Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Αμαραντίδου Ευθυμία
7ο Εξάμηνο
Α.Ε.Μ.: 9762

Τεχνικές Βελτιστοποίησης
1η Εργαστηριακή Άσκηση

18 Νοεμβρίου 2021

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρακάτω αναφορά θα παρουσιαστούν μέθοδοι εύρεσης του ελαχίστου μιας δοσμένης συνάρτησης f(x) όταν x ∈ [a,b]. Όλες οι μέθοδοι που αναφέρονται, έχουν υλοποιηθεί και εφαρμοστεί στο περιβάλλον του `Matlab`.

1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Με τη χρησιμοποίηση ακολουθιακών αλγορίθμων, και ξεκινώντας από το διάστημα $[-4, 4]$, θα προσδιοριστεί το ελάχιστο δοσμένων συναρτήσεων, καταλήγωντας σε ένα διάστημα $[a_k, b_k]$ με **προδιαγεγραμμένη ακρίβεια** l. Οι συναρτήσεις που θα μελετηθούν είναι οι εξής:

$$f_1(x) = (x-3)^2 + sin^2(x+3) \tag{1.1}$$

$$f_2(x) = (x-1)cos((1/2)x) + x^2 \tag{1.2}$$

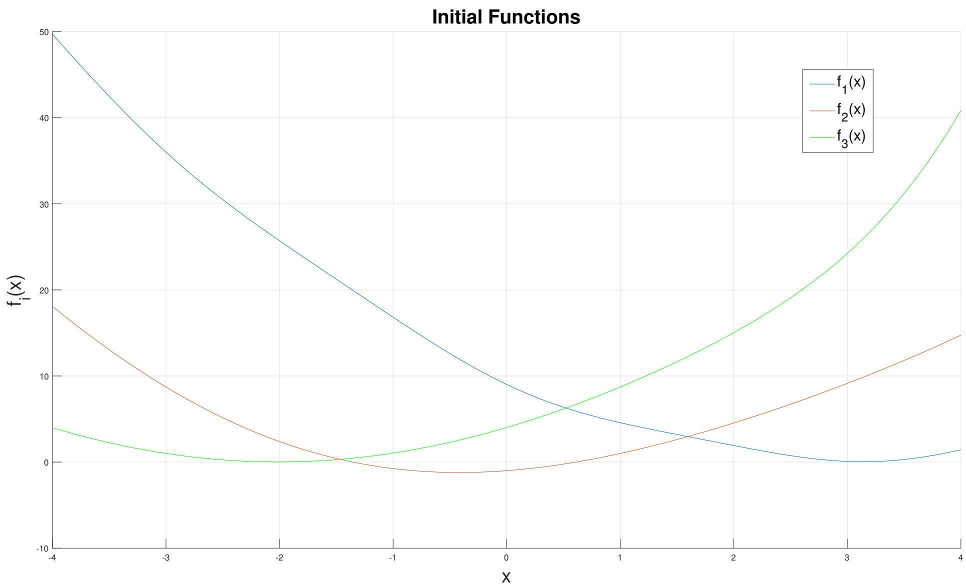
$$f_3(x) = (x+2)^2 + e^{x-2}sin(x+3) \tag{1.3}$$

1.2 Μέθοδοι επίλυσης

Για την επίλυση του προβλήματος, με τις μεθόδους που ακολουθούν, έχει θεωρηθεί δεδομένο πως οι συναρτήσεις (1.1), (1.2), (1.3) είναι:

- **Σχεδόν κυρτές** στο διάστημα $[-4, 4]$
- Παραγωγίσιμες **τουλάχιστον** μία φορά στο διάστημα $[-4, 4]$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να εξαχθούν και από την γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων:



Σχήμα 1.1: Functions to be minimized

1.2.1 Μέθοδος της Διχοτόμου

Η μέθοδος της Διχοτόμου έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια του `Matlab` στη συνάρτηση `bisection_method`. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως ορίσματα τη **συνάρτηση** f που πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί, το **τελικό εύρος αναζήτησης** l, τη **σταθερά** ε και τα **όρια** a, b του αρχικού διαστήματος, και επιστρέφει την **εκτίμηση του ελαχίστου**, τον **αριθμό των επαναλήψεων** του αλγορίθμου, καθώς και 2 διανύσματα με τα **όρια** a_k, b_k των διαστημάτων που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη.

Η μέθοδος αυτή έχει εφαρμοστεί για 2 διαφορετικές περιπτώσεις:

(I) Σταθερό τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$ και πολλαπλές τιμές της σταθεράς ε

(II) Σταθερά $\varepsilon = 0.001$ και πολλαπλές τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l

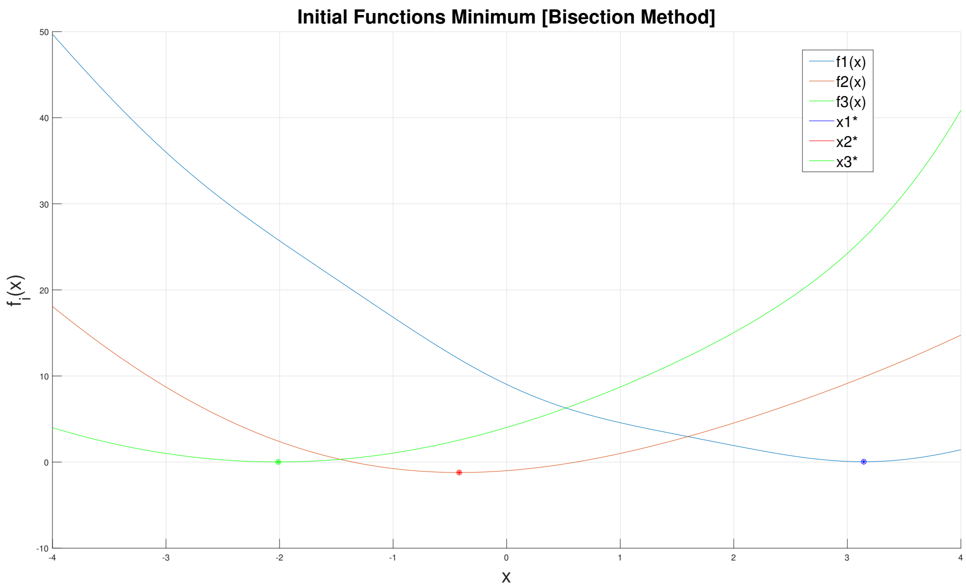
Οι τιμές των παραμέτρων που έχουν χρησιμοποιηθεί αναφέρονται αναλυτικά στον πίνακα 1.1.

Περίπτωση (I)		**Περίπτωση (II)**	
l	**ε**	**l**	**ε**
0.01	0.004	0.1	0.001
	0.0005	0.05	
	0.0001	0.01	
	0.00005	-	
	0.00001	-	

Πίνακας 1.1: Τιμές παραμέτρων

Περίπτωση (I)

Στο γράφημα 1.2 αποτυπώνονται τα **ελάχιστα** των συναρτήσεων που έχουν υπολογιστεί με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Η τελική τιμή των ελαχίστων έχει προκύψει από το



Σχήμα 1.2: Εκτίμηση ελαχίστων

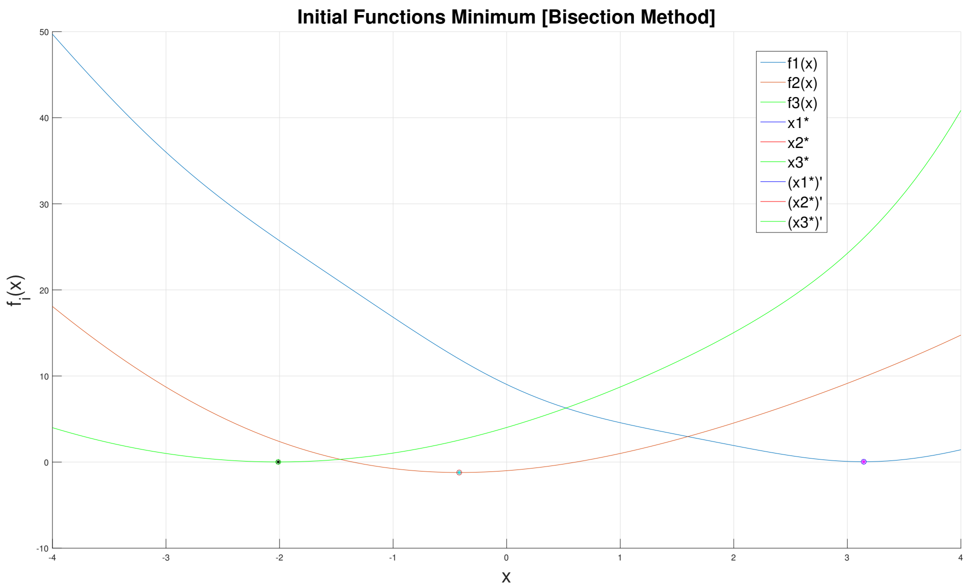
μέσο όρο του τελικού διαστήματος, στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος μετά από k επαναλήψεις, και το οποίο είναι **τέτοιο ώστε να ισχύει ο περιορισμός**: $b_k - a_k <= l$. Η τιμή του ελαχίστου, που έχει υπολογιστεί για κάθε διαφορετική τιμή της σταθεράς ϵ, έχει συμβολιστεί πάνω στο γράφημα με *διαφορετικό σύμβολο* κάθε φορά. Καθώς όμως οι τιμές αυτές είναι πάρα πολύ κοντά, είναι σχετικά δύσκολο να διακριθούν.

Στον πίνακα 1.2 μπορούμε να παρατηρήσουμε αναλυτικά τις τιμές των ελαχίστων, **με ακρίβεια 4 δεκαδικών** ψηφίων. Παρατηρούμε, πως καθώς το ϵ μειώνεται, φαίνεται να προσεγγίζουμε όλο και με μεγαλύτερη ακρίβεια το ελάχιστο της εκάστοτε συνάρτησης. Από τη στιγμή όμως, που το ϵ γίνεται *αρκετά μικρό*, η μεταβολή αυτή είναι αισθητή μόνο με ακρίβεια περισσότερων δεκαδικών ψηφίων.

ε	**k**	**Minimum**		
		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0.004	12	3.1440	-0.4166	-2.0126
0.0005	10	3.1441	-0.4179	-2.0115
0.0001	10	3.1445	-0.4180	-2.0117
0.00005	10	3.1445	-0.4180	-2.0117
0.00001	10	3.1445	-0.4180	-2.0117

Πίνακας 1.2: Ελάχιστα συναρτήσεων και επαναλήψεις με τη μέθοδο Διχοτόμησης

Παρατηρήθηκε, επιπλέον, ότι για μικρές τιμές του ϵ, ο αλγόριθμος πραγματοποίησε σταθερά $k = 10$ επαναλήψεις, ώσπου να τερματίσει και να φτάσει στο επιθυμητό διάστημα. Ωστόσο, για $\epsilon = 0.004$, που αποτελεί μια οριακή τιμή της σταθεράς, αν λάβουμε υπόψιν τον περιορισμό $l > 2\epsilon$, ο αριθμός k των επαναλήψεων αυξήθηκε στις 12.



Σχήμα 1.3: Εκτίμηση ελαχίστων

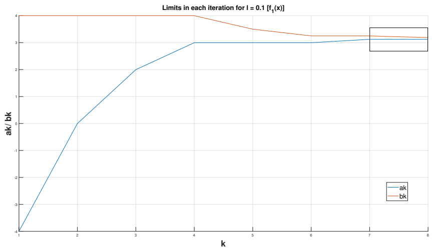
Περίπτωση (II)

Στο γράφημα 1.3 αποτυπώνονται *-ταυτόχρονα με τις τιμές που προέκυψαν από την Περίπτωση Ι-* οι τιμές ελαχίστων που υπολογίστηκαν από τον αλγόριθμο διχοτόμησης, για $\epsilon = 0.01$ και πολλαπλές τιμές του εύρους αναζήτησης l. Κι αυτή τη φορά, η διαφορά στα μεγέθη **δεν είναι διακριτή** από το γράφημα, αλλά φαίνεται αναλυτικότερα στον πίνακα 1.3.

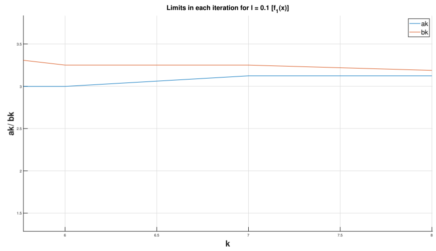
l	**k**	**Minimum**		
		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0.1	7	3.1555	-0.4061	-2.0307
0.05	8	3.1398	-0.4218	-2.0151
0.01	10	3.1437	-0.4179	-2.0112

Πίνακας 1.3: Ελάχιστα συναρτήσεων και επαναλήψεις με τη μέθοδο Διχοτόμησης

Να σημειωθεί ακόμη, πως όπως ήταν αναμενόμενο, **όσο το τελικό εύρος αναζήτησης l μειώνεται**, τόσες **περισσότερες επαναλήψεις** k χρειάζεται να κάνει ο αλγόριθμος ώσπου να προσεγγίσει το διάστημα αυτό και να τερματίσει. Στα γραφήματα που ακολουθούν, απεικονίζεται και η μεταβολή των άκρων του διαστήματος a_k, b_k συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων k.

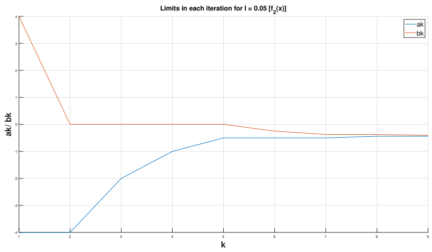


(α′) a_k, b_k

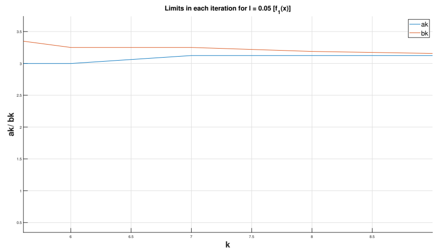


(β′) $a_k, b_k[zoomed]$

Σχήμα 1.4: $f_1(x), l = 0.1$

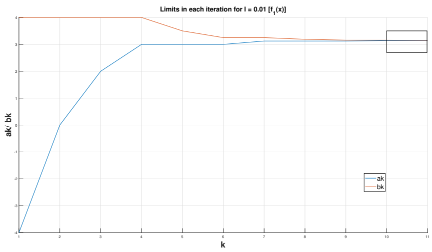


(α′) a_k, b_k

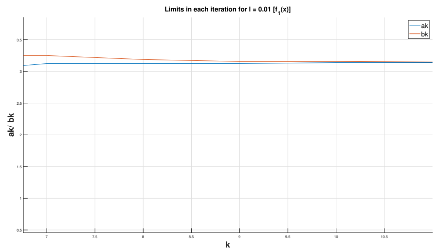


(β′) $a_k, b_k[zoomed]$

Σχήμα 1.5: $f_1(x), l = 0.05$

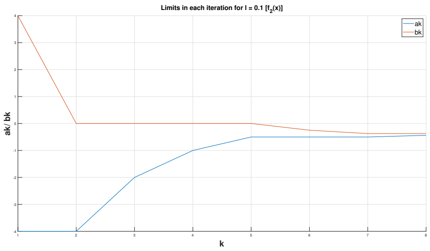


(α′) a_k, b_k

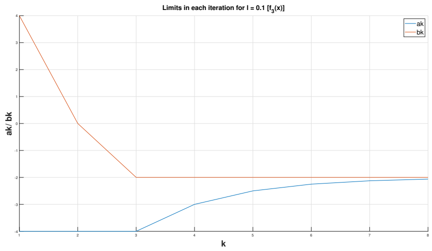


(β′) $a_k, b_k[zoomed]$

Σχήμα 1.6: $f_1(x), l = 0.01$

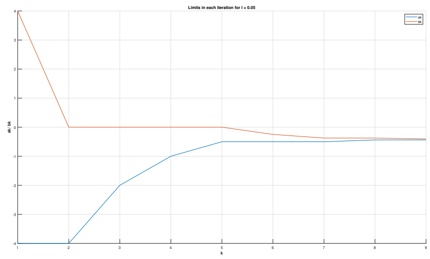


(α΄) $f_2(x)$

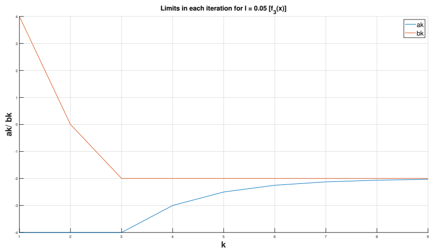


(β΄) $f_3(x)$

Σχήμα 1.7: $l = 0.1$

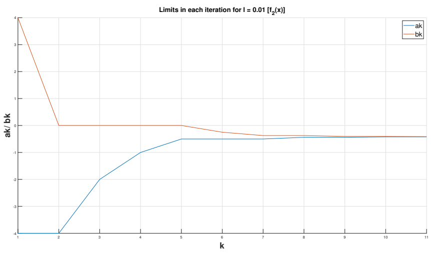


(α΄) $f_2(x)$

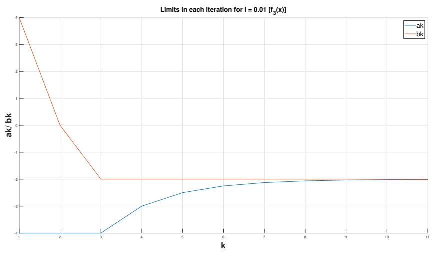


(β΄) $f_3(x)$

Σχήμα 1.8: $l = 0.05$



(α΄) $f_2(x)$



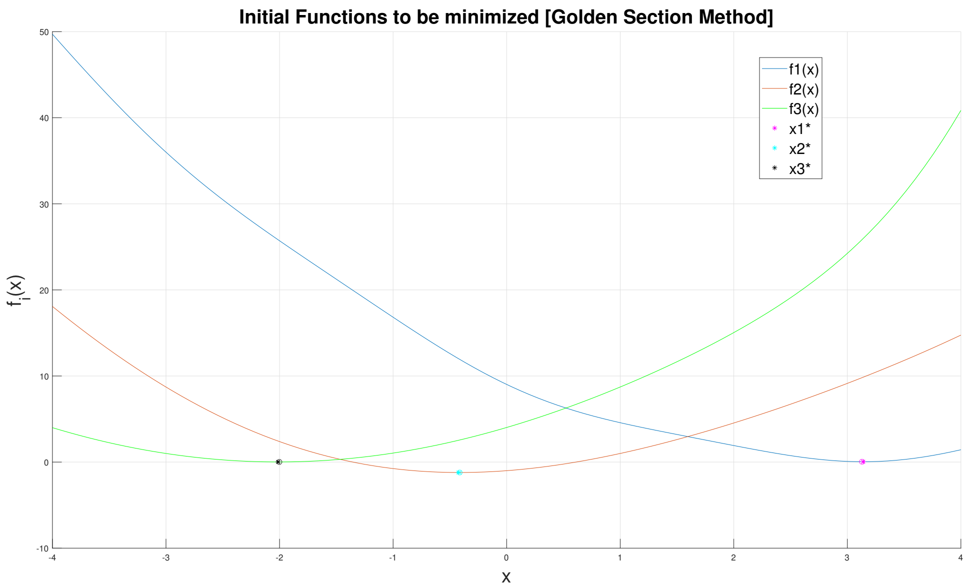
(β΄) $f_3(x)$

Σχήμα 1.9: $l = 0.01$

Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των ορίων $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του k, παρατηρούμε την αύξηση του αριθμού επαναλήψεων με τη μείωση του l, καθώς και το πώς **σταδιακά συγκλίνουν** τα δύο όρια αυτά. Πιο συγκεκριμένα, στα γραφήματα 1.4β΄, 1.5β΄ και 1.6β΄, είναι ακόμη πιο αισθητός ο περιορισμός του τελικού εύρους αναζήτησης και η σύγκλιση των 2 ορίων σε μία τιμή, αφού βλέπουμε και σε μεγένθυση, πόσο πλησιάζουν οι καμπύλες που αναπαριστούν την μεταβολή τους. Όμοια, μπορούμε να παρατηρήσουμε το ίδιο και στα σχήματα 1.7, 1.8, 1.9, απλώς με μεγαλύτερη δυσκολία λόγω της μικρής κλίμακας.

1.2.2 Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

Η μέθοδος του Χρυσού Τομέα έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια του `Matlab` στη συνάρτηση `golden_section_method`. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως ορίσματα τη



Σχήμα 1.10: Εκτίμηση ελαχίστων με τη μέθοδο Χρυσού Τομέα

συνάρτηση f που πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί, το **τελικό εύρος αναζήτησης** l και τα **όρια** a, b του αρχικού διαστήματος, και επιστρέφει την **εκτίμηση του ελαχίστου**, τον **αριθμό των επαναλήψεων** του αλγορίθμου, καθώς και 2 διανύσματα με τα **όρια** a_k, b_k των διαστημάτων που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη.

Η μέθοδος αυτή έχει εφαρμοστεί για πολλαπλές τιμές του εύρους αναζήτησης l, οι οποίες είναι οι ίδιες με την Περίπτωση (ΙΙ) της 1.2.1 και αναφέρονται στον Πίνακα 1.3.

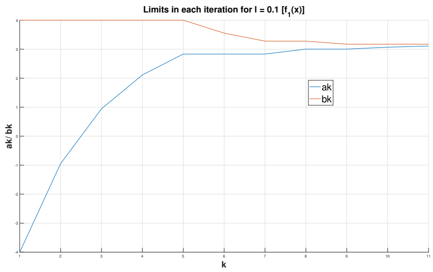
Στο γράφημα 1.10 αναπαριστώνται τα ελάχιστα των συναρτήσεων, με διαφορετικό σύμβολο για κάθε τιμή του l, που όπως και στη Μέθοδο 1.2.1 δεν είναι διακριτά.

Στο πίνακα 1.4 παρακάτω, αναφέρονται οι τιμές των ελαχίστων των συναρτήσεων, καθώς και ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου, που υπολογίστηκαν για κάθε τιμή l. Παρατηρούμε σχετικά έντονα την **αύξηση του αριθμού επαναλήψεων με την μείωση του εύρους του τελικού διαστήματος**, όπως είναι και αναμενόμενο.

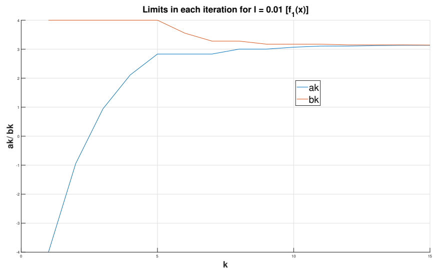
l	**k**	**Minimum**		
		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0.1	10	3.1407	-0.4258	-2.0138
0.05	11	3.1283	-0.4133	-2.0013
0.01	14	3.1378	-0.4134	-2.0108

Πίνακας 1.4: Ελάχιστα συναρτήσεων και επαναλήψεις με τη μέθοδο Χρυσού τομέα

Στη συνέχεια, όπως και στην ανάλυση της προηγούμενης μεθόδου, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ορίων του διαστήματος $[a_k, b_k]$. Για λόγους συντομίας και καλύτερης διατύπωσης, παρουσιάζονται τα γραφήματα για τις τιμές $l = 0.1$ και $l = 0.01$, καθώς είναι αρκετά, ώστε να παρατηρήσουμε την **επιρροή της τιμής του τελικού εύρος διαστήματος στην μεταβολή των ορίων**.

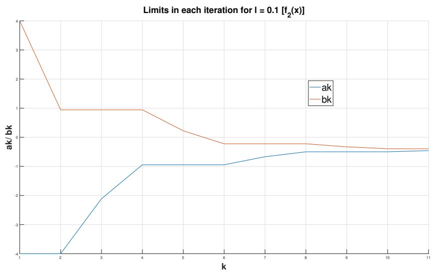


(α΄) $l = 0.1$

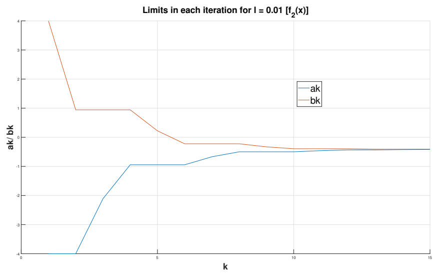


(β΄) $l = 0.01$

Σχήμα 1.11: $f_1(x)$

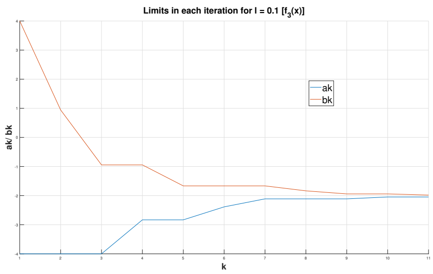


(α΄) $l = 0.1$

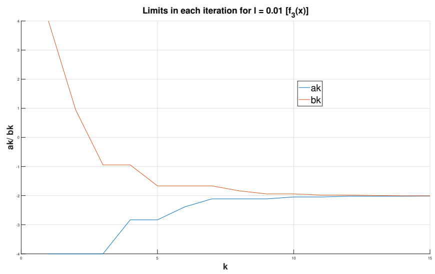


(β΄) $l = 0.01$

Σχήμα 1.12: $f_2(x)$



(α΄) $l = 0.1$



(β΄) $l = 0.01$

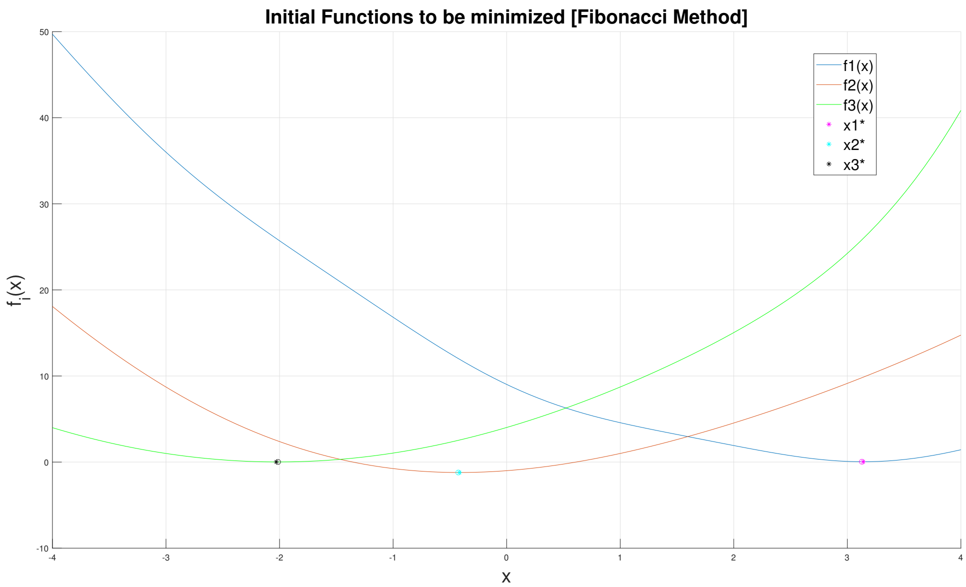
Σχήμα 1.13: $f_3(x)$

Από τα σχήματα 1.11, 1.12 και 1.13, μπορούμε και πάλι να παρατηρήσουμε πώς πλησιάζουν οι δύο τιμές και περιορίζουν έτσι το τελικό διάστημα αναζήτησης.

1.2.3 Μέθοδος Fibonacci

Η μέθοδος Fibonacci έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια του `Matlab` στη συνάρτηση `fibonacci_method`. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως ορίσματα τη **συνάρτηση** f που πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί, το **τελικό εύρος αναζήτησης** l, τα **όρια** a, b του αρχικού διαστήματος, τον προϋπολογισμένο αριθμό n που καθορίζει τις επαναλήψεις[1],

[1] Ο αριθμός των επαναλήψεων θα είναι n-2, εφόσον η αρίθμηση του Matlab ξεκινάει από το στοιχείο n = 1



Σχήμα 1.14: Εκτίμηση ελαχίστων με τη μέθοδο Fibonacci

καθώς και τους όρους της ακολουθίας Fibonacci μέχρι το n στοιχείο, και επιστρέφει την **εκτίμηση του ελαχίστου**, καθώς και 2 διανύσματα με τα **όρια** a_k, b_k των διαστημάτων που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη.

Και αυτή η μέθοδος εφαρμοστεί για πολλαπλές τιμές του εύρους αναζήτησης l, οι οποίες αναφέρονται στον Πίνακα 1.3.

Για την υλοποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου, απαιτείται ο **προκαθορισμός του αριθμού n**, ο οποίος πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η εξής ανισότητα:

$$\frac{b-a}{F_n} \leq l \tag{1.4}$$

,όπου F_n ο n-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci.

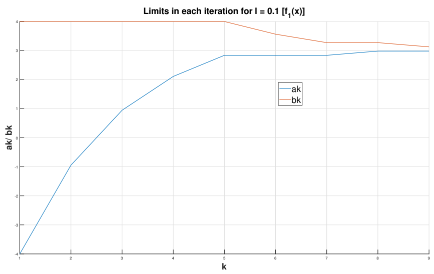
Γι' αυτό το λόγο, έχει επιπλέον υλοποιηθεί η συνάρτηση `find_n` η οποία υπολογίζει το **μέγιστο δυνατό** n, ώστε να ισχύει η 1.4. Η συνάρτηση αυτή, αποθηκεύει επιπλέον σε ένα διάνυσμα, τους απαιτούμενους όρους της ακολουθίας, ώστε να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια, κατά τη διαδικασία εύρεσης του ελαχίστου, και να μην γίνει εκ νέου ο υπολογισμός τους.

Παρακάτω, όπως και στην 1.2.2, ακολουθούν ένα διάγραμμα στο οποίο απεικονίζονται τα ελάχιστα, μαζί με έναν αναλυτικότερο πίνακα για τις ακριβής τιμές των ελαχίστων και των επαναλήψεων του αλγορίθμου.

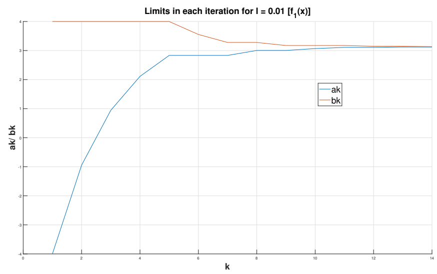
l	n	Minimum		
		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0.1	8	3.0545	-0.4364	-2.0364
0.05	10	3.1389	-0.4167	-2.0278
0.01	13	3.1279	-0.4262	-2.0131

Πίνακας 1.5: Ελάχιστα συναρτήσεων και επαναλήψεις με τη μέθοδο Fibonacci

Αντίστοιχα, παρουσιάζονται και οι γραφικές παραστάσεις των ορίων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει των επαναλήψεων k.

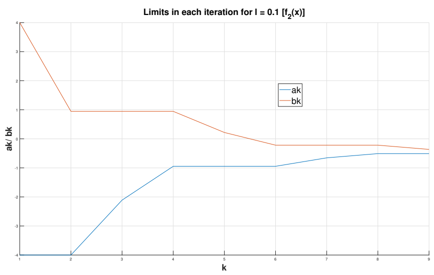


(α΄) $l = 0.1$

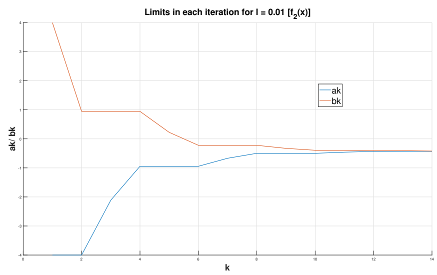


(β΄) $l = 0.01$

Σχήμα 1.15: $f_1(x)$

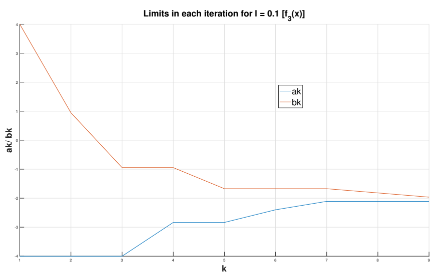


(α΄) $l = 0.1$

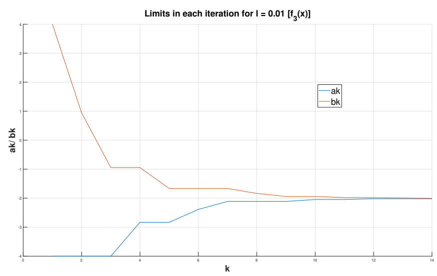


(β΄) $l = 0.01$

Σχήμα 1.16: $f_2(x)$

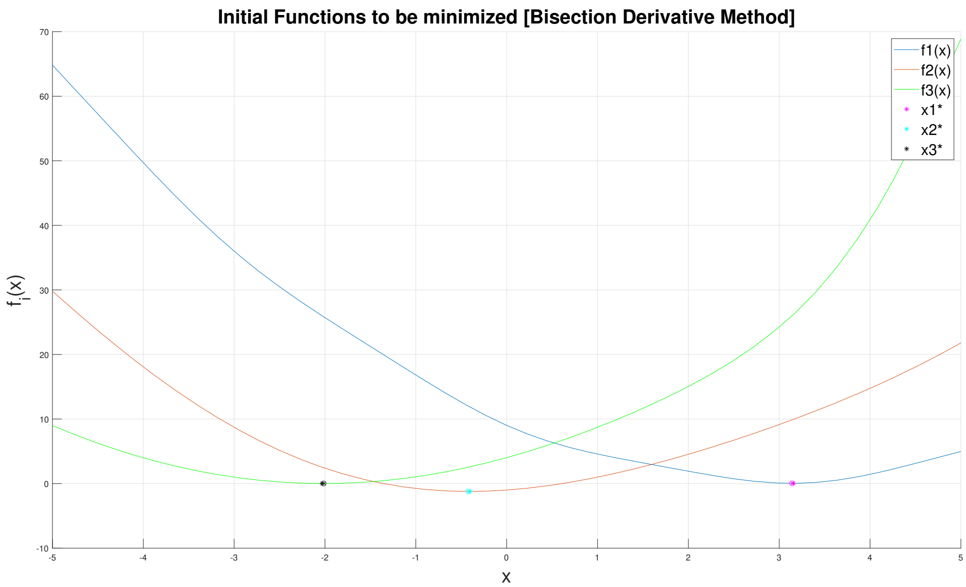


(α΄) $l = 0.1$



(β΄) $l = 0.01$

Σχήμα 1.17: $f_3(x)$



Σχήμα 1.18: Εκτίμηση ελαχίστων με τη μέθοδο της Διχοτόμου με παράγωγο

1.2.4 Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια του `Matlab` στη συνάρτηση `bisection_derivative_method`. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως ορίσματα τη **συνάρτηση** f που πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί, τη μεταβλητή x, το **τελικό εύρος αναζήτησης** l και τα **όρια** a, b του αρχικού διαστήματος, και επιστρέφει την **εκτίμηση του ελαχίστου**, τον αριθμό k των συνολικών επαναλήψεων, καθώς και 2 διανύσματα με τα **όρια** a_k, b_k των διαστημάτων που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη.

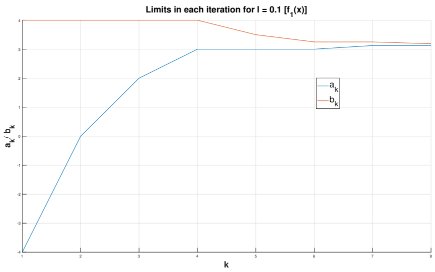
Και αυτή η μέθοδος εφαρμοστεί για πολλαπλές τιμές του εύρους αναζήτησης l, οι οποίες αναφέρονται στον Πίνακα 1.3.

Στο Σχήμα 1.18 και τον πίνακα 1.6 απεικονίζονται -όπως και στις 1.2.2, 1.2.3- τα ελάχιστα και ακριβής τιμές των ελαχίστων και των επαναλήψεων του αλγορίθμου αντίστοιχα.

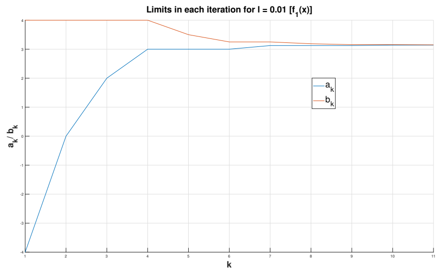
l	**n**	**Minimum**		
		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0.1	7	3.1563	-0.4063	-2.0313
0.05	8	3.1406	-0.4219	-2.0156
0.01	10	3.1445	-0.4180	-2.0117

Πίνακας 1.6: Ελάχιστα συναρτήσεων και επαναλήψεις με τη μέθοδο της Διχοτόμου με παράγωγο

Αντίστοιχα, παρουσιάζονται και οι γραφικές παραστάσεις των ορίων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει των επαναλήψεων k.

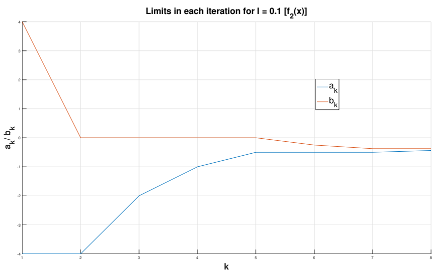


(α′) $l = 0.1$

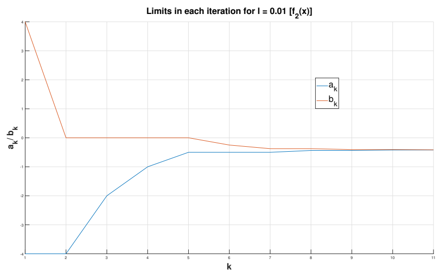


(β′) $l = 0.01$

Σχήμα 1.19: $f_1(x)$

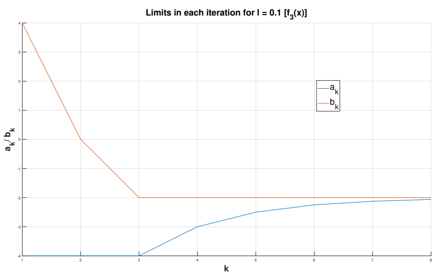


(α′) $l = 0.1$

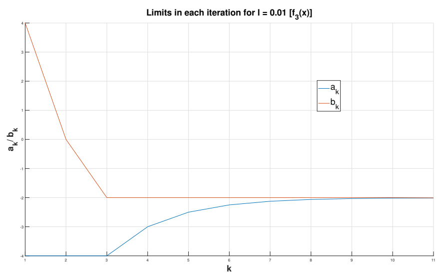


(β′) $l = 0.01$

Σχήμα 1.20: $f_2(x)$



(α′) $l = 0.1$



(β′) $l = 0.01$

Σχήμα 1.21: $f_3(x)$

Κεφάλαιο 2

Σύγκριση Μεθόδων

Όλοι οι παραπάνω αλγόριθμοι που υλοποιήθηκαν και εφαρμόστηκαν σε συναρτήσεις **μιας** μόνο μεταβλητής αποτελούν την **βάση** για τους αλγορίθμους εύρεσης ελαχίστου συναρτήσεων με **περισσότερες μεταβλητές**. Αξίζει λοιπόν να μελετήσουμε τα αποτελέσματα που εξάγαμε από την εφαρμογή τους, και να παρατηρήσουμε χαρακτηριστικές ιδιότητες του καθενός.

Αρχικά, από τους πίνακες 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 είναι εμφανές πως οι αλγόριθμοι διχοτόμησης - *με ή χωρίς τη χρήση παραγώγου* - είναι αυτοί που επιτυγχάνουν τη **σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό εύρος αναζήτησης** έχοντας πραγματοποιήσει τις **λιγότερες** επαναλήψεις. Οι δύο αυτές μέθοδοι, έχουν μεγάλη ομοιότητα στην μεταβολή του εύρους αναζήτησης σε κάθε επανάληψη, κάτι που γίνεται οπτικά αισθητό από τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις των ορίων a_k, b_k. Ωστόσο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Μέθοδος 1.2.4 συγκλίνει στο ελάχιστο με **οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας**.

Η αμέσως επόμενη μέθοδος, με τον λιγότερο αριθμό επαναλήψεων, είναι η μέθοδος Fibonacci, της οποίας είναι χαρακτηριστικές οι **απότομες μεταβολές** στις τιμές των ορίων a_k, b_k, όπως φαίνεται και πιο έντονα στα Σχήματα 1.16 και 1.17. Παρόλα αυτά, αθροίζοντας τον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης, μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος αυτή είναι **πιο αποτελεσματική** καθώς απαιτεί μικρό αριθμό υπολογισμών σε σχέση με τις παραπάνω μεθόδους[1].

Η μέθοδος Fibonacci δεν διαφέρει σε μεγάλο βαθμό από τη μέθοδο της Χρυσής Τομής, κάτι που παρατηρείται τόσο από τον **απαιτούμενο αριθμό επαναλήψεων** για τη σύγκλιση σε συγκεκριμένο διάστημα, όσο και από τις **γραφικές παραστάσεις μεταβολής των ορίων** του τελικού εύρους αναζήτησης. Και στη μέθοδο αυτή υπάρχει σχετικά απότομη μεταβολή των τιμών των ορίων αυτών. Αυτό φυσικά, δεν είναι παράδοξο, καθώς οι 2 παραπάνω μέθοδοι συνδέονται με τη σχέση:

$$\lim_{N\to-\infty} \frac{1}{F_N} = 0.618 = \gamma \tag{2.1}$$

Επομένως, **για πολύ μεγάλο n** η μέθοδος Fibonacci και η μέθοδος Χρυσής Τομής **ταυτίζονται**.

[1] Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το γεγονός ότι η μέθοδος Fibonacci χρειάζεται έναν επιπλέον υπολογισμό απ' ότι ο αριθμός των επαναλήψεων της, ενώ η μέθοδος της Διχοτόμου χρειάζεται τον διπλάσιο αριθμό υπολογισμών.