DETERMİNANT :

Lineer cebirin en kullanışlı konularından biri olan determinant kavramı bir kare matrise karşılık bir sayı getirir. Öncelikle 1x1, 2x2, 3x3 tipindeki matrislerde gözlemleyip daha sonra genelleştireceğiz.

Tanım: A nxn tipinde bir matris ve bu matrisin i.satır j.sütun bileşeni A_{ij} olsun. A'nın i.satır j.sütununu silerek elde ettiğimiz (n-1)x(n-1) tipindeki matrise "A_{ij}'nin minörü" denir ve m_{ij} ile ile gösterilir. Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$ matrisi verilsin.

$$m_{11} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad m_{12} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad m_{13} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$ olur.

Tanım: Determinant fonksiyonu; (1. satıra göre)

$$\boxed{D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot A_{1j} \cdot D_{n-1}(m_{1j})}$$ $n>1$ olur.

$$D_n : F^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto D_n(A) := \sum (-1)^{1+j} A_{1j} \cdot D_{n-1}(m_{1j})$$

ve det(A) yada |A| olarak gösterilir.

$$|A_{11}| = A_{11} \quad , \quad \begin{vmatrix} \overset{+}{A_{11}} & \overset{-}{A_{12}} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12} \cdot A_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{A_{11}} & \overset{-}{A_{12}} & \overset{+}{A_{13}} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{A_{11}} & \overset{-}{0} & \overset{+}{\cdots} & \overset{-}{0} \\ A_{21} & A_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \end{vmatrix} \cdots$$

$$= A_{11} \cdot \left(A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{43} & A_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n3} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} + 0 \cdot \left| \quad \right| + 0 \cdot \left| \quad \right| - - - \right)$$

$$= A_{11} \cdot A_{22} \cdot A_{33} \cdots A_{nn} \text{ 'dir.}$$

O halde üst üçgensel, alt üçgensel ve köşegen matrislerin determinantı köşegen elemanlarının çarpımıdır. Özel olarak;

$$\boxed{\det(I) = 1} \text{ 'dir.}$$

Teorem: (A) Determinant bir lineer fonksiyondur. Yani;

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ cR_i + dR_i' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} \rightarrow !$$

(B) İki tane aynı satır (sütun) içeren bir matrisin determinantı 0'dır. 0 satırı içeren bir matrisin de determinantı 0'dır.

NOT: • Bir satırın bir katını başka bir satıra eklemek determinantı değiştirmez.

• Determinantta iki satırın yerini değiştirdiğimizde determinant (-1) ile çarpılır.

• Sıfır satırı içeren (aynı satırı içeren) matrisin determinantı 0'dır.

Sonuç: ε bir elementer satır işlemi, E ise bu elementer satır işlemine karşılık gelen elementer matris olsun.

a) $\det(E) \neq 0$

b) $\det(E) = \det(E^T)$

c) $\det(\varepsilon(A)) = \det(E.A) = \det(E).\det(A)$, $A_{n\times n}$ için.

Sonuç: $A_{n\times n}$ için;

a) A sıfır satırı içeriyorsa $\Rightarrow \det A = 0$

b) $A = E_1.E_2 \ldots E_r \Rightarrow \det(A) = \det(E_1).\det(E_2) \ldots \det(E_r)$

* c) A tersinir $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

d) $\det(A) = \det(A^T)$ 'dır.

Sonuç: Determinant çarpmaya dağılır.

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$$ 'dir.