Métodos dedutivos e inferência lógica

Eduardo Furlan Miranda

2025-10-13

Baseado em: SCHEFFER, VC; VIEIRA, G; LIMA, TPFS. Lógica Computacional. EDE, 2020. ISBN 978-85-522-1688-9.

Termos

- **Proposição**: é a ideia mais básica. Uma frase declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, ex.:
  - "O céu é azul" (V), "Humanos podem voar sem ajuda" (F)

- **Premissas**: conjunto de proposições que usamos como ponto de partida ou evidência em um raciocínio; fatos que aceitamos como verdadeiros para construir nossa lógica, ex.:
  - "Todo computador funciona com eletricidade”

- **Argumento**: é o raciocínio completo, um conjunto estruturado de proposições onde as premissas são usadas para dar suporte e levar a uma **conclusão**

- **Silogismo**: um raciocínio dedutivo

- **Falácia**: argumentos que logicamente estão incorretos

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n$$

- A lógica proposicional é composta por proposições e conectivos lógicos que permitem criar fórmulas que quando escritas corretamente são chamadas fbf

- Uma fbf é valorada em verdadeira (V) ou falsa (F), respeitando a ordem de precedência dos operadores lógicos
  - (), ¬, ∧∨, →, ↔

- A valoração de uma fórmula também depende dos valores lógicos de entrada para cada uma das proposições

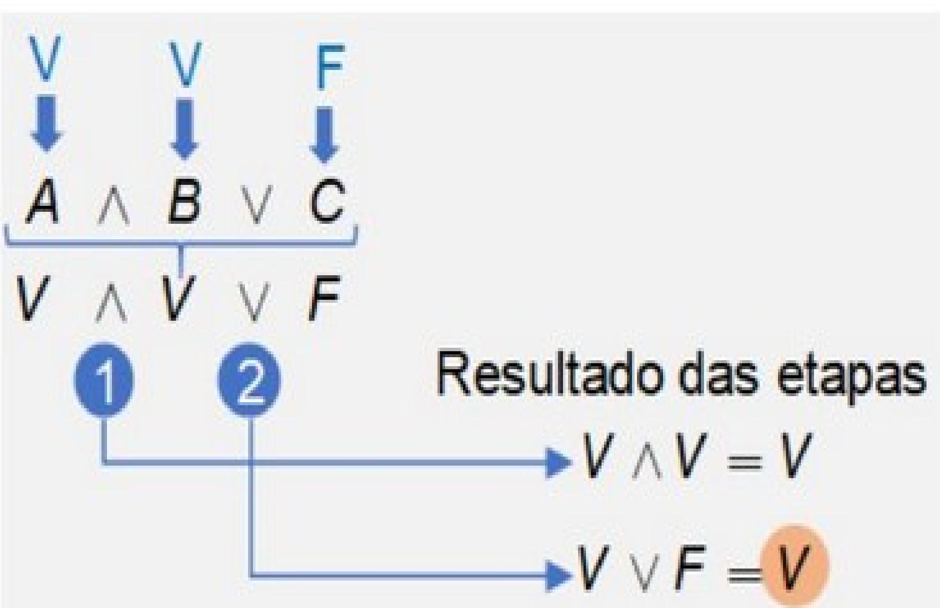
Valoração para a fórmula A ∧ B ∨ C

- Dada a fórmula $A \wedge B \vee C$, e as entradas

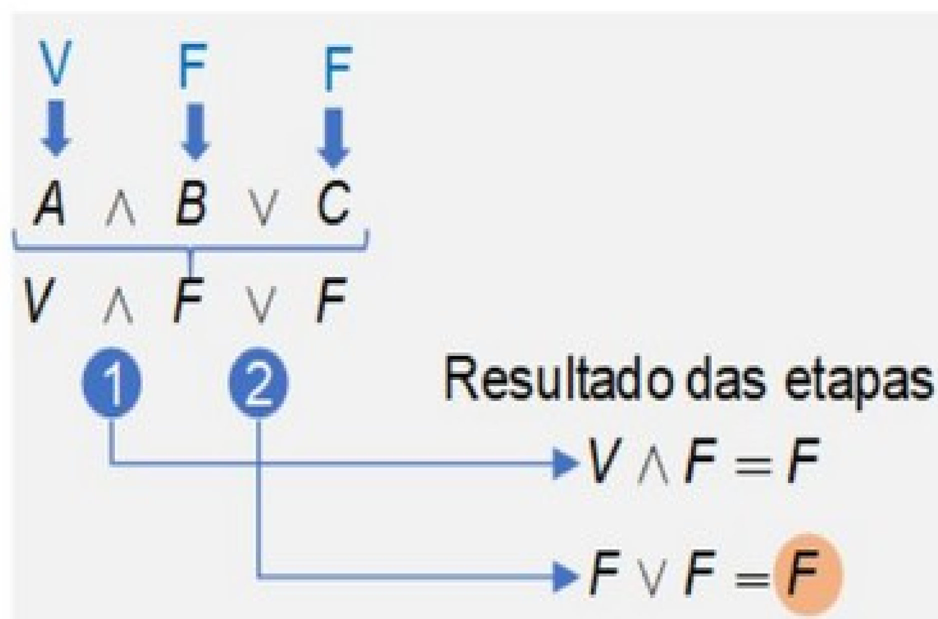
  $A = V$, $B = V$, $C = F$,

  ela será verdadeira ou falsa?

a) A = V, B = V, C = F



b) A = V, B = F, C = F (outro ex.)



- Quando uma fórmula apresenta um conjunto de proposições, das quais uma delas é uma conclusão, dizemos que tal fórmula é um **argumento**

(vide próx. slide)

- Um argumento é um conjunto de proposições ou fórmulas,
  - nas quais uma delas (conclusão) deriva,
    - ou é consequência das outras (premissas)

Conectivo de conjunção

Conectivo condicional

- Forma simbólica de representação do argumento:

$$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \rightarrow \mathbf{C}$$

```
P1 = False
P2 = P3 = P4 = True
if P1 and P2 and P3 and P4 :
    print("Verdadeiro")
else :
    print ("Falso")
```

```
Falso
```

hipóteses
(proposições ou fbf)

conclusão do argumento

- **C** também pode ser uma proposição simples ou uma fbf

Conectivo condicional

condição suficiente

condição necessária

x <= y

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

"Ex.: se eu já estou dizendo **que estou mentindo**, eu posso dizer qualquer outra coisa, não importa"

Tabela verdade

		and	or	x <= y
P	Q	∧	∨	→
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

possui uma conclusão

- Dado um argumento,
  - é importante validar se ele é válido ou inválido
- A lógica possui mecanismos que permitem validá-los
  - compostos pelas regras de *equivalência e inferência lógica.*
  - Permite avaliar a relação entre as
    - hipóteses, e a
    - conclusão
  - também chamada de consequência lógica, dedução lógica, conclusão lógica ou implicação lógica

- Uma proposição pode ser
  - verdadeira ou falsa
    - e não pode ser válida ou inválida

$P1 \land P2 \land P3 \land \ldots \land Pn$

- Um argumento pode ser
  - válido ou inválido
  - e não pode ser verdadeiro ou falso

$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \rightarrow C$

```
if P1 and P2 and P3 and P4 :
    print("Verdadeiro")
```

Tautologia

- Tautologia é um resultado no qual todas as entradas possíveis de uma fórmula obtêm verdadeiro como resultado

- Um argumento só é válido quando a fórmula é uma tautologia

Exemplo

p	~ p	p ^ ~p
V	F	V
F	V	V

- Para saber se um argumento é válido ou não, precisamos saber se ele é uma tautologia
  - Poderíamos testar todas as combinações de entrada possíveis para o argumento (ex.: tabela verdade)

- Na Lógica Formal podemos usar um sistema de regras de dedução e,
  - seguindo uma **sequência de demonstração**
  - provar se o argumento é válido ou não

Sequência de demonstração

- É uma sequência de fbfs,
  - nas quais cada fbf é uma hipótese, ou
  - o resultado de se aplicar uma das regras de dedução do sistema formal a fbfs anteriores na sequência

Lógica Formal

P_1 , P_2 , ..., P_n , são as hipóteses

Sequência de demonstração

$$P1 \land P2 \land P3 \land \ldots \land Pn \rightarrow C$$

1. P_1	(hipótese)
2. P_2	(hipótese)
...	...
n) P_n	(hipótese)
n+1) fbf_1	(resultado da aplicação de uma regra de dedução a hipóteses anteriores.)
n+2) fbf_2	(resultado da aplicação de uma regra de dedução a hipóteses anteriores.)
...	...
n+n) C	(resultado da aplicação de uma regra de dedução a hipóteses anteriores.)

Da tabela anterior:

- Cada proposição deve ficar em uma linha
- Em cada linha indicamos o que ela representa,
  - se é uma hipótese ou então a regra que foi aplicada
- Após elencar todas as proposições é hora de começar a aplicar as regras e, consequentemente, obter novas fbfs
- As regras de dedução devem ser aplicadas até que se consiga
  - provar que o argumento é verdadeiro, ou
  - que não existam mais regras a serem aplicadas
    - e neste caso o argumento é falso

Regras de **equivalência** de dedução para a Lógica Proposicional

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n$

- As regras de dedução são divididas em dois tipos
  - Regras de equivalência
  - Regras de inferência
- 2 fbfs são equivalentes quando todas as combinações possíveis de entradas geram o mesmo resultado de saída
- Regras de equivalência serão usadas quando uma fbf (que pode ser uma hipótese ou resultado de uma regra) pode ser substituída por outra fbf, mantendo o resultado lógico

Regras de equivalência

Expressão (fbf)	Equivalente (fbf)	Nome/Abreviação
$P \vee Q$ $P \wedge Q$	$Q \vee P$ $Q \wedge P$	Comutatividade/com
$(P \vee Q) \vee R$ $(P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$ $P \wedge (Q \wedge R)$	Associatividade/ass
$\neg(P \vee Q)$ $\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$ $\neg P \vee \neg Q$	Leis de De Morgan/De Morgan
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	Condicional/cond
P	$\neg(\neg P)$	Dupla negação/dn
$P \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Definição de equivalência/que

Regras de inferência de dedução para a Lógica Proposicional

- Em contraste com as regras de equivalência, as regras de inferência não funcionam em ambas as direções

- Regras de inferência para condicionais (implicações lógicas)
  - Modus Ponens (MP): eliminação do condicional
  - Modus Tollens (MT): prova que o antecedente não aconteceu
  - Silogismo Hipotético (SH): consequente é antecedente na outra

Modus Ponens (MP)

- Poder ser representado como uma tautologia (sempre verdadeira)

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

“se”

“e”

“então”

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$$

		x <= y	and	x <= y
P	Q	P → Q	∧ P	→ Q
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Exemplo MP

- P→Q: Se João receber seu salário, ele irá ao cinema
- P: João recebe o salário
- Q: João vai ao cinema.

Modus Ponens (MP) - simulação

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$$

```
for P in [True, False]:
    for Q in [True, False]:
        R1 = (P <= Q)
        R2 = (R1 and P)
        print(f"{P:6}{Q:6}{R1:6}{R2:6}{R2<=Q:6}")
```

```
     1     1     1     1     1
     1     0     0     0     1
     0     1     1     0     1
     0     0     1     0     1
```

Modus Tollens (MT)

- Além de envolver uma implicação ($\rightarrow$) e uma conjunção ($\wedge$), também envolve a negação ($\neg$) de uma das proposições

- Sua estrutura é dada pela fbf

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\begin{array}{ll} P \longrightarrow Q & \text{“se temos”} \\ \neg Q & \text{“e temos”} \\ \hline \neg P & \text{“então”} \end{array}$$

- Se na implicação o consequente não é verdade, então a conclusão é que o antecedente também não aconteceu

Exemplo MT

- "Se Marina for a autora, então o livro será de ficção" ($P \to Q$)
- "Mas o livro não é de ficção" ($\neg Q$)
- "Portanto, Marina não é a autora" ($\neg P$)

Modus Tollens (MT)

- O MT é representado pela tautologia: $(P \to Q) \land \neg Q \;\to\; \neg P$.

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	Premissas: $(P \to Q) \land \neg Q$	Conclusão: $\neg P$	MT (Fórmula Completa)
1	1	0	1	$1 \land 0 = 0$	0	$0 \to 0 = 1$
1	0	1	0	$0 \land 1 = 0$	0	$0 \to 0 = 1$
0	1	0	1	$1 \land 0 = 0$	1	$0 \to 1 = 1$
0	0	1	1	$1 \land 1 = 1$	1	$1 \to 1 = 1$

Silogismo Hipotético (SH)

- Além de existirem implicações e conjunções nas hipóteses, a conclusão também é uma implicação

- Sua estrutura é dada pela fbf:
  - $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$$\frac{\begin{array}{c} P \longrightarrow Q \\ Q \longrightarrow R \end{array}}{P \longrightarrow R}$$

Exemplo SH

- $P \rightarrow Q$: Se as árvores começam a florir, então começa a primavera
- $Q \rightarrow R$: Se começa a primavera, então as árvores dão frutos
- $\therefore P \rightarrow R$: Se as árvores começam a florir, então darão frutos

Silogismo Hipotético (SH)

- O SH é representado pela tautologia: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

P	**Q**	**R**	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	**Premissas:** $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	**Conclusão:** $P \rightarrow R$	**SH (Fórmula Completa)**
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Resumo de algumas das principais regras de inferências

Quadro 3.6 | Regras de inferência

De (fbf)	Podemos deduzir (fbf)	Nome/Abreviação
$P \to Q$, P	Q	Modus Ponens/MP
$P \to Q$, $\leftarrow Q$	$\leftarrow P$	Modus Tollens/MT
$P \to Q$, $Q \to R$	$P \to R$	Silogismo Hipotético/SH
P, Q	$P \wedge Q$	Conjunção/conj
$P \wedge Q$	P, Q	Simplicação/simp
P	$P \wedge Q$	Adição/ad