



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

---

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης πολλών μεταβλητών

---

Αμαραντίδου Ευθυμία  
7ο Εξάμηνο  
Α.Ε.Μ.: 9762

Τεχνικές Βελτιστοποίησης  
2η Εργαστηριακή Άσκηση

7 Δεκεμβρίου 2021

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>2</b>
1.1	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	2
1.2	Μέθοδοι επίλυσης . . . . .	3
1.2.1	Μέθοδος της Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent) . . . . .	3
1.2.2	Μέθοδος Newton . . . . .	9
1.2.3	Μέθοδος Levenberg Marquardt . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Παρατηρήσεις</b>	<b>14</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

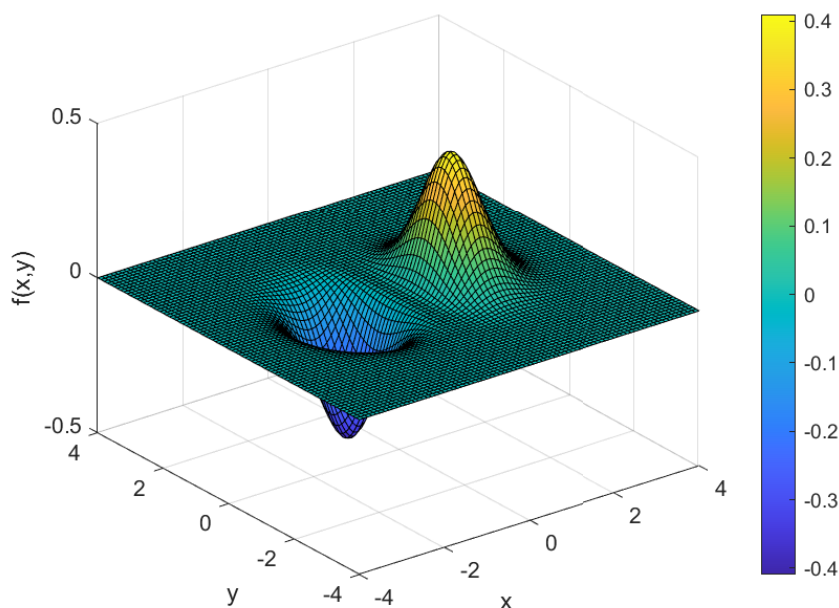
Στην παρακάτω αναφορά θα παρουσιαστούν μέθοδοι εύρεσης του ελαχίστου μιας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών **χωρίς περιορισμούς**. Όλες οι μέθοδοι που αναφέρονται, έχουν υλοποιηθεί και εφαρμοστεί στο περιβάλλον του `Matlab`.

### 1.1 Περιγραφή του προβλήματος

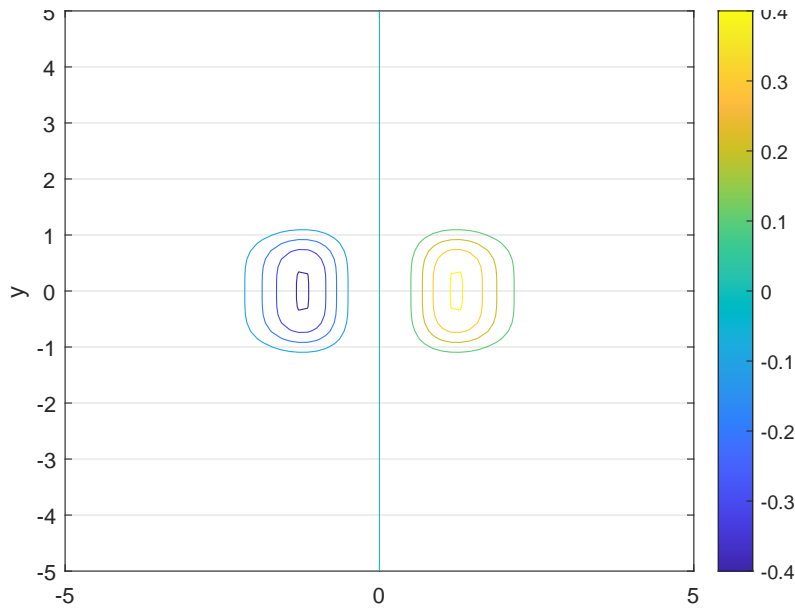
Με τη βοήθεια αλγορίθμων επαναληπτικής καθόδου, ξεκινώντας από κάποιο σημείο  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  θα παραχθούν διαδοχικά διανύσματα  $x_1, x_2, \dots$ , ώστε να ισχύει  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ . Η αντικειμενική συνάρτηση που θα μελετηθεί είναι η εξής:

$$f(x, y) = x^3 e^{-x^2 - y^4} \quad (1.1)$$

Μια καλύτερη εικόνα για τη μορφή της 1.1 μπορούμε να πάρουμε και από το σχήμα 1.2. Αναμένουμε λοιπόν, πως το ελάχιστο που αναζητούμε, βρίσκεται περίπου στο **-0.4**. Αυτό θα μας βοηθήσει και στην επαλήθευση των μεθόδων αργότερα.



Σχήμα 1.1: Τρισδιάσταση απεικόνιση της  $f$



Σχήμα 1.2: Ισοβαρείς καμπύλες της  $f$

Παρακάτω, αναφέρονται τα **αρχικά σημεία** που επιλέχθηκαν για την ανάλυση:

- i.  $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- ii.  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$
- iii.  $(x_0, y_0) = (1, 1)$

Οι μέθοδοι που ακολουθούν, έχουν εφαρμοστεί για πολλαπλές **μεθόδους επιλογής του βήματος**  $\gamma_k$ :

- I)  $\gamma_k$ : Σταθερό
- II)  $\gamma_k$ : Τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την  $f(x_k + \gamma_k d_k)$
- III)  $\gamma_k$ : Υπολογισμένο βάσει του κανόνα Armijo

## 1.2 Μέθοδοι επίλυσης

Παρακάτω, θα μελετηθούν 3 μέθοδοι εύρεσης ελαχίστου για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Και οι 3 αλγόριθμοι, αποτελούν **αλγορίθμους κλίσης**. Για το λόγο αυτό, είναι σημαντικό να θυμηθούμε πως πολλοί αλγόριθμοι κλίσης είναι της μορφής:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \Delta_k \nabla f(x_k) \quad (1.2)$$

### 1.2.1 Μέθοδος της Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)

Η **μέθοδος μέγιστης καθόδου** προκύπτει εάν στην 1.2 επιλέξουμε  $\Delta_k = I$ . Έτσι, το διάνυσμα κατεύθυνσης  $d_k = -\nabla f(x_k)$  ισούται με την αρνητική κλίση της  $f$  στο σημείο  $x_k$  και η μέθοδος βασίζεται στην εξής σχέση:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k) \quad (1.3)$$

Με βάση την 1.3, υλοποιήθηκε με την βοήθεια του Matlab ο αλγόριθμος της Μεθόδου Μέγιστης Καθόδου. Ως **σταθερά τερματισμού** του αλγορίθμου, επιλέχθηκε  $\epsilon = 0.01^1$ .

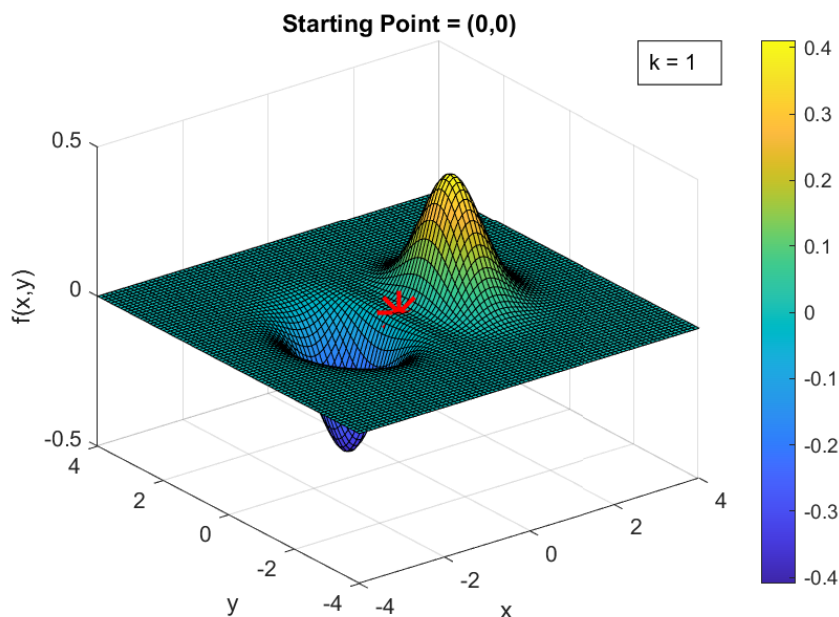
Παρακάτω, ακολουθούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου.

**(i) Αρχικό σημείο**  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Για το συγκεκριμένο σημείο εκκίνησης, ο αλγόριθμος τερμάτισε μόλις στην **πρώτη επανάληψη**. Αυτό συνέβη, καθώς, το  $|\nabla f(0, 0)| = 0$ , με αποτέλεσμα να ικανοποιείται εξ αρχής η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου:

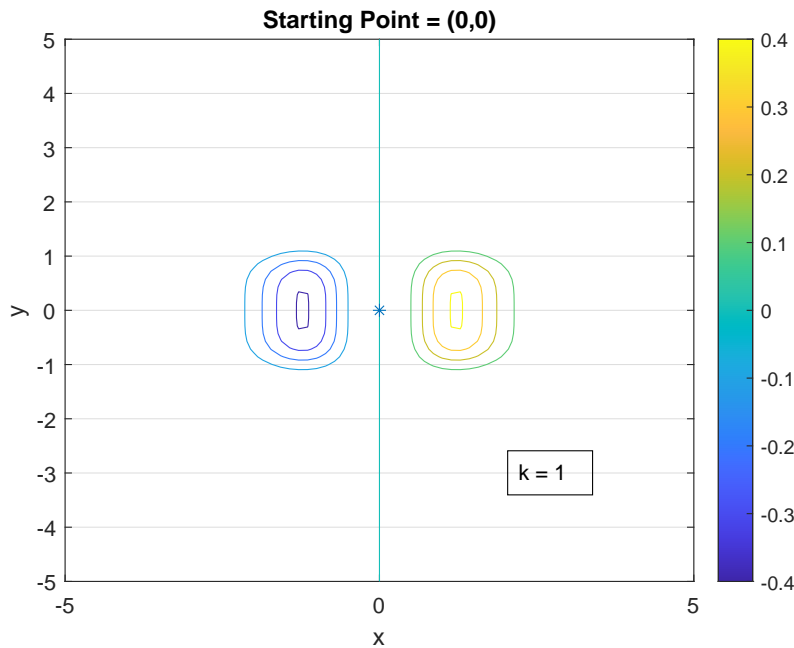
$$|\nabla f(x_k, y_k)| \leq \epsilon \quad (1.4)$$

Το αποτέλεσμα αυτό, είναι αναμενόμενο, καθώς αν τοποθετήσουμε το σημείο  $(0, 0)$  στην τρισδιάστατη απεικόνιση της  $f$  όπως στο σχήμα 1.3, βλέπουμε ότι βρίσκεται **πάνω στο επίπεδο**, όπου και η κλίση είναι **μηδενική**. Έτσι, ο αλγόριθμος εγκλωβίζεται σε ένα **τοπικό** ελάχιστο της συνάρτησης και δεν είναι δυνατή η εύρεση του ολικού ελαχίστου.



Σχήμα 1.3: Σημείο  $f(0,0)$

<sup>1</sup>Εάν μειώσουμε τη σταθερά  $\epsilon$  παρατηρούμε αύξηση στον αριθμό των επαναλήψεων των αλγορίθμων ως τον τερματισμό τους.



Σχήμα 1.4: Σημείο εκκίνησης (0,0) στο διάγραμμα ισοβαρών καμπύλων της  $f$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει **ανεξάρτητα** από την επιλογή του βήματος  $\gamma_k$ . Επομένως το (0,0) δεν αποτελεί ένα καλό σημείο εκκίνησης.

**(ii) Αρχικό σημείο  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$**

Από τα σχήματα 1.5, 1.6 και 1.7, παρατηρούμε πως για **όλες** τις μεθόδους επιλογής του βήματος  $\gamma_k$ , ο αλγόριθμος καταλήγει στο ολικό ελάχιστο επιτυχώς. Αυτό που αλλάζει αισθητά, είναι ο **αριθμός των επαναλήψεων** που απαιτούνται, ώσπου να τερματίσει ο αλγόριθμος σε κάθε περίπτωση.

Πιο συγκεκριμένα :

Για την περίπτωση του **σταθερού βήματος** τα γραφήματα που παρουσιάζονται προέκυψαν επιλέγοντας  $\gamma_k=1$ . Ωστόσο, δοκιμάστηκαν και άλλες τιμές βήματος, με τις οποίες ο αλγόριθμος κατέληγε στο ελάχιστο με αριθμό επαναλήψεων που αναφέρεται στον πίνακα 1.1.

$g_k$	$k$	Minimum $f(x,y)$
0.3	30	-0.4095
0.5	18	-0.4095
1	14	-0.4096
1.2	66	-0.4099

Πίνακας 1.1: Ελάχιστα συνάρτησης και επαναλήψεις για σταθερό  $\gamma_k$

Παρατηρείται, πως οι ιδανικές τιμές βήματος βρίσκονται περίπου στο διάστημα 0.5-1<sup>2</sup>, καθώς όταν το βήμα γίνεται μικρότερο ή μεγαλύτερο και βγαίνει εκτός αυτού του

<sup>2</sup>Το συμπέρασμα αυτό προέκυψε χοντρικά από δοκιμές για συγκεκριμένες τιμές του  $g_k$ . Σωστότερο,

διαστήματος, ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται κατά πολύ. Απαιτείται λοιπόν αρκετή εξοικείωση και εμπειρία στην εφαρμογή αυτής της μεθόδου εάν θέλουμε να επιλέξουμε την κατάλληλη τιμή για το  $\gamma_k$ .

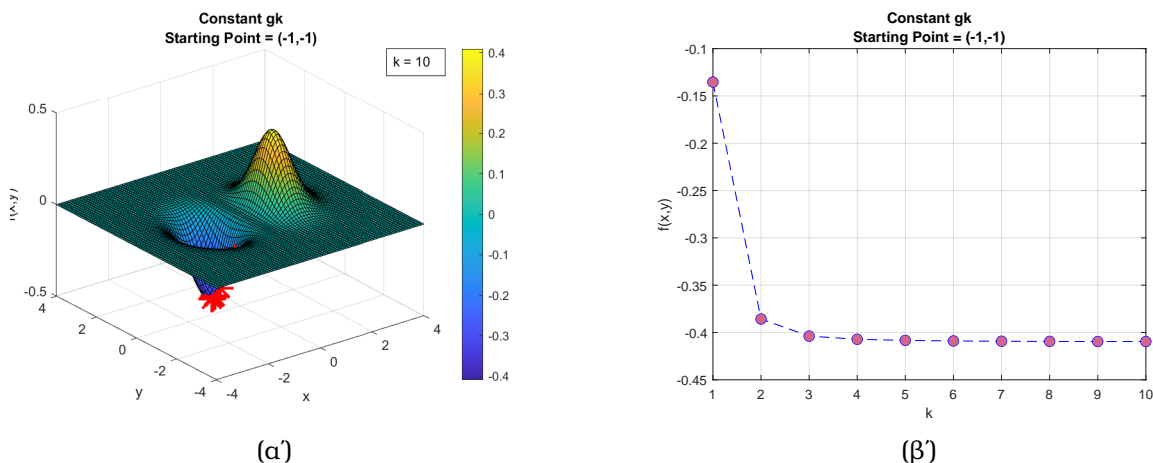
Παρόλα αυτά, η μέθοδος σταθερού βήματος εξακολουθεί να είναι **υπολογιστικά αναποτελεσματική** και σχετικά **αργή**, συγκριτικά με την περίπτωση όπου το  $\gamma_k$  επιλέγεται σε κάθε επανάληψη τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την  $f(x_k + \gamma_k d_k)$ . Από το σχήμα 1.6 βλέπουμε ότι χρειάζονται μόλις **2 επαναλήψεις**, ώσπου να οδηγηθούμε στο ελάχιστο της συνάρτησης. Όπως γνωρίζουμε και από τη θεωρία, αυτό συμβαίνει καθώς το διάνυσμα που συνδέει το  $x_k$  με το  $x^*$  είναι συγγραμικό με το  $\nabla f(x_k)$ .

Για την επιλογή του βήματος σύμφωνα με τον κανόνα Armijo, θυμόμαστε πως το βήμα μειώνεται διαδοχικά σύμφωνα με τη σχέση:

$$\gamma_k = s\beta^{m_k}, 0 < \beta < 1 \quad (1.5)$$

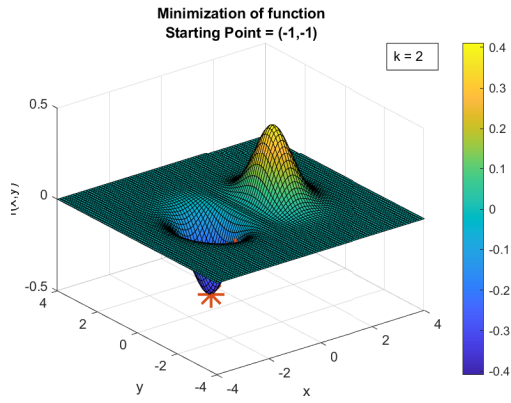
,όπου  $m_k$  είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί το Κριτήριο 1.8.

Η μέθοδος Armijo εφαρμόστηκε χρησιμοποιώντας ως τιμές των παραμέτρων  $\beta = 0.2$  και  $a = 10^{-3}$ , με αρχικό  $s = 0.3$ . Στο σχήμα 1.7β' παρατηρούμε τον σχετικά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου.

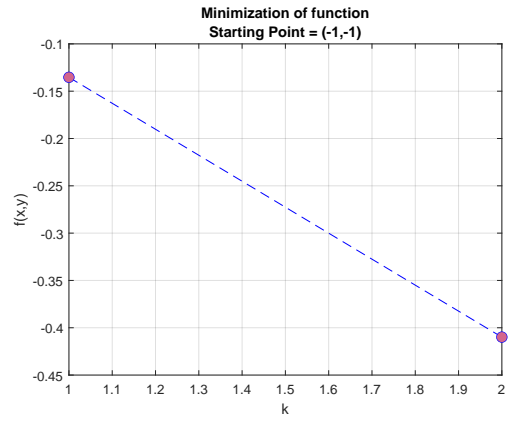


Σχήμα 1.5: Σταθερό  $\gamma_k$  για αρχικό σημείο  $(-1, -1)$

θα ήταν να επαναλάβουμε τον αλγόριθμο πολλαπλές φορές διαδοχικά για μεταβαλλόμενο βήμα, ώστε να καταλήξουμε στην καταλληλότερη τιμή.

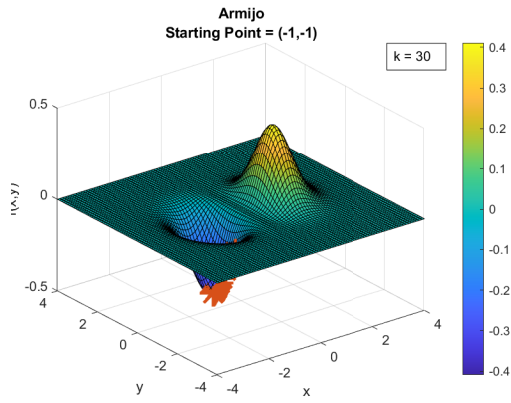


(α')

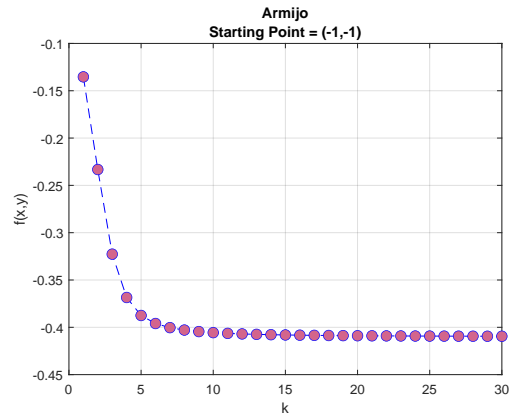


(β)

Σχήμα 1.6:  $\gamma_k$  από την ελαχιστοποίηση της  $f(x_{k+1} + \gamma_k d_k)$  για αρχικό σημείο  $(-1,-1)$



(α')



(β)

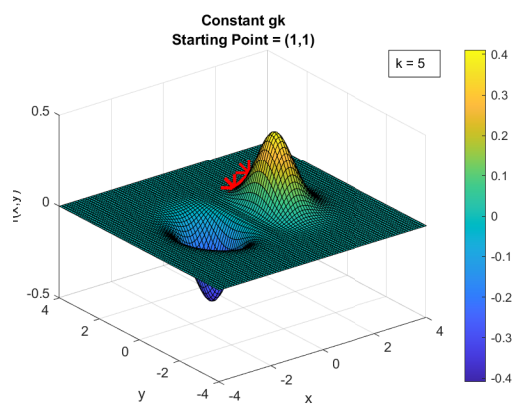
Σχήμα 1.7:  $\gamma_k$  βάσει του κανόνα Armijo για αρχικό σημείο  $(-1,-1)$

### (iii) Αρχικό σημείο $(x_0, y_0) = (1, 1)$

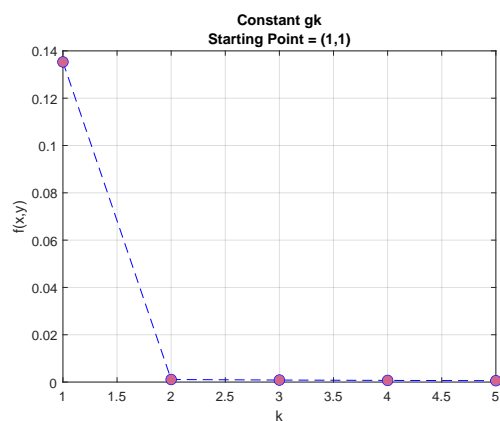
Για το σημείο εκκίνησης  $(1,1)$  από τα σχήματα 1.8, 1.9 και 1.10, είναι φανερό πως ο αλγόριθμος **αποτυγχάνει** να καταλήξει στο ελάχιστο, **ανεξάρτητα** από την μέθοδο επιλογής του βήματος<sup>3</sup>. Αυτό συμβαίνει καθώς μετά από ελάχιστο αριθμό επαναλήψεων, οδηγείται στο μηδενικό επίπεδο, όπου η κλίση είναι 0, με αποτέλεσμα να εγκλωβίζεται και πάλι στο τοπικό ελάχιστο όπως και στην περίπτωση όπου το σημείο εκκίνησης ήταν το  $(0,0)$ .

<sup>3</sup>Για την περίπτωση όπου το  $\gamma_k$  είναι σταθερό, τα γραφήματα προέκυψαν για την τιμή  $\gamma_k = 1$ .



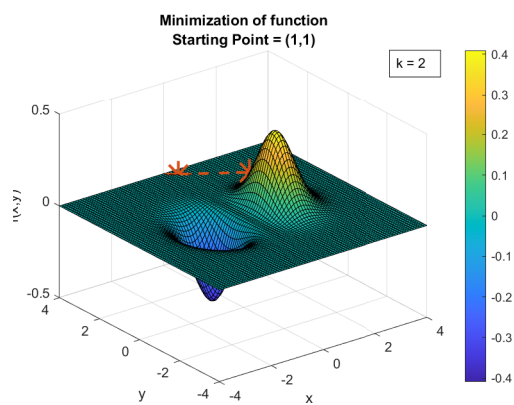


(α')

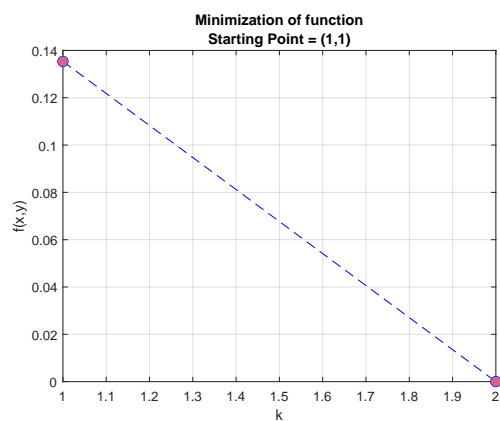


(β)

Σχήμα 1.8: Σταθερό  $\gamma_k$  για αρχικό σημείο (1,1)

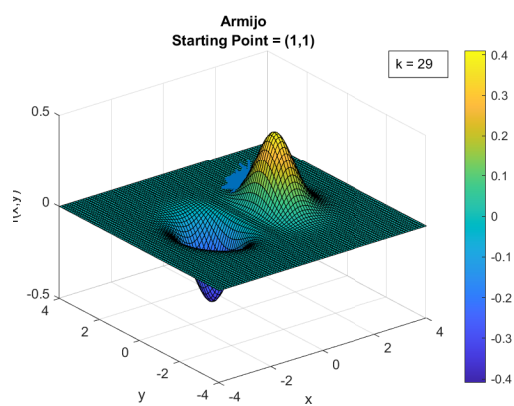


(α')

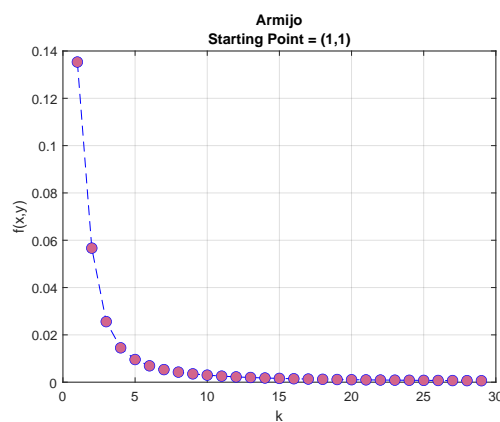


(β)

Σχήμα 1.9:  $\gamma_k$  από την ελαχιστοποίηση της  $f(x_{k+1} + \gamma_k d_k)$  για αρχικό σημείο (1,1)



(α')



(β)

Σχήμα 1.10:  $\gamma_k$  βάσει του κανόνα Armijo για αρχικό σημείο (1,1)

### 1.2.2 Μέθοδος Newton

Αντίστοιχα με την Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου, η **Μέθοδος Newton** προκύπτει εάν στην 1.2 επιλέξουμε  $\Delta_k = [\nabla^2 f(x_k)^{-1}]$ , οπότε η σχέση που την περιγράφει είναι η:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k [\nabla^2 f(x_k)^{-1}] \nabla f(x_k) \quad (1.6)$$

Ωστόσο, πρέπει να προσέξουμε πως η αντικατάσταση αυτή προϋποθέτει ότι ο  $\nabla^2 f(x_k)$  είναι **θετικά ορισμένος**. Μόνο σε αυτή την περίπτωση μπορεί η Μέθοδος Newton να εφαρμοστεί.

Με βάση την 1.6, υλοποιήθηκε με την βοήθεια του Matlab ο αλγόριθμος της Μεθόδου Newton. Κομμάτι της υλοποίησης αυτής αποτέλεσε και ο έλεγχος θετικά ορισμένου πίνακα. Ως σταθερά τερματισμού του αλγορίθμου, επιλέχθηκε και πάλι  $\epsilon = 0.01$ .

Αξίζει να αναφέρουμε, πως και για τα τρία σημεία εκκίνησης που έχουν επιλεγεί στη συγκεκριμένη ανάλυση, η Μέθοδος Newton είναι **αδύνατο** να εφαρμοστεί, καθώς ο  $\nabla^2 f(x_k)$  **δεν** είναι θετικά ορισμένος. Έτσι, ο αλγόριθμος τερματίζει αμέσως μετά τον έλεγχο της συνθήκης θετικά ορισμένου πίνακα.

### 1.2.3 Μέθοδος Levenberg Marquardt

Η Μέθοδος Levenberg Marquardt αποτελεί έναν τροποποιημένο αλγόριθμο Newton και εφαρμόζεται για τις περιπτώσεις όπου ο  $\nabla^2 f(x_k)$  **δεν** είναι **θετικά ορισμένος**.

Χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής, αποτελεί ο παράγοντας  $\mu_k$ , ο οποίος υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, τέτοιος ώστε ο  $\nabla^2 f(x_k) + \mu_k I$  να είναι θετικά ορισμένος.

Όμοια με τις προηγούμενες μεθόδους, υλοποιήθηκε με την βοήθεια του Matlab ο αλγόριθμος της Μεθόδου Levenberg Marquardt. Ως σταθερά τερματισμού του αλγορίθμου, επιλέχθηκε και πάλι  $\epsilon = 0.01$ . Στην υλοποίηση αυτή, προστέθηκε και ο έλεγχος ικανοποίησης δύο **κριτηρίων καλής λειτουργίας**, 1.7 και 1.8, τα οποία διασφαλίζουν πως η τιμή του βήματος  $\gamma_k$  δε θα πάρει πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές, ώστε να αποφευχθούν ατέρμονες επαναλήψεις του αλγορίθμου και αποκλίσεις.

Τα κριτήρια που ελέγχονται είναι τα εξής:

**Κριτήριο A** Υπάρχει  $\beta$  με  $0 < \beta < 1$  τέτοιο ώστε:

$$d_k^T \nabla f(x_{k+1}) > \beta d_k^T \nabla f(x_k) \quad (1.7)$$

**Κριτήριο B** Υπάρχει  $\alpha$  με  $0 < \alpha < \beta < 1$  τέτοιο ώστε:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \alpha \gamma_k d_k^T \nabla f(x_k) \quad (1.8)$$

Παρακάτω, ακολουθούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου.

**(iii) Αρχικό σημείο**  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Για το συγκεκριμένο αρχικό σημείο, ο αλγόριθμος τερματίζει λόγω του **εγκλωδισμού σε κρίσιμο σημείο** όπως αναφέραμε και στις προηγούμενες 2 μεθόδους. Επομένως δεν θα επεκταθούμε περισσότερο σε αυτό.

**(iii) Αρχικό σημείο**  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$

Γνωρίζουμε ήδη από τις προηγούμενες αναλύσεις πως το  $(-1, -1)$  αποτελεί ένα καλό σημείο εκκίνησης για την εύρεση του ελαχίστου. Το ίδιο μας επιβεβαιώνει και αυτή η μέθοδος, καθώς ο αλγόριθμος οδηγείται στο ελάχιστο ανεξαρτήτως του **τρόπου** επιλογής βήματος.

Η υλοποίηση με σταθερό βήμα  $\gamma_k$  δοκιμάστηκε και πάλι για διαφορετικές τιμές αυτού, οι οποίες συνοψίζονται στον πίνακα. Αυτή τη φορά, επιλέχθηκε να παρουσιαστεί το διάγραμμα για την τιμή  $\gamma_k = 0.3$ , καθώς αξίζει να παρατηρήσουμε, πως ενώ η μικρή τιμή του βήματος μας φέρνει **γρήγορα** (από την 2η επανάληψη) κοντά στο ελάχιστο, στην συνέχεια απαιτείται ένας αναλογικά μεγάλος αριθμός επαναλήψεων (16 επαναλήψεις), ώσπου να τερματίσει ο αλγόριθμος. Ωστόσο, οποιαδήποτε αύξηση στην τιμή του  $\gamma_k$  οδηγεί σε μη εκπλήρωση των Κριτηρίων 1.7 και 1.8, ενώ μια μικρή μείωση αυτού οδηγεί σε ραγδαία αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων, η οποία φαίνεται στον πίνακα 1.2.

$g_k$	$k$	Minimum $f(x,y)$
0.1	55	-0.4097
0.3	16	-0.4097
0.4	-	-

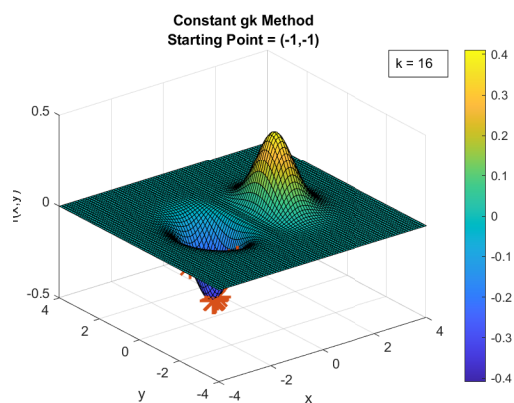
Πίνακας 1.2: Ελάχιστα συνάρτησης και επαναλήψεις για σταθερό  $\gamma_k$

Αντίστοιχα, όπως και περιμέναμε, η υλοποίηση όπου το  $\gamma_k$  επιλέγεται σε κάθε επανάληψη τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την  $f(x_k + \gamma_k d_k)$ , είναι **αποτελεσματικότερη** και **πιο γρήγορη**, εφόσον επιτυγχάνει τον υπολογισμό του ελαχίστου σε 4 επαναλήψεις. Και πάλι, καταφέρνει από την **2η** κι όλης επανάληψη να προσεγγίσει το ελάχιστο.

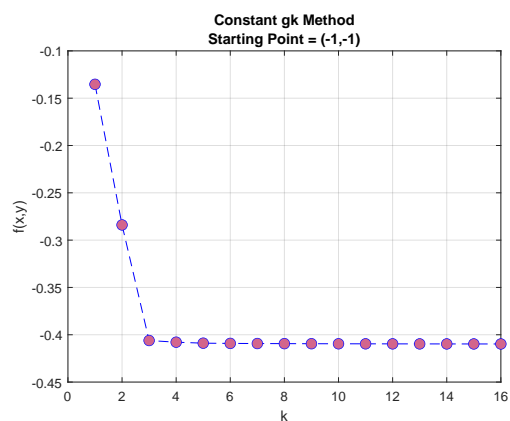
Η μέθοδος Armijo, η οποία περιγράφεται από την σχέση 1.5 εφαρμόστηκε χρησιμοποιώντας, όπως στην 1.2.1, ως τιμές των παραμέτρων  $\beta = 0.2$  και  $\alpha = 10^{-3}$ , με αρχικό  $\gamma_k = 0.3$ .

Από το σχήμα 1.13β' φαίνεται για τις συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων, πως ο αριθμός των επαναλήψεων είναι 16.

Η τιμή του αρχικού  $\gamma_k$  επιλέχθηκε μετά από σειρά δοκιμών, καθώς για οποιαδήποτε άλλη τιμή του βήματος, οδηγούμαστε σε μη ικανοποίηση των απαραίτητων κριτηρίων, άρα και τερματισμό του αλγορίθμου.

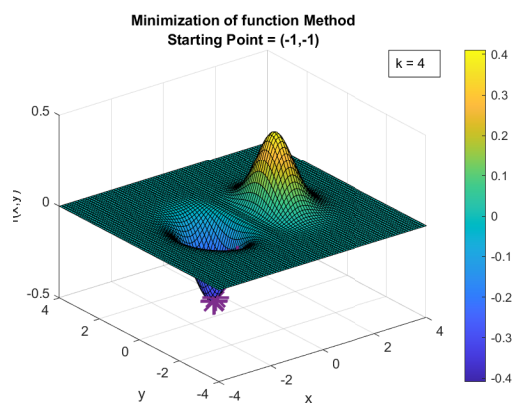


(α')

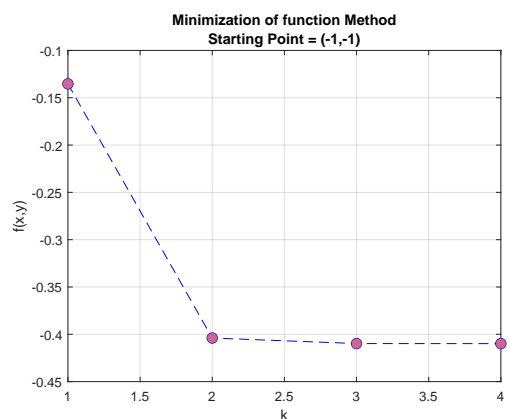


(β)

Σχήμα 1.11: Σταθερό  $\gamma_k$  για αρχικό σημείο (-1,-1)

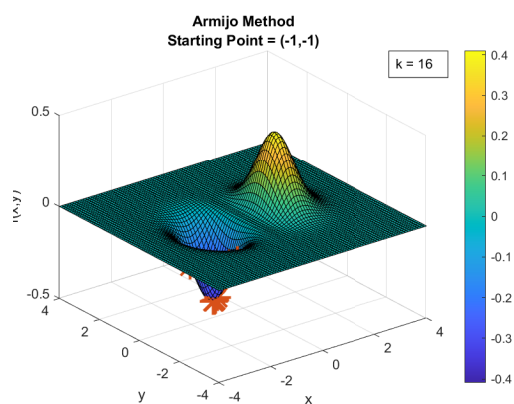


(α')

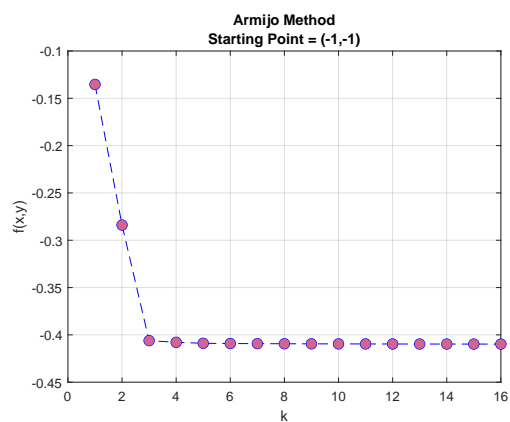


(β)

Σχήμα 1.12:  $\gamma_k$  από την ελαχιστοποίηση της  $f(x_{k+1} + \gamma_k d_k)$  για αρχικό σημείο (-1,-1)



(α')

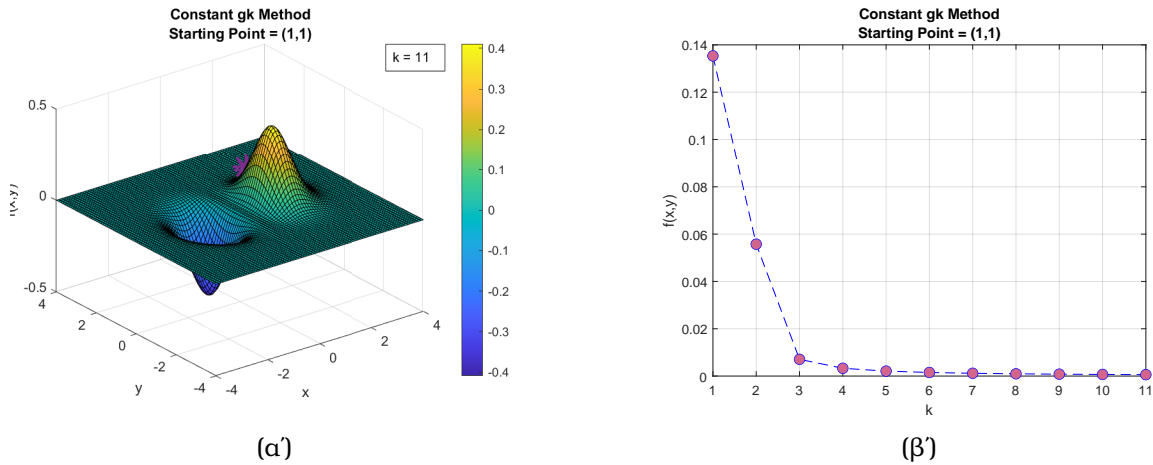


(β)

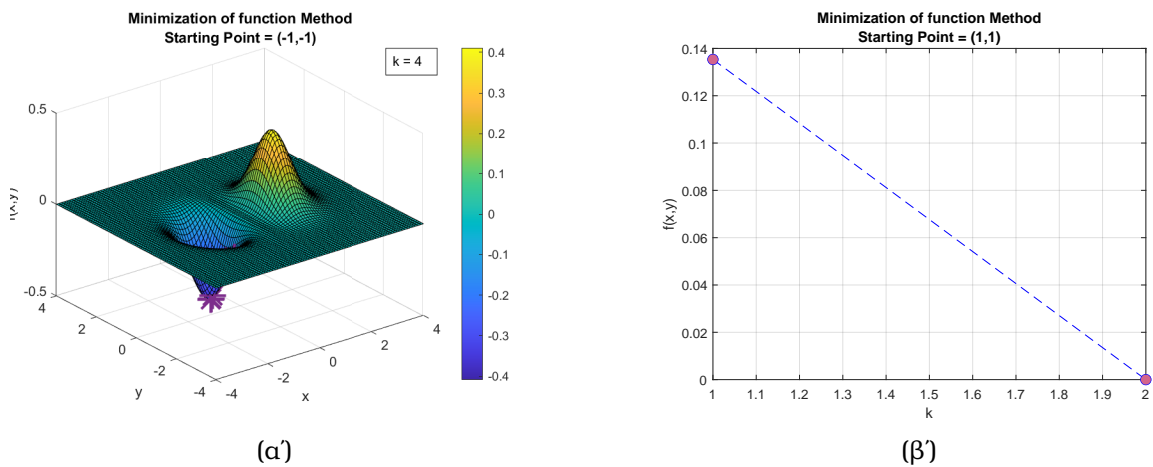
Σχήμα 1.13:  $\gamma_k$  βάσει του κανόνα Armijo για αρχικό σημείο (-1,-1)

**(iii) Αρχικό σημείο  $(x_0, y_0) = (1, 1)$**

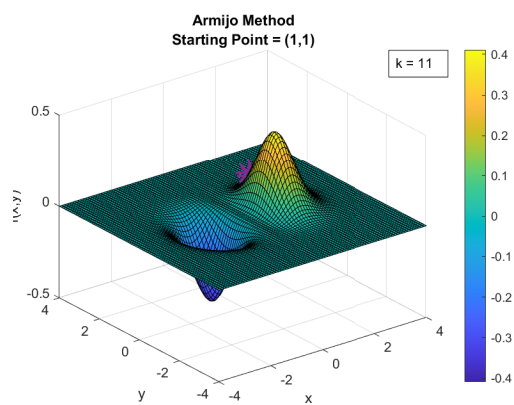
Για το σημείο εκκίνησης  $(1, 1)$ , για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν και στη μέθοδο Μέγιστης Καθόδου 1.2.1, επιβεβαιώνουμε στα σχήματα 1.14α', 1.15α' και 1.16α' πως ο αλγόριθμος εγκλωβίζεται στο τοπικό ελάχιστο.



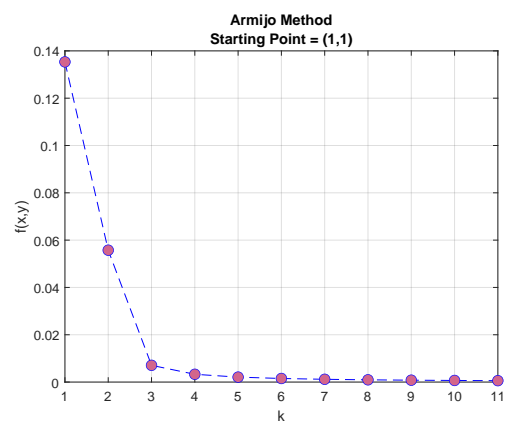
Σχήμα 1.14: Σταθερό  $\gamma_k$  για αρχικό σημείο  $(1, 1)$



Σχήμα 1.15:  $\gamma_k$  από την ελαχιστοποίηση της  $f(x_{k+1} + \gamma_k d_k)$  για αρχικό σημείο  $(1, 1)$



(α')



(β)

Σχήμα 1.16:  $\gamma_k$  βάσει του κανόνα Armijo για αρχικό σημείο (1,1)

## Κεφάλαιο 2

### Παρατηρήσεις

Στην ανάλυση που προηγήθηκε, μελετήθηκαν διαφορετικές **μέθοδοι εύρεσης ελαχίστου** συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και διαφορετικοί **τρόποι καθορισμού του βήματος**  $\gamma_k$ , για πολλαπλά σημεία εκκίνησης της αναζήτησης. Η ανάλυση αυτή, βοήθησε στην εξαγωγή σημαντικών συμπερασμάτων, που είναι χρήσιμο να γνωρίζει κανείς κατά την πρακτική εφαρμογή των μεθόδων που μελετήθηκαν.

Αρχικά, αναγνωρίζουμε πως η κάθε μέθοδος έχει θετικά στοιχεία, αλλά και αδυναμίες σε διαφορετικές περιπτώσεις. Η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου 1.2.1 αποτελεί μία φαινομενικά αποτελεσματική μέθοδο, παρόλα αυτά είδαμε πως τελικά, λόγω του ότι οι ευθείες που ενώνουν τα διαδοχικά σημεία επιλογής του αλγορίθμου  $(x_k, x_{k+1})$  σχηματίζουν ορθή γωνία μεταξύ τους, δημιουργούνται “ζικ-ζακ” με αποτέλεσμα να εκτελούνται **πολλές επαναλήψεις** και να προκύπτει μια **αργή** μέθοδος. Η μέθοδος Newton 1.2.2 από την άλλη, είναι περιοριστική, καθώς εφαρμόζεται **μόνο** σε περιπτώσεις που ο Εσσιανός πίνακας της αντικειμενικής συνάρτησης είναι θετικά ορισμένος, ενώ η μέθοδος Levenberg Marquardt 1.2.3 έχει μια μεγαλύτερη **υπολογιστική πολυπλοκότητα**. Μάλιστα, η τελευταία, αναλόγως με το μέγεθος της χαρακτηριστικής της τιμής  $\mu_k$ , μπορεί να προσεγγίσει τόσο την Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου, όσο και τη Μέθοδο Newton.

Σε αντίθεση με τις μεθόδους υπολογισμού ελαχίστου, από τις οποίες δεν μπορούμε να διακρίνουμε κάποια ως καλύτερη, μπορούμε να συμπεράνουμε, πως ο βέλτιστος τρόπος για την επιλογή του βήματος  $\gamma_k$  των αλγορίθμων, αποτελεί εύρεση της **τιμής που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση**  $f(x_{k+1} + \gamma_k d_k)$ . Είναι προφανές, πως με τη μέθοδο αυτή οδηγούμαστε με **μεγάλη ταχύτητα** και **μικρό αριθμό επαναλήψεων** στο ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Η μέθοδος σταθερού  $\gamma_k$  παρόλο που με την κατάλληλη επιλογή τιμής μπορεί να είναι αποτελεσματική, απαιτεί αρκετή **εμπειρία** ώστε να επιτευχθεί αυτό. Τέλος, η μέθοδος Armijo, ενώ επηρεάζεται από διάφορες παραμέτρους, έχει το θετικό πως εξασφαλίζει ότι η τιμή του βήματος δεν θα πάρει πολύ μεγάλες τιμές, καθώς βασίζεται στο Κριτήριο 1.8.

Μεγάλο ρόλο όμως στην σύγκλιση ή μη των αλγορίθμων έχει η **επιλογή του σημείου εκκίνησης** της αναζήτησης. Παρατηρήσαμε, ότι ένα κακό σημείο εκκίνησης, μπορεί πολύ εύκολα να μας δώσει λανθασμένα συμπεράσματα για τον υπολογισμό του ελαχίστου, και να εγκλωβιστεί σε ένα τοπικό ακρότατο. Σε αυτό, μπορεί να βοηθήσει πολύ η οπτικοποίηση της συνάρτησης που μελετάμε.