Curso de Matemática e Tecnologia

Prof. Dr. Edson F. Fumachi

Material Independente

fumachi.mat.br

Primeira Versão, Janeiro de 2020; Segunda Versão, Maio de 2020; Terceira Versão, Agosto de 2020.

Sobre o Autor

O Prof. Dr. Edson Fernando **Fumachi** nasceu em Itatiba-SP em 18 de Maio de 1983. Estudou em escolas públicas até o ensino médio. Ingressou no ano 2001 no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade São Francisco, obtendo seu título em 2003. Em 2004 começou a trabalhar no ensino superior da mesma faculdade na qual se graduou. No ano de 2005 assumiu a posição de professor PEB-II do Governo do Estado de São Paulo na disciplina de Matemática. Exonerou do cargo em 2007 para dar sequência no ensino superior. Trabalhou como professor do ensino médio público e privado; no ensino médio privado atuou como professor de Matemática e Física. Em 2007 começou seus estudos como aluno de matéria isolada no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, localizado em São José dos Campos-SP. Em 2009 entrou no mesmo instituto como aluno regular do Curso de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais área de concentração em Ciência e Tecnologia dos Materiais e Sensores. Em 2011 defendeu sua Dissertação intitulada *Simulação do fluxo reacional de um reator de filamento quente através da simulação direta de Monte Carlo*. Consecutivamente, em 2011, ingressou no Curso de Doutorado na mesma área do mesmo instituto. Em 2017 defendeu seu Doutorado intitulado *Desenvolvimento de um tubo de queda livre para o modelamento e otimização do processo de solidificação de ligas eutéticas de bismuto-estanho em ambiente de microgravidade*. Tem experiência no meio empresarial através de consultorias realizadas na área de telecomunicações e desenvolvimento de algoritmos para otimização de processos e redução de custos. Tem amplo conhecimento em programação de computadores nas linguagens ForTran77, C e Python. Desenvolve materiais didáticos (como este!) em diversos formatos e linguagens (LaTeX). Desenvolve conteúdos educacionais e os disponibiliza em plataformas digitais, Youtube e Facebook, sob o pseudônimo Doutor Exatas.

Prefácio

Este material foi elaborado exclusivamente pelo autor e tem como objetivo atender alunos dos mais variados cursos, Administração, Ciências Contábeis, Tecnólogos, Matemática, Engenharia entre outros. Este material está ***continuamente em desenvolvimento*** e é distribuído em partes, ou seja, apenas os capítulos necessários aos estudantes de uma determinada disciplina. Portanto, se quiser a versão mais nova e completa, contate o autor enviando um e-mail para *effumachi@gmail.com*.

Os exemplos que possuem uma versão em vídeo possuirão o símbolo e um *link* que encaminhará ao canal do "Doutor Exatas", no Youtube (`https://www.youtube.com/channel/UCqGy3MbhdZsWGGBBg7yUGRw`). O leitor pode, ainda, encontrar o conteúdo no Facebook (`https://www.facebook.com/doutorexatas/`).

A abordagem adotada neste material é fornecer um pouco de teoria (porém suficiente), e em seguida com a resolução de exemplos.

Bons estudos.

Sumário

I Funções

1. Revisão sobre conjuntos numéricos e equações

1.1 Introdução

O entendimento sobre conjuntos numéricos é fundamental pois através deste conhecimento é possível aplicar corretamente algoritmos e entender suas limitações. Uma situação, muito comum, quando se aplica a matemática em outras ciências é entender o significado daquele resultado obtido no problema real proposto.

1.2 Conjuntos numéricos

Os conjuntos numéricos têm aplicações desde tempos remotos e foram desenvolvidos ao longo do tempo para contemplar as possibilidades e soluções de problemas práticos.

Imagine uma situação hipotética na qual um indivíduo possua dezenas de animais por exemplo, dezenas de vacas leiteiras. Um vizinho deste indivíduo também possui dezenas de vacas leiteiras. Ambos compartilham o mesmo local para levarem suas vacas para se alimentarem. Ambos vivem numa época em que não existe um tipo formal de escrita, sequer números! Ao final do dia eles retornam para suas "residências"juntamente com seus animais.

O leitor pode imaginar que em algum momento isso possa gerar alguma confusão, não é? A confusão é que algum dos dois possa ter, ao final do dia, menos ou mais animais que realmente possuíam ao sair pela manhã. Este tipo de problema poderia ter acontecido e precisaria de uma solução.

Talvez, a solução encontrada seja uma espécie de contagem através de comparação. Para cada animal existente em sua casa, haveria uma "pedra". Assim, ao sair pela manhã, cada vaca que deixasse o estaleiro uma pedra seria adicionada a um tipo de bolsa rudimentar que o indivíduo carregaria consigo durante a viagem.

Ao voltar para sua casa, a comparação aconteceria novamente mas de modo inverso, ou seja, para cada vaca que entrasse no estaleiro, uma pedra seria retirada da bolsa. Deste modo, poderiam acontecer 3 situações possíveis, com a quantidade de pedras da bolsa:

1. Sobrar pedras: isso indicaria que algumas vacas não chegaram à sua casa;
2. Faltar pedras: isso indicaria que ele estava com mais vacas, possivelmente sendo alguma de seu vizinho;
3. Não sobrar pedras: todas as vacas que saíram, retornaram e se juntaram no estaleiro.

Esse processo funcionaria bem, até que o número de animais se tornasse grande o suficiente para ser inviável carregar todas as pedras em sua bolsa. Um sistema de contagem/registro seria interessante!

Desse modo, é possível pensar na aplicabilidade do conjunto dos *Número Naturais*, ou seja, da natureza!

O conjunto dos *Número Naturais*, será definido como segue:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

É possível verificar um ponto de divergência em relação a outros autores de livros de matemática: o número 0 (zero) não será definido como número natural pois dificilmente o leitor ouvirá alguém dizendo *"Eu possuo ZERO Ferrari!"* ou algo do tipo *"Eu tenho ZERO reais na carteira!"*.

A evolução continuou a acontecer e a necessidade de novos conjuntos numéricos foram aparecendo. A ideia de números negativos, comum para a atualidade nas relações financeiras, podem ser representados pelo conjunto dos *Números Inteiros* e pode ser definido como:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

Ressalta-se que o número 0 (zero), foi incorporado neste momento no conjunto entretanto, provavelmente ele foi o último algarismo a ser criado. O leitor pode fazer pesquisas adicionais para saber sobre a história do número 0.

Pagamento de impostos sobre terras, construções de prédios, entre outros, levaram a humanidade a desenvolver um novo conjunto de números, os *Números Racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

No entanto, esses números não podiam descrever todas as situações possíveis. Um exemplo disso é o famoso problema proposto por Pitágoras juntamente com seu teorema.

Teorema 1.2.1 — Teorema de Pitágoras. Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Porém, dado um triângulo retângulo com catetos iguais a 1, tem-se:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 1^2 + 1^2 \\ c^2 &= 1 + 1 \\ c^2 &= 2 \\ c &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Neste ponto, começaram os problemas para Pitágoras. Até o momento, não existia solução para descrever o número $\sqrt{2}$. Muito tempo passou e esse tipo de número, os números que não podem ser escritos de modo *Racional*, foram definidos como *Números Irracionais*. Alguns exemplos desses números pode ser visto abaixo:

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \mathrm{e}, \cdots\}$$

O conjunto dos *Números Irracionais* é infinito!

Assim, tudo parecia estar bem resolvido pois a **união** entre os *Números Racionais* e *Números Irracionais* foi definido como *Números Reais*.

Mas haveria um tipo de problema que poderia deixar, novamente, os matemáticos com os cabelos em pé. Seja a equação do segundo grau $x^2 + 4 = 0$ e calcule as suas raízes:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \qquad (1.1) \\ x^2 + 4 - 4 &= 0 - 4 \\ x^2 + 0 &= -4 \\ x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} \end{aligned}$$

O leitor pode concluir, dependendo de sua formação matemática anterior, que este resultado, simplesmente, não existe. O que está profundamente equivocado!

A solução para este tipo de problema veio através da criação de um conjunto de números chamado *Números Complexos* com a seguinte definição:

$$i = \sqrt{-1}$$

Enfim, o Problema 1.1 fica:

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= \pm\sqrt{4 \cdot (-1)} \\ x &= \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \\ x &= \pm 2 \cdot i \end{aligned}$$

De modo geral, a definição dos *Números Complexos* é:

$$\mathbb{C} = \{a + bi, a \wedge b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$$

1.3 Resolução de equações

O leitor deve ter verificado a resolução do Problema 1.1 que apareceu um -4 na resolução. Será explicado os conceitos básicos na resolução deste problema:

■ **Exemplo 1.1** Calcule a raíz da equação do primeiro grau, $2x + 4 = 10$.
Solução:
Calcular a raíz dessa equação, significa determinar o valor de x de modo que a *igualdade* aconteça. Assim, inicia-se o processo copiando a equação dada no enunciado:

$$2x + 4 = 10$$

Para determinar o valor da variável x faz-se necessário isolar a variável em um dos lados da equação. Neste caso, será isolado do lado esquerdo da equação. O leitor pode ter imaginado que seria apenas *passar o 4 para o outro lado com o sinal invertido*, mas se o sinal é de uma *igualdade*, então passar algo de um lado para outro *desequilibraria* a equação e o sinal de $=$ não seria conveniente.

O ***correto*** é adicionar elementos em *ambos os lados da igualdade*. Neste caso, percebe-se que o número $+4$ está do mesmo lado que a variável, logo ele está *"atrapalhando"*, no entanto, se for adicionado -4 em ambos os lados da equação, resultará:

$$2x + 4 {\color{red}-4} = 10 {\color{red}-4}$$

A escolha do -4 não foi aleatória. No conjunto dos Número Reais, *todo elemento (no caso*

$+4$) *operado (operação + usual) com seu simétrico (-4) resulta no elemento neutro (0 - zero) da operação (+)*, logo:

$$2x + 0 = 6$$

Como visto acima, 0 é o *elemento neutro da operação de soma*, logo, qualquer elemento operado com o 0, resultado nele mesmo, assim:

$$2x = 6$$

É popularmente conhecido, neste passo, *"se está multiplicando, então passa dividindo"*, mas acredito que o leitor queira saber o conceito correto, não é mesmo? A raiz de uma equação está relacionada com o valor de x e não de $2x$, logo, se multiplicar ambos os lados da equação por $\frac{1}{2}$ ter-se-á:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \qquad 2x = 6 \qquad \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Novamente, o $\frac{1}{2}$ não foi escolhido aleatoriamente, ele foi escolhido por ser o *elemento inverso do* 2. No conjunto dos números Reais, *todo elemento (no caso, 2) operado ($\cdot$) com seu inverso ($\frac{1}{2}$) resulta no elemento neutro (1) da operação (multiplicação, $\cdot$)*, assim:

$$1 \cdot x = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

Como o 1 é o *elemento neutro da multiplicação*, então $1 \cdot x = x$, logo:

$$x = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

A multiplicação de frações é feita através da multiplicação entre os *numeradores* e os *denominadores* de cada fração, logo:

$$x = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{6}{2}$$

Assim, o número que multiplicado por 2 (denominador) resulta em 6 (numerador) é o 3, então:

$$x = 3$$

Para verificar se o resultado obtido está correto basta substituir o valor de x calculado na equação do enunciado, então:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 10 \\ 2 \cdot 3 + 4 &= 10 \\ 6 + 4 &= 10 \\ 10 &= 10 \qquad \text{Verdade!} \end{aligned}$$

Assim, $x = 3$ é a raíz da equação. É possível representar a solução da equação assim: S = {3}.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=JY6BJWb1PVY`

■

Os conceitos abordados no exemplo é de fundamental importância para o entendimento da matemática, tornando-a menos *"complicada"* conforme o leitor avança nos estudos. O leitor poderá ver alguns outros conceitos, tal como regras de sinais (▶) no link `https://www.youtube.com/watch?v=IykgcfYnsaQ`.

Todo este material possuirá, como mencionado no Prefácio, uma breve teoria seguido por exemplos resolvidos; com o mesmo nível de detalhamento do exemplo anterior.

1.4 Exercícios

Exercício 1.1 Faça uma representação gráfica dos conjuntos numéricos. ■

Exercício 1.2 Resolva a equação $2x - 5 = 0$ considerando os conjuntos:

a. $\mathbb{N}$
b. $\mathbb{Z}$
c. $\mathbb{Q}$
d. $\mathbb{R}$
e. $\mathbb{C}$

■

Exercício 1.3 Determine os conjuntos Domínio e Imagem para cada uma das funções abaixo:

a. $3x + 4 = 0$
b. $f(x) = x^2 + 6$
c. $f(x) = \frac{1}{x}$
d. $f(x) = \sqrt{2x}$
e. $f(x) = \sqrt{-4x}$
f. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}$

■

Exercício 1.4 Determine matematicamente se $f(x) = 3x + 6$ é crescente ou decrescente. ■

2. Funções

2.1 Introdução

O estudo de funções é importante entretanto, no dia a dia da maior parte das pessoas, este estudo não faz sentido, num primeiro momento. Porém não é difícil imaginar que em toda a vida de uma pessoa ela esteja direta, ou indiretamente, ligada com as funções. Desde a elaboração de uma receita de um bolo, a quilometragem que um determinado veículo pode fazer com um tanque de combustível, a *Receita*, o *Custo* e o *Lucro* de uma empresa.

Considere os ingredientes necessários para se fazer um (uma receita) bolo (hipotético):

- 4 ovos;
- 1 litro de leite;
- 1 kg de farinha.

Como mencionado, os ingredientes acima estão relacionadas para se fazer *uma receita* ou *um bolo*. Se o indivíduo deseja fazer *duas receitas*, ou *dois bolos*, a quantidade dos ingredientes deve dobrar! Assim:

- 4 ovos $\times$ 2 $\Rightarrow$ 8 ovos;
- 1 litro de leite $\times$ 2 $\Rightarrow$ 2 litros de leite;
- 1 kg de farinha $\times$ 2 $\Rightarrow$ 2 kg de farinha.

Se uma empresa fabrica um produto por um custo de R$10,00 a unidade e o vende a R$15,00 a unidade e tem custos de aluguel, água, energia elétrica, entre outros que totalizam R$1000,00 por mês é possível escrever sua função *Custo, Receita e Lucro* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}(x) &= 15,00 \cdot x \\
\mathrm{C}(x) &= 10,00 \cdot x + 1000,00 \\
\mathrm{L}(x) &= 5,00 \cdot x - 1000,00
\end{aligned}$$

onde x representa a quantidade de itens produzidos e vendidos.

2.2 Domínio, imagem, relação e função

Esta seção se inicia com a ideia de *Relação*. A relação deve acontecer entre dois conjuntos numéricos, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, por exemplo.

A *Relação* poderá receber o nome de *Função* se, e somente se, todo elemento do conjunto de partida ($\mathbb{A}$, por exemplo), tenha um, apenas um, correspondente no conjunto de destino ($\mathbb{B}$), através de uma lei. Matematicamente, uma função pode ser escrita assim:

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}, \forall x \in \mathbb{A}, \exists y \in \mathbb{B} \ / \ y = f(x)$$

Vale notar que x é a *variável independente* e y é a *variável dependente* pois depende de x. De modo geral, o primeiro conjunto da definição de uma função está relacionado com a *variável independente*, pois é o conjunto de partida e a *variável dependente* está relacionada com o segundo conjunto, pois é o conjunto de chegada.

Como o objetivo deste material é trabalhar com funções, apenas, não será abordado as relações de modo geral, sendo assim deve ser definido o Domínio (D) e Imagem (Im) de uma função (f), sendo:

Definição 2.2.1 — Domínio de uma função. O domínio de uma função é um conjunto numérico com os valores possíveis que podem ser atribuídos à *variável independente*.

Definição 2.2.2 — Imagem de uma função. A imagem de uma função é um conjunto numérico contendo o resultado de cada elemento do domínio aplicado na função.

■ **Exemplo 2.1** Considere os conjuntos $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{B} = \{2, 4, 6, 8\}$ e a função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B} \ / \ y = f(x) = 2x$. Determine o Domínio e a Imagem de f.

Solução:

O conjunto de partida é o conjunto $\mathbb{A}$ então, ele é o *Domínio* da função ($\mathrm{D}(f)$). Os elementos do domínio são atribuídos à *variável independente*, x.

Os elementos da *Imagem* da função f são obtidos da seguinte maneira:

- $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
- $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 1 = 4$
- $x = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 1 = 6$

Assim, o conjunto *Imagem* é: $\mathrm{Im} = \{2, 4, 6\}$. Verifica-se que o conjunto imagem não é o conjunto $\mathbb{B}$ pois são os elementos que possuem um elemento x do Domínio. Como o 8 do conjunto $\mathbb{B}$ não possui um antecessor do conjunto $\mathbb{A}$, ele não faz parte da Imagem. ■

As funções, de modo geral, tem o conjunto dos *Números Reais* como *Domínio* e *Imagem*, porém existem funções que o Domínio deve ser determinado, ou seja, será um subconjunto dos Reais.

■ **Exemplo 2.2** Determine o Domínio e a Imagem da função $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Solução:

Determinação do Domínio: É possível verificar que a função possui uma divisão e a variável independente está no denominador. Este tipo de situação requer que o *denominador seja* *diferente de zero*, pois, caso contrário, haveria uma indeterminação. Seguindo o analisado, é possível fazer:

$$x - 3 \neq 0$$
$$x - 3 + 3 \neq 0 + 3$$
$$x \neq 3$$

Logo, $\mathrm{D}(f) = (-\infty, 3) \wedge (3, +\infty)$ ou $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ ou $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 3\}$

Determinação da Imagem: Para a determinação da imagem é necessário analisar os extremos do domínio. Assim:

- $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 0$: Se x aproxima-se do infinito negativo, o denominador torna-se um número muito grande e, consequentemente, a divisão aproxima-se de zero;
- $x \to -3^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$: Se x aproxima-se do três negativo pela esquerda, o denominador torna-se um número muito pequeno negativo e, consequentemente, a divisão aproxima-se de menos infinito;
- $x \to -3^+ \Rightarrow f(x) \to \infty$: Se x aproxima-se do três negativo pela direita, o denominador torna-se um número muito pequeno positivo e, consequentemente, a divisão aproxima-se de mais infinito;
- $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to 0$: Se x aproxima-se do infinito positivo, o denominador torna-se um número muito grande e, consequentemente, a divisão aproxima-se de zero.

Do exposto anteriormente, a Imagem nunca assumirá o valor 0 (zero), assim a imagem será $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$ ou $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ ■

Muitos símbolos foram usados no exemplo anterior porém, os mesmos, serão explicados posteriormente no Capítulo **??**.

■ **Exemplo 2.3** Determine o Domínio e a Imagem da função $f(x) = \sqrt{x+2}$.

Solução:
Domínio: Os valores que podem ser colocados na função são valores positivos (funções reais) e, nesse caso, o zero. Valores negativos dentro da raíz quadrada resultam em resultados pertencentes aos *Número Complexos*, logo:

$$x + 2 \geq 0$$
$$x + 2 - 2 \geq 0 - 2$$
$$x \geq -2$$

Assim, $\mathrm{D}(f) = [-2, +\infty)$ ou $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq -2\}$ ■

2.3 Raízes de uma função

As raízes de uma função $f(x)$ pode ser calculada ao fazer $f(x) = 0$, ou seja, são os pontos em que a função "corta"o eixo da variável independente. Nos casos de polinômios, o número de raízes é igual ao maior grau da função. Cada tipo de função possui uma metodologia diferente para o cálculo das suas raízes assim, será visto nas seções subsequentes.

2.4 Funções de uma variável real

Difíceis são os processos que dependem apenas de uma variável, ou seja, ao estudar o consumo de combustível de um veículo não pode ser pensado somente na qualidade do combustível, mas deve ser pensado na alinhamento e pressão dos pneus, da temperatura, das condições da rodovia, das manutenções, da qualidade do óleo do motor, do modo como o veículo é conduzido (esta variável bem estudada resulta em economia de 30% no consumo de combustível), entre outros fatores.

Como visto na seção anterior, "geralmente"se atribui x a *variável independente* e y ou $f(x)$ a *variável dependente*, assim, tem-se duas variáveis. Mas como é possível ter duas variáveis sendo que a seção trata de *funções de uma variável*?

A resposta é simples: Funções de uma variável é o nome dado às funções que possuem uma, e apenas uma, *variável independente*.

■ **Exemplo 2.4** A área do quadrado pode ser representada por uma função de uma variável. Como a área do quadrado é a multiplicação dos dois lados, e os quatro lados são iguais, então:

$$A_Q(l) = l \cdot l = l^2$$

onde l é a medida do lado do quadrado. ■

■ **Exemplo 2.5** A área de um retângulo é uma função de duas variáveis, pois sua área é a multiplicação de dois lados consecutivos. Como os lados do retângulo são iguais aos seus lados opostos, e não necessariamente precisam ter os quatro lados iguais, então:

$$A_R(a,b) = a \cdot b$$

onde a e b são as medidas dos lados de um retângulo. ■

2.5 Funções lineares

As *funções lineares* ou *funções do primeiro grau* ou *funções de grau um* são funções do tipo:

$$f(x) = ax + b$$

Onde:
- f: nome da função;
- x: variável independente;
- $f(x)$: variável dependente;
- a: coeficiente angular;
- b: coeficiente linear.

Um ponto importante para observar é o coeficiente angular. Este valor permite identificar se a função é *crescente* $(a > 0)$ ou *decrescente* $(a < 0)$. Caso $a = 0$, tem-se uma função constante igual a $f(x) = b$, ou seja, para funções do primeiro grau a condição é que $(a \neq 0)$

De modo geral, uma função $f(x)$ é crescente quando para quaisquer dois valores x_1 e x_2 pertencentes ao $\mathrm{Dom}(f)$, se $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ então a função será decrescente.

■ **Exemplo 2.6** Determine se a função $f(x) = 2x + 4$ é crescente ou decrescente.
Solução:
É possível verificar que o coeficiente angular é igual a 2 e é maior do que zero, no entanto, tomando $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ tem-se $f(x_1) = f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$ e $f(x_2) = f(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$, assim, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ logo, $f(x)$ é crescente.
■

■ **Exemplo 2.7** Determine se a função $f(x) = -x + 4$ é crescente ou decrescente.
Solução:
É possível verificar que o coeficiente angular é igual a -1 e é menor do que zero, no entanto, tomando $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ tem-se $f(x_1) = f(0) = -1 \cdot 0 + 4 = 4$ e $f(x_2) = f(2) = -1 \cdot 2 + 4 = 2$, assim, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ logo, $f(x)$ é decrescente.
■

2.6 Raíz de funções lineares

Como mencionado anteriormente, para determinar a raíz de um função é necessário fazer $f(x) = 0$. Como o maior grau das funções lineares é igual a "um"então, ter-se-á, apenas, uma raíz.

■ **Exemplo 2.8** Calcule a raíz da função $f(x) = -x + 4$
Solução:
Fazendo $f(x) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x + 4 &= 0 \\ -x + 4 - 4 &= 0 - 4 \\ (-1) \cdot \quad -x &= -4 \quad \cdot (-1) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Assim, $x = 4$ é a raíz da função $f(x) = -x + 4$. ■

2.7 Gráficos de funções lineares

Em construção

2.8 Funções quadráticas

As *funções quadráticas* ou *funções do segundo grau* ou *funções de grau dois* são funções do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Onde:
- f: nome da função;
- x: variável independente;
- $f(x)$: variável dependente;
- a, b e c: são coeficientes.

Um ponto importante para observar é o coeficiente a. Este valor permite identificar se a função possui *concavidade para cima* ($a > 0$) ou *concavidade para baixo* ($a < 0$). Caso $a = 0$, tem-se uma função linear igual a $f(x) = bx + c$, ou seja, para funções do segundo grau a condição é que ($a \neq 0$).

2.9 Raízes de funções quadráticas

Para o caso de funções do segundo grau, as raízes podem ser calculadas através da, tão conhecida, fórmula de Bháskara, que é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

O termo dentro da raíz quadrada, $b^2 - 4ac$, é conhecido como delta Δ.

■ **Exemplo 2.9** Calcule a raíz da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

O próximo passo é identificar os valores dos coeficientes a, b e c. Para a equação acima, tem-se:

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

Determinado os valores dos coeficientes, calcula-se o valor de Δ:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \\ &= (-5) \cdot (-5) - 24 \\ &= 25 - 24 \\ \Delta &= 1 \qquad (\text{Caso1} : \Delta > 0) \end{aligned}$$

Nesta parte, deverá ser substituído os valores dos coeficientes e o Δ calculado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \\ x_1 &= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 &= \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

Assim, as raízes podem ser representadas através do conjunto solução $\mathbb{S} = \{2, 3\}$

■

■ **Exemplo 2.10** Calcule a raíz da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

O próximo passo é identificar os valores dos coeficientes a, b e c. Para a equação acima, tem-se:

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 4$$

Determinado os valores dos coeficientes, calcula-se o valor de Δ:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= (-4) \cdot (-4) - 16 \\ &= 16 - 16 \\ \Delta &= 0 \qquad (\text{Caso2} : \Delta = 0) \end{aligned}$$

Nesta parte, deverá ser substituído os valores dos coeficientes e o Δ calculado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm 0}{2} \Rightarrow \\ x_1 &= \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 &= \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

Assim, as raízes podem ser representadas através do conjunto solução $\mathbb{S} = \{2\}$

■

■ **Exemplo 2.11** Calcule a raíz da função $f(x) = x^2 - 6x + 13$

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 6x + 13 &= 0 \end{aligned}$$

O próximo passo é identificar os valores dos coeficientes a, b e c. Para a equação acima, tem-se:

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 13$$

Determinado os valores dos coeficientes, calcula-se o valor de Δ:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 \\
&= (-6) \cdot (-6) - 52 \\
&= 36 - 52 \\
\Delta &= -16 \qquad (\text{Caso3} : \Delta < 0)
\end{aligned}
$$

Nesta parte, deverá ser substituído os valores dos coeficientes e o Δ calculado:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-(-6) \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} \xRightarrow{1.1} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} \\
&= \frac{6 \pm 4 \cdot i}{2} \Rightarrow \\
x_1 &= \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i \\
x_2 &= \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i
\end{aligned}
$$

Assim, as raízes podem ser representadas através do conjunto solução $\mathbb{S} = \{3 \pm 2i\}$

■

2.10 Gráficos de funções quadráticas

Os gráficos de funções de segunda grau podem apresentar 6 formas diferentes, que são:

- Caso 1: $a > 0$ e $\Delta > 0 \Rightarrow$ Parábola com concavidade para **cima** e duas **raízes reais distintas**;
- Caso 2: $a > 0$ e $\Delta = 0 \Rightarrow$ Parábola com concavidade para **cima** e duas **raízes reais iguais**;
- Caso 3: $a > 0$ e $\Delta < 0 \Rightarrow$ Parábola com concavidade para **cima** e duas **raízes complexas**;
- Caso 4: $a < 0$ e $\Delta > 0 \Rightarrow$ Parábola com concavidade para **baixo** e duas **raízes reais distintas**;
- Caso 5: $a < 0$ e $\Delta = 0 \Rightarrow$ Parábola com concavidade para **baixo** e duas **raízes reais iguais**;
- Caso 6: $a < 0$ e $\Delta < 0 \Rightarrow$ Parábola com concavidade para **baixo** e duas **raízes complexas**;

Para fazer o gráfico é ncessário conhecer alguns pontos fundamentais da função:

1. **Raízes**: Todas as funções do segundo grau possuem raízes, no entanto, as raízes complexas não podem ser representadas no plano real;
2. **Vértice**: Todas as funções do segundo grau possuem vértices. Os vértices nessas funções representam um ponto de **extremo**, que pode ser **máximo** ($a < 0$) ou **mínimo** ($a > 0$);
3. **Intercepto com o eixo vertical**: Este valor implica onde a função *"corta o eixo y"*.

■ **Exemplo 2.12** (Caso 1) Determine o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Solução:

Essa função é a mesma do Exemplo 2.9, ou seja, as raízes já foram determinadas ($x_1 = 2$ e $x_2 = 3$), bem como o valor do Δ $(= 1)$.

Assim, é necessário determinar o Vértice. A determinação do mesmo pode ser feita usando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$$
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-1}{4 \cdot 1} = \frac{-1}{4}$$

Portanto, as coordenadas do Vértice são $\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.[a]

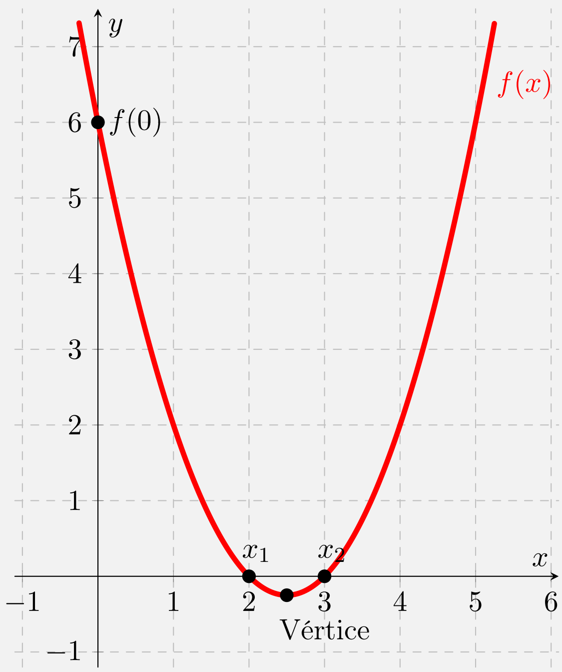
O último passo é verificar o intercepto com o eixo vertical, ou seja, determinar o valor de $f(x)$ quando $x = 0$, assim:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6$$
$$f(0) = 6$$

Unindo as informações:

1. **Raízes**: $x_1 = (2, 0)$ e $x_2 = (3, 0)$
2. **Vértice**:$\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4}\right)$
3. **Intercepto**: $(0, 6)$

O gráfico fica:



■

[a]Um modo mais fácil de representar no plano é usar a representação decimal assim, as coordenadas do vértice ficará $(2,5; -0,25)$.

■ **Exemplo 2.13** (Caso 2) Determine o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Solução:

Essa função é a mesma do Exemplo 2.10, ou seja, as raízes já foram determinadas $(x_1 = x_2 = 2)$, bem como o valor do Δ $(= 0)$.

Assim, é necessário determinar o Vértice (V). A determinação do mesmo pode ser feita usando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-0}{4 \cdot 1} = 0$$

Portanto, as coordenadas de V são $(2, 0)$.

O último passo é verificar o intercepto com o eixo vertical, ou seja, determinar o valor de $f(x)$ quando $x = 0$, assim:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 4 \\ x = 0 \Rightarrow f(0) &= 0^2 - 4 \cdot 0 + 4 \\ f(0) &= 4 \end{aligned}$$

Unindo as informações:

1. **Raízes**: $x_1 = x_2 = (2, 0)$
2. **Vértice**: $(2, 0)$
3. **Intercepto**: $(0, 4)$

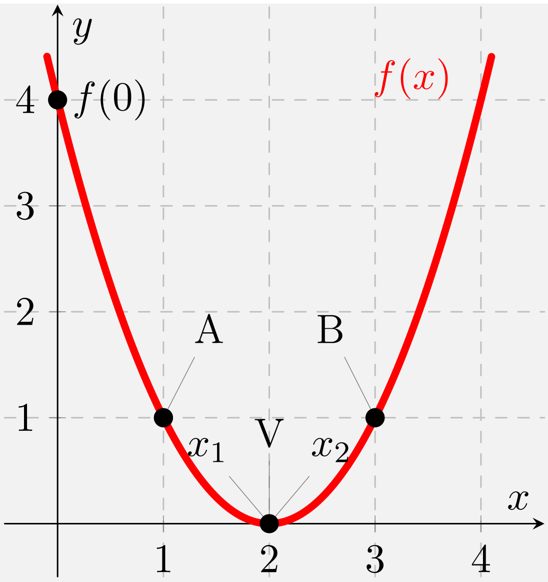
Das informações anteriores, é possível verificar que as raízes (x_1 e x_2) têm a mesma coordenada que V, ou seja, $(2, 0)$. O processo, nesse caso, fica um pouco complicado pois, na realidade, existem dois pontos apenas: o intercepto e o ponto $(2, 0)$.

Para resolver esse problema, deve ser escolhido dois valores para x, calcular suas imagens $(f(x))$ e usá-los como complemento[a]. Assim, escolhendo $x_3 = 1$ e $x_4 = 3$, tem-se:

$$x_3 = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1$$
$$x_4 = 3 \Rightarrow f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1$$

É possível chamar essas coordenadas calculadas, de pontos, A e B, sendo assim, $A = (1, 1)$ e $B = (3, 1)$

Logo, o gráfico fica:



∎

[a]Sugestão: sabendo o x_v, neste exemplo $x_v = 2$, escolhe-se dois valores para x (x_3 e x_4, por exemplo), de modo que $|x_v - x_3| = |x_v - x_4|$. Essa escolha baseia-se no fato de que, pelo vértice é possível imaginar um *eixo de simetria*.

∎ **Exemplo 2.14** (Caso 3) Determine o gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 13$

Solução:

Essa função é a mesma do Exemplo 2.11, ou seja, as raízes já foram determinadas ($x_1 = 3-2i$ e $x_2 = 3 + 2i$), bem como o valor do Δ ($= -16$).

A determinação do vértice pode ser feita usando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(-16)}{4 \cdot 1} = \frac{16}{4} = 4$$

Portanto, as coordenadas do Vértice são $(3, 4)$).

O último passo é verificar o intercepto com o eixo vertical, ou seja, determinar o valor de $f(x)$ quando $x = 0$, assim:

$$f(x) = x^2 - 6x + 13$$
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 13$$
$$f(0) = 13$$

Unindo as informações:

1. **Raízes**: $x_1 = 3 - 2i$ e $x_2 = 3 + 2i$
2. **Vértice**: $(3, 4)$
3. **Intercepto**: $(0, 13)$

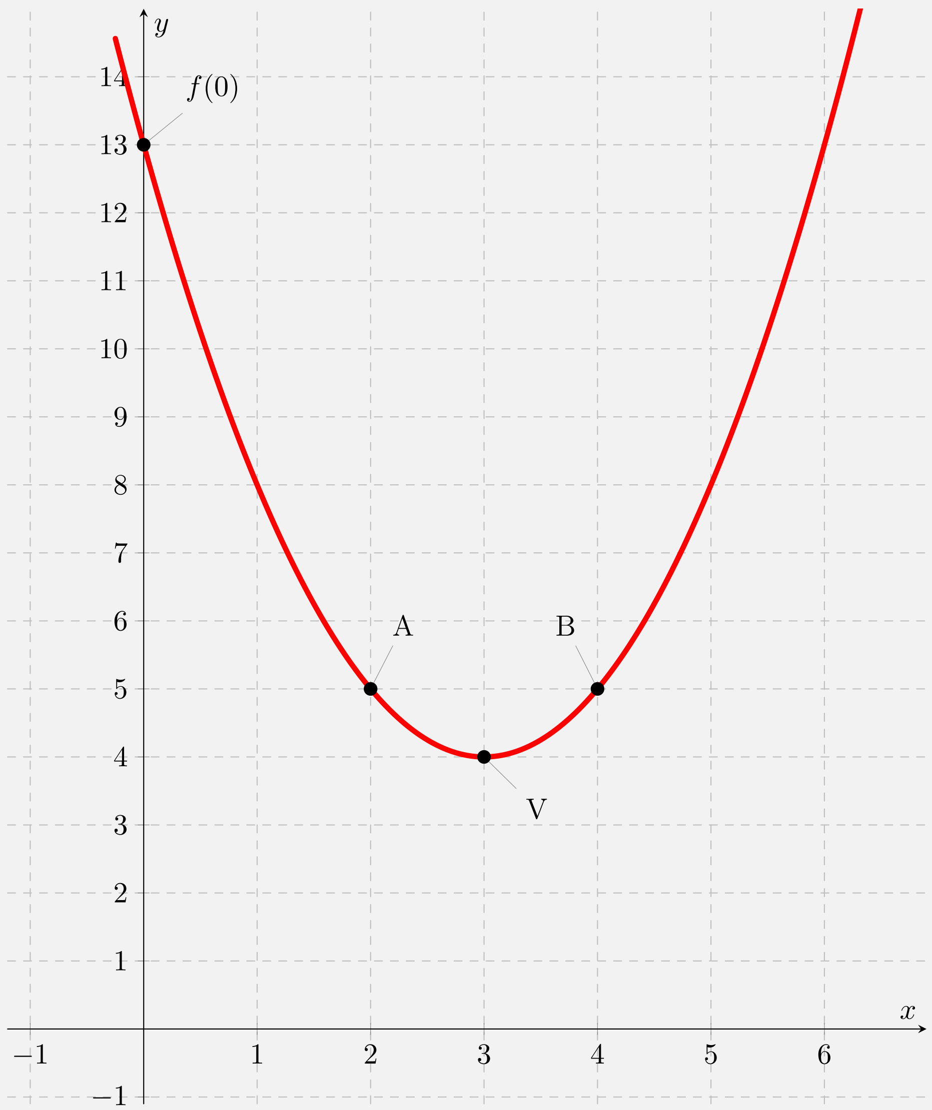
Das informações anteriores, é possível verificar que as raízes (x_1 e x_2) pertencem aos conjunto dos números complexos e não tem representação no plano real. O processo, nesse caso, fica um pouco complicado pois, na realidade, existem dois pontos apenas: o intercepto e o vértice $(3, 4)$.

Para resolver esse problema, deve ser escolhido dois valores para x, calcular suas imagens $(f(x))$ e usá-los como complemento. Assim, escolhendo $x_3 = 2$ e $x_4 = 4$, tem-se:

$$x_3 = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 13 = 5$$
$$x_4 = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 13 = 5$$

É possível chamar essas coordenadas calculadas, de pontos, A e B, sendo assim, $A = (2, 5)$ e $B = (4, 5)$

O gráfico fica:



■

Os casos em que o valor de a forem menores que zero, o processo é semelhante, no entanto, o resultado será uma parábola com a **concavidade para baixo**.

2.11 Exercícios

Exercício 2.1 Qual a diferença entre Equação e Função? ■

Exercício 2.2 Resolva a equação $x^2 + 4 = 0$ considerando os conjuntos:

a. $\mathbb{N}$
b. $\mathbb{Z}$
c. $\mathbb{Q}$
d. $\mathbb{R}$
e. $\mathbb{C}$

■

Exercício 2.3 Calcule as raízes das funções abaixo e represente graficamente.

a. $f(x) = 3x - 6$
b. $g(x) = x^2 - 5x + 6$
c. $f(y) = 5x - 2$
d. $f(x) = x^2 - 4x + 4$
e. $g(w) = w^2 + 4$

■

2.12 Exercícios

Exercício 2.4 Faça uma representação gráfica dos conjuntos numéricos. ■

Exercício 2.5 Qual a diferença entre Equação e Função? ■

Exercício 2.6 Resolva a equação $2x - 5 = 0$ considerando os conjuntos:

a. $\mathbb{N}$
b. $\mathbb{Z}$
c. $\mathbb{Q}$
d. $\mathbb{R}$
e. $\mathbb{C}$

■

Exercício 2.7 Resolva a equação $x^2 + 4 = 0$ considerando os conjuntos:

a. $\mathbb{N}$
b. $\mathbb{Z}$
c. $\mathbb{Q}$
d. $\mathbb{R}$
e. $\mathbb{C}$

■

Exercício 2.8 Determine os conjuntos Domínio e Imagem para cada uma das funções abaixo:

a. $3x + 4 = 0$
b. $f(x) = x^2 + 6$
c. $f(x) = \frac{1}{x}$
d. $f(x) = \sqrt{2x}$
e. $f(x) = \sqrt{-4x}$
f. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}$

Exercício 2.9 Determine matematicamente se $f(x) = 3x + 6$ é crescente ou decrescente.

Exercício 2.10 Calcule as raízes das funções abaixo e represente graficamente.

a. $f(x) = 3x - 6$
b. $g(x) = x^2 - 5x + 6$
c. $f(y) = 5x - 2$
d. $f(x) = x^2 - 4x + 4$
e. $g(w) = w^2 + 4$

II

Álgebra Linear

3. Matrizes

3.1 Conceitos iniciais

Uma matriz pode ser definida como uma *coleção de elementos* e cada elemento possui uma posição definida através dos indicadores i e j, sendo i o indicador para a linha e j o indicador para a coluna. Os valores possíveis para i, j são valores naturais[1] ($i, j \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$), ou inteiros positivos diferente de zero ($i, j \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\}$). A representação de um elemento é dada por:

$$a_{ij}$$

no caso acima, o elemento possui o nome a com uma posição qualquer i , j. Os nomes dos elementos costumam seguir o mesmo nome da matriz que os contém, mas em letra minúscula. Assim, se a matriz tiver o nome $\mathbb{A}$ seus elementos serão a_{ij}, se a matriz se chamar $\mathbb{B}$ seus elementos serão b_{ij} e assim sucessivamente. Os nomes das matrizes são em letras maiúsculas com uma barra dupla em sua construção. Existem, também, os indicadores para as matrizes; esses indicadores são chamados de *Ordem da matriz*, ou seja, representa o número de linhas e de colunas. Logo, uma matriz chamada A com 2 linhas e 3 colunas é escrita da seguinte forma:

$$\mathbb{A}_{\text{2x3}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Desse modo temos a representação de uma *matriz* e de todos os seus *elementos*. É possível verificar que o número de elementos da matriz é 6. De modo geral, o número de elementos ($\#_{elementos}$) de uma matriz será o resultado da *multiplicação* do número de *linhas* pelo número de *colunas*, assim:

$$\#_{elementos} = i \cdot j$$

[1] O autor considera números naturais os positivos diferentes de zero pois, *naturalmente*, não dizemos *"Tenho ZERO Ferrari"* para expressar a ideia de que *"NÃO TENHO uma Ferrari"*.

■ **Exemplo 3.1** Determine o número de elementos da matriz $\mathbb{A}_{3x5}$.
Na matriz do enunciado tem-se $i = 3$ (linhas) e $j = 5$ (colunas). Logo, o número de elementos dessa matriz será $i \cdot j = 3 \cdot 5 = 15$ elementos ■

■ **Exemplo 3.2** Considere a matriz

$$\mathbb{B}_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 6 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

escreva todos os elementos colocando sua posição corretamente.

Como o nome da matriz dada é $\mathbb{B}$, os elementos serão escritos pela letra minúscula do nome da matriz, ou seja, os elementos serão b_{ij}.

- O primeiro elemento está na *linha* 1 e *coluna* 1, então: $b_{11} = 3$
- O segundo elemento está na *linha* 1 e *coluna* 2, então: $b_{12} = 7$
- O terceiro elemento está na *linha* 2 e *coluna* 1, então: $b_{21} = 1$
- O quarto elemento está na *linha* 2 e *coluna* 2, então: $b_{22} = 6$
- O quinto elemento está na *linha* 3 e *coluna* 1, então: $b_{31} = 10$
- O sexto elemento está na *linha* 3 e *coluna* 2, então: $b_{32} = 4$

■

As representações das matrizes podem ser da seguinte forma, ainda:

$$\mathbb{M}_2 \quad \text{ou} \quad \mathbb{M}_3 \quad \text{ou} \quad \mathbb{M}_4 \ldots$$

Nesse caso, as matrizes são chamadas de *matrizes quadradas* pois elas possuem o número de linhas igual ao número de colunas, ou seja, $i = j$. O primeiro caso é uma matriz quadrada de ordem 2, a segunda é uma matriz quadrada de ordem 3, a terceira é uma matriz quadrada de ordem 4, e assim sucessivamente.

■ **Exemplo 3.3** Matriz de segunda ordem, ou matriz quadrada de ordem 2:

$$\mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

■

■ **Exemplo 3.4** Matriz quadrada de ordem 3:

$$\mathbb{B}_3 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

■

3.2 Igualdade entre matrizes

Duas, ou mais, matrizes são iguais quando, nas respectivas posições, todos os elementos são iguais.

■ **Exemplo 3.5** Considere as matrizes

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

As matrizes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são iguais, pois $a_{11} = b_{11} = 1$ e $a_{12} = b_{12} = 2$ e $a_{13} = b_{13} = 3$ e $a_{21} = b_{21} = 6$ e $a_{22} = b_{22} = 5$ e $a_{23} = b_{23} = 4$ ■

■ **Exemplo 3.6** Considere as matrizes

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

As matrizes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ NÃO são iguais. Embora $a_{11} = b_{11} = 1$ e $a_{12} = b_{12} = 2$ e $a_{13} = b_{13} = 3$ e $a_{21} = b_{21} = 6$ e $a_{22} = b_{22} = 5$, tem-se que $a_{23} \neq b_{23}$ ■

■ **Exemplo 3.7** Determine os valores de x e y de modo que as matrizes abaixo sejam iguais:

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & x+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ y-7 & 5 \end{bmatrix}$$

Analisando as matrizes, verifica-se que $a_{11} = b_{11} = 1$ e $a_{22} = b_{22} = 5$. O elemento $a_{12} = x + 10$ e $b_{12} = 25$ devem ser iguais, ou seja:

$$\begin{aligned} a_{12} &= b_{12} \\ x + 10 &= 25 \\ x + 10 - 10 &= 25 - 10 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

De modo análogo, o elemento $a_{21} = 3$ e $b_{21} = y - 7$ devem ser iguais, assim:

$$\begin{aligned} a_{21} &= b_{21} \\ 3 &= y - 7 \\ 3 + 7 &= y - 7 + 7 \\ 10 &= y \end{aligned}$$

Substituindo os valores calculados, x e y, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_2 &= \mathbb{B}_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 15+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 10-7 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

3.3 Adição e subtração de matrizes

A adição, ou subtração, de matrizes só podem ser feitas se a(s) matriz(es) possuir/possuírem a mesma ordem. Assim, $\mathbb{A}_{ixj}$ e $\mathbb{B}_{ixj}$ podem ser somadas e/ou subtraídas da seguinte maneira:

$$\mathbb{A}_{ixj} \pm \mathbb{B}_{ixj} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1j} \pm b_{1j} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2j} \pm b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} \pm b_{i1} & a_{i2} \pm b_{i2} & \cdots & a_{ij} \pm b_{ij} \end{bmatrix}$$

■ **Exemplo 3.8** Considere as matrizes abaixo e efetue a adição entre elas, ou seja, $\mathbb{A} + \mathbb{B}$

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Partindo das matrizes dadas, podemos escrever:

$$\mathbb{A}_{2x3} + \mathbb{B}_{2x3} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 3+5 & -5+6 \\ 2+(-2) & 6+4 & 4+10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg` ■

3.4 Multiplicação de um escalar por uma matriz

Esse tipo de multiplicação pode ser entendido como *um número multiplicando uma matriz*, sendo assim, matematicamente, basta multiplicar todos os elementos da matriz pelo número que está multiplicando a matriz.

Nesse momento a notação se faz necessária, pois numa expressão do tipo $x \cdot y$ não fica evidente quem é a matriz e quem é o escalar, ou se são duas matrizes, ou se são dois escalares! Então dado um escalar a e uma matriz $\mathbb{A}_{ij}$ a multiplicação pode ser escrita como:

$$a \cdot \mathbb{A}_{ixj} = a \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & \cdots & a \cdot a_{1j} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & \cdots & a \cdot a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a \cdot a_{i1} & a \cdot a_{i2} & \cdots & a \cdot a_{ij} \end{bmatrix}$$

Embora seja um pouco confuso, devido a quantidade de letras “a”, isso foi escolhido propositalmente para o entendimento de um conceito: o escalar a é diferente de todos os elementos da matriz pois não possui indicadores, ou seja, subíndice.

■ **Exemplo 3.9** Calcule o valor de $2 \cdot \mathbb{A} + 4 \cdot \mathbb{B}$ sendo

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Para calcular, basta substituir os valores das matrizes, multiplicar pelo escalar e somar as matrizes. Mesmo sabendo o procedimento para calcular a expressão dada, é importante verificar a ordem das matrizes envolvidas na expressão, pois após a multiplicação pelo escalar, haverá uma soma e, como visto anteriormente, só é possível somar matrizes se elas forem da mesma ordem!

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathbb{A} + 4 \cdot \mathbb{B} &= \\ 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 & 4 \cdot 5 & 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -10 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 20 & 24 \\ -8 & 16 & 40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+12 & 6+20 & -10+24 \\ 4+(-8) & 12+16 & 8+40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 26 & 14 \\ -4 & 28 & 48 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

3.5 Multiplicação entre matrizes

Nesse momento é necessário fazer uma análise mais criteriosa sobre as matrizes. A multiplicação de matrizes NÃO é comutativa, ou seja, $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$. Outro ponto importante na multiplicação entre matrizes é que dada duas matrizes, o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz. Assim, sejam as matrizes $\mathbb{A}_{ixj}$ e $\mathbb{B}_{nxm}$, a multiplicação $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ existirá se, se somente se, $j = n$ e a multiplicação $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ existirá se, e somente se, $m = i$.

■ **Exemplo 3.10** Calcule $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ para as matrizes abaixo:

$$\mathbb{A}_{1x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz é a matriz $\mathbb{A}$ e a segunda matriz é a $\mathbb{B}$. Analisando o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz, verifica-se que são iguais a 3, logo, existe a multiplicação proposta no enunciado. Calculando-a:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{1x3} \cdot \mathbb{B}_{3x2} &= \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+4+15 & 4+12+24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 22 & 40 \end{bmatrix}_{1x2} \end{aligned}$$

é possível verificar que a matriz resultante possui a ordem 1x2 que é, exatamente, o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg` ■

■ **Exemplo 3.11** Calcule a multiplicação $\mathbb{M} \cdot \mathbb{N}$ sendo

$$\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{N}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Como as matrizes são quadradas de ordem 2, é possível a multiplicação proposta no enunciado, logo

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \cdot \mathbb{N} &= \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 4 & (-3) \cdot (-1) + 6 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 7 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 + 24 & 3 + 18 \\ 4 + 28 & -2 + 21 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & 21 \\ 32 & 19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é possível verificar que a ordem resultante da multiplicação entre matrizes quadradas é, também, uma matriz quadrada com a mesma ordem. Outro ponto a se notar é que foi omitido o índice de ordem das matrizes na resolução pois, como são matrizes quadradas, não se faz necessário.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg` ■

3.6 Tipos de matrizes

- ***Matriz Linha***: é a matriz que possui somente uma linha. É conhecida, também, como *vetor linha* ou apenas ***vetor***;
- ***Matriz Coluna***: é a matriz que possui apenas uma coluna e também é conhecida como *vetor coluna*;
- ***Matriz Quadrada***: como visto anteriormente, a matriz quadrada é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas;
  - *Diagonal Principal*: a diagonal principal de uma matriz quadrada é aquela em que os elementos possuem os indicadores iguais, ou seja, $i = j \Rightarrow a_{ii}$;
  - *Diagonal Secundária*: é a diagonal formada pelos elementos a_{ij} de modo que $i + j =$ ordem $+ 1$.
  - *Triangular Superior*: matriz onde os elementos **acima** da diagonal principal e os da diagonal principal são diferentes de zero, isto é, $a_{ij} = 0\,,\ i > j$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  - *Triangular Inferior*: matriz onde os elementos **abaixo** da diagonal principal e os da diagonal principal são diferentes de zero, isto é, $a_{ij} = 0\,,\ i < j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

  - *Diagonal*: matriz onde os elementos da diagonal principal são diferentes de zero, isto é, $a_{ij} \neq 0\,,\ i = j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

– *Identidade*: matriz onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ou seja, $a_{ij} = 1\,,\ i = j$. Essa matriz recebe uma representação peculiar, $\mathbb{I}_n$ ou apenas $\mathbb{I}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Oposta***: dada uma matriz $\mathbb{A}$ e uma matriz $\mathbb{B}$, é possível dizer que a matriz $\mathbb{B}$ é oposta a matriz $\mathbb{A}$ se todos os elementos de $\mathbb{B}$ forem os elementos simétricos de $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Transposta***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, a sua transposta, ou seja, $\mathbb{A}^t$ terá as suas colunas formadas pelas linhas de $\mathbb{A}$. Vale ressaltar que $(\mathbb{A}^t)^t = \mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Simétrica***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, é possível dizer que $\mathbb{A}$ é simétrica se $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \mathbb{A}$$

- ***Matriz Antissimétrica***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, é possível dizer que $\mathbb{A}$ é antissimétrica se $-\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$. Aqui, se faz necessário mais uma observação: necessariamente $a_{ij} = 0$, $i = j$.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{A}$$

- ***Matriz Nula***: é uma matriz onde todos os elementos são iguais a 0 (zero).

$$\mathbf{0}_{2\text{x}4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Ortogonal***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, *inversível*, ela será ortogonal se obedecer $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^{-1}$.[2]

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[2]Será visto mais adiante como calcular a inversa de uma matriz, no entanto, a ideia é partir de uma equação matricial. Dadas as matrizes $\mathbb{A}, \mathbb{X}$ e a matriz identidade $\mathbb{I}$. A equação base é $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{I}$ e o objetivo é determinar a matriz $\mathbb{X}$. O leitor habituado com os métodos tradicionais poderia imaginar que para resolver essa equação bastaria *passar a matriz* $\mathbb{A}$ *dividindo*, no entanto, não existe divisão de matrizes, muito menos *passa para lá*. O correto é determinar uma matriz de modo que a multiplicação dela por sua inversa, resulte no elemento neutro da multiplicação entre matrizes; o elemento neutro da multiplicação entre matrizes é a matriz identidade!

4. Determinantes

4.1 Determinantes

4.1.1 Ordem 2

Os determinantes de matrizes de ordem 2 podem ser calculadas como segue. Considere a matriz $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{a_{11} \cdot a_{22}}^{\text{diagonal principal}} - \underbrace{a_{12} \cdot a_{21}}_{\text{diagonal secundária}}$$

■ **Exemplo 4.1** Calcule o determinante de $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

O determinante pode ser calculado usando o exposto acima, assim:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=tEotRUk9RDo` ■

■ **Exemplo 4.2** Calcule o determinante de $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

De modo análogo ao exemplo anterior, tem-se:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{B}) = (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot (-7) = -4 - (+14) = -4 - 14 = -18$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=tEotRUk9RDo` ■

4.1.2 Ordem 3

Considere uma matriz de ordem 3. O cálculo do determinante será:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}^{\text{diagonais principais}} \underbrace{- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}}_{\text{diagonais secundárias}}$$

Torna-se um pouco complicado calcular o determinante através da memorização da relação acima, um modo, repetitivo, mais fácil será visto no exemplo a seguir.

■ **Exemplo 4.3** Calcule o determinante da matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Para resolver, basta copiar as duas primeiras colunas, após a matriz, e seguir um processo análogo ao cálculo do determinante das matrizes de ordem 2, multiplicando as *"diagonais principais"* e **subtraindo** a multiplicação das *"diagonais secundárias"*. Essa técnica é conhecida como *Regra de Sarrus*!

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1}^{\text{diagonais principais}} - \underbrace{(3 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3)}_{\text{diagonais secundárias}}$$

$$= 15 + 24 + 12 - (30 + 6 + 24)$$
$$= 51 - 60$$
$$= -9$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=zl99h_aiWds` ■

4.1.3 Ordem superior a 3

Teorema 4.1.1 — Teorema de Laplace. O determinante de uma matriz é igual a soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos complementos algébricos.

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathbb{A}_{-\mathrm{i}-\mathrm{j}})$$

sendo:

- n a ordem da matriz;
- i e j são os índices que representam a linha e coluna, respectivamente;
- a_{ij} é o elemento da *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna;
- $\det(\mathbb{A}_{-i-j})$ é o determinante da matriz formada pela **remoção** da *linha i* e *coluna j*.

O teorema anterior é o Teorema de Laplace que estabelece um modo de calcular os determinantes de matrizes de ordem n. Note que a aplicação desse teorema serve, também, para matrizes de ordem 2 ou 3.

■ **Exemplo 4.4** Calcule o determinante da matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

A matriz é de ordem 3 ($n = 3$). Inicialmente é necessário escolher uma linha qualquer da matriz. Suponha a escolha da linha 1 ($i = 1$). A linha 1 possui os elementos a_{11}, a_{12} e a_{13}. Assim o determinante ficará:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot \det(\mathbb{A}_{-\mathrm{i}-\mathrm{j}})\\
&= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot \det(\mathbb{A}_{-1-\mathrm{j}})\\
&= (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\det(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}) + (-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\det(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix})\\
&\quad + (-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\det(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix})\\
&= (-1)^{2}\cdot 1\cdot\det(\begin{bmatrix} 5 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix}) + (-1)^{3}\cdot 2\cdot\det(\begin{bmatrix} 4 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix})\\
&\quad + (-1)^{4}\cdot 3\cdot\det(\begin{bmatrix} 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix})\\
&= 1\cdot 1\cdot(5\cdot 3-6\cdot 1) - 1\cdot 2\cdot(4\cdot 3-6\cdot 2) + 1\cdot 3\cdot(4\cdot 1-5\cdot 2)\\
&= 1\cdot(15-6) - 2\cdot(12-12) + 3\cdot(4-10)\\
&= 1\cdot 9 - 2\cdot 0 + 3\cdot(-6)\\
&= 9-0-18\\
&= 9-18\\
&= -9
\end{aligned}
$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=WHPNHxdKDyg` ■

O resultado obtido é o mesmo calculado utilizando a *regra de Sarrus* para matrizes de ordem 3. Comparando os dois exemplos, o leitor concluirá (facilmente!) que é muito simples, e rápido, calcular o determinante pela regra mencionada. No entanto, a regra de Sarrus pode ser utilizada para matrizes de ordem 3, ou seja, para matrizes de ordem maior (4, 5, 6, ...) o método é o utilizado nesta seção[1].

4.1.4 Regra do Cadarço (Fórmula de Gauss)

Embora esta seção esteja dentro do capítulo sobre *Determinantes* a *Regra do Cadarço* é um método para calcular áreas (*Fórmula de Gauss para cálculo de área*). NÃO se trata de determinantes de matrizes NÃO QUADRADAS. Os Determinantes são exclusivos das matrizes quadradas.

A fórmula pode ser representada por:

$$
\mathrm{A} = \frac{1}{2}\cdot\left|(x_n\cdot y_1 - x_1\cdot y_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i\cdot y_{i+1} - x_{i+1}\cdot y_i)\right|
$$

sendo:

- n o número de vértices do polígono;
- A a área do polígono;
- $(x_i, y_i),\quad i\in 1,2,\ldots,n$ as coordenadas dos vértices.

■ **Exemplo 4.5** Calcule a área da figura formada pelos pontos $(0,0),(2,0),(2,2)$ e $(0,2)$

Os pontos do enunciado formam um quadrado de lado 2, desse modo, a área resultante deverá ser igual a 4, pois $2\cdot 2=4$. Para aplicar a Regra do Cadarço é necessário definir:

- $n=4$ pois existem 4 pontos!;

[1] Existem outros métodos e não serão abordados neste material. O leitor pode facilmente encontrar fazendo buscas na internet e em livros.

- $P_1 : (0, 0) \Rightarrow x_1 = 0$ e $\mathrm{y}_1 = 0$;
- $P_2 : (2, 0) \Rightarrow x_2 = 2$ e $\mathrm{y}_2 = 0$;
- $P_3 : (2, 2) \Rightarrow x_3 = 2$ e $\mathrm{y}_3 = 2$;
- $P_4 : (0, 2) \Rightarrow x_4 = 0$ e $\mathrm{y}_4 = 2$.

Substituindo na Fórmula:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{1}{2} \cdot \left|(x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + \sum_{i=1}^{4-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + \sum_{i=1}^{3} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 0 - 0 \cdot 2) + (0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) + (2 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + (2 \cdot 2 - 0 \cdot 2)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(0 - 0) + (0 - 0) + (4 - 0) + (4 - 0)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |8| \\
&= \frac{8}{2} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=N8BoGdXgomk` ■

Embora seja muito mais fácil calcular a área do quadrado utilizando a relação de multiplicação entre os lados, a Regra do Cadarço serve para calcular a área de qualquer polígono bastando conhecer seus vértices, apenas.

5. Sistemas de Equações Lineares

5.1 Sistemas de Equações Lineares

5.1.1 Equações Lineares

Para iniciar o capítulo é importante definir alguns pontos. O leitor nesse momento pode lembrar, da disciplina Matemática, que *funções lineares* são aquelas que resultam em um gráfico no formato de reta, costumeiramente chamadas de *linha*. Vendo o exemplo abaixo é possível retomar, rapidamente, o gráfico de uma função linear.

■ **Exemplo 5.1** Construa o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

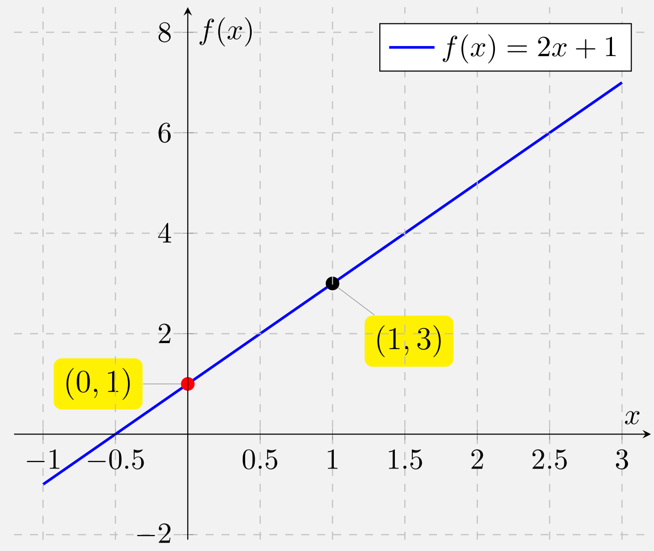
Analisando a função dada, é possível definir algumas coisas através da comparação com a definição geral de funções lineares:

$$f(x) = a \cdot x + b \quad \text{Definição geral}$$
$$f(x) = 2 \cdot x + 1 \quad \text{Função do enunciado}$$

- x: variável independente;
- $f(x)$ ou y: variável dependente;
- f: nome da função;
- a: coeficiente angular. Define o ângulo entre a reta (função) e o *eixo das abscissas*, também chamado de *eixo horizontal* ou, "popularmente", *eixo x* [a]. Se $a > 0$ a função é crescente; se $a < 0$ a função é decrescente; se $a = 0$ a função é constante;
- b: coeficiente linear. É o valor que intercepta, ou *"corta"* o *eixo das ordenadas*, conhecido também como *eixo vertical*, ou ainda como *eixo y* [b].

Desse modo para fazer o gráfico é necessário apenas dois pontos, ou seja, dois *pares ordenados* $(x, f(x))$. Um desses pares pode ser obtido através do coeficiente linear, ou seja, se a função intercepta o eixo das ordenadas no valor 1 ($b = 1$), necessariamente, $x = 0$, assim $(0, 1)$ é um ponto (ponto vermelho). A determinação de outro ponto pode ser atribuindo um valor, diferente de zero, para a variável independente e calcular seu correspondente. Atribuindo $x = 1$ tem-se $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$ logo, o segundo ponto (ponto preto) será $(1, 3)$. Unindo esses dois pontos e traçando uma reta é possível obter o gráfico abaixo:

Figura 5.1: Gráfico de uma função linear



Fonte: Próprio autor.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=KreVo3UpTzM` ■

[a] Existem alguns pontos a serem considerados aqui: 1) quando é falado *eixo horizontal* podem haver interpretações erradas pois é uma questão de referência, ou seja, se o leitor girar o papel em 90°, o eixo se tornará vertical! Chamar de *eixo x* também podem haver interpretações diferenciadas, pois se o problema trata de uma situação onde envolva o cálculo do espaço de um móvel (S) em função do tempo (t), essa nomenclatura não fará sentido algum. O modo correto de interpretar e nomear o eixo é utilizar *eixo das abscissas* ou, se o leitor preferir, pode utilizar o nome da variável independente para o nome do eixo, ou seja, no mesmo exemplo anterior, cálculo do espaço em função do tempo, pode ser utilizado para o *eixo das abscissas* simplesmente *eixo de t* ou *eixo do tempo*.

[b] Mesma consideração da nota anterior.

Como pode ser visto na Figura 5.1, o gráfico da função do exemplo anterior é uma reta pois os expoentes das variáveis, independente e dependente são iguais a 1. A função do exemplo anterior pode ser reescrita para a forma:

$$y - 2x = 1$$

A forma como a função foi reescrita pode ser entendida como uma *equação linear*. De modo geral sobre *Equações Lineares* são equações do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os coeficientes, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis e b é o termo independente.

■ **Exemplo 5.2** A equação $2x + 3y - 4z = 2$ é uma equação linear. Seus coeficientes são $2, 3$ e -4. Já as variáveis são x, y e z e 2 é o termo independente. A solução para esta equação ocorre quando $x = 3, y = 0$ e $z = 1$ pois $2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 2$. ■

■ **Exemplo 5.3** Verifique se $(1, 2, 0)$ e $(1, 0, 0)$ satisfazem a equação linear $2x + 3y - 4z = 2$.

Para verificar se as triplas[a] ordenadas satisfazem a equação linear basta substituir os valores dados em suas respectivas variáveis, assim:

- $(1,2,0) \Rightarrow 2\cdot 1+3\cdot 2-4\cdot 0=2 \Rightarrow 2+6-0=2 \Rightarrow 8=2$ FALSO. Logo, a $(1,2,0)$ não satisfaz a equação linear do enunciado.
- $(1,0,0) \Rightarrow 2\cdot 1+3\cdot 0-4\cdot 0=2 \Rightarrow 2+0-0=2 \Rightarrow 2=2$ VERDADEIRO. Logo, a $(1,0,0)$ satisfaz a equação linear do enunciado.

■

[a] Um nome mais apropriado para chamar um conjunto de valores, ordenados, é utilizando a quantidade de elementos dessa organização, ou seja: 2 valores implicam numa dupla ou par ordenado; 3 valores, tripla ordenada; 4 valores, quadrupla ordenada; 5 valores, quíntupla ordenada; "n" valores n-upla (ênupla).

O leitor pode imaginar que as equações lineares acima existam infinitas combinações entre valores numéricos que satisfaçam a relação. Isso acontece porque o *número de variáveis* é MAIOR que o *número de equações*. No entanto, existem situações em que o número de equações lineares é igual ao número de variáveis.

■ **Exemplo 5.4** Dado as funções Receita ($R(x)=30x$) e Custo ($C(x)=20x+1000$), determine o ponto de equilíbrio[a].

Para determinar o ponto de equilíbrio basta fazer $y=R(x)=C(x)$ e substituir nas equações do enunciado, assim:

- Função Receita: $y=30x$;
- Função Custo: $y=20x+1000$.

Fica claro a existência de duas equações (Receita e Custo) e duas variáveis (x e y). A solução dessas equações lineares devem satisfazer as duas funções simultaneamente, desse modo, é possível escrever um *sistema de equações lineares*, como segue:

$$\begin{cases} y &= 30x \\ y &= 20x+1000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y-30x &= 0 \\ y-20x &= 1000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

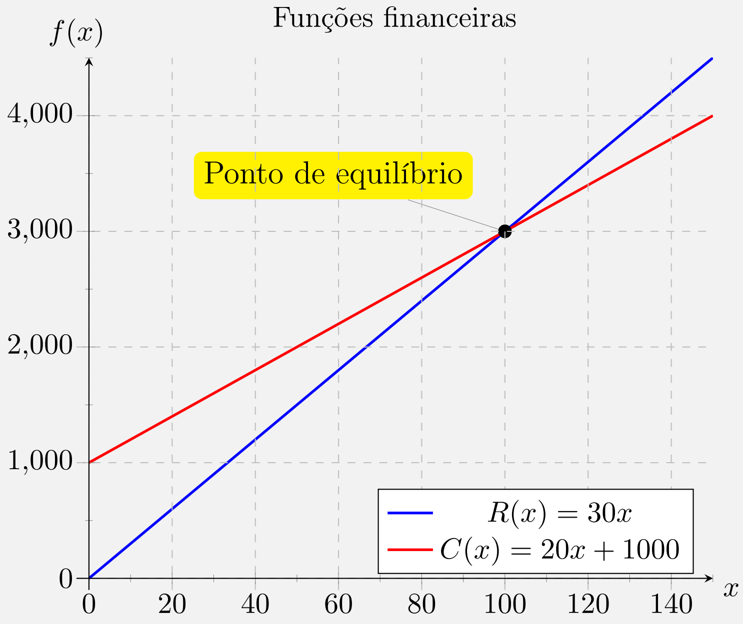
$$\begin{cases} y-30x &= 0 \\ -10x &= -1000 \end{cases} \Rightarrow x=100$$

$$y-30\cdot 100=0 \Rightarrow$$

$$y-3000=0 \Rightarrow y=3000$$

Assim, o ponto de equilíbrio é $(100,3000)$ e representa a quantidade de produtos que devem ser vendidos ($x=100$ unidades) e o valor da Receita e do Custo quando forem vendidos $x=100$ produtos será de R\$3000,00 ($y=3000 \Rightarrow R(100)=C(100)=\text{R\$}\,3000,00$). A Figura 5.2 mostra o gráfico das funções e o ponto de equilíbrio.

Figura 5.2: Gráfico das funções Receita e Custo



Fonte: Próprio autor.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=8mZ7W4jwPWY` ■

[a]O ponto de equilíbrio acontece quando a Receita é igual ao Custo, ou seja, $R(x) = C(x)$

Como visto anteriormente, os sistemas de equações lineares podem ser aplicados na área da Administração, Ciências Contábeis e, é claro, na área de exatas!

Desse modo é de fundamental importância saber resolver os sistemas de equações lineares e, para isso, existem alguns métodos. Será visto aqui o método da resolução usando matrizes, chamada de regra de Cramer e o método da eliminação de Gauss.

Antes de conhecer as técnicas é importante frisar que os sistemas de equações lineares podem ser classificados dependendo do número de soluções que o mesmo apresenta:

- **Sistema Impossível**: Quando o sistema não admite solução;
- **Sistema Possível e Indeterminado**: Quando o sistema admite mais de uma solução;
- **Sistema Possível e Determinado**: É o sistema que possui uma única solução possível.

5.1.2 Regra de Cramer

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x-y+z &= 2 \\ x+y-z &= 0 \end{cases}$$

É possível escrever a Matriz Principal deste sistema. A Matriz Principal é composta pelos coeficientes de cada variável do sistema, ou seja

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainda é possível definir as matrizes $\mathbb{M}_x$, $\mathbb{M}_y$, e $\mathbb{M}_z$ substituindo os valores da coluna do resultado nas respectivas colunas da matriz principal, assim:

$$\mathbb{M}_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, o valor das variáveis do sistema dado pode ser calculado através de:

$$x = \frac{\det(\mathbb{M}_x)}{\det(\mathbb{M})}, \quad y = \frac{\det(\mathbb{M}_y)}{\det(\mathbb{M})}, \quad \text{e} \quad z = \frac{\det(\mathbb{M}_z)}{\det(\mathbb{M})}$$

5.1.3 Eliminação de Gauss - Método do escalonamento

Um sistema de equações lineares pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{B}$$

Onde a matriz $\mathbb{A}$ é a matriz dos coeficientes, $\mathbb{X}$ é a matriz das variáveis e $\mathbb{B}$ é a matriz dos resultados.

O objetivo da eliminação de Gauss é formar uma matriz triangular superior. Em um sistema de equações lineares é possível fazer:

- Multiplicar uma linha inteira por um número diferente de zero;
- Mudar a posição das linhas e/ou colunas;
- Efetuar operações entre as linhas.

■ **Exemplo 5.5** Resolva o sistema abaixo

$$\begin{cases} x + y + z & = 3 \\ 2x + y + 2z & = 5 \\ x - y + 3z & = 1 \end{cases}$$

Solução:

O sistema do enunciado pode ser escrito através da multiplicação abaixo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}}$$

O próximo passo é montar a chamada *Matriz Ampliada* do passo inicial ou passo zero (0).

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Após a definição da Matriz Ampliada, o próximo passo é zerar os elementos que estão abaixo da diagonal principal, assim:

$$L_2^{(1)} \leftarrow 2 \cdot L_1^{(0)} - L_2^{(0)}$$
$$L_3^{(1)} \leftarrow L_1^{(0)} - L_3^{(0)}$$

resultando em:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

O próximo passo é usar a linha 2 como referência para zerar os elementos que estão abaixo da diagonal principal. Assim:

$$L_3^{(2)} \leftarrow 2 \cdot L_2^{(1)} - L_3^{(1)}$$

obtendo o seguinte sistema:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Da última linha, tem-se:

$$3z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Da linha 2 é possível obter:

$$y = 1$$

Substituindo o resultado de y e z na linha 1, obtém-se:

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x + 1 + 0 = 3 \Rightarrow x = 2$$

Enfim, este sistema pode ser classificado como Sistema Possível e Determinado e a solução é a tripla $(2, 1, 0)$, podendo representar o conjunto solução da seguinte maneira:

$$S = \{(2, 1, 0)\}$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=L4V_rF9uN2g` ■

5.2 Exercícios

Exercício 5.1 Determine os valores de x e y de modo que as matrizes abaixo sejam iguais:

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & x+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ y-7 & 5 \end{bmatrix}$$

■

Exercício 5.2 Considere as matrizes:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a. $2\mathbb{A} + 3\mathbb{B}$
b. $-\mathbb{A} + \frac{1}{2}\mathbb{B}$
c. $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$
d. $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$
e. As matrizes $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ são iguais? Por quê?

■

Exercício 5.3 Calcule o Determinante das matrizes abaixo:

a.
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b.
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c.
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & -10 \\ -11 & 1 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

■

Exercício 5.4 Uma empresa produz e vende pneus automotivos. Sabendo que o custo envolvido na produção de 100 pneus seja igual a R$ 2300,00 e o preço de venda de cada unidade igual a R$ 730,00, determine o ponto de equilíbrio dessa produção supondo que o custo fixo da empresa seja igual a R$ 3700,00. ■

Exercício 5.5 Calcule o sistema abaixo usando os métodos de Cramer e Escalonamento.

a.
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ -2x - 2y = -20 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 4 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 10 \\ x - y + z = 6 \\ -3x - y - z = 2 \end{cases}$$

■

Exercício 5.6 Classifique os sistemas do Exercício 5.5 em *Sistema Possível e Determinado - SPD*, *Sistema Possível e Indeterminado - SPI* ou *Sistema Impossível - SI*. ■