

SORULAR:

1) Aşağıda verilen matrislerin simetrik, ters-simetrik olup olmadıklarına karar veriniz.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ simetrik'tir. Çünkü $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = A$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -3 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \neq B \Rightarrow \text{simetrik değil}$
 $\neq -B \Rightarrow \text{ters-sim değil}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -C \Rightarrow \text{ters simetrik} \checkmark$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

A^2 , $A \cdot B$, $A - B$, $3B$, $A + B$ ve $A^2 - B^2$ 'yi hesaplayınız.

A ve B birer köşegen matris olduklarından işlemler sadece köşegendeki elemanları iâm yapılır. Yani;

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ olur.



$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1) \cdot (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot (-3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad 3B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^2 - B^2$ her zaman $(A - B) \cdot (A + B)$ olması gerekmez. Çünkü matrislerde değişme özelliği yoktur ($AB \neq BA$). Fakat burada matrisler köşge matris olduklarından, eşitlik sağlanır.

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad (A - B) \cdot (A + B) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

= olur.

③ $\begin{bmatrix} x+y-1 & -1 & 1 \\ 1 & y+z-2 & -1 \\ -1 & 1 & z+x-3 \end{bmatrix}$ matrisinin ters simetrik olması için x, y, z ne olmalıdır?

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z-2=0 \\ z+x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x+y+z)=6 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

$$\boxed{z=2}, \boxed{x=1}, \boxed{y=0}$$

olur.



g.s.s

4) A simetrik, B ters-simetrik matrisler olsun. $A+B$ simetrik ise B'nin sıfır matrisi olduğunu gösteriniz.

$$A \text{ simetrik} \Rightarrow A = A^T$$

$$B \text{ ters-simetrik} \Rightarrow B = -B^T$$

$$(A+B) \text{ simetrik} \Rightarrow (A+B) = (A+B)^T$$

$$\begin{aligned} (A+B) &= (A+B)^T = \underbrace{A^T}_A + \underbrace{B^T}_{-B} = A - B \Rightarrow \cancel{A+B} = \cancel{A-B} \\ &\Rightarrow 2B = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{B=0} \text{ olur.} \end{aligned}$$

5) A $n \times n$ simetrik, B $n \times n$ ters simetrik olsun. $A+B=0$ ise $A=0$ ve $B=0$ olduğunu gösteriniz.

$$A \text{ simetrik} \Rightarrow A = A^T$$

$$B \text{ ters-simetrik} \Rightarrow B = -B^T$$

$$A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=-B}$$

$$\begin{aligned} \text{Transpoz} \\ \text{geç} \Rightarrow A^T &= -B^T \\ \parallel &\quad \parallel \\ A &\quad B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A=B}$$

$$A=B=-B \Rightarrow \boxed{A=B=0}$$



6) Aşağıdaki matrislerin eselon, satır indirgenmiş eselon olup olmadıklarına karar veriniz.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi eselon değildir. s. i. e. değildir.

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi eselon olup, s. i. e. değildir.

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ s. i. e. matristir.

_____ 0 _____