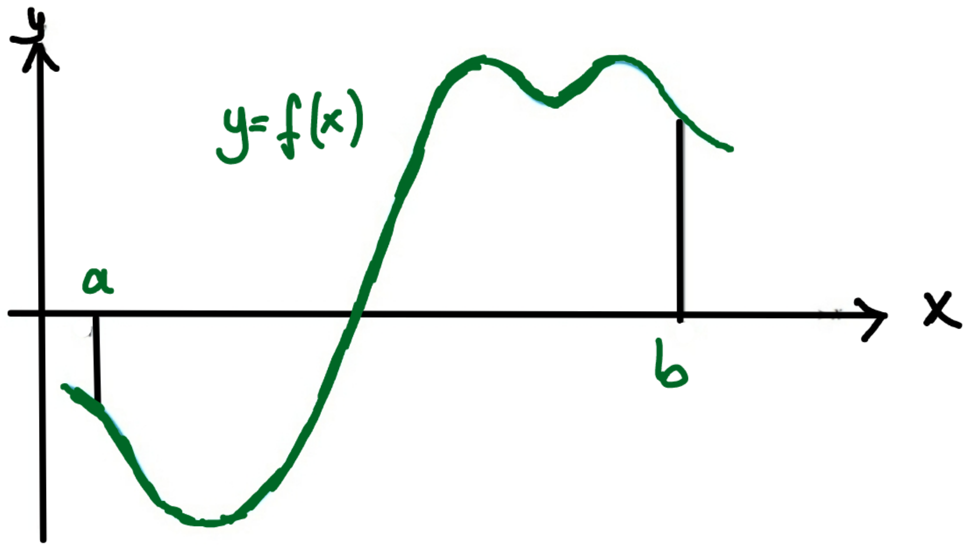
İNTEGRALLER

RIEMANN TOPLAMLARI

Bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli herhangi bir f fonksiyonu verilsin:



$[a,b]$ kapalı aralığını eşit genişlikte olması gerekmeyen alt aralıklara ayıralım, bunun için a ve b arasında aşağıdaki koşulu sağlayan $n-1$ tane $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ noktalarını seçeriz;

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

$a = x_0$ ve $b = x_n$ ile gösterelim:

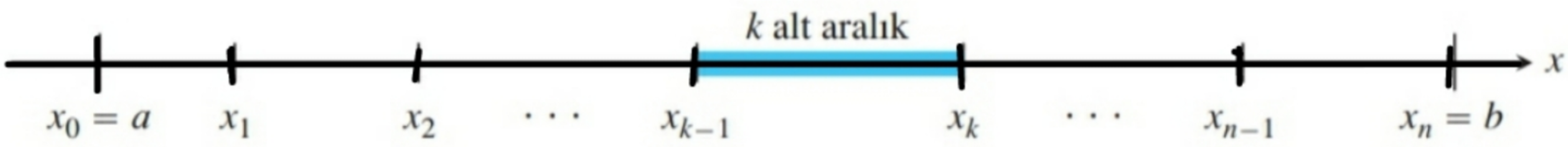
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ kümesine $[a,b]$ kapalı aralığının bölünüşü denir.

P bölünüşü $[a,b]$ aralığını n tane kapalı alt aralığa böler;

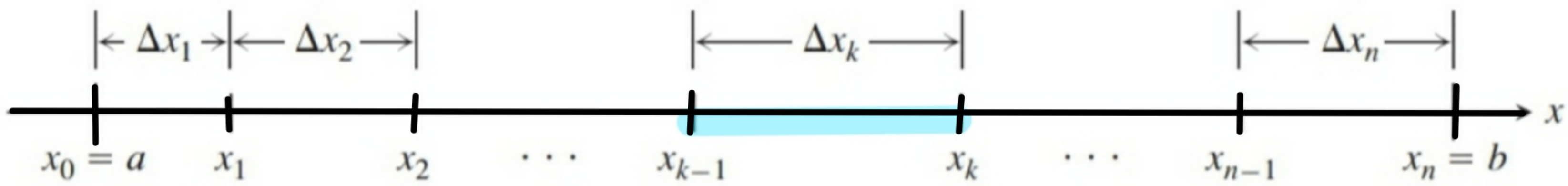
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

Bu alt aralıkların birincisi $[x_0, x_1]$, ikincisi $[x_1, x_2]$, dir. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere k. alt aralığı $[x_{k-1}, x_k]$' dır:



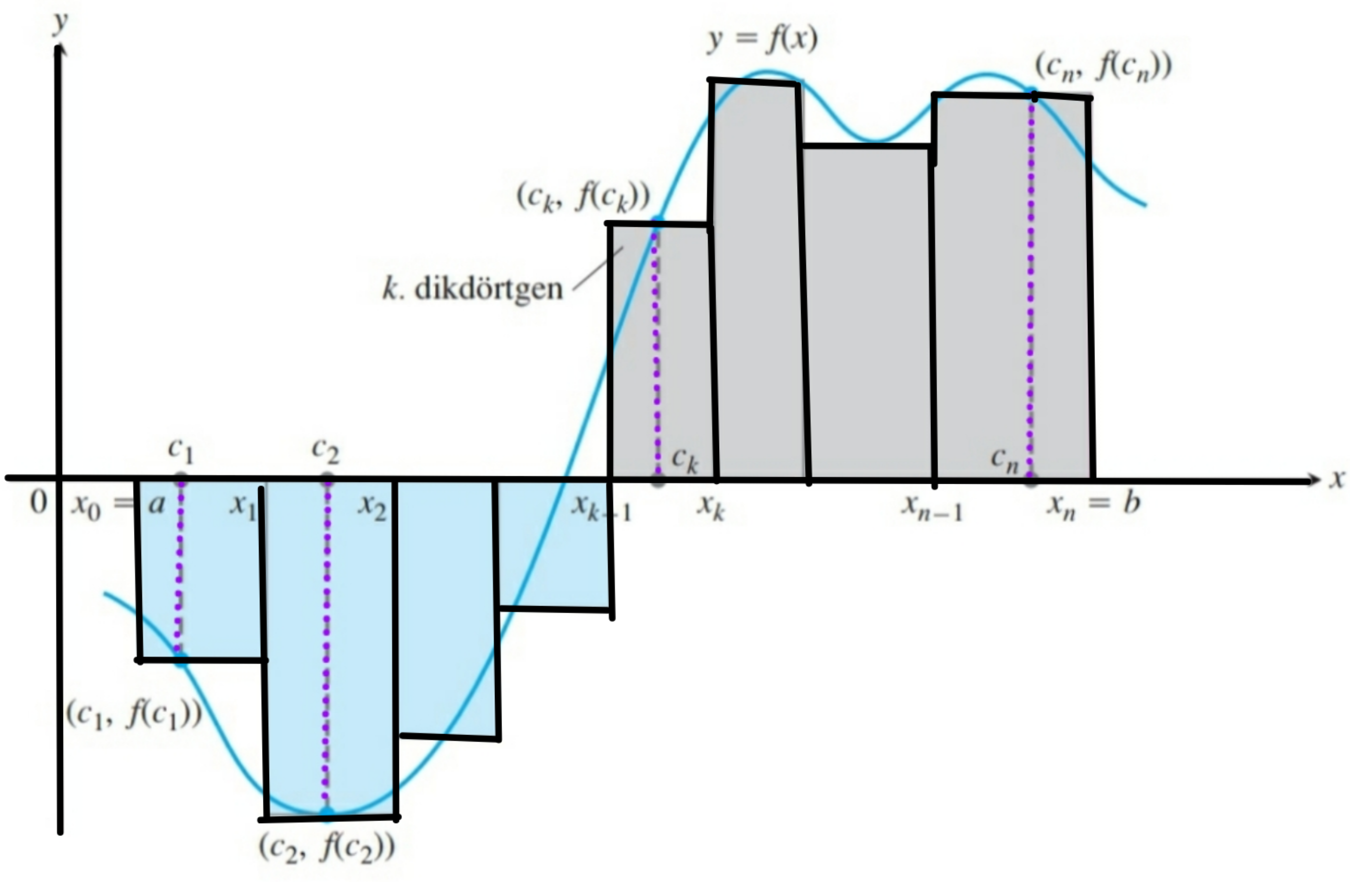
Birinci [x_0, x_1] alt aralığının genişliği Δx_1 ,
ikinci [x_1, x_2] " " " Δx_2
k. [x_{k-1}, x_k] " " " Δx_k
ile gösterilir.

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$
$$\vdots$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$



Her alt aralıkta bir nokta seçeriz:

k. alt aralık $[x_{k-1}, x_k]$'dan seçilen nokta c_k olsun:



Her alt aralık üzerinde, eğriye $(c_k, f(c_k))$ noktasında değecek şekilde x- ekseninden uzanan birer düşey dikdörtgen oluştururuz. Bu dikdörtgenler $f(c_k)$'nın pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak x- ekseninin üst tarafında veya alt tarafında bulunabilir.

Her alt aralık üzerinde $f(c_k)\,\Delta x_k$ çarpımını oluştururuz. Bu çarpımları toplayarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

S_p toplamına, f fonksiyonu için $[a,b]$ aralığında Riemann Toplamı denir.

Seçtiğimiz P bölünüşüne ve alt aralıklarda seçilen c_k noktalarına bağlı olarak böyle birçok toplam elde edilebilir.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k$$ Riemann toplamını gözönüne alalım.

$$\mu = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$$

$\mu \to 0$ iken S_n Riemann toplamının sonlu bir I sayısına yakınsadığını kabul edelim.

Bu I sayısına, f fonksiyonunun a'dan b'ye belirli integrali denir ve aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

İntegralin üst sınırı

Fonksiyon integranddır.

İntegral işareti

x integrasyon değişkenidir.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{a \text{ dan } b \text{ ye } f\text{'nin integrali}}$$

İntegralin alt sınırı

İntegralin değerini bulurken integrali hesaplarsınız.

$$I = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu pozitif ise I bize $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x- ekseni arasında kalan bölgenin alanını verir.

TEOREM. $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir.

Örnek. $\int_a^b 1\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

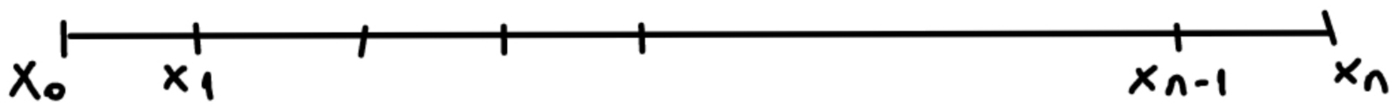
$f(x)=1$ sabit fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığında integralini hesaplayacağız:

$$\int_a^b dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

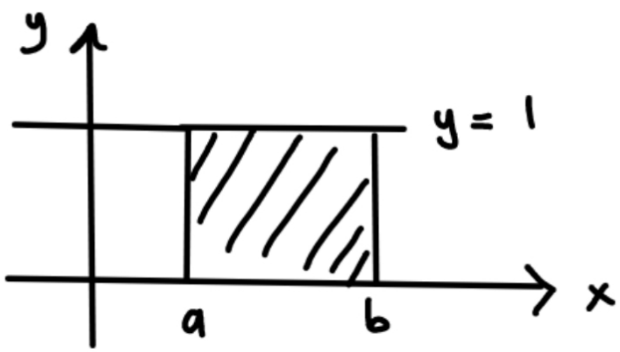
$$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})$$

$$= x_n - x_0 = b - a$$



Geometrik olarak yorumlayalım :

$\int_a^b 1\,dx$ ifadesi $y=1$ doğrusu ile $a \leq x \leq b$ olmak üzere x- ekseni arasında kalan dikdörtgenin alanıdır :



$$\text{Alan} = b-a = \int_a^b dx$$

Örnek. $\int_a^b x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\int_a^b x\,dx = ? \quad , \quad f(x) = x$$

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k\,(x_k - x_{k-1})$$

$$c_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad , \quad c_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$$

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k + x_{k-1})$$

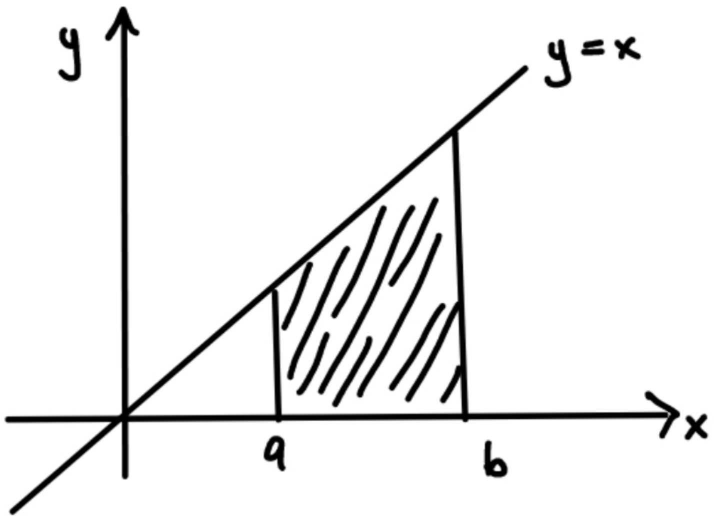
$$= \frac{1}{2} \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - x_{k-1}^2 \right) = \frac{1}{2} \lim_{\mu \to 0} \left(x_n^2 - x_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\mu \to 0} \left(b^2 - a^2 \right) = \frac{1}{2} \left(b^2 - a^2 \right)$$

$$\boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2} \left(b^2 - a^2 \right)}$$

Geometrik olarak yorumlayalım :

$\int_a^b x\,dx$ integrali $y=x$ doğrusu ile $a \leq x \leq b$ olmak üzere x- ekseni arasında kalan bölgenin alanını vermektedir.



$$\text{Alan} = \frac{1}{2}(b-a)(b+a)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2-a^2) = \int_a^b x\,dx$$

Örnek. $\int_a^b x^2\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 (x_i - x_{i-1})$$

$f(x)=x^2$ fonksiyonu sürekli olduğundan $[a,b]$'de integrallenebilirdir; Dolayısıyla yukarıdaki limit vardır ve $\forall p_i$ seçimi için sonuç aynıdır.

$$x_{i-1}^2 < \frac{1}{3}\left(x_{i-1}^2 + x_{i-1}\cdot x_i + x_i^2\right) < x_i^2 \; ; \quad (x_{i-1} < x_i)$$

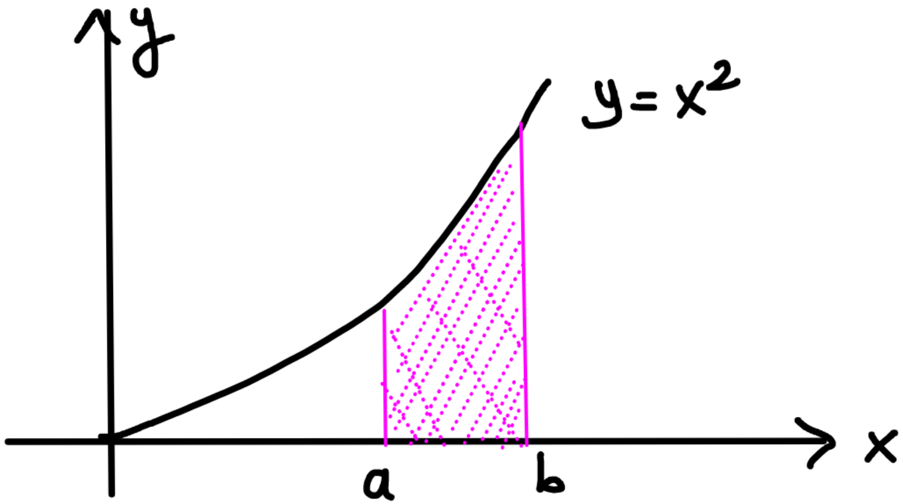
$$P_i = \left(\frac{1}{3} \left(x_{i-1}^2 + x_{i-1} \cdot x_i + x_i^2 \right) \right)^{1/2}$$ seçersek

$x_{i-1} < P_i < x_i$ elde edilir.

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{\mu \to 0} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + x_{i-1} \cdot x_i + x_i^2 \right) \left(x_i - x_{i-1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^3 - x_{i-1}^3 \right) = \frac{1}{3} \left(x_n^3 - x_0^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\mu \to 0} \left(b^3 - a^3 \right) = \frac{1}{3} \left(b^3 - a^3 \right)$$



$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right) = \text{Taralı Alan alanı.}$$

Sonuç.

$$\int_a^b dx = b-a$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)$$

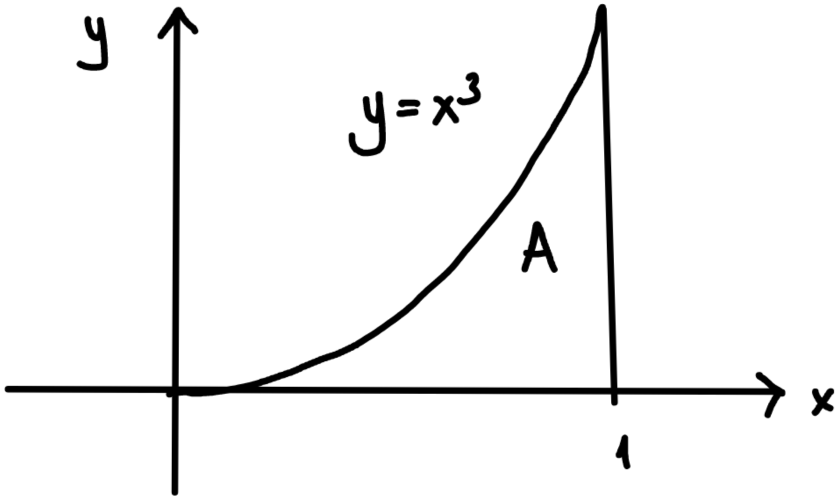
Genel Sonuç.

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)$$

$n=0,1,2,3,\dots$

Örnek. $y = x^3$ eğrisi, $x=1$ doğrusu ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.



$$A = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}\left(1^4 - 0^4\right) = 1/4$$

İNTEGRAL KURALLARI

1. f $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ve c bir sabit ise cf'de $[a,b]$'de integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Gerçekten de $S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ f'in Riemann toplamı ise

O zaman $$cS = c\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c\,f(p_i)\,\Delta x_i}_{cf\text{'in Riemann toplamı}}$$

$$\lim_{\mu\to 0} cS = c\lim_{\mu\to 0} S$$

$$\Rightarrow \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} c f(p_i) \Delta x_i = c \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \int_a^b c f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx .$$

2. f ve g $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise $f+g$'de $[a,b]$'de integrallenebilirdir; ve

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

3. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $[a,b]$'de integrallenebilir fonksiyonlar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitler olmak üzere

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$'de $[a,b]$'de integrallenebilirdir

ve

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b f(x)\, dx + \cdots + c_n \int_a^b f(x)\, dx$$

4. f $[a,b]$'de integrallenebilir ve $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

5. f ve g $[a,b]$'de integrallenebilir ve $f(x) \geq g(x)$'tir.

O zaman

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

6. f $[a,b]$'de integrallenebilir ve $c \leq f(x) \leq C$, c ve C sabit olmak üzere

$$c.(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq C\,(b-a)$$

(v). kurala göre $\int_a^b c\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b C\,dx$

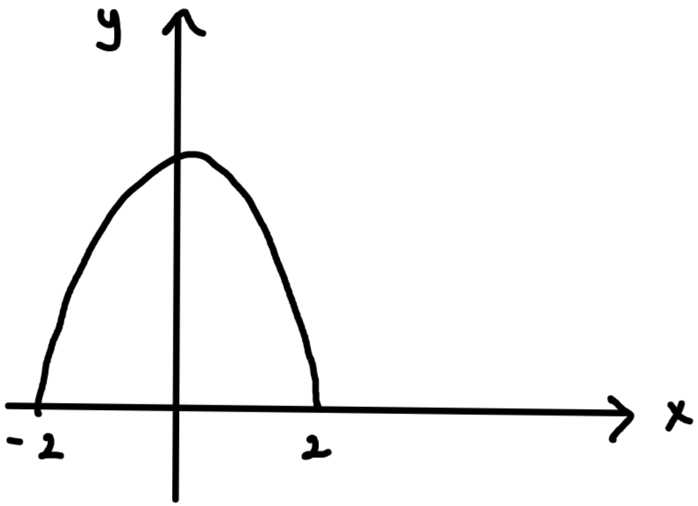
$$\Rightarrow \quad c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq C(b-a)$$

örnek. $\int_2^4 \left(\frac{3}{8}x^2 + 5x - 6\right)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_2^4 \left(\frac{3}{8}x^2 + 5x - 6\right)dx = \frac{3}{8}\int_2^4 x^2\,dx + 5\int_2^4 x\,dx - 6\int_2^4 dx$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{1}{3}\left(4^3 - 2^3\right) + 5.\frac{1}{2}.\left(4^2 - 2^2\right) - 6\,(4-2) = 25$$

Örnek. $y = 4 - x^2$ fonksiyonu ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4\int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} x^2\,dx$$

$$= 4(2-(-2)) - \frac{1}{3}\left(2^3 - (-2)^3\right) = 32/3$$

NOT.

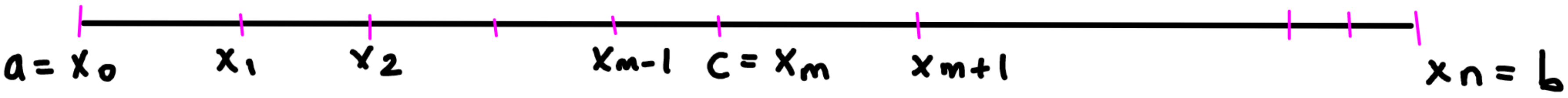
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (a \geqslant b \text{ durumunda})$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Teorem. f fonksiyonu $[a,b]$'de sürekli olsun, c $[a,b]$ aralığının bir iç noktası olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

İspat. $[a,b]$ aralığını aşağıdaki gibi bölüntülere ayıralım



Bu bölünüşe göre Riemann toplamı

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i = S' + S''$$

$$S' = \sum_{i=1}^{m} f(p_i)\,\Delta x_i, \qquad S'' = \sum_{i=m+1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$$

$$\mu = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}, \quad \mu' = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m\}$$

$$\mu'' = \max\{\Delta x_{m+1}, \dots, \Delta x_n\}$$

Eğer $\mu \to 0$ ise $\mu' \to 0$ ve $\mu'' \to 0$ olduğu açıktır.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to 0} S = \lim_{\mu \to 0} (s' + s'')$$

$$= \lim_{\mu \to 0} s' + \lim_{\mu \to 0} s''$$

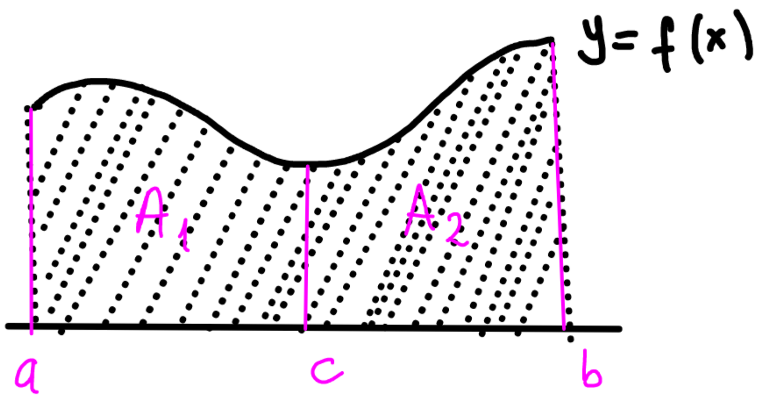
$$= \lim_{\mu' \to 0} s' + \lim_{\mu'' \to 0} s''$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Sonuç. f fonksiyonu a, b, c noktalarını içeren bir aralıkta sürekli ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a, b, c \text{ keyfi})$$

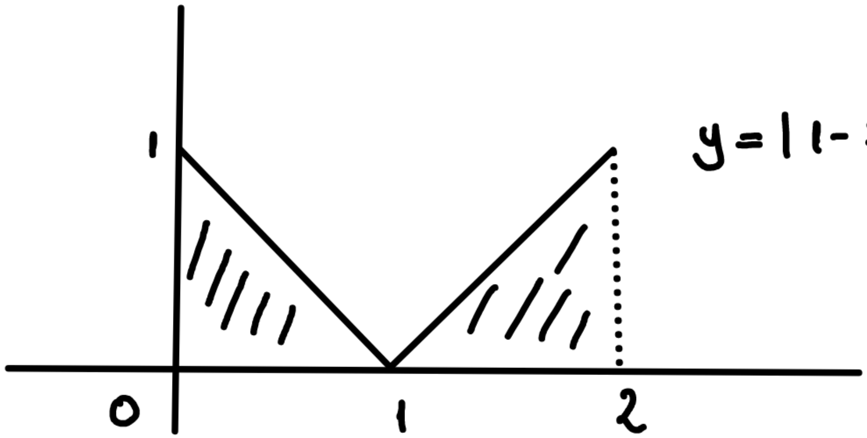
NOT. Toplanabilirliği geometrik olarak yorumlayalım:



$$A_1 + A_2 = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

örnek. $\int_0^2 |1-x|\,dx$ integralini hesaplayınız.



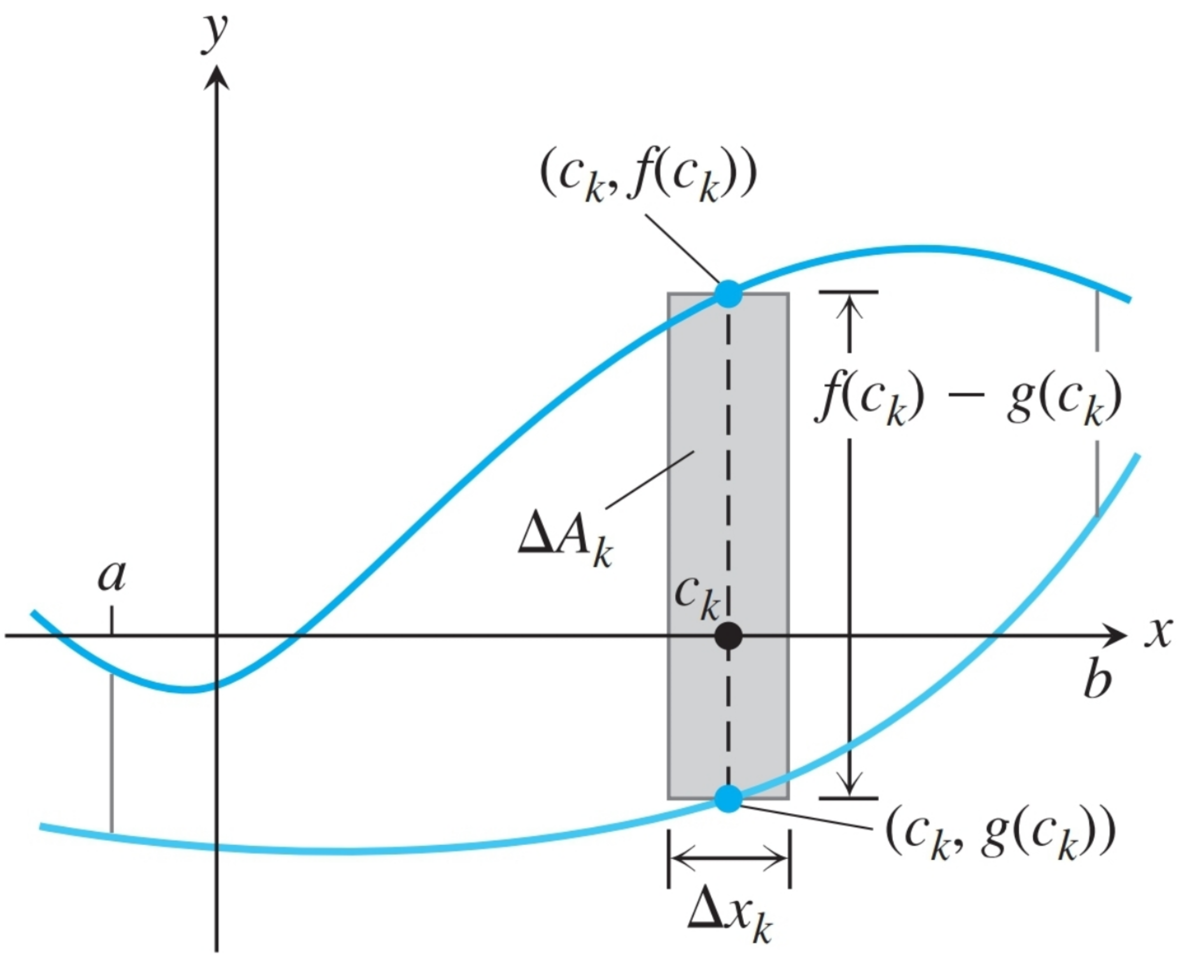
$y = |1-x|$

Alan $= 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \underline{1}$

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) + \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1$$

İki Eğri Arasındaki Alan



$[a,b]$ aralığını n tane bölüntüye ayralım. Her bölüntüden bir c_k noktası alarak, yüksekliği $f(c_k)-g(c_k)$ ve taban uzunluğu Δx_k olan dikdörtgenler oluşturalım.
O zaman k. dikdörtgenin alanı:

$$\Delta A_k = \text{yükseklik} \times \text{genişlik} = [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k$$

O zaman iki eğri arasındaki alana aşağıdaki gibi yaklaşım yapmış oluruz

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \left(f(c_k) - g(c_k)\right) \Delta x_k$$

Bu ise $f(x) - g(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$'deki Riemann toplamıdır. $M \to 0$ iken limite geçersek

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$ elde edilir.

Eğriler Arasındaki Alanlar

f ve g, $[a, b]$ aralığı boyunca $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere, sürekli iseler ***a*'dan *b*'ye kadar $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri arasındaki bögenin alanı** $(f - g)$'nin a'dan b'ye kadar integralidir:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

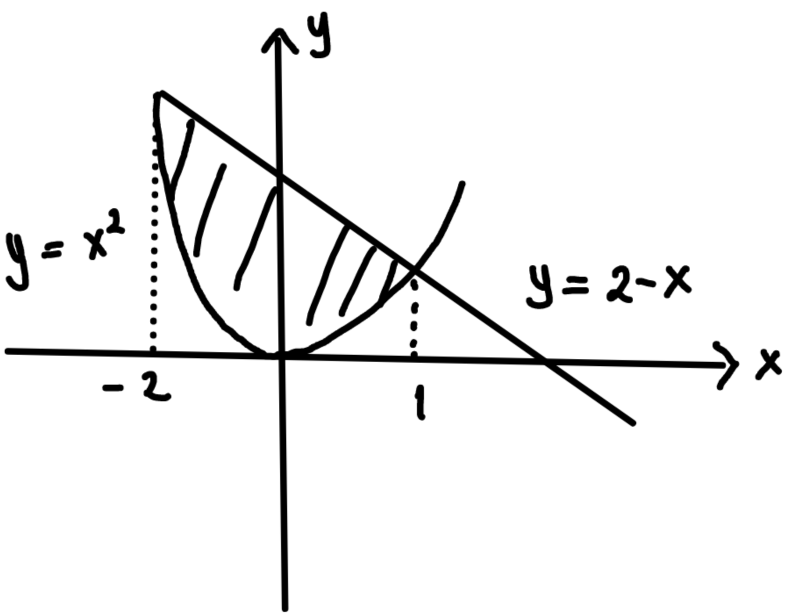
Sonuç. $[a,b]$ aralığında $f(x)$ ve $g(x)$ eğrileri arasındaki alan

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

$f(x)$ fonksiyonu ile x- ekseni arasındaki alan

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx \,.$$

Örnek. $y = 2 - x$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolü arasındaki alanı bulunuz.



$$2 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

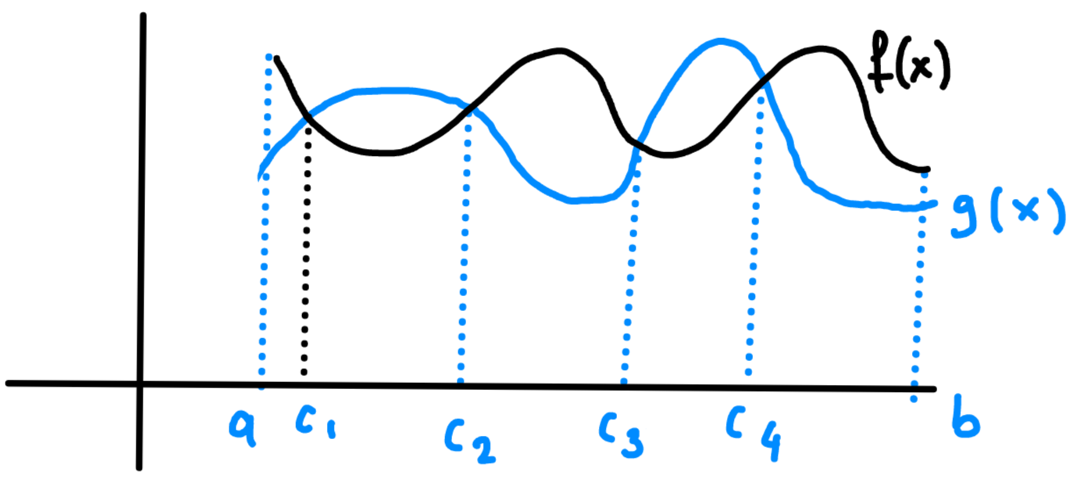
$$x = 1, \quad x = -2$$

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$

$$= 2\int_{-2}^{1} dx - \int_{-2}^{1} x\, dx - \int_{-2}^{1} x^2\, dx$$

$$= 9/2$$

NOT.



$$A_{lan} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$A = \int_a^{c_1} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{c_1}^{c_2} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{c_2}^{c_3} (f(x) - g(x))\, dx$$

$$+ \int_{c_3}^{c_4} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{c_4}^{b} (f(x) - g(x))\, dx$$

Örnek. $y = x^3 - x^2 - 2x$ eğrisi ile x- ekseni arasındaki bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm. $(x^3 - x^2 - 2x) = x(x+1)(x-2)$, $x=0$, $x=-1$, $x=2$

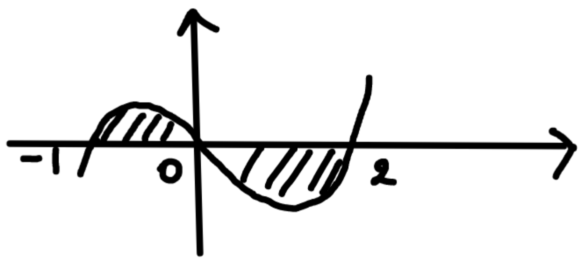
x- eksenini kestiği noktalar

$f(x) = x(x+1)(x-2)$

$$A = \int_{-1}^{2} |x^3 - x^2 - 2x| \, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x) \, dx + \int_{0}^{2} -(x^3 - x^2 - 2x) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x^3 \, dx - \int_{-1}^{0} x^2 \, dx - 2\int_{-1}^{0} x \, dx - \int_{0}^{2} x^3 \, dx + \int_{0}^{2} x^2 \, dx + 2\int_{0}^{2} x \, dx$$

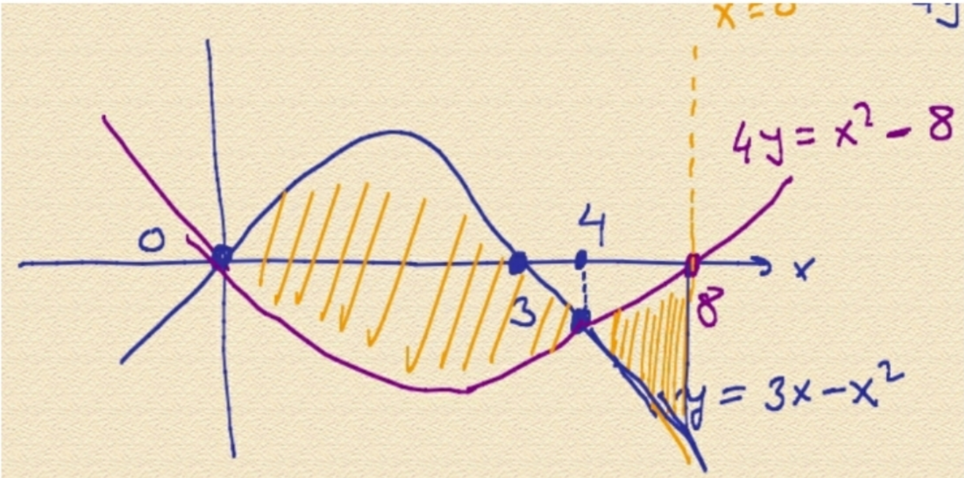
$$= 37/12$$



Taralı Alan = 37/12

Örnek.

R; $[0, 8]$ aralığında $4y = x^2 - 8x$ ve $y = 3x - x^2$ eğrileri ile sınırlı bölge olmak üzere, alanını bulunuz.



$$4y = x^2 - 8x$$

$$y = 3x - x^2$$

$$12x - 4x^2 = x^2 - 8x$$

$$20x - 5x^2 = 0$$

$$5x(4 - x) = 0$$

$$x = 4 \quad , \quad x = 0$$

$$A = \int_0^4 (3x - x^2) - \left[\frac{x^2 - 8}{4} \right] dx$$

$$+ \int_4^8 \left[\frac{x^2 - 8}{4} \right] - (3x - x^2) \quad dx$$

Örnek.

Aşağıdaki limiti belirli integral ile ifade ediniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2.\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n} \right) . \frac{1}{n}$$

Çözüm.

Çözüm. $c_i = \frac{i}{n}$ seçelim, $[0,1]$ aralığını n eşit parçaya ayıralım:

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$ olur.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \frac{i}{n} \right) \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2c_i^2 + c_i\right) \Delta x_i$$

$f(x) = 2x^2 + x$ olmak üzere

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^2 + x)\,dx$$

Örnek.

Integralin geometrik yorumunu kullanarak aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız.

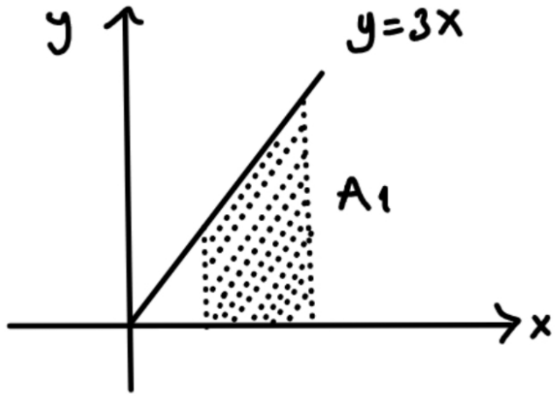
$$\int_2^4 3x + \sqrt{4x - x^2}\, dx$$

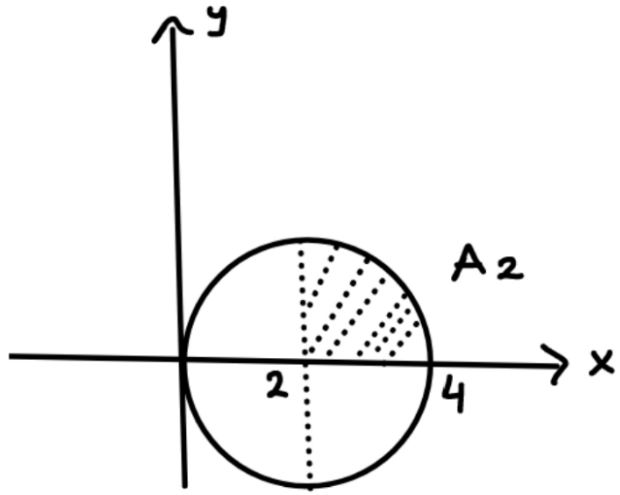
Çözüm.

$$I = \underbrace{\int_2^4 3x\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_2^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx}_{A_2}$$

$2 \leq x \leq 4$ olmak üzere $y=3x$ ve x- ekseni arasında kalan bölgenin alanını verir.

$2 \leq x \leq 4$ olmak üzere $y=\sqrt{4x-x^2}$ eğrisi ile x- ekseni arasında kalan bölgenin alanını verir.





$$y = \sqrt{4x - x^2}$$

$$y^2 = 4x - x^2$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$I = A_1 + A_2 = \frac{12+6}{2} \cdot 2 + \frac{\pi 4}{4} = 18 + \pi$$

örnek.

f'nin grafiği ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $0 \leq x \leq 3$

b. $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$; $-2 \leq x \leq 3$

Çözüm.

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \quad (x-3)(x-1) = 0 \,, \quad x = 3, \quad x = 1$

$f(x) = (x-3)(x-1)$

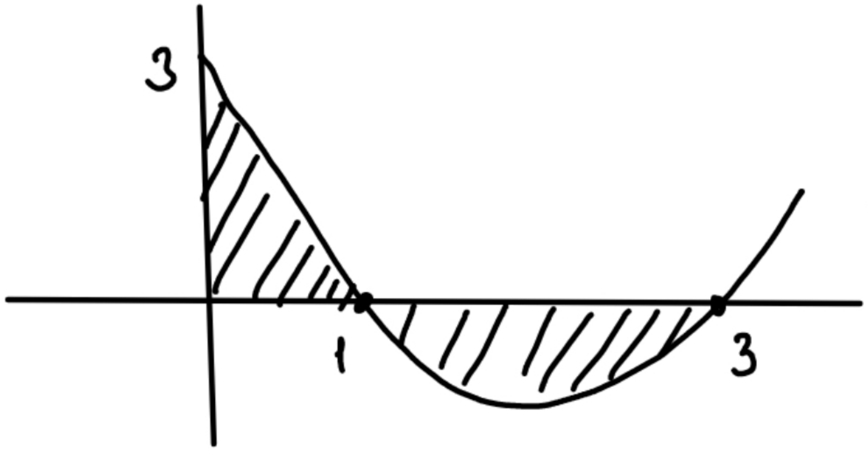
$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \quad f(x) \geqslant 0$

$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \quad f(x) \leq 0$

$$\text{Alan} = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{8}{3}$$



$f(x) = x^2 - 4x + 3$

b. $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$; $f(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$

$$f(x) = \frac{4-x^2}{4} = \frac{1}{4}(2-x)(2+x)$$

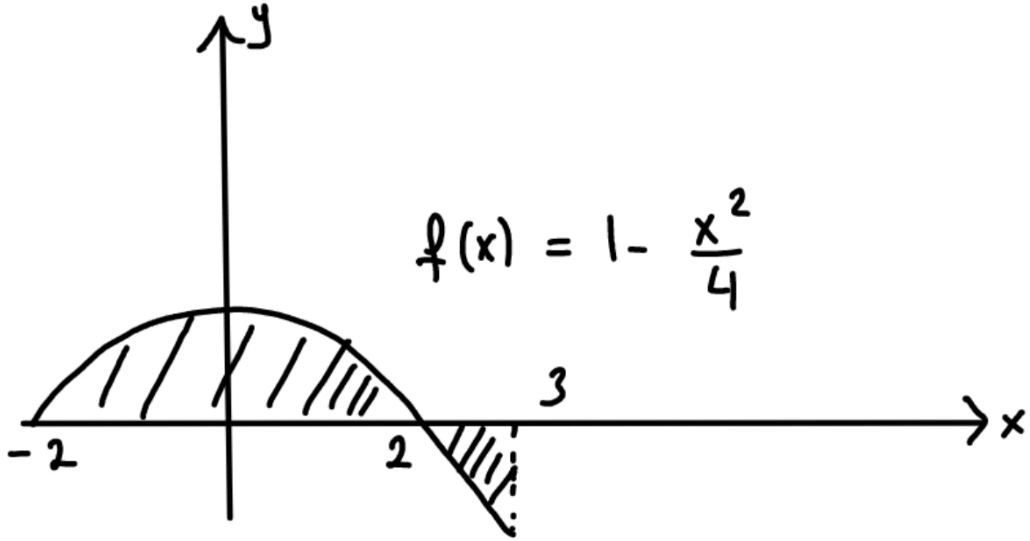
$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$2 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$\text{Alan} = \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx - \int_{2}^{3} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

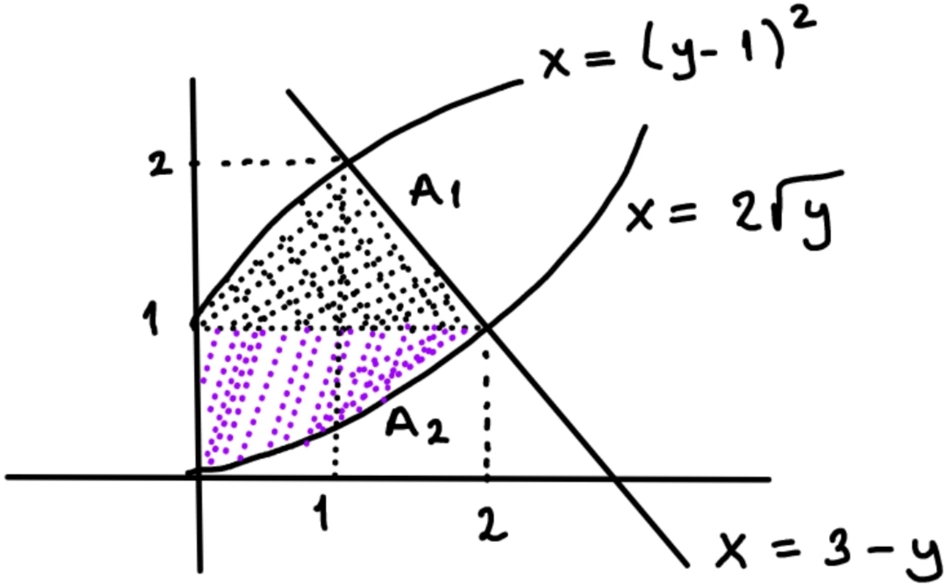
$$= \left(x - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_{2}^{-2} - \left(x - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_{2}^{3}$$

$$= \frac{13}{4}$$



Örnek.

Soldan y-ekseni, alttan $x = 2\sqrt{y}$, sol üstten $x = (y-1)^2$ ve sağ üstten $x = 3-y$ ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



$$(y-1)^2 = 3-y \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2, \quad x = 1$$

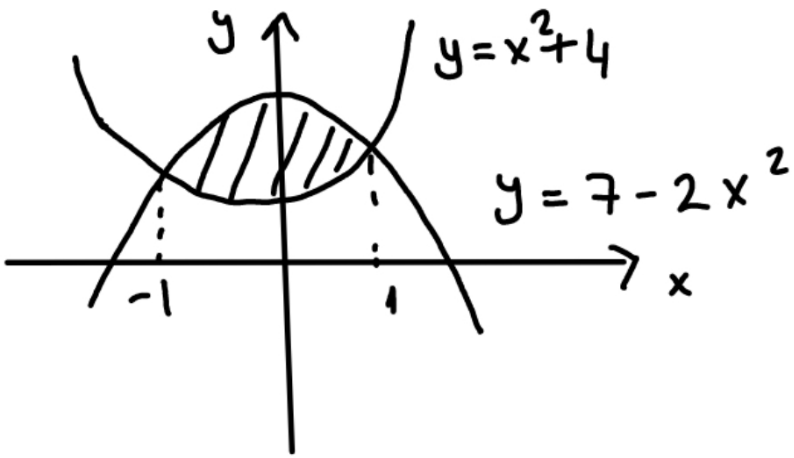
$$2\sqrt{y} = 3-y \Rightarrow 4y = 9 - 6y + y^2 \Rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0, \quad y = 1, \quad x = 2$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 \left((3-y) - (y-1)^2\right) dy + \int_0^1 2\sqrt{y}\, dy = 5/2$$

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + 1 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(3 - x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{5}{2}$$

Örnek.

$y = 7-2x^2$ ve $y = x^2+4$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



$$x^2+4 = 7-2x^2$$

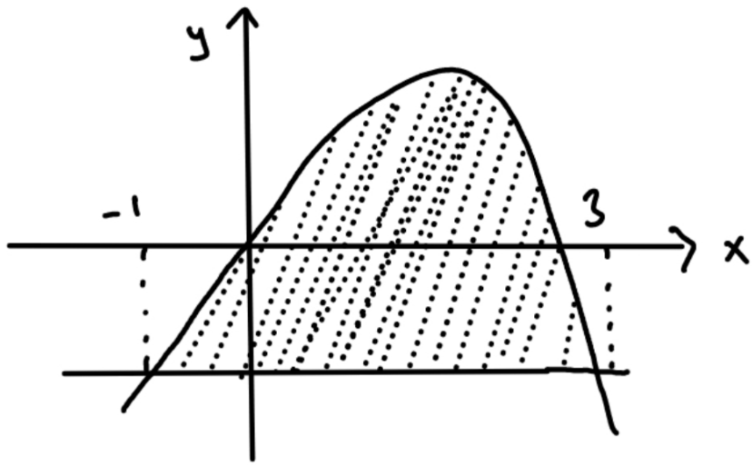
$$3x^2=3 \quad , \quad x=\mp 1$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(7-2x^2-x^2-4\right) dx$$

$$A = 4$$

örnek.

$y = 2x - x^2$ ve $y = -3$ ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



$$-3 = 2x - x^2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 3, \quad x = -1$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(2x - x^2 - (-3)\right) dx = 32/3$$