Lista 2 - Sistemas lineares

Segunda lista de exercícios da matéria de matemática computacional (CAP-239-4), do curso de pós-graduação em Computação Aplicada do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Docentes:

- Dr. Leonardo B. L. Santos
- Dr. Reinaldo Rosa

Discente:

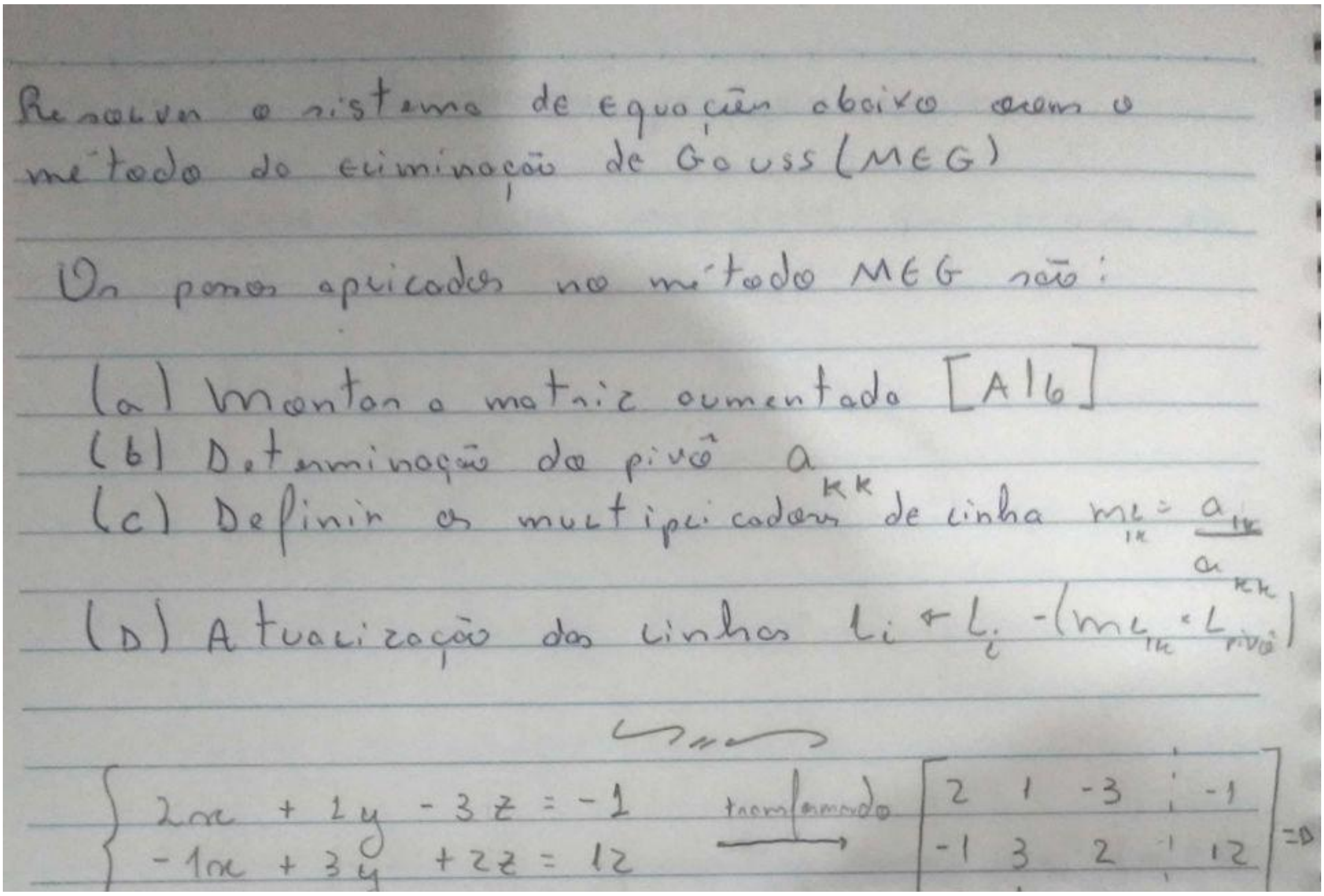
- Felipe Menino Carlos

Exercícios

Abaixo são apresentados os exercícios da lista 2 e suas soluções

1 - Realize a solução do sistema linear através do Método da Eliminação de Gauss (MEG)

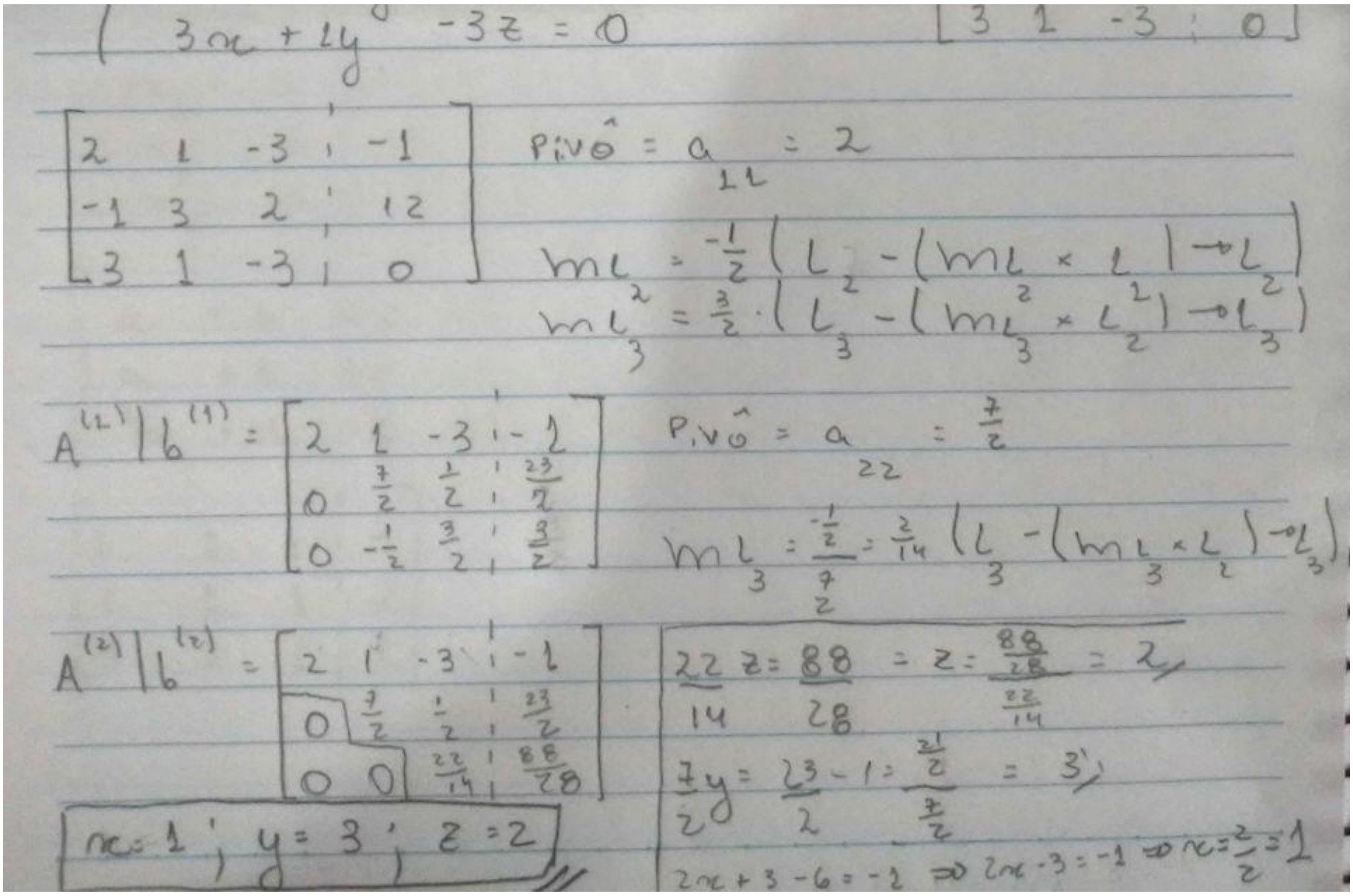
Para a fixação dos passos necessários para a realização do MEG, o mesmo foi feito passo a passo "na mão". O resultado é apresentado abaixo.


Resolver o sistema de equações abaixo com o método da eliminação de Gauss (MEG)

Os passos aplicados no método MEG são:

(a) Montar a matriz aumentada [A|b]
(b) Determinação do pivô a_{kk}
(c) Definir os multiplicadores de linha $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
(d) Atualização das linhas $L_i \leftarrow L_i - (m_{ik} \cdot L_{pivô})$

$$\begin{cases} 2x + 1y - 3z = -1 \\ -1x + 3y + 2z = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{transformando}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \end{array}\right] \Rightarrow$$



$3x + 1y - 3z = 0$ $\quad [3 \; 1 \; -3 \; : \; 0]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Pivô $= a_{11} = 2$

$m_{21} = -\frac{1}{2} \; (L_2 - (m_{21} \times L_1) \to L_2)$

$m_{31} = \frac{3}{2} \cdot (L_3 - (m_{31} \times L_1) \to L_3)$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Pivô $= a_{22} = \frac{7}{2}$

$m_{32} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{14} \; (L_3 - (m_{32} \times L_2) \to L_3)$

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{22}{14} & \frac{88}{28} \end{array}\right]$$

$\frac{22}{14} z = \frac{88}{28} \Rightarrow z = \frac{\frac{88}{28}}{\frac{22}{14}} = 2$

$\frac{7}{2} y = \frac{23}{2} - 1 = \frac{\frac{21}{2}}{\frac{7}{2}} = 3$

$2x + 3 - 6 = -1 \Rightarrow 2x - 3 = -1 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$

$\boxed{x = 1; \; y = 3; \; z = 2}$

Com o resultado apresentado na folha acima, é possível afirmar que a solução do sistema linear apresentado é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Implementação do método: Após a realização de cada um dos passos do método de eliminação gaussiana, uma implementação foi feita utilizando a linguagem de programação Python 3.6+.

```python
import numpy as np


def gaussian_elimination(arr: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """Método da eliminação gaussiana

    Args:
        arr (np.ndarray): Matriz estendida com os coeficientes e termos independentes
    Returns:
        np.ndarray: Matriz reduzida
    """

    _arr = arr.copy()

    for index in np.arange(0, _arr.shape[0] - 1):
        pivot = _arr[index, index]
        pivot_line = _arr[index, :]

        for actual_line_index in np.arange(index + 1, _arr.shape[0]):
            actual_line = _arr[actual_line_index, :]
            actual_line_element = _arr[actual_line_index, index]

            line_mp = actual_line_element / pivot
            _arr[actual_line_index, :] = actual_line - (pivot_line * line_mp)
    return _arr
```

Com a função implementada, os mesmos valores do exercício foram inseridos para testes de validação.

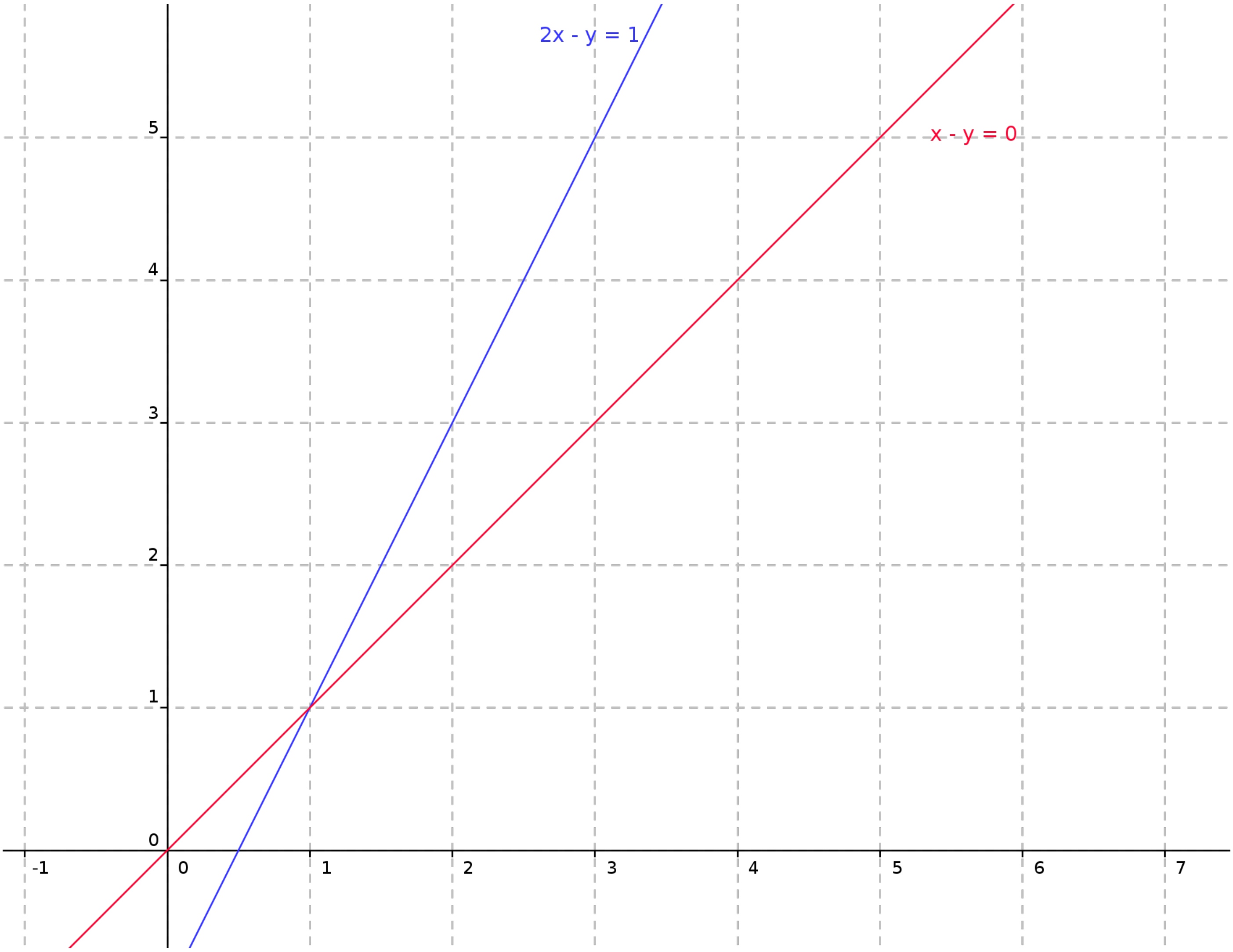
```python
exercicio1 = np.array([[2, 1, -3, -1], [-1, 3, 2, 12], [3, 1, -3, 0]], dtype=np.floa
gaussian_elimination(exercicio1)

# saída:
# array([[ 2.        ,  1.        , -3.        , -1.        ],
#        [ 0.        ,  3.5       ,  0.5       , 11.5       ],
#        [ 0.        ,  0.        ,  1.57142857,  3.14285714]])
```

2 - Pense em uma interpretação geométrica para a solução de sistemas lineares. E considerando um sistema de ordem 2, ilustre

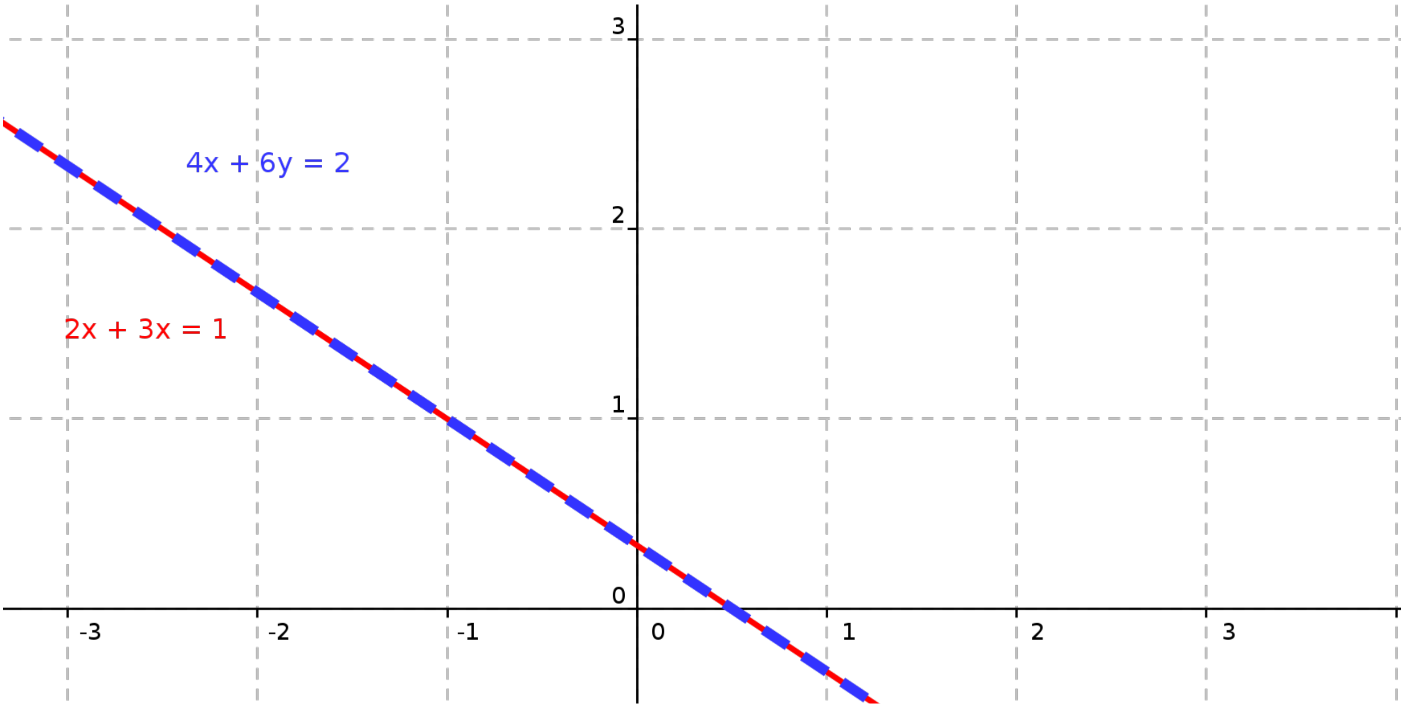
Inicialmente, considere apenas uma equação. Tal equação possui diversas combinações de solução, de modo a gerar um plano com todas as suas possíveis soluções. Para equações lineares, realizando a visualização geométrica é possível ver tal conceito através de retas geradas pelas possíveis soluções de uma equação.

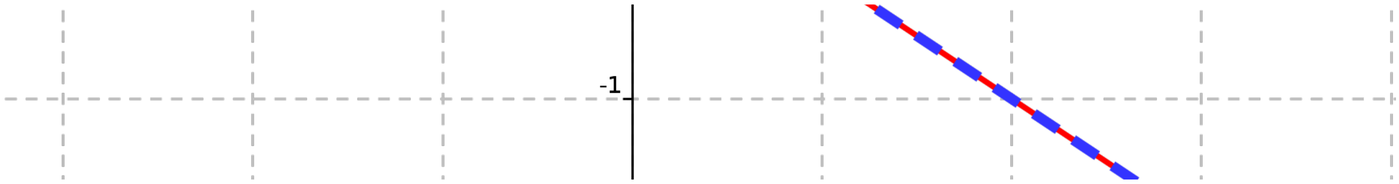
Tratando de um sistema de equações, a ideia de sua solução está muito vínculada ao plano de soluções possíveis de cada uma das equações que compõem o sistema linear, de modo que:

- Sistemas da classe **Possível e Determinado**, possuem o cruzamento dos planos de solução das equações em um ponto, sendo este a solução do sistema, como apresentado abaixo.

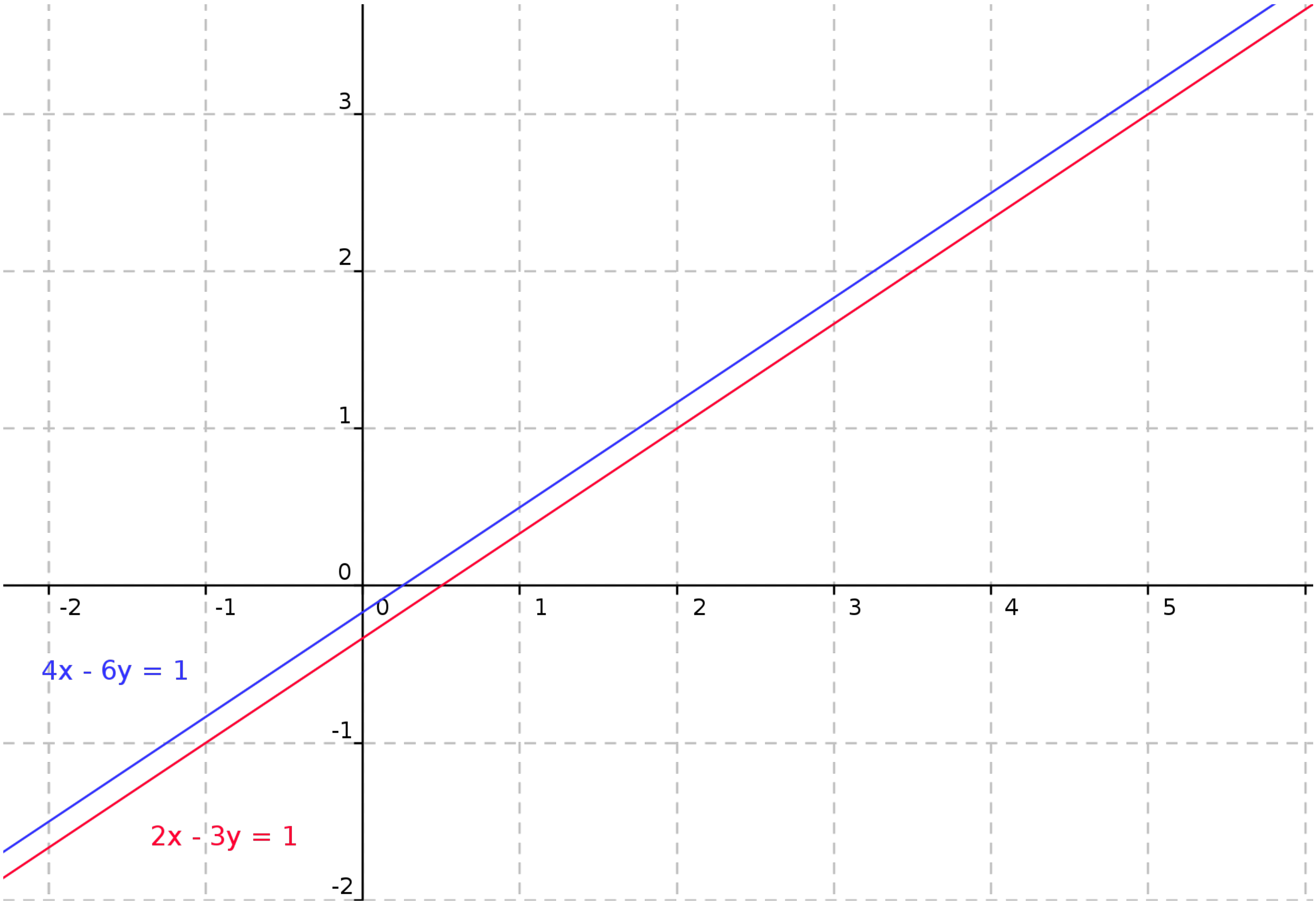


- Já sistemas da classe **Possível e Indeterminado**, apresentam infinitas soluções, uma vez que os planos de solução de cada equação se cruzam em infinitos pontos.





- Por fim, nos sistemas da classe **Impossível** não há uma relação entre as equações presentes no sistema de equações.



3- O resultado da aproximação da solução da EDO via sistema linear depende da discretização ?

Sim, para este caso, uma das necessidades do método utilizado (Método de diferenças finitas) é que o espaço trabalhado seja o discreto, desta forma, a discretização é necessária para a aproximação da EDO via sistema linear.

> A resposta apresentada anteriormente foi feita com base na leitura realizada do reamat (Cálculo Numérico)

4- Se melhora de um lado, outro lado tende a piorar. Como medir a melhora e a piora ?

A resposta desta pergunta pode vir de diversas maneiras, cada uma considerando um ponto de vista diferente, como forma de simplificar, aqui será feita a consideração da qualidade dos resultados e custo computacional (Tempo e espaço).

É importante destacar também que, o contexto pensado para a descrição dos itens citados anteriormente é o de aplicação de métodos numéricos, sem especificar explicitamente o método. Isso é feito para que o contexto geral da disciplina possa ser utilizado na descrição.

Custo computacional: Antes de falar sobre a qualidade dos resultados, o custo computacional deve ser mencionado, já que este é um dos pontos que precisam ser considerados na medição de qualidade.

Quando estamos tratando de algoritmos, estes apresentam certos custos para serem executados, sendo esses o custo de tempo, vinculado a quantidade de tempo consumida pelo algorimo para resolver determinado problema e o custo de espaço, sendo relacionado a quantidade de recursos de espaço consumida pelo algoritmo.

A depender do tipo da estratégia adotada pelo algoritmo e o problema que o mesmo está resolvendo, cada um desses custos pode ser extremamente alto, por isso, uma boa avaliação de tais custos devem ser considerados durante o processo de aplicação de um determinado método.

Qualidade dos resultados: Com o cuso computacional definido, é possível entender um pouco melhor sobre a qualidade dos resultados.

A priori, a qualidade dos resultados parecem estar relacionadas somente com o resultado propriamente dito, porém, em soluções do mundo real, a medição da qualidade considera outros pontos de vista.

1°) O tempo necessário para gerar um resultado `ótimo` para um determinado problema vale, quando comparado com o resultado `bom` e seu tempo de execução;
2°) O algoritmo em algum momento converge, ou seja, de um certo ponto em diante o resultado não se altera, mesmo que, para gerar estes mais recursos computacionais sejam necessários.

Além dos pontos citados, muitos outros poderiam ser inseridos, estes foram colocados apenas para permitir o entendimento de que, a qualidade dos resultados, principalmente em problemas de pesquisas do mundo real, sejam feitos ponderando os fatos necessários.

Com isso, a forma de medir a melhora e a piora, neste contexto, depende da necessidade que está sendo tratada.