

Kofaktör Ağılımı :

Bizim en başta verdiğimiz tanıma göre $D_n(A)$ fonksiyonu;

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \cdot A_{1j} \cdot D_{n-1}(m_{1j}) \quad \text{idi. Burada 1. satıra}$$

göre determinant almıştır. Şimdi ise istediğimiz satıra yada sütuna göre determinant alacağız : k. satıra göre determinant ağılımı :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{kj} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det(m_{kj})$$

→ A_{kj} 'nin kofaktörü

→ A matrisinde k. satır, j. sütunu çıkarttığımızda elde ettiğimiz $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki matristir.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kj} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nj} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

→ k. satırı belmiyoruz ve bu satıra göre determinant ağılımı yazıyoruz gibi.

$a_{kj} = (-1)^{k+j} \cdot \det(M_{kj})$ ye "A'nın kofaktörü" derim ve bunun yardımıyla "adjoint matris" $\text{adj}(A)$

$$\boxed{(\text{adj}(A))_{jk} = a_{kj}} \text{ olarak tanımlar.}$$

Yani adjoint matrisi kofaktörlerden oluşan kofaktör matrisinin transpozudur.

Kofaktörler yardımıyla determinant ;

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{kj} \cdot a_{kj}} \text{ dır.}$$

Adjoint ile determinant arasında;

$$\star\star \boxed{A \cdot (\text{adj}(A)) = \det(A) \cdot I} \text{ eşitliği vardır.}$$

NOT: Satırlar için seçilenlerin aynı sütunlar için de geçerlidir.



$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = \overset{\text{sayı}}{\det(A)} \cdot I$$

(A tersmîm ise)

$$\Rightarrow A \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = I$$

$$\overset{A^{-1} \text{ dir}}{\text{Çarp}} \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = A^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)}$$

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisin adjointini bulalım ve bu adjoint
yardımıyla A^{-1} 'i bulalım:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad a_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad a_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad a_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad a_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} //$$

Diğer taraftan;

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{Terim.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{-1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Bir uygulama : CRAMER KURALI :

$AX=B$ b'n lineer denklemler sistemi olsun ve A b'n kare matris

olsun.

$$\Rightarrow (\text{adj}(A)) \cdot A \cdot X = \text{adj}(A) \cdot B$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A)}_{\text{sayı}} \cdot \underbrace{I}_{\text{matris}} \cdot X = \text{adj}(A) \cdot B$$

→ kofaktörler transpoz

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

k. satırında;

$$\det(A) \cdot x_k = \underbrace{a_{1k} \cdot b_1 + a_{2k} \cdot b_2 + \dots + a_{nk} \cdot b_n}_{D_k}$$

$$D = \det(A) \neq 0 \Rightarrow \boxed{x_k = \frac{D_k}{D}}$$

Bu kurala $n \times n$ sistemin çözümü için kullanılan "Cramer Kuralı" denir ve $\det(A) \neq 0$ olduğu zamanlarda kullanılır.

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 6 \\ 4x - 5y + 3z = 28 \end{array} \right\} \text{Sistemi çözümler.}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ ve Cramer kuralını uygulayabiliriz:}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 28 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 4 & 28 & 3 \end{vmatrix} = 96, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 28 \end{vmatrix} = 120$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-12}{-6} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{96}{-6} = -16, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{120}{-6} = -20$$



iz (trace):

$n \times n$ tipindeki bir A matrisinin izi köşegendeki elemanların toplamıdır:

$$\text{iz}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33} + \dots + A_{nn}$$

- $\text{iz}(A+B) = \text{iz}(A) + \text{iz}(B)$, $A, B \in F^{n \times n}$
- $\text{iz}(c \cdot A) = c \cdot \text{iz}(A)$, c skaler , $A \in F^{n \times n}$
- $\text{iz}(A \cdot B) = \text{iz}(B \cdot A)$

ör: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{iz}(A) = 2 + 0 + (-4) = -2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, B = [4 \ -5 \ 2 \ 1] \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \\ 8 & -10 & 4 & 2 \\ 16 & -20 & 8 & 4 \end{bmatrix}, B \cdot A = [17]$$

$$\Downarrow$$
$$\text{tr}(A \cdot B) = 17$$

$$\text{iz}(A \cdot B)$$

$$\text{iz}(B \cdot A) = 17$$

(6)