ÖZDEĞER – ÖZVEKTÖR :

Tanım: A F cismi üzerinde $n \times n$ tipinde bir matris olsun.

(i) $\Delta_A(x)$ karakteristik polinomun kökleri olan c skalerlerine "A'nın özdeğeri" denir.

(ii) Bir c özdeğeri için; $AX = cX$ (yada $(A-cI)X=0$) eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vektörüne "A'nın c özdeğerine ait özvektörü" denir.

(iii) Bir c özdeğeri için, özvektörlerin kümesine "c'ye ait özuzay" denir. Ve W_c ile gösterilir. $W_c = \{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (A-cI)X = 0 \}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

NOT: $\Delta_A(x)$ polinomunun kökü yoksa o zaman özdeğerde yoktur.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} -10 & 14 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$ matrisine ait özdeğerleri ve bu özdeğerlere ait özuzayları ve bu özuzayları geren kümeleri bulunuz.

$$\Delta_A(x) = \det(x.I - A) = \begin{vmatrix} x+10 & -14 \\ 7 & x-11 \end{vmatrix} = (x+3).(x-4)$$

$\Delta_A(x)=0$ yapan x değerleri yani özdeğerler; $\underbrace{(x+3).(x-4)}_{\Delta_A(x)} = 0$ yapan, $\boxed{c_1 = -3}$ ve $\boxed{c_2 = 4}$ dür.

Şimdi bu iki özdeğere ait özuzayları ayrı ayrı bulalım :

$c_1 = -3$ için : $W_{c_1} = W_{-3} = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; (A-(-3)I)X = 0 \right\}$

$$\left(\begin{bmatrix} -10 & 14 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 14 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-7x_1 + 14x_2 = 0$$

$$\boxed{x_1 = 2x_2}$$

O halde W_{-3} 'deki tüm $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 'ler için $x_1 = 2x_2$ 'dir.

$$W_{-3} = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 = 2x_2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

-3 özdeğerine ait özuzay

W_{-3} 'ü geren küme aynı zamanda W_{-3} 'ün bir tabanı.

$c_2 = 4$ için : $W_{c_2} = W_4 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; (A-4I)X = 0 \right\}$

$$\left(\begin{bmatrix} -10 & 14 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -14 & 14 \\ -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-14x_1 + 14x_2 = 0$$

$$\boxed{x_1 = x_2}$$

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

$$W_4 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 = x_2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

4 özdeğerine ait özuzay

W_4'ü geren küme aynı zamanda W_4'ün bir tabanı

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerini ve bu özdeğere ait özuzayları bulunuz.

Çözüm: $\Delta_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = \underset{a}{x^2} \underset{b}{-4x} + \underset{c}{5} = 0$

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.5 = -4 < 0 \Rightarrow$ Reel kök yok

$\Rightarrow$ özdeğer yok.

$\Rightarrow$ Dolayısıyla özuzay yok.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -4 & 7 & 4 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ matrisine ait özdeğerleri ve bu özdeğerlere ait özuzayları ve bu özuzayların tabanlarını bulunuz.

Çözüm: $\Delta_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -4 & -4 \\ 4 & x-7 & -4 \\ -4 & 4 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1).(x-3)^2$

$\Delta_A(x) = 0$ yapan x değerleri yani $\Delta_A(x)$ polinomunun kökleri:

$\boxed{c_1 = -1}$ ve $\boxed{c_2 = 3}$ A'nın özdeğerleridir.

Şimdi bu iki özdeğere ait özuzayları bulalım :

<u>$c_1=-1$'e ait özuzay :</u>

$$W_{-1}=\left\{X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\;\middle|\;\underbrace{(A-(-1)I)X=0}\right\}$$

$$\underbrace{\left(\begin{bmatrix}-1&4&4\\-4&7&4\\4&-4&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&4&4\\-4&8&4\\4&-4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0}$$

$4x_2+4x_3=0 \longrightarrow \boxed{x_3=-x_2}$

$-4x_1+8x_2+4x_3=0$ → Bunu sağlarlar.

$4x_1-4x_2=0 \longrightarrow \boxed{x_1=x_2}$

$$W_{-1}=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\;\middle|\;x_3=-x_2\,,\;x_1=x_2\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x_2\\x_2\\-x_2\end{bmatrix}\;\middle|\;x_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$$

W_1 özuzayını geren bir kümedir. Aynı zamanda lineer bağımsız olduğundan W_{-1} için bir tabandır.

<u>$c_2=3$'e ait özuzay :</u>

$$W_3=\left\{X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\;\middle|\;\underbrace{(A-3I)X=0}\right\}$$

$$\underbrace{\left(\begin{bmatrix}-1&4&4\\-4&7&4\\4&-4&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0}$$

$$\begin{bmatrix}-4&4&4\\-4&4&4\\4&-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \; -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \; x_1 = x_2 + x_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}$$

W_3' ü geren bir kümedir. Aynı zamanda lineer bağımsız elemanlar olduklarından W_3 için bir tabandır.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü A matrisinin hangi özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

Çözüm: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü A'nın c özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Özvektörün tanımından $Ax = cx$ 'dir. Yerine yazarsak

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \boxed{c = 3} \text{ 'dür.}$$