LİNEER GERME:

Tanım: V F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

skalerler

(a) $v_1, v_2, \ldots, v_r$ V'nin elemanları olsunlar. $c_1, c_2, \ldots, c_r \in F$ olmak üzere $c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + \ldots + c_r . v_r$ tipindeki tüm vektörlere "$v_1, v_2, \ldots, v_r$ vektörlerinin lineer kombinasyonu" denir.

(b) V'nin bir S altkümesi için, S'nin tüm lineer kombinasyonları kümesi "S'nin germe kümesi" (S'yi geren küme), (S'nin üreteç kümesi) yada (S'yi üreten küme) olarak adlandırılır ve $\langle S \rangle$ ($Span(S)$) ile gösterilir.

(c) Eğer $V = \langle S \rangle$ ise V'nin her elemanı S'deki elemanların bir lineer kombinasyonu şeklindedir. Bu durumda V, "S kümesi tarafından gerilir" (S kümesi tarafından üretilir) denir. Burada S kümesine de "V'yi geren küme" (V'nin üreteç kümesi) denir.

ÖRNEK: $(3,-4)$, $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$\left.\begin{array}{l} 2.(3,-4)+0.(1,2)=(6,-8) \\ -2.(3,-4)+5.(1,2)=(-1,18) \\ \quad\vdots \\ 8.(3,-4)+4.(1,2)=(28,30) \end{array}\right.$$

Tüm bu elemanlar $(3,-4)$ ve $(1,2)$ elemanlarının lineer kombinasyonudur. Çünkü hepsini $(3,-4)$ ve $(1,2)$'ü belli skalerlerle çarpılıp toplayarak elde edebiliyoruz.

ÖRNEK: $(1,-1,0)$ elemanı $(2,3,5)$ ve $(1,2,-2)$ elemanlarının bir lineer kombinasyonu mudur?

Çözüm: Aslında soruda;

"$(1,-1,0)=c_1.(2,3,5)+c_2.(1,2,-2)$ eşitliğini sağlayan c_1 ve c_2 skalerler bulabiliyor muyum?" diye sorulmaktadır:

$$(1,1,0)=(2c_1+c_2,\ 3c_1+2c_2,\ 5c_1-2c_2)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2c_1+c_2=1 \\ 3c_1+2c_2=1 \\ 5c_1-2c_2=0 \end{array}\right\}$$

İlk iki denklemi çözdüğümüzde $\boxed{c_1=3}$, $\boxed{c_2=-5}$ çıkar.

Fakat bu değerler 3. denklemi sağlamaz!

Dolayısıyla bu üç denklemi aynı anda sağlayacak c_1, c_2 katsayıları yoktur. O halde $(1,-1,0)$ vektörü $(2,3,5)$ ve $(1,2,-2)$ vektörlerinin lineer kombinasyonu değildir.

ÖRNEK: $(-b,4,0,2b-2) \in \mathbb{R}^4$ vektörünün

$$\langle \overbrace{(-1,1,-1,1)}^{\alpha_1}, \overbrace{(1,a,1,-1)}^{\alpha_2}, \overbrace{(-2a,-a,-2a+1,1+2a)}^{\alpha_3}, \overbrace{(-1,3,a-1,2)}^{\alpha_4} \rangle$$

altuzayına ait olmaması için a ne olmalıdır?

Çözüm: $(-b,4,0,2b-2) \notin \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ olması için

$(-b,4,0,2b-2)$ elemanının $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılamıyor olması gerekir.

Yani, $(-b,4,0,2b-2) = c_1 \cdot \alpha_1 + c_2 \cdot \alpha_2 + c_3 \cdot \alpha_3 + c_4 \cdot \alpha_4$

eşitliğini sağlayan c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri bulunmamalıdır.

Yani, $\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2a & -1 & b \\ 1 & a & -a & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2a+1 & a-1 & 0 \\ 1 & -1 & 1+2a & 2 & 2b-2 \end{array}\right]$ sisteminin çözümü olmamalıdır.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2a & -1 & b \\ 1 & a & -a & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2a+1 & a-1 & 0 \\ 1 & -1 & 1+2a & 2 & 2b-2 \end{array}\right] \xrightarrow{\quad\cdots\quad} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2a & -1 & b \\ 0 & 1+a & -3a & 2 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b-2 \end{array}\right]$$

Yukarıdaki sistemin çözümünün olmaması için $a-1=0$ olmalıdır.

O halde $a=1$ olmalıdır.

Sonuç olarak $a=1$ için sistemin çözümü yok, yani eşitliği sağlayan c_1, c_2, c_3, c_4 katsayıları yok yani, lineer kombinasyon şeklinde yazılamaz.

ÖRNEK: (a,b,c) vektörünün $(3,1,-2)$, $(-2,1,1)$ ve $(5,0,-3)$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olabilmesi için a,b,c arasındaki ilişki ne olmalıdır?

Çözüm: $(a,b,c) = c_1.(3,1,-2) + c_2.(-2,1,1) + c_3.(5,0,-3)$

eşitliğini sağlayan c_1, c_2, c_3 sabitlerini bulabilmem için a,b,c?

$\Rightarrow (a,b,c) = (3c_1 - 2c_2 + 5c_3 \,,\, c_1 + c_2 \,,\, -2c_1 + c_2 - 3c_3)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3c_1-2c_2+5c_3&=a \\ c_1+c_2&=b \\ -2c_1+c_2-3c_3&=c \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözümünün olması için a,b,c?

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ -2 & 1 & -3 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -5 & 5 & a-3b \\ 0 & 0 & 0 & -5c-3a-b \end{array}\right]$$

Yukarıdaki denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için tek koşul $-5c-3a-b=0$ olmasıdır.

O halde (a,b,c) nin $(3,1,-2)$, $(-2,1,1)$ ve $(5,0,-3)$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olabilmesi için tek koşul $\boxed{-5c-3a-b=0}$ olmasıdır.

ÖRNEK: $(4,-2,4)$ vektörü $(1,0,1)$, $(3,-4,1)$ ve $(4,-6,-2)$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu mudur?

$(4,-2,4)=c_1.(1,0,1)+c_2.(3,-4,1)+c_3.(4,-6,-2)$ olacak şekilde c_1,c_2,c_3 skalerler bulabilir miyim?

$$\left.\begin{aligned} c_1+3c_2+4c_3&=4 \\ -4c_2-6c_3&=-2 \\ c_1+c_2-2c_3&=4 \end{aligned}\right\}$$ denklemini sağlayan c_1, c_2, c_3 skalerleri var mı?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Denklemin tek çözümü vardır ve o da;

$c_1 = 7/3$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1/3$ 'dür.

$\Rightarrow$ Bu skalerler için eşitlik sağlanır ve $(4,-2,4)$ vektörü $(1,0,1)$, $(3,-4,1)$ ve $(4,-6,-2)$'nin lineer kombinasyonu olur.

ÖRNEK: $W = \{(x,y,z) \mid y-z=0\}$ kümesini <u>geren</u> kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM: $W = \langle S \rangle$ olacak şekildeki W'nin bir S altkümesini arıyorum. Bu S altkümesinin özelliği, W'deki herbir elemanın

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

bu S kümesindeki elemanların lineer kombinasyonu şeklinde yazılabiliyor olmasıdır.

W 'den keyfi bir (x,y,z) elemanını alalım. Bu eleman W 'den geldiğine göre orada olma özelliğini sağlar yani bu (x,y,z) elemanı için $\underbrace{y-z=0}_{y=z}$ 'dır. O halde W 'deki herhangi bir $(x,y,\underset{=}{z})$ elemanı (x,y,y) tipindedir. Şimdi bu (x,y,y) elemanını acaba hangi elemanların lineer kombinasyonları şeklinde yazabilirim?

$(x,y,y)=x.(1,0,0)+y.(0,1,1)$ şeklinde yazabilirim.

O halde $\boxed{W=\langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle}$ 'dir. Yani W 'den hangi elemanı alırsam alayım, o eleman $(1,0,0)$ ve $(0,1,1)$ 'in lineer kombinasyonu (çeşitli skalerlerle çarpılıp toplanmış hali) şeklindedir.

ÖRNEK: $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a=-d \,,\ b=c \right\}$

kümesini geren kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM: W'den keyfi bir eleman alalım. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$ aldık.

Bu eleman W'de olduğundan oradaki özellikleri sağlar yani $a=-d$ ve $b=c$'dir.

Yani $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \in W$'dir. Şimdi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ olur.

$\Rightarrow W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ oldu.

LİNEER BAĞIMLILIK, LİNEER BAĞIMSIZLIK ve TABAN :

Tanım: F bir cisim, V F cismi üzerinde bir vektör uzayı (V_F) ve $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ V'de bir sonlu küme olsun.

- $c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + \dots + c_m . v_m = 0$ iken en az bir c_i sıfırdan farklı olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_m$ skalerleri varsa $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörleri "lineer bağımlıdır"

- $c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + \dots + c_m . v_m = 0$ iken her bir c_i sıfır oluyorsa $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörleri "lineer bağımsızdır" denir.

NOT: Lineer bağımlı vektörlerden oluşan boştan farklı sonlu bir kümeye "lineer bağımlı küme", lineer bağımsız vektörlerden oluşan boştan farklı sonlu kümeye "lineer bağımsız küme" denir.

ÖRNEK: $(1,-3,2), (2,2,-1), (1,5,-3) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımlı mıdır?

Çözüm: $c_1.(1,-3,2)+c_2.(2,2,-1)+c_3.(1,5,-3)=0$ olsun.

Şimdi buradaki c_1, c_2, c_3 'leri inceleyelim:

$$c_1.(1,-3,2)+c_2.(2,2,-1)+c_3.(1,5,-3)=0=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (c_1+2c_2+c_3\,,\,-3c_1+2c_2+5c_3\,,\,2c_1-c_2-3c_3)=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1+2c_2+c_3&=0\\ -3c_1+2c_2+5c_3&=0\\ 2c_1-c_2-3c_3&=0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözümleri olan c_1, c_2, c_3 ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 5\\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ olduğundan

lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Bu çözümler;

$$\left.\begin{aligned} c_1-c_3&=0\\ c_2+c_3&=0 \end{aligned}\right\}$$ $c_3=t$ olmak üzere $c_1=t$, $c_2=-t$ 'dir.

O halde $(t,-t,t)$, $t\in\mathbb{R}$ şeklindeki tüm değerler için $c_1(1,-3,2)+c_2.(2,2,-1)+c_3.(1,5,-3)=0$ olur. Örneğin $(1,-1,1)$ için $1.(1,-3,2)-(2,2,-1)+(1,5,-3)=0$ 'dır.

Yani $c_1.(1,-3,2)+c_2.(2,2,-1)+c_3.(1,5,-3)=0$ koşulunu sağlayan c_1,c_2,c_3 'lerden en az biri sıfırdan farklıdır. O halde bu vektörler lineer bağımlıdır.

ÖRNEK: $(1,2,4)$, $(0,1,2)$ ve $(0,0,-3)$ vektörleri lineer bağımsız mıdır?

Çözüm: $c_1.(1,2,4)+c_2.(0,1,2)+c_3.(0,0,-3)=0$ olsun.

$\Rightarrow (c_1, 2c_1+c_2, 4c_1+2c_2-3c_3)=0$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1&=0 \\ 2c_1+c_2&=0 \\ 4c_1+2c_2-3c_3&=0 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sisteminin çözümü olan c_1, c_2, c_3'ü inceleyelim:

$\Rightarrow c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=0$ 'dan başka çözüm yoktur.

O halde $c_1.(1,2,4)+c_2.(0,1,2)+c_3.(0,0,-3)=0$ koşulunu sağlayan tek (c_1,c_2,c_3) üçlüsü $(0,0,0)$ 'dır. Dolayısıyla $(1,2,4)$, $(0,1,2)$ ve $(0,0,-3)$ vektörleri lineer bağımsızdır.

ÖRNEK: Herhangi bir vektör uzayında sıfır vektöründen oluşan küme yani $\{0\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

Çünkü $c_1.0=0$ aldığımızda sıfırdan farklı c_1'ler için eşitlik sağlanır. Örneğin $c_1=1\neq 0$ için $1.0=0$'dır.

ÖRNEK: Eğer iki vektör lineer bağımlı ise biri diğerinin bir skaler katı şeklindedir. İspatlayınız.

Çözüm: $v_1, v_2 \in V$ lineer bağımlı iki vektör olsunlar. O halde tanımdan $c_1 . v_1 + c_2 . v_2 = 0$ iken en az bir c_i sıfırdan farklıdır.

Kabul edelim ki $c_1 \neq 0$ olsun. O zaman; $c_1 . v_1 = -c_2 . v_2$ olur.

$0 \neq c_1 \in F$ ve F bir cisim olduğundan c_1'in tersi vardır. c_1^{-1} diyelim.

Eşitliğin her iki tarafını c_1^{-1} ile çarparsam;

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^{-1} . c_1}_{1} . v_1 = c_1^{-1} . c_2 . v_2 \quad \text{elde ederim.}$$

$$\Rightarrow v_1 = \underbrace{\underbrace{c_1^{-1}}_{\in F} . \underbrace{c_2}_{\in F}}_{\in F} . v_2$$

$\Rightarrow v_2$, v_1 vektörünün bir skaler katı oldu.

Benzer şey $c_2 \neq 0$ olduğunu düşündüğümüzde de meydana gelir.

ÖRNEK: En fazla ikinci dereceden polinomlardan oluşan vektör uzayı $P_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu vektör uzayındaki: $3-x^2$, $1+x$, $2-3x$ polinomları lineer bağımlı mıdır?

Çözüm: $c_1.(3-x^2) + c_2.(1+x) + c_3.(2-3x) = 0$ olsun.

$\Rightarrow (3c_1 + c_2 + 2c_3) + (c_2 - 3c_3)x - c_1.x^2 = 0 = 0 + 0x + 0.x^2$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_2 - 3c_3 &= 0 \\ -c_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ lineer denklem sisteminin çözümü tektir ve $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 'dır.

O halde $3-x^2$, $1+x$, $2-3x$ polinomları lineer bağımsızdır.

NOT: Polinomları, vektörler olarak düşünerek bu soruyu çözebiliriz.

$a_0 + a_1x + a_2x^2$ polinomu $\longleftrightarrow$ (a_0, a_1, a_2) vektörü

$3-x^2 \longleftrightarrow (3, 0, -1)$

$1+x \longleftrightarrow (1, 1, 0)$

$2-3x \longleftrightarrow (2, -3, 0)$

Ve polinomların lineer bağımsızlıklarını araştırmak yerine onlara karşılık gelen vektörlerin lineer bağımsızlıklarını araştırabiliriz.

ÖRNEK: 2x2 tipindeki matrisler uzayında, $M_{2x2}(\mathbb{R})$,

$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri lineer bağımlı mıdır?

Çözüm: $c_1 . \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + c_2 . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_4 . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0$ alalım.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_2 + c_3 & 3c_1 + 2c_3 \\ 4c_1 + 2c_4 & 0 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_3 &= 0 \\ 4c_1 + 2c_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sistemini çözdüğümüzde;

$c_2 = -c_3 \ , \ c_1 = -\frac{2}{3} c_3 \ , \ c_4 = \frac{4}{3} c_3$

olur ve $c_3 = 1 \neq 0$, $\left(-\frac{2}{3}, -1, 1, \frac{4}{3}\right)$ için denklem sağlanır. Dolayısıyla lineer bağımlıdır.

NOT: Kümedeki bir eleman diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabiliyorsa, o küme lineer bağımlıdır.

Yukarıdaki örnekte $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ elemanını $\frac{3}{2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

şeklinde yazılabildiği için bu dört matris lineer bağımlıdır.