

Linguagens Formais e Autômatos

Elementos de Matemática Discreta

Eduardo Furlan Miranda

Baseado em: GARCIA, A. de V.; HAEUSLER, E. H.
Linguagens Formais e Autômatos. Londrina: EDA, 2017.

- George Cantor, 1874
- Conjunto é qualquer coleção de objetos
 - Abstratos, concretos
 - Em quantidade finita ou não

- $a \in A$ o objeto a pertence ao conjunto A
- Predicado lógico
 - " $2 + 2 = 4$ "
- Proposição
 - "ser alto"
 - descreve uma propriedade

- Propriedades são especificadas pelos conectivos lógicos
 - Conjunção (\wedge)
 - Disjunção (\vee)
 - Negação (\neg)
 - Implicação (\rightarrow)

- Expressa a quantidade de elementos que satisfazem uma determinada propriedade
 - Existencial (\exists) "existe pelo menos um"
 - Universal (\forall) "para todo"
- Dois objetos são o mesmo
 - Predicado identidade (=)

- Permite definir novos conjuntos a partir de propriedades
 - Ex.: seja A o conjunto de todos os números naturais. A propriedade $\varphi(x)$ pode ser "x é par"
 - $$B = \{x \in A \mid x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$
- Algumas vantagens
 - Definir conjuntos de maneira precisa
 - Ajuda na construção de estruturas complexas

- É o único conceito primitivo na TC
 - Considerado fundamental e não é definido em termos de outros conceitos mais básicos
 - É a partir dessa relação primária entre elementos e conjuntos que construímos toda a teoria

- Blocos de construção fundamentais da lógica de primeira ordem
- Representam relações simples entre objetos e são a base para a construção de afirmações mais complexas
- Ex.: " $x > y$ "

- As fórmulas da linguagem básica de TC tem ocorrência de \in para formar predicados atômicos, além da igualdade $=$
 - Ex.: $x \in A$ "x pertence ao conjunto A"
- Se $\varphi (x)$ for a fórmula $\neg (x = x)$ e A for um conjunto arbitrário
 - Então $\{x / \neg (x = x)\}$ é o subconjunto vazio de A
 - $\{x / \dots\}$ "o conjunto de todos os x tais que..."
 - $\neg (x = x)$ "não é verdade que x é igual a x"

- Seja $\varphi (x)$ uma fórmula na linguagem
 - onde x ocorre livre em $\varphi (x)$
- Seja A um conjunto
- $\{a \mid a \in A \text{ e } \varphi (a)\}$ é um subconjunto de A
 - podemos formar um novo conjunto que contém exatamente os elementos de A que satisfazem a propriedade φ

| tal que
 φ (phi) pronuncia-se como "fi"

- Dado um subconjunto arbitrário B de um conjunto A
 - a propriedade $x \in B$ especifica B
 - ou seja, B e $\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ são o mesmo conjunto
- Dois conjuntos iguais possuem os mesmos elementos
- A está incluído em B se todo elemento de A também é elemento de B

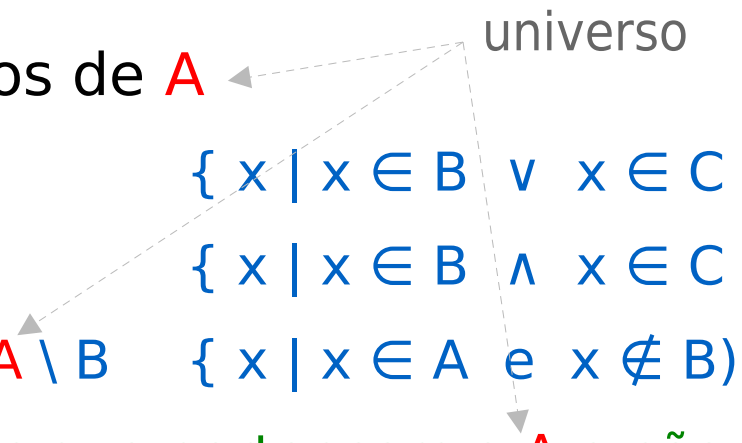
- Dois conjuntos B e C são iguais, se, e somente se
 - $B \subseteq C$ e $C \subseteq B$
- Inclusão entre conjuntos
 - Sejam B e C conjuntos
 - B está incluído em C , ou que C contém B se, e somente se
 - Todo elemento de B é também um elemento de C
 - Descrito em lógica como $\forall x ((x \in B) \rightarrow (x \in C))$

"Para todo x , se x pertence a B , então x pertence a C "

\subseteq está contido ou é igual
 \in pertence
 \forall para todo
 \rightarrow então ou implica

- Apresentação de um conjunto enumerando seus elementos
 - Ex.: conjunto dos símbolos \triangleright , \diamond , e $^\circ$
 - $\{ \triangleright, \diamond, ^\circ \}$
- Par ordenado: $(a, b) = \{ \{ a \}, \{ a, b \} \}$
 - A ordem é garantida pela diferença entre esses dois conjuntos
 - O conjunto que contém apenas 'a' identifica inequivocamente 'a' como o primeiro elemento
 - (a, b) é diferente de (b, a) , a menos que $a = b$

Ex.:
coordenadas
geográficas

- Sejam B e C subconjuntos de A 

• União: $B \cup C$ $\{ x \mid x \in B \vee x \in C \}$

• Interseção: $B \cap C$ $\{ x \mid x \in B \wedge x \in C \}$

• Complemento: $C_A(B)$ ou $A \setminus B$ $\{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$

 - Conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B

• Diferença: $B - C$ $\{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$

 - Conjunto dos elementos que pertencem a B e não pertencem a C

• Produto Cartesiano: $B \times C$ $\{ (x, y) \mid x \in B \text{ e } y \in C \}$

• Conjunto potência: $\wp(A)$ $\{ B \mid B \subseteq A \}$

 - Ex.: $A = \{1, 2\}$; $\wp(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

\neg não

\wedge e

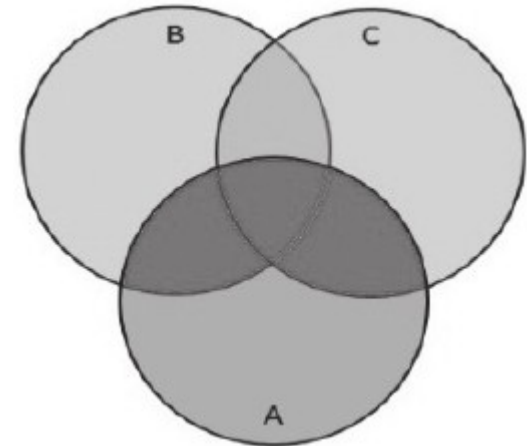
\vee ou

\subseteq está contido ou é igual

Igualdades entre conjuntos

15/32

- Sejam A , B , e C , conjuntos
 - $A \cap A = A$
 - $A \cap B = B \cap A$
 - $A \cup B = B \cup A$
 - $A \cap \emptyset = \emptyset$
 - $A \cup \emptyset = A$
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- \emptyset = conjunto vazio
 - $\{\}$
 - notar que o conjunto existe, o que não existe é o elemento dentro dele
- conj. não vazio
 - $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$



- R é uma relação entre elementos de A e de B se, e somente se, $R \subseteq A \times B$
- R consiste em pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$
- $A \times B$: o produto cartesiano é o conjunto de todos os pares ordenados possíveis
- \subseteq : representa a relação de "subconjunto"
 - todos os elementos do primeiro conjunto também estão contidos no segundo conjunto
- Ex.: Conjuntos A : $\{1, 2\}$ e B : $\{a, b, c\}$
- $A \times B = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) \}$
- Suponha que R seja uma relação específica entre A e B :
 - Relação R : $\{ (1, a), (2, b) \}$
 - $(1, a)$: O elemento 1 de A está relacionado com o elemento 'a' de B
 - $(2, b)$: O elemento 2 de A está relacionado com o elemento 'b' de B

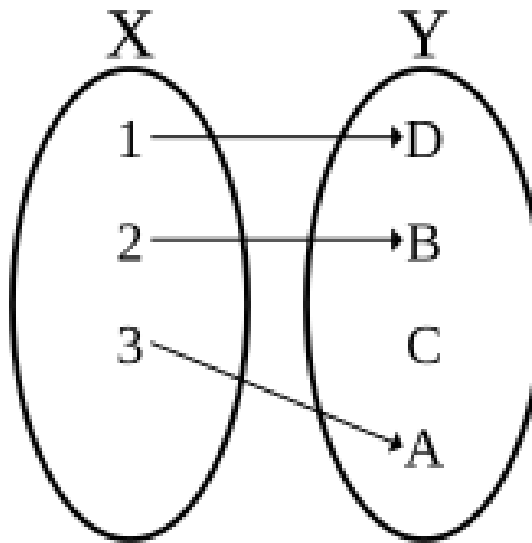
- Uma função de F de \mathbf{A} em \mathbf{B} é qualquer relação na qual
 - para cada a em \mathbf{A} existe um, e somente um b em \mathbf{B}
 - tal que o par ordenado $(a, b) \in F$
- Implica
 - Existência: para cada elemento $a \in A$, existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in F$
 - Unicidade: para cada $a \in A$, o elemento $b \in B$ associado é único, ou seja, não pode haver mais de um b em B para o mesmo a em A

Relação funcional - exemplo

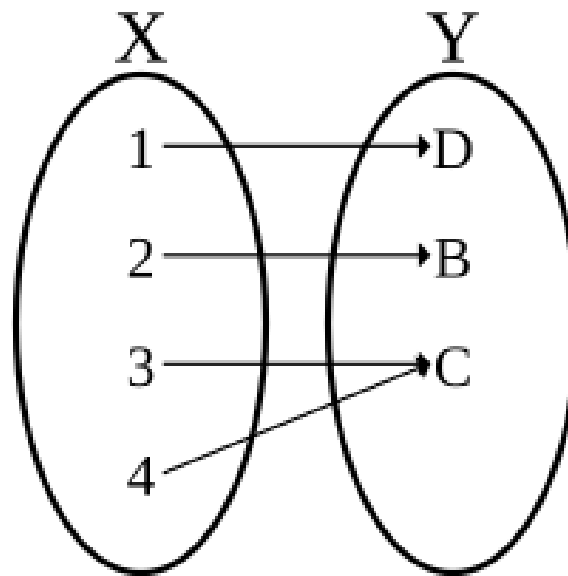
18/32

- Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$
 - Relação (não é função) : $R = \{(1, x), (1, y), (2, z)\}$
 - 1 de A está relacionado com dois elementos em B (x e y)
 - isso viola a condição de unicidade, portanto, R é uma relação
 - Função : $F = \{(1, z), (2, x)\}$
 - Cada elemento de A está relacionado com exatamente um elemento de B
 - Podemos escrever $F(1) = z$ e $F(2) = x$

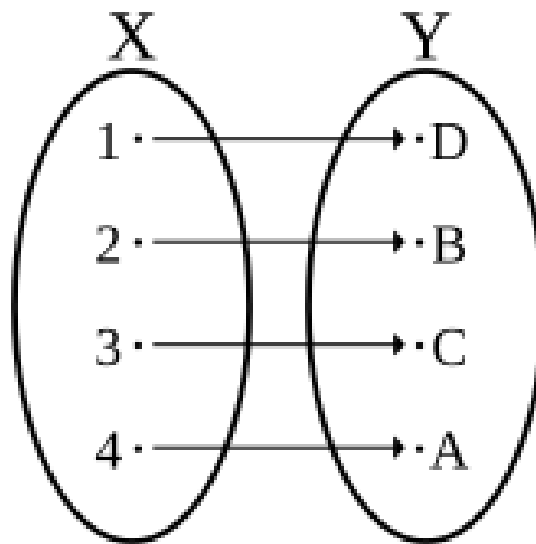
- F é injetiva se e somente se quaisquer que sejam x_1 e x_2 (pertencentes ao domínio da função), x_1 é diferente de x_2 implicando que $f(x_1)$ é diferente de $f(x_2)$:
 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



- Para todo elemento y no contradomínio Y de f , há pelo menos um elemento x no domínio X de f tal que $f(x) = y$
- Ou seja, quando o conjunto imagem coincide com o contradomínio da função; não é necessário que x seja único

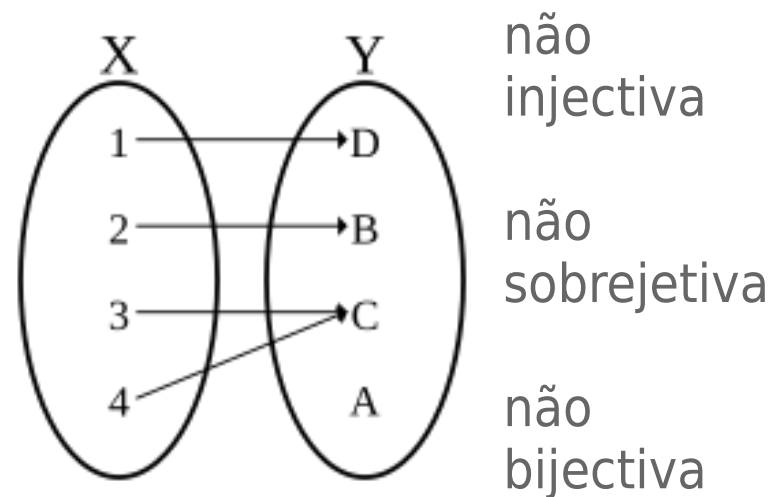
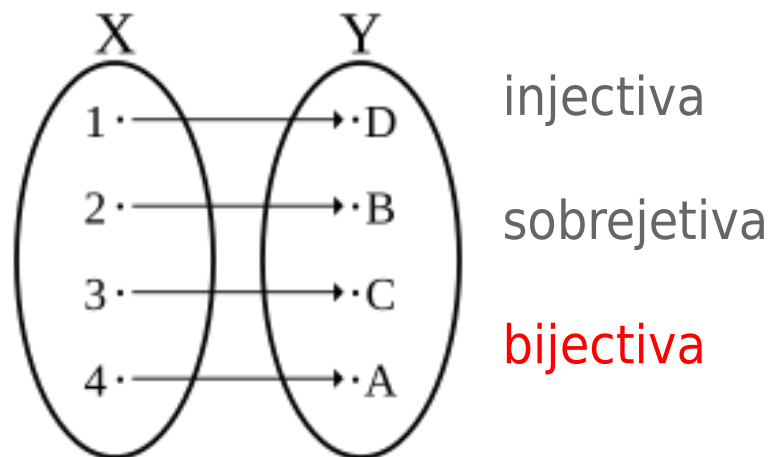
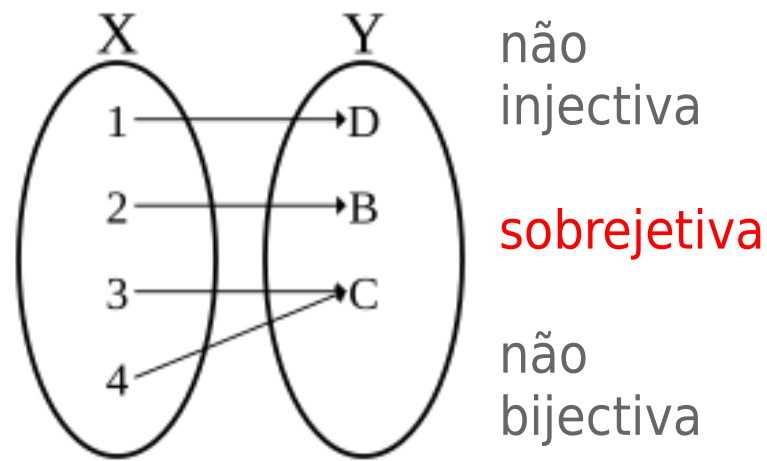
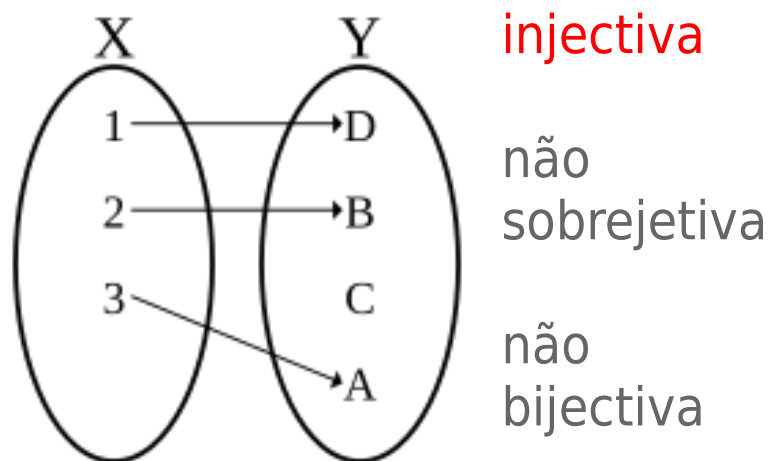


- Bijetiva, bijetora, correspondência biunívoca, bijeção, ou “injetora e sobrejetora”
- Uma função bijetiva é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo



Funções injetiva e sobrejetiva

22/32



- $\exists y (\neg (y = 0) \wedge y + x = z)$

- "Existe um y tal que y não é igual a zero e y mais x é igual a z "
- a ocorrência de y em $y = 0$ é ligada ao quantificador existencial
- as ocorrências de z e x são livres, pois não estão no escopo de nenhum quantificador

- $\forall x ((x \in z) \rightarrow (x \in y))$

- "Para todo x , se x pertence a z , então x pertence a y "
- as ocorrências de x são ligadas ao quantificador universal $\forall x$
- as ocorrências de z e y são livres

\exists existe
 \neg não
 \wedge e
 \forall para todo
 \rightarrow então

- Definição de “Zero” (0)
 - Função sucessora
 - (suc): $\text{suc}(n) = n + 1$
 - Zero é um número natural que não é sucessor de nenhum outro número natural
 - $\neg \exists y (\text{suc}(y) = x)$: "não existe nenhum y tal que o sucessor de y seja igual a x"
 - A ideia é de que zero é o ponto de partida nos números naturais, e não pode ser obtido a partir do sucessor de outro número
- Definição de "Menor Que" (<)
 - $x < z : \exists y (\neg (y = 0) \wedge x + y = z)$
 - "x é menor que z se, e somente se, existe um y tal que y é diferente de zero e x mais y é igual a z"

- Axiomatização (ou Especificação)
 - Definição indireta quando a definição direta não é possível
- Definição
 - Introdução de um conceito a partir de outros mais básicos
- Teoria
 - Conjunto de todas as propriedades demonstráveis a partir de uma axiomatização
- Teorema
 - Proposição que possui uma demonstração
- Demonstração
 - Argumento que comprova a veracidade de um teorema

- Argumento
 - Sequência de proposições com uma conclusão e hipóteses
 - Estrutura lógica composta por premissas
- Argumento Válido
 - A conclusão não pode ser falsa se as premissas forem verdadeiras
- Lógica
 - Estudo da validade dos argumentos
 - Análise das relações entre premissas e conclusões
- Proposições
 - Sentenças declarativas que possuem valor de verdade (verdadeiro ou falso)
 - Base para a construção de argumentos
- Conclusão
 - Conceito arbitrado de verdade para estudar a validade de argumentos
 - Fundamenta demonstrações de teoremas a partir de axiomas
 - Instrumento para especificar teorias

- Exemplo 1 (Conclusão Verdadeira)
 - Premissa 1: Todo ser humano é mortal
 - Premissa 2: Bombeiros são seres humanos
 - Conclusão: Bombeiros são mortais
- Exemplo 2 (Conclusão Falsa - mas argumento Válido)
 - Premissa 1: Todo guerreiro é corajoso
 - Premissa 2: Covardes são guerreiros
 - Conclusão: Covardes são corajosos
- Forma Lógica Comum: ambos os exemplos seguem a forma "Todo B é A, c são B, então c são A". A validade se mantém independentemente da verdade das premissas no mundo real

- Exemplo de argumento inválido
 - Premissa 1 : alguns franceses são europeus
 - Premissa 2 : alguns parisienses são europeus
 - Conclusão : alguns parisienses são franceses
- Forma Lógica: "Alguns A são B e alguns C são B, então alguns C são A"

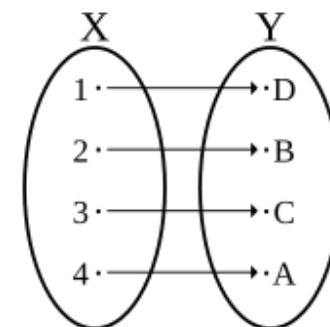
"implica" ou "então"

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- "Se A é um subconjunto de B (ou A é igual a B), então a interseção de A com C é um subconjunto da interseção de B com C (ou a interseção de A com C é igual à interseção de B com C)"

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Um conjunto é chamado de enumerável se existe uma correspondência um-para-um (ou bijetora) entre os elementos do conjunto e os números naturais \mathbb{N}

- Definição
 - Existe uma função f de \mathbb{N} para S tal que f é bijetora
 - $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow S$ (f é bijetora)
- União de Enumeráveis:
 - S_1, S_2 enumeráveis $\Rightarrow S_1 \cup S_2$ enumerável



$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Exemplo: o conjunto dos inteiros (\mathbb{Z})

31/32

- O conjunto dos inteiros ($\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) também é enumerável
- Podemos definir uma função bijetora $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ da seguinte forma
 - Se n é par: $f(n) = n/2$
 - Se n é ímpar: $f(n) = -(n+1)/2$

- Considere as strings formadas pelos caracteres 'a', 'b' e 'c'
 - Ex.: conjunto $S = \{ a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \dots \}$
- Imagine um programa que imprime cada cadeia em uma linha
 - Cada linha imprime uma cadeia
 - Numeramos cada linha do programa começando do 0, ou seja, a primeira linha é numerada como 0, a segunda linha como 1, e assim por diante
 - Correspondência com números naturais
 - Associa o n° natural n à cadeia que aparece na n -ésima linha
 - Supondo que as linhas são numeradas a partir do 0
 - Conclusão o conjunto S é enumerável