LİNEER DÖNÜŞÜMLER:

Tanım: V ve W iki vektör uzayı olsun. V'den W'ye giden $f: V \to W$ fonksiyonu;

a) V'nin her u, v elemanı için $\boxed{L(u+v) = L(u) + L(v)}$ koşulunu sağlıyorsa yani toplamayı dağıtıyorsa,

b) Her c skaleri ve V'nin her v elemanı için $L(c.v) = c.L(v)$ koşulunu sağlıyorsa yani skaleri dışarı atabiliyorsa, DİKKAT! Bu vektör uzayının bir elemanı değil. Bir skaler.

, bu f fonksiyonuna bir "lineer dönüşüm" denir.

Eğer $f: V \to V$, V vektör uzayından (başka bir W'ye değil de) yine kendisine giden yukarıdaki ⓐ ve ⓑ koşullarını sağlayan bir dönüşüm ise f'e bir "lineer operatör" denir.

ÖRNEK: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$ şeklinde tanımlanan L dönüşümü bir lineer dönüşüm müdür?

Çözüm:
$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

L aldığı her üçlüyü, bu üçlünün ilk iki bileşenini ve son iki bileşenini toplayıp elde ettiğimiz ikiliye gönderiyor.

Şimdi bu şekilde tanımlanmış olan L'nin ⓐ ve ⓑ koşullarını sağlayıp sağlamadığına bakalım.

(a) Öncelikle $\mathbb{R}^3$ ten 2 tane farklı eleman alıyorum. Bu elemanlar (x,y,z) ve $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ olsun. Şimdi görmek istediğimiz:

$$L((x,y,z)+(a,b,c)) \overset{?}{=} L(x,y,z) + L(a,b,c) \quad (?)$$

Bu eşitliği görmek için;

$$L(\underbrace{(x,y,z)+(a,b,c)}_{\text{üçlüleri toplayalım}}) = L(x+a, y+b, z+c)$$

L fonksiyonunun aldığı üçlüleri nereye götürdüğünü biliyorum.

$$= (x+a+y+b, y+b+z+c)$$

$$= \underbrace{(x+y, y+z)}_{\parallel} + \underbrace{(a+b, b+c)}_{\parallel}$$

$$= L(x,y,z) + L(a,b,c)$$

Dolayısıyla (a) sağlandı. ✓

(b) Bir $c \in \mathbb{R}$ skaler ve $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ alalım. Görmek istediğimiz:

$$L(c\cdot(x,y,z)) \overset{?}{=} c \cdot L(x,y,z) \quad (?)$$

Bu eşitliği görmek için;

$$L(c\cdot(x,y,z)) = L(cx, cy, cz)$$

$$= (cx+cy, cy+cz) = (c(x+y), c(y+z))$$

$$= c(x+y, y+z)$$

$$= c \cdot L(x,y,z)$$

Dolayısıyla (b) sağlandı. ✓ $\Rightarrow$ (a) ve (b) sağlandığından L bir lineer dönüşümdür.

ÖRNEK: $L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x_1,x_2)=(x_1+1,\, x_2+1)$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm, lineer dönüşüm müdür?

Çözüm: ⓐ $(x,y),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$ alalım. Öncelikle

$$L\big((x,y)+(a,b)\big) \overset{(?)}{=} L(x,y)+L(a,b)$$ eşitliğini görmeye çalışalım.

$$L\big((x,y)+(a,b)\big) = L(x+a,\, y+b)$$

L fonksiyonu birinci ve ikinci bileşeni alıp 1 'er fazlasına götüren bir dönüşüm.

$$=\big((x+a)+1,\ (y+b)+1\big)$$

$$=(x+a+1,\ y+b+1)$$

Diğer taraftan eşitliğin diğer tarafının neye eşit olduğunu bulalım ve sonra yorum yapalım.

$$L(x,y)+L(a,b) = (x+1,\, y+1)+(a+1,\, b+1)$$

$$=(x+a+2,\ y+b+2)$$

$\neq$

$L\big((x,y)+(a,b)\big) \neq L(x,y)+L(a,b)$ olduğundan L bir lineer dönüşüm değildir.

(ⓑ koşuluna bakmaya gerek yoktur!)

ÖRNEK: $L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $L(x_1,x_2)=(-x_2,\, -x_1,\, x_1,\, x_2)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir lineer dönüşüm müdür?

Çözüm: ⓐ $(x,y),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$L\big((x,y)+(a,b)\big) \underset{(?)}{=} L(x,y)+L(a,b)$$ (?) eşitliği sağlanır mı?

$$L((x,y)+(a,b)) = L(x+a, y+b)$$
$$= (-(y+b), -(x+a), (x+a), (y+b))$$
$$= (-y-b, -x-a, x+a, y+b)$$

Diger taraftan esitligin diger tarafını inceleyelim:

$$\underbrace{L(x,y)}+\underbrace{L(a,b)} = (-y, -x, x, y) + (-b, -a, a, b)$$
$$= (-y-b, -x-a, x+a, y+b)$$

$=$

(a) koşulundaki eşitlik sağlandı.

(b) $c \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alalım. $L(c.(x,y)) \overset{(?)}{=} c\, L(x,y)$ esitligi sağlanır mı?

$$L(c.(x,y)) = L(cx, cy)$$
$$= (-c.y, -cx, cx, cy)$$
$$= c\underbrace{(-y, -x, x, y)}$$
$$= c.\, L(x,y)$$

O halde (b)'deki esitlik sağlandı.

(a) ve (b) koşulları sağlandığından $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$L(x_1, x_2) = (-x_2, -x_1, x_1, x_2)$ seklinde tanımlanan dönüsüm bir lineer

dönüsümdür.

Teorem: V ve W birer vektör uzayı ve $L: V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $L(0_V) = 0_W$ (Bir lineer dönüşüm sıfır elemanını sıfır elemanına taşır.)

(ii) $L(-v) = -L(v)$

(iii) $L(\underbrace{c_1}_{\text{skaler}} v_1 + \underbrace{c_2}_{\text{skaler}} v_2 + \dots + \underbrace{c_n}_{\text{skaler}} v_n) = \underbrace{c_1}_{\text{skaler}} . L(v_1) + \dots + \underbrace{c_n}_{\text{skaler}} L(v_n)$

ÖRNEK: $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 . x_2, \; x_2 . x_3, \; x_1 + x_2 + x_3)$

bir lineer dönüşüm müdür?

$$L(-(1,1,1)) = L(-1,-1,-1) = ((-1).(-1), (-1).(-1), (-1)+(-1)+(-1))$$
$$= (1, 1, -3)$$

$\neq$

$$-L(1,1,1) = -(1.1, \; 1.1, \; 1+1+1) = -(1,1,3) = (-1,-1,-3)$$

Yukarıdaki teoremden bu bir lineer dönüşüm değildir.

NOT: Yukarıdaki teoremde (i) veya (ii) sağlandığı zaman $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olduğu söylenemez.

$\boxed{L: V \to W \text{ bir lineer dönüşüm} \Rightarrow \text{(i) ve (ii) sağlanır}}$

Yada başka bir deyişle

$\boxed{\text{(i) veya (ii) sağlanmazsa} \Rightarrow L \text{ bir lineer dönüşüm değildir}}$

Örneğin bu dersin başlarında çözmüş olduğumuz $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$L(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$ şeklinde tanımlı olan dönüşümün bir

lineer dönüşüm olmadığını söylemiştik. (a) koşulunu sağlamadığını gösterdik.

$$L(0,0) = (0+1, 0+1) = (1,1) \neq (0,0)$$ olduğundan

L dönüşümü sıfırı, sıfıra taşımaz. Dolayısıyla yukarıdaki teoremdeki

(i) sağlanmadığından L'nin bir lineer dönüşüm olmadığını buradan

da söyleyebiliriz.