Lista 4 - Integração numérica

Quarta lista de exercícios da matéria de matemática computacional (CAP-239-4), do curso de pós-graduação em Computação Aplicada do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Docentes:

- Dr. Leonardo B. L. Santos
- Dr. Reinaldo Rosa

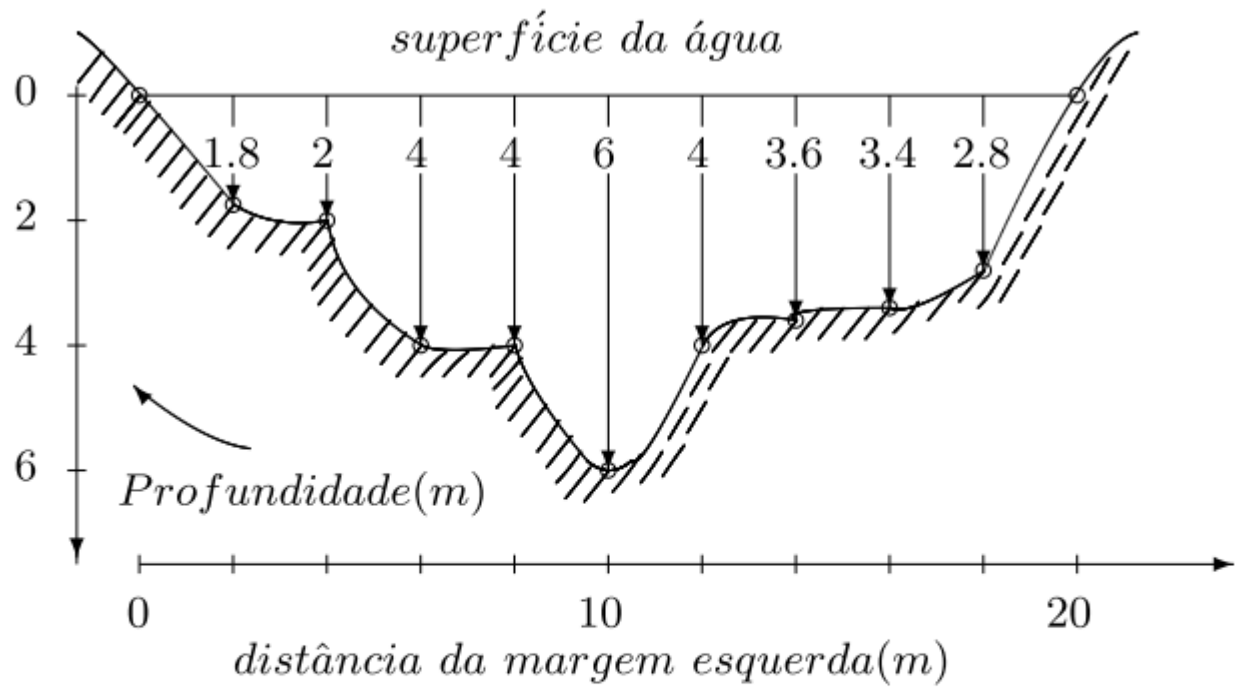
Discente:

- Felipe Menino Carlos

Exercícios

1) Mostre a área da seção reta da figura apresentada no contexto abaixo

A determinação da área da seção reta de rios é lagos é importante em projetos de prevenção de enchentes (para o cálculo de vazão da água) e nos projetos de reservatórios (para cálculo do volume total de água). A menos que dispositivos tipo sonar sejam usados na obtenção do perfil do fundo de rios/lagos, o engenheiro civil deve trabalhar com valores de profundidade, obtidos em pontos discretos da superfície. Um exemplo típico de seção reta de um rio está mostrado na figura a seguir:



Para o início deste exercício, o primeiro passo foi definir a tabela de valores que poderia ser utilizada no processo de integração, então, considerando a distância da margem esquerda (Metros) como x e cada uma das profundidades como a variável dependente y, um tabela abaixo foi criada

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	0	1.8	2.0	4.0	4.0	6.0	4.0	3.6	3.4	2.8	0

Com esta tabela a integração já pode ser realizada. Aqui, todos os métodos apresentados em sala de aula poderia ser utilizados para a realização do processo, porém como uma forma de buscar o processo mais prático para a integração, a regra dos trapézios composta foi utilizada.

O fato da regra ser composta está intimamente relacionado com as características da tabela de dados, onde há diversos subintervalos que precisam ser considerados. As Figuras abaixo apresentam a solução deste método "na mão".

Lista 4. integração numérica

1-) mostre a área da seção reta da figura apresentada no exercício.

1º → Conversão dos valores da figura em uma tabela

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	0	1.8	2	4	4	6	4	3.6	3.4	2.8	0

2º → Aplico regra do trapézio composta.

$h = \frac{20 - 0}{10} = \frac{20}{2} = 2$ (Passo discreto, seguindo o crescimento da tabela)

Apenas lembrando a regra do trapézio composta

$$A_t = \frac{h}{2} \cdot \left[y_0 + 2 \cdot \sum_{n=1} y_n + y_n \right]$$

Aplicando a fórmula

$$A_t = \frac{2}{2} \left[0 + 2[1.8 + 2 + 4 + 4 + 6 + 4 + 3.6 + 3.4 + 2.8] + 0 \right]$$

$$= 2 \cdot 31.6 = \boxed{63.2}$$

Um ponto relevante a este exercício é que, a quantidade de subdivisões inseridas precisa, necessariamente, ser a mesma da quantidade de itens presentes na tabela, isso ocorre já que, caso haja mais intervalos que pontos na tabela, não é possível gerar tais valores sem a utilização de outras técnicas.

Validação: Todos os resultados gerados e apresentados acima, foram validados com a implementação do método feita em C++

Sobre a escolha do método: Para este caso, a escolha da utilização da regra dos trapézios, como já informado, foi feito por uma questão de praticidade de aplicação.

Além do motivo da praticidade, podem ser a aproximação feita por um método é melhor que outra, isso considerando os métodos de integração por retângulos e por trapézios. Para avaliar as diferenças neste caso, foi feito a implementação da regra do retângulo, simples e composta, e então os dois métodos foram aplicados para verificar o resultado, que foram iguais nos dois casos.

Método dos retângulos

```
xt::xarray<double> yValues({0, 1.8, 2., 4., 4., 6., 4., 3.6, 3.4, 2.8, 0});

NumericalIntegration::RectangleRuleTable(yValues, 0., 20., 10.);

// Saída: 63.2
```

Método dos trapézios

```
NumericalIntegration::TrapezoidalRulePoints(yValues, 0., 20., 10.);

// Saída: 63.2
```

> Para este caso o resultado nos dois métodos foi o mesmo, porém isto não é uma regra, pode acontecer de um método apresentar mais precisão que outro.

Interpolação para aumentor de subdivisões do espaço: Ao trabalhar com as tabelas, acabei ficando com uma pequena curiosidade, até citei sobre isto no tópico de solução do exercício, o aumento da quantidade de subespaços em um contexto em que os dados são tabelas. A solução que encontrei para aumentar os subespaços foi interpolar os dados presentes na tabela, isso faz com que exista um polinômio que explica o comportamento da função em todos intervalos de valores da tabela, o que permite fazer espaços menores de trapézios.

Para fazer este teste, uma pequena implementação do método dos trapézios foi feita em Python. Em seguida a função de interpolação `spline` do pacote `scikit-learn` foi utilizada para a interpolação dos pontos na tabela, com a função interpolada disponível, a quantidade de intervalos pode ser aumentada.

```
def trapezoidal_rule(fnc, integral_start, integral_end, parts):
    h = (integral_end - integral_start) / parts
    interval = np.arange(integral_start, integral_end + h, h)

    y_values = fnc(interval[interval <= integral_end])
    result = y_values[0] + (2 * np.sum(y_values[1:-1])) + y_values[-1]

    return result * (h / 2)
```

Abaixo a função de interpolação, permitindo um subintervalo maior

```
import scipy.interpolate

x = list(range(0, 22, 2))
fx = [0, 1.8, 2., 4., 4., 6., 4., 3.6, 3.4, 2.8, 0]
fx_interp = scipy.interpolate.interp1d(x, fx)

trapezoidal_rule(fx_interp, 0, 20, 19)
```

Desta forma, os pontos podem ser integrados considerando mais partes, mesmo que as mesmas não estejam definidas na tabela de dados. Pode ser que, mesmo aumentando a quantidade de pontos, problemas com precisão sejam enfrentados, já que, com a aplicação de tal ideia, erros associados a interpolação podem intererir no resultado da integração.

> O método de interpolação spline não foi abordado durante as aulas, porém, como uma forma de realizar testes e a validação da ideia de interpolação para a possibilidade de aumentar os subespaços ele foi utilizado.

2) Seguindo os passos descritos abaixo, apresente os resultados

- Escolha um polinômio A, de ordem 3;
- Interpole A por um de ordem 2, B, dados 3 pontos
- Calcule a integral de A e a integral de B analiticamente
- Calcule a Integral de B pela Regra do ponto médio
- Calcule a Integral de B pela Regra dos trapézios, para n crescente
- Analise as diferenças encontradas – e tente generalizar seu resultado

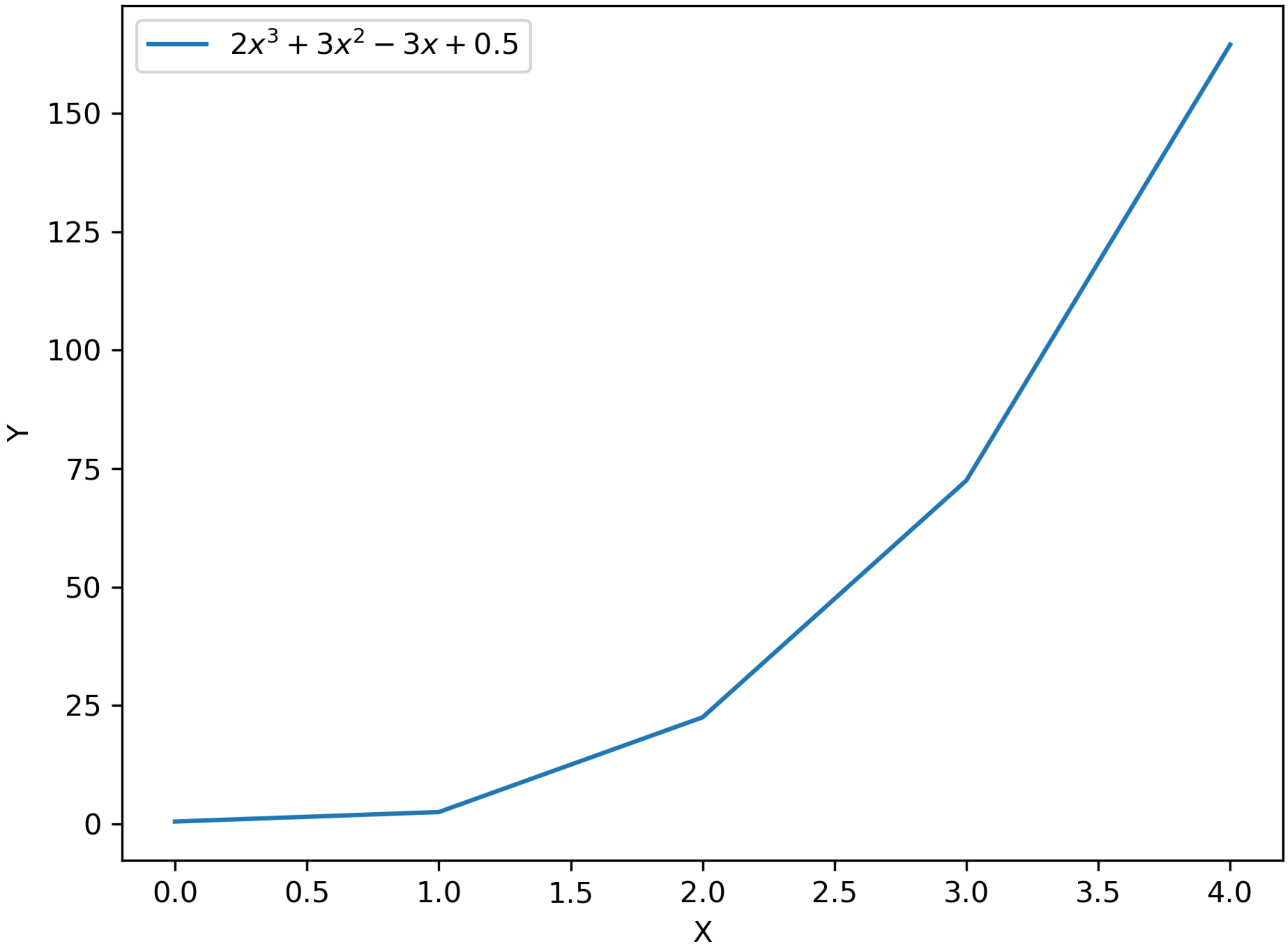
Vamos a cada um dos passos do exercício

- 1°) Definição do polinômio A

O polinômio A foi definido como

$$A = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 0.5$$

Tal polinômio pode ser representado graficamente como



- 2°) Interpole A por um de ordem 2, B, dados 3 pontos

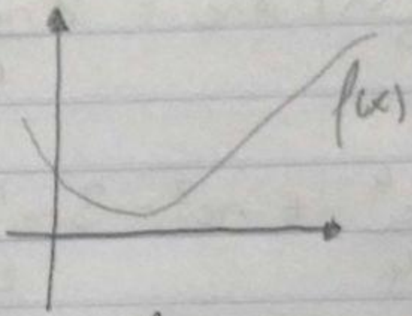
Para este caso, a interpolação foi feita através com método de Lagrange com a seleção de 3 pontos gerados com o polinômio A.

→ Definição do polinômio A

$$A_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 0.5$$

→ Interpole A por um de ordem 2, B, dados 3 pontos.

	x_0	x_1	x_2
x	1	1.5	2
$f(x)$	2.5	9.5	22.5



$f(x) = A_3$

Interpolando com Lagrange.

$$L_0(x) = \frac{(x-1.5)}{(1-1.5)} \cdot \frac{(x-2)}{(1-2)} = \frac{(x-1.5)}{-0.5} \cdot \frac{(x-2)}{-1} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x - 1.5x + 3)}{0.5} = \frac{(x^2 - 3.5x + 3)}{0.5}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)}{(1.5-1)} \cdot \frac{(x-2)}{(1.5-2)} = \frac{(x-1)}{0.5} \cdot \frac{(x-2)}{-0.5} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - x + 2}{-0.25} = \frac{x^2 - 3x + 2}{-0.25}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)}{(2-1)} \cdot \frac{(x-1.5)}{(2-1.5)} = \frac{(x-1)}{1} \cdot \frac{(x-1.5)}{0.5} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1.5x - x + 1.5)}{0.5} = \frac{x^2 - 2.5 + 1.5}{0.5}$$

$$P_2(x) = f_0 \cdot L_0(x) + f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x) =$$

$$= 2.5 \cdot \left[\frac{x^2 - 3.5x + 3}{0.5}\right] + 9.5 \cdot \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{-0.25}\right] + 22.5\left[\frac{x^2 - 2.5x + 1.5}{0.5}\right]$$

$$= 2.5\left[2x^2 - 7x + 6\right] + 9.5 \cdot \left[-4x^2 + 12x - 8\right] + 22.5\left[2x^2 - 5x + 3\right]$$

$$= 12x^2 - 16x + 6.5$$

- 3°) Calcule a integral de A e a integral de B analiticamente

- Calcule a integral de A e B analiticamente

$$A_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x + 0.5$$

$$\int A_3(x)\, dx = 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 0.5x$$

$$= 2\frac{x^4}{4} + x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 0.5x$$

$$B_2(x) = 12x^2 - 16x + 6.5$$

$$\int B_2(x)\, dx = \frac{12x^3}{3} - \frac{16x^2}{2} + 6.5x =$$

$$= 4x^3 - 8x^2 + 6.5x$$

Aplicando a função encontrada no intervalo definido

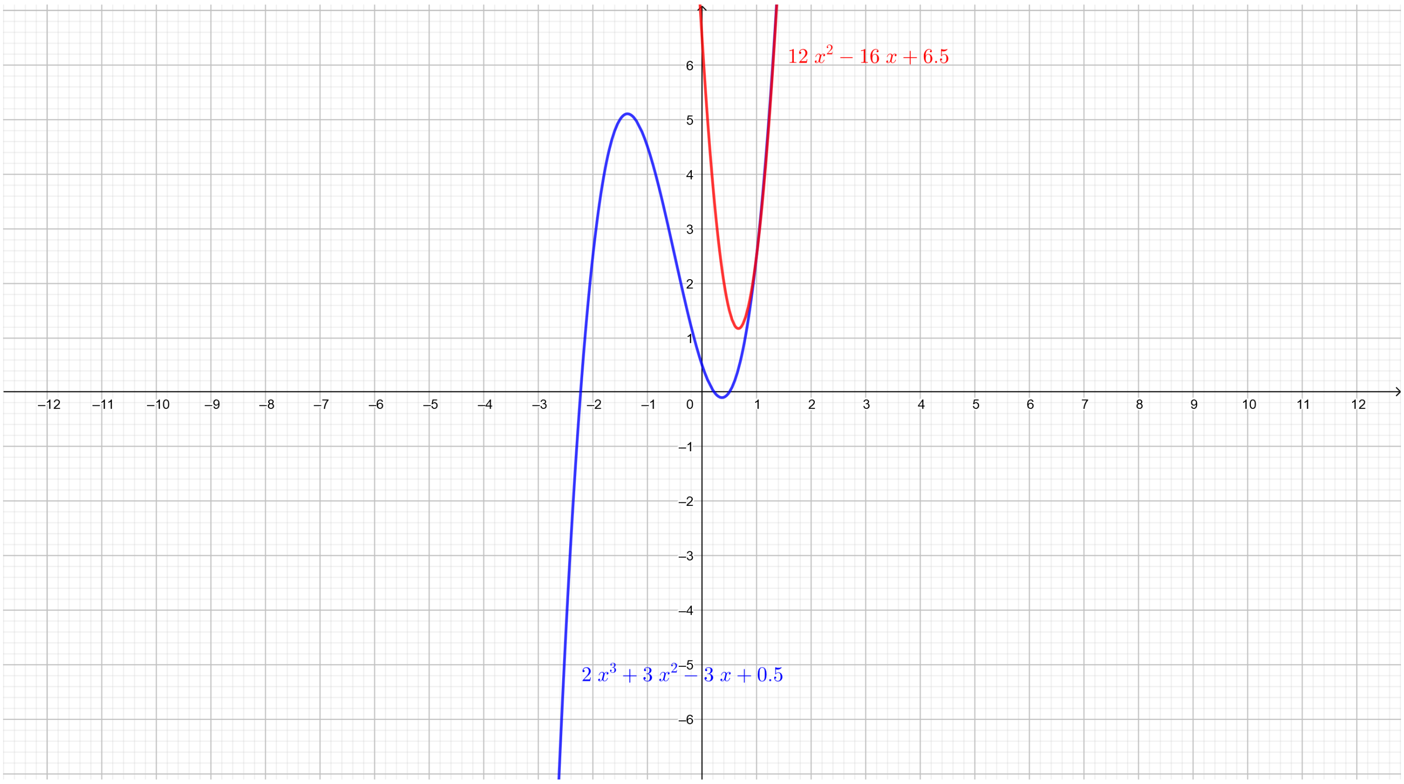
$$\left. 2\frac{x^4}{4} + x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 0.5x \right|_1^2 = 10.5$$

$$\left. 4\underline{x^3} - 8x^2 + 6.5x \right|_2^2 = 10.5$$

- 4°) Calcule a Integral de B pela Regra do ponto médio

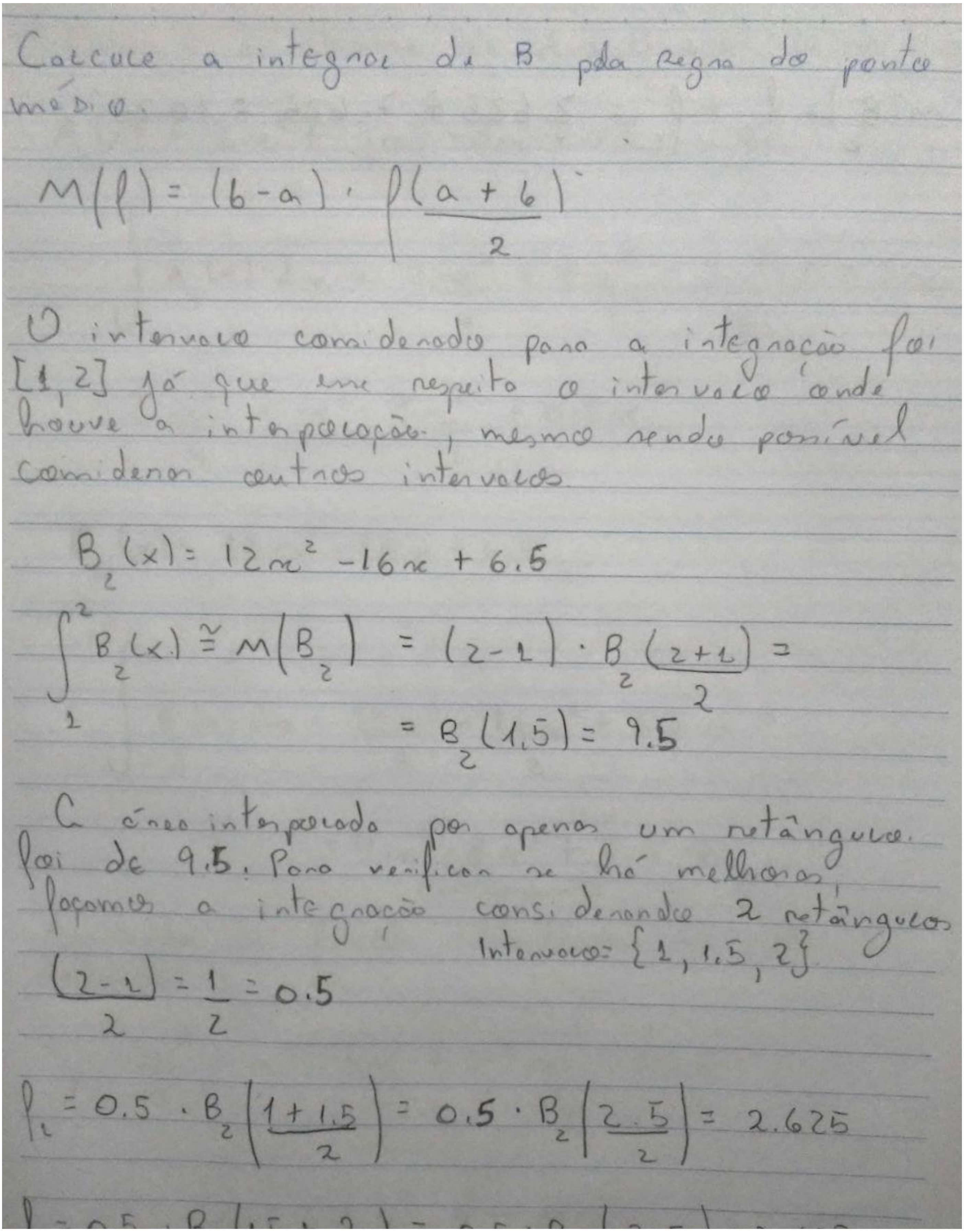
Para a aplicação da regra do ponto médio, foi necessário encontrar os limites de integração. A definição foi feita de acordo com os pontos selecionados para a geração do polinômio B, sendo o limite inferior o valor do menor valor de x dos pontos selecionados, e o maior valor de x utilizado para o limite superior.

Para tal decisão, as integrais calculadas no passo anterior foram visualizadas graficamente, da mesma forma que apresentado abaixo



Perceba que outros valores poderia ser utilizados, porém, para este caso, foi assumido que o comportamento anterior ou após os pontos interpolados podem não representar a realidade/comportamento da função aproximada, por isso, só foram considerados os valores dentro deste intervalo.

A Figura abaixo apresenta os passos "na mão" para a aplicação da regra do ponto médio.


Calcule a integral de B pela regra do ponto médio.

$$M(f) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

O intervalo considerado para a integração foi [1, 2] já que ele respeita o intervalo onde houve a interpolação, mesmo sendo possível considerar outros intervalos.

$$B_2(x) = 12x^2 - 16x + 6.5$$

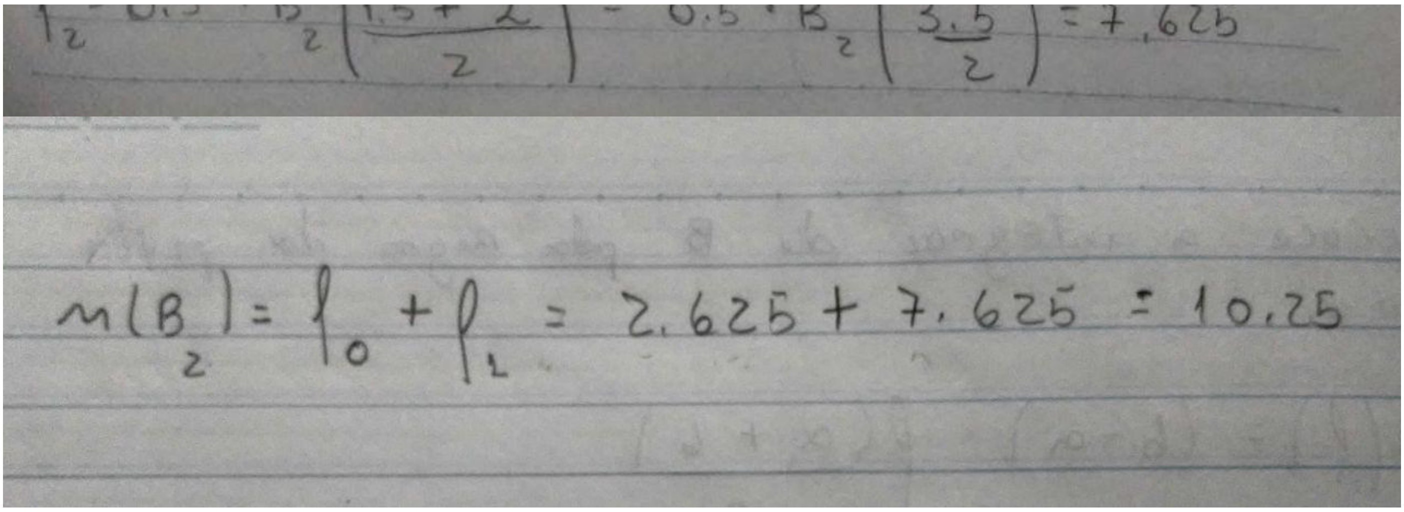
$$\int_1^2 B_2(x) \cong M(B_2) = (2-1)\cdot B_2\left(\frac{2+1}{2}\right) = B_2(1.5) = 9.5$$

A área interpolada por apenas um retângulo foi de 9.5. Para verificar se há melhoras, façamos a integração considerando 2 retângulos

Intervalo = {1, 1.5, 2}

$$\frac{(2-1)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f_1 = 0.5 \cdot B_2\left(\frac{1+1.5}{2}\right) = 0.5 \cdot B_2\left(\frac{2.5}{2}\right) = 2.625$$


$f_2 = 0.5 \cdot B_2\left(\frac{1.5+2}{2}\right) = 0.5 \cdot B_2\left(\frac{3.5}{2}\right) = 7.625$

$m(B_2) = f_0 + f_1 = 2.625 + 7.625 = 10.25$

- 5°) Calcule a Integral de B pela Regra dos trapézios, para n crescente

Para a realização desta etapa, foi feita a utilização da implementação da regra dos trapézios compostas.

Para tal, primeiro o polinômio B foi definindo dentro do código

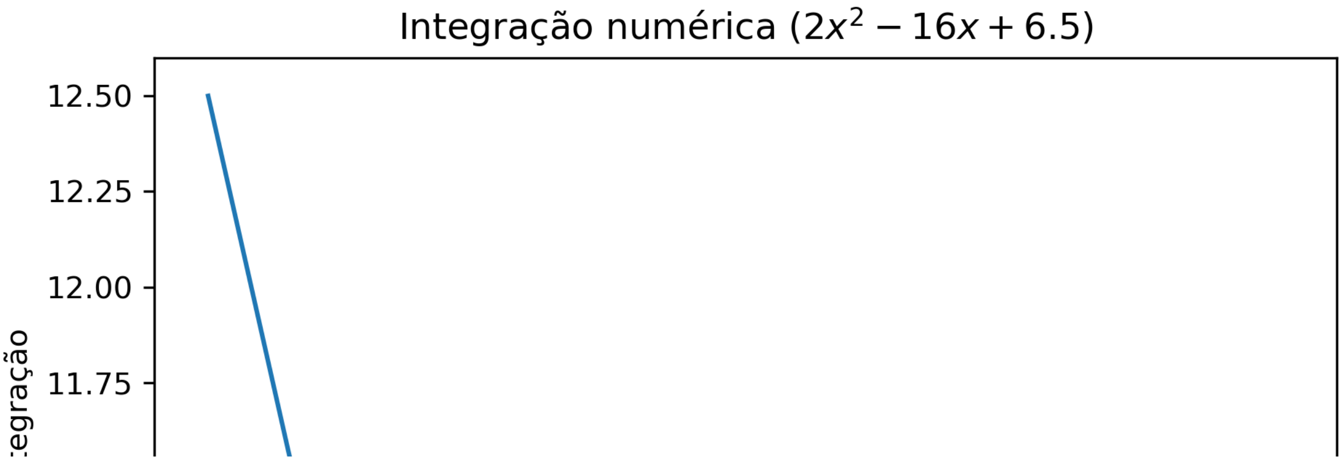
```
double f(double x)
{
    return (12 * std::pow(x, 2)) + (-16 * x) + 6.5;
}
```

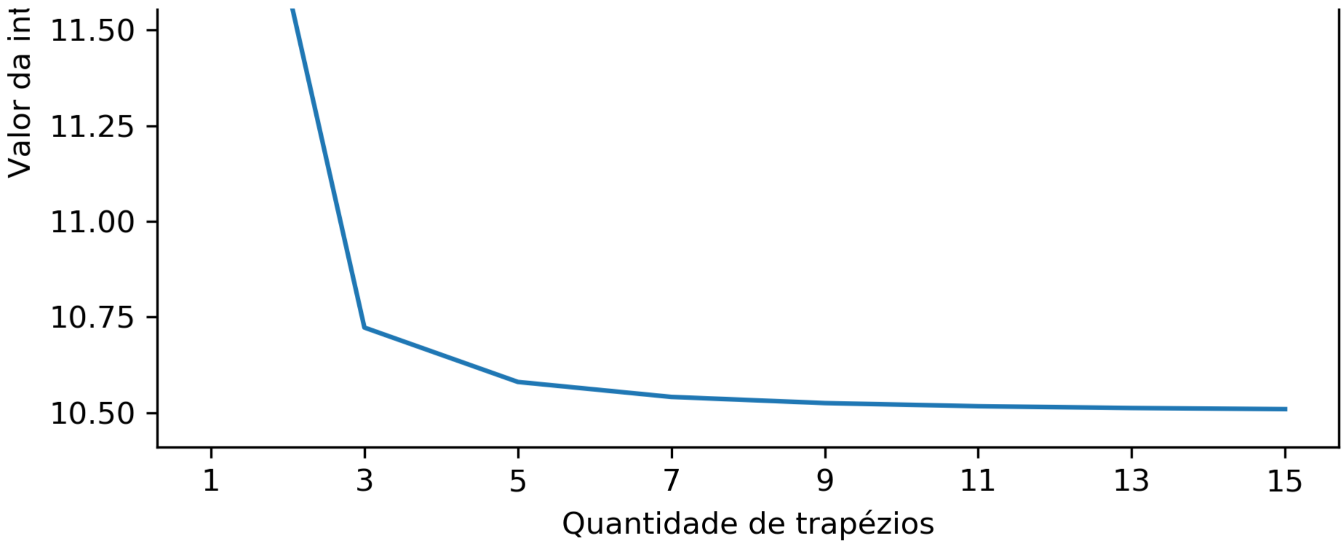
Após a definição, o polinômio B foi utilizado para gerar um conjunto de valores $[1, 17]$ para verificar o comportamento da integração neste intervalo.

```
std::vector<double> integrationsSplited;

for (double i: xt::arange(1, 17, 2))
{
    integrationsSplited.push_back(NumericalIntegration::TrapezoidalRuleRepeated(f, 1
}
```

Os valores resultantes da integração feita acima são apresentados graficamente na Figura abaixo.



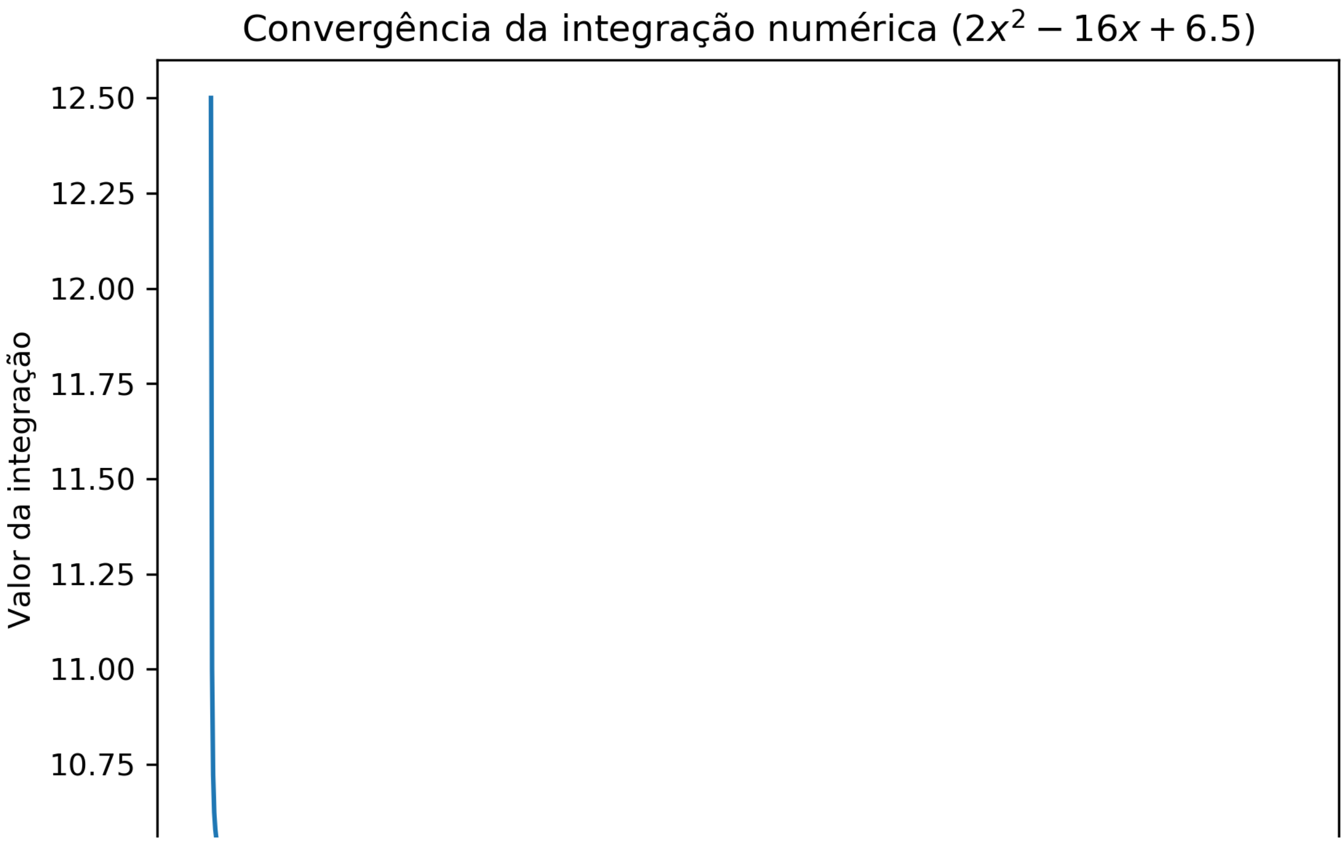


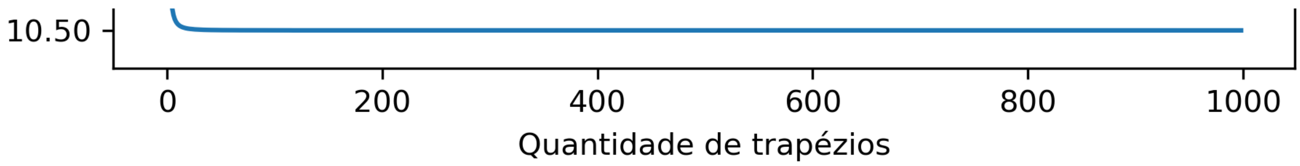
Ao visualizar o resultado é possível perceber que a convergência do método está próxima a 10.5, já que, quanto maior a quantidade de trapézios utilizados, mais o resultado se aproxima de tal valor.

Como forma de testar, o mesmo processo feito acima foi realizado novamente, porém aqui, com uma quantidade de trapézios no intervalo $[0, 1000)$

```
std::vector<double> integrations1000;

for (double i: xt::arange(1, 1000))
{
    integrations1000.push_back(NumericalIntegration::TrapezoidalRuleRepeated(f, 1., 
}
```





A hipótese levantada anteriormente foi confirmada, a convergência da integração numérica do polinômio B é 10.5. Na Figura é possível perceber que, depois de um certo ponto, os valores não se alteram mais, mesmo com a quantidade crescentes de trapézios.

- 6°) Analise as diferenças encontradas – e tente generalizar seu resultado

Com base nos resultados apresentados no passo anterior, foi possível perceber que a convergência do resultado da integração está em 10.5. Como forma de validar, o processo de aproximação da integração numérica, a integral analítica do polinômio B foi feita.

$$\int_1^2 (12x^2 - 16x + 6.5) = 10.5$$

Isto é uma maneira de confirmar que o resultado aproximado pela integração numérica não difere dos resultados calculados analiticamente, o que nos permite afirmar que, neste caso, não houveram erros significativos durante a aproximação.

Considerações finais: Durante a busca para a solução desta lista de exercícios, as seguintes conclusões puderam ser tomadas

- O aumento da subdivisão de espaços (Tendendo para zero), faz com que a precisão seja maior, quando comparado com a integral analítica, chegando a um ponto em que, o aumento dos subespaços já não fazem diferença e o valor aproximado é o mesmo que a solução analítica entrega;
- A interpretação geométrica para a integração é muito importante para que os métodos numéricos façam sentido e possam ser adaptados a diferentes casos;
- A ordem dos tipos de métodos que foram aplicados nos exercícios são: Formulas de Quadratura > Newton-cotes > Regra do trapézio (Caso particular de newton-cotes)