

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Računalništvo in matematika – 2. stopnja

Kevin Štampar

**ORODJE ZA GRAFIČNI PRIKAZ  
KONCEPTOV BEZIERJEVIH IN PH KRIVULJ**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2024



# **Zahvala**

Zahvaljujem se mentorju za zelo sproščen odnos!



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bezierjeve krivulje</b>	<b>2</b>
2.1	Bernsteinovi bazni polinomi . . . . .	2
2.2	Večdimenzionalne oznake . . . . .	4
2.3	Bezierjeve krivulje . . . . .	4
2.4	Decasteljaujev algoritem . . . . .	6
2.5	Subdivizija . . . . .	8
2.6	Ekstrapolacija . . . . .	10
2.7	Višanje stopnje . . . . .	10
2.8	Odvod Bezierjeve krivulje . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Racionalne Bezierjeve krivulje</b>	<b>14</b>
3.1	Decasteljaujev algoritem za racionalne Bezierjeve krivulje . . . . .	16
3.2	Farinove točke . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Zlepki Bezierjevih krivulj</b>	<b>18</b>
	<b>Literatura</b>	<b>21</b>



## **Program dela**

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Podpis mentorja:





## **Orodje za grafični prikaz konceptov Bezierjevih in PH krivulj**

### **POVZETEK**

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

## **Tool for graphically displaying concepts of Bezier and PH curves**

### **ABSTRACT**

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2020):** 74B05, 65N99

**Ključne besede:** integracija, kompleks

**Keywords:** integration, complex



# 1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

**Ker je v okviru magistrskega dela nastalo orodje za grafični prikaz konceptov, bo delo polno s slikovnimi primeri.**

## 2 Bezierjeve krivulje

### 2.1 Bernsteinovi bazni polinomi

V tem podrazdelku bomo predstavili Bernsteinove bazne polinome in nekaj njihovih lastnosti, ki bodo ključne pri vpeljavi Bezierjevih krivulj. Začnimo z njihovo definicijo.

**Definicija 2.1.** Za nenegativna cela števila  $n$  je  $i$ -ti *Bernsteinov bazni polinom* podan s predpisom

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Iz definicije je očitno, da so za indekse  $i > n$ , oziroma  $i < 0$ , Bernsteinovi bazni polinomi ničelni. Pri določeni stopnji  $n$  je neničelnih Bernsteinovih baznih polinomov torej  $n+1$ . Brez dokaza povejmo, da so linearno neodvisni in zato tvorijo bazo prostora polinomov stopnje manjše ali enake  $n$  ( $\mathbb{P}_n$ ). Takšni bazi pravimo *Bernsteinova baza*, polinomu izraženemu v njej pa pravimo *Bernsteinov polinom*.

**Primer 2.2.** Za primer si bomo ogledali Bernsteinove bazne polinome stopenj  $n = 0, 1, 2, 3$ . Pri stopnji 0 imamo konstantni polinom s funkcijskim predpisom  $B_0^0(t) = 1$ . Za stopnjo 1 dobimo dva polinoma s funkcijskima predpisoma  $B_0^1(t) = 1 - t$  in  $B_1^1(t) = t$ . Funkcijski predpisi kvadratnih in kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov pa so:

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2, & B_1^2(t) &= 2t(1-t), & B_2^2(t) &= t^2, \\ B_0^3(t) &= (1-t)^3, & B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2, & B_2^3(t) &= 3t^2(1-t), & B_3^3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

Grafe polinomov iz primera si lahko ogledamo na sliki 1. ◇

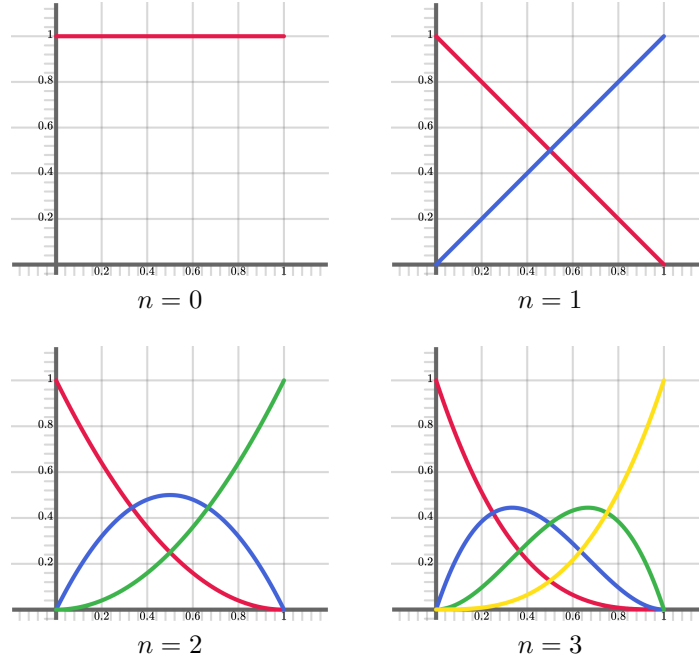
Brez dokaza v naslednjem izreku naštejmo nekaj osnovnih lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov.

**Izrek 2.3.** Za Bernsteinove bazne polinome  $B_i^n$  veljajo naslednje lastnosti.

1. So nenegativni na intervalu  $[0, 1]$ .
2.  $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$  in  $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$ , kjer je  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$
3. So simetrični, tj.  $B_i^n(1-t) = B_{n-i}^n(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
4. Tvorijo razčlenitev enote, tj.  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Prve tri lastnosti iz izreka lahko opazimo na že prej omenjeni sliki 1. Četrto lastnost pa je moč opaziti na sliki 2, kjer so prikazani naloženi ploščinski grafikon Bernsteinovih baznih polinomov. Količina barve pri določenem parametru  $t \in [0, 1]$  pove, koliko pripadajoč polinom  $B_i^n$  prispeva k razčlenitvi enote.

S sledečim izrekom podamo rekurzivno zvezo za računanje vrednosti Bernsteinovih baznih polinomov.



Slika 1: Bernsteinovi bazni polinomi stopenj  $n = 0, 1, 2, 3$ .

**Izrek 2.4.** Za Bernsteinove bazne polinome stopnje  $n \geq 1$  velja rekurzivna zveza

$$B_i^n(t) = (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Izrek je enostavno dokazati s pomočjo indukcije, zato bomo dokaz izpustili.

V kasnejših razdelkih bomo potrebovali tudi odvode Bernsteinovih baznih polinomov. Ker Bernsteinovi bazni polinomi stopnje  $n$  tvorijo bazo prostora  $\mathbb{P}_n$ , lahko njihove odvode izrazimo v Bernsteinovi bazi dimenzije  $n-1$ . Z nekaj računanja pridemo do sledečega rezultata.

**Izrek 2.5.** Za odvode Bernsteinovih baznih polinomov velja zveza

$$B_i^{n'} = n(B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1}).$$

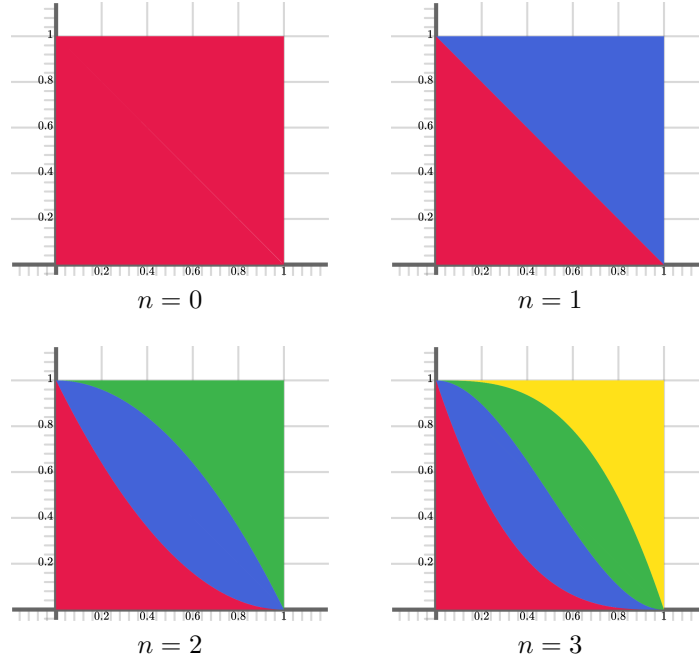
Za konec podrazdelka izpeljimo še formulo za zmnožek dveh Bernsteinovih polinomov.

**Izrek 2.6.** Naj bosta  $f$  in  $g$  Bernsteinova polinoma definirana kot  $f = \sum_{i=0}^m \alpha_i B_i^m$  in  $g = \sum_{i=0}^n \beta_i B_i^n$ . Potem za njun zmnožek velja

$$fg = \sum_{i=0}^{m+n} \left( \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(m, i)} \frac{\binom{m}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{m+n}{i}} \alpha_j \beta_{i-j} \right) B_i^{m+n}.$$

*Dokaz.* Naj bosta  $f$  in  $g$  Bernsteinova polinoma iz predpostavk izreka. Polinoma zmnožimo in dobimo

$$fg = \sum_{i=0}^m \alpha_i B_i^m \sum_{j=0}^n \beta_j B_j^n = \sum_{i=0}^{m+n} \sum_{l=0}^i \alpha_l B_l^m \beta_{i-l} B_{i-l}^n.$$



Slika 2: Naloženi ploščinski grafikoni Bernsteinovih baznih polinomov.

V zadnji izraz vstavimo funkcijske predpise Bernsteinovih baznih polinomov, ga poenostavimo in dobimo

$$\sum_{i=0}^{m+n} \sum_{l=0}^i \alpha_l \beta_{i-l} \binom{m}{l} \binom{n}{i-l} t^i (1-t)^{m+n-i}.$$

Kar lahko z izpostavitvijo binoma  $\binom{m+n}{i}$  predstavimo v Bernsteinovi bazi kot

$$\sum_{i=0}^{m+n} \left( \sum_{l=0}^i \alpha_l \beta_{i-l} \frac{\binom{m}{l} \binom{n}{i-l}}{\binom{m+n}{i}} \right) B_i^{m+n}.$$

V primerih, ko velja  $l > m$  ali  $i - l > n$  imamo v števcu ulomka 0, kar privede do zapisa iz izreka.  $\square$

## 2.2 Večdimenzionalne oznake

Da bodo zapisi v sledečih razdelkih bolj pregledni, bomo uvedli večdimenzionalne oznake. Točke v večdimenzionalnem prostoru bomo označili z odebeljenimi črkami, na primer  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Podobno bomo odebelili črke funkcij, ki v večdimenzionalni prostor slikajo, na primer  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ .

## 2.3 Bezierjeve krivulje

Če v Bernsteinovem polinomu skalarne koeficiente zamenjamo s točkami, dobimo predpis parametrizacije Bezierjeve krivulje.

**Definicija 2.7.** Bezierjeva krivulja  $\mathbf{B} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  stopnje  $n \in \mathbb{N}$  je polinomska krivulja podana s točkami  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , in parametrizacijo

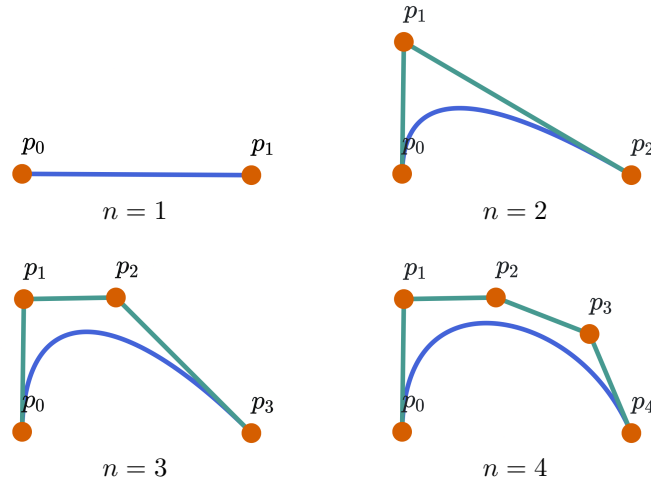
$$\mathbf{B} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t).$$

Točkam  $\mathbf{p}_i$  pravimo *kontrolne točke*. Če zaporedne kontrolne točke povežemo, dobimo *kontrolni poligon*.

**Opomba 2.8.** Kjer je potrebno, lahko definicijo razširimo tudi na stopnjo  $n = 0$ . Iz zgornje parametrizacije potem sledi  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{p}_0$ .

**Opomba 2.9.** Pri slikovnem gradivu iz dela se bomo omejili na prostor dimenzije  $d = 2$ , torej na Bezierjeve krivulje v ravnini.

Na sliki 3 si lahko ogledamo primere Bezierjevih krivulj stopenj  $n = 1, 2, 3, 4$  s pripadajočimi kontrolnimi poligoni.



Slika 3: Bezierjeve krivulje s pripadajočimi kontrolnimi poligoni za stopnje  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Zapišimo sedaj nekaj osnovnih lastnosti Bezierjevih krivulj.

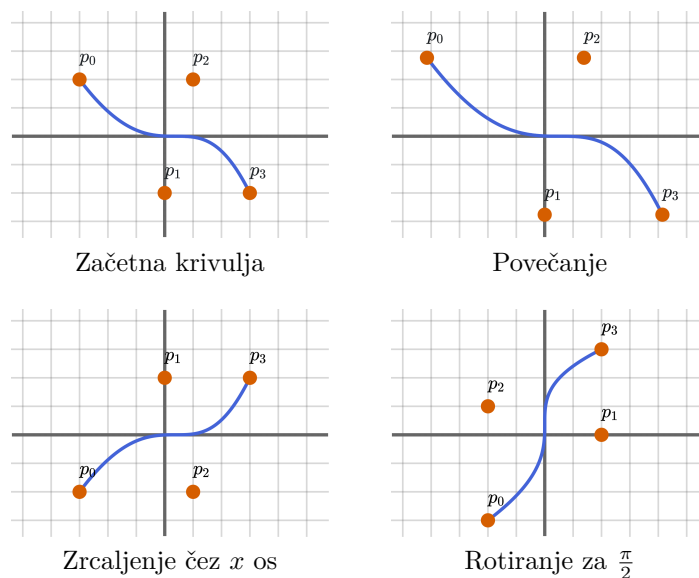
**Izrek 2.10.** Bezierjeva krivulja  $\mathbf{B}$  s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ima sledeče lastnosti.

1. Interpolira končni točki, tj. velja  $\mathbf{B}_n(0) = \mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{B}_n(1) = \mathbf{p}_n$ .
2. Je afino invariantna, tj. za poljubno afino transformacijo  $A$  velja

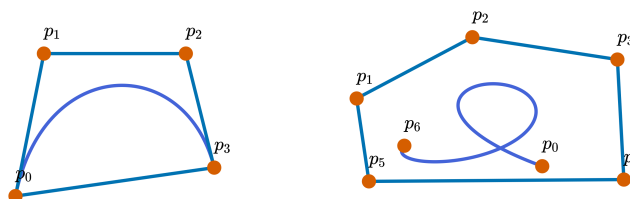
$$A \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) \right) = \sum_{i=0}^n A(\mathbf{p}_i) B_i^n(t).$$

3. Leži znotraj konveksne ovojnice svojih kontrolnih točk.

Dokazi lastnosti so enostavni, zato jih izpustimo. Preden si lastnosti ogledamo na slikah, povejmo zakaj so pomembne za CAGD sisteme. Interpolacija končnih točk uporabniku omogoča kontrolo nad tem, kje se bo krivulja začela in kje zaključila. Zaradi afine invariance lahko uporabnikove transformacije krivulje v ozadju CAGD sistema prevedemo v transformacije kontrolnih točk. Tretja lastnost pa uporabniku s kontrolnimi točkami omogoča upravljanje krivulje, kjer je krivulja zmerom v bližini svojih kontrolnih točk. Lastnosti si sedaj oglejmo na slikah. Interpolacijo končnih točk je bilo moč videti že na sliki 3. Posledice afine invariance si lahko ogledamo na sliki 4. Na sliki 5 pa si lahko ogledamo konveksni ovojnici kontrolnih točk dveh Bezierjevih krivulj. Vidimo, da krivulji ležita znotraj njih.



Slika 4: Afine transformacije Bezierjeve krivulje.



Slika 5: Konveksni ovojnici kontrolnih točk Bezierjevih krivulj.

## 2.4 Decasteljaujev algoritem

Stabilnost metod je v CAD in CAGD sistemih bistvene narave. Direktno računanje vrednosti Bernsteinovih polinomov preko izrazov iz definicije 2.1 pa ni stabilno [1]. Da lahko točke Bezierjevih krivulj računamo stabilno, potrebujemo sledeč izrek.



**Izrek 2.11.** Označimo z  $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$  Bezierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ . Potem za poljubno realno število  $t$  in naravno število  $n$  velja rekurzivna zveza

$$\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]} = (1-t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]}.$$

Izrek s pomočjo indukcije tudi dokažimo.

*Dokaz.* Za  $n = 1$  zveza drži, saj je

$$\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]} = (1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_1 = (1-t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1]}.$$

Indukcijski korak pa dokažemo tako, da v desni del rekurzivne zveze iz izreka vstavimo parametrizacijo Bezierjevih krivulj in dobimo

$$(1-t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]} = (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_{i+1} B_i^{n-1}(t).$$

Nato zamaknemo indeks desne vsote in skupne točke postavimo pod eno vsoto. Od tod sledi

$$\begin{aligned} & (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i B_{i-1}^{n-1}(t) \\ &= \mathbf{p}_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \right) \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_n B_{n-1}^{n-1}(t). \end{aligned}$$

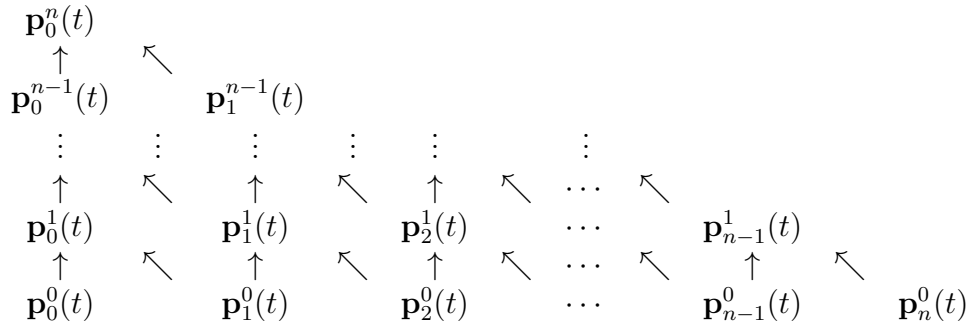
Uporabimo še rekurzivno zvezo Bernsteinovih baznih polinomov iz izreka 2.4, da dobimo

$$\mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^n(t) + \mathbf{p}_n B_n^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t).$$

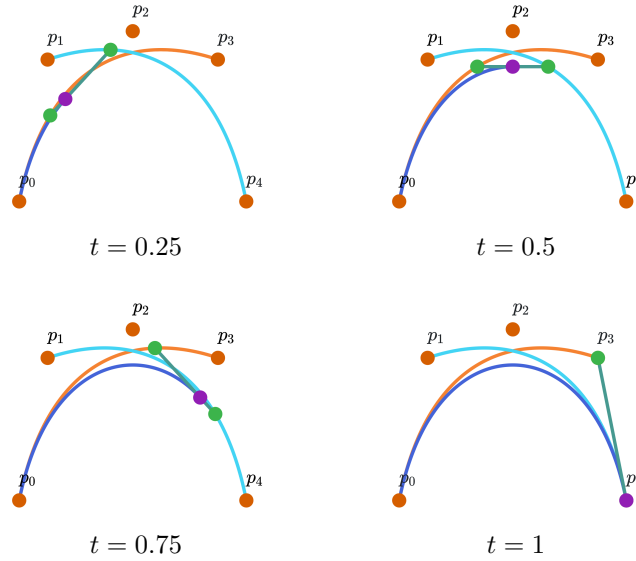
□

Na sliki 6 lahko vidimo, kako lahko točke Bezierjeve krivulje  $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]}$  računamo s pomočjo točk Bezierjevih krivulj  $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]}$  in  $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]}$ .

Označimo sedaj  $\mathbf{p}_i^r(t) = \mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_{i+r}]}$ . Velja torej  $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$  in  $\mathbf{p}_0^n(t) = \mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$ . Iz izreka 2.11 sledi, da lahko točke Bezierjeve krivulje  $\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$  računamo s pomočjo *Decasteljaujeve sheme*, ki jo lahko vidimo na sliki 2.4. V shemi diagonalne puščice ponazarjajo množenje točke z vrednostjo  $t$ , vertikalne pa z vrednostjo  $1-t$ . V vrhu puščic dobljene vrednosti seštejemo.



Slika 7: Decasteljaujeva shema.



Slika 6: Izračun točke Bezierjeve krivulje.

Izračun točke Bezierjeve krivulje pri poljubnem parametru  $t$  lahko sedaj podamo v obliki *Decasteljaujevega algoritma* 1.

---

**Algoritem 1** Decasteljaujev algoritem

---

```

 $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 
 $t \leftarrow t$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n$  do
     $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$ 
end for
for  $r = 1, 2, \dots, n$  do
    for  $i = 0, 1, \dots, n - r$  do
         $\mathbf{p}_i^r(t) = (1 - t)\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$ 
    end for
end for
return  $\mathbf{p}_0^n(t)$ 

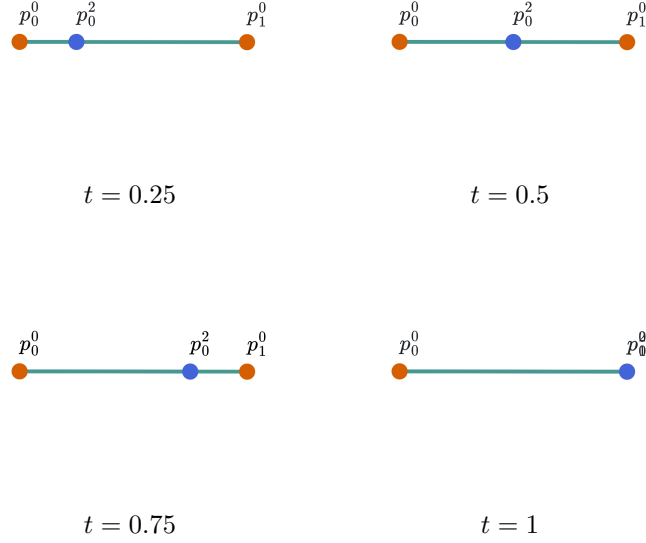
```

---

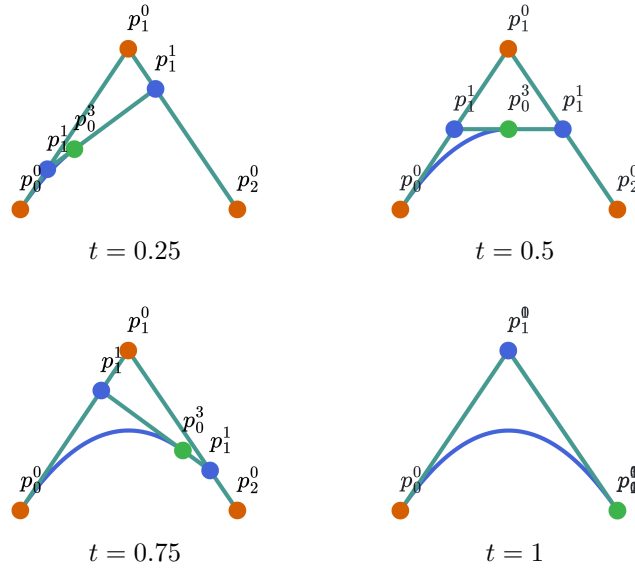
Algoritem 1 ima tudi geometrijski pomen. Pri stopnji  $n = 1$  se prevede na interpolacijo dveh točk, kar lahko vidimo na sliki 8. Pri višjih stopnjah  $n$  pa algoritem predstavlja zaporedno interpolacijo točk, saj v njem za vsak nivo  $r = 1, 2, \dots, n$  interpoliramo sosednje točke prejšnjega nivoja. Slednje lahko vidimo na slikama 9 in 10.

## 2.5 Subdivizija

V CAGD in CAD sistemih se mnogokrat zgodi, da uporabnik želi ohraniti le en del Bezierjeve krivulje. Naj bo to tisti del krivulje, ki ga dobimo tako, da za prvotno krivuljo parameter  $t$  omejimo na interval  $[0, t_0]$ , za neko pozitivno realno število  $t_0 < 1$ . Ta del krivulje označimo z  $B_{t_0-}$ . Izkazuje se, da lahko krivuljo  $B_{t_0-}$  podamo kot Bezierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_0^i(t_0)$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ , kjer točke



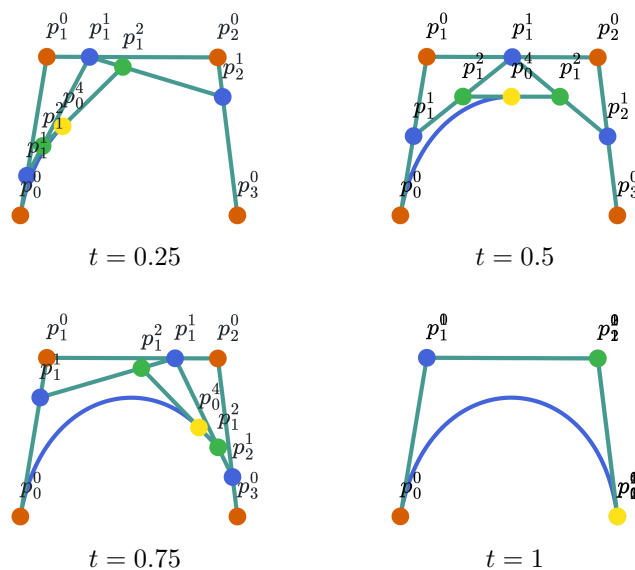
Slika 8: Decasteljaujev algoritem za  $n = 1$ .



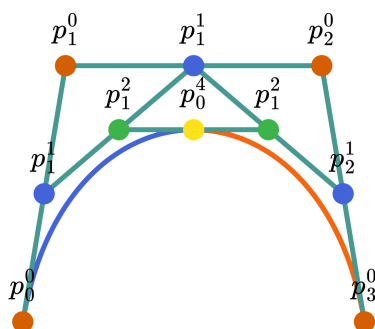
Slika 9: Decasteljaujev algoritem za  $n = 2$ .

$\mathbf{p}_0^i(t_0)$  dobimo iz Decasteljaujeve sheme pri  $t = t_0$ . Podobno se izkaže tudi to, da lahko preostali del krivulje,  $B_{t_0+}$ , podamo kot Bezierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_i^i(t_0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Primer si lahko ogledamo na sliki 11. Radovedni bralci lahko dokaz trditve najdejo v delu [1]. Procesu deljenja krivulje na dva dela pravimo *subdivizija*.

Če izberemo sedaj  $t_0 = \frac{1}{2}$  in krivuljo subdiviziramo, dobimo dve krivulji. Če subdivizijo nato na dobljenih krivuljah ponavljamo, dobimo po  $k$  korakih  $2^k$  krivulj. Na sliki 12 si lahko ogledamo postopek za prve tri korake. Opazimo, da so kontrolni poligoni dobljenih krivulj zmerom bližje krivulji.



Slika 10: Decasteljaujev algoritem za  $n = 3$ .



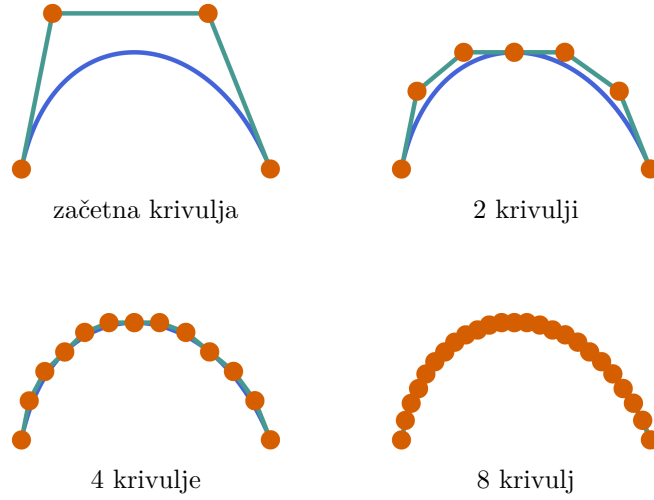
Slika 11: Decasteljaujeva shema pri  $t = t_0$  razdeli krivuljo na dva dela, modrega,  $B_{t_0-}$ , in oranžnega,  $B_{t_0+}$ .

## 2.6 Ekstrapolacija

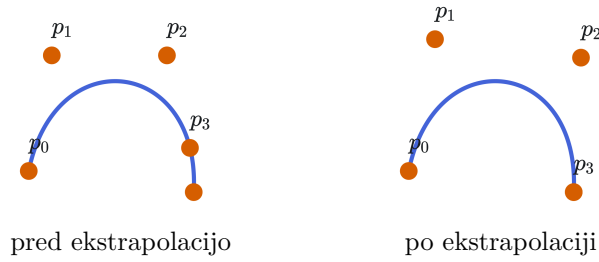
Ker so Bernsteinovi bazni polinomi definirani za vsa realna števila  $t$ , lahko Bezierjeve krivulje rišemo tudi izven intervala  $[0, 1]$ . Recimo, da želimo neko Bezierjevo krivuljo risati na intervalu  $[0, t_0]$ , kjer je  $t_0 > 1$ . Bezierjevo krivuljo na intervalu  $[0, t_0]$  lahko zapišemo kot Bezierjevo krivuljo na intervalu  $[0, 1]$ . Pri tem kontrolne točke krivulje preberemo iz Decasteljaujeve sheme, kakor smo to storili za točke krivulje  $B_{t_0-}$  v prejšnjem razdelku. Na sliki 13 lahko na prvem grafu vidimo risanje krivulje izven intervala  $[0, 1]$ , na drugem pa ekstrapolirano krivuljo.

## 2.7 Višanje stopnje

Nekateri algoritmi v CAD/CAGD sistemih za vhod potrebujejo dve Bezierjevi krivulji iste stopnje. Recimo, da imamo Bezierjevo krivuljo  $\mathbf{B}$  stopnje  $n$ , ki jo želimo predstaviti kot Bezierjevo krivuljo stopnje  $n + 1$ . Upoštevajoč  $1 - t + t = 1$ , lahko



Slika 12: Ponavljanje subdivizije.



Slika 13: Ekstrapolacija Bezierjeve krivulje.

parametrizacijo krivulje  $\mathbf{B}$  zapišemo tudi kot

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{B}(t) + t\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i (1-t)B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i t B_i^n(t). \quad (2.1)$$

Če sedaj zvezi za Bernsteinove bazne polinome

$$\begin{aligned} (1-t)B_i^n(t) &= \frac{n+1-i}{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t), \\ tB_i^n(t) &= \frac{i+1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!} t^{i+1} (1-t)^{n+1-i-1} = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \end{aligned}$$

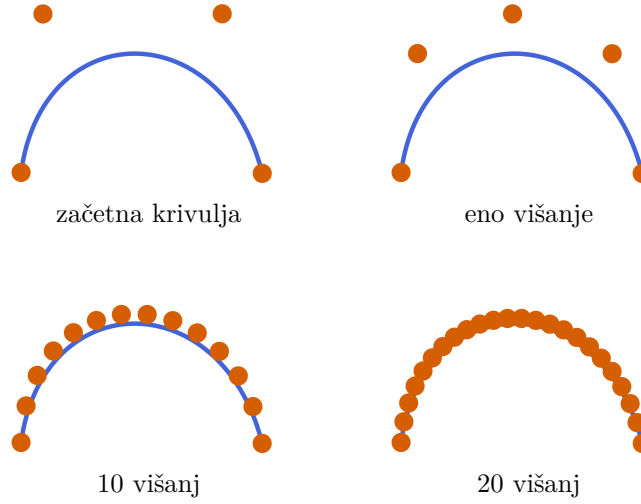
vstavimo v izraz 2.1, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{p}_{i-1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t). \end{aligned}$$

Od tod sledi, da lahko krivuljo  $\mathbf{B}$  predstavimo kot Bezierjevo krivuljo stopnje  $n+1$  s kontrolnimi točkami

$$c_0 = \mathbf{p}_0, \quad c_i = \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} + \mathbf{p}_{i-1} \frac{i}{n+1}, \quad c_{n+1} = \mathbf{p}_n.$$

Oglejmo si kako višanje stopnje izgleda na neki krivulji. Na sliki 14 je na prvem grafu narisana Bezierjeva krivulja stopnje 3. Na drugem grafu, smo stopnjo krivulje zvišali za 1, na tretjem in četrtem grafu pa smo naredili 10 oziroma 20 višanj stopnje začetne krivulje. Krivulja je na vseh grafih enaka, imamo le več kontrolnih točk. Opaziti je tudi možno, da so kontrolne točke z vsakim višanjem stopnje bližje začetni krivulji, kontrolni poligon pa se zmerom bolj prilega začetni krivulji.



Slika 14: Višanje stopnje Bezierjeve krivulje.

## 2.8 Odvod Bezierjeve krivulje

V kasnejših razdelkih bomo potrebovali odvode Bezierjevih krivulj, zato jih na tem mestu izpeljimo. Z upoštevanjem izreka o odvodu Bernsteinovih baznih polinomov 2.5, dobimo naslednje

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) \right)' = n \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \left( B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t) \right) \\ &= n \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i B_{i-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) \right) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) B_i^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Za krajše zapise višjih odvodov Bezierjeve krivulje, bomo uvedli operator *prema diferenca*, ki ga označimo z  $\Delta$ . Operator deluje na zaporedni točki  $\mathbf{p}_i$ , definiramo pa ga rekurzivno kot

$$\Delta^0 \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i, \quad \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i, \quad \Delta^k \mathbf{p}_i = \Delta^{k-1} \mathbf{p}_{i+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{p}_i.$$

Za naravno število  $k$  lahko v zaključeni obliki podamo ekvivalenten zapis

$$\Delta^k \mathbf{p}_i = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \mathbf{p}_{i+j}.$$

**Opomba 2.12.** Iz definicije je očitno, da je operator  $\Delta^k$  definiran le na kontrolnih točkah z indeksi manjšimi ali enakimi  $n - k$ .

Odvode Bezierjeve krivulje lahko sedaj predstavimo s pomočjo preme difference.

**Izrek 2.13.** *Naj bo  $\mathbf{B}$  Bezierjeva krivulja s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Za njene odvode velja*

$$\mathbf{B}^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{p}_i B_i^{n-k}(t), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Izrek je enostavno dokazati s pomočjo indukcije, zato bomo dokaz izpustili.

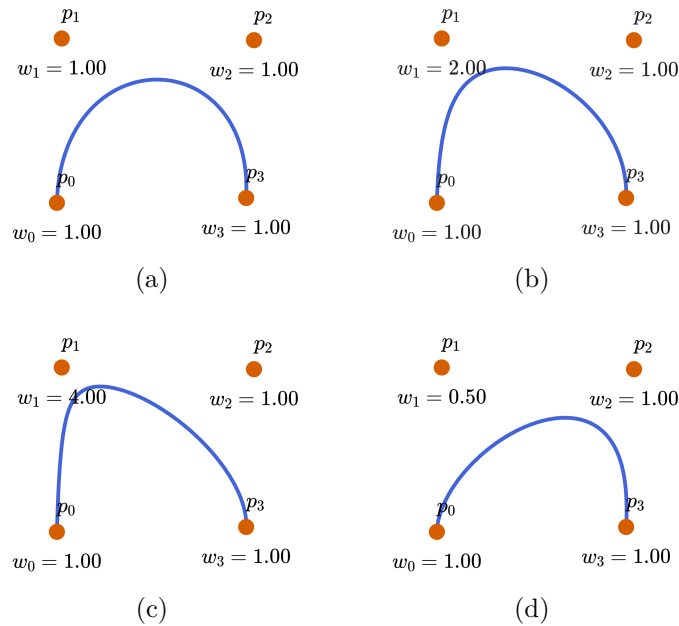
### 3 Racionalne Bezierjeve krivulje

Vseh krivulj ne moremo opisati s polinomskimi Bezierjevimi krivuljami. Med njimi so tudi takšne, ki so za CAGD sisteme zelo pomembne, na primer izseki krožnice. Za opis takšnih krivulj lahko posežemo po racionalnih Bezierjevih krivuljah. Racionalno Bezierjevo krivuljo stopnje  $n$  v  $\mathbb{R}^d$  dobimo tako, da Bezierjevo krivuljo stopnje  $n$  v  $\mathbb{R}^{d+1}$  projiciramo na hiperravnino  $w = 1$ . Točke iz  $\mathbb{R}^{d+1}$  pri tem definiramo kot  $(w, x_1, \dots, x_n)$ , projekcijo pa s predpisom  $(w, \mathbf{x}) \rightarrow (1, \frac{\mathbf{x}}{w})$ . Takšna izpeljava privede do naslednje definicije.

**Definicija 3.1.** Racionalna Bezierjeva krivulja stopnje  $n \in \mathbb{N}$  je racionalna krivulja podana s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$  in utežmi  $w_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ter parametrizacijo  $\mathbf{R} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  določeno s predpisom

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{p}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

Uteži so prosti parametri, ki jih lahko uporabimo pri oblikovanju. Kadar so vse uteži enake, je racionalna Bezierjeva krivulja enaka polinomski Bezierjevi krivulji z istimi kontrolnimi točkami. Da bi se izognili težavam pri deljenju z 0 ponavadi privzamemo, da so vse uteži pozitivne. Vpliv uteži si pogledjmo na sliki 15. Utež spreminjamo le pri kontrolni točki  $\mathbf{p}_1$ , vse ostale uteži puščamo enake 1. Na grafu (a) je utež nastavljena na število 1, krivulja na sliki je zato polinomska Bezierjeva krivulja. Na grafoma (b) in (c) lahko vidimo, da se z višanjem uteži, krivulja bliža točki  $\mathbf{p}_1$ . Na grafu (c) pa lahko vidimo, da se z nižanjem uteži, krivulja od točke  $\mathbf{p}_1$  oddaljuje.



Slika 15: Vpliv uteži na racionalno Bezierjevo krivuljo.

Iz zapisa parametrizacije v definiciji 3.1 lahko hitro vidimo, da množenje vseh uteži s poljubnim neničelnim številom krivulje ne spremeni. Tako lahko brez izgube



splošnosti poljubno utež fiksiramo na 1. Naslednji izrek pa pove, da lahko to storimo za dve uteži.

**Izrek 3.2.** *Racionalno Bezierjevo krivuljo s pozitivnimi utežmi  $w_i$  in parametrizacijo  $\mathbf{R}$ , lahko reparametriziramo v parametrizacijo  $\tilde{\mathbf{R}}$  s pozitivnimi utežmi  $\tilde{w}_i$  tako, da velja  $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_n = 1$ .*

Dokaz izreka bo konstrukcijske narave. Našli bomo torej uteži  $\tilde{w}_i$ , katere lahko zamenjamo z utežmi  $w_i$  tako, da ohranimo isto krivuljo.

*Dokaz.* Naj bo  $\mathbf{R}$  racionalna Bezierjeva funkcija s poljubnimi pozitivnimi utežmi. Uporabimo reparametrizacijsko funkcijo  $\varphi(t) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  s predpisom  $\varphi(t) = \frac{t}{\rho(1-t)+t}$ , kjer je  $\rho$  pozitivno realno število. Če reparametrizacijsko funkcijo vstavimo v  $i$ -ti Bernsteinov bazni polinom dobimo naslednje

$$\begin{aligned} B_i^n(\varphi(t)) &= \binom{n}{i} \left( \frac{t}{\rho(1-t)+t} \right)^i \left( 1 - \frac{t}{\rho(1-t)+t} \right)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} \left( \frac{t}{\rho(1-t)+t} \right)^i \left( \frac{\rho(1-t)}{\rho(1-t)+t} \right)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} \frac{\rho^{n-1} t^i (1-t)^{n-i}}{(\rho(1-t)+t)^n} = \frac{\rho^{n-1}}{(\rho(1-t)+t)^n} B_i^n(t). \end{aligned}$$

Reparametrizirane Bernsteinove bazne polinome sedaj vstavimo v parametrizacijo racionalne Bezierjeve krivulje, da dobimo

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(\varphi(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \rho^{n-i} w_i \mathbf{p}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \rho^{n-i} w_i B_i^n(t)}.$$

Nove uteži izrazimo s starimi  $\hat{w}_i = \rho^{n-i} w_i$ . Želimo, da bi veljalo  $\hat{w}_0 = \hat{w}_n$ , zato nastavimo  $\rho = \sqrt[n]{\frac{w_n}{w_0}}$ . Ker velja  $\hat{w}_n = w_n$  lahko uteži  $\hat{w}_i$  delimo z utežjo  $w_n$ , da dobimo željene uteži

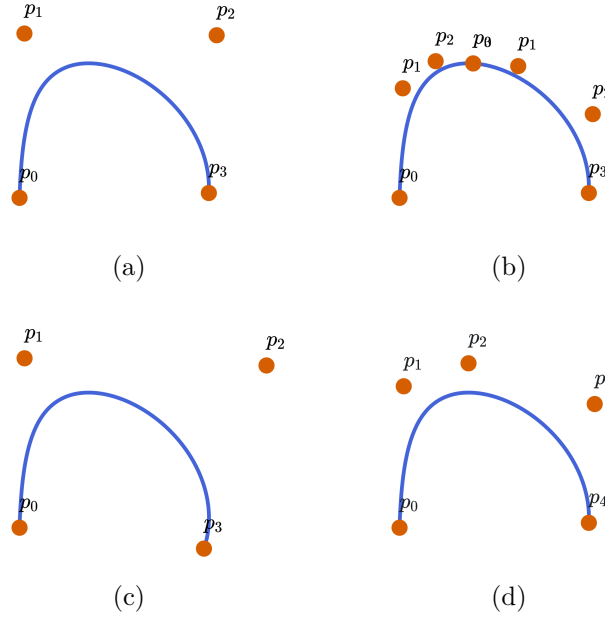
$$\tilde{w}_i = \frac{1}{w_n} \hat{w}_i = \frac{w_i}{\sqrt[n]{w_n^i w_0^{n-i}}}.$$

□

**Opomba 3.3.** Če velja  $w_0 = w_n = 1$  pravimo, da je racionalna Bezierjeva krivulja predstavljena v *standardni formi*.

**Opomba 3.4.** Z uvedbo racionalnih Bezierjevih krivulj smo dobili le  $n - 1$  dodatnih prostih parametrov, glede na polinomske Bezierjeve krivulje z istim številom kontrolnih točk.

Brez dokaza povejmo, da lastnosti Bezierjevih krivulj, ki smo jih podali v izreku 2.10 veljajo tudi za racionalne Bezierjeve krivulje s pozitivnimi utežmi. Subdiviziranje, ekstrapoliranje in višanje stopnje polinomske Bezierjeve krivulje lahko na racionalne Bezierjeve krivulje stopnje  $d$  razširimo tako, da krivuljo zapišemo kot polinomske Bezierjevo krivuljo stopnje  $d + 1$  s kontrolnimi točkami  $(w_i, w_i \mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Polinomske krivuljo nato subdiviziramo/ekstrapoliramo/ji zvišamo stopnjo in iz dobljenih kontrolnih točk  $(\tilde{w}_i, \tilde{w}_i \tilde{\mathbf{p}}_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$  preberemo nove kontrolne točke  $\tilde{\mathbf{p}}_i \in \mathbb{R}^d$  in uteži  $\tilde{w}_i \in \mathbb{R}$ . Pri takšnem procesu samo ekstrapolacija ne ohranja pozitivnosti uteži. Primere si lahko ogledamo na sliki 16.



Slika 16: Subdivizija, ekstrapolacija ter višanje stopnje racionalne Bezierjeve krivulje.

### 3.1 Decasteljaujev algoritem za racionalne Bezierjeve krivulje

Točke racionalnih Bezierjevih krivulj dimenzije  $d$  bi lahko računali s pomočjo Decasteljaujevega algoritma za polinomske Bezierjeve krivulje stopnje  $d + 1$ , na podoben način kot smo v prejšnjem razdelku razširili subdivizijo, ekstrapolacijo in višanje stopnje krivulje. Takšno računanje točk se izkaže za nestabilno ??, zato na tem mestu podamo razširitev Decasteljaujevega algoritma za racionalne Bezierjeve krivulje 2, ki točke racionalne Bezierjeve krivulje računa stabilno ??.

---

#### Algoritem 2 Racionalni Decasteljaujev algoritem

---

```

 $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 
 $w \leftarrow w_0, w_1, \dots, w_n$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n$  do
     $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$ 
     $w_i^0(t) = w_i$ 
end for
for  $r = 1, 2, \dots, n$  do
    for  $i = 0, 1, \dots, n - r$  do
         $w_i^r(t) = (1 - t)w_i^{r-1}(t) + tw_{i+1}^{r-1}(t)$ 
         $\mathbf{p}_i^r(t) = (1 - t)\frac{w_i^{r-1}(t)}{w_i^r(t)}\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t\frac{w_{i+1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)}\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$ 
    end for
end for
return  $\mathbf{p}_0^n(t)$ 

```

---

Brez dokaza z naslednjim izrekom podajmo pravilnost algoritma 2.

**Izrek 3.5.** Za vmesne točke  $\mathbf{p}_i^r(t)$  iz algoritma 2 in poljubno realno število  $t$  velja izraz

$$\mathbf{p}_i^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^r w_{i+j} \mathbf{p}_{i+j} B_j^r(t)}{\sum_{j=0}^r w_{i+j} B_j^r(t)}.$$

## 3.2 Farinove točke

Uporabniku CAGD sistema želimo nuditi čim bolj naraven način kontroliranja uteži racionalne Bezierjeve krivulje. V ta namen lahko uteži predstavimo s *Farinovimi točkami*. Farinove točke ležijo na daljicah kontrolnega poligona, kjer  $i$ -ta Farinova točka  $\mathbf{f}_i$  deli  $i$ -to daljico kontrolnega poligona v razmerju  $w_{i+1} : w_i$ . Slednje označimo z

$$\frac{|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_i|}{|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_{i+1}|} = \frac{w_{i+1}}{w_i}.$$

S kontrolnimi točkami in utežmi lahko Farinove točke izrazimo takole

$$\mathbf{f}_i := \frac{w_i}{w_i + w_{i+1}} \mathbf{p}_i + \frac{w_{i+1}}{w_i + w_{i+1}} \mathbf{p}_{i+1}.$$

Da bi uporabnik lahko s Farinovimi točkami kontroliral uteži, pa želimo obratno — s Farinovimi točkami želimo izraziti uteži. Brez izgube splošnosti lahko za prvo utež izberemo  $w_0 = 1$ . Ostale točke lahko nato rekurzivno izračunamo s pomočjo naslednjega izraza

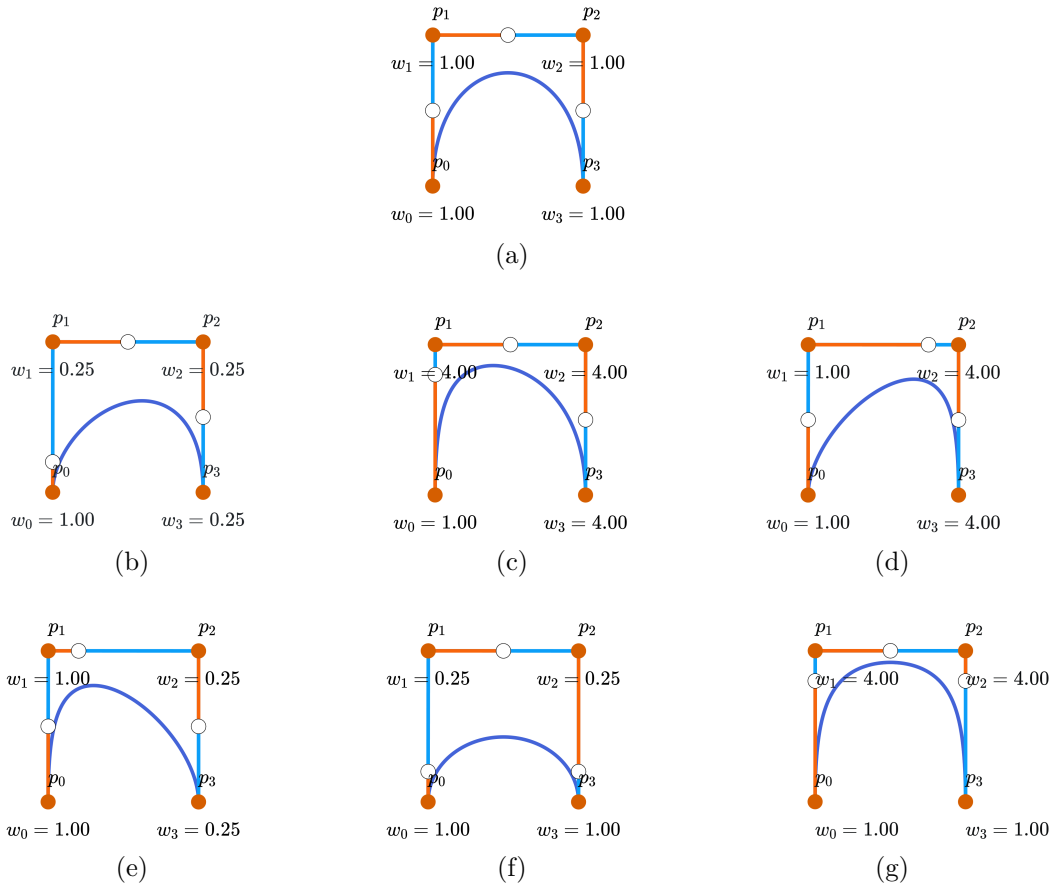
$$w_{i+1} = w_i \frac{|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_i|}{|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_{i+1}|}.$$

Po želji lahko uteži tudi standardiziramo s pomočjo formule

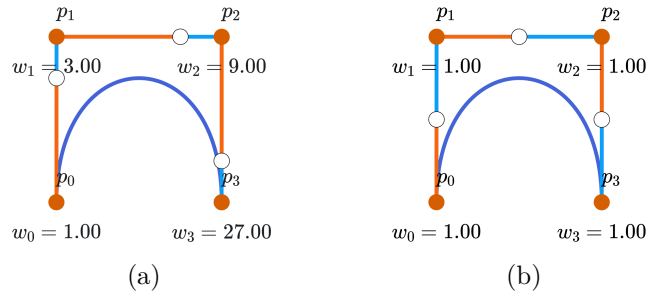
$$\tilde{w}_i = \frac{w_i}{\sqrt[n]{w_n^i}},$$

ki sledi iz dokaza izreka 3.2.

Na sliki 17 si lahko ogledamo delovanje Farinovih točk. Uteži na sliki niso standardizirane zato, da lahko bolje vidimo razmerja med njimi. Na grafu (a) Farinove točke ležijo na sredini pripadajočih daljic. Posledično so vsa razmerja  $|\mathbf{p}_i - \mathbf{f}_i| : |\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{f}_i|$  enaka in vse uteži enake 1. Na grafu (b) lahko vidimo, da se s premikom prve Farinove točke bližje k točki  $\mathbf{p}_0$ , k njej približa tudi krivulja. Utež  $w_1$ , ki predstavlja razmerje  $|\mathbf{p}_0 - \mathbf{f}_0| : |\mathbf{p}_1 - \mathbf{f}_0|$ , je zato manjša kot 1. Na grafu (c) lahko vidimo premik Farinove točke bližje k točki  $\mathbf{p}_1$ . Krivulja se točki približa, utež  $w_1$  pa se poveča na več kot 1. Ker na grafoma (b) in (c) druga in tretja Farinova točka ležita na sredini svojih daljic, so uteži  $w_1, w_2$  in  $w_3$  enake. Na grafoma (d) in (e) lahko vidimo, kako se krivulja in uteži obnašajo ob premiku druge Farinove točke. Na grafoma (f) ter (g) pa lahko vidimo obnašanje krivulje, ko premaknemo prvo ter tretjo Farinovo točko hkrati gor oziroma dol. Poglejmo si še, kaj se zgodi, če vse tri točke premaknemo pomaknemo tako, da so razmerja na vseh daljicah enaka. Na levem grafu slike 18 lahko vidimo, da krivulja izgleda kakor začetna. Če uteži standardiziramo, kar smo storili na desnem grafu, vidimo, da je temu res tako. Da bi preprečili takšno izbiro Farinovih točk, lahko po vsakem premiku Farinove točke uteži standardiziramo, ter ponovno izračunamo Farinove točke.



Slika 17: Kontroliranje krivulje s Farinovimi točkami.



Slika 18: Krivulja z enakimi premiki vseh Farinovih točk, pred in po standardizaciji.

## 4 Zlepki Bezierjevih krivulj

Če si ponovno ogledamo Decasteljaujev algoritem 1, lahko hitro opazimo, da je časovna kompleksnost algoritma  $O(n^2)$ . Računanje točk kompleksnejše Bezierjeve krivulje, z veliko kontrolnimi točkami, je zato zamudno. Da bi ohranili uporabniku naravno kontrolo krivulj ter hiter izračun točk, posežemo po zlepkih Bezierjevih krivulj.

**Definicija 4.1.** Zlepek krivulj  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  nad zaporedjem stičnih točk

$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} < u_m = b$$

je parametrično podana krivulja stopnje  $n \in \mathbb{N}$ , katere komponente so odsekoma polinomske funkcije  $\mathbf{S}|_{[u_{l-1}, u_l]} \in \mathbb{P}_n^d$ .

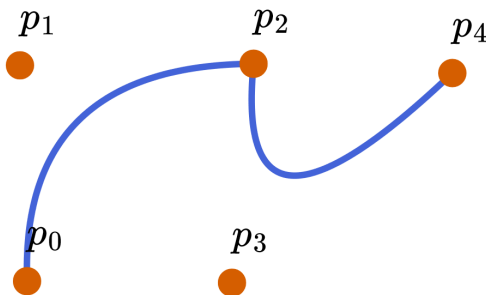
Želimo si, da bi zleпки tvorili gladko neprekinjeno krivuljo, saj so takšne krivulje v CAGD sistemih najbolj uporabne. Krivulja je po definiciji na posameznih odsekih polinomska in zato tudi gladka, problem je le v stičnih točkah. Naj bo

$$\mathbf{S}(u) = \begin{cases} \mathbf{S}_1(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i^{(1)} B_i^n \left( \frac{u - u_0}{\Delta u_0} \right), & u \in [u_0, u_1], \\ \mathbf{S}_2(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i^{(2)} B_i^n \left( \frac{u - u_1}{\Delta u_1} \right), & u \in [u_1, u_2], \end{cases}$$

zlepek dveh Bezierjevih krivulj. Da bo zlepek zvezen, mora v stični točki  $u_1$  veljati  $\mathbf{S}_1(u_1) = \mathbf{S}_2(u_1)$  oziroma

$$\mathbf{p}_n^{(1)} = \mathbf{p}_0^{(2)}. \quad (4.1)$$

Takšen zlepek, si lahko ogledamo na sliki 19. Da bo zlepek vsaj zvezno odvedljiv,



Slika 19:  $C^0$  zlepek dveh Bezierjevih krivulj.

mora veljati (4.1), morata pa v stični točki sovpadati tudi odvoda  $\mathbf{S}_1'(u_1) = \mathbf{S}_2'(u_1)$ . Iz izreka 2.13 sledi, da mora zato veljati

$$\frac{\mathbf{p}_n^{(1)} - \mathbf{p}_{n-1}^{(1)}}{\Delta u_0} = \frac{\mathbf{p}_1^{(2)} - \mathbf{p}_0^{(2)}}{\Delta u_1}. \quad (4.2)$$

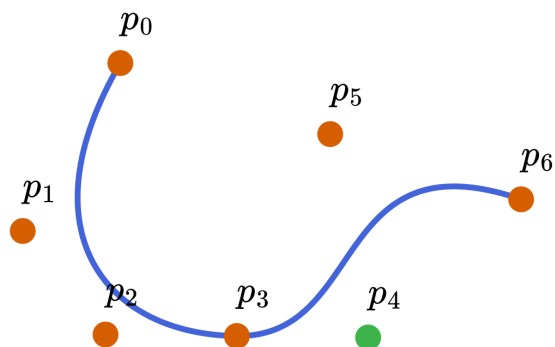
Upoštevajoč (4.1) lahko enačbo zapišemo tudi kot

$$\mathbf{p}_n^{(1)} = \mathbf{p}_0^{(2)} = \frac{\Delta u_0 \mathbf{p}_1^{(2)}}{\Delta u_0 + \Delta u_1} + \frac{\Delta u_1 \mathbf{p}_{n-1}^{(1)}}{\Delta u_0 + \Delta u_1},$$

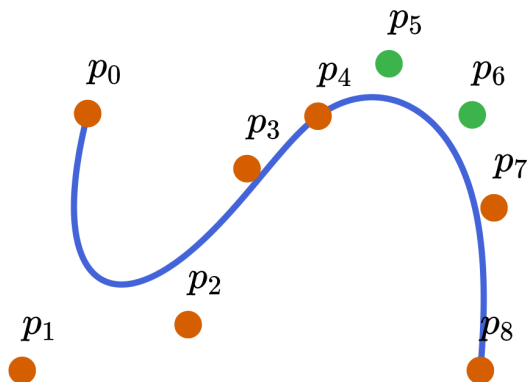
iz česar je moč prebrati geometrijski pomen pogoja. Skupna točka  $\mathbf{p}_n^{(1)} = \mathbf{p}_0^{(2)}$  mora namreč deliti daljico  $\mathbf{p}_{n-1}^{(1)} \mathbf{p}_1^{(2)}$  v razmerju  $\frac{\Delta u_0}{\Delta u_1}$ . Primer takšnega zleпка si lahko ogledamo na sliki 20. Podobno lahko iz izreka 2.13 preberemo pogoje gladkosti za  $C^r([a, b])$

$$\frac{1}{(\Delta u_0)^k} \Delta^k \mathbf{p}_{n-k}^{(1)} = \frac{1}{(\Delta u_1)^k} \Delta^k \mathbf{p}_0^{(2)}, \quad k = 0, \dots, r.$$

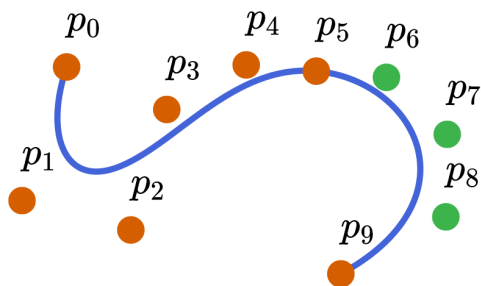
Primer  $C^2$  oziroma  $C^3$  zleпка si lahko ogledamo na sliki 21 oziroma sliki 22.



Slika 20:  $C^1$  zlepek dveh Bézierjevih krivulj, kjer je  $\Delta u_0 = \Delta u_1$ .



Slika 21:  $C^2$  zlepek dveh Bézierjevih krivulj, kjer je  $\Delta u_0 = \Delta u_1$ .



Slika 22:  $C^3$  zlepek dveh Bézierjevih krivulj, kjer je  $\Delta u_0 = \Delta u_1$ .

## Literatura

- [1] H. Hodor, *The placeholder element method: solid placeholding*, **1**, Hold-Theplace, 1337.