Lista 3 - Interpolação por polinômios

Terceira lista de exercícios da matéria de matemática computacional (CAP-239-4), do curso de pós-graduação em Computação Aplicada do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Docentes:

- Dr. Leonardo B. L. Santos
- Dr. Reinaldo Rosa

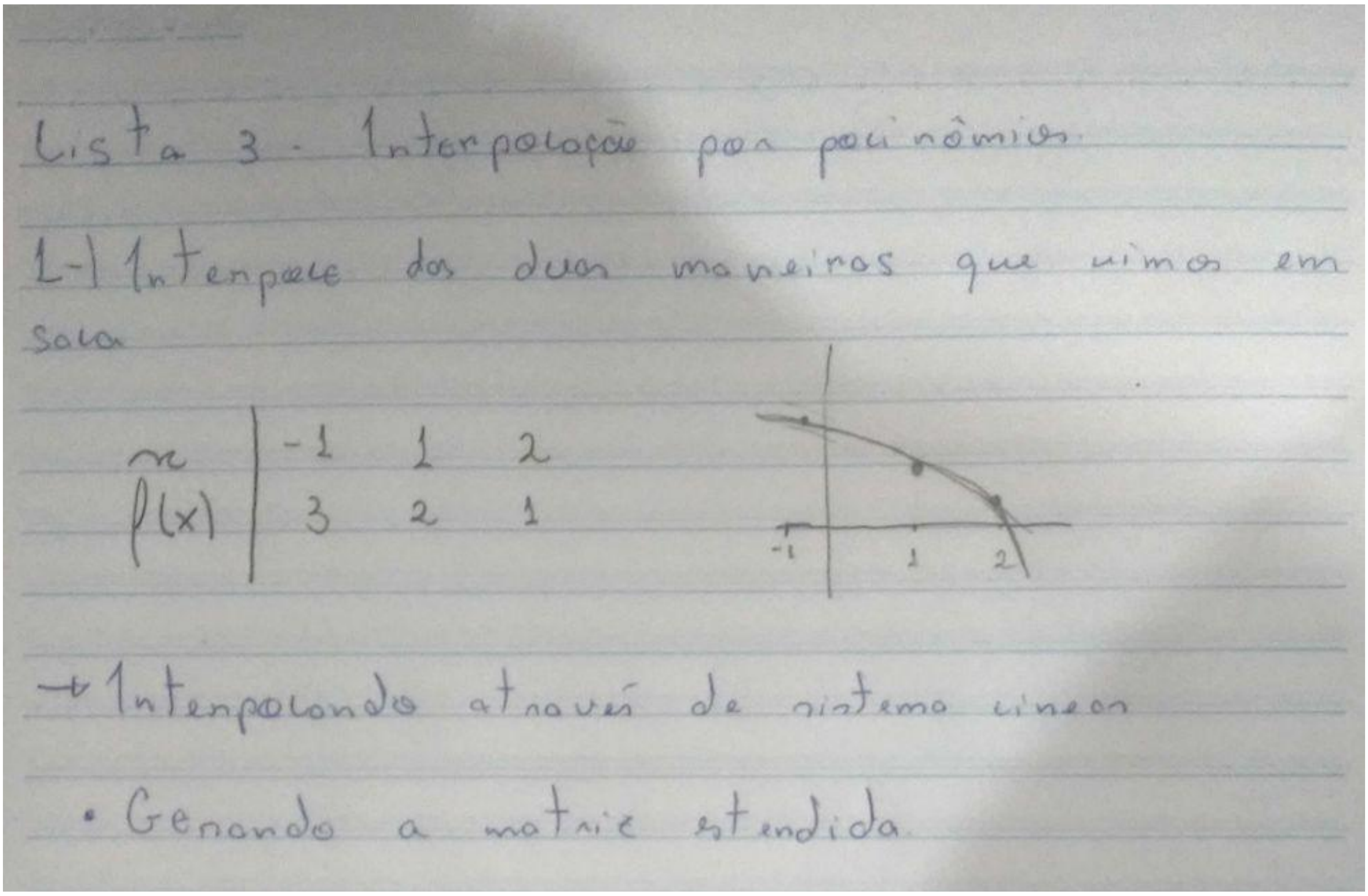
Discente:

- Felipe Menino Carlos

Exercícios

1) Defina três pares de valores na tabela abaixo e interpola a mesma através das duas maneiras apresentadas em sala de aula (Sistema linear e Método de Lagrange)

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$


Lista 3 - Interpolação por polinômios

1-) Interpole das duas maneiras que vimos em sala

x	-1	1	2
$f(x)$	3	2	1

→ Interpolando através de sistema linear

• Gerando a matriz estendida

A tabela pode ser representada com: $ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a\cdot(-1)^2 + b\cdot -1 + c = 3 \\ x_1 &= a\cdot(1)^2 + b\cdot 1 + c = 2 \\ x_2 &= a\cdot(2)^2 + b\cdot 2 + c = 1 \end{aligned}\right\} \text{Criando forma de sistema} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{gerando matriz estendida} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Aplicando o método de eliminação gaussiana para a solução do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Pivô} = a_{11} = 1$$

$$m_{L_2} = \frac{1}{1} \quad (L_2 - (m_{L_2}\cdot L_1) \rightarrow L_2)$$

$$m_{L_3} = \frac{4}{1} \quad (L_3 - (m_{L_3}\cdot L_1) \rightarrow L_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & -11 \end{array}\right] \quad \text{Pivô} = a_{22} = 2$$

$$m_{L_3} = \frac{6}{2} = 3 \quad (L_3 - (m_{L_3}\cdot L_2) \rightarrow L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \end{array}\right] = A^{(2)} | b^{(2)}$$

Finalizando o meg e gerando os valores a, b, c

$-3c = -8 \Rightarrow c = 2.6667$

$2b = -1$

$b = -0.5$

$-a = 0.5 + 2.6667 - 3$

$a = -0.16667$

Juntando as equações $(ax^2 + bx + c)$

$f(x) = -0.16667 \cdot x^2 + (-0.5x) + 2.6667$

$f(1) = 2 \; ; \; f(2) = 1$

→ Interpolando através do método de Lagrange

	x_0	x_1	x_2
x	-1	1	2
$f(x)$	3	2	1

• Para iniciar, geramos os polinômios de Lagrange.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} = \frac{(x-1)}{(-2)} \cdot \frac{(x-2)}{-3} =$$

$$= \frac{(x^2 - 3x + 2)}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)}{2} \cdot \frac{(x-2)}{-1} =$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)}{(2+1)} \cdot \frac{(x-1)}{(2-1)} =$$

$$\frac{x^2 - 1}{3}$$

Com os polinômios de Lagrange gerados, é possível definir o polinômio interpolador $P_2(x)$

$$P_2(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) =$$

$$P_2(x) = 3 \cdot \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{6}\right] + 2\left[\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right] + \left[\frac{x^2 - 1}{3}\right]$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{8}{3}$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{8}{3}.$$

Testando o polinômio para verificar os valores gerados.

$$P_2(-1) = -\frac{1}{6} \cdot (-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot -1\right) + \frac{8}{3} =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} = 3 \quad //$$

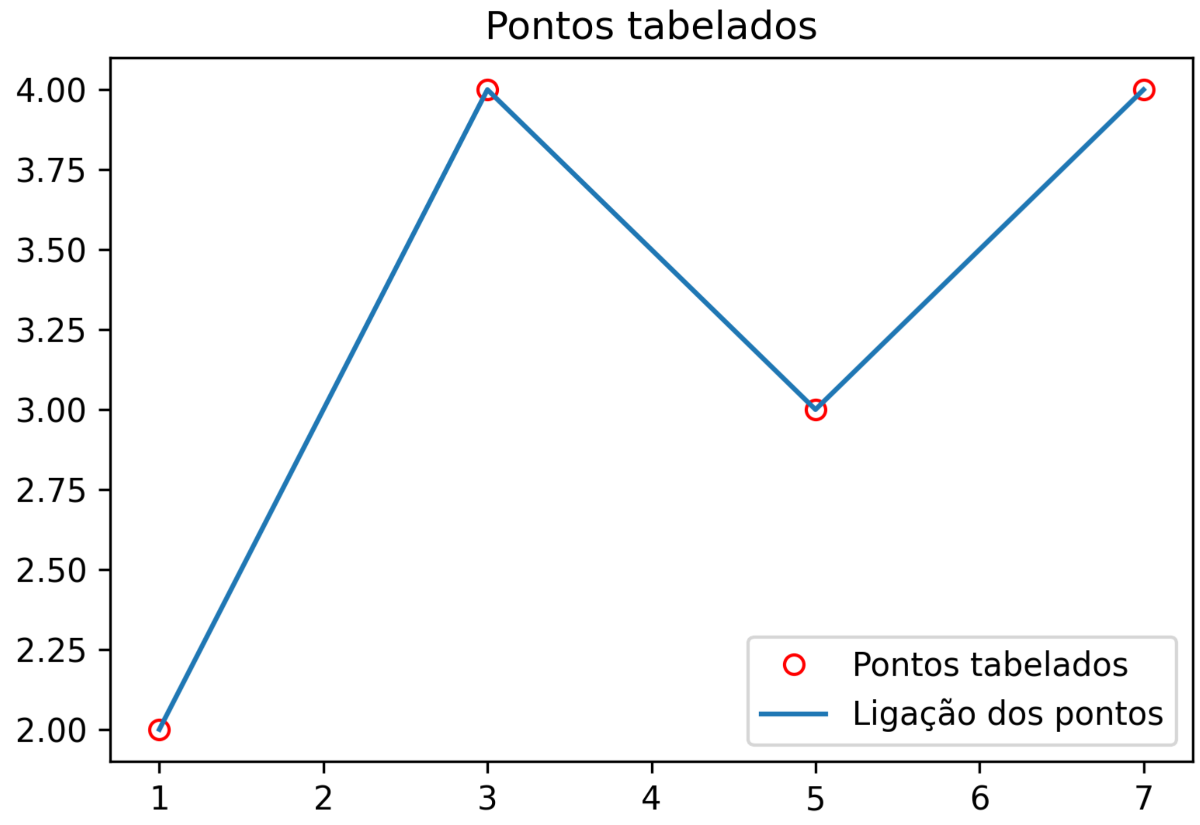
Avaliação do resultado: Como forma de avaliar o resultado, foi feita a utilização do Método de Eliminação Gaussiana (Implementado na lista 2) e também do método de interpolação de Lagrange (Implementado em C++)

2) Para uma tabela com 4 pontos, vá, progressivamente (de 1 a 3), aumentando o grau do polinômio interpolador - compare graficamente as soluções e discuta uma "amostragem preferencial"

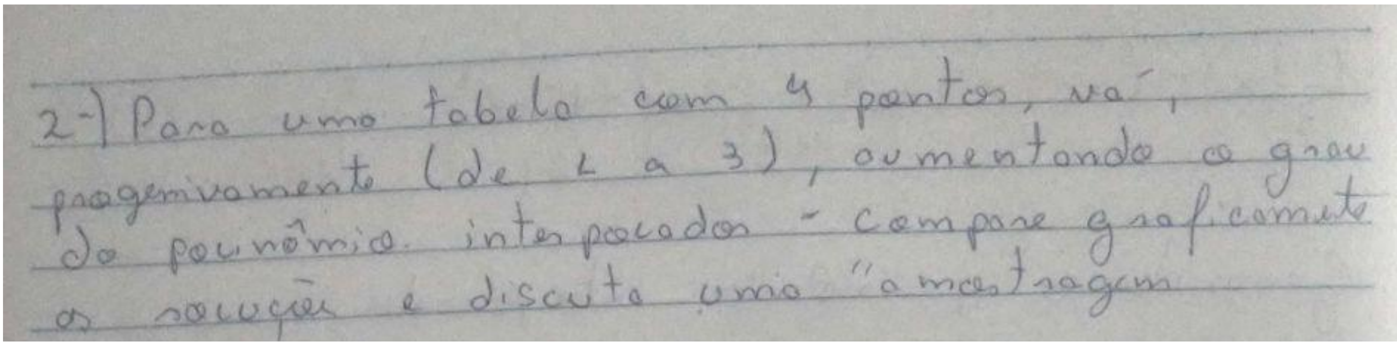
Para a realização deste exercício, foi escolhido um conjunto de pontos que tem seu formato parecido com uma pequena curva. A escolha foi feita por conta do interesse em ver como a interpolação funciona para funções com este formato.

x	**1**	**3**	**5**	**7**
$f(x)$	2	4	3	4

A visualização dos dados é apresentada abaixo.



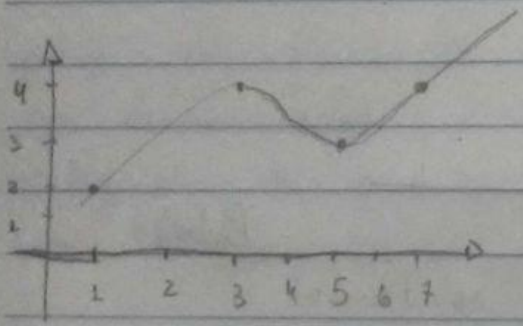
Com esses elementos definidos a interpolação de Lagrange foi aplicada, como apresentado nos passos abaixo.


2-) Para uma tabela com 4 pontos, vá, progressivamente (de 1 a 3), aumentando o grau do polinômio interpolador - compare graficamente as soluções e discuta uma "amostragem

preferencial"

→ Definindo a tabela

x	1	3	5	7
$f(x)$	2	4	3	4



Co aplicar a interpolação de Lagrange, os seguintes coeficientes Polinômios foram gerados

$$L_0(x) = \frac{(x^3 - 15x^2 + 71x - 105)}{-48}$$

$$L_1(x) = \frac{(x^3 - 13x^2 + 47x - 35)}{16}$$

$$L_2(x) = \frac{(x^3 - 11x^2 + 31x - 21)}{-16}$$

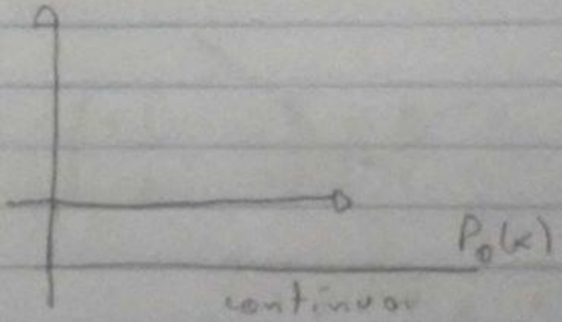
$$L_3(x) = \frac{(x^3 - 9x^2 + 23x - 15x)}{48}$$

Gerando o polinômio interpolador, temos:

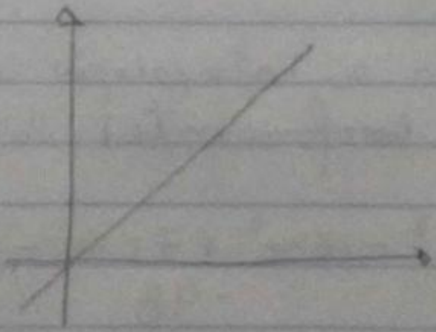
$$P_3(x) = \frac{5x^3}{48} - \left(\frac{21x^2}{16}\right) + \left(\frac{235x}{48}\right) - \frac{27}{16}$$

Para realizar uma comparação gráfica o polinômio foi decomposto.

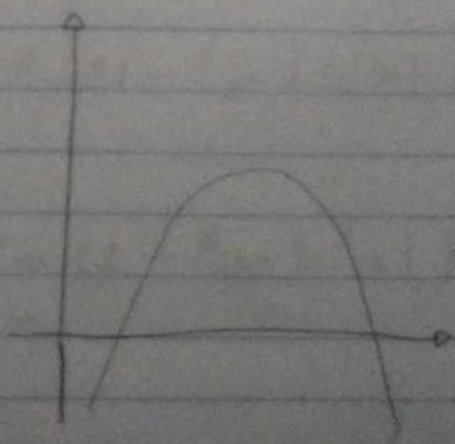
$$P_0(x) = -\frac{27}{16}$$



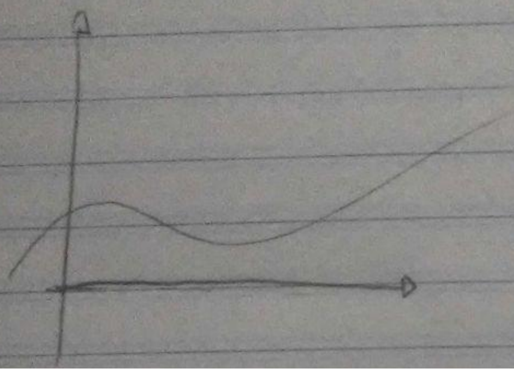
$$P_1(x) = \frac{235x}{48} - \frac{27}{16}$$

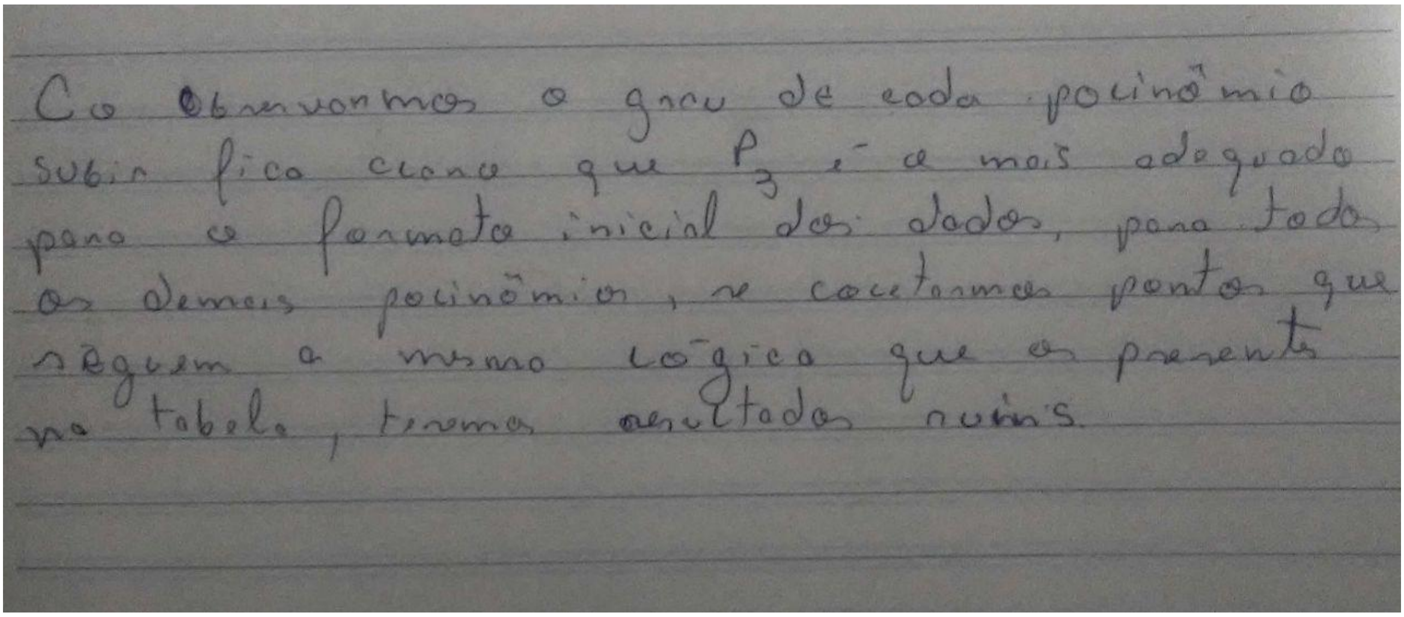


$$P_2(x) = -\frac{21x^2}{16} + \frac{235x}{48} - \frac{27}{16}$$



$$P_3(x) = \frac{5x^3}{48} - \left(\frac{21x^2}{16}\right) + \left(\frac{235x}{48}\right) - \frac{27}{16}$$





Co observamos o grau de cada polinômio subir fica claro que P_3 é o mais adequado para o formato inicial dos dados, para todos os demais polinômios, se coletarmos pontos que seguem a mesma lógica que os presentes na tabela, teremos resultados ruins.

Com a conclusão da aplicação do método, os seguintes polinômios de Lagrange foram gerados

$$l_0(x) = -\frac{x^3}{48} + \frac{5x^2}{16} - \frac{71x}{48} + \frac{35}{16}$$

$$l_1(x) = \frac{x^3}{16} - \frac{13x^2}{16} + \frac{47x}{16} - \frac{35}{16}$$

$$l_2(x) = -\frac{x^3}{16} + \frac{11x^2}{16} - \frac{31x}{16} + \frac{21}{16}$$

$$l_3(x) = \frac{x^3}{48} - \frac{3x^2}{16} + \frac{23x}{48} - \frac{5}{16}$$

Para a geração do polinômio interpolador, foi feito

$$f_0 * l_0(x) + f_1 * l_1(x) + f_2 * l_2(x) + f_3 * l_3(x)$$

Gerando assim, o seguinte polinômio interpolador

$$P_3(x) = \frac{5x^3}{48} - \frac{21x^2}{16} + \frac{235x}{48} - \frac{27}{16}$$

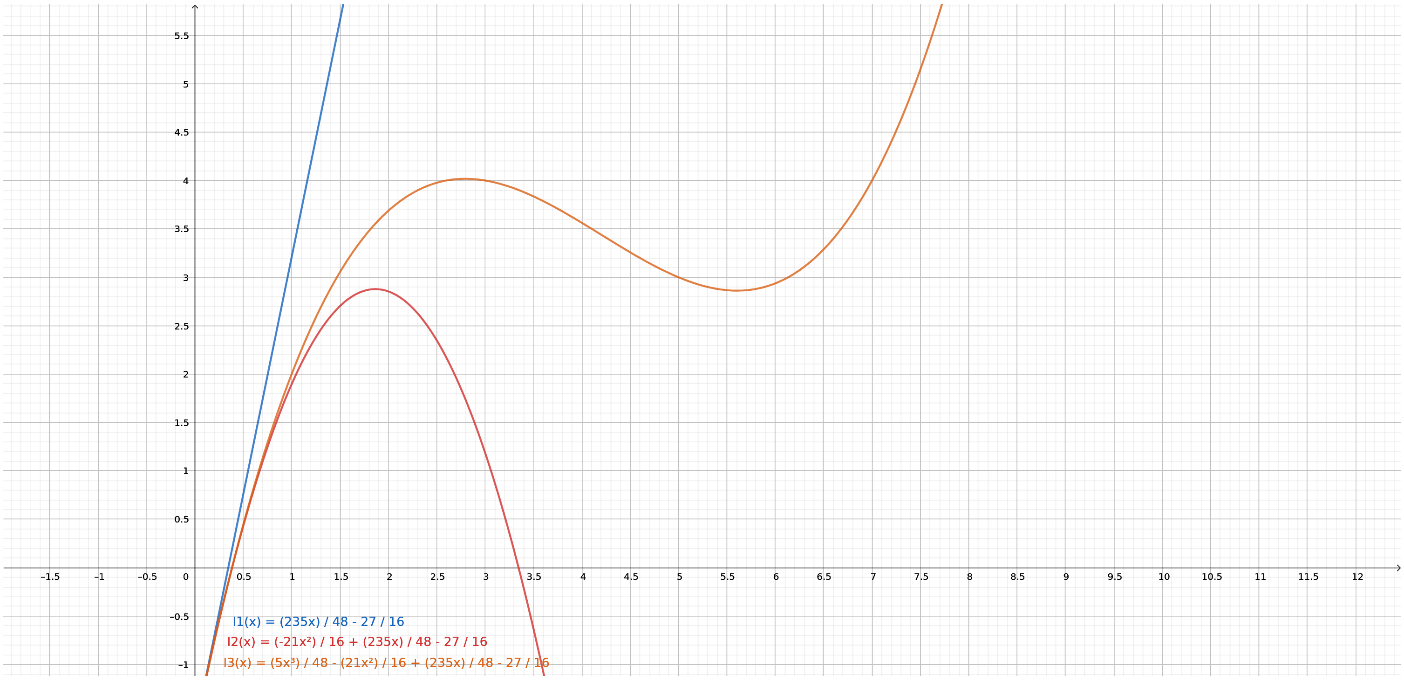
Teste com os graus de polinômios: O objetivo deste teste foi verificar o comportamento dos polinômios gerados, desta forma, o polinômio P_3 foi decomposto em 3 polinômios, sendo esses gerados de P_1 até P_3.

$$P_1(x) = \frac{235x}{48} - \frac{27}{16}$$

$$P_2(x) = -\frac{21x^2}{16} + \frac{235x}{48} - \frac{27}{16}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3}{48} - \frac{21x^2}{16} + \frac{235x}{48} - \frac{27}{16}$$

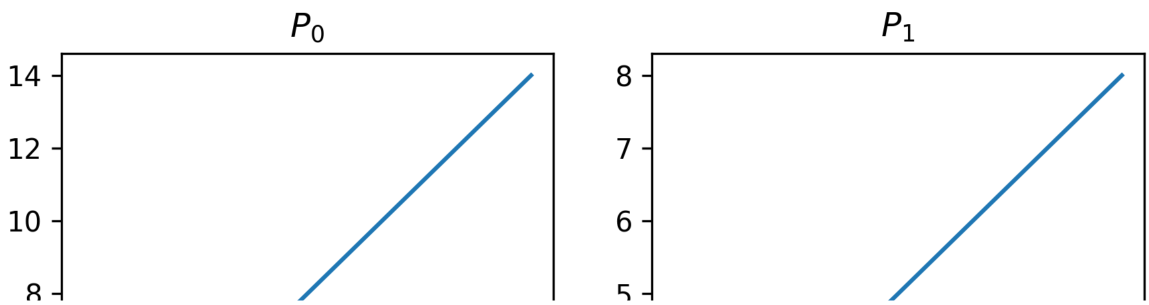
Após a decomposição, cada um dos polinômios gerados pode ser visualizado separadamente, fazendo com que o comportamento e influência de cada um desses no P_3 fosse melhor compreendida.

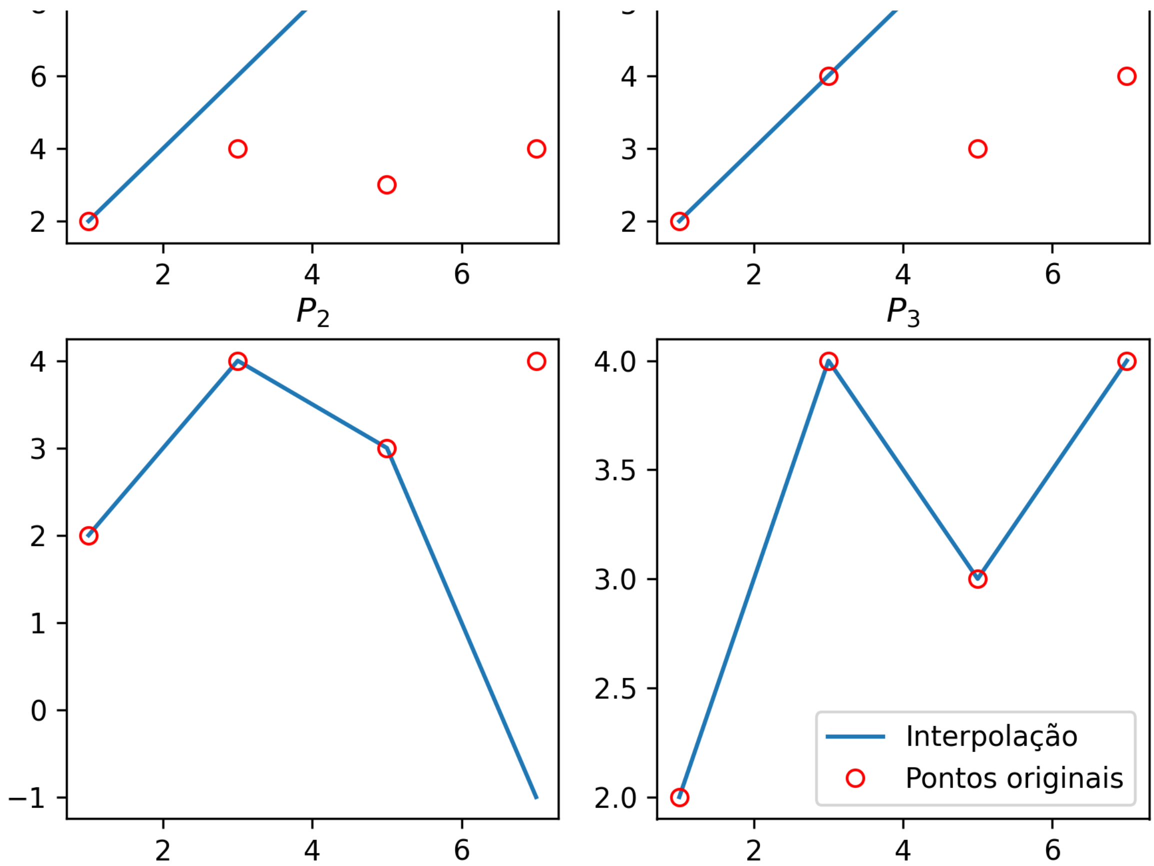


Perceba que, para o caso do comportamento da função que estava sendo analizada, o aumento do grau do polinômio foi extretamente necessário para que houvesse a convergência entre o formato original e o interpolado, mas interessante apontar também que, para o caso de outras funções sendo interpoladas, a depender de seu comportamento, um polinômio de maior grau nem seja necessário, sendo um de menor grau suficiente para a interpolação em boa parte dos pontos

Teste com a variação da quantidade de pontos: Após realizar a decomposição do polinômio interpolador, surgiu a curiosidade em entender como cada um dos pontos influência no processo de interpolação dos dados. Então, o processo de interpolação de Lagrange foi aplicado várias sobre o conjunto potência (2^A) da tabela de pontos, considerando que, para cada caso, um conjunto de pontos foi utilizando.

Ou seja, para a geração do primeiro polinômio interpolador P_0, apenas um ponto foi utilizado, para o P_1 dois pontos foram utilizados, seguindo essa lógica até todos os pontos terem sido utilizados. O resultado é apresentado abaixo



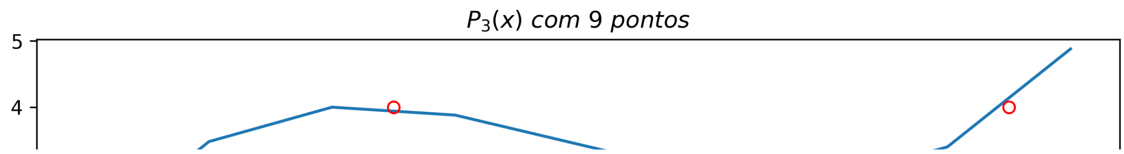


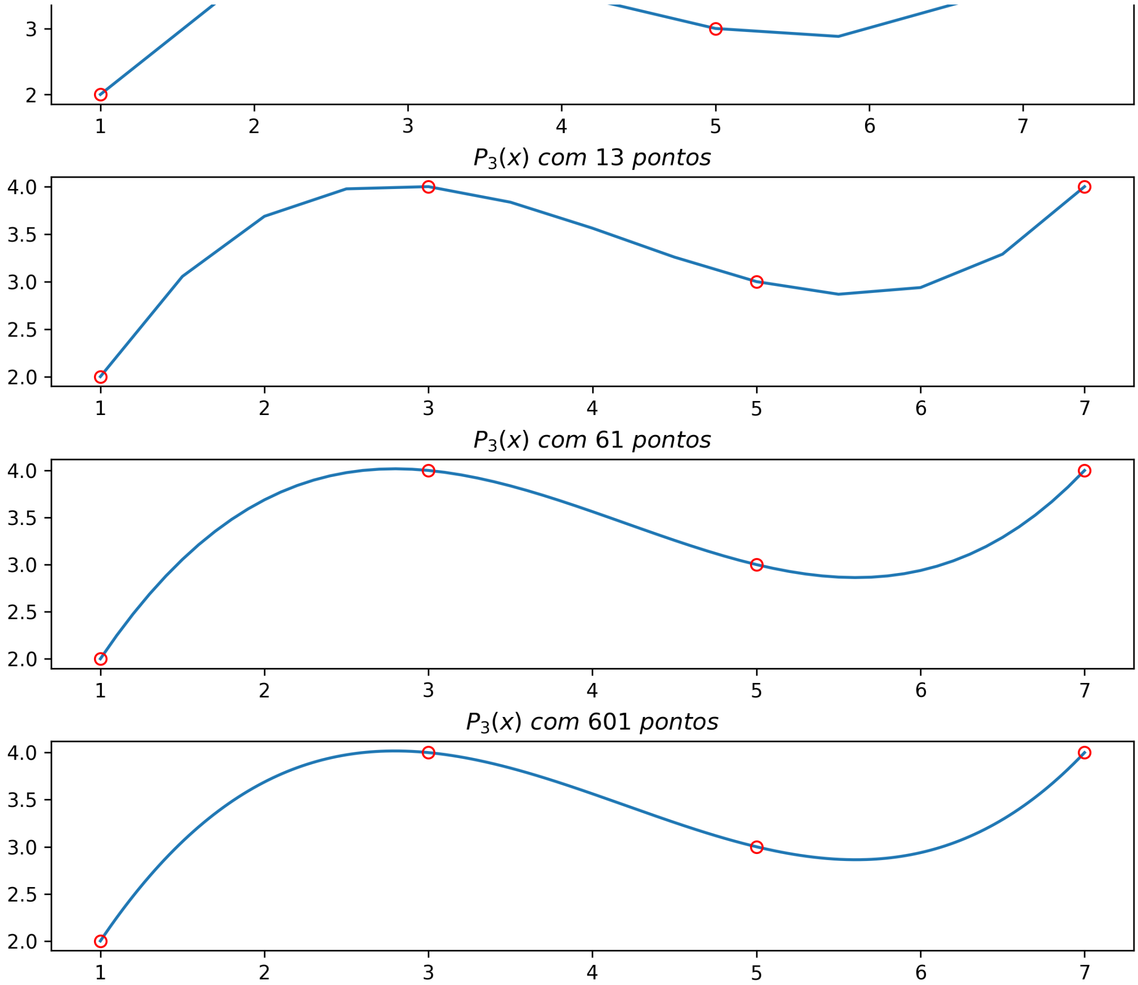
Através desse resultado é possível perceber como o ajuste vai sendo feito para o formato dos pontos que estão sendo considerados na interpolação.

Teste com vários valores gerados pela função interpoladora: Com a finalização do teste anterior, como forma de testar o polinômio interpolador resultante de todo o processo, interpolações com pontos dentro do intervalo interpolado foram feitas.

Os resultados foram condizentes, todos seguindo a lógica da curva que é modelada pelos pontos da tabela. Porém, em todos os testes o comportamento interpolado tinha um comportamento "quadrado", sendo representado por uma curva sem nenhum tipo de suavização, parecendo apenas com a ligação de vários pontos por uma reta (Que era exatamente o que estava ocorrendo).

Então, assumindo esse comportamento da função interpoladora, de ligar vários pontos, seguindo o comportamento interpolado, foi gerado alguns testes variando a quantidade de pontos interpolados através do polinômio de interpolação.





Com este resultado fica claro entender a maneira como o polinômio de interpolação busca convergir seu resultado para o comportamento utilizado como base para a interpolação.

Considerações finais: Para finalizar esta lista de exercícios, fazendo algumas buscas, é possível fazer algumas afirmações:

- Métodos de interpolação por polinômios podem não apresentar bons resultados com o aumento de pontos, como a intuição pode nos fazer pensar. Consulte Fenómeno de Runge;
- Ao realizar interpolações com polinômios estamos buscando formas de `moldar` o polinômio para um formato que, no mínimo passe pelos pontos considerados no processo de interpolação;
- Nem todo polinômio pode ser interpolado (de maneira satisfatória) por este método, dependendo da disposição dos pontos, o polinômio interpolador resultante do processo apresenta comportamentos distantes dos esperados.

> Caso fique interessado em saber mais sobre o método de Lagrange e seus limites de aplicação, pode ser legal começar por esta discussão no Quora.