

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Računalništvo in matematika – 2. stopnja

Kevin Štampar

**ORODJE ZA GRAFIČNI PRIKAZ LASTNOSTI
BÉZIERJEVIH IN PH KRIVULJ**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2024

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju za zelo sproščen odnos!

Kazalo

1	Uvod	1
2	Bézierjeve krivulje	2
2.1	Bernsteinovi bazni polinomi	2
2.2	Večdimenzionalne oznake	4
2.3	Bézierjeve krivulje	5
2.4	De Casteljaujev algoritem	6
2.5	Subdivizija	8
2.6	Ekstrapolacija	10
2.7	Višanje stopnje	10
2.8	Odvodi Bézierjeve krivulje	12
3	Racionalne Bézierjeve krivulje	14
3.1	De Casteljaujev algoritem za racionalne Bézierjeve krivulje	16
3.2	Farinove točke	17
4	Zlepki Bézierjevih krivulj	19
4.1	Geometrijska zveznost	20
4.2	Konstrukcija zlepkov Bézierjevih krivulj	22
4.2.1	Enostranska konstrukcija	22
4.2.2	Simetrična konstrukcija	23
4.2.3	α parametrizacije	25
5	PH Krivulje	28
5.1	Konstantna parametrična hitrost	28
5.2	Polinomska parametrična hitrost	28
5.3	Kontrolne točke Bézierjevih PH krivulj	30
5.4	Parametrična hitrost Bézierjeve PH krivulje	32
5.5	Enakomerna parametrizacija	33
5.6	Tangenta, normala in ukrivljenost	33
5.7	Racionalne odmik krivulje	34
5.8	Reprezentacija s kompleksnimi števili	36
6	Orodje za grafični prikaz lastnosti Bézierjevih in PH krivulj - <i>Bezeg</i>	37
6.1	Uporabniški vmesnik	37
6.1.1	Orodja	38
6.1.2	Ukazi na grafu	39
6.1.3	Ukazi in transformacije izbrane krivulje	39
6.2	Implementacija	41
6.2.1	Vmesniki	41
6.2.2	Implementacije točk	42
6.2.3	Implementacije krivulj	43
6.2.4	Povezava implementacij krivulj s knjižnico JSXGraph	48
6.2.5	Grafi	49

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Podpis mentorja:

Orodje za grafični prikaz lastnosti Bézierjevih in PH krivulj

POVZETEK

V magistrskem delu obravnavamo Bezierjeve krivulje, racionalne Bezierjeve krivulje, zlepke Bezierjevih krivulj ter Bezierjeve PH krivulje. Skozi delo predstavimo njihove lastnosti, ki so ključne za rabo v CAD/CAGD sistemih in algoritme, ki nji hovo rabo v takšnih sistemih omogočajo. Predstavimo tudi orodje za grafični prikaz lastnosti prej naštetih krivulj - Bezeg. Ogledamo si njegove funkcionalnosti in po kažemo osnovne ideje za tem, kako je orodje implementirano in kako so v orodju implementirane prej naštete krivulje.

Tool for graphical representation of properties of Bézier and PH curves

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: integracija, kompleks

Keywords: integration, complex

1 Uvod

Ker je v okviru magistrskega dela nastalo orodje za grafični prikaz konceptov, bo delo polno s slikovnimi primeri. Bezierjeve krivulje so marsikje uoprabljene za marsikaj in ph krivulje tudi.....

Začeli bomo s predstavljitvijo Bezierjevih krivulj, kjer bomo najprej spoznali Bernsteinove bazne polinome, na katerih Bezierjeve krivulje temeljijo. Predstavili bomo nekaj njihovih ključnih lastnosti, nato pa bomo z njihovo pomočjo upeljali Bezierjeve krivulje. Pokazali bomo nekaj osnovnih lastnosti krivulj, nadaljevali pa bomo z De Casteljaujevim algoritmom, ki je ključen za stabilno računanje točk Bezierjeve krivulje. Podrobneje si bomo ogledali lastnosti subdivizije, ekstrapolacije ter višanja stopnje Bezierjeve krivulje. Zaključili pa bomo z odvodi Bezierjeve krivulje, ki bodo pomembni pri tvorjenju zlepkov Bezierjevih krivulj v 6. poglavju.

V tretjem poglavju se bomo posvečali racionalnim Bezierjevim krivuljam. Predstavili bomo delovanje uteži racionalne Bezierjeve krivulje in število dodatnih prostih parametrov, ki jih dobimo v primerjavi s polinomskimi Bezierjevimi krivuljami. Pokazali bomo racionalni De Casteljaujev algoritem, ki je razširitev algoritma iz prejšnjega poglavja. Nato pa bomo še pokazali Farinove točke, ki predstavljajo uporabniku CAGD sistema prijazno kontrolo nad utežmi.

Četrto poglavje je namenjeno zlepkom Bezierjevih krivulj. Zlepke krivulj bomo najprej definirali, nato pa izpeljali pogoje gladkosti za zlepke Bezierjevih krivulj. Predstavili bomo koncept geometrijske zveznosti in izpeljali nekaj pogojev za različne stopnje geometrijske zveznosti. Proti koncu poglavja bomo podali nekaj algoritmov za konstrukcijo zlepkov Bezierjevih krivulj. Zaključili pa bomo z načinom računanja delilnih točk zlepka imenovanim α - parametrizacije.

V naslednjem poglavju predstavimo PH krivulje. Začnemo z motivacijo za njimi, kjer pokažemo, da nelinearne polinomske krivulje ne premorejo konstantne parametrične hitrosti. Kot alternativo predstavimo PH krivulje, ki imajo polinomsko parametrično hitrost. Nato s pomočjo Bernsteinovih polinomov izrazimo kontrolne točke Bezierjevih PH Krivulj kubične in kvintične stopnje. Izpeljemo parametrično hitrost Bezierjevih PH krivulj, ki jo nato uporabimo pri iskanju približka za enakomerno parametrizacijo. Pokažemo, da so funkcije tangente, normale in ukrivljenosti PH krivulje racionalne funkcije. Kot posledico izrazimo odmik krivuljo Bezierjeve PH krivulje kot racionalno Bezierjevo krivuljo. V zaključku poglavja izrazimo še kontrolne točke kubične in kvintične Bezierjeve PH krivulje s kompleksnimi števili, kar omogoča enostavno skaliranje in rotiranje krivulje.

V šestem poglavju se posvetimo orodju za grafični prikaz lastnosti krivulj iz prejšnjih poglavij - Bezgu. Na začetku predstavimo uporabniški vmesnik orodja in njegove funkcionalnosti, ter čemu je orodje namenjeno. Drugi del poglavja pa je namenjen implementaciji orodja, kjer predstavimo arhitekturo aplikacije ter podamo nekaj primerov iz dejanske implementacije.

2 Bézierjeve krivulje

2.1 Bernsteinovi bazni polinomi

V tem podrazdelku bomo predstavili Bernsteinove bazne polinome in nekaj njihovih lastnosti, ki bodo ključne pri vpeljavi Bézierjevih krivulj. Začnimo z njihovo definicijo.

Definicija 2.1. Za nenegativna cela števila n je i -ti *Bernsteinov bazni polinom* podan s predpisom

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Iz definicije je očitno, da so za indekse $i > n$, oziroma $i < 0$, Bernsteinovi bazni polinomi ničelni. Pri določeni stopnji n je neničelnih Bernsteinovih baznih polinomov torej $n+1$. Brez dokaza povejmo, da so linearno neodvisni in zato tvorijo bazo prostora polinomov stopnje manjše ali enake n (\mathbb{P}_n). Takšni bazi pravimo *Bernsteinova baza*, polinomu, izraženemu v njej, pa pravimo *Bernsteinov polinom*.

Primer 2.2. Za primer si bomo ogledali Bernsteinove bazne polinome stopenj $n = 0, 1, 2, 3$. Pri stopnji 0 imamo konstantni polinom s funkcijskim predpisom $B_0^0(t) = 1$. Za stopnjo 1 dobimo dva polinoma s funkcijskima predpisoma $B_0^1(t) = 1 - t$ in $B_1^1(t) = t$. Funkcijski predpisi kvadratnih in kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov pa so:

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2, & B_1^2(t) &= 2t(1-t), & B_2^2(t) &= t^2, \\ B_0^3(t) &= (1-t)^3, & B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2, & B_2^3(t) &= 3t^2(1-t), & B_3^3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

Grafe polinomov iz primera si lahko ogledamo na sliki 1. \diamond

Brez dokaza v naslednjem izreku naštejmo nekaj osnovnih lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov.

Izrek 2.3. Za Bernsteinove bazne polinome B_i^n veljajo naslednje lastnosti.

1. So nenegativni na intervalu $[0, 1]$.

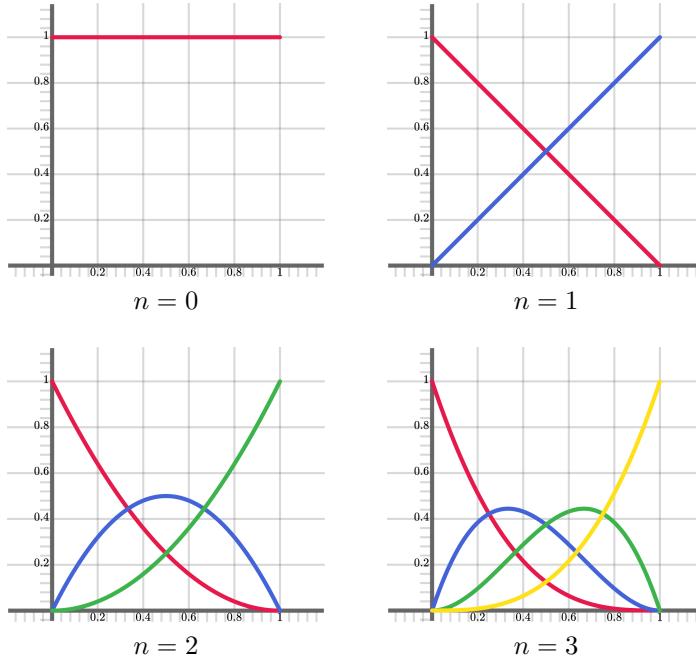
2. $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$ in $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$, kjer je $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$.

3. So simetrični, tj. $B_i^n(1-t) = B_{n-i}^n(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Tvorijo razčlenitev enote, tj. $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Prve tri lastnosti iz izreka lahko opazimo na že prej omenjeni sliki 1. Četrto lastnost pa je moč opaziti na sliki 2, kjer so prikazani naloženi ploščinski grafikoni Bernsteinovih baznih polinomov. Količina barve pri določenem parametru $t \in [0, 1]$ pove, koliko pripadajoč polinom B_i^n prispeva k razčlenitvi enote.

S sledеčim izrekom podamo rekurzivno zvezo za računanje vrednosti Bernsteinovih baznih polinomov.



Slika 1: Bernsteinovi bazni polinomi stopnje $n = 0, 1, 2, 3$.

Izrek 2.4. Za Bernsteinove bazne polinome stopnje $n \geq 1$ velja rekurzivna zveza

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Izrek je enostavno dokazati s pomočjo indukcije, zato bomo dokaz izpustili. V kasnejših razdelkih bomo potrebovali tudi odvode in integrale Bernsteinovih baznih polinomov. Ker Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n tvorijo bazo prostora \mathbb{P}_n , lahko njihove odvode izrazimo v Bernsteinovi bazi dimenzijske $n-1$. Z nekaj računanja pridemo do sledečega rezultata.

Izrek 2.5. Za odvode Bernsteinovih baznih polinomov velja zveza

$$B_i^{n'} = n(B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1}).$$

S pomočjo prejšnjega izreka in indukcije pa pridemo do izreka za integrale Bernsteinovih baznih polinomov.

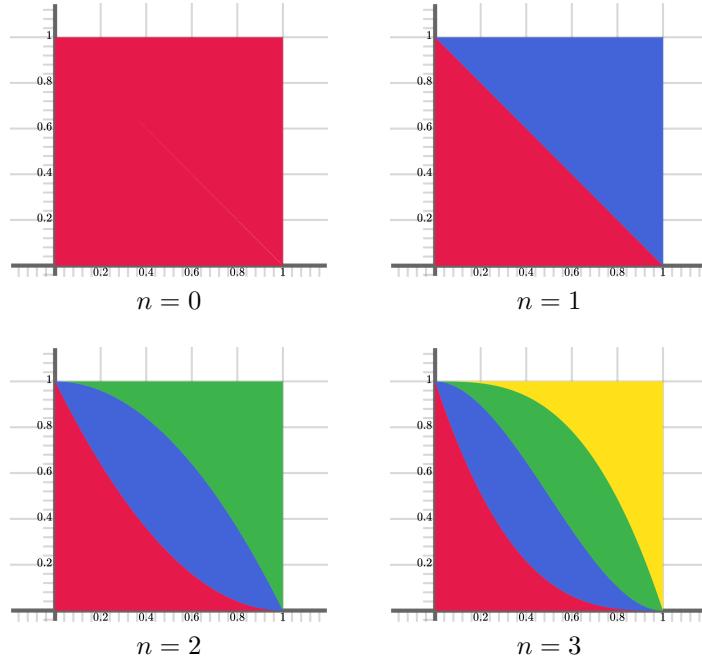
Izrek 2.6. Za nedoločene integrale Bernsteinovih baznih polinomov velja izraz

$$\int B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-i+1} B_{i+k}^{n+1}(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Za konec podrazdelka izpeljimo še formulo za zmnožek dveh Bernsteinovih polinomov.

Izrek 2.7. Naj bosta f in g Bernsteinova polinoma definirana kot $f = \sum_{i=0}^m \alpha_i B_i^m$ in $g = \sum_{i=0}^n \beta_i B_i^n$. Potem za njun zmnožek velja

$$fg = \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(m, i)} \frac{\binom{m}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{m+n}{i}} \alpha_i \beta_{i-j} \right) B_i^{m+n}.$$



Slika 2: Naloženi ploščinski grafikoni Bernsteinovih baznih polinomov.

Dokaz. Naj bosta f in g Bernsteinova polinoma iz predpostavk izreka. Polinoma zmnožimo in dobimo

$$fg = \sum_{i=0}^m \alpha_i B_i^m \sum_{j=0}^n \beta_j B_j^n = \sum_{i=0}^{m+n} \sum_{l=0}^i \alpha_l B_l^m \beta_{i-l} B_{i-l}^n.$$

V zadnji izraz vstavimo funkcjske predpise Bernsteinovih baznih polinomov, ga poenostavimo in dobimo

$$\sum_{i=0}^{m+n} \sum_{l=0}^i \alpha_l \beta_{i-l} \binom{m}{l} \binom{n}{i-l} t^i (1-t)^{m+n-i}.$$

Kar lahko z izpostavitvijo binoma $\binom{m+n}{i}$ predstavimo v Bernsteinovi bazi kot

$$\sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^i \alpha_l \beta_{i-l} \frac{\binom{m}{l} \binom{n}{i-l}}{\binom{m+n}{i}} \right) B_i^{m+n}.$$

V primerih, ko velja $l > m$ ali $i - l > n$ imamo v števcu ulomka 0, kar privede do zapisa iz izreka. \square

2.2 Večdimenzionalne oznake

Da bodo zapisi v sledečih razdelkih bolj pregledni, bomo uvedli večdimenzionalne oznake. Točke v večdimenzionalnem prostoru bomo označili z odebeljenimi črkami, na primer $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Podobno bomo odebelili črke funkcij, ki v večdimenzionalni prostor slikajo, na primer $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

2.3 Bézierjeve krivulje

Če v Bernsteinovem polinomu skalarne koeficiente zamenjamo s točkami, dobimo predpis parametrizacije Bézierjeve krivulje.

Definicija 2.8. Bézierjeva krivulja $\mathbf{B} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ stopnje $n \in \mathbb{N}$ je polinomska krivulja podana s točkami $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \dots, n$, in parametrizacijo

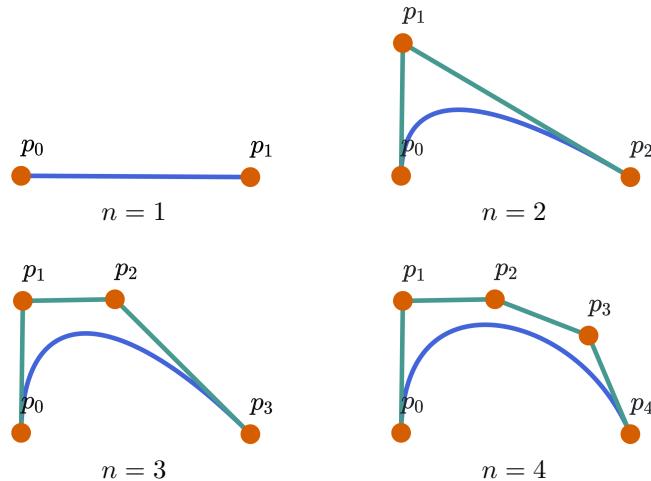
$$\mathbf{B} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t).$$

Točkam \mathbf{p}_i pravimo *kontrolne točke*. Če zaporedne kontrolne točke povežemo, dobimo *kontrolni poligon*.

Opomba 2.9. Kjer je potrebno, lahko definicijo razširimo tudi na stopnjo $n = 0$. Iz zgornje parametrizacije potem sledi $\mathbf{B}(t) = \mathbf{p}_0$.

Opomba 2.10. Pri slikovnem gradivu iz dela se bomo omejili na prostor dimenzije $d = 2$, torej na Bézierjeve krivulje v ravnini.

Na sliki 3 si lahko ogledamo primere Bézierjevih krivulj stopenj $n = 1, 2, 3, 4$ s pripadajočimi kontrolnimi poligoni.



Slika 3: Bézierjeve krivulje s pripadajočimi kontrolnimi poligoni za stopnje $n = 1, 2, 3, 4$.

Zapišimo sedaj nekaj osnovnih lastnosti Bézierjevih krivulj.

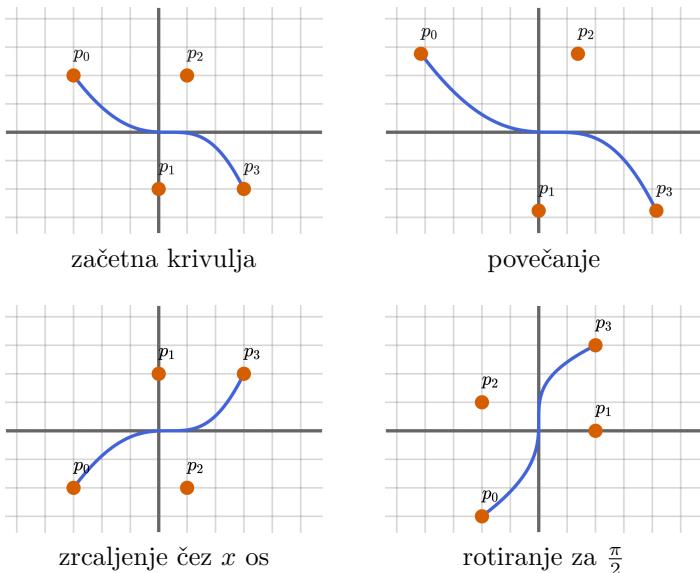
Izrek 2.11. Bézierjeva krivulja \mathbf{B} s kontrolnimi točkami \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, \dots, n$, ima sledeče lastnosti.

1. Interpolira končni točki, tj. velja $\mathbf{B}(0) = \mathbf{p}_0$ in $\mathbf{B}(1) = \mathbf{p}_n$.
2. Je afino invariantna, tj. za poljubno afino transformacijo A velja

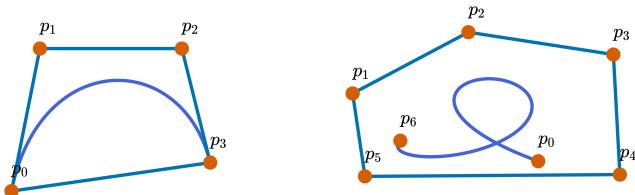
$$A \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) \right) = \sum_{i=0}^n A(\mathbf{p}_i) B_i^n(t).$$

3. Leži znotraj konveksne ovojnice svojih kontrolnih točk.

Dokazi lastnosti so enostavni, zato jih izpustimo. Preden si lastnosti ogledamo na slikah, povejmo zakaj so pomembne za CAGD sisteme. Interpolacija končnih točk uporabniku omogoča kontrolo nad tem, kje se bo krivulja začela in kje zaključila. Zaradi afine invariance lahko uporabnikove transformacije krivulje v ozadju CAGD sistema prevedemo v transformacije kontrolnih točk. Tretja lastnost pa uporabniku s kontrolnimi točkami omogoča upravljanje krivulje, kjer je krivulja zmerom v bližini svojih kontrolnih točk. Lastnosti si sedaj oglejmo na slikah. Interpolacijo končnih točk je bilo moč videti že na sliki 3. Posledice afine invariance si lahko ogledamo na sliki 4. Na sliki 5 pa si lahko ogledamo konveksni ovojnici kontrolnih točk dveh Bézierjevih krivulj. Vidimo, da krivulji ležita znotraj njih.



Slika 4: Afine transformacije Bézierjeve krivulje.



Slika 5: Konveksni ovojnici kontrolnih točk Bézierjevih krivulj.

2.4 De Casteljaujev algoritem

Stabilnost metod je v CAD in CAGD sistemih bistvene narave. Direktno računanje vrednosti Bernsteinovih polinomov preko izrazov iz definicije 2.1 pa ni stabilno ???. Da lahko točke Bézierjevih krivulj računamo stabilno, potrebujemo sledeč izrek.

Izrek 2.12. Označimo z $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$ Bézierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Potem za poljubno realno število t in naravno število n velja rekurzivna zveza

$$\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]} = (1-t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]}.$$

Izrek s pomočjo indukcije tudi dokažimo.

Dokaz. Za $n = 1$ zveza drži, saj je

$$\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]} = (1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_1 = (1-t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1]}.$$

Indukcijski korak pa dokažemo tako, da v desni del rekurzivne zvezne iz izreka vstavimo parametrizaciji Bézierjevih krivulj in dobimo

$$(1-t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]} = (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_{i+1} B_i^{n-1}(t).$$

Nato zamaknemo indeks desne vsote in skupne točke postavimo pod eno vsoto. Od tod sledi

$$\begin{aligned} & (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i B_{i-1}^{n-1}(t) \\ &= \mathbf{p}_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left((1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \right) \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_n B_{n-1}^{n-1}(t). \end{aligned}$$

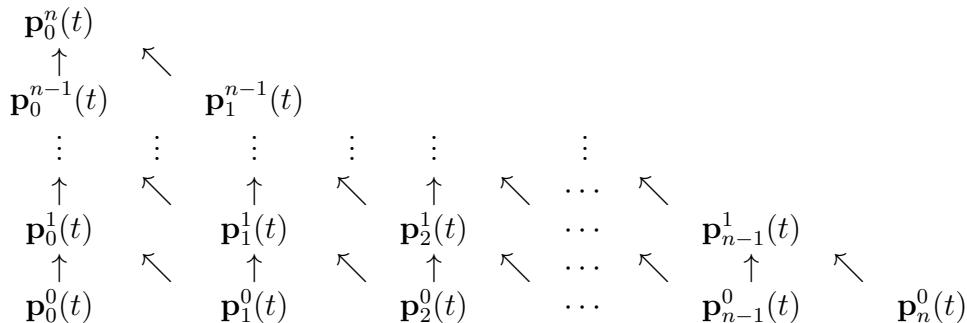
Uporabimo še rekurzivno zvezo Bernsteinovih baznih polinomov iz izreka 2.4, da dobimo

$$\mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^n(t) + \mathbf{p}_n B_n^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t).$$

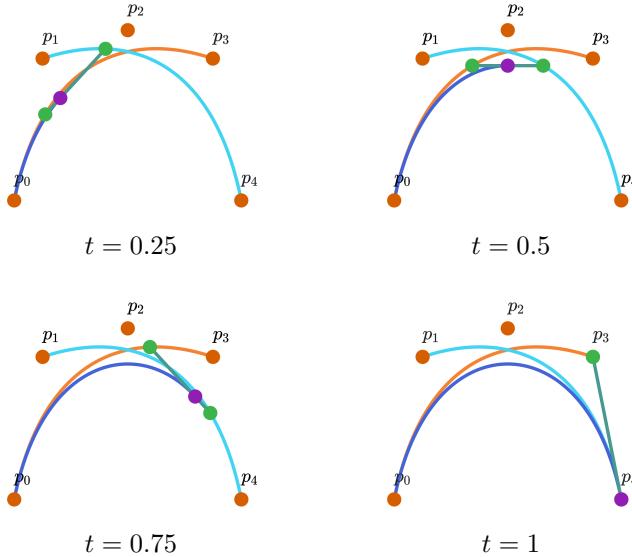
□

Na sliki 6 lahko vidimo, kako lahko točke Bézierjeve krivulje $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]}$ računamo s pomočjo točk Bézierjevih krivulj $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]}$ in $\mathbf{B}_{[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]}$.

Označimo sedaj $\mathbf{p}_i^r(t) = \mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_{i+r}]}$. Velja torej $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$ in $\mathbf{p}_0^n(t) = \mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$. Iz izreka 2.12 sledi, da lahko točke Bézierjeve krivulje $\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]}$ računamo s pomočjo *de Casteljaujeve sheme*, ki jo lahko vidimo na sliki 2.4. V shemi diagonalne puščice ponazarjajo množenje točke z vrednostjo t , vertikalne pa z vrednostjo $1 - t$. V vrhu puščic dobljene vrednosti seštejemo.



Slika 7: De Casteljaujeva shema.



Slika 6: Izračun točke Bézierjeve krivulje.

Izračun točke Bézierjeve krivulje pri poljubnem parametru t lahko sedaj podamo v obliki *de Casteljaujevega algoritma* 1.

Algoritem 1 De Casteljaujev algoritem

```

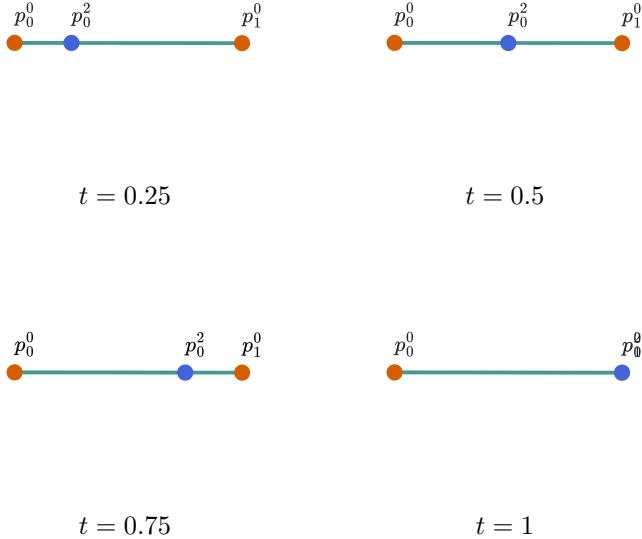
 $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 
 $t \leftarrow t$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n$  do
     $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$ 
end for
for  $r = 1, 2, \dots, n$  do
    for  $i = 0, 1, \dots, n - r$  do
         $\mathbf{p}_i^r(t) = (1 - t)\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$ 
    end for
end for
return  $\mathbf{p}_0^n(t)$ 

```

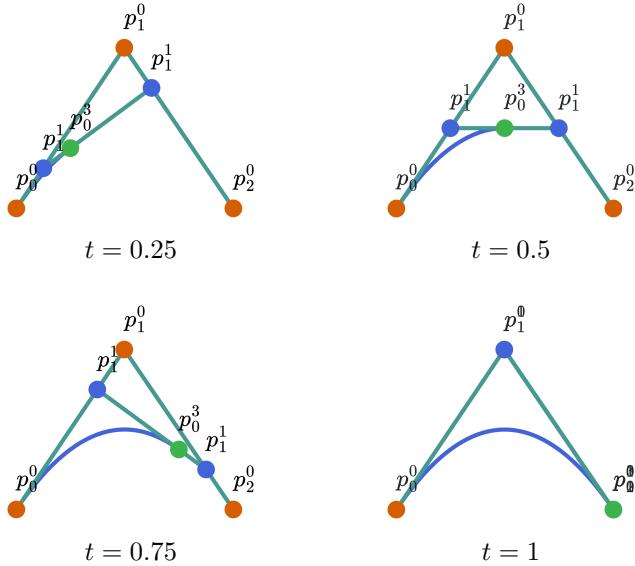
De Casteljaujev algoritem ima tudi geometrijski pomen. Pri stopnji $n = 1$ se prevede na interpolacijo dveh točk, kar lahko vidimo na sliki 8. Pri višjih stopnjah n pa algoritem predstavlja zaporedno interpolacijo točk, saj v njem za vsak nivo $r = 1, 2, \dots, n$ interpoliramo sosednje točke prejšnjega nivoja. Slednje lahko vidimo na slikama 9 in 10.

2.5 Subdivizija

V CAGD in CAD sistemih se mnogokrat zgodi, da uporabnik želi ohraniti le en del Bézierjeve krivulje. Naj bo to tisti del krivulje, ki ga dobimo tako, da za prvotno krivuljo parameter t omejimo na interval $[0, t_0]$, za neko pozitivno realno število $t_0 < 1$. Ta del krivulje označimo z B_{t_0-} . Izkaže se, da lahko krivuljo B_{t_0-} podamo kot Bézierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_0^i(t_0)$ za $i = 0, 1, \dots, n$, kjer točke $\mathbf{p}_0^i(t_0)$



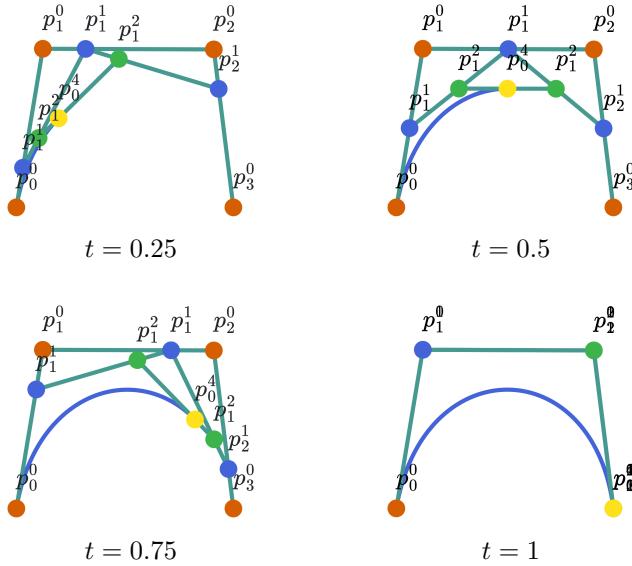
Slika 8: De Casteljaujev algoritem za $n = 1$.



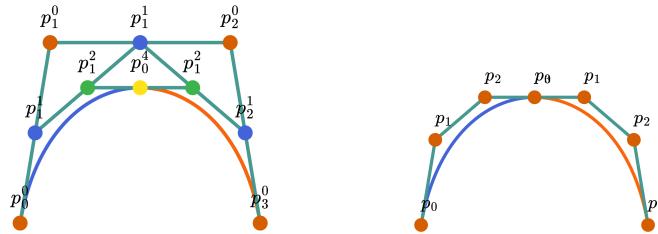
Slika 9: De Casteljaujev algoritem za $n = 2$.

dobimo iz de Casteljaujeve sheme pri $t = t_0$. Podobno se izkaže tudi to, da lahko preostali del krivulje, B_{t_0+} , podamo kot Bézierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_i^i(t_0)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Procesu deljenja krivulje na dva dela pravimo *subdivizija*. Radovedni bralci lahko dokaz trditev najdejo v delu [2]. Primer si lahko ogledamo na sliki 11.

Če izberemo sedaj $t_0 = \frac{1}{2}$ in krivuljo subdiviziramo, dobimo dve krivulji. Če subdivizijo nato na dobljenih krivuljah ponavljamo, dobimo po k korakih 2^k krivulj. Na sliki 12 si lahko ogledamo postopek za prve tri korake. Opazimo, da so kontrolni poligoni dobljenih krivulj zmerom bližje krivulji.



Slika 10: De Casteljaujev algoritem za $n = 3$.



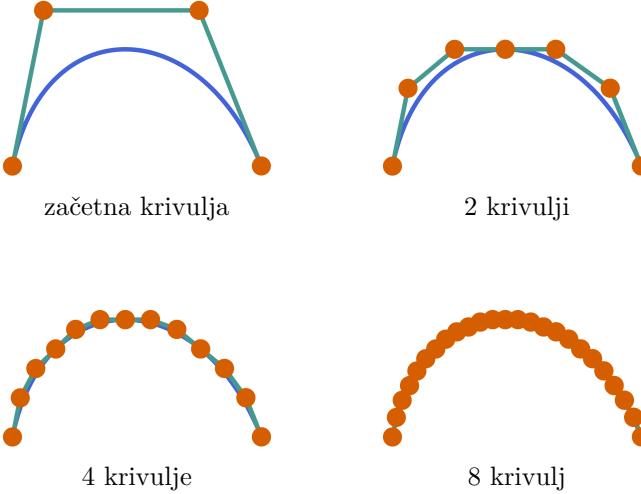
Slika 11: De Casteljaujeva shema pri $t = t_0$ razdeli krivuljo na dva dela, modrega, B_{t_0-} , in oranžnega, B_{t_0+} .

2.6 Ekstrapolacija

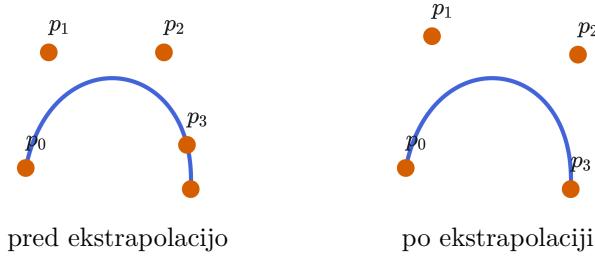
Ker so Bernsteinovi bazni polinomi definirani za vsa realna števila t , lahko Bézierjeve krivulje rišemo tudi izven domene $[0, 1]$. Recimo, da želimo neko Bézierjevo krivuljo risati na domeni $[0, t_0]$, kjer je $t_0 > 1$. Bézierjevo krivuljo na domeni $[0, t_0]$ lahko predstavimo kot Bézierjevo krivuljo na domeni $[0, 1]$. Pri tem kontrolne točke krivulje preberemo iz de Casteljaujeve sheme, kakor smo to storili za točke krivulje B_{t_0-} v prejšnjem razdelku, krivulja B_{t_0+} pa predstavlja ekstrapoliran del krivulje. Na sliki 13 lahko na prvem grafu vidimo risanje krivulje izven intervala $[0, 1]$, na drugem pa ekstrapolirano krivuljo.

2.7 Višanje stopnje

Nekateri algoritmi v CAD/CAGD sistemih za vhod potrebujejo dve Bézierjevi krivulji iste stopnje. Recimo, da imamo Bézierjevo krivuljo \mathbf{B} stopnje n , ki jo želimo predstaviti kot Bézierjevo krivuljo stopnje $n + 1$. Upoštevajoč $1 - t + t = 1$, lahko



Slika 12: Ponavljanje subdivizije.



Slika 13: Ekstrapolacija Bézierjeve krivulje.

parametrizacijo krivulje \mathbf{B} zapišemo tudi kot

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{B}(t) + t\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i(1-t)B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i t B_i^n(t). \quad (2.1)$$

Če sedaj zvezi za Bernsteinove bazne polinome

$$(1-t)B_i^n(t) = \frac{n+1-i}{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t),$$

$$t B_i^n(t) = \frac{i+1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!} t^{i+1} (1-t)^{n+1-i-1} = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t),$$

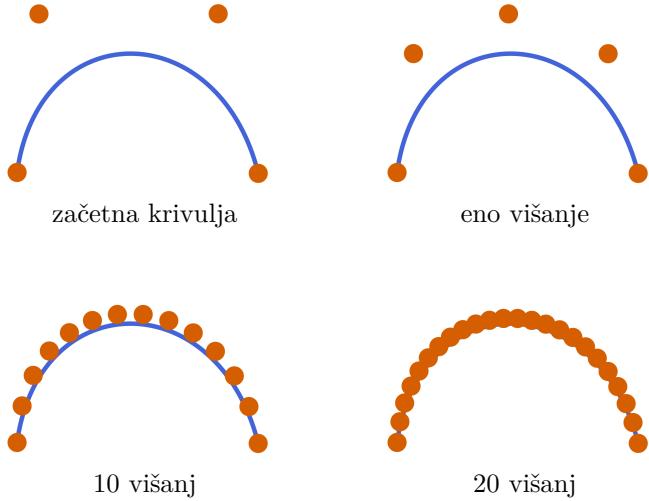
vstavimo v izraz (2.1), dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{p}_{i-1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t). \end{aligned}$$

Od tod sledi, da lahko krivuljo \mathbf{B} predstavimo kot Bézierjevo krivuljo stopnje $n+1$ s kontrolnimi točkami

$$c_0 = \mathbf{p}_0, \quad c_i = \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} + \mathbf{p}_{i-1} \frac{i}{n+1}, \quad c_{n+1} = \mathbf{p}_n.$$

Oglejmo si kako višanje stopnje izgleda na neki krivulji. Na sliki 14 je na prvem grafu narisana Bézierjeva krivulja stopnje 3. Na drugem grafu, smo stopnjo krivulje zvišali za 1, na tretjem in četrtem grafu pa smo naredili 10 oziroma 20 višanj stopnje začetne krivulje. Krivulja je na vseh grafih enaka, imamo le več kontrolnih točk. Opaziti je tudi možno, da so kontrolne točke z vsakim višanjem stopnje bližje začetni krivulji, kontrolni poligon pa se zmerom bolj prilega začetni krivulji.



Slika 14: Višanje stopnje Bézierjeve krivulje.

2.8 Odvodi Bézierjeve krivulje

V kasnejših razdelkih bomo potrebovali odvode Bézierjevih krivulj, zato jih na tem mestu izpeljimo. Z upoštevanjem izreka o odvodu Bernsteinovih baznih polinomov 2.5, dobimo naslednje

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) \right)' = n \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \\ &= n \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i B_{i-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) \right) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) B_i^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Za krajše zapise višjih odvodov Bézierjeve krivulje, bomo uvedli operator *prema differenci*, ki ga označimo z Δ . Operator deluje na zaporedni točki \mathbf{p}_i , definiramo pa ga rekurzivno kot

$$\Delta^0 \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i, \quad \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i, \quad \Delta^k \mathbf{p}_i = \Delta^{k-1} \mathbf{p}_{i+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{p}_i.$$

Za naravno število k lahko v zaključeni obliki podamo ekvivalenten zapis

$$\Delta^k \mathbf{p}_i = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \mathbf{p}_{i+j}.$$

Opomba 2.13. Iz definicije je očitno, da je operator Δ^k definiran le na kontrolnih točkah z indeksi manjšimi ali enakimi $n - k$.

Odvode Bézierjeve krivulje lahko sedaj predstavimo s pomočjo preme difference.

Izrek 2.14. *Naj bo \mathbf{B} Bézierjeva krivulja s kontrolnimi točkami \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Za njene odvode velja*

$$\mathbf{B}^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{p}_i B_i^{n-k}(t), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Izrek je enostavno dokazati s pomočjo indukcije, zato bomo dokaz izpustili.

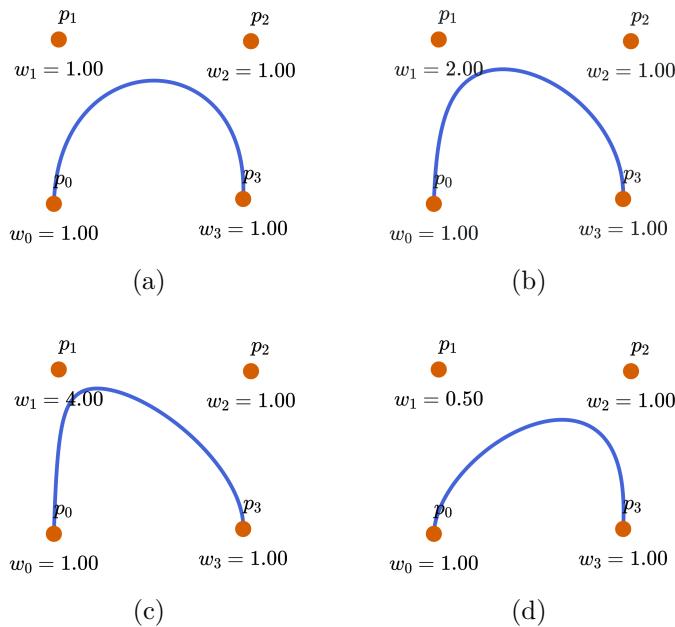
3 Racionalne Bézierjeve krivulje

Vseh krivulj ne moremo opisati s polinomskimi Bézierjevimi krivuljami. Med njimi so tudi takšne, ki so za CAGD sisteme zelo pomembne, na primer izseki krožnice. Za opis takšnih krivulj lahko posežemo po racionalnih Bézierjevih krivuljah. Racionalno Bézierjevo krivuljo stopnje n v \mathbb{R}^d dobimo tako, da Bézierjevo krivuljo stopnje n v \mathbb{R}^{d+1} projiciramo na hiperravnino $w = 1$. Točke iz \mathbb{R}^{d+1} pri tem definiramo kot (w, x_1, \dots, x_n) , projekcijo pa s predpisom $(w, \mathbf{x}) \rightarrow (1, \frac{\mathbf{x}}{w})$. Takšna izpeljava privede do naslednje definicije.

Definicija 3.1. Racionalna Bézierjeva krivulja stopnje $n \in \mathbb{N}$ je racionalna krivulja podana s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ in utežmi $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, ter parametrizacijo $\mathbf{R} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ določeno s predpisom

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{p}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

Uteži so prosti parametri, ki jih lahko uporabimo pri oblikovanju. Kadar so vse uteži enake, je racionalna Bézierjeva krivulja enaka polinomski Bézierjevi krivulji z istimi kontrolnimi točkami. Da bi se izognili težavam pri deljenju z 0 ponavadi privzamemo, da so vse uteži pozitivne. Vpliv uteži si poglejmo na sliki 15. Utež spremojamo le pri kontrolni točki \mathbf{p}_1 , vse ostale uteži puščamo enake 1. Na grafu (a) je utež nastavljena na število 1, krivulja na sliki je zato polinomska Bézierjeva krivulja. Na grafoma (b) in (c) lahko vidimo, da se z višanjem uteži, krivulja bliža točki \mathbf{p}_1 . Na grafu (c) pa lahko vidimo, da se z nižanjem uteži, krivulja od točke \mathbf{p}_1 oddaljuje.



Slika 15: Vpliv uteži na racionalno Bézierjevo krivuljo.

Iz zapisa parametrizacije v definiciji 3.1 lahko hitro vidimo, da množenje vseh uteži s poljubnim neničelnim številom krivulje ne spremeni. Tako lahko brez izgube

splošnosti poljubno utež fiksiramo na 1. Naslednji izrek pa pove, da lahko to storimo za dve uteži.

Izrek 3.2. *Racionalno Bézierjevo krivuljo s pozitivnimi utežmi w_i in parametrizacijo \mathbf{R} , lahko reparametriziramo v parametrizacijo $\tilde{\mathbf{R}}$ s pozitivnimi utežmi \tilde{w}_i tako, da velja $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_n = 1$.*

Dokaz izreka bo konstrukcijske narave. Našli bomo torej uteži \tilde{w}_i , katere lahko zamenjamo z utežmi w_i tako, da ohranimo isto krivuljo.

Dokaz. Naj bo \mathbf{R} racionalna Bézierjeva funkcija s poljubnimi pozitivnimi utežmi. Uporabimo reparametrizacijsko funkcijo $\varphi(t) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ s predpisom $\varphi(t) = \frac{t}{\rho(1-t)+t}$, kjer je ρ pozitivno realno število. Če reparametrizacijsko funkcijo vstavimo v i -ti Bernsteinov bazni polinom dobimo naslednje

$$\begin{aligned} B_i^n(\varphi(t)) &= \binom{n}{i} \left(\frac{t}{\rho(1-t)+t} \right)^i \left(1 - \frac{t}{\rho(1-t)+t} \right)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} \left(\frac{t}{\rho(1-t)+t} \right)^i \left(\frac{\rho(1-t)}{\rho(1-t)+t} \right)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} \frac{\rho^{n-i} t^i (1-t)^{n-i}}{(\rho(1-t)+t)^n} = \frac{\rho^{n-i}}{(\rho(1-t)+t)^n} B_i^n(t). \end{aligned}$$

Reparametrizirane Bernsteinove bazne polinome sedaj vstavimo v parametrizacijo racionalne Bézierjeve krivulje, da dobimo

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(\varphi(t)) = \frac{\sum_{i=0}^n \rho^{n-i} w_i \mathbf{p}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \rho^{n-i} w_i B_i^n(t)}.$$

Nove uteži izrazimo s starimi $\hat{w}_i = \rho^{n-i} w_i$. Želimo, da bi veljalo $\hat{w}_0 = \hat{w}_n$, zato nastavimo $\rho = \sqrt[n]{\frac{w_n}{w_0}}$. Ker velja $\hat{w}_n = w_n$ lahko uteži \hat{w}_i delimo z utežjo w_n , da dobimo željene uteži

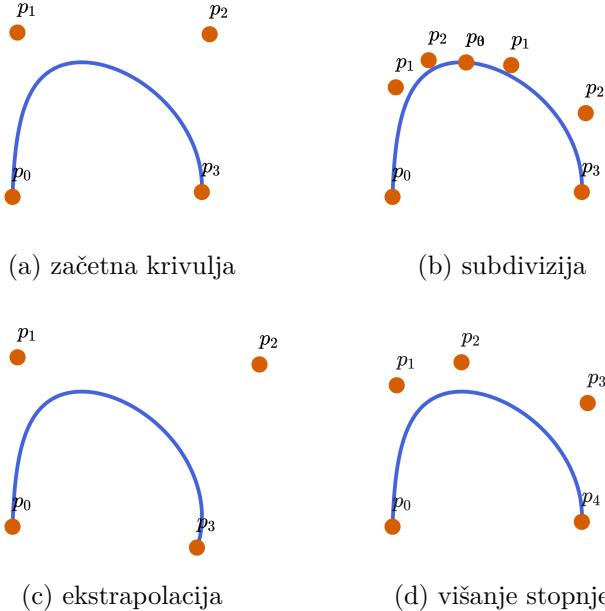
$$\tilde{w}_i = \frac{1}{w_n} \hat{w}_i = \frac{w_i}{\sqrt[n]{w_n^i w_0^{n-i}}}.$$

□

Posledica 3.3. *Z uvedbo racionalnih Bézierjevih krivulj smo dobili le $n - 1$ dodatnih prostih parametrov, glede na polinomske Bézierjeve krivulje z istim številom kontrolnih točk.*

Opomba 3.4. Če velja $w_0 = w_n = 1$ pravimo, da je racionalna Bézierjeva krivulja predstavljena v standardni formi.

Brez dokaza povejmo, da lastnosti Bézierjevih krivulj, ki smo jih podali v izreku 2.11, veljajo tudi za racionalne Bézierjeve krivulje s pozitivnimi utežmi. Subdiviziranje, ekstrapoliranje in višanje stopnje polinomske Bézierjeve krivulje lahko na racionalne Bézierjeve krivulje stopnje d razširimo tako, da krivuljo zapišemo kot polinomsko Bézierjevo krivuljo stopnje $d+1$ s kontrolnimi točkami $(w_i, w_i \mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Polinomsko krivuljo nato subdiviziramo/ekstrapoliramo/ji zvišamo stopnjo in iz dobljenih kontrolnih točk $(\tilde{w}_i, \tilde{w}_i \tilde{\mathbf{p}}_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$ preberemo nove kontrolne točke $\tilde{\mathbf{p}}_i \in \mathbb{R}^d$ in uteži $\tilde{w}_i \in \mathbb{R}$. Pri takšnem procesu samo ekstrapolacija ne ohranja pozitivnosti uteži. Primere si lahko ogledamo na sliki 16.



Slika 16: Subdivizija, ekstrapolacija ter višanje stopnje racionalne Bézierjeve krivulje.

3.1 De Casteljaujev algoritem za racionalne Bézierjeve krivulje

Točke racionalnih Bézierjevih krivulj dimenzije d bi lahko računali s pomočjo de Casteljaujevega algoritma za polinomske Bézierjeve krivulje stopnje $d + 1$, na podoben način kot smo v prejšnjem razdelku razširili subdivizijo, ekstrapolacijo in višanje stopnje krivulje. Takšno računanje točk se izkaže za nestabilno ??, zato na tem mestu podamo razširitev de Casteljaujevega algoritma za racionalne Bézierjeve krivulje 2, ki točke racionalne Bézierjeve krivulje računa stabilno ??.

Algoritem 2 Racionalni de Casteljaujev algoritem

```

 $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 
 $w \leftarrow w_0, w_1, \dots, w_n$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n$  do
     $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$ 
     $w_i^0(t) = w_i$ 
end for
for  $r = 1, 2, \dots, n$  do
    for  $i = 0, 1, \dots, n - r$  do
         $w_i^r(t) = (1 - t)w_i^{r-1}(t) + tw_{i+1}^{r-1}(t)$ 
         $\mathbf{p}_i^r(t) = (1 - t) \frac{w_i^{r-1}(t)}{w_i^r(t)} \mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t \frac{w_{i+1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)} \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$ 
    end for
end for
return  $\mathbf{p}_0^n(t)$ 

```

Brez dokaza z naslednjim izrekom podajmo pravilnost algoritma 2.

Izrek 3.5. Za vmesne točke $\mathbf{p}_i^r(t)$ iz algoritma 2 in poljubno realno število t velja izraz

$$\mathbf{p}_i^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^r w_{i+j} \mathbf{p}_{i+j} B_j^r(t)}{\sum_{i=0}^n w_{i+j} B_j^r(t)}.$$

3.2 Farinove točke

Uporabniku CAGD sistema želimo nuditi čim bolj naraven način kontroliranja uteži racionalne Bézierjeve krivulje. V ta namen lahko uteži predstavimo s *Farinovimi točkami*. Farinove točke ležijo na daljicah kontrolnega poligona, kjer i -ta Farinova točka \mathbf{f}_i deli i -to daljico kontrolnega poligona v razmerju $w_{i+1} : w_i$. Slednje lahko zapišemo kot

$$\frac{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_i\|}{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|} = \frac{w_{i+1}}{w_i}.$$

S kontrolnimi točkami in utežmi lahko Farinove točke izrazimo takole

$$\mathbf{f}_i := \frac{w_i}{w_i + w_{i+1}} \mathbf{p}_i + \frac{w_{i+1}}{w_i + w_{i+1}} \mathbf{p}_{i+1}.$$

Da bi uporabnik lahko s Farinovimi točkami kontroliral uteži, pa želimo obratno – s Farinovimi točkami želimo izraziti uteži. Brez izgube splošnosti lahko za prvo utež izberemo $w_0 = 1$. Ostale točke lahko nato rekurzivno izračunamo s pomočjo naslednjega izraza

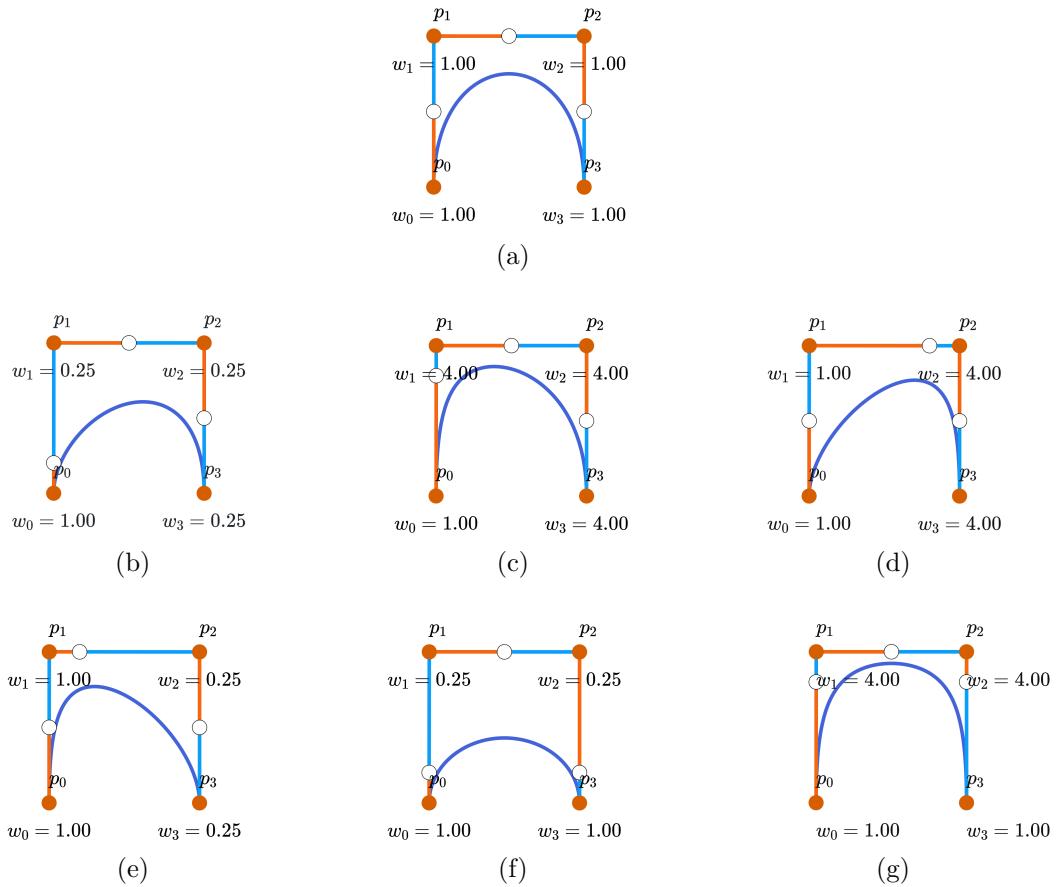
$$w_{i+1} = w_i \frac{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_i\|}{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|}.$$

Po želji lahko uteži tudi standardiziramo s pomočjo formule

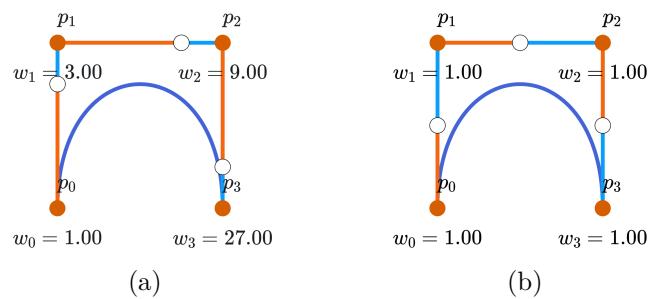
$$\tilde{w}_i = \frac{w_i}{\sqrt[n]{w_n^i}},$$

ki sledi iz dokaza izreka 3.2.

Na sliki 17 si lahko ogledamo delovanje Farinovih točk. Uteži na sliki niso standardizirane zato, da lahko bolje vidimo razmerja med njimi. Na grafu (a) Farinove točke ležijo na sredini pripadajočih daljic. Posledično so vsa razmerja $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{f}_i\| : \|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{f}_i\|$ enaka in vse uteži enake 1. Na grafu (b) lahko vidimo, da se s premikom prve Farinove točke bližje k točki \mathbf{p}_0 , k njej približa tudi krivulja. Utež w_1 , ki predstavlja razmerje $\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{f}_0\| : \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{f}_0\|$, je zato manjša kot 1. Na grafu (c) lahko vidimo premik Farinove točke bližje k točki \mathbf{p}_1 . Krivulja se točki približa, utež w_1 pa se poveča na več kot 1. Ker na grafoma (b) in (c) druga in tretja Farinova točka ležita na sredini svojih daljic, so uteži w_1, w_2 in w_3 enake. Na grafoma (d) in (e) lahko vidimo, kako se krivulja in uteži obnašajo ob premiku druge Farinove točke. Na grafoma (f) ter (g) pa lahko vidimo obnašanje krivulje, ko premaknemo prvo ter tretjo Farinovo točko hkrati gor oziroma dol. Poglejmo še, kaj se zgodi, če vse tri točke premaknemo pomaknemo tako, da so razmerja na vseh daljicah enaka. Na levem grafu slike 18 lahko vidimo, da krivulja izgleda kakor začetna. Če uteži standardiziramo, kar smo storili na desnem grafu, vidimo, da je temu res tako. Da bi preprečili takšno izbiro Farinovih točk, lahko po vsakem premiku Farinove točke uteži standardiziramo, ter ponovno izračunamo Farinove točke.



Slika 17: Kontroliranje krivulje s Farinovimi točkami.



Slika 18: Krivulja z enakimi premiki vseh Farinovih točk, pred in po standardizaciji.

4 Zlepki Bézierjevih krivulj

Če si ponovno ogledamo de Casteljaujev algoritmom 1, lahko hitro opazimo, da je časovna kompleksnost algoritma $O(n^2)$. Računanje točk kompleksnejše Bézierjeve krivulje, z veliko kontrolnimi točkami, je zato zamudno. Da bi ohranili uporabniku naravno kontrolo krivulj ter hiter izračun točk, posežemo po zlepkih Bézierjevih krivulj.

Definicija 4.1. Zlepek krivulj $\mathbf{S} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ nad zaporedjem stičnih točk

$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} < u_m = b$$

je parametrično podana polinomska krivulja stopnje $n \in \mathbb{N}$, katere komponente so odsekoma polinomske funkcije $\mathbf{S}|_{[u_{l-1}, u_l]} \in \mathbb{P}_n^d$.

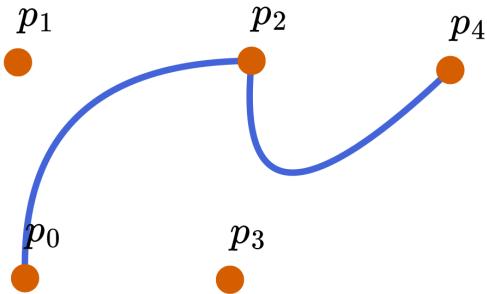
Želimo si, da bi zlepsi tvorili gladko neprekinjeno krivuljo, saj so takšne krivulje v CAGD sistemih najbolj uporabne. Krivulja je po definiciji na posameznih odsekih polinomska in zato tudi gladka, problem je le v stičnih točkah. Naj bo

$$\mathbf{S}(u) = \begin{cases} \mathbf{S}_1(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i^{(1)} B_i^n \left(\frac{u - u_0}{\Delta u_0} \right), & u \in [u_0, u_1], \\ \mathbf{S}_2(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i^{(2)} B_i^n \left(\frac{u - u_1}{\Delta u_1} \right), & u \in [u_1, u_2], \end{cases} \quad (4.1)$$

zlepek dveh Bézierjevih krivulj. Da bo zlepek zvezen, mora v stični točki u_1 veljati $\mathbf{S}_1(u_1) = \mathbf{S}_2(u_1)$ oziroma

$$\mathbf{p}_n^{(1)} = \mathbf{p}_0^{(2)}. \quad (4.2)$$

Takšen zlepek, si lahko ogledamo na sliki 19.



Slika 19: C^0 zlepek dveh Bézierjevih krivulj.

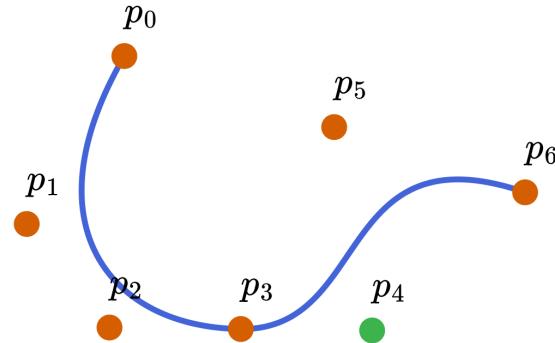
Da bo zlepek vsaj zvezno odvedljiv, mora veljati (4.2), morata pa v stični točki sovpadati tudi odvoda $\mathbf{S}_1'(u_1) = \mathbf{S}_2'(u_1)$. Iz izreka 2.14 sledi, da mora zato veljati

$$\frac{\mathbf{p}_n^{(1)} - \mathbf{p}_{n-1}^{(1)}}{\Delta u_0} = \frac{\mathbf{p}_1^{(2)} - \mathbf{p}_0^{(2)}}{\Delta u_1}. \quad (4.3)$$

Upoštevajoč (4.2) lahko enačbo zapišemo tudi kot

$$\mathbf{p}_n^{(1)} = \mathbf{p}_0^{(2)} = \frac{\Delta u_0 \mathbf{p}_1^{(2)}}{\Delta u_0 + \Delta u_1} + \frac{\Delta u_1 \mathbf{p}_{n-1}^{(1)}}{\Delta u_0 + \Delta u_1},$$

od koder je moč prebrati geometrijski pomen pogoja. Skupna točka $\mathbf{p}_n^{(1)} = \mathbf{p}_0^{(2)}$ mora namreč deliti daljico $\mathbf{p}_{n-1}^{(1)} \mathbf{p}_1^{(2)}$ v razmerju $\frac{\Delta u_0}{\Delta u_1}$. Primer takšnega zlepka si lahko ogledamo na sliki 20. Podobno lahko iz izreka 2.14 preberemo pogoje gladkosti za

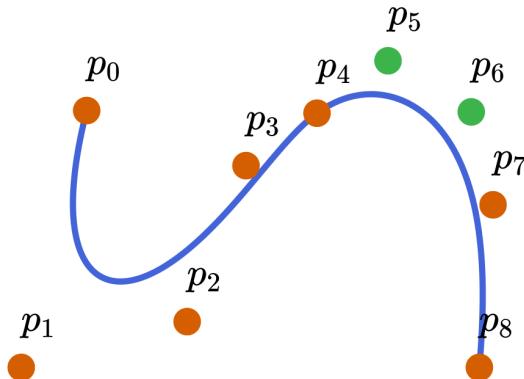


Slika 20: C^1 zlepek dveh Bézierjevih krivulj, kjer je $\Delta u_0 = \Delta u_1$.

$C^r([a, b])$,

$$\frac{1}{(\Delta u_0)^k} \Delta^k \mathbf{p}_{n-k}^{(1)} = \frac{1}{(\Delta u_1)^k} \Delta^k \mathbf{p}_0^{(2)}, \quad k = 0, \dots, r.$$

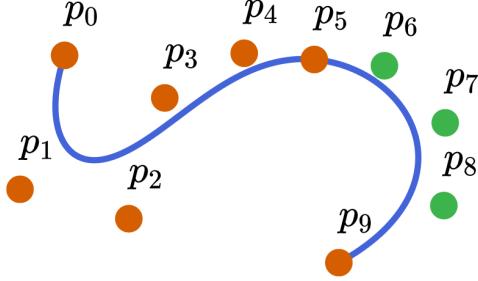
Primer C^2 oziroma C^3 zlepka si lahko ogledamo na sliki 21 oziroma sliki 22.



Slika 21: C^2 zlepek dveh Bézierjevih krivulj, kjer je $\Delta u_0 = \Delta u_1$.

4.1 Geometrijska zveznost

Da bi zlepki bili gladki ne potrebujemo zvezne odvedljivosti v analitičnem smislu, dovolj je zvezna odvedljivost v geometrijskem smislu.



Slika 22: C^3 zlepek dveh Bézierjevih krivulj, kjer je $\Delta u_0 = \Delta u_1$.

Definicija 4.2. Zlepek krivulj

$$\mathbf{S}(u) = \begin{cases} \mathbf{S}_1(u), & u \in [u_0, u_1), \\ \mathbf{S}_2(u), & u \in [u_1, u_2], \end{cases}$$

je k -krat geometrijsko zvezno odvedljiv, G^k , če v okolini stične točke u_1 obstaja takšna regularna reparametrizacijska funkcija φ , da je $\varphi(u_1) = u_1$ in zlepek krivulj

$$\mathbf{S}(u) = \begin{cases} \mathbf{S}_1(u), & u \in [u_0, u_1), \\ \mathbf{S}_2(\varphi(u)), & u \in [u_1, u_2], \end{cases}$$

k -krat zvezno odvedljiv.

Izpeljimo sedaj pogoje gladkosti za G^k , $k = 0, 1, 2$. Za G^0 mora veljati

$$\mathbf{S}_1(u_1) = \mathbf{S}_2(\varphi(u_1)) = \mathbf{S}_2(u_1),$$

kar je enak pogoj, kakor za C^0 . Za G^1 mora veljati prejšnje in

$$\mathbf{S}'_1(u_1) = \mathbf{S}'_2(\varphi(u_1))\varphi'(u_1) = \mathbf{S}'_2(u_1)\varphi'(u_1).$$

Za G^2 pa mora veljati prejšnje ter

$$\mathbf{S}''_1(u_1) = \mathbf{S}''_2(\varphi(u_1))(\varphi'(u_1))^2 + \mathbf{S}'_2(\varphi(u_1))\varphi''(u_1) = \mathbf{S}''_2(u_1)(\varphi'(u_1))^2 + \mathbf{S}'_2(u_1)\varphi''(u_1).$$

Če sedaj označimo odvode reparametrizacijske funkcije v točki u_1 z $\beta_i = \varphi^{(i)}(u_1)$, lahko pogoje za G^2 zveznost izrazimo s povezovalno matriko

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}'_1(u_1) \\ \mathbf{S}''_1(u_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ \beta_2 & \beta_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}'_2(u_1) \\ \mathbf{S}''_2(u_1) \end{bmatrix}.$$

Lahko pa tudi najprej izberemo skalarje β_i in konstruiramo reparametrizacijsko funkcijo, ki ustreza pogojem $\varphi' > 0$, $\varphi'(u_1) = \beta_1$ in $\varphi''(u_1) = \beta_2$. Za funkcijo φ lahko vzamemo kar Taylorjev polinom

$$\varphi(u) = u_1 + \beta_1(u - u_1) + \frac{1}{2}\beta_2(u - u_1)^2.$$

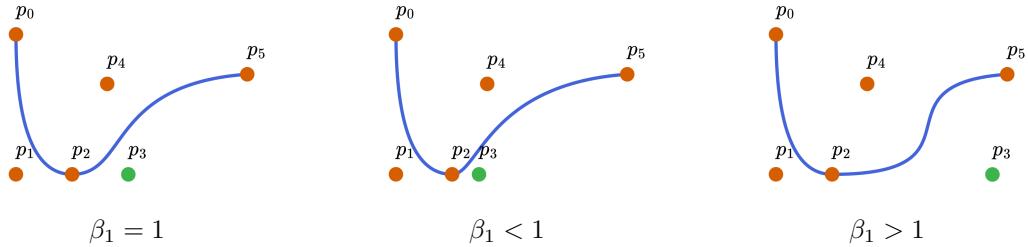
Oglejmo si sedaj, kako pogoji za geometrijsko zveznost vplivajo na zlepke Bézierjevih krivulj. Da je zlepek (4.1) G^1 mora veljati $\mathbf{S}'_1(u_1) = \beta_1 \mathbf{S}'_2(u_1)$, iz česar sledi

$$\frac{\mathbf{p}_n^{(1)} - \mathbf{p}_{n-1}^{(1)}}{\Delta u_0} = \beta_1 \frac{\mathbf{p}_1^{(2)} - \mathbf{p}_0^{(2)}}{\Delta u_1}.$$

Če označimo sedaj $\alpha_1 = \frac{\beta_1 \Delta u_0}{\Delta u_1}$ lahko pogoj zapišemo kot

$$\mathbf{p}_n^{(1)} - \mathbf{p}_{n-1}^{(1)} = \alpha_1 (\mathbf{p}_1^{(2)} - \mathbf{p}_0^{(2)}). \quad (4.4)$$

Glede na C^1 smo torej pridobili prosti parameter, ki ga lahko v CAGD sistemih uporabimo za dodatno kontrolo nad krivuljo. G^1 zlepek in vpliv izbire β_1 si lahko ogledamo na sliki 23.



Slika 23: Vpliv izbire β_1 pri G^1 zlepku.

4.2 Konstrukcija zlepkov Bézierjevih krivulj

4.2.1 Enostranska konstrukcija

Pogoje gladkosti iz prejšnjega razdelka bi lahko izpeljali tudi drugače. Da bi zlepek (4.1) bil C^∞ , bi morali krivulji \mathbf{S}_1 in \mathbf{S}_2 biti del iste Bézierjeve krivulje. Krivuljo \mathbf{S}_2 lahko zato dobimo z ekstrapolacijo krivulje \mathbf{S}_1 . Da je zlepek C^r je dovolj, da krivulja \mathbf{S}_2 ustrezata ekstrapolirani krivulji v prvih $r+1$ kontrolnih točkah, saj le te vplivajo na prvih r odvodov. C^r zlepek lahko torej konstruiramo tako, da začnemo z Bézierjevo krivuljo. Krivuljo nato ekstrapoliramo in ekstrapoliranemu delu fiksiramo prvih $r+1$ točk, ostale pa izberemo poljubno. Postopek je podrobnejše zapisan v algoritmu 3, kjer funkcija decasteljau_shema predstavlja funkcijo, ki vrača De Casteljaujevo shemo 2.4.

Algoritem 3 Enostranska konstrukcija C^r zlepka stopnje n

Vhod:

$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$

$u \leftarrow u_0, u_1, \dots, u_n$

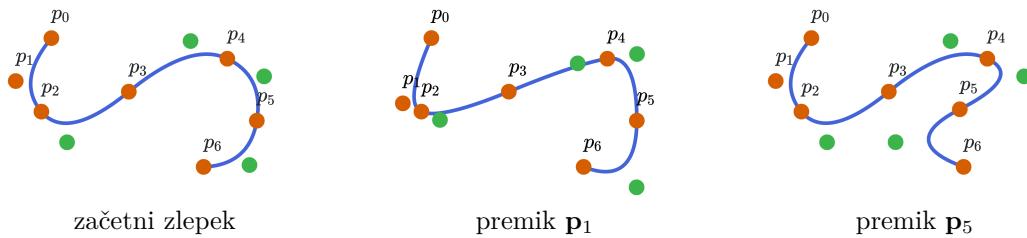
```

st_krivulj =  $\frac{m-n}{n-r}$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n$  do
     $\mathbf{p}_i^{(1)} = \mathbf{p}_i$ 
end for
for  $j = 2, 3, \dots, st\_krivulj$  do
     $t_0 = \frac{\Delta u_j + \Delta u_{j+1}}{\Delta u_j}$ 
     $\mathbf{e} = decasteljau\_shema(\mathbf{p}^{(j-1)}, t_0)$ 
     $\{\mathbf{p}_i^{(j)}\}_{i=0}^r = \{\mathbf{e}_j^{(n)}\}_{j=n}^{n-r}$ 
    for  $k = 0, 1, \dots, (n-r)$  do
         $\mathbf{p}_{n-r+k}^{(j)} = \mathbf{p}_{j(n-r)+k}$ 
    end for
end for

return  $\{\mathbf{p}^{(i)}\}_{i=1}^{st\_krivulj}$ 

```

Zlepki konstruirani s takšnim algoritmom niso uporabniku prijazni, saj kontrolne točke različno močno vplivajo na obliko krivulje. Za primer si na sliki 24 oglejmo obnašanje tako konstruiranega kvadratnega C^1 zlepka.



Slika 24: Obnašanje enostranskega kvadratnega C^1 zlepka.

4.2.2 Simetrična konstrukcija

Uporabniku mnogo bolj prijazni so algoritmi simetričnih konstrukcij. Brez izpeljave podajmo algoritma 4, 5 za simetrični konstrukciji kvadratnega C^1 in kubičnega C^2 zlepka. Obnašanje tako konstruiranih zlepkov si lahko ogledamo na slikama 25 in 26.

Algoritem 4 Simetrična konstrukcija kvadratnega C^1 zlepka

Vhod:

$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{m+1}$

$u \leftarrow u_0, u_1, \dots, u_m$

```

 $\mathbf{p}_0^{(1)} = \mathbf{p}_0$ 
 $\mathbf{p}_1^{(1)} = \mathbf{p}_1$ 
for  $l = 1, 2, \dots, m-1$  do
     $\mathbf{p}_1^{(l)} = \mathbf{p}_l$ 
     $\mathbf{p}_2^{(l)} = \mathbf{p}_0^{(l+1)} = \frac{\Delta u_l}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l} \mathbf{p}_l + \frac{\Delta u_{l-1}}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l} \mathbf{p}_{l+1}$ 
end for
 $\mathbf{p}_0^{(m)} = \mathbf{p}_m$ 
 $\mathbf{p}_1^{(m)} = \mathbf{p}_{m+1}$ 

return  $\{\mathbf{p}^{(l)}\}_{l=1}^m$ 

```

Algoritem 5 Simetrična konstrukcija kubičnega C^2 zlepka

Vhod:

$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_{-1}, \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_{m+1}$

$u \leftarrow u_0, u_1, \dots, u_m$

```

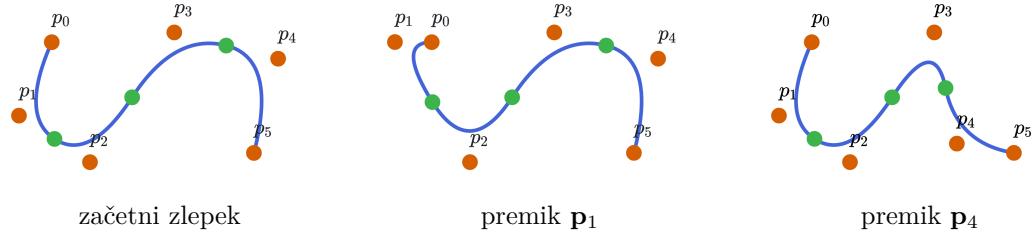
 $\mathbf{p}_0^{(1)} = \mathbf{p}_{-1}$ 
 $\mathbf{p}_1^{(1)} = \mathbf{p}_0$ 
for  $l = 1, 2, \dots, m-2$  do
     $\mathbf{p}_1^{(l+1)} = \frac{\Delta u_l + \Delta u_{l+1}}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l + \Delta u_{l+1}} \mathbf{p}_l + \frac{\Delta u_{l-1}}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l + \Delta u_{l+1}} \mathbf{p}_{l+1}$ 
     $\mathbf{p}_2^{(l+1)} = \frac{\Delta u_{l+1}}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l + \Delta u_{l+1}} \mathbf{p}_l + \frac{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l + \Delta u_{l+1}} \mathbf{p}_{l+1}$ 
end for
 $\mathbf{p}_1^{(m)} = \frac{\Delta u_{m-1}}{\Delta u_{m-2} + \Delta u_{m-1}} \mathbf{p}_{m-1} + \frac{\Delta u_{m-2}}{\Delta u_{m-2} + \Delta u_{m-1}} \mathbf{p}_m$ 
for  $l = 1, 2, \dots, m-1$  do
     $\mathbf{p}_3^{(l)} = \mathbf{p}_0^{(l+1)} = \frac{\Delta u_l}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l} \mathbf{p}_l + \frac{\Delta u_{l-1}}{\Delta u_{l-1} + \Delta u_l} \mathbf{p}_{l+1}$ 
end for
 $\mathbf{p}_2^{(m)} = \mathbf{p}_m$ 
 $\mathbf{p}_3^{(m)} = \mathbf{p}_{m+1}$ 

return  $\{\mathbf{p}^{(l)}\}_{l=1}^m$ 

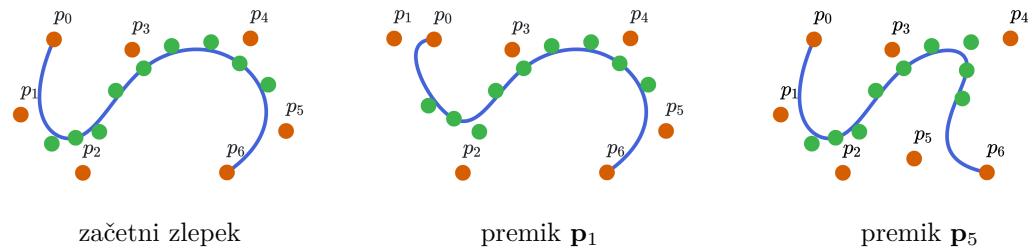
```

Tako konstruirani zlepki ustrezajo lastnostim Bézierjevih krivulj iz izreka 2.11. Primere afinih transformacij simetrično konstruiranega C^2 zlepka si lahko ogledamo na sliki 27. Na sliki 28 pa si lahko ogledamo konveksni ovojnici dveh takšnih zlepkov.

Algoritem za simetrično konstrukcijo kvadratnega C^1 zlepka lahko adaptiramo tako, da upoštevamo pogoj za G^1 zveznost (4.4). Dobimo algoritem za simetrično konstrukcijo kvadratnega G^1 zlepka 6, kjer števila β_l omejimo na interval $(0, 1)$. Obnašanje zlepka ob spremenjanju β_1 si lahko ogledamo na sliki 29.



Slika 25: Obnašanje simetrično konstruiranega kvadratnega C^1 zlepka.



Slika 26: Obnašanje simetrično konstruiranega kubičnega C^2 zlepka.

Algoritem 6 Simetrična konstrukcija kvadratnega G^1 zlepka

Vhod:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m \\ \beta &\leftarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1} \end{aligned}$$

```

 $\mathbf{p}_0^{(1)} = \mathbf{p}_0$ 
 $\mathbf{p}_1^{(1)} = \mathbf{p}_1$ 
for  $l = 1, 2, \dots, m-1$  do
     $\mathbf{p}_1^{(l)} = \mathbf{p}_l$ 
     $\mathbf{p}_2^{(l)} = \mathbf{p}_0^{(l+1)} = (1 - \beta_l)\mathbf{p}_l + \beta_l\mathbf{p}_{l+1}$ 
end for
 $\mathbf{p}_0^{(m)} = \mathbf{p}_m$ 
 $\mathbf{p}_1^{(m)} = \mathbf{p}_{m+1}$ 

return  $\{\mathbf{p}^{(l)}\}_{l=1}^m$ 

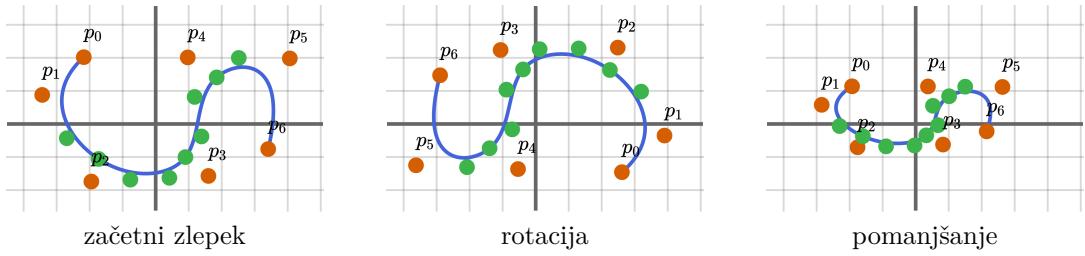
```

4.2.3 α parametrizacije

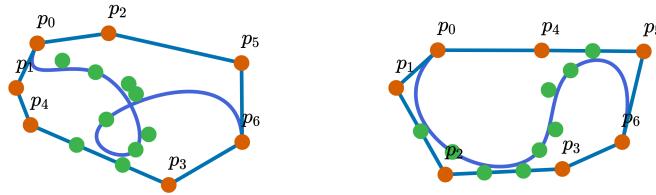
V praksi stičnih točk u_i dostikrat ne dobimo podanih ampak jih izračunamo sami. Smiselno jih je postaviti tako, da s parametrom t po krivulji potujemo čim bolj enakomerno. Za točke u_i bi torej želeli, da velja

$$\frac{\Delta u_{i+1}}{\Delta u_i} = \frac{dolzina_krivulje(\mathbf{s}^{(i+1)})}{dolzina_krivulje(\mathbf{s}^{(i)})}.$$

Pri simetrično konstruiranih kubičnih C^2 zlepkih iz prejšnjega razdelka lahko dolžine krivulj $\mathbf{s}^{(i)}$ aproksimiramo z dolžino premih diferenc Δp_i . Takšnem generiranju točk



Slika 27: Afini transformaciji simetrično konstruiranih kubičnih C^2 zlepkov.



Slika 28: Konveksni ovojnici simetrično konstruiranih kubičnih C^2 zlepkov.

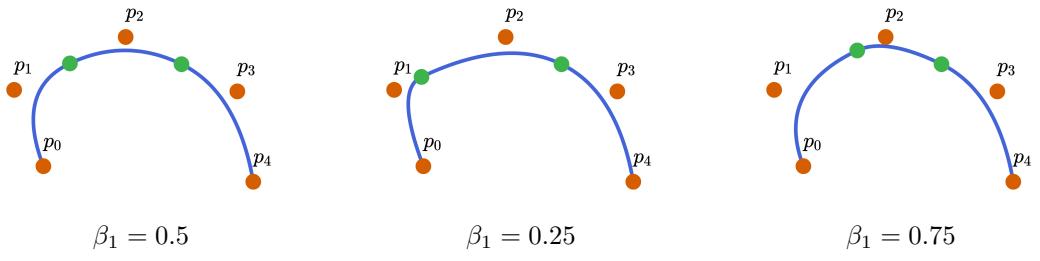
pravimo α *parametrizacije*. Točke u_i torej izberemo tako, da velja

$$\Delta u_i = \|\Delta p_i\|^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1], \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

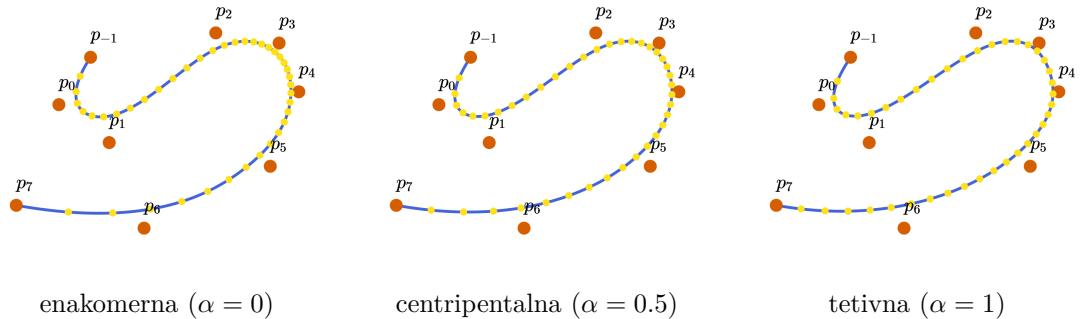
Če želimo upoštevati točki p_{-1} in p_{m+1} , ju lahko upoštevamo pri izračunu u_1 in u_m na naslednji način

$$u_1 = u_0 + \|p_1 - p_{-1}\|^\alpha, \quad u_m = u_{m-1} + \|p_{m+1} - p_{m-1}\|^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Vpliv izbire α si lahko ogledamo na sliki 30. Izbira vpliva tako na obliko, kot tudi na enakomernost porazdeljenosti točk na krivulji, izračunanih pri ekvidistantnih parametrih $\{t_i\}_{i=0}^N$.



Slika 29: Vpliv izbire β_1 pri simetričnem kvadratnem G^1 zlepku.



Slika 30: Vpliv izbire α pri izračunu točk u_i za simetrični kubični C^2 zlepek. Rumene točke predstavljajo točke na krivulji pri ekvidistantnih $\{t_i\}_{i=0}^N$.

5 PH Krivulje

5.1 Konstantna parametrična hitrost

Definirajmo za začetek hodograf, ter parametrično hitrost krivulje.

Definicija 5.1. Hodograf krivulje podane s parametrizacijo $\mathbf{r} = (x, y)$ je krivulja podana s parametrizacijo $\mathbf{r}' = (x', y')$.

Definicija 5.2. Parametrična hitrost krivulje \mathbf{r} s parametrizacijo $\mathbf{r} = (x, y)$ je definirana s funkcijskim predpisom

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}. \quad (5.1)$$

Idealno bi bilo, da je parametrična hitrost krivulje $\sigma \equiv 1$. Krivulje s konstantno parametrično hitrostjo $\sigma \equiv C$ lahko reparametriziramo s reparametrizacijsko funkcijo $\varphi(t) = \frac{t}{C}$, da dobimo željeno. Za poljubno premico s parametrizacijo

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = (s_x, s_y),$$

lahko torej uporabimo reparametrizacijsko funkcijo s predpisom $\varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$. Polinomske krivulje višjih stopenj pa konstantne hitrosti ne morejo imeti. Naj bo vsaj ena izmed komponent parametrizacije $\mathbf{r} = (x, y)$ polinom stopnje $n > 1$. Ker sta vodilna koeficiente polinomov x'^2 in y'^2 pozitivna, iz izraza (5.1) hitro sledi, da polinom $\sigma^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$ ni konstanten.

5.2 Polinomska parametrična hitrost

V prejšnjem podrazdelku smo pokazali, da polinomske krivulje stopnje > 1 ne morejo imeti konstantne parametrične hitrosti. Če krivulje nekoliko omejimo, lahko dosežemo vsaj to, da bo funkcija hitrosti polinom. Iz enačbe (5.1) sledi, da bo to res v primerih, ko je polinom $x'^2 + y'^2 = z^2$ – takrat se namreč koren v enačbi okrajša.

Definicija 5.3. Polinomi a, b, c tvorijo pitagorejsko trojico, če zadoščajo enačbi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Opomba 5.4. Vrstni red navajanja polinomov iz definicije 5.3 je pomemben. Če polinomi a, b, c tvorijo pitagorejsko trojico, jo tvorijo tudi polinomi b, a, c , polinomi a, c, b pa je ne.

Definicija 5.5. Naj bo $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrično podana krivulja s parametrizacijo $\mathbf{r} = (x, y)$. Krivulja \mathbf{r} je PH krivulja ozziroma krivulja s pitagorejskim hodografom, če obstaja tak polinom z , da polinomi x', y', z tvorijo pitagorejsko trojico.

Pri konstrukciji Bézierjevih PH krivulj si bomo pomagali z naslednjim izrekom.

Izrek 5.6. Polinomi a, b, c tvorijo pitagorejsko trojico natanko tedaj, ko obstajata tri polinoma u in v ter nek polinom w , da veljajo izrazi

$$a = (u^2 - v^2)w, \quad b = 2uvw, \quad c = (u^2 + v^2)w.$$

Izrek tudi dokažimo.

Dokaz.

(\Leftarrow) Dokaz je enostaven, saj lahko definicije polinomov a, b in c iz izreka vstavimo v enačbo iz definicije 5.3 in preverimo.

(\Rightarrow) Najprej definirajmo polinom $w \equiv \gcd(a, b, c)$. Pri tako definiranem polinomu w , so si polinomi

$$\tilde{a} = \frac{a}{w}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{w}, \quad \tilde{c} = \frac{c}{w},$$

tuji in zadoščajo enačbi $\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 = \tilde{c}^2$. Enačbo zapišimo nekoliko drugače

$$\tilde{b}^2 = \tilde{c}^2 - \tilde{a}^2 = (\tilde{c} + \tilde{a})(\tilde{c} - \tilde{a}).$$

Polinoma $\tilde{c} + \tilde{a}$ in $\tilde{c} - \tilde{a}$ ne moreta imeti skupnih ničel, saj bi to impliciralo skupne ničle polinomov $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, kar bi bilo v nasprotju z njihovo definicijo. Ker skupnih ničel nimata, mora biti vsaka ničla polinoma \tilde{b} tudi ničla sode stopnje enega izmed polinomov $\tilde{c} + \tilde{a}$ ali $\tilde{c} - \tilde{a}$. Potem takem lahko definiramo tuja si polinoma u in v , da velja $\tilde{c} + \tilde{a} = 2u^2$ in $\tilde{c} - \tilde{a} = 2v^2$. Iz enačb potem hitro sledi

$$\tilde{a} = u^2 - v^2, \quad \tilde{b} = 2uv, \quad \tilde{c} = u^2 + v^2.$$

Enačbe pomnožimo s polinomom w in dobimo željeno obliko. \square

Iz konstrukcije dokaza lahko hitro vidimo, da sta za pitagorejske trojice katerih največji skupni delitelj je konstanta, konstantna tudi polinoma w in $\gcd(u, v)$. Takšnim trojicam pravimo *primitivne pitagorejske trojice*. Parametrizacijo ravninske PH krivulje $\mathbf{r} = (x, y)$ lahko konstruiramo tako, da vstavimo tuja si polinoma u, v in polinom w v izraza

$$x' = (u^2 - v^2)w, \quad y' = 2uvw \tag{5.2}$$

in integriramo. Pri tem nekateri izbori polinomov u, v, w porodijo izrojene krivulje, takšne bi radi izločili. Izrojene krivulje dobimo v naslednjih izborih.

1. Če je polinom $w \equiv 0$ ali polinoma $u = v \equiv 0$, sta polinoma $x' = y' \equiv 0$. Polinoma x in y sta zato konstantna in definirata točko, ne pa krivulje.
2. Če so polinomi u, v, w konstantni in neničelnii, potem sta konstantna tudi polinoma x' in y' . V tem primeru definirata parametrizacijo premice s konstantno hitrostjo.
3. Če sta polinoma u in v konstantna ter vsaj en neničelen, polinom w pa ni konstanten, potem za polinoma x', y' velja $x' = Cy'$, $C \in \mathbb{R}$. Tudi tokrat polinoma definirata premico, a hitrost ni enakomerna.
4. Podobno kot v točki 3. dobimo tudi v primeru, ko je polinom w neničelen in en izmed polinomov u in v je ničelen.

Neizrojene PH krivulje dobimo torej pri izborih neničelnih polinomov u, v in w , kjer vsaj en izmed polinomov u in v ni konstanten. S številom λ označimo stopnjo polinoma w , s številom μ pa $\max(\deg(u), \deg(v))$. PH krivulja, pridobljena z integriranjem polinomov x' in y' iz (5.2), je stopnje $n = \lambda + 2\mu + 1$. Prostih parametrov

pa je manj. Vsak izmed polinomov u in v je namreč definiran z največ $\mu + 1$ parametri. Brez izgube splošnosti lahko vodilni koeficient polinoma w fiksiramo na 1. Polinom w je zato definiran z λ parametri. Integracijska konstanta pri integriranju hodografa nam poda še 2 prosta parametra. Skupno je prostih parametrov torej $\lambda + 2(\mu + 1) + 2 = \lambda + 2\mu + 4 = n + 3$.

5.3 Kontrolne točke Bézierjevih PH krivulj

V tem podrazdelku bomo konstruirali *Bézierjeve PH krivulje*, to so Bézierjeve krivulje, ki so tudi PH krivulje. Krivulje bomo konstruirali s pomočjo izreka (5.2), kjer za polinomom w vzamemo $w \equiv 1$, da bodo krivulje zagotovo regularne. Polinoma x', y' sta torej definirana kot

$$x' = u^2 - v^2, \quad y' = 2uv. \quad (5.3)$$

Za parametrično hitrost krivulje s parametrizacijo $\mathbf{r} = (x, y)$ potem velja

$$\|\mathbf{r}'\| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = u^2 + v^2.$$

Od tod pa sledi $\|\mathbf{r}'(t)\| \neq 0$, $t \in R$, saj polinoma u in v nimata skupnih ničel. Krivulje so torej regularne in lihe stopnje $n = 2\mu + 1$. Najbolj osnovne netrivialne PH krivulje dobimo tako, da za polinoma u in v izberemo Bernsteinova polinoma

$$u = u_0 B_0^1 + u_1 B_1^1, \quad v = v_0 B_0^1 + v_1 B_1^1. \quad (5.4)$$

Zanju mora veljati $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$, da sta si polinoma u in v tuja, in $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$, da vsaj en od njiju ni konstanten. Ko polinoma vstavimo v izraza (5.3) dobimo

$$\begin{aligned} x' &= (u_0^2 - v_0^2) B_0^2 + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2 + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2, \\ y' &= 2u_0 v_0 B_0^2 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2 + 2u_1 v_1 B_2^2. \end{aligned}$$

Polinoma x', y' integriramo s pomočjo izreka 2.6 in upoštevamo, da Bernsteinovi polinomi tvorijo razčlenitev enote. Dobimo

$$\begin{aligned} x &= x_0(B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2)(B_1^3 + B_2^3 + B_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1)(B_2^3 + B_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2)B_3^3, \\ y &= y_0(B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}2u_0 v_0(B_1^3 + B_2^3 + B_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(u_0 v_1 + u_1 v_0)(B_2^3 + B_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}2u_1 v_1 B_3^3, \end{aligned}$$

kar ustrezna Bézierjevi krivulji s kontrolnimi točkami

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1). \end{aligned} \quad (5.5)$$

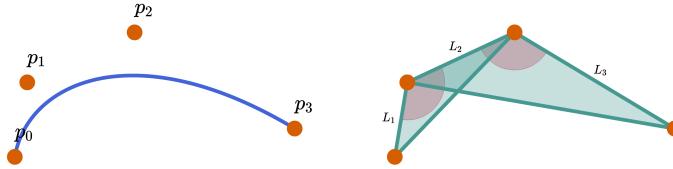
Kjer smo kontrolno točko $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ izbrali poljubno, saj sta x_0 in y_0 integracijski konstanti. Kontrolni poligoni dobljeni z izrazi (5.5) imajo tudi geometrijsko interpretacijo.

Izrek 5.7. *Naj bo \mathbf{B} kubična Bézierjeva krivulja s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Z $L_i = \|\Delta p_i\|$ označimo dolžine stranic kontrolnega poligona, z θ_1 in θ_2 pa kota kontrolnega poligona pri točkah \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_2 . Krivulja \mathbf{B} je PH krivulja natanko tedaj, ko veljata izraza*

$$L_1 = \sqrt{L_2 L_0} \quad \text{in} \quad \theta_1 = \theta_2.$$

Pogoji iz izreka 5.7 so ekvivalentni temu, da si morata trikotnika $\triangle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in $\triangle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ biti podobna, kar lahko vidimo na sliki 31.

Dokaz. **Dodati moram dokaz, ali pa napisati, da ga ne bo.** □



Slika 31: Geometrija kontrolnega poligona kubične Bézierjeve PH krivulje.

V prejšnjem razdelku smo povedali, da ima PH krivulja n -te stopnje $n+3$ prostih parametrov. Za pravkar definirane kubične Bézierjeve PH krivulje to pomeni, da imajo le 6 prostih parametrov. Če želimo podobno raven kontrole, kakor pri navadnih kubičnih Bézierjevih krivuljah, moramo poseči po kvintičnih Bézierjevih PH krivuljah. Izpeljemo jih podobno, le da tokrat za polinoma u in v izberemo Bernsteinova polinoma polinoma stopnje 2

$$u = u_0 B_0^2 + u_1 B_1^2 + u_2 B_2^2, \quad v = v_0 B_0^2 + v_1 B_1^2 + v_2 B_2^2. \quad (5.6)$$

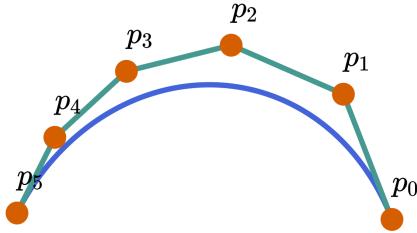
Da sta si polinoma u in v tuja, mora veljati izraz

$$(u_2 v_0 - u_0 v_2)^2 \neq 4(u_0 v_1 - u_1 v_0)(u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Polinoma vstavimo v izraza (5.3) in integriramo, z nekaj računanja dobimo Bézierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{5}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1) + \frac{1}{5}(u_0 u_2 - v_0 v_2, u_0 v_2 + u_2 v_0), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1 u_2 - v_1 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2 v_2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Primer takšne krivulje si lahko ogledamo na sliki 32.



Slika 32: Kvintična Bézierjeva PH krivulja..

5.4 Parametrična hitrost Bézierjeve PH krivulje

Parametrična hitrost Bézierjeve PH krivulje podane s parametrizacijo $\mathbf{r} = (x, y)$ je dana s polinomom

$$\sigma = \|\mathbf{r}'\| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = u^2 + v^2.$$

Če je krivulja stopnje n , potem sta polinoma u in v stopnje $m = \frac{1}{2}(n-1)$. Zapišimo polinome u, v in σ v Bernsteinovi bazi

$$u = \sum_{j=0}^m u_j B_j^m, \quad v = \sum_{j=0}^m v_j B_j^m, \quad \sigma = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j B_j^{n-1}.$$

S pomočjo pravila za množenje Bernsteinovih polinomov iz izreka 2.7, lahko koeficiente σ_j izrazimo s koeficienti polinomov u in v

$$\sigma_j = \sum_{k=\max(0, j-m)}^{\min(m, j)} \frac{\binom{m}{k} \binom{m}{j-k}}{\binom{n-1}{j}} (u_k u_{j-k} + v_k v_{j-k}).$$

Tako smo parametrično hitrost Bézierjeve PH krivulje izrazili v Bernsteinovi bazi. Parametrično hitrost lahko uporabimo za izračun dolžine krivulje. Dolžina izseka krivulje pri parametru $t \in [0, t_0]$, $t_0 \in [0, 1]$ je podana z določenim integralom

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} \sigma(t) dt = \int_0^{t_0} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j B_j^{n-1}(t) dt.$$

Integral izračunamo s pomočjo integracijskega pravila iz izreka 2.6. Dobimo dolžino izseka Bézierjeve PH krivulje pri parametru $t \in [0, t_0]$ izraženo v Bernsteinovi bazi

$$s(t_0) = \sum_{k=0}^n s_k B_k^n(t_0), \quad s_0 = 0, \quad s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j.$$

Iz zapisa hitro sledi, da je celotna dolžina Bézierjeve PH krivulje enaka

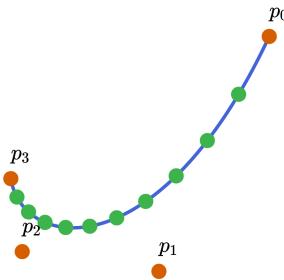
$$s(1) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n-1}}{n}.$$

Dolžino poljubnega izseka krivulje na intervalu $[a, b]$, $0 \leq a < b \leq 1$, pa lahko izračunamo s pomočjo izraza

$$\int_a^b \sigma(t) dt = \int_0^b \sigma(t) dt - \int_0^a \sigma(t) dt = s(b) - s(a).$$

5.5 Enakomerna parametrizacija

V razdelku 5.1 smo pokazali, da polinomske krivulje stopnje višje od 1 ne morejo imeti konstantne hitrosti. V tem razdelku bomo reševali problem, ki je s konstantno hitrostjo tesno povezan. Želimo najti takšne parametre $\{t_i\}_{i=0}^N$, $N \in \mathbb{N}$, da bodo izseki krivulje med njimi enako dolgi. Za krivulje s konstantno hitrostjo je problem enostavno rešiti, saj pri ekvidistantno izbranih parametrih $\{t_i\}_{i=0}^N$, $\Delta t_i = \frac{1}{N+1}$, zanje velja $s(t_{i+1}) - s(t_i) = \frac{C}{N+1}$. Bézierjeve PH krivulje pa konstantne hitrosti nimajo, zato ekvidistantna izbira parametrov $\{t_i\}_{i=0}^N$ problema ne reši. Slednje lahko vidimo na sliki 33. Čeprav parametrična hitrost Bézierjeve PH krivulje ni konstantna,



Slika 33: 10 točk na Bézierjevi PH krivulji pri ekvidistantnih t_i .

lahko njen enostaven izračun izkoristimo, da najdemo parametre $\{t_i\}_{i=0}^N$ za katere velja $s(t_k) = k\Delta s$, kjer je $\Delta s = \frac{s(1)}{N}$. Ker je parametrična hitrost σ pozitivna za vsa realna števila $t \in [0, 1]$, je funkcija dolžine s strogo naraščajoča. Parametri t_i so zato enolično določeni in ležijo med t_{i-1} in 1. Za iskanje parametrov t_i lahko uporabimo Newton-Raphsonovo iteracijo. Za začetni približek vzamemo $t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$ popravljamo pa ga z iteriranjem

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)})}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Znano je, da takšna iteracija pri začetnih približkih, ki so dovolj blizu parametru t_k , konvergira s kvadratno hitrostjo. Za večino primerov zato izračun približka t_k , do natančnosti reda 10^{-12} , potrebuje le dva do tri korake iteracije. V praksi so takšni približki ponavadi zadovoljivi. Točke na PH krivulji pridobljene s takšnimi približki si lahko ogledamo na sliki 34.

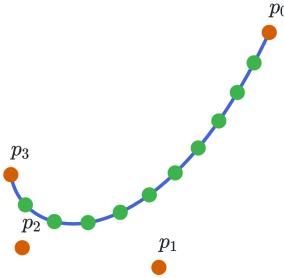
5.6 Tangenta, normala in ukrivljenost

V razdelku 5.4 smo pokazali, da je parametrična hitrost Bézierjeve PH krivulje polinom. Od tod sledi, da so tangenta, normala in ukrivljenost PH krivulje racionalne funkcije.

Izrek 5.8. *Tangenta, normala in ukrivljenost Bézierjeve PH krivulje dobljene z integriranjem izraza (5.3) so enake*

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2 \frac{uv' - u'v}{\sigma^2},$$

kjer je $\sigma = u^2 + v^2$ parametrična hitrost krivulje.



Slika 34: 10 točk na Bézierjevi PH krivulji, pridobljenih s parametri, za katere velja $s(t_{i+1}) - s(t_i) = \frac{s(1)}{N}$.

Izrek tudi dokažimo.

Dokaz. Dokaza za tangento in normalo sta enostavna, saj izraza (5.3) le vstavimo v izraza iz izreka in upoštevamo, da je polinom $\sigma = u^2 + v^2$. Dokažimo še izraz za ukrivljenost κ . V enačbo za ukrivljenost $\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$ vstavimo polinoma (5.3), ter njuna druga odvoda $x'' = 2(uu' - vv')$ in $y'' = 2(u'v + uv')$, dobimo

$$\begin{aligned}\kappa &= 2 \frac{(u^2 - v^2)(u'v + uv') - 2uv(uu' - vv')}{(\sigma^2)^{3/2}} \\ &= 2 \frac{u^2vu' + u^3v' - v^3u' - v^2uv' - 2u^2vu' + 2uv^2v'}{\sigma^3} \\ &= 2 \frac{(u^2 - v^2 + 2v^2)uv' - (-u^2 + v^2 + 2u^2)u'v}{\sigma^3} \\ &= 2 \frac{(u^2 + v^2)uv' - (u^2 + v^2)u'v}{\sigma^3} \\ &= 2 \frac{(u^2 + v^2)(uv' - u'v)}{\sigma^3} = 2 \frac{uv' - u'v}{\sigma^2}.\end{aligned}$$

□

5.7 Racionalne odmik krivulje

Odmik krivulja z razdaljo d od krivulje \mathbf{r} , je krivulja podana s parametrizacijo

$$\mathbf{r}_d = \mathbf{r} + d\mathbf{n}.$$

Takšne krivulje v splošnem niso racionalne, saj v imenovalcu funkcije za smer normale \mathbf{n} nastopa koren. V prejšnjem razdelku smo pokazali, da je smer normale \mathbf{n} za PH krivulje racionalna funkcija, iz česar sledi, da je tudi odmik krivulja PH krivulje racionalna funkcija. Še več, odmik krivulje Bézierjeve PH krivulje \mathbf{r} lahko predstavimo kot racionalno Bézierjevo krivuljo s kontrolnimi točkami izraženimi s kontrolnimi točkami krivulje \mathbf{r} . Zapišimo kontrolne točke Bézierjeve PH krivulje \mathbf{r} v homogenih koordinatah

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Preme difference takšnih točk izgledajo takole

$$\Delta \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Označimo še pravokotno smer $\Delta \mathbf{P}_k^\perp = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k)$. Parametrizacijo odmik krivulje lahko izrazimo kot

$$\mathbf{r}_d = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{W}}, \frac{\tilde{Y}}{\tilde{W}} \right),$$

kjer so polinomi \tilde{W} , \tilde{X} in \tilde{Y} stopnje $2n-1$, njihovi koeficienti v Bernsteinovi bazi pa definirajo kontrolne točke racionalne Bézierjeve krivulje s homogenimi koordinatami

$$\mathbf{O}_k = (\tilde{W}_k, \tilde{X}_k, \tilde{Y}_k), \quad k = 0, \dots, 2n-1.$$

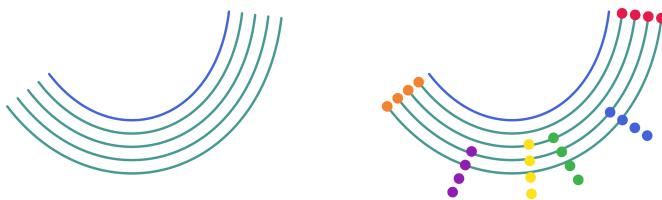
Homogene koordinate kontrolnih točk racionalne odmik krivulje lahko v zaključeni obliki izrazimo s kontrolnimi točkami začetne Bézierjeve PH krivulje

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(n-1, k)} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn \Delta \mathbf{P}_j^\perp), \quad k = 0, \dots, 2n-1.$$

To ni očitno, moram dodati referenco na kak dokaz. Za primer si oglejmo kontrolne točke odmik krivulje kubične PH krivulje

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_0 &= \sigma_0 \mathbf{P}_0 + 3d \Delta \mathbf{P}_0^\perp, \\ \mathbf{O}_1 &= \frac{1}{5} [2\sigma_1 \mathbf{P}_0 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_1 + 3d(3\Delta \mathbf{P}_0^\perp + 2\Delta \mathbf{P}_1^\perp)], \\ \mathbf{O}_2 &= \frac{1}{10} [\sigma_2 \mathbf{P}_0 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_1 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_2 + 3d(3\Delta \mathbf{P}_0^\perp + 6\Delta \mathbf{P}_1^\perp + \Delta \mathbf{P}_2^\perp)], \\ \mathbf{O}_3 &= \frac{1}{10} [3\sigma_2 \mathbf{P}_1 + 6\sigma_1 \mathbf{P}_2 + 3\sigma_0 \mathbf{P}_3 + 3d(\Delta \mathbf{P}_0^\perp + 6\Delta \mathbf{P}_1^\perp + 3\Delta \mathbf{P}_2^\perp)], \\ \mathbf{O}_4 &= \frac{1}{5} [3\sigma_2 \mathbf{P}_2 + 2\sigma_1 \mathbf{P}_3 + 3d(2\Delta \mathbf{P}_1^\perp + 3\Delta \mathbf{P}_2^\perp)], \\ \mathbf{O}_5 &= \sigma_2 \mathbf{P}_3 + 3d \Delta \mathbf{P}_2^\perp. \end{aligned}$$

Na sliki 35 lahko vidimo, da se kontrolne točke odmik krivulje v odvisnosti od razdalje premikajo po premicah.



Slika 35: Odmik krivulje, levo, skupaj z njihovimi kontrolnimi točkami, desno.

5.8 Reprezentacija s kompleksnimi števili

Kubične in kvintične Bézierjeve PH krivulje smo v prejšnjih podrazdelkih izpeljali tako, da smo izbrali Bernsteinove polinome definirane z izrazi (5.4),(5.4) in integrirali. Če predstavimo konstante iz polinomov s kompleksnimi števili $\mathbf{w}_i = u_i + iv_i \in \mathbb{C}$ in enako storimo s kontrolno točko $\mathbf{p}_0 = x_0 + iy_0$, lahko preostale kontrolne točke kubične Bézierjeve PH krivulje izrazimo kot kompleksna števila z naslednjimi izrazi

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_0^2, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_1^2.$$

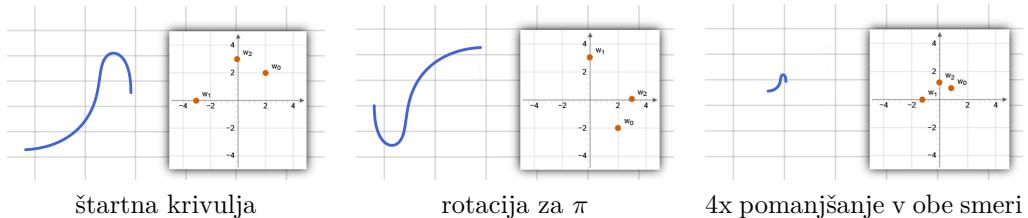
Podobno za kvintično Bézierjevo PH krivuljo dobimo izraze

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_0^2, & \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1, & \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{5}\frac{2\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_0\mathbf{w}_2}{3}, \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2, & \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_2^2. \end{aligned}$$

Da so izrazi ekvivalentni izrazom (5.5) oziroma izrazom (5.7) je enostavno preveriti z nekaj računanja. Reprezentacija s kompleksnimi števili omogoča enostavno rotiranje in skaliranje krivulje. Zapišimo število \mathbf{w}_i v polarnem zapisu, tj. $\mathbf{w}_i = r_i e^{i\varphi_i}$. Potem lahko rotacijo števila \mathbf{w}_i okoli središča koordinatnega sistema za kot θ predstavimo z množenjem števila s kompleksnim številom $\mathbf{z} = e^{i\theta}$, tj. $\mathbf{z}\mathbf{w}_i = r_i e^{i(\varphi_i+\theta)}$. Kontrolne točke pri rotiranih točkah $\tilde{\mathbf{w}}_i = \mathbf{z}\mathbf{w}_i$ potem izledajo takole

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{z}^2\mathbf{w}_0^2, \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{z}^2\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1, \quad \tilde{\mathbf{p}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{z}^2\mathbf{w}_1^2.$$

Če fiksiramo točko $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$, iz izrazov hitro sledi $\tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{z}^2\mathbf{p}_i$. Od tod pa sledi, da rotiranje števil \mathbf{w}_i okoli središča za kot θ rotira krivuljo okoli točke \mathbf{p}_0 za kot 2θ . Podobno dobimo, če za število \mathbf{z} vzamemo skalar. V tem primeru skaliranje števil \mathbf{w}_i za skalar d , skalira krivuljo za d^2 . Primera rotacije in skaliranja krivulje s pripadajočimi števili w_i si lahko ogledamo na sliki 36. Več o kompleksni reprezentaciji Bézierjevih PH krivulj, si bralec lahko prebere v delu [2].



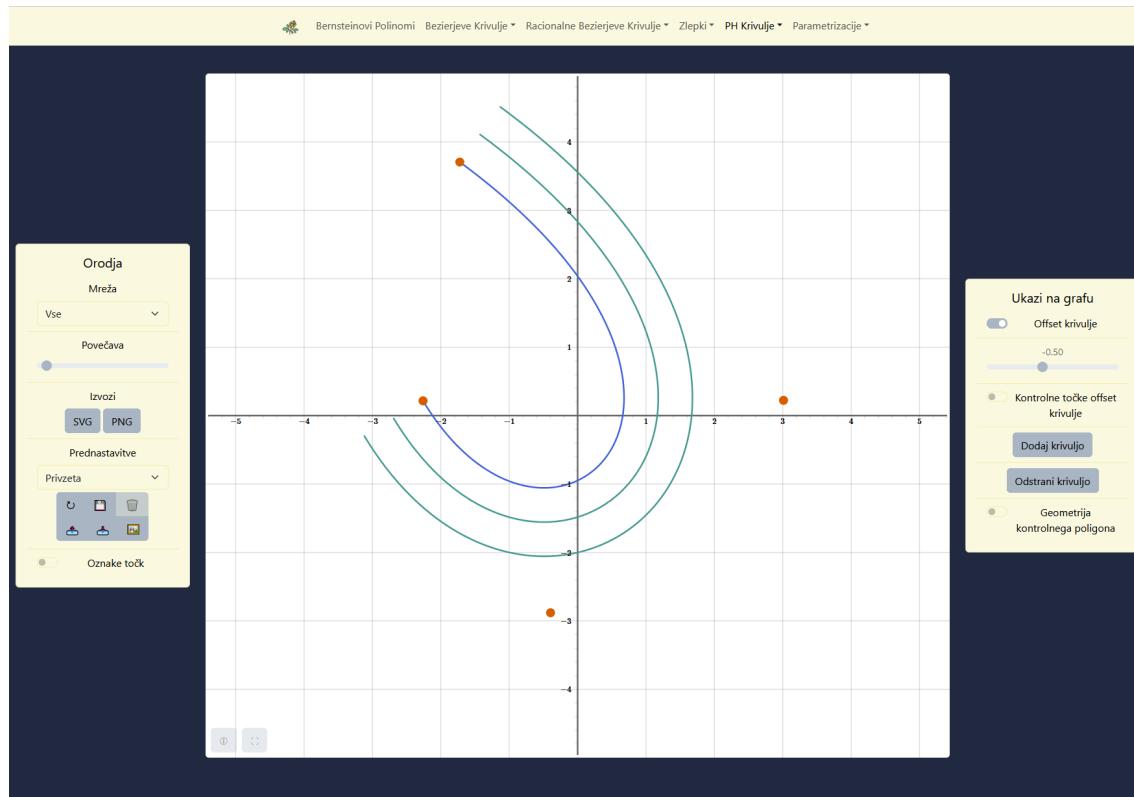
Slika 36: Rotacija in skaliranje krivulje s pripadajočimi števili w_i .

6 Orodje za grafični prikaz lastnosti Bézierjevih in PH krivulj - *Bezeg*

Vsi koncepti predstavljeni v magistrskem delu so implementirani v spletnem orodju Bezeg. Slikovno gradivo skozi magistrsko delo je bilo ustvarjeno s pomočjo Bezga. Orodje v celoti živi v uporabnikovem brskalniku in zato, razen za strežbo statične spletne strani, dodatnih zalednih sistemov ne potrebuje. Objavljeno je preko storitve GitHub Pages [1], ki omogoča zastonjsko objavo statične spletne strani. Spletno orodje pod krovom za izdelavo uporabniških vmesnikov uporablja knjižnico React, za risanje interaktivnih grafov knjižnico JSXGraph, za oblikovanje spletne strani pa uporablja ogrodje bootstrap v paru s knjižnico react-bootstrap.

6.1 Uporabniški vmesnik

Osnovni izgled uporabniškega vmesnika za izbrani graf na spletni strani Bezga si lahko ogledamo na sliki 37. Na vrhu se nahaja navigacijska vrstica s povezavami do različnih grafov. Na sredini se nahaja instanca grafa knjižnice JSXGraph. Levo od grafa se nahaja kartica s splošnimi orodji za vse grafe, desno pa se nahaja kartica z grafu specifičnimi ukazi. V naslednjem podrazdelku bomo predstavili funkcionalnosti kartice z orodji.



Slika 37: Osnovni izgled uporabniškega vmesnika.

6.1.1 Orodja

Kartico z orodji si oglejmo na sliki 38 in predstavimo čemu posamezno orodje služi.



Slika 38: Kartica z orodji.

- Koordinatni sistem

Orodje za koordinatni sistem premore le izbirnik s katerim uporabnik izbere kateri elementi koordinatnega sistema bodo prikazani na grafu.

- Povečava

Orodje za povečavo uporabniku nudi drsnik s katerim lahko poveča velikost elementov na grafu.

- Izvoz slike

Uporabnik lahko s pritiskom na gumb SVG oziroma PNG izvozi sliko v izbranem formatu. Pri izvozu v format SVG, zaradi pomanjkljivosti knjižnice JSXGraph, izgubimo oznaake točk.

- Prednastavitev

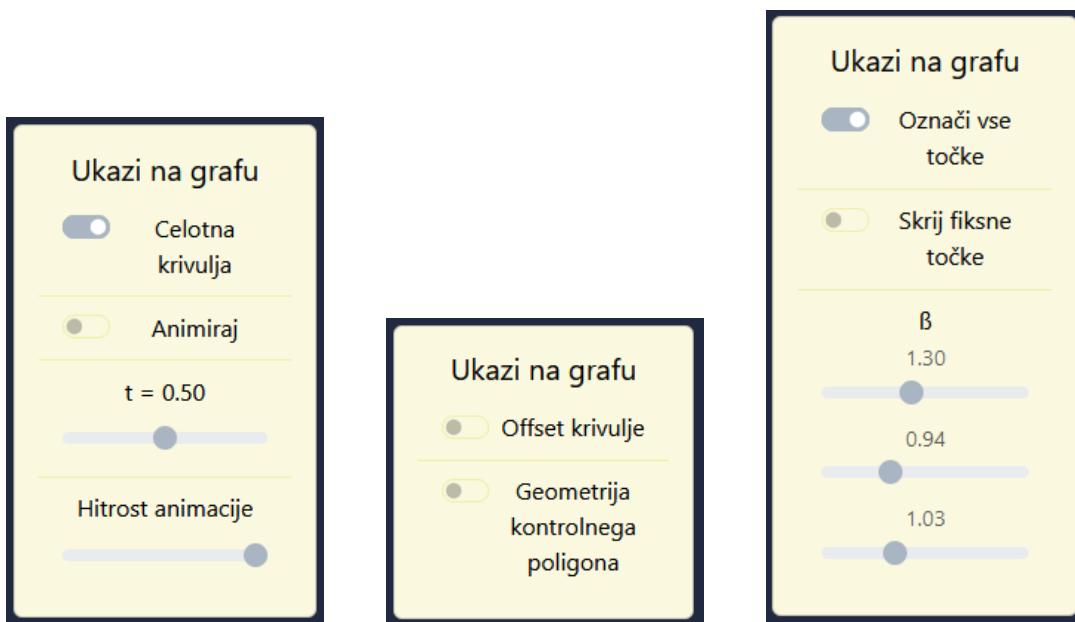
Orodje za prednastavitev uporabniku omogoča shranjevanje in izbiranje prikazov. Posamezno prednastavitev lahko uporabnik izbere z izbirnikom. Ko uporabnik pripravi željeni prikaz, ga lahko s poljubnim imenom shrani kot prednastavitev. Prednastavitev se shranjujejo lokalno v uporabnikovem brskalniku. Če uporabnik želi svoje prednastavitev prenesti na drug računalnik,

lahko to stori tako, da prednastavite izvozi in jih na drugem računalniku uvozi. Prednastavite se izvozijo kot JSON datoteka. Uporabnik ima tudi možnost generirati slike svojih prednastavitev. Ob zagonu generacije slik orodje začne preklapljati med prednastavtvami ter ustvarjati slike. Slike nato v PNG formatu, pod imeni prednastavitev, zapakira v zip datoteko, ki jo uporabnik prenese.

- Oznake točk
Preklopnik za prikazovanje oznak točk na grafih z Bézierjevimi krivuljami.

6.1.2 Ukazi na grafu

Kartica z ukazi na grafu je namenjena ukazom posameznega grafa. Za primere si oglejmo kartice na sliki 39.

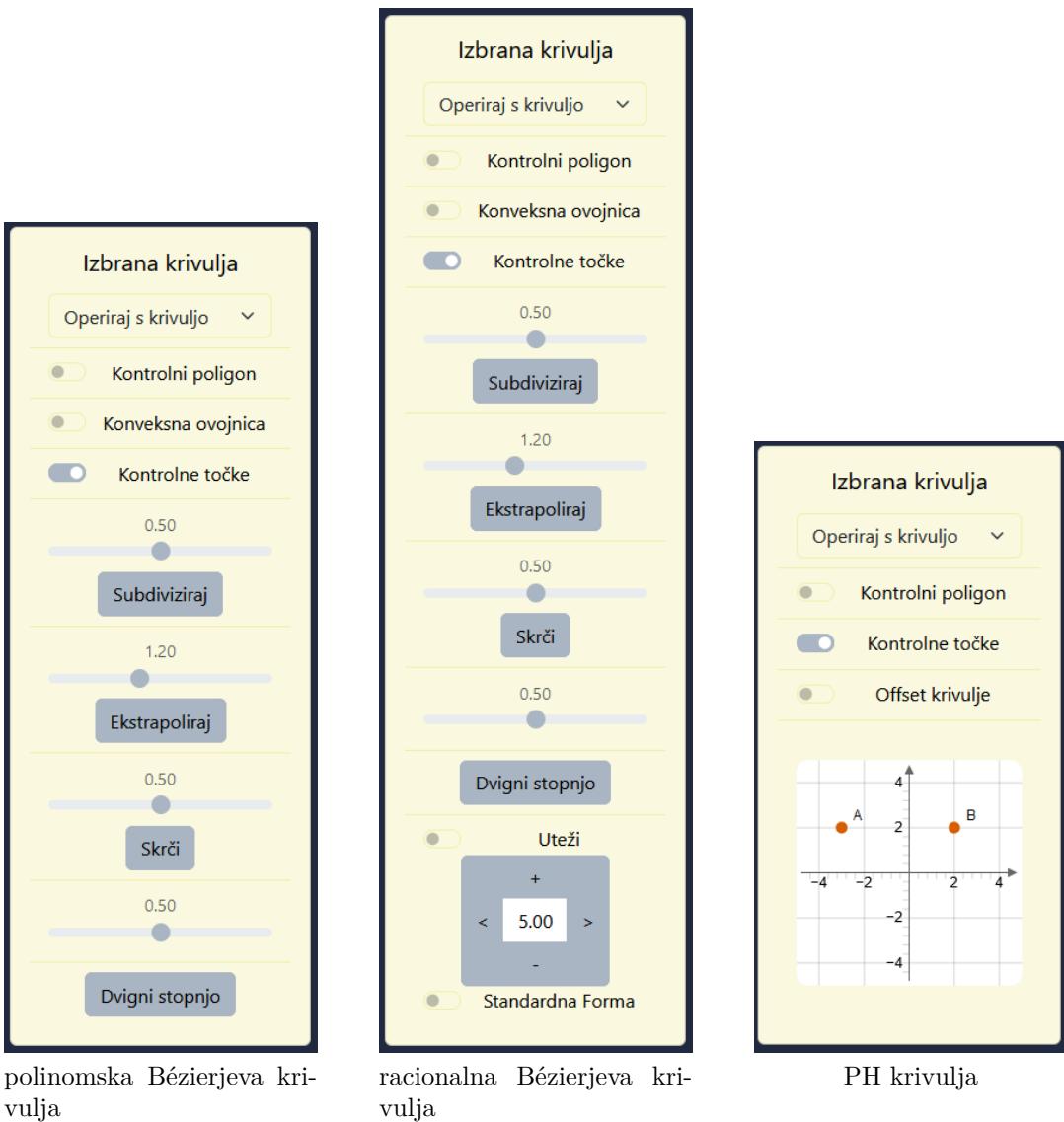


Slika 39: Kartice ukazov na grafu za različne grafe.

6.1.3 Ukazi in transformacije izbrane krivulje

Uporabnik lahko krivuljo izbere tako, da nanjo klikne. Ko je krivulja izbrana, se okoli nje nariše črtkan pravokotnik, kartico z ukazi na grafu pa zamenja kartica z ukazi izbrane krivulje. Primere takšnih kartic si lahko ogledamo na sliki 40. Naštejmo še, kakšne ukaze premorejo različne krivulje.

- Vse krivulje omogočajo preklapljanje prikazovanja kontrolnega poligona, konveksne ovojnice kontrolnih točk, ter kontrolnih točk samih.
- Bézierjeva krivulja premore poleg osnovih ukazov še ukaze za subdivizijo, eks-trapolacijo, skrčitev, višanje stopnje, ter prikazovanje De Casteljaujeve sheme.

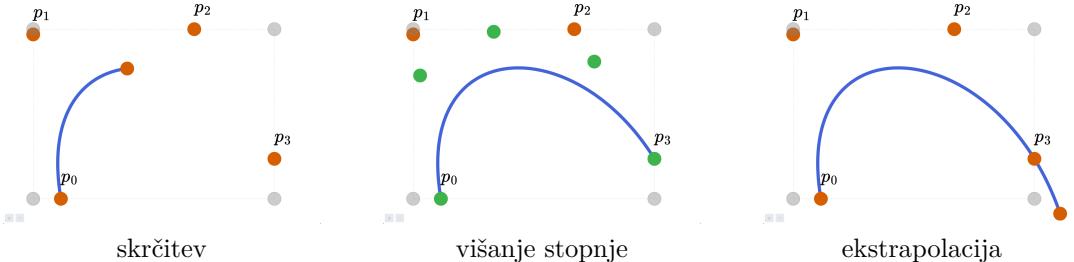


Slika 40: Kartice z ukazi za različne izbrane krivulje.

Ob premiku miške na posamezni ukaz se na grafu predstavi nekakšen predogled ukaza. Primer si lahko ogledam na sliki 41.

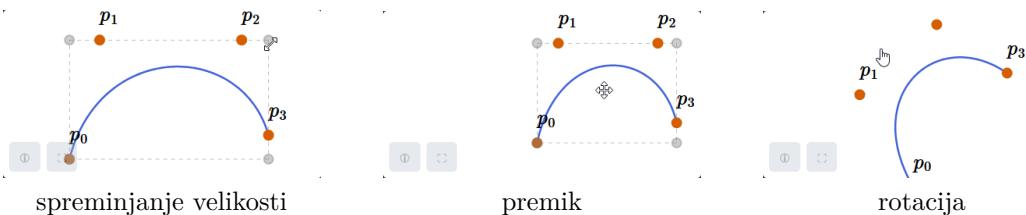
- Racionalna Bézierjeva Krivulja ima poleg funkcionalnosti Bézierjeve krivulje še dodane ukaze za prikaz in spreminjanje uteži, ter preklopnik za prikaz standardne forme uteži.
- PH Bézierjeve krivulje nimajo ukazov, ki so jih imele Bézierjeve krivulje, saj se pri nekaterih ukazih izgubi lastnost PH. Premorejo pa naslednje ukaze: prikazovanje odmik krivulj in spreminjanje velikosti odmika, prikaz kontrolnih točk odmik krivulj ter prikazovanje premic na katerih ležijo, dodajanje in odstranjevanje odmik krivulj, in koordinatni sistem z interaktivnimi točkami, ki predstavljajo hodografe.
- C^n zlepki premorejo le ukaze osnovne krivulje, G^1 zlepki pa imajo poleg teh

še drsnike za spreminjanje števil β_1 .



Slika 41: Predogledi rezultatov različnih ukazov krivulje.

Uporabnik lahko izbrano krivuljo transformira tako, da upravlja s črtkanim pravokotnikom. Klik na oglišče pravokotnika zažene spreminjanje velikosti krivulje, klik ob stranici pravokotnika zažene rotiranje krivulje, klik znotraj pravokotnika pa zažene premikanje krivulje. Primere si lahko ogledamo na sliki 42.



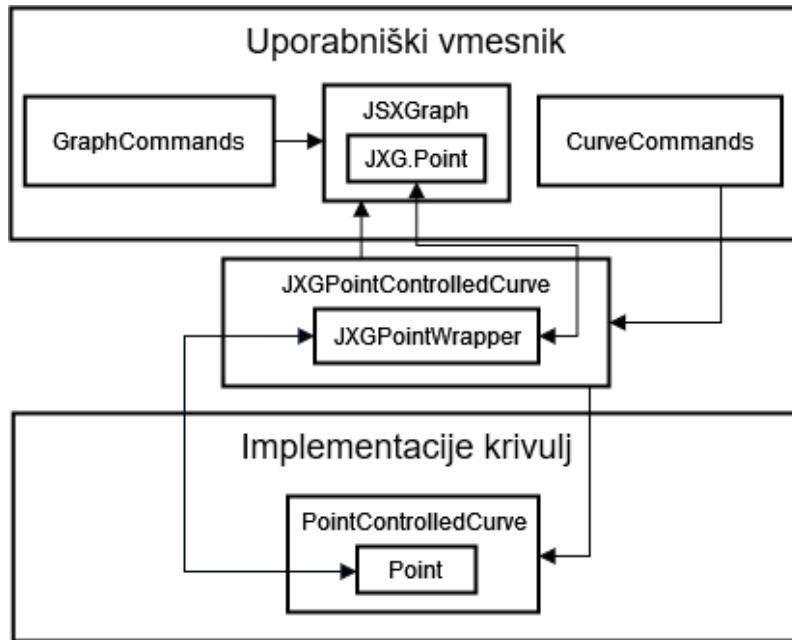
Slika 42: Transformacije izbrane krivulje.

6.2 Implementacija

Implementacija krivulj v Bezgu je napisana v programskem jeziku TypeScript. Za voljo kompaknosti, bodo primeri kode v magistrskem delu pisani v mešanici psevdokode in TypeScripta. Dejansko implementacijo, si lahko bralec ogleda na repozitoriju Bezga [3]. Arhitekturo aplikacije si lahko ogledamo na sliki 43. Uporabniški vmesnik upravlja s krivuljami preko razreda JXGPointControlledCurve. Razred JXGPointControlledCurve točke iz knjižnice JSXGraph ovije v ovoj JXGPointWrapper, ki nudi podporo za rabo točk v implementiranih krivuljah Bezga. Ovoj JXGPointWrapper je dvosmeren - spreminjanje točke v implementaciji krivulj spremeni točko iz knjižnice JSXGraph in obratno. Tako dosežemo to, da uporabnikovo premikanje točk iz knjižnice JSXGraph spreminja obliko krivulje, razne transformacije krivulje pa transformirajo tudi točke iz knjižnice JSXGraph. V naslednjih podrazdelkih bomo podrobnejše predstavili posamezne člene Bezga.

6.2.1 Vmesniki

Vse krivulje predstavljene v delu temeljijo na kontrolnih točkah. Točke v Bezgu predstavljamo z vmesnikom



Slika 43: Arhitektura spletnega orodja Bezug.

```

1 interface Point {
2     X: () => number;
3     Y: () => number;
4     setX: (x: number | ((() => number)) => void;
5     setY: (y: number | ((() => number)) => void;
6 }.

```

Koordinati X in Y sta funkciji in ne fiksni števili, saj s tem omogočimo večjo fleksibilnost točk. Vmesnik za upravljanje s krivuljo, ki na kontrolnih točkah temelji, je naslednji

```

1 interface PointControlledCurve {
2     calculatePointAtT(t: number): Point;
3     setPoints(points: Point[]): void;
4     getPoints(): Point[];
5     getBoundingBox(): number[];
6     affineTransform(A: number[][][], b: number[][], center: number[]):
7         void;
8     removePoint(point: Point): void;
9     addPoint(point: Point): void;
9 }.

```

6.2.2 Implementacije točk

V projektu se nahajata dve implementaciji vmesnika Point. Za osnovno delo s krivuljami je na voljo razred PointImpl, ki predstavlja osnovno implementacijo funkcij iz vmesnika. Za primer pokažimo konstruktor razreda ter implementacijo metode X v tem razredu.

```

1 class PointImpl implements Point {
2     constructor(x: number | ((() => number), y: number | ((() =>
3         number)) {

```

```

3     this.x = x;
4     this.y = y;
5   }
6   ...
7   x(): number {
8     if (typeof this.x == 'number') {
9       return this.x;
10    }
11   return this.x();
12 }
13 ...
14 }

```

Druga implementacija vmesnika Point predstavlja ovoj za točke iz knjižnice JSXGraph, kjer metode le delegiramo na metode originalne točke iz knjižnice. Na primer

```

1 class JXGPointWrapper implements Point {
2   constructor(point: JXG.Point) {
3     this.point = point;
4   }
5   ...
6   x(): number {
7     return this.point.X();
8   }
9   ...
10}.

```

Takšen ovoj nam omogoča, da točke iz knjižnice JSXGraph uporabljammo pri konstrukciji svojih krivulj.

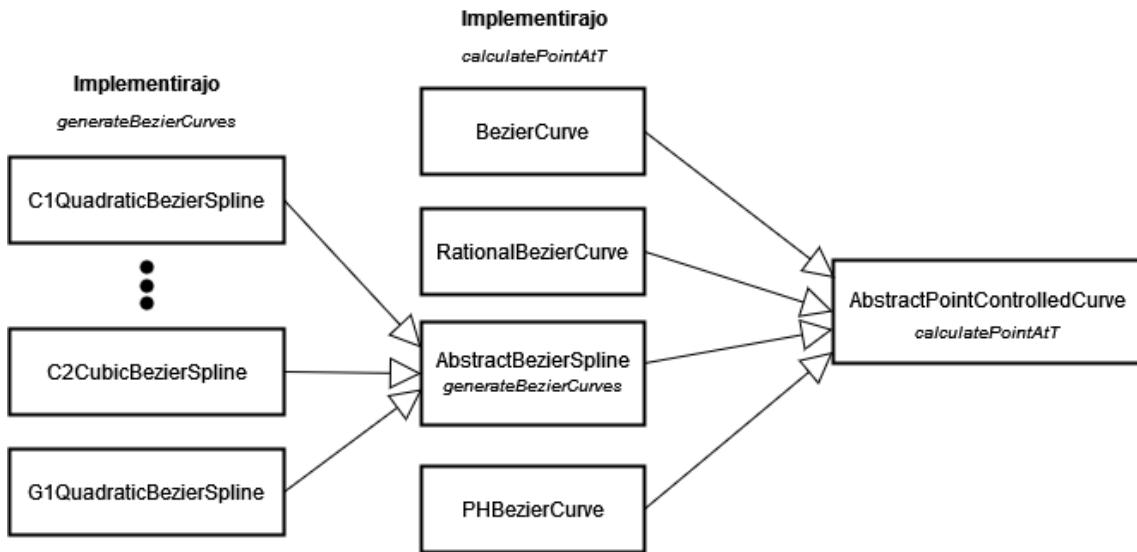
6.2.3 Implementacije krivulj

Osnovne implementacije vmesnika PointControlledCurve so združene v abstraktnem razredu AbstractPointControlledCurve, ki implementira vse metode razen calculatePointAtT. Metodo calculatePointAtT implementacije razreda AbstractPointControlledCurve implementirajo poljubno. Razredno hierarhijo krivulj v Bezgu si lahko ogledamo na sliki 46. Za primer pokažimo kako je implementirana metoda affineTransform v razredu AbstractPointControlledCurve. Vse krivulje razen PH krivulj iz prejšnjih razdelkov so afino invariantne. Da krivuljo transformiramo, moramo zato transformirati le kontrolne točke.

```

1 abstract class AbstractPointControlledCurve implements
2   PointControlledCurve {
3   ...
4   affineTransform(A: number[][][], b: number[], center: number[]):
5     void {
6     this.getPoints().forEach(point => {
7       x = point.X();
8       y = point.Y();
9       x = x - center[0];
10      y = y - center[1];
11      newX = A[0][0] * x + A[0][1] * y;
12      newY = A[1][0] * x + A[1][1] * y;
13      newX = newX + center[0] + b[0];
14      newY = newY + center[1] + b[1];
15      point.setX(newX);
16    });
17  }

```



Slika 44: Razredna hierarhija krivulj.

```

14     point.setY(newY);
15 };
16 ...
17 }

```

Bézierjeva krivulja

Vmesnik za Bézierjevo krivuljo poleg metod vmesnika PointControlledCurve premore še metode za ekstrapolacijo, subdivizijo in višanje stopnje krivulje.

```

1 interface BezierCurve extends PointControlledCurve {
2     elevate(): BezierCurve;
3     extrapolate(t: number): BezierCurve;
4     subdivide(t: number): BezierCurve[];
5 }

```

Metode vračajo nove krivulje in ne spreminjajo prvotne krivulje. Razred PolynomialBezierCurve predstavlja implementacijo polinomske Bézierjeve krivulje. Metode so implementirane po korakih iz pripadajočih razdelkov. Za primer si oglejmo implementaciji metod calculateAtT in elevate

```

1 class PolynomialBezierCurve extends AbstractPointControlledCurve
2     implements BezierCurve {
3     ...
4     calculatePointAtT(t: number): Point {
5         points = copy(this.getPoints());
6         n = points.length - 1;
7         for (r = 1; r <= n; r++) {
8             for (i = 0; i <= n-r; i++) {
9                 points[i] = (1-t)*points[i] + t*points[i+1];
10            }
11        }
12        return points[0];
13    }

```

```

13
14     elevate(): PolynomialBezierCurve {
15         points = this.getPoints();
16         n = points.length;
17         newPoints = [];
18         newPoints.push(points[0]);
19         for (let i=1; i<n; i++) {
20             newPoints.push(newPoint);
21         }
22         newPoints.push(this.points[n-1]);
23         return new PolynomialBezierCurve(newPoints);
24     }
25     ...
26 }

```

Podobno implementiramo tudi razred, ki predstavlja racionalno Bézierjevo krivuljo RationalBezierCurve. Razred ima poleg polja za kontrolne točke, tudi polje za uteži. Za primer pokažimo implementaciji metod calculatePointAtT in extrapolate.

```

1 class RationalBezierCurve extends AbstractPointControlledCurve
2     implements BezierCurve {
3     weights: number[];
4     ...
5     calculatePointAtT(t: number): Point {
6         points = copy(this.getPoints());
7         w = copy(this.weights);
8         n = points.length - 1;
9         for (r = 1; r <= n; r++) {
10             for (i = 0; i <= n-r; i++) {
11                 w = (1 - t) * w1 + t * w2;
12                 points[i] = (1-t)*w[i]/w*points[i] + t*w[i+1]/w*points[i
13                     +1];
14                 w[i] = w;
15             }
16         }
17         return points[0];
18     }
19     extrapolate(t: number): this {
20         weights = this.weights;
21         // Transformiramo koordinate v homogene
22         points = this.getPoints().map(
23             (point, i) => [point.X()*weights[i], point.Y()*weights[i],
24                 weights[i]]
25         );
26         // Naredimo deCasteljaujev algoritmom na homogenih tockah
27         decasteljauScheme = decasteljau(t, points);
28         pointsToProject = decasteljauScheme.map((row, i) => row[0]);
29         // Izbrane tocke projiciramo nazaj
30         newPoints = pointsToProject.map(p => new PointImpl(p[0] / p[2],
31             p[1] / p[2]));
32         newWeights = pointsToProject.map(p => p[2]);
33         return new RationalBezierCurve(newPoints, newWeights);
34     }
35     ...
36 }

```

Zlepki Bézierjevih krivulj

Osnovno implementacijo zlepka Bézierjevih krivulj ponazarjamо z abstraktnim razredom BezierSpline. Razred ima polje, ki vsebuje seznam Bézierjevih krivulj ki ga sestavlja. Bézierjeve krivulje generiramo s klicem abstraktne metode generateBezierCurves, ki jo implementacije zlepka implementirajo poljubno.

```
1 abstract class BezierSpline extends AbstractPointControlledCurve {
2     bezierCurves: PolynomialBezierCurve[];
3     ...
4     constructor(points: Array<Point>) {
5         super(points);
6         this.generateBezierCurves();
7     }
8     calculatePointAtT(t: number): Point {
9         n = this.bezierCurves.length;
10        u = this.getU();
11        for (i = 0; i < n; i++) {
12            if (t < u[i+1]) {
13                t = t - u[i];
14                t = t / (u[i+1] - u[i]);
15                return this.bezierCurves[i].calculatePointAtT(t);
16            }
17        }
18        return this.bezierCurves[this.bezierCurves.length - 1].
19            calculatePointAtT(1);
20    }
21    ...
22 }
```

Enostranski C^r zlepek n -te stopnje je predstavljen z razredom GenericBezierSpline. Razred ima poleg kontrolnih točk tudi polji za stopnjo krivulje in stopnjo zveznosti. Bézierjeve krivulje, ki ga definirajo konstruiramo po algoritmu 3.

```
1 class GenericBezierSpline extends BezierSpline {
2     degree: number;
3     continuity: number;
4     ...
5     constructor(points: Array<Point>, degree: number, continuity:
6                 number) {
7         super(points);
8         this.bezierCurves = [];
9         this.degree = degree;
10        this.continuity = continuity;
11        this.generateBezierCurves();
12    }
13    ...
14    generateBezierCurves() {
15        this.bezierCurves = [];
16        step = this.degree - this.continuity;
17        bezierCurvePoints = this.points.slice(0, this.degree+1);
18        this.bezierCurves.push(new PolynomialBezierCurve(
19            bezierCurvePoints));
20        for (let i = this.degree; i < this.points.length-1; i = i+step) {
21            bezierCurvePoints = [this.points[i]];
22        }
23    }
24 }
```

```

21     l = this.bezierCurves.length;
22     previousBezierCurve = this.bezierCurves[l - 1];
23     for (let j = 1; j <= this.continuity; j++) {
24       nonFreePoint = new PointImpl(() => {
25         u = this.getU();
26         deltaU1 = u[1] - u[1-1];
27         deltaU2 = u[1+1] - u[1];
28         nextT = (deltaU2+deltaU1) / deltaU1;
29         decasteljau = previousBezierCurve.decasteljauScheme(
30           nextT);
31         return decasteljau[this.degree][this.degree - j].X();
32       }, () => {...});
33       bezierCurvePoints.push(nonFreePoint);
34     }
35
36     bezierCurvePoints.push(...this.points.slice(i+1, i+step+1));
37     this.bezierCurves.push(new PolynomialBezierCurve(
38       bezierCurvePoints));
39   }
40   ...
41 }.
```

Podobno so implementirani tudi ostali zlepki iz magistrskega dela, kjer je metoda generateBezierCurves za posamezen zlepek implementirana po pripadajočem algoritmu iz razdelka 4.2. Implementaciji G^1 in G^2 zlepkov imata dodatno polje, ki drži števila β_i .

PH Krivulje

Za delo s PH krivuljami je na voljo razred PhBezierCurve. Razred prejme kontrolno točko p_0 in točke w_i predstavljene v razdelku 5.8. Na podlagi števila vnešenih točk w_i se nato odloči katere izraze iz razdelka 5.8 uporabi pri generaciji točk polinomske Bezierjeve krivulje. Ker Bezierjeve PH krivulje niso afino invariantne, metodo affineTransform povozimo, da v primeru klica vrže napako. Rotacija, skaliranje krivulje v obe smeri in premik krivulje obdržijo PH lastnost, zato so v razredu implementirane metode, ki te funkcionalnosti podpirajo. Za primer si oglejmo konstruktor razreda, povoženo funkcijo affineTransform in funkciji moveFor ter scale.

```

1 export class PhBezierCurve extends AbstractPointControlledCurve {
2   private underlyingBezierCurve: BezierCurve;
3   private underlyingCurveControlPoints: Point[];
4   private w: Point[];
5
6   constructor(point: Point, w: Point[]) {
7     super([point]);
8     this.w = w;
9     degree = 2 * w.length - 1;
10    this.underlyingCurveControlPoints = this.
11      generatePointsForDegree(degree);
12    this.underlyingBezierCurve = new PolynomialBezierCurve(this.
13      underlyingCurveControlPoints);
14  }
15  ...
```

```

14
15     override affineTransform(A: number[][] , b: number[], center:
16         number[]): void {
17         throw "PH Curves don't allow affine transformations.";
18     };
19
20     moveFor(x: number, y: number) {
21         point = this.getPoints()[0];
22         point.setX(point.X() + x);
23         point.setY(point.Y() + y);
24     }
25
26     scale(scale: number) {
27         scale = Math.sqrt(scale);
28         this.w.forEach(point => {
29             point.setX(scale * point.X());
30             point.setY(scale * point.Y());
31         });
32     ...
33 }

```

6.2.4 Povezava implementacij krivulj s knjižnico JSXGraph

V Bezgu interaktivne Bézierjeve krivulje rišemo s pomočjo knjižnice JSXGraph. V razdelku 6.2.1 smo povedali, da imamo na voljo razred, ki ovije točke iz knjižnice JSXGraph in omogoča njihovo rabo v naših krivuljah. Oglejmo si, kako lahko krivulje iz prejšnjega razdelka narišemo, in naredimo interaktivne, s knjižnico JSXGraph.

```

1 // Ustvarimo interaktivne tocke knjiznice jsxgraph
2 jxgPoints = [[-1, 0],[0, 1],[1, 1],[2,0]].map(p=> board.create(
3     'point', [p[0], p[1]], opts));
4 // Tocke ovijemo
5 wrappedPoints = jxgPoints.map(p=> new JXGPointWrapper(p));
6 // Ustvarimo Bezgovo Bézierjevo krivuljo
7 curve = new PolynomialBezierCurve(wrappedPoints);
8 // Ustvarimo se jsxgraph krivuljo
9 board.create('curve',
10     [(t: number) => curve.calculatePointAtT(t).X(),
11      (t: number) => curve.calculatePointAtT(t).Y(),
12      0,1]
12 );

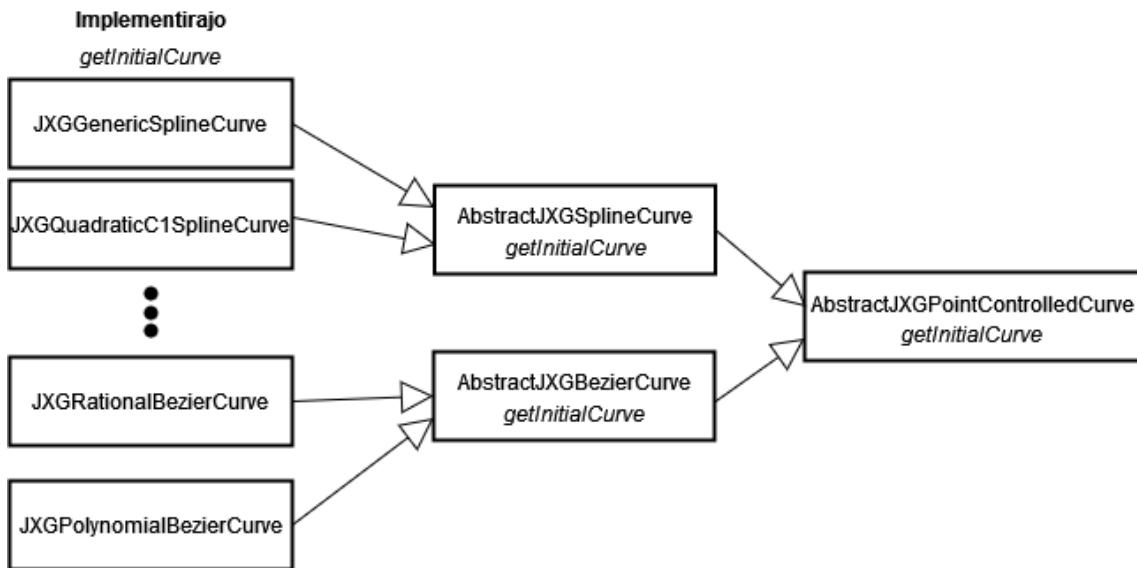
```

Na grafu se izriše Bézierjeva krivulja z izbranimi kontrolnimi točkami. Premik kontrolnih točk na grafu spreminja obliko krivulje. Za zgornje, in ostalo delo potrebno za izris grafa, v Bezgu poskrbijo implementacije razreda AbstractJXGPointControlledCurve, ki ima abstraktno metodo getInitialCurve. Metodo getInitialCurve implementacije razreda implementirajo, da izrišejo svojo krivuljo. Razredno hierarhijo si lahko ogledamo na sliki 45. Poleg risanja krivulje na graf, razred ponuja tudi druge metode za delo s krivuljo. V naslednjem primeru naštejmo nekaj funkcionalnosti.

```

1 // Prikaze kontrolni poligon krivulje
2 jxgBezierCurve.showControlPolygon();
3 // Doda novo (interaktivno) kontrolno tocko
4 jxgBezierCurve.addPoint(2,-1);

```



Slika 45: Razredna hierarhija JXG krivulj.

```

5 // Prikaze konveksno ovojnico kontrolnega poligona
6 jxgBezierCurve.showConvexHull();
7 // Premakne krivuljo
8 jxgBezierCurve.moveFor(2,3);

```

Poleg takšnih metod ima razred JXGPointControlledCurve tudi metode za preverjanje potez uporabnikove miške processMouseDown, processMouseMove, processMouseUp, ki skrbijo za to, da lahko uporabnik z rabo miške upravlja z izbrano krivuljo.

6.2.5 Grafi

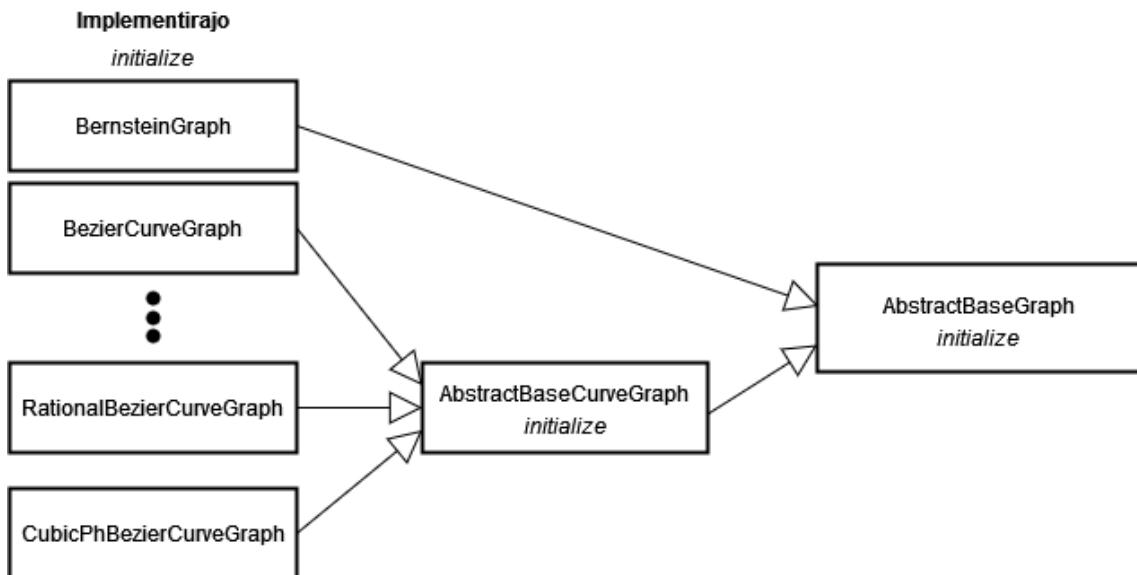
Za inicializacijo grafa knjižnice JSXGraph in funkcionalnosti naštete v razdelku 6.1 skrbi abstrakten razred AbstractBaseGraph, ki ima abstraktno metodo initialize. Posamezna implementacija razreda AbstractBaseGraph implementira metodo initialize, da na grafu nariše željeno. Za funkcionalnost izbire krivulje poskrbi abstrakten razred AbstractBaseCurveGraph, ki metode initialize ne implementira. Metodo implementirajo posamezni razredi, da narišejo potrebne krivulje. Razredno arhitekturo grafov si lahko ogledamo na sliki 46. Kot primer implementacije metode initialize si oglejmo kako graf racionalne Bezierjeve krivulje nariše svojo krivuljo

```

1     class RationalCurveGraph extends AbstractBaseCurveGraph {
2     ...
3         initialize(): void {
4             this.curve = new JXGRationalBezierCurve
5                 ([[1,2],[2,2],[3,2]],[1,1,1],this.board);
6         }
7     }.

```

Posamezni grafi lahko ukaze na kartico z ukazi na grafu dodajo tako, da povozijo metodo getGraphCommands. Za primer si oglejmo, kako graf za višanje stopnje krivulje ustvari gumb, ki ob kliku zviša stopnjo krivulje



Slika 46: Razredna hierarhija grafov.

```

1 class ElevationGraph extends AbstractBaseCurveGraph {
2     ...
3     override getGraphCommands(): JSX.Element[] {
4         return [<Button onClick={() => this.elevate()}>Dvigni
5             stopnjo</Button>];
6     }
7 }
  
```

Ukaze za kartico izbrane krivulje pa poda izbrana krivulja sama. Vse implementacije razreda JXGPointControlledCurve imajo namreč metodo getCurveCommands, ki vrača ukaze za kartico. Na primer razred JXGPHBezierCurve na naslednji način poda ukaze za upravljanje z odmik krivuljami

```

1 class JXGPHBezierCurve extends JXGPointControlledCurve {
2     ...
3     getCurveCommands(): JSX.Element[] {
4         return [<OffsetCurveSettings></OffsetCurveSettings>];
5     }
6     ...
7 }
  
```

Literatura

- [1] *About GitHub Pages*, <https://docs.github.com/en/pages/getting-started-with-github-pages/about-github-pages>, Dostopno 9.9.2024.
- [2] R. Farouki, *Pythagorean-hodograph curves: algebra and geometry inseparable*, 1st, Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
- [3] *GitHub repozitorij Bezga*, <https://github.com/efodx/bezeg>, Dostopno 12.9.2024.