

Teoria dos conjuntos

Eduardo Furlan Miranda

2024-08-01

Baseado em: SCHEFFER, VC; VIEIRA, G; LIMA, TPFS. Lógica Computacional. EDE, 2020. ISBN 978-85-522-1688-9.

Conjuntos

lista→ordenado



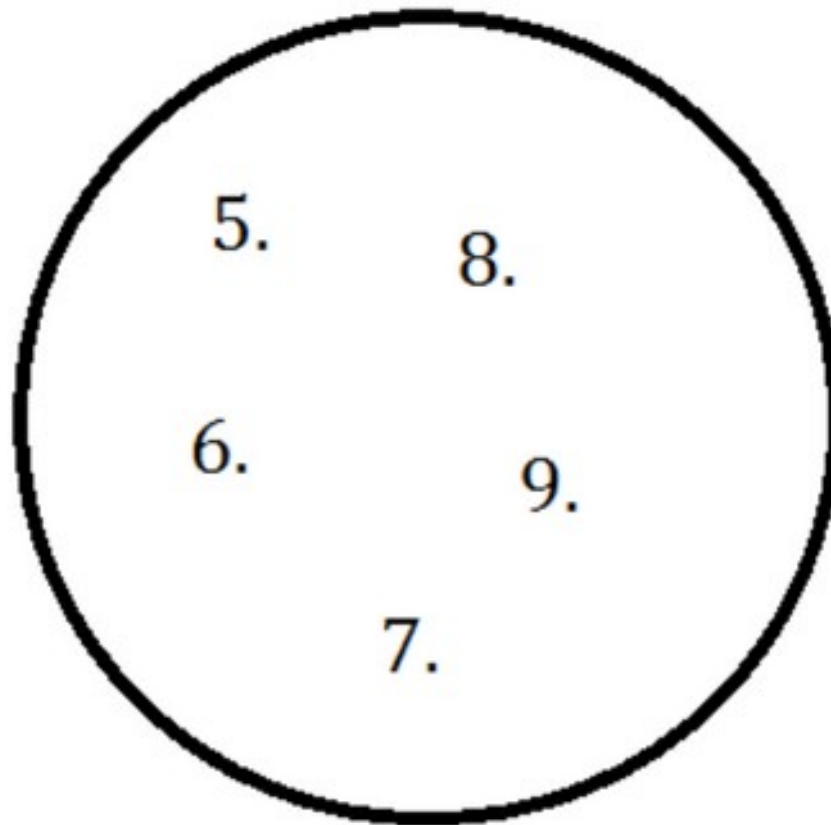
- Coleções **não ordenadas** de objetos
 - Podem ser, de alguma forma, relacionados
- P. ex., o conjunto A das cores da bandeira do Brasil
 - $A = \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$
- Costuma-se utilizar letras maiúsculas para representar os conjuntos
- Qualquer objeto que tiver a propriedade “**cor da bandeira do Brasil**” será considerado um elemento do conjunto A

Identificar elementos do conjunto

- Listar todos os elementos do conjunto, como foi feito com o conjunto A
- Indicar os primeiros elementos do conjunto, ex.:
 - $B = \{2, 4, 6, \dots\}$
- Escrever uma propriedade que o caracterize
 - $C = \{ x \mid x \text{ é um número inteiro, e } 4 < x \leq 9 \}$
 - “|” = “tal que”
 - $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Identificar elementos do conjunto

- Diagramas de Venn [John Venn (1834-1923)]



$$C = \{ x \mid x \text{ é um número inteiro e } 4 < x \leq 9 \}$$

- Elemento do conjunto
 - É um objeto que pertencente ao conjunto
- Símbolo \in
 - Relação de pertinência
- Símbolo \notin
 - Relação de não pertinência
- $x \in A$ significa que o objeto x é um elemento do conjunto A

- Ex.: $A = \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$
- Podemos afirmar que $\text{verde} \in A$ e que $\text{vermelho} \notin A$
- A relação \in pode ser lida como “é membro de” ou “está em” ou “é elemento de” ou “pertence a”
- **Cardinalidade:** quantidade de objetos (elementos) de um determinado conjunto
- Símbolo $||$
 - As barras de valor absoluto em torno de um conjunto representam a cardinalidade ou o tamanho do conjunto

- Considerando o conjunto $A = \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$, pode-se afirmar que
 - A cardinalidade de A é igual a 4, ou seja, $|A| = 4$
- Considerando o conjunto $C = \{x \mid x \text{ é um número inteiro e } 4 < x \leq 9\}$, pode-se afirmar que
 - A cardinalidade de C é igual a 5, ou seja, $|C| = 5$
- Um conjunto é chamado de **finito** quando sua **cardinalidade** é um número **inteiro**, caso contrário,
 - é chamado de **infinito**
- Um conjunto é chamado de conjunto **vazio** quando sua **cardinalidade** é igual a **zero**, ou seja,
 - é um conjunto desprovido de elementos

Exemplo

- $A = \{ x \mid x \text{ é um mês com exatamente 30 dias} \}$
- $B = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
- $C = \{ x \mid x \text{ é um número inteiro e } x > 3 \text{ e } x < 4 \}$
- $A = \{\text{abril, junho, setembro, novembro}\}$ e, \therefore , $|A| = 4$
- B é o conjunto dos números quadrados perfeitos
- Como existem **infinitos** números quadrados perfeitos, não é possível determinar a cardinalidade de B
 - Dizemos que o conjunto B é **infinito**

(continua)

Exemplo (continuação)

- O conjunto C é o conjunto dos números inteiros que são, ao mesmo tempo, maiores do que 3 e menores do que 4
- Como não existe nenhum número inteiro que atenda simultaneamente a essas duas propriedades, dizemos que o conjunto C é um conjunto vazio
 - $C = \{\}$, ou $C = \emptyset$
- A cardinalidade de C é igual a zero, ou seja, $|C| = 0$
- Como a cardinalidade de um conjunto vazio é igual a zero,
 - e zero é um número inteiro, podemos afirmar que
 - o conjunto vazio também é um conjunto finito

Alguns conjuntos padrão

- \mathbb{N} = conjunto de todos os números inteiros não negativos
 - $0 \in \mathbb{N}$
- \mathbb{Z} = conjunto de todos os números inteiros
- \mathbb{Q} = conjunto de todos os números racionais
- \mathbb{R} = conjunto de todos os números reais
- \mathbb{C} = conjunto de todos os números complexos

- Quando dois conjuntos têm exatamente os mesmos elementos, dizemos que esses conjuntos são iguais
- Para provar que dois conjuntos A e B são iguais,
 - mostrar que todo elemento de A é também elemento de B,
 - e vice-versa
- Na Teoria de Conjuntos, há certas afirmações que não podem ser escritas adequadamente por meio de símbolos proposicionais, parênteses e conectivos lógicos
- Elas contêm um elemento **quantificador**
- Os quantificadores são frases como “**para todo**”, “**para cada**” ou “**para algum**”, que indicam, de alguma forma, **quantos objetos têm** uma determinada propriedade

(continua)

- Ex.:
 - Todo inteiro é par ou ímpar
 - Existe um número natural que é primo e par
- A primeira afirmação traduz uma relação de **universalidade**, já a segunda afirmação traduz uma relação de **existência**
- Utilizaremos uma notação específica para representar cada uma dessas situações:



- Lido como “**para todo**” ou “**qualquer que seja**”

- A forma geral para essa notação é
 - $\forall x \in A$, afirmações sobre x
- A primeira afirmação “todo inteiro é par ou ímpar” ficaria representada como $\forall x \in \mathbb{Z}$, x é par ou x é ímpar
- Símbolo \exists
 - Quantificador existencial
 - é lido como “há” ou “existe”
- A forma geral para essa notação é
 - $\exists x \in A$, afirmações sobre x

Exemplo

- Provar que todo número inteiro divisível por 10 é par
- Seja $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 10 \text{ divide } x \}$
- Queremos provar que $\forall x \in A, x \text{ é par}$
- Prova:
 - Seja $x \in A$, ou seja, x é um número inteiro divisível por 10
 - Isso significa que existe um inteiro y , de modo que $x = 10y$
 - Podemos escrever essa igualdade como
 - $x = (2 \cdot 5) y = 2 \cdot (5 y)$
 - Portanto, x é divisível por 2 e, conseqüentemente, x é par

- A é um subconjunto de B:
 - $A = \{ 2, 5, 7, 9 \}$
 - $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
- Dizemos que A é um subconjunto de B se, e somente se,
 - todo elemento de A também for elemento de B
- A notação $A \subseteq B$ significa que A é subconjunto de B

- Se A é um subconjunto de B , mas $A \neq B$, ou seja,
 - existe pelo menos um elemento de B que não é elemento de A ,
 - então, A é chamado de subconjunto próprio de B
- Símbolo \subset
 - Subconjunto próprio
- \subseteq e \subset têm significados relacionados, porém, diferentes
- \in é utilizado para representar uma relação de pertinência entre um objeto e um conjunto

- Seja o conjunto $A = \{ 5, 7, 9, 11, 13 \}$,
 - podemos afirmar que $7 \in A$
- Símbolo \subseteq
 - Representa uma relação de continência (subconjunto) entre conjuntos
 - P. ex., seja $A = \{ 5, 7, 9, 11, 13 \}$ e $B = \{ 5, 11, 13 \}$,
 - podemos afirmar que $B \subseteq A$
- Os sinais \subseteq e \in não podem ser permutados

Exemplo

- Considerar os conjuntos $M = \{ x \mid x \text{ é múltiplo de } 5 \}$ e $N = \{ x \mid x \text{ é múltiplo de } 10 \}$. Vamos provar que $N \subseteq M$
- Temos que x satisfaz a propriedade característica de N , ou seja, x é múltiplo de 10
- Logo, podemos escrever $x = 10 \cdot y$, para algum inteiro y
- Essa igualdade pode ser reescrita como $x = (5 \cdot 2) \cdot y = 5 \cdot (2 \cdot y)$ ou $x = 5 \cdot k$, em que $k = 2 \cdot y$, de tal forma que k também é um inteiro
- Isso mostra que x também é múltiplo de 5, ou seja, x também satisfaz a propriedade característica de M , portanto, $N \subseteq M$

Exemplo

- Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{a, b, c\}$?
- Uma maneira para resolver esse problema é listar todas as possibilidades
 - Como a cardinalidade de A é igual a 3, ($|A| = 3$), qualquer subconjunto de A pode ter de zero a três elementos

Quadro 2.1 | Subconjuntos de A (cardinalidade 3)

Número de elementos	Subconjuntos	Número de subconjuntos
0	\emptyset	1
1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	3
2	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	3
3	$\{a, b, c\}$	1
Total		8

(continua)

- Portanto, $A = \{a, b, c\}$ tem oito subconjuntos
- É importante, nesse momento, retomar a definição de conjunto como uma coleção não ordenada de objetos
- Isso significa dizer que o subconjunto $\{a, b\}$ e o subconjunto $\{b, a\}$ são iguais e, portanto, contabilizados uma única vez
- O conjunto vazio e o próprio conjunto A também são subconjuntos de A
- Nesse exemplo, conseguimos listar e contabilizar todos os subconjuntos de A

- O teorema a seguir permite contabilizar o número de subconjuntos de um conjunto qualquer conhecendo-se a sua cardinalidade
- Teorema: seja A um conjunto finito. O número de subconjuntos de A é $2^{|A|}$
- Ex: Seja A um conjunto com cardinalidade igual a 10, quantos subconjuntos de A poderiam ser contabilizados?
- Como $|A| = 10$, utilizando o resultado do Teorema anterior, o número de subconjuntos de A é igual a $2^{|A|} = 2^{10} = 1024$