1. Basamak Denklem Uygulamaları, n. Basamaktan lineer diferansiyel denklemler, Mertebe düşürme

Bu hafta neler öğreneceğiz:

- Dik ve Eğik yörüngeler
- n. Basamaktan lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri
- Mertebe düşürme

Tavsiye edilen kaynak:

- S.L. Ross İntroduction to Ordinary Differential Equations

Kitaptan çözülmesi tavsiye edilen problemler:

⋆ Bölüm 3.1 ve 4.1'deki ilgili alıştırma soruları

5.1 Dik ve Eğik Yürüngeler

Dik Yörüngeler

Tanım 5.1

$$F(x, y, c) = 0 \tag{5.1}$$

xy-düzleminde verilmiş bir parametreye bağlı bir eğri ailesi olsun. (5.1) ailesinin eğrilerini dik açıyla kesen eğriye, verilen ailenin dik yürünge'si denir.

Örnek 5.1

Merkezi orijinde, c yarıçaplı çemberlerin

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{5.2}$$

ailesini gözönüne alalım. Koordinat merkezinden geçen

$$y = kx \tag{5.3}$$

gibi her doğru, (5.2) çember ailesinin bir dik yürüngesidir. Tersine olarak (5.2) ailesinin her çemberi, (5.3) doğrularının dik yürüngeleridir. (5.2) ve (5.3) aileleri birbirlerinin dik yürüngeleridir. Şekildeki (5.2) çember ailesinin bazı elemanları kesiksiz çizgilerle, (5.3) doğru ailesinin bazı elemanları da kesikli çizgilerle gösterilmişlerdir.

Bir eğri ailesinin dik yürüngelerini bulma yöntemi

1. Adım: Verilen ailenin

$$F(x, y, c) = 0$$

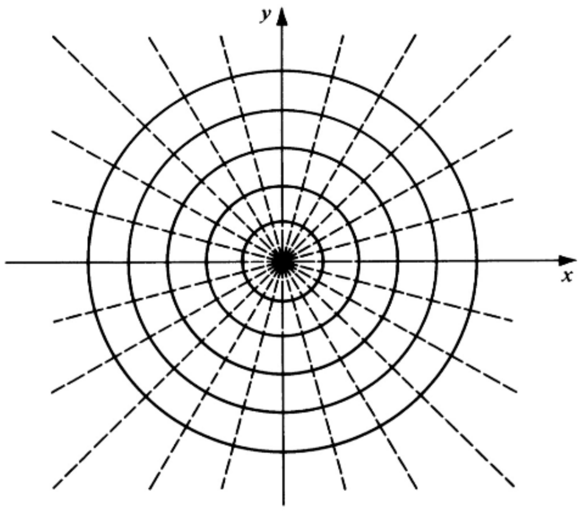
denkleminden yararlanarak bu ailenin

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

diferansiyel denklemini bulun.

2. Adım.: 1. adımda bulunan $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denkleminde $f(x, y)'$ yi tersinin ters işaretlisi olan $-\frac{1}{f(x,y)}$ ile değiştir. Bu, dik yürüngelerin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \tag{5.4}$$



Şekil 5.1: Dik yörüngeler

diferansiyel denklemini verir.

3. Adım: (5.4) diferansiyel denkleminin

$$G(x, y, c) = 0$$

genel çözümünü bul. Böylece dik yürüngeler ailesini elde etmiş olursun.

Örnek 5.2

Yukarıdaki örnekte merkezi orijinde, c yarıçaplı çemberlerin

$$x^2 + y^2 = c^2$$

ailesinin dik yürüngelerinin, merkezden geçen doğruların

$$y = kx$$

ailesi olduğunu görmüştük. Şimdi bunu yukarıdaki yolu izleyerek doğrulayalım.
1. Adım: Verilen ailenin

$$x^2 + y^2 = c^2$$

denkleminin türevini alarak

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

ve bundan da (5.2) ailesinin diferansiyel denklemi olarak

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{5.5}$$

elde edilir. (Bu durumda c sabitinin kendiliğinden kaybolduğuna dikkat ediniz.)

2. Adım: (5.5) diferansiyel denkleminde $-\frac{x}{y}$ 'yi tersinin ters işaretlisi olan $\frac{y}{x}$ ile değiştirip, dik yürüngelerin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{5.6}$$

diferansiyel denklemini elde edelim.

3. Adım: Şimdi (5.6) diferansiyel denklemini çözelim. Değişkenleri ayırarak

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

ve integre ederek elde ederiz. Bu (5.6) diferansiyel denkleminin genel çözümüdür ve böylece (5.2) ile verilen çember ailesinin dik yürüngelerinin ailesini (x = 0 doğrusu dışında) temsil eder.

Alıştırma 5.3

$y = cx^2$ parabol ailesinin dik yörüngelerini bulunuz.

5.2 Eğik Yörüngeler

Tanım 5.2

$$F(x,y,c)=0 \tag{5.7}$$

xy-düzleminde verilmiş, bir parametreye bağlı eğri ailesi olsun. (5.7) ailesinin eğrilerini sabit bir $\alpha \neq 90°$ açısıyla kesen eğriye, verilen ailenin eğik yörünge'si denir.

Bir eğri ailesinin diferansiyel denkleminin

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{5.8}$$

olduğunu varsayalım. Böylece (5.8) ailesinin (x,y) noktasından geçen C eğrisinin bu noktadaki eğimi $f(x,y)$ ve buradaki teğetinin eğim açısı $\arctan[f(x,y)]$ olacaktır. Verilen ailenin eğik yürüngesinin bu eğriyi α açısı ile kesen elemanının teğetinin (x,y) noktasındaki eğim açısı

$$\arctan[f(x,y)]+\alpha$$

olacaktır. Böylece eğik yürüngelerin eğimi

$$\tan\left(\arctan[f(x,y)]+\alpha\right)=\frac{f(x,y)+\tan\alpha}{1-f(x,y)\tan\alpha}$$

ve diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)+\tan\alpha}{1-f(x,y)\tan\alpha}$$

olur. Böylece verilen bir eğri ailesinin eğrilerini sabit bir $\alpha \neq 90°$ açısıyla kesen eğik yürüngelerinin ailesini bulmak için daha önce dik yürüngeler için anlattığımız üç adımı atmalıyız. Ancak 2. adım aşağıdaki gibi değiştirilmelidir.

2. adım: Verilen ailenin $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ diferansiyel denkleminde $f(x,y)'$yi

$$\frac{f(x,y)+\tan\alpha}{1-f(x,y)\tan\alpha}$$

ile değiştir.

Örnek 5.4

$y=cx$ doğru ailesini $45°$ ile kesen eğik yürüngelerin ailesini bulunuz.

1. Adım: $y = cx$'den $\frac{dy}{dx} = c$ buluruz. Bu ikisi arasında c'yi yokedersek verilen doğru ailesinin diferansiyel denklemi olarak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{5.9}$$

elde ederiz.

2. Adım: Şimdi (5.9)'deki $\frac{y}{x}$ ' i, $\tan 45° = 1$ olduğunu da gözönüne alarak

$$\frac{f(x,y) + \tan\alpha}{1 - f(x,y)\tan\alpha} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x+y}{x-y}$$

ile değiştirelim. Böylece eğik yürüngelerin ailesinin diferansiyel denklemini

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{5.10}$$

olarak buluruz.

3. Adım: Şimdi (5.10) diferansiyel denklemini çözeceğiz. Bunun bir homojen denklem olduğunu görerek $y = xv$ dönüşümü yapar ve

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

elde ederiz. Sadeleştirmelerden sonra

$$\frac{(v-1)dv}{v^2+1} = -\frac{dx}{x}$$

integre ederek

$$\frac{1}{2}\ln\left(v^2+1\right) - \arctan v = -\ln|x| - \ln|c|$$

veya

$$\ln\left[c^2x^2\left(v^2+1\right)\right] - 2\arctan v = 0$$

elde edilir. Geri dönüşüm yapılırsa verilen doğru ailesinin eğik yürüngelerinin ailesi

$$\ln\left[c^2\left(x^2+y^2\right)\right] - 2\arctan\frac{y}{x} = 0$$

olarak bulunur.

5.3 n. Mertebeden Homojen lineer denklemler

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \tag{5.11}$$

Teorem 5.5 — Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler İçin Temel Teorem

$f_1, f_2, \ldots, f'_m$ ler (5.11)'deki lineer homojen diferansiyel denkleminin herhangi m tane çözümü olsun. Bu durumda $c_1, c_2, \ldots, c_m$ 'ler m tane keyfî sabit olmak izere

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_m f_m$$

de (5.11) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Tanım 5.3 — Lineer Bileşim

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ 'ler m tane keyfi sabit ve $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de m tane fonksiyon ise

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_m f_m$$

ifadesine $f_1, f_2, \ldots, f_m$ 'lerin lineer bileşimi denir.

Uyarı 5.4

YANi; homojen lineer diferansiyel denklemin çözümlerinin herhangi lineer bileşimleri de aynı denklemin bir çözümüdür.

Örnek 5.6

$\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

denkleminin çözümleri olduğu kolayca gösterilebilir. Teorem bize herhangi c_1, c_2 sabitleri için $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ 'in de bir çözüm olduğunu söylüyor. Mesela,

$$5 \sin x + 6 \cos x$$

de bir çözümdür.

Örnek 5.7

e^x, e^{-x} ve e^{2x} fonksiyonlarının

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denkleminin çözümleri olduğu kolayca gösterilebilir. Teorem 4.2 bize herhangi c_1, c_2, c_3 sabitleri için $c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ 'in de bir çözüm olduğunu söylüyor. Mesela,

$$2e^x - 3e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$$

de bir çözümdür.

Tanım 5.5

Hepsi birden sifir olmayan n tane $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabiti $a \leq x \leq b$ aralığındaki her x için

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

olacak sekilde bulunabiliyorsa, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarına $a \leq x \leq b$ aralığında lineer bağımlıdırlar denir.

Örnek 5.8

x ve $2x$ fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığnda lineer bağımlıdırlar. Çünkü $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki her x için

$$c_1 x + c_2(2x) = 0$$

olacak şekilde ikisi birden sıfır olmayan c_1, c_2 sayıları bulunabilir. Mesela $c_1 = 2, c_2 = -1$ alınabilir.

Tanım 5.6

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında lineer bağımlı değillerse, bu aralıkta lineer bağımsızdırlar denir. Yani $a \leq x \leq b$ aralığındaki her x için

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

olması,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

olmasını gerektiriyorsa, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında lineer bağımsızdırlar denir.

Örnek 5.9

x, x^2 fonksiyonlarının $0 \leq x \leq 1$ aralığında lineer bağımsız oldıklarını görüyoruz. Çünkü $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki her x için $c_1 x + c_2 x^2 = 0$ olması, $c_1 = c_2 = 0$ olmasını gerektirir.

Teorem 5.10

(5.11)'deki n. basamak homojen lineer diferansiyel denklemin daima n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Ayrıca $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları, (5.11) denkleminin n tane lineer bağımsız çözümü ise, (5.11) denkleminin her f çözümü $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerini uygun seçmek suretiyle, bu çözümlerin lineer bileşimleri olarak

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$$

şeklinde yazılabilir.

Corollary 5.11
- (5.11) denkleminin n tane lineer bağımsız çözümü vardır.
- (5.11) denkleminin herhangi bir çözümü bu çözümlerin lineer bileşimi olarak yazılabilir.

Tanım 5.7

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları $a \le x \le b$ aralığındaki n. basamaktan homojen lineer diferansiyel denklemin n tane lineer bağımsız çözümü ise; $c_1, c_2, \ldots, c_n$'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$\boldsymbol{f} = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n, \quad a \le x \le b$$

ile tanımlı fonksiyonu $a \le x \le b$ aralığında (5.11)'nin bir genel çözümüdür.

Örnek 5.12

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denkleminin e^x, e^{-x} ve e^{2x} çözümlerinin, $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktasında lineer bağımsız oldukları gösterilebilir. Böylece genel çözüm, c_1, c_2, c_3 'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

lineer bileşimi olarak yazılabilir. Bu durumu

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

ile gösteririz.

Bundan sonraki teorem, (5.11) denkleminin n tane çözümünün lineer bağımsız olup olmadığını anlamak için bir ölçüt sağlar. Önce bir fonksiyon kümesinin Wronskian'ını tanımlayalım.

Tanım 5.8

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları, $a \le x \le b$ gerçel aralığında $n-1$.'ye kadar türeve sahip, n tane gerçel fonksiyon olsun. Üsler türevleri göstermek üzere

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

determinantına, bu n tane fonksiyonun Wronskian'ı denir. W fonksiyonunun kendisinin de $a \leq x \leq b$ gerçel aralığında tanımlı ve değerleri $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ile gösterilen gerçel değerli bir fonksiyon olduğunu görüyoruz.

Teorem 5.13

(5.11)'deki homojen lineer diferansiyel denklemin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ çözümlerinin, $a \leq x \leq b$ gerçel aralığında lineer bağımsız olmaları için gerekli ve yeter şart, Wronskianlarının, $a \leq x \leq b$ aralığındaki herhangi bir x noktasında sıfırdan farklı olmasıdır.

Buna şunu da ekleyebiliriz:

Teorem 5.14

(5.11)'nin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ çözümlerinin Wronskian'ı, bir $a \leq x \leq b$ gerçel aralığında ya özdeş olarak sıfırdır, ya da aralığın hiçbir yerinde sıfır olamaz.

Böylece (5.11) denklemin n tane çözümünü bulabilmişsek, bunların lineer bağımsız olup olmadığını anlamak için Teorem 5.13 ya da Teorem 5.14'i kullanabiliriz. Lineer bağımsız iseler, denklemin genel çözümünü bu n tane çözümün bir lineer bileşimi olarak hemen yazabiliriz.

Elimizde ikinci basamaktan

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

genel homojen lineer diferansiyel denklem bulunması halinde bu denklemin f_1, f_2 çözümlerinin Wronskian'ı

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2$$

olur.

Örnek 5.15

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

denkleminin $\sin x$ ve $\cos x$ çözümlerinin lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 4.4'ü uygulayacağız.

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

olur ki, $W(\sin x, \cos x) \neq 0$ olduğundan $\sin x$ ve $\cos x$ çözümlerinin lineer bağımsız olduklarımı sonucuna varırız.

Örnek 5.16

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denkleminin e^x, e^{-x} ve e^{2x} çözümlerı $-\infty < x < +\infty$ aralığının her x noktasinda lineer bağımsızdır. Çünkü,

$$W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^x & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0$$

olmaktadır.

5.4 Mertebe Düşürme

Teorem 5.17

f fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \tag{5.12}$$

n. basamak homojen lineer diferansiyel denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. $y = fu$ dönüşümü (5.12) denklemini, $w = \frac{du}{dx}$ bağlı değişkeni cinsinden $n-1$. basamaktan homojen bir lineer diferansiyel denkleme dönüştürür.

Teorem 5.18

f fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{d^y}{dx} + a_2(x)y = 0 \tag{5.13}$$

2. basamak homojen lineer diferansiyel denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. $y = fu$ dönüşümü (5.13) denklemini, $w = \frac{du}{dx}$ bağlı değişkeni cinsinden

$$a_0 f\frac{dw}{dx} + \left[2a_0\frac{df}{dx} + a_1 f\right] w = 0 \tag{5.14}$$

birinci basamaktan homojen lineer diferansiyel denklemine dönüştürür.

(5.14) denkleminin

$$w = \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0}dx}}{f^2}$$

özel çözümü

$$u = \int \omega dx = \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{f^2} dx$$

olmak üzere u fonksiyonunu verir. $g = fu$ ile tanımlı g fonksiyonu artık, (5.13) ikinci basamak denkleminin bir çözümdür.

(5.13) denkleminin önceden bilinen f çözümü ile yeni g çözümü lineer bağımsızdır. Böylece (5.13) denkleminin genel çözümü

$$c_1 f + c_2 g$$

şeklinde yazılabilir.

Alıştırma 5.19

$y = x$ *'in*

$$\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğu söylemiştik. Mertebe düşürerek bununla lineer bağımsız olan ikinci bir çözüm bulunuz.