Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

SORULAR

1) $\begin{bmatrix} x+y & y+z \\ z+t & t+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & a \end{bmatrix}$ ise $a=?$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ z+t=3 \\ y+z=a \\ t+x=a \end{array}\right\} \quad 2(x+y+z+t)=4+2a.$$

$$\Rightarrow \underbrace{x+y}_{1}+\underbrace{z+t}_{3}=2+a$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}_{3\times4}$ matrisi verilsin. $A^T_{23} + A^T_{21} - A_{23} - A_{21}$ ve $(A^T)^T_{31}$'i bulunuz.

$$\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

$$\underbrace{A^T_{23}}_{\shortparallel} + \underbrace{A^T_{21}}_{\shortparallel} - A_{23} - A_{21}$$

$$(-2) + (3) - (1) - (3) = -3$$

$$\shortparallel \qquad \shortparallel$$

$$A_{32} \quad A_{12}$$

$$(A^T)^T_{31} = A_{31} = 1$$

3) Her hangi bir A ~~mxn~~ matrisi için $(A^T)^T = A$ olduğunu gösteriniz.

$A^T_{ij} = A_{ji} \Rightarrow$ Her iki tarafın transpozunu alırsak

$$(A^T)^T_{ij} = (A_{ji})^T = A_{ij} \quad \forall i,j \text{ satır sütunu}$$

(4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

matrisleri verilsin. Bu matrislerle oluşturulabilen tüm 3'lü matris çarpımlarını bulunuz.

A_{1x3} , B_{3x1} , C_{2x3} olduğundan;

$$A.B_{1x1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{1x3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} 2.1 + 1.1 + (-1).0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

//

$$B.A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{1x3} = \begin{bmatrix} 2.1 & 1.1 & 1.(-1) \\ 1.2 & 1.1 & 1.(-1) \\ 0.2 & 0.1 & 0.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Buradan da görüldüğü gibi matrislerin çarpmaya göre değişme özelliği yoktur. $A.B \neq B.A$

Sadece $C.B.A$ üçlü çarpımı tanımlıdır.

$$C.B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2x3} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$$

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

5) Aşağıdaki ifadeleri en sade haliyle yazınız:

a) $A.[(2A-5B)-3A]+A.(A-B)$

b) $(A+B)^2-(A-B)^2$

c) $(A+B)^2-A^2-2AB-B^2$

Çözüm: a) $A.(\underbrace{2A-5B}-3A)+A.A-A.B$

$= A.(-A-5B)+A^2-AB$

$= \cancel{-A^2}-A.5.B\cancel{+A^2}-A.B$

$= -5A.B-A.B = -6A.B$

c) $(A+B)^2=(A+B).(A+B)=A.A+A.B+B.A+B.B$

$= A^2+AB+B.A+B^2$

$(A+B)^2-A^2-2AB-B^2 = (\cancel{A^2}+AB+BA\cancel{+B^2})\cancel{-A^2}-2AB\cancel{-B^2}$

$= BA-A.B$

6) A ve B kare matris olsunlar. Aşağıda verilen ifadelerin ya her zaman doğru olduğunu gösteriniz ya da doğru olmadığına dair bir ters örnek veriniz:

a) $A^2=I \Rightarrow A=I$ or $A=-I$

b) $(A-B).(A+B)=A^2-B^2 \Leftrightarrow AB=BA$

c) $B=A^2-5A+I \Rightarrow AB=BA$

d) $AB=0 \Rightarrow BA=0$

Çözüm : a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için $A^2 = I$ dır fakat $A \neq I$ ve $A \neq -I$

b) $(\Rightarrow:)$ $\underbrace{(A-B).(A+B)} = A^2 - B^2$ olsun.

$(\Leftarrow:)$

$$\cancel{A^2} + AB - BA - \cancel{B^2} = \cancel{A^2} - \cancel{B^2} \Leftrightarrow A.B = B.A$$

c) $B = A^2 - 5A + I$ için

$$\left.\begin{aligned} A.B &= A.(A^2 - 5A + I) = A^3 - 5A^2 + A \\ B.A &= (A^2 - 5A + I).A = A^3 - 5A^2 + A \end{aligned}\right\rangle = \checkmark$$

d) $A.B = 0$ ise $BA \neq 0$ olabilir :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

7) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ için $A^2 - A + 3I$ 'yı hesaplayınız.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -7 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - A + 3I = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -7 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 13 & -8 \\ 2 & 11 & -6 \\ -2 & -6 & 6 \end{bmatrix}_{//}$$

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

8. $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise A^6 yı hesaplayınız :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a.c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^6 = 0.$$

9. $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ olsun. $A^2 - I = 0$ o.ş tüm A matrislerini bulunuz.

$$A^2 - I = 0 \Rightarrow A^2 = I$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2 = 1 \Rightarrow a = \mp 1 \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = \mp 1 \end{array}$$

A, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ olabilir.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. A ve B matrislerinin,

$A.B = -B.A$ koşulunu sağladığını gösteriniz. Bu özelliği

sağlayan matrisler için $(A+B)^2 - A^2 - B^2$ yi hesaplayınız.

11) $A.B = B.A$ koşulunu sağlayan A, B matrislerine değişmelidir denir. $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere E_{11} ve E_{12} matrisleri ile değişmeli olan tüm 2×2 tipindeki matrisleri belirleyiniz.

$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ olsun.

$$E_{11}.A = A.E_{11} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{z=0} \text{ ve } \boxed{y=0}$$

$$E_{12}A = A.E_{12} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=t}$$

$\therefore A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ biçimindedir.