

# Риназов Иван Васильевич

## Введение



• Все ящики не описать

• Рас-иваем только линейные и стационарные

Линейность: 
$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Стационарность:  $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t+\Delta t) \rightarrow y(t+\Delta t)$

Чёрный ящик описывается:

- схемой
- набором параметров  $H$

Любая сх-ма, составленная из RLC, явл-я линейной и стационарной.

## Топологические эл-ты

Ветвь - участок эл. цепи, вдоль к-рого протекает один и тот же  $I$ . Может состоять из  $\geq 1$  идеализированных двухполюсника.

Узел - место соединения ветвей

Кустарный -  $> 2$  ветвей

Четверный - 2 ветви

Контур - любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям цепи.

Характериз. направлением обхода, каждая ветвь / узел пропущ. 1 раз

Опас. нам можно записать:

Компонентные гр-ы - свойства цепи, опред. её компонентами

Топологические гр-ы - свойства цепи, опред. только её топологией

## Правила Кирхгофа

- Закон сохр-я заряда
- Провода не накапливают заряд (узлы)

## I закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных значений токов всех ветвей, входящих в каждый из узлов в любой момент времени, равна 0.

$$\sum_i i_k = 0.$$

- Потенциальность э. поля
- Консервативность э. поля
- Поток вектора  $\vec{B}$  во времени в цепи не изменяется (несилив связь эл-ов)

## II закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур обходящийся один раз, равна 0.

## Теорема об эквивалентном генераторе

Ток произвольной ветви линейной э. цепи не изменится, если абстрактный двухполюсник, к к-му подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линейтизированным источником энергии, к-рый может быть представлен последовательной (Тевенин) или параллельной (Нортон) схемой замены. При этом ЭДС идеального источника напряжения равна напряжению холостого хода абстрактного двухполюсника, ток идеального источника тока равен току КЗ абстрактного двухполюсника, а внутреннее сопротивление и проводимость экв. источника равны соответственно комплексным входным сопротивл. и проводимости абстрактного двухполюсника.



Парал. - Нортон



Послед. - Тевенин



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}; \quad U_{xx} = -I R_2 = -\frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}$$

напряжения  
нагрузки

Заменяем идеализированный источник ЭДС на перемычку или идеализированный источник тока на разрыв цепи, считаем сопротивление цепи, получаем выходное сопротивление генератора.

Это работает только с независимыми источниками. Для зависимых придется составить систему уравнений (разберись с этим)

### Частотный анализ характеристик цепи

$$I \cos(\omega t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{линейный} \\ \text{тепловыделитель} \end{array}} \rightarrow k(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

ЛНВ



$k(\omega)$  - АЧХ



$\varphi(\omega)$  - ФЧХ

### Самое полное описание цепи!

Трёхмерный подход - переходим к комплексам



$$z = |z| \cos \arg z + i |z| \sin \arg z \quad (\varphi = \arg z)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos \omega t + i \sin \omega t \rightarrow \boxed{\text{ЛНВ}} \rightarrow k(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (\dots) i \sin(\dots)$$

①   

$$I = \frac{U}{R} \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$$

②   

$$I = C \frac{dU}{dt} \quad \tilde{I} = C \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\frac{1}{j\omega C}}$$
иммезанс

③   

$$U = L \frac{dI}{dt} \quad \tilde{U} = j\omega L \tilde{I}, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{j\omega L}$$

Импеданс - комплексное сопротивление ( $Z$ )

$j = i$  в радиотехнике

Комплексная проводимость -  $Y$

### Линейные цепи 1 порядка

#### ① Непрерывная RC-цепь



$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}_{out}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\tilde{U}_{out} = \tilde{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde{U}_{in}}{j\omega RC + 1}$$

$$\tilde{U}_{out} = \frac{\tilde{U}_{in}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Что будет, если на вход подать  $\cos \omega t$ ?

$$U_{out} = \text{Re}(\tilde{U}_{out}) = (\cos \omega t + \sin \omega \cdot \omega RC) \cdot (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1}$$

Анализировать можно:  $\cos \omega t + i \sin \omega t$

$$K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{out}}{\tilde{U}_{in}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\frac{\tilde{U}_{out}}{\tilde{U}_{in}} = \frac{A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0} \cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0} e^{j\varphi}$$

Поиграем с  $Z$  - сгруппируем фазы - аргументы, посмотрим отношение амплитуд

Чтобы найти  $\varphi$ , нужно из  $K(\omega)$  выделить вещественную часть и вно комплексную. комплексная часть имеет вид  $e^{j\varphi}$ .

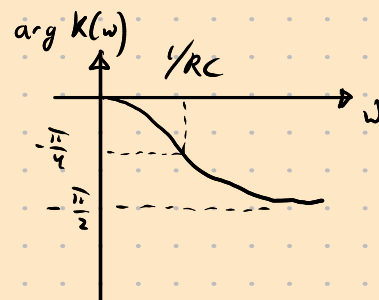
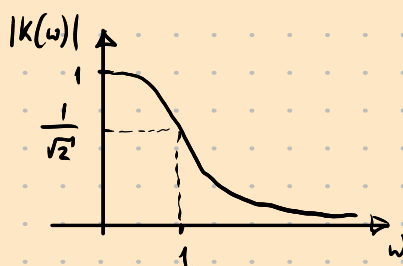
$$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}{\frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1/2}$$

$$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

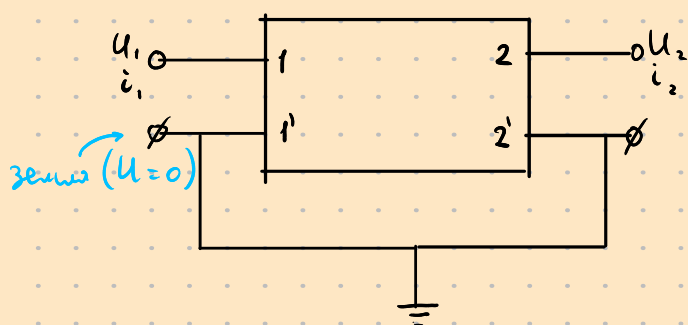




$$\arg K = \varphi = -\arctg \omega RC$$



## линейный четырёхполюсник



- $U_1, U_2$  - относительно земли
- Не накапливает заряд
- По выводу земли течёт ток
- Выходит изв. перемещение (или 2) можно  
в много способов (выбор плоскости в 4х мерном  
пространстве) - тогда 2 ЛК  $U_1, U_2, i_1$  и  $i_2$ .

## Система 2 параметров (для безэнергетических (только R) цепей!)

Система из 2 линейных ур-ний, описывающих четырёхполюсник, например:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, u_2) \\ i_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

Т.е. четырёхполюсник задается двумя характеристиками  $f_1$  и  $f_2$ .

Пример для  $f_1$  и  $f_2$  см.

• Непрерывны

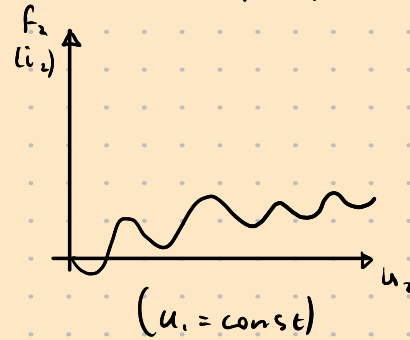
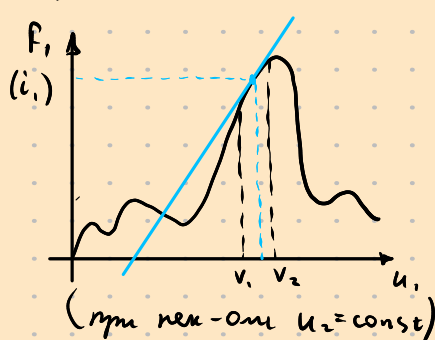
• Прогр.  $\neq \infty$

Т.е. мы можем исследовать в окрестности рабочей точки.

$$di_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 \quad di_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2$$

$= \text{const}$  при фикс.  $u_1$  и  $u_2$

При  $u_1 = \text{const}$ ,  $u_2 = \text{const}$  получаем 4 константы, характ. четырёхполюсника.



Физ. смысл производных:

1.  $\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$  - входная проводимость

3.  $\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$  - прямая пробожная проводимость

2.  $\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$  - обратная пробожная проводимость

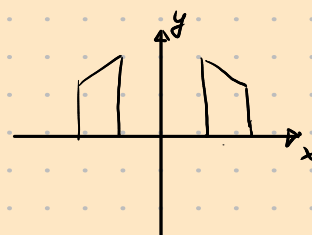
4.  $\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$  - выходная проводимость

## Аналитический сигнал (выполает $L$ и $C$ - инерционность)

Вещный сигнал - зависит нек-ой ЛК  $u$  и  $i$  от времени. При преобр-ии Фурье обязательно получится симметричный спектр (он симметричен относительно  $\omega$  с точностью до комплексного сопряжения, а мнимая часть  $= 0$ ).

Это неудобно - приходится работать с кривой  $\sin$  и  $\cos$ .

Добавим к сигналу комплексную добавку - тангенс, это левая (правая) часть спектра сигнала обнуляется.



Выходит аналитический сигнал. Получается два провода - один с действ. частью сигнала, другой - с мнимой. Используя аналит. сигнал, можно рас-ивать инерционные цепи. Сигнал будет позан как бы бесконечно долго и длится бесконечно долго.



$\tilde{x}(t) = A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$  - аналитический сигнал.  $|e^{j\omega t}| = 1$

$A_0(\omega), \varphi(\omega)$ .  $A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$  - комплексная амплитуда  
 $e^{j\omega t}$  - комплексная вращающаяся экспонента.

## $Y$ - параметры (комплексные)

$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12} \tilde{U}_2$

$\tilde{I}_2 = Y_{21} \tilde{U}_1 + Y_{22} \tilde{U}_2$

При поиске  $Y_{1x}$   $\tilde{U}_2$  замыкают (закоррективают выход), аналогично для  $Y_{2x}$ .

$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = Y \cdot \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{pmatrix}$

Если взять  $I_1$  и  $I_2$  как независимые, найдем их значения:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_1}{\partial i_2} di_2$$

- здесь рассуждения это сопротивление

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2$$

Сделаем на основании, получим:

$$u_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$u_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Следовательно:  $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$

$$Z_{12} = - \frac{Y_{12}}{|Y|}$$

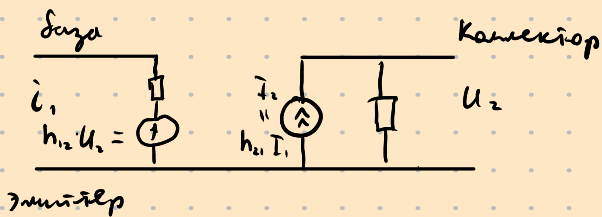
$$Z_{21} = - \frac{Y_{21}}{|Y|}$$

$$Z_{22} = \frac{Y_{11}}{|Y|}$$

**H - параметры**

$$\begin{cases} u_1 = h_{11} I_1 + h_{12} u_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} u_2 \end{cases}$$

- полезно для динамических транзисторов



- аналогичная динамическая транзисторная схема

$h_{21}$  - передача по напряжению ток (ср.)

$h_{11}$  - входное сопротивление

$h_{12}$  -

(ср.)

$h_{22}$  - выходная проводимость (ср.)

(ср.) - средняя величина

Следовательно:  $h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$

$$h_{12} = - \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

$$h_{21} = - \frac{Z_{21}}{Z_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$$

# Комплексный коэффициент передачи



Анализировать - из ТФКП

Комплексное число в реальности не используется  
 $|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$  - комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{\tilde{y}_{\text{вн}}}{\tilde{y}_{\text{вх}}} = \frac{B(\omega) e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t}}{A_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} \equiv$$

Модель анализ. сигнала с одной. переменной можно положить на вход и  $K(j\omega)$  тоже будет

$$\equiv \frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + A_0} = \frac{b_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot \dots \cdot (\omega - b_n)}{a_0 \cdot (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot \dots \cdot (\omega - a_m)} \equiv$$

*числитель*      *знаменатель*

Самая сложная задача разложения

Обозначения:

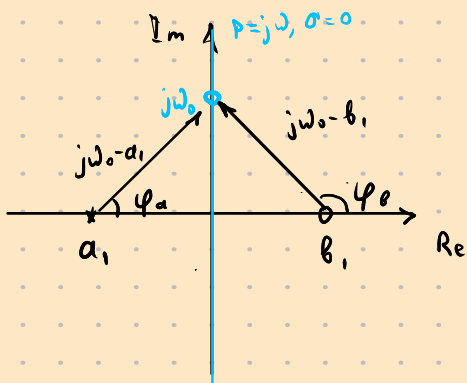
- Когда  $\omega = b_k$ ,  $|K| = 0$
- Когда  $\omega = a_k$ , возможен распад.

$$\equiv \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{|\omega - b_1| \cdot e^{j \arg(\omega - b_1)} \cdot \dots \cdot |\omega - b_n| \cdot e^{j \arg(\omega - b_n)}}{|\omega - a_1| \cdot e^{j \arg(\omega - a_1)} \cdot \dots \cdot |\omega - a_m| \cdot e^{j \arg(\omega - a_m)}} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^n |\omega - b_k|}{\prod_{p=1}^m |\omega - a_p|} \cdot e^{j \sum_{k=1}^n \arg(\omega - b_k) - j \sum_{p=1}^m \arg(\omega - a_p)}$$

"Нули" - корни числителя ( $b_i$ )

"Полоса" - корни знаменателя ( $a_i$ )

$\omega$  должен быть комплексной ( $p$ ), иначе от комплексной  $\varphi$ -мы произойдет переход к  $b_{\text{вн}} - a_{\text{вн}}$ .



$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} = \frac{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + A_0} = \dots$$

По полюсам, нулям и  $\frac{b_0}{a_0}$  можно полностью восстановить  $\varphi$ -мод.

$p = j\omega + \sigma$  - при  $p$ -м комплексной частоте,  $\sigma = 0$ .

Учтите, что нули и полюсы могут быть комплексными.

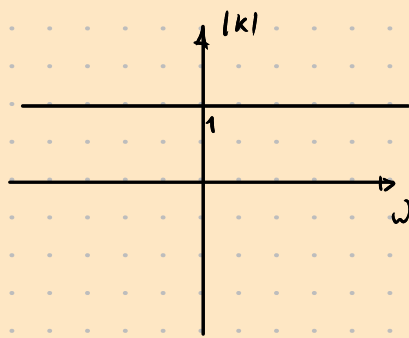
$$K(j\omega) = \frac{|j\omega_0 - b_1|}{|j\omega_0 - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega_0 - b_1) - \arg(j\omega_0 - a_1))}$$

$|K(j\omega)|$  = отношение длин векторов из нуля и из полюса

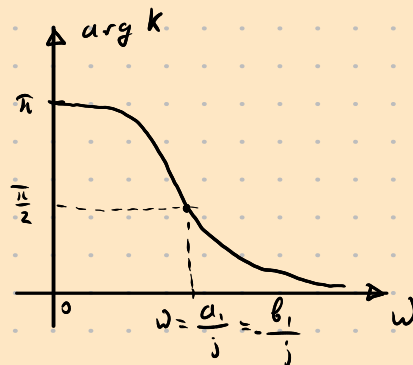
$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} - \text{АЧХ} \quad \arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A - \text{ФЧХ}$$



Пример  $a_1 = -b_1$

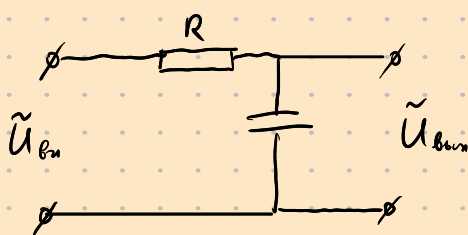


Aux



ФУХ

## Усередину RC-цепи



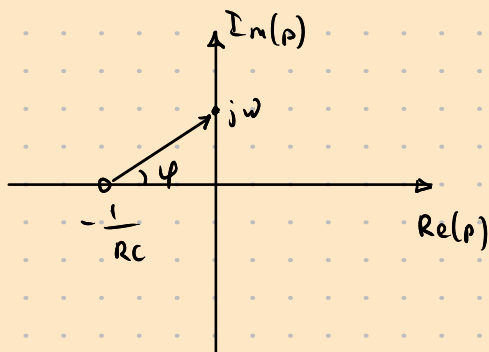
$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{\text{вых}}}{R + 1/j\omega C \cdot j\omega C \tilde{U}_{\text{вх}}} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC(j\omega + \frac{1}{RC})}$$

Так как цепь  
(первая цепь конденсатор)

$$= \frac{1}{RC(p + \frac{1}{RC})}$$

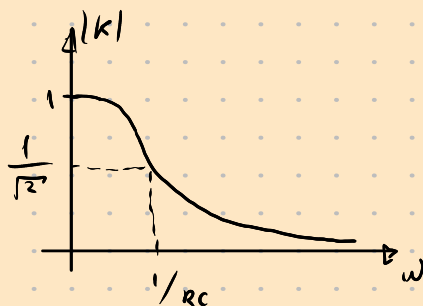
$$a_1 = -\frac{1}{RC}$$

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

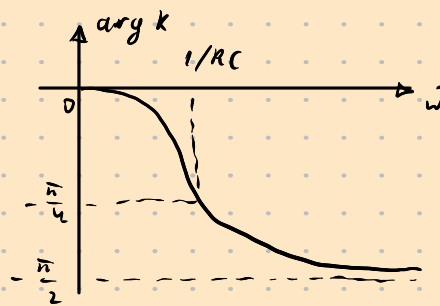


$$|K| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{R^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} - \text{АУХ}$$

$$\arg K = -\arctg(\omega RC) - \text{ФУХ}$$

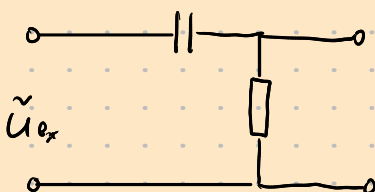


AUX



ФУХ

## Двухконтурная RC-цепь



$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - 0}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



He берется по формуле / или берется численно. Ре сам, если надо 1 - берется.

