Teoria dos conjuntos

Eduardo Furlan Miranda

2024-08-01

Baseado em: SCHEFFER, VC; VIEIRA, G; LIMA, TPFS. Lógica Computacional. EDE, 2020. ISBN 978-85-522-1688-9.

Conjuntos

lista→ordenado

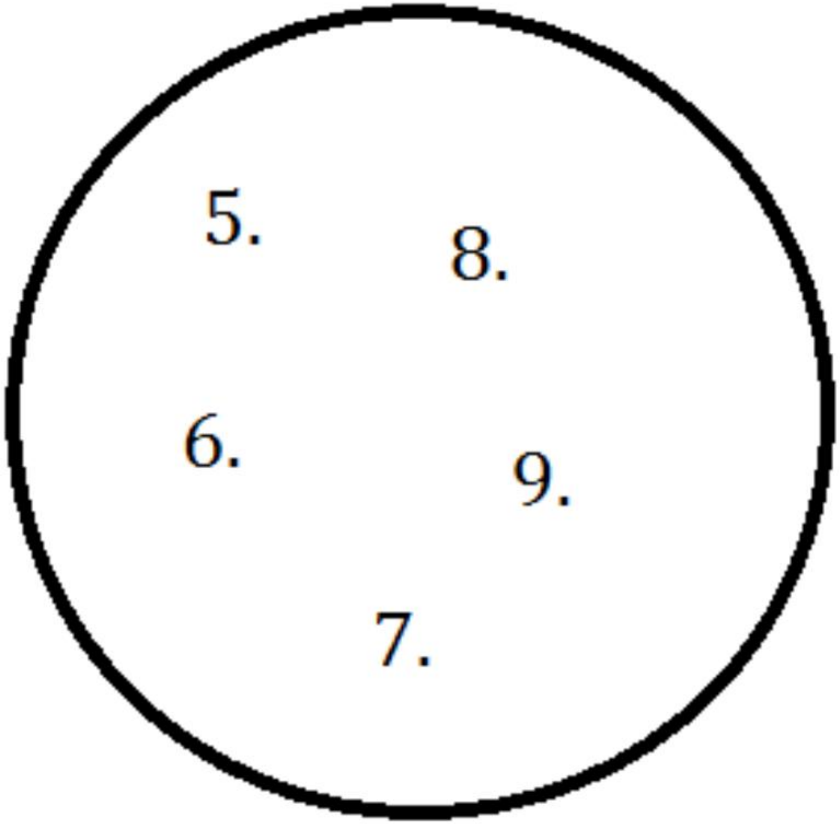
- Coleções não ordenadas de objetos
  - Podem ser, de alguma forma, relacionados
- P. ex., o conjunto A das cores da bandeira do Brasil
  - A = {verde, amarelo, azul, branco}
- Costuma-se utilizar letras maiúsculas para representar os conjuntos
- Qualquer objeto que tiver a propriedade “cor da bandeira do Brasil” será considerado um elemento do conjunto A

Identificar elementos do conjunto

- Listar todos os elementos do conjunto, como foi feito com o conjunto A
- Indicar os primeiros elementos do conjunto, ex.:
  - $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$
- Escrever uma propriedade que o caracterize
  - $C = \{ x \mid x$ é um número inteiro, e $4 < x \leq 9 \}$
    - “|’ = “tal que”
    - $C = \{5 , 6, 7, 8, 9\}$

Identificar elementos do conjunto

- Diagramas de Venn [John Venn (1834-1923)]



C = { x | x é um número inteiro e $4 < x \leq 9$ }

- Elemento do conjunto
  - É um objeto que pertencente ao conjunto
- Símbolo $\in$
  - Relação de pertinência
- Símbolo $\notin$
  - Relação de não pertinência
- $x \in A$ significa que o objeto x é um elemento do conjunto A

- Ex.: A = {verde, amarelo, azul, branco}
- Podemos afirmar que verde $\in$ A e que vermelho $\notin$ A
- A relação $\in$ pode ser lida como "é membro de" ou "está em" ou "é elemento de" ou "pertence a"
- Cardinalidade: quantidade de objetos (elementos) de um determinado conjunto
  - Símbolo | |
    - As barras de valor absoluto em torno de um conjunto representam a cardinalidade ou o tamanho do conjunto

- Considerando o conjunto A = {verde, amarelo, azul, branco}, pode-se afirmar que
  - A cardinalidade de A é igual a 4, ou seja, $|A| = 4$
- Considerando o conjunto $C = \{ x \mid x \text{ é um número inteiro e } 4 < x \leq 9 \}$, pode-se afirmar que
  - A cardinalidade de C é igual a 5, ou seja, $|C| = 5$
- Um conjunto é chamado de finito quando sua cardinalidade é um número inteiro, caso contrário,
  - é chamado de infinito
- Um conjunto é chamado de conjunto vazio quando sua cardinalidade é igual a zero, ou seja,
  - é um conjunto desprovido de elementos

Exemplo

- A = { x | x é um mês com exatamente 30 dias}
- B = {1, 4, 9, 16, 25, ...}
- C = { x | x é um número inteiro e x > 3 e x < 4 }

- A = {abril, junho, setembro, novembro} e, ∴, |A| = 4

- B é o conjunto dos números quadrados perfeitos
  - Como existem infinitos números quadrados perfeitos, não é possível determinar a cardinalidade de B
    - Dizemos que o conjunto B é infinito

(continua)

Exemplo (continuação)

- O conjunto C é o conjunto dos números inteiros que são, ao mesmo tempo, maiores do que 3 e menores do que 4
  - Como não existe nenhum número inteiro que atenda simultaneamente a essas duas propriedades, dizemos que o conjunto C é um conjunto vazio
    - $C = \{\}$, ou $C = \varnothing$
  - A cardinalidade de C é igual a zero, ou seja, $|C| = 0$
- Como a cardinalidade de um conjunto vazio é igual a zero,
  - e zero é um número inteiro, podemos afirmar que
    - o conjunto vazio também é um conjunto finito

Alguns conjuntos padrão

- $\mathbb{N}$ = conjunto de todos os números inteiros não negativos
  - $0 \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$ = conjunto de todos os números inteiros
- $\mathbb{Q}$ = conjunto de todos os números racionais
- $\mathbb{R}$ = conjunto de todos os números reais
- $\mathbb{C}$ = conjunto de todos os números complexos

- Quando dois conjuntos têm exatamente os mesmos elementos, dizemos que esses conjuntos são iguais

- Para provar que dois conjuntos A e B são iguais,
  - mostrar que todo elemento de A é também elemento de B,
    - e vice-versa

- Na Teoria de Conjuntos, há certas afirmações que não podem ser escritas adequadamente por meio de símbolos proposicionais, parênteses e conectivos lógicos

- Elas contêm um elemento quantificador

- Os quantificadores são frases como “para todo”, “para cada” ou “para algum”, que indicam, de alguma forma, quantos objetos têm uma determinada propriedade

(continua)

- Ex.:
  - Todo inteiro é par ou ímpar
  - Existe um número natural que é primo e par
- A primeira afirmação traduz uma relação de universalidade, já a segunda afirmação traduz uma relação de existência
- Utilizaremos uma notação específica para representar cada uma dessas situações:

$$\forall$$

  - Lido como “para todo” ou “qualquer que seja”

- A forma geral para essa notação é
  - $\forall x \in A$, *afirmações sobre x*
- A primeira afirmação “todo inteiro é par ou ímpar” ficaria representada como $\forall x \in \mathbb{Z}$, x é par ou x é ímpar
- Símbolo $\exists$
  - Quantificador existencial
    - é lido como “há” ou “existe”
- A forma geral para essa notação é
  - $\exists x \in A$, *afirmações sobre x*

Exemplo

- Provar que todo número inteiro divisível por 10 é par
- Seja $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 10 \text{ divide } x \}$
- Queremos provar que $\forall x \in A$, x é par
- Prova:
  - Seja $x \in A$, ou seja, x é um número inteiro divisível por 10
  - Isso significa que existe um inteiro y , de modo que $x = 10y$
  - Podemos escrever essa igualdade como
    - $\mathbf{x} = (2 \cdot 5)\, y = 2 \cdot (5\, y)$
  - Portanto, **x** é divisível por 2 e, consequentemente, x é par

- A é um subconjunto de B:
  - A = { 2, 5, 7, 9 }
  - B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
- Dizemos que A é um subconjunto de B se, e somente se,
  - todo elemento de A também for elemento de B
- A notação $A \subseteq B$ significa que A é subconjunto de B

- Se A é um subconjunto de B, mas $A \neq B$, ou seja,
  - existe pelo menos um elemento de B que não é elemento de A,
    - então, A é chamado de subconjunto próprio de B
- Símbolo $\subset$
  - Subconjunto próprio
- $\subseteq$ e $\subset$ têm significados relacionados, porém, diferentes
- $\in$ é utilizado para representar uma relação de pertinência entre um objeto e um conjunto

- Seja o conjunto A = { 5, 7, 9, 11 ,13 } ,
  - podemos afirmar que 7 ∈ A
- Símbolo ⊆
  - Representa uma relação de continência (subconjunto) entre conjuntos
  - P. ex., seja A = { 5, 7, 9, 11 , 13 } e B = { 5 ,11 ,13 } ,
    - podemos afirmar que B ⊆ A
- Os sinais ⊆ e ∈ não podem ser permutados

Exemplo

- Considerar os conjuntos $M = \{ x \mid x \text{ é múltiplo de } 5\}$ e $N = \{ x \mid x \text{ é múltiplo de } 10\}$. Vamos provar que $N \subseteq M$
  - Temos que x satisfaz a propriedade característica de N, ou seja, x é múltiplo de 10
  - Logo, podemos escrever $x = 10 \cdot y$, para algum inteiro y
  - Essa igualdade pode ser reescrita como
    $x = (5 \cdot 2) \cdot y = 5 \cdot (2. y)$ ou $x = 5 \cdot k$,
    em que $k = 2 \cdot y$, de tal forma que k também é um inteiro
  - Isso mostra que x também é múltiplo de 5, ou seja, x também satisfaz a propriedade característica de M, portanto, $N \subseteq M$

Exemplo

- Quantos subconjuntos tem o conjunto A = {a, b, c} ?
  - Uma maneira para resolver esse problema é listar todas as possibilidades
    - Como a cardinalidade de A é igual a 3, (A = 3), qualquer subconjunto de A pode ter de zero a três elementos

Quadro 2.1 | Subconjuntos de A (cardinalidade 3)

Número de elementos	Subconjuntos	Número de subconjuntos
0	∅	1
1	{a}, {b}, {c}	3
2	{a, b}, {a, c}, {b, c}	3
3	{a, b, c}	1
Total		8

(continua)

- Portanto, $A = \{a, b, c\}$ tem oito subconjuntos
- É importante, nesse momento, retomar a definição de conjunto como uma coleção não ordenada de objetos
- Isso significa dizer que o subconjunto $\{a, b\}$ e o subconjunto $\{b, a\}$ são iguais e, portanto, contabilizados uma única vez
- O conjunto vazio e o próprio conjunto A também são subconjuntos de A
- Nesse exemplo, conseguimos listar e contabilizar todos os subconjuntos de A

- O teorema a seguir permite contabilizar o número de subconjuntos de um conjunto qualquer conhecendo-se a sua cardinalidade

- Teorema: seja A um conjunto finito. O número de subconjuntos de A é $2^{|A|}$

- Ex: Seja A um conjunto com cardinalidade igual a 10, quantos subconjuntos de A poderiam ser contabilizados?
  - Como $|A| = 10$, utilizando o resultado do Teorema anterior, o número de subconjuntos de A é igual a $2^{|A|} = 2^{10} = 1024$