MATRİSLER :

Tanım: F bir cisim, m ve n birer tamsayı olmak üzere;
F cismi üzerinde $m \times n$ tipinde bir "A matrisi"

$$S = \{ (i,j) \mid i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n \}$$

kümesinden F cismine bir fonksiyondur.

$$\begin{array}{rcl} A : S & \longrightarrow & F \\ (i,j) & \longmapsto & A(i,j) := a_{ij} \end{array}$$

(i,j)'nin A fonksiyonu altındaki görüntüsü $A(i,j)$ yada a_{ij}'ye A matrisinin "(i,j)-bileşeni" denir. A matrisi;

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to 1.\text{satır} \\ \to 2.\text{satır} \\ \\ \to i.\text{satır} \\ \\ \to m.\text{satır} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1.\text{sütun} & 2.\text{sütun} & j.\text{sütun} & n.\text{sütun} \end{array} & \end{array}$$

$i = 1,2,\ldots,n$ için $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ $1 \times n$ tipindeki bu matris A'nın "i. satırı" olarak adlandırılır.

$j=1,2,\dots,n$ için $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $m\times 1$ tipindeki bu matris A'nın "j. sütunu" olarak adlandırılır.

F cismi üzerindeki $m\times n$ tipindeki tüm matrislerin uzayı $F^{m\times n}$ olarak gösterilir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1+i & 4i \\ 2-3i & -3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $E=[3]$, $F=[-1 \;\; 0 \;\; 2]$

matrisleri verilsin.

a) $A_{2\times 3}$ yada $A\in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $C_{3\times 1}$, $D_{3\times 3}$, $E_{1\times 1}$, $F_{1\times 3}$

$B_{2\times 2}$ yada $B\in \mathbb{C}^{2\times 2}$

b) $\overset{A(1,2)}{a_{12}}=2$, $\overset{A(1,3)}{a_{13}}=3$, $\overset{A(2,2)}{a_{22}}=0$, $\overset{A(2,3)}{a_{23}}=1$

$b_{11}=1+i$, $b_{12}=4i$, $b_{21}=2-3i$, $b_{22}=-3$

$c_{11}=1$, $c_{21}=-1$, $c_{31}=2$

$d_{23}=1$, $d_{13}=0$, $d_{32}=-1$

$e_{11}=3$

$f_{11}=-1$, $f_{12}=0$, $f_{13}=2$

Tanım: $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ iki matris için her $i=1,\dots,m$ ve $j=1,2,\dots,n$ için $a_{ij}=b_{ij}$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B matrisleri "eşit matrislerdir" denir.

$$\boxed{A_{m\times n}=B_{m\times n} \iff \left.\begin{array}{l}\text{Her } i=1,\dots,m \\ \text{Her } j=1,\dots,n\end{array}\right\} \text{için } a_{ij}=b_{ij}}$$

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}_{3\times3}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & w-1\\ 2 & x+3 & 4\\ y & -4 & z+1\end{bmatrix}_{3\times3}$

matrislerinin eşit olması için $x+y+z+w$ ne olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} w-1=-1 \Rightarrow w=0 \\ x+3=-3 \Rightarrow x=-6 \\ y=0 \\ z+1=5 \Rightarrow z=4 \end{array}\right\} x+y+z+w=-2 \text{ olur.}$$

Tanım: $A_{m\times n}$ matrisinin "transpozu", bileşenleri

$$A^T(i,j)=A(j,i)=a_{ji}$$

şeklinde tanımlanan, $n\times m$ tipindeki matristir.

(A'nın sütunları, A^T'un satırları, A'nın satırları A^T'un sütunlarıdır)

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 3} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = [1] \Rightarrow C^T = [1]$

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ matrisi için aşağıdakileri hesaplayınız:

a) $A^T_{23} + A^T_{21} - A_{23} - A_{21} = ?$ b) $(A^T)^T_{31} = ?$

a) 1.yol: önce transpozu hesaplayıp daha sonra oradan bakabiliriz:

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A^T_{23} = -2 \\ A^T_{21} = 3 \\ A_{23} = 1 \\ A_{21} = 3 \end{array}\right\} -2 + \cancel{3} - 1 - \cancel{3} = -3$

2.yol: $\left.\begin{array}{l} A^T_{23} = A_{32} = -2 \\ A^T_{21} = A_{12} = 3 \\ A_{23} = 1 \\ A_{21} = 3 \end{array}\right\}$ 3 bulunur.

b) $(A^T)^T_{31} = A^T_{13}$
$= A_{31}$
$= 1$ olur.

MATRİSLERDE İŞLEMLER :

① **Matris Toplamı:** $A_{m\times n}$ ve $B_{m\times n}$ şeklindeki iki matrisin toplamı bileşenleri her $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ için $a_{ij}+b_{ij}$ olan $m\times n$ tipindeki matristir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}_{2\times3}$ olsun.

O zaman; $A+B=\begin{bmatrix}1+0 & -2+2 & 3+1\\ 2+1 & -1+3 & 4-4\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$

NOT: Matrislerde toplama işlemi yapabilmek için matrislerin satır ve sütun sayıları aynı olmalıdır.

Teorem: $A,B,C\in F^{m\times n}$ matrisleri için aşağıdakiler sağlanır:

(1) $A+(B+C)=(A+B)+C$, $\forall A,B,C\in F^{m\times n}$ (Birleşme öz.)

(2) Tüm bileşenleri 0 olan $m\times n$ tipindeki matris için ;
(bu matris "sıfır matrisi" olarak adlandırılır ve $O_{m\times n}$ olarak gösterilir.)

$$A+O=O+A=A \quad , \forall A\in F^{m\times n} \text{'dir.}$$

(3) Her $A_{m\times n}$ matrisi için $(-A)_{ij} = A_{ij}$ şeklinde tanımlanan $-A$ matrisi (bu matris A'nın "negatifi" olarak adlandırılır.)

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$ koşulunu sağlar.

(4) $A+B=B+A$, $\forall A,B\in F^{m\times n}$ (değişme özelliği)

(2) Skalerle Çarpma: Bir $A_{m\times n}$ matrisinin, bir c skaleri ile çarpımı bileşenleri her $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ için $c(A_{ij})$ olan $m\times n$ tipindeki matristir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow -2A=\begin{bmatrix} -2.4 & -2.-2 \\ -2.7 & -2.-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -14 & 6 \end{bmatrix}$'dır.

NOT: Matris toplamı ve (-1) skaleri ile çarpım yardımıyla matrislerde çıkarma işlemini elde ederiz.

$$A-B=A+(-1)B \text{ dir.}$$

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $A-B=?$

$$A-B=\begin{bmatrix} 1-0 & 2-1 \\ 3-(-1) & 0-3 \\ -1-4 & 2-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \text{'dir.}$$

Teorem: c_1, c_2 skalerleri, $A, B \in F^{m\times n}$ matrisler için aşağıdakiler sağlanır:

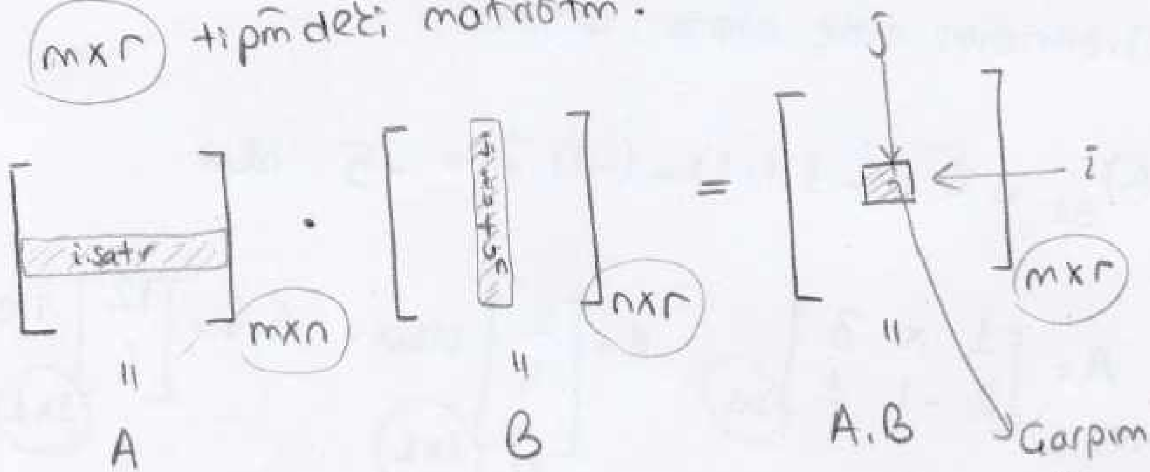
1) $c_1.(c_2.A) = (c_1.c_2).A$
2) $(c_1+c_2).A = (c_1.A) + (c_2.A)$
3) $c_1.(A+B) = c_1.A + c_1.B$
4) $1.A = A$

3) Matris Çarpımı:

A matrisi $m\times n$ tipinde, B matrisi $n\times r$ tipinde matrisler ise A ve B matrisinin çarpımı, (i,j). bileşeni

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}.B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}$$

olan $m\times r$ tipindeki matristir.



Çarpımın i. satır j. sütun bileşeni; A'nın i. satırındaki bileşenlerin B'nin j. sütunundaki bileşenler ile çarpılıp toplanması ile elde edilir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 4 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}_{3\times 2}$ verilsin. $A.B=?$

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 4 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.(-2)+2.(4)+(-1).2 & 1.5+2(-3)+(-1).1\\ 3.(-2)+1.4+4.2 & 3.5+1.(-3)+4.1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A.B=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & 16\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}_{3\times 3}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$ $\Rightarrow (A.B)_{32}=?$

A'nın 3. satırı, B'nin 2. sütunu çarpılınca A.B matrisinin (3,2). bileşenini elde ederiz. O halde;

$$(A.B)_{32}=0.4+1.(-1)+(-2).2=-5 \text{ olur.}$$

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}1 & x & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ y\end{bmatrix}_{3\times 1}$ olsun. $A.B=\begin{bmatrix}12\\ 6\end{bmatrix}_{2\times 1}$ ise $x=?$ $y=?$

$$A.B=\begin{bmatrix}2+4x+3y\\ \cancel{4}-\cancel{4}+y\end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix}12\\ 6\end{bmatrix}\Rightarrow \boxed{y=6} \text{ ve } \boxed{x=-2}$$

bulunur.

NOT: 1) Matrislerde çarpma her zaman tanımlı değildir. A'nın sütun sayısı, B'nin satır sayısına eşit ise A.B çarpımı tanımlıdır. Yani;

$$\boxed{A_{m\times n} \cdot B_{n\times r} = (A.B)_{m\times r}}$$

2) A, B birer matris ise $\boxed{A.B \neq B.A}$ 'dır. Hatta biri çarpım tanımlı iken diğer çarpım tanımlı olmayabilir.

ÖRNEK: $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 4} \Rightarrow (A.B)_{2\times 4}$ fakat $(B.A)$ matrisi tanımlı değildir.

$A_{2\times 3}$, $B_{3\times 2} \Rightarrow (A.B)_{2\times 2}$ iken $(B.A)_{3\times 3}$ olur.

Burada her iki çarpım da tanımlı olmasına rağmen $A.B \neq B.A$ 'dır.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ verilsin. Burada

$$\underbrace{A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } B.A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A.B \neq B.A \text{ 'dır.}} \text{ 'dür.}$$

Teorem: Uygun tipteki A, B, C matrisleri için aşağıdakiler sağlanır;

1) $A.(B.C) = (A.B).C$
2) $(A+B).C = A.C + B.C$ ve $C.(A+B) = C.A + C.B$
3) $I.A = A$ ve $A.I = A$. Burada I uygun birim matris
4) d bir skaler olmak üzere

$$d.(A.B) = (d.A).B = A.(d.B)$$

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ olsun.

$$A.(B.C) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}}_{\begin{bmatrix} 4+0+3 \\ 6+5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}} \Bigg)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 35+28 \\ 14-52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ -38 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$(A.B).C = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}}_{\begin{bmatrix} 16 & 10 & 7 \\ -5 & -15 & -1 \end{bmatrix}} \Bigg) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 10 & 7 \\ -5 & -15 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ -38 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

= eşitlik sağlanır.

Teorem: A, B uygun matrisler olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (A+B tanımlı iken)

2) Her c skaleri için $(c.A)^T = c.A^T$

3) $(A.B)^T = B^T.A^T$ (A.B tanımlı iken)

4) $(A^T)^T = A$

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

= ✓

$$A_{2\times3} \cdot C_{3\times2} = (A.C)_{2\times2} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A.C)^T = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3} \Rightarrow C^T.A^T = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

= ✓

NOT: (1) A ve B matrisleri sıfır matrisinden farklı matrisler olsalar bile çarpımları 0 matrisi olabilir. (Bu özellik reel sayılarda yok!)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \neq 0, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \neq 0$$ fakat $A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisidir.

Ayrıca $B.A = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \neq A.B$ 'dir.

(2) A, B, C matrisleri için $A \cdot B = C \cdot B$ iken her zaman $A = C$ olmayabilir. (Yani matrislerde sadeleştirme her zaman yok. B tersinir matris ise var. İleride göreceğiz.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$A.B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix} = A.C$ 'dir fakat $B \neq C$ 'dir.