HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ :

$(F,+,\cdot)$ bir cisim ve n bir pozitif tamsayı olsun.

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in F$ olmak üzere;

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

ifadesine bir "lineer (doğrusal) denklem" denir. Verilen b değerleri için bu denklemi sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 'ler bulunur. Bulduğumuz bu değerler topluluğu denklemin çözümüdür.

Örneğin; $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$

denkleminin bir çözümü $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$ 'dür. Diğer bir çözümü ise; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ 'dir.

Bu bölümde, m pozitif bir tamsayı olmak üzere, m tane lineer denklem ne zaman ve nasıl çözülür soruları ile ilgileneceğiz.

Bir "lineer denklem sistemi" genel olarak;

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

şeklinde yazılır. Burada a_{ij} 'ler sabit, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ 'ler denklemin değerleridir. Bu lineer denklem sistemindeki her bir denklemi ortak olarak sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerlerini bulmak istiyoruz.

Bu lineer denklem sisteminin "çözümü" sistemdeki tüm denklemleri aynı anda sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 'lerdir. Eğer bir lineer denklem sistemi çözüme sahip değilse (her bir denklemi aynı anda sağlayacak x'leri bulamıyorsak) "sistem tutarsızdır" denir. Sahipse "tutarlıdır" denir. Eğer sistemdeki tüm $b_1, b_2, \ldots, b_m$ değerleri 0 ise bu denklem sistemine "homojen denklem sistemi" denir ve $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ bir homojen lineer denklem sisteminin daima çözümüdür. Bu çözüme "aşikar çözüm" denir. Eğer en az bir $x_i \neq 0$ ise buna "aşikar olmayan çözüm" denir. Eğer iki sistemin çözümleri tam olarak birbirinin aynısı ise bu sisteme "denk sistemler" denir.

Lineer Denklem Sistemi Çözümleri: Bir lineer denklem sisteminin:

1. Hiç çözümü yoktur.
2. Tek çözümü vardır.
3. Sonsuz çözümü vardır.

} çözüm var.

1. Yok etme metodu ile lineer denklem sistemini çözme:

Örn:
$$x_1 - 3x_2 = -7$$
$$2x_1 + x_2 = 7$$

Burada amaç herhangi bir denklemi bir katsayı ile çarparak, diğer diğer denklem ile topladığımızda değişkenlerden birini yok etmek. Bu amaç ile ilk denklemi -2 ile çarpalım ve 2. denklem ile toplayalım:

$$-\cancel{2x_1} + 6x_2 = 14$$
$$\cancel{2x_1} + x_2 = 7$$

$$7x_2 = 21 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3} \Rightarrow 2.x_1 + 3 = 7 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

$\Rightarrow$ Sistemin çözümü vardır. TEK çözüm $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ 'dür.

$(x_1, x_2) = (2, 3)$ 'dür.

Örn:
$$x - 3y = -7$$
$$2x - 6y = 7$$

$$-\cancel{2x} + \cancel{6y} = 14$$
$$\cancel{2x} - \cancel{6y} = 7$$

$\boxed{0 = 21} \Rightarrow$ Sistemin hiç çözümü yoktur!

Örn:

$$x+2y-3z=-4$$
$$2x+y-3z=4$$

$$-\cancel{2x}-4y+6z=8$$
$$\cancel{2x}+y-3z=4$$

$$-3y+3z=12 \Rightarrow \boxed{-y+z=4} \Rightarrow \boxed{z=y+4}$$
$$\Rightarrow \boxed{x=y+8}$$

Üç değişkenden ikisini diğer birin türevi şeklinde yazabiliriz.

O halde çözüm $y=t\in\mathbb{R}$ herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$(x,y,z)=(t+8,\ t,\ t+4),\quad t\in\mathbb{R} \text{ şeklindedir.}$$

Dolayısıyla her reel sayı değeri için bir çözüm vardır. Yani <u>sonsuz</u> çözüm vardır. Bu çözümlerden birkaçı:

$(8,0,4),\ (7,-1,3),\ (2,-6,-2)\ .....$ dir.

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

2. Gauss-Jordan indirgeme metodu ile lineer denklem sistemi çözme :

n bilinmeyenli, m tane lineer denklem sistemi

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

şeklinde verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

matrisine bu lineer denklem sisteminin "katsayılar matrisi" denir.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

matrisine "sonuç matrisi"

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m\times(n+1)}$$

matrisine "ilaveli matris (eklenmiş matris)" denir.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$ matrisine de lineer denklem sisteminin "çözüm matrisi" denir.

En başta verilen doğrusal denklem sistemi, A sistemin katsayılar matrisi, B sonuç matrisi, X 'de çözüm matrisi olmak üzere;

$\boxed{AX = B}$ şeklinde yazılır.

Gauss-Jordan indirgeme yöntemi şu şekilde uygulanır ve yorumlanır:

(1) Verilen lineer denklem sisteminin ilaveli matrisi yazılır.

(2) Bu ilaveli matris elementer satır işlemleri yardımıyla daha kolay bir matrise indirgenir.

(3) Daha sonra (2) 'de bulunan basit ilaveli matris tekrar denklem sistemi haline getirilip yorum yapılır.

Bu yorum şöyle yapılır:

- Eğer (2) 'de bulduğumuz basit ilaveli matrisi (3) 'te tekrar denkleme çevirdiğimizde, b_i sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere $b_i = 0$ çıkarsa;

$\Rightarrow$ Sistemin hiç çözümü yoktur denir.

Bu durumda ② 'deki indirgeme sonucunda karşımıza çıkan matris görüntüsü;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} - & \cdots & - & \cdot \\ - & \cdots & - & \cdot \\ 0\ 0 & \cdots & 0 & b_i \neq 0 \\ - & \cdots & - & \cdot \end{array}\right]$$

şeklinde olacaktır.

$\Rightarrow$ Sistemin hiç çözümü yoktur.

- Eğer ② 'de bulduğumuz basit ilaveli matrisi ③ 'te tekrar denkleme çevirdiğimizde, herbir x_i değeri için tek bir sayı değeri bulabiliyorsak

$\Rightarrow$ Sistemin tek çözümü vardır.

- Eğer ② 'de bulduğumuz basit ilaveli matrisi ③ 'te tekrar denkleme çevirdiğimizde en az bir değişkeni en az bir değişkene bağlı bulabiliyorsak

$\Rightarrow$ Sistemin sonsuz çözümü vardır.

Şimdi önce daha önce yok etme metoduyla çözdüğümüz 3 soruyu Gauss – Jordan indirgeme yöntemi ile çözelim:

Lineer denklem sistemi $\longrightarrow$ MATRİS $\xrightarrow[\text{işlemleri}]{\text{satır indirgeme}}$ BASİT MATRİS $\longrightarrow$ Denklem ve YORUM

ÖRN: $\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 7 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3/7\to R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_2+R_1\to R_1}$$

Tekrar Denkleme Çevirelim

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} 1.x_1 + 0.x_2 &= 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2} \\ 0.x_1 + 1.x_2 &= 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3} \end{aligned} \Bigg\}\ \text{elde edilir.}$$

Daha basit birim matris hatta s.i.e.m

$\Rightarrow$ Sistemin TEK çözümü vardır. O çözüm

$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 'tür. Yada $(2,3)$'dür.

Örn: $\left.\begin{aligned} x - 3y &= -7 \\ 2x - 6y &= 7 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 2 & 6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 21 \end{array}\right] \rightarrow 0.x_1 + 0.x_2 = 21$$

$$\boxed{0 = 21}$$

$\Rightarrow$ Sistemin hiç çözümü yoktur!

Örn: $\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x + y - 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$ lineer denk. sis. çözünüz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_2}{-3}\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to 1.x+0.y-1.z=4 \Rightarrow \boxed{x-z=4} \\ \to 0.x+1.y-1.z=-4 \Rightarrow \boxed{y-z=-4} \end{array}$$

s.i.e.m.

Burada değişkenleri bir değişkene bağlı bulabiliyorum. O halde

$\Rightarrow$ Sistemin sonsuz çözümü vardır.

Son durumda bilinmeyen sayısı > denklem sayısı $\Rightarrow$ Sonsuz çözümü vardır.

$$\underbrace{\text{bilinmeyen sayısı}}_{\substack{3 \\ x,y,z}} > \underbrace{\text{denklem sayısı}}_{2}$$

Örn:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ 2x-3y+2z=14 \\ 3x+y-z=-2 \end{array}\right\}$$ sistemini çözünüz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_3}{-5}\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_3+R_1\to R_1]{7R_3+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_2}{10}\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_2+R_3\to R_3]{R_2+R_1\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to x=1 \\ \to z=3 \\ \to y=-2 \end{array} \Bigg\}$$ Tek çözüm vardır.