İntegral Çarpanlarının Bulunması ve Homojen Diferansiyel denklemler

Bu hafta neler öğreneceğiz:

- Bazı özel durumlar için integral çarpanları nasıl bulunur
- Homojen diferansiyel denklem nedir?
- Homojen diferansiyel denklem nasıl ayrılabilir denkleme dönüştürürlür?
- Homojen diferansiyel denklemler integral çarpanı ile tamlaştırılabilir mi?
- Homojen hale getirilebilen denklemler

Tavsiye edilen kaynak:

- S.L. Ross İntroduction to Ordinary Differential Equations

Kitaptan çözülmesi tavsiye edilen problemler:

⋆ Bölüm 2.2 ve 2.4'deki ilgili alıştırma soruları

İntegral Çarpanlarının Bulunması

Teorem 3.1

$$Mdx + Ndy = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ifadesi sadece x 'e bağlı olursa, o zaman bu denklemin

$$\mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

şeklinde bir integral çarpanı bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

ifadesi sadece y 'ye bağlı olursa, bu denklemin

$$\mu = \epsilon^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$$

şeklinde bir integral çarpanı vardır.

Örnek 3.2

$\left(2x^2 + y\right) dx + \left(x^2 y - x\right) dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. *Burada* $M = 2x^2 + y, \quad N = x^2 y - x$ *olmaktadır. Böylece*

$$\tfrac{1}{x^2 y - x}[1 - (2xy - 1)] = \tfrac{2(1-xy)}{x(xy-1)} = -\tfrac{2}{x}$$

olur ki sadece x *'e bağlıdır ve böylece*

$$e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2} \to \text{ integral çarpanıdır.}$$

Denklemi bu integral çarpanı ile çarpınca

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denkleminin tam ve çözümünün

$$2x + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c$$

olduğu kolayca görülebilir.

Alıştırma 3.3

$(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 3.4

$\cos x dy - (2y \sin x - 3)dx = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

3.1 Homojen Denklemler

Tanım 3.1

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ şeklinde yazıldığında bir g fonksiyonu $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ birinci basamak diferansiyel denklemine homojen diferansiyel denklem ya da kısaca homojen denklem denir.

Örnek 3.5

$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xydy = 0$ denklemi homojendir. Bunu görmek için önce denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 + 3y^2}{2xy}$$

şeklinde yeniden yazalım. Şimdi

$$-\frac{x^2 + 3y^2}{2xy} = \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

olduğunu gözlersek verilen diferansiyel denklemin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

şeklinde yazılabileceğini görürüz. Burada artık sol taraf bir g fonksiyonu için $g\left(\frac{y}{x}\right)$ biçimindedir.

Örnek 3.6

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - xdy = 0$$

denklemi homojendir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

şeklinde yazılınca sağ taraf x 'in işaretine bağlı olarak

$$\frac{y}{x} \mp \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2}} \qquad \text{veya} \qquad \frac{y}{x} \mp \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

haline gelir. Bunun $g\left(\frac{y}{x}\right)$ biçiminde olduğu ise bellidir.

Homojen denklemlerin çözümlerine başlamadan önce, böyle denklemleri tanımak için biraz farklı bir yöntem vereceğiz. $F(tx,ty)=t^nF(x,y)$ ise, $F(x,y)$ fonksiyonu n. dereceden homojen'dir denir. Bunun anlamı, $F(x,y)$ fonksiyonunda x yerine tx, y yerine ty konulunca t^n parantez dışına alınabilecek ve parantez içinde başlangıçtaki $F(x,y)$ fonksiyonu kalacak demektir. Mesela $F(x,y)=x^2+y^2$ ile verilen fonksiyon 2. dereceden homojendir. Çünkü

$$F(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2\left(x^2+y^2\right)=t^2F(x,y)\longrightarrow 2.\text{ dereceden homojen}$$

olur.

Şimdi $Mdx+Ndy=0$ diferansiyel denklemindeki M ve N fonksiyonlarının ikisinin de aynı n. dereceden homojen olduklarını varsayalım. $M(tx,ty)=t^nM(x,y)$ olduğundan $N(tx,ty)=t^nN(x,y)$

$$M\left(1,\frac{y}{x}\right)=M\left(\frac{1}{x}x,\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^nM(x,y)$$

$$N\left(1,\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^nN(x,y)$$

elde ederiz. Şimdi $Mdx+Ndy=0$ diferansiyel denklemini

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

şeklinde yeniden yazarsak

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}M\left(1,\frac{y}{x}\right)\Big)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)\Big)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

buluruz. Bunun $g\left(\frac{y}{x}\right)$ biçiminde olduğu ise bellidir. Buradan $Mdx+\ Ndy=0$ denklemi homojenlik tanımına göre homojendir. Böylece $Mdx+Ndy=0$ denklemindeki M ve N fonksiyonları aynı n. dereceden homojen fonksiyonlarsa, bu denklemin bir homojen denklem olduğu anlaşılır.

Aşağıdaki teorem kullanılarak her homojen denklemin ayrılabilen bir denklem olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.7

$$Mdx+Ndy=0$$

denklemi homojen bir denklem ise, $y=vx$ değişken dönüşümü denklemi v ve x değişkeni cinsinden ayrılabilen bir denkleme dönüştürür.

Örnek 3.8

$$\left(x^2 - 3y^2\right) dx + 2xydy = 0$$

denklemini çözünüz. Bu denklemin homojen olduğunu daha önce görmüştük. Onu

$$\left(\frac{y}{x} = v\right) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazalım ve $y = vx$ diyelim

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{3v}{2}$$

veya

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{v}{2}$$

veya sonuç olarak

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

bulunur. Bu denklem ayrılabilendir. Degişkenlerini ayırarak

$$\frac{2vdv}{v^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

bulunur. İntegre ederek

$$\ln\left|v^2 - 1\right| = \ln|x| + \ln|c| \qquad \text{ve} \qquad v^2 - 1 = cx$$

elde edilir. Şimdi v yerine $\frac{y}{x}$ konularak çözüm

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = cx \qquad \text{veya} \qquad y^2 - x^2 = cx^3$$

olarak bulunur.

Alıştırma 3.9

$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - xdy = 0, y(1) = 0$ *başlangıç değer problemini çözünüz.*

İntegral Çarpanı Örneği:

Lemma. *$Mdx + Ndy = 0$ denklemi homojen ise,*

$$\frac{1}{xM + yN}$$

fonksiyonu bu denklem için bir integral çarpanıdır.

Alıştırma 3.10

$$\left(3x^2y + y^3\right) dx + \left(xy^2 - x^3\right) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Alıştırma 3.11

$$y^2 dx + \left(x^2 - xy - y^2\right) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

3.2 Homojen Hale Getirilebilen Denklemler

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{R}$ sabitler olmak üzere

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$$

tipindeki denklemler, uygun bir dönüşümle homojen hale getirilebilir. Bu konuyla alakalı olarak şu teoremi verebiliriz:

Teorem 3.12

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sabitler olmak üzere

$$\underbrace{(a_1x + b_1y + c_1)}dx + \underbrace{(a_2x + b_2y + c_2)}dy = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

1. $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$ ise (h, k),

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$
$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

sisteminin çözümü olmak üzere

$$x = X + h, \quad y = Y + k$$

dönüşümü yukarıdaki denklemi X, Y cinsinden

$$(a_1X + b_1Y)\,dx + (a_2X + b_2Y)\,dy = 0$$

homojen denklemi haline getirir.

2. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ ise $z = a_1x + b_1y$ dönüşümü, yukarıdaki denklemi x, z cinsinden ayrılabilen bir denkleme dönüştürür.

Alıştırma 3.13

$(3x - y + 1)dx - (6x - 2y - 3)dy = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 3.14

$(5x + 2y + 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*