SORULAR:

(1) Aşağıdaki $\mathbb{R}^n$ 'in altkümelerinin birer altuzay olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $W_1 = \{(x,0,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

- $W_1 \neq \emptyset$ çünkü $(0,0,0,0) \in W_1$ 'dir.
- $(x,0,y,0), (a,0,b,0) \in W$ alalım.

$$\underset{\in\mathbb{R}}{(x},0,\underset{\in\mathbb{R}}{y},0) + (\underset{\in\mathbb{R}}{a},0,\underset{\in\mathbb{R}}{b},0) = (\underbrace{x+a}_{\in\mathbb{R}}, 0, \underbrace{y+b}_{\in\mathbb{R}}, 0) \in W_1 \text{ 'dir.}$$

- c bir skaler, $(x,0,y,0) \in W_1$ alalım.

$$c\cdot(\underbrace{x}_{\in\mathbb{R}},0,\underbrace{y}_{\in\mathbb{R}},0) = (\underbrace{cx}_{\in\mathbb{R}},0,\underbrace{cy}_{\in\mathbb{R}},0) \in W \text{ 'dir.}$$

O halde W_1 $\mathbb{R}^4$ ün bir altuzayıdır.

b) $W_2 = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n = 0\}$

- $(0,0,\ldots,0) \in W_2 \Rightarrow W_2 \neq \emptyset$
- $(x_1,x_2,\ldots,x_n), (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in W_2$ alalım.

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \qquad y_1+y_2+\cdots+y_n=0 \text{ 'dır.}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \in W_2$ (?)

$\underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{=0} + \underbrace{y_1 + \dots + y_n}_{=0} = (x_1+y_1) + (x_2+y_2) + \dots + (x_n+y_n) = 0$

$\Rightarrow (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \in W_2$ 'dir.

c) $W_3 = \{(x,x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}^4\}$ $\left(= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=y, t=0\} \right.$ şeklinde de verilebilirdi. $\left.\right)$

• $(0,0,0,0) \in W_3 \Rightarrow W_3 \neq \emptyset$ ✓

• $(x,x,y,0), (a,a,b,0) \in W_3$ alalım.

$(x,x,y,0) + (a,a,b,0) = (x+a, x+a, y+b, 0) \in W_3$ ✓

• $c \in \mathbb{R}$, $(x,x,y,0) \in W_3$ alalım.

$c.(x,x,y,0) = (cx, cx, cy, 0) \in W_3$ olur.

W_3 $\mathbb{R}^4$ 'ün bir altuzayı olur.

d) $W_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall x_i \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

rasyonel sayılar kümesi.

• $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $(1,1,\dots,1) \in W_4$ alalım. $\sqrt{2}.(1,\dots,1) = (\underset{\notin \mathbb{Q}}{\sqrt{2}}, \dots, \underset{\notin \mathbb{Q}}{\sqrt{2}}) \notin W_4$

$\Rightarrow W_4$ $\mathbb{R}^n$ 'nin bir altuzayı olamaz.

2) Aşağıdakilerden hangisi reel $n \times n$ matris uzayının bir altuzayıdır?

a) Köşegen matrisler ?

- I bir köşegen matris olduğundan, köşegen matrisler kümesi $\neq \emptyset$.
- 2 tane köşegen matrisin toplamı yine bir köşegen matris olduğundan köşegen matrisler kümesi toplamaya göre kapalı.
- Bir köşegen matrisin bir skalerle çarpımı yine bir köşegen matris olduğundan köşegen matrisler kümesi skalerle çarpmaya göre kapalıdır.

O halde köşegen matrisler kümesi matris uzayının bir altuzayıdır.

b) Tersinir olmayan matrisler ? (det $A=0$ olan matrisler)

- $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ tersinir olmayan bir matris olduğundan $\neq \emptyset$.

  $\det A = 0$

- $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ A ve B iki tersinir olmayan matris olmalarına

  $\det A=0$ $\det B=0$

  rağmen $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A+B)=3\neq 0$ olduğundan $A+B$ tersinirdir!

Toplamaya göre kapalı değildir.

$\therefore$ Altuzay değildir.

—o—