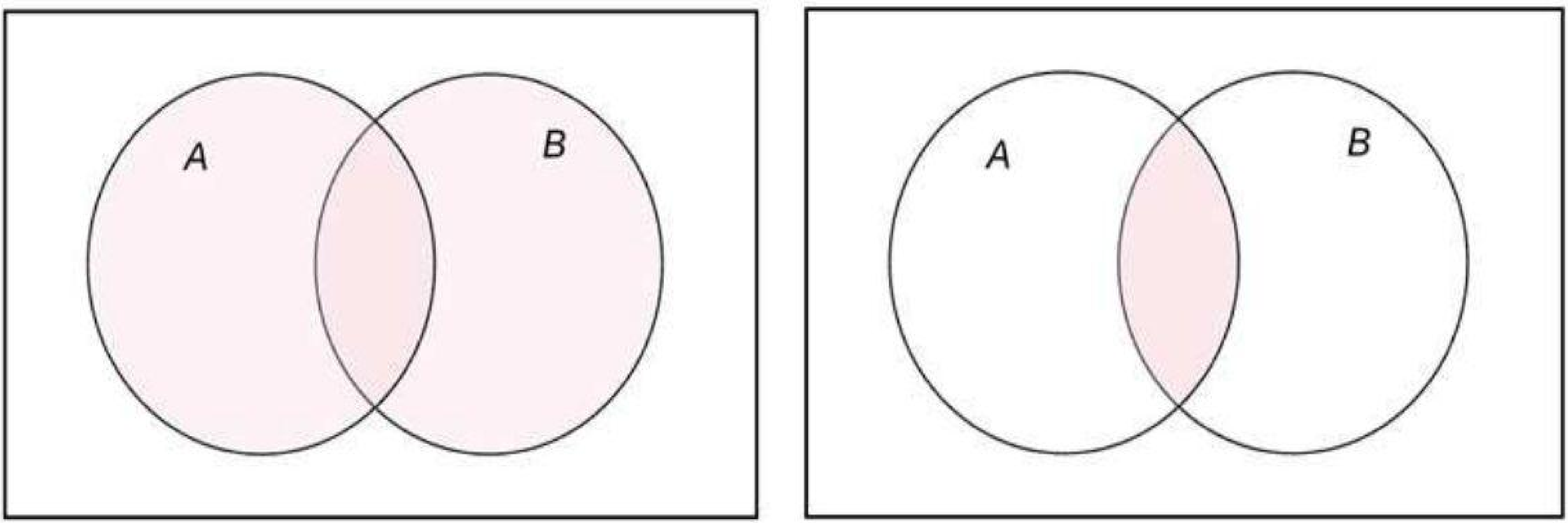
Álgebra de conjuntos

Eduardo Furlan Miranda

2024-08-01

Baseado em: SCHEFFER, VC; VIEIRA, G; LIMA, TPFS. Lógica Computacional. EDE, 2020. ISBN 978-85-522-1688-9.

Figura 2.2 | União e intersecção de conjuntos



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$

- A operação união é representada pelo símbolo ∪
- A operação intersecção pelo símbolo ∩

- Consideremos o conjunto M constituído por todos os alunos de uma determinada universidade

- Podemos afirmar que o conjunto A, formado pelos alunos do curso x dessa mesma universidade, é um subconjunto de M ($A \subseteq M$), ou seja,
  - cada aluno que pertence ao conjunto A (alunos do curso x) também pertence ao conjunto M (também são alunos da universidade)

- Analogamente, consideremos também o conjunto B, formado pelos alunos do curso y dessa mesma universidade, logo, podemos afirmar que B também é subconjunto de M ($B \subseteq M$)

- Um novo conjunto de alunos pode ser definido como consistindo em todos os alunos que sejam estudantes do curso x ou y (ou ambos)

- Esse conjunto é chamado de união de A e B

- A operação de união de A e B pode ser denotada como
  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

- Outro conjunto pode ser definido como sendo composto por todos os alunos que estão matriculados tanto no curso x quanto no curso y, ou seja, alunos que cursam simultaneamente ambos os cursos

- Esse novo conjunto (que pode ser vazio) é chamado de intersecção de A e B

- A operação de intersecção de A e B pode ser denotada como $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Exemplo

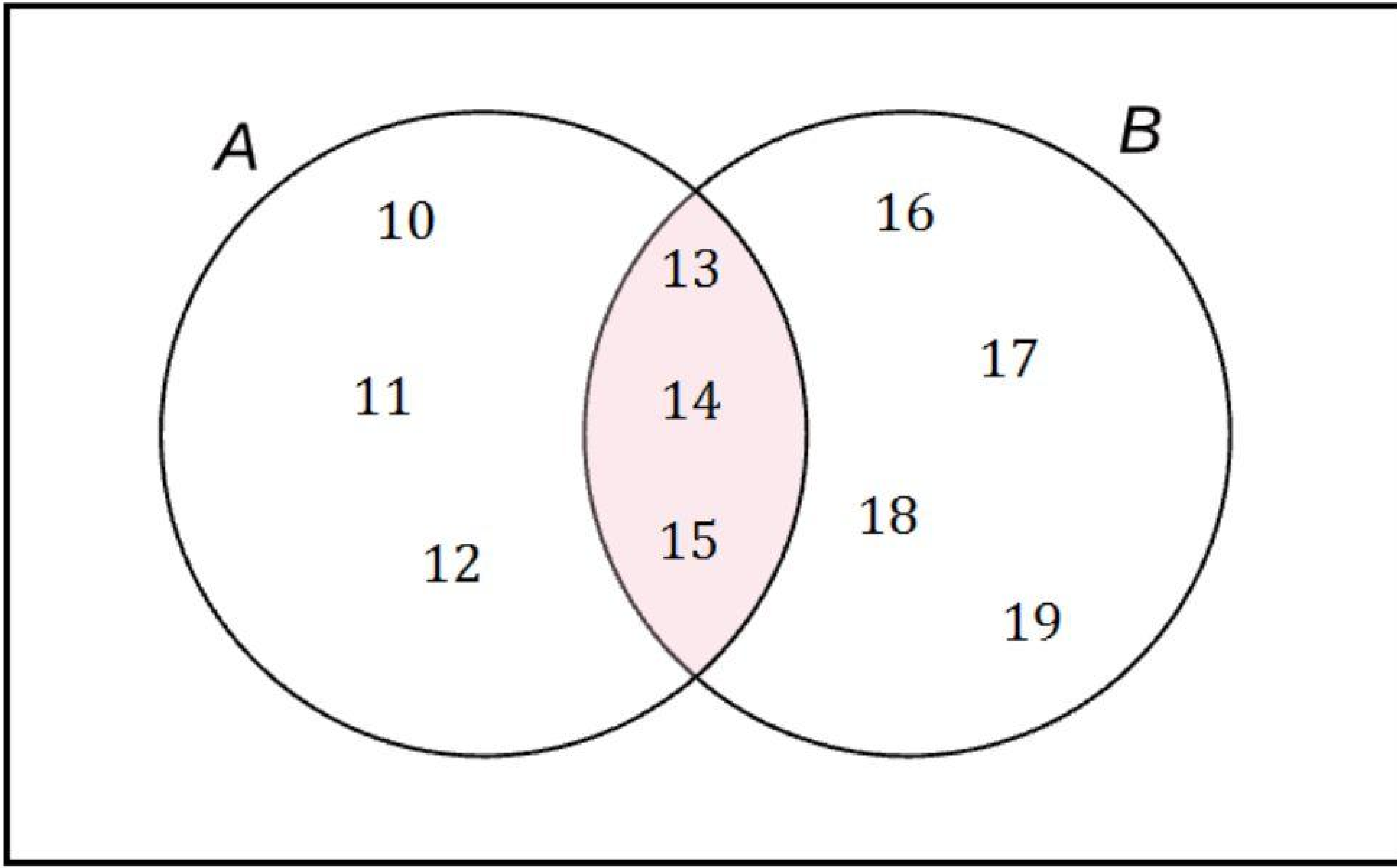
- Sejam os conjuntos A = {10, 11 ,12, 13 , 14, 15} e B = {13 ,14, 15 , 16, 17, 18, 19} , o conjunto A ∪ B consiste no conjunto formado por todos os elementos de A e de B
  - A ∪ B = {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

- Há elementos pertencentes a ambos os conjuntos, porém, ao efetuarmos a operação união (∪) , esses elementos são contabilizados uma única vez

- Em relação à cardinalidade desses conjuntos, temos que
  - |A| = 6 , |B| = 7 e |A ∪ B| =10

- O conjunto A ∩ B consiste no conjunto formado pelos elementos comuns aos conjuntos A e B
  - $A \cap B = \{13, 14, 15\}$
  - $A \cap B = 3$
- Os diagramas de Venn podem ser utilizados para ilustrar as operações binárias de união e intersecção de conjuntos

Figura 2.3 | Exemplo 1

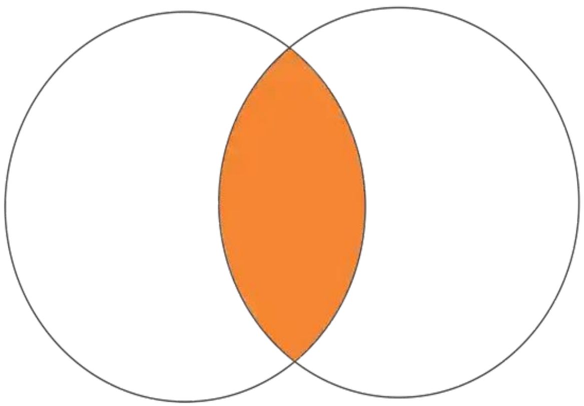


- Leis básicas da álgebra de conjuntos usando a notação padrão da Teoria de Conjuntos
  - Propriedades comutativas: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
  - Propriedades associativas: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - Propriedades do conjunto vazio: $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - Propriedades distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Leis de idempotência: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

- Vamos demonstrar a propriedade associativa para a união. Considere os conjuntos A, B e C. Queremos provar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$:
  - $A \cup (B \cup C) = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in (B \cup C)\}$
  - Pela definição de união, segue que:
  - $A \cup (B \cup C) = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\}$
  - $A \cup (B \cup C) = \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C\}$
  - Logo: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Constatamos, portanto, que as condições $A \cup (B \cup C)$ e $(A \cup B) \cup C$ são logicamente equivalentes

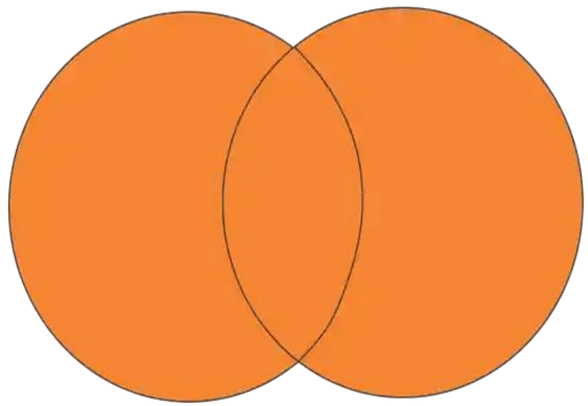
INTERSEÇÃO

$A \cup B$



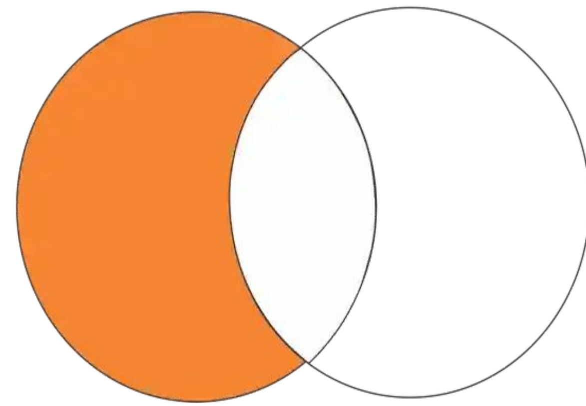
UNIÃO

$A \cap B$



DIFERENÇA

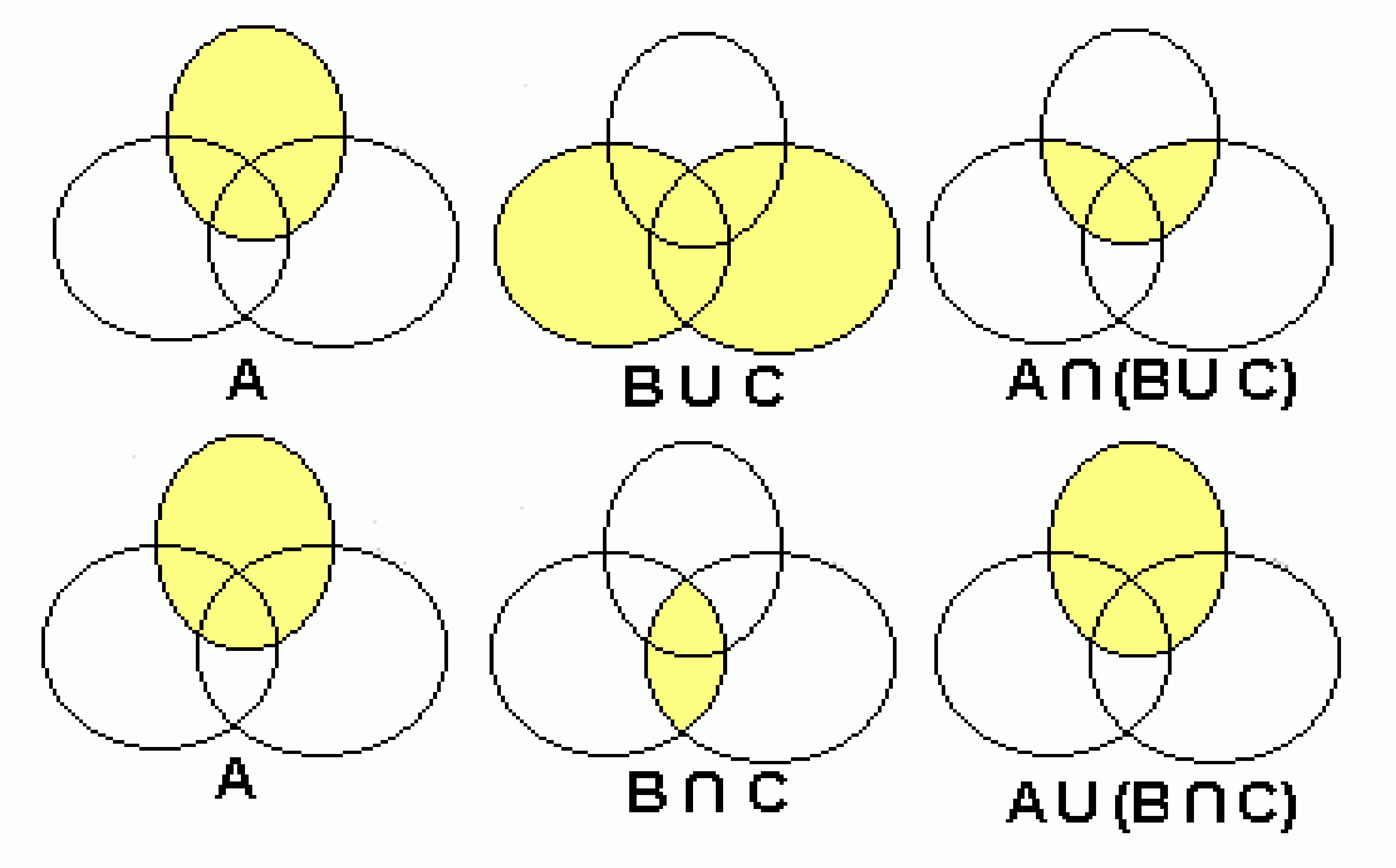
$A - B$



Operação diferença de conjuntos

- A diferença A - B é o conjunto de todos os elementos de A que não estão em B, ou seja: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

- Ex.: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$
  - $A - B = \{1, 2, 3\}$
  - $B - A = \{6, 7\}$ ← 1, 2 não faz parte


A
B U C
A ∩ (B U C)
A
B ∩ C
A U (B ∩ C)

Diferença simétrica

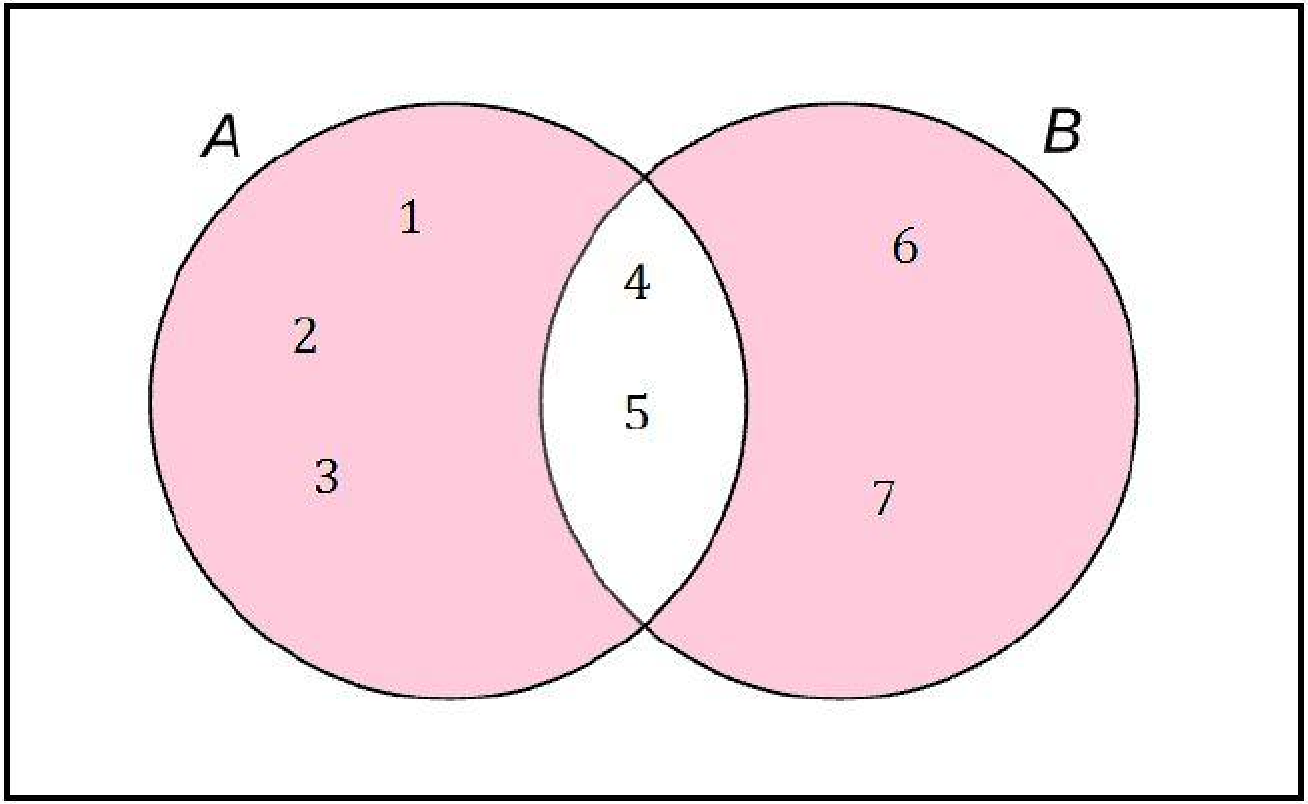


Diagrama de Venn

Diferença simétrica

- A diferença simétrica de A e B pode ser denotada por

$$A \,\Delta\, B$$

- Conjunto de todos os elementos que
  - pertencem a A mas não pertencem a B
  - pertencem a B mas não pertencem a A

- Pode ser representado por

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

Exemplo

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$ (mesmos conjuntos do slide 13)

- A diferença simétrica $A \Delta B$ ficaria definida como

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) =$$

$$(1, 2, 3) \cup (6, 7) =$$

$$(1, 2, 3, 6, 7)$$

Contagem

- Suponha que desejamos contar o número de objetos que têm uma determinada propriedade específica

- Podemos abordar esse tipo de problema utilizando um caso especial de um método de contagem chamado inclusão-exclusão:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(continua)

- Para determinar o numero de elementos de $|A \cup B|$
  - somar o número de elementos de A com
  - o número de elementos de B
  - e subtrair o número de elementos de $|A \cap B|$

- A subtração se faz necessária para não incorrermos no risco de contabilizar o mesmo elemento duas (ou mais) vezes

- Essa fórmula é recomendada quando o cálculo de

$$|A|, |B| \text{ e } |A \cap B|$$

- é mais fácil do que o cálculo de

$$|A \cup B|$$

Exemplo

- Em uma pesquisa de TI foi perguntado qual era o navegador de Internet utilizado durante o trabalho
  - 280 profissionais alegaram utilizar o navegador x
    - (e não disseram nada sobre o navegador y)
  - 300 disseram utilizar o navegador y
    - (e não disseram nada sobre o navegador x)
  - 120 profissionais afirmaram utilizar ambos os navegadores
- Sabendo que todos os funcionários do setor de TI dessa empresa responderam a essa pesquisa,
  - como você determinaria a quantidade total de pessoas?

- Para responder a esse problema, podemos recorrer ao método de contagem chamado inclusão-exclusão

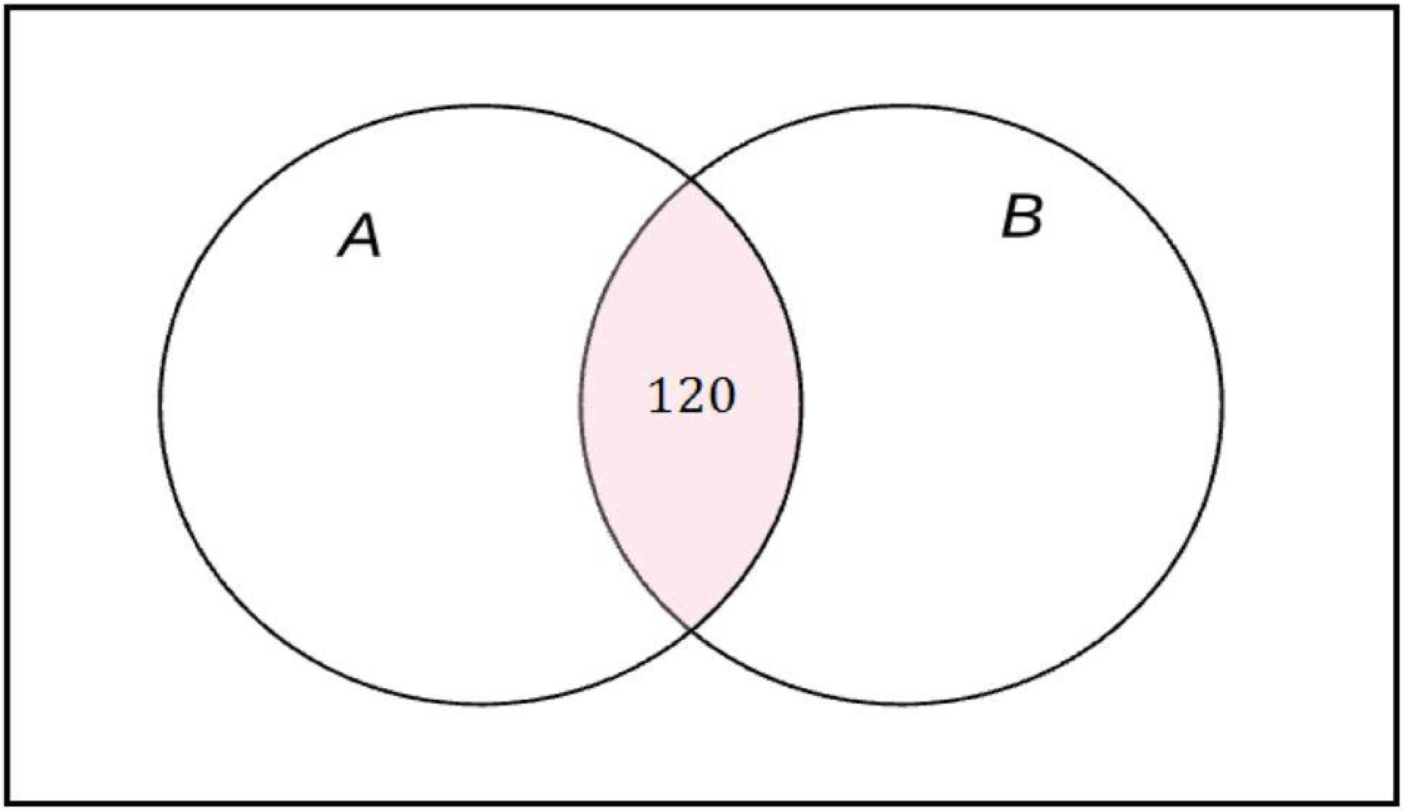
- Vamos considerar como conjunto A o conjunto dos profissionais que utilizam o navegador x, e como conjunto B o conjunto dos profissionais que utilizam o navegador y

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 280 + 300 - 120 = 460$$

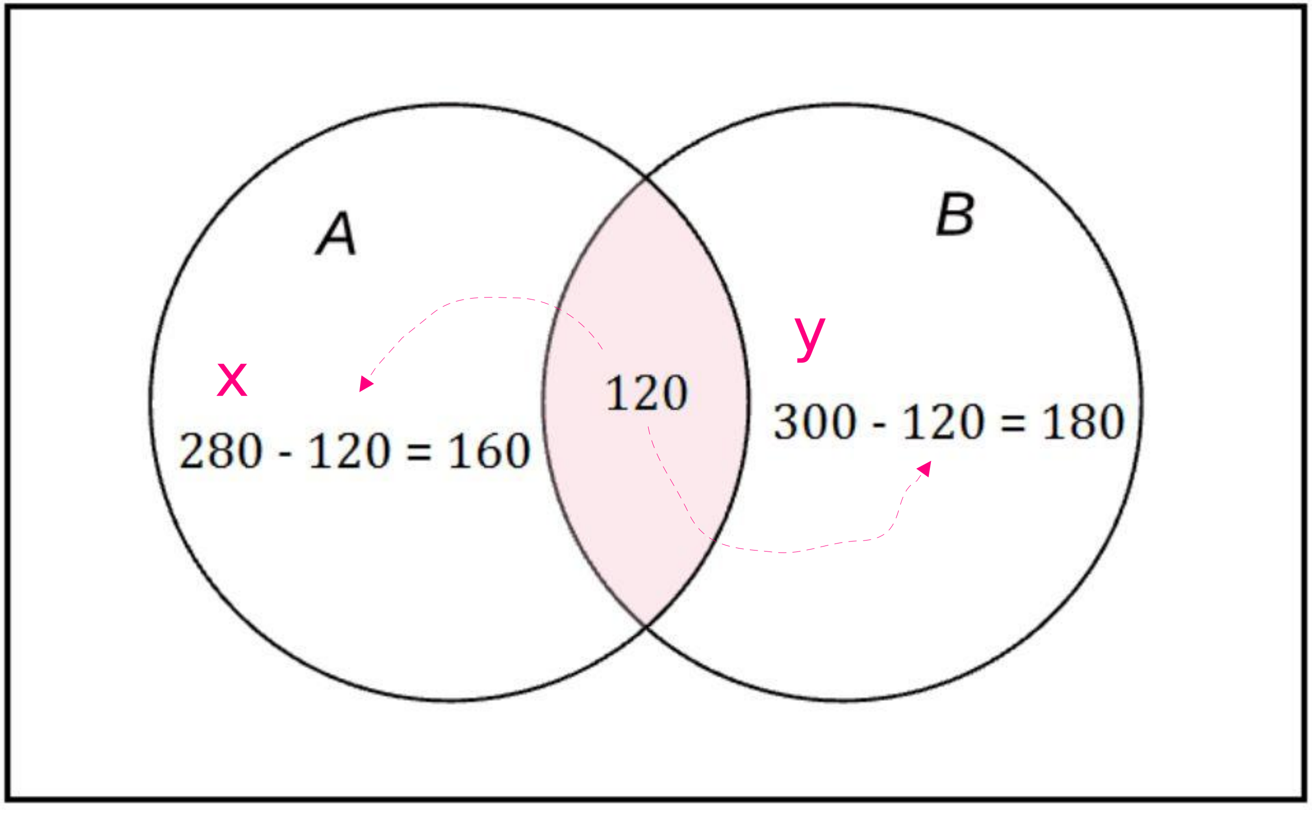
(continua)

- Vamos iniciar pela intersecção dos conjuntos

Figura 2.5 | Problema dos navegadores de internet (parte 1)



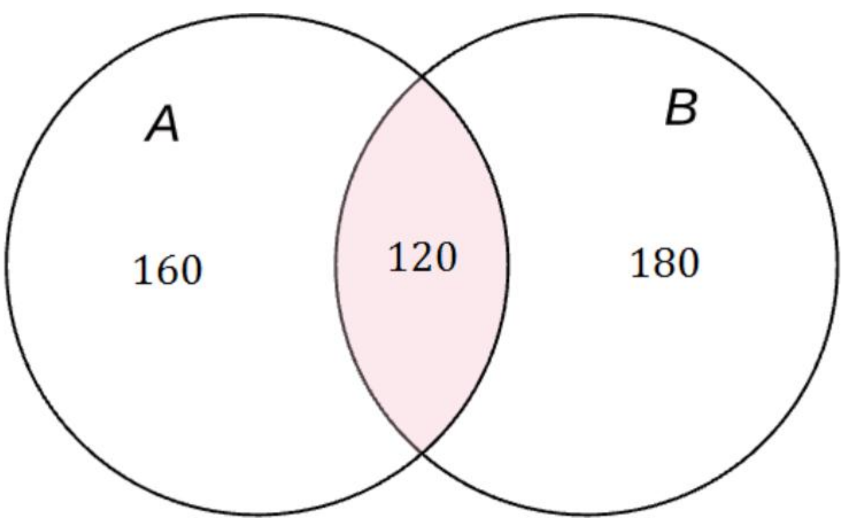
- Em seguida, procuramos determinar o número de elementos pertencente a cada conjunto, lembrando de subtrair aqueles elementos que já estão representados na intersecção do diagrama



- Por fim, contabilizamos o número de elementos do conjunto de interesse

- Ao se utilizar diagramas de Venn para resolver esse tipo de problema, os números registrados no diagrama corresponderão à quantidade de elementos (cardinalidade) de cada conjunto

$$|A \cup B| = 160 + 120 + 180 = 460$$



- Qando a intersecção entre os conjuntos é vazia
  - Dizemos que os conjuntos são disjuntos
- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{7, 8, 9\}$
- Como $A \cap B = \varnothing$, podemos afirmar que A e B são conjuntos disjuntos

- Há uma relação íntima entre as operações união ($\cup$) e intersecção ($\cap$) da álgebra de conjuntos e os conectivos lógicos largamente utilizados em diversas linguagens de programação OU (or) e E (and), respectivamente

- Os conectivos lógicos OU e E são simbolizados por $\vee$ e $\wedge$

- Assim, podemos estabelecer as seguintes analogias:

I. $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$

II. $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$

(continua)

- Em I, temos que o elemento x pertence à união de A e B se, e somente se, x pertence à A ou x pertence à B (podendo, inclusive, pertencer a ambos o conjuntos)

- Em II, temos que o elemento x pertence à intersecção de A e B se, e somente se, x pertence à A e x pertence à B