Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

VECTOR SPACES:

Tanım: F bir cisim, $V \neq \emptyset$.

a) V üzerinde bir + işlemi:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u_1, u_2) \longmapsto u_1 + u_2 .$$

b) $F \times V \longrightarrow V$ fonksiyonu

$$(c, u) \longmapsto c \cdot u$$ → skaler çarpma

aşağıdaki 8 özelliği sağlıyorsa V'ye F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir ve V_F ile gösterilir.

(V1) $u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$, $\forall u_1, u_2, u_3 \in V$ için

v'de unique

(V2) V'de bir 0_V elemanı vardır ki, $\forall u \in V$ için $u + 0 = 0 + u = u$ 'dir. (sıfır vektörü)

her biri u için unique

(V3) $\forall u \in V$ için $\exists u' \in V$ vardır ki: $u' + u = u + u' = 0_V$ 'dir. (V'nin tersi)

(V4) $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$, $\forall u_1, u_2 \in V$

(V5) $c \cdot (u_1 + u_2) = c \cdot u_1 + c \cdot u_2$ $\forall c \in F$, $u_1, u_2 \in V$

(V6) $(c_1 + c_2) \cdot u = c_1 \cdot u + c_2 \cdot u$, $\forall c_1, c_2 \in F$, $u \in V$

(V7) $(c_1 . c_2) \cdot u = c_1 \cdot (c_2 \cdot u)$ $\forall c_1, c_2 \in F$, $u \in V$

(V8) $1 \cdot u = u$ $\forall u \in V$

* Bir vektör uzayının elemanlarına vektör, cismin elemanlarına ise skaler denir.

Teorem: $c \in F$, $v \in V$ için

$F \times V \longrightarrow V$

$(c, 0_V) \longmapsto 0_V$

$(0, v) \longmapsto 0_V$

(i) $c \cdot 0_V = 0 \cdot v = 0_V$

(ii) $(-1) \cdot v = -v$

(iii) $(-c) \cdot v = c \cdot (-v) = -(c \cdot v)$

Vektör Uzayı Örnekleri:

1 n-sıralılar Uzayı:

n-sıralılar uzayı, bileşenleri F cisminden gelen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sonlu dizilerinden oluşur.

$$F^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in F\}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c x_1, \ldots, c x_n), \quad c \in F$$

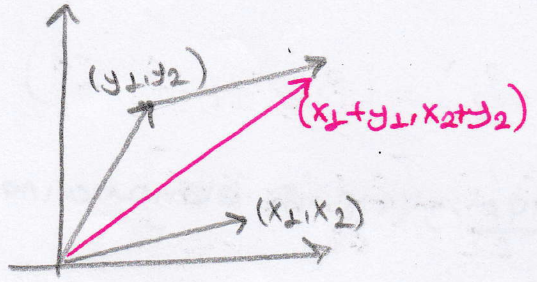
F^n yukarıdaki iki işlemle birlikte F üzerinde bir vektör uzayıdır.

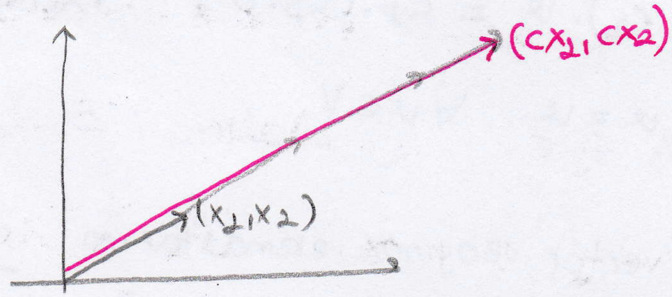
$F = \mathbb{R}$ olarak alırsam $\mathbb{R}^2$ düzlemi $\mathbb{R}$ üzerinde bir v.u dır.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$c \cdot (x_1, x_2) = (c x_1, c x_2), \quad c \in \mathbb{R}$$





Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

2 mxn tipindeki matrisler uzayı :

$$F^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in F \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & & \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c.\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{m1} \\ \vdots & & \\ ca_{1n} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}, c \in F$$

$F^{m\times n}$ yukarıdaki işlemlerle birlikte F üzerinde bir v.u'dır.

3 Fonksiyonlar uzayı :

$$F[a,b] = \{ f \mid [a,b] \text{ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar} \} \quad f:[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(c.f)(x) = c.(f(x)), \; c \in \mathbb{R}$$

$F[a,b]$ yukarıdaki işlemlerle birlikte, $\mathbb{R}$ üzerinde bir v.u'dır:

(V1) $f_1, f_2, f_3 \in F[a,b]$ alalım. $f_1+(f_2+f_3) = (f_1+f_2)+f_3$ (?)

$$(f_1+(f_2+f_3))(x) = f_1(x) + (f_2+f_3)(x) = \underbrace{f_1(x)}_{\in\mathbb{R}} + [\underbrace{f_2(x)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{f_3(x)}_{\in\mathbb{R}}]$$
$$= [f_1(x)+f_2(x)] + f_3(x)$$

(V2) $0 : [a,b] \to 0$ dönüşümü, $f \in F[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ için

$$\left.\begin{aligned} (0+f)(x) &= \underbrace{0(x)}_{0_{\mathbb{R}}} + \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}} = f(x) \\ (f+0)(x) &= f(x) + 0(x) = f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ sağlar yani $0_{F[a,b]}$'dir.

(V3) $\forall f \in F[a,b]$ için $-f \in F[a,b]$ vardır ki

$$\left.\begin{aligned} (f+(-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) = 0_{\mathbb{R}} \\ (-f+f)(x) &= (-f(x)) + f(x) = 0_{\mathbb{R}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ koşulu sağlanır.

(V4) $\forall f_1, f_2 \in F[a,b]$ için $(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x) = (f_2+f_1)(x)$ olur.

(V5) $c \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in F[a,b]$ o.ü

$$\begin{aligned} (c\cdot(f_1+f_2))(x) &= c\cdot((f_1+f_2)(x)) = c\cdot(f_1(x)+f_2(x)) \\ &= c\cdot(f_1(x)) + c(f_2(x)) = (c\cdot f_1)(x) + (cf_2)(x) \\ &= (cf_1 + cf_2)(x) \end{aligned}$$

(V6) $c_1, c_2 \in F$, $f \in F[a,b]$ o.ü

$$\begin{aligned} ((c_1+c_2)\cdot f)(x) &= (c_1+c_2)(f(x)) = c_1(f(x)) + c_2(f(x)) \\ &= (c_1\cdot f)(x) + (c_2\cdot f)(x) = (c_1 f + c_2 f)(x) \end{aligned}$$

(V7) $$\begin{aligned} ((c_1\cdot c_2)\cdot f)(x) &= (c_1\cdot c_2)(f(x)) = c_1\cdot(c_2(f(x))) = c_1\cdot(c_2 f)(x) \\ &= c_1\cdot(c_2 f)(x) \end{aligned}$$

(V8) $1_{\mathbb{R}}$, $f \in F[a,b]$ için $(1\cdot f)(x) = \underbrace{1}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}} = f(x)$ olur.