

TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE AYRILABİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu hafta neler öğreneceğiz:

- Tam diferansiyel denklem nedir?
- Diferansiyel denklemin tam olduğu nasıl anlaşılır?
- Tam diferansiyel denklemler nasıl çözülür?
- Tam olmayan diferansiyel denklemler tamlaştırılabilir mi?: İntegral çarpanları
- Ayrılabilen diferansiyel denklem nedir, nasıl çözülür?

Tavsiye edilen kaynak:

- S.L. Ross Introduction to Ordinary Differential Equations

Kitaptan çözülmesi tavsiye edilen problemler:

- ★ Bölüm 2.1 ve 2.2'deki ilgili alıştıırma soruları

2.1 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Standart Formları

Bu bölümde incelenecek birinci mertebeden diferansiyel denklemler, türev formunda

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.1)$$

veya diferansiyel formda

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.2)$$

ifade edilebilir.

Bu formlardan birinde verilen bir denklem, kolayca diğer forma dönüştürülebilir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

denklemini (2.1) formundadır. Bu denklem

$$(x^2 + y^2)dx + (y - x)dy = 0$$

şeklinde yazılabilir ve bu da (2.2) formundadır.

Benzer şekilde,

$$(\sin x + y)dx + (x + 3y)dy = 0$$

denklemini (2.2) formunda olup, (2.1) formuna şu şekilde dönüştürülebilir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x + y}{x + 3y}$$

(2.1) formunda, değişken gösteriminden de açıkça görüldüğü gibi, y bağımlı değişken, x ise bağımsız değişken olarak ele alınmaktadır. Ancak, (2.2) formunda, herhangi bir değişken bağımlı, diğeri ise bağımsız olarak düşünülebilir. Bununla birlikte, bu derste, aksi belirtilmediği sürece, x ve y içeren tüm (2.2) formundaki diferansiyel denklemlerde y bağımlı ve x bağımsız değişken olarak ele alınacaktır.

2.2 Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.1

F , iki gerçel değişkenli bir fonksiyon olsun ve F , bir D bölgesi üzerinde sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun. Bu durumda, F fonksiyonunun toplam diferansiyeli dF ,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy$$

şeklinde tanımlanır; burada $(x, y) \in D$ 'dir.

Örnek 2.1

F , iki gerçel değişkenli aşağıdaki fonksiyon olsun:

$$F(x, y) = xy^2 + 2x^3y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Bu durumda,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y^2 + 6x^2y, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy + 2x^3$$

olur ve toplam diferansiyel dF şu şekilde tanımlanır:

$$dF(x, y) = (y^2 + 6x^2y) dx + (2xy + 2x^3) dy \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tanım 2.2

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2.3}$$

ifadesi, eğer bir F fonksiyonu var olup bu ifade, tüm $(x, y) \in D$ için toplam diferansiyel

$$dF(x, y)$$

ile eşitlenebiliyorsa, D bölgesinde bir *tam diferansiyel* olarak adlandırılır. Yani, (2.3) ifadesi D 'de tam diferansiyel ise, öyle bir F fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

tüm $(x, y) \in D$ için sağlanır.

Eğer $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ bir tam diferansiyel ise,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

denklemini bir *tam diferansiyel denklem* olarak adlandırılır.

Örnek 2.2

Aşağıdaki diferansiyel denklem

$$y^2 dx + 2xy dy = 0$$

bir tam diferansiyel denklemdir, çünkü $y^2 dx + 2xy dy$ ifadesi tam diferansiyeldir. Gerçekten, bu ifade

$$F(x, y) = xy^2$$

fonksiyonunun toplam diferansiyelidir; çünkü dx 'in katsayısı

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y^2$$

ve dy 'nin katsayısı

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy$$

olmaktadır.

Öte yandan, (2.4) numaralı denklemden y 'ye bölünerek elde edilen

$$ydx + 2xdy = 0$$

daha basit görünen bu denklem tam diferansiyel değildir.

Teorem 2.3

Aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Burada M ve N , dikdörtgensel bir bölge D içindeki tüm (x, y) noktalarında sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahiptir.

a) Eğer diferansiyel denklem (2.6) D bölgesinde tam ise, o zaman

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

eşitliği tüm $(x, y) \in D$ için sağlanır.

b) Tersine, eğer

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

eşitliği tüm $(x, y) \in D$ için sağlanıyorsa, o zaman diferansiyel denklem (2.6) D bölgesinde tamdır.

Örnek 2.4

Aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım:

$$(2x \sin y + y^3 e^x) dx + (x^2 \cos y + 3y^2 e^x) dy = 0$$

Burada,

$$M(x, y) = 2x \sin y + y^3 e^x$$

$$N(x, y) = x^2 \cos y + 3y^2 e^x$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x \cos y + 3y^2 e^x = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

tüm dikdörtgensel bölgelerde sağlanmaktadır. Dolayısıyla, bu diferansiyel denklem her dikdörtgensel bölgede tamdır.

2.3 Tam Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Teorem 2.5

Diferansiyel denklem

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Teorem 2.1'in türevlenebilirlik koşullarını sağlasın ve dikdörtgensel bir bölge D içinde tam olsun. O zaman, bu diferansiyel denklemin bir parametrelili çözüm ailesi

$$F(x, y) = c$$

şeklindedir. Burada F fonksiyonu

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \text{tüm } (x, y) \in D \text{ için}$$

şartlarını sağlar ve c keyfi bir sabittir.

Örnek 2.6

Aşağıdaki denklemi çözünüz:

$$(3x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 2y) dy = 0$$

Çözüm. Öncelikle denklemin tam olup olmadığını belirlemeliyiz. Burada

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 3x^2 + 4xy, & N(x, y) &= 2x^2 + 2y, \\ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} &= 4x, & \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= 4x \end{aligned}$$

tüm gerçel (x, y) için sağlanmaktadır, dolayısıyla denklem her dikdörtgensel bölge D içinde tamdır. O halde,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2 + 4xy \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = 2x^2 + 2y$$

eşitliklerini sağlayan bir F fonksiyonunu bulmalıyız.

İlk ifadededen,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M(x, y) dx + \phi(y) = \int (3x^2 + 4xy) dx + \phi(y) \\ &= x^3 + 2x^2y + \phi(y) \end{aligned}$$

Buradan

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

elde edilir.

Ancak

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = 2x^2 + 2y$$

olmalıdır.

Dolayısıyla,

$$2x^2 + 2y = 2x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

veya

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 2y$$

Buradan $\phi(y) = y^2 + c_0$ elde edilir; burada c_0 keyfi bir sabittir. Böylece

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0$$

O halde, bir parametrelili çözüm ailesi $F(x, y) = c_1$, yani

$$x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0 = c_1$$

şeklindedir. Sabitleri birleştirerek çözümü şu şekilde yazabiliriz:

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c$$

burada $c = c_1 - c_0$ keyfi bir sabittir. Öğrenci, genel geçerlilik açısından $c_0 = 0$ alarak $\phi(y) = y^2$ yazmanın hiçbir kayba neden olmadığını gözlemleyecektir. Şimdi alternatif bir yöntemi ele alalım.

Gruplama Yöntemi. Bu örnekte verilen diferansiyel denklemi, sol tarafının belirli tam diferansiyellerin toplamı şeklinde görünmesini sağlayacak şekilde terimleri gruplandırarak çözeceğiz. Diferansiyel denklemi

$$(3x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 2y) dy = 0$$

şu biçimde yazalım:

$$3x^2dx + (4xydx + 2x^2dy) + 2ydy = 0$$

Bunu şu şekilde tanıyabiliriz:

$$d(x^3) + d(2x^2y) + d(y^2) = d(c)$$

burada c keyfi bir sabittir, yani

$$d(x^3 + 2x^2y + y^2) = d(c).$$

Buradan doğrudan

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c$$

sonucunu elde ederiz.

Alıştırma 2.7

Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözelim:

$$\begin{aligned} (2x \cos y + 3x^2y) dx + (x^3 - x^2 \sin y - y) dy &= 0 \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

Alıştırma 2.8

$(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2) dy = 0 \quad \text{diferansiyel denklemini çözünüz.}$$

$$(3x^2y + y^3 + 2ye^{-x} + 6x) dx + (x^3 + 3xy^2 - 2e^{-x}) dy = 0 \quad \text{diferansiyel denklemini çözünüz.}$$

$(10x + 2y \cos x + 3 \cos y)dx + (2 \sin x - 3x \sin y)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.4 İntegral Çarpanları

Verilen diferansiyel denklem

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

eğer

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

şartını sağlıyorsa, denklem tamdır ve yukarıda açıklanan yöntemlerden biriyle bir parametrelili çözüm ailesi elde edebiliriz. Ancak eğer

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

oluyorsa, denklem tam değildir ve yukarıdaki yöntemler uygulanamaz. Peki, böyle bir durumda ne yapmalıyız? Belki de tam olmayan bu denklemi, onu özünde eşdeğer bir tam denkleme dönüştürecek bir ifadeyle çarpabiliriz. Eğer bunu başarabilirsek, elde edilen tam denklemi yukarıda açıklanan yöntemlerden biriyle çözebiliriz.

Örneğin

$$ydx + 2xdy = 0 \quad (2.4)$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin tam olmadığı kolayca görülebilir. Ancak, denklem (2.4)'ü y ile çarparsak, onu özünde eşdeğer olan şu denkleme dönüştürürüz:

$$y^2dx + 2xydy = 0 \quad (2.5)$$

Bu denklem tamdır. Sonuç olarak, bu tam denklem (2.5) integrallenebilir olduğundan, y ifadesine Denklem (2.4)'ün *integral çarpanı* denir.

Genel olarak, aşağıdaki tanımı yaparız:

Tanım 2.3

Eğer diferansiyel denklem

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.6)$$

bir D bölgesinde tam değilse, ancak

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

diferansiyel denklemi D 'de tam hale geliyorsa, o zaman $\mu(x, y)$ ifadesine Denklem (2.6)'nın *integral çarpanı* denir.

Örnek 2.12

Aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım:

$$(3y + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2y)dy = 0$$

Bu denklem (2.14) formundadır; burada

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 3y + 4xy^2, & N(x, y) &= 2x + 3x^2y \\ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} &= 3 + 8xy, & \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= 2 + 6xy \end{aligned}$$

olmaktadır.

Ancak,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

şartı, yalnızca $2xy + 1 = 0$ sağlayan (x, y) noktaları hariç her yerde geçerlidir. Bu nedenle, Denklem (2.16) herhangi bir dikdörtgensel bölge D 'de tam değildir.

Şimdi $\mu(x, y) = x^2y$ alalım. Bu durumda, (2.15) formundaki karşılık gelen diferansiyel denklem şu hale gelir:

$$(3x^2y^2 + 4x^3y^3) dx + (2x^3y + 3x^4y^2) dy = 0$$

Bu denklem her dikdörtgensel bölge D 'de tamdır, çünkü

$$\frac{\partial[\mu(x, y)M(x, y)]}{\partial y} = 6x^2y + 12x^3y^2 = \frac{\partial[\mu(x, y)N(x, y)]}{\partial x}$$

tüm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için sağlanmaktadır.

Bu nedenle, $\mu(x, y) = x^2y$, Denklem (2.16)'nın bir *integralleştiren çarpanıdır*.

2.5 Ayrılabilir Denklemler

Tanım 2.4

Aşağıdaki formdaki bir denklem,

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \quad (2.7)$$

değişkenleri ayrılabilen denklem veya kısaca *ayrılabilir denklem* olarak adlandırılır.

Örnek 2.13

Örneğin, $(x - 4)y^4dx - x^3(y^2 - 3)dy = 0$ bir ayrılabilir denklemdir.

Genel olarak ayrılabilir denklem (2.7) tam değildir, ancak belirgin bir integral çarpanına sahiptir: $\frac{1}{f(x)G(y)}$. Eğer bu ifadeyle (2.7) denklemini çarparsak, değişkenleri ayırırız ve (2.7)'yi esasen aşağıdaki eşdeğer denkleme indirgemiş oluruz:

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0 \quad (2.8)$$

Bu denklem tamdır, çünkü

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{F(x)}{f(x)} \right] = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{g(y)}{G(y)} \right].$$

$F(x)/f(x)$ ifadesini $M(x)$ ve $g(y)/G(y)$ ifadesini $N(y)$ olarak tanımlarsak, Denklem (2.8) şu formu alır:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Burada M yalnızca x 'in ve N yalnızca y 'nin fonksiyonu olduğu için, bir *bir parametrelili çözüm ailesi* hemen şu şekilde elde edilir:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \quad (2.9)$$

burada c bir keyfi sabittir. Böylece, ayrılabilir denklem (2.7)'nin çözüm ailesini bulma problemi, Denklem (2.9)'da gösterilen integralleri hesaplama problemine indirgenmiş olur. İşte bu anlamda ayrılabilir denklemler, en basit birinci dereceden diferansiyel denklemler olarak kabul edilir.

Örnek 2.14

Aşağıdaki denklemi çözünüz:

$$(x-4)y^4 dx - x^3(y^2-3) dy = 0$$

Bu denklem ayrılabilir. Değişkenleri ayırmak için x^3y^4 ile bölersek:

$$\frac{(x-4)dx}{x^3} - \frac{(y^2-3)dy}{y^4} = 0$$

veya

$$(x^{-2} - 4x^{-3}) dx - (y^{-2} - 3y^{-4}) dy = 0.$$

İntegral alırsak, bir parametrelili çözüm ailesini elde ederiz:

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c$$

burada c keyfi bir sabittir.

Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz:

$$x \sin y dx + (x^2 + 1) \cos y dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$(x^3 + x^2) y dx + x^2 (y^3 + 2y) dy = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

$(x^3 + x^2) y dx + x^2 (y^3 + 2y) dy = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

$$y' + 4x + \frac{\sin x}{x} = 6y^2y' \cos y^3 - \frac{1}{1+x^2} \quad \text{diferansiyel denklemini çözünüz.}$$

f ve g herhangi bir değişkenli fonksiyonlar olmak üzere

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

denklemini, $xy = v$ bağımlı değişken dönüşümü ile ayrılabilen denklem haline getirilebilir.

Alıştırma 2.19

$y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.
