TABAN BULMA:

Teorem: $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ m tane vektör tarafından gerilen bir vektör uzayı olsun.

(i) V'nin bir tabanı vardır ve bu taban birbirinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılanları germe kümesinden atarak elde edilir.

Yani; elimde bir germe kümesi varken

$V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cancel{\alpha_3}, \cancel{\alpha_4} \rangle$ iken ve $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = 3\alpha_1$ şeklinde yazılabiliyorsa α_3'ü ve α_4 ü kümeden atacağım. Kalanlar yani birbiri cinsinden yazılamayanlar, α_1 ve α_2, V'nin tabanı olacak. Çünkü hem V'yi gerecek hemde lineer bağımsız olacaktır.

(ii) V'nin tabanı en fazla m tane eleman içerir.

Çünkü yukarıda söylediğim gibi: bu m tane elemandan lineer bağımsız olanları atıp tabanı öyle bulacağız. Eğer hiçbiri birbiri cinsinden yazılmazsa hiçbiri kümeden atılmayacak ve dolayısıyla tabanın m tane elemanı olacaktır.

(iii) V'nin birden çok tabanı bulunabilir. Ama V'nin her tabanının eleman sayısı aynı olmak zorundadır. Buda boy(V)'dir.

Daha önce bahsetmiştik

NOT: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, W V'nin bir altuzayı olsun. O halde $\boxed{boy(W) \leq boy(V)}$'dir.

Bu teoremin sonucu olarak şunları söyleyebiliriz:

Sonuç 1: V bir vektör uzayı, $\boxed{boy(V) = n}$ olsun.

(i) n elemandan daha fazla elemanlı bir küme lineer bağımsız olamaz

(ii) n elemandan daha az elemanlı bir küme V'yi geremez.

Sonuç 2: V bir vektör uzayı, $\boxed{boy(V) = n}$ olsun.

(i) n elemanlı lineer bağımsız küme tabandır.

(ii) n elemanlı germe kümesi tabandır.

Sonuç 2'nin sonucunda şunu söyleyebiliriz:

Bir önceki ders notlarında bir tanesi standar taban olmak üzere $\mathbb{R}^3$'ün 3 farklı tabanını bulduk. Bunlar;

$B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ (Bunun $\mathbb{R}^3$'ün tabanı olduğunu her zaman biliyorum.)

$B_2 = \{(1,1,-1), (1,2,3), (0,1,1)\}$

$B_3 = \{(1,0,-1), (1,2,1), (0,-3,2)\}$

O halde B_1'in $\mathbb{R}^3$ün bir tabanı olduğunu yani $\boxed{boy(\mathbb{R}^3) = 3}$ ($= n$) olduğunu biliyorum. Bu durumda Sonuç 2'den

$boy(\mathbb{R}^3) = 3$ olduğundan

"(i) 3 elemanlı lineer bağımsız küme tabandır" ifadesinden dolayı B_2 ve B_3'ün $\mathbb{R}^3$ün birer tabanı olduğunu söylemek için

(1) ve (2) koşullarını sağlatmak yerine sadece (2)'yi

Benzer şekilde boy$(\mathbb{R}^3)=3$ olduğundan;
"(ii) 3 elemanlı germe kümesi tabandır." ifadesinden dolayı
B_2 ve B_3'ün $\mathbb{R}^3$ ün birer tabanı olduğunu söylemek için
① ve ② koşullarını sağlatmak yerine sadece ① i sağlatmak
yeterlidir. Çünkü B_2 ve B_3 kümeleri 3 elemanlıdır.

ÖRNEK: $\mathbb{R}^3$ ün $(1,-1,4)$, $(3,-1,4)$, $(1,1,-4)$ ve $(4,-2,8)$
vektörleri tarafından gerilen altuzayı için bir taban bulunuz.

Çözüm: Öncelikle soruda $\mathbb{R}^3$ ün bir altuzayından bahsediyor. Bu
altuzay $W \subseteq \mathbb{R}^3$ olsun. Soruda bu W'nın $(1,-1,4)$, $(3,-1,4)$,
$(1,1,-4)$ ve $(4,-2,8)$ elemanları tarafından gerildiği söyleniyor.

O halde
$$W=\langle (1,-1,4),(3,-1,4),(1,1,-4),(4,-2,8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$
veriliyor soruda. Burada bizden istenen W'için bir taban bulmak:

Bu dersin en başında vermiş olduğum teoremin (i) şıkkında
yazdığı gibi; germe kümesinin elemanlarından lineer bağımlı
olanları yani birbiri cinsinden yazılanları atacağım. Peki hangisi
diğerlerinin lineer kombinasyonudur? sorusunun cevabını nasıl
vereceğim:

Bize verilen kalabalık vektörlerde bu sorunun cevabını bulmak
zordur. O zaman bu kalabalık vektörleri indirgeme yardımıyla
daha da sadeleştirelim:

Bana verilen vektörler $\overset{=\alpha_1}{(1,-1,4)}$, $\overset{=\alpha_2}{(3,-1,4)}$, $\overset{=\alpha_3}{(1,1,-4)}$, $\overset{=\alpha_4}{(4,-2,8)}$.
Şimdi bu vektörleri bir matrise sütun olarak yerleştirelim ve indirgeme yaparak sadeleştirelim.

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[4R_1+R_3\to R_3]{R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{4R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R_2+R_1\to R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

α_1'in sade hali — α_2'nin sade hali — α_3'ün sade hali — α_4'ün sade hali

Şimdi vektörlerimin sade hallerine bakacak olursam;

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-2,1,0)$, $(1,1,0)$ elde ederim.

Ve burada $(-2,1,0)$'ı ilk iki vektörün lineer kombinasyonu şeklinde yazabilirim. $(-2,1,0) = -2.(1,0,0) + 1.(0,1,0)$ olur. O halde α_3'ü kümeden atabilirim.

Ayrıca $(1,1,0) = 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0)$ olur. O halde α_4'ü de kümeden atabilirim.

$(4,-2,8) = (1,-1,4) + (3,-1,4)$

$$W = \langle (1,-1,4), (3,-1,4), \cancel{(1,1,-4)}, \cancel{(4,-2,8)} \rangle$$

$(1,1,-4) = -2.(1,-1,4) + 1.(3,-1,4)$ dür.

$$\Rightarrow W = \langle (1,-1,4), (3,-1,4) \rangle \text{ kalır.}$$

bağımsızdırlar. Yani $\{(1,-1,4),(3,-1,4)\}$ W için bir tabandır. $boy(W)=2$'dir.

NOT: $W \subseteq \mathbb{R}^3$ olduğundan $boy(W) \leq boy(\mathbb{R}^3)=3$ olacağı açıktır. Ama $boy(W)=1,2,3$ olabilir. Onu yukarıdaki gibi tabanı bularak belirlemeliyiz.

ÖRNEK: $\mathbb{R}^4$'ün $(-2,1,-2,1),(1,0,1,0),(-1,1,-1,1)$ elemanları tarafından gerilen bir altuzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm: $W=\langle(-2,1,-2,1),(1,0,1,0),(-1,1,-1,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ olarak alalım. W'nin tabanını bulalım?

W'yi geren küme belli olduğu için yukarıdaki örnekteki gibi bu germe kümesinden lineer bağımlı elemanları atarak tabanı elde edeceğiz:

1. yol Burada $(-2,1,-2,1)$ ve $(1,0,1,0)$ elemanlarının birbirinin cinsinden yazılmadıkları açıktır. O halde bu 2 elemanı atamayız. Fakat baktığımız zaman;

$$(-1,1,-1,1)=(-2,1,-2,1)+(1,0,1,0)$$

olduğu kolayca görülmektedir. O halde

$$W=\langle(-2,1,-2,1),(1,0,1,0),\cancel{(-1,1,-1,1)}\rangle$$ kümesinden

$(-1,1,-1,1)$'i atacağım

O halde son durumda

$$W = \langle (-2,1,-2,1), (1,0,1,0) \rangle \text{ 'dır.}$$

Gerçekte de bu iki elemanın lineer bağımsızlıklarına baktığımız zaman;

$c_1.(-2,1,-2,1) + c_2.(1,0,1,0) = 0$ alalım.

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ olduğu kolayca görülebilir.

2. yol: Eğer bu üç vektörün birbiri cinsinden yazılıp yazılmadığını hemen göremiyorsak onları satır indirgeme işlemleriyle indirgeyelim

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \end{array}$$

in sade halleri

bu sade hallerinde

$(1,1,0,0) = (1,0,0,0) + (0,1,0,0)$

olduğu kolayca görülmektedir.

O halde bu bize $(-1,1,-1,1)$ vektörünü (diğerlerinin cinsinden yazıldığı için) atabileceğimizi söyler.

$$W = \langle \underbrace{\alpha_1, \alpha_2}, \cancel{\alpha_3} \rangle$$

Bunların gerçekte de lineer bağımsız olduklarını kolayca görebiliriz.

ÖRNEK: $1, 1+x, 2+x, 2+x^2$ polinomları tarafından gerilen bir uzay için taban bulunuz.

Çözüm: $T = \langle 1, 1+x, 2+x, 2+x^2 \rangle$

Şimdi burada birbiri cinsinden yazılabilenleri atacağız. 1 ile 1+x'in birbiri cinsinden yazılması imkansızdır çünkü 1 polinomu x'i içermez. O halde ikisi kesin kümede duruyor.

Şimdi $2+x = (1) + (1+x)$ olduğu kolayca görülür. Yani kümeden atabiliriz.

Diğeri ise $2+x^2$ polinomunun ise diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılamayacağı açıktır. Çünkü diğerlerinde x^2 bileşeni yok. Bu durumda $2+x^2$'yi de kümeden atamam.

$$T = \langle 1, 1+x, \cancel{2+x}, 2+x^2 \rangle$$

$$\Rightarrow T = \langle 1, 1+x, 2+x^2 \rangle \text{'dir.}$$

Şimdi lineer bağımsız olduklarını görelim:

$c_1.(1) + c_2.(1+x) + c_2.(2+x^2) = 0$ alalım.

$$\Rightarrow c_1 + c_2 + c_2x + 2c_2 + c_2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (c_1+3c_2) + c_2x + c_2x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

polinom eşitliğinden

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + 3c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}\right\} c_1 = c_2 = 0 \text{ olur. O halde } \{1, 1+x, 2+x^2\}$$