MAT226 İleri Matematik II – Hafta 6

Homojen olmayan denklemeler, sabit katsayılı lineer homojen olmayan denklemler, Belirsiz katsayılar yöntemi

Bu hafta neler öğreneceğiz:

- Homojen olmayan denklemler ve özellikleri
- Sabit katsayılı lineer homojen denklemlerin çözümleri
- Sabit katsayılı, lineer, homojen olmayan denklemlerin belirsiz katsayılar yöntemi ile çözümü

Tavsiye edilen kaynak:

- S.L. Ross İntroduction to Ordinary Differential Equations

Kitaptan çözülmesi tavsiye edilen problemler:

⋆ Bölüm 3.1 ve 4.1'deki ilgili alıştırma soruları

6.1 Homojen Olmayan Denklem

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x) \tag{6.1}$$

Teorem 6.1

v fonksiyonu, (6.1) ile verilen n . basamaktan homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin herhangi bir çözümü olsun. u da bu denkleme karşılık gelen

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \tag{6.2}$$

homojen denkleminin herhangi bir çözümü olsun. $u+v$, verilen (6.1) homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Örnek 6.2

$y=x$ 'in,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin bir çözümü, $y=\sin x$ 'in de bu denkleme karşlık gelen

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

homojen denkleminin herhangi bir çözümü olduğunu görüyoruz. O zaman Teorem 6.1'e göre

$$\sin x+x$$

toplamı da

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Yerine koyarak bunu kolayca doğrulayabiliriz.

Şimdi u 'nun (6.2) homojen denkleminin bir genel çözümü, yani n tane lineer bağımsız çözümünün genel bir lineer bileşimi olduğunu kabul edelim. Hiç bir keyfî sabit bulundurmayan v de, (6.1) homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin her hangi bir özel çözümü olsun. Teorem (6.1)'i kullanarak $u+v$ 'nin, n. basamak homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu ve n tane keyfî sabit bulundurduğunu görürüz. Böyle bir çözüme (6.1) denkleminin genel çözüm'ü diyeceğiz. Bunu aşağıdaki tanımla özetleyelim:

Tanım 6.1 **a)** (6.2) denkleminin genel çözümüne, (6.1) denkleminin tümleyen fonksiyonu denir. Bunu y_c ile göstereceğiz.

b) (6.1) denkleminin hiç bir keyfî sabit bulundurmayan çözümüne, (6.1) denkleminin özel çözümü denir. Bunu y_p ile göstereceğiz.

c) (6.1) denkleminin, y_c tümleyen fonksiyonu ve y_p de özel çözümü olmak üzere $y_c + y_p$ çözümüne, genel çözümü denir.

Böylece (6.1) denkleminin genel çözümünü bulmak için şunları bulmamız yeter:

- Tümleyen fonksiyon, yani (6.1) denklemine ilişkin (6.2) homojen denkleminin, n tane lineer bağımsız çözümünün genel bir lineer bileşimi; ve
- Özel çözüm, yani (6.1) denkleminin hiç bir keyfi sabit bulundurmayan çözümü.

Örnek 6.3

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$$

denklemini gözönüne alalım. Tümleyen fonksiyon olan

$$y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

verilen denkleme ilişkin $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ homojen denkleminin genel çözümüdür. Bir özel çözüm $y_p = x$ olarak alınabilir ve verilen denklemin genel çözümü şöyledir:

$$y = y_c + y_p = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x$$

6.2 Sabit katsayılı lineer homojen denklemler

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{6.3}$$

denklemini ele alalım.

$$a_0m^n+a_1m^{n-1}+\ldots+a_{n-1}m+a_n=0 \tag{6.4}$$

denklemine (6.3) denkleminin karakteristik denklemi denir.

1. Durum: Farklı gerçel kökler

Teorem 6.4

(6.3)'deki n. basamak sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denkleme ait (6.4) karakteristik denkleminin; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ gibi n tane farklı gerçel kökü varsa, (6.3) denkleminin genel çözümü, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 'ler keyfi sabitler olmak üzere $e^{\max}, e^{mx}, \ldots e^{m\times x}$

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\ldots+c_ne^{m_nx}$$

fonksiyonudur.

2. Durum: Aynı gerçel kökler

Teorem 6.5 **i.** (6.3)'deki n. basamak sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denkleme ait (6.4) karakteristik denkleminin m gerçel kökü k katlı ise, (6.3) denkleminin genel çözümünün bu köke karşılık olan parçası;

$$\left(c_1+c_2x+\ldots+c_kx^{k-1}\right)e^{mx}$$

olur.

ii. (6.4) karakteristik denkleminin geri kalan kökleri gerçel ve farklı $m_{k+1}, \ldots, m_n$ sayıları ise, (6.3) denkleminin denkleminin genel çözümü

$$y=\left(c_1+c_2x+\ldots+c_kx^{k-1}\right)e^{mx}+c_{k+1}e^{m_{k+1}x}+c_{k+2}e^{m_{k+2}x}+\ldots+c_ne^{m_nx}$$

fonksiyonudur.

iii. (6.4) karakteristik denkleminin geri kalan köklerinden bazıları daha gerçel ve katlı ise, çözümünün bu köklere karşılık olan parçaları (i). kısımda m için bulunana benzer ifadelerdir.

3. Durum: Eşlenik kompleks kökler

Teorem 6.6 **i.** (6.3)'deki n. basamak sabit katsaylı homojen lineer diferansiyel denklemine ait, (6.4) karakteristik denkleminin ikisi de katlı olmayan $a+ib, a-ib$ kompleks kökleri varsa, (6.3) denkleminin genel çözümünün bu köklere karşlık olan parçası;

$$e^{ax}\left(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx\right)$$

olur.

ii. Öte yandan $a+ib$ ve $a-ib$ kompleks köklerinin herbiri k katlı ise, (6.3) denkleminin genel çözümünün bu köklere karşılık olan parçası;

$$e^{ax}\left[\left(c_1+\ldots+c_k x^{k-1}\right)\sin bx + \left(c_{k+1}+\ldots+c_{2k} x^{k-1}\right)\cos bx\right]$$

olur.

Alıştırma 6.7

$3y'' - 14y' - 5y = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 6.8

$4y'' - 4y' + y = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 6.9

$16y'' + 32y' + 25y = 0$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

6.3 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu kısımda n. basamak homojen olmayan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz. Böylece ilgilendiğimiz denklem, $a_0, a_1, \dots, a_n{}'$ ler gerçel sabitler, $b(x)$ homojen olmayan terimi genellikle x 'in sabit olmayan bir fonksiyonu olmak üzere

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = b(x) \tag{6.5}$$

şeklinde olacak. Bu denklemin genel çözümünün, y_c tümleyen fonksiyon, yani (6.5) denklemine karşılık olan homojen denklemin (bu denklemde b yerine sıfır konmakla elde edilen denklemin) genel çözümü, y_p 'de (6.5) denkleminin bir özel çözümü, yani bu denklemin keyfî sabit bulundurmayan herhangi bir çözümü olmak üzere

$$y = y_c + y_p$$

şeklinde yazılabileceğini hatırlayalım. Bir önceki böşlümde tümleyen fonksiyonun nasıl bulunacağını gördük, şimdi özel çözümleri bulma yöntemleri ile ilgileneceğiz.

Tanım 6.2

Bir fonksiyon

1.
   i. n, negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere x^n,
   ii. $a \neq 0$, bir sabit olmak üzere e^{ax},
   iii. $b \neq 0, c'$ ler, birer sabit olmak üzere $\sin(bx + c)$,
   iv. $b \neq 0, c'$ ler, birer sabit olmak üzere $\cos(bx + c)$,

   veya

2. yukarıdaki fonksiyonların bir sonlu çarpımından oluşuyorsa,

bu fonksiyona bir belirsiz katsayı fonksiyonu veya kısaca BK fonksiyonu denir.

- Diferansiyel denklemdeki b homojen olmayan fonksiyon, BK fonksiyonlarının bir sonlu lineer bileşimi ise, belirsiz katsayılar yöntemi uygulanabilir.
- Bir BK fonksiyonunun türevi, ya bizzat bir BK fonksiyonunun sabit katı, ya da BK fonksiyonlarının bir lineer bileşimidir.

Tanım 6.3

Bir f BK fonksiyonu gözönüne alalım. f'nin kendisinden ve ardışık türevlerini lineer bileşimleri ile oluşturan diğer lineer bağımsız BK fonksiyonlarından oluşan kümeye, f' nin BK kümesi denir.

Örnek 6.10

Her x için $f(x) = x^3$ ile tanımlı f fonksiyonu, bir BK fonksiyonudur. f'nin ardışık türevlerini alırsak

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f''' = 6, \quad f^{(n)} = 0 \quad \forall n > 3$$

buluruz. Böylece f 'nin BK kümesi $S = \{x^3, x^2, x, 1\}$ olur.

Örnek 6.11

Her x için $f(x) = \sin 2x$ ile tanımlı f fonksiyonu bir BK fonksiyonudur. f 'nin ardışık türevlerini alırsak

$$f'(x) = 2\cos 2x, \quad f''(x) = -4\sin 2x, \ldots f'''(x) = -8\cos$$

buluruz. Böylece f 'nin BK kümesi $S = \{\sin 2x, \cos 2x\}$ olur.

Örnek 6.12

Her x için $f(x) = x^2 \sin x$ ile tanımlı f fonksiyonu bir BK fonksiyonudur. f'nin ardışık türevlerini alırsak

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin x + x^2\cos x, & f''(x) &= 2\sin x + 4x\cos x + x^2\sin x, \\ f'''(x) &= 6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x, & f''(x) &= -6\sin x - 6\sin x \end{aligned}$$

buluruz. Böylece f nin B K kümesi

$$S = \left\{x^2\sin x, x^2\cos x, x\sin x, x\cos x, \sin x, \cos x\right\}$$

olur.

Şimdi A_i' ler bilinen sabitler, u_i' ler BK fonksiyonları ve

$$b = A_1u_1 + A_2u_2 + \ldots + A_mu_m$$

olmak üzere,

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = b(x)$$

denkleminin bir y_p özel çözümünü bularak, belirsiz katsayılar yönteminin uygulanışını göstereceğiz. Bu diferansiyel denkleme karşılık olan homojen diferansiyel denklemin, n tane olan lineer bağımsız çözümlerinin daha önceden bulunmuş olduğunu varsayarak şöyle devam edelim:

(1) b'yi oluşturan her $u_1, u_2, \ldots, u_m$ BK fonksiyonu için,

$$S_1, S_2, \ldots, S_m$$

BK kümelerini oluşturalım.

(2) Diyelim ki oluşturulan UC kümelerinden biri, örneğin S_j, başka bir küme ile, örneğin S_k ile özdeş veya tamamen onun içinde yer alıyor. Bu durumda, S_j kümesini (özdeş veya daha küçük olanı) dikkate almaktan vazgeçeriz ve S_k kümesini muhafaza ederiz.

(3) Şimdi, Adım 2'den sonra geriye kalan UC kümelerini tek tek ele alalım. Diyelim ki bu UC kümelerinden biri, örneğin S_l, karşılık gelen homojen diferansiyel denklemin çözümlerini içeren bir veya daha fazla eleman içeriyor. Eğer durum böyleyse, S_l kümesinin her bir elemanını, elde edilen yeni kümenin homojen diferansiyel denklemin çözümlerini içermeyecek şekilde, x'in en küçük pozitif tam sayı kuvveti ile çarparız. Daha sonra, S_l kümesini bu şekilde elde edilen yeni küme ile değiştiririz. Burada her seferinde yalnızca bir UC kümesini ele aldığımızı ve gerekirse çarpma işlemini yalnızca o an ele aldığımız UC kümesinin elemanlarına uyguladığımızı unutmayın.

(4) Genel olarak, şimdi elimizde şu kümeler kalmıştır:

(i) Adım 2'de elenmeyen ve Adım 3'te revizyona ihtiyaç duymayan bazı orijinal UC kümeleri,

(ii) Adım 3'te revizyon gerektiren kümelerden elde edilen bazı yeni kümeler.

Şimdi, bu iki kategoriye ait tüm kümelerin bilinmeyen sabit katsayılarla (belirlenmemiş katsayılar) bir lineer kombinasyonunu oluşturun.

(5) Adım 4'te oluşturulan lineer kombinasyonu diferansiyel denklemde yerine koyarak ve bu kombinasyonun diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlamasını (yani belirli bir çözüm olmasını) talep ederek bilinmeyen katsayıları belirleyin.

Alıştırma 6.13

$y'' + 2y' + 2y = 10\sin 4x$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Alıştırma 6.14

$y'' + 4y = 4\sin 2x + 8\cos 2x$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*