Princípios matemáticos

Eduardo Furlan Miranda

2024-08-01

Baseado em: SCHEFFER, VC; VIEIRA, G; LIMA, TPFS. Lógica Computacional. EDE, 2020. ISBN 978-85-522-1688-9.

Matemática discreta

- Também conhecida como
  - Matemática finita, ou
  - Matemática combinatória
- Ramo da matemática voltado ao estudo de objetos e estruturas discretas ou finitas
  - Estruturas discretas são estruturas formadas por elementos distintos desconexos entre si

Matemática discreta

- Usada quando
  - Contamos objetos
  - Estudamos relações entre conjuntos finitos
  - Quando processos (algoritmos) envolvendo um número finito de passos são analisados

Matemática discreta

- Problemas de existência
  - Existe algum arranjo de objetos de um dado conjunto satisfazendo determinada propriedade?
- Problemas de contagem
  - Quantos arranjos ou configurações desse tipo existem?
- Problemas de otimização
  - De todas as configurações possíveis,
    - qual é a melhor, de acordo com determinado critério?

Princípio da contagem

- O ramo da matemática que trata da contagem é a Combinatória

ex.: combinações

- Tratar a contagem é importante
  - Ex.: sempre que temos recursos finitos, como os recursos computacionais
    - Capacidade de processamento
    - Espaço em disco
    - Memória
    - Tamanho das bases de dados

existem diversas formas diferentes de contar

- É possível verificar a eficiência de um algoritmo,
  - uma vez que um algoritmo pode ser elaborado de diferentes maneiras e,
  - dependendo da forma de implementação e quantidade de entradas (número de variáveis),
  - pode demandar um maior ou menor tempo para ser executado

- O conhecimento sobre contagem também auxilia na análise
  - Tempo de execução
  - Quantidade de memória consumida
  - Complexidade de um algoritmo
- Problemas de contagem
  - Determinar quantos elementos existem em um conjunto finito
    - Podem gerar questões difíceis de serem respondidas

Lista

- Sequência ordenada de objetos
- Representação
  - Abrindo parênteses e apresentando cada elemento da lista, separando-os por vírgula

(2, 4, 8, 16)

- A ordem dos elementos na lista é importante
  - São diferentes: (2, 4, 8, 16) e (4, 2, 16, 8)
- Pode conter elementos repetidos
  - (3, 4, 5, 5, 6)

Lista

- Comprimento
  - Número de elementos que a compõe
- Quando a lista tem apenas dois elementos
  - Recebe o nome de par ordenado
- Uma lista vazia
  - Lista cujo comprimento é igual a zero

Lista

- (2, 4, 8, 16) ← comprimento 4
- (3, 4, 5, 5, 6) ← comprimento 5
- (10, 11) ← comprimento 2, par ordenado
- ( ) ← comprimento 0, lista vazia
- “upla”: outra expressão utilizada para representar listas
  - Uma lista de n elementos é conhecida como uma n-upla (lê-se: ênupla)

- Seja uma lista de comprimento 2 em que seus elementos são uma das letras A, B, C ou D

- Quantas listas podemos formar?

$$
\begin{array}{cccc}
(A,A) & (A,B) & (A,C) & (A,D) \\
(B,A) & (B,B) & (B,C) & (B,D) \\
(C,A) & (C,B) & (C,C) & (C,D) \\
(D,A) & (D,B) & (D,C) & (D,D)
\end{array}
$$

Na primeira linha registramos todas as listas que começam com a letra A

refazer em casa usando uma linguagem de programação, sugestão: Colab (Google Colaboratory)

- Desejamos descobrir quantas listas de comprimento 2 podemos formar com os algarismos de 1 a n
  - listas de 2 elementos em que há n escolhas possíveis

$$
\begin{matrix}
(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\
(2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n)
\end{matrix}
$$

$n \times n = n^2$ listas possíveis

refazer em casa usando uma linguagem de programação, sugestão: Colab (Google Colaboratory)

- Os elementos possíveis na primeira posição da lista sejam números inteiros de 1 a n e que os elementos possíveis para a segunda posição sejam números inteiros de 1 a m

$$
\begin{matrix}
(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,m) \\
(2,1) & (2,2) & \cdots & (2,m) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(n,1) & (n,2) & \cdots & (n,m)
\end{matrix}
$$

$$\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n\ vezes} = m \times n$$

refazer em casa usando uma linguagem de programação, sugestão: Colab (Google Colaboratory)

- Descobrir quantas listas de comprimento 2 podem ser formadas, sabendo que o primeiro elemento da lista (n) será uma vogal e o segundo elemento da lista (m) será um algarismo de 1 a 9
  - Como temos cinco opções para vogal (A, E, I, O, U) e nove opções de algarismos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), o total de listas de comprimento dois que podem ser formadas é

$$m \times n = 9 \times 5 = 45$$

refazer em casa usando uma linguagem de programação, sugestão: Colab (Google Colaboratory)

- Princípio da multiplicação para listas com 2 elementos
  - Consideremos listas de 2 elementos em que há n escolhas para o primeiro elemento e, para cada uma dessas escolhas, há m escolhas do segundo elemento
    - Então o número de tais listas é $n \times m$

refazer em casa usando uma linguagem de programação, sugestão: Colab (Google Colaboratory)

- Caso especial envolvendo contagem de listas
  - Problema de se determinar quantas listas de comprimento n podem ser formadas
    - Extraídas de um universo de n objetos
      - Em que não se permitem repetições

- Em outras palavras, de quantas maneiras diferentes podemos dispor n objetos em uma lista,
  - usando cada objeto exatamente uma única vez?

refazer em casa usando uma linguagem de programação, sugestão: Colab (Google Colaboratory)

- Podemos estender o princípio da multiplicação para listas com 2 elementos para esta situação, determinando o total de listas como
  - $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-n+1) = \overbrace{\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (2) \cdot (1)}}^{\text{fatorial}}$
- Essa expressão ocorre com frequência em matemática e recebe um nome e símbolo especiais:
  - Chama-se **fatorial de n** e representamos por **n!**
  - Ex: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
  - Por definição, considera-se que $1! = 1$ e $0! = 1$

refazer em casa usando uma linguagem de programação, sugestão: Colab (Google Colaboratory)

Exemplo

- De quantas maneiras distintas é possível ordenar três objetos a, b e c?
- Não podemos computar o mesmo objeto mais de uma vez,
  - cada um desses objetos aparecerá exatamente uma única vez
- De quantos modos diferentes é possível ordená-los?
- Não foi mencionado o comprimento da lista, portanto ordenaremos os três objetos a, b e c, ou seja,
  - o comprimento das listas será igual a 3

(continua)

refazer em casa usando uma linguagem de programação

Exemplo (continuação)

- Podemos utilizar o conceito de fatorial

- Como temos 3 elementos a serem ordenados e estamos interessados em uma ordenação sem repetição:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- Se representarmos todas as listas possíveis temos

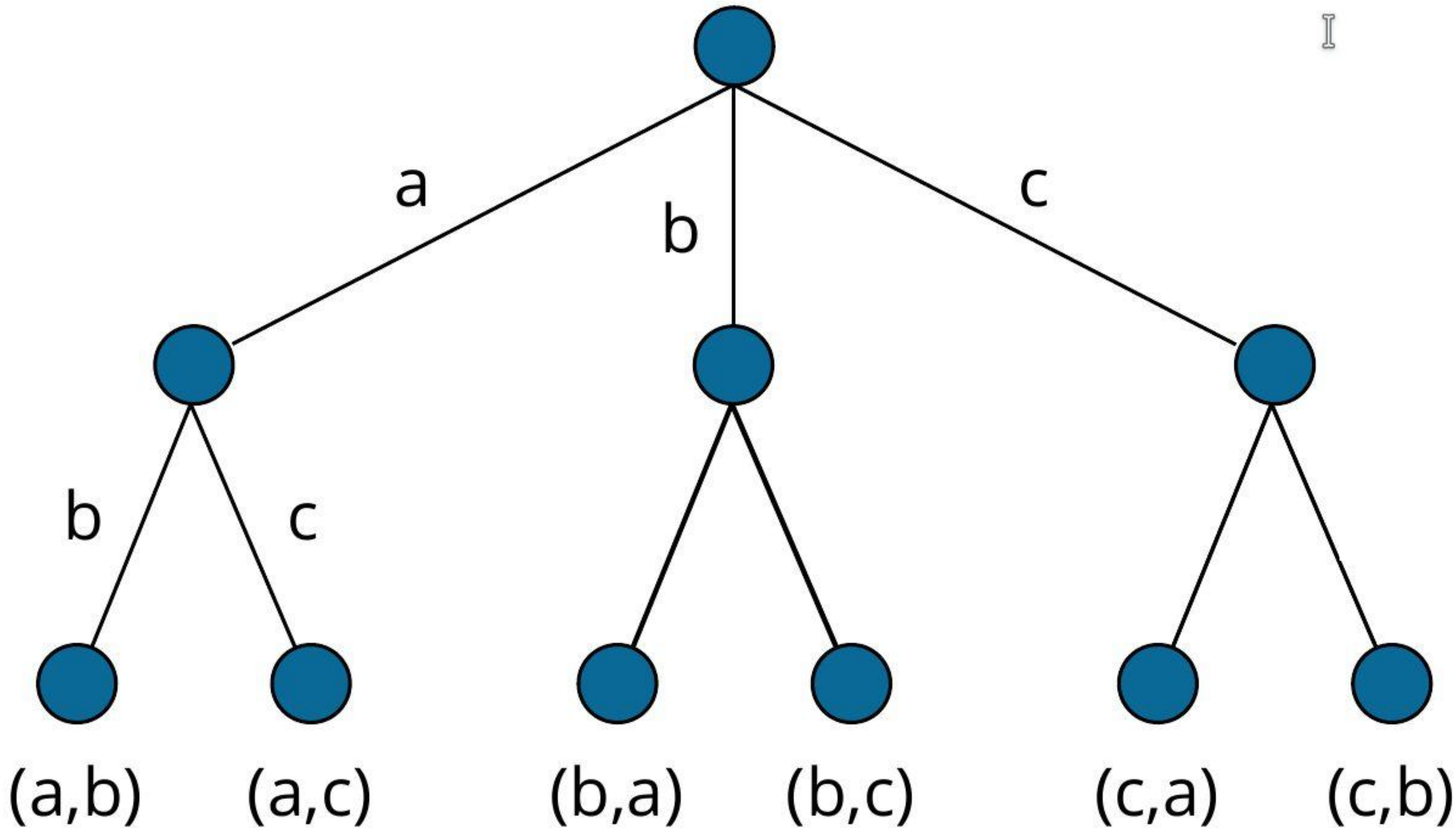
$$\begin{array}{cc} (a,b,c) & (a,c,b) \\ (b,a,c) & (b,c,a) \\ (c,a,b) & (c,b,a) \end{array}$$

refazer em casa usando uma linguagem de programação

- Outra forma de representarmos os possíveis resultados de uma ordenação (listas), é a utilização de um diagrama chamado Árvore de Decisão
  - Estrutura hierárquica que representa um mapeamento de possíveis resultados de uma série de escolhas relacionadas
- Uma árvore de decisão inicia a partir de um único nó de origem (chamado de nó raiz)
  - Representa o todo ou uma amostra de alguma categoria e expressa nós de decisão, em que a partir do nó raiz temos ramificações que levam a escolhas de um resultado (decisão)

Diagrama de árvore

- Ordenação de 3 objetos arbitrários a, b e c
- Árvore de decisão para 3 elementos tomados 3 a 3



- A vantagem de utilização de uma árvore de decisão é que além de determinar a quantidade de listas que podem ser formadas, ela também discrimina quais são essas listas
  - Fácil visualização
- Em Combinatória, existem diferentes tipos de agrupamentos (ordenados ou não) que recebem os nomes específicos de Arranjos, Permutações e Combinações

Arranjo

Arranjos são um tipo de lista

- Dado um conjunto com n elementos distintos,
  - Chama-se arranjo dos n elementos, tomados p a p,
    - A qualquer sequência ordenada de p elementos distintos escolhidos entre os n existentes

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A ordem é importante: (2, 3) ≠ (3, 2)

(continua)

Exemplo - Arranjo

- Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 4}
- Determinar o número de arranjos desses quatro elementos (n=4) tomados dois a dois (p=2)

$$A_{4,2} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{24}{2} = 12$$

discriminando todos os arranjos chegamos a 12 possibilidades:

(2, 3) ≠ (3, 2)

$$(1,2) \quad (1,3) \quad (1,4) \quad (2,1) \quad (2,3) \quad (2,4)$$
$$(3,1) \quad (3,2) \quad (3,4) \quad (4,1) \quad (4,2) \quad (4,3)$$

refazer em casa usando uma linguagem de programação

Permutação

n = p

- Caso especial de Arranjo
- Obtido quando dado um conjunto com n elementos distintos, selecionamos exatamente n elementos para formar a sequência ordenada
- Ex.: determinar de quantas maneiras seis pessoas A, B, C, D, E e F podem ser dispostas em uma fila indiana

$$A_{6,6} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 720$$

refazer em casa usando uma linguagem de programação

Permutação

- Podemos simplificar a fórmula:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

fatorial

$$P_6 = 6! = 720$$

refazer em casa usando uma linguagem de programação

Combinação

- Considera cada sequência obtida como um
  - Conjunto não ordenado

ordenado é quando a ordem é importante

- Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se combinação dos n elementos, tomados p a p, a qualquer subconjunto formado por p elementos distintos escolhidos entre os n existentes

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

por não serem ordenados, não são considerados listas

Exemplo - Combinação

a ordem dos elementos não faz diferença (em Combinação)

- Cinco funcionários A, B, C, D e E
- Determinar todas as combinações desses 5 funcionários, tomados 2 a 2

n = 5

p = 2

$$C_{5,2} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(2\cdot1)(3\cdot2\cdot1)} = \frac{120}{2\cdot6} = \frac{120}{12} = 10$$

$$(A,B,C) \quad (A,B,D) \quad (A,B,E) \quad (A,C,D) \quad (A,C,E)$$

$$(A,D,E) \quad (B,C,D) \quad (B,C,E) \quad (B,D,E) \quad (C,D,E)$$

não considera os “repetidos fora de ordem”