Abstract

Bu çalışma, bir duvarla sınırlandırılmış kafes yollarının kombinatorik özelliklerini, genişlik, adım sayısı, uzunluk ve alan gibi istatistiklerin sayımı ve analizi üzerinden incelemektedir. Jeneratör fonksiyonlar, kernel yöntemleri ve birebir eşlemeler kullanılarak, bu yollar ile Fibonacci sayıları, Catalan sayıları ve Motzkin yolları gibi bilinen kombinatorik yapılar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Belirli bir bitiş noktasına sahip duvar yollarının Catalan sayıları ile birebir eşleştiği ve Dyck yollarına karşılık geldiği gösterilmiştir. Benzer şekilde, belirli bir adım sayısına sahip duvar yolları ile Fibonacci sayıları arasındaki bağlantı teorik olarak açıklanmıştır. Ek olarak, zirvesiz Motzkin yolları ve bu yolların enumeratif (sayım) özellikleri analiz edilmiştir. Bu bulgular, kafes yollarının sayımı ve ayrık matematikteki uygulamaları için önemli katkılar sağlamaktadır.

1-Introduction (Giriş)

Kombinatorik matematikte kafes yolları (lattice paths), birçok teorik ve pratik problemde kritik bir rol oynayan temel yapı taşlarından biridir. Bu yollar, genellikle bir düzlem üzerinde bir başlangıç noktasından bir bitiş noktasına, belirli kurallara bağlı kalarak ilerleyen adım dizileri olarak tanımlanır. Kombinatorik problemlerin çözümlerinde sıkça kullanılan Fibonacci sayıları, Catalan sayıları ve Motzkin yolları gibi klasik kombinatorik diziler, bu yolların farklı varyasyonlarıyla ilişkilendirilir. Yolların sınıflandırılması, sayımı ve bu yapıların genel özelliklerinin anlaşılması, hem matematiksel hem de uygulamalı perspektifte büyük öneme sahiptir.

Bu bağlamda, bir "duvar" ile sınırlandırılmış yollar, klasik kafes yollarının doğal bir genelleştirmesidir. Duvar, N^2 düzleminde belirli bir düzen içinde yerleştirilmiş 1×2 boyutunda tuğlalar (tiles) ile oluşturulmuş özel bir alt ızgara olarak tanımlanmıştır. Bu yapı, kafes yollarının geometrik sınırlandırılmasını sağlar. Bu yollar, belirli bir alan içinde hareket ederken, geometrik sınırlamalara ve başlangıç-bitiş koşullarına tabidir.

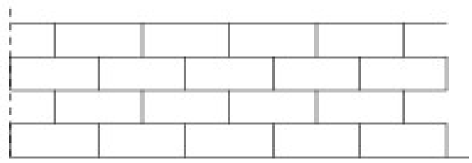

FIGURE 1. The wall tiling of $\mathbb{N}^2$.

Pathwall makalesi, bu tür yolların kombinatorik özelliklerini ve iyi bilinen matematiksel dizilerle ilişkilerini inceleyen önemli bir çalışma olarak öne çıkmaktadır. Bu çalışma kapsamında incelenen yollar, yukarı (N = (0, 1)), aşağı (S = (0, −1)) ve yatay (E1 = (1, 0), E2 = (2, 0)) adımlardan oluşmaktadır. Bu tanım, farklı kombinatorik yapıların analizi için temel teşkil eder.

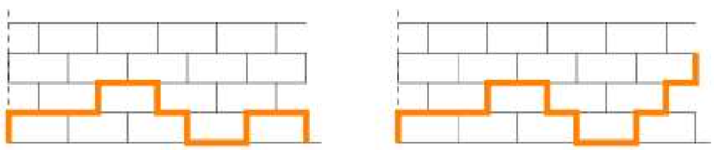

FIGURE 2. Two paths in a wall $NEEENEESESENEES$ and $NEEENEESESENENEN$. The left path ends on the x-axis, its width is 10, it has 15 steps, and its length is 16. The right path ends at ordinate 3, its width is 10, it has 16 steps, and its length is 17.

Bu çalışmanın ana hedefleri şunlardır:

1. **Duvar Yollarının Sayımı:** Duvar yollarının kombinatorik özelliklerini inceleyerek, bu yolların Fibonacci, Catalan ve Motzkin dizileriyle ilişkisini ortaya koymak.
2. **Birebir Eşlemeler (Bijection):** Duvar yolları ile klasik kombinatorik yapılar arasında birebir eşleştirme yöntemlerini uygulamak ve bu yöntemlerin matematiksel temelini açıklamak.
3. **Jeneratör Fonksiyonlar ve Kernel Yöntemi:** Duvar yollarının sayımında jeneratör fonksiyonlar ve kernel yönteminin kullanımını detaylandırarak bu araçların uygulamalı gücünü göstermek.
4. **Zirvesiz Motzkin Yolları:** Pathwall makalesinde öne çıkan zirvesiz (peakless) Motzkin yollarını inceleyerek bu yolların enumeratif özelliklerini ve genişletilmiş kombinatorik yapılara nasıl genellenebileceğini açıklamak.

Kombinatorik Bağlantılar: Catalan sayıları, özellikle Dyck yolları gibi kafes yapılarının enumerasyonunda merkezi bir rol oynar. Pathwall makalesinde, belirli bir genişliğe sahip ve x-eksenine sonlanan duvar yollarının, birebir bir eşleme ile Catalan sayılarına karşılık geldiği gösterilmiştir. Benzer şekilde, belirli bir adım sayısına sahip yolların Fibonacci sayıları ile ilişkilendirildiği ve bu yolların Motzkin yollarıyla bağlantılı olduğu ortaya konmuştur. Zirvesiz Motzkin yolları gibi daha karmaşık yapıların analizi ise, kombinatorik problemlerin çözümünde jeneratör fonksiyonlar ve kernel yönteminin gücünü bir kez daha ortaya koymaktadır.

Bu çalışmanın katkıları:

- Pathwall makalesinin sunduğu teorik bulguları derinlemesine inceleyerek, bu yolların kombinatorik yapıların genelleştirilmesine nasıl katkı sağladığını göstermek.
- Duvar yollarını klasik Fibonacci ve Catalan dizilerinin ötesine taşıyarak, bu yapıların yeni varyasyonlarını ve genişletmelerini analiz etmek.
- Uygulamalı matematik perspektifinden, bu yolların olası algoritmik çözümleri ve görselleştirme yöntemlerini önererek bu tür problemlerin daha geniş bir bağlamda ele alınmasını sağlamak.

Bu çalışma, Pathwall makalesinin bulgularını temel alarak, duvar yollarının ve bağlantılı kombinatorik yapıların daha geniş bir bağlama oturtulmasını hedeflemektedir. Ayrıca, jeneratör fonksiyonlar ve kernel yöntemi gibi güçlü matematiksel araçların kombinatorik problemlerin çözümündeki önemini vurgulamaktadır.

2-Preliminaries (Temel Kavramlar)

Bu bölümde, duvar yollarının analizi için gerekli olan temel matematiksel kavramlar ve yöntemler tanıtılacaktır. Çalışmamızın temeli, Fibonacci ve Catalan sayı dizilerinin özellikleri ile Motzkin yolları gibi kombinatorik yapılar arasındaki ilişkiler üzerine kuruludur.

1. Lattice Paths (Kafes Yolları)

Kafes yolları, bir düzlemde tanımlı belirli bir başlangıç ve bitiş noktası arasında hareket eden yolları ifade eder. Adım türleri genellikle şu şekilde sınıflandırılır:

- Yukarı adım: N=(0,1)N = (0, 1)N=(0,1)
- Aşağı adım: S=(0,−1)S = (0, -1)S=(0,−1)
- Yatay adımlar: E1=(1,0),E2=(2,0)E_1 = (1, 0), E_2 = (2, 0)E1=(1,0),E2=(2,0)

Duvar yolları, bu adımların bir kombinasyonu ile oluşturulan ve bir duvar ile sınırlandırılmış özel bir kafes yol sınıfıdır.

2. Fibonacci Sayıları

Fibonacci dizisi, F0=0, F1=1 başlangıç koşulları ve Fn=Fn−1+Fn−2 rekürrens ilişkisi ile tanımlanır. Fibonacci sayıları, belirli adım sayısına sahip yolların enumerasyonu için kritik bir rol oynar. Örneğin, belirli uzunluktaki zirvesiz yollar, Fibonacci sayıları ile ilişkilendirilir.

3. Catalan Sayıları

Catalan sayıları, özellikle Dyck yollarının enumerasyonunda kullanılır. Rekürrens ilişkisi ve kapalı formülasyonu şu şekildedir:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

4. Motzkin Yolları ve Zirvesiz Motzkin Yolları

Motzkin yolları, yukarı, yatay ve aşağı adımlardan oluşur ve y≥0y koşulunu sağlar. Zirvesiz Motzkin yollarında, bir U adımından hemen sonra bir D adımı gelemez. Bu yolların enumerasyonu için jeneratör fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir:

$$M(z) = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}.$$

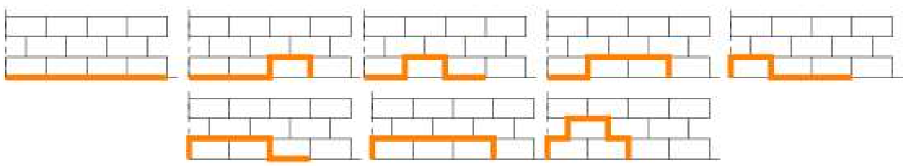

FIGURE 7. The eight paths of length 8 ending on the x-axis (generalized Catalan)

5. Generating Functions (Jeneratör Fonksiyonlar)

Jeneratör fonksiyonlar, kombinatorik dizilerin enumerasyonunu sağlayan araçlardır. Dyck yollarının jeneratör fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Pathwall makalesinde, çok değişkenli jeneratör fonksiyonlar kullanılarak duvar yollarının uzunluk, genişlik ve alan gibi istatistikleri analiz edilmiştir.

1. **fk(z):** Son adımı **yukarı (N)** olan ve genişliği k olan yolların üretici fonksiyonu.

   fk(z)=fk0(z)+fk1(z)

   - fk0(z): n+k≡0mod 2 şartını sağlayan yollar.
   - fk1(z): n+k≡1mod 2 şartını sağlayan yollar.

2. **gk(z):** Son adımı **aşağı (S)** olan ve genişliği k olan yolların üretici fonksiyonu.

   gk(z)=gk0(z)+gk1(z)

3. **hk(z):** Son adımı **yatay (E1 veya E2)** olan ve genişliği k olan yolların üretici fonksiyonu.

   hk(z)=hk0(z)+hk1(z)

Bu fonksiyonlar arasındaki **rekurans ilişkileri**, yolların sınıflandırılmasını ve sayılmasını kolaylaştırır. Örneğin:

- Yukarı adımla biten yollar (fk1), yatay adımlardan (hk) sonra gelebilir.
- Aşağı adımla biten yollar (gk0), yukarı adımlardan (hk1) türetilebilir.

İkili Üretici Fonksiyon: S(z,u)

- S(z,u), genişliği nnn ve ordinatı kkk olan yolların sayısını veren üretici fonksiyondur:

$$S(z,u) = \frac{r(1+u)}{z^2(s-u)}$$

Burada:

- r: Catalan sayılarına denk gelen bir köktür.
- s: Bunun tamamlayıcısıdır. (r + s = 1 / z ve rs = 1)

Seri Açılımı

- S(z,u) fonksiyonunun seri açılımının ilk birkaç terimi:

$$1 + u + (u^2 + u)z + (u^3 + u^2 + 2u + 2)z^2 + \dots$$

- Bu terimler, farklı genişlik ve ordinat değerlerine karşılık gelen yolların sayısını içerir.

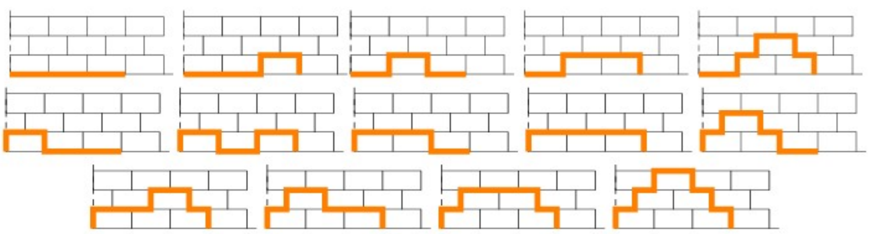

Figure: The 14 paths of width 6 ending on the x-axis.(Catalan number)

1. f(n,k): Yukarı Adımla (N) Biten Yolların Sayısı

$$f(n,k) = \frac{k}{n+1}\binom{n+1}{\frac{n+1-k}{2}} \quad \textit{if } n+k \not\equiv 0 \mod 2 \quad \textit{and} \quad 0 \ \textit{otherwise.}$$

- Eğer n+k toplamı çift değilse (n+k≢0 mod 2), f(n,k) bir olasılık katsayısı ve kombinasyon ile verilir.
- k/(n+1), yolların genişliğine (n) göre normalize edilmiş bir faktördür.
- C(n+1, (n+1-k)/2) belirli bir uzunluktaki yolların kombinatorik olarak sayısını temsil eder.

2. g(n,k): Aşağı Adımla (S) Biten Yolların Sayısı

6. Kernel Method (Kernel Yöntemi)

Kernel yöntemi, jeneratör fonksiyonların çözümünde kullanılan güçlü bir analitik tekniktir. Kombinatorik problemlerde sıklıkla, rekürrens ilişkilerden türetilen jeneratör fonksiyonların köklü ifadelerini sıfıra eşitleyerek çözümler sunar. Bu yöntem, özellikle çok değişkenli jeneratör fonksiyonlarının çözümünde kritik bir rol oynar.

Bir jeneratör fonksiyon, genellikle şu formda tanımlanır:

$$K(z,F) = 0,$$

burada K(z,F), jeneratör fonksiyonunun bir kernel terimini ifade eder. Kernel terimi sıfıra eşitlendiğinde, jeneratör fonksiyonunun çözümü numaratör teriminin denominatör terimine bölümüyle basitleştirilir ve bu sayede kombinatorik yapıların enumerasyonu sağlanır.

2. Dyck Yolları Örneği

Dyck yolları için jeneratör fonksiyonu C(z), şu rekürrens ilişkiyi sağlar:

$$C(z) = 1 + zC(z)^2.$$

Bu ifadeyi kernel yöntemiyle çözmek için K(z,C(z))K(z, C(z))K(z,C(z)) şu şekilde ifade edilir:

$$K(z, C(z)) = zC(z)^2 - C(z) + 1.$$

Kernel terimi sıfıra eşitlenerek, C(z)C(z)C(z) için çözüm bulunur:

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Bu çözüm, Dyck yollarının enumerasyonu için kullanılan Catalan sayılarıyla ilişkilidir:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

3. Zirvesiz Motzkin Yolları Örneği

Zirvesiz (peakless) Motzkin yolları, (0, 0) noktasından başlayarak yatay (H), yukarı (U), veya aşağı (D) adımları kullanarak (n, 0) noktasına ulaşan ve y≥0 koşulunu sağlayan yollar olarak tanımlanır. Zirvesiz olması, U adımının hemen ardından D adımı olmamasını gerektirir. Bu kısıtlama, bu yolların sayımını ve oluşturulmasını etkiler.

Zirvesiz Motzkin yollarının jeneratör fonksiyonu, şu rekürrens ilişkiyi sağlar:

$$M(z) = 1 + zM(z) + z^2 M(z)^2.$$

Burada kernel terimi şu şekilde ifade edilir:

$$K(z, M(z)) = z^2 M(z)^2 + zM(z) - M(z) + 1.$$

Kernel terimini sıfıra eşitleyerek M(z) için çözüm bulunur:

$$M(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}.$$

Bu fonksiyon, zirvesiz Motzkin yollarının enumerasyonu için kullanılabilir ve yolların her uzunluk için sayısını belirler.

4. Çok Değişkenli Kernel Fonksiyonları

Kernel yöntemi, çok değişkenli jeneratör fonksiyonlar için de uygulanabilir. Örneğin, Pathwall makalesinde duvar yolları için jeneratör fonksiyonu şu şekilde ifade edilmiştir:

$$S(z, u) = \sum_{n,k} a_{n,k} z^n u^k,$$

burada $a_{n,k}$, n-adımlı ve genişliği k olan yolların sayısını temsil eder. Kernel terimi, bu tür problemlerde şu şekilde kullanılır:

$$K(z, u, S) = zS^2 - S + u.$$

Kernel terimi sıfıra eşitlenerek, S(z,u) çözülür ve yolların farklı istatistikler altındaki dağılımları hesaplanabilir. Kernel yöntemi, çok değişkenli jeneratör fonksiyonlar için kapalı formda çözümler sağlar, karmaşık kombinatorik yapıların enumerasyonunu basitleştirir kombinatorik problemlerin asimptotik analizine olanak tanır.

3-Problem Definition and Objectives (Problem Tanımı ve Amaçlar)

Bu bölüm, çalışmamızın ele aldığı temel problemleri ve bu problemlerin çözümüne yönelik belirlediğimiz amaçları detaylandırmaktadır.

1. Problem Tanımı

Kafes yolları (lattice paths), N2 düzleminde belirli bir başlangıç noktasından bir bitiş noktasına ilerleyen ve belirli kurallara tabi adımlardan oluşan yollar olarak tanımlanır. Bu çalışmada, bir "duvar" ile sınırlandırılmış kafes yollarının kombinatorik özellikleri incelenmektedir. Problem, üç temel yapı üzerine odaklanır:

1. **Catalan Sayıları ve Duvar Yolları**:
   - Belirli bir genişliğe sahip ve xxx-eksenine sonlanan duvar yolları, Catalan sayıları ile birebir eşleşmektedir.
   - Bu yolların sayımı, Dyck yolları gibi klasik kombinatorik yapılarla ilişkilendirilmiştir.
2. **Fibonacci Sayıları ve Duvar Yolları**:
   - Adım sayısına göre sınırlı olan yollar, Fibonacci sayıları ile ilişkilendirilmiştir. Bu yolların birebir eşleşmeleri teorik temellere dayandırılmıştır.
3. **Zirvesiz Motzkin Yolları**:
   - Duvar yollarının bir alt kümesi olan zirvesiz Motzkin yolları, bu çalışmada ele alınmıştır. Bu yollar, Motzkin sayıları ile birebir eşleşerek farklı kombinatorik problemlerin çözümüne olanak tanır.

2. Çalışmanın Ana Hedefleri

Bu çalışmanın temel amacı, Pathwall makalesinde sunulan problemlerin ve çözümlerin kapsamını genişleterek, kombinatorik matematikte duvar yollarının analizi üzerine özgün katkılar sunmaktır. Belirlenen hedefler şunlardır:

1. **Kombinatorik İlişkilerin İncelenmesi**:
   - Duvar yolları ile Catalan, Fibonacci ve Motzkin dizileri gibi klasik kombinatorik yapılar arasındaki ilişkileri açıklamak.
   - Özellikle birebir eşleme (bijection) yöntemlerini kullanarak bu ilişkilerin teorik temellerini vurgulamak.
2. **Jeneratör Fonksiyonlarının Kullanımı**:
   - Duvar yollarının genişlik, uzunluk ve alan gibi istatistiksel özelliklerini analiz etmek için jeneratör fonksiyonların nasıl kullanılacağını göstermek.
   - Kernel yöntemi gibi analitik araçları uygulayarak bu fonksiyonları çözmek.
3. **Zirvesiz Motzkin Yollarının Analizi**:

- Zirvesiz Motzkin yollarının enumerasyonuna odaklanmak ve bu yolların diğer kombinatorik yapılara genişletilebilirliğini araştırmak.
- Bu yolların genelleştirilmiş varyasyonları ile potansiyel uygulamalarını incelemek.

4. **Asimptotik ve Sayısal Analiz**:
   - Duvar yollarının uzunluk, genişlik ve alan gibi parametrelere göre dağılımlarını analiz etmek.
   - Bu analizlerin kombinatorik yapıların asimptotik davranışlarını anlamaya katkı sağladığını göstermek.

4-Methodology (Yöntem)

Bu bölümde, duvar yollarının kombinatorik analizi için kullanılan teorik araçlar ve sayısal yöntemler detaylandırılacaktır. Çalışmamızın ana ekseninde jeneratör fonksiyonlar ve kernel yöntemi yer almakta olup, bu araçlar hem teorik analiz hem de sayısal çözümlerle desteklenmiştir. Ayrıca, diğer makalelerdeki bulgularla bağlantılar kurularak yöntemlerin genişletilebilirliği tartışılmıştır.

1. Jeneratör Fonksiyonlar ve Kombinatorik Yapılar

Jeneratör fonksiyonlar, bir kombinatorik dizinin ana_nan terimlerini bir fonksiyonun katsayıları olarak ifade etmek için kullanılan araçlardır. Bu çalışmada, duvar yollarının genişlik, uzunluk ve alan gibi istatistiksel özelliklerini analiz etmek için jeneratör fonksiyonlar kullanılmıştır.

1.1 Dyck Yolları ve Catalan Sayıları

- **Tanım**: Dyck yolları, bir başlangıç noktasından (0 ,0) bir bitiş noktasına (n,n) kadar ilerleyen ve y≥x koşulunu sağlayan kafes yollarıdır. Bu yolların sayısı Catalan sayıları ile ifade edilir: