Curso de Matemática e Tecnologia

Prof. Dr. Edson F. Fumachi

Copyright © 2018-2020 E. F. Fumachi

MATERIAL INDEPENDENTE

FUMACHI.MAT.BR

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the "License"). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Primeira Versão, Janeiro de 2020; Segunda Versão, Maio de 2020; Terceira Versão, Agosto de 2020.

Sobre o Autor

O Prof. Dr. Edson Fernando **Fumachi** nasceu em Itatiba-SP em 18 de Maio de 1983. Estudou em escolas públicas até o ensino médio. Ingressou no ano 2001 no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade São Francisco, obtendo seu título em 2003. Em 2004 começou a trabalhar no ensino superior da mesma faculdade na qual se graduou. No ano de 2005 assumiu a posição de professor PEB-II do Governo do Estado de São Paulo na disciplina de Matemática. Exonerou do cargo em 2007 para dar sequência no ensino superior. Trabalhou como professor do ensino médio público e privado; no ensino médio privado atuou como professor de Matemática e Física. Em 2007 começou seus estudos como aluno de matéria isolada no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, localizado em São José dos Campos-SP. Em 2009 entrou no mesmo instituto como aluno regular do Curso de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais área de concentração em Ciência e Tecnologia dos Materiais e Sensores. Em 2011 defendeu sua Dissertação intitulada *Simulação do fluxo reacional de um reator de filamento quente através da simulação direta de Monte Carlo*. Consecutivamente, em 2011, ingressou no Curso de Doutorado na mesma área do mesmo instituto. Em 2017 defendeu seu Doutorado intitulado *Desenvolvimento de um tubo de queda livre para o modelamento e otimização do processo de solidificação de ligas eutéticas de bismuto-estanho em ambiente de microgravidade*. Tem experiência no meio empresarial através de consultorias realizadas na área de telecomunicações e desenvolvimento de algoritmos para otimização de processos e redução de custos. Tem amplo conhecimento em programação de computadores nas linguagens ForTran77, C e Python. Desenvolve materiais didáticos (como este!) em diversos formatos e linguagens (LaTeX). Desenvolve conteúdos educacionais e os disponibiliza em plataformas digitais, Youtube e Facebook, sob o pseudônimo Doutor Exatas.

Prefácio

Este material foi elaborado exclusivamente pelo autor e tem como objetivo atender alunos dos mais variados cursos, Administração, Ciências Contábeis, Tecnólogos, Matemática, Engenharia entre outros. Este material está ***continuamente em desenvolvimento*** e é distribuído em partes, ou seja, apenas os capítulos necessários aos estudantes de uma determinada disciplina. Portanto, se quiser a versão mais nova e completa, contate o autor enviando um e-mail para *effumachi@gmail.com*.

Os exemplos que possuem uma versão em vídeo possuirão o símbolo 📹 e um *link* que encaminhará ao canal do "Doutor Exatas", no Youtube (`https://www.youtube.com/channel/UCqGy3MbhdZsWGGBBg7yUGRw`). O leitor pode, ainda, encontrar o conteúdo no Facebook (`https://www.facebook.com/doutorexatas/`).

A abordagem adotada neste material é fornecer um pouco de teoria (porém suficiente), e em seguida com a resolução de exemplos.

Bons estudos.

Sumário

I Álgebra Linear

1. Matrizes

1.1 Conceitos iniciais

Uma matriz pode ser definida como uma *coleção de elementos* e cada elemento possui uma posição definida através dos indicadores i e j, sendo i o indicador para a linha e j o indicador para a coluna. Os valores possíveis para i, j são valores naturais[1] ($i, j \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$), ou inteiros positivos diferente de zero ($i, j \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\}$). A representação de um elemento é dada por:

$$a_{ij}$$

no caso acima, o elemento possui o nome a com uma posição qualquer i , j. Os nomes dos elementos costumam seguir o mesmo nome da matriz que os contém, mas em letra minúscula. Assim, se a matriz tiver o nome $\mathbb{A}$ seus elementos serão a_{ij}, se a matriz se chamar $\mathbb{B}$ seus elementos serão b_{ij} e assim sucessivamente. Os nomes das matrizes são em letras maiúsculas com uma barra dupla em sua construção. Existem, também, os indicadores para as matrizes; esses indicadores são chamados de *Ordem da matriz*, ou seja, representa o número de linhas e de colunas. Logo, uma matriz chamada A com 2 linhas e 3 colunas é escrita da seguinte forma:

$$\mathbb{A}_{2\text{x}3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Desse modo temos a representação de uma *matriz* e de todos os seus *elementos*. É possível verificar que o número de elementos da matriz é 6. De modo geral, o número de elementos ($\#_{elementos}$) de uma matriz será o resultado da *multiplicação* do número de *linhas* pelo número de *colunas*, assim:

$$\#_{elementos} = i \cdot j$$

[1]O autor considera números naturais os positivos diferentes de zero pois, *naturalmente*, não dizemos *"Tenho ZERO Ferrari"* para expressar a ideia de que *"NÃO TENHO uma Ferrari"*.

■ **Exemplo 1.1** Determine o número de elementos da matriz $\mathbb{A}_{3x5}$.
Na matriz do enunciado tem-se $i = 3$ (linhas) e $j = 5$ (colunas). Logo, o número de elementos dessa matriz será $i \cdot j = 3 \cdot 5 = 15$ elementos ■

■ **Exemplo 1.2** Considere a matriz

$$\mathbb{B}_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 6 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

escreva todos os elementos colocando sua posição corretamente.

Como o nome da matriz dada é $\mathbb{B}$, os elementos serão escritos pela letra minúscula do nome da matriz, ou seja, os elementos serão b_{ij}.

- O primeiro elemento está na *linha* 1 e *coluna* 1, então: $b_{11} = 3$
- O segundo elemento está na *linha* 1 e *coluna* 2, então: $b_{12} = 7$
- O terceiro elemento está na *linha* 2 e *coluna* 1, então: $b_{21} = 1$
- O quarto elemento está na *linha* 2 e *coluna* 2, então: $b_{22} = 6$
- O quinto elemento está na *linha* 3 e *coluna* 1, então: $b_{31} = 10$
- O sexto elemento está na *linha* 3 e *coluna* 2, então: $b_{32} = 4$

■

As representações das matrizes podem ser da seguinte forma, ainda:

$$\mathbb{M}_2 \quad \text{ou} \quad \mathbb{M}_3 \quad \text{ou} \quad \mathbb{M}_4 \ldots$$

Nesse caso, as matrizes são chamadas de *matrizes quadradas* pois elas possuem o número de linhas igual ao número de colunas, ou seja, $i = j$. O primeiro caso é uma matriz quadrada de ordem 2, a segunda é uma matriz quadrada de ordem 3, a terceira é uma matriz quadrada de ordem 4, e assim sucessivamente.

■ **Exemplo 1.3** Matriz de segunda ordem, ou matriz quadrada de ordem 2:

$$\mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

■

■ **Exemplo 1.4** Matriz quadrada de ordem 3:

$$\mathbb{B}_3 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

■

1.2 Igualdade entre matrizes

Duas, ou mais, matrizes são iguais quando, nas respectivas posições, todos os elementos são iguais.

■ **Exemplo 1.5** Considere as matrizes

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

As matrizes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são iguais, pois $a_{11} = b_{11} = 1$ e $a_{12} = b_{12} = 2$ e $a_{13} = b_{13} = 3$ e $a_{21} = b_{21} = 6$ e $a_{22} = b_{22} = 5$ e $a_{23} = b_{23} = 4$ ■

■ **Exemplo 1.6** Considere as matrizes

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

As matrizes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ NÃO são iguais. Embora $a_{11} = b_{11} = 1$ e $a_{12} = b_{12} = 2$ e $a_{13} = b_{13} = 3$ e $a_{21} = b_{21} = 6$ e $a_{22} = b_{22} = 5$, tem-se que $a_{23} \neq b_{23}$ ■

■ **Exemplo 1.7** Determine os valores de x e y de modo que as matrizes abaixo sejam iguais:

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & x+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ y-7 & 5 \end{bmatrix}$$

Analisando as matrizes, verifica-se que $a_{11} = b_{11} = 1$ e $a_{22} = b_{22} = 5$. O elemento $a_{12} = x + 10$ e $b_{12} = 25$ devem ser iguais, ou seja:

$$\begin{aligned} a_{12} &= b_{12} \\ x + 10 &= 25 \\ x + 10 - 10 &= 25 - 10 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

De modo análogo, o elemento $a_{21} = 3$ e $b_{21} = y - 7$ devem ser iguais, assim:

$$\begin{aligned} a_{21} &= b_{21} \\ 3 &= y - 7 \\ 3 + 7 &= y - 7 + 7 \\ 10 &= y \end{aligned}$$

Substituindo os valores calculados, x e y, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_2 &= \mathbb{B}_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 15+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 10-7 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

1.3 Adição e subtração de matrizes

A adição, ou subtração, de matrizes só podem ser feitas se a(s) matriz(es) possuir/possuírem a mesma ordem. Assim, $\mathbb{A}_{ixj}$ e $\mathbb{B}_{ixj}$ podem ser somadas e/ou subtraídas da seguinte maneira:

$$\mathbb{A}_{ixj} \pm \mathbb{B}_{ixj} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1j} \pm b_{1j} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2j} \pm b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} \pm b_{i1} & a_{i2} \pm b_{i2} & \cdots & a_{ij} \pm b_{ij} \end{bmatrix}$$

■ **Exemplo 1.8** Considere as matrizes abaixo e efetue a adição entre elas, ou seja, $\mathbb{A} + \mathbb{B}$

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Partindo das matrizes dadas, podemos escrever:

$$\mathbb{A}_{2x3} + \mathbb{B}_{2x3} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 3+5 & -5+6 \\ 2+(-2) & 6+4 & 4+10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg` ■

1.3.1 Multiplicação de um escalar por uma matriz

Esse tipo de multiplicação pode ser entendido como *um número multiplicando uma matriz*, sendo assim, matematicamente, basta multiplicar todos os elementos da matriz pelo número que está multiplicando a matriz.

Nesse momento a notação se faz necessária, pois numa expressão do tipo $x \cdot y$ não fica evidente quem é a matriz e quem é o escalar, ou se são duas matrizes, ou se são dois escalares! Então dado um escalar a e uma matriz $\mathbb{A}_{ij}$ a multiplicação pode ser escrita como:

$$a \cdot \mathbb{A}_{ixj} = a \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & \cdots & a \cdot a_{1j} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & \cdots & a \cdot a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a \cdot a_{i1} & a \cdot a_{i2} & \cdots & a \cdot a_{ij} \end{bmatrix}$$

Embora seja um pouco confuso, devido a quantidade de letras “a”, isso foi escolhido propositalmente para o entendimento de um conceito: o escalar a é diferente de todos os elementos da matriz pois não possui indicadores, ou seja, subíndice.

■ **Exemplo 1.9** Calcule o valor de $2 \cdot \mathbb{A} + 4 \cdot \mathbb{B}$ sendo

$$\mathbb{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Para calcular, basta substituir os valores das matrizes, multiplicar pelo escalar e somar as matrizes. Mesmo sabendo o procedimento para calcular a expressão dada, é importante verificar a ordem das matrizes envolvidas na expressão, pois após a multiplicação pelo escalar, haverá uma soma e, como visto anteriormente, só é possível somar matrizes se elas forem da mesma ordem!

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \mathbb{A} + 4 \cdot \mathbb{B} = \\ 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 & 4 \cdot 5 & 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -10 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 20 & 24 \\ -8 & 16 & 40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+12 & 6+20 & -10+24 \\ 4+(-8) & 12+16 & 8+40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 26 & 14 \\ -4 & 28 & 48 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

1.3.2 Multiplicação entre matrizes

Nesse momento é necessário fazer uma análise mais criteriosa sobre as matrizes. A multiplicação de matrizes NÃO é comutativa, ou seja, $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$. Outro ponto importante na multiplicação entre matrizes é que dada duas matrizes, o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz. Assim, sejam as matrizes $\mathbb{A}_{ixj}$ e $\mathbb{B}_{nxm}$, a multiplicação $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ existirá se, se somente se, $j = n$ e a multiplicação $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ existirá se, e somente se, $m = i$.

■ **Exemplo 1.10** Calcule $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ para as matrizes abaixo:

$$\mathbb{A}_{1x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz é a matriz $\mathbb{A}$ e a segunda matriz é a $\mathbb{B}$. Analisando o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz, verifica-se que são iguais a 3, logo, existe a multiplicação proposta no enunciado. Calculando-a:

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_{1x3} \cdot \mathbb{B}_{3x2} = \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+4+15 & 4+12+24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 22 & 40 \end{bmatrix}_{1x2} \end{aligned}$$

é possível verificar que a matriz resultante possui a ordem 1x2 que é, exatamente, o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg` ■

■ **Exemplo 1.11** Calcule a multiplicação $\mathbb{M} \cdot \mathbb{N}$ sendo

$$\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{N}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Como as matrizes são quadradas de ordem 2, é possível a multiplicação proposta no enunciado, logo

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \cdot \mathbb{N} &= \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 4 & (-3) \cdot (-1) + 6 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 7 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 + 24 & 3 + 18 \\ 4 + 28 & -2 + 21 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & 21 \\ 32 & 19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é possível verificar que a ordem resultante da multiplicação entre matrizes quadradas é, também, uma matriz quadrada com a mesma ordem. Outro ponto a se notar é que foi omitido o índice de ordem das matrizes na resolução pois, como são matrizes quadradas, não se faz necessário.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=VeP6FNgG9bg` ■

1.4 Tipos de matrizes

- ***Matriz Linha***: é a matriz que possui somente uma linha. É conhecida, também, como *vetor linha* ou apenas ***vetor***;
- ***Matriz Coluna***: é a matriz que possui apenas uma coluna e também é conhecida como *vetor coluna*;
- ***Matriz Quadrada***: como visto anteriormente, a matriz quadrada é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas;
  - *Diagonal Principal*: a diagonal principal de uma matriz quadrada é aquela em que os elementos possuem os indicadores iguais, ou seja, $i = j \Rightarrow a_{ii}$;
  - *Diagonal Secundária*: é a diagonal formada pelos elementos a_{ij} de modo que $i + j =$ ordem $+ 1$.
  - *Triangular Superior*: matriz onde os elementos **acima** da diagonal principal e os da diagonal principal são diferentes de zero, isto é, $a_{ij} = 0\,,\, i > j$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  - *Triangular Inferior*: matriz onde os elementos **abaixo** da diagonal principal e os da diagonal principal são diferentes de zero, isto é, $a_{ij} = 0\,,\, i < j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

  - *Diagonal*: matriz onde os elementos da diagonal principal são diferentes de zero, isto é, $a_{ij} \neq 0\,,\, i = j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

– *Identidade*: matriz onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ou seja, $a_{ij} = 1\,,\, i = j$. Essa matriz recebe uma representação peculiar, $\mathbb{I}_n$ ou apenas $\mathbb{I}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Oposta***: dada uma matriz $\mathbb{A}$ e uma matriz $\mathbb{B}$, é possível dizer que a matriz $\mathbb{B}$ é oposta a matriz $\mathbb{A}$ se todos os elementos de $\mathbb{B}$ forem os elementos simétricos de $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Transposta***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, a sua transposta, ou seja, $\mathbb{A}^t$ terá as suas colunas formadas pelas linhas de $\mathbb{A}$. Vale ressaltar que $(\mathbb{A}^t)^t = \mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Simétrica***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, é possível dizer que $\mathbb{A}$ é simétrica se $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \mathbb{A}$$

- ***Matriz Antissimétrica***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, é possível dizer que $\mathbb{A}$ é antissimétrica se $-\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$. Aqui, se faz necessário mais uma observação: necessariamente $a_{ij} = 0$, $i = j$.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{A}$$

- ***Matriz Nula***: é uma matriz onde todos os elementos são iguais a 0 (zero).

$$\mathbf{0}_{2\text{x}4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ***Matriz Ortogonal***: dada uma matriz $\mathbb{A}$, *inversível*, ela será ortogonal se obedecer $\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^{-1}$.[2]

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[2] Será visto mais adiante como calcular a inversa de uma matriz, no entanto, a ideia é partir de uma equação matricial. Dadas as matrizes $\mathbb{A}, \mathbb{X}$ e a matriz identidade $\mathbb{I}$. A equação base é $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{I}$ e o objetivo é determinar a matriz $\mathbb{X}$. O leitor habituado com os métodos tradicionais poderia imaginar que para resolver essa equação bastaria *passar a matriz* $\mathbb{A}$ *dividindo*, no entanto, não existe divisão de matrizes, muito menos *passa para lá*. O correto é determinar uma matriz de modo que a multiplicação dela por sua inversa, resulte no elemento neutro da multiplicação entre matrizes; o elemento neutro da multiplicação entre matrizes é a matriz identidade!

2. Determinantes

2.1 Determinantes

2.1.1 Ordem 2

Os determinantes de matrizes de ordem 2 podem ser calculadas como segue. Considere a matriz $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{a_{11} \cdot a_{22}}^{\text{diagonal principal}} - \underbrace{a_{12} \cdot a_{21}}_{\text{diagonal secundária}}$$

■ **Exemplo 2.1** Calcule o determinante de $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

O determinante pode ser calculado usando o exposto acima, assim:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=tEotRUk9RDo` ■

■ **Exemplo 2.2** Calcule o determinante de $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

De modo análogo ao exemplo anterior, tem-se:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{B}) = (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot (-7) = -4 - (+14) = -4 - 14 = -18$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=tEotRUk9RDo` ■

2.1.2 Ordem 3

Considere uma matriz de ordem 3. O cálculo do determinante será:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \begin{array}{l} \overbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}^{\text{diagonais principais}} \\ \underbrace{-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}}_{\text{diagonais secundárias}} \end{array}$$

Torna-se um pouco complicado calcular o determinante através da memorização da relação acima, um modo, repetitivo, mais fácil será visto no exemplo a seguir.

■ **Exemplo 2.3** Calcule o determinante da matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Para resolver, basta copiar as duas primeiras colunas, após a matriz, e seguir um processo análogo ao cálculo do determinante das matrizes de ordem 2, multiplicando as *"diagonais principais"* e **subtraindo** a multiplicação das *"diagonais secundárias"*. Essa técnica é conhecida como *Regra de Sarrus*!

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \overbrace{1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1}^{\text{diagonais principais}} - \underbrace{(3 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3)}_{\text{diagonais secundárias}}$$

$$\begin{aligned} &= 15 + 24 + 12 - (30 + 6 + 24) \\ &= 51 - 60 \\ &= -9 \end{aligned}$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=zl99h_aiWds` ■

2.1.3 Ordem superior a 3

Teorema 2.1.1 — Teorema de Laplace. O determinante de uma matriz é igual a soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos complementos algébricos.

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathbb{A}_{-\mathrm{i}-\mathrm{j}})$$

sendo:

- n a ordem da matriz;
- i e j são os índices que representam a linha e coluna, respectivamente;
- a_{ij} é o elemento da *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna;
- $\det(\mathbb{A}_{-i-j})$ é o determinante da matriz formada pela **remoção** da *linha* i e *coluna* j.

O teorema anterior é o Teorema de Laplace que estabelece um modo de calcular os determinantes de matrizes de ordem n. Note que a aplicação desse teorema serve, também, para matrizes de ordem 2 ou 3.

■ **Exemplo 2.4** Calcule o determinante da matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

A matriz é de ordem 3 ($n = 3$). Inicialmente é necessário escolher uma linha qualquer da matriz. Suponha a escolha da linha 1 ($i = 1$). A linha 1 possui os elementos a_{11}, a_{12} e a_{13}. Assim o determinante ficará:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathbb{A}_{\mathrm{-i-j}}) \\
&= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(\mathbb{A}_{\mathrm{-1-j}}) \\
&= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}) + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}) \\
&\quad + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \det(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}) \\
&= (-1)^{2} \cdot 1 \cdot \det(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}) + (-1)^{3} \cdot 2 \cdot \det(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}) \\
&\quad + (-1)^{4} \cdot 3 \cdot \det(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 3 - 6 \cdot 1) - 1 \cdot 2 \cdot (4 \cdot 3 - 6 \cdot 2) + 1 \cdot 3 \cdot (4 \cdot 1 - 5 \cdot 2) \\
&= 1 \cdot (15 - 6) - 2 \cdot (12 - 12) + 3 \cdot (4 - 10) \\
&= 1 \cdot 9 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-6) \\
&= 9 - 0 - 18 \\
&= 9 - 18 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=WHPNHxdKDyg` ■

O resultado obtido é o mesmo calculado utilizando a *regra de Sarrus* para matrizes de ordem 3. Comparando os dois exemplos, o leitor concluirá (facilmente!) que é muito simples, e rápido, calcular o determinante pela regra mencionada. No entanto, a regra de Sarrus pode ser utilizada para matrizes de ordem 3, ou seja, para matrizes de ordem maior (4, 5, 6, ...) o método é o utilizado nesta seção[1].

2.1.4 Regra do Cadarço (Fórmula de Gauss)

Embora esta seção esteja dentro do capítulo sobre *Determinantes* a *Regra do Cadarço* é um método para calcular áreas (*Fórmula de Gauss para cálculo de área*). NÃO se trata de determinantes de matrizes NÃO QUADRADAS. Os Determinantes são exclusivos das matrizes quadradas.

A fórmula pode ser representada por:

$$
\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot \left|(x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)\right|
$$

sendo:

- n o número de vértices do polígono;
- A a área do polígono;
- $(x_i, y_i), \quad i \in 1, 2, \ldots, n$ as coordenadas dos vértices.

■ **Exemplo 2.5** Calcule a área da figura formada pelos pontos $(0,0), (2,0), (2,2)$ e $(0,2)$

Os pontos do enunciado formam um quadrado de lado 2, desse modo, a área resultante deverá ser igual a 4, pois $2 \cdot 2 = 4$. Para aplicar a Regra do Cadarço é necessário definir:

- $n = 4$ pois existem 4 pontos!;

[1] Existem outros métodos e não serão abordados neste material. O leitor pode facilmente encontrar fazendo buscas na internet e em livros.

- $P_1 : (0, 0) \Rightarrow x_1 = 0$ e $\mathrm{y}_1 = 0$;
- $P_2 : (2, 0) \Rightarrow x_2 = 2$ e $\mathrm{y}_2 = 0$;
- $P_3 : (2, 2) \Rightarrow x_3 = 2$ e $\mathrm{y}_3 = 2$;
- $P_4 : (0, 2) \Rightarrow x_4 = 0$ e $\mathrm{y}_4 = 2$.

Substituindo na Fórmula:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{1}{2} \cdot |(x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + \sum_{i=1}^{4-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + \sum_{i=1}^{3} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 0 - 0 \cdot 2) + (0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) + (2 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + (2 \cdot 2 - 0 \cdot 2)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(0 - 0) + (0 - 0) + (4 - 0) + (4 - 0)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |8| \\
&= \frac{8}{2} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=N8BoGdXgomk` ■

Embora seja muito mais fácil calcular a área do quadrado utilizando a relação de multiplicação entre os lados, a Regra do Cadarço serve para calcular a área de qualquer polígono bastando conhecer seus vértices, apenas.

3. Sistemas de Equações Lineares

3.1 Sistemas de Equações Lineares

3.1.1 Equações Lineares

Para iniciar o capítulo é importante definir alguns pontos. O leitor nesse momento pode lembrar, da disciplina Matemática, que *funções lineares* são aquelas que resultam em um gráfico no formato de reta, costumeiramente chamadas de *linha*. Vendo o exemplo abaixo é possível retomar, rapidamente, o gráfico de uma função linear.

■ **Exemplo 3.1** Construa o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

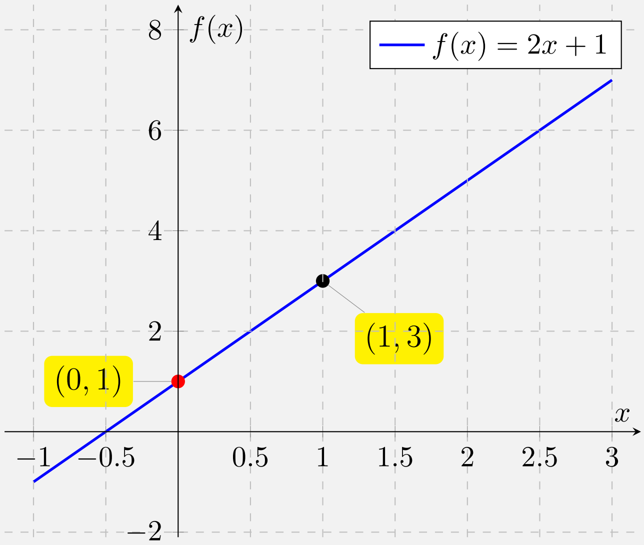
Analisando a função dada, é possível definir algumas coisas através da comparação com a definição geral de funções lineares:

$$f(x) = a \cdot x + b \quad \text{Definição geral}$$
$$f(x) = 2 \cdot x + 1 \quad \text{Função do enunciado}$$

- x: variável independente;
- $f(x)$ ou y: variável dependente;
- f: nome da função;
- a: coeficiente angular. Define o ângulo entre a reta (função) e o *eixo das abscissas*, também chamado de *eixo horizontal* ou, "popularmente", *eixo x* [a]. Se $a > 0$ a função é crescente; se $a < 0$ a função é decrescente; se $a = 0$ a função é constante;
- b: coeficiente linear. É o valor que intercepta, ou *"corta"* o *eixo das ordenadas*, conhecido também como *eixo vertical*, ou ainda como *eixo y* [b].

Desse modo para fazer o gráfico é necessário apenas dois pontos, ou seja, dois *pares ordenados* $(x, f(x))$. Um desses pares pode ser obtido através do coeficiente linear, ou seja, se a função intercepta o eixo das ordenadas no valor 1 ($b = 1$), necessariamente, $x = 0$, assim $(0, 1)$ é um ponto (ponto vermelho). A determinação de outro ponto pode ser atribuindo um valor, diferente de zero, para a variável independente e calcular seu correspondente. Atribuindo $x = 1$ tem-se $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$ logo, o segundo ponto (ponto preto) será $(1, 3)$. Unindo esses dois pontos e traçando uma reta é possível obter o gráfico abaixo:

Figura 3.1: Gráfico de uma função linear



Fonte: Próprio autor.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=KreVo3UpTzM` ■

[a]Existem alguns pontos a serem considerados aqui: 1) quando é falado *eixo horizontal* podem haver interpretações erradas pois é uma questão de referência, ou seja, se o leitor girar o papel em 90°, o eixo se tornará vertical! Chamar de *eixo* x também podem haver interpretações diferenciadas, pois se o problema trata de uma situação onde envolva o cálculo do espaço de um móvel (S) em função do tempo (t), essa nomenclatura não fará sentido algum. O modo correto de interpretar e nomear o eixo é utilizar *eixo das abscissas* ou, se o leitor preferir, pode utilizar o nome da variável independente para o nome do eixo, ou seja, no mesmo exemplo anterior, cálculo do espaço em função do tempo, pode ser utilizado para o *eixo das abscissas* simplesmente *eixo de* t ou *eixo do tempo*.

[b]Mesma consideração da nota anterior.

Como pode ser visto na Figura 3.1, o gráfico da função do exemplo anterior é uma reta pois os expoentes das variáveis, independente e dependente são iguais a 1. A função do exemplo anterior pode ser reescrita para a forma:

$$y - 2x = 1$$

A forma como a função foi reescrita pode ser entendida como uma *equação linear*. De modo geral sobre *Equações Lineares* são equações do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os coeficientes, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis e b é o termo independente.

■ **Exemplo 3.2** A equação $2x + 3y - 4z = 2$ é uma equação linear. Seus coeficientes são $2, 3$ e -4. Já as variáveis são x, y e z e 2 é o termo independente. A solução para esta equação ocorre quando $x = 3, y = 0$ e $z = 1$ pois $2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 2$. ■

■ **Exemplo 3.3** Verifique se $(1, 2, 0)$ e $(1, 0, 0)$ satisfazem a equação linear $2x + 3y - 4z = 2$.

Para verificar se as triplas[a] ordenadas satisfazem a equação linear basta substituir os valores dados em suas respectivas variáveis, assim:

- $(1,2,0) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2 + 6 - 0 = 2 \Rightarrow 8 = 2$ FALSO. Logo, a $(1,2,0)$ não satisfaz a equação linear do enunciado.
- $(1,0,0) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2 + 0 - 0 = 2 \Rightarrow 2 = 2$ VERDADEIRO. Logo, a $(1,0,0)$ satisfaz a equação linear do enunciado.

■

[a]Um nome mais apropriado para chamar um conjunto de valores, ordenados, é utilizando a quantidade de elementos dessa organização, ou seja: 2 valores implicam numa dupla ou par ordenado; 3 valores, tripla ordenada; 4 valores, quadrupla ordenada; 5 valores, quíntupla ordenada; "n" valores n-upla (ênupla).

O leitor pode imaginar que as equações lineares acima existam infinitas combinações entre valores numéricos que satisfaçam a relação. Isso acontece porque o *número de variáveis* é MAIOR que o *número de equações*. No entanto, existem situações em que o número de equações lineares é igual ao número de variáveis.

■ **Exemplo 3.4** Dado as funções Receita ($R(x) = 30x$) e Custo ($C(x) = 20x + 1000$), determine o ponto de equilíbrio[a].

Para determinar o ponto de equilíbrio basta fazer $y = R(x) = C(x)$ e substituir nas equações do enunciado, assim:

- Função Receita: $y = 30x$;
- Função Custo: $y = 20x + 1000$.

Fica claro a existência de duas equações (Receita e Custo) e duas variáveis (x e y). A solução dessas equações lineares devem satisfazer as duas funções simultaneamente, desse modo, é possível escrever um *sistema de equações lineares*, como segue:

$$\begin{cases} y = 30x \\ y = 20x + 1000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y - 30x = 0 \\ y - 20x = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

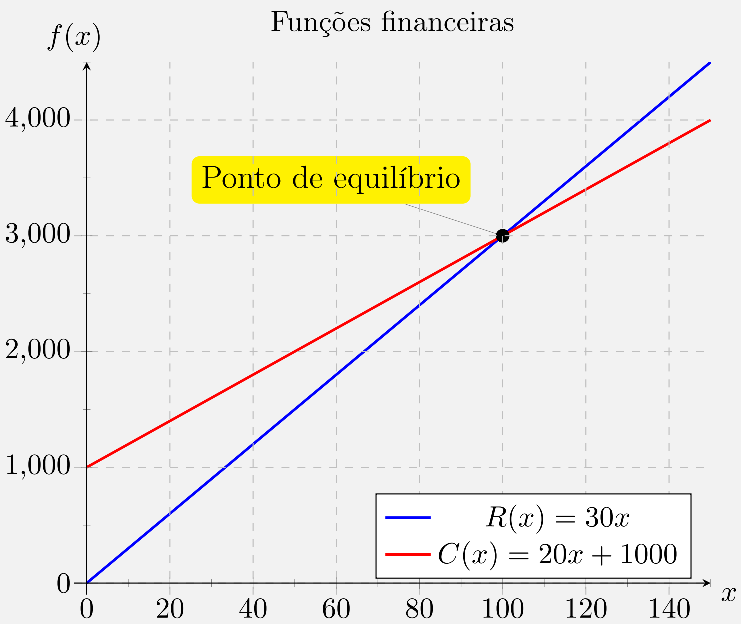
$$\begin{cases} y - 30x = 0 \\ -10x = -1000 \end{cases} \Rightarrow x = 100$$

$$y - 30 \cdot 100 = 0 \Rightarrow$$

$$y - 3000 = 0 \Rightarrow y = 3000$$

Assim, o ponto de equilíbrio é $(100, 3000)$ e representa a quantidade de produtos que devem ser vendidos ($x = 100$ unidades) e o valor da Receita e do Custo quando forem vendidos $x = 100$ produtos será de R\$3000,00 ($y = 3000 \Rightarrow R(100) = C(100) = \text{R\$}\,3000,00$). A Figura 3.2 mostra o gráfico das funções e o ponto de equilíbrio.

Figura 3.2: Gráfico das funções Receita e Custo



Fonte: Próprio autor.

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=8mZ7W4jwPWY` ■

[a] O ponto de equilíbrio acontece quando a Receita é igual ao Custo, ou seja, $R(x) = C(x)$

Como visto anteriormente, os sistemas de equações lineares podem ser aplicados na área da Administração, Ciências Contábeis e, é claro, na área de exatas!

Desse modo é de fundamental importância saber resolver os sistemas de equações lineares e, para isso, existem alguns métodos. Será visto aqui o método da resolução usando matrizes, chamada de regra de Cramer e o método da eliminação de Gauss.

Antes de conhecer as técnicas é importante frisar que os sistemas de equações lineares podem ser classificados dependendo do número de soluções que o mesmo apresenta:

- **Sistema Impossível**: Quando o sistema não admite solução;
- **Sistema Possível e Indeterminado**: Quando o sistema admite mais de uma solução;
- **Sistema Possível e Determinado**: É o sistema que possui uma única solução possível.

3.1.2 Regra de Cramer

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 0 \end{cases}$$

É possível escrever a Matriz Principal deste sistema. A Matriz Principal é composta pelos coeficientes de cada variável do sistema, ou seja

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainda é possível definir as matrizes $\mathbb{M}_x$, $\mathbb{M}_y$, e $\mathbb{M}_z$ substituindo os valores da coluna do resultado nas respectivas colunas da matriz principal, assim:

$$\mathbb{M}_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, o valor das variáveis do sistema dado pode ser calculado através de:

$$x = \frac{\det(\mathbb{M}_x)}{\det(\mathbb{M})}, \quad y = \frac{\det(\mathbb{M}_y)}{\det(\mathbb{M})}, \quad \text{e} \quad \text{z} = \frac{\det(\mathbb{M}_\text{z})}{\det(\mathbb{M})}$$

3.1.3 Eliminação de Gauss - Método do escalonamento

Um sistema de equações lineares pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{B}$$

Onde a matriz $\mathbb{A}$ é a matriz dos coeficientes, $\mathbb{X}$ é a matriz das variáveis e $\mathbb{B}$ é a matriz dos resultados.

O objetivo da eliminação de Gauss é formar uma matriz triangular superior. Em um sistema de equações lineares é possível fazer:

- Multiplicar uma linha inteira por um número diferente de zero;
- Mudar a posição das linhas e/ou colunas;
- Efetuar operações entre as linhas.

■ **Exemplo 3.5** Resolva o sistema abaixo

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ x - y + 3z &= 1 \end{cases}$$

Solução:

O sistema do enunciado pode ser escrito através da multiplicação abaixo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}}$$

O próximo passo é montar a chamada *Matriz Ampliada* do passo inicial ou passo zero (0).

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Após a definição da Matriz Ampliada, o próximo passo é zerar os elementos que estão abaixo da diagonal principal, assim:

$$L_2^{(1)} \leftarrow 2 \cdot L_1^{(0)} - L_2^{(0)}$$
$$L_3^{(1)} \leftarrow L_1^{(0)} - L_3^{(0)}$$

resultando em:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

O próximo passo é usar a linha 2 como referência para zerar os elementos que estão abaixo da diagonal principal. Assim:

$$L_3^{(2)} \leftarrow 2 \cdot L_2^{(1)} - L_3^{(1)}$$

obtendo o seguinte sistema:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{B}]^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Da última linha, tem-se:

$$3z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Da linha 2 é possível obter:

$$y = 1$$

Substituindo o resultado de y e z na linha 1, obtém-se:

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x + 1 + 0 = 3 \Rightarrow x = 2$$

Enfim, este sistema pode ser classificado como Sistema Possível e Determinado e a solução é a tripla $(2, 1, 0)$, podendo representar o conjunto solução da seguinte maneira:

$$S = \{(2, 1, 0)\}$$

Doutor Exatas: `https://www.youtube.com/watch?v=L4V_rF9uN2g` ■

3.2 Exercícios

Exercício 3.1 Determine os valores de x e y de modo que as matrizes abaixo sejam iguais:

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & x+10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ y-7 & 5 \end{bmatrix}$$

■

Exercício 3.2 Considere as matrizes:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a. $2\mathbb{A} + 3\mathbb{B}$

b. $-\mathbb{A} + \frac{1}{2}\mathbb{B}$

c. $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$

d. $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$

e. As matrizes $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ são iguais? Por quê?

■

Exercício 3.3 Calcule o Determinante das matrizes abaixo:

a.
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b.
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c.
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & -10 \\ -11 & 1 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

■

Exercício 3.4 Uma empresa produz e vende pneus automotivos. Sabendo que o custo envolvido na produção de 100 pneus seja igual a R$ 2300,00 e o preço de venda de cada unidade igual a R$ 730,00, determine o ponto de equilíbrio dessa produção supondo que o custo fixo da empresa seja igual a R$ 3700,00. ■

Exercício 3.5 Calcule o sistema abaixo usando os métodos de Cramer e Escalonamento.

a.
$$\begin{cases} x + y & = 10 \\ x - y & = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y & = 10 \\ 2x + 2y & = 0 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y & = 10 \\ -2x - 2y & = -20 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + y + z & = 10 \\ x - y + z & = 4 \\ x + y - z & = 2 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 2x + y + z & = 10 \\ x - y + z & = 6 \\ -3x - y - z & = 2 \end{cases}$$

■

Exercício 3.6 Classifique os sistemas do Exercício 3.5 em *Sistema Possível e Determinado - SPD*, *Sistema Possível e Indeterminado - SPI* ou *Sistema Impossível - SI*. ■