POLINOM BİLEŞENLİ MATRİSLER ve KARAKTERİSTİK POLİNOM:

Polinomları, matrisleri ve determinant kavramlarını biliyoruz. Şimdiye kadar gördüğümüz matrislerin bileşenleri hep sabit bir sayı idi. Şimdi ise bileşenleri polinomlar olan matrisleri tanımlayacağız.

Tanım: Bileşenleri polinomlar olan matrislere "polinom matrisleri" denir.

Örneğin: $\begin{bmatrix} 2 & 2+x^2 & -1 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}_{2\times3} = A_1$, $\begin{bmatrix} 2x \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times1} = A_2$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A_3 \ldots$

$\mathbb{R}[x]$ üzerinde (yani bileşenlerindeki polinomlar $\mathbb{R}[x]$'den geliyor demek) birer polinom matrisleridir.

* Bir polinom matrisi aynı zamanda bir matris polinomudur

yani örneğin;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x^2 & 3x+1 \\ x & 5x^2+3x \end{bmatrix}_{2\times2}}_{\text{polinom matrisi}} = \underbrace{x^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matris polinomu}}$$

$$\begin{bmatrix} x & -x^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = x^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 & 3x+2 \\ x & 2 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tanım: A, F cismi üzerinde $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $x.I - A$, A matrisinin "karakteristik matrisi" ve karakteristik matrisin determinantı $\det(x.I - A)$'da A'nın "karakteristik polinomu" olarak adlandırılır ve Δ_A olarak gösterilir.

$$x.I - A \longrightarrow \text{karakteristik } \boxed{\text{matris}}$$

$$\Delta_A(x) = \det(x.I - A) \longrightarrow \text{karakteristik } \boxed{\text{polinom}}$$

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere

A 2x2 tipinde olduğu için 2x2'lik birim matrisi aldım.

A'nın karakteristik matrisi $x.I - A$: $x.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x-4 \end{bmatrix}$$

Bakın bir matris!

A'nın karakteristik polinomu $\det(xI - A)$: $\det\left(\begin{bmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x-4 \end{bmatrix}\right) = (x-2).(x-4) = \Delta_A$

Bakın bir polinom!

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$ olmak üzere $\Delta_A = ?$

A 3x3 tipinde olduğundan 3x3'lük birim matrisi aldım.

$$\Delta_A = \det\left(x.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-4 & 4 \\ 2 & 4 & x-4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x^3 - 9x^2 = \Delta_A(x)$$

Teorem : (Cayley – Hamilton Teoremi)

Her polinom karakteristik polinomunun bir köküdür. Yani bir polinomu karakteristik polinomunda yerine yazdığınızda sonuç 0 çıkacaktır. Kısaca $\boxed{\Delta_A(A)=0}$ 'dır.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ -10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz ve Cayley-Hamilton teoremini kullanarak A matrisinin tersini (A^{-1}'i) bulunuz.

$$\Delta_A=\det(x.I-A)=\det\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} x-6 & -3 & -2 \\ 4 & x+1 & 2 \\ 10 & 5 & x+3 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. satıra göre determinant alalım:

$$=(x-6).\underbrace{\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 5 & x+3 \end{vmatrix}}_{(x+1).(x+3)-10}-(-3).\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & x+3 \end{vmatrix}}_{4.(x+3)-20}+(-2).\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & x+1 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}}_{20-10.(x+1)}$$

$$=(x-6).(x^2+4x-7)+3.(4x-8)-2.(10-10x)$$

$$=x^3+4x^2-7x-6x^2-24x+42+12x-24-20+20x$$

$$=x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+(x-2)=(x-2).(x^2+1)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_A(x)&=(x-2).(x^2+1)\\&=x^3-2x^2+x-2\end{aligned}} \rightarrow \text{karakteristik polinom}$$

Şimdi Cayley-Hamilton'u kullanarak A^{-1}'i bulalım:

$\Delta_A(A)=0$ olduğunu Cayley-Hamiltondan söylerim.

Dolayısıyla ; $\Delta_A(A)=A^3-2A^2+A-2\underset{\substack{\parallel \\ A.A^{-1}}}{I}=0$ olur.

$\Rightarrow A^3-2A^2+A-2A.A^{-1}=0$

karşıya geçirdim

$\Rightarrow A^3-2A^2+A=2.A.A^{-1}$ oldu.

Her iki tarafı A^{-1} ile çarp

$\Rightarrow A^{-1}.(A^3-2A^2+A)=A^{-1}.(2.A.A^{-1})$

$\Rightarrow A^2-2A+I=2A^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(A^2-2A+I)=A^{-1}}$ sonucunu elde ederim.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz ve Cayley-Hamilton Teoremini kullanarak A^{-1}'i bulunuz.

$$\Delta_A(x)=\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ -2 & x-3\end{vmatrix}=(x-1).(x-3)+2=x^2-4x+3+2$$
$$=x^2-4x+5$$
$$=(x-5).(x+1)$$

$\boxed{\Delta_A(x)=x^2-4x+5}$ → karakteristik polinom

Cayley-Hamilton teoreminden $\Delta_A(A)=0$ 'dır. Yani

$\Delta_A(A) = A^2 - 4A + 5I = 0$ olur.

$\Rightarrow A^2 - 4A + 5.A.A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^2 - 4A = -5.A.A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1}(A^2 - 4A) = A^{-1}.(-5.A.A^{-1})$

$\Rightarrow A - 4I = -5.A^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{5}.(A-4I) = A^{-1}}$ buluruz.