MAT226 İleri Matematik II – Hafta 4

Lineer Diferansiyel denklemler ve Bernoulli Denklemleri

Bu hafta neler öğreneceğiz:

- Lineer diferansiyel denklemler nedir?
- Lineer diferansiyel denklemler nasıl çözülür?
- Bernoulli diferansiyel denklemler nedir?
- Bernoulli diferansiyel denklemler nasıl çözülür?

Tavsiye edilen kaynak:

- S.L. Ross İntroduction to Ordinary Differential Equations

Kitaptan çözülmesi tavsiye edilen problemler:

⋆ Bölüm 2.2 ve 2.4’deki ilgili alıştırma soruları

4.1 Lineer difaransiyel denklemler

Bu bölümde birinci basamaktan lineer diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz.

Tanım 4.1

Birinci basamaktan bir denklem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabiliyorsa, lineer'dir denir.

Örnek 4.1

Mesela

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3$$

denklemi birinci basamaktan lineer bir denklemdir. Çünkü

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = x^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada $P(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $\quad Q(x) = x^2 \quad$ olmak üzere (4.1) yapısındadır.

Şimdi (4.1) denklemini

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \tag{4.2}$$

şeklinde yazalım. Bu denklem $M = P(x)y - Q(x)$ ve $N = 1$ olmak üzere

$$Mdx + Ndy = 0$$

şeklindedir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

olduğundan $P(x) \equiv 0$ olmadıkça bu denklem tam değildir. Bu durumda (4.1) denklemi zaten basitleşerek ayrılabilen bir denklem haline gelir.

Teorem 4.2

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$\mu = e^{\int P dx}$$

şeklinde bir integrasyon çarpanı vardır. Bu denklemin genel çözümü

$$y = e^{-\int P dx}\left[\int e^{\int P dx} Q(x) dx + c\right]$$

fonksiyonudur.

Kanıt. (4.2) denkleminin sadece x 'e bağlı bir integrasyon çarpanı vardır. Şimdi bu integrasyon çarpanını bulmak için denklemi $\mu(x)$ ile çarparak

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0$$

elde ederiz. Tanıma göre $\mu(x)$ 'in bir integrasyon çarpanı olması için gerek ve yeter koşul, (4.1)'in tam yani,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)]$$

olmasıdır. Bu şart basitleşerek

$$\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx}[\mu(x)]$$

ya da sadece

$$\mu P = \frac{d\mu}{dx} \tag{4.3}$$

olur. (4.3) denklemi, P bilinen bir fonksiyon olmak üzere μ bağlı değişkeni ve x bağımsız değişkeni cinsinden ayrılabilen denklemdir. Bu denklemin değişkenlerini ayırarak

$$\frac{d\mu}{\mu} = P dx$$

elde ederiz. Bunu integre ederek

$$\ln|\mu| = \int P dx \quad \text{veya} \quad \mu = e^{\int P dx} \tag{4.4}$$

özel çözümünü buluruz. Böylece (4.1) lineer denkleminin (4.4) şeklinde bir integrasyon çarpanı vardır. (4.1)'yı (4.4) ile çarparak

$$e^{\int P dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P dx}P(x)y = e^{\int P dx}Q(x)$$

elde edilir ki bu aslinda

$$\frac{d}{dx}\left[y e^{\int P dx}\right] = e^{\int P dx}Q(x)$$

ifadesinden ibarettir. Bunu integre ederek (4.1)'nın çözümünü c bir keyfî sabit olmak üzere

$$y e^{\int P dx} = \int e^{\int P dx} Q(x) dx + c$$

■

Örnek 4.3

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x}$$

lineer diferansiyel denklemini ele alalm. Burada

$$P(x) = \frac{2x+1}{x}$$

olduğundan integrasyon çarpanı

$$e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2x+1}{x} dx} = e^{2x+\ln|x|} = e^{2x} e^{\ln|x|} = xe^{2x}$$

olarak bulunur. Denklemi bu integrasyon çarpanı ile baştan başa çarparak

$$xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}(2x+1)y = x$$

veya

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{2x}y\right] = x$$

elde ederiz. Bunu integre ederek genel çözümü c bir keyfî sabit olmak üzere

$$xe^{2x}y = \frac{x^2}{2} + c$$

ya da

$$y = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{c}{x}e^{-2x}$$

olarak buluruz.

Alıştırma 4.4

$(x^2 + 1)\,\frac{dy}{dx} + 4xy = x$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 4.5

$y^2dx + (3xy - 1)dy = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 4.6

$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 6x^2$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 4.7

$x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 1$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 4.8

$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 1$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 4.9

$(\sin 2y - 2x\cos y)dy = 2dx$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

4.2 Bernoulli Denklemleri

Şimdi uygun bir dönüşümle lineer hale getirilebilen özel bir diferansiyel denklem göreceğiz. Bu Bernoulli denklemidir.

Tanım 4.2

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{4.5}$$

şeklindeki denkleme Bernoulli diferansiyel denklemi denir.

$n = 1$ ise yukarıdaki Bernoulli denkleminin

$$\frac{dy}{dx} + [P(x) - Q(x)]y = 0$$

ayrılabilen denklemi haline geleceği bellidir. Böylece (4.5) denklemi bu özel halde hem ayrilabilen ve hem de lineer bir denklem olarak çözülebilir. Ancak $n \neq 1$ için bu basitlikten eser kalmaz ve farklı bir yol izlemek gerekir. Şimdi, bu genel halde bir çözüm yöntemi veren aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 4.10

$n \neq 1$ olsun. $v = y^{1-n}$ dönüşümü

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Bernoulli denklemini v cinsinden lineer bir denkleme indirger.

Kanıt. Denklemi y^{-n} ile çarpalım.

$$y^{-n}\tfrac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$
$$y^{1-n} = v \Rightarrow (1-n)y^{-n}\tfrac{dy}{dx} = \tfrac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

lineer diferansiyel denlkemini alırız. ∎

Örnek 4.11

$xdy - (y + xy^3(1 + \ln x))\,dx = 0$ diferansiyel denklemini cözünüz.

Çözüm.

$$
\begin{aligned}
& xdy - \left(y + xy^3(1+\ln x)\right)dx = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = (1+\ln x)y^3
\end{aligned}
$$

diferansiyel denklemi $n = 3$ *olmak üzere*

$$\frac{dy}{dx} + P_1(x)y = Q_1(x)y^n$$

seklınde yazıldığından Bernoulli diferansiyel denklemidir. Denklemi y^{-3} *ile carparsak,*

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-2} = (1+\ln x)$$

elde ederiz. Burada

$$v = y^{1-n} = y^{-2}, \quad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

dönüsümünü uygularsak

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 1 + \ln x \\
& \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = -2(1+\ln x)
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

seklinde lineer diferansiyel denklemi elde ederiz. Burada

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

integral carpani ile denklemi carpaisak,

$$
\left.
\begin{array}{rl}
 & x^2\frac{dv}{dx} + x^2\frac{2}{x}v = -2x^2(1+\ln x) \\
\Rightarrow & x^2\frac{dv}{dx} + 2xv = -2x^2(1+\ln x) \\
\Rightarrow & \frac{d}{dx}(x^2v) = -2x^2(1+\ln x) \\
\Rightarrow & x^2v = -2\int\left(x^2 + x^2\ln x\right)dx + c \\
\left\{\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = x^2dx \Rightarrow v = x^3/3 \end{array}\right] & \\
\Rightarrow & x^2v = -\frac{2}{3}x^3 - 2\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \int\frac{x^3}{3}\frac{dx}{x}\right) + c \\
\Rightarrow & x^2v = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^3\ln x + \frac{2}{9}x^3 + c
\end{array}
\right] \Rightarrow v = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x\ln x + \frac{2}{9}x + cx^{-2}
$$

elde ederiz $v = y^{-2}$ *olduğundan*

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x\ln x + \frac{2}{9}x + cx^{-2}$$

elde ederiz.

Alıştırma 4.12

$$x\frac{dy}{dx} + y = (xy)^{3/2}$$
$$y(1) = 4$$

başlangıç değer problemini çözünüz.