Doğrusal Diferansiyel Denklem Sistemleri

İki bilinmeyen fonksiyonlu (x, y), ikili diferansiyel denklemi birinci mertebeden genel olarak

$$a_1(t)x' + a_2(t)y' + a_3(t)x + a_4(t)y = F_1(t),$$
$$b_1(t)x' + b_2(t)y' + b_3(t)x + b_4(t)y = F_2(t),$$

şeklinde verilir. Bu bölümde bu sistemler ele alınacaktır.

$x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$

İki fonksiyon bilinmeyenli, iki dif. denklem birinci mertebeden doğrusal sistemin çözümü $a \leq t \leq b$ o.ü $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ denklem sistemini sağlayan fonksiyonlar ise bu çözüm (f, g) biçiminde olur.

Örn:

$$2x' + 3y' - 2x + y = t^2,$$
$$x' - 2y' + 3x + 4y = e^t.$$

Bu sistemin üç bilinmeyenli versiyonu ise şu şekildedir: x, y, t

$$a_1(t)x' + a_2(t)y' + a_3(t)z' + a_4(t)x + a_5(t)y + a_6(t)z = F_1(t),$$
$$b_1(t)x' + b_2(t)y' + b_3(t)z' + b_4(t)x + b_5(t)y + b_6(t)z = F_2(t),$$
$$c_1(t)x' + c_2(t)y' + c_3(t)z' + c_4(t)x + c_5(t)y + c_6(t)z = F_3(t).$$

7.3 Operatörler Yöntemi

$\frac{dx}{dt} = Dx$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = D(Dx) = D^2x$

A. Diferansiyel Operatörler

Bu kısımda sabit katsayılı lineer sistemleri çözmek için sembolik bir yöntem tanıtacağız. Bu yöntem *diferansiyel operatör* denilen ve şimdi tanıtılacak olan bir gerecin kullanımına dayanır.

x, t serbest değişkeninin n-kere türetilebilen bir fonksiyonu olsun. $\to x(t)$ t'ye göre türetme operatörünü D ile göstereceğiz ve D'ye bir diferansiyel operatör diyeceğiz. dx/dt'yi bu diferansiyel operatör cinsinden Dx ile gösteririz. Yani,

$$Dx \equiv \frac{dx}{dt} = x'$$

olur. Benzer şekilde t'ye göre ikinci türevi D^2x ile gösteririz. Böylece devam edilirse, x'in t'ye göre n. türevi D^nx olur. Yani

$$D^nx = \frac{d^nx}{dt^n} = x^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

olur. Operatör gösterimini daha da genişleterek

$$(D + c)x = \frac{dx}{dt} + cx = x' + cx$$

ve a, b sabit olmak üzere

$$(aD^n + bD^m)x = a\frac{d^nx}{dt^n} + b\frac{d^mx}{dt^m} = a x^{(n)} + b x^{(m)}$$

yazarız.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = 0$$

genel lineer diferansiyel denklemi bu gösterimle

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)x = 0$$

olarak yazılır. Buradaki D^n, $D^{n-1}, \ldots, D$ operatörlerinin x ile çarpılacak büyüklükler değil de, bu fonksiyon üzerine uygulanacak türetme işlemleri olduğuna dikkat ediniz. $a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

ifadesinin kendisine *n. basamaktan, sabit katsayılı lineer diferansiyel operatör* denir. Değişken katsayılı lineer diferansiyel operatörleri 11. Bölüm'de kullanılmıştır ama burada onlarla görülecek işimiz yok.

Örnek 7.13. $3D^2 + 5D - 2$ lineer diferansiyel operatörünü ele alalım. x, t'nin türevli bir fonksiyonu ise,

$$(3D^2 + 5D - 2)x = 3\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 2x$$

olur. Mesela $x = t^3$ ise

$$(3D^2 + 5D - 2)t^3 = 3\frac{d^2t^3}{dt^2} + 5\frac{dt^3}{dt} - 2t^3 = 18t + 15t^2 - 2t^3$$

olur.

Şimdi sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörlerin bazı özellikle-rini inceleyeceğiz. İfadeyi kullanışlı hale getirmek için bu operatörü L harfi ile göstereceğiz. Yani $a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

$L f_1$

$L f_2$

(türevlenebilen)

olacak. f_1, f_2 fonksiyonları t'nin n defa türetilebilen fonksiyonları, c_1, c_2 sabitler olsun.

$L(cf_1) = cL(f_1)$

$L(cf_2) = cL(f_2)$

$$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2]$$

olacağı gösterilebilir. Mesela $L = 3D^2 + 5D - 2$ lineer diferansiyel operatörünü $3t^2 + 2\sin t$ üzerine uygularsak

$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$

$$L[3t^2 + 2\sin t] = L[3t^2] + L[2\sin t]$$

veya

$$(3D^2+5D-2)[3t^2+2\sin t] = (3D^2+5D-2)[3t^2]+(3D^2+5D-2)[2\sin t]$$

olur. $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$L_1 = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \ldots + a_{m-1} D + a_m$$

ve

$$L_2 = b_0 D^n + b_1 D^{b-1} + \ldots + b_{n-1} D + b_n$$

ayrıca

$$L_1(r) = a_0 r^m + a_1 r^{m-1} + \ldots + a_{m-1} r + a_m$$

ve

$$L_2(r) = b_0 r^n + b_1 r^{b-1} + \ldots + b_{n-1} r + b_n$$

de L_1, L_2 operatörlerinde D ile r'nin biçimsel olarak değiştirilmesiyle elde edilmiş iki polinom olsun. Bu polinomların çarpımını $L(r)$ ile gösterelim. Yani,

$$L(r) = L_1(r) \bullet L_2(r)$$

olsun. O zaman f, $n+m$ kere türetilebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$L_1 L_2 f = L_2 L_1 f = Lf \tag{7.44}$$

olacağı kanıtlanabilir. Burada L operatörü, $L(r)$ çarpım polinomunda r'nin D ile biçimsel olarak değiştirilmesinden elde edilen operatördür. (7.44) denklemi, sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörlerin iki önemli özelliğini ortaya çıkarır. Birincisi, f üzerine önce L_1'in ve sonra L_2'nin etkimesinin sonucunun, önce L_2'nin ve sonra L_1'in etkimesinin sonucuna eşit olduğudur. İkincisi de, f üzerine önce L_1'in ve sonra çıkan fonksiyon üzerine L_2'nin etkimesinin sonucunun, f üzerine L çarpım operatörünün etkimesinin sonucuyla aynı olduğudur. Bu önemli özellikleri aşağıdaki örnekle göstereceğiz.

Örnek 7.14. $L_1 = D^2 + 1$, $L_2 = 3D + 2$, $f(t) = t^3$ olsun. O zaman

$$L_1 L_2 f = (D^2+1)(3D+2)t^3 = (D^2+1)(9t^2+2t^3)$$

$$= 9(D^2+1)t^2 + 2(D^2+1)t^3 = 9(2+t^2) + 2(6t+t^3) = 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18$$

ve

$$L_2 L_1 f = (3D+2)(D^2+1)t^3 = (3D+2)(6t+t^3) = 6(3D+2)t + (3D+2)t^3$$

$$= 6(3+2t) + (9t^2+2t^3) = 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18$$

ve son olarak $L = 3D^3 + 2D^2 + 3D + 2$ olduğundan

$$Lf = (3D^3 + 2D^2 + 3D + 2)t^3 = 3(6) + 2(6t) + 3(3t^2) + 2t^3$$
$$= 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18$$

bulunur.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$'ler gerçel sabitler olmak üzere

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

$L(r) = 0$

ve

$$L(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

de L operatöründe D ile r'nin biçimsel olarak değiştirilmesiyle elde edilmiş polinom olsun. $r_1, r_2, \ldots, r_n$'ler de $L(r) = 0$ polinom denkleminin köklerini göstersin. O zaman $L(r)$,

$$L(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_n)$$

şeklinde çarpanlarına ayırılabilir. Şimdi burada r ile D yi biçimsel olarak yer değiştirtirsek, $L(D)$ operatörünün çarpanlarına ayrılmış şeklini elde ederiz:

$$L(D) = a_0(D - r_1)(D - r_2)\ldots(D - r_n)$$

Böylece sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörler, D cebirsel büyüklüğünün polinomları gibi çarpılabilir ve çarpanlarına ayırılabilirler.

B. Sabit Katsayılı Lineer Sistemler İçin Bir Operatör Yöntemi

Şimdi sabit katsayılı lineer sistemleri çözmek için kullanılabilecek sembolik bir operatörler yönteminin ana hatlarını vereceğiz. L_1, L_2, L_3 ve L_4 sabit katsayılı lineer operatörler olmak üzere

$$\begin{aligned} L_1 x + L_2 y &= f_1(t) \\ L_3 x + L_4 y &= f_2(t) \end{aligned} \tag{7.45}$$

şeklinde bir lineer sistem ele alalım. Yani buradaki L_1, L_2, L_3 ve L_4 operatörleri a, b, α, β'lar sabitler olmak üzere

$$L_1 = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \ldots + a_{m-1} D + a_m$$

$$L_2 = b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \ldots + b_{n-1} D + a_n$$

$$L_3 = \alpha_0 D^p + \alpha_1 D^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1} D + \alpha_p$$

$$L_4 = \beta_0 D^q + \beta_1 D^{q-1} + \ldots + \beta_{q-1} D + \beta_q$$

şeklinde sabit katsayılı lineer operatörlerdir.

(7.45) şeklinde ifade edilebilecek basit bir örnek olarak

Örnek

$$\begin{array}{c} 2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - 3x = t \\ 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 3x + 8y = 2 \end{array}$$

alınabilir. Operatör gösterimi ile bunu

$$\begin{array}{c} (2D-3)x - 2Dy = t \\ (2D+3)x + (2D+8)y = 2 \end{array}$$

olarak yazabiliriz. Bunun $L_1 = 2D - 3$, $L_2 = -2D$, $L_3 = 2D + 3$ ve $L_4 = 2D + 8$ olmak üzere (7.45) şeklinde olduğu bellidir.

Şimdi tekrar (7.45) genel sistemine dönersek, birinci denkleme L_4'ü, ikinci denkleme de L_2'yi uygulayarak

$$\begin{array}{c} L_4 L_1 x + L_4 L_2 y = L_4 f_1(t) \\ L_2 L_3 x + L_2 L_4 y = L_2 f_2(t) \end{array}$$

elde ederiz. Birinci denklemden ikincisini çıkarırsak, $L_4 L_2 y = L_2 L_4 y$ olduğundan

$$L_4 L_1 x - L_2 L_3 x = L_4 f_1 - L_2 f_2$$

veya

$$(L_4 L_1 - L_2 L_3)x = L_4 f_1 - L_2 f_2 \tag{7.46}$$

elde ederiz. Bu denklemin sol tarafındaki $L_4 L_1 - L_2 L_3$ ifadesi bir başına sabit katsayılı lineer operatördür. Onun sıfırdan ve sıfır olmayan bir sabitten farklı olduğunu kabul ederek L_5 ile gösterelim. Ayrıca f_1 ve f_2 fonksiyonlarının, (7.46)'nın sağ tarafını mevcut ve t'nin $g_1(t)$ gibi bir fonksiyonu olarak var kılacak özelliklere sahip olduklarını varsayalım. O zaman (7.46) denklemini

$$L_5 x = g_1(t) \tag{7.47}$$

olarak yazabiliriz. Bu (7.47) denklemi artık bir tek x bağlı değişkenine göre yazılmış sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklemdir. İşlemlerimizin öteki bağlı değişken olan y'yi yokettiğine dikkat ediniz. Şimdi X'i (7.47) denkleminden 4. Bölüm'de gördüğümüz yöntemlerle çözeceğiz. (7.47) denklemi N. basamaktan olsun. O zaman (7.47) denkleminin genel çözümü, $u_1, u_2, \ldots, u_N$'ler $L_5 x = 0$ homojen lineer denkleminin N tane olan lineer bağımsız çözümleri, $c_1, c_2, \ldots, c_N$'ler keyfî sabitler, U_1 de $L_5 x = g_1$ denkleminin bir özel çözümü olmak üzere

$$x = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_N u_N + U_1 \tag{7.48}$$

şeklinde yazılabilecektir.

Tekrar (7.45) sistemine dönelim ve birinci, ikinci denklemlere sırasıyla L_3 ve L_1 operatörlerini uygulayalım. O zaman

$$\begin{aligned} L_3 L_1 x + L_3 L_2 y &= L_3 f_1(t) \\ L_1 L_3 x + L_1 L_4 y &= L_1 f_2(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. İkinci denklemden birincisini çıkarırsak, $L_3 L_1 x = L_1 L_3 x$ olduğundan

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3) y = L_1 f_2 - L_3 f_1$$

elde ederiz. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının, sağ tarafı t'nin $g_2(t)$ gibi bir fonksiyonu olarak var kılacak özelliklere sahip olduklarını varsayalım. O zaman bu denklemi $L_5 = L_4 L_1 - L_2 L_3$ olmak üzere

$$L_5 y = g_2(t) \tag{7.49}$$

olarak yazabiliriz. Bu (7.49) denklemi bir tek y bağlı değişkenine göre yazılmış sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklemdir. İşlemlerimiz bu sefer x'i yoketmiştir. Şimdi y'yi (7.49) denkleminden çözersek genel çözümü, $u_1, u_2, \ldots, u_N$'ler $L_5 y = 0$ (veya $L_5 x = 0$) homojen lineer denkleminin, daha önce (7.48)'de de görülen N tane lineer bağımsız çözümü, $k_1, k_2, \ldots, k_N$'ler keyfî sabitler, U_2 de $L_5 y = g_2$ denkleminin bir özel çözümü olmak üzere

$$y = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_N u_N + U_2 \tag{7.50}$$

şeklinde yazılabilecektir.

Böylece x ve y (7.45) sistemini sağlarsa, x'in (7.47)'deki tek diferansiyel denklemi, y'nin de (7.49)'daki tek diferansiyel denklemi sağlayacağını görmüş olduk. Yani x ve y (7.45) sistemini sağlarsa, x (7.48), y de (7.50) şeklindedir. Bununla beraber (7.48)-(7.50) fonksiyon çifti $c_1, c_2, \ldots, c_N, k_1, k_2, \ldots, k_N$ keyfî sabitlerinin her seçimi için (7.45) sistemini sağlamaz. Başka bir deyişle (7.48) ile verilen x ile, (7.50) ile verilen y'nin (7.45) sistemini sağlaması için, $2N$ tane $c_1, c_2, \ldots, c_N$, $k_1, k_2, \ldots, k_N$ keyfî sabiti birbirinden bağımsız olamaz, bir kısmının geri kalanların fonksiyonu olmaları gerekir. (7.45) sisteminin genel çözümündeki bağımsız sabitlerin sayısının, (7.45)'de x ve y'nin operatör katsayılarından oluşan

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix}$$

determinantından elde edilen $L_1 L_4 - L_2 L_3$ operatörünün mertebesine, bu determinantın sıfır olmaması şartıyla eşit olduğu gösterilebilir. Bu operatörün N. basamaktan olduğunu kabul etmiştik. Böylece (7.48)-(7.50) çiftinin (7.45) sistemini sağlaması için, bu çiftte bulunan $2N$ tane $c_1, c_2, \ldots, c_N, k_1, k_2, \ldots, k_N$ keyfî sabitlerinden sadece N tanesi bağımsız olabilir, geri kalan N tanesinin, bunların fonksiyonu olmaları gerekir. Bunlardan hangilerinin bağımsız olduğunu, geri kalanların bunların fonksiyonu olarak nasıl yazılacağını anlamak için, (7.48) ile verilen x ve (7.50) ile verilen y (7.45) sisteminde yerlerine konur. (7.48)-(7.50) çiftinin, (7.45) sisteminin genel çözümü olması için $c_1, c_2, \ldots, c_N$, $k_1, k_2, \ldots, k_N$ sabitlerinin sağlayacağı şartlar buradan elde edilir.

Yukarıdaki işleri bir örnekle gösterelim.

Örnek 7.14.

$$\begin{aligned} 2\tfrac{dx}{dt} - 2\tfrac{dy}{dt} - 3x &= t \\ 2\tfrac{dx}{dt} + 2\tfrac{dy}{dt} + 3x + 8y &= 2 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Operatör gösterimi ile bunu

$$\begin{aligned} (\overbrace{2D - 3}^{L_1})x \overbrace{- 2D}^{L_2}y &= t \\ (\underbrace{2D + 3}_{L_3})x + (\underbrace{2D + 8}_{L_4})y &= 2 \end{aligned} \tag{7.52}$$

olarak yazabiliriz. (7.52)'nin birinci denklemine $2D+8$, ikinci denklemine de $2D$ operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned}(2D+8)(2D-3)x-2(2D+8)Dy&=(2D+8)t\\ 2D(2D+3)x+2D(2D+8)y&=(2D)2\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu iki denklemi taraf tarafa toplayınca da

$$[(2D+8)(2D-3)+2D(2D+3)]x=(2D+8)t+(2D)2$$

$4D^2-6D+16D-24+4D^2+6D$

$(D^2+2D-3)x=0$

$m^2+2m-3=0$

$(m-1)(m+3)=0$

$m=1,\ m=-3$

$y_h=c_1e^t+c_2e^{-3t}$

veya

$$(8D^2+16D-24)x=2+8t+0$$

ve son olarak

$$(D^2+2D-3)x=t+\frac{1}{4} \tag{7.53}$$

elde edilir. (7.53) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$x=c_1e^t+c_2e^{-3t}-\frac{1}{3}t-\frac{11}{36} \tag{7.54}$$

$\longrightarrow$ 2 bağımsız sbt c_1, c_2

olur.

Şimdi yeniden (7.52) sistemine geri dönüp (7.52)'nin birinci denklemine $2D+3$, ikinci denklemine de $2D-3$ operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned}(2D+3)(2D-3)x-2(2D+3)Dy&=(2D+3)t\\ (2D-3)(2D+3)x+(2D-3)(2D+8)y&=(2D-3)2\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu iki denklemin ikincisinden birincisini çıkarırsak,

$$[(2D-3)(2D+8)+(2D+3)2D]y=(2D-3)2-(2D+3)t$$

$4D^2+16D-6D-24+4D^2+6D$

$m^2+2m-3=0$

veya

$$(8D^2+16D-24)y=0-6-2-3t$$

ve son olarak

$$(D^2+2D-3)x=-\frac{3}{8}t-1 \tag{7.55}$$

elde edilir. (7.55) diferansiyel denkleminin genel çözümü de

$$y=k_1e^t+k_2e^{-3t}+\frac{1}{8}t+\frac{5}{12} \tag{7.56}$$

$\longrightarrow$ 2 bağımsız sbt k_1, k_2

olur. (7.54) ile verilen x ile, (7.56) ile verilen y, c_1, c_2, k_1, k_2 sabitlerinin uygun bir seçimi için (7.51) sistemini sağlayacaklardır. (7.51)'de x ve y'nin operatör katsayılarından oluşan

$= (2D-3)(2D+8) + 2D(2D+3)$

$$\begin{vmatrix} 2D-3 & -2D \\ 2D+3 & 2D+8 \end{vmatrix} = 8D^2 + 16D - 24 \rightarrow \text{Mertebesi } 2$$

olur. Bu operatörün mertebesi iki olduğundan, (7.54)- (7.56) çiftinin (7.51) sistemini sağlaması için, bu çiftte bulunan c_1, c_2, k_1, k_2 keyfî sabitlerinden sadece iki tanesi bağımsız olabilir. Bunlardan hangilerinin bağımsız olduğunu, geri kalanların bunların fonksiyonu olarak nasıl yazılacağını anlamak için, (7.54) ile verilen x ve (7.56) ile verilen y, (7.51) sisteminin birinci denkleminde yerlerine konursa,

$2x' - 2y' - 3x = t$

$$\left(2c_1e^t - 6c_2e^{-3t} - \frac{2}{3}\right) - \left(2k_1e^t - 6k_2e^{-3t} + \frac{1}{4}\right)$$

$$-\left(3c_1e^t + 3c_2e^{-3t} - t - \frac{11}{12}\right) = t$$

veya

$$(-c_1 - 2k_1)e^t + (-9c_2 + 6k_2)e^{-3t} = 0$$

elde edilir. Böylece (7.54)-(7.56) çiftinin (7.51) sistemini sağlaması için,

$$\begin{aligned} c_1 - 2k_1 &= 0 \qquad c_1 = 2k_1 \\ -9c_2 + 6k_2 &= 0 \qquad 9c_2 = 6k_2 \end{aligned} \tag{7.57}$$

olmalıdır. x ile y, (7.51) sisteminin ikinci denkleminde konursa, buna denk şartlar elde edilir. Böylece (7.54)- (7.56) çiftinin (7.51) sistemini sağlaması için, (7.57) şartları yerine gelmelidir. Buradaki dört sabitten herhangi ikisi bağımsız olarak seçilebilir. c_1, c_2'yi bağımsız seçersek,

$$k_1 = -\frac{1}{2}c_1 \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{3}{2}c_2$$

bulunur. Bunlar (7.56)'da yerlerine yazılırsa, sonuçta elde edilen (7.54)-(7.56) çifti (7.51) sisteminin bir genel çözümü olur. Yani (7.51) sisteminin bir genel çözümü c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere

$$x = c_1e^t + c_2e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}$$

$$y = -\frac{1}{2}c_1e^t + \frac{3}{2}c_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12}$$

olacaktır. (7.57)'de k_1 k_2'yi bağımsız seçseydik, (7.51) sisteminin bir genel çözümü

$$\begin{cases} x = -2k_1e^t + \frac{2}{3}k_2e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36} \\ y = k_1e^t + k_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12} \end{cases}$$

olacaktı.

ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x - 4y = e^t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{4t}$

2. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = -2t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - y = t^2$

3. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = e^{3t}$

4. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 2y = 2e^t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 4y = e^{2t}$

5. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = e^{-t}$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = e^t$

6. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - y = t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$

7. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 6y = e^{3t}$
   $\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x - 6y = t$

8. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 3y = 3t$
   $\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x - 3y = 1$

9. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$
   $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 0$

10. $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 4y = t$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = 1$

11. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + 5y = 4t$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 2$

12. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + 5y = t^2$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x + 4y = 2t + 1$

13. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + y = t^2 + 4t$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 2t^2 - 2t$

14. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + y = t - 1$
    $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = t + 2$

15. $2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x - y = 3e^t$

16. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = -2t$