HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

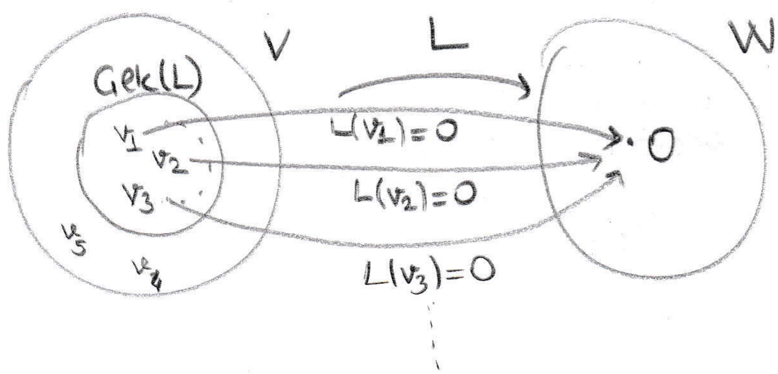
BİR LİNEER DÖNÜŞÜMÜN ÇEKİRDEĞİ ve GÖRÜNTÜSÜ:

Tanım: $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

(1) V'nin L dönüşümü altındaki görüntüsü 0 olan tüm elemanlarının kümesine L dönüşümünün "çekirdeği" denir ve Çek(L) yada Ker(L) ile gösterilir.

$$\boxed{Çek(L) = \{ v \in V \mid L(v) = 0 \}}$$

* Çekirdek kümesi, V'nin bir altuzayıdır. (Bunu kolayca görebilirsiniz.)

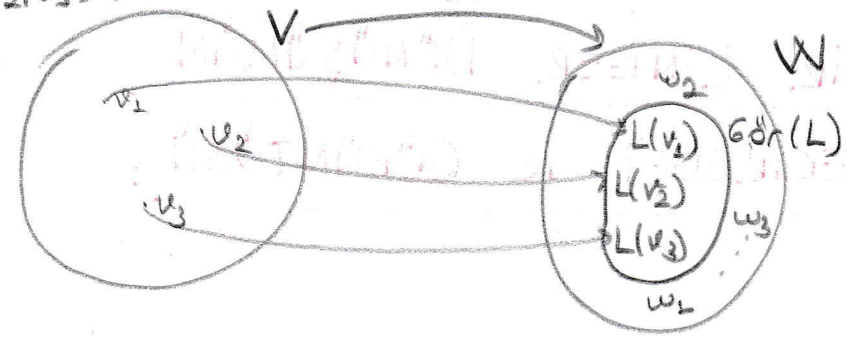


(2) V'den aldığımız tüm elemanların L altındaki görüntülerinin kümesine V'nin "görüntü kümesi" denir Gör(L) yada Im(L) ile gösterilir.

$$\boxed{Gör(L) = \{ L(v) \mid v \in V \}}$$

* Görüntü kümesi, W'nin bir altuzayıdır. (Bunu kolayca görebilirsiniz.)

$V=\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun.



ÖRNEK: $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü

$L(x,y,z) = (x-y\,,\,y-z)$ şeklinde tanımlansın.

a) $(1,1,1)$ vektörü Çek(L) 'nin elemanı mıdır?

EVET. Çünkü $L(1,1,1) = (1-1,\,1-1) = (0,0)$ 'dır ve Çek(L), L altındaki görüntüleri 0 olan elemanlardan oluştuğundan $(1,1,1) \in$ Çek(L) 'dir.

b) $(1,-1,1)$ vektörü Çek(L) 'nin elemanı mıdır?

HAYIR. Çünkü $L(1,-1,1) = (1-(-1),\,(-1)-1) = (2,0) \neq 0$ olduğundan $(1,-1,1) \notin$ Çek(L) 'dir.

c) $(1,0)$ vektörü Gör(L) 'nin elemanı mıdır?

EVET. Çünkü $L(x,y,z) = (1,0)$ olacak şekilde en az bir tane (x,y,z) elemanı var mıdır sorusunun cevabı evettir.

$L(x,y,z) = (x-y,\,y-z) = (1,0)$ olması için $\underbrace{x-y=1}_{x=y+1},\ \underbrace{y-z=0}_{y=z}$ olmalıdır. O halde $(x,y,z) = (y+1,\,y,\,y)$ tipindeki tüm elemanların görüntüsü $(1,0)$'dır.

ÖRNEK! $L: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü

$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 , x_2 - x_4)$ şeklinde tanımlansın.

a) Çek(L) kümesini bulunuz.

b) Çek(L) kümesi için bir taban bulunuz.

Çözüm: a) $Çek(L) = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid L(x,y,z,t) = 0 = (0,0) \}$

Yani Çek(L), $\mathbb{R}^4$ ün L altındaki görüntüsü 0 olan elemanlarından oluşur. Şimdi bu elemanı yada elemanları bulalım:

$L(x,y,z,t) = (x+z , y-t) = (0,0)$ olan (x,y,z,t)'ler ne?

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=0 \\ y-t=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x = z \\ y = t \end{array}$$

O halde $L(x,y,z,t) = (0,0)$ olan tüm (x,y,z,t)'ler $(x,y,-x,y)$ şeklindedir. Yani,

$$\boxed{Çek(L) = \{ (x,y,-x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}}$$

b) Çek(L) için bir taban bulmak için;

① Çek(L)'yi geren bir küme bulmalıyız.

② Bu germe kümesinden lineer bağımsız olan elemanları seçmeliyiz.

(1) Keyfi bir $(x, y, -x, y)$ elemanını Çek(L) kümesinden alalım.

$$(x, y, -x, y) = x.(1,0,-1,0) + y.(0,1,0,1) \text{ 'dir.}$$

Yani Çek(L) 'den aldığım her elemanı $(1,0,-1,0)$ ve $(0,1,0,1)$ elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazabilirim.

O halde, $\text{Çek}(L) = \langle (1,0,-1,0), (0,1,0,1) \rangle$ 'dir.

(2) Şimdi bu $(1,0,-1,0)$ ve $(0,1,0,1)$ elemanlarının lineer bağımsız olup olmadıklarına bakalım:

$c_1.(1,0,-1,0) + c_2.(0,1,0,1) = 0 = (0,0,0,0)$ alalım.

$\Rightarrow (c_1, c_2, -c_1, c_2) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\therefore \{(1,0,-1,0), (0,1,0,1)\}$ lineer bağımsızdır.

Sonuç olarak $\{(1,0,-1,0)$ ve $(0,1,0,1)\}$ kümesi Çek(L) için bir tabandır.

ÖRNEK: $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 - x_3,\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3)$$

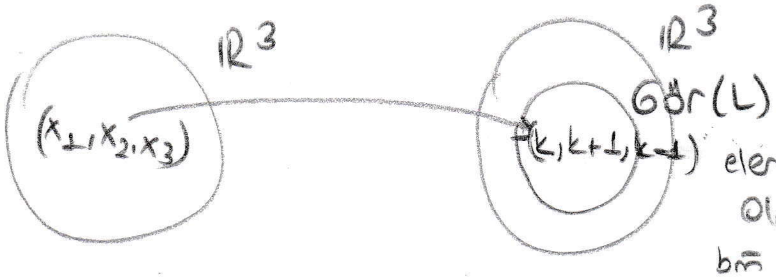
şeklinde tanımlansın.

$(k, k+1, k-1)$ elemanının Gör(L) kümesine düşmesi için k ne olmalıdır?

Çözüm: $(k, k+1, k-1)$'in Gör(L)'ye düşmesi için

$L(x_1, x_2, x_3) = (k, k+1, k-1)$ olacak şekilde en az bir $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

elemanının bulunması gerekmektedir.



elemanının Gör(L) de olması için $(k, k+1, k-1)$ bir elemanın görüntüsü şeklinde olmalıdır.

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 - x_3,\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3) = (k, k+1, k-1)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= k \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= k+1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= k-1 \end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sisteminin çözümünün olması için (yani (x_1, x_2, x_3)'lerin olması için) k ne olmalıdır?

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & k \\ -2 & 1 & -1 & k+1 \\ -1 & 3 & -2 & k-1 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & k \\ 0 & 5 & -3 & 3k+1 \\ 0 & 0 & 0 & -k-2 \end{array}\right]$$

Bu denklem sisteminin çözümünün olması için $-k-2=0$ olmalıdır.

$\boxed{k=-2}$ olmalıdır.