

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Računalništvo in matematika – 2. stopnja

Kevin Štampar

**ORODJE ZA GRAFIČNI PRIKAZ  
KONCEPTOV BÉZIERJEVIH IN PH KRIVULJ**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2024



## Zahvala



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bézierjeve krivulje</b>	<b>2</b>
2.1	Bernsteinovi bazni polinomi . . . . .	2
2.2	Večdimenzionalne oznake . . . . .	5
2.3	Bézierjeve krivulje . . . . .	5
2.4	De Casteljaujev algoritem . . . . .	6
2.5	Subdivizija . . . . .	10
	<b>Literatura</b>	<b>13</b>



## **Program dela**

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Podpis mentorja:





## **Orodje za grafični prikaz konceptov Bézierjevih in PH krivulj**

### **POVZETEK**

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

## **Tool for graphically displaying concepts of Bézier and PH curves**

### **ABSTRACT**

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2020):** 74B05, 65N99

**Ključne besede:** integracija, kompleks

**Keywords:** integration, complex



# 1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

**Ker je v okviru magistrskega dela nastalo orodje za grafični prikaz konceptov, bo delo polno s slikovnimi primeri.**

## 2 Bézierjeve krivulje

### 2.1 Bernsteinovi bazni polinomi

V tem podrazdelku bomo predstavili Bernsteinove bazne polinome in nekaj njihovih lastnosti, ki bodo ključne pri upeljavi Bézierjevih krivulj. Začnimo z njihovo definicijo.

**Definicija 2.1.** Za nenegativna cela števila  $n$  je  $i$ -ti *Bernsteinov bazni polinom* podan s predpisom

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Iz definicije je očitno, da so za indekse  $i > n$ , oziroma  $i < 0$ , Bernsteinovi bazni polinomi ničelni. Pri določeni stopnji  $n$  je neničelnih Bernsteinovih baznih polinomov torej  $n+1$ . Brez dokaza povejmo, da so linearno neodvisni in zato tvorijo bazo prostora  $\mathbb{P}_n$ . Takšni bazi pravimo *Bernsteinova baza*, polinomu izraženemu v njej pa pravimo *Bernsteinov polinom*.

**Primer 2.2.** Za primer si bomo ogledali Bernsteinove bazne polinome stopenj  $n = 0, 1, 2, 3$ . Pri stopnji 0 imamo konstantni polinom s funkcijskim predpisom  $B_0^0(t) = 1$ . Za stopnjo 1 dobimo polinoma s funkcijskimi predpisi  $B_0^1(t) = 1 - t$  in  $B_1^1(t) = t$ , ki sta znana iz linearne interpolacije dveh točk. Funkcijski predpisi kvadratnih in kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov pa so naslednji

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2, & B_1^2(t) &= 2t(1-t), & B_2^2(t) &= t^2, \\ B_0^3(t) &= (1-t)^3, & B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2, & B_2^3(t) &= 3t^2(1-t), & B_3^3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

Grafe polinomov iz primera si lahko ogledamo na sliki 1. ◇

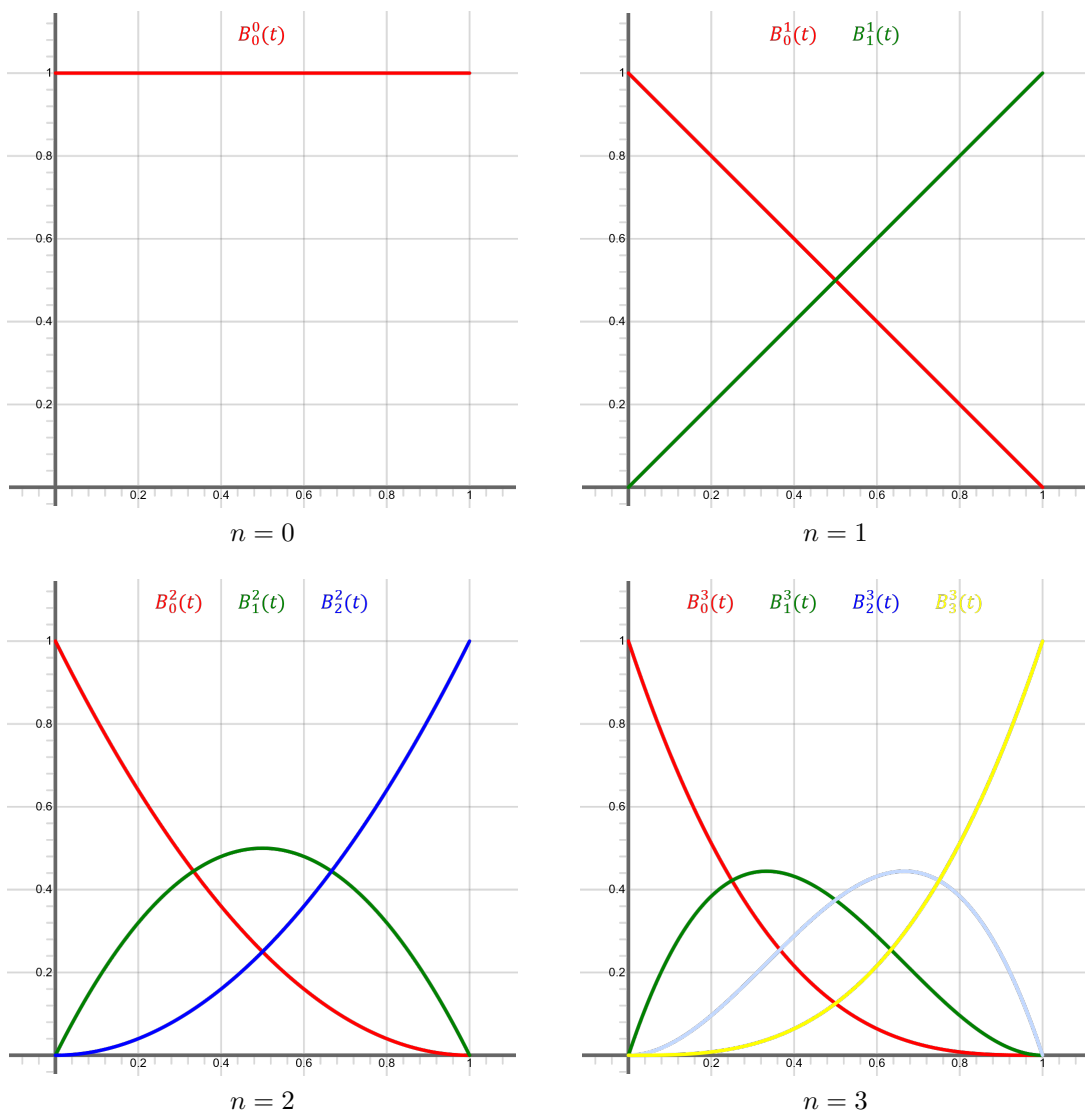
Brez dokaza v naslednjem izreku naštejmo nekaj osnovnih lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov.

**Izrek 2.3.** Za Bernsteinove bazne polinome  $B_i^n$  velja naslednje.

1. So nenegativni na intervalu  $[0, 1]$ .
2.  $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$  in  $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$ , kjer je  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ .
3. So simetrični, tj.  $B_i^n(1-t) = B_{n-i}^n(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .
4. So razčlenitev enote, tj.  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Prve tri lastnosti iz izreka lahko opazimo na že prej ogledani sliki 1. Četrto lastnost pa je moč opaziti na sliki 2, kjer so prikazani naloženi ploščinski grafiki Bernsteinovih baznih polinomov. Količina barve pri določenem parametru  $t \in [0, 1]$  pove, koliko pripadajoč polinom  $B_i^n$  prispeva k razčlenitvi enote.

S sledečim izrekom podamo rekurzivno zvezo za računanje vrednosti Bernsteinovih baznih polinomov.



Slika 1: Bernsteinovi bazni polinomi stopenj  $n = 0, 1, 2, 3$ .

**Izrek 2.4.** Za Bernsteinove bazne polinome stopnje  $n > 0$  velja rekurzivna zveza

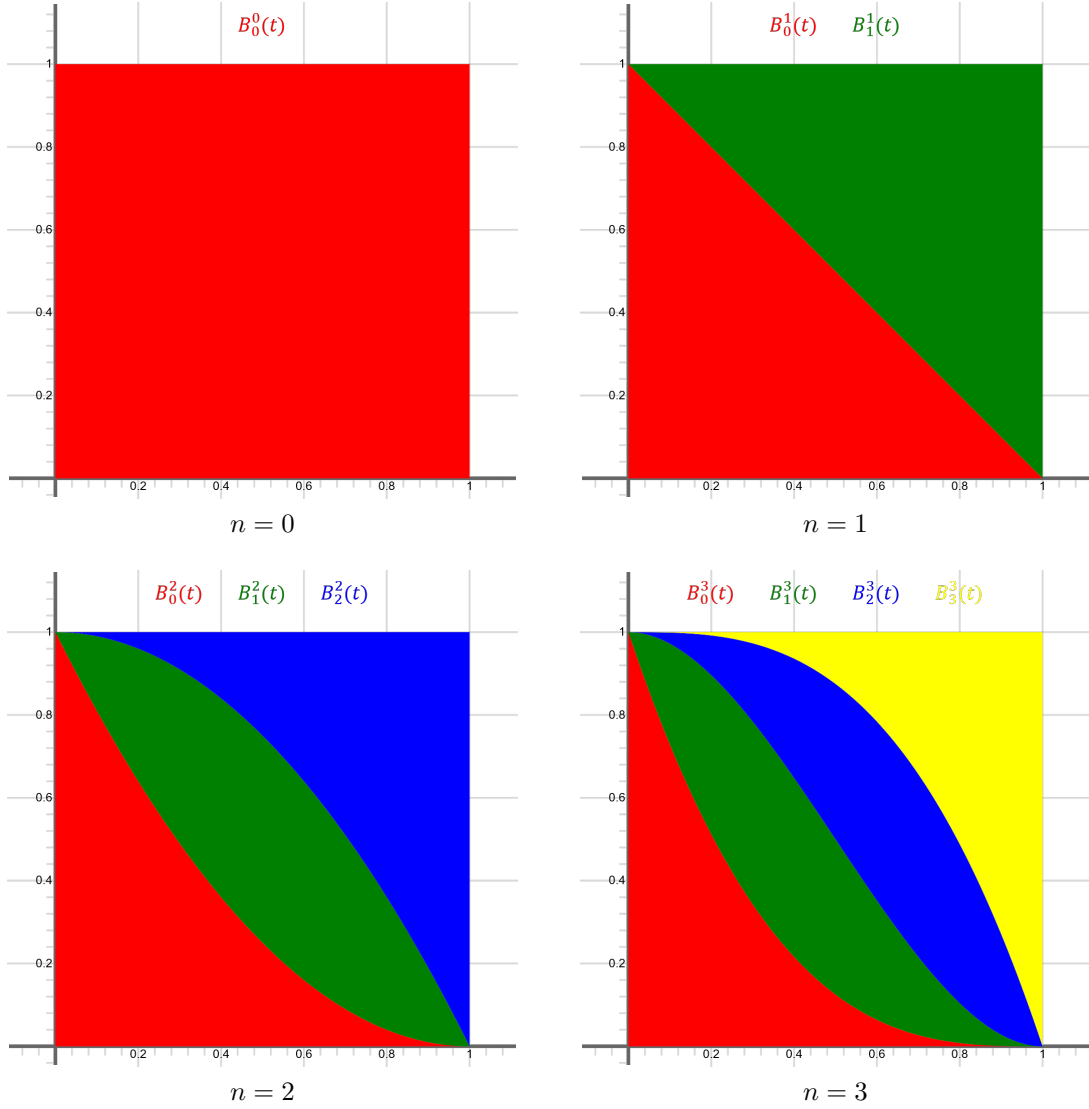
$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Izrek je enostavno dokazati s pomočjo indukcije, zato bomo dokaz izpustili. V kasnejših razdelkih bomo potrebovali tudi odvode Bernsteinovih baznih polinomov. Ker Bernsteinovi bazni polinomi stopnje  $n$  tvorijo bazo prostora  $\mathbb{P}_n$ , lahko njihove odvode izrazimo v Bernsteinovi bazi stopnje  $n-1$ . Z nekaj računanja bi prišli do sledečega rezultata.

**Izrek 2.5.** Za odvode Bernsteinovih baznih polinomov velja zveza

$$B_i^{n'} = n(B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1}).$$

Za konec podrazdelka izpeljimo še formulo za zmnožek dveh Bernsteinovih polinomov.



Slika 2: Naloženi ploščinski grafikoni Bernsteinovih baznih polinomov

**Izrek 2.6.** Naj bosta  $f$  in  $g$  Bernsteinova polinoma s funkcijskimi predpisi  $f(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i B_i^m(t)$  in  $g(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_i^n(t)$ . Potem za njun zmnožek velja

$$f(t)g(t) = \sum_{i=0}^{m+n} \left( \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(m, i)} \frac{\binom{m}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{m+n}{i}} \alpha_i \beta_{i-j} \right) B_i^{m+n}(t).$$

*Dokaz.* Naj bosta  $f$  in  $g$  Bernsteinova polinoma iz izreka. Polinoma zmnožimo, da dobimo sledeče

$$f(t)g(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i B_i^m(t) \sum_{j=0}^n \beta_j B_j^n(t) = \sum_{i=0}^{m+n} \sum_{l=0}^i \alpha_l B_l^m(t) \beta_{i-l} B_{i-l}^n(t).$$

V izraz vstavimo predpise Bernsteinovih baznih polinomov in ga poenostavimo. Od tod sledi

$$\sum_{i=0}^{m+n} \sum_{l=0}^i \alpha_l \beta_{i-l} \binom{m}{l} \binom{n}{i-l} t^l (1-t)^{m+n-i}$$

Kar lahko z izpostavitvijo binoma  $\binom{m+n}{i}$  predstavimo v Bernsteinovi bazi kot

$$\sum_{i=0}^{m+n} \left( \sum_{l=0}^i \alpha_l \beta_{i-l} \frac{\binom{m}{l} \binom{n}{i-l}}{\binom{m+n}{i}} \right) \binom{m+n}{i} t^i (1-t)^{m+n-i}.$$

V primerih, ko velja  $l > m$  ali  $i - l > n$  imamo v števcu ulomka 0, kar privede do zapisa iz izreka.  $\square$

## 2.2 Večdimenzionalne oznake

Da bodo zapisi v sledečih razdelkih bolj pregledni, bomo uvedli večdimenzionalne oznake. Večdimenzionalnost bomo ponazarjali z odebelitvijo črke. Tako bomo večdimenzionalnost točke  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  označili z  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , večdimenzionalnost funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  pa z  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ .

## 2.3 Bézierjeve krivulje

Če v Bernsteinov polinom namesto skalarjev vstavimo točke, dobimo predpis parametrizacije Bézierjeve krivulje. Povedano formaliziramo z naslednjo definicijo.

**Definicija 2.7.** Bézierjeva krivulja  $\mathbf{B}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  stopnje  $n \in \mathbb{N}$  in dimenzije  $d \in \mathbb{N}$ , za  $d > 1$ , je polinomska krivulja podana s točkami  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ , za  $i = 0, 1, \dots, n$ , in parametrizacijo

$$\mathbf{B}_n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t).$$

Točkam  $\mathbf{p}_i$  pravimo *kontrolne točke*. Če zaporedne kontrolne točke povežemo, pa dobimo *kontrolni poligon*.

**Opomba 2.8.** Kjer je potrebno, lahko definicijo razširimo tudi na stopnjo  $n = 0$ . Iz zgornje parametrizacije potem sledi  $\mathbf{B}_0(t) = \mathbf{p}_0$ .

**Opomba 2.9.** Pri slikovnem gradivu iz dela se bomo omejili na prostor dimenzije  $d = 2$ , torej na Bézierjeve krivulje v ravnini.

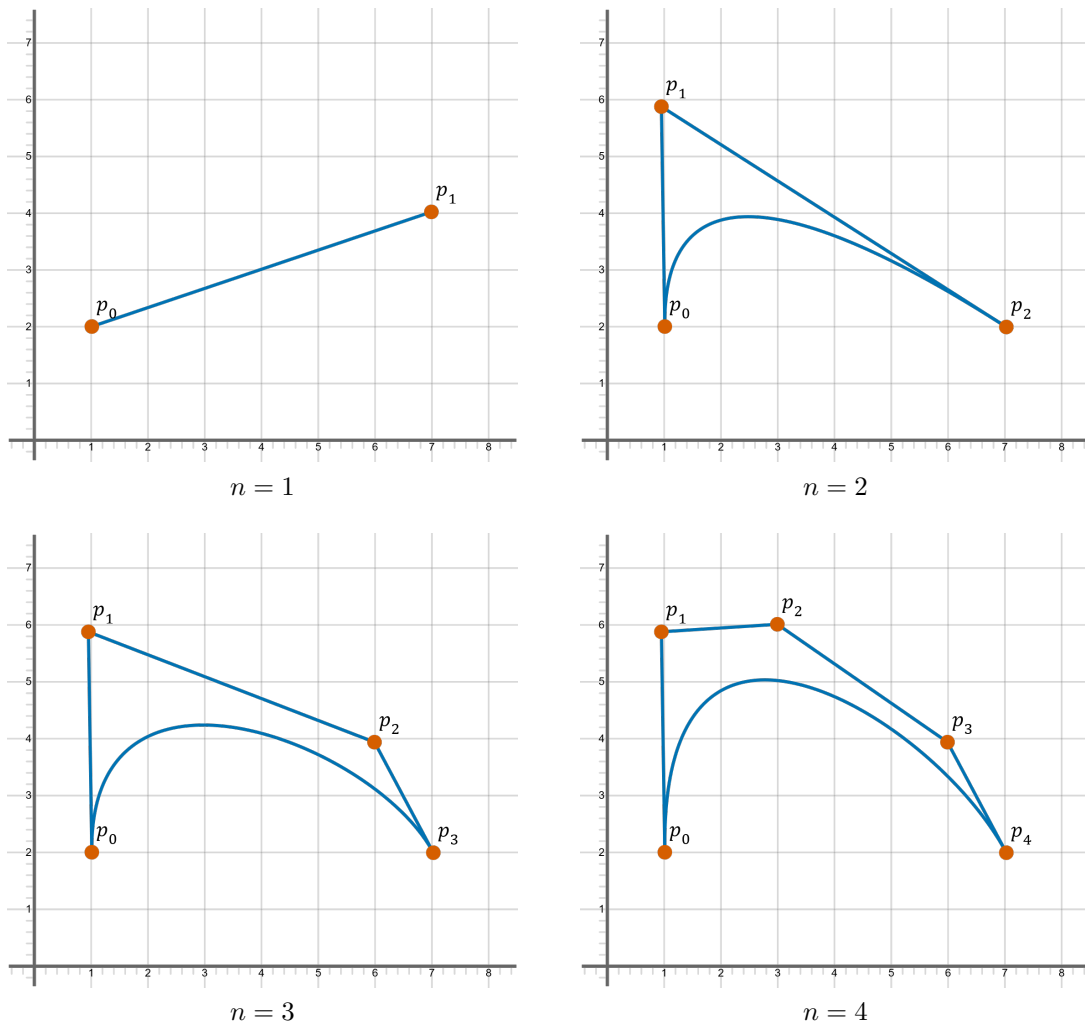
Na sliki 3 si lahko ogledamo primere Bézierjevih krivulj stopenj  $n = 1, 2, 3, 4$  s pripadajočimi kontrolnimi poligoni. Zapišimo sedaj nekaj osnovnih lastnosti Bézierjevih krivulj.

**Izrek 2.10.** Bézierjeva krivulja  $\mathbf{B}_n$  s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_i$ , za  $i = 0, 1, \dots, n$ , ima sledeče lastnosti.

1. Interpolira končne točke, t.j. velja  $\mathbf{B}_n(0) = \mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{B}_n(1) = \mathbf{p}_n$ .
2. Je afino invariantna, t.j. za poljubno afino transformacijo  $\varphi$  velja

$$\varphi \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) \right) = \sum_{i=0}^n \varphi(\mathbf{p}_i) B_i^n(t).$$

3. Leži znotraj konveksne ovojnice svojih kontrolnih točk.



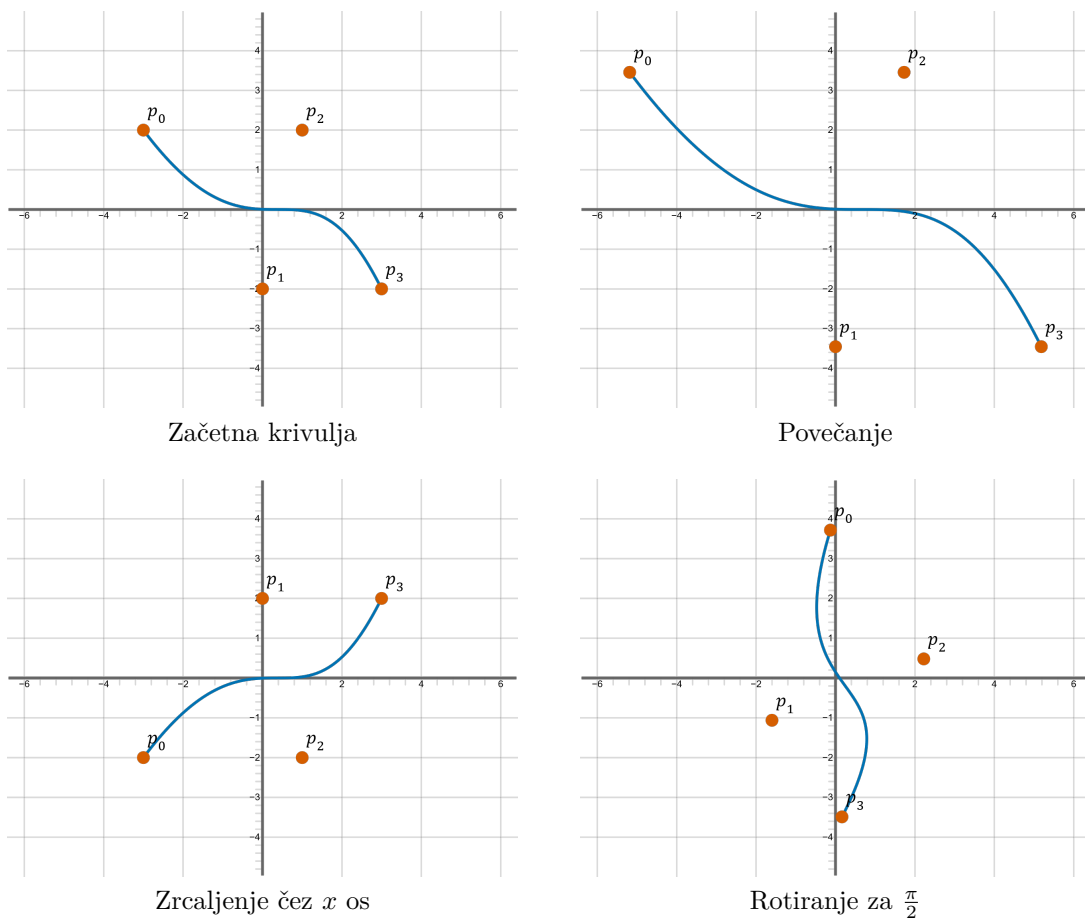
Slika 3: Bézierjeve krivulje s pripadajočimi kontrolnimi poligoni za stopnje  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Dokazi lastnosti so enostavni, zato jih izpustimo. Preden si lastnosti ogledamo na slikah, povejmo zakaj so pomembne za CAGD sisteme. Interpolacija končnih točk uporabniku omogoča kontrolo nad tem, kje bo krivuljo začel in kje zaključil. Zaradi Afine invariance lahko uporabnikove transformacije krivulje v ozadju CAGD sistema prevedemo v transformacije kontrolnih točk. Tretja lastnost pa uporabniku s kontrolnimi točkami omogoča upravljanje krivulje, kjer je krivulja zmerom v bližini svojih kontrolnih točk. Lastnosti si sedaj oglejmo na slikah. Interpolacijo končnih točk je bilo moč videti že na sliki 3. Posledice afine invariance si lahko ogledamo na sliki 4. Na sliki 5 pa si lahko ogledamo konveksni ovojnici kontrolnih točk dveh Bézierjevih krivulj. Vidimo lahko, da krivulji ležita znotraj njih.

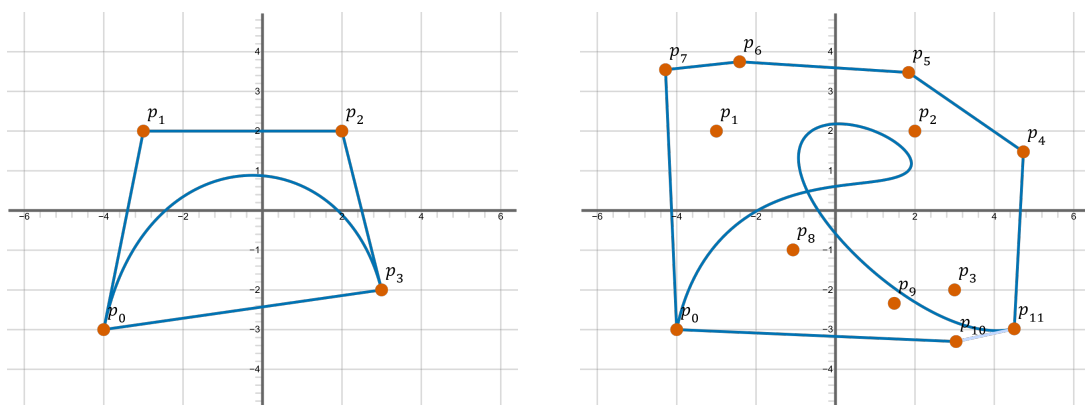
## 2.4 De Casteljauev algoritem

Stabilnost metod je v CAD in CAGD sistemih bistvene narave. Direktno računanje vrednosti Bernsteinovih polinomov preko enačb iz definicije 2.1 pa ni stabilno [1]. Da lahko točke Bézierjevih krivulj računamo stabilno, potrebujemo sledeč izrek.





Slika 4: Afine transformacije Bézierjeve krivulje.



Slika 5: Konveksni ovojnici kontrolnih točk Bézierjevih krivulj.

**Izrek 2.11.** Označimo z  $B(t)_{[p_0, p_1, \dots, p_n]}$  parametrizacijo Bézierjeve krivulje s kontrolnimi točkami  $p_0, p_1, \dots, p_n$ . Potem za poljubno realno število  $t$  in naravno število  $n$  velja rekurzivna zveza

$$B(t)_{[p_0, p_1, \dots, p_n]} = (1 - t)B(t)_{[p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]} + tB(t)_{[p_1, p_2, \dots, p_n]}.$$

Izrek s pomočjo indukcije tudi dokažimo.

*Dokaz.* Za  $n = 1$  zveza drži, saj iz nje dobimo

$$\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]} = (1 - t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1]} = (1 - t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_1.$$

Indukcijski korak pa dokažemo tako, da v desni del rekurzivne zveze iz izreka vstavimo parametrizaciji Bézierjevih krivulj in dobimo

$$(1 - t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]} = (1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_{i+1} B_i^{n-1}(t).$$

Nato zamaknemo indeks desne vsote in skupne točke postavimo pod eno vsoto. Od tod sledi

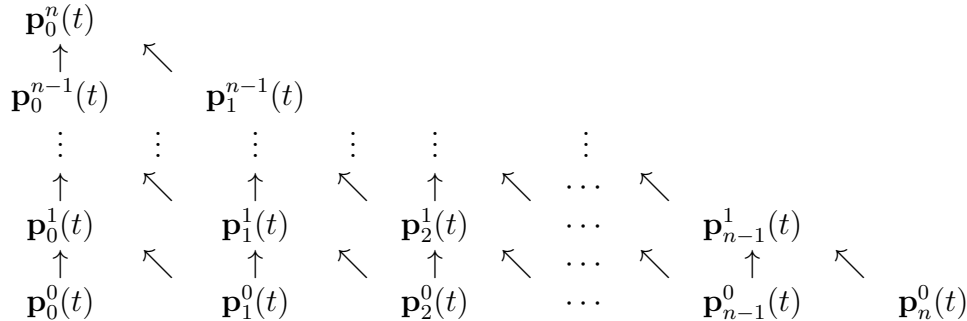
$$\begin{aligned} & (1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i B_{i-1}^{n-1}(t) \\ &= \mathbf{p}_0(1 - t)B_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( (1 - t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \right) \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_n B_{n-1}^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Uporabimo še rekurzivno zvezo Bernsteinovih baznih polinomov iz izreka 2.4, da dobimo

$$\mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^n(t) + \mathbf{p}_n B_n^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t).$$

□

Označimo sedaj  $\mathbf{p}_i^r(t) = \mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_{i+r}]}$ . Velja torej  $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$  in  $\mathbf{p}_0^n(t) = \mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$ . Iz izreka 2.11 sledi, da lahko točke Bézierjeve krivulje  $\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$  računamo s pomočjo *de Casteljaujeve sheme*, ki jo lahko vidimo na sliki 2.4. V shemi diagonalne puščice ponazarjajo množenje točke z vrednostjo  $t$ , vertikalne pa z vrednostjo  $1 - t$ . V vrhu puščic dobljene vrednosti seštejemo.



Slika 6: de Casteljaujeva shema

**Najbrž bom menjal bom sliko, ko zadevo implementiram na Bezgu**

Izračun točke Bézierjeve krivulje pri poljubnem parametru  $t$  lahko sedaj podamo v obliki *de Casteljaujevega algoritma* 1.

---

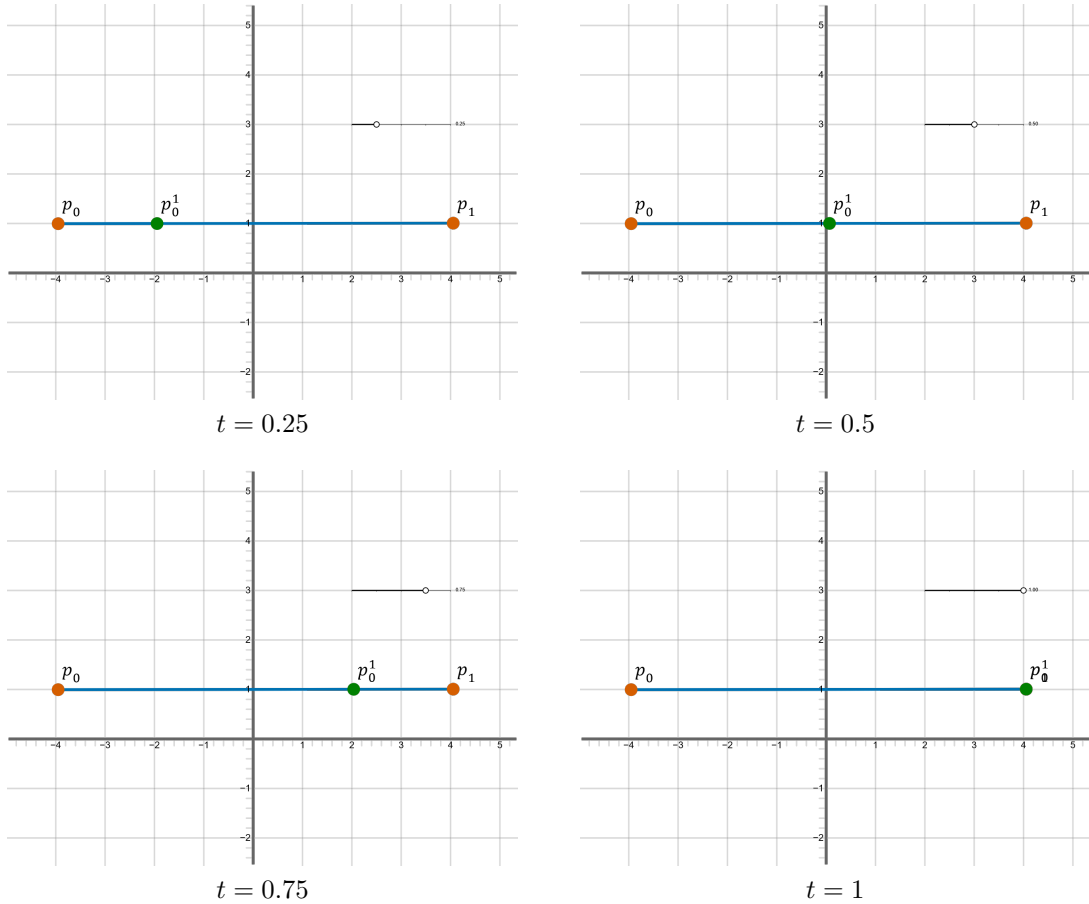
**Algoritem 1** de Casteljaujev algoritem

---

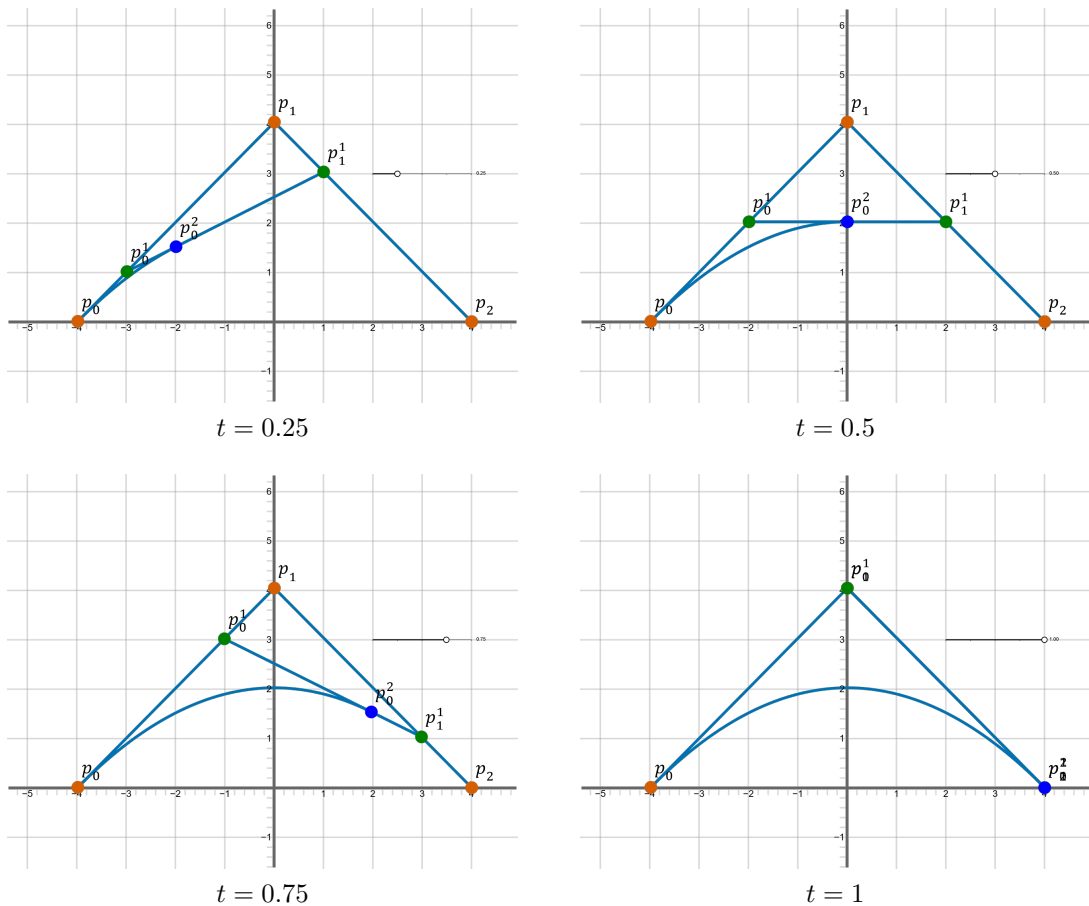
```
 $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$   
 $t \leftarrow t$   
for  $i = 0, 1, \dots, n$  do  
   $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$   
end for  
for  $r = 1, 2, \dots, n$  do  
  for  $i = 0, 1, \dots, n - r$  do  
     $\mathbf{p}_i^r(t) = (1 - t)\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$   
  end for  
end for  
return  $\mathbf{p}_0^n(t)$ 
```

---

Algoritem 1 ima tudi geometrijski pomen. Pri stopnji  $n = 1$  se prevede na interpolacijo dveh točk, kar lahko vidimo na sliki 7. Pri višjih stopnjah  $n$  pa algoritem predstavlja zaporedno interpolacijo točk, saj v njem za vsak nivo  $r = 1, 2, \dots, n$  interpoliramo sosednje točke prejšnjega nivoja. Slednje lahko vidimo na slikama 8 in 9.



Slika 7: De Casteljaujev algoritem za  $n = 1$ .

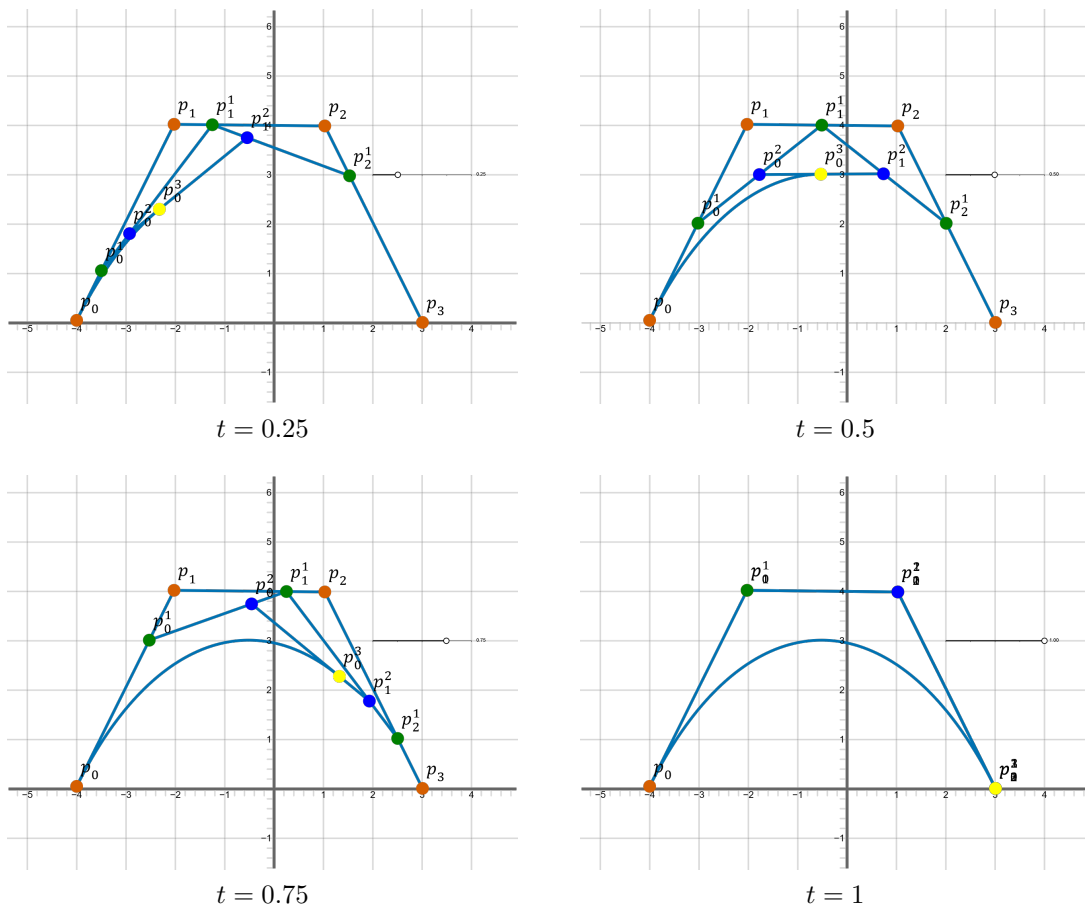


Slika 8: De Casteljaujev algoritem za  $n = 2$ .

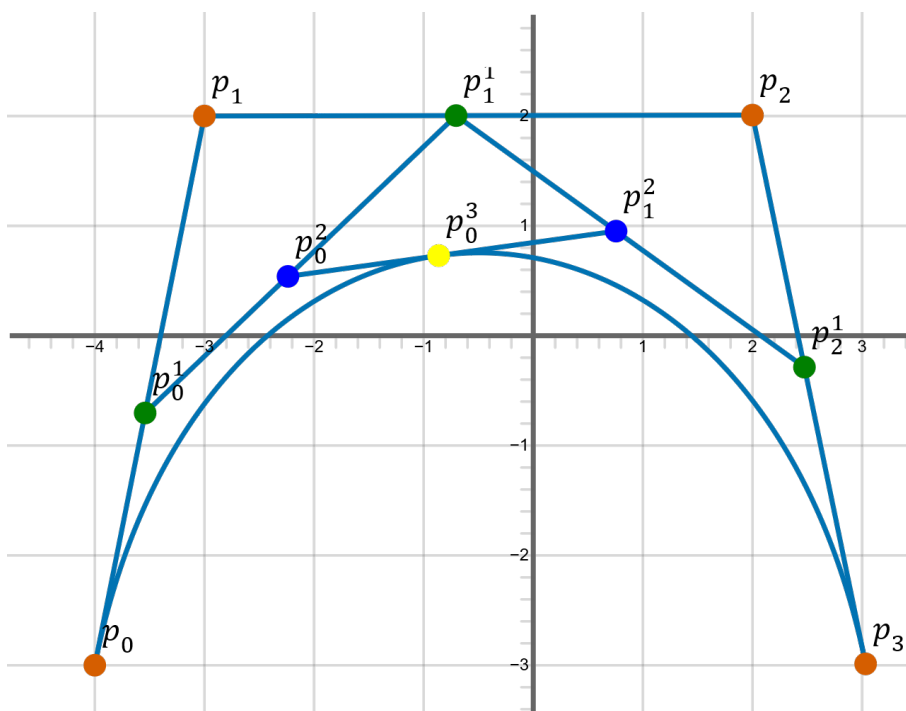
## 2.5 Subdivizija

V CAGD in CAD sistemih se mnogokrat zgodi, da uporabnik želeli ohraniti le en kos Bézierjeve krivulje. Naj bo to kos krivulje, ki ga dobimo tako, da za prvotno krivuljo parameter  $t$  omejimo na interval  $[0, t_0]$ , za neko pozitivno realno število  $t_0 < 1$ . Ta del krivulje označimo z  $B_{t_0-}$ . Izkaže se, da lahko krivuljo  $B_{t_0-}$  podamo kot Bézierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_0^i(t_0)$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ , kjer točke  $\mathbf{p}_0^i(t_0)$  dobimo iz de Casteljaujeve sheme pri  $t = t_0$ . Podobno se izkaže tudi to, da lahko preostali kos krivulje,  $B_{t_0+}$ , podamo kot Bézierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_1^i(t_0)$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ . Radovedni bralci lahko dokaz trditve najdejo v delu [1]. Procesu deljenja krivulje na dva dela pravimo *subdivizija*. Na sliki de Casteljaujevega algoritma 10 lahko vidimo, da pri določenem parametru  $t_0$  točke  $\mathbf{p}_0^0, \mathbf{p}_0^1, \mathbf{p}_0^2, \mathbf{p}_0^3$  tvorijo kontrolni poligon Bézierjeve krivulje  $B_{t_0-}$ , točke  $\mathbf{p}_0^0, \mathbf{p}_1^1, \mathbf{p}_1^2, \mathbf{p}_1^3$  pa kontrolni poligon krivulje  $B_{t_0+}$ .

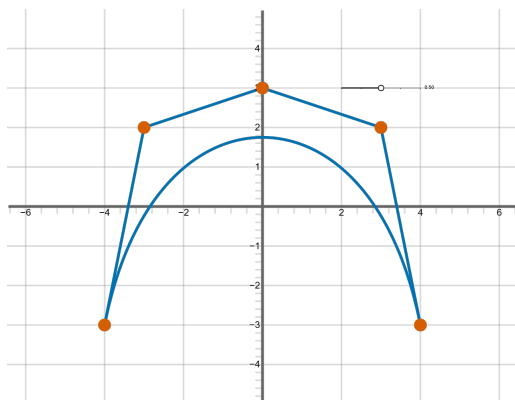
Če izberimo sedaj  $t_0 = \frac{1}{2}$  in subdiviziramo krivuljo, dobimo dve krivulji. Če subdivizijo nato na dobljenih krivuljah ponavljamo, dobimo po  $k$  korakih  $2^k$  krivulj. Na sliki 11 si lahko ogledamo postopek za prve tri korake. Opazimo lahko, da so kontrolni poligoni dobljenih krivulj zmerom bližje krivulji.



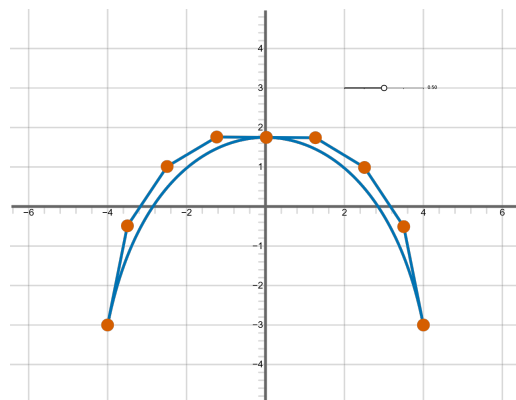
Slika 9: De Casteljaujev algoritem za  $n = 3$ .



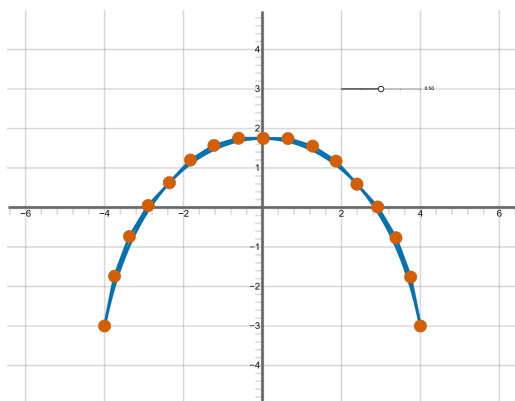
Slika 10: de Casteljaujev algoritem.



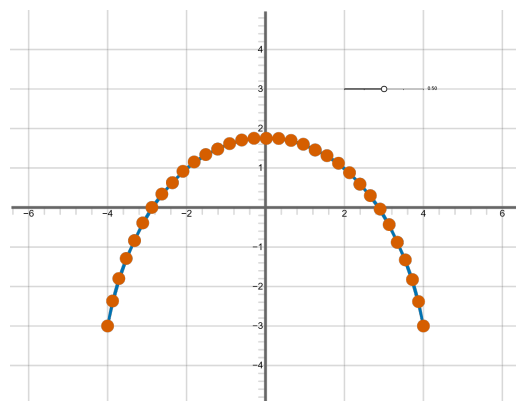
(a) Začetna krivulja s kontrolnim poligonom



(b) 2 krivulji, pridobljeni s subdivizijo



(c) 4 krivulje, pridobljene s subdivizijo



(d) 8 krivulj, pridobljenih s subdivizijo

Slika 11: Ponavljanje subdivizije na krivulji.

## Literatura

- [1] H. Hodor, *The placeholder element method: solid placeholdering*, **1**, Hold-Theplace, 1337.