SORULAR:

1) $V=\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ şöyle tanımlansın:

$$\left.\begin{aligned} p\oplus q &= p\cdot q \\ c\odot p &= p^c \end{aligned}\right\}, \text{ c skaler}$$

$\mathbb{R}^+$ bu işlemlerle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir v.u olur mu?

(V1) $u_1,u_2,u_3 \in \mathbb{R}^+$ o.ü $u_1\oplus(u_2\oplus u_3) \overset{?}{=} (u_1\oplus u_2)\oplus u_3$

$$u_1\oplus(u_2\oplus u_3) = u_1\oplus(u_2\cdot u_3) = u_1\cdot(u_2\cdot u_3) = (u_1\cdot u_2)\cdot u_3$$
$$= (u_1\oplus u_2)\oplus u_3$$

(V2) $\forall u\in V$ için $u\oplus u' = u'\oplus u = u$ o.ş $u'\in\mathbb{R}^+$ var mı?

$$u\oplus u' = u \Rightarrow u\cdot u' = u \Rightarrow \boxed{u'=1}$$

(V3) $\forall u\in V$ için $u\oplus u'' = u''\oplus u = 1$ o.ş $u''\in V$ var mı?

$$u\oplus u'' = u\cdot u'' = 1 \Rightarrow u'' = \frac{1}{\underset{\substack{\neq \\ 0}}{u}\in\mathbb{R}^+} \in \mathbb{R}^+$$

(V4) $u_1\oplus u_2 = u_2\oplus u_1$ ✓

(V5) $c\odot(u_1\oplus u_2) \overset{?}{=} (c\odot u_1)\oplus(c\odot u_2)$

$$c\odot(u_1\oplus u_2) = c\odot(u_1\cdot u_2) = (u_1\cdot u_2)^c = u_1^c\cdot u_2^c$$
$$(c\odot u_1)\oplus(c\odot u_2) = (u_1^c)\oplus(u_2^c) = u_1^c\cdot u_2^c$$
$> = $ ✓

(V6) $\underset{\in\mathbb{R}}{(c_1} + \underset{\in\mathbb{R}}{c_2)} \odot v \overset{?}{=} (c_1 \odot v) \oplus (c_2 \odot v)$

$(c_1 + c_2) \odot v = v^{c_1 + c_2} = v^{c_1} \cdot v^{c_2}$

$(c_1 \odot v) \oplus (c_2 \odot v) = (v^{c_1}) \oplus (v^{c_2}) = v^{c_1} \cdot v^{c_2}$ $\Big\rangle = ✓$

(V7) $(\underset{\in\mathbb{R}}{c_1} \cdot \underset{\in\mathbb{R}}{c_2}) \odot v \overset{?}{=} c_1 \odot (c_2 \odot v)$

$(c_1 \cdot c_2) \odot v = v^{c_1 \cdot c_2}$

$c_1 \odot (c_2 \odot v) = c_1 \odot (v^{c_2}) = (v^{c_2})^{c_1} = v^{c_1 c_2}$ $\Big\rangle = ✓$

(V8) $1 \odot v = v^1 = v$ ✓

O halde $\mathbb{R}^+$ $\odot$ ve $\oplus$ işlemleriyle bir v.u'dır. ✓

(2) $V = \mathbb{R}^2$ olsun. Bu küme üzerinde toplama ve skalerle çarpma;

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$c.(x, y) = (cx, y)$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{R}^2$ bu işlemlerle bir v.u olur mu?

$(c_1+c_2)(x,y) \overset{?}{=} c_1(x,y) + c_2.(x,y)$?

$(c_1+c_2)(x,y) = ((c_1+c_2)x, y)$ $\neq$

$c_1(x,y)+c_2(x,y) = (c_1x,y) + (c_2x,y) = ((c_1+c_2)x, 2y)$

$\mathbb{R}^2$ bu işlemlerle bir v.u olmaz.

③ $V=\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(3y_1+3y_2,\ -x_1-x_2)\\ c(x,y)=(3c.y,\ -cx)\end{array}\right\}$$ işlemler tanımlansın.

$\mathbb{R}^2$ bu işlemlerle bir v.u olur mu?

$\underbrace{1.(x,y)}$ $= (x,y)$ (?)

$(3y,-x) \neq (x,y)$

ÖRN: $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ için $1.(1,1)=(3,-1)\neq(1,1)$

$\mathbb{R}^2$ bu işlemlerle bir v.u olamaz.

④ $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ üzerinde

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{bmatrix}\\ c.\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cx & y\\ z & ct\end{bmatrix}\end{array}\right\}$$ işlemleriyle $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bir v.u olur mu?

$(c_1+c_2)A \stackrel{?}{=} c_1.A + c_2.A \quad , \quad A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$(c_1+c_2).\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1+c_2)x & y \\ z & (c_1+c_2)t \end{bmatrix} \longrightarrow \neq$

$c_1.\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} + c_2.\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1x & y \\ z & c_1t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2x & y \\ z & c_2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1+c_2)x & 2y \\ 2z & (c_1+c_2)t \end{bmatrix}$

O halde $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bu işlemlerle bir v.u olmaz.

(5) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde, $x,y \in X$, $r \in \mathbb{R}$ için

$\left.\begin{array}{l} x \oplus y = x \\ r \odot x = 0 \end{array}\right\}$ şeklinde tanımlansın.

X bu $\oplus$ ve $\odot$ işlemleriyle bir v.u olur mu?

$\underbrace{x \oplus y}_{x} \stackrel{?}{=} \underbrace{y \oplus x}_{y} \quad x \neq y$ $\Rightarrow$ X bu işlemlerle bir v.u olmaz

(6) Bir V vektör uzayında, $\forall u \in V$ için $u+z=z+u=u$ özelliğini sağlayan sadece tek $z \in V$ elemanı olduğunu ispatlayınız.

Bu özelliği sağlayan z_1, z_2 2 tane eleman olsunlar.

$\forall u \in V$ için $u+z_1=z_1+u=u$ olduğundan $u=z_2 \in V$ için de

$z_2+z_1=z_1+z_2=z_2$ 'dir.

$\forall u \in V$ için $u + z_2 = z_2 + u = u$ olduğundan, $u = z_1 \in V$ için

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = z_1$ olur.

$z_1 + z_2 = \boxed{z_1 = z_2}$ olur.

— o —