SORULAR:

(1) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[-4R_1+R_3 \to R_3]{-2R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2+R_3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2/-5 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$ 3 bilinmeyenli $>$ 2 denklem

$\Rightarrow$ Sonsuz çözüm var.

Bu çözümler; $\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 \\ x_2 &= 2 + 2x_3 \end{aligned}\right\}$ o.ü $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$.

$(2-t, 2+2t, t)$ tüm çözümlerdir. t'nin her farklı değeri için çözümler farklıdır. Sonsuz çözüm vardır.

(2) $\left.\begin{aligned} x+2y-3z &= a \\ 2x+6y-11z &= b \\ x-2y+7z &= c \end{aligned}\right\}$ sistemin çözümünün olabilmesi için a, b, c hangi bağıntıyı sağlamalıdır?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}\right] \xrightarrow{2R_2+R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2(b-2a)+(c-a) \end{array}\right]$$

- Eğer $2(b-2a)+(c-a) \neq 0 \Rightarrow$ Sistemin çözümü yoktur.
- Eğer $2(b-2a)+(c-a) = 0 \Rightarrow$ sistemin sonsuz çözümü vardır.

(3) $\left.\begin{aligned} 2x-y+2az+t &= b \\ 2x-y+(2a+1)z+(a+1)t &= 0 \\ -2x+y+(1-2a)z-2t &= -2b-2 \end{aligned}\right\}$ Sistemi a'nın hangi değeri için;

a) Tek çözümü vardır.

b) Sonsuz çözümü vardır.

c) Hiç çözümü yoktur.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2a & 1 & b \\ 2 & -1 & 2a+1 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & 1-2a & -2 & -2b-2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -b-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & -2 \end{array}\right]$$

$-a-1=0 \Rightarrow$ Sistemin çözümü yoktur.

$\boxed{a=-1}$

$-a-1\neq 0$

$\boxed{a\neq -1} \Rightarrow$ Sistemin sonsuz çözümü vardır. Çünkü

4 bilinmeyeli > 3 denklem.

(4) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ verilsin. $AX=0$ denklem sisteminin tüm çözümlerini bulunuz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{7}\to R_2}$$

Homojen lineer denklem sistemi çözerken bu sıfırlara pek gerek yoktur.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/7 \\ 0 & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[3R_2+R_1\to R_1]{-10R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 \\ 0 & 1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 4/7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_3}{4/7}\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 \\ 0 & 1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7}R_3+R_2\to R_2]{-\frac{3}{7}R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aslında

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0 \Rightarrow X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5 $x+y-z=1$

$2x+3y+a\cdot z=3$

$x+a\cdot y+3\cdot z=2$

Sistemin hangi a değeri için

a) Hiç çözümü yoktur

b) Sonsuz çözümü vardır.

c) Tek çözümü vardır?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_2+R_1\to R_1]{-(a-1)R_2+R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3-a & 0 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{-a^2-a+6}_{(a+3)\cdot(2-a)} & 2-a \end{array}\right]$$

$(2-a)=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\Rightarrow$ Sistemin sonsuz çözümü var.

$(a+3)=0 \Rightarrow \boxed{a=-3}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$ $\Rightarrow$ Sistemin hiç çözümü yok.

$\boxed{a\neq -3,2}$ $\Rightarrow$ Sistemin tek çözümü var.

g.5.5

6

$$A=\begin{bmatrix} x-6y+4z+5 & x & y \\ a & 2x-10y-9z+4 & z \\ b & c & -x+6y-5z-3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

matrisinin ters simetrik olması için a, b, c ne olmalıdır?

$$\left.\begin{aligned} x-6y+4z+5&=0\\ 2x-10y-9z+4&=0\\ -x+6y-5z-3&=0 \end{aligned}\right\}$$ ve $$\begin{aligned} x&=-a\\ y&=-b\\ z&=-c \end{aligned}$$ eşitlikleri geçerlidir.

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x-6y+4z&=-5\\ 2x-10y-9z&=-4\\ -x+6y-5z&=3 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemini çözelim: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & -5 \\ 2 & -10 & -9 & -4 \\ -1 & 6 & -5 & 3 \end{array}\right]$ ⟶

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 107 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ elde edilir. Buradan denklemdeki bilinmeyenler olan $x=107$, $y=20$, $z=2$ 'dir.

$$\left.\begin{aligned} a&=-x=-107\\ b&=-y=-20\\ c&=-z=-2 \end{aligned}\right\}$$ dir. ⟵

g.55

(7) $x+y+z=0$

$x+y-a.z=0$

$-a.x+y+z=0$

$-x+a.y-z=0$

} homojen denklem sistemi: hangi a değeri (değerleri) için

a) hiç çözümü yoktur.

b) sonsuz çözümü vardır.

c) tek çözümü vardır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{+R_1+R_4\to R_4 \\ aR_1+R_3\to R_3}]{-R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1+a & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$a+1=0$

$\boxed{a=-1}$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur ve sistemin sonsuz çözümü olur. ⌞

$a+1\neq 0$

$\boxed{a\neq -1}$ $\Rightarrow$ işleme devam edelim, $a+1\neq 0$ olduğundan satırları $a+1$'e bölebilirim.

$$\xrightarrow[\substack{R_3/a+1\to R_3 \\ R_2/a+1\to R_2}]{R_4/a+1\to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Sistemin tek çözümü vardır.

0 çözüm de $x=0=y=z$ 'dir.