



TERSİNİR MATRİSLER :

Bir $A_{n \times n}$ matrisi için $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ olacak şekilde bir $B_{n \times n}$ matrisi varsa A 'ya "tersinin (simgöler olmayan) matrisi" denir ve B 'ye "A matrisinin tersi" denir. $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

$A \cdot B = I \Rightarrow B$, A matrisinin sağ tersidir. A matrisi sağ tersinirdir.

$B \cdot A = I \Rightarrow B$, A matrisinin sol tersidir. A matrisi sol tersinirdir.

NOT: Eğer $A \cdot B = I$ ise $B \cdot A = I$ dir. Dolayısıyla bir A matrisinin tersinin olduğunu göstermek için bu eşitliklerden sadece bir tanesini sağlayan B 'yi bulmamız yeterlidir.

* Bir A tersinin matrisi kare matris olmalıdır.

* Her eleментар matris ve eleментар matrislerin çarpımı da tersinirdir.

* Bir A matrisinin tersi varsa, bu ter TEKTİR !

Teorem: A_1, A_2, \dots, A_n tersinin matrisler, $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_n^{-1}$ de bu matrislerin sırayla tersleri olsun. $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ çarpımı da tersinirdir ve

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \text{ dir.}$$

Teorem: Bir $A_{n \times n}$ için;

1. A eleментар matrislerin çarpımıdır.

2. A tersinirdir.

3. A sıfır satırı içeren bir matrise satır dektir olmaz.

4. A birim matrise satır dektir.



ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi tersinir midir? Evetse tersini bulunuz.

1.yol: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak ikiye $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi varmı?

$$\begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2a+3c=1 \\ 2a+2c=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2d+3b=0 \\ 2a+3c=0 \end{array}$$

$$\boxed{c=1} \quad \boxed{a=-1} \quad \boxed{d=-1} \quad \boxed{b=3/2}$$

Böyle a, b, c, d 'ler bulabildiğimiz için A matrisi tersinirdir ve ters olan matris $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$ 'dir.

Ve gerçekte de; $A \cdot A^{-1} = I$ olur.

Bu yol büyük matrisler için uygun bir yol değildir.

2.yol:

$$\boxed{[A | I] \longrightarrow [I | A^{-1}]}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{A}{2} & \overset{A}{3} & \overset{I}{1} & \overset{I}{0} \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{2} \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3/2 R_2 + R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$

Bundan sonra 2.yolu kullanacağız. Çok daha kolay ve kullanışlı.



ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi tersinir midir? Evetse tersini bulunuz.

1.yol: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+2c=1 \\ 2a+4c=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+2c=1 \\ 2=0 \end{matrix} \quad \text{X çelişki}$$

Yani bu koşulları sağlayan a ve c yoktur!

0 hable A tersinir değildir.

2.yol: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Tersinir değildir.}$

* Sıfır satırı içeren bir matrise satır dere olan bir matris tersinir olmaz.

* Birbirinin kati olan satırlar içeren bir matrise satır dere olan matris tersinir olmaz.

NOT: • A tersinir ise A^{-1} 'de tersinirdir.
(A 'nin tersi A^{-1}) (A^{-1} 'in tersi A)

• $(A^{-1})^{-1} = A$

• A tersinir $\Rightarrow A^T$ de tersinirdir.
(A 'nin tersi A^{-1}) (A^T 'nin tersi $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$)



ÖRNEK: Aşağıdaki matrislerin tersinir olup olmadıklarını araştırınız.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1+R_3 \rightarrow R_3}]{\substack{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ R_1+R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_1 \rightarrow R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_3+R_2 \rightarrow R_2 \\ R_3+R_1 \rightarrow R_1}]{\substack{R_3+R_2 \rightarrow R_2 \\ R_3+R_1 \rightarrow R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow A \text{ tersinir.}$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1+R_3 \rightarrow R_3}]{\substack{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1+R_3 \rightarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_3 \rightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow B \text{ tersinir değil.}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$?