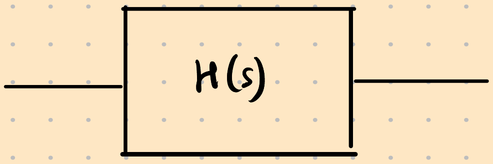
Григорьев Александр Алексеевич

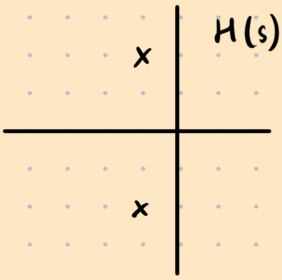
Проблема фильтрации



$s = \frac{p}{\omega_0}$ - характер. частота

$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ / полиномы / - рациональная ф-ия

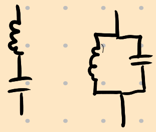
1. Синтез $H(s)$ - как её выбрать? Синтез по АЧХ
2. Реализация - как сделать четырёхполюсник? Центр внимания



сопряжённые пары полюсов

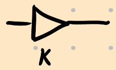
Они не реализуемы RL и RC цепями.

Нужны RLC



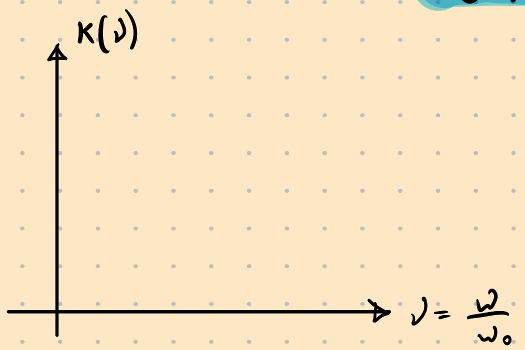
- резонаторы дают сопр. полюса

Однако индуктивности исп. не хочется. Их можно заменить усилителями!

RC 

— активные RC- цепи / фильтры

Синтез по АЧХ



$$H(s) = \underbrace{|H(s)|}_{АЧХ}\, e^{j\,\underbrace{\arg H(s)}_{ФЧХ}}$$

$|H(s)|^2 = H(s)\cdot H^*(s)$ — к этому предъяв. требования

Нас интересует только $H(s)\cdot H^*(s)\Big|_{s=j\nu}$

- Причём т.к. полиномы N и D веществ., то $H^*(s) = H(s^*)$, т.е. рассматриваем $H(s)\cdot H(s^*)\Big|_{s=j\nu}$

- Подменим задачу: при $s=j\nu$, $H(s^*) = H(-s)$, и так удобнее работать:

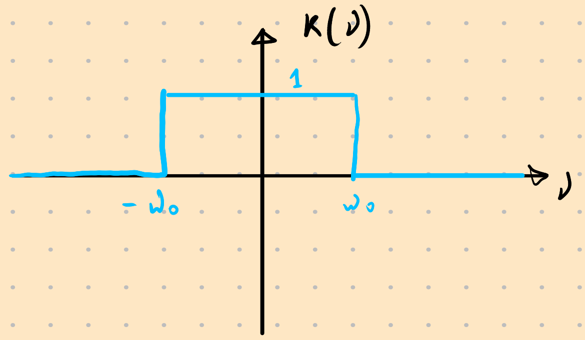
$$H(s)\cdot H(s^*)\Big|_{s=j\nu} = H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu}$$

$$H(s)\cdot H(-s) = |K(\nu)|^2$$

АЧХ^2 — у этой ф-ии есть набор нулей и полюсов

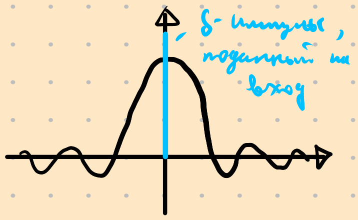
Созвездие нулей и полюсов АЧХ^2 всегда будет симметрично (отн. относ. замены $s \to -s$), и половину их возьмём в $H(s)$, половину — $H(-s)$.

Прямоуг. фильтр нижних частот



$$h(t) = \int_{-1}^{1} h(f)\, e^{2\pi j f t}\, df = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

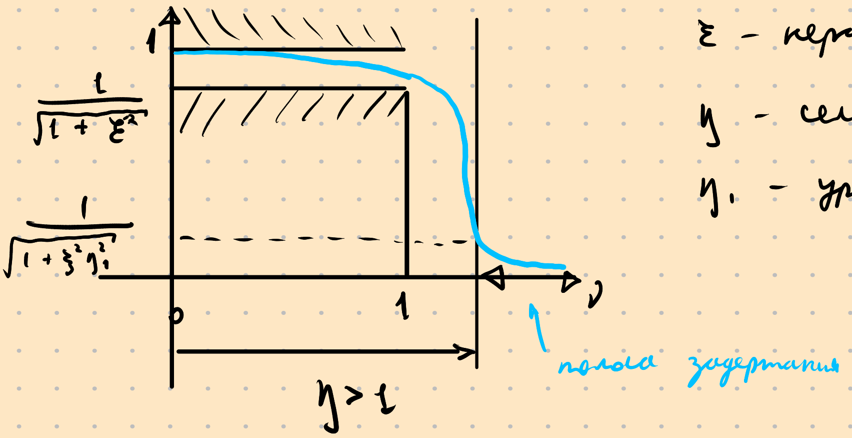
Импульс Найквиста



— не удовл. принципу причинности (реакция раньше воздействия)

Т.е. такой фильтр не реализуем.

Допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания:



ε – неравномерность в ПП

η – селективность

η_1 – уровень на границе ПЗ

К успеху приводит: $H(s)\cdot H(-s)\big|_{s=j\nu} = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$ n – порядок фильтра

$$|F_n(\nu)| = \begin{cases} \le 1, & \nu \in (-1; 1) \\ \ge \eta_1, & \ge \eta \end{cases}$$

Варианты выбора:

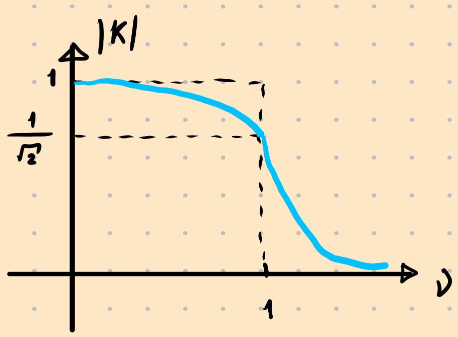
1. $F_n(\nu) = \nu^n$ – фильтр Баттерворта
2. $F_n(\nu) = P_n(\nu)$ – фильтр Чебышева, где $P_n(\nu)$ – полином Чебышева
3. $F_n(\nu) = R_n(\nu)$ – эллиптический фильтр, $R_n(\nu)$ – рацион. эллиптич. ф-ия

Баттерворт

$$H(s)\cdot H(-s)\big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\nu^{2n}}$$

$\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}$ – изменение ε эквивалентно изменению ω_0, т.е. ε не нужен – он всегда 1

$$K(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^{2n}}}$$



При $n\to\infty$ эта АЧХ неогр. стремится к идеальной прямоугольной.

Всегда дает затухание −3 дБ

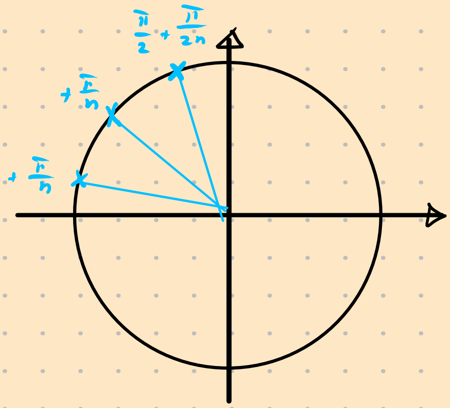
$$H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\nu^{2n}} \quad \Rightarrow \quad H(s)\,H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Ищем полюса: $\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} + 1 = 0$

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = e^{j\pi}\cdot e^{j\cdot 2\pi k}, \quad k\in\mathbb{Z} \qquad -1 = e^{j\pi}$$

$$\frac{s}{j} = e^{j\frac{\pi}{2n}}\cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot\frac{k}{2n}} \qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

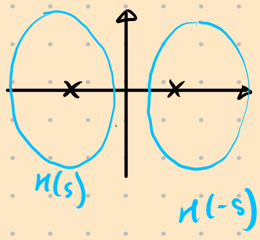
$$s_k = e^{j\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}k\right]}$$ – полюса произв. ф-ий $H(s)\cdot H(-s)$



– полюса с шагом $\frac{\pi}{n}$, картинка симметрична относ. мнимой оси!

Примеры

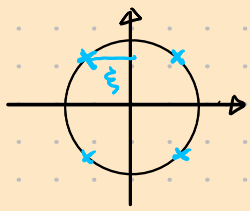
$n=1$: $\quad \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^2} = \frac{1}{1-s^2} \qquad s=\pm 1$ – полюса



$$H(s) = \frac{1}{1+s}$$

Интегрирующая цепь!

$n=2$:



Сопряжённая пара на ед. круге характеризуется затуханием ξ

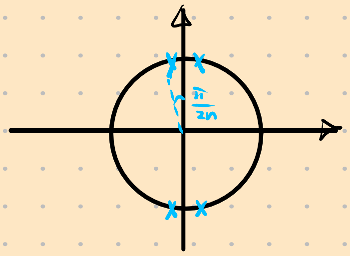
Полином $s^2 + 2\xi s + 1$

Корни $-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

- У фильтров Баттерворта слишком медленный спад.

Если делать большой порядок, получаются очень близкие к мнимой оси полюса (угол $\frac{\pi}{2n}$) – высокая добротность



$$\xi = \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Фильтры с максимально плоской частотной хар-ой.

Чебышев

$$|K(\nu)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2 P_n^2(\nu)}$$

$-1 \le \nu \le +1$; $|P_n(\nu)| \le 1$ – осциллирует в обл-ти пропускания

$P_n(\nu) = \cos(n \arccos \nu)$ – многочлен Чебышева (1)

$\cos[(n+1)\alpha] + \cos[(n-1)\alpha] = 2\cos n\alpha \cdot \cos\alpha$ – по ф-ле cos суммы

$\alpha = \arccos x$

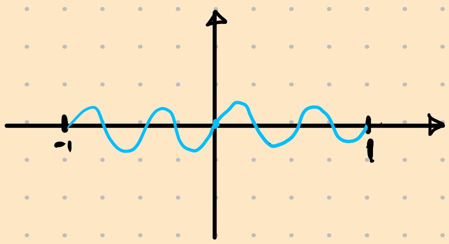
Получаем $P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2P_n(x)\cdot x$

$P_{n+1} = 2xP_n - P_{n-1}$ – рекуррентная ф-ла

$P_0(x) = -1$ $\quad P_2(x) = 2x^2 - 1$

$P_1(x) = x$ $\quad P_3(x) = 4x^3 - 3x$

По ф-ле (1) получается, что $P_n(x)$ определён только на $[-1; +1]$ из-за арккосинуса. Поговорим о нём



$n \arccos x$ меняется от 0 до $n\pi$

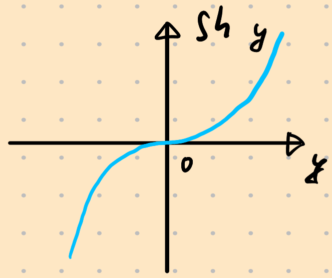
Значит, в $[-1; 1]$ происходит целое число полупериодов осцилляции. Если n – чётное, то в 0 - 0

Почему полиномы определены на всей оси? arccos надо рас-ивать как ф-ию от комплексного аргумента.

$$\cos(z) = \cos(x+jy) = \cos x \cdot \overbrace{\cos jy}^{ch\, y} - \sin x \cdot \overbrace{\sin jy}^{j\, sh\, y}$$

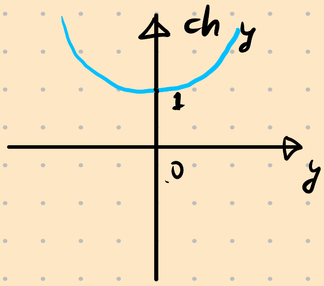
$$\cos jy = \frac{e^{j\cdot jy} + e^{-j\cdot jy}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = ch\, y$$

$$\sin jy = j\, sh\, y$$

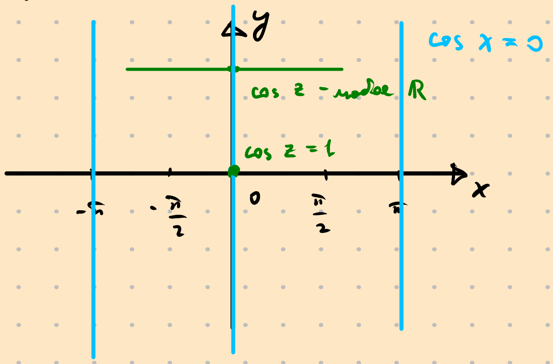


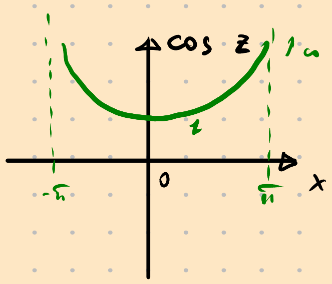
- Получим $\cos z = \cos x \, ch\, y - j \sin x \, sh\, y$

Если $y = 0$, то $\cos z = \cos x$.



- Комплексная добавка в cos обращается в 0, когда $\sin x = 0$.



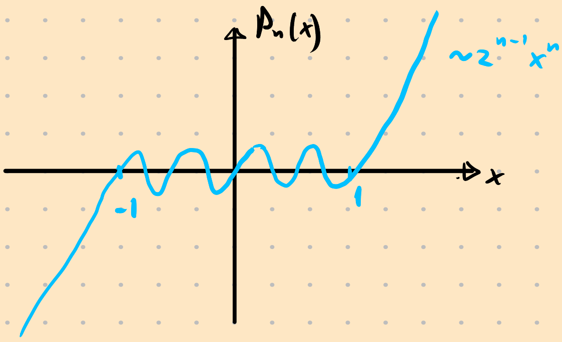


(cos z при $y > 0$)

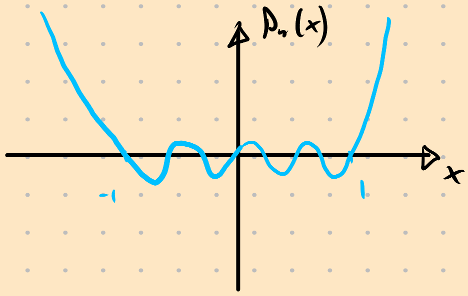
То есть аргумент arccos - любое $x \in R$, иногда arccos x мнимый, но $\cos(n \arccos x)$ остается вещественным.

- $P_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots$ - старший коэф-т

При $x > 1$ он быстро растёт.



$P_n(x)$, n - нечётное



P_n, n - чётное

У Чебышева быстрее по селективности отн. Баттерворта.

Поиск полюсов:

$$H(s)\,H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 P_n^2\left(\frac{s}{j}\right)} = 0$$

$$P_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\cos\Big(n \underbrace{\arccos\left(\frac{s}{j}\right)}_{u-jv}\Big) = \pm\frac{j}{\varepsilon}$$

$$\begin{cases} \cos\left(n(u-jv)\right) = \pm\frac{j}{\varepsilon} \\ \frac{s}{j} = \cos(u-jv) \end{cases}$$

$$\underbrace{\cos nu \cdot \operatorname{ch} nv}_{=0 \;\Rightarrow\; \cos nu = 0} + j\overbrace{\sin nu}^{=(-1)^k} \cdot \operatorname{sh} nv = \pm\frac{j}{\varepsilon}$$

$$nu = \frac{\pi}{2} + \pi k \;\Rightarrow\; u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k$$ – похоже на Баттерворта

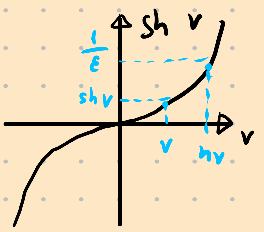
$$\operatorname{sh} nv = \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{s}{j} = \cos(u-jv) = \cos u \cdot \operatorname{ch} u + j\sin v \cdot \operatorname{sh} v$$

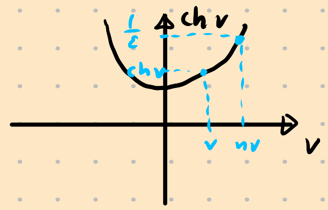
$$s_k = j\left[\operatorname{ch} v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{k}n\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right)\operatorname{sh} v\right]$$

$$s_k = -\operatorname{sh} v \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right) + j\operatorname{ch} v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right)$$

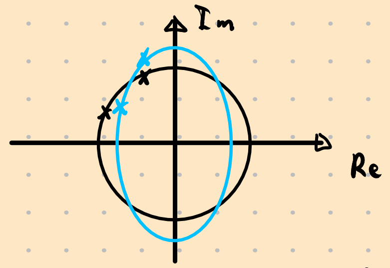
Отн. Баттерворта просто коор-ты умножили на sh v и ch v.



sh v уменьшает (<1)



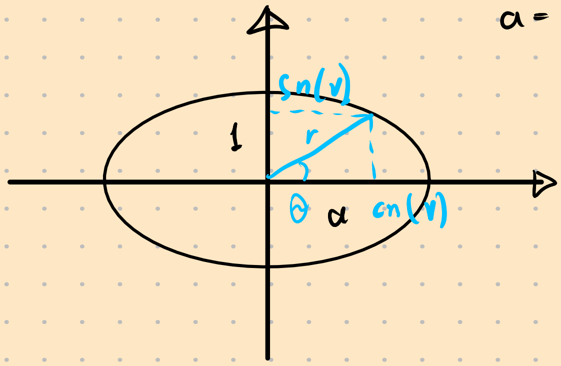
ch v расширяет (>1)



полюса ф-ра Чебышева

Базис $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, ортогонализованный в пр-ве Гильберта, есть многочлены Чебышева.

Эллиптические фильтры



$$a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \qquad k \in [0;\ 1)$$

$$v = \int_0^{\theta} r(\theta)\, d\theta$$

$$dn(v) = r \qquad cd = \frac{cn}{dn}$$

При $k=0$ – вырождение в окружность, sin и cos

$$\int_0^{\pi/2} r(\theta)\, d\theta$$ – эллиптический интеграл

Подобно тому, как $\cos(n \arccos x)$ – многочлен, можно также штуки сделать и в эллипт. тригоном. – т.н. рациональные эллиптические функции.

$$P_n(x) = \cos nw, \quad \text{где} \quad x = \cos(w)$$

$$\varphi_n(x) = cd(\underset{\text{пар-р эксцентриситета}}{K},\ \underset{[0;\,1]}{nw}), \quad \text{где} \quad x = cd(K_1, w), \quad K, K_1 \in (0;1)$$

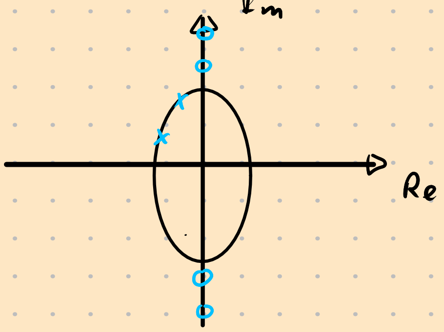
Получается, что $\varphi_n(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ – рац. ф-ия. (есть нули и полюса)

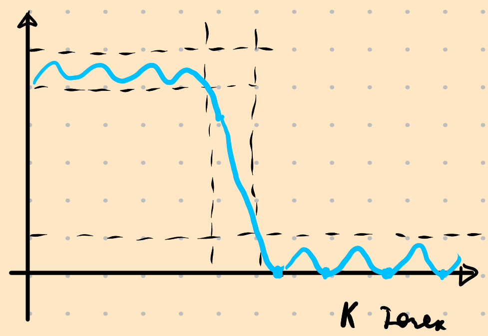
Поиск нулей и полюсов:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \varphi_n^2(v)} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \frac{D^2}{N^2}} = \frac{N^2}{N^2-\varepsilon^2 D^2}$$

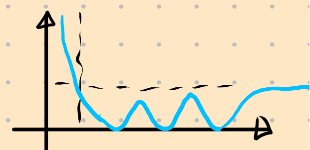
$N^2 = 0$ – нули; $N^2-\varepsilon^2 D^2 = 0$ – полюса

По полюсам очень похожи на ф-ры Чебышева (они тоже на эллипсе), все нули – на мнимой оси.

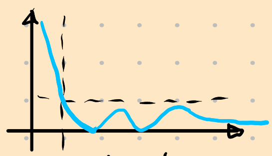




K точек, где затухание – 0!



$n = 2k$



$n = k$

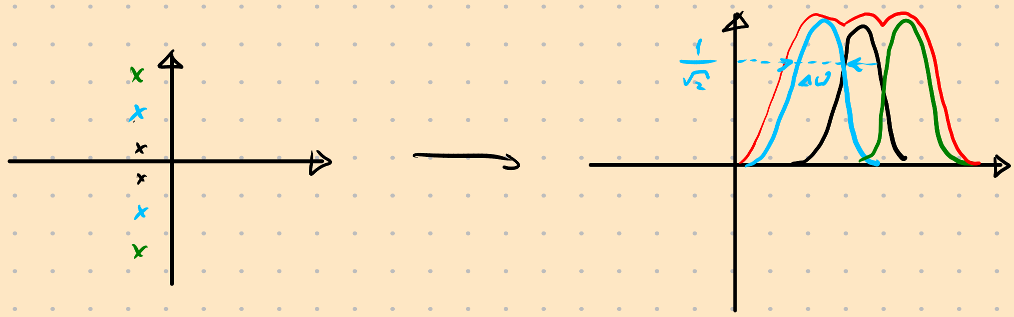
Нулей n штук.

$n = 2k$ – нули парные $\qquad n = 2k+1$ – один нуль на ∞

Пар-ры синтеза

1. Баттерворт – задаётся только порядок n
2. Чебышев – задаётся n и ε (тогда $\gamma_1 = \gamma_1(\gamma)$ – определена)
3. Эллиптические – задаётся (n, ε, γ) или $(n, \varepsilon, \gamma_1)$ или $(\varepsilon, \gamma, \gamma_1)$
(в посл. случае n можно примерно посчитать)

В прошлом семе связанные колеб. контуры делали так:



$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Широкая ПП с крутыми скатами

Но! Если их расп. линейкой, в ПП АЧХ неравномерна.

Лучше по кругу или эллипсу! Как и получили.