LİNEER DÖNÜŞÜMLERİN "BİRE-BİR"LİĞİ ve "ÖRTEN"LİĞİ :

Tanım: ① Bir $L:V\longrightarrow W$ lineer dönüşümü için "$L(u)=L(v)$ iken $u=v$" oluyorsa L dönüşümüne "bire-bir (1-1)(monomorfizma)(injektif)" denir

② Bir $L:V\longrightarrow W$ lineer dönüşümünde W'den alınan her bir $w\in W$ elemanına karşılık $L(v)=w$ olacak şekilde en az bir $v\in V$ elemanı bulabiliyorsak yani $\underset{\text{Gör}(L)}{L(V)}=W$ ise L dönüşümüne "örten (epimorfizma)(surjektif)" denir.

③ $L:V\longrightarrow W$ lineer dönüşümü hem bire-bir hem de örtense L'ye bir "izomorfizma (bijektif)" denir. V'den W'ya bir izomorfizma varsa "V ve W izomorftur" denir ve $V\cong W$ ile gösterilir.

** ***Teorem:** Bir $L:V\longrightarrow W$ lineer dönüşümü için

$$\boxed{L \quad \text{bire-bir'dir} \iff \text{Çek}(L)=\{0\}}$$

NOT: Bu yukarıdaki teorem bize bir L dönüşümünün bire-bir olup olmadığını kontrol etmemizde kolaylık sağlar. Çekirdeğin sadece 0 elemanından oluştuğunu söylersek o dönüşüm 1-1'dir.

ÖRNEK: $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü

$L(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2-x_3 \,,\, x_1-x_2 \,,\, x_2-x_3)$ şeklinde tanımlansın.

L bir izomorfizma mıdır?

Çözüm: L 1-1 mi? L'nin 1-1 olduğunu göstermek için $\text{Çek}(L)=\{0\}$ olduğunu göstereceğiz:

Çekirdekten keyfi bir $(x,y,z)\in \text{Çek}(L)$ elemanını alalım.

Bir elemanın çekirdekte olması demek L dönüşümü altında o elemanın görüntüsünün 0 olması demektir. O halde;

$$(x,y,z)\in \text{Çek}(L) \Longrightarrow L(x,y,z)=0 \text{ 'dır.}$$

$$\underset{\substack{\text{L'nin}\\ \text{tanımı verilmiş}\\ \text{soruda}}}{\Longrightarrow} L(x,y,z)=(x+y-z,\ x-y,\ y-z)=0=(0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=y=z=0$$

Yani L'nin çekirdeğinden aldığım her eleman (0,0,0) elemanı oluyor. Çekirdekte (0,0,0)'dan başka eleman yok. O halde

$\text{Çek}(L)=\{0\} \Longrightarrow$ L 1-1 olur.

L örten mi? $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ örten olup olmadığını araştıralım:

Buradan aldığım her $\overset{\text{var ✓}}{(x,y,z)}$ için $L\overset{\text{var ✓}}{(a,b,c)} = (x,y,z)$ olacak şekilde burada bir $\underbrace{(a,b,c)}$ elemanı bulabiliyor muyum?

aradığım şey bu (a,b,c)?
acaba (a,b,c)'yi (x,y,z)'ye
bağlı bulabiliyor muyum?

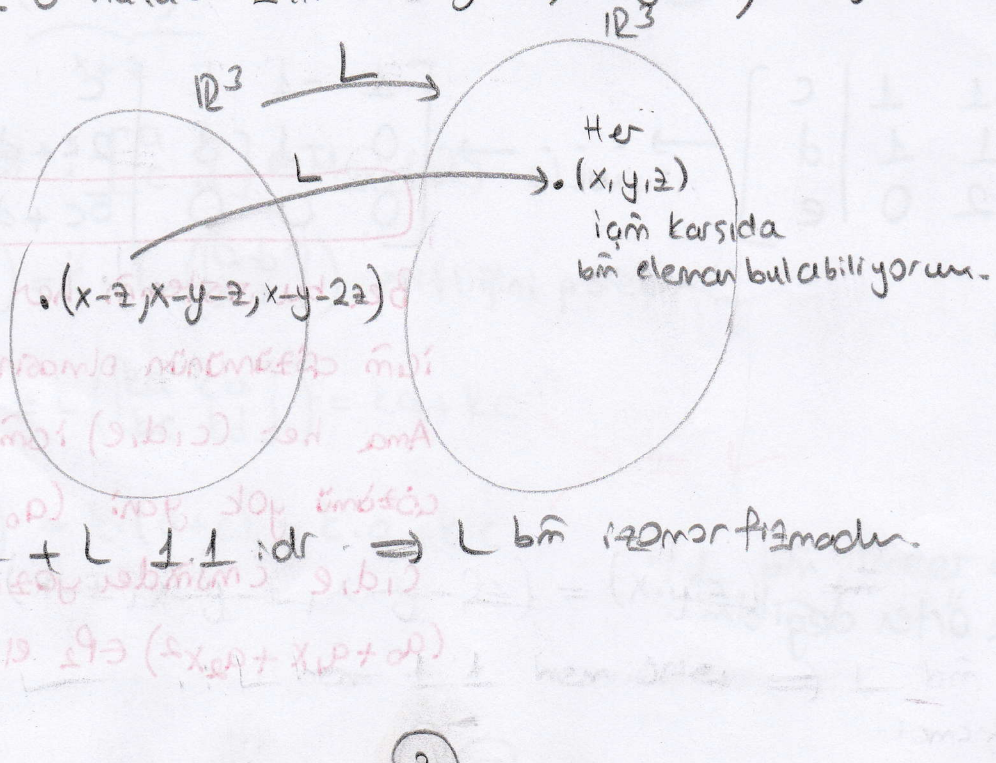
Elimde $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ve $L(a,b,c) = (a+b-c,\ a-b,\ b-c) = (x,y,z)$ var. Şimdi bu elimdekilerle (a,b,c)'yi bulabiliyor muyum?

$$L(a,b,c) = (a+b-c,\ a-b,\ b-c) = (x,y,z) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b-c = x \\ a-b = y \longrightarrow a = b+y \\ b-c = z \longrightarrow c = b-z \end{array}\right\}$$

$$a+b-c = (b+y) + \cancel{b} - (\cancel{b}-z) = x$$

$$\Rightarrow b+y+z = x \Rightarrow \boxed{b = x-y-z} \Rightarrow \boxed{a = x-z} \text{ ve } \boxed{c = x-y-2z}$$

elde edilir. O halde $L(x-z,\ x-y-z,\ x-y-2z) = (x,y,z)$'dir.



$\Rightarrow$ L örten + L 1-1 idi $\Rightarrow$ L bir izomorfizmadır.

ÖRNEK: P_2 en fazla ikinci dereceden polinomlar uzayı olmak üzere

$L : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$L(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0-a_1+a_2 \,,\, -2a_0+a_1+a_2 \,,\, -3a_0+2a_1)$$

şeklinde tanımlansın. L dönüşümü örten midir?

Çözüm: $\mathbb{R}^3$'ten aldığım her $\overset{\text{var } L}{(c,d,e)}$ için $\overset{\text{var } L}{L(a_0+a_1x+a_2x^2)=(c,d,e)}$ olacak şekilde $\underbrace{(a_0+a_1x+a_2x^2)}_{\text{bu elemanı arıyorum } (c,d,e) \text{ cinsinden.}} \in P_2$ elemanı bulabilir miyim?

Elimde $(c,d,e)\in\mathbb{R}^3$ var ve $\underbrace{L(a_0+a_1x+a_2x^2)=(c,d,e)}$ var. L

$$L(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0-a_1+a_2 \,,\, -2a_0+a_1+a_2 \,,\, -3a_0+2a_1) = (c,d,e)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0-a_1+a_2 &= c \\ -2a_0+a_1+a_2 &= d \\ -3a_0+2a_1 &= e \end{aligned}\right\}$$

Bunu elimle çözmek çok vakit alacağı için matris yardımıyla çözüyorum

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & c \\ -2 & 1 & 1 & d \\ -3 & 2 & 0 & e \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & c \\ 0 & -1 & 3 & 2c+d \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{5c+d-e} \end{array}\right]$$

Ben bu sistemin her (c,d,e) için çözümünün olmasını istiyordum. Ama her (c,d,e) için bu sistemin çözümü yok yani (a_0, a_1, a_2)'leri c,d,e cinsinden yazamam. Yani $(a_0+a_1x+a_2x^2)\in P_2$ elemanı bulamıyorum.

$\Rightarrow L$ örten değildir.

ÖRNEK: $L: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+c$

şeklinde tanımlansın.

(a) L'nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

(b) Çek(L) ve Gör(L) kümelerini bulunuz.

(c) $Boy(Çek(L)) = ?$

(d) L dönüşümü 1-1'midir?

(e) L dönüşümü örten midir?

(f) L dönüşümü izomorfizma mıdır?

Çözüm: a) ① $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ alalım.

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) \overset{?}{=} L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$ eşitliğini görelim:

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{bmatrix}\right) = (a+x)+(c+z)$$

$$\underbrace{L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)}_{a+c} + \underbrace{L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)}_{x+z} = (a+c)+(x+z)$$

$\Big\} = ✓$

② k bir skaler, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ olsun.

$$L\left(k.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = k.L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$ eşitliğini görelim:

$$L\left(k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) = ka+kc$$

$$k.\underbrace{L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)}_{(a+c)} = k.(a+c) = k.a+k.c$$

$\Big\} = ✓$

$\therefore$ L bir lineer dönüşümdür.

b) $\text{Çek}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+c = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = -c \right\}$

O halde çekirdekten aldığım her $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ elemanı için $a = -c$ 'dir.

Yani ; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & d \end{bmatrix}$ 'dir.

$\text{Çek}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

$\text{Gör}(L) = \left\{ L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \;\middle|\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \right\}$

$= \left\{ \underbrace{a+c}_{\in \mathbb{R}} \;\middle|\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \right\} = \mathbb{R}$

Görüntü kümesi tüm reel sayılara eşittir. Hangi reel sayıyı alırsak alalım. ona karşılık $M_{2x2}(\mathbb{R})$ kümesinde en az bir matris bulabiliriz.

Örneğin $2 \in \text{Gör}(L)$ için $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ .... matrisleri için $L\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) = 2$, $L\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$, $L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\right) = 2$ 'dir.

c) $\text{Çek}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a = -c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 'dir. Dolayısıyla Çek(L) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ tarafından gerilir. Bu 3 eleman lineer bağımsız olduğundan Çek(L) için bir tabandır. Boy(Çek(L)) = 3 olur.

(d) $Çek(L) \neq \{0\}$ olduğundan L dönüşümü 1.1 değildir.

(e) $L(M_{2x2}(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$ olduğundan yani görüntü kümesinden aldığım her elemana karşılık $M_{2x2}(\mathbb{R})$ kümesinden bir matris bulabilirim.

(f) L dönüşümü 1.1 olmadığından bir izomorfizma değildir.

ÖRNEK: $L: P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü,

$L(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0-a_1+a_2 \, , -2a_0+a_1+a_2 \, , a_2)$ şeklinde tanımlansın. L bir izomorfizma mıdır?

Çözüm: L 1.1 mi? $a_0+a_1x+a_2x^2 \in Çek(L)$ alalım.

$\Rightarrow L(a_0+a_1x+a_2x^2) = 0$ 'dır

$\Rightarrow L(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0-a_1+a_2 \, , -2a_0+a_1+a_2 \, , a_2) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0-a_1+a_2&=0 \\ -2a_0+a_1+a_2&=0 \\ a_2&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_0=a_1=a_2=0 \text{ olur.}$$

$\Rightarrow$ Çekirdekten aldığım her $\underset{0}{\overset{\shortparallel}{a_0}}+\underset{0}{\overset{\shortparallel}{a_1}}x+\underset{0}{\overset{\shortparallel}{a_2}}x^2$ elemanı 0 olur.

$\Rightarrow Çek(L) = \{0\}$

$\Rightarrow$ L 1.1 'dir.

L örten midir? $(m,y,z)\overset{\checkmark\text{var}}{\in}\mathbb{R}^3$ keyfi elemanı için

$L(a_0+a_1x+a_2x^2)\overset{\text{var}\checkmark}{=}(m,y,z)$ olacak şekilde $\underbrace{a_0+a_1x+a_2x^2\in P_2}_{\text{arıyorum?}}$

elemanı bulabilir miyim?

$$L(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0-a_1+a_2\,,\,-2a_0+a_1+a_2\,,\,a_2)=(m,y,z)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0-a_1+a_2&=m\\ -2a_0+a_1+a_2&=y\\ a_2&=z \end{aligned}\right\}$$

sistemini çözdüğümde a_0,a_1,a_2'yi m,y,z cinsinden bulabiliyor muyum?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & m\\ -2 & 1 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2z-m-y\\ 0 & 1 & 0 & 3z-y-2m\\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$$

$\Rightarrow a_0=2z-m-y\ ,\ a_1=3z-y-2m\ ,\ a_2=z$

$\Rightarrow$ Her $(m,y,z)\in\mathbb{R}^3$ için $L\big((2z-m-y)+(3z-y-2m)x+(z)x^2\big)=(m,y,z)$

dir.

$\Rightarrow$ L örtendir

$\Rightarrow$ L hem birebir hem örten olduğundan L bir izomorfizmadır.

V ve W sonlu boyutlu vektör uzaylar olmak üzere;

NOT: ① $$\boxed{V \cong W \iff \text{boy}(V) = \text{boy}(W)}$$

② $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm

$$\boxed{\text{boy}(\text{Çek}(L)) + \text{boy}(\text{Gör}(L)) = \text{boy}(V)}$$

③ $$\boxed{V = \{0\} \Rightarrow \text{boy}(V) = 0}$$

sadece sıfır elemanı olan bir küme

sayı olan sıfır.

ÖRNEK: $L : V \longrightarrow \mathbb{R}^5$ lineer dönüşüm olsun.

a) L bir izomorfizma ise $\text{boy}(V) = ?$

L bir izomorfizma ise $L \cong \mathbb{R}^5$ 'dir yani $\text{boy}(L) = \text{boy}(\mathbb{R}^5) = 5$ 'dir.

b) L örten ve $\text{boy}(\text{Çek}(L)) = 2$ ise $\text{boy}(V) = ?$

L örten ise $L(V) = \text{Gör}(L) = \mathbb{R}^5$ 'dir. $\text{boy}(\text{Gör}(L)) = \text{boy}(\mathbb{R}^5) = 5$.

$$\text{boy}(\text{Çek}(L)) + \text{boy}(\text{Gör}(L)) = \text{boy}(V) \quad \text{olduğundan}$$
$$\overset{\shortparallel}{2} \quad + \quad \overset{\shortparallel}{5} \quad = 7 \quad \text{bulunur.}$$

c) L 1-1 ve $\text{boy}(V) = 4$ ise $\text{boy}(\text{Gör}(L)) = ?$

L 1-1 $\Rightarrow \text{Çek}(L) = \{0\} \Rightarrow \text{boy}(\text{Çek}(L)) = 0$ 'dır.

$$\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\text{boy}(\text{Çek}(L))} + \text{boy}(\text{Gör}(L)) = \underset{\underset{4}{\shortparallel}}{\text{boy}(V)} \Rightarrow \text{boy}(\text{Gör}(L)) = 4 = \text{boy}(V)$$
$$\Rightarrow \text{Gör}(L) \cong V$$