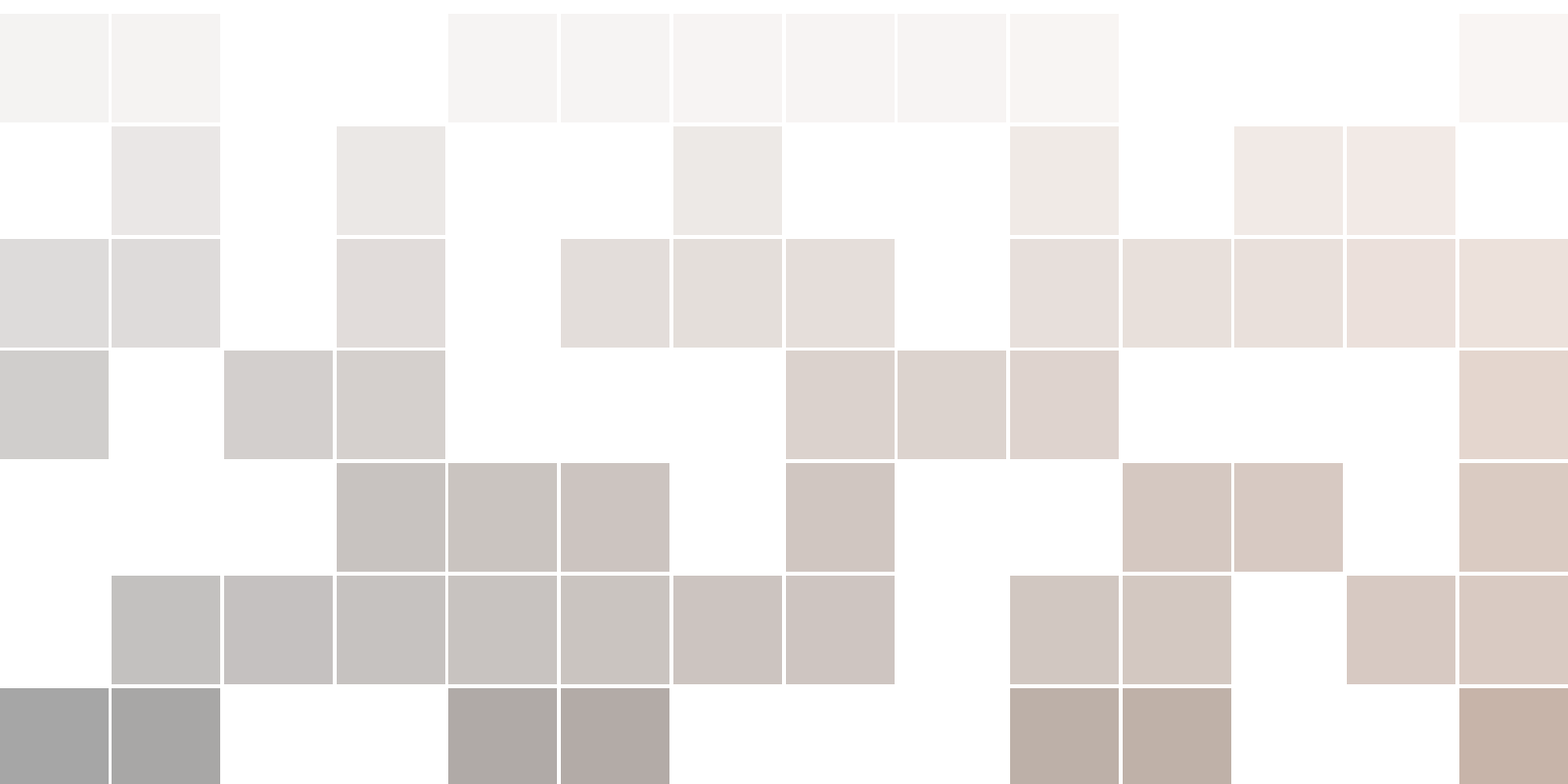




# Curso de Matemática e Tecnologia

Prof. Dr. Edson F. Fumachi



Copyright © 2020 E. F. Fumachi

MATERIAL INDEPENDENTE

FUMACHI.MAT.BR

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*Primeira Versão, Janeiro de 2020*




## Sobre o Autor

O Prof. Dr. Edson Fernando **Fumachi** nasceu em Itatiba-SP em 18 de Maio de 1983. Estudou em escolas públicas até o ensino médio. Ingressou no ano 2001 no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade São Francisco, obtendo seu título em 2003. Em 2004 começou a trabalhar no ensino superior da mesma faculdade na qual se graduou. No ano de 2005 assumiu a posição de professor PEB-II do Governo do Estado de São Paulo na disciplina de Matemática. Exonerou do cargo em 2007 para dar sequência no ensino superior. Trabalhou como professor do ensino médio público e privado; no ensino médio privado atuou como professor de Matemática e Física. Em 2007 começou seus estudos como aluno de matéria isolada no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, localizado em São José dos Campos-SP. Em 2009 entrou no mesmo instituto como aluno regular do Curso de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais área de concentração em Ciência e Tecnologia dos Materiais e Sensores. Em 2011 defendeu sua Dissertação intitulada *Simulação do fluxo reacional de um reator de filamento quente através da simulação direta de Monte Carlo*. Consecutivamente, em 2011, ingressou no Curso de Doutorado na mesma área do mesmo instituto. Em 2017 defendeu seu Doutorado intitulado *Desenvolvimento de um tubo de queda livre para o modelamento e otimização do processo de solidificação de ligas eutéticas de bismuto-estanho em ambiente de microgravidade*. Tem experiência no meio empresarial através de consultorias realizadas na área de telecomunicações e desenvolvimento de algoritmos para otimização de processos e redução de custos. Tem amplo conhecimento em programação de computadores nas linguagens ForTran77, C e Python. Desenvolve materiais didáticos (como este!) em diversos formatos e linguagens ( $\text{\LaTeX}$ ). Desenvolve conteúdos educacionais e os disponibiliza em plataformas digitais, Youtube e Facebook, sob o pseudônimo Doutor Exatas.

# Prefácio

Este material foi elaborado exclusivamente pelo autor e tem como objetivo atender os alunos dos cursos de Administração e Ciências Contábeis da Faculdade de Ciências Humanas do Estado de São Paulo - FACIC e Faculdade Santa Cecília de Pindamonhangaba- FASC. Este material é completo para o curso, no entanto, alguns livros estão listados nas referências para acrescentar materiais aos discentes. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

Os exemplos que possuem uma versão em vídeo possuirão o símbolo  e um *link* que encaminhará ao canal do "Doutor Exatas", no Youtube (<https://www.youtube.com/channel/UCqGy3MbhdZsWGGBBg7yUGRw>). O leitor pode, ainda, encontrar o conteúdo no Facebook (<https://www.facebook.com/doutorexatas/>).

A abordagem adotada neste material é fornecer um pouco de teoria (porém suficiente), e em seguida com a resolução de exemplos.

Bons estudos.

## Sumário

Sobre o autor ..... 3

Prefácio ..... 4

### I

### Funções

<b>1</b>	<b>Revisão sobre conjuntos numéricos e equações .....</b>	<b>11</b>
1.1	Introdução	11
1.2	Conjuntos numéricos	11
1.3	Resolução de equações	13
<b>2</b>	<b>Funções .....</b>	<b>17</b>
2.1	Introdução	17
2.2	Domínio, imagem, relação e função	18
2.3	Raízes de uma função	19
2.4	Funções de uma variável real	20
2.5	Funções lineares	20
2.6	Raíz de funções lineares	21
2.7	Gráficos de funções lineares	21
2.8	Funções quadráticas	21
2.9	Raízes de funções quadráticas	22
2.10	Gráficos de funções quadráticas	24

**II****Cálculo**

<b>3</b>	<b>Limites de funções de uma variável .....</b>	<b>31</b>
3.1	Conceito de limite	31
3.2	Limites de funções polinomiais	31
3.3	Continuidade de funções	31
<b>4</b>	<b>Derivadas de funções de uma variável .....</b>	<b>33</b>
4.1	Taxa de variação	33
4.2	Interpretação geométrica	33
4.3	Regras de derivação	33
4.3.1	Função constante .....	33
4.3.2	Função polinomial .....	33
4.3.3	Função exponencial .....	33
4.3.4	Função logarítmica .....	33
4.3.5	Produto .....	33
4.3.6	Quociente .....	33
4.3.7	Cadeia .....	33
<b>5</b>	<b>Integrais .....</b>	<b>35</b>
5.1	Somas infinitas	35
5.2	Integrais indefinidas	35
5.3	Integrais definidas	35
5.4	Cálculo de áreas	35
5.5	Aplicações das integrais na Administração	35

**III****Álgebra Linear**

<b>6</b>	<b>Matrizes .....</b>	<b>39</b>
6.1	Conceitos iniciais	39
6.2	Igualdade entre matrizes	40
6.3	Adição e subtração de matrizes	41
6.3.1	Multiplicação de um escalar por uma matriz .....	42
6.3.2	Multiplicação entre matrizes .....	43
6.4	Tipos de matrizes	44
<b>7</b>	<b>Determinantes .....</b>	<b>47</b>
7.1	Determinantes	47
7.1.1	Ordem 2 .....	47
7.1.2	Ordem 3 .....	48
7.1.3	Ordem superior a 3 .....	48
7.1.4	Regra do Cadarço (Fórmula de Gauss) .....	49

<b>8</b>	<b>Sistemas de Equações Lineares</b>	<b>51</b>
<b>8.1</b>	<b>Sistemas de Equações Lineares</b>	<b>51</b>
8.1.1	Equações Lineares	51
8.1.2	Regra de Cramer	54
8.1.3	Método da Substituição	55
8.1.4	Eliminação de Gauss - Método do escalonamento	55

## IV

## Análise Matemática

<b>9</b>	<b>Análise Matemática</b>	<b>59</b>
<b>9.1</b>	<b>Conceitos iniciais</b>	<b>59</b>

## V

## Física

<b>10</b>	<b>Introdução a Física</b>	<b>63</b>
<b>10.1</b>	<b>Conceitos iniciais</b>	<b>63</b>

## VI

## Tecnologia e Educação

<b>11</b>	<b>Softwares no Ensino da Matemática</b>	<b>67</b>
<b>11.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>67</b>
<b>11.2</b>	<b>Determinação do número <math>\pi</math> experimentalmente</b>	<b>68</b>
<b>12</b>	<b>Introdução ao Python</b>	<b>75</b>
<b>12.1</b>	<b>Conceitos iniciais</b>	<b>75</b>

## VII

## Bibliografia

<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>
Artigos	79
Livros	79





<b>1</b>	<b>Revisão sobre conjuntos numéricos e equações .....</b>	<b>11</b>
1.1	Introdução	
1.2	Conjuntos numéricos	
1.3	Resolução de equações	
<b>2</b>	<b>Funções .....</b>	<b>17</b>
2.1	Introdução	
2.2	Domínio, imagem, relação e função	
2.3	Raízes de uma função	
2.4	Funções de uma variável real	
2.5	Funções lineares	
2.6	Raíz de funções lineares	
2.7	Gráficos de funções lineares	
2.8	Funções quadráticas	
2.9	Raízes de funções quadráticas	
2.10	Gráficos de funções quadráticas	



# 1. Revisão sobre conjuntos numéricos e equações

## 1.1 Introdução

O entendimento sobre conjuntos numéricos é fundamental pois através deste conhecimento é possível aplicar corretamente algoritmos e entender suas limitações. Uma situação, muito comum, quando se aplica a matemática em outras ciências é entender o significado daquele resultado obtido no problema real proposto.

## 1.2 Conjuntos numéricos

Os conjuntos numéricos têm aplicações desde tempos remotos e foram desenvolvidos ao longo do tempo para contemplar as possibilidades e soluções de problemas práticos.

Imagine uma situação hipotética na qual um indivíduo possua dezenas de animais por exemplo, dezenas de vacas leiteiras. Um vizinho deste indivíduo também possui dezenas de vacas leiteiras. Ambos compartilham o mesmo local para levarem suas vacas para se alimentarem. Ambos vivem numa época em que não existe um tipo formal de escrita, sequer números! Ao final do dia eles retornam para suas "residências" juntamente com seus animais.

O leitor pode imaginar que em algum momento isso possa gerar alguma confusão, não é? A confusão é que algum dos dois possa ter, ao final do dia, menos ou mais animais que realmente possuíam ao sair pela manhã. Este tipo de problema poderia ter acontecido e precisaria de uma solução.

Talvez, a solução encontrada seja uma espécie de contagem através de comparação. Para cada animal existente em sua casa, haveria uma "pedra". Assim, ao sair pela manhã, cada vaca que deixasse o estaleiro uma pedra seria adicionada a um tipo de bolsa rudimentar que o indivíduo carregaria consigo durante a viagem.

Ao voltar para sua casa, a comparação aconteceria novamente mas de modo inverso, ou seja, para cada vaca que entrasse no estaleiro, uma pedra seria retirada da bolsa. Deste modo, poderiam acontecer 3 situações possíveis, com a quantidade de pedras da bolsa:

1. Sobrar pedras: isso indicaria que algumas vacas não chegaram à sua casa;
2. Faltar pedras: isso indicaria que ele estava com mais vacas, possivelmente sendo alguma de seu vizinho;
3. Não sobrar pedras: todas as vacas que saíram, retornaram e se juntaram no estaleiro.

Esse processo funcionaria bem, até que o número de animais se tornasse grande o suficiente para ser inviável carregar todas as pedras em sua bolsa. Um sistema de contagem/registro seria interessante!

Desse modo, é possível pensar na aplicabilidade do conjunto dos *Número Naturais*, ou seja, da natureza!

O conjunto dos *Número Naturais*, será definido como segue:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

É possível verificar um ponto de divergência em relação a outros autores de livros de matemática: o número 0 (zero) não será definido como número natural pois dificilmente o leitor ouvirá alguém dizendo "*Eu possuo ZERO Ferrari!*" ou algo do tipo "*Eu tenho ZERO reais na carteira!*".

A evolução continuou a acontecer e a necessidade de novos conjuntos numéricos foram aparecendo. A ideia de números negativos, comum para a atualidade nas relações financeiras, podem ser representados pelo conjunto dos *Números Inteiros* e pode ser definido como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Ressalta-se que o número 0 (zero), foi incorporado neste momento no conjunto entretanto, provavelmente ele foi o último algarismo a ser criado. O leitor pode fazer pesquisas adicionais para saber sobre a história do número 0.

Pagamento de impostos sobre terras, construções de prédios, entre outros, levaram a humanidade a desenvolver um novo conjunto de números, os *Números Racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

No entanto, esses números não podiam descrever todas as situações possíveis. Um exemplo disso é o famoso problema proposto por Pitágoras juntamente com seu teorema.

**Teorema 1.2.1 — Teorema de Pitágoras.** Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Porém, dado um triângulo retângulo com catetos iguais a 1, tem-se:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$

$$c^2 = 1 + 1$$

$$c^2 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$

Neste ponto, começaram os problemas para Pitágoras. Até o momento, não existia solução para descrever o número  $\sqrt{2}$ . Muito tempo passou e esse tipo de número, os números que não podem ser escritos de modo *Racional*, foram definidos como *Números Irracionais*. Alguns exemplos desses números pode ser visto abaixo:

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \dots\}$$

O conjunto dos *Números Irracionais* é infinito!

Assim, tudo parecia estar bem resolvido pois a **união** entre os *Números Racionais* e *Números Irracionais* foi definido como *Números Reais*.

Mas haveria um tipo de problema que poderia deixar, novamente, os matemáticos com os cabelos em pé. Seja a equação do segundo grau  $x^2 + 4 = 0$  e calcule as suas raízes:

$$\begin{aligned}x^2 + 4 &= 0 \\x^2 + 4 - 4 &= 0 - 4 \\x^2 + 0 &= -4 \\x^2 &= -4 \\x &= \pm\sqrt{-4}\end{aligned}\tag{1.1}$$

O leitor pode concluir, dependendo de sua formação matemática anterior, que este resultado, simplesmente, não existe. O que está profundamente equivocado!

A solução para este tipo de problema veio através da criação de um conjunto de números chamado *Números Complexos* com a seguinte definição:

$$i = \sqrt{-1}$$

Enfim, o Problema 1.1 fica:

$$\begin{aligned}x &= \pm\sqrt{-4} \\x &= \pm\sqrt{4 \cdot (-1)} \\x &= \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \\x &= \pm 2 \cdot i\end{aligned}$$

De modo geral, a definição dos *Números Complexos* é:

$$\mathbb{C} = \{a + bi, a \wedge b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$$

### 1.3 Resolução de equações

O leitor deve ter verificado a resolução do Problema 1.1 que apareceu um  $-4$  na resolução. Será explicado os conceitos básicos na resolução deste problema:

■ **Exemplo 1.1**  Calcule a raiz da equação do primeiro grau,  $2x + 4 = 10$ .

**Solução:**

Calcular a raiz dessa equação, significa determinar o valor de  $x$  de modo que a *igualdade* aconteça. Assim, inicia-se o processo copiando a equação dada no enunciado:

$$2x + 4 = 10$$

Para determinar o valor da variável  $x$  faz-se necessário isolar a variável em um dos lados da equação. Neste caso, será isolado do lado esquerdo da equação. O leitor pode ter imaginado que seria apenas *passar o 4 para o outro lado com o sinal invertido*, mas se o sinal é de uma *igualdade*, então passar algo de um lado para outro *desequilibraria* a equação e o sinal de = não seria conveniente.

O **correto** é adicionar elementos em *ambos os lados da igualdade*. Neste caso, percebe-se que o número  $+4$  está do mesmo lado que a variável, logo ele está "*atrapalhando*", no entanto, se for adicionado  $-4$  em ambos os lados da equação, resultará:

$$2x + 4 - 4 = 10 - 4$$

A escolha do  $-4$  não foi aleatória. No conjunto dos Número Reais, *todo elemento* (no caso

+4) operado (operação + usual) com seu simétrico ( $-4$ ) resulta no elemento neutro (0 - zero) da operação (+), logo:

$$2x + 0 = 6$$

Como visto acima, 0 é o *elemento neutro da operação de soma*, logo, qualquer elemento operado com o 0, resultado nele mesmo, assim:

$$2x = 6$$

É popularmente conhecido, neste passo, "*se está multiplicando, então passa dividindo*", mas acredito que o leitor queira saber o conceito correto, não é mesmo? A raiz de uma equação está relacionada com o valor de  $x$  e não de  $2x$ , logo, se multiplicar ambos os lados da equação por  $\frac{1}{2}$  ter-se-á:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Novamente, o  $\frac{1}{2}$  não foi escolhido aleatoriamente, ele foi escolhido por ser o *elemento inverso do 2*. No conjunto dos números Reais, *toda elemento (no caso, 2) operado ( $\cdot$ ) com seu inverso ( $\frac{1}{2}$ ) resulta no elemento neutro (1) da operação (multiplicação,  $\cdot$ )*, assim:

$$1 \cdot x = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

Como o 1 é o *elemento neutro da multiplicação*, então  $1 \cdot x = x$ , logo:

$$x = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

A multiplicação de frações é feita através da multiplicação entre os *numeradores* e os *denominadores* de cada fração, logo:

$$x = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{6}{2}$$

Assim, o número que multiplicado por 2 (denominador) resulta em 6 (numerador) é o 3, então:

$$x = 3$$

Para verificar se o resultado obtido está correto basta substituir o valor de  $x$  calculado na equação do enunciado, então:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 10 \\ 2 \cdot 3 + 4 &= 10 \\ 6 + 4 &= 10 \\ 10 &= 10 \quad \text{Verdade!} \end{aligned}$$

Assim,  $x = 3$  é a raiz da equação. É possível representar a solução da equação assim:  $S = \{3\}$ .

**Doutor Exatas:** <https://www.youtube.com/watch?v=JY6BJWb1PVY>

■

Os conceitos abordados no exemplo é de fundamental importância para o entendimento da

matemática, tornando-a menos "*complicada*" conforme o leitor avança nos estudos. O leitor poderá ver alguns outros conceitos, tal como regras de sinais (🔴) no link <https://www.youtube.com/watch?v=IykgcfYnsaQ>.

Todo este material possuirá, como mencionado no Prefácio, uma breve teoria seguido por exemplos resolvidos; com o mesmo nível de detalhamento do exemplo anterior.





## 2. Funções

### 2.1 Introdução

O estudo de funções é importante entretanto, no dia a dia da maior parte das pessoas, este estudo não faz sentido, num primeiro momento. Porém não é difícil imaginar que em toda a vida de uma pessoa ela esteja direta, ou indiretamente, ligada com as funções. Desde a elaboração de uma receita de um bolo, a quilometragem que um determinado veículo pode fazer com um tanque de combustível, a *Receita*, o *Custo* e o *Lucro* de uma empresa.

Considere os ingredientes necessários para se fazer um (uma receita) bolo (hipotético):

- 4 ovos;
- 1 litro de leite;
- 1 kg de farinha.

Como mencionado, os ingredientes acima estão relacionadas para se fazer *uma receita* ou *um bolo*. Se o indivíduo deseja fazer *duas receitas*, ou *dois bolos*, a quantidade dos ingredientes deve dobrar! Assim:

- $4 \text{ ovos} \times 2 \Rightarrow 8 \text{ ovos}$ ;
- $1 \text{ litro de leite} \times 2 \Rightarrow 2 \text{ litros de leite}$ ;
- $1 \text{ kg de farinha} \times 2 \Rightarrow 2 \text{ kg de farinha}$ .

Se uma empresa fabrica um produto por um custo de R\$10,00 a unidade e o vende a R\$15,00 a unidade e tem custos de aluguel, água, energia elétrica, entre outros que totalizam R\$1000,00 por mês é possível escrever sua função *Custo*, *Receita* e *Lucro* da seguinte forma:

$$R(x) = 15,00 \cdot x$$

$$C(x) = 10,00 \cdot x + 1000,00$$

$$L(x) = 5,00 \cdot x - 1000,00$$

onde  $x$  representa a quantidade de itens produzidos e vendidos.

## 2.2 Domínio, imagem, relação e função

Esta seção se inicia com a ideia de *Relação*. A relação deve acontecer entre dois conjuntos numéricos,  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , por exemplo.

A *Relação* poderá receber o nome de *Função* se, e somente se, todo elemento do conjunto de partida ( $\mathbb{A}$ , por exemplo), tenha um, apenas um, correspondente no conjunto de destino ( $\mathbb{B}$ ), através de uma lei. Matematicamente, uma função pode ser escrita assim:

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}, \forall x \in \mathbb{A}, \exists y \in \mathbb{B} / y = f(x)$$

Vale notar que  $x$  é a *variável independente* e  $y$  é a *variável dependente* pois depende de  $x$ . De modo geral, o primeiro conjunto da definição de uma função está relacionado com a *variável independente*, pois é o conjunto de partida e a *variável dependente* está relacionada com o segundo conjunto, pois é o conjunto de chegada.

Como o objetivo deste material é trabalhar com funções, apenas, não será abordado as relações de modo geral, sendo assim deve ser definido o Domínio (D) e Imagem (Im) de uma função ( $f$ ), sendo:

**Definição 2.2.1 — Domínio de uma função.** O domínio de uma função é um conjunto numérico com os valores possíveis que podem ser atribuídos à *variável independente*.

**Definição 2.2.2 — Imagem de uma função.** A imagem de uma função é um conjunto numérico contendo o resultado de cada elemento do domínio aplicado na função.

■ **Exemplo 2.1** Considere os conjuntos  $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$  e  $\mathbb{B} = \{2, 4, 6, 8\}$  e a função  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} / y = f(x) = 2x$ . Determine o Domínio e a Imagem de  $f$ .

**Solução:**

O conjunto de partida é o conjunto  $\mathbb{A}$  então, ele é o *Domínio* da função ( $D(f)$ ). Os elementos do domínio são atribuídos à *variável independente*,  $x$ .

Os elementos da *Imagem* da função  $f$  são obtidos da seguinte maneira:

- $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
- $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 = 4$
- $x = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 = 6$

Assim, o conjunto *Imagem* é:  $\text{Im} = \{2, 4, 6\}$ . Verifica-se que o conjunto imagem não é o conjunto  $\mathbb{B}$  pois são os elementos que possuem um elemento  $x$  do Domínio. Como o 8 do conjunto  $\mathbb{B}$  não possui um antecessor do conjunto  $\mathbb{A}$ , ele não faz parte da Imagem. ■

As funções, de modo geral, tem o conjunto dos *Números Reais* como *Domínio* e *Imagem*, porém existem funções que o Domínio deve ser determinado, ou seja, será um subconjunto dos Reais.

■ **Exemplo 2.2** Determine o Domínio e a Imagem da função  $f(x) = \frac{1}{x-3}$

**Solução:**

*Determinação do Domínio:* É possível verificar que a função possui uma divisão e a variável independente está no denominador. Este tipo de situação requer que o *denominador seja*

*diferente de zero*, pois, caso contrário, haveria uma indeterminação. Seguindo o analisado, é possível fazer:

$$\begin{aligned}x - 3 &\neq 0 \\x - 3 + 3 &\neq 0 + 3 \\x &\neq 3\end{aligned}$$

Logo,  $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$  ou  $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$  ou  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\}$

*Determinação da Imagem:* Para a determinação da imagem é necessário analisar os extremos do domínio. Assim:

- $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ : Se  $x$  aproxima-se do infinito negativo, o denominador torna-se um número muito grande e, conseqüentemente, a divisão aproxima-se de zero;
- $x \rightarrow -3^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$ : Se  $x$  aproxima-se do três negativo pela esquerda, o denominador torna-se um número muito pequeno negativo e, conseqüentemente, a divisão aproxima-se de menos infinito;
- $x \rightarrow -3^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ : Se  $x$  aproxima-se do três negativo pela direita, o denominador torna-se um número muito pequeno positivo e, conseqüentemente, a divisão aproxima-se de mais infinito;
- $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ : Se  $x$  aproxima-se do infinito positivo, o denominador torna-se um número muito grande e, conseqüentemente, a divisão aproxima-se de zero.

Do exposto anteriormente, a Imagem nunca assumirá o valor 0 (zero), assim a imagem será  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*$  ou  $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$  ■

Muitos símbolos foram usados no exemplo anterior porém, os mesmos, serão explicados posteriormente no Capítulo 3.

■ **Exemplo 2.3** Determine o Domínio e a Imagem da função  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

**Solução:**

*Domínio:* Os valores que podem ser colocados na função são valores positivos (funções reais) e, nesse caso, o zero. Valores negativos dentro da raiz quadrada resultam em resultados pertencentes aos *Número Complexos*, logo:

$$\begin{aligned}x + 2 &\geq 0 \\x + 2 - 2 &\geq 0 - 2 \\x &\geq -2\end{aligned}$$

Assim,  $D(f) = [-2, +\infty)$  ou  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$  ■

## 2.3 Raízes de uma função

As raízes de uma função  $f(x)$  pode ser calculada ao fazer  $f(x) = 0$ , ou seja, são os pontos em que a função "corta" o eixo da variável independente. Nos casos de polinômios, o número de raízes é igual ao maior grau da função. Cada tipo de função possui uma metodologia diferente para o cálculo das suas raízes assim, será visto nas seções subseqüentes.

## 2.4 Funções de uma variável real

Difíceis são os processos que dependem apenas de uma variável, ou seja, ao estudar o consumo de combustível de um veículo não pode ser pensado somente na qualidade do combustível, mas deve ser pensado na alinhamento e pressão dos pneus, da temperatura, das condições da rodovia, das manutenções, da qualidade do óleo do motor, do modo como o veículo é conduzido (esta variável bem estudada resulta em economia de 30% no consumo de combustível), entre outros fatores.

Como visto na seção anterior, "geralmente" se atribui  $x$  a *variável independente* e  $y$  ou  $f(x)$  a *variável dependente*, assim, tem-se duas variáveis. Mas como é possível ter duas variáveis sendo que a seção trata de *funções de uma variável*?

A resposta é simples: Funções de uma variável é o nome dado às funções que possuem uma, e apenas uma, *variável independente*.

■ **Exemplo 2.4** A área do quadrado pode ser representada por uma função de uma variável. Como a área do quadrado é a multiplicação dos dois lados, e os quatro lados são iguais, então:

$$A_Q(l) = l \cdot l = l^2$$

onde  $l$  é a medida do lado do quadrado. ■

■ **Exemplo 2.5** A área de um retângulo é uma função de duas variáveis, pois sua área é a multiplicação de dois lados consecutivos. Como os lados do retângulo são iguais aos seus lados opostos, e não necessariamente precisam ter os quatro lados iguais, então:

$$A_R(a, b) = a \cdot b$$

onde  $a$  e  $b$  são as medidas dos lados de um retângulo. ■

## 2.5 Funções lineares

As *funções lineares* ou *funções do primeiro grau* ou *funções de grau um* são funções do tipo:

$$f(x) = ax + b$$

Onde:

- $f$ : nome da função;
- $x$ : variável independente;
- $f(x)$ : variável dependente;
- $a$ : coeficiente angular;
- $b$ : coeficiente linear.

Um ponto importante para observar é o coeficiente angular. Este valor permite identificar se a função é *crescente* ( $a > 0$ ) ou *decrecente* ( $a < 0$ ). Caso  $a = 0$ , tem-se uma função constante igual a  $f(x) = b$ , ou seja, para funções do primeiro grau a condição é que ( $a \neq 0$ )

De modo geral, uma função  $f(x)$  é crescente quando para quaisquer dois valores  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes ao  $\text{Dom}(f)$ , se  $x_2 > x_1$ , então  $f(x_2) > f(x_1)$ . Se  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$  então a função será decrescente.

■ **Exemplo 2.6** Determine se a função  $f(x) = 2x + 4$  é crescente ou decrescente.

**Solução:**

É possível verificar que o coeficiente angular é igual a 2 e é maior do que zero, no entanto, tomando  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$  tem-se  $f(x_1) = f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$  e  $f(x_2) = f(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$ , assim,  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$  logo,  $f(x)$  é crescente. ■

■ **Exemplo 2.7** Determine se a função  $f(x) = -x + 4$  é crescente ou decrescente.

**Solução:**

É possível verificar que o coeficiente angular é igual a  $-1$  e é menor do que zero, no entanto, tomando  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$  tem-se  $f(x_1) = f(0) = -1 \cdot 0 + 4 = 4$  e  $f(x_2) = f(2) = -1 \cdot 2 + 4 = 2$ , assim,  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$  logo,  $f(x)$  é decrescente. ■

## 2.6 Raíz de funções lineares

Como mencionado anteriormente, para determinar a raiz de um função é necessário fazer  $f(x) = 0$ . Como o maior grau das funções lineares é igual a "um" então, ter-se-á, apenas, uma raiz.

■ **Exemplo 2.8** Calcule a raiz da função  $f(x) = -x + 4$

**Solução:**

Fazendo  $f(x) = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x + 4 &= 0 \\ -x + 4 - 4 &= 0 - 4 \\ (-1) \cdot -x &= -4 \quad \cdot (-1) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Assim,  $x = 4$  é a raiz da função  $f(x) = -x + 4$ . ■

## 2.7 Gráficos de funções lineares

Em construção

## 2.8 Funções quadráticas

As *funções quadráticas* ou *funções do segundo grau* ou *funções de grau dois* são funções do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Onde:

- $f$ : nome da função;
- $x$ : variável independente;
- $f(x)$ : variável dependente;
- $a$ ,  $b$  e  $c$ : são coeficientes.

Um ponto importante para observar é o coeficiente  $a$ . Este valor permite identificar se a função possui *concavidade para cima* ( $a > 0$ ) ou *concavidade para baixo* ( $a < 0$ ). Caso  $a = 0$ , tem-se uma função linear igual a  $f(x) = bx + c$ , ou seja, para funções do segundo grau a condição é que ( $a \neq 0$ ).

## 2.9 Raízes de funções quadráticas

Para o caso de funções do segundo grau, as raízes podem ser calculadas através da, tão conhecida, fórmula de Bháskara, que é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

O termo dentro da raiz quadrada,  $b^2 - 4ac$ , é conhecido como delta  $\Delta$ .

■ **Exemplo 2.9** Calcule a raiz da função  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

*Solução:*

Fazendo  $f(x) = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

O próximo passo é identificar os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Para a equação acima, tem-se:

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

Determinado os valores dos coeficientes, calcula-se o valor de  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \\ &= (-5) \cdot (-5) - 24 \\ &= 25 - 24 \\ \Delta &= 1 \quad (\text{Caso1 : } \Delta > 0) \end{aligned}$$

Nesta parte, deverá ser substituído os valores dos coeficientes e o  $\Delta$  calculado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \\ x_1 &= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 &= \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

Assim, as raízes podem ser representadas através do conjunto solução  $\mathbb{S} = \{2, 3\}$  ■

■ **Exemplo 2.10** Calcule a raiz da função  $f(x) = x^2 - 4x + 4$

*Solução:*

Fazendo  $f(x) = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

O próximo passo é identificar os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Para a equação acima, tem-se:

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 4$$

Determinado os valores dos coeficientes, calcula-se o valor de  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= (-4) \cdot (-4) - 16 \\ &= 16 - 16 \\ \Delta &= 0 \quad (\text{Caso 2 : } \Delta = 0) \end{aligned}$$

Nesta parte, deverá ser substituído os valores dos coeficientes e o  $\Delta$  calculado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm 0}{2} \Rightarrow \\ x_1 &= \frac{4 + 0}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 &= \frac{4 - 0}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

Assim, as raízes podem ser representadas através do conjunto solução  $\mathbb{S} = \{2\}$

■

■ **Exemplo 2.11** Calcule a raiz da função  $f(x) = x^2 - 6x + 13$

**Solução:**

Fazendo  $f(x) = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 6x + 13 &= 0 \end{aligned}$$

O próximo passo é identificar os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Para a equação acima, tem-se:

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 13$$

Determinado os valores dos coeficientes, calcula-se o valor de  $\Delta$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 \\
 &= (-6) \cdot (-6) - 52 \\
 &= 36 - 52 \\
 \Delta &= -16 \quad (\text{Caso 3: } \Delta < 0)
 \end{aligned}$$

Nesta parte, deverá ser substituído os valores dos coeficientes e o  $\Delta$  calculado:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} \xrightarrow{1.1} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} \\
 &= \frac{6 \pm 4 \cdot i}{2} \Rightarrow \\
 x_1 &= \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i \\
 x_2 &= \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i
 \end{aligned}$$

Assim, as raízes podem ser representadas através do conjunto solução  $\mathbb{S} = \{3 \pm 2i\}$  ■

## 2.10 Gráficos de funções quadráticas

Os gráficos de funções de segunda grau podem apresentar 6 formas diferentes, que são:

- Caso 1:  $a > 0$  e  $\Delta > 0 \Rightarrow$  Parábola com concavidade para **cima** e duas **raízes reais distintas**;
- Caso 2:  $a > 0$  e  $\Delta = 0 \Rightarrow$  Parábola com concavidade para **cima** e duas **raízes reais iguais**;
- Caso 3:  $a > 0$  e  $\Delta < 0 \Rightarrow$  Parábola com concavidade para **cima** e duas **raízes complexas**;
- Caso 4:  $a < 0$  e  $\Delta > 0 \Rightarrow$  Parábola com concavidade para **baixo** e duas **raízes reais distintas**;
- Caso 5:  $a < 0$  e  $\Delta = 0 \Rightarrow$  Parábola com concavidade para **baixo** e duas **raízes reais iguais**;
- Caso 6:  $a < 0$  e  $\Delta < 0 \Rightarrow$  Parábola com concavidade para **baixo** e duas **raízes complexas**;

Para fazer o gráfico é necessário conhecer alguns pontos fundamentais da função:

1. **Raízes:** Todas as funções do segundo grau possuem raízes, no entanto, as raízes complexas não podem ser representadas no plano real;
2. **Vértice:** Todas as funções do segundo grau possuem vértices. Os vértices nessas funções representam um ponto de **extremo**, que pode ser **máximo** ( $a < 0$ ) ou **mínimo** ( $a > 0$ );
3. **Intercepto com o eixo vertical:** Este valor implica onde a função "corta o eixo  $y$ ".



■ **Exemplo 2.12** (Caso 1) Determine o gráfico da função  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

**Solução:**

Essa função é a mesma do Exemplo 2.9, ou seja, as raízes já foram determinadas ( $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$ ), bem como o valor do  $\Delta$  ( $= 1$ ).

Assim, é necessário determinar o Vértice. A determinação do mesmo pode ser feita usando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-1}{4 \cdot 1} = \frac{-1}{4}$$

Portanto, as coordenadas do Vértice são  $(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4})$ .<sup>a</sup>

O último passo é verificar o intercepto com o eixo vertical, ou seja, determinar o valor de  $f(x)$  quando  $x = 0$ , assim:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

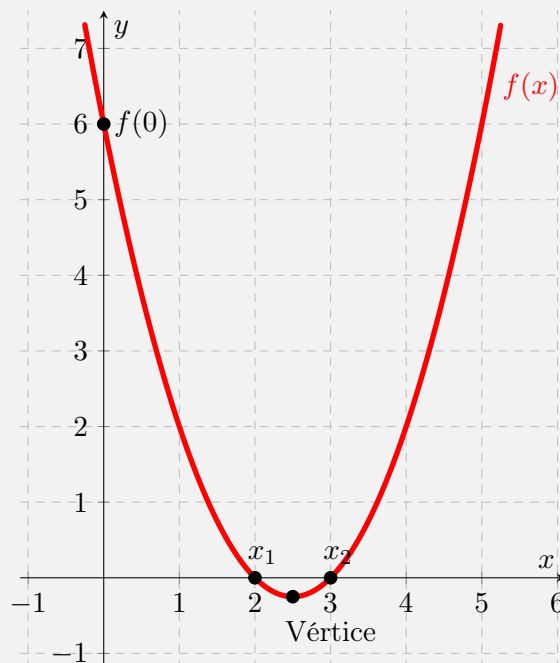
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6$$

$$f(0) = 6$$

Unindo as informações:

1. **Raízes:**  $x_1 = (2, 0)$  e  $x_2 = (3, 0)$
2. **Vértice:**  $(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4})$
3. **Intercepto:**  $(0, 6)$

O gráfico fica:



<sup>a</sup>Um modo mais fácil de representar no plano é usar a representação decimal assim, as coordenadas do vértice ficarão  $(2,5; -0,25)$ . ■

■ **Exemplo 2.13** (Caso 2) Determine o gráfico da função  $f(x) = x^2 - 4x + 4$

**Solução:**

Essa função é a mesma do Exemplo 2.10, ou seja, as raízes já foram determinadas ( $x_1 = x_2 = 2$ ), bem como o valor do  $\Delta$  ( $= 0$ ).

Assim, é necessário determinar o Vértice (V). A determinação do mesmo pode ser feita usando:

$$\begin{aligned}x_v &= \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \\y_v &= \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-0}{4 \cdot 1} = 0\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas de V são  $(2,0)$ .

O último passo é verificar o intercepto com o eixo vertical, ou seja, determinar o valor de  $f(x)$  quando  $x = 0$ , assim:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 4x + 4 \\x = 0 &\Rightarrow f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 4 \\f(0) &= 4\end{aligned}$$

Unindo as informações:

1. **Raízes:**  $x_1 = x_2 = (2,0)$
2. **Vértice:**  $(2,0)$
3. **Intercepto:**  $(0,4)$

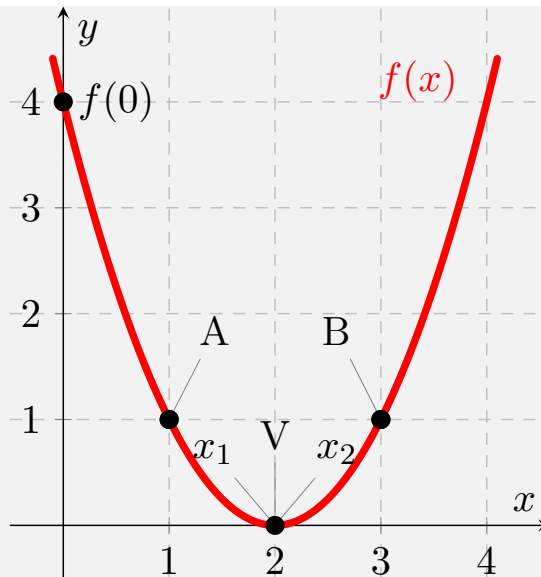
Das informações anteriores, é possível verificar que as raízes ( $x_1$  e  $x_2$ ) têm a mesma coordenada que V, ou seja,  $(2,0)$ . O processo, nesse caso, fica um pouco complicado pois, na realidade, existem dois pontos apenas: o intercepto e o ponto  $(2,0)$ .

Para resolver esse problema, deve ser escolhido dois valores para  $x$ , calcular suas imagens ( $f(x)$ ) e usá-los como complemento<sup>a</sup>. Assim, escolhendo  $x_3 = 1$  e  $x_4 = 3$ , tem-se:

$$\begin{aligned}x_3 = 1 &\Rightarrow f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1 \\x_4 = 3 &\Rightarrow f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1\end{aligned}$$

É possível chamar essas coordenadas calculadas, de pontos,  $A$  e  $B$ , sendo assim,  $A = (1,1)$  e  $B = (3,1)$

Logo, o gráfico fica:



<sup>a</sup>Sugestão: sabendo o  $x_v$ , neste exemplo  $x_v = 2$ , escolhe-se dois valores para  $x$  ( $x_3$  e  $x_4$ , por exemplo), de modo que  $|x_v - x_3| = |x_v - x_4|$ . Essa escolha baseia-se no fato de que, pelo vértice é possível imaginar um *eixo de simetria*.

■ **Exemplo 2.14** (Caso 3) Determine o gráfico da função  $f(x) = x^2 - 6x + 13$

**Solução:**

Essa função é a mesma do Exemplo 2.11, ou seja, as raízes já foram determinadas ( $x_1 = 3 - 2i$  e  $x_2 = 3 + 2i$ ), bem como o valor do  $\Delta$  ( $= -16$ ).

A determinação do vértice pode ser feita usando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(-16)}{4 \cdot 1} = \frac{16}{4} = 4$$

Portanto, as coordenadas do Vértice são  $(3, 4)$ .

O último passo é verificar o intercepto com o eixo vertical, ou seja, determinar o valor de  $f(x)$  quando  $x = 0$ , assim:

$$f(x) = x^2 - 6x + 13$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 13$$

$$f(0) = 13$$

Unindo as informações:

1. **Raízes:**  $x_1 = 3 - 2i$  e  $x_2 = 3 + 2i$
2. **Vértice:**  $(3, 4)$
3. **Intercepto:**  $(0, 13)$

Das informações anteriores, é possível verificar que as raízes ( $x_1$  e  $x_2$ ) pertencem ao conjunto dos números complexos e não têm representação no plano real. O processo, nesse caso, fica um pouco complicado pois, na realidade, existem dois pontos apenas: o intercepto e o vértice (3, 4).

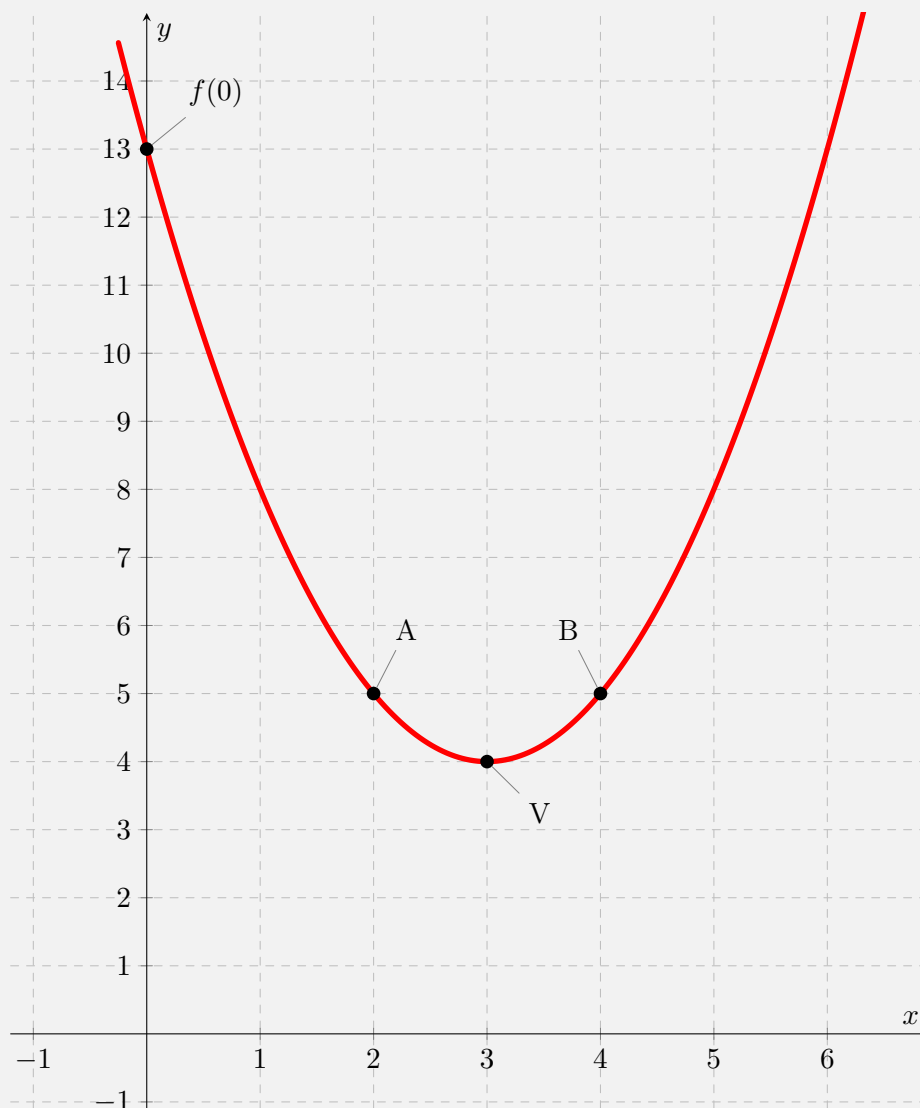
Para resolver esse problema, deve ser escolhido dois valores para  $x$ , calcular suas imagens ( $f(x)$ ) e usá-los como complemento. Assim, escolhendo  $x_3 = 2$  e  $x_4 = 4$ , tem-se:

$$x_3 = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 13 = 5$$

$$x_4 = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 13 = 5$$

É possível chamar essas coordenadas calculadas, de pontos,  $A$  e  $B$ , sendo assim,  $A = (2, 5)$  e  $B = (4, 5)$

O gráfico fica:



Os casos em que o valor de  $a$  forem menores que zero, o processo é semelhante, no entanto, o resultado será uma parábola com a **concavidade para baixo**.

<b>3</b>	<b>Limites de funções de uma variável . .</b>	<b>31</b>
3.1	Conceito de limite	
3.2	Limites de funções polinomiais	
3.3	Continuidade de funções	
<b>4</b>	<b>Derivadas de funções de uma variável</b>	<b>33</b>
4.1	Taxa de variação	
4.2	Interpretação geométrica	
4.3	Regras de derivação	
<b>5</b>	<b>Integrais .....</b>	<b>35</b>
5.1	Somas infinitas	
5.2	Integrais indefinidas	
5.3	Integrais definidas	
5.4	Cálculo de áreas	
5.5	Aplicações das integrais na Administração	



## 3. Limites de funções de uma variável

- 3.1 Conceito de limite
- 3.2 Limites de funções polinomiais
- 3.3 Continuidade de funções





## 4. Derivadas de funções de uma variável

4.1 Taxa de variação

4.2 Interpretação geométrica

4.3 Regras de derivação

4.3.1 Função constante

4.3.2 Função polinomial

4.3.3 Função exponencial

4.3.4 Função logarítmica

4.3.5 Produto

4.3.6 Quociente

4.3.7 Cadeia



## 5. Integrais

- 5.1 Somas infinitas
- 5.2 Integrais indefinidas
- 5.3 Integrais definidas
- 5.4 Cálculo de áreas
- 5.5 Aplicações das integrais na Administração



# III

# Álgebra Linear

<b>6</b>	<b>Matrizes</b> .....	<b>39</b>
6.1	Conceitos iniciais	
6.2	Igualdade entre matrizes	
6.3	Adição e subtração de matrizes	
6.4	Tipos de matrizes	
<b>7</b>	<b>Determinantes</b> .....	<b>47</b>
7.1	Determinantes	
<b>8</b>	<b>Sistemas de Equações Lineares</b> .....	<b>51</b>
8.1	Sistemas de Equações Lineares	



## 6. Matrizes

### 6.1 Conceitos iniciais

Uma matriz pode ser definida como uma *coleção de elementos* e cada elemento possui uma posição definida através dos indicadores  $i$  e  $j$ , sendo  $i$  o indicador para a linha e  $j$  o indicador para a coluna. Os valores possíveis para  $i, j$  são valores naturais<sup>1</sup> ( $i, j \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ), ou inteiros positivos diferente de zero ( $i, j \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ). A representação de um elemento é dada por:

$$a_{ij}$$

no caso acima, o elemento possui o nome  $a$  com uma posição qualquer  $i, j$ . Os nomes dos elementos costumam seguir o mesmo nome da matriz que os contém, mas em letra minúscula. Assim, se a matriz tiver o nome  $\mathbb{A}$  seus elementos serão  $a_{ij}$ , se a matriz se chamar  $\mathbb{B}$  seus elementos serão  $b_{ij}$  e assim sucessivamente. Os nomes das matrizes são em letras maiúsculas com uma barra dupla em sua construção. Existem, também, os indicadores para as matrizes; esses indicadores são chamados de *Ordem da matriz*, ou seja, representa o número de linhas e de colunas. Logo, uma matriz chamada  $\mathbb{A}$  com 2 linhas e 3 colunas é escrita da seguinte forma:

$$\mathbb{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Desse modo temos a representação de uma *matriz* e de todos os seus *elementos*. É possível verificar que o número de elementos da matriz é 6. De modo geral, o número de elementos ( $\#_{\text{elementos}}$ ) de uma matriz será o resultado da *multiplicação* do número de *linhas* pelo número de *colunas*, assim:

$$\#_{\text{elementos}} = i \cdot j$$

■ **Exemplo 6.1** Determine o número de elementos da matriz  $\mathbb{A}_{3 \times 5}$ .

Na matriz do enunciado tem-se  $i = 3$  (linhas) e  $j = 5$  (colunas). Logo, o número de elementos

<sup>1</sup>O autor considera números naturais os positivos diferentes de zero pois, *naturalmente*, não dizemos "*Tenho ZERO Ferrari*" para expressar a ideia de que "*NÃO TENHO uma Ferrari*".

dessa matriz será  $i \cdot j = 3 \cdot 5 = 15$  elementos ■

■ **Exemplo 6.2** Considere a matriz

$$\mathbb{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 6 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

escreva todos os elementos colocando sua posição corretamente.

Como o nome da matriz dada é  $\mathbb{B}$ , os elementos serão escritos pela letra minúscula do nome da matriz, ou seja, os elementos serão  $b_{ij}$ .

- O primeiro elemento está na *linha* 1 e *coluna* 1, então:  $b_{11} = 3$
- O segundo elemento está na *linha* 1 e *coluna* 2, então:  $b_{12} = 7$
- O terceiro elemento está na *linha* 2 e *coluna* 1, então:  $b_{21} = 1$
- O quarto elemento está na *linha* 2 e *coluna* 2, então:  $b_{22} = 6$
- O quinto elemento está na *linha* 3 e *coluna* 1, então:  $b_{31} = 10$
- O sexto elemento está na *linha* 3 e *coluna* 2, então:  $b_{32} = 4$

As representações das matrizes podem ser da seguinte forma, ainda:

$$\mathbb{M}_2 \quad \text{ou} \quad \mathbb{M}_3 \quad \text{ou} \quad \mathbb{M}_4 \dots$$

Nesse caso, as matrizes são chamadas de *matrizes quadradas* pois elas possuem o número de linhas igual ao número de colunas, ou seja,  $i = j$ . O primeiro caso é uma matriz quadrada de ordem 2, a segunda é uma matriz quadrada de ordem 3, a terceira é uma matriz quadrada de ordem 4, e assim sucessivamente.

■ **Exemplo 6.3** Matriz de segunda ordem, ou matriz quadrada de ordem 2:

$$\mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

■ **Exemplo 6.4** Matriz quadrada de ordem 3:

$$\mathbb{B}_3 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

## 6.2 Igualdade entre matrizes

Duas, ou mais, matrizes são iguais quando, nas respectivas posições, todos os elementos são iguais.

■ **Exemplo 6.5** Considere as matrizes

$$\mathbb{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  são iguais, pois  $a_{11} = b_{11} = 1$  e  $a_{12} = b_{12} = 2$  e  $a_{13} = b_{13} = 3$  e



$$a_{21} = b_{21} = 6 \text{ e } a_{22} = b_{22} = 5 \text{ e } a_{23} = b_{23} = 4 \quad \blacksquare$$

■ **Exemplo 6.6** Considere as matrizes

$$\mathbb{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  NÃO são iguais. Embora  $a_{11} = b_{11} = 1$  e  $a_{12} = b_{12} = 2$  e  $a_{13} = b_{13} = 3$  e  $a_{21} = b_{21} = 6$  e  $a_{22} = b_{22} = 5$ , tem-se que  $a_{23} \neq b_{23}$  ■

■ **Exemplo 6.7** Determine os valores de  $x$  e  $y$  de modo que as matrizes abaixo sejam iguais:

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & x+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ y-7 & 5 \end{bmatrix}$$

Analisando as matrizes, verifica-se que  $a_{11} = b_{11} = 1$  e  $a_{22} = b_{22} = 5$ . O elemento  $a_{12} = x + 10$  e  $b_{12} = 25$  devem ser iguais, ou seja:

$$a_{12} = b_{12}$$

$$x + 10 = 25$$

$$x + 10 - 10 = 25 - 10$$

$$x = 15$$

De modo análogo, o elemento  $a_{21} = 3$  e  $b_{21} = y - 7$  devem ser iguais, assim:

$$a_{21} = b_{21}$$

$$3 = y - 7$$

$$3 + 7 = y - 7 + 7$$

$$10 = y$$

Substituindo os valores calculados,  $x$  e  $y$ , tem-se:

$$\mathbb{A}_2 = \mathbb{B}_2 \tag{6.1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 15+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 10-7 & 5 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$


$$\begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

■

### 6.3 Adição e subtração de matrizes

A adição, ou subtração, de matrizes só podem ser feitas se a(s) matriz(es) possuir/possuírem a mesma ordem. Assim,  $\mathbb{A}_{ixj}$  e  $\mathbb{B}_{ixj}$  podem ser somadas e/ou subtraídas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{ixj} \pm \mathbb{B}_{ixj} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1j} \pm b_{1j} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2j} \pm b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} \pm b_{i1} & a_{i2} \pm b_{i2} & \cdots & a_{ij} \pm b_{ij} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

■ **Exemplo 6.8**  Considere as matrizes abaixo e efetue a adição entre elas, ou seja,  $\mathbb{A} + \mathbb{B}$

$$\mathbb{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Partindo das matrizes dadas, podemos escrever:

$$\mathbb{A}_{2 \times 3} + \mathbb{B}_{2 \times 3} = \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+3 & 3+5 & -5+6 \\ 2+(-2) & 6+4 & 4+10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

*Doutor Exatas:* <https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg> ■

### 6.3.1 Multiplicação de um escalar por uma matriz

Esse tipo de multiplicação pode ser entendido como *um número multiplicando uma matriz*, sendo assim, matematicamente, basta multiplicar todos os elementos da matriz pelo número que está multiplicando a matriz.

Nesse momento a notação se faz necessária, pois numa expressão do tipo  $x \cdot y$  não fica evidente quem é a matriz e quem é o escalar, ou se são duas matrizes, ou se são dois escalares! Então dado um escalar  $a$  e uma matriz  $\mathbb{A}_{ij}$  a multiplicação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
a \cdot \mathbb{A}_{ixj} &= a \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & \cdots & a \cdot a_{1j} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & \cdots & a \cdot a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a \cdot a_{i1} & a \cdot a_{i2} & \cdots & a \cdot a_{ij} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Embora seja um pouco confuso, devido a quantidade de letras “a”, isso foi escolhido propositalmente para o entendimento de um conceito: o escalar  $a$  é diferente de todos os elementos da matriz pois não possui indicadores, ou seja, subíndice.

■ **Exemplo 6.9** Calcule o valor de  $2 \cdot \mathbb{A} + 4 \cdot \mathbb{B}$  sendo

$$\mathbb{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Para calcular, basta substituir os valores das matrizes, multiplicar pelo escalar e somar as matrizes. Mesmo sabendo o procedimento para calcular a expressão dada, é importante verificar a ordem das matrizes envolvidas na expressão, pois após a multiplicação pelo escalar, haverá uma soma e, como visto anteriormente, só é possível somar matrizes se elas forem da mesma ordem!

$$2 \cdot \mathbb{A} + 4 \cdot \mathbb{B} = \quad (6.7)$$

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 & 4 \cdot 5 & 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 10 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -10 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 20 & 24 \\ -8 & 16 & 40 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 12 & 6 + 20 & -10 + 24 \\ 4 + (-8) & 12 + 16 & 8 + 40 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 26 & 14 \\ -4 & 28 & 48 \end{bmatrix}$$

■

### 6.3.2 Multiplicação entre matrizes

Nesse momento é necessário fazer uma análise mais criteriosa sobre as matrizes. A multiplicação de matrizes NÃO é comutativa, ou seja,  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ . Outro ponto importante na multiplicação entre matrizes é que dada duas matrizes, o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz. Assim, sejam as matrizes  $\mathbb{A}_{i \times j}$  e  $\mathbb{B}_{n \times m}$ , a multiplicação  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$  existirá se, e somente se,  $j = n$  e a multiplicação  $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$  existirá se, e somente se,  $m = i$ .

■ **Exemplo 6.10**  Calcule  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$  para as matrizes abaixo:

$$\mathbb{A}_{1 \times 3} = [1 \quad 2 \quad 3] \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz é a matriz  $\mathbb{A}$  e a segunda matriz é a  $\mathbb{B}$ . Analisando o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz, verifica-se que são iguais a 3, logo, existe a multiplicação proposta no enunciado. Calculando-a:

$$\mathbb{A}_{1 \times 3} \cdot \mathbb{B}_{3 \times 2} = \quad (6.11)$$

$$[1 \quad 2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = [1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8] \quad (6.12)$$

$$= [3 + 4 + 15 \quad 4 + 12 + 24] \quad (6.13)$$

$$= [22 \quad 40]_{1 \times 2}$$

é possível verificar que a matriz resultante possui a ordem  $1 \times 2$  que é, exatamente, o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

**Doutor Exatas:** <https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgg9bg> ■

■ **Exemplo 6.11**  Calcule a multiplicação  $M \cdot N$  sendo

$$M_2 = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Como as matrizes são quadradas de ordem 2, é possível a multiplicação proposta no enunciado, logo

$$M \cdot N = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 4 & (-3) \cdot (-1) + 6 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 7 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 + 24 & 3 + 18 \\ 4 + 28 & -2 + 21 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 21 \\ 32 & 19 \end{bmatrix}$$

é possível verificar que a ordem resultante da multiplicação entre matrizes quadradas é, também, uma matriz quadrada com a mesma ordem. Outro ponto a se notar é que foi omitido o índice de ordem das matrizes na resolução pois, como são matrizes quadradas, não se faz necessário.

**Doutor Exatas:** <https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg> ■

## 6.4 Tipos de matrizes

- **Matriz Linha:** é a matriz que possui somente uma linha. É conhecida, também, como *vetor linha* ou apenas **vetor**;
- **Matriz Coluna:** é a matriz que possui apenas uma coluna e também é conhecida como *vetor coluna*;
- **Matriz Quadrada:** como visto anteriormente, a matriz quadrada é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas;
  - *Diagonal Principal:* a diagonal principal de uma matriz quadrada é aquela em que os elementos possuem os indicadores iguais, ou seja,  $i = j \Rightarrow a_{ii}$ ;
  - *Diagonal Secundária:* é a diagonal formada pelos elementos  $a_{ij}$  de modo que  $i + j = \text{ordem} + 1$ .
  - *Triangular Superior:* matriz onde os elementos **acima** da diagonal principal e os da diagonal principal são diferentes de zero, isto é,  $a_{ij} = 0, i > j$ ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Triangular Inferior:* matriz onde os elementos **abaixo** da diagonal principal e os da diagonal principal são diferentes de zero, isto é,  $a_{ij} = 0, i < j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Diagonal:* matriz onde os elementos da diagonal principal são diferentes de zero, isto é,  $a_{ij} \neq 0, i = j$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Identidade*: matriz onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ou seja,  $a_{ij} = 1, i = j$ . Essa matriz recebe uma representação peculiar,  $\mathbb{I}_n$  ou apenas  $\mathbb{I}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Oposta**: dada uma matriz  $\mathbb{A}$  e uma matriz  $\mathbb{B}$ , é possível dizer que a matriz  $\mathbb{B}$  é oposta a matriz  $\mathbb{A}$  se todos os elementos de  $\mathbb{B}$  forem os elementos simétricos de  $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Transposta**: dada uma matriz  $\mathbb{A}$ , a sua transposta, ou seja,  $\mathbb{A}^t$  terá as suas colunas formadas pelas linhas de  $\mathbb{A}$ . Vale ressaltar que  $(\mathbb{A}^t)^t = \mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Simétrica**: dada uma matriz  $\mathbb{A}$ , é possível dizer que  $\mathbb{A}$  é simétrica se  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$ .

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \mathbb{A}$$

- **Matriz Antissimétrica**: dada uma matriz  $\mathbb{A}$ , é possível dizer que  $\mathbb{A}$  é antissimétrica se  $-\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$ . Aqui, se faz necessário mais uma observação: necessariamente  $a_{ij} = 0, i = j$ .

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{A}$$

- **Matriz Nula**: é uma matriz onde todos os elementos são iguais a 0 (zero).

$$\mathbf{0}_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Ortogonal**: dada uma matriz  $\mathbb{A}$ , *invertível*, ela será ortogonal se obedecer  $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^{-1}$ .<sup>2</sup>

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>2</sup>Será visto mais adiante como calcular a inversa de uma matriz, no entanto, a ideia é partir de uma equação matricial. Dadas as matrizes  $\mathbb{A}, \mathbb{X}$  e a matriz identidade  $\mathbb{I}$ . A equação base é  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{I}$  e o objetivo é determinar a matriz  $\mathbb{X}$ . O leitor habituado com os métodos tradicionais poderia imaginar que para resolver essa equação bastaria *passar a matriz  $\mathbb{A}$  dividindo*, no entanto, não existe divisão de matrizes, muito menos *passa para lá*. O correto é determinar uma matriz de modo que a multiplicação dela por sua inversa, resulte no elemento neutro da multiplicação entre matrizes; o elemento neutro da multiplicação entre matrizes é a matriz identidade!




## 7. Determinantes

### 7.1 Determinantes

#### 7.1.1 Ordem 2

Os determinantes de matrizes de ordem 2 podem ser calculadas como segue. Considere a matriz  $\mathbb{A}$


$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{a_{11} \cdot a_{22}}^{\text{diagonal principal}} - \underbrace{a_{12} \cdot a_{21}}_{\text{diagonal secundária}}$$

■ **Exemplo 7.1**  Calcule o determinante de  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

O determinante pode ser calculado usando o exposto acima, assim:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

*Doutor Exatas:* <https://www.youtube.com/watch?v=tEotRUk9RDo> ■

■ **Exemplo 7.2**  Calcule o determinante de  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

De modo análogo ao exemplo anterior, tem-se:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{B}) = (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot (-7) = -4 - (+14) = -4 - 14 = -18$$

*Doutor Exatas:* <https://www.youtube.com/watch?v=tEotRUk9RDo> ■

### 7.1.2 Ordem 3

Considere uma matriz de ordem 3. O cálculo do determinante será:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}^{\text{diagonais principais}} - \overbrace{a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}}^{\text{diagonais secundárias}} \quad (7.1)$$

Torna-se um pouco complicado calcular o determinante através da memorização da relação acima, um modo, repetitivo, mais fácil será visto no exemplo a seguir.

■ **Exemplo 7.3**  Calcule o determinante da matriz  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Para resolver, basta copiar as duas primeiras colunas, após a matriz, e seguir um processo análogo ao cálculo do determinante das matrizes de ordem 2, multiplicando as "*diagonais principais*" e **subtraindo** a multiplicação das "*diagonais secundárias*". Essa técnica é conhecida como *Regra de Sarrus*!

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1}^{\text{diagonais principais}} - \underbrace{(3 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3)}_{\text{diagonais secundárias}}$$

$$= 15 + 24 + 12 - (30 + 6 + 24) \quad (7.3)$$

$$= 51 - 60 \quad (7.4)$$

$$= -9$$

*Doutor Exatas:* [https://www.youtube.com/watch?v=z199h\\_aiWds](https://www.youtube.com/watch?v=z199h_aiWds) ■

### 7.1.3 Ordem superior a 3

**Teorema 7.1.1 — Teorema de Laplace.** O determinante de uma matriz é igual a soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos complementos algébricos.

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathbb{A}_{-i-j})$$

sendo:

- $n$  a ordem da matriz;
- $i$  e  $j$  são os índices que representam a linha e coluna, respectivamente;
- $a_{ij}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna;
- $\det(\mathbb{A}_{-i-j})$  é o determinante da matriz formada pela **remoção** da *linha*  $i$  e *coluna*  $j$ .

O teorema anterior é o Teorema de Laplace que estabelece um modo de calcular os determinantes de matrizes de ordem  $n$ . Note que a aplicação desse teorema serve, também, para matrizes de ordem 2 ou 3.

■ **Exemplo 7.4**  Calcule o determinante da matriz  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

A matriz é de ordem 3 ( $n = 3$ ). Inicialmente é necessário escolher uma linha qualquer da matriz. Suponha a escolha da linha 1 ( $i = 1$ ). A linha 1 possui os elementos  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{13}$ . Assim o determinante ficará:



$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathbb{A}_{-i-j}) \\
&= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(\mathbb{A}_{-1-j}) \\
&= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right) \\
&\quad + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right) \\
&= (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) + (-1)^3 \cdot 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \\
&\quad + (-1)^4 \cdot 3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 3 - 6 \cdot 1) - 1 \cdot 2 \cdot (4 \cdot 3 - 6 \cdot 2) + 1 \cdot 3 \cdot (4 \cdot 1 - 5 \cdot 2) \\
&= 1 \cdot (15 - 6) - 2 \cdot (12 - 12) + 3 \cdot (4 - 10) \\
&= 1 \cdot 9 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-6) \\
&= 9 - 0 - 18 \\
&= 9 - 18 \\
&= -9
\end{aligned}$$

**Doutor Exatas:** <https://www.youtube.com/watch?v=WHPNHxdKDyg> ■

O resultado obtido é o mesmo calculado utilizando a *regra de Sarrus* para matrizes de ordem 3. Comparando os dois exemplos, o leitor concluirá (facilmente!) que é muito simples, e rápido, calcular o determinante pela regra mencionada. No entanto, a regra de Sarrus pode ser utilizada para matrizes de ordem 3, ou seja, para matrizes de ordem maior (4, 5, 6, ...) o método é o utilizado nesta seção<sup>1</sup>.

#### 7.1.4 Regra do Cadarço (Fórmula de Gauss)


Embora esta seção esteja dentro do capítulo sobre *Determinantes* a *Regra do Cadarço* é um método para calcular áreas (*Fórmula de Gauss para cálculo de área*). NÃO se trata de determinantes de matrizes NÃO QUADRADAS. Os Determinantes são exclusivos das matrizes quadradas.

A fórmula pode ser representada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |(x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)|$$

sendo:

- $n$  o número de vértices do polígono;
- $A$  a área do polígono;
- $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  as coordenadas dos vértices.

■ **Exemplo 7.5**  Calcule a área da figura formada pelos pontos  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  e  $(0, 2)$

Os pontos do enunciado formam um quadrado de lado 2, desse modo, a área resultante deverá ser igual a 4, pois  $2 \cdot 2 = 4$ . Para aplicar a Regra do Cadarço é necessário definir:

- $n = 4$  pois existem 4 pontos!;

<sup>1</sup>Existem outros métodos e não serão abordados neste material. O leitor pode facilmente encontrar fazendo buscas na internet e em livros.

- $P_1 : (0, 0) \Rightarrow x_1 = 0$  e  $y_1 = 0$ ;
- $P_2 : (2, 0) \Rightarrow x_2 = 2$  e  $y_2 = 0$ ;
- $P_3 : (2, 2) \Rightarrow x_3 = 2$  e  $y_3 = 2$ ;
- $P_4 : (0, 2) \Rightarrow x_4 = 0$  e  $y_4 = 2$ .

Substituindo na Fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |(x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)| \quad (7.5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + \sum_{i=1}^{4-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)| \quad (7.6)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + \sum_{i=1}^3 (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)| \quad (7.7)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3)| \quad (7.8)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 0 - 0 \cdot 2) + (0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) + (2 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + (2 \cdot 2 - 0 \cdot 2)| \quad (7.9)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |(0 - 0) + (0 - 0) + (4 - 0) + (4 - 0)| \quad (7.10)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |8| \quad (7.11)$$

$$= \frac{8}{2} \quad (7.12)$$

$$= 4$$

**Doutor Exatas:** <https://www.youtube.com/watch?v=N8BoGdXgomk> ■


Embora seja muito mais fácil calcular a área do quadrado utilizando a relação de multiplicação entre os lados, a Regra do Caderço serve para calcular a área de qualquer polígono bastando conhecer seus vértices, apenas.

## 8. Sistemas de Equações Lineares

### 8.1 Sistemas de Equações Lineares

#### 8.1.1 Equações Lineares

Para iniciar o capítulo é importante definir alguns pontos. O leitor nesse momento pode lembrar, da disciplina Matemática, que *funções lineares* são aquelas que resultam em um gráfico no formato de reta, costumeiramente chamadas de *linha*. Vendo o exemplo abaixo é possível retomar, rapidamente, o gráfico de uma função linear.

■ **Exemplo 8.1**  Construa o gráfico da função  $f(x) = 2x + 1$ .

Analisando a função dada, é possível definir algumas coisas através da comparação com a definição geral de funções lineares:

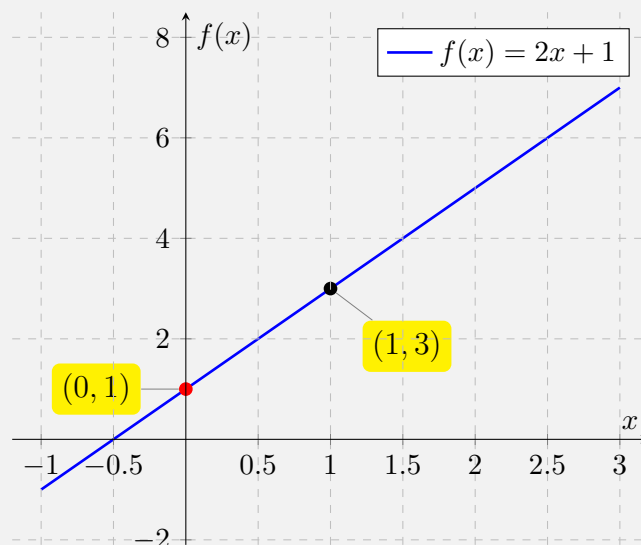
$$f(x) = a \cdot x + b \quad \text{Definição geral} \tag{8.1}$$

$$f(x) = 2 \cdot x + 1 \quad \text{Função do enunciado}$$

- $x$ : variável independente;
- $f(x)$  ou  $y$ : variável dependente;
- $f$ : nome da função;
- $a$ : coeficiente angular. Define o ângulo entre a reta (função) e o *eixo das abscissas*, também chamado de *eixo horizontal* ou, “popularmente”, *eixo  $x$* <sup>a</sup>. Se  $a > 0$  a função é crescente; se  $a < 0$  a função é decrescente; se  $a = 0$  a função é constante;
- $b$ : coeficiente linear. É o valor que intercepta, ou “corta” o *eixo das ordenadas*, conhecido também como *eixo vertical*, ou ainda como *eixo  $y$* <sup>b</sup>.

Desse modo para fazer o gráfico é necessário apenas dois pontos, ou seja, dois *pares ordenados*  $(x, f(x))$ . Um desses pares pode ser obtido através do coeficiente linear, ou seja, se a função intercepta o eixo das ordenadas no valor 1 ( $b = 1$ ), necessariamente,  $x = 0$ , assim  $(0, 1)$  é um ponto (ponto vermelho). A determinação de outro ponto pode ser atribuindo um valor, diferente de zero, para a variável independente e calcular seu correspondente. Atribuindo  $x = 1$  tem-se  $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$  logo, o segundo ponto (ponto preto) será  $(1, 3)$ . Unindo esses dois pontos e traçando uma reta é possível obter o gráfico abaixo:

Figura 8.1: Gráfico de uma função linear



Fonte: Próprio autor.

**Doutor Exatas:** <https://www.youtube.com/watch?v=KreVo3UpTzM> ■

<sup>a</sup>Existem alguns pontos a serem considerados aqui: 1) quando é falado *eixo horizontal* podem haver interpretações erradas pois é uma questão de referência, ou seja, se o leitor girar o papel em  $90^\circ$ , o eixo se tornará vertical! Chamar de *eixo x* também podem haver interpretações diferenciadas, pois se o problema trata de uma situação onde envolva o cálculo do espaço de um móvel ( $S$ ) em função do tempo ( $t$ ), essa nomenclatura não fará sentido algum. O modo correto de interpretar e nomear o eixo é utilizar *eixo das abscissas* ou, se o leitor preferir, pode utilizar o nome da variável independente para o nome do eixo, ou seja, no mesmo exemplo anterior, cálculo do espaço em função do tempo, pode ser utilizado para o *eixo das abscissas* simplesmente *eixo de t* ou *eixo do tempo*.

<sup>b</sup>Mesma consideração da nota anterior.

Como pode ser visto na Figura 8.1, o gráfico da função do exemplo anterior é uma reta pois os expoentes das variáveis, independente e dependente são iguais a 1. A função do exemplo anterior pode ser reescrita para a forma:

$$y - 2x = 1$$

A forma como a função foi reescrita pode ser entendida como uma *equação linear*. De modo geral sobre *Equações Lineares* são equações do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  são os coeficientes,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são as variáveis e  $b$  é o termo independente.

■ **Exemplo 8.2** A equação  $2x + 3y - 4z = 2$  é uma equação linear. Seus coeficientes são 2, 3 e  $-4$ . Já as variáveis são  $x, y$  e  $z$  e 2 é o termo independente. A solução para esta equação ocorre quando  $x = 3, y = 0$  e  $z = 1$  pois  $2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 2$ . ■

■ **Exemplo 8.3** Verifique se  $(1, 2, 0)$  e  $(1, 0, 0)$  satisfazem a equação linear  $2x + 3y - 4z = 2$ .


Para verificar se as triplas<sup>a</sup> ordenadas satisfazem a equação linear basta substituir os valores dados em suas respectivas variáveis, assim:

- $(1, 2, 0) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2 + 6 - 0 = 2 \Rightarrow 8 = 2$  FALSO. Logo, a  $(1, 2, 0)$  não satisfaz a equação linear do enunciado.
- $(1, 0, 0) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2 + 0 - 0 = 2 \Rightarrow 2 = 2$  VERDADEIRO. Logo, a  $(1, 0, 0)$  satisfaz a equação linear do enunciado.

■

<sup>a</sup>Um nome mais apropriado para chamar um conjunto de valores, ordenados, é utilizando a quantidade de elementos dessa organização, ou seja: 2 valores implicam numa dupla ou par ordenado; 3 valores, tripla ordenada; 4 valores, quadrupla ordenada; 5 valores, quíntupla ordenada; “n” valores n-upla (ênupla).

O leitor pode imaginar que as equações lineares acima existam infinitas combinações entre valores numéricos que satisfaçam a relação. Isso acontece porque o *número de variáveis* é MAIOR que o *número de equações*. No entanto, existem situações em que o número de equações lineares é igual ao número de variáveis.

■ **Exemplo 8.4**  Dado as funções Receita ( $R(x) = 30x$ ) e Custo ( $C(x) = 20x + 1000$ ), determine o ponto de equilíbrio<sup>a</sup>.

Para determinar o ponto de equilíbrio basta fazer  $y = R(x) = C(x)$  e substituir nas equações do enunciado, assim:

- Função Receita:  $y = 30x$ ;
- Função Custo:  $y = 20x + 1000$ .

Fica claro a existência de duas equações (Receita e Custo) e duas variáveis ( $x$  e  $y$ ). A solução dessas equações lineares devem satisfazer as duas funções simultaneamente, desse modo, é possível escrever um *sistema de equações lineares*, como segue:

$$\begin{cases} y = 30x \\ y = 20x + 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (8.2)$$

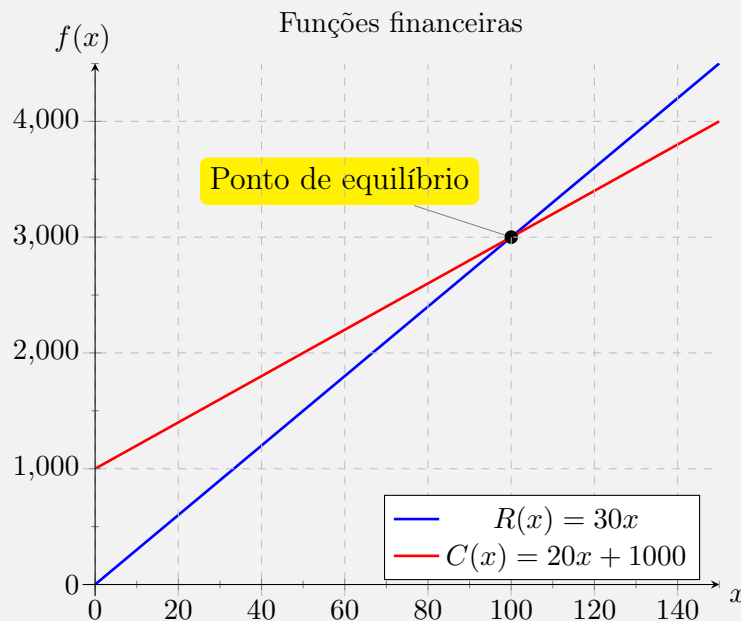
$$\begin{cases} y - 30x = 0 \\ y - 20x = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} y - 30x = 0 \\ -10x = -1000 \end{cases} \Rightarrow x = 100 \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} y - 30 \cdot 100 &= 0 \Rightarrow \\ y - 3000 &= 0 \Rightarrow y = 3000 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Assim, o ponto de equilíbrio é  $(100, 3000)$  e representa a quantidade de produtos que devem ser vendidos ( $x = 100$  unidades) e o valor da Receita e do Custo quando forem vendidos  $x = 100$  produtos será de R\$3000,00 ( $y = 3000 \Rightarrow R(100) = C(100) = \text{R\$ } 3000,00$ ). A Figura 8.2 mostra o gráfico das funções e o ponto de equilíbrio.

Figura 8.2: Gráfico das funções Receita e Custo



Fonte: Próprio autor.

**Doutor Exatas:** <https://www.youtube.com/watch?v=8mZ7W4jwPWY> ■<sup>a</sup>O ponto de equilíbrio acontece quando a Receita é igual ao Custo, ou seja,  $R(x) = C(x)$ 

Como visto anteriormente, os sistemas de equações lineares podem ser aplicados na área da Administração, Ciências Contábeis e, é claro, na área de exatas!

Desse modo é de fundamental importância saber resolver os sistemas de equações lineares e, para isso, existem alguns métodos. Será visto aqui o método da resolução usando matrizes, chamada de regra de Cramer e o método da eliminação de Gauss.

Antes de conhecer as técnicas é importante frisar que os sistemas de equações lineares podem ser classificados dependendo do número de soluções que o mesmo apresenta:

- **Sistema Impossível:** Quando o sistema não admite solução;
- **Sistema Possível e Indeterminado:** Quando o sistema admite mais de uma solução;
- **Sistema Possível e Determinado:** É o sistema que possui uma única solução possível.

### 8.1.2 Regra de Cramer

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

É possível escrever a Matriz Principal deste sistema. A Matriz Principal é composta pelos coeficientes de cada variável do sistema, ou seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainda é possível definir as matrizes  $M_x$ ,  $M_y$ , e  $M_z$  substituindo os valores da coluna do resultado nas respectivas colunas da matriz principal, assim:

$$\mathbb{M}_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, o valor das variáveis do sistema dado pode ser calculado através de:

$$x = \frac{\det(\mathbb{M}_x)}{\det(\mathbb{M})}, \quad y = \frac{\det(\mathbb{M}_y)}{\det(\mathbb{M})}, \quad e \quad z = \frac{\det(\mathbb{M}_z)}{\det(\mathbb{M})}$$

### 8.1.3 Método da Substituição

O método da substituição consiste em realizar processo de isolamento de variável em uma equação do sistema e substituir em outras equações do sistema.

...continua...

### 8.1.4 Eliminação de Gauss - Método do escalonamento

Um sistema de equações lineares pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{B}$$

Onde a matriz  $\mathbb{A}$  é a matriz dos coeficientes,  $\mathbb{X}$  é a matriz das variáveis e  $\mathbb{B}$  é a matriz dos resultados.

O objetivo da eliminação de Gauss é formar uma matriz triangular superior. Em um sistema de equações lineares é possível fazer:

- Multiplicar uma linha inteira por um número diferente de zero;
- Mudar a posição das linhas e/ou colunas;
- Efetuar operações entre as linhas.

■ **Exemplo 8.5**  Resolva o sistema abaixo

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ x - y + 3z &= 1 \end{cases}$$

**Solução:**

O sistema do enunciado pode ser escrito através da multiplicação abaixo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}}$$

O próximo passo é montar a chamada *Matriz Ampliada* do passo inicial ou passo zero (0).

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(0)} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

Após a definição da Matriz Ampliada, o próximo passo é zerar os elementos que estão abaixo da diagonal principal, assim:

$$\begin{aligned} L_2^{(1)} &\leftarrow 2 \cdot L_1^{(0)} - L_2^{(0)} \\ L_3^{(1)} &\leftarrow L_1^{(0)} - L_3^{(0)} \end{aligned}$$

resultando em:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(1)} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right]$$

O próximo passo é usar a linha 2 como referência para zerar os elementos que estão abaixo da diagonal principal. Assim:

$$L_3^{(2)} \leftarrow 2 \cdot L_2^{(1)} - L_3^{(1)}$$

obtendo o seguinte sistema:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(2)} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Da última linha, tem-se:

$$3z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Da linha 2 é possível obter:

$$y = 1$$

Substituindo o resultado de  $y$  e  $z$  na linha 1, obtém-se:

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x + 1 + 0 = 3 \Rightarrow x = 2$$

Enfim, este sistema pode ser classificado como Sistema Possível e Determinado e a solução é a tripla  $(2, 1, 0)$ , podendo representar o conjunto solução da seguinte maneira:

$$S = \{(2, 1, 0)\}$$

**Doutor Exatas:** [https://www.youtube.com/watch?v=L4V\\_rF9uN2g](https://www.youtube.com/watch?v=L4V_rF9uN2g)

■



# IV

# Análise Matemática

9	Análise Matemática .....	59
9.1	Conceitos iniciais	



## 9. Análise Matemática

### 9.1 Conceitos iniciais



<b>10</b>	<b>Introdução a Física .....</b>	<b>63</b>
10.1	Conceitos iniciais	



## 10. Introdução a Física

### 10.1 Conceitos iniciais





# VI

# Tecnologia e Educação

<b>11</b>	<b>Softwares no Ensino da Matemática .</b>	<b>67</b>
11.1	Introdução	
11.2	Determinação do número $\pi$ experimentalmente	
<b>12</b>	<b>Introdução ao Python .....</b>	<b>75</b>
12.1	Conceitos iniciais	



## 11. Softwares no Ensino da Matemática

### 11.1 Introdução

Não pode ser desconsiderado a presença dos computadores no cotidiano das pessoas e esse processo não para mais, ou seja, a cada dia que passa a humanidade fica mais dependente dos computadores e, de modo mais genérico, da Tecnologia!

O conceito de Tecnologia em um primeiro momento, para a maior parte das pessoas, está relacionado com os computadores, mas isso não é verdade. **Tecnologia** pode ser entendido como *o estudo da técnica*<sup>1</sup>.

Desse modo, é possível imaginar que o processo de preparar uma receita de um determinado bolo é fruto de uma *tecnologia*, pois se alguém for repeti-la, a garantia de sucesso é grande. Um ponto que deve ficar claro é que "quem repete a receita" NÃO está criando tecnologia, está executando um processo, apenas.

No entanto, se alguma pessoa mais experiente, desenvolve um método diferenciado para a confecção de um bolo e consegue reproduzibilidade, pode-se imaginar que ela desenvolveu uma nova tecnologia para o preparo de bolo.

Essa discussão parece ser bem abstrata, porém o próximo passo auxiliará no entendimento do conceito.

É comum as pessoas pensarem que para *haver tecnologia* DEVE ter a presença de máquinas (mecânicas, elétricas, etc) e isso não é verdade, as máquinas são frutos de uma tecnologia, ou seja, um determinado processo quando é bem estudado/conhecido pode ser reproduzido inúmeras vezes que sempre sairá do mesmo modo, assim as máquinas são criadas para garantir maior velocidade (não pode ser esquecido que alguém quer lucrar muito!), padronização gerando maior qualidade no processo e no bem manufaturado (serve, também, para serviços prestados).

Esse conceito apreendido permite entender os *motivos* de fracasso quando se utiliza **recursos** computacionais no ensino. A maior parte dos "fracassos" está relacionada a má utilização/diferenciação dos conceitos sobre *tecnologia* e *recursos*.

Seguindo o raciocínio, *recursos* são ferramentas/materiais disponíveis que pode ser utilizados num processo de escolarização, por exemplo. Assim, quando um professor de matemática leva seus alunos ao laboratório de informática da escola, ele DEVE ter em mente a discussão abordada

---

<sup>1</sup>O leitor pode pesquisar mais sobre a origem da palavra em outras fontes pois o objetivo neste material não é tratar sobre tal assunto.

anteriormente para que essa *aula no laboratório* não seja encarada apenas como *diversão* ou *passatempo*; deve haver *SENTIDO* no processo. O fato de estar no laboratório de informática não implica aprendizado efetivo diferenciado sempre. Para que a *condicional*<sup>2</sup> seja verdadeira as proposições devem ser verdadeiras, ou seja, sempre que for ao laboratório de informática (uso de celular, tablets em sala) deve garantir que exista aprendizado efetivo e, para isso, o professor deve, no mínimo, entender duas coisas: o recurso que está usando como suporte e os conceitos matemáticos que ele quer abordar na aula.

Esse ponto é complicado pois nenhum humano sabe tudo, e os sábios sabem disso porém, as aulas com a utilização de recursos computacionais acaba sendo uma via de mão dupla no aprendizado: o professor e o aluno aprendem. Isso também é conhecido como *professor mediador*, *facilitador*.

Bom, entendido esta visão, resta um outro item: *Como fazer a matemática ser interessante de tal modo que os recursos computacionais sejam usados, com prazer, permitindo resolver problemas do cotidiano do aluno?*

Uma parte será possível abordar aqui: resolução de problemas. A resolução de problemas não é algo tão simples de ser elaborado pelo profissional da educação pois deverá ter *valor agregado* para fazer *sentido* na vida do aluno. Deve, ainda, esquecer que *existe linearidade no ensino de matemática*, ou seja, para aprender B, deve-se conhecer inicialmente A<sup>3</sup>.

A segunda parte, que é o foco principal para obter uma sociedade crítica e alfabetizada (de fato, não somente de direito!) é que o aluno consiga resolver seus problemas cotidianos. Mas quais problemas? Que tipos de problemas? Essas perguntas são difíceis e, portanto, o segundo item se encerrará aqui e ficando a critério e criatividade do leitor para desenvolver estratégias transformadoras na vida das pessoas.

Enfim, não existe apenas uma interpretação e a visão abordada aqui é a visão particular do autor, não é uma verdade absoluta, mas deve servir para instigar a pensar de modo diferenciado.

## 11.2 Determinação do número $\pi$ experimentalmente

Será mostrado a seguir a utilização da *tecnologia* para determinar, de modo aproximado, o valor numérico para a constante  $\pi$ . A *metodologia* utilizada pode ser aplicada para qualquer nível de escolarização, ou seja, desde o sexto ano (prefiro quinta série!) até em pós-graduações. Deve ficar claro que a diferenciação deve estar no vocabulário usado em cada série. É claro que os níveis mais elevados possuam conhecimentos matemáticos mais sofisticados e os indivíduos desse nível possuem mais experiências e conceitos apreendidos ao longo da vida acadêmica.

Inicialmente, deve-se ter um problema instigante: *Determinar a constante  $\pi$  usando uma balança*.

O segundo passo consiste em um *brainstorming* para tentar definir uma estratégia para a solução desse problema. Com a estratégia definida, o terceiro passo será a tentativa de resolução. Após a possível solução, deve-se testar em outros problemas semelhantes para verificar a validade do modelo e, se tudo estiver OK, problema resolvido. É possível a qualquer momento refazer o experimento com possíveis melhorias no processo não previstas anteriormente e testar novamente para ver se os resultados melhoram.

O *brainstorming* mencionado não acontecerá aqui mas pode aplicado em uma sala de aula de modo que os participanetes (alunos) sugiram, sem medo de errar (no *brainstorming* não existe ideias tolas ou imbecis) e o professor ficar anotando as ideias durante o tempo necessário até que as ideias se esgotem. Lembre-se: nada deve ser imposto, mas o convite deve ser irrecusável! Após o esgotamento das ideias, o professor deve começar a analisar as ideias em função de *chance de sucesso para resolver o problema* explicando os conceitos, os prós e os contras de cada ideia. Isso motiva o pensamento crítico de qualquer humano engajado no problema.

<sup>2</sup>O leitor que já estudou *Lógica Matemática* já deve estar familiarizado com isso:  $p \rightarrow q$

<sup>3</sup>Isso dá trabalho, gera intrigas, mas é gratificante!

Para resolver o problema proposto será necessário uma balança. Balanças, geralmente permitem medir a **massa** de um objeto e **NÃO** o **peso**, pois peso, de acordo com *Newton* pode ser definido matematicamente como  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ . Somente nessa visão já é possível explorar conceitos de um bimestre do ensino médio onde é falado sobre as leis de Newton, é possível falar sobre o planeta Terra (multidisciplinaridade, oi?), entre outros.

O exemplo de que isso pode explorado em todos os níveis, e linguagens, vem da relação mencionada sobre a diferença entre *massa* e *peso*:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

O leitor pode ter lido a relação acima e ter pensado: *Não foi assim que aprendi na escola! Não tinha essas setinhas em cima do P e do g*. Calma, até alunos de níveis elevadíssimos não sabem o motivo dessas setinhas em cima do  $g$ .

Lembrando: Força pode ser escrito como a multiplicação entre a massa e uma aceleração, matematicamente  $F = m \cdot a$ . Após ter lembrado sobre isso, o leitor pode ter imaginado sobre os *diagramas de corpo isolado* em que as *trações* e *forças* são *grandezas vetoriais*, pois *vetor* tem *direção*, *sentido* e *módulo*. Mas se a Força é um vetor qual das duas grandezas que estão multiplicando é vetorial? Mas por que alguma dessas outras grandezas tem de ser vetorial? O que é um vetor? Etc.

Bom, a *massa* de um corpo não depende se está indo para do Sul para o Norte ou da esquerda para a direita, a massa representa a quantidade de matéria de um objeto assim, massa não é vetorial é uma *grandeza escalar*, basicamente, um número. Com esse raciocínio, a *grandeza vetorial* só pode ser a aceleração que num *sistema de coordenadas* representa uma *direção* e *sentido* e possui uma *intensidade* ou *módulo*. O mesmo acontece com a força *Peso*; a massa é *escalar* então a aceleração *gravitacional* só pode ser *vetorial*, incrível! O leitor pode imaginar o motivo de todo o tempo sempre usar a aceleração gravitacional apenas  $g$  e não  $\vec{g}$ . Isso é possível? A resposta é: SIM, totalmente! Por quê? Pois nesses estudos apenas o valor da aceleração, ou seja, o *módulo* é fundamental porém, em outras situações, a aceleração gravitacional deve ser pensado como uma grandeza vetorial pois as flutuações do campo gravitacional existem e isso pode influenciar, por exemplo, o funcionamento de um satélite.

Ainda não foi separado os materiais ou alguma metodologia para determinar a constante  $\pi$  e já foi possível abordar muitos conceitos relacionados (multidisciplinaridade, oi?).

Voltando ao problema, deve-se pensar que a determinação da constante  $\pi$  através do uso de uma balança está intimamente ligado com o volume de algo e, novamente, conceitos adicionais aparecem para serem estudados: ponto, linha, área e volume. Isso está relacionado a *dimensões* e a expansão de alguns axiomas. O ponto não tem dimensão, dois pontos formam uma reta (linha - 1D, comprimento), uma figura plana possui duas dimensões (2D, comprimento e largura) e um sólido possui três dimensões (3D, comprimento, largura e altura). O leitor deve pensar que nada na vida real possui apenas duas dimensões ou uma dimensão; por mais que se tente representar uma linha através de um lápis e régua, a espessura do grafite deixada numa folha torna essa linha um objeto 2D, expandindo mais, o grafite deixado na folha formou um sulco com o depósito de material (grafite) tornando assim um objeto 3D! (multidisciplinaridade, oi?) Os objetos perfeitos encontram-se apenas em nossa imaginação, o *mundo das ideias*.

Outro ponto, que conhecemos<sup>4</sup> é que a constante  $\pi$  aparece, basicamente em duas situações: cálculo do comprimento da circunferência e no cálculo da área do círculo<sup>5</sup>. Quando se fala em comprimento de algo, a representação no *Sistema Internacional de medidas* (multidisciplinaridade, oi?), é dado em metros e é representado pela letra minúscula  $m$ ; os cálculos de área são definidos como *metros ao quadrado* ou  $m^2$ <sup>6</sup>. Essa simples representação,  $m^2$  pode parecer simples e

<sup>4</sup>mas dependendo do nível de escolarização o leitor pode criar uma constante com um nome qualquer e através das aproximações desenvolvidas e da metodologia aplicada, chegar no número e dizer, historicamente, que esse número tão impressionante é o  $\pi$

<sup>5</sup>Comprimento da circunferência é o perímetro do círculo.

<sup>6</sup>Lembre:  $a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^2$

inofensiva, mas pode levar a pensar que  $m^2 = m \cdot m$ , ou seja, duas dimensões de comprimento sendo multiplicadas (largura e comprimento) e de modo análogo, os sólidos possuem *comprimento, largura e altura*, então  $m \cdot m \cdot m = m^1 \cdot m^1 \cdot m^1 = m^3$  ou *metro cúbico*. Resumindo: metro **linear**,  $m$  só tem comprimento; metro **quadrado**,  $m^2$  tem comprimento e largura (quadrado!) e metro **cúbico**,  $m^3$  tem comprimento, largura e altura (cubo).

Assim, é mais fácil determinar a constante em questão através de um objeto (quadrado?) com massa. Uma possível estratégia seria: fazer um quadrado com algum material e medir sua massa. Supondo que a composição do material seja *homogênea* (multidisc... já entendeu, né?), quanto maior o objeto, maior será sua massa, ou seja, são *proporcionais* então, far-se-á um quadrado, medir-se-á sua massa. Com destreza ou auxílio de algum objeto, corta-se o quadrado formando um círculo e mede sua massa; bom, sabendo a massa do quadrado (quatro lados iguais com quatro ângulos retos) e a medida de um dos seus lados, calcula-se a área do quadrado ( $A_q = l \cdot l = l^2$ ) e a relaciona com a massa medida. Sabendo a massa do círculo e que o círculo é um objeto 2D, é possível pensar numa relação qualquer que envolva algum comprimento ao quadrado, resumidamente <sup>7</sup>:

$$A_c = \pi \cdot r^2$$

Enfim, sabendo a massa do quadrado ( $m_q$ ) e sua área ( $A_q$ ), e agora sabendo a massa do círculo ( $m_c$ ), tem-se um problema que pode ser resolvido através de uma regra de três *diretamente proporcional* e a relação final fica:

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{A_q \cdot m_c}{m_q} \\ \pi \cdot r^2 &= \frac{A_q \cdot m_c}{m_q} \\ \pi &= \frac{A_q \cdot m_c}{m_q \cdot r^2} \end{aligned}$$

Através da relação anterior, uma preocupação que deve se ter é em relação a unidade de medida após o cálculo. É conhecido que  $\pi$  é uma constante, ou seja, não tem dimensão, é somente um número. A *análise dimensional*<sup>8</sup> pode ser feita usando  $L$  (medida de comprimento) e  $M$  (medida de massa).

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{A_q \cdot m_c}{m_q \cdot r^2} \\ \pi &= \frac{L^2 \cdot M}{M \cdot L^2} \\ \pi &= 1 \end{aligned}$$

O resultado anterior não mostra que o valor da constante é igual a 1. Esse 1 significa, na análise dimensional, que *não tem unidade de medida*, ou seja, *adimensional*.

Os restos de uma caixa de pizza e um CD velho pode ajudar nessa tarefa. O diâmetro do CD é conhecido (12 cm) então é possível conhecer seu raio ( $r = d/2$ ). O processo, resumidamente, encontra-se abaixo:

<sup>7</sup>Essa discussão pode ser demorada e fica a critério do leitor saber mais sobre a *História da Matemática* e o processo de **quadratura** do círculo

<sup>8</sup>O leitor pode procurar mais sobre Análise Dimensional e o *Teorema II de Buckingham*.



Figura 11.1: Processo de construção dos objetos para a determinação da massa do quadrado e do círculo

Substituindo os valores na relação de  $\pi$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{12 \cdot 12 \cdot 4}{6 \cdot 6^2} \\ \pi &= \frac{144 \cdot 4}{216} \\ \pi &= \frac{576}{216} \\ \pi &= 2,666...\end{aligned}$$

Bom, claramente o valor que sabemos sobre  $\pi$  não é esse, mas *onde está o erro?* A metodologia utilizada parece ser coerente e era de esperar uma diferença, pequena, mas poderia existir. Então, deve-se contentar com este resultado ou investigar mais? Obviamente que a investigação deve continuar e isso faz parte do processo; não basta apenas determinar uma metodologia e quando chegar no resultado final, OK, para! O resultado tem que ter SIGNIFICADO!

Uma possibilidade de investigação para ter um erro tão grande assim, está relacionada a *precisão da balança*.

Todo equipamento possui uma *precisão*, ou seja, os equipamentos conseguem efetuar operações até um certo limite, após esse limite, os resultados não podem ser considerados.



A balança utilizada foi uma balança de cozinha que tem a capacidade de medir massas de até  $10\text{kg}$  com a unidade mínima em *grama*, ou seja, ela consegue medir de 1 em 1 grama até  $10\text{kg}$ ; Essa precisão não pode ser negligenciada dependendo do tamanho da massa que se mede, pois se medir algo que tenha  $500\text{g}$ , a forma correta de representação, nesse caso, seria  $500 \pm 1\text{g}$ , sendo assim, esse objeto pode ter entre  $499$  e  $501$  grama.

Os objetos do experimento possuem  $6\text{g}$  e  $4\text{g}$ , e através da balança utilizada, a medição pode ser  $5\text{-}7\text{g}$  e  $3\text{-}5\text{g}$ . Se dividir a precisão  $1\text{g}$  pela massa dos objetos tem-se:  $0,17$  ( $\approx 16,7\%$ ) e  $0,25$  ( $\approx 25\%$ ), ou seja, a precisão da balança está na mesma *Ordem de grandeza* da medida das massas dos objetos. Solução? Fazer mais quadrados e mais círculos com os mesmos tamanhos dos anteriores para que a precisão da balança fique em uma ordem de grandeza menor. As novas medições podem ser vistas na figura abaixo:



Figura 11.2: Novas medições das massas.

Com essas novas medidas, a precisão da balança representa, apenas,  $7,1\%$  da massa dos círculos e  $5,6\%$  da massa dos quadrados. Assim, usando esses novos valores para as massas na relação montada para a determinação do  $\pi$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{12 \cdot 12 \cdot 14}{18 \cdot 6^2} \\ \pi &= \frac{144 \cdot 14}{18 \cdot 36} \\ \pi &= \frac{2016}{648} \\ \pi &= 3,111...\end{aligned}$$

Esse valor calculado representa muito bem o valor de  $\pi$ . O erro relacionado a este cálculo é de  $0,9\%$ . *É possível melhorar o resultado?* Sim, é possível, usando uma balança de precisão, materiais de maior qualidade e homogêneos mas, para um processo de ensino-aprendizagem esse



valor é surpreendente! Não pelo fato de ter calculado o valor aproximado, mas a quantidade de outros conhecimentos que podem ser discutidos.

**Exercício 11.1** Após a leitura desse texto, elabora um texto curto descrevendo o seu entendimento sobre Tecnologia. ■

**Exercício 11.2** A metodologia usada para a determinação do número  $\pi$  experimentalmente possui uma quantidade de conhecimentos extras, ou seja, fora da exclusividade da matemática que podem ser explorados. Qual(is) desse(s) conhecimento(s) você nunca ouviu falar ou, foi extremamente diferente? ■

**Exercício 11.3** O tema do capítulo desse "futuro livro" está relacionado a *softwares* mas, onde está a *utilização do software*? Qual a relação desse tópico com a disciplina? ■



## 12. Introdução ao Python

### 12.1 Conceitos iniciais

Nesta seção trabalharemos com o Python 3.x.



# VII

# Bibliografia

<b>Bibliografia .....</b>	<b>79</b>
Artigos	
Livros	



## Bibliografia

### Artigos

### Livros

- Barbosa, Marcos Antonio (2017). *Introdução lógica matemática para acadêmicos*. Curitiba: Intersaberes.
- Boldrini, José L. (1986). *Álgebra linear*. São Paulo: HARBRA. ISBN: 9788529402024.
- Bonafini, Fernanda Cesar (2011). *Matemática*. São Paulo: Prentice Hall.
- Castanheira, Nelson Pereira e Álvaro Emílio Leite (2017). *Tópicos de Cálculo I: limites, derivadas e integrais*. Curitiba: Intersaberes.
- Domingues, Hygino H. e Gelson Iezzi (2018). *Álgebra moderna*. Rio de Janeiro: Saraiva. ISBN: 978-85-472-2305-2.
- Fernandes, Luana Fonseca Duarte (2017). *Álgebra linear*. 2ª edição. Curitiba: Intersaberes. ISBN: 978-85-5972-341-0.
- Flemming, Diva Marília e Mirian Buss Gonçalves (2007). *Cálculo a funções: limite, derivação e integração*. São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Franco, Neide (2016). *Álgebra linear*. São Paulo: Pearson Education do Brasil. ISBN: 978-85-430-1915-4.
- Hoffmann, Laurence D. e Gerald L. Bradley (2008). *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*. Rio de Janeiro: LTC.
- Jacques, Ian (2010). *Matemática para Economia e Administração*. São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Munaretto, Ana Cristina (2018). *Descomplicando um novo olhar sobre a matemática elementar*. Curitiba: Intersaberes.
- Murolo, Afrânio e Giacomo Bonetto (2011). *Matemática aplicada a Administração, Economia e Contabilidade*. São Paulo: Thompson Pioneira.
- Oliveira, Carlos Alberto Maziozeki de (2016). *Matemática*. Curitiba: Intersaberes.
- Panonceli, Diego Manoel (2017). *Análise Matemática*. Curitiba: Intersaberes.
- Souza, Jeferson Afonso Lopes (2018). *Lógica Matemática*. São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Steinbruch, Alfredo (2009). *Álgebra linear*. São Paulo: Pearson Makron Books. ISBN: 0074504126.
- Tan, S. T. (2008). *Matemática aplicada a administração e economia*. São Paulo: Cengage Learning.