Bölüm 6

Serilerle Çözüm

4. Bölümde, mesela sabit karsayılı denklemler gibi bazı yüksek basamaktan denklemlerin, bilinen elemanter fonksiyonların sonlu bir bileşimi olarak ifade edilebilen çözümlere sahip olduklarını gördük. Oysa, iki ya da daha yüksek basamaktan diferansiyel denklemlerin bilinen fonksiyonlar cinsinden çözümleri genellikle yoktur. Bu yüzden böyle denklemlerin çözümlerini ifade etmek için başka gereçler bulmalıyız. Bu gereçlerden birini, sonsuz seri temsilleri temin eder ve bu bölüm, seri şeklindeki çözümlerin bulunmasına tahsis edilmiştir.

6.1 Adî Nokta Civarinda Seri Çözüm

A. Temel Kavramlar ve Souçlar

İkinci basamaktan

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \tag{6.1}$$

lineer diferansiyel denklemini gözönüne alalım ve bu denklemin bilinen fonksiyonların sonlu lineer bileşimi olarak yazılabilen hiçbir çözümü olmadığını kabul edelim. Fakat sonsuz seri şeklinde yazılabilen çözümleri bulunsun. Daha açık olarak $c_0, c_1, \ldots$'lar sabitler olmak üzere

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{6.2}$$

şeklinde yazılabilen bir çözümün var oluğunu kabul edelim. (6.2)'deki ifadeye, $x - x_0$ cinsinden bir *kuvvet serisi* denir. Bölece (6.1) diferansiyel denkleminin (6,2) şeklinde ifade edilebilen bir *kuvvet serisi çözüm*'e sahip olduğunu varsayıyoruz. Varsayımın geçerli olması halinde, (6.2)'-deki seri (6.1) denkleminin gerçekten çözümü olacak şekilde (6.2)'deki $c_0, c_1, \ldots$ katsayılarını hesaplamaya başlayabiliriz.

Ancak acaba bu varsayım hangi şartlar altında geçerlidir? Yani (6.1) denklemi hangi şartlar altında (6.2)'deki gibi bir çözüme *sahip olur?* Bu çok önemli bir sorudur. Çünkü bu şekilde bir çözüm mevcut değilse, onu bulmağa çalışmak çok abes olacaktır. (6.2) şeklinde bir çözümün varlığı hakkındaki bu önemli soruyu cevaplamağa başlamadan önce bazı temel kavramlar tanıtalım. Bu amaçla (6.1) denklemini

$$P_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad \text{ve} \quad P_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

olmak üzere, yukarıdakine eşdeğer

denklemin normalize hali.

$|x|<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \tag{6.3}$$

$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$

biçiminde yazalım.

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

TANIM. Bir fonksiyonun, bir x_0 noktası civarındaki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x)$$

Taylor serisi, mevcut ve x_0'ı içine alan bir açık aralıktaki her x için $f(x)$'e yakınsaksa, f fonksiyonuna x_0'da *analitik*'tir denir.

$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2}$

Buradan polinom şeklindeki bütün fonksiyonların her yerde analitik olacaklarını, değerleri e^x, $\sin x$, $\cos x$ olan fonksiyonların da aynı özelliği paylaşacağını anlıyoruz. Rasyonel fonksiyonlar paydalarının sıfır olduğu x değerleri dışında analitiktir. Mesela $\frac{1}{x^2-3x+2}$ ile tanımlı rasyonel fonksiyon, $x = 1$ ve $x = 2$ dışında analitiktir.

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

TANIM. (6.3) normalize edilmiş eşdeğer formdaki $P_1(x)$, $P_2(x)$ fonksiyonlarının ikisi birden x_0 noktasında analitik ise, x_0'a (6.1) denkleminin bir *alelade nokta*'sı denir. Bu iki fonksiyondan en az biri x_0'da analitik *değil* ise, bu noktaya (6.1)'in bir *tekil nokta*'sı denir.

Örnek 6.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0 \qquad (6.4)$$

diferansiyel denkleminde $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2+2$'dir. Bu iki fonksiyon da polinom olduğundan, her yerde analitiktirler. Böylece her nokta bu denklemin alelade noktasıdır.

Örnek 6.2.

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0 \qquad (6.5)$$

diferansiyel denklemi (6.3)'deki gibi normalleştirilmiş değildir. Önce onu normalleştirerek

P_1 $\qquad$ P_2 $\qquad$ → normalize hal.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{x=1}\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{1}{x(x-1)}}_{x=0,\ x=1}y = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde $P_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $P_2(x) = \frac{1}{x(x-1)}$'dir. Bu iki fonksiyon da P_1 fonksiyonu $x = 1$ dışında, P_2 fonksiyonu da $x = 0,\ 1$ dışında her yerde analitiktir. Böylece $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları verilen diferansiyel denklemin tekil noktaları ve bunların dışındaki her nokta da alelade noktası olur. P_1 fonksiyonu $x = 0$ noktasında analitik olduğu halde bu noktanın denklem için bir tekil nokta oluşuna dikkat ediniz.

Artık şimdi (6.2) yapısında kuvvet serisi çözümlerinin ne zaman var olacaklarını söyleyen teoremi verebilecek duruma geldik.

TEOREM 6.1.

Hipotez. x_0 denklemin bir alelade noktasıdır. (P_1 ve P_2, x_0'da analitik)

Hüküm. (6.1) diferansiyel denkleminin

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \qquad (6.2)$$

yapısında iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır ve bu kuvvet serileri x_0 civarındaki bir $|x-x_0| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için yakınsarlar.

Denklem 2. basamaktan

Bu teorem (6.1) denkleminin kuvvet serisi şeklinde bir çözüme sahip olması için yeter şartı vermektedir. Bu teoreme göre x_0 diferansiyel denklemin bir alelade noktası ise bu denklem, $x - x_0$'ın kuvvetleri cinsinden *iki tane* seri çözüme sahiptir ve bu kuvvet serisi çözümler *lineer bağımsız*'dır. Böylece, x_0 noktası diferansiyel denklemin bir alelade noktası ise bu denklemin *genel çözüm*'ü, bu iki kuvvet serisinin lineer bileşimi olarak yazılabilir. Bu önemli teoremin ispatı bu kitabın çerçevesi dışında kalıyor.

$P_1 = x, \quad P_2 = x^2+2$

Örnek 6.3. Örnek 6.1'de bütün noktaların $(\mathbb{R})$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0 \tag{6.4}$$

diferansiyel denkleminin alelade noktası olduğunu görmüştük. Buna göre (6.4) diferansiyel denkleminin her x_0 civarında

$$c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \tag{6.2}$$

yapısında iki tane sıfırdan farklı. lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır.

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$$

Örnek 6.4. Örnek 6.2'de $x = 0, \;\; 1$ noktalarının (6.5) diferansiyel denkleminin yegane tekil noktaları olduğunu görmüştük. Buna göre (6.5) diferansiyel denkleminin her $x_0 \neq 0, 1$ noktası civarında iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır. Mesela $x = 2$ alelade noktası civarında diferansiyel denklemin

$$c_0 + c_1(x-2) + c_2(x-2)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-2)^n$$

şeklinde iki tane sıfırdan farklı, lineer bağımsız kuvvet serisi çözümü vardır. Ancak $x = 0$ tekil noktası civarında

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

ve $x = 1$ tekil noktası civarında

$$c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$$

şeklindeki çözümlerin varlığı konusunda hiç bir garantimiz *yoktur*.

A. Çözüm Yöntemi

normalize form

Şimdi belli şartlar altında (6.1) denkleminin (6.2) yapısında kuvvet serisi çözümlerine sahip olduğu garanti edildikten sonra, bu çözümleri bizzat bulmak için nasıl hareket edilecek? Başka bir deyişle $c_0, c_1, \ldots$ katsayıları,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{6.2}$$

serisi (6.1) diferansiyel denkleminin bir çözümü olacak şekilde nasıl belirlenecek? Önce bu katsayıların bulunması için izlenecek yolu kısaca anlatacağız ve sonra durumu çeşitli örnekler üzerinde göstereceğiz.

x_0, (6.1) denkleminin bir alelade noktası ise, bu denklemin $x - x_0$'ın kuvvet serileri halindeki çözümleri mevcuttur. Onlardan bir tanesi

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{6.6}$$

olsun. Bu kuvvet serisi x_0 civarındaki bir $|x - x_0| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için yakınsadığından, bu aralıkta terim terim türev alarak sırasıyla

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - x_0)^{n-1} \tag{6.7}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2} \tag{6.8}$$

elde ederiz. Şimdi (6.6), (6.7) ve (6.8) eşitliklerinin sağ taraflarındaki serileri, (6.1)'de y, y', y'' yerine koyacağız. Sonra benzer terimleri yeniden grupladığımızda, $K_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ katsayıları (6.6) çözümünün $c_0, c_1, \ldots$ katsayılarının fonksiyonları olmak üzere

$$K_0 + K_1(x - x_0) + K_2(x - x_0)^2 + \ldots = 0 \tag{6.9}$$

elde ederiz. (6.9)'un, x_0 civarındaki bir $|x - x_0| < R, \quad R > 0$ aralığındaki her x için doğru olması,

$$K_0 = K_1 = K_2 = \ldots = 0$$

ile mümkündür. Yani, (6.9)'un sol tarafında $x - x_0$'ın her kuvvetinin katsayısını ayrı ayrı sıfıra eşitlemeliyiz. Bu, (6.6) serisinin (6.1) diferansiyel denkleminin bir çözümü olması için, (6.6)'daki $c_0, c_1, \ldots$ katsayıları tarafından sağlanması gereken bir dizi şart ortaya çıkarır. c_n'ler bu şartlar sağlanacak şekilde seçilirse, sonuçta ortaya çıkacak (6.6) serisi, (6.1) diferansiyel denkleminin aranan çözümü olacaktır. Şimdi aşağıdaki örneklerde bu yöntemi ayrıntılı biçimde anlatacağız.

Örnek 6.5.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0 \tag{6.4}$$

diferansiyel denkleminin x'in kuvvetleri şeklindeki (yani $x_0 = 0$ civarında) seri çözümünü bulunuz.

Çözüm. $x_0 = 0$ noktasının bu denklem için bir alelade nokta olduğunu ve lineer bağımsız iki tane istenen tip seri çözümün var olduğunu daha önce görmüştük. Uygulayacağımız yöntem bu iki çözümü bir çırpıda bulacak.

$x_0 = 0$ olmak üzere (6.6) tipinde bir çözüm alalım. Yani,

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{6.10}$$

olsun. Bunu terim terime türeterek,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \tag{6.11}$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \tag{6.12}$$

elde ederiz. Şimdi (6.10), (6.11) ve (6.12)'deki serileri, (6.4)'de y, y', y'' yerine koyunca

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + (x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + (x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

buluruz. x sayma indisi olan n'den bağımsız olduğundan bunu

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0 \quad (6.13)$$

şeklinde yazabiliriz. (6.9) yapısına sokabilmek için de birinci ve üçüncü toplamların, x'lerin üsleri n olacak şekilde yeniden yazılmaları gerekir. (6.13)'teki birinci toplamı gözönüne alalım.

$c_0 x^2 + - - - -$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n \quad (6.14)$$

$n-2=0$

Burada $m = n-2$ alırsak, $n = m+2$ ve $n = 2$'de $m = 0$ olduğundan, (6.14) toplamı

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2}x^m = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\, c_{n+2}x^n \quad (6.15)$$

haline gelir. Sayma indisi sadece bir "duyarsız değişken" olduğundan, (6.15)'de m ile n'yi değiştirerek (6.13)'ün birinci toplamını

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n \quad (6.16)$$

olarak yeniden yazarız. Benzer şekilde üçüncü terim olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \quad (6.17)$$

toplamı, $m = n+2$ konulunca

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}x^m \quad (6.18)$$

haline gelir. (6.18)'de m ile n değiştirilince, (6.13)'ün üüüncü toplamı

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n \quad (6.19)$$

olarak yeniden yazılabilir. Böylece (6.14)'ü eşdeğeri olan (6.16) ve (6.17)'yi de (6.19)'la değiştirince, (6.13) denklemi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0 \quad (6.20)$$

$= 2.1c_2 + 3.2.c_3 x +$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0 \quad (6.20)$$

Her ne kadar buradaki toplamların hepsinde x, x^n olarak n. kuvvetiyle bulunuyorsa da, toplam indislerinin sayma kümeleri aynı değil. Birinci ve dördüncü toplamlar 0'dan ∞'a, ikincisi 1'den ∞'a ve üçüncüsü de 2'den sonsuza kadar değişiyor. Ortak sayma indisi kümesi olan 2'den ∞'a aralığının dışında kalan terimleri ayrıca yazarak, kalan terimlerin hepsini tek bir toplama sembolü altında toplayabiliriz. Mesela (6.20)'nin birinci toplamdaki $n = 0$ ve $n = 1$'e karşılık olan terimleri ayrı yazarak onu

$$2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

olarak yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 2c_0 + 2c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n x^n$$

olur ki (6.20) denklemi yeniden

$$2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + c_1 x \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n + 2c_0 + 2c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

olarak yazılabilir. Şimdi x'in benzer kuvvetlerini bir araya toplayarak bu denklemi

$$\underbrace{(2c_0+2c_2)}_{K_0} + \underbrace{(3c_1+6c_3)}_{K_1}x + \sum_{n=2}^{\infty}[\underbrace{(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2}}_{K_n}]x^n = 0 \quad (6.21)$$

olarak basitleştiririz.

Artık (6.21) denklemi bizim istediğimiz (6.9) yapısındadır. (6.21)'in, $x = 0$ civarındaki bir $|x| < R$, $R > 0$ aralığındaki her x için doğru olması, (6.21)'in sol tarafındaki x'in kuvvetlerinin katsayılarının ayrı

$K_0 + K_1 x + \cdots + K_n x^n = 0$

$K_0 = K_1 \cdots = K_n = \cdots = 0$

ayrı sıfır olması ile mümkündür. Yani, (6.21)'in sol tarafında x'in her kuvvetinin katsayısını ayrı ayrı sıfıra eşitlemeliyiz. Bu bize hemen

$$2c_0 + 2c_2 = 0 \tag{6.22}$$

$$3c_1 + 6c_3 = 0 \tag{6.23}$$

ve

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \tag{6.24}$$

şartlarını verir. (6.22)'den c_2'yi c_0 cinsinden ifade etme imkanı buluruz:

$$c_2 = -c_0 \tag{6.25}$$

(6.22)'ten de c_3'ü c_1 cinsinden hesaplarız:

$$c_3 = -\frac{1}{2}c_1 \tag{6.26}$$

(6.24) ifadesine *rekürans formülü* denir. Bu formül $n \geq 2$ için c_{n+2}'yi kendisinden daha önce gelen c_n ve c_{n-2} cinsinden hesaplama imkanı verir:

$$c_{n+2} = -\frac{(n+2)c_n + c_{n-2}}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 2 \tag{6.27}$$

$n = 2$ için bu formülden

$$c_4 = -\frac{4c_2 + c_0}{12}$$

bulunur. Şimdi (6.25)'i kullanırsak bu,

$$c_4 = \frac{1}{4}c_0$$

verir ki, c_4'ü c_0 cinsinden hesaplamış oluruz. $n = 3$ için (6.27)'den

$$c_5 = -\frac{5c_3 + c_1}{20}$$

bulunur. (6.26)'yı kullanırsak buradan,

$$c_5 = \frac{3}{40}c_1$$

bulunur ki, c_5'i c_1 cinsinden hesaplamış oluruz. Benzer şekilde hareket ederek tek indisli katsayıları c_1 ve çift indisli katsayıları c_0 cinsinden hesaplarız. c_2, c_3, c_4 ve c_5'in burada elde edilen eşdeğerlerini yerlerine yazarsak (6.10) çözümü

$$y = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 - \frac{1}{2} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_0 x^4 + \frac{3}{40} c_1 x^5 + \ldots$$

haline gelecektir. c_0 ve c_1'li terimleri ayırırsak,

$$y = c_0 \left(1 - x^2 + \frac{1}{4} x^4 + \ldots\right) + c_1 \left(x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \ldots\right) \tag{6.30}$$

olur. Bu, (6.4) diferansiyel denkleminin x'in kuvvetleri cinsinden yazılabilen çözümünü x^5'li terime kadar verir. (6.30)'daki iki parantezin içindeki seriler, (6.4)'ün lineer bağımsız iki çözümünün kuvvet serisi açılımları ve c_1, c_2'ler de keyfî sabitlerdir. Böylece (6.30), (6.4)'ün x'in kuvvetleri cinsinden yazılabilen genel çözümünü (x^5'li terime kadar) verir.

Örnek 6.6.

$$\begin{cases} (x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + xy = 0 \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 6 \end{cases} \tag{6.31 − 32 − 33}$$

başlangıç değer probleminin bir kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

Çözüm. Önce $x = \pm 1$ noktası dışında bütün noktaların bu denklem için bir alelade nokta olduğunu gözlemleyelim. Böylece (6.31)'in, $x_0 \neq \pm 1$ olmak üzere (6.6) tipinde çözümlerini ele alabiliriz. Ancak başlangıç şartları $x = 0$'da verilmiş olduğundan $x_0 = 0$ alacağız ve x'in kuvvetleri şeklinde olan kuvvet serisi çözümlerini bulacağız.

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{6.34}$$

olsun. Bunu terim terime türeterek,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \tag{6.35}$$