



TERSİNİR MATRİSLER :

$B \in A_{n \times n}$ matrisi için $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ olacak şekilde bir $B \in B_{n \times n}$ matrisi varsa A 'ya "tersinin (süngüler olmayan) matris" denir ve B 'ye " A matrisinin tersi" denir. $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

$A \cdot B = I \Rightarrow B$, A matrisinin sağ tersidir. A matrisi sağ tersindir.

$B \cdot A = I \Rightarrow B$, A matrisinin sol tersidir. A matrisi sol tersindir.

NOT: Eğer $A \cdot B = I$ ise $B \cdot A = I$ dir. Dolayısıyla bir A matrisinin tersinin olduğunu göstermek için bu eşitliklerden sadece bir taneini sağlamayı B 'yi bulmamız yetecektir.

* Bir A tersinin matrisi kore matris olmalıdır.

* Her elementer matris ve elementer matrislerin çarpımı da tersindir.

* Bir A matrisinin tersi varsa, bu ter TEKTİR!

Teorem: A_1, A_2, \dots, A_n tersinin matrisler, $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_n^{-1}$ de bu matrislerin sırayla tersleri olsun. $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ çarpımı da tersindir

ve

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \text{ dir.}$$

Teorem: $B \in A_{n \times n}$ için;

1. A elementer matrislerin çarpımıdır.
2. A tersindir.
3. A sıfır satırı içeren bir matrisse satır dekti olmaz.
4. A birim matrisse satır dekti olmaz.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi tersinin miden mi? Evetse tersini bulunuz.

1.yol: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi var mı?

$$\begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2a+3c=1 \\ 2a+2c=0 \\ \hline c=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2b+3d=0 \\ 2b+2d=0 \\ \hline d=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a=-1 \\ b=3/2 \end{array}$$

Böyle a,b,c,d 'ler bulabildiğimiz için A matrisi tersindən ve tersi olan matris $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$ 'dm.

Ve gerekteerde; $A \cdot A^{-1} = I$ olur.

Bu yol büyük matrisler için uygun btm yol degildm.

2.yol:

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} I & | & A^{-1} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & | & 1/2 & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & | & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3/2R_2 + R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & | & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{I}_{A^{-1}}$

Bundan sonra 2.yolu kullanacagız. Cok daha kolay ve kullancli.



ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi tersinin midir? Evetse tersini bulunuz.

1.yol: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \Rightarrow \begin{array}{l} a+2c=1 \\ 2a+4c=0 \end{array} > 2=0 \quad \times \text{celikki}$$

Yani bu koşulu sağlayan a ve c yoktur!

O halde A tersinin deðildir.

2.yol: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow$ Tersinin deðildir.

* Sıfır satırı içeren bir matrisin satır deðek olan bir matris tersinin olamaz.

* Birbirinin kati olan satırlar içeren bir matrisin satır deðek olan matris tersinin olamaz.

NOT: • A tersinin ise A^{-1} 'de tersinin deðir.
 $(A \text{ nin tersi } A^{-1}) \quad (A^{-1} \text{ nin tersi } A)$

• $(A^{-1})^{-1} = A$

• A tersinin $\Rightarrow A^T$ da tersinin deðir.
 $(A \text{ nin tersi } A^{-1}) \quad (A^T \text{ nin tersi } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1})$



ÖRNEK: Aşağıdaki matrislerin termin olup olmadığını araştırınız.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + R_3 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 + R_2 \rightarrow R_2 \\ R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \\ \\ \hline I & A^{-1} \end{array}} \Rightarrow A \text{ termin.}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow B \text{ termindegil.}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ?$

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} ?$