Özel Tipte Matrisler:

Sıfır matrisi: A $m\times n$ tipinde tüm bileşenleri 0 olan bir matris ise A'ya "sıfır matrisi" denir ve $O_{m\times n}$ ile gösterilir.

$$O_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Birim matris: Köşegendeki tüm bileşenleri 1 ve onun dışındaki tüm bileşenleri 0 olan $n\times n$ tipindeki matrislere "birim matris" denir.

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her bir A matrisi için $I.A = A.I = A$ matrisidir.

Köşegen matris: $A_{n\times n}$ matrisi $1\leq i,j\leq n$ olmak üzere $i\neq j$ için $a_{ij}=0$ olan matrislere "köşegen matris" denir.
Bir matrisin köşegen olabilmesi için $n\times n$ tipinde olması gerekir.

$O_{m\times m}$, $I_{m\times m}$ köşegen matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} , \quad C = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

NOT: $A, B \in F^{m\times m}$ köşegen matrisler, k bir skaler olsun.
Bu durumda $k.A$, $A+B$ ve $A.B$ matrisleri de birer köşegen matristir.

Skaler matris: Tüm köşegen elemanları eşit olan köşegen matrise "skaler matris" denir. Skaler matrisler, birim matrisin bir skaler katıdır.

$$\boxed{A \text{ skaler matris} \iff A = c.I \ , c \text{ skaler}}$$

örneğin;
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3I_{2\times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4I_{3\times 3}$$

NOT: $A, B \in F^{m\times m}$ skaler matrisler, k bir skaler olsun. Bu durumda $k.A$, $A+B$ ve $A.B$ 'de birer skaler matristir.

İspat:
$$\left.\begin{array}{l} A \text{ skaler} \Rightarrow A = c_1.I \\ B \text{ skaler} \Rightarrow B = c_2.I \end{array}\right\} \text{dir.}$$

$$k.A = k.(c_1.I) = \underbrace{(k.c_1)}_{\text{skaler}}.I \Rightarrow k.A \text{ skaler bir matristir.}$$

$$A+B = c_1I + c_2I = \underbrace{(c_1+c_2)}_{\text{skaler}}I \Rightarrow A+B \text{ skaler bir matristir.}$$

$$A.B = (c_1.I).(c_2.I) = (c_1.c_2).I.I = (c_1c_2)I \Rightarrow A.B \text{ skaler bir matristir}$$

NOT: Normalde A, B matrisleri için $AB \neq BA$ 'dır. Fakat A yada B den en az biri I olduğu zaman; $A.B = B.A$ olur.

$$A = I \Rightarrow I.B = B.I = B \checkmark$$
$$B = I \Rightarrow A.I = I.A = A \checkmark \qquad \text{olur.}$$
$$A \text{ ve } B = I \Rightarrow I.I = I.I = I \checkmark$$

Üst üçgensel matris : (Alt üçgensel matris) :

$A \in F^{m \times m}$ matrisinde $1 \le i, j \le m$ olmak üzere her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ olan matrise "üst üçgensel matris" her $i < j$ için $a_{ij} = 0$ olan matrise "alt üçgensel matris" denir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Üst üçgensel matris — Alt üçgensel matris — Hem alt üçgensel hem üst üçgensel matris.

NOT: $A, B \in F^{m \times m}$ üst (alt) üçgensel matrisler, k bir skaler olsun. $k.A$, $A+B$ ve $A.B$ 'de üst (alt) üçgensel matrislerdir.

Simetrik matris :

Tüm terimleri reel sayı olan bir $A \in F^{m \times m}$ matrisi için $A^T = A$ oluyorsa bu A matrisine "simetrik matris" denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisi simetriktir. Çünkü $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$A = A^T$$

NOT: $A, B \in F^{m \times m}$ simetrik matrisler, k bir skaler olsun. $A+B$ ve $k.A$ simetrik matrislerdir.

İspat:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ simetrik} \Rightarrow A = A^T \\ B \text{ simetrik} \Rightarrow B = B^T \end{array}\right\} (A+B)^T = \underset{A}{A^T} + \underset{B}{B^T} = A + B$$

$$\Rightarrow (A+B)^T = A + B \Rightarrow A+B \text{ sim.}$$

$(k.A)^T = k.\underset{A}{\underset{\shortparallel}{A^T}} = k.A \Rightarrow (kA)^T = k.A$

$\Rightarrow k.A$ simetrik matris olur.

* A, B simetrik iken $A.B$ simetrik matris olmayabilir.

$(A.B)^T = \underset{B}{\underset{\shortparallel}{B^T}}.\underset{A}{\underset{\shortparallel}{A^T}} = B.A \neq A.B$

ÖRNEK: $A \in F^{n \times n}$ herhangi bir matris için $A.A^T$, $A^T.A$ ve $A+A^T$ matrisleri simetrik matrislerdir.

İspat: Bir $A \in F^{n \times n}$ matrisi alalım. (Simetrik olması gerekmez)

$(A.A^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T \Rightarrow (A.A^T)^T = A.A^T$

$\Rightarrow A.A^T$ matrisi simetriktir.

Benzer şekilde;

$(A^T.A)^T = A^T.(A^T)^T = A^T.A \Rightarrow (A^T.A)^T = A^T.A$

$\Rightarrow A^T.A$ matrisi simetriktir.

$((A+A^T))^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A \Rightarrow A+A^T$ simetriktir.

Ters-simetrik matris (Yarı-simetrik matris): Tüm terimleri reel olan bir $A \in F^{m \times m}$ matrisi için $\boxed{A^T = -A}$ oluyorsa A'ya "ters-simetrik matris" denir.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ters simetriktir. Çünkü $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A$

$A^T = -A$

NOT: $A, B \in F^{m\times m}$ matrisler ters-simetrik ve k bir skaler olsun. $A+B$ ve $k.A$ da ters-simetrik matrislerdir.

İspat: A ters-sim $\Rightarrow A^T = -A$
B ters-sim $\Rightarrow B^T = -B$

$$((A+B))^T = \underset{-A}{A^T} + \underset{-B}{B^T} = -((A+B))$$

$\Rightarrow A+B$ ters-simetrik matristir.

$$((k.A))^T = k.\underset{-A}{A^T} = k(-A) = -((k.A))$$

$\Rightarrow k.A$ ters-simetrik matristir.

ÖRNEK: $A \in F^{n\times n}$ herhangi bir matris için $A - A^T$ ters simetrik bir matristir.

İspat: $((A - A^T))^T = A^T - A = -((A - A^T)) \Rightarrow A - A^T$ ters simetriktir.

NOT: Simetrik ve ters-simetrik matrislerin görüntüleri şöyledir:

- Simetrik ve ters-simetrik matrisler kare matrislerdir.
- Simetrik matrisler köşegene göre simetrik olan matrislerdir, yani köşegen üzerine katladığımızda aynı elemanlar üst üste gelir.
- Ters-simetrik matrislerin (1) köşegen elemanları 0 dır.
  (2) köşegen üzerine katladığımızda elemanlar negatifi ile üstüste gelir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Simetrik matris

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

Ters-simetrik

Satırca indirgenmiş eşelon matris:

$A \in F^{m \times n}$ matrisi verilsin. $1 \leq i \leq n$ için A matrisinin i. satırında bulunan ilk sıfırdan farklı elemana i. satırın "baş elemanı" denir.

A matrisinin her bir satırında bulunan $A_{1j_1}, A_{2j_2}, \ldots, A_{rj_r}$ baş elemanları için $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ ise A matrisine "eşelon matris" denir. Yani eşelon matris (eğer varsa) baş elemanları hep 1 basamaklı merdiven şeklinde olan matristir.

1. satırın baş elemanı, 2. satırın baş elemanı, 3. satırın baş elemanı

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ bir eşelon matristir.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & \cancel{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$ eşelon değil, 1 basamaklı merdiven şeklinde değil

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ → eşelon değil, merdiven şeklinde değil

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ → Eşelon matris.

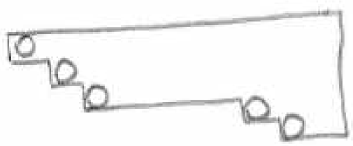
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ → eşelon değil.

* Eşelon matrislerde 0 satırı hep en altta olur (varsa)

Tanım: A eşelon matrisinin sıfırdan farklı her satırının baş elemanı 1 ve baş elemanların bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar 0 ise bu matrise "satırca indirgenmiş eşelon" matris denir. Yani;

Eşelon matris

1. Sıfırdan farklı her satır için, baş eleman önceki satırın baş elemanının sağında ve altında olmalıdır. (1 basamaklı merdiven şekli)



gibi

2. Sıfır satırı varsa en altta yer almalıdır.

3. Baş elemanların tamamı 1'dir.

4. Baş elemanın bulunduğu sütunda, baş eleman dışındakiler 0'dır.

(1) + (2) → eşelon matris

(1) + (2) + (3) + (4) → satır indirgenmiş eşelon matris.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \text{s.i.e.m.}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

s.i.e.m değildir.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

s.i.e.m

en güzel s.i.e.m