MAT226 İleri Matematik II – Hafta 1

Diferansiyel Denklemlere Giriş

Bu hafta neler öğreneceğiz:

- Diferansiyel denklem nedir?
- Uygulama alanları nelerdir?
- Diferansiyel denklemlerin türleri nelerdir?
- Diferansiyel denklemelerin çözümleri nasıl tanımlanır?
- Başlangıç-Değer problemi nedir?
- Varlık-Teklik teoremleri

Tavsiye edilen kaynak:

- S.L. Ross İntroduction to Ordinary Differential Equations

Kitaptan çözülmesi tavsiye edilen problemler:

⋆ Bölüm 1'deki alıştırma soruları

1.1 Motive Edici Örnekler

Diferansiyel Denklem Nedir?

Tanım 1.1

Diferansiyel denklem, bilinmeyen bir fonksiyonun bir veya daha fazla türevini içeren bir denklemdir. Bir diferansiyel denklem, sadece tek değişkenli bilinmeyen bir fonksiyon içeriyorsa adi diferansiyel denklemdir (ODE). Bu derste sadece adi diferansiyel denklemleri ele alacağız ve bunları basitçe diferansiyel denklemler olarak adlandıracağız.

Tanım 1.2

Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren bir diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Bu denklemler dersimizin konusu değildir.

Örnek 1.1

Hangisi bir diferansiyel denklemdir?

a) $y' = y + x$ bir diferansiyel denklemdir. Bilinmeyen fonksiyon x değişkenine bağlı olarak y'dir ve y'nin türevi denklemde yer alır.

b) $\sin(x) = 1$ bir diferansiyel denklem değildir. Bilinmeyen bir fonksiyon yoktur.

c) $y = 5 + x$ bir diferansiyel denklem değildir. Denklemde bir y fonksiyonu vardır ancak türev söz konusu değildir.

Alıştırma 1.2

Aşağıdaki denklemlerin diferansiyel denklem olup olmadığını belirleyiniz.

a) $y' = y$.

b) $(\sin x)' = \cos x$.

c) $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x^2$

Çözüm. ***a)*** *$y' = y$ bir diferansiyel denklemdir. Bilinmeyen fonksiyon x değişkenine bağlı olarak y'dir ve y'nin türevi denklemde yer alır.*

b) *$(\sin(x))' = \cos x$ bir diferansiyel denklem değildir. Bilinmeyen bir fonksiyon yoktur.*

c) *$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x^2$ bir diferansiyel denklemdir. Bilinmeyen fonksiyon x değişkenine bağlı olarak $g(x)$'dir ve $g(x)$'in türevleri denklemde yer almaktadır.*

Yukarıdaki denklemlerden ve alıştırmadan, adi diferansiyel denklemlerin genellikle şu formda olduğunu görürsünüz:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Alıştırma 1.3

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin her birini adi veya kısmi diferansiyel denklem olarak sınıflandırın; her bir denklemin mertebesini belirtin; ve söz konusu denklemin doğrusal mı yoksa doğrusal olmayan mı olduğunu belirleyin.

a) $\frac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x$.

b) $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$.

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

d) $x^2 dy + y^2 dx = 0$.

e) $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$.

f) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$.

g) $\frac{d^2y}{dx^2} + y \sin x = 0$.

h) $\frac{d^2y}{dx^2} + x \sin y = 0$.

i) $\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t$.

j) $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2} + 1}$.

Nerede Bulunurlar

Fiziksel ve birçok gerçek hayat probleminde, değişen büyüklükler arasındaki ilişkileri incelemek isteriz. Matematiksel yöntemleri böyle bir probleme uygulamak için, problemi matematiksel kavramlar kullanarak formüle etmemiz ve onu tanımlamak için matematiksel bir model oluşturmamız gerekir. Matematiksel bir model geliştirme süreci matematiksel modelleme olarak bilinir.

Değişim oranlarının karşılaştırılması genellikle ilişkilerin yeterince basit matematiksel denklemlerle modellenmesine yardımcı olur. Bu denklemler genellikle fonksiyonları ve türevlerini içerir. Bunlara diferansiyel denklemler denir. Bu dersin odak noktası diferansiyel denklemlerin nasıl çözüleceğini incelemektir.

Uyarı 1.3

İyi bir matematiksel model aşağıdaki niteliklere sahip olmalıdır, ancak bunlarla sınırlı değildir:

a) Matematiksel problemin çözülebilmesi için yeterince basittir.

b) Gerçek duruma yeterince iyi uymalıdır ki deneysel verilerle doğrulanabilir tahminler yapmak için kullanılabilsin.

Şimdi diferansiyel denklemleri içeren bazı matematiksel model örneklerini görelim. Bu örneklerdeki çeşitli diferansiyel denklem türlerini nasıl çözeceğinizi daha sonra öğreneceksiniz.

Bu derste, türev için y' gösterimini ve $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ Leibniz gösterimini birbirinin yerine kullanacağız.

Örnek 1.4 — Nüfus Artışı ve Azalması-1

Herhangi bir t zamanındaki bir nüfusun (belirli bir ülkedeki insanlar, laboratuvar kültüründeki bakteriler, vb.) üye sayısı P diferansiyel denklemler kullanılarak modellenebilir. Çoğu modelde, diferansiyel denklemin aşağıdaki formu aldığı varsayılır:

$$P'(t) = a(P)P(t) \tag{1.1}$$

Burada a nüfusun $P(t)$ sürekli bir fonksiyonudur ve büyüme oranı olarak bilinen birim zamandaki göreceli değişim oranını temsil eder.

Malthus modelinde, a büyüme oranının sabit r olduğu varsayılır ve denklem (1.1) şu hale gelir

$$P'(t) = rP(t) \tag{1.2}$$

Calculus'tan, (1.2) denkleminin $P(t) = P(0)e^{rt}$ şeklinde bir çözümü olduğunu biliyoruz. Malthus modelinin bir sınırlaması vardır. Bir ülkenin nüfusunu modellediğimizi varsayalım. Bir $t = 0$ zamanından başlayarak, zaman geçtikçe, nüfus ya $a < 0$ ise 0 ya da $a > 0$ ise sonsuz olabilir ki bu makul değildir. Gerçekten de, nüfus ülkenin kaynak sınırını aştığında, model artık geçerli olmayacaktır. Alan ve kaynakların sınırlılığı nedeniyle, nüfus arttıkça göreli nüfus artış hızının düşmesi gerekir.

Örnek 1.5 — Nüfus Artışı ve Azalması-2

Yukarıda bahsedilen olguyu yansıtan bir başka model de Verhulst Modelidir:

$$P'(t) = rP(t)(1 - \alpha P(t)) \tag{1.3}$$

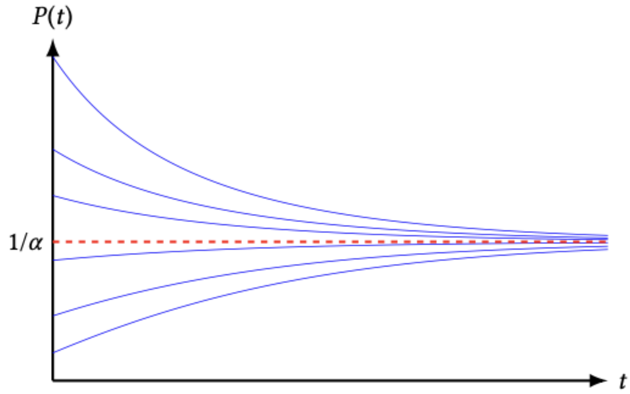
Burada r büyüme oranı ve $1/\alpha$ taşıma kapasitesidir. P, $1/\alpha$ ile karşılaştırıldığında nispeten küçük olduğu sürece, başka bir deyişle αP yaklaşık olarak 0 olduğu sürece, büyüme yaklaşık olarak üsteldir çünkü $\frac{P'(t)}{P(t)}$ oranı yaklaşık olarak r'dir. Ancak P arttıkça büyüme oranı azalır.

Denklem (1.3) lojistik denklem olarak bilinir. Şu şekilde yeniden yazılabilir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln(P(t))) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln(1 - \alpha P(t)) = r.$$

Her iki tarafın integralinin alınması lojistik denklemlerin çözüme sahip olduğu anlamına gelir

$$P(t) = \frac{P(0)}{\alpha P(0) + (1 - \alpha P(0))e^{-rt}}$$



Şekil 1.1: Lojistik denklemin çözümleri

$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{\alpha}$ ve $\frac{1}{\alpha}$'nın $P(0)$'dan bağımsız olduğuna dikkat edin. Aşağıdaki şekil lojistik denklemin çeşitli P_0 için çözümlerini göstermektedir.

Örnek 1.6 — Newton'un Soğuma Yasası

Newton'un soğuma yasasına göre, bir cismin sıcaklığı, cismin sıcaklığı ile çevresinin sıcaklığı arasındaki farkla doğru orantılı olarak değişir. Eğer T_m çevrenin sıcaklığı ve $T = T(t)$ cismin t zamanındaki sıcaklığı ise, o zaman

$$T'(t) = -k\left(T(t) - T_m(t)\right) \tag{1.4}$$

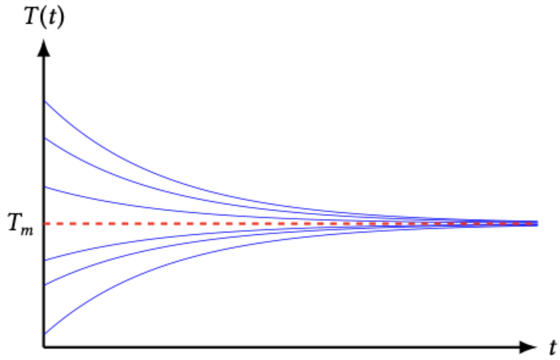
Burada k pozitif bir sabittir ve eksi işareti ısının sıcak nesnelerden soğuk nesnelere aktarılacağını gösterir.

Çevredeki sıcaklık $T_m(t) = T_m$ sabit olduğunda, (1.4) denkleminin bir çözümü vardır

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)\, e^{-kt}$$

Burada $T_0 = T(0)$ vücudun başlangıç sıcaklığıdır. Tahmin edebileceğiniz gibi, zaman geçtikçe sıcaklık yaklaşık olarak dengelenecektir. Matematiksel bir açıklama $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_m$.

Aşağıdaki şekil $T(t)$ fonksiyonunun çeşitli T_0 ve sabit T_m değerlerine sahip tipik grafiklerini göstermektedir. Çevrenin sabit sıcaklıkta kaldığını varsaymak, bir fincan sıcak kahvenin bir odada soğutulması gibi bazı durumlarda makul görünmektedir. Bu durumda, odaya aktarılan ısı odanın sıcaklığını fazla artırmayacaktır. Ancak, bir fincan sıcak kahveyi küçük bir su kabında soğutursak, zaman geçtikçe suyun



Şekil 1.2: Newton'un Soğutma Yasasından Fonksiyonlar

sıcaklığının arttığını göreceksiniz. Bu durumda, sıcaklık değişimlerini daha doğru modellemek için ısı alışverişlerini dikkate almalıyız. Enerjinin korunduğunu, yani cisimdeki ve çevresindeki toplam ısının sabit kaldığını varsayalım. Fizikte, ısı transferinin sıcaklık değişimiyle doğru orantılı olduğu bilinmektedir. O zaman Denklem (1.4)'e ek olarak fazladan bir denklemimiz olur:

$$a\left(T(t) - T_0\right) = a_m\left(T_m(t) - T_{m0}\right),$$

Burada $T_{m_0} = T_m(0)$ çevrenin başlangıç sıcaklığıdır. $T_m(t)$ çözülür ve denklem (1.4)'de yerine yazarak, şunu elde ederiz

$$\begin{aligned} T'(t) &= -k\left(T(t) - T_m(t)\right) \\ &= -k\left(\left(1 + \frac{a}{a_m}\right)T(t) - \left(\frac{a}{a_m}T_0 + T_{m_0}\right)\right) \\ &= -k\left(1 + \frac{a}{a_m}\right)\left(T(t) - \frac{aT_0 + a_m T_{m_0}}{a + a_m}\right) \end{aligned}$$

Yine, denklem $\ln(F(t)) = C$ biçiminde yeniden yazılabilir ($F(t)$ ve C'yi bulabilir misiniz?). Calculus kullanarak, bunun bir çözümü olduğunu göreceksiniz

$$T(t) = \frac{aT_0 + a_m T_{m_0}}{a + a_m} + \frac{a_m\left(T_0 - T_{m_0}\right)}{a + a_m} e^{-k\left(1 + \frac{a}{a_m}\right)t}$$

Uyarı 1.4

Yukarıdaki örneklerde, diferansiyel denklemler aşağıdaki formda yeniden yazılabilir

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = C \tag{1.5}$$

Burada $F(t)$ bir fonksiyon ve C bir sabittir. Şuna dikkat edin

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = (\ln(F(t)))'$$

Denklem (1.5)'in her iki tarafını da integre ettiğinizde $F(t) = F(0)e^{cT}$ sonucunu bulacaksınız.

Örnek 1.7 — Newton'un İkinci Hareket Yasası

Sabit m kütleli bir cisim için Newton'un ikinci hareket yasası, cisme etki eden F kuvvetinin ve cismin anlık a ivmesinin $F = ma$ denklemiyle ilişkili olduğunu belirtir.

Birçok uygulamada, cisme etki edebilecek birden fazla kuvvet vardır. Kütlesi $m = 1$ olan bir cismin Dünya yüzeyi üzerinde dikey bir doğru boyunca hareket ettiğini varsayalım. Cismin yüzey üzerindeki bir referans noktasına göre yer değiştirmesi y olsun. Normalde aşağıdaki tipte kuvvetler etki eder:

- Sadece y konumuna bağlı olan yerçekimi $g(y)$, burada $g(y) < 0$.
- Atmosferik direnç $-r(y, y')\, y'$ cismin konumuna ve hızına bağlıdır, burada r negatif olmayan bir fonksiyondur. Fonksiyonun $-y'$ "dışı", direnç kuvvetinin her zaman y' hızının tersi yönünde olduğunu belirtmek için kullanılır.
- Diğer harici kaynaklardan (örneğin bir helikopterin çekme halatı) gelen $f = f(t)$ kuvveti sadece t değerine bağlıdır.

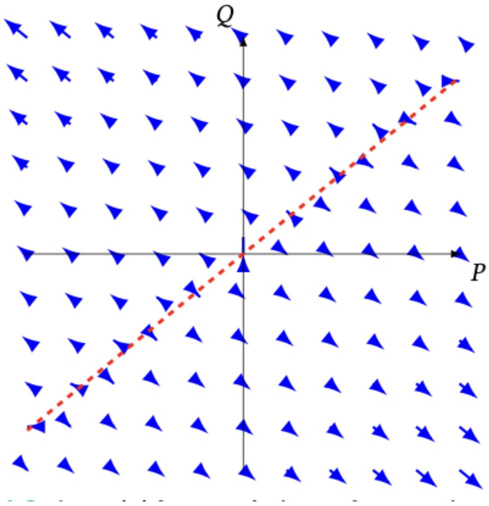
Bu durumda, Newton'un ikinci yasası şu anlama gelir

$$y'' = -r(y, y')\, y' - g(y) + f(t)$$

genellikle şu şekilde yeniden yazılır

$$y'' + r(y, y')\, y' + g(y) = f(t)$$

Bu denklemde y 'nin ikinci dereceden türevi yer aldığından ve daha yüksek dereceden türev bulunmadığından, bu denklemin ikinci dereceden bir diferansiyel denklem olduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 1.3: Rakip türlerin popülasyonları için bir model

Örnek 1.8 — Etkileşen Türler

Rekabet $P = P(t)$ ve $Q = Q(t)$ iki türün t zamanındaki popülasyonları olsun. Malthusyen modele göre her bir nüfusun diğeri olmasaydı üstel olarak büyüyeceğini varsayalım; yani rekabet olmasaydı

$$P' = aP \quad \text{ve} \quad Q' = bQ \tag{1.6}$$

Burada a ve b pozitif sabitlerdir. Rekabetin etkisini modellemek için bir yol, her bir popülasyonun birey başına büyüme oranının diğer popülasyonla orantılı bir miktarda azaldığını varsaymaktır, bu nedenle denklem (1.6) şu şekilde değiştirilir

$$P' = aP - \alpha Q$$
$$Q' = -\beta P + bQ,$$

Burada α ve β pozitif sabitlerdir. Rakip türlerin popülasyonları arasındaki ilişki aşağıdaki şekil ile tanımlanabilir. Oklar aşağıdaki oranların yönünü göstermektedir. artan t ile popülasyonların değişimi. Orijinden geçen kesikli çizgi L sadece a, b, α ve β değerlerine bağlıdır. Eğer (P_0, Q_0) değeri L değerinin üzerindeyse, P popülasyonuna sahip türün nesli tükenecektir, ancak (P_0, Q_0) değeri L değerinin altındaysa, Q popülasyonuna sahip türün nesli tükenecektir.

Örnekte, sabit katsayılı homojen bir diferansiyel denklem sistemi ile karşı karşıyayız. Kesikli çizginin eğimi, sistemin katsayı matrisinin bir özvektörü ile ilgilidir.

1.2 Temel Kavramlar

Tanım 1.5

Bağımlı değişkeni y ve bağımsız değişkeni x olan n. mertebeden doğrusal (lineer) bir adi diferansiyel denklem, aşağıdaki formda olan veya bu formda ifade edilebilen bir denklemdir

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

burada a_0 özdeş olarak sıfır değildir.

Tanım 1.6

Lineer diferansiyel denklemler ayrıca bağlı değişkenin ve türevlerinin katsayılarına göre de sabit katsayılı ve değişken katsayılı olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Örnek 1.9

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad \text{lineer değil, sabit katsayılı değil.}$$
$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t \quad \text{lineer, sabit katsayılı.}$$

Örnek 1.10

Aşağıdaki adi diferansiyel denklemlerin tümü doğrusal değildir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Mertebe nedir?

Tanım 1.7

Bir diferansiyel denklemin mertebesi, içerdiği en yüksek türevin mertebesidir.

Örnek 1.11

Diferansiyel denklemin mertebesi nedir?

a) $y' - x^2 = 0$ birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir.

b) $y' + xy^2 = y^3$ aynı zamanda birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir.

c) $y'' - xy' + y = xy^2$ ikinci dereceden bir diferansiyel denklemdir.

d) $xy^{(4)} + y^2 = \sin x$ dördüncü dereceden bir diferansiyel denklemdir.

Alıştırma 1.12

Her bir diferansiyel denklemin mertebesini belirleyiniz.

a) $y' = x$.

b) $y'' \cdot y' + y = \cos x$.

Çözüm. ***a)*** $y' = x$ *birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir.*

b) $y'' \cdot y' + y = \cos x$ *ikinci dereceden bir diferansiyel denklemdir.*

Çözüm Nedir?

Tanım 1.8

Bir diferansiyel denklemin çözümü, bazı açık aralıklarda diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyondur.

Örnek 1.13

Fonksiyon bir çözüm müdür?

a) $y = e^x$, $(-\infty, \infty)$ aralığında $y' - y = 0$ 'ın bir çözümüdür. Eğer $y = e^x$ ise, o zaman $y' = e^x$ ve

$$y' - y = e^x - e^x = 0$$

Aslında, herhangi bir c sayısı için $y = ce^x$ bir çözümdür.

b) $y = \sin(x)$, $y'' + y = 0$ ifadesinin bir çözümüdür.
Eğer $y = \sin(x)$ ise, o zaman $y' = \cos(x)$ ve $y'' = -\sin(x)$ ve

$$y'' + y = -\sin(x) + \sin(x) = 0$$

Yani y, $(-\infty, \infty)$ aralığında $y' - y = 0$ 'ın bir çözümüdür.

c) $y = \sin(x)$, $y' - y = 0$ ifadesinin bir çözümü değildir.
Eğer $y = \sin(x)$ ise, o zaman $y' = \cos(x)$ ve

$$y' - y = \sin(x) - \cos(x) \neq 0$$

Örnek 1.14

Herhangi bir c_1 ve c_2 sabitleri için

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

fonksiyonu, üzerinde $(-\infty, \infty)$,

$$y'' + y = 0$$

'nin bir çözümüdür. Çözüm fonksiyonun iki kez türevi alındığında

$$\begin{aligned} y' &= c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y'' &= -c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla y, $(-\infty, \infty)$ üzerindeki diferansiyel denklemin bir çözümüdür.

Alıştırma 1.15

Aşağıdaki fonksiyonların $y' = y^2$ denkleminin çözümleri olup olmadığını belirleyiniz.

a) $y = -\frac{1}{x}$.

b) $y = x$.

Çözüm. *Eğer* $y = -\frac{1}{x}$ *ise, o zaman* $y' = \frac{1}{x^2}$ *ve* $y^2 = \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$ *olur. Yani,* $y = -\frac{1}{x}$ *bir çözümdür. Eğer* $y = x$ *ise, o zaman* $y' = 1$ *olur. Fakat* $y^2 = x^2 \neq 1 = y'$. *Dolayısıyla,* $y = x$ *bir çözüm değildir.*

Çözüm türleri

Tanım 1.9

n. mertebeden adi diferansiyel denklemi göz önüne alalım:

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0 \tag{1.7}$$

burada F, $(n+2)$ değişkeninin bir gerçel fonksiyonudur. (değişkenler: $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$).

a) f, gerçel bir aralık I üzerinde tanımlı bir gerçel fonksiyon olsun ve bu fonksiyonun n. türevi (ve dolayısıyla daha düşük mertebeli tüm türevleri) her $x \in I$ için mevcut olsun. Eğer f, aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, diferansiyel denklem (1.7)'un **açık çözümü** olarak adlandırılır:

$$F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right]$$

her $x \in I$ için tanımlıdır ve

$$F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0$$

her $x \in I$ için sağlanır. Yani, (1.10) denkleminde y ve türevleri yerine sırasıyla $f(x)$ ve türevleri yazıldığında, bu denklem I üzerinde bir özdeşliğe indirgenir.

b) Eğer bir $g(x, y) = 0$ bağıntısı, en az bir gerçel fonksiyon f için bir aralık I üzerinde tanımlı olup, bu fonksiyon (1.7) denkleminin I üzerinde açık çözümü oluyorsa, bu bağıntıya (1.7)'un **kapalı çözümü** denir.

c) Açık çözümler ve kapalı çözümler genellikle **çözüm** olarak adlandırılır.

Başlangıç Değer Problemi Nedir?

Tanım 1.10

n-inci dereceden bir diferansiyel denklem için bir başlangıç değer problemi (kısaca BDP), y ve ilk $n-1$ türevlerinin bir noktada belirli değerlere sahip olmasını gerektirir. Böyle belirli bir değere başlangıç koşulu denir. Bir başlangıç değer probleminin çözümü, hem diferansiyel denklemi hem de başlangıç koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

Bir diferansiyel denklemin sonsuz bir çözüm ailesine sahip olabileceğini gördük. Bir çözümü belirlemek için ekstra sabitlere ihtiyaç duyulacaktır. Bu sabitler başlangıç koşullarıdır.

Örnek 1.16

Aşağıda birinci dereceden bir diferansiyel denklem için bir başlangıç değer problemi verilmiştir.

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Başlangıç koşulu $y(0) = 3$'tür. Bu başlangıç değer problemini çözmek için önce genel çözümü bulacağız ve sonra parametreyi belirleyeceğiz. Denklemin $(\ln y)' = 1$ ile eşdeğer olduğuna dikkat edin. Her iki tarafın integrali $y = ce^x$ genel çözümünü verir. Sabitin değerini belirlemek için başlangıç koşulu $c = y(0) = 3$ Dolayısıyla $y = 3e^x$ başlangıç değer probleminin çözümüdür.

Alıştırma 1.17

$y' - 2y + e^x = 0$ adi diferansiyel denklemini göz önünde bulundurun.

a) Genel çözümün $y = ce^{2x} + e^x$ olduğunu gösteriniz.

b) Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün

$$\begin{cases} y' - 2y + e^x = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Çözüm. ***a)*** *Eğer* $y = ce^{2x} + e^x$ *ise, o zaman* $y' = 2ce^{2x} + e^x$ *ve*

$$y' - 2y + e^x = 2ce^{2x} + e^x - 2\left(ce^{2x} + e^x\right) + e^x = 0$$

Dolayısıyla, $y = ce^{2x} + e^x$ *genel çözümdür.*

b) *Başlangıç koşulunu c seçimini belirlemek için kullanırız.* $y = ce^{2x} + e^x$ *için* $y(0) = c + 1$ *değerine sahibiz. Bunu başlangıç koşulu ile eşleştiriyoruz ve*

$$c + 1 = 2.$$

veya basitçe $c = 1$. *Dolayısıyla* $y = e^{2x} + e^x$ *başlangıç değer probleminin çözümüdür.*

Genel Çözüm Nedir?

Yukarıdaki örnekte, çözüm diferansiyel denklemin belirli bir çözümüdür. Ters türevlerer gibi, herhangi bir kısıtlama olmaksızın, bir diferansiyel denklemin bir çözüm ailesi olabilir. Böyle bir aile, diferansiyel denklemin tüm çözümlerini parametrize eder.

Tanım 1.11

Genel bir çözüm, bir diferansiyel denklemin tüm çözümlerinden oluşur.

Örnek 1.18

$y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ ifadesinin, $(-\infty, \infty)$ üzerinde, aşağıdaki denklemin genel çözümü olduğunu gösterin. Burada c_1 ve c_2 herhangi bir sayı olabilir.

$$y'' - y = 0$$

,

Çözüm. *Çözüm y fonksiyonunun türevini aldığımızda*

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x},$$
$$y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

O zaman

$$y'' - y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \left(c_1e^x + c_2e^{-x}\right) = 0$$

Dolayısıyla y fonksiyonu bir çözümdür. Herhangi bir çözümün bu biçimde yazılabilmesi, $y(x_0) = y_0$ *ve* $y'(x_0) = y'_0$ *genel başlangıç koşulları ile başlangıç değer probleminin a çözümünün tekliğine eşdeğerdir. Tekliğin ispatı bu dersin seviyesinin üzerindedir. Bununla birlikte, Calculus kullanılarak da tartışılabilir. Diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir*

$$(y' - y)' + (y' - y) = 0$$
$$\frac{(y' - y)'}{y' - y} = -1$$
$$(\ln(y' - y))' = -1$$

Denklemin integrali $(\ln(y' - y))' = -1$ *genel çözümü* $y' - y = ce^{-x}$ *verir. Benzer şekilde, denklem şu şekilde yeniden yazılabilir*

$$\left(\ln\left(y - c_2e^{-x}\right)\right)' = 1$$

burada $c_2 = -\frac{c}{2}$. *Denklemin integrasyonu* $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ *sonucunu verir.*

Alıştırma 1.19

Aşağıdaki diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz

$$y''' = \sin x$$

Çözüm. *Çözüm Diferansiyel denklemin tekrarlı integrali aşağıdaki sonucu verir*

$$\begin{aligned} y'' &= -\cos x + c_1 \\ y' &= -\sin x + c_1 x + c_2 \\ y &= \cos x + c_1 x + c_2 x + c_3 \end{aligned}$$

Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir. Rolle teoremine göre y'' ve y' genel çözümler olduğu için y de genel çözümdür.

Diferansiyel Denklemleri Doğrudan İntegrasyon ile Çözme

Genel bir diferansiyel denklemi çözmek genellikle zordur. Bu derste sadece bazı özel tip diferansiyel denklemlere odaklanacağız. Örneğin, bazı diferansiyel denklemler Calculus teknikleri kullanılarak basitçe her iki tarafın integrali alınarak çözülebilir. Bunlara doğrudan integrasyon problemi diyoruz.

Örnek 1.20

Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$y' = \frac{1}{x^2 + x}, \quad y(1) = 0$$

Çözüm. *Çözüm Kısmi kesir açılımı kullanılarak diferansiyel denklem şu şekilde yazılabilir*

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Her iki tarafın entegrasyonu şu sonucu verir

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{3}{x^3 + x}\, \mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \ln|x| - \ln(|x+1|) + c \end{aligned}$$

Şimdi C 'yi belirlemek için $y(1) = 0$ başlangıç koşulunu kullanın:

$$0 = \ln 1 - \ln 2 + c$$

$\ln 1 = 0$ *olduğundan, $c = \ln 2$ elde ederiz. Bu başlangıç değer probleminin çözümü şöyledir*

$$y = \ln|x| - \ln(|x+1|) + \ln 2.$$

Çözüm fonksiyonunun tanım kümesinin $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ olduğuna dikkat ediniz.

Doğrudan integral problemlerini çözmek için, bazı temel fonksiyonların integrallerini ve parçalara ayırarak integral alma, yerine koyarak integral alma, kısmi kesir açılımı gibi çeşitli integral alma yöntemlerini gözden geçirmeniz gerekecektir.

Alıştırma 1.21

Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün.

$$y' = xe^x, \quad y(0) = 1$$

Çözüm. *Çözüm Parçalara ayırarak integral alma yöntemini kullanarak*

$$y = xe^x - e^x + c$$

Başlangıç koşulu $y(0) = 1$*,* $c = 2$ *olduğu anlamına gelir. Yani bu başlangıç değer probleminin çözümü* $y = xe^x - e^x + 2$ *şeklindedir.*

Çözümün Varlığı

Teorem 1.22 — Cauchy-Picard-Lindelöf Varlık Teklik Teoremi

Aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alalım:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \phi(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Burada,

a) f fonksiyonu, xy düzlemindeki bir bölge D içinde x ve y değişkenlerine göre sürekli bir fonksiyondur ve

b) f fonksiyonunun y'ye göre kısmi türevi $\frac{\partial f}{\partial y}$ de D içinde x ve y değişkenlerine göre sürekli bir fonksiyondur.

Ayrıca, (x_0, y_0) noktası D içinde bulunsun.

Bu durumda (1.8) diferansiyel denkleminin, h yeterince küçük bir pozitif sayı olmak üzere $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı tek bir çözümü ϕ vardır.

Örnek 1.23

Aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alalım:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$
$$y(1) = 3.$$

Teorem 1.1'i uygulayalım. Öncelikle hipotezleri kontrol edelim. Burada $f(x,y) = x^2 + y^2$ ve $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$ dir. Hem f hem de $\frac{\partial f}{\partial y}$, xy düzlemindeki her bölge D içinde süreklidir. Başlangıç koşulu $y(1) = 3$, $x_0 = 1$ ve $y_0 = 3$ anlamına gelir ve nokta $(1,3)$ böyle bir bölge D içinde kesinlikle yer alır. Bu nedenle, tüm hipotezler sağlanmaktadır ve sonuç geçerlidir. Yani,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

diferansiyel denkleminin, $x_0 = 1$ noktasının etrafında $|x - 1| \leq h$ olacak şekilde tanımlı, başlangıç koşulunu sağlayan tek bir çözümü ϕ vardır; yani, $\phi(1) = 3$ olacak şekilde bir çözüm mevcuttur.

Örnek 1.24

Şu iki problemi göz önüne alalım:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 2,$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad y(0) = 2.$

Burada

$$f(x,y) = \frac{y}{x^{1/2}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Bu fonksiyonlar, $x = 0$ hariç her yerde süreklidir (yani, y-ekseni boyunca süreksizdir).

İlk problemi inceleyelim: Burada $x_0 = 1, y_0 = 2$. (1,2) merkezi etrafında kenar uzunluğu 1 olan bir kareyi düşünelim. Bu kare y-ekseni ile kesişmez ve dolayısıyla hem f hem de $\frac{\partial f}{\partial y}$ bu kare içinde gerekli hipotezleri sağlar. Bu nedenle, bu kare iç bölgesi Teorem 1.1'deki bölge D olarak alınabilir ve $(1,2)$ kesinlikle bu bölgenin içindedir. Sonuç olarak, Teorem 1.1 uygulanabilir ve ilk problemin, $x_0 = 1$ etrafında yeterince küçük bir aralıkta tanımlı tek bir çözümü olduğu sonucuna varılır.

Şimdi ikinci problemi inceleyelim: Burada $x_0 = 0, y_0 = 2$. Bu noktada ne f ne de $\frac{\partial f}{\partial y}$ süreklidir. Başka bir deyişle, $(0,2)$ noktası, gerekli hipotezlerin sağlandığı bir D bölgesi içinde yer alamaz. Bu nedenle, Teorem 1.1'den hareketle ikinci problemin bir çözümü olup olmadığını söyleyemeyiz. Burada çözümün var olmadığını söylemiyoruz, ancak Teorem 1.1 bu konuda herhangi bir bilgi sağlamamaktadır.