

Рамиев Александер Владимирович

Минимум

Члены совета: Акимов Рамиев, Чистяков

Бывшие члены: Журабек; Мархел; Гармашев (~ коньсена); Бондаренко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома \mathbb{R}^3 - все объекты - в Евклидовомпр-де \mathbb{R}^3 .
2. \exists движение: $R \rightarrow \mathbb{R}^3$ (в \mathbb{R} -время)
3. \exists мат. форма: (m, \vec{r}) , $m = \text{const} > 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4. \exists взаимодействие: $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2) \rightarrow \exists \vec{F}$ -акция: $\vec{F} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\begin{array}{c} \vec{F} \\ \longrightarrow \\ (m_1, \vec{r}_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} -\vec{F} \\ \longleftarrow \\ (m_2, \vec{r}_2) \end{array}$$

5. \exists час-ые координаты и часы параллельных прямых, такие что

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие час-ые наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Учеб.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

$$t = t(t', q'), q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0 - \text{же не } q\text{-ы!}$$

Тогда F_i учб.

Ковариантность: инвариантность правил соединения ур-ий.

Пример: ур-я №9 Несущая ковариантна относ. предп-ий Гамильт.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{v} t + A t, \quad A - \text{опис. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{предп. (группа) Гамильт.}}$$

$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = \text{const}$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longleftrightarrow m \ddot{\vec{r}'} = \vec{F}$$

Універсальне обозначення

$$\textcircled{1} \quad \vec{r} \rightarrow r^i, \quad i = 1 \dots 3$$

$$\textcircled{2} \quad A \rightarrow a_{ij}$$

$$a_j \\ a_{ij} \quad \begin{matrix} \text{ненін універ} \\ \swarrow \end{matrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^i b^i \quad (\text{правило дужини})$$

$$A\vec{r} = \underbrace{a_{ij}}_{\text{другим універ}} \vec{r}^i$$

$$\textcircled{4} \quad a, \dots, h - \text{циклическое універса}$$

$x^a b^a - \exists i \in \mathbb{N} \text{ с номером } a; \text{ без суммирования!}$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$$

$$\text{Нпр.} \quad df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$$

Координаты Торка

Декартовы координаты

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

$$v = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{r}^2 \\ \dot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{скорость}$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}^1 \\ \ddot{r}^2 \\ \ddot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{ускорение}$$

Сопровождающие трёхвекторы Торка



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \vec{r}_{,s} \quad \dot{s} = \vec{t} v$$

$$\vec{w} = \vec{t}_{,s} v^2 + \vec{v} \vec{v}$$



$$\Delta \vec{s} \approx g \Delta \epsilon$$

$$\Delta \vec{t} \approx \Delta \epsilon \vec{n} = \frac{4s}{g} \vec{n}$$

$$\vec{t}_{,s} = \frac{\vec{n}}{g} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} \vec{t} + \underbrace{\frac{v^2}{g} \vec{n}}_{w_c \text{ Тангенциал}} + \underbrace{\frac{v^2}{g} \vec{n}}_{w_n \text{ нормальное}}$$



Криволинейные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} - \text{криволинейные (однозначные) координаты}$$

$\det [r_{ij}] \neq 0!$ Взаимно-однознач. соотв.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} - \text{цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i - \text{var} & i=1, 2, 3 \\ q^{j+i} - \text{fix} \end{cases} - \gamma_i - \text{координатные линии}$$



$$H_x = |\vec{g}_x| - \kappa r \text{ (норма)}$$

$$H_x = \sqrt{(r_{1x})^2 + (r_{2x})^2 + (r_{3x})^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{g}_a}{H_a} \text{ - единица (норм. вектора) кас. линии}$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$



Скорость в кривой коорд.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^k}_{\text{координаты}} \vec{g}_k$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{v} = \sum H_k \dot{q}^k \vec{e}_k \quad \begin{matrix} \text{координаты} \\ \text{координаты} \end{matrix}$$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik} \text{- метрик. тензор}} \cdot \dot{q}^i \cdot \dot{q}^k = g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\textcircled{2} \quad v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\text{Если } \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}:$$

$$v^2 = \sum H_i \cdot (\dot{q}^i)^2$$

Ускорение в кривой коорд.

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_x = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k}) \dot{r} + \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}_{,k}$$

Равнл. по $q_k \Leftrightarrow$ вектор:

$$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i \quad \vec{r}_{,ki} = \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i \quad \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,k} \quad \left(\vec{r}_{,k}, \quad v^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \right)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{,kk}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{q}^k}}_{\frac{d\ddot{\vec{r}}}{d\dot{q}^k}} = \vec{r}_{,k}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \vec{r} \cdot \vec{r}_{,kk} = \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,k}$$

$$! \quad \dot{r}^i = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$③ \vec{w} \cdot \vec{g}_a = \frac{d}{dt} \left(v^2/2 \right)_{,a} - \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,a}$$

$$④ \vec{w} \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{M_a} \left[\frac{d}{dt} \left(v^2/2 \right)_{,a} - \left(v^2/2 \right)_{,a} \right]$$

Оператор Эйнштейна - дифференциал

$$\xi_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_a = \xi_k \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Кинематический закон Ньютона в виде вспомогательного

$$q^a \rightarrow q^a + dq^a - \text{расположение центра}$$

$$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{M_a} \cdot dq^a$$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_k$$

$$m \xi_k \left(\frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \vec{g}_k \quad Q_k - \text{относительная работа}$$

$$T = \frac{mv^2}{2} - \text{кин. энергия}$$

$$\xi_k(T) = Q_k$$

$$(6) \frac{d}{dt} T_{,k} - T_{,k} = Q_k$$

$$\text{Другой вид: } \frac{1}{M_a} \xi_a(T) = \vec{F} \vec{e}_a$$

Понятие о тензорах

$$\vec{r}(q) - \text{зависимость} \quad q(q') - \text{замена переменной}$$

Как изменится скорость?

$$q^i = \underbrace{q^i}_{\text{координаты}} \cdot \underbrace{q^{i'}}_{\text{координаты}} - \text{координатный вектор (коорд. вектор, к-ром описано движение)} \\ (\text{тензор 2-го рода}) \quad \text{без сдвигов}$$

$$\dot{q} = J q'$$

Что связь с уравнением?

$$f(q) - \text{мат. оп-в}$$

$$f(q(q')) \quad f_{,i} = F_{,i} \cdot q^{i'} - \text{уравнение не то! Это ковариантный вектор} \\ (\text{ковариантный вектор - тензор 2-го рода})$$

$$\underbrace{\nabla' f}_{\text{second}} = \nabla f J \quad \nabla f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{yine cok dus}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$$

Rasuya (memy ko - u kenige-) teoretič, eam ypred-e oprimavimo $((J^T)^{-1} = J)$

Metrikasni Tensor

$$\vec{g}_x = \vec{r}_{,x} \quad \vec{r}(q(q)) - \text{zmena}$$

$$g_{xx} = \vec{r}_{,x} \cdot \vec{q}_{,x}^* = \vec{g}_x \cdot \vec{q}_{,x}^* \quad \text{- neyadis}, \quad \vec{g}_x = \text{koordinatni tensor}$$

$$\text{Metrikasni Tensor: } \hat{V} = q^i \vec{g}_i \Rightarrow V^2 = \underbrace{g_{ii}}_{g_{ik}=g_i g_k} q^i q^k, \quad g_{ik} = g_i g_k - \text{metrik Tensor!}$$

$$g_{i,k} = q_{,i}^i q_{,k}^k g_{ik} - \text{koordinatni Tensor z-vo pema rind (0,2)}$$

Күрнәмәләндә төбәгесең тәс

Төбәгесең тәс - сабакыннан мат. болк, рас-ең менең к-рәни не измәнделә.



$M \in \text{тәс}$ - нарас ТТ (төбәгесең тәс)

Движение төбәгесең тәс - это движение нарас и
движение ТТ оның, нараса (вращение).

Вращение. Числ. консервное вращение

Собакындан нараса координаты и рас-еңдән вращение.

- Числ. фикса

$$\boxed{\text{урын} \vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3} \\ \vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Неберенделән си-ми координат 0x:

$$x \xrightarrow[3(\text{ориц. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\Theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



числ. урын

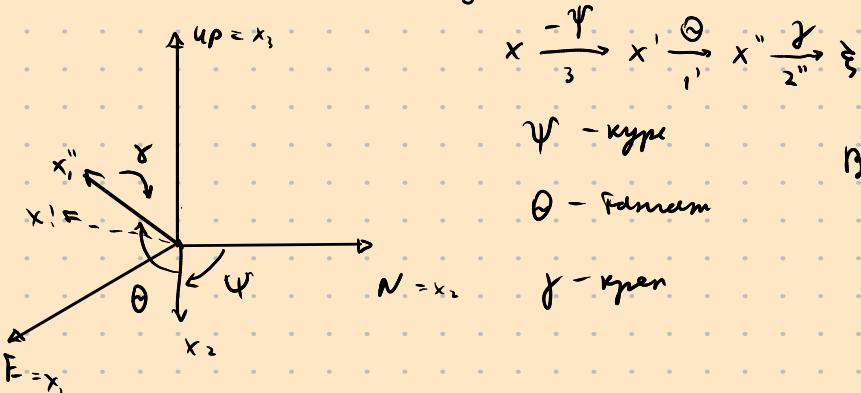
ψ - урын прецессии

Θ - урын нуткации

φ - урын собственного вращения

Параллельты ψ , Θ и φ нарас. бо \vec{x}_3 -оғы кош. с позициямен төбәгесең тәс
бенде крате нарас. $\Theta = \{0, \pi\}$

- Самолейное (караданное) урын



ψ - күре

Θ - фиксация

φ - күрен

Вращение при $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Мадаң си-ми урын консервное вращение дыбыт иштәп вращение.

Ортогональные матрицы



$$\vec{r}' = A \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 A^T A$$

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T A^T A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = I -$$

Определение орт. матрицы

Часть 1

① Теорема Фурье - Крамма: $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |\mathbb{E}| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

небольшой
значительный небольшой

② $A^T A = \mathbb{E} \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③ $\forall A, B$ - орт. $\rightarrow C = AB$ - ортогональная

$$C^T C = B^T A^T \cdot AB = \mathbb{E}$$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

① $\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

③ $\exists E \in G: \forall A \in G \rightarrow AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \rightarrow \exists A^{-1} \in G: A^{-1} A = AA^{-1} = E$

Линия $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = \mathbb{E}$

$SO(3)$ - симм. орт. группы; $\forall A \in SO(3) \rightarrow |A| = 1$ (группа поворотов)

⑤ $SO(3)$ - основная ми. инв. матрица 3-го ранга с неотрицательной формой.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' & \dots \\ a_{21}' & \dots \\ a_{31}' & \dots \end{pmatrix} = [\vec{e}_i]_e$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \stackrel{j \rightarrow i}{\Rightarrow} a_{ii}^1 = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{ii})$$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаим. однознач. соответствие между параметрами 3-го ранга $A \in SO(3)$.

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} \Rightarrow$ 6 независимых строк \Rightarrow
 \Rightarrow матрица из $SO(3)$ — трехмерное многообразие в 9-мерном нр-ке матриц

$$\textcircled{6} \quad a_{ii}^i = \Delta_{ii}^i \quad A^{-1} = \frac{[\Delta_{ii}^i]^T}{|A|_{\infty}} = A^T \Rightarrow UTA$$

↑
3x3 A
an. назначение

Собственные векторы и собственные значения ортогональных матриц

$$A \vec{r} = \lambda \vec{r} \Rightarrow |\lambda E - A| = 0 \quad \text{tr } A = a_{ii}^i$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr } A + \lambda \text{tr } A - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec{r}_1 : A \vec{r}_1 = \vec{r}_1$ — собственный вектор

Докажем, что $|\lambda_0| = 1$

$$A \vec{r}_0 = \lambda_0 \vec{r}_0 \mid \cdot (\text{кв-е})^+ \quad A^+ = \overline{A^T} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{коэффициент комп-а} \\ - \text{правило сопряжения} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_0^T A^+ A \vec{r}_0 = \lambda_0^+ \lambda_0 \cdot \vec{r}_0^T \vec{r}_0 \quad \text{Если } \vec{r}_0 = \vec{p} + i \vec{q}, \text{ то } \vec{r}_0^T \vec{r}_0 = \vec{p}^T \vec{p} + \vec{q}^T \vec{q} = |\vec{r}_0|^2 > 0$$

"F" "iλ₀"²

$$|\vec{r}_0|^2 = |\lambda_0| \cdot |\vec{r}_0|^2 \Rightarrow |\lambda_0| = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = \frac{\text{tr } A - 1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{(\text{tr } A - 1)^2}{4}}$$

$$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i \vec{q} \quad \{ \vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q} \} - \text{нр-кое ОКБ}$$

Умнож. нр-ка A :



$P \perp \vec{r}_1$, P -унмнож. нр-ка A .

$$\exists \vec{r} \in P \quad A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$$

$$(A \vec{r})^T \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}^T A^T}_{\vec{r}_1} \vec{r}_1 \Rightarrow A \vec{r} \in P$$

УД



Теорема Фригера о конечных побородах

A — нр-кое 3x3, \vec{r}_1 — симпл. вектор $\exists \vec{r}$ в виде конечн. побороды, симпл. поборода \vec{r}_1 (в виде суммы векторов \vec{r}_i)

Через ортогональную матрицу и нап-об Эйнштейна поверота



Видим \vec{e} как ось поворота, \vec{r} - лежащая в плоскости с \vec{e} и \vec{r} .

\vec{r} подразумевается на φ омоз. \vec{e} & \vec{r} .

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \text{ где } \vec{r}_1 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}_2|}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \cdot \vec{e} + (\vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}) \cos \varphi + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi = \\ &= (\vec{e} \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top) \vec{r} \end{aligned}$$

$$\hat{\vec{e}} \vec{r} = \vec{e} \times \vec{r}; \quad \hat{\vec{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad \vec{e} \vec{e}^\top = \begin{bmatrix} (e')^2 & e' e^2 & e' e^3 \\ e' e^2 & \dots & \dots \\ e' e^3 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Получим $A = E \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top$ (2) - правило куб. омоз. доказ!

$$\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) = \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle \vec{e} - \vec{r}$$

$$\hat{\vec{e}}^2 \vec{r} = (e \vec{e}^\top - E) \vec{r}$$

$$(A = E + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + \hat{\vec{e}}^2 (1 - \cos \varphi))$$

Пусть $\vec{\varphi} = \vec{e} \varphi$ - вектор Эйнштейна (где \vec{e} единичный вектор - изменение не подходит)

* $\vec{\varphi} \hookrightarrow \hat{\vec{e}} - \cos \varphi$ - ортогон. ортогон. вектор (1).

Тогда можно нап-ти, что $A = e \vec{\varphi}$ (пог. линия)

Выражение нап-об. Эйнштейна. поверота через тр-ти $A \in SO(3)$

$$2\vec{y}_3 (2) \Rightarrow \operatorname{tr} A = 3 \underbrace{\cos \varphi}_{E \cos \varphi} + 1 \underbrace{- \cos \varphi}_{(1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$$A = [a_{ij}^i]$$

$$a_2^3 - a_3^2 = 2 e^1 \sin \varphi \Rightarrow e^1 = \frac{a_2^3 - a_3^2}{2 \sin \varphi} \quad e^2 = \frac{a_3^1 - a_1^3}{2 \sin \varphi} \quad e^3 = \frac{a_1^2 - a_2^1}{2 \sin \varphi}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}; \text{ поэтому, что } \varphi \in [0; \pi]! \text{ т.к. } \vec{e} \text{ единичный вектор, что}$$

нап-об. поверота - это против часовой стрелки. Поверот в одн. направлении - движение $-\vec{e}$.

Оператор наименьшего квадрата. Угловая скорость Тейлора Тесс

Если $\dot{\varphi} \ll 1$, то

$A \approx E + \hat{\varphi}$ - оператор наименьшего квадрата

То близко к гр $A \in SO(n)$:

$A(t) \in SO(n); A(0) = E$

$$A^T A = E \quad | \frac{d}{dt}|_{t=0}$$

$$\overset{\cdot}{A}^T A + A^T \overset{\cdot}{A} \underset{\overset{\cdot}{E}}{|}_{t=0} = 0$$

$$\overset{\cdot}{A}^T (0) = -\overset{\cdot}{A}(0) \underset{\overset{\cdot}{\omega}}{|} \Rightarrow \overset{\cdot}{A}(0) - \text{кососимметрическое} \Rightarrow A \approx E + I + \hat{\omega}$$

Угловая скорость



$$\exists \Delta \vec{\varphi} = \vec{e} \Delta \varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \quad - \text{угловая скорость}$$

Распределение скоростей и ускорений в Тейлоре Тесс



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{g}}$$

$$g(t + \Delta t) \approx (E + \Delta \hat{\varphi}) \vec{g}(t)$$

$$\dot{\vec{g}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \vec{g} = \hat{\omega} \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{g} \quad - \text{сп-ва Эйнштейна}$$

$$\vec{W} = \vec{V} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) \quad - \text{сп-ва Равновесия}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Кинематический закон второго рода

Приложен движением изображение



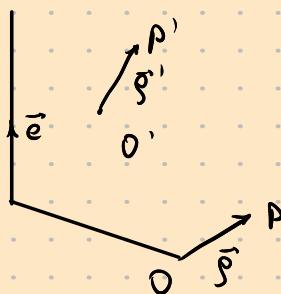
Базисное движение

Модель движения тела задаётся базисным движением перемещения.

Перемещение тела на расстояние $\Delta l = \overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e}$ и повернуто на φ .

Теорема Маро: А) перемещение тела задаётся базисным движением перемещения.

Б) движение тела перемещение не зависит от базисной массы:



$$\vec{g}' = A \vec{g}$$

$$\vec{g}' \cdot \vec{e} = \vec{g}'^T \vec{e} = (A \vec{g})^T \vec{e} = \vec{g}^T \underline{A^T \vec{e}} = \vec{g}^T \vec{e}$$

Предыдущий \vec{g} не \vec{e} не имеет.

Если $\vec{g} = \overrightarrow{O O'}$ — не важно, как будит O , $\overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e} = \text{const.}$

Рассмотрим движение тела за время Δt



$$\vec{V}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Тело совершает ускоренное базисное перемещение.

Ось кинематического баланса

$$ГМТ: \vec{V} = \vec{V}_0 + \omega \times \vec{r} = \lambda \vec{\omega}$$

$$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}}_{\text{не заб. ор. н.м.}} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_0 = \lambda \omega^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} - \text{крутиз. ускорение}$$

не заб. ор.
н.м.

Рассмотрим вращение:

$$\begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{oy} + \dots = \lambda \omega_y \\ V_{oz} + \dots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y \\ V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z \\ V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x \end{cases} \right\} = \frac{V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z} \quad \text{- выражение орт. кинематики. Быстро}$$

Несколько кинемат. формул \Leftrightarrow наим. ω , уравнение орт. V_m .

$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Примеч. V_m - мин. скорость в тб. точке.



Сложение вращений

1. Аксиоматическое вращение



$$\vec{r}' = A \vec{r} \quad \vec{r}'' = B \vec{r}' = B A \vec{r}$$

$$C = BA$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

2. Пассивное вращение



$$\vec{r}^{(1)} = \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i \quad \vec{e}_i = A \vec{e}_i$$

координаты в новой системе относительно прежней

$$\vec{r} = \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_i \text{ (в новой системе)} \\ \vec{e}_i = A \vec{e}_i \end{array} \right.$$

B дает e_i :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = A \vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}^{(1)} = A^T \vec{r}$$

$$\vec{r}^{(1)} = B^T \vec{r}^{(1)} = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$$

$$C = AB$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

Пример 1



$$C - ? \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Дно, это означает в. зеркаль., т.е.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- координаты вращения доказать в. зер.

$$C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример 2



$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

1. Вокруг z на ψ

2. Вокруг x' на θ - углов динамики

3. Вокруг z'' на φ

Однобугорное, рассмотренное в. зрене

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- приведение координат нового базиса в старом

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Кинематические уп-2 Пуассона для ортогональных матриц



A - общее полож. базиса тела с ненул. базисом x

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta \hat{\varphi}_x) A(t) & - \text{авт. в. зп.} \\ A(t) (E + \Delta \hat{\varphi}_y) & - \text{нас. в. зп.} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{array}{c} \Delta \vec{\varphi} \leftrightarrow \Delta \hat{\varphi} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \vec{\omega} \leftrightarrow \hat{\omega} \end{array} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A \hat{\omega}_y \end{bmatrix} \quad (1) - \text{Кинем. уп-2 Пуассона.}$$

Если есть $A(t_i)$ и $\hat{\omega}_x(t)$ ибо $\hat{\omega}_y(t)$ то используя эти уп-2, можно находит текущую ориентацию.

Матрица авт. и нас. векторов оговаривает: что это же, что оговаривает в X и в $\hat{\omega}$? т.е. это одинак. базис предп-9.

Уп-2 не универсальное выражение, но не единственно.

Используются наименее в. зрене (затем лучше спроектировать на короткое).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2,3 - 9 \text{ уравнений!}$$

Момент инерции можно записать в виде

Базис - вектор $\vec{\omega}_x$, т.е. вектор вращения A вокруг оси x

$$\vec{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2 \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \end{cases} \quad - \text{базис}$$

$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = \delta_{km}$ - проверка правильности инцидентирования в процессе

Легкое из (1):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_x = \vec{A} \vec{A}^T \\ \hat{\omega}_z = \vec{A}^T \vec{A} \end{cases} \quad - \text{значит } A(t), \text{ можно выразить } \omega_x(t) \text{ и } \omega_z(t)$$

Горизонтальное вращение Твёрдого тела



$\vec{\omega}^e, \vec{\epsilon}^e$ - горизонтальное вращение в окн. нейл. базиса
 $\vec{\omega}^r, \vec{\epsilon}^r$ - окн. в. в окн. зем. орт. нейл. базиса
 Итак: $\vec{\omega}, \vec{\epsilon}$ - общ. окн. в. в окн.

1. Угловая скорость

Связан с вектором углового базиса приведенное выражение, т.к. не определяется с неподвижным базисом.



$$\vec{\omega} \approx \vec{\epsilon} + \Delta \hat{\phi}^e, \quad \vec{\epsilon} \approx \vec{\epsilon} + \Delta \hat{\phi}^r$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{\Delta \hat{\phi}^e + \Delta \hat{\phi}^r}_{\text{(нашёл в нотах)}} \quad (\text{нашёл в нотах})$$

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r$$

$\hat{\omega}^e$ - неподвижная окн. в.

$\hat{\omega}^r$ - движущаяся окн. в.

$\hat{\omega}$ - общая окн. в.

2. Скорость винора в ненормированной форме



$$\vec{a} = \sum a_i \vec{e}_i - \text{прямой винор}$$

$$\dot{\vec{a}} = \sum \dot{a}_i \vec{e}_i + a_i \dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

↑ акселер/омни. прям.

↑ ненормир. прямознач

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i \quad (\text{из к-ва Эйнера})$$

3. Чистое ускорение

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\omega}^e + \sum \omega^i \vec{e}_i$$

$$(\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^r + \vec{\omega}^e \times \vec{\omega}^r)$$

4. Осадочный винор

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{ч. винор вращения движущ. - осад. прям.} = \text{осад. прям.}$$

Кинематические уравнения Эйнера

У кватернионов есть наименее избыточные (нанесены в заголовок).

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda} - \text{complement},$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}$$

Нормированное кватернион: $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}; \quad |\vec{e}| = 1$

Действие — погружение ортогональной, и у кватернионов есть!

$R' = Ad R = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$ — приведенное представление

Свойства $Ad R$

$$] R = r_0 + \vec{r}$$

$$1. \quad r'_0 = r_0$$

$$\left. \begin{aligned} R' &= r'_0 + \vec{r}' = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \\ \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \tilde{\vec{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \Rightarrow \text{rect } \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r'_0 = r_0$$

$$2. \quad \vec{r}' = A \vec{r}, \quad A \in O(3)$$

$$\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \sim \text{пр. предп} \Rightarrow \exists A: \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = A \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\|\vec{r}'\| = \|\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| \Rightarrow \|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\| \Rightarrow A \in O(3) \quad \text{Итд,}$$

Задача: $\] \Lambda(t) \in \mathbb{H}, \quad \|\Lambda\| = 1, \quad \Lambda(0) = 1.$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Lambda \circ \tilde{\Lambda} &= 1 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) + \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R} \\ (\text{i.e. } \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = \dot{\Lambda}(0)) \end{aligned} \right.$$

Кватернион вида $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ & механизм действия сопоставляется с вектором

Теорема

Предположим $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$, где $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}$ задает движение погружения
вокруг \vec{e} на угол φ .

D-бо

$$\Lambda \circ \vec{r} - \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \stackrel{\text{континуатор?}}{=} 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}$$

$$\Lambda \circ \vec{r} = \vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = (\vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + 2(\vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = \vec{r} + 2 \lambda_0 \vec{\lambda} \times \vec{r} + 2 \vec{\lambda} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}) = (E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2) \vec{r} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2$ — общий представитель наименее избыточного кватерниона

$$A = E + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \hat{e} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \hat{e}^2 = R + \sin \varphi \hat{e} + (1 - \cos \varphi) \hat{e}^2 -$$

Берілгенде $A \in SO(3)$ резеке негізгі динамикада.

УТА

Симметрия поворотов в кватернионах

1. Аксиоматика 1. зп.



$$\vec{r}' = L_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{L}_1, \quad \vec{r}'' = L_2 \circ \vec{r}' \circ \tilde{L}_2 \quad \vec{r}''' = L_n \circ \vec{r}'' \circ \tilde{L}_n$$

$$\vec{r}''' = L_2 \circ L_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{L}_2 \circ \tilde{L}_1 \Rightarrow L = L_2 \circ L_1,$$

$$L = L_n \circ \dots \circ L_1$$

Поворот в оном же порядке

2. Пасибнана 1. зп.



$$\vec{r}'_e = L_1 \circ \vec{e}_e \circ \tilde{L}_1,$$

$$\vec{r} = r'_e \vec{e}'_e = L_1 r'_e \vec{e}_e \circ \tilde{L}_1,$$

$$\text{Важе } e: \vec{r} = \vec{r}_e \Rightarrow \vec{r}_e = L_1 \circ \vec{r}'_e \circ \tilde{L}_1,$$

$$\text{Тогда } \vec{r}'_e = \tilde{L}_1 \circ \vec{r}_e \circ L_1,$$

$$\vec{r}'_e = \tilde{L}_2 \circ \vec{r}'_e \circ L_2 = \tilde{L}_2 \circ L_1 \circ \vec{r}_e \circ L_1 \circ L_2 \Rightarrow L = L_1 \circ L_2$$

$$L = L_1 \circ \dots \circ L_n$$

Заданное: коор-ти кватерниона в L описаны в базисах $\{e_i\} \cup \{e_n\}$, т.к.

$$L = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi - \text{угол}, \quad \text{коор-ти } \vec{e} \text{ описаны в } \{e_i\} \cup \{e_n\}.$$

Коор-ти кватерниона в заданных базисах наз-ют параметрами Родрига - Раменского.
(заданный = важе, а при кватернионе поворачивает)

Уравнение Гиацинда в кватернионах



$L(t)$ - поворот \Leftrightarrow орт. X

$$L(t+\Delta t) = \begin{cases} L_x(\Delta t) \circ L(t) \\ L(t) \circ L_z(\Delta t) \end{cases}$$

$$L_x(\Delta t) = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \vec{\omega}_x \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 1 + \vec{\omega}_x \frac{\Delta \varphi}{2} - \text{кб. малого поворота}$$

$$\omega = \{\vec{x}, \vec{z}\}$$

$$\dot{L} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \vec{\omega}_x \circ L = \frac{1}{2} L \circ \vec{\omega}_x$$

Ур-е Гиацинда имені раздельності \dot{L} , инвариант, берілгенде очындырылады. Оның орнам. пеш-2 мес.

Оны изложимо: а) наим $L(t)$ по $\vec{\omega}_x(t)$ и $L(0)$ б) наим $\vec{\omega}_x$ по $L(t)$

$$\vec{\omega}_x = 2\vec{i} \cdot \tilde{\vec{r}}, \quad \vec{\omega}_y = 2\tilde{\vec{r}} \cdot \vec{i}$$

Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами твердого тела, т.к. $\vec{1}$ и $-\vec{1}$ дают один и тот же поворот.

$$\|\vec{1}\| = 1 \Leftrightarrow \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad - S^3 \subset \mathbb{R}^4 \text{ - сфера}$$



один и тот же поворот

Основные понятия и законов динамики

1° Объем континуума (часть из общей массы с раб. состоянием \vec{p})



2° Центральная масса $\vec{I} = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dm = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{m_i = \text{const}} f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \Delta m_i$
Масса - это massa!

$$m = \int dm - \text{масса}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm - \text{центр масс}$$

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm - \text{импульс}$$

$$\vec{I} = \int f dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt} \int \vec{r} dm \Rightarrow \vec{p} = m \vec{V}_c$$

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm - \text{кин. энергия}$$

$$\vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm - \text{внешн. импульс}$$

Перенос и навесн. массы

$$\vec{K}_{o'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_o + \vec{r}_o - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{K}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{R}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{p} \times \vec{o'o} \quad \vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{o'o} \quad - \text{qp-им. аналогичны} \\ (\text{без об-ва подразумевают } \vec{K}_o)$$

Teorema Kérmána



$$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_r = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

$$T = \frac{1}{2} \int (V_c^2 + 2 \vec{V}_c \cdot \vec{V}_r + V_r^2) dm$$

$$\int \vec{V}_r dm = \frac{d}{dt} \int \vec{p} dm = m \dot{\vec{p}}_c = 0 \quad (т.к. \vec{p}_c = 0)$$

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int V_r^2 dm$$

Закони визначення грав. центру

$m \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{F}}$ - акселерація маси



$$dm \Rightarrow d\vec{F} = \vec{f} dm, \quad \vec{f} - \text{моменти сили}$$

$$\vec{f} = \vec{f}^e + \vec{f}^i$$

бескоштовне
внутрішнє

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$



$$\dot{\vec{P}} = \int \dot{\vec{V}} dm = \int (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = \int \vec{f}^e dm = -d\vec{F}_i dm,$$

$$= \vec{R}^e$$

$$\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e, \quad \vec{R}^e - \text{задовільний вектор биномії сили}$$

$$\dot{\vec{P}} = m \ddot{\vec{V}}_c \Rightarrow m \dot{\vec{V}}_c = \vec{R}^e$$

- $m \ddot{\vec{r}}_c = \vec{R}^e$ - теорема про збіженість центра мас

$$\dot{\vec{K}}_o = \frac{\int (\vec{V} - \vec{V}_o) \times \vec{V} dm}{m \vec{V}_o \times \vec{V}_c} + \frac{\int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm}{\vec{M}_o^e}$$

- $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^e - m \vec{V}_o \times \vec{V}_c$ - теорема про зменшення кінетическої енергії

$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm \Rightarrow \dot{T} = \int \vec{V} \cdot \dot{\vec{V}} dm = \int \vec{V} \cdot (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = N^e + N^i$$

- $\dot{T} = N^e + N^i$

Додаткові теореми гармонічного в руху

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{W}} = \ddot{\vec{W}}^r + \ddot{\vec{W}}^e + \ddot{\vec{W}}^c = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$

$$\ddot{\vec{W}}^r = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^e}_{\vec{j}^e} - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^c}_{\vec{j}^c} \quad \vec{j}^e, \vec{j}^c - \text{моменти непорівності та кутомісивних сил}$$



$$\vec{j}^e = -\vec{W}_o - \vec{\epsilon} \times \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g})$$

$$\vec{j}^c = -2\vec{\omega} \times \vec{V}^r$$

- $\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{ex} + \vec{R}^e + \vec{R}^c$

- $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^{ex} + \vec{M}_o^e + \vec{M}_o^c - m \vec{V}_o^r \times \vec{V}_c^r$

- $\dot{T} = N^{ex} + N^e + N^i$

$$\vec{j}^c = -2\vec{\omega} \times \vec{V}^r \quad n = \vec{V}^r \cdot \vec{j}^c = 0 \quad \text{- моменти кутомісивних сил}$$



\vec{g}

Замечание

При решении задач не всегда удобно
использовать гравитацию в форме приведенное и
иметь гибкую систему координат.



$$\vec{R}^e = - \int \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{g}) dm = - m \vec{\omega} \times (\vec{r}_c \times \vec{g}_c)$$



$$\vec{M}_o^e \neq \frac{1}{2} \vec{R}^e l_{\text{rod}}$$

Но это не всегда удобно, а не упрощает \vec{R}^e в конечном итоге.

Одномерные системы, движущиеся на плоскости



$$\vec{M}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{f} dm \quad (\text{здесь } \vec{f}^i \text{ и } \vec{f}^e)$$

$$\vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{O}'O \times \vec{R}, \quad \vec{R} = \int \vec{f} dm$$

$$\begin{cases} \vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{R} \times \vec{O}' \\ \vec{V}_o = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{O}' \end{cases} \quad - \text{стационарные и неподвижные}$$

Несколько моделей центра масс, примененных к движению Тела, obtained в зависимости от того какого центра мы хотим выбрать.



Если $\vec{M}_o = 0$, то это означает что движение является одномерным.

Квазидинамические системы

$$d\vec{r} \not\perp \vec{F} \quad \delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} - движение под действием$$

$$N \approx \vec{F} \cdot \vec{V}$$

① Если $N = \vec{F} \cdot \vec{V} \leq 0$, то \vec{F} - движущийся. Если $N > 0 \quad \forall \vec{V} \neq 0$, то \vec{F} - стационарный.

Пример: $\vec{F} = -\beta \vec{V}$

② Есле $N = 0$, то F - гиростатический

Пример: $\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$, $\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}$

③ F наз.-а потенциальным, есле $\exists \Pi(\vec{r}, t)$: $\vec{F} = -\nabla \Pi$

Критерий потенциальности

$\vec{F}(\vec{r}, t)$ - потенциальная $\Leftrightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} \Big|_{t=\text{const}} = 0$

D-бз

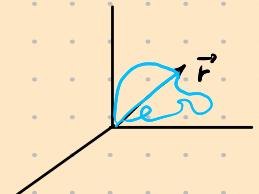
Есле $\vec{F} = -\nabla \Pi$, $\Rightarrow \oint \nabla \Pi d\vec{r} = 0$

Есле $\oint = 0$, $\Rightarrow A(r, t) = \int_0^r \vec{F} d\vec{r}$

$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \epsilon \vec{e}_i$, $t \in [0, \Delta h]$
Логарифмически

$\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\dots, r_0 + \epsilon, \dots) d\epsilon \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\underset{\text{послед}}{\approx}} F_i(\dots, r_0 + \theta, \dots) \Delta h$

$F_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \Pi = -A$ $\nabla \Pi$



Есле $F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$ (1)

В \mathbb{R}^3 условие (1) $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

Однако гамма диктует иное, оно входит в левую часть.

Есле $\vec{F} = -\nabla \Pi(\vec{r})$ (потенциал сингулярный), то

$dT = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla \Pi d\vec{r} = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$

Движение Торн в центральном поле



$$\vec{K}_0 = \text{const} \quad (\vec{M}_0 = \vec{0})$$

$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{const} \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{V}$ бетта сенди б. оғын мөнкеси

$$\begin{cases} m(r - r\dot{\varphi}^2) = F = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{r} & -\text{закон Ньютона} \\ \frac{1}{r} (r^2 \dot{\varphi}^2) = 0 & \text{уравнение орбиты} \end{cases}$$



$$r^2 \dot{\varphi}^2 = \text{const}$$



$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const} - \text{diskopasalas ekspresis}$$

Biçerin žeron Kenepa

Tensor инерции т. реа и его свойства



$$\vec{K}_o = \int \vec{p} \times \vec{v} dm = \int \vec{p} \times (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \int \underbrace{\vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p})}_{-\hat{p}\hat{\omega}} dm + m \vec{p}_c \times \vec{v}_o \quad (1)$$

$\hat{p}^T \hat{p} dm \vec{j}$

J_o - tensor инерции звёздного тела в т. О



$$p^2 = (\vec{p} \times \vec{e}) \cdot (\vec{p} \times \vec{e}) = (\hat{p} \times \vec{e})^T \hat{p} \vec{e} = \vec{e}^T \hat{p}^T \hat{p} \vec{e}$$

$j(\vec{p}) = \hat{p}^T \hat{p}$ - tensor квадратичных расстояний

$$p^2 = \vec{e}^T j(\vec{p}) \vec{e}$$

$$\vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) = p^2 \vec{\omega} - \langle \vec{p} \cdot \vec{\omega} \rangle \vec{p} = (p^2 E - \vec{p} \hat{p}^T) \vec{\omega}$$

$$\hat{p}^T \hat{p} = p^2 E - p p^T$$

$$J_o = \int (p^2 E - p p^T) dm \Rightarrow J_o = \begin{pmatrix} \int (p_1^2 + p_3^2) dm & -\int p_1 p_2 dm & -\int p_1 p_3 dm \\ -\int p_2 p_1 dm & \int (p_2^2 + p_3^2) dm & -\int p_2 p_3 dm \\ -\int p_3 p_1 dm & -\int p_3 p_2 dm & \int (p_1^2 + p_2^2) dm \end{pmatrix}$$

$J_{o,ii}$ - осевые моменты инерции

$J_{o,i+j}$ - кинет. момент инерции

Момент инерции относ. оси



$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \underset{\vec{\omega} = \omega \vec{e}}{=} \frac{\omega^2}{2} \vec{e}^T J_o \vec{e}$$

$$J_e = \vec{e}^T J_o \vec{e}$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_o \vec{\omega} = \frac{J_e \omega^2}{2}$$

J_e - момент инерции относ. оси

Балансировка гибкого тела

$$\vec{K}_o = \underbrace{\vec{K}_c}_{(1) \Rightarrow \vec{J}_c \vec{\omega}} + \vec{CO} \times \underbrace{\vec{P}}_{m \vec{V}_c} = \vec{J}_c \vec{\omega} + \vec{CO} \times m \vec{V}_c$$

O - вращение (норм. для реа)

$$T = m \frac{\vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \Rightarrow T = \frac{m \vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{J}_c \vec{\omega}$$

Чисівка J_0 при репозиції в новій осі



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

$$J_0 = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm + \hat{a}^\top \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a} = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a} + m \hat{\rho}' \cdot \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

$$\Rightarrow J_0 = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

Рекуррентна формула Фокінса - Міннера

$$\Rightarrow J_{0e} = \vec{e}^\top J_e \vec{e} + m \vec{e}^\top j(\vec{a}) \vec{e} = J_{ce} + m p_i^2$$

Побудовімо це.

$$\begin{aligned} & \text{Для } e' \quad J_{0e} = \rho_e^2 F - \vec{\rho}_e \vec{\rho}_e^\top \quad \vec{\rho}_e = \rho_{e'} \quad \text{т.е. } S \in SO(3) \\ & \text{Для } e \quad \vec{\rho}_e = S^\top \vec{\rho}_{e'} \Rightarrow \vec{\rho}_0 = S \vec{\rho}_{e'} \\ & J_{0e} = \vec{\rho}_{e'}^\top - S \vec{\rho}_{e'} \cdot \vec{\rho}_{e'}^\top S^\top = S (\rho_{e'}^2 F - \rho_{e'} \cdot \rho_{e'}^\top) S^\top \end{aligned}$$

Таким образом,

$J_{0e} = S^\top J_{0e} S$ - с т.зр. ум. андро J_0 преобразуется в кватерніонне дроби
 \Rightarrow - правильності закону преобразування тензора

У нас маємо зберігши $\exists S$:

$$S^\top J_0 S = \text{diag}[A, B, C], \quad A, B, C > 0$$

Квадратичні умови на най-більшій осі $B > 0$. Если $O \in C$, то ось най-більшій узгіднені

A, B, C - масові (масові узгіднення) моменти інерції

Експоненція інерції

$$\text{Ось один } \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{J_e}} \vec{e} \quad \vec{r}^\top J_0 \vec{r} = \frac{1}{J_e} J_e = 1$$

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^\top J_0 \vec{r} - 1 = 0$$

В масовій осі: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$, x, y, z -координати \vec{r}



Формула в умові побудови конформної

Неконформне мабнин оең күрөштүрүш

1^о Однорийн аягын - нет гендермекендең симметрияны



$$\text{Б. н. о.н.: } J_0 \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$

$$\lambda_i = \{A, B, C\}, \vec{x}_i - \text{оңын дегене}$$

Дир неконформне мабнин оең нымын ресми тарбагы
наң-да жөнди. зерт:

$$(J_0 - \lambda E) h = 0$$

$$\det(\lambda E - J_0) = 0 \Rightarrow \lambda_i \rightarrow \{A, B, C\}$$

$$\lambda_i \rightarrow h_i - \text{жөнди. бекінді} \xrightarrow{\vec{x}_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}} \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$$

2^о Ненесозабарне симметрияны



ξ_3 - Ота гендер. симметрияны \Rightarrow н. о.н.

$$J_{i_3} = - \int \xi_i \xi_3 dm$$

$$\forall \xi_i \rightarrow \exists - \xi_i \Rightarrow J_{i_3} = 0 \quad \forall i + 3$$

3^о Нернек. масаңын симметрияны



$$J_{i_3} = - \int \xi_i \xi_3 dm = 0$$

Проделанній виг T u K_o

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{J}_c \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) ; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_o = \mathbf{J}_c \vec{\omega} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c$$

Определение гибкости тела с неограниченной формой



Задача определяется с омегой $\vec{\omega}$

$\vec{\omega}(0)$. Наименее гибкое положение

Если O - неогр. т., то

$$\vec{K} = \int \vec{g} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) dm = \int \vec{\omega} , \quad \vec{k}_0 = \vec{K}, \quad J_0 = J$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{g})^2 dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{J} \vec{\omega} ,$$

Данные выражения применимы приближенно для тел близких к цилиндрическим т. д.

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} A_p \\ B_q \\ C_r \end{bmatrix}, \quad \vec{J} = \text{diag}[A, B, C]$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2} (A_p^2 + B_q^2 + C_r^2)$$

Динамическое уравнение Эйнштейна

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M} \Rightarrow B \text{ называется инерциальной осью:}$$

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Положение: $\vec{K} = K_i \vec{\xi}_i$

$$\dot{\vec{K}} = \underbrace{\frac{d\vec{K}}{dt}}_{\vec{d}\vec{K}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{K}}_{\vec{\omega} \times \vec{K}} \quad \dot{\vec{\xi}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_i$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = M_1 \\ B\dot{q} + (A-C)rp = M_2 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = M_3 \end{cases}$$

- Система уравнений движения тела (1)

$\vec{M}_s = \vec{M}_s(\vec{\Theta}, \vec{\omega})$, где $\vec{\Theta}$ - радиальный вектор определения (аналогично $\vec{F} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$)

$\vec{\Theta}$ - единичный вектор $SO(3)$, кватернион, имеет конформное представление, ...

В одних и тех же координатах (1) и (2) независимы.

Две эти зависимости могут быть заданы уравнениями для радиального определения:

$\vec{\Theta} = f_0(\vec{\theta}, \vec{\omega})$ (3)-күнеш үр-ж в көз-жан бүгі (үр-ж Ридонд, көзменең)
үр-ж динамика, ...)

- Көз мене $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ - заманыңас в мөнде жағынан тұрақтырулады.

(заманыңас зертте ≈ жалғыз көз-ж үр-ж көз-ж негенен)

- Көз мене $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ не тұрақтырыледі в квадратика, в жаңа глобуме тб. Тебе с
көздей. Төмөн в оғындында наше көзмене не тұрақт. в квадратика.



Сүйз-ет 3 сурал шарып-сан зерттегін зерттей Ашар. жа-ни -
ауран динамика, Лагранжа и Ковалевская.

① Сүйз-ет динамика



② Сүйз-ет Лагранжа

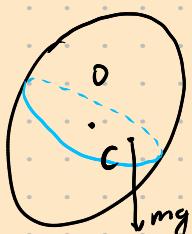


Көзмене жиғаш. инерция:

$$A = B \neq C$$

$$u \cdot u = \epsilon \xi_3$$

③ Сүйз-ет Ковалевской



- жиғашынан
инерция

$$A = B = C$$

T. С көзмен на экваториальной плоскости инерция
инерция.

Гравитацияның инерциясы сүйз-ет көзменең инерция.

А инерцияның барынан көздең инерциялық жиғаш. жағе.

Егер бүгін ауран, инерцияның при опреj. жағ. жа-ни.

Лекция № 1

1) Тривое уравнение кин. явл-я вибрации

$$\begin{cases} A\ddot{p} + (C - B)\dot{q}\dot{r} = 0 & A \geq B \geq C, \quad A > C \\ B\ddot{q} + (A - C)\dot{p}\dot{r} = 0 & (A = B = C - \text{имп. колебание: } \vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \text{const}) \\ C\ddot{r} + (B - A)\dot{p}\dot{q} = 0 & \text{если } \vec{\omega} \text{ и } \vec{\xi} - \text{const, то и } \vec{x} \text{ const,} \\ & \text{тогда } \vec{\xi} - \text{нест., } \vec{x} - \text{линейн. диспл.} \end{cases} \quad (4)$$

Упрощенное уравнение кин. (4):

$$A\ddot{p}^2 + B\ddot{q}^2 + C\ddot{r}^2 = 2T = \text{const} \quad (5)$$

$$\vec{K}_x = \text{const} \Rightarrow K_3^2 = \text{const} \Leftrightarrow A^2\ddot{p}^2 + B^2\ddot{q}^2 + C^2\ddot{r}^2 = \text{const} \quad (6)$$

Вопр-я (5) и (6) - нелинейные упрощенные кин-кин. (4)

- Задача: если $\dot{x} = F(x, t)$ - кин. явл-я, то $G(t, x)$ - нелинейное упрощение \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow G(t, \underbrace{x(x_0, t_0, t)}_{\text{Реш-е з. задачи}}) = \text{const} = G_0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Критерий н.к.и.

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + F_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{правильное в кин. смысла.}$$

$$2A\ddot{p}\dot{p} + 2B\ddot{q}\dot{q} + 2C\ddot{r}\dot{r} = 2(B-C)\dot{p}\dot{q}\dot{r} + 2(C-A)\dot{p}\dot{q}\dot{r} + 2(A-B)\dot{p}\dot{q}\dot{r} = 0$$

Если $A > C$, из (5) и (6) \Rightarrow

$$\begin{aligned} p &= \pm \sqrt{a - Bq^2} \quad (7) \quad a, b, c, d - \text{какие - то const} \\ r &= \pm \sqrt{c - dq^2} \end{aligned}$$

Подставим в 2-e ур-е (4):

$$B\ddot{q} \pm (A - C)\sqrt{a - Bq^2} \sqrt{c - dq^2} = 0$$

$$\pm \int \frac{dq}{\sqrt{a - Bq^2} \cdot \sqrt{c - dq^2}} = \frac{C - A}{B} t + \text{const} \Rightarrow q(t) \quad (8) - \text{затухающие колебания} \\ (\text{бесконечный ряд из квадратич. оп-ий})$$

Найдем (8) и (7), находим $p(t)$, $r(t)$.



Въгълът между двете x оси, когато $\vec{K} \parallel \vec{x}_3$ и една

директива ψ, θ, φ .

$$\vec{K}_3 = \begin{bmatrix} A p(t) \\ B q(t) \\ C r(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$K = |\vec{K}_3| = \text{const} \quad \dot{\varphi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (\text{из кинемат.})$$

↓

$$\cos \theta(t) = \frac{C r(t)}{K}$$

$$\tan \psi(t) = \frac{A p(t)}{B q(t)}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f_\varphi(t) dt$$

Геометрически интерпретации Мах-Курда

Резултант K в единици \vec{K}_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = \text{const} - \text{сърца} \\ \frac{K_1^2}{A} + \frac{K_2^2}{B} + \frac{K_3^2}{C} = 2T - \text{закон на Мах-Курда} \end{array} \right.$$

$$\vec{K}_3 = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

\vec{K}_3 приема различни траектории на пересечени сърца и гиперболи Мах-Курда.



$$K^2 = 2BT - \text{yp-e сепаратрис}$$

$$\left(1 - \frac{B}{A}\right) K_1^2 + \left(1 - \frac{B}{C}\right) K_3^2 = 0$$

λ^2

$-m^2$

$$(\lambda K_1 - m K_2)(\lambda K_1 + m K_2) > 0$$

A - канава даващо движение
еса по \vec{x}_1 - канава гравитация

Симул - сепаратриса,
зелено - кривите гравитации K_3



Задача Динамикова обработка негравитационни
(недавното гравит.) движение във вид на сепара-
тристични - парabolични (като у нас има
във вид на переброяване на орбитата) - и резултат
переходят чрез него

Недостаток на интерпретации: Трябва да се използва \vec{K} .

Интерпретация Резонанса

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^T J \vec{F} - 1 = 0 \quad - \text{закон сохранения энергии}$$

$$\vec{r} = \lambda \vec{\omega} \quad \lambda^2 \underbrace{\vec{\omega}^T J \vec{\omega}}_{2T} - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

$$\triangleright f = 2J\vec{r} \quad (\text{проверка независимости})$$

$$\triangleright f = \frac{2}{\sqrt{2T}} J \vec{\omega} \quad \frac{2\vec{K}}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

