Elementos de Matemática Discreta

Eduardo Furlan Miranda

2025-02-01

Baseado em: GARCIA, A. de V.; HAEUSLER, E. H. Linguagens Formais e Autômatos. Londrina: EDA, 2017.

Teoria de Conjuntos (TC)

- George Cantor, 1874
- Conjunto é qualquer coleção de objetos
  - Abstratos, concretos
    - Em quantidade finita ou não

Predicado e proposição

- $a \in A$ o objeto a pertence ao conjunto A
  - Predicado lógico
    - "2 + 2 = 4"
  - Proposição
    - "ser alto"
      - descreve uma propriedade

Propriedades

- Propriedades são especificadas pelos conectivos lógicos
  - Conjunção ($\wedge$)
  - Disjunção ($\vee$)
  - Negação ($\neg$)
  - Implicação ($\rightarrow$)

Quantificador e predicado

- Expressa a quantidade de elementos que satisfazem uma determinada propriedade
  - Existencial (∃) "existe pelo menos um"
  - Universal (∀) "para todo"

- Dois objetos são o mesmo
  - Predicado identidade (=)

Axioma da especificação

- Permite definir novos conjuntos a partir de propriedades
  - Ex.: seja A o conjunto de todos os números naturais. A propriedade φ(x) pode ser "x é par"
    - $$B = \{x \in A \mid x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

- Algumas vantagens
  - Definir conjuntos de maneira precisa
  - Ajuda na construção de estruturas complexas

Pertinência (∈)

- É o único conceito primitivo na TC
  - Considerado fundamental e não é definido em termos de outros conceitos mais básicos
  - É a partir dessa relação primária entre elementos e conjuntos que construímos toda a teoria

Predicados atômicos

- Blocos de construção fundamentais da lógica de primeira ordem
- Representam relações simples entre objetos e são a base para a construção de afirmações mais complexas
- Ex.: "x > y"

Fórmulas

- As fórmulas da linguagem básica de TC tem ocorrência de $\in$ para formar predicados atômicos, além da igualdade $=$
  - Ex.: $x \in A$ "x pertence ao conjunto A"

- Se $\varphi(x)$ for a fórmula $\neg(x = x)$ e A for um conjunto arbitrário
  - Então $\{x \,/\, \neg(x = x)\}$ é o subconjunto vazio de A
    - $\{x \,/\, \ldots\}$ "o conjunto de todos os x tais que..."
    - $\neg(x = x)$ "não é verdade que x é igual a x"

Axioma da Especificação

- Seja φ (x) uma fórmula na linguagem
  - onde x ocorre livre em φ (x)

- Seja A um conjunto

- $\{a \mid a \in A \text{ e } \varphi(a)\}$ é um subconjunto de A
  - podemos formar um novo conjunto que contém exatamente os elementos de A que satisfazem a propriedade φ

|	tal que
φ	(phi) pronuncia-se como "fi"

Conjuntos iguais

- Dado um subconjunto arbitrário B de um conjunto A
  - a propriedade $x \in B$ especifica B
  - ou seja, B e $\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ são o mesmo conjunto
- Dois conjuntos iguais possuem os mesmos elementos
- A está incluído em B se todo elemento de A também é elemento de B

Inclusão entre conjuntos

- Dois conjuntos B e C são iguais, se, e somente se
  - $B \subseteq C$ e $C \subseteq B$
- Inclusão entre conjuntos
  - Sejam B e C conjuntos
    - B está incluído em C, ou que C contém B se, e somente se
      - Todo elemento de B é também um elemento de C
        - Descrito em lógica como $\forall x ((x \in B) \rightarrow (x \in C))$

"Para todo x, se x pertence a B, então x pertence a C"

$\subseteq$ está contido ou é igual
$\in$ pertence
$\forall$ para todo
$\rightarrow$ então ou implica

Par ordenado

- Apresentação de um conjunto enumerando seus elementos
  - Ex.: conjunto dos símbolos ▷ , ◊ , e °
    - { ▷ , ◊ , ° }

Ex.: coordenadas geográficas

- Par ordenado: (a , b) = {{ a }, { a, b }}
  - A ordem é garantida pela diferença entre esses dois conjuntos
    - O conjunto que contém apenas 'a' identifica inequivocamente 'a' como o primeiro elemento
  - (a, b) é diferente de (b, a), a menos que a = b

Operações com Conjuntos

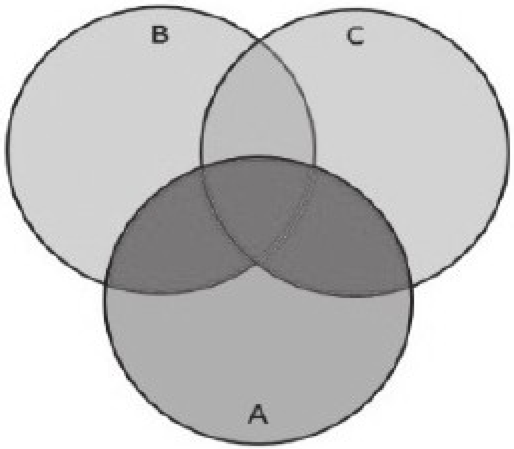
universo

- Sejam B e C subconjuntos de A
  - União: $B \cup C$ — $\{ x \mid x \in B \vee x \in C \}$
  - Interseção: $B \cap C$ — $\{ x \mid x \in B \wedge x \in C \}$
  - Complemento: $C_A(B)$ ou $A \setminus B$ — $\{ x \mid x \in A$ e $x \notin B) \}$
    - Conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B
  - Diferença: $B - C$ — $\{ x \mid x \in A$ e $x \notin B \}$
    - Conjunto dos elementos que pertencem a B e não pertencem a C
  - Produto Cartesiano: $B \times C$ — $\{ (x, y) \mid x \in B$ e $y \in C \}$
  - Conjunto potência: $\wp(A)$ — $\{ B \mid B \subseteq A \}$
    - Ex.: $A = \{1, 2\}$; $\wp(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$\neg$ não
$\wedge$ e
$\vee$ ou
$\subseteq$ está contido ou é igual

Igualdades entre conjuntos

- Sejam A, B, e C, conjuntos
  - $A \cap A = A$
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



- $\emptyset$ = conjunto vazio
  - { }
    - notar que o conjunto existe, o que não existe é o elemento dentro dele

- conj. não vazio
  - {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... }

Relação entre elementos

- R é uma relação entre elementos de A e de B se, e somente se, $R \subseteq A \times B$
  - R consiste em pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$
  - $A \times B$: o produto cartesiano é o conjunto de todos os pares ordenados possíveis
  - $\subseteq$: representa a relação de "subconjunto"
    - todos os elementos do primeiro conjunto também estão contidos no segundo conjunto

- Ex.: Conjuntos A: {1, 2} e B: {a, b, c}
- A × B = { (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) }
- Suponha que R seja uma relação específica entre A e B :
  - Relação R: { (1, a), (2, b) }
    - $(1, a)$: O elemento 1 de A está relacionado com o elemento 'a' de B
    - $(2, b)$: O elemento 2 de A está relacionado com o elemento 'b' de B

Relação funcional

- Uma função de F de **A** em **B** é qualquer relação na qual
  - para cada a em **A** existe um, e somente um b em **B**
    - tal que o par ordenado (a, b) ∈ F

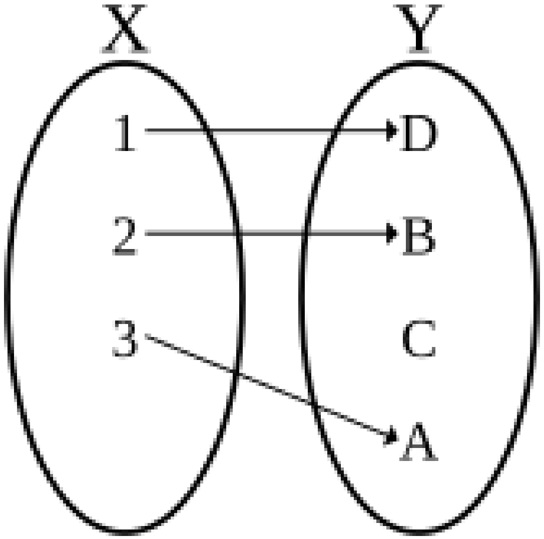
- Implica
  - Existência: para cada elemento $a \in A$, existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in F$
  - Unicidade: para cada $a \in A$, o elemento $b \in B$ associado é único, ou seja, não pode haver mais de um b em B para o mesmo a em A

Relação funcional - exemplo

- Sejam A = {1, 2} e B = {x, y, z}
  - Relação (não é função) : R = {(1, x), (1, y), (2, z)}
    - 1 de A está relacionado com dois elementos em B (x e y)
      - isso viola a condição de unicidade, portanto, R é uma relação
  - Função : F = {(1, z), (2, x)}
    - Cada elemento de A está relacionado com exatamente um elemento de B
    - Podemos escrever F(1) = z e F(2) = x

Função injetiva

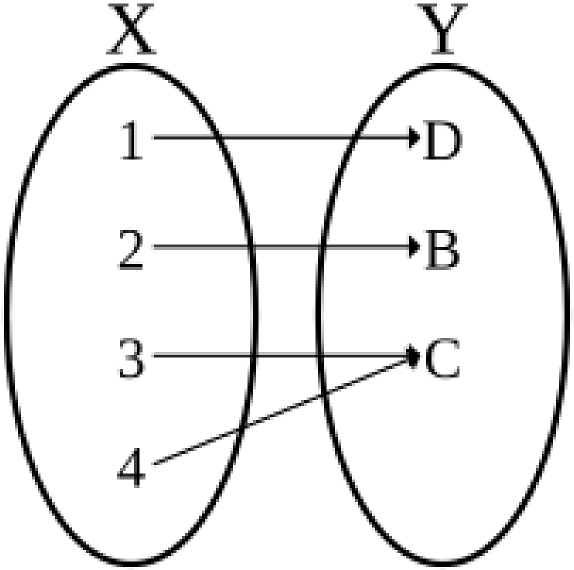
- F é injetiva se e somente se quaisquer que sejam x_1 e x_2 (pertencentes ao domínio da função), x_1 é diferente de x_2 implicando que $f(x_1)$ é diferente de $f(x_2)$:
  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\,(x_1) \neq f\,(x_2)$



https://pt.wikipedia.org/wiki/Função_injectiva

Função sobrejetiva

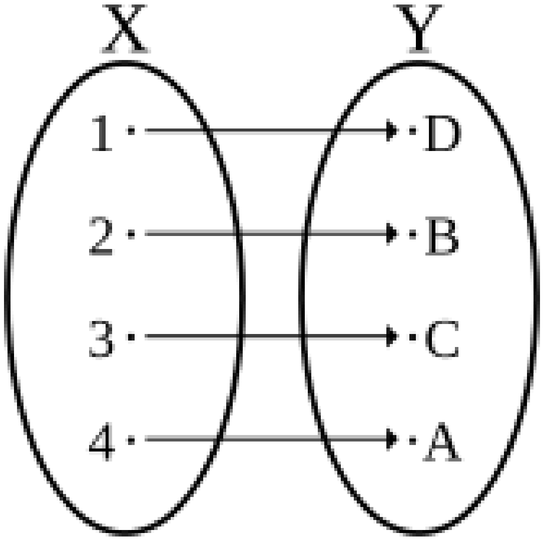
- Para todo elemento y no contradomínio Y de f , há pelo menos um elemento x no domínio X de f tal que f(x) = y
  - Ou seja, quando o conjunto imagem coincide com o contradomínio da função; não é necessário que x seja único



https://pt.wikipedia.org/wiki/Função_sobrejectiva

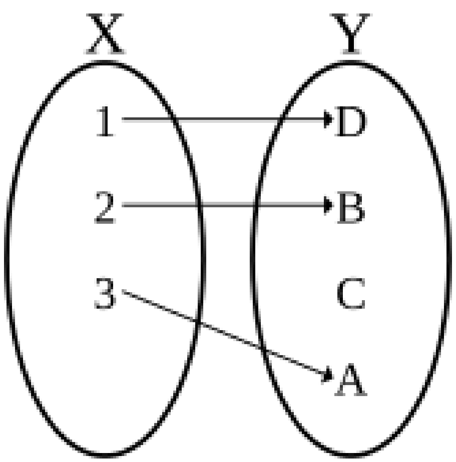
Função bijectiva

- Bijetiva, bijetora, correspondência biunívoca, bijeção, ou “injetora e sobrejetora”
  - Uma função bijetiva é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo



https://pt.wikipedia.org/wiki/Função_bijectiva

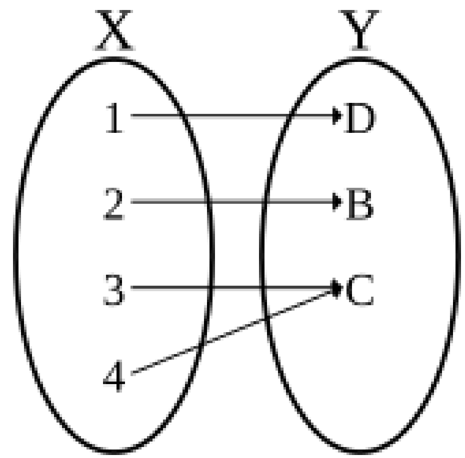
Funções injetiva e sobrejetiva



injectiva

não
sobrejetiva

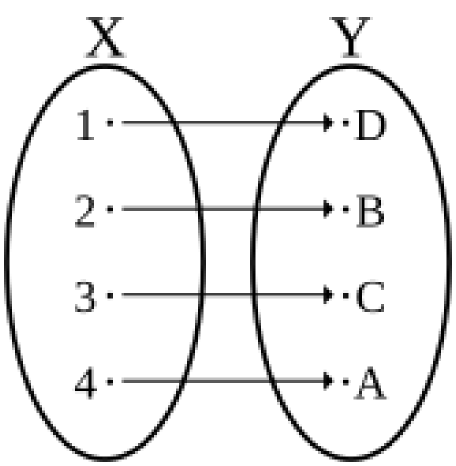
não
bijectiva



não
injectiva

sobrejetiva

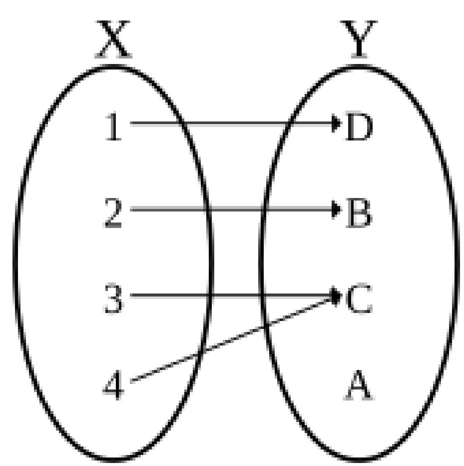
não
bijectiva



injectiva

sobrejetiva

bijectiva



não
injectiva

não
sobrejetiva

não
bijectiva

https://pt.wikipedia.org/wiki/Função_injectiva

Quantificadores e variáveis

- $\exists\, y\, (\neg\, (y = 0) \;\wedge\; y + x = z)$
  - "Existe um y tal que y não é igual a zero e y mais x é igual a z"
  - a ocorrência de y em $y = 0$ é ligada ao quantificador existencial
  - as ocorrências de z e x são livres, pois não estão no escopo de nenhum quantificador

- $\forall\, x\, ((x \in z) \rightarrow (x \in y))$
  - "Para todo x, se x pertence a z, então x pertence a y"
  - as ocorrências de x são ligadas ao quantificador universal $\forall\, x$
  - as ocorrências de z e y são livres

$\exists$ existe
$\neg$ não
$\wedge$ e
$\forall$ para todo
$\rightarrow$ então

“0” e “<”

- Definição de “Zero” (0)
  - Função sucessora
    - (suc): $suc(n) = n + 1$
  - Zero é um número natural que não é sucessor de nenhum outro número natural
    - $\neg \exists y\,(suc(y) = x)$: "não existe nenhum y tal que o sucessor de y seja igual a x"
  - A ideia é de que zero é o ponto de partida nos números naturais, e não pode ser obtido a partir do sucessor de outro número

- Definição de "Menor Que" (<)
  - $x < z : \exists y\,(\neg (y = 0) \land x + y = z)$
    - "x é menor que z se, e somente se, existe um y tal que y é diferente de zero e x mais y é igual a z"

Definições, Axiomas, Teoremas

- Axiomatização (ou Especificação)
  - Definição indireta quando a definição direta não é possível
- Definição
  - Introdução de um conceito a partir de outros mais básicos
- Teoria
  - Conjunto de todas as propriedades demonstráveis a partir de uma axiomatização
- Teorema
  - Proposição que possui uma demonstração
- Demonstração
  - Argumento que comprova a veracidade de um teorema

Argumentos e proposições

- Argumento
  - Sequência de proposições com uma conclusão e hipóteses
  - Estrutura lógica composta por premissas
- Argumento Válido
  - A conclusão não pode ser falsa se as premissas forem verdadeiras
- Lógica
  - Estudo da validade dos argumentos
  - Análise das relações entre premissas e conclusões
- Proposições
  - Sentenças declarativas que possuem valor de verdade (verdadeiro ou falso)
  - Base para a construção de argumentos
- Conclusão
  - Conceito arbitrado de verdade para estudar a validade de argumentos
  - Fundamenta demonstrações de teoremas a partir de axiomas
  - Instrumento para especificar teorias

Argumentos válidos

- Exemplo 1 (Conclusão Verdadeira)
  - Premissa 1: Todo ser humano é mortal
  - Premissa 2: Bombeiros são seres humanos
  - Conclusão: Bombeiros são mortais
- Exemplo 2 (Conclusão Falsa - mas argumento Válido)
  - Premissa 1: Todo guerreiro é corajoso
  - Premissa 2: Covardes são guerreiros
  - Conclusão: Covardes são corajosos
- Forma Lógica Comum: ambos os exemplos seguem a forma "Todo B é A, c são B, então c são A". A validade se mantém independentemente da verdade das premissas no mundo real

Argumentos inválidos

- Exemplo de argumento inválido
  - Premissa 1 : alguns franceses são europeus
  - Premissa 2 : alguns parisienses são europeus
  - Conclusão : alguns parisienses são franceses

- Forma Lógica: "Alguns A são B e alguns C são B, então alguns C são A"

Demonstração em TC

"implica" ou "então"

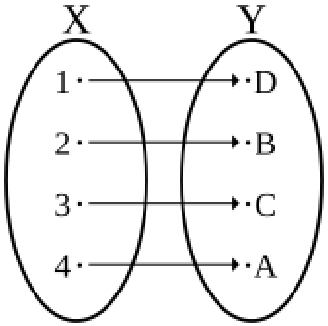
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
  - "Se A é um subconjunto de B (ou A é igual a B), então a interseção de A com C é um subconjunto da interseção de B com C (ou a interseção de A com C é igual à interseção de B com C)"

P	**Q**	**$P \Rightarrow Q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conjuntos enumeráveis

Um conjunto é chamado de enumerável se existe uma correspondência um-para-um (ou bijetora) entre os elementos do conjunto e os números naturais $\mathbb{N}$

- Definição
  - Existe uma função f de $\mathbb{N}$ para S tal que f é bijetora
    - $\exists\, f : \mathbb{N} \to S$ (f é bijetora)
- União de Enumeráveis:
  - S_1, S_2 enumeráveis $\Rightarrow S_1 \cup S_2$ enumerável



$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Exemplo: o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$)

- O conjunto dos inteiros (..., -2, -1, 0, 1, 2, ...) também é enumerável

- Podemos definir uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ da seguinte forma
  - Se n é par: $f(n) = n/2$
  - Se n é ímpar: $f(n) = -(n+1)/2$

Conjunto de cadeiras de caracteres

- Considere as strings formadas pelos caracteres ‘a’, ‘b’ e ‘c’
  - Ex.: conjunto S = { a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ... }

- Imagine um programa que imprime cada cadeia em uma linha
  - Cada linha imprime uma cadeia
  - Numeramos cada linha do programa começando do 0, ou seja, a primeira linha é numerada como 0, a segunda linha como 1, e assim por diante
  - Correspondência com números naturais
    - Associa o nº natural n à cadeia que aparece na n-ésima linha
      - Supondo que as linhas são numeradas a partir do 0
  - Conclusão o conjunto S é enumerável