Introdução à lógica proposicional

Eduardo Furlan Miranda

2024-08-01

Baseado em: SCHEFFER, VC; VIEIRA, G; LIMA, TPFS. Lógica Computacional. EDE, 2020. ISBN 978-85-522-1688-9.

- Na lógica computacional, vamos utilizar as mesmas regras da Lógica Formal, porém iremos valorar os conteúdos, como verdadeiro ou falso, a fim de extrair nossas conclusões

- “É lógico que Pedro será aprovado nos exames, pois ele é inteligente e estuda muito e todos os alunos inteligentes e estudiosos são aprovados”

- Esse argumento foi construído embasado por premissas (razões) e que levam a uma única conclusão

Quadro 3.1 | Premissas e conclusões

Premissas (razões)	1. Pedro é inteligente. 2. Pedro estuda muito. 3. Todos os alunos inteligentes e estudiosos são aprovados.
Conclusão	Pedro será aprovado

- três premissas permitiram chegar a uma conclusão coerente

- Extrair essa conclusão do argumento só foi possível devido às regras da lógica proposicional
  - por meio de premissas e conectores extraem-se resultados lógicos

- Fazer essa separação (premissa / conclusão) é muito importante, pois nem toda frase é um argumento

- Imagine que queiramos criar um algoritmo para classificar se um aluno foi aprovado ou reprovado, essas premissas precisam ser programadas em forma de regras

- Para ser um argumento é preciso existir uma conclusão, logo, nem toda frase é um argumento

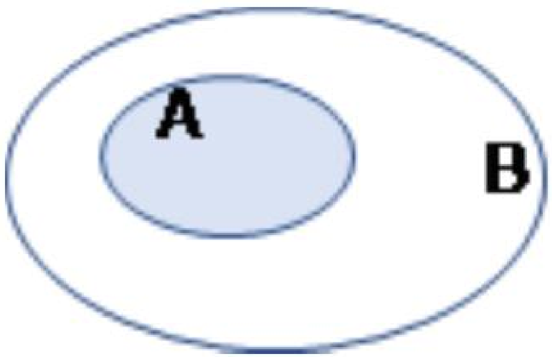
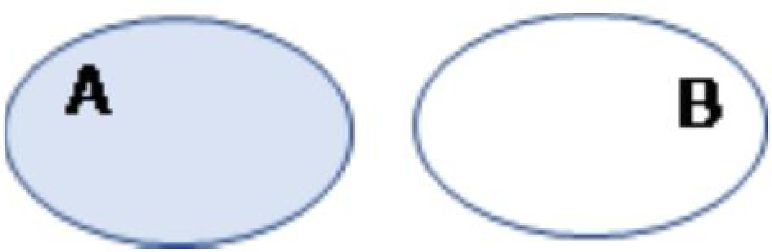
- No estudo da lógica, além de distinguir se uma frase é ou não um argumento, também é importante distinguirmos se uma sentença pode ou não ser classificada como verdadeira ou falsa (não ambas ao mesmo tempo). Ex.:
  - O Brasil é um país da América Latina.
  - Minas Gerais é um estado do Nordeste.
  - São Paulo é a capital do Paraná.
  - Três mais um é igual a quatro.
  - Que horas são?

- Proposições
- V ou F
- Classificação binária

não pode ser valorada em V ou F

- “Está chovendo agora” não pode ser classificada como V ou F, pois deixa dúvida (por exemplo, pode estar chovendo em um ponto da cidade e em outro não)
- “Está chovendo agora na minha rua” ← mais específico, agora é possível classificar
- As proposições (premissas) são usadas para sustentar uma conclusão em um argumento
- O quadro a seguir mostra diagramas de Euler representando conjuntos e sentenças que podem ser classificadas como V ou F, e, portanto, são proposições

Quadro 3.2 | Proposições e conjuntos

Diagrama de Euler	Proposição
	Todo A é B.
	Nenhum A é B.

Letras maiúsculas representam proposições

Princípios básicos das proposições

- Princípio da Identidade: “Toda proposição é idêntica a si mesma”. Ou seja, sendo P uma proposição: P é P.
- Princípio da Não Contradição: “Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo”. Sendo P uma proposição tem-se: não (P e não P).
- Princípio do Terceiro excluído: “Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir”. Sendo P uma proposição tem-se: P ou não P.

Classificação das proposições

- Simples
  - quando existir uma única afirmação na frase
- Compostas
  - quando for constituída de, pelo menos, duas proposições simples “ligadas” por um conectivo lógico, também chamado de conector lógico, conectivo proposicional ou operação lógica

Exemplo 1

- A: 11 é um número ímpar.
- B: 11 é um número primo.
- C: 11 é um número ímpar e primo.

- As proposições A e B são compostas por uma única verdade
  - A: verdadeira
  - B: verdadeira

- A proposição C é composta por duas proposições simples ligadas pela palavra “e”

Exemplo 2

- “Os suíços fabricam os melhores relógios e os franceses, o melhor vinho”
  - extraindo as proposições simples da frase:
    - P: Os suíços fabricam os melhores relógios.
    - S: Os franceses fabricam o melhor vinho.

- Reescrevendo a frase, utilizando uma notação simbólica:

P e S

Exemplo 3

- “Se eu prestar atenção na aula, então tirarei boa nota na prova”
  - A: Eu presto atenção na aula.
  - R: Eu tiro boa nota na prova.

- Reescrevendo:

Se A então R

- As “palavras” usadas para unir as proposições simples são os conectivos (ou conectores) lógicos e influenciam a valoração de uma proposição composta

- Os conectivos disponíveis para fazer a conexão são:
  - E
  - Ou
  - Não
  - Se ... então
  - Se, e somente se

Conectivo lógico de conjunção - e

- “e”, “AND”, “$\wedge$”

- Essa operação lógica é chamada conjunção e sua valoração será verdadeira somente quando ambas as proposições simples forem verdadeiras

- Se A e B forem proposições simples verdadeiras
  - a proposição composta $A \wedge B$ (lê-se “A e B”) será verdadeira

Exemplo

- A: Quatro é um número par
- B: Três é um número ímpar
- C: Cinco é maior que dez
- P: Quatro é um número par e três é um número ímpar
- R: Quatro é um número par e cinco é maior que dez

- valorando as proposições simples
  - A: verdadeira
  - B: verdadeira
  - C: falsa

Exemplo (continuação)

- Vamos reescrever as proposições P, R utilizando notação simbólica
  - P: $A \wedge B$
  - R: $A \wedge C$
- Na proposição P temos que as proposições simples A, B são verdadeiras, portanto P = V e V, o que resulta em verdadeiro, ou seja, a proposição P pode ser valorada como verdadeira

Exemplo (continuação)

- Já na proposição R, temos que A é verdadeiro, mas C é falso, portanto R = V e F, o que resulta em falso, ou seja, a proposição R deve ser valorada como falsa, já que para essa operação lógica ambas proposições precisam ser verdadeiras para o resultado também ser verdadeiro

- Além da palavra “e” outras podem ser usadas para representar a conjunção entre duas proposições: mas, todavia, contudo, no entanto, visto que, enquanto, além disso, embora

- Ex.:
  - A: João foi ao cinema.
  - B: Maria foi ao shopping.
  - C: João foi ao cinema, mas Maria foi ao shopping.
  - D: João foi ao cinema, enquanto Maria foi ao shopping.

Conectivo lógico de disjunção - ou (inclusivo)

- “ou”, “OR”, “v”
- Essa operação lógica é chamada de disjunção e seu operador lógico pode ser utilizado de 2 formas:
  - Inclusivo
  - exclusivo
- O operador lógico de disjunção usado na forma inclusiva terá sua valoração falsa somente quando ambas as proposições simples forem falsas

- se A e B forem proposições simples falsas, a proposição composta A ∨ B (lê-se “A ou B”) será falsa, nos demais casos a valoração é verdadeira

Exemplo

- A: Quatro é um número par.
- B: Três é um número ímpar.
- C: Cinco é maior que dez.
- D: Sete é um número par.
- P: Quatro é um número par ou três é um número ímpar.
- R: Quatro é um número par ou cinco é maior que dez.
- S: Cinco é maior que dez ou sete é um número par.

- Valorizando as proposições simples (A, B, C, D):
  - A: verdadeira.
  - B: verdadeira.
  - C: falsa.
  - D: falsa.

(continua)

- Proposições P, R, S utilizando notação simbólica:
  - P: A ∨ B
  - R: A ∨ C
  - S: C ∨ D

- Na proposição P temos que as proposições simples A, B são verdadeiros, portanto P = V ou V, o que resulta em verdadeiro, ou seja, a proposição P pode ser valorada como verdadeira

- Na proposição R, temos que A é verdadeiro, mas C é falso, portanto R = V ou F, como se trata da disjunção inclusiva, o resultado será verdadeiro, pois para ser falso ambas proposições simples têm que ser falsas

- Já na proposição S, temos que C, D são proposições simples falsas, portanto S = F ou F, o que resultado em falso

Operador lógico de negação – não

- Os operadores lógicos de conjunção e disjunção são binários, ou seja, juntam duas expressões para formar uma nova proposição

- O operador lógico de negação é unário, ou seja, ele não junta duas proposições, ele age sobre uma única proposição (que pode ser resultado de uma operação binária)
  - A palavra usada para fazer a negação é o não que também pode ser visto na literatura em inglês NOT, ou ainda de forma simbólica como ~ , ¬ , ’
    - ~ A , ¬ B , C’

Exemplo

- A: Luís gosta de viajar.

- A negação de A (~ A) pode ser lida como:
  - ~ A : Luís não gosta de viajar.
- Ou ainda como:
  - ~ A : É falso que Luís gosta de viajar.
- Ou ainda
  - ~ A : Não é verdade que Luís gosta de viajar.

- A negação pode ser aplicada ao resultado de uma outra operação, como por exemplo, $\sim (A \wedge B)$

Exemplo

- imagine que você esteja trabalhando em um sistema web para uma universidade. Em uma das páginas do sistema, deverá ser implementada a opção para o usuário escolher o curso, o semestre e a idade dos alunos. Nesse cenário vamos considerar as seguintes proposições:
  - A: Todos os alunos são do curso de engenharia.
  - B: Todos os alunos são do segundo semestre.
  - C: Todos os alunos possuem idade superior a 30 anos.

- Suponhamos que o usuário do sistema queira listar alunos que não são dos cursos de engenharia, alunos que estão no segundo semestre, alunos que possuem idade superior a 30 anos

- Como essa regra (proposição) deve ser construída?

- Qual combinação de conectores deve ser usada para produzir o resultado desejado?

- Considerando as proposições dadas, a lógica a ser criada deve ser: $\sim A \wedge B \wedge C$.