Componentes simétricas e teorema de Thévenin

Proteção do Sistema Elétrico de Potência

Rev. 2022-10-31

Método das componentes simétricas

- Faltas assimétricas geram fasores trifásicos desequilibrados:
    - fase-fase
    - fase-fase-terra
    - fase-terra

- Um sistema desequilibrado de n fasores correlacionados pode ser decomposto em n sistemas de fasores equilibrados, denominados de componentes simétricas dos fasores originais

- Os n fasores de cada conjunto de componentes são iguais:
    - em módulo
    - e ângulos entre os fasores adjacentes do conjunto

- O método é aplicável a qualquer sistema polifásico desequilibrado

- 3 fasores desequilibrados de um sistema trifásico
    - podem ser substituídos por 3 sistemas equilibrados de fasores

Conjuntos equilibrados de fasores

- Componentes de sequência positiva:
  - 3 fasores iguais em módulo
  - defasados de 120° entre si
  - mesma sequência de fases (sentido de rotação) que os fasores originais desequilibrados

- Componentes de sequência negativa:
  - 3 fasores iguais em módulo
  - defasados de 120° entre si
  - sequência de fases oposta (sentido de rotação) à dos fasores originais

- Componentes de sequência zero:
  - 3 fasores iguais em módulo
  - defasagem zero entre si (paralelos)

- Chamando as 3 fases do sistema de A, B e C
- A sequência de fases das tensões e correntes fica: ABC
- ABC: sequência de fases das componentes de sequência positiva dos fasores desequilibrados
- ACB: sequência de fases das componentes de sequência negativa
- Fasores originais das tensões: $\breve{V}_A$, $\breve{V}_B$ e $\breve{V}_C$
- e das correntes: $\breve{I}_A$, $\breve{I}_B$ e $\breve{I}_C$

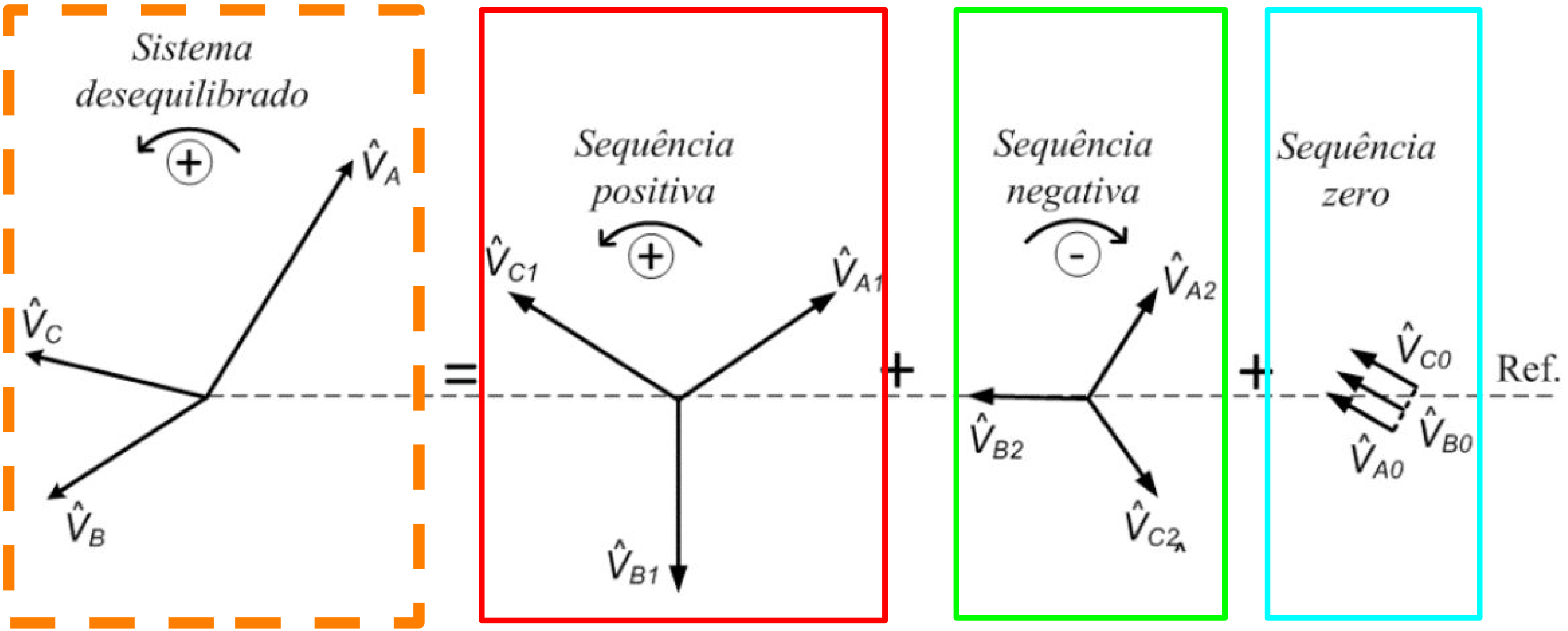
- Índices dos conjuntos de componentes simétricas
  - 1: sequência positiva $\check{V}_{A1}$, $\check{V}_{B1}$ e $\check{V}_{C1}$
  - 2: sequência negativa $\check{V}_{A2}$, $\check{V}_{B2}$ e $\check{V}_{C2}$
  - 0: sequência zero $\check{V}_{A0}$, $\check{V}_{B0}$ e $\check{V}_{C0}$

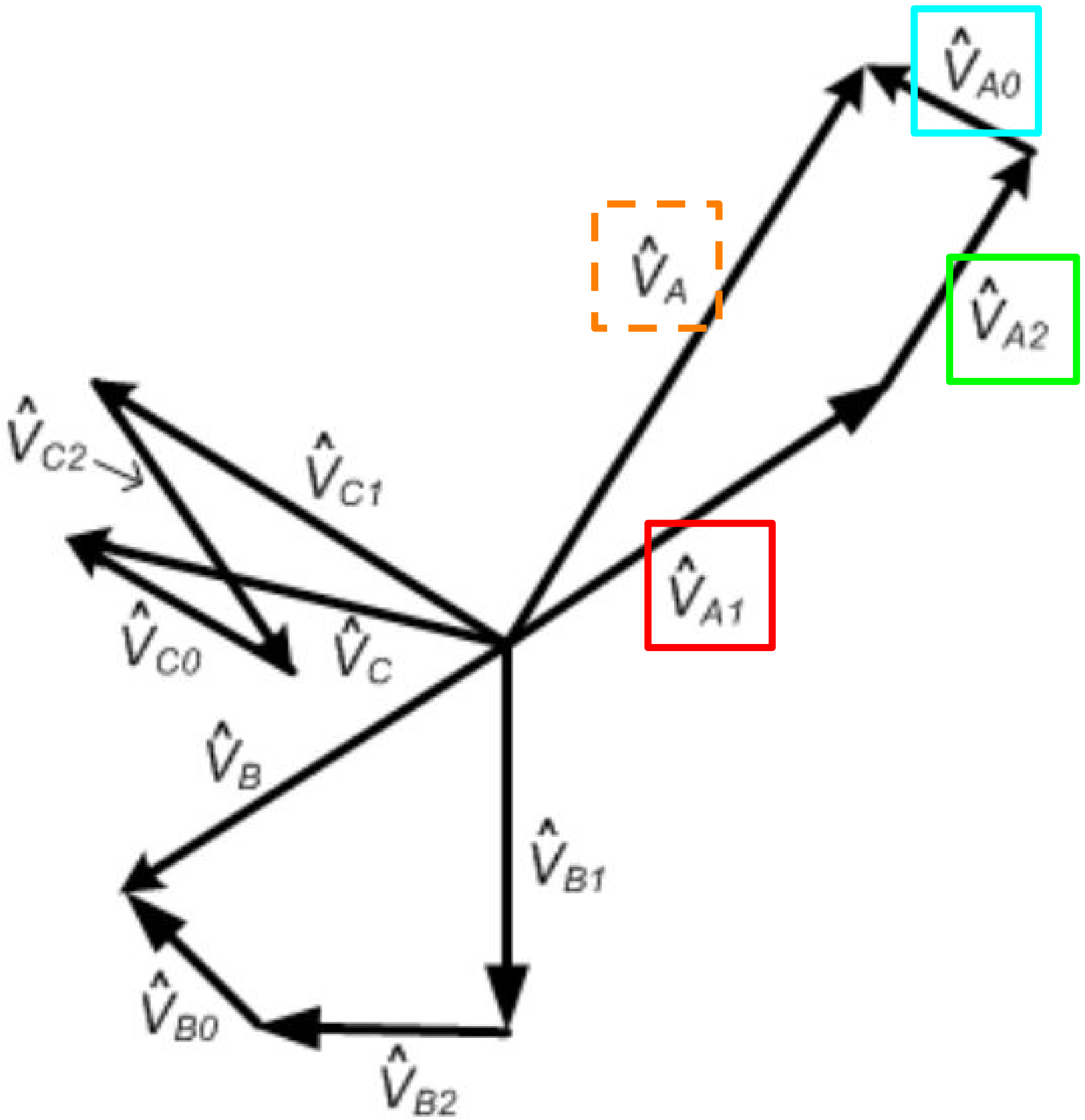
- Os fasores de corrente seguem o mesmo padrão

- Cada um dos fasores do conjunto desequilibrado original é igual à soma de suas componentes

$$\breve{V}_A = \breve{V}_{A1} + \breve{V}_{A2} + \breve{V}_{A0}$$
$$\breve{V}_B = \breve{V}_{B1} + \breve{V}_{B2} + \breve{V}_{B0}$$
$$\breve{V}_C = \breve{V}_{C1} + \breve{V}_{C2} + \breve{V}_{C0}$$

- Três conjuntos de fasores equilibrados que constituem as componentes simétricas de três fasores desequilibrados





- soma fasorial das componentes que geram os fasores desequilibrados resultantes

O método

- Consiste em determinar as componentes simétricas da corrente de falta

- Podem ser determinados os valores de corrente e tensão nos vários pontos do sistema

- Relativamente simples e conduz a previsões bastante apuradas sobre o comportamento do sistema elétrico

Sistemas em sequência positiva, negativa e zero

Sequência positiva

- O sistema equilibrado de fasores que tem a mesma sequência de fases do sistema original desequilibrado é denominado sistema de sequência positiva

- Assumiremos que o sistema original
  - obedece à sequência de fases ABC
  - e gira no sentido positivo ou anti-horário

- Para determinar os fasores de sequência positiva:
  - basta conhecer o módulo e o ângulo de fase de qualquer um

- Os fasores de qualquer sistema trifásico equilibrado podem ser convenientemente relacionados uns aos outros com o emprego do operador (fator):

$$a = 1\angle 120°$$ (nro. complexo)

- Quando esse operador (fator) é aplicado a qualquer fasor, gira-o em 120° no sentido positivo ou anti-horário

- Se o operador

$$a^2 = 1\angle 240°$$

- for aplicado a qualquer fasor, gira-o por 240° no sentido positivo

- Equivale a uma rotação de 120° no sentido negativo

$$a = 1\angle 120$$

$$a^2 = a \cdot a = 1\angle 120 \cdot 1\angle 120 = 1\angle -120 = 1\angle 240$$

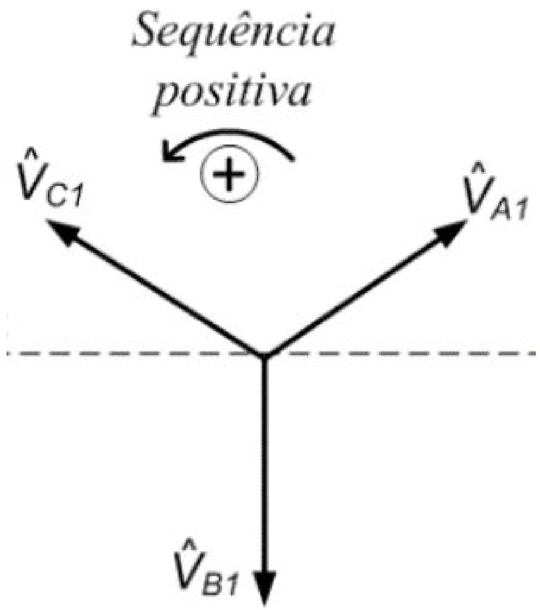
$$a^3 = 1\angle 0 = 1$$

$$a^4 = 1\angle 120 = a$$

$$a^5 = 1\angle -120 = a^2$$

- Caso, por exemplo, $\breve{V}_{A1}$ tiver sido determinado, o sistema de sequência positiva pode ser escrito:

$$\boxed{\breve{V}_{A1}} = \breve{V}_{A1}$$
$$\breve{V}_{B1} = a^2 \times \breve{V}_{A1} = \breve{V}_{A1} \angle -120^\circ$$
$$\breve{V}_{C1} = a \times \breve{V}_{A1} = \breve{V}_{A1} \angle -240^\circ$$



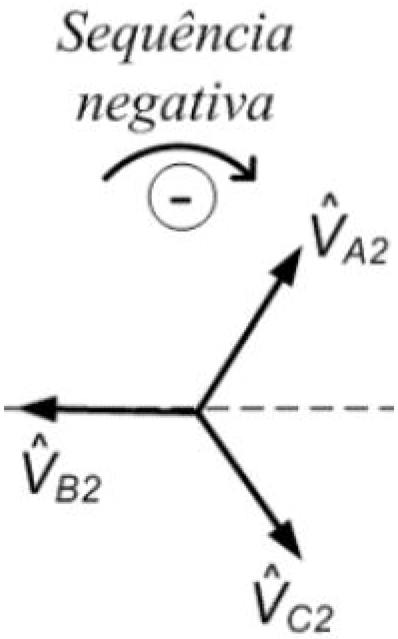
a = 1<120°
a^2 = 1<240°
a^3 = 1
a^4 = a
1+a^2+a = 0

Sequência negativa

- É o sistema equilibrado de fasores trifásicos que é oposto, em sequência de fases, ao dos fasores originais

- O sistema de sequência negativa é equilibrado
  - é determinado quando um dos fasores forem conhecidos, ou seja:
    - o módulo, e
    - o ângulo de fase

- Por exemplo: se $\check{V}_{A2}$ tiver sido determinado, o sistema de sequência negativa poderá ser escrito:



$$\check{V}_{A2} = \check{V}_{A2}$$

$$\check{V}_{B2} = a \times \check{V}_{A2} = \check{V}_{A2} \angle -240^\circ$$

$$\check{V}_{C2} = a^2 \times \check{V}_{A2} = \check{V}_{A2} \angle -120^\circ$$

a = 1<120°
a^2 = 1<240°
a^3 = 1
a^4 = a
$1+a^2+a = 0$

Sequência zero

- O sistema restante consiste em 3 fasores paralelos, idênticos em módulo e ângulo de fase

- Formam o que é conhecido como sistema unifásico ou de sequência zero

- É suficiente considerar os fasores de sequência zero como componentes dos fasores originais desequilibrados

$$\check{V}_{A0} = \boxed{\check{V}_{A0}} \qquad \check{V}_{B0} = \boxed{\check{V}_{A0}} \qquad \check{V}_{C0} = \boxed{\check{V}_{A0}}$$

Combinando os sistemas

- Rearranjando as equações anteriores, resulta:

$$\check{V}_A = \check{V}_{A1} + \check{V}_{A2} + \check{V}_{A0}$$
$$\check{V}_B = a^2 \times \check{V}_{A1} + a \times \check{V}_{A2} + \check{V}_{A0}$$
$$\check{V}_C = a \times \check{V}_{A1} + a^2 \times \check{V}_{A2} + \check{V}_{A0}$$

$$\begin{bmatrix} \check{V}_A \\ \check{V}_B \\ \check{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \check{V}_{A0} \\ \check{V}_{A1} \\ \check{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

(representação matricial)

Representação matricial

$$\begin{bmatrix} \breve{V}_A \\ \breve{V}_B \\ \breve{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \breve{V}_{A0} \\ \breve{V}_{A1} \\ \breve{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

(mesma matriz do slide anterior)

- Chamando de “F” a matriz de constantes, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \breve{V}_A \\ \breve{V}_B \\ \breve{V}_C \end{bmatrix} = [F] \times \begin{bmatrix} \breve{V}_{A0} \\ \breve{V}_{A1} \\ \breve{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\breve{V}_{A1}$

- A resolução de um sistema não equilibrado de fasores em suas componentes simétricas é um processo essencialmente geométrico

- Diversos métodos foram propostos pelos quais a resolução pudesse ser efetuada

- Elegante e simples: método baseado na álgebra dos números complexos

- Certas operações de simplificação são executadas apenas com o fim de se obter a relação:

$$\boxed{1 + a + a^2 = 0}$$

- Pega-se a equação anterior:

$$\check{V}_B = a^2 \times \check{V}_{A1} + a \times \check{V}_{A2} + \check{V}_{A0}$$

(do slide 20)

- Multiplica-se ambos os lados por a :

$$a \times \check{V}_B = \boxed{a^3} \times \check{V}_{A1} + a^2 \times \check{V}_{A2} + a \times \check{V}_{A0}$$

- Como $a^3 = 1$:

$$a \times V_B = V_{A1} + a^2 \times V_{A2} + a \times V_{A0}$$

$a = 1<120°$
$a^2 = 1<240°$
$a^3 = 1$
$a^4 = a$
$1+a^2+a = 0$

- Pega-se a equação anterior:

$$\breve{V}_C = a \times \breve{V}_{A1} + a^2 \times \breve{V}_{A2} + \breve{V}_{A0}$$

(do slide 20)

- Multiplica-se por a^2 :

$$a^2 \times \breve{V}_C = \boxed{a^3} \times \breve{V}_{A1} + \boxed{a^4} \times \breve{V}_{A2} + a^2 \times \breve{V}_{A0}$$

- Como $a^4 = a$, e $a^3 = 1$:

$$a^2 \times \breve{V}_C = \breve{V}_{A1} + a \times \breve{V}_{A2} + a^2 \times \breve{V}_{A0}$$

$a = 1<120°$
$a^2 = 1<240°$
$a^3 = 1$
$a^4 = a$
$1+a^2+a = 0$

- Somando as equações anteriores:

$$\check{V}_A + a \times \check{V}_B + a^2 \times \check{V}_C = 3 \times \check{V}_{A1} + \left(1 + a + a^2\right)\left(\check{V}_{A2} + \check{V}_{A0}\right)$$

(não está demonstrado)

- E isolando $\check{V}_{A1}$:

$$\check{V}_{A1} = \frac{1}{3}\left(\check{V}_A + a \times \check{V}_B + a^2 \times \check{V}_C\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\check{V}_A + \check{V}_B \times 1\angle 120° + \check{V}_C \times 1\angle 240°\right)$$

- Usando-se os mesmos procedimentos para $\check{V}_{A2}$ e $\check{V}_{A0}$:

$$\check{V}_{A2} = \frac{1}{3}\left(\check{V}_A + a^2 \times \check{V}_B + a \times \check{V}_C\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\check{V}_A + \check{V}_B \times 1\angle 240^\circ + \check{V}_C \times 1\angle 120^\circ\right)$$

$$\check{V}_{A0} = \frac{1}{3}\left(\check{V}_A + \check{V}_B + \check{V}_C\right)$$

Representação matricial

$$\begin{bmatrix} \breve{V}_{A0} \\ \breve{V}_{A1} \\ \breve{V}_{A2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{V}_{A} \\ \breve{V}_{B} \\ \breve{V}_{C} \end{bmatrix}$$

(representação das equações anteriores)

Exemplo (p. 153)

- Um sistema trifásico apresenta sequência de fases ABC e tem as seguintes componentes simétricas de correntes de linhas:

$$\breve{I}_{A0} = 3{,}61\angle -146{,}31^\circ \text{ A}$$
$$\breve{I}_{A1} = 13{,}11\angle 26{,}80^\circ \text{ A}$$
$$\breve{I}_{A2} = 4{,}12\angle -71{,}61^\circ \text{ A}$$

- Pede-se: obter as correntes de linha do sistema

Resolução

- Usando a matriz:

$$\begin{bmatrix} \breve{V}_A \\ \breve{V}_B \\ \breve{V}_C \end{bmatrix} = [F] \times \begin{bmatrix} \breve{V}_{A0} \\ \breve{V}_{A1} \\ \breve{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

(do slide 21)

- Que corresponde às equações:

$$\breve{V}_A = \breve{V}_{A1} + \breve{V}_{A2} + \breve{V}_{A0}$$
$$\breve{V}_B = a^2 \times \breve{V}_{A1} + a \times \breve{V}_{A2} + \breve{V}_{A0}$$
$$\breve{V}_C = a \times \breve{V}_{A1} + a^2 \times \breve{V}_{A2} + \breve{V}_{A0}$$

(do slide 21)

- Cálculo da corrente (similar ao dos fasores da tensão):

(do slide 20)

$$\breve{I}_A = \breve{I}_{A0} + \breve{I}_{A1} + \breve{I}_{A2} \ = 3,61\angle -146,31^\circ + 13,11\angle 26,80^\circ + 4,12\angle -71,61^\circ =$$

$$\breve{I}_A = \ 10 \text{ A}$$

$$\breve{I}_B = \breve{I}_{A0} + a^2 \times \breve{I}_{A1} + a \times \breve{I}_{A2}$$

$$= 3,61\angle -146,31^\circ + 1\angle -120^\circ \times 13,11\angle 26,80^\circ + 1\angle 120^\circ \times 4,12\angle -71,61^\circ$$

$$= 12,04\angle -94,76^\circ \text{ A}$$

$$\breve{I}_C = \breve{I}_{A0} + a \times \breve{I}_{A1} + a^2 \times \breve{I}_{A2}$$

$$= 3,61\angle -146,31^\circ + 1\angle 120^\circ \times 13,11\angle 26,80^\circ + 1\angle -120^\circ \times 4,12\angle -71,61^\circ$$

$$= 18,97\angle 161,57^\circ \text{ A}$$

- Os cálculos anteriores também podem ser usados em estudos de curto-circuito

Potência de curto-circuito trifásico

- Corrente de curto-circuito trifásico:
  - teorema de Thévenin, assumindo como tensão equivalente a tensão de fase ($V_f = V_L \sqrt{3}$):

tensão de Thévenin

$$I_{CC} = \frac{V_{Th(V)}}{x_{Th(\Omega)}} = \frac{V_L}{\sqrt{3} \times x_{Th(\Omega)}}$$

impedância de Thévenin

Em p.u.

- Considerando: $V_{base(V)} = V_{L(V)}$ e $S_{base(MVA)} = S_{3\phi}$,

a equação pode ser reescrita como:

$$\boxed{I_{CC(pu)}} = \boxed{\frac{I_{CC(A)}}{I_{base(A)}}} = \frac{\dfrac{V_{L(V)}}{\sqrt{3} \times x_{Th(\Omega)}}}{\dfrac{S_{base(MVA)}}{\sqrt{3} \times V_{base(V)}}} = \frac{\dfrac{V_{L(V)}}{\sqrt{3} \times \left(x_{Th(pu)} \times V^2{}_{base(V)} / S_{base(MVA)} \right)}}{\dfrac{S_{base(MVA)}}{\sqrt{3} \times V_{base(V)}}} = \boxed{\frac{1}{x_{Th(pu)}}}$$

$$\boxed{I_{CC(A)} = \frac{I_{base(A)}}{x_{Th(pu)}}}$$

- A potência de curto-circuito trifásico é definida por

$$S_{CC3\phi} = \sqrt{3} \times V_L \times I_{CC} (\text{MVA})$$

(do slide anterior)

- Representação em p.u. :

$$\boxed{S_{CC3\phi(pu)}} = \frac{S_{CC3\phi(A)}}{S_{base(MVA)}} = \frac{\sqrt{3} \times V_{L(V)} \times I_{CC(A)}}{S_{base(MVA)}} = \frac{\sqrt{3} \times V_{L(V)} \times \left(\boxed{\dfrac{I_{base(A)}}{x_{Th(pu)}}} \right)}{S_{base(MVA)}} =$$

$$= \frac{V_{L(V)}}{V_{base(V)} \times x_{Th(pu)}} = \boxed{\frac{1}{x_{Th(pu)}}}$$

em p.u., a potência trifásica de curto-circuito é numericamente igual à corrente de curto-circuito

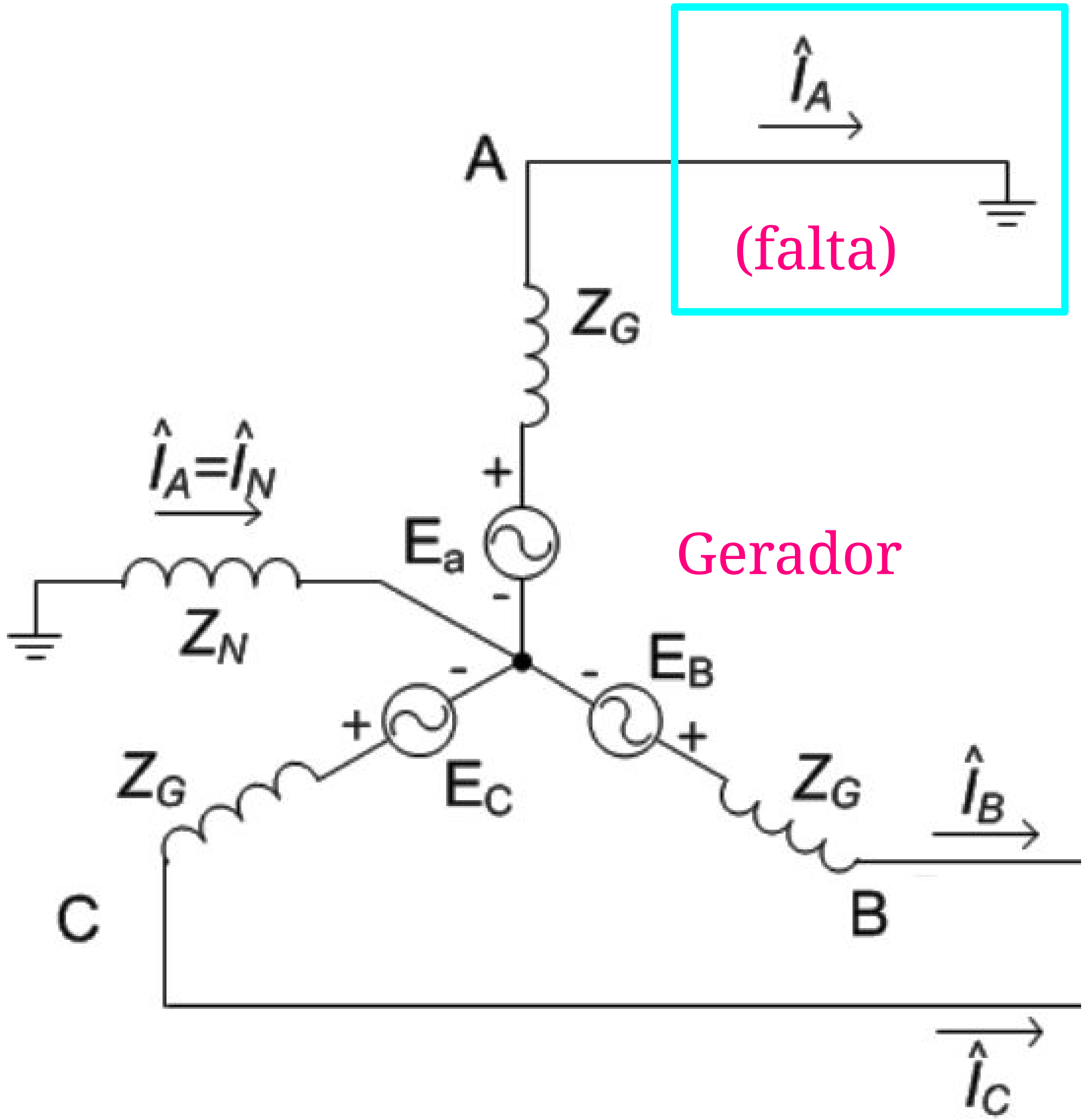
Simplificação do cálculo de curtos-circuitos usando componentes simétricas e teorema de Thévenin

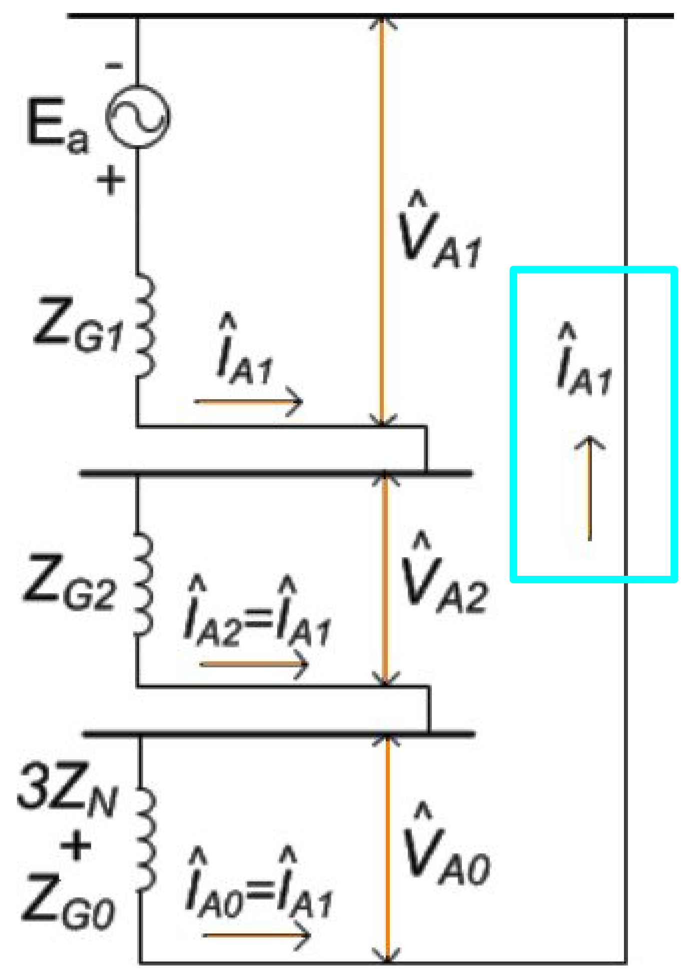
- Para garantir a efetiva aplicabilidade do método:
  - necessidade de modelar o circuito sob falta

- **Modelagem**: linhas de transmissão, geradores e transformadores em sequência positiva, negativa e zero

- Ao modelar, o cálculo da corrente de falta se torna mais simples, e a precisão dos resultados é mantida

Gerador aterrado e com reator





Ligação dos circuitos de sequência
para o cálculo da corrente de falta

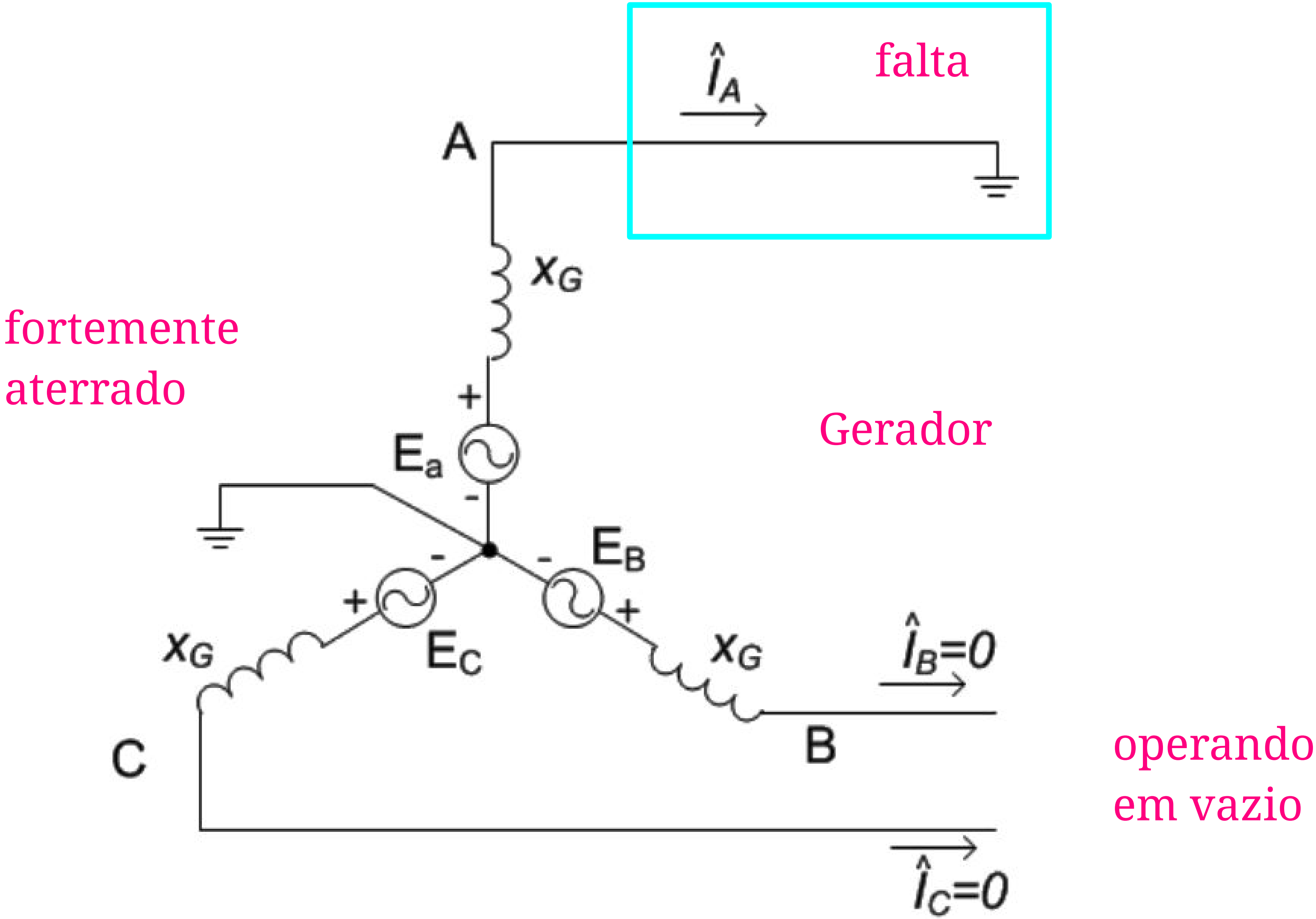
- Na figura anterior ocorre uma falta na fase A envolvendo a terra
- Nas linhas circulam as correntes $\check{I}_A$, $\check{I}_B$, $\check{I}_C$, e $\check{I}_N$
- Thévenin: um bipolo pode ser substituído por um circuito série equivalente com:
  - uma fonte de tensão
  - uma impedância
- Para o estudo de curtos-circuitos
  - o circuito equivalente, visto a partir do ponto onde ocorreu a falta, apresenta o mesmo comportamento do original

- O cálculo da corrente de falta pode ser efetuado por meio da resolução de um circuito elétrico simplificado

- A tensão equivalente é tomada no ponto em que ocorreu a falta
  - levar em consideração se a falta ocorre:
    - com circuito elétrico aberto, ou
    - sob carga

- A impedância equivalente é dada pela correlação entre as impedâncias de linhas de transmissão e geradores, vista no ponto onde ocorreu a falta

Exemplo (p. 158)



Enunciado

- Realizar o cálculo analítico de uma falta assimétrica fase-terra em um gerador elétrico
- Assumir uma falta na fase A de um gerador em Y fortemente aterrado operando em vazio
- Determinar as componentes simétricas das correntes de linha associadas aos fasores $\breve{I}_A$, $\breve{I}_B$, e $\breve{I}_C$

- Dados: $\check{I}_A = I\angle\alpha$, $\check{I}_B = 0$, e $\check{I}_C = 0$
  - I = módulo da corrente de curto-circuito
  - α = defasagem dessa corrente em relação a qualquer eixo arbitrário de referência

- Considerar as três correntes de linha como um sistema trifásico desequilibrado,
  - mesmo que duas delas sejam nulas

- Usar o método das componentes simétricas e o teorema de Thévenin

Resolução

- Componentes de sequência positiva do sistema de fasores originais:

$$\boxed{\begin{aligned}\check{V}_{A1} &= \frac{1}{3}\left(\check{V}_A + a\times\check{V}_B + a^2\times\check{V}_C\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\check{V}_A + \check{V}_B\times 1\angle 120^\circ + \check{V}_C\times 1\angle 240^\circ\right)\end{aligned}}$$

(do slide 25)

- Substituindo tensão por corrente, fica:

$$\frac{1}{3}\left(I\angle\alpha + 0\times 1\angle 120^\circ + 0\times 1\angle 240^\circ\right) = \frac{1}{3}\times I\angle\alpha \text{ A}$$

- Corrente I_{B1} :

$$\boxed{\begin{aligned}\breve{V}_{A2} &= \frac{1}{3}\left(\breve{V}_A + a^2 \times \breve{V}_B + a \times \breve{V}_C\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\breve{V}_A + \breve{V}_B \times 1\angle 240^\circ + \breve{V}_C \times 1\angle 120^\circ\right)\end{aligned}}$$

(do slide 26)

- Substituindo:

$$\breve{I}_{B1} = \frac{1}{3} \times I\angle \alpha - 120^\circ \text{ A}$$

- Da mesma forma, para a corrente I_{C1} :

$$\breve{I}_{C1} = \frac{1}{3} \times I\angle \alpha + 120^\circ \text{ A}$$

- Componentes de sequência negativa

(da mesma forma, usando as equações anteriores)

$$\frac{1}{3}\left(\breve{I}_A + a^2 \times \breve{I}_B + a \times \breve{I}_C\right) = \frac{1}{3}\left(I\angle\alpha + 0 \times 1\angle 240^\circ + 0 \times 1\angle 120^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \times I\angle\alpha \text{ A}$$

$$\breve{I}_{B2} = \frac{1}{3} \times I\angle\alpha + 120^\circ \text{ A}$$

$$\breve{I}_{C2} = \frac{1}{3} \times I\angle\alpha + 120^\circ \text{ A}$$

- Componentes de sequência zero

$$\breve{I}_{A0} = \breve{I}_{B0} = \breve{I}_{C0} = \frac{1}{3} \times I\angle\alpha \text{ A}$$

- Relações

$$\breve{I}_{A1} + \breve{I}_{A2} + \breve{I}_{A0} = \breve{I}_{A} = I\angle\alpha \text{ A}$$

$$\breve{I}_{B1} + \breve{I}_{B2} + \breve{I}_{B0} = \breve{I}_{B} = 0 \text{ A}$$

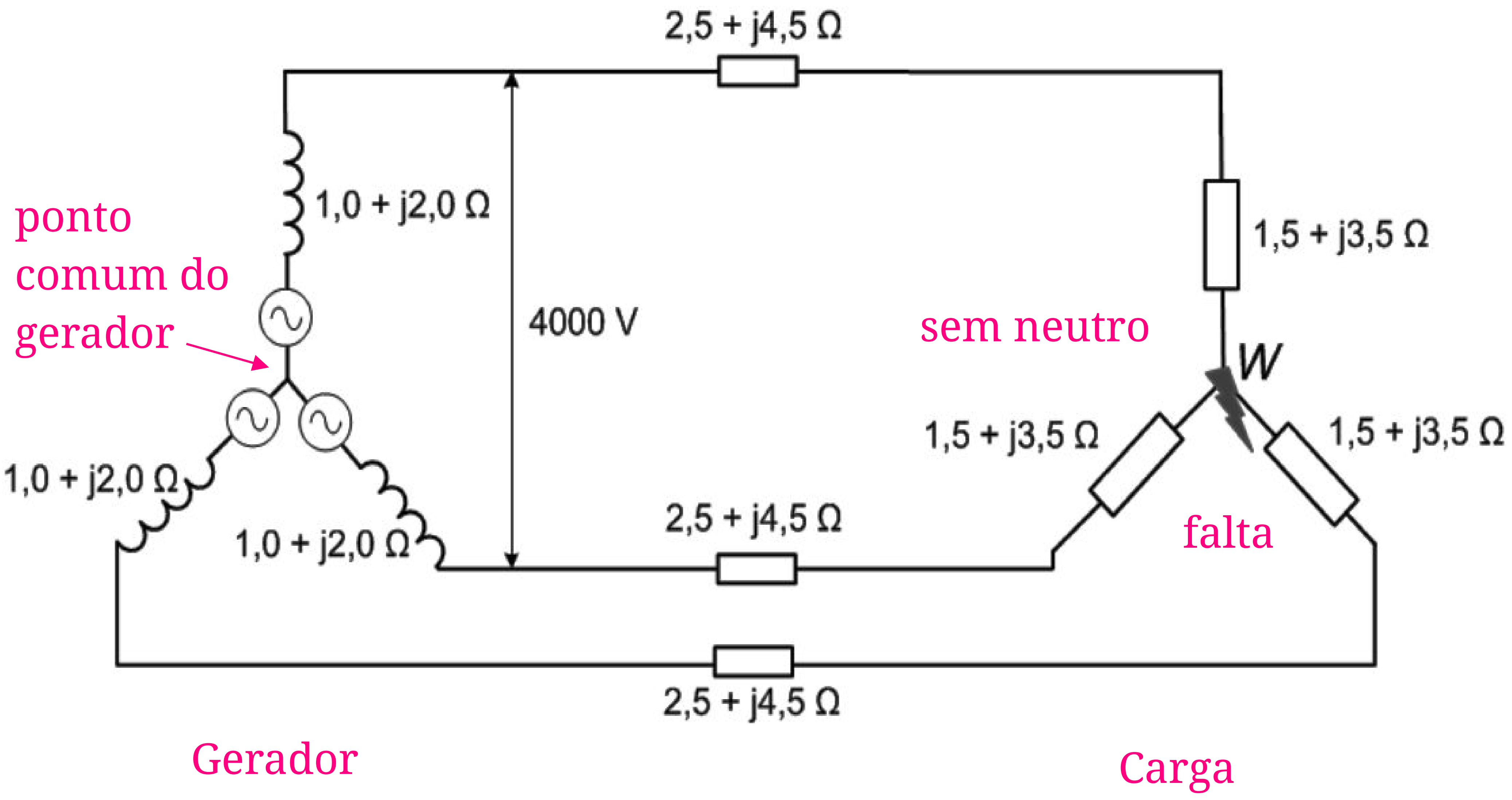
$$\breve{I}_{C1} + \breve{I}_{C2} + \breve{I}_{C0} = \breve{I}_{C} = 0 \text{ A}$$

(dado)

- As componentes simétricas demonstradas são empregadas no cálculo de curtos-circuitos assimétricos do tipo fase-terra

- Por meio da decomposição dos fasores originais em suas componentes, a simplificação da análise é garantida, mesmo se o gerador for fortemente aterrado por meio de um reator

Exemplo (p. 157)



- Cálculo de curto-circuito com base na simplificação produzida pelo teorema de Thévenin

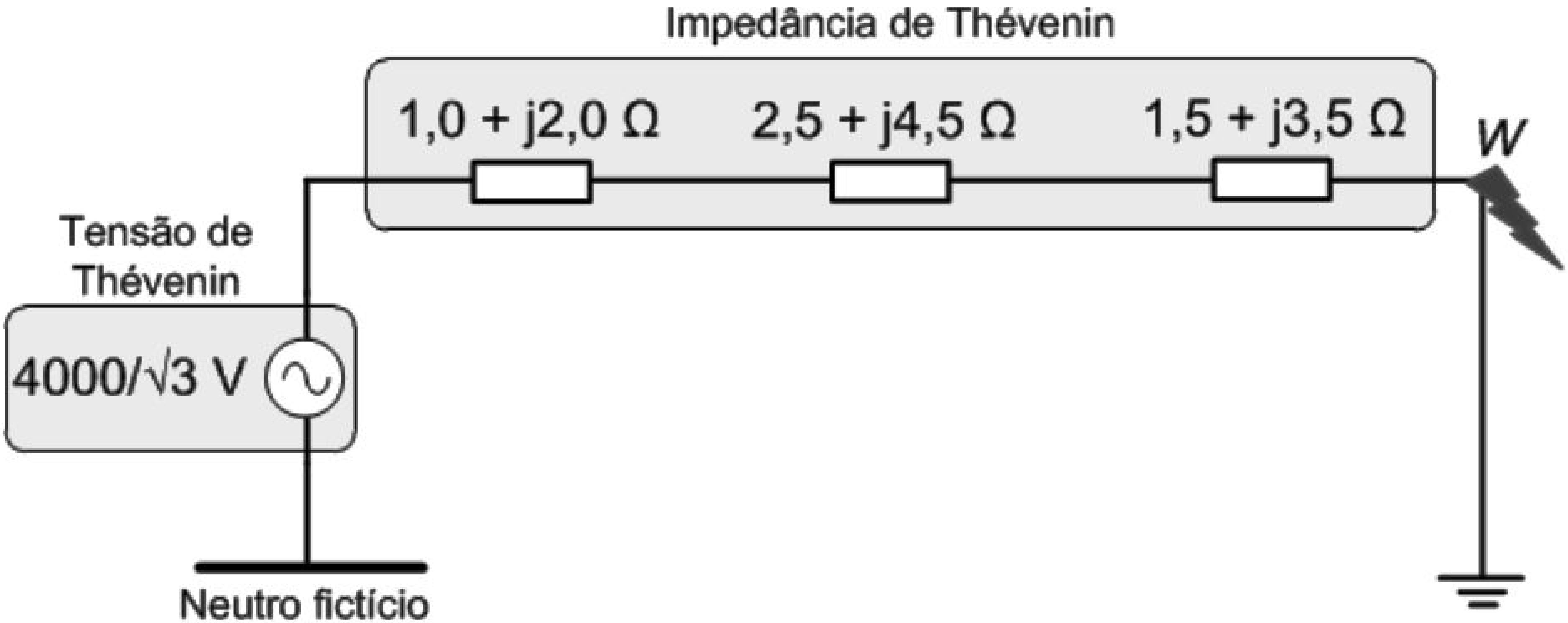
- Obs.: usualmente, o cálculo de curto-circuito trifásico (falta simétrica) é usado no ajuste dos relés digitais, pois, sob certas circunstâncias, obtêm-se valores menores para as correntes de falta

- Determine a magnitude da corrente de falta $\check{I}_{CC}$, caso um curto-circuito se origine no ponto W

- Determinar a corrente i_{LIMIAR} a ser ajustada nos relés de proteção da carga, sabendo que i_{LIMIAR} representa 57,5% da corrente de falta

Resolução

Circuito equivalente de Thévenin, visto no ponto da falta



ponto comum do gerador

- gerador e carga são equilibrados
  - todos os cálculos serão feitos por fase

- Assumindo o ponto comum do gerador como um neutro fictício,
  - a tensão equivalente de Thévenin é igual à tensão de fase do gerador

- a impedância equivalente vista no ponto da falta é igual à soma das impedâncias do gerador, da linha e da carga

- Determinação da corrente de falta

$$\left|\breve{I}_{CC}\right| = \frac{4000/\sqrt{3}}{(1{,}0 + j2{,}0) + (2{,}5 + j4{,}5) + (1{,}5 + j3{,}5)} = 206{,}56\ \text{A}$$

- Corrente de ajuste dos relés

$$i_{LIMIAR} = 0{,}575 \times \left|\breve{I}_{CC}\right| = 118{,}77\ \text{A}$$