EK SORULAR :

1 $L:\mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer transformasyon olur mu?

$A \longmapsto L(A) := \det(A)$

Çözüm: $A,B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrisleri olmak üzere

$L(A+B) = L(A) + L(B)$ (?)

$L(A+B) = \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$\therefore$ lineer transformasyon değildir.

2 $\left.\begin{array}{l} T(1,1) = (1,-1,1,2) \\ T(-1,1) = (2,3,-2,-1) \end{array}\right\}$ koşullarını sağlayan $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$'e lineer dönüşüm var mıdır? Varsa o lineer dönüşümü belirleyiniz.

Çözüm: $(1,1)$ ve $(-1,1)$ lineer bağımsız olduklarından böyle bir lineer dönüşüm vardır. Şimdi genel olarak $T(x,y)$'yi belirleyelim;

$$(x,y) = c_1.(1,1) + c_2(-1,1) \implies c_1 = \frac{x+y}{2}, \quad c_2 = \frac{y-x}{2}$$

$$(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{y-x}{2}\right)(-1,1)$$

T'yi uygula

T bir lineer dön. olduğundan skalerler dışarı çıkar ve toplama dağılır.

$$T(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)\underbrace{T(1,1)}_{(1,-1,1,2)} + \left(\frac{y-x}{2}\right).\underbrace{T(-1,1)}_{(2,3,-2,-1)}$$

$$T(x,y) = \left(\frac{3}{2}y - \frac{x}{2},\ y-2x,\ \frac{-y}{2} + \frac{3x}{2},\ \frac{3x}{2} + \frac{y}{2}\right) \text{ olur.}$$

(3) $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ lineer dönüşümü ile ilgili aşağıdaki eşitlikler verildiğine göre a, b, c, d sayıları kaçtır?

$$\left.\begin{aligned} T(1-x+x^2) &= \begin{bmatrix} a & a \\ -b & 2 \end{bmatrix} \\ T(-1+x+3x^2) &= \begin{bmatrix} b & -2 \\ c & 2 \end{bmatrix} \\ T(x^2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Çözüm:

$$T(1-x+x^2) + T(-1+x+3x^2) = T(4x^2) = 4.T(x^2)$$

(T bir lineer dön. toplama ve skalerle çarpmaya değişir)

$$\begin{bmatrix} a & a \\ -b & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -2 \\ c & 2 \end{bmatrix} = 4.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+b & a-2 \\ -b+c & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4d \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{a=6}, \boxed{b=-6}, \boxed{c=-2}, \boxed{d=1}$$

(4) $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ bir lineer dönüşümü;

$L(a,b,c) = (a-b) + (b-c)x + (c-a)x^2$ olarak verilsin.

a) Çek(L) = ? , Gör(L) = ?

b) Çek(L) ve Gör(L) için birer taban bulunuz.

c) L'nin nulitisini ve rankını belirleyiniz.

Çözüm: $Çek(L) = \{(a,b,c) \mid L(a,b,c)=0\}$

$L(a,b,c) = (a-b) + (b-c)x + (c-a)x^2 = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{array}\right\} a=b=c.$$

$Çek(L) = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1) \rangle$

$B_{Çek(L)} = \{(1,1,1)\}$ 'dir. Dolayısıyla $boy(Çek(L)) = 1$ 'dir.

Dolayısıyla L'nin nulitisi 1 'dir. ✓

Gör(L) kümesi $\underbrace{L(1,0,0)}_{1-x^2}$, $\underbrace{L(0,1,0)}_{-1+x}$ ve $\underbrace{L(0,0,1)}_{-x+x^2}$ tarafından

gerilen kümedir.

$Gör(L) = \langle 1-x^2, -1+x, -x+x^2 \rangle$ 'dir. Şimdi bunlar içinden

lineer bağımsız olanları seçersek taban elde ederiz.

$B_{Gör(L)} = \{1-x^2, -1+x\}$ 'dir.

$boy(Gör(L)) = 2$ 'dir. Rankı 2'dir.

⑤ $L: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineer dönüşümü;

$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \,,\, x_2 + x_4 \,,\, 2x_1 + x_3 \,,\, x_1)$ şeklinde

tanımlansın. (a, b, c, d) elemanının Gör(L) 'de olması için a, b, c

hangi koşulu sağlamalıdır?

Bunu kullanarak Gör(L) için bir taban bulunuz.

Çözüm: $(a, b, c, d) \in$ Gör(L) olması için;

$$(a, b, c, d) = (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \,,\, x_2 + x_4 \,,\, 2x_1 + x_3 \,,\, x_1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= a \\ x_2 + x_4 &= b \\ 2x_1 + x_3 &= c \\ x_1 &= d \end{aligned}\right\}$$ lineer denklem sistemini çözelim:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-2d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+a-c \end{array}\right]$$

Sistemin çözümünün olması için $b + a - c = 0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \boxed{c = b + a}$$

Şimdi Gör(L) için bir taban bulalım:

$$(a, b, c, d) = (a, b, a+b, d) = a(1,0,1,0) + b(0,1,1,0) + d(0,0,0,1)$$

$$\text{Gör}(L) = \langle (1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

Gör(L)'yi geren elemanların hepsi lineer bağımsız olduklarından;

$B_{Gör(L)} = \{(1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$ 'dır.

(6) V bir vektör uzayı ve $T: V \longrightarrow V$ bir lineer dönüşüm olsun.

(i) $Gör(T) \cap Çek(T) = \{0\}$

(ii) $T(T(\alpha)) = 0 \Rightarrow T(\alpha) = 0$

koşullarının denk olduklarını gösteriniz.

Çözüm:

$(i) \Rightarrow (ii)$: $Gör(T) \cap Çek(T) = \{0\}$ ve $T(T(\alpha)) = 0$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} T(T(\alpha)) = 0 \Rightarrow T(\alpha) \in Çek(T) \text{ 'dır.} \\ \text{Aynı zamanda } T(\alpha) \in Gör(T) \text{ 'dır.} \end{array}\right\} T(\alpha) \in \underbrace{Gör(T) \cap Çek(T)}_{\{0\}}$$

$\therefore T(\alpha) = 0$ olur.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $T(T(\alpha)) = 0$ iken $T(\alpha) = 0$ olsun.

$a \in Gör(T) \cap Çek(T)$ alalım. $a \in Gör(T)$ ve $a \in Çek(T)$ 'dır.

$\Downarrow$ $a = T(\alpha)$ olacak şekilde $\alpha \in V$ vardır.

$\Downarrow$ $T(a) = 0$ 'dır.

$a = T(\alpha)$ ve $T(a) = 0 \Rightarrow T(T(\alpha)) = 0$

$\xRightarrow{\text{kabulden}} T(\alpha) = a = 0$ 'dır.