UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Računalništvo in matematika – 2. stopnja

Kevin Štampar

ORODJE ZA UVOD V BEZIERJEVE KRIVULJE

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2024

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju za zelo sproščen odnos!

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Podpis mentorja:

Orodje za uvod v Bezierjeve krivulje

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

Tool for introduction into Bezier curves

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99
Ključne besede: integracija, kompleks
Keywords: integration, complex

1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

2 Bezierjeve krivulje

V tem razdelku bomo predstavili osnove Bezierjevih krivulj. Začeli bomo z Bernsteinovimi polinomi, ki jih bomo uporabili pri definiciji Bezierjevih krivulj. Predstavili bomo Decasteljaujev algoritem, ki je ključen za stabilen način računanja točk Bezierjevih krivulj. Nadaljevali pa bomo z nekaj metodami na Bezierjevih krivuljah, ki so ključne za njihovo rabo v računalniško podprtem grafičnem oblikovanju.

2.1 Bernsteinovi polinomi

Bernsteinove polinome je najprej uporabil Sergei Bernstein pri dokazu Weierstrassovega izreka. Kasneje jih je Pierre Bezier uporabil pri definiciji Bezierjeve krivulje. V tem razdelku bomo predstavili nekaj njihovih osnovnih lastnosti, ki so ključne za delovanje Bezierjevih krivulj. i-ti *Bernsteinov bazni polinom* stopnje n definiramo kot $b_{i,n}(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$. Linearni kombinaciji takšnih polinomov t.j. $B_n(t) := \sum_{i=0}^{n} \beta_i b_{i,n}(t)$, pravimo *Bernsteinov polinom* stopnje n. V izreku2.1 naštejemo nekaj lastnosti Bernsteinovih polinomov.

Izrek 2.1. *Lastnosti Bernsteinovih polinomov*

1. $b_{i,n}(t) = 0$ *za* $i < 0$ *ali* $i > n$, *interpolacija končnih točk*
2. $b_{i,n}(t) \geq 0$ *za* $t \in [0, 1]$, *pozitivnost*
3. $b_{i,n}(0) = \delta_{i,0}$ *in* $b_{i,n}(1) = \delta_{i,n}$, *kjer je* $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & 1 \neq j \end{cases}$
4. $b_{i,n}(1-t) = b_{n-i,n}(t)$, *simetrija*
5. $\sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) = 1$, *razčlenitev enote*
6. $b_{n,i}(t) = (1-t) b_{n-1,i}(t) + t b_{n-1,i-1}(t)$
7. $b'_{i,n}(t) = n(b_{i-1,n-1}(t) - b_{i,n-1}(t))$ *in* $B'_n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\beta_{i+1} - \beta_i) b_{i,n-1}(t)$

Dokaz. Točki (1) in (2) očitno izhajata iz lastnosti binomskega simbola. Dokažimo ostale.
(3) Namesto spremenljivke t v enačbo za bernsteinov bazni polinom $b_{i,n}(t)$ vstavimo izraz $1 - t$ in uporabimo lastnost binomskega simbola $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, dobimo

$$b_{i,n}(1-t) = \binom{n}{i} (1-t)^i (1-(1-t))^{n-i} = \binom{n}{n-i} (1-t)^i t^{n-i} = b_{n-i,i}(t).$$

(4) Za $1 = 1^n = (1-t+t)^n = ((1-t)+t)^n$ uporabimo binomski izrek, dobimo

$$((1-t)+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t).$$

(5) Uporabili bomo lastnost binomskega simbola $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$.

$$\begin{aligned}
&(1-t)b_{n-1,i}(t) + tb_{n-1,i-1}(t) = \\
&= (1-t)\binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} + t\binom{n-1}{i-1} t^{i-1}(1-t)^{n-i} && = \\
&= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} && = \\
&= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} && = \\
&= b_{n,i}(t)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

(6) Dodaj dokaz! Lahko tudi vecdimenzionalno ane □

2.2 Večdimenzionalne oznake

Z željo po krajših, bolj preglednih zapisih, bomo uvedli večdimenzionalne oznake. Večdimenzionalnost bomo ponazarjali z odebelitvijo črke. Tako bomo večdimenzionalne točke označili z $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, večdimenzionalne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ pa z $\mathbf{f}(x) = (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

2.3 Bezierjeve krivulje

Če v Bernsteinov polinom stopnje n namesto realnega števila β_i vstavimo točke $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2$, dobimo t.i. *Bezierjevo krivuljo* stopnje n t.j. $\mathbf{B}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i b_{i,n}(t)$.

Izrek 2.2. *Lastnosti Bezierjevih krivulj*

1. $\boldsymbol{B}_n(0) = \boldsymbol{p}_0$ *in* $\boldsymbol{B}_n(1) = \boldsymbol{p}_n$
2. $\phi(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i b_{i,n}(t)) = \sum_{i=0}^{n} \phi(\boldsymbol{p}_i) b_{i,n}(t)$, *afina invarianca*

Dokaz.
(1) $\mathbf{B}_n(0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i b_{n,i}(0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i \delta_{0,i} = \mathbf{p}_0$. Enako lahko naredimo tudi za $\mathbf{B}_n(1)$.
(2) Naj bo ϕ afina preslikava, velja torej $\phi(x) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i b_{n,i}(t)\right) &= A\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i b_{n,i}(t)\right) + \mathbf{b} && = \sum_{i=0}^{n} A\mathbf{p}_i b_{n,i}(t) + \mathbf{b} \\
&= \sum_{i=0}^{n} A\mathbf{p}_i b_{n,i}(t) + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b} b_{n,i}(t) && = \sum_{i=0}^{n} (A\mathbf{p}_i + \mathbf{b}) b_{n,i}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \phi(\mathbf{p}_i) b_{i,n}(t) && = \textit{somethin}
\end{aligned}$$

□

2.4 Decasteljau

S pomočjo Decasteljaujevega algoritma lahko računamo točke Bezierjevih krivulj. Naj bo $\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n]}$ Bezierjeva krivulja n-te stopnje s kontronlimi točkami $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$. Potem lahko njene točke rekurzivno računamo s pomočjo naslednjega izraza

$$\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n]} = (1-t)\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{n-1}]} + t\mathbf{B}(t)_{[\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n]}$$

Algoritem 1 Decasteljau

$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$
for $i = 0, 1, \ldots n$ **do**
  $\mathbf{p}_i^0(t) = \mathbf{p}_i$
end for
for $r = 1, 2, \ldots n$ **do**
  for $i = 0, 1, \ldots, n-r$ **do**
    $\mathbf{p}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{p}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t)$
  end for
end for
return $\mathbf{p}_0^n$

2.5 Metode Bezierjevih krivulj

2.5.1 Subdivizija

Motivacija: Zelimo obdrzati le en kos krivulje/zelimo fiksirat le en del krivulje.

2.5.2 Ekstrapolacija

Motivacija: Zelimo podaljsati krivuljo

2.5.3 Dvig stopnje

Motivacija: Zelimo primerjati dve krivulji, pa sta razlicne stopnje.

2.6 Racionalne Bezierjeve krivulje

$(w(t), x(t), y(t) => \left(1, \frac{x(t)}{w(t)}, \frac{y(t)}{w(t)})\right)$

2.6.1 Metode racionalnih Bezierjevih krivulj

Metode Bezierjevih krivulj se zlahka razširijo na racionalne Bezierjeve krivulje tako, da racionalno Bezierjevo krivuljo ($\in \mathbb{R}^2$) preslikamo v Bezierjevo krivuljo reda $\in \mathbb{R}^2$, na njej izvedemo metodo, nato pa jo preslikamo nazaj v racionalno Bezierjevo krivuljo. Slednje ni najbolj stabilno, zato v praksi uporabimo nekoliko bolj stabilne načine računanja. Načine bomo le podali, ne bomo jih pa tudi dokazovali.

2.6.2 Decasteljau

2.6.3 Subdivizija

2.6.4 Ekstrapolacija

2.6.5 Dvig stopnje

3 Zlepki (Bezierjevih krivulj)

Motivacija: za vsak n imamo n**2 racunanja pri bezierjevih krivulah. Radi bi manj racunanja pa se vseeno obdrzali cimvecjo natancnost. Pridejo na pomoc zlepki-lokalno bomo ohranili natancnost a racunat ne bomo rabli dosti!! V tem razdelku, se bomo posvečali zlepkom Bezierjevih krivulj.

Definicija 3.1. Zlepek $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ stopnje n nad zaporedjem stičnih točk

$$a = u_0 < u\_1 < \cdots < u_{m-1} < u_m = b$$

je odsekoma polinomska funkcija, za katero velja $s|_{[u_{l-1}, u_l]} \in \mathbb{P}_n$.

3.1 C0

3.2 C1

3.3 C2

3.4 G1

3.5 Alfa parametrizacije

4 PH Krivulje

4.1 Racionalna dolžina krivulje

4.2 Racionalni odmik krivulje

4.3 Enakomerna parametrizacija

5 Orodje za uvod v Bezierjeve krivulje - Bezeg

Vsi koncepti predstavljeni v magistrskem delu so tudi implementirani na spletni strani. Za graf sem uporabil jsxgraph. Za oblikovanje bootstrap. Za ogrodje pa React.

5.1 Implementacija konceptov magistrskega dela

6 Integrali po ω-kompleksih

6.1 Definicija

Definicija 6.1. Neskončno zaporedje kompleksnih števil, označeno z $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, se imenuje *$\omega$-kompleks.*[1]

Črni blok zgoraj je tam namenoma. Označuje, da LaTeX ni znal vrstice prelomiti pravilno in vas na to opozarja. Preoblikujte stavek ali mu pomagajte deliti problematično besedo z ukazom `\hyphenation{an-ti-ko-mu-ta-ti-ven}` v preambuli.

Trditev 6.2 (Znano ime ali avtor)**.** *Obstaja vsaj en ω-kompleks.*

Dokaz. Naštejmo nekaj primerov:

$$\begin{aligned} \omega &= (0, 0, 0, \ldots), \qquad (6.1) \\ \omega &= (1, i, -1, -i, 1, \ldots), \\ \omega &= (0, 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$ □

7 Tehnični napotki za pisanje

7.1 Sklicevanje in citiranje

Za sklice uporabljamo `\ref`, za sklice na enačbe `\eqref`, za citate `\cite`. Pri sklicevanju in citiranju sklicano številko povežemo s prejšnjo besedo z nedeljivim presledkom ~, kot npr. `iz trditve~\ref{trd:obstoj-omega} vidimo`.

Primer 7.1. Zaporedje (6.1) iz dokaza trditve 6.2 na strani 5 lahko najdemo tudi v Spletni enciklopediji zaporedij [**oeis**]. Citiramo lahko tudi bolj natančno [**lebedev2009introduction**

◊

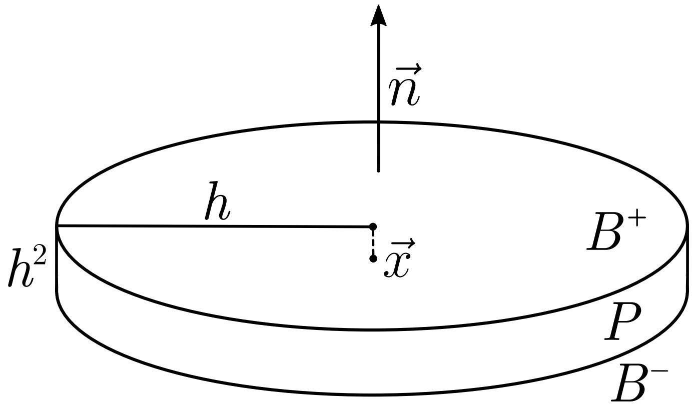
7.2 Okrajšave

Pri uporabi okrajšav LaTeX za piko vstavi predolg presledek, kot npr. tukaj. Zato se za vsako piko, ki ni konec stavka doda presledek običajne širine z ukazom `\␣`, kot npr. tukaj. Primerjaj z okrajšavo zgoraj za razliko.

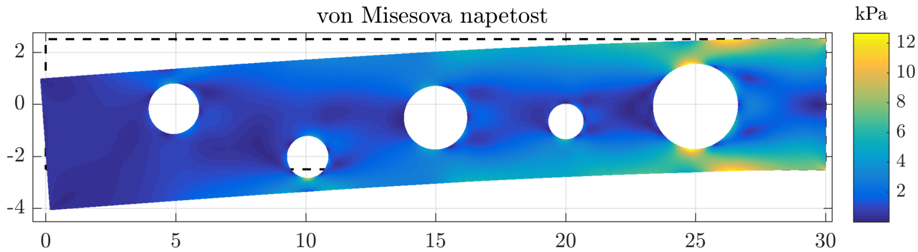
7.3 Vstavljanje slik

Sliko vstavimo v plavajočem okolju `figure`. Plavajoča okolja *plavajo* po tekstu, in jih lahko postavimo na vrh strani z opcijskim parametrom '`t`', na lokacijo, kjer je v kodi s '`h`', in če to ne deluje, potem pa lahko rečete LaTeXu, da ga *res* želite tukaj, kjer ste napisali, s '`h!`'. Lepo je da so vstavljene slike vektorske (recimo `.pdf` ali `.eps` ali `.svg`) ali pa `.png` visoke resolucije (več kot 300 dpi). Pod vsako sliko je napis in na vsako sliko se skličemo v besedilu. Primer vektorske slike je na sliki 1. Vektorsko sliko prepoznate tako, da močno zoomate v sliko, in še vedno ostane gladka. Več informacij je na voljo na `https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Floats,_Figures_and_Captions`. Če so slike bitne, kot na primer slika 2, poskrbite, da so v dovolj visoki resoluciji.

[1]To ime je izmišljeno.



Slika 1: Primer vektorske slike z oznakami v enaki pisavi, kot jo uporablja LaTeX. Narejena je s programom Inkscape, LaTeX oznake so importane v Inkscape iz pomožnega PDF.



Slika 2: Primer bitne slike, izvožene iz Matlaba. Poskrbite, da so slike v dovolj visoki resoluciji in da ne vsebujejo prosojnih elementov (to zahteva PDF/A-1b format).

7.4 Kako narediti stvarno kazalo

Dodate ukaze `\index{polje}` na besede, kjer je pojavijo, kot tukaj . Več o stvarnih kazalih je na voljo na `https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Indexing`.

7.5 Navajanje literature

Članke citiramo z uporabo `\cite{label}`, `\cite[text]{label}` ali pa več naenkrat s `\cite\{label1, label2}`. Tudi tukaj predhodno besedo in citat povežemo z nedeljivim presledkom ~. Na primer [**chen2006meshless**, **liu2001point**], ali pa [**kibriya2007empirical**],[**kibriya2007empirical**], ali pa [**trobec2015parallel**], [**pereira2016con** Vnosi iz `.bib` datoteke, ki niso citirani, se ne prikažejo v seznamu literature, zato jih tukaj citiram. [**vene2000categorical**], [**gregoric2017stopniceni**], [**slak2015induktivni**], [**nsphere**], [**kearsley1975linearly**], [**STtemplate**], [**NunbergerTand**], [**vanoosten2008realizab**

Stvarno kazalo