{\lambda_1}}-1\right)$$

$$=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\frac{y}{\lambda_2}}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\frac{y}{\lambda_1}}+1,\ y>0$$

$$G(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\frac{y}{\lambda_2}}-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\frac{y}{\lambda_1}}+1, & y>0\\ 1, & y\to\infty\end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $g(y)$ ise, $g(y)=\dfrac{dG(y)}{dy}$,

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\frac{y}{\lambda_1}}-e^{-\frac{y}{\lambda_2}}\right), & y>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

biçimindedir.

4. X ve Y , $U(0,1)$ dağılımına sahip bağımsız sürekli raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Z=X+Y$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

<u>**Çözüm:**</u> X ve Y , $U(0,1)$ dağılımına sahip sürekli raslantı değişkenleri olduğuna göre olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & ö.d\end{cases}\qquad\qquad f(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & ö.d\end{cases}$$

biçimindedir. Bu raslantı değişkenlerin bağımsız olduğu soruda belirtilmiştir. O halde $f(x,y)=f(x)f(y)$,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & ö.d\end{cases}$$

olacaktır. $Z=X+Y$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dağılım Fonksiyonu Yöntem*inden yararlanılsın. Z raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

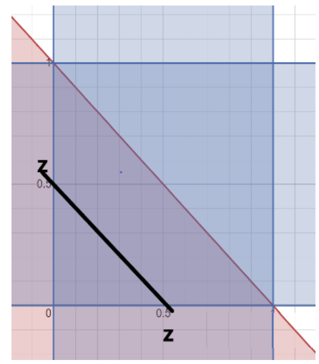
$$G(z)=P\left(Z\le z\right)=P\left(X+Y\le z\right)=P\left(Y\le z-X\right)$$

şeklinde elde edilir. Burada $Z=X+Y$ raslantı değişkenin alacağı değerlerle ilgili iki durum söz konusudur.

- <u>Birinci durum:</u> $0<z<1$
- <u>İkinci durum:</u> $1<z<2$

$I.durum\,,0<z<1\,,$

$$G(z)=P(Z\le z)=\int_0^z\int_0^{z-x}1dydx=\int_0^z\left[y\right]\Big|_0^{z-x}dx=\int_0^z(z-x)dx=zx-\frac{x^2}{2}\Big|_0^z=\frac{z^2}{2},0<z<1$$



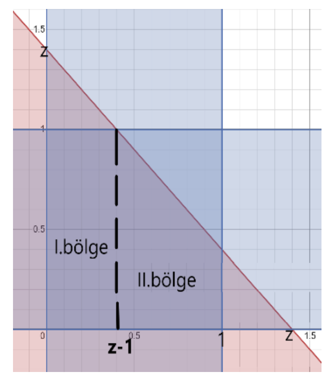
$II.durum\,,1<z<2\,,$

$$G(z)=\int_0^{z-1}\int_0^1 1dydx+\int_{z-1}^1\int_0^{z-x}1dydx$$

$$=\int_0^{z-1}y\Big|_0^1dx+\int_{z-1}^1 y\Big|_0^{z-x}dx$$

$$=(z-1)+\int_{z-1}^1(z-x)dx=(z-1)+\left(zx-\frac{x^2}{2}\Big|_{z-1}^1\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(2-z\right)^2,\ 1<z<2$$



$$G(z)=P(Z\le z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0<z<1\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(2-z\right)^2, & 1<z<2\\ 1, & z\to\infty\end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $g(z)=\dfrac{dG(z)}{dz}$,

$$g(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ \left(2-z\right), & 1<z<2\\ 0, & ö.d\end{cases}$$

olacaktır.

5. X_1 ve X_2 bağımsız sürekli raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}6e^{-3x_1-2x_2}, & x_1,x_2>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

$Y=X_1+X_2$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

$Y=X_1+X_2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dağılım Fonksiyonu Yöntemi*nden yararlanılsın. Y raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$G(y)=P(Y\le y)=P(X_1+X_2\le y)=\int_0^{y}\int_0^{y-x_2}6e^{-3x_1-2x_2}\,dx_1dx_2$$

$$=\int_0^{y}6e^{-2x_2}\left(\frac{-1}{3}e^{-3x_1}\right)\Bigg|_0^{y-x_2}=\int_0^{y}2\left(e^{-2x_2}-e^{-3y}e^{x_2}\right)dx_2$$

$$=\left[e^{-2x_2}-2e^{-3y}e^{x_2}\right]\Big|_0^{y}$$

$$=1-3e^{-2y}+2e^{-3y},\ \ y>0$$

$$G(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-3e^{-2y}+2e^{-3y}, & y>0\\ 1, & y\to\infty\end{cases}$$ biçiminde elde edilir. Buradan $g(y)=\dfrac{dG(y)}{dy}$,

$$g(y)=\begin{cases}6e^{-2y}-6e^{-3y}, & y>0\\ 0, & ö.d\end{cases}$$

olacaktır.

6. X_1 ve X_2 bağımsız sürekli raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{x_i^{\,2}}, & x_i \geq 1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

$i=1,2$ olmak üzere, $Y_1 = X_1X_2$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

<u>**Çözüm:**</u>

$Y_1 = X_1X_2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dönüşüm Yöntemi*nden yararlanılsın. İlk olarak X_1 ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları elde edilsin. $Y_1 = X_1X_2$ olduğuna göre dönüşüm yönteminden yararlanabilmek için yeni bir raslantı değişkeni $Y_2 = X_2$ olarak tanımlansın. Buradan ters dönüşüm fonksiyonları, $x_1 = y_1/y_2$ ve $x_2 = y_2$ olacaktır. Jakobien matrisi ve bu matrisin determinantının mutlak değeri,

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{y_2} & -\dfrac{y_1}{y_2^{\,2}}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \; ve \; \left|\det J\right| = \frac{1}{y_2}$$

olarak bulunur. Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$g(y_1,y_2)= f\left(h_1\left(y_1,y_2\right),h_2\left(y_1,y_2\right)\right)\left|\det J\right|$$

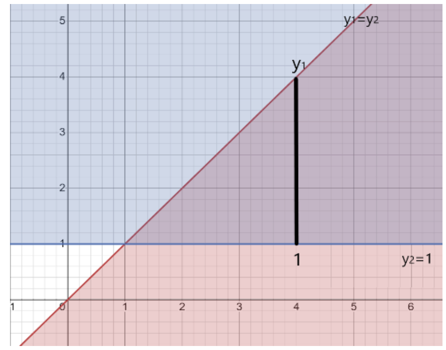
biçiminde elde edildiği biliniyor. Ters dönüşüm fonksiyonları ve $\left|\det J\right|$ yukarıda bulunmuştu. $g(y_1,y_2)$'nin hesaplanabilmesi için X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonuna ihtiyaç vardır. Bu raslantı değişkenlerinin bağımsız oldukları bilindiğine göre, $f(x_1,x_2)$

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{x_1^{\,2}x_2^{\,2}}, & x_1,x_2 \geq 1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $g(y_1,y_2)$,

$$g(y_1,y_2)= \underbrace{\frac{1}{y_2^{\,2}}\frac{1}{\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^2}}_{f\left(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)\right)} \underbrace{\frac{1}{y_2}}_{\left|\det J\right|}, \quad \underbrace{y_2 \geq 1}_{x_2\geq 1}, \underbrace{\frac{y_1}{y_2} \geq 1}_{x_1 \geq 1}$$ düzenlenirse,

$$g(y_1,y_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{y_2{y_1}^2}, & y_2\geq 1, y_1\geq y_2\\ 0, & ö.d\end{cases}$$



olacaktır. Y_1 raslantı değişkenin marjinal olasılık fonksiyonu, $g(y_1)$,

$$g(y_1)=\int_1^{y_1}\frac{1}{y_2{y_1}^2}\,dy_2=\frac{1}{{y_1}^2}\left[\ln y_2\right]\Big|_1^{y_1}=\begin{cases}\dfrac{\ln y_1}{{y_1}^2}, & y_1>1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

7. X_1 ve X_2 bağımsız sürekli raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}e^{-x_1-x_2}, & x_1,x_2>0\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

$Y_1=X_1+X_2$ ve $Y_2=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkenleri olsun. Buna göre,

a. $g(y_1,y_2)$ bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b. $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$Y_1=X_1+X_2$ ve $Y_2=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dönüşüm Yöntem*inden yararlanılsın. X_1 ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları, $x_1=y_1y_2$ ve $x_2=y_1-y_1y_2$ olacaktır.

Jakobien matrisi ve bu matrisin determinantının mutlak değeri,

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}y_2 & y_1\\ 1-y_2 & -y_1\end{bmatrix} \; ve \; |\det J|=y_1$$

olarak bulunur. Y_1 ve Y_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$g(y_1,y_2)=\underbrace{e^{-y_1y_2-y_1+y_1y_2}\quad y_1}_{f\left(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)\right)\,|\det J|}\;,\quad y_1>0, 0<y_2<1$$ düzenlenirse,

$$g(y_1,y_2)=\begin{cases}y_1e^{-y_1}, & y_1>0, 0<y_2<1\\ 0, & ö.d\end{cases}$$ olarak elde edilir.

b. $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(y_2)=\int_0^{\infty} y_1 e^{-y_1} dy_1=\Gamma(2)=\begin{cases}1, & 0<y_2<1\\ 0, & ö.d.\end{cases} \quad \Rightarrow Y_2 \sim U(0,1)$$

şeklinde elde edilir.

8. X_1 ve X_2 sürekli raslantı değişkenleri $Gamma(n,\lambda)$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Y_1=X_1+X_2$ ve $Y_2=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ ise,

- **a.** $g(y_1,y_2)$ bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
- **b.** $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$Y_1=X_1+X_2$ ve $Y_2=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dönüşüm Yöntem*inden yararlanılsın. X_1 ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları, $x_1=y_1y_2$ ve $x_2=y_1-y_1y_2$ olacaktır.

Jakobien matrisi ve bu matrisin determinantının mutlak değeri,

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix} y_2 & y_1\\ 1-y_2 & -y_1\end{bmatrix} \; ve \; \left|\det J\right|=y_1$$

olarak bulunur. $g(y_1,y_2)$'nin hesaplanabilmesi için X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonuna ihtiyaç vardır. $X_i \sim Gamma(n,\lambda)$ $i=1,2$ aynı dağılımlı raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının $f(x_i)=\dfrac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}x_i^{\,n-1}e^{-x_i/\lambda},\; x_i>0,\; i=1,2$ biçiminde olduğu biliniyor. Bu raslantı değişkenlerinin bağımsız oldukları da bilindiğine göre, $f(x_1,x_2)$,

$f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\left(\Gamma(n)\right)^2\lambda^{2n}}\left(x_1x_2\right)^{n-1}e^{-(x_1+x_2)/\lambda},\; x_1>0,\; x_2>0$ olacaktır. O halde $g(y_1,y_2)$,

$$g(y_1,y_2)=\underbrace{\frac{1}{(\Gamma(n))^2\lambda^{2n}}\left(\underbrace{y_1y_2}_{x_1}.\underbrace{y_1(1-y_2)}_{x_2}\right)^{n-1}e^{-y_1/\lambda}}_{f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))}\underbrace{y_1}_{|\det J|},\quad y_1>0, 0<y_2<1 \text{ düzenlenirse,}$$

$$g(y_1,y_2)=\frac{1}{(\Gamma(n))^2\lambda^{2n}}\left(y_1^2\left(y_2-y_2^2\right)\right)^{n-1}y_1e^{-y_1/\lambda},\quad y_1>0, 0<y_2<1 \text{ şeklinde elde edilir.}$$

b. $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(y_2)=\int_0^\infty g(y_1,y_2)\,dy_1=\frac{(y_2(1-y_2))^{n-1}}{(\Gamma(n))^2\lambda^{2n}}\int_0^\infty\left(y_1^2\right)^{n-1}y_1e^{-y_1/\lambda}dy_1=\frac{(y_2(1-y_2))^{n-1}}{(\Gamma(n))^2\lambda^{2n}}\int_0^\infty y_1^{2n-1}e^{-y_1/\lambda}dy_1 \text{'dir.}$$

Burada integralin çözümü için değişken değiştirme yöntemi kullanılsın ve $u=\frac{y_1}{\lambda}$ olsun. Diferansiyelleri $du=\frac{1}{\lambda}dy_1$ olacaktır. $\int_0^\infty y_1^{2n-1}e^{-y_1/\lambda}dy_1$ integrali,(sınırlar yine aynı olacaktır),

$$\int_0^\infty (u\lambda)^{2n-1}e^{-u}\lambda du=\lambda^{2n}\underbrace{\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u}du}_{\Gamma(2n)}=\lambda^{2n}\Gamma(2n)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre $g(y_2)$,

$$g(y_2)=\frac{(y_2(1-y_2))^{n-1}}{(\Gamma(n))^2\lambda^{2n}}\lambda^{2n}\Gamma(2n)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)}y_2^{n-1}(1-y_2)^{n-1}, & 0<y_2<1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

olarak elde edilir. $Y_2\sim Beta(\alpha=n,\beta=n)$ dağılımına sahip raslantı değişkenidir.

<u>Hatırlatma:</u> $X\sim Beta(\alpha,\beta)$ dağılımına sahip bir raslantı değişkeni olsun. X raslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

biçimindedir.

9. X_1 ve X_2 standart normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}$ ise,

a. $g(y_1, y_2)$ bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b. $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

$Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dönüşüm Yöntemi*nden yararlanılsın. X_1 ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları, $x_1 = \dfrac{y_1 y_2}{1+y_2}$ ve $x_2 = \dfrac{y_1}{1+y_2}$ olacaktır.

Jakobien matrisi ve bu matrisin determinantının mutlak değeri,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{y_2}{1+y_2} & \dfrac{y_1}{(1+y_2)^2} \\ \dfrac{1}{1+y_2} & -\dfrac{y_1}{(1+y_2)^2} \end{bmatrix} \quad ve \quad |\det J| = \frac{y_1}{(1+y_2)^2}$$

olarak bulunur. $g(y_1, y_2)$'nin hesaplanabilmesi için X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonuna ihtiyaç vardır. $X_i \sim N(0,1)$ $i = 1,2$ aynı dağılımlı raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının $f(x_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2/2}$, $-\infty < x_i < +\infty$, $i = 1,2$ biçiminde olduğu biliniyor. Bu raslantı değişkenlerinin bağımsız oldukları da bilindiğine göre, $f(x_1, x_2)$,

$f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\left(x_1^2 + x_2^2\right)/2}$, $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$ olacaktır. O halde $g(y_1, y_2)$,

$$g(y_1, y_2) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2 y_2^2}{(1+y_2)^2} + \frac{y_1^2}{(1+y_2)^2}\right)}}_{f\left(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\right)} \underbrace{\frac{y_1}{(1+y_2)^2}}_{|\det J|}, \quad -\infty < y_1 < +\infty, -\infty < y_2 < +\infty, y_2 \neq -1$$ düzenlenirse,

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right)} \dfrac{y_1}{(1+y_2)^2}, & -\infty < y_1 < +\infty, -\infty < y_2 < +\infty, y_2 \neq -1 \\ 0, & ö.d \end{cases}$$ olacaktır.

b. $g(y_2)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(y_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right)}\frac{y_1}{(1+y_2)^2}dy_1 \quad \text{'dir.}$$

Burada integralin çözümü için değişken değiştirme yöntemi kullanılsın ve $u=\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right)$ olsun. Diferansiyelleri $du=\frac{1}{2}2y_1\left(\frac{(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2}\right)dy_1 \Rightarrow \frac{du}{(1+y_2^2)}=\frac{y_1dy_1}{(1+y_2)^2}$ olacaktır. İntegral tekrar düzenlenirse,(sınırlara dikkat edilirse, y_1 'in karesel olması sebebiyle $-\infty$'dan 0'a kadar olan sınırı ile 0' dan ∞ 'a kadar olan sınırında u nun sınırları 0' dan ∞ 'a kadar olacaktır. Bu yüzden de 2 ile çarpılmıştır.),

$$=2\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-u}\frac{du}{(1+y_2^2)}=\frac{1}{\pi(1+y_2^2)}\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-u}du}_{-e^{-u}\big|_0^{\infty}=1}=\frac{1}{\pi(1+y_2^2)}$$

$$g(y_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(1+y_2^2)}, & -\infty<y_2<\infty\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

şeklinde elde edilir. $Y_2\sim Cauchy(\alpha=0,\beta=1)$ (standart cauchy) dağılımına sahip raslantı değişkenidir.

<u>Hatırlatma:</u> $X\sim Cauchy(\alpha,\beta)$ dağılımına sahip bir raslantı değişkeni olsun. X raslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\beta\left[1+\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}, & -\infty<x<+\infty\\ 0, & ö.d.\end{cases}$$

biçimindedir.

10. X_1 ve X_2, $Uniform(1,\beta)$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Y_1 = X_1 X_2$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu dönüşüm yöntemiyle bulunuz.

Çözüm:

$Y_1 = X_1 X_2$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için *Dönüşüm Yöntem*inden yararlanılsın. İlk olarak X_1 ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları elde edilsin. $Y_1 = X_1 X_2$ olduğuna göre dönüşüm yönteminden yararlanabilmek için yeni bir raslantı değişkeni $Y_2 = X_2$ olarak tanımlansın. X_1 ve X_2'nin ters dönüşüm fonksiyonları, $x_1 = y_1 / y_2$ ve $x_2 = y_2$ olacaktır.

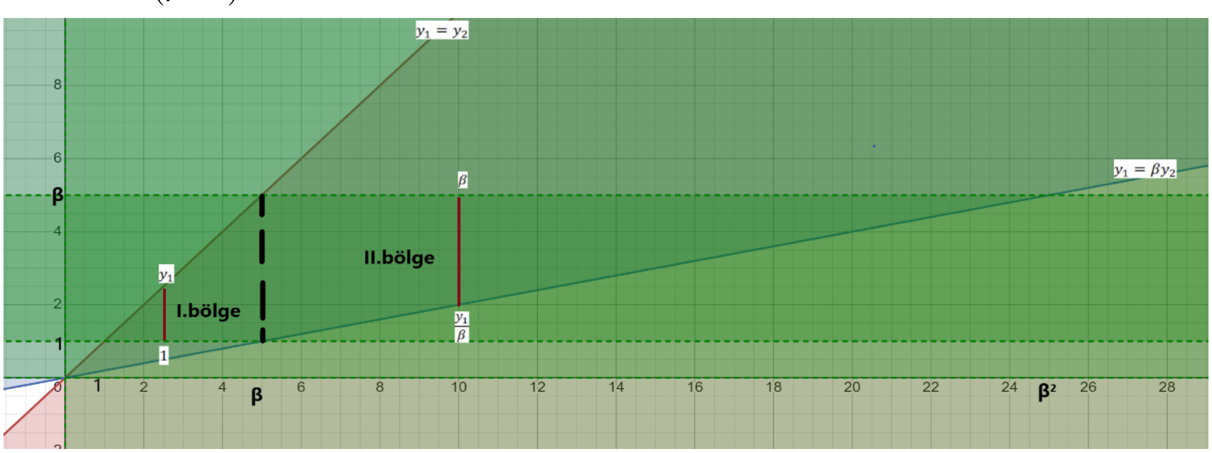
Jakobien matrisi ve bu matrisin determinantının mutlak değeri,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y_2} & \dfrac{-y_1}{y_2^{\,2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ve \quad \left|\det J\right| = \frac{1}{y_2}$$

olarak bulunur. $g(y_1, y_2)$'nin hesaplanabilmesi için X_1 ve X_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonuna ihtiyaç vardır. $X_i \sim Uniform(1,\beta)$ $i = 1,2$ aynı dağılımlı raslantı değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının $f(x_i) = \dfrac{1}{\beta - 1},\ 1 < x_i < \beta,\ i = 1,2$ biçiminde olduğu biliniyor. Bu raslantı değişkenlerinin bağımsız oldukları da bilindiğine göre, $f(x_1, x_2)$,

$f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{(\beta - 1)^2},\ 1 < x_i < \beta,$ olacaktır. O halde $g(y_1, y_2)$,

$g(y_1, y_2) = \dfrac{1}{(\beta - 1)^2} \dfrac{1}{y_2},\ 1 < y_2 < \beta,\ y_2 < y_1 < \beta y_2$ şeklinde elde edilir.



$g(y_1)$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(y_1)=\begin{cases}\int\limits_1^{y_1}\frac{1}{(\beta-1)^2}\frac{1}{y_2}dy_2, & 1<y_1<\beta\\ \int\limits_{\frac{y_1}{\beta}}^{\beta}\frac{1}{(\beta-1)^2}\frac{1}{y_2}dy_2, & \beta<y_1<\beta^2\\ 0, & ö.d\end{cases}$$

düzenlenirse,

$$g(y_1)=\begin{cases}\frac{\ln y_1}{(\beta-1)^2}, & 1<y_1<\beta\\ \frac{2\ln\beta-\ln y_1}{(\beta-1)^2}, & \beta<y_1<\beta^2\\ 0, & ö.d\end{cases}$$

olarak elde edilir.

11. $X_1, X_2, ..., X_n$, sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ parametreleriyle Poisson dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. Bu değişkenlerin toplamının λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olduğunu moment çıkaran fonksiyon yöntemiyle gösteriniz.

Çözüm: X raslantı değişkeni $X \sim P(\lambda)$ dağılımına sahip ise moment çıkaran fonksiyonun,

$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$ olduğu bilinmektedir. Bu değişkenlerin toplamı $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ raslantı değişkeni ile ifade edilsin. Parametreler toplamı ise, $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ olsun. O halde $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ raslantı değişkenin dağılımını bulmak için *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntem*inden yararlanılsın.

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(X_1+X_2+...+X_n)}\right) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_n}(t)$$
$$= e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)}...e^{\lambda_n(e^t-1)}$$
$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)(e^t-1)}$$
$$= e^{\lambda(e^t-1)}$$

Böylece $Y \sim P(\lambda)$ raslantı değişkenin λ parametresiyle Poisson dağıldığı gösterilmiştir.

12. $X_i \sim N(0,1)$ $i = 1,2,3,4$ bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Y = X_1 - X_2 - 2X_3 + X_4$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

Aynı dağılımlı $X_i \sim N(0,1)$ $i = 1,2,3,4$ bağımsız raslantı değişkenleri için moment çıkaran fonksiyonun $M_{X_i}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ olduğu biliniyor. Y raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(X_1-X_2-2X_3+X_4)}\right) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(-t)M_{X_3}(-2t)M_{X_4}(t)$$
$$= e^{\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}}e^{\frac{4t^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}}$$
$$= e^{\frac{7t^2}{2}} \qquad \Rightarrow \mu = 0, \sigma^2 = 7$$

biçiminde elde edilir. Y raslantı değişkenin $Y \sim N(0,7)$ dağılımına sahiptir. Buradan $g(y)$,

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{7}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{7}}, & -\infty < y < +\infty \\ 0, & ö.d \end{cases}$$ olacaktır.

13. $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(1,1)$, $X_3 \sim N(1,9)$ ve $X_4 \sim N(2,4)$ bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3 - X_4$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu moment çıkaran fonksiyon yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(1,1)$, $X_3 \sim N(1,9)$ ve $X_4 \sim N(2,4)$ bağımsız raslantı değişkenleri için moment çıkaran fonksiyonları sırasıyla, $M_{X_1}(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$, $M_{X_2}(t)=e^{t+\frac{t^2}{2}}$, $M_{X_3}(t)=e^{t+\frac{9t^2}{2}}$ ve $M_{X_3}(t)=e^{2t+\frac{4t^2}{2}}$ olduğu biliniyor. Y raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) &= E\left(e^{t(X_1-2X_2+3X_3-X_4)}\right) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(-2t)M_{X_3}(3t)M_{X_4}(-t) \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} e^{-2t+\frac{(-2t)^2}{2}} e^{3t+\frac{9(3t)^2}{2}} e^{2(-t)+\frac{4t^2}{2}} \\
&= e^{45t^2-t} \qquad \Rightarrow \mu=-1, \sigma^2=90
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Y raslantı değişkenin $Y \sim N(-1,90)$ dağılımına sahiptir. Buradan $g(y)$,

$$g(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{90}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y+1)^2}{90}}, & -\infty < y < +\infty \\ 0, & ö.d \end{cases}$$ olacaktır.

14. $X_i, \quad i=1,2,\ldots,k$ bağımsız raslantı değişkenlerine ait moment çıkaran fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$M_{X_i}(t)=\left(c+\frac{7}{8}e^t\right)^{n_i}$$

a. c sabitini bulunuz.

b. $Y=\sum_{i=1}^{k} X_i$ raslantı değişkeninin dağılımını moment çıkaran yönteminden yararlanarak bulunuz.

c. $E(Y)$ beklenen değerini bulunuz.

Çözüm:

a. Herhangi bir X_i raslantı değişkeni için t=0 olması durumunda $M_{X_i}(t=0)=1$ olmalıdır. O halde c, $M_{X_i}(0)=\left(c+\frac{7}{8}e^0\right)^{n_i}=1 \quad \Rightarrow c=\frac{1}{8}$ olarak bulunur.

b. $Y=\sum_{i=1}^{k} X_i$ raslantı değişkeninin dağılımı, *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi*nden yararlanılarak,

$$M_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{t(X_1+X_2+...+X_k)}\right)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_k}(t)$$
$$=\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{n_1}\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{n_2}...\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{n_k}$$
$$=\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^t\right)^{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$Y\sim Binom\left(\sum_{i=1}^{k} n_i,\, p=\frac{1}{8}\right)$ şeklinde elde edilir.

c. $Y\sim Binom\left(\sum_{i=1}^{k} n_i,\, p=\frac{1}{8}\right)$ dağılıma sahip olduğu bilindiğine göre $E(Y)$,

$E(Y)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)}{8}$ olacaktır. (X raslantı değişkeni $X\sim Binom(n,p)$ ise $E(X)=np$ 'dir)

15. $X\sim NegatifBinom(k,p)$ ve $Y\sim NegatifBinom(m,p)$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Z=X+Y$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkenin dağılımını bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $Z=X+Y$ biçiminde tanımlanan raslantı değişkenin dağılımını bulmak için *Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi*nden yararlanılsın. $X\sim NegatifBinom(k,p)$ ise moment çıkaran fonksiyonun, $M_X(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k$, $Y\sim NegatifBinom(m,p)$ ise moment çıkaran fonksiyonun,

$M_Y(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^m$ olduğu biliniyor. $Z=X+Y$ raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_Z(t)=E\left(e^{tZ}\right)=E\left(e^{t(X+Y)}\right)=M_X(t)M_Y(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^m$$
$$=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{m+k}$$

biçiminde elde edilir. Z raslantı değişkenin dağılımı, $Z\sim NegatifBinom(k+m,p)$ olacaktır.

16. $X_1, X_2, ..., X_n$ sırasıyla $(r_1,\lambda),(r_2,\lambda),...,(r_n,\lambda)$ parametreleriyle $Gamma(r_i,\lambda)$ dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri olarak verilsin. $Y=\sum_{i=1}^{k} X_i$ raslantı değişkeninin dağılımını moment çıkaran yönteminden yararlanarak bulunuz.

<u>**Çözüm:**</u> $X_i \sim Gamma(r_i,\lambda)$ ise $M_{X_i}(t)=(1-\lambda t)^{-r_i}$'dir. $Y=\sum_{i=1}^{k} X_i$ raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
M_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{t(X_1+X_2+...+X_n)}\right)&=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_n}(t)\\
&=(1-\lambda t)^{-r_1}(1-\lambda t)^{-r_2}...(1-\lambda t)^{-r_n}\\
&=(1-\lambda t)^{-\sum_{i=1}^{n} r_i}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. Y raslantı değişkenin dağılımı, $Y \sim Gamma(\sum_{i=1}^{n} r_i,\lambda)$ olacaktır.