SATIR DENKLİK :

Elementer satır işlemleri: Aşağıda verilen işlemlerin herhangi birine A matrisi üzerinde "elementer satır işlemi" denir;

1. Herhangi iki satırın yerini değiştirmek. ($R_i \leftrightarrow R_j$)
2. Bir satırı sıfırdan farklı bir skaler ile çarpmak. ($cR_i \rightarrow R_i$)
3. Bir satırın bir skaler katını başka bir satıra eklemek.
$$(cR_i + R_j \rightarrow R_j)$$

ÖRNEKLER:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_2+R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} -14 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NOT: Her satır işleminin tersi vardır.

$cR_i + R_j$ 'nin tersi $(-c)R_i + R_j$

$R_i \leftrightarrow R_j$ 'nin tersi $R_j \leftrightarrow R_i$

$cR_i \rightarrow R_i$ 'nin tersi $c^{-1}R_i \rightarrow R_i$

NOT: Bu işlemler benzer şekilde sütunlara da uygulanabilir. O zaman ismi elementer sütun işlemi olur.

Tanım: A ve B $m \times n$ tipinde iki matris olsun. Eğer B matrisi A matrisine sonlu sayıda elementer satır işlemi uygulanarak elde ediliyorsa "B matrisi A matrisine satır denktir" denir. $A \approx B$ ile gösterilir.

$$A \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow B \Rightarrow A \approx B$$

Her satır işleminin tersi olduğuna göre eğer A matrisinden B matrisini elde ediyorsak (Yani B, A'ya satır denk ise), ters işlemlerle B matrisinden de A matrisini elde edebiliriz.

$A \approx B \Leftrightarrow B \approx A$ dır.

Bu sebepten sadece "A ve B satır denktir" ifadesi de kullanılır.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\2&1&3&2\\1&-2&2&3\end{bmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_2\to R_2} \begin{bmatrix}1&2&4&3\\4&-3&7&8\\1&-2&2&3\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}$

$\begin{bmatrix}4&-3&7&8\\1&2&4&3\\1&-2&2&3\end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1\to R_1} \begin{bmatrix}2&4&8&6\\1&-2&2&3\\4&-3&7&8\end{bmatrix}=B$

B matrisi A matrisinden sonlu sayıda elementer satır işlemi ile elde edildi. O halde A ve B satır denktir.

NOT: 1) $A \approx A$ (yansıma)
2) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$ (simetri)
3) $A \approx B$ ve $B \approx C \Rightarrow A \approx C$ (geçişme)

Satır denk olma bir denklik bağıntısıdır.

Teorem: Her matris satır indirgenmiş eşelon bir matrise satır denktir. Hatta her matris TEK bir satır indirgenmiş eşelon matrise satır denktir.

Ama bir matris birden çok eşelon matrise satır denk olabilir.

NOT: İki matris birbirine satır denk ise onların s.i.e. matrisleri aynıdır.

$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \to A$'nın s.i.e.f
$B \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \to B$'nin s.i.e.f
$\Big\rangle =$ olduğundan $A \approx B$'dir.

ÖRNEK: $\begin{bmatrix}1&0&-2\\-2&1&9\\3&2&4\end{bmatrix}$ matrisinin satır denk olduğu satır indirgenmiş eşelon matrisini bulunuz.

Bir matrisin satır indirgenmiş eşelon formu o matrisin en sade, en çok birim matrise benzeyen halidir. Bazen birim matris de olabilir.

Yöntem :

1. 1. satırın baş elemanını 1 yap
2. Bu 1'in yardımıyla altındaki elemanları sıfırla.
3. Sonra 2 satırın baş elemanını bul, 1 yap
4. Bu 1'in yardımıyla altındaki ve üstündeki elemanları sıfırla

⋮

Örneğe geri dönelim;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-3)R_1+R_3 \to R_3]{2R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

s.i.e.m. ✓

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin satır indirgenmiş eşelon formunu bulunuz.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_3 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-5)R_2+R_3 \to R_3]{(-2)R_2+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+R_1\to R_1]{R_3+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1/2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

A matrisinin satır indirgenmiş eşelon matrisi ✓

öntemsiz yaptım

ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix}2&1&0&-1\\-2&2&1&2\\-3&-3&1&3\\-1&1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-2R_4+R_2\to R_2\\-3R_4+R_3\to R_3}]{R_4+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\0&0&3&2\\0&-6&4&3\\-1&1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+R_4\to R_4}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\0&0&3&2\\0&-6&4&3\\0&3&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{2R_4+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\0&0&3&2\\0&0&0&1\\0&3&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3+R_1\to R_1\\-2R_3+R_2\to R_2}]{R_3+R_4\to R_4}\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\\0&3&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4/3\to R_4]{R_2/3\to R_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&-\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{2}{3}R_2+R_4\to R_4]{R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{(-2)R_4+R_1\to R_1}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I$$

Elementer matrisler: Birim matrise tek bir satır indirgeme işlemi uygulanarak elde edilen matrise "elementer matris" denir.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}=E_1$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{2R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E_2$$

Teorem: B matrisi A matrisinden çeşitli satır işlemleriyle $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ elde edilen bir matris ise; $\boxed{B = P.A}$ olacak şekilde bir P tersinir matrisi vardır. Ve bu P tersinir matrisi elementer matrislerin çarpımı şeklindedir.

$$P = \varepsilon_n . \varepsilon_{n-1} \cdots \varepsilon_2 . \varepsilon_1(I)$$
$$= \varepsilon_n(I) . \varepsilon_{n-1}(I) \cdots \varepsilon_2(I) . \varepsilon_1(I)$$

Bu teorem bize şunu söyler:

$$[A \mid I] \longrightarrow [B \mid P] \Rightarrow B = P.A$$

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ matrisinin satır denk olduğu satır indirgenmiş eşelon matrisi olan R'yi ve $R = P.A$ olacak şekildeki P tersinir matrisini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_1]{R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_2]{2R_1+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_3]{\frac{R_2}{2} \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon_4]{-4R_2+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_5]{R_3+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_6]{-R_3+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Şimdi birim matrise ayrı ayrı tüm satır işlemlerini uygulayarak 6 tane elementer matris elde edelim;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_1]{R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 = \varepsilon_1(I), \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_2]{2R_1+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 = \varepsilon_2(I)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\mathcal{E}_3]{\frac{R_2}{2}\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E_3=\mathcal{E}_3(I)\ ,\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\mathcal{E}_4]{-4R_2+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{bmatrix}=E_4=\mathcal{E}_4(I)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\mathcal{E}_5]{R_3+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=E_5=\mathcal{E}_5(I)\ ,\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\mathcal{E}_6]{-R_3+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E_6=\mathcal{E}_6(I)$$

$P=E_6.E_5.E_4.E_3.E_2.E_1$ 'dir.

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&-2&1\end{bmatrix}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3/2&1\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3/2&1\\0&-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1/2&-3/2&1\\0&-2&1\end{bmatrix}=P$$

Gerçekten de; $A.P=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&-3\\-2&4&-5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&-1\\1/2&-3/2&1\\0&-2&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B$$ elde edilir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin satır denk olduğu satır indirgenmiş eşelon matrisi olan R'yi ve $R=P.A$ olacak şekildeki P tersinir matrisini bulunuz.

$$A \xrightarrow[\varepsilon_1]{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_2]{-2R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3+R_1 \to R_1 \\ \varepsilon_4}]{\substack{\varepsilon_3 \\ -3R_3+R_2 \to R_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_5]{-2R_2+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_6]{-R_3 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} = R$$

P kaç tipinde bir matris?

$$R_{3\times 5} = P_{3\times 3}\, A_{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = E_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = E_6$$

$$P = \underbrace{\underbrace{E_6.E_5}.\underbrace{E_4.E_3}}.E_2.E_1 \text{ 'dir.}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -7 \end{bmatrix} \text{ 'dir.}$$

— o —