CSE211Dijital Tasarı m

Akdeniz Üniversitesi

Hafta6: Boole Cebiri ve Mantı k Kapı ları

Doç.Dr. Taner Danı şman

tdanisman@akdeniz.edu.tr

Ders programı

Hafta 01	09/16/2024	Giriş
Hafta 02	23/09/2024	Dijital Sistemler ve İkili Sayı lar I
Hafta 03	30/09/2024	Dijital Sistemler ve İkili Sayı lar II
Hafta 04	10/07/2024	Boole Cebiri ve Mantı k Kapı ları I
Hafta 05	10/14/2024	Boole Cebiri ve Mantı k Kapı ları II
Hafta 06	10/21/2024	Kapı Seviyesi Minimizasyonu
Hafta 07	10/28/2024	Karnaugh Haritaları
Hafta 08	11/04/2024	Vize
Hafta 09	11/11/2024	Karnaugh Haritaları
Hafta 10	11/18/2024	Kombinasyonel Mantı k
11. Hafta	25.11.2024	Kombinasyonel Mantı k
12. Hafta	12/02/2024	Zamanlama, gecikmeler ve tehlikeler
Hafta 13	12/09/2024	Eşzamanlı Sı ralı Mantı k
Hafta 14	12/16/2024	Eşzamanlı Sı ralı Mantı k

Bilmeniz gereken yeni bölüm terimleri

Okuma (Bölüm 2.9 Entegre Devreler)

IC (Entegre Devre)

SSI (Küçük Ölçekli Entegrasyon)

MSI (Orta Ölçekli Entegrasyon)

LSI (Büyük Ölçekli Entegrasyon)

VLSI (Çok Büyük Ölçekli Entegrasyon)

TTL Transistör–Transistör mantı ğı ;

ECL Yayı cı ‾Çift Mantı k;

MOS Metal ‾Oksit Yarı iletken;

CMOS Tamamlayı cı Metal ‾Oksit Yarı iletken

CAD (Bilgisayar Destekli Tasarı m)

Bilmeniz gereken yeni bölüm terimleri

Okuma (Bölüm 2.9 Entegre Devreler) FPGA (Alan Programlanabilir Kapı Dizisi) PLD (Programlanabilir Mantı k Aygı tı)

IEEE (Elektronik ve Elektrik Mühendisleri Enstitüsü)

Bilmeniz gereken yeni bölüm terimleri Okuma (Bölüm 2.9 Entegre Devreler)

dı şarı - Fan

Fan-in

Güç dağı lı mı

Yayı lma gecikmesi

Gürültü marjı

Boyut değiştiricileri olan ilkel veri türleri

Data type	Size	Value range
char	1	-128 to 127 or 0 to 255
unsigned char	1	0 to 255
signed char	1	-128 to 127
int	2 **or** 4	-32,768 to 32,767 **or** -2,147,483,648 to 2,147,483,647
unsigned int	2 **or** 4	0 to 65,535 **or** 0 to 4,294,967,295
short	2	-32,768 to 32,767
unsigned short	2	0 to 65,535
long	4	-2,147,483,648 to 2,147,483,647
unsigned long	4	0 to 4,294,967,295

Boole Cebiri – DeMorgan Yasası

Bazen bir ev inşa etmek daha ekonomiktir

Bir fonksiyonun tamamlayı cı sı nı kullanan (ve sonucunu tamamlayan) bir devre, fonksiyonu doğrudan uygulamaktan daha iyidir.

DeMorgan yasası , bir Boole fonksiyonunun tamamlayı cı sı nı bulmanı n kolay bir yolunu sağlar .

DeMorgan yasası nı hatı rlayalı m :

$$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y} \quad \text{and} \quad \overline{(x+y)} = \overline{x}\,\overline{y}$$

Boole Cebiri – Tamamlayı cı Fonksiyonlar

EXAMPLE 2.2

Find the complement of the functions $F_1 = x'yz' + x'y'z$ and $F_2 = x(y'z' + yz)$. By applying DeMorgan's theorems as many times as necessary, the complements are obtained as follows:

$$
\begin{aligned}
F_1' = (x'yz' + x'y'z)' &= (x'yz')'(x'y'z)' = (x + y' + z)(x + y + z') \\
F_2' = [x(y'z' + yz)]' &= x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')'(yz)' \\
&= x' + (y + z)(y' + z') \\
&= x' + yz' + y'z
\end{aligned}
$$

Boole Cebiri – Dualite

Örnekler:

x(y + z)'nin duali x + yz'dir.

x 1 + (y + z) ifadesinin ikiliği (x + 0)(yz)'dir.

Bir Boole ifadesi ile gösterilen bir Boole fonksiyonu F'nin duali , bu ifadenin duali ile gösterilen fonksiyondur .

Fd ile gösterilen bu ikili fonksiyon, F'yi temsil etmek için kullanı lan belirli Boole ifadesine bağlı değildir.

Boole Cebiri – Minterm Kanonik Formül

X	Evet	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$(\; , \; , \;) = \bar{\;}\bar{\;} \; + \bar{\;} \; \bar{\;}\bar{\;}$$

Table 2.6

Truth Table for $F = xy + x'z$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Minterms

Maxterms

Boole Cebiri – Maxterm Kanonik Formül

X	Evet	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

+ +

+ +

+ +

+ +

+ +

(, ,) = +(+ (+ +)(+)(+ +)

+)(+ +)

Boole Cebiri – Ürünlerin Toplamı

Fonksiyonumuz için ürünlerin toplamı formu şu şekildedir:

$$F(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z}+\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}+xyz$$

Bu fonksiyonun en basit terimlerle olmadı ğı nı fark ediyoruz . Amacı mı z sadece fonksiyonumuzu kanonik ürün toplamı biçiminde yeniden yazmaktı r.

$$F(x,y,z) = x\bar{z}+y$$

x	y	z	$x\bar{z}+y$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Table 2.4
Functions of Three Variables

x	y	z	Function f_1	Function f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Table 2.3
Minterms and Maxterms for Three Binary Variables

			Minterms		Maxterms	
x	y	z	Term	Designation	Term	Designation
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

Mintermler

EXAMPLE 2.4

Express the Boolean function $F = A + B'C$ as a sum of minterms. The function has three variables: A, B, and C. The first term A is missing two variables; therefore,

$$A = A(B + B') = AB + AB'$$

This function is still missing one variable, so

$$\begin{aligned} A &= AB(C + C') + AB'(C + C') \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' \end{aligned}$$

The second term $B'C$ is missing one variable; hence,

$$B'C = B'C(A + A') = AB'C + A'B'C$$

Combining all terms, we have

$$\begin{aligned} F &= A + B'C \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'B'C \end{aligned}$$

Mintermler (Devamı)

The second term $B'C$ is missing one variable; hence,

$$B'C = B'C(A + A') = AB'C + A'B'C$$

Combining all terms, we have

$$F = A + B'C$$
$$= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'B'C$$

But $AB'C$ appears twice, and according to theorem 1 $(x + x = x)$, it is possible to remove one of those occurrences. Rearranging the minterms in ascending order, we finally obtain

$$F = A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$
$$= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

When a Boolean function is in its sum-of-minterms form, it is sometimes convenient to express the function in the following brief notation:

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

Maxtermler

EXAMPLE 2.5

Express the Boolean function $F = xy + x'z$ as a product of maxterms. First, convert the function into OR terms by using the distributive law:

$$\begin{aligned} F = xy + x'z &= (xy + x')(xy + z) \\ &= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\ &= (x' + y)(x + z)(y + z) \end{aligned}$$

The function has three variables: x, y, and z. Each OR term is missing one variable; therefore,

$$\begin{aligned} x' + y &= x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z') \\ x + z &= x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z) \\ y + z &= y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z) \end{aligned}$$

Combining all the terms and removing those which appear more than once, we finally obtain

$$\begin{aligned} F &= (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z') \\ &= M_0 M_2 M_4 M_5 \end{aligned}$$

A convenient way to express this function is as follows:

$$F(x, y, z) = \Pi(0, 2, 4, 5)$$

Kanonik formlar arası nda dönüşüm

The complement of a function expressed as the sum of minterms equals the sum of minterms missing from the original function. This is because the original function is expressed by those minterms which make the function equal to 1, whereas its complement is a 1 for those minterms for which the function is a 0. As an example, consider the function

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

This function has a complement that can be expressed as

$$F'(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

Now, if we take the complement of F' by DeMorgan's theorem, we obtain F in a different form:

$$F = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0' \cdot m_2' \cdot m_3' = M_0 M_2 M_3 = \Pi(0, 2, 3)$$

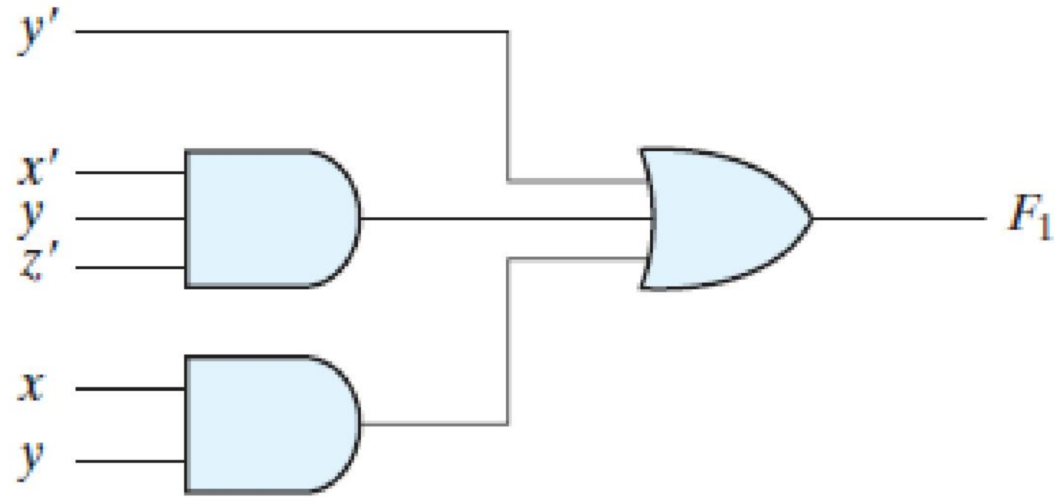
The last conversion follows from the definition of minterms and maxterms as shown in Table 2.3. From the table, it is clear that the following relation holds:

$$m_j' = M_j$$

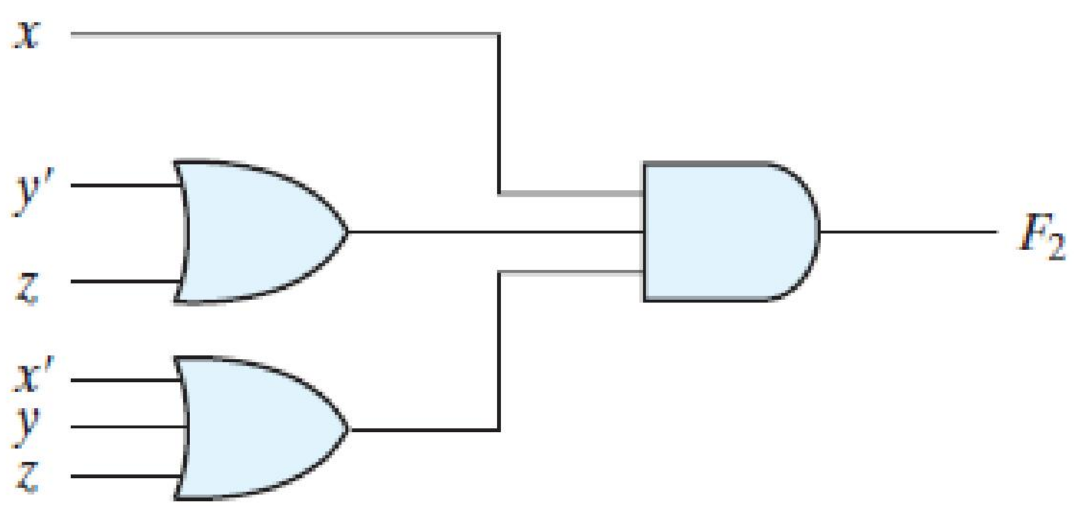
That is, the **maxterm with subscript *j* is a complement of the minterm with the same subscript *j* and vice versa.**

Mantı k Kapı ları ile Standart Formlar

İki Seviyeli Uygulama



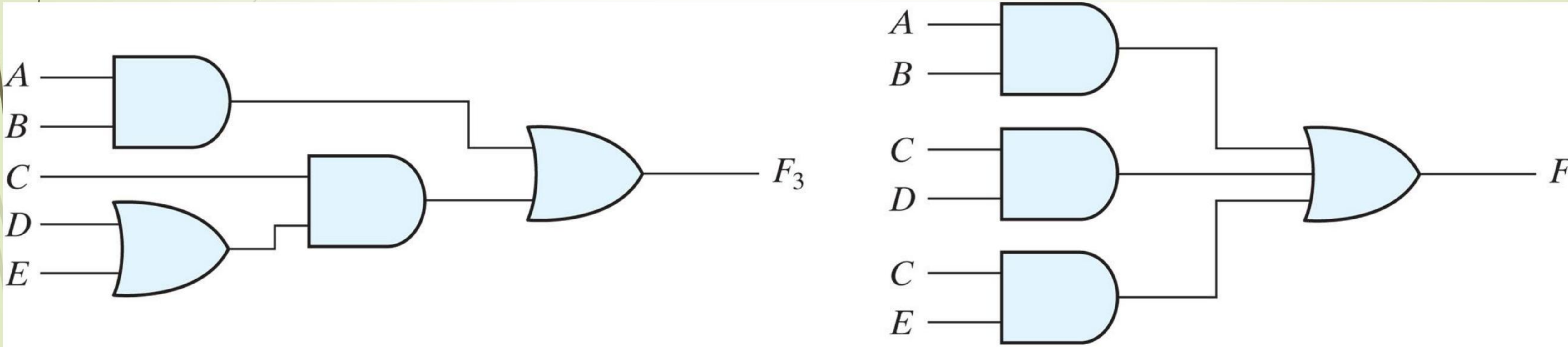
(a) Sum of Products



(b) Product of Sums

FIGURE 2.3
Two-level implementation

Üç ve iki seviyeli uygulama



(a) $AB + C(D + E)$

(b) $AB + CD + CE$

İki ikili değişkenle oluşturulan 16 fonksiyonun doğruluk tabloları

Table 2.7

Truth Tables for the 16 Functions of Two Binary Variables

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

İki Değişkenli 16 Fonksiyon

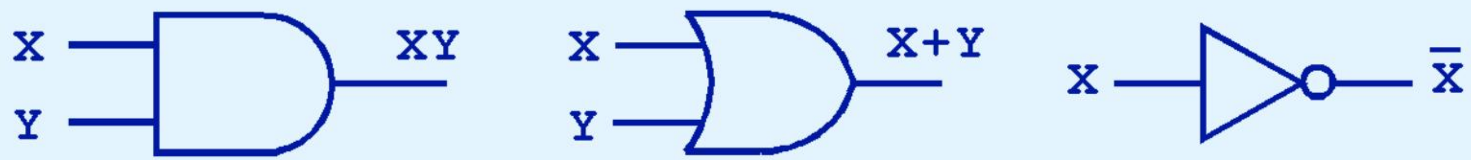
Table 2.8
Boolean Expressions for the 16 Functions of Two Variables

Boolean Functions	Operator Symbol	Name	Comments
$F_0 = 0$		Null	Binary constant 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	AND	x and y
$F_2 = xy'$	x/y	Inhibition	x, but not y
$F_3 = x$		Transfer	x
$F_4 = x'y$	y/x	Inhibition	y, but not x
$F_5 = y$		Transfer	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Exclusive-OR	x or y, but not both
$F_7 = x + y$	$x + y$	OR	x or y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	NOR	Not-OR
$F_9 = xy + x'y'$	$(x \oplus y)'$	Equivalence	x equals y
$F_{10} = y'$	y'	Complement	Not y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Implication	If y, then x
$F_{12} = x'$	x'	Complement	Not x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Implication	If x, then y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND	Not-AND
$F_{15} = 1$		Identity	Binary constant 1

Mantı k Kapı ları – VE VEYA DEĞİL

En basit üç kapı AND, OR ve NOT'tur.

kapı lar.



X AND Y

X	Y	XY
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X OR Y

X	Y	X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT X

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Bunlar, doğruluk tabloları ndan da görebileceğiniz gibi, doğrudan ilgili Boole işlemlerine karşı lı k gelir.

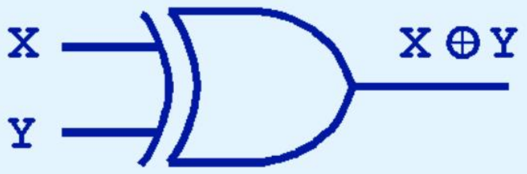
Mantı k Kapı ları – XOR

Bir diğer çok kullanı şlı kapı ise özel VEYA (XOR) kapı sı dı r.

XOR işleminin çı ktı sı yalnı zca şu durumlarda doğrudur: Girişlerin değerleri farklı dı r.

X XOR Y

X	Y	X ⊕ Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



XOR işlemi için özel sembol 'ye dikkat edin.

Mantı k Kapı ları – NAND NOR

NAND ve NOR iki çok önemli kapı dı r.

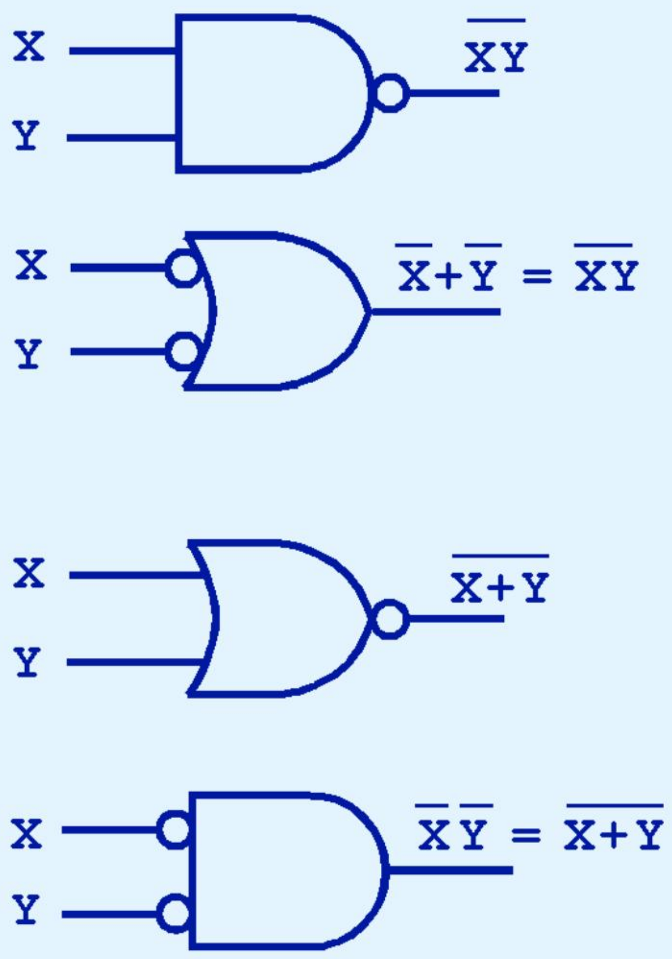
Sembolleri ve doğruluk tabloları sağda gösterilmiştir.

X NAND Y

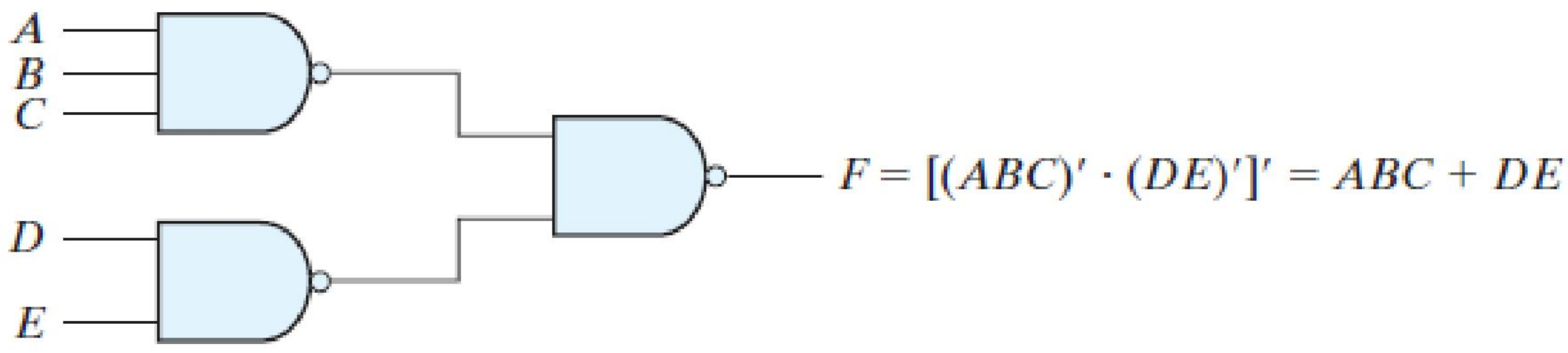
X	Y	X NAND Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

X NOR Y

X	Y	X NOR Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



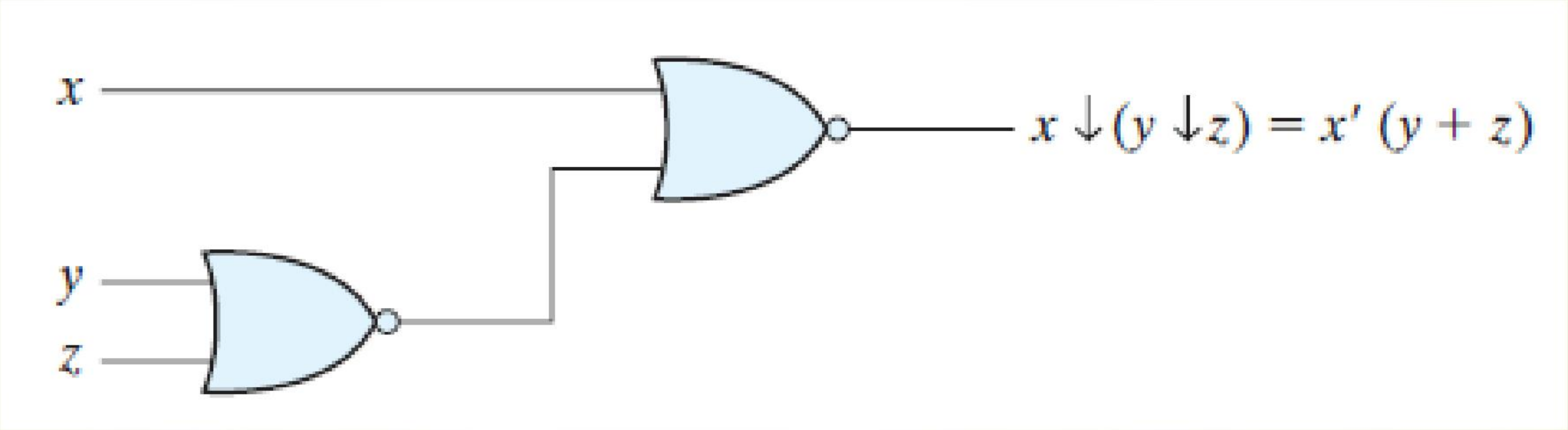
Basamaklı NAND kapı sı

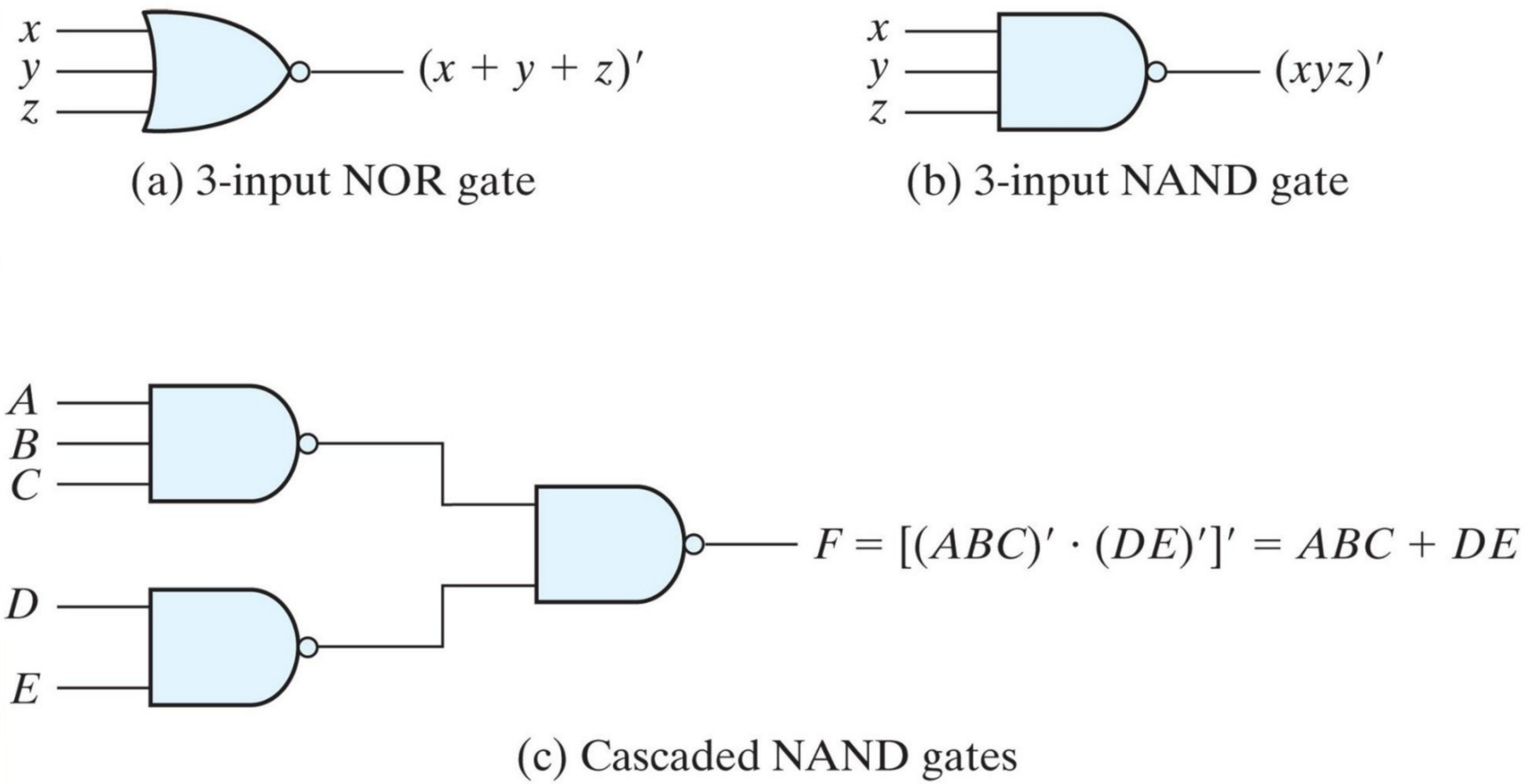


(c) Cascaded NAND gates

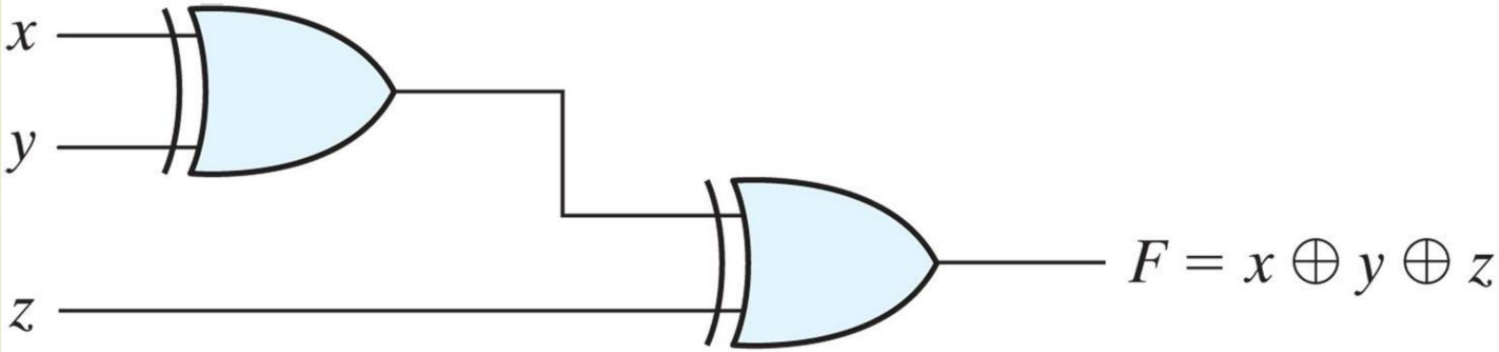
FIGURE 2.7
Multiple-input and cascaded NOR and NAND gates

Basamaklı NOR kapısı




x
y
z
$(x + y + z)'$
(a) 3-input NOR gate
x
y
z
$(xyz)'$
(b) 3-input NAND gate
A
B
C
D
E
$F = [(ABC)' \cdot (DE)']' = ABC + DE$
(c) Cascaded NAND gates

Üç girişli XOR Kapı sı



(a) Using 2-input gates

(b) 3-input gate

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(c) Truth table

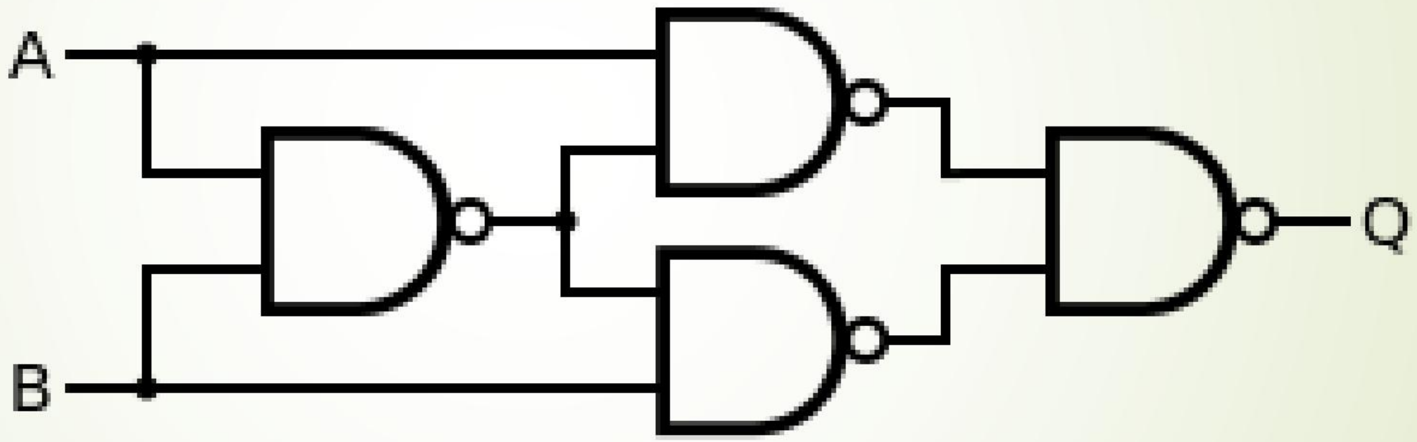
Mantı k diyagramı nı çizin

F=(AB)'+C'D yalnı zca NAND kapı sı nı kullanarak

Mantı k diyagramı nı çizin

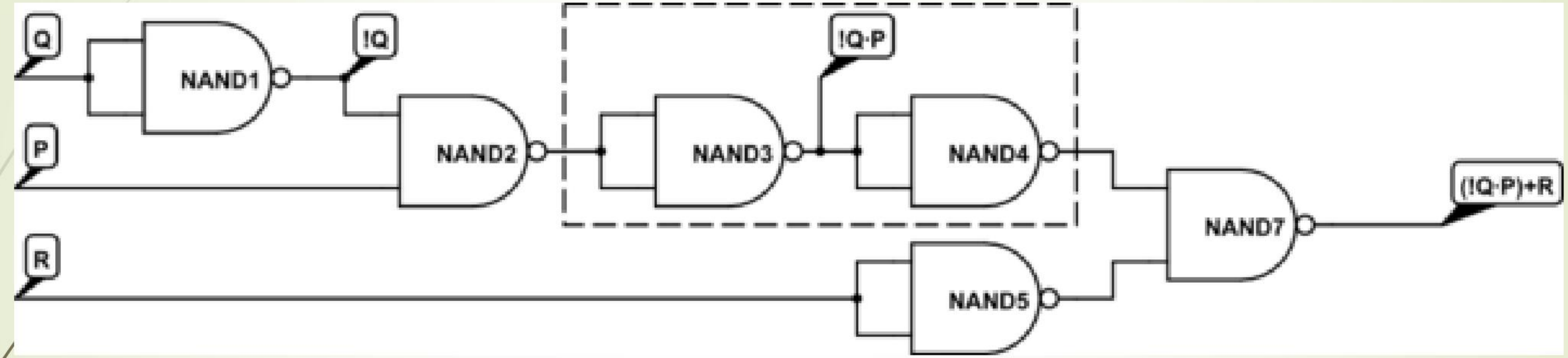
F=(AB)'+C'D yalnı zca NOR kapı sı nı kullanarak

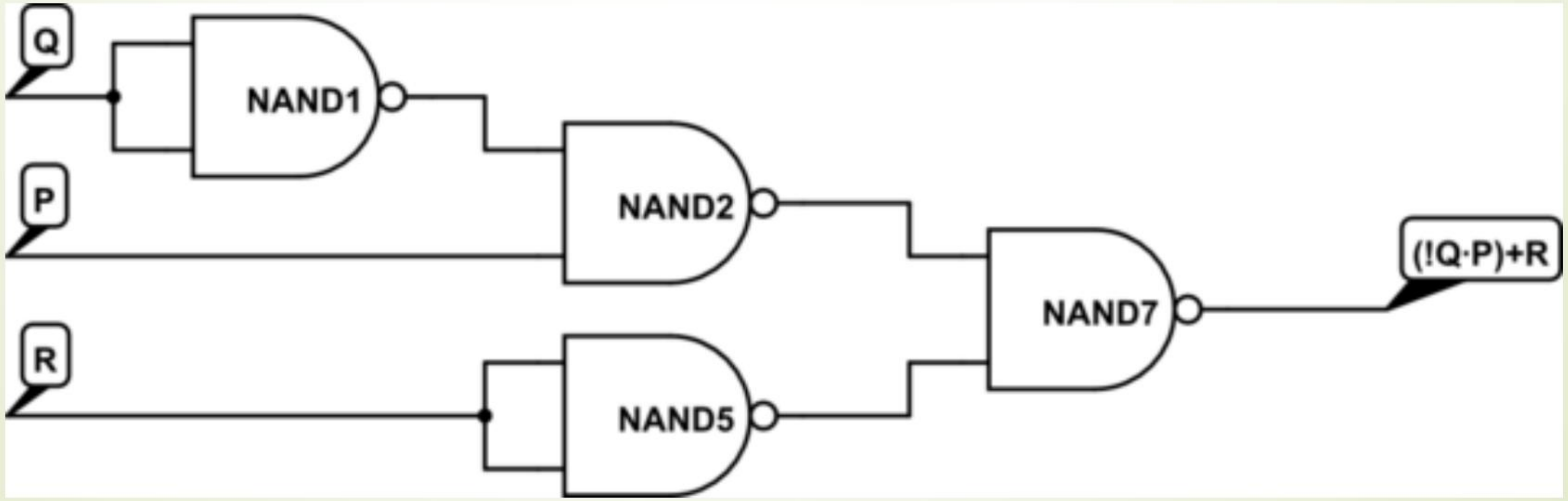
Bu mantı k diyagramı nı n çı ktı sı nedir ?



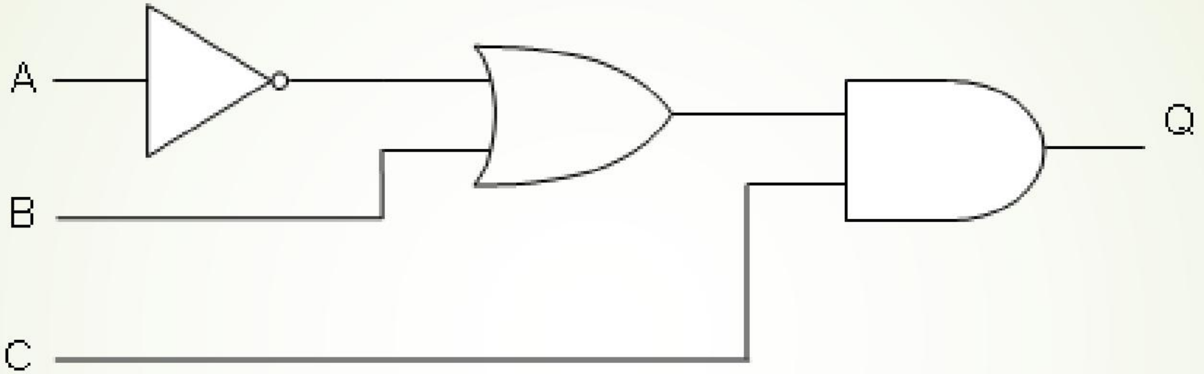
Q=A'B+B'A= A XOR B

Sadece NAND kapı sı nı kullanarak F=(Q'P)+R için mantı k diyagramı nı çizin



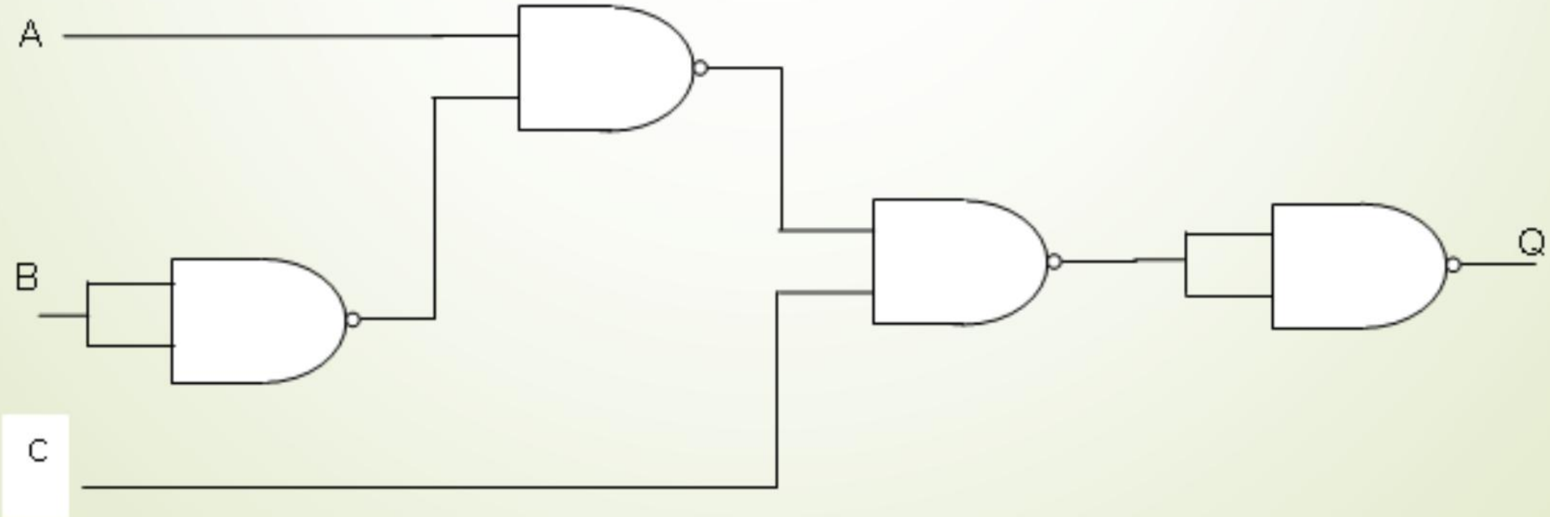


Aşağı daki mantı k diyagramı nı yalnı zca NAND kapı ları nı dönüştürün (Örnek 1)

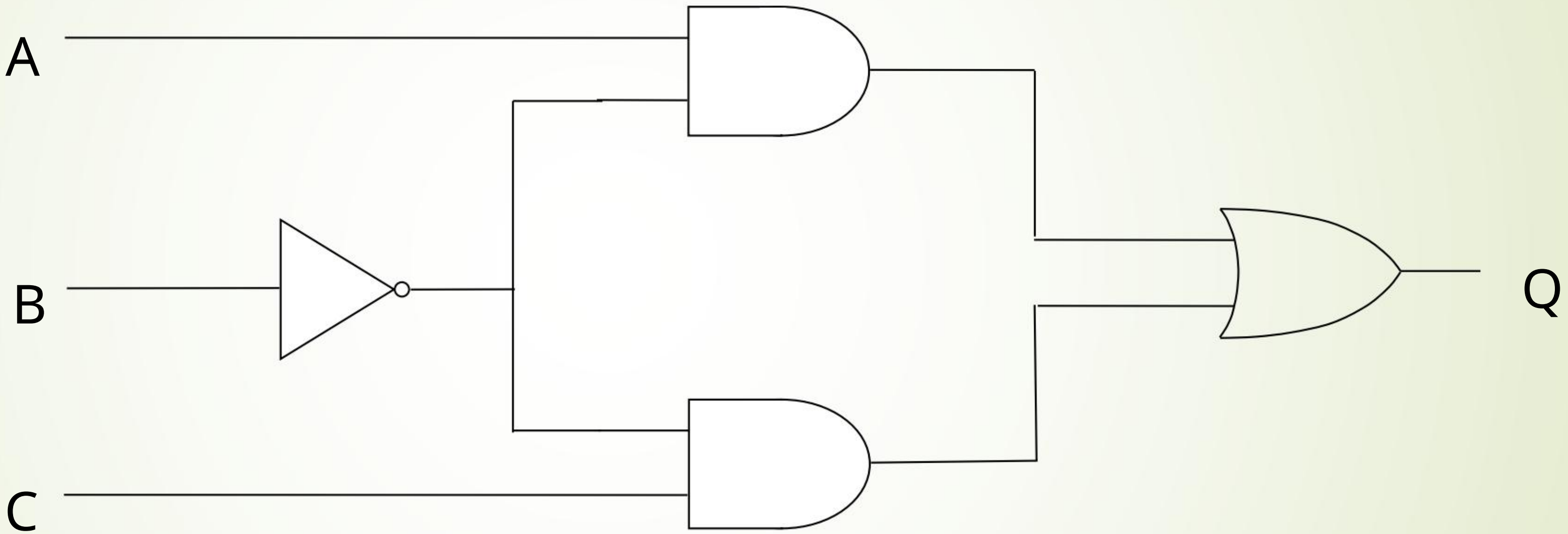


Çözüm

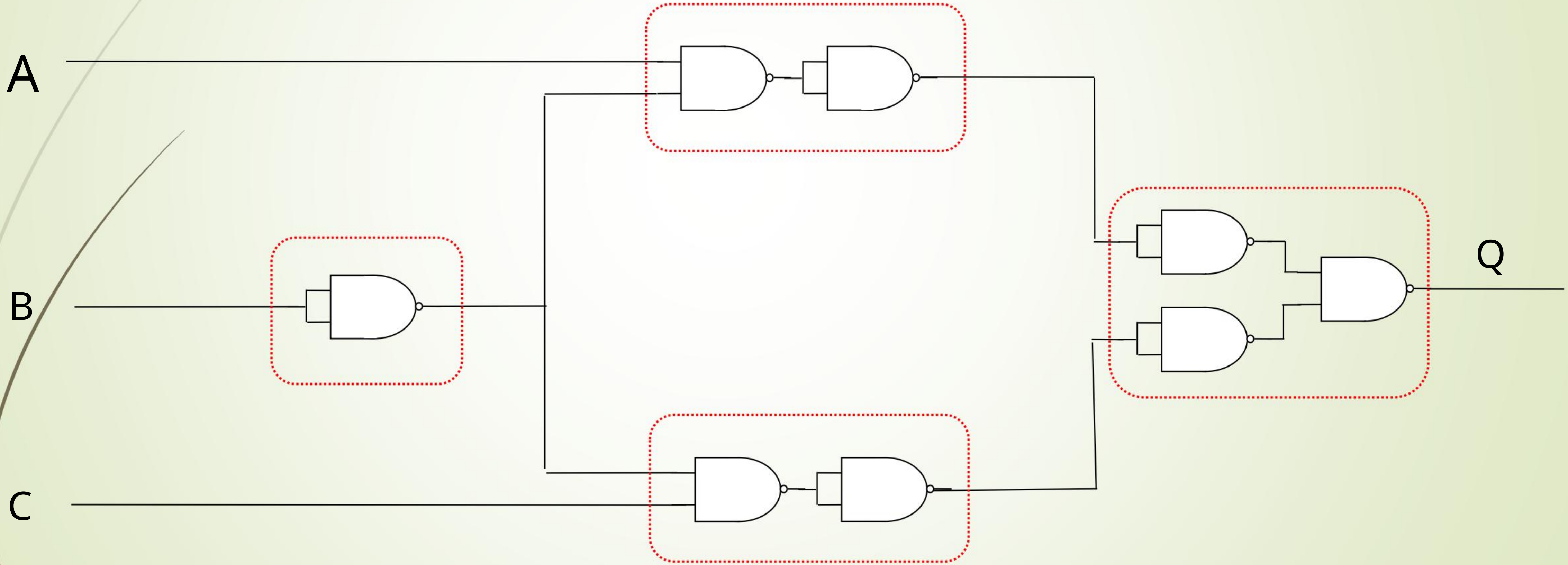
S=(A'+B)C



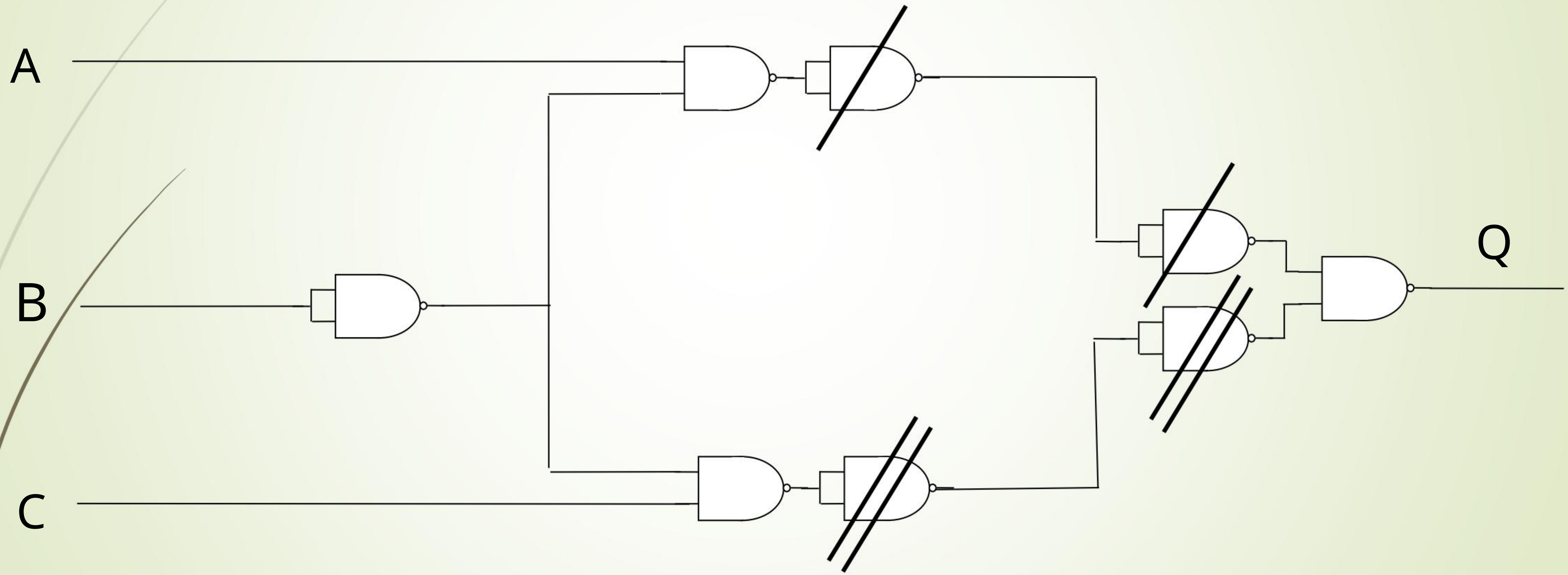
Aşağı daki mantı k diyagramı nı yalnı zca NAND kapı ları nı dönüştürün (Örnek 2)



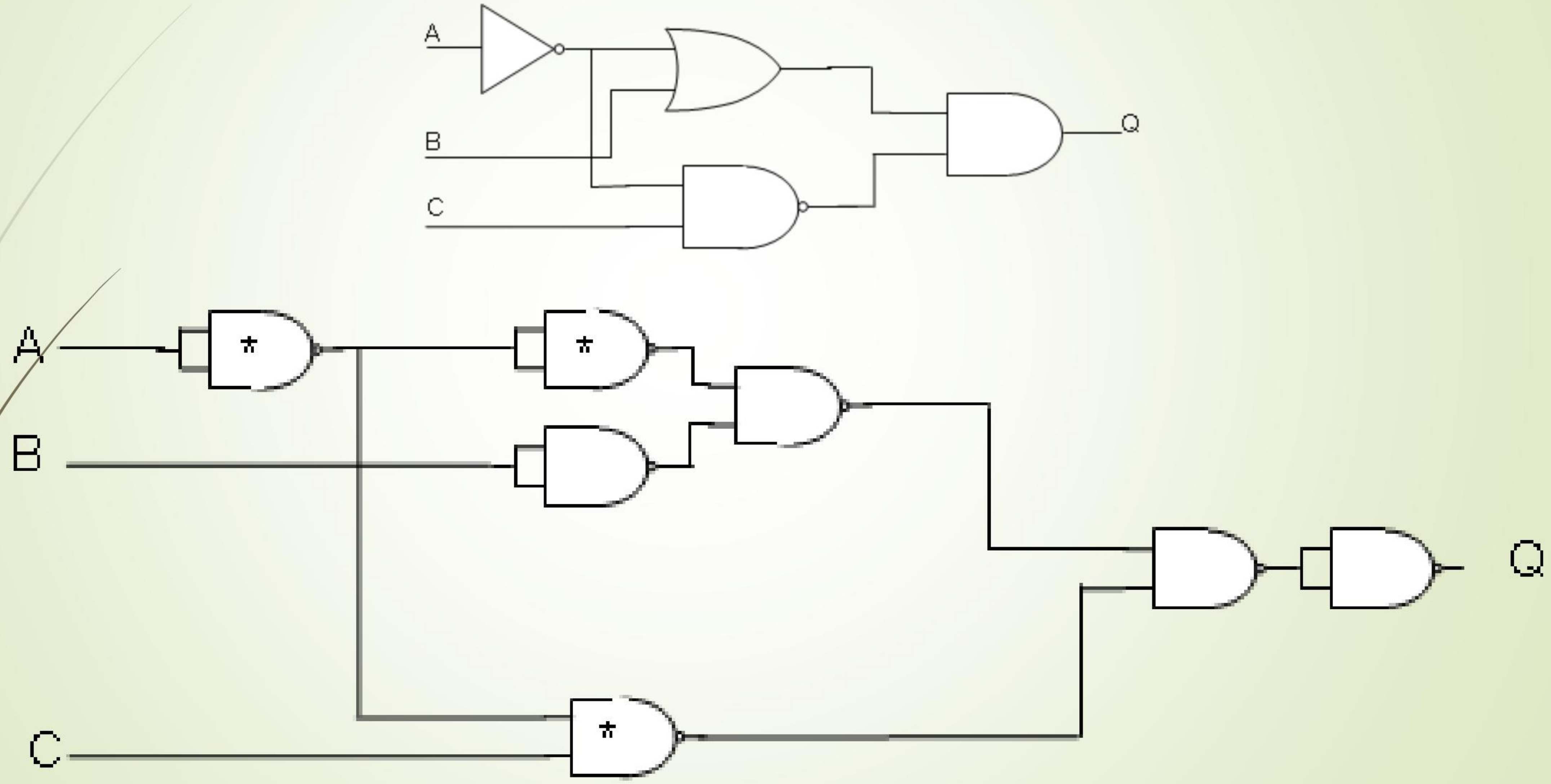
Öncelikle tüm bu kapı ları NAND eşdeğerleriyle değiştireceğiz ve birbirine bağlayacağı z



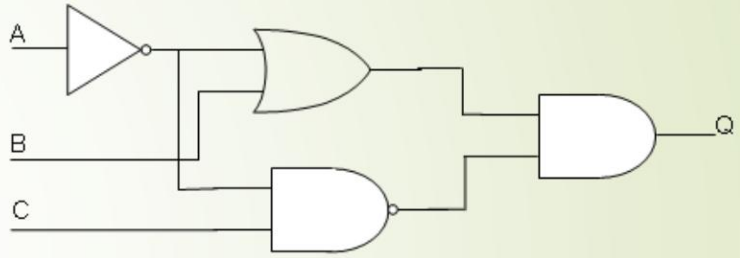
Son olarak yedekli kapı ları kontrol ediyoruz ve bunları tespit ediyoruz.

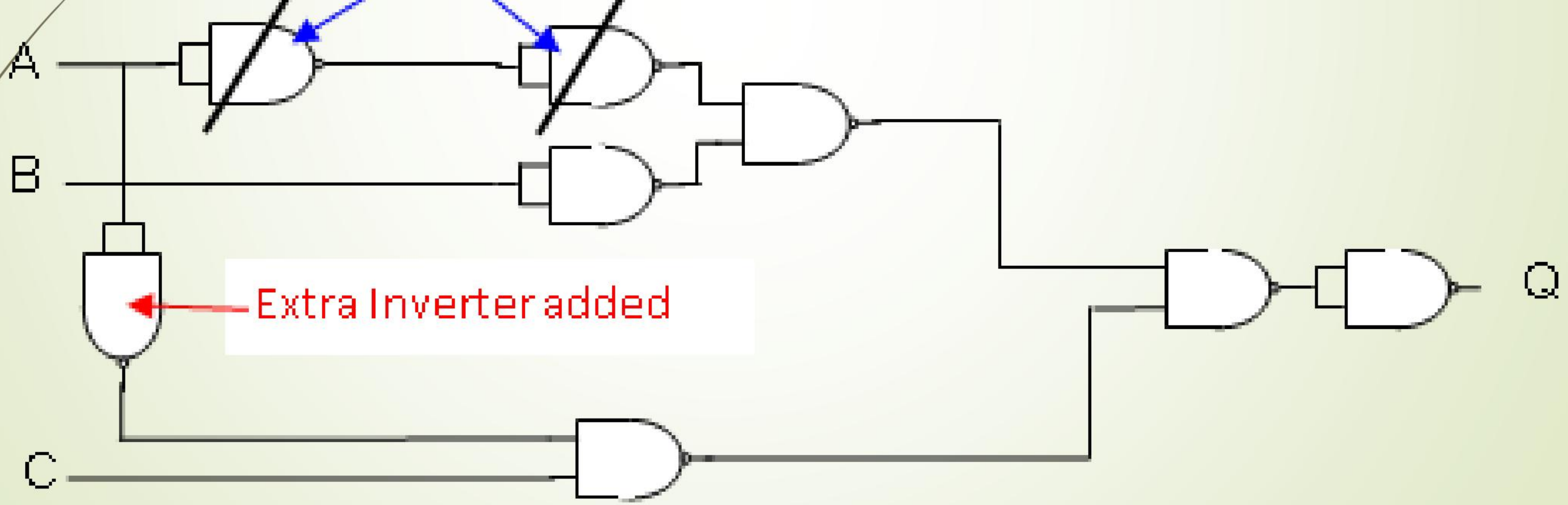


Dönüşümlerde fazlalı k

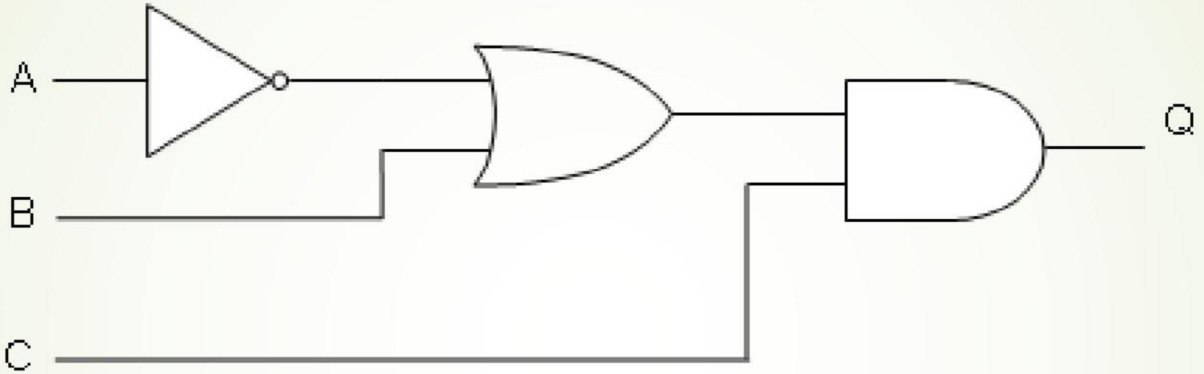


Dönüşümlerde fazlalı   k



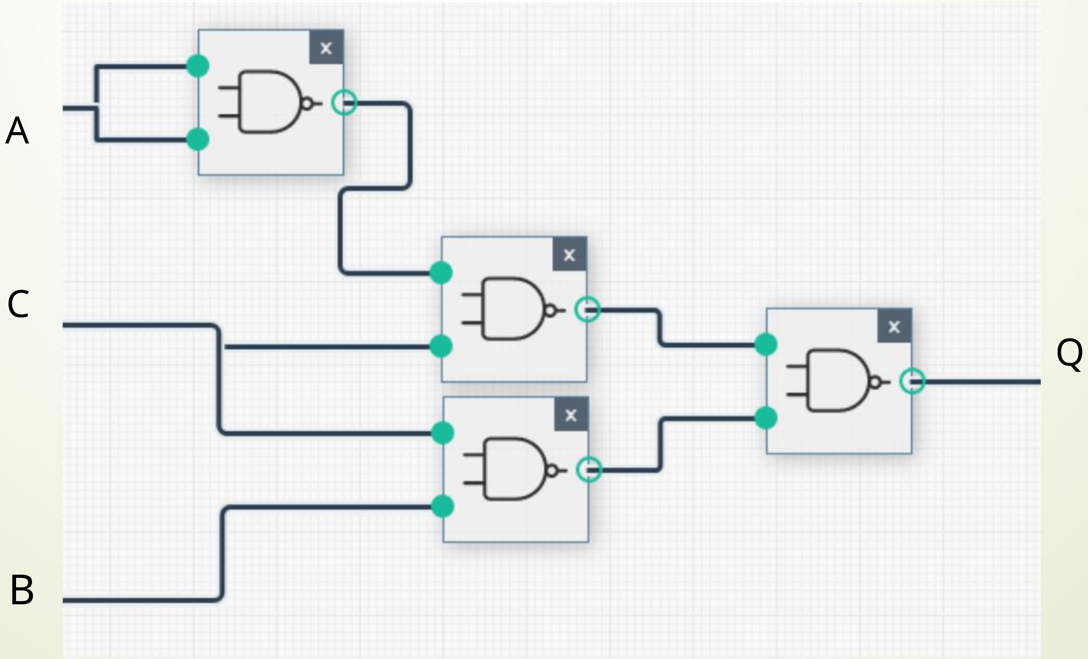


Eşdeğer diyagramı kullanarak oluşturun Sadece NAND kapı ları (İkinci Çözüm)



Çözüm

S=(A'+B)C



Sadece 2 girişli NAND kapı ları nı kullanarak özel VEYA kapı sı nı n nası l oluşturulacağı nı gösterin .

Aynı Boole ifadesine sahip iki farklı doğruluk tablosu yazmak mümkün müdür ?

Hayır. Bir Boole ifadesi bir doğruluk tablosunu tatmin ediyorsa, aşağıdakini tatmin edemez: diğer.

Sinyal Atama ve Mantı k Polaritesi