

Ниже приведены: для me (Мурабиб, Фандахар, Амеликун, Маркеев - новые версии)

Равновесные механические системы



Система называется равновесной в физическом смысле тогда и только тогда, когда

$$\Leftrightarrow \nabla \vec{r} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 = \text{const}$$

Где \vec{r}_0 - это радиус-вектор центра масс системы

(уп-т. сила не зависит от времени) \Rightarrow Эквивалентно

Быть стационарным параметром, т.е. $\vec{r} = \vec{r}(q)$ имея $\dot{q} \rightarrow$ однознач. коор-т.



Чтобы система была равновесной, то есть чтобы радиус-вектор \vec{r} был

стационарным (координаты земной поверхности не изменялись)

$$(L_{,i})^i - L_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

\Updownarrow \Rightarrow разрешимо сист. линейных уравн.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = F(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = x(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Причины равновесия называются бз. однознач. корн. с корнями будут

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\square \Leftarrow Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = \text{const}$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0, \dot{q}^k \equiv 0$, однознач. корни \dot{q}^k будут так, что

$$\vec{r}_0 \cdot \delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q: \delta q^1 + \dots + \delta q^n \neq 0.$$

Таким образом (1) $\Rightarrow \dot{q} = 0$



Критерий наз. равновесия для диф. уравнений

Диф. уравн. наз. называются равновесными $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$.

$$\square (T_{ik})' - T_{ik} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$$T = \frac{1}{2} q_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$T_{ik} = a_{kj} \dot{q}^j$ — т.к. a_{ij} — симметрическая матрица!

$$(T_{ik})' = a_{kj} \ddot{q}^j + a_{kji} \cdot \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$T_{ik} = \frac{1}{2} a_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow a_{kj} \dot{q}^j + (a_{kji} - \frac{1}{2} a_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

Для нач. полож. $q = q_0, \dot{q} = 0 \Rightarrow$

$$0 = Q_k(q_0, \dot{q}_0, t)$$

(где q_0 — нач. полож., $\dot{q}_0 = 0$, т.к. (2) имеет решение $q = q_0, \dot{q} = 0$ — н.о. т. Комн. одно изу. в. в. в. еднозначно.)



Однако если имеется буг, не убирая т. Комн. ($Q(\dots)$ не убирая), то кинетич. & однозначное выражение не гарантировано для $\dot{q} > 1$ реч. (см. Маркевича).

Следствие

Если $Q = -\nabla \Pi(q, t)$, то нач. полож. состояния т. назыв. энерг. $\nabla \Pi(q, t) = 0$.

Пример:



т. G — центр масс (также скажем так бугер).

$$\Pi = mg h = mg (l \sin \varphi - a \cos \varphi)$$

$$\Pi_{,q}: l \cos \varphi - \frac{a}{\cos^2 \varphi} = 0$$

$$\cos \varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \quad - \text{н.о. полож.}$$

Теорема — принцип виртуальных перемещений

Нач. $\vec{r} = \vec{r}_0$ — нач. конф. — в. нач. полож. \Leftrightarrow \forall бир. перемеж.

$$\delta \vec{r} \text{ из } \exists \text{ нач. } \delta A = \int f \delta \vec{r} dm = 0$$

(из симметрии)

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_{ik} \delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec{F}_{ik} \cdot \vec{F} dm \cdot \delta q^k = Q_k \delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0 -$$

- кинетич. закон. побоб.



Занятие 1 (динамическое)

Видите, что тягово-重心 момент - это подобен и из динам. зак-я, в этом случае это - то же самое, но в группе на первом моменте.

$\Rightarrow \int (\vec{w} - \vec{F}) \delta \vec{r} dm = 0$ - акц. уп-е группе

$$\vec{w} = 0 \text{ в нач. побоб.} \Rightarrow \int \vec{F} \delta \vec{r} dm = 0 \quad \blacksquare$$

В отрасли машины - ин. Маркес.

Занятие 2 (динамическое)

Видим обобщенное выражение, что все тягово-重心 моменты равны

$\forall \delta \vec{r}$ в нач. побоб.

Пример

Численное побобенное выражение



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{R} + \delta \vec{g} = \delta \vec{R} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{g}, \delta \vec{\varphi} - в-р. момент побоб.$$

$$\delta A = \int \vec{F} dm \cdot \delta \vec{R} + \int \vec{F} \cdot (\delta \vec{\varphi} \times \vec{g}) dm =$$

$$= \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \delta \vec{\varphi} \cdot \underbrace{\int \vec{g} \times \vec{F} dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \vec{M}_0 \cdot \delta \vec{\varphi} = 0 \quad \forall \delta \vec{R}, \delta \vec{\varphi} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \text{ и } \vec{M}_0 = \vec{0}$$

\vec{F} - небольшое действие, \vec{M}_0 - небольшой момент,

(нужно демонстрировать, как)

Основы Теории Устойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Камминса:

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (3) \quad \text{Здесь и далее: } x(t) = x(x_0, t)$$

При $x = q = \text{const}$ на \rightarrow независимое производство нет - это (3).

Норм. производ. $x = a$ берется потому что если в ней $x = a$, то $\dot{x} = 0$:
 $x \rightarrow x - a$.

Далее будем считать, что $a = 0$ для определенности обозначения.

x можно рассматривать как отклонение от норм. производ.

Определение

При $x = x(t_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз. \rightarrow локально притягивающим бифурк., если для $\exists \forall t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2}$



Определение (устойчивость)

Норм. производ. $x=0$ из-за (3) наз. \rightarrow уст. н. линейн., если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{x^1 \cdot x^1}$$

Задачи

1. Уст. н. лин. \Rightarrow производная непрерывна по нач. ус.

2. Уст. н. лин. \Rightarrow при $x(t)$ локально притягивающим бифурк.

Определение (асимпт. ст.)

Поном. правилое. $x=0$ сис. (3) - асимптотически устойчиво, если

* 1. $x=0$ - ст. но динам.

2. $\exists \Delta: \forall x_0, \|x_0\| < \Delta \rightarrow x(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$

$U_\Delta(0)$ - обласі притяження.

Если задана нрс (1):



Определение (нест.)

Поном. правилое. $x=0$ не-уст. (3) нест., если $\exists \varepsilon: \forall \delta > 0 \exists x_0:$

$\|x_0\| < \delta \quad \exists t^*: \|x(t)\| > \varepsilon$, тобто пев. $x(x_0, t)$ не збігається з нрс. правило.

Картиныные представления

① Устойчивое



$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0$: правилое, належить б δ -окрестості, яка є близькою ε -окрестості

② Нестаб.



③ Асимпт.



Kooperativnost' novykh chislivikov

Esim n.p. (nachalnoe polnenie) $x=0$ yekvibratsiya gde bsp. t_0 , to ono yek. $\forall t_1 > t_0$.

$$\square \quad x = 0 - yek. \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0; \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$



$$G = x(u_s(0), t_0)$$

Розглянутий випадок: G - ум. функція

загалом x_0 нічим залежить від початкових умов, та.

$x(x_0, t)$ - будь-який експр. в непр. (i. korm) $\Rightarrow \rho(\delta G, 0) > 0$ (последнє означає $x=0$ як δG)

Введемо $\delta_1 = \rho$, $t_0 \mapsto t_1$, $\delta \mapsto \delta_1$ (занурюємо)



Умови стабільності функції

$$\dot{x} = X(x, t) \quad \psi - \text{закон руху (трасекторія)}$$

$$\dot{\psi} = X(\psi, t)$$

Розширення руху $x = \psi + y$ (y -відхилення від трасекторії)

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\psi}}_{X(\psi, t)} + \dot{y} = X(\psi + y, t) \Rightarrow \dot{y} = X(\psi + y, t) - X(\psi, t) \quad (1)$$

$y=0$ - n.p. вик. вид (1)

Припустимо, що $y=0$ - умови стабільності n.p., то тоді y має відхилення від нуля.

Если $\forall t$ відхилення y від нуля, то вик. вид (1) вик. відхилення від нуля.



Все трасекторії, окрім, на δ від ψ , б. вик. вид, отже $|y| < \varepsilon$ від ψ .

Если $y=0$ - нест., \Rightarrow тоді нест., $y=0$ - дестабіл. вид. \Rightarrow тоді дестабіл. вид.

Задачи

Численные геометрические задачи возникающие
при движении в реальном времени.

Пример

Рас-ши-рение с конечной амплитудой



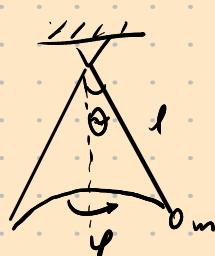
- патологич. (т.к. амплитуда
период \Rightarrow нечетный период).

Графиком, кроме функции $\kappa \neq 0$, не будет.

0 Быть непрерывных & загорах \Rightarrow уравнения

Переменные не должны иметь особенности в точках n.p.

Пример



$$\forall \theta_0 < 1 \exists \text{ нач. угла } \varphi = \varphi_0 t + \varphi_0 \rightarrow \infty$$

Н.п. на конечной величине, $\varphi \rightarrow \infty$ - неизвестное
с.к.

Пример

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \quad x = x_0 + \frac{t}{2}$$

$$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \text{Непр. выс.}$$

$$\text{Задана } y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + \frac{t}{2})^2$$

$$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + \frac{t}{2})^2 = (x_0 + \frac{t}{2})^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \rightarrow \infty$$



Дополнение (A3П)

Задана $x = x(y, t)$, $x(0, t) = 0$ наз-ся **дополнением**, или

1. $\det(X_{y,y}) \neq 0$ в нек-хнх оп-хнх наим. публиках (исходн. группу разрешаются)
2. Задана $x = x(y, t)$ и одновременно $y = y(x, t)$ непрерывна в 0 публикации по t . (разные из 2 групп)

Дополнение заданы не изменят хар-ва устойчивости.

Устойчивость линейных систем

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $A(t)$ бесконечн. разбог. непрерывна

$\exists \gamma(t)$ - непрерывн., $x = \gamma + y$ - базисное реш-во,

$$\dot{\gamma} + \dot{y} = Ay + A\gamma + f \Rightarrow$$

\Rightarrow нек-е ус. непр. накл. трансформ. базиса \Leftrightarrow нек-во ус. н.п. $y = 0$

однородн. сист-ма $\dot{y} = Ay$. (2)

Теорема

Н.п. $y=0$ - ус. $\Leftrightarrow \forall$ нек-х н.п. сист-м (2) однородн.

$\square \quad \Rightarrow$ \exists γ - непр. п.н., так-что $y = \frac{\delta}{2} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$
 $\|y(t_0)\| < \delta$, $|y(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow y=0$ - н.п.

\Leftarrow Ещё \forall п.н. оп. \Rightarrow оп. $\Phi(t, t_0)$ - опр. однородн. сист-м,

\forall п.н. (2) нек-ое $y = \Phi(t, t_0)y(t_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$$

□

Замечание: норма матрицы: $\|\Phi\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$ - "нормальное значение"

С обычной нормой норма матрицы - max суммы строк
 нек-го матрицы (одн. нек-го матрицы $\Phi \Phi^T$)

Устойчивость решения с несогласованной матрицей

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \text{const} \quad (3)$$

Следовательно уравнение имеет решение вида $y(t) = e^{At}y_0$. Для $y(t) \rightarrow 0$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения A имели отрицательные реальные части.

Многие физические процессы, связанные с теплообменом, стационарны и устойчивы.

Однако это не всегда так.

Рассмотрим (3): $y = h e^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda t - A) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни

Лемма

Пусть $P(\lambda) = 0$ имеет (3) действительные корни. Тогда $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

□ $y(t) \sim P_{\alpha_{k+1}}(t) e^{\lambda_{k+1} t}$ Если $\exists \lambda_k: \operatorname{Re} \lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$ неустойчивое.

Если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \Rightarrow$ для каждого k имеется $\alpha_k > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k - \alpha_k < 0$.

$|y(t)| \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow$ н.п. $y=0$ — аттрактор.

□

(α_k — коэффициенты корней λ_k)

Продолжение

Если $P(\lambda) = 0$ имеет действительные корни λ_k , такие что $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

(действительные собственные значения A наименее n -го порядка)

Лемма (наиб. уст. крит. реш.)

Если $P(\lambda) = 0$, то знаки его корней определяются следующим образом.

□ $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_j > 0 \quad \bar{\lambda}_j$ — комплексное сопряженное

$\lambda_n = -\gamma_n, \quad \gamma_n > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod [(1 + \alpha_j - i\beta_j)(1 + \alpha_j + i\beta_j)]^{\alpha_j} \prod (1 + \gamma_n)^{\alpha_n} = \\ = a_n \prod (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\alpha_j} \prod (\lambda + \gamma_n)^{\alpha_n}$$

Последние члены дают корни с положительными реальными частями.

□

Задернел

Иногда это ум. доказательство в бухг.: $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$. Это подразумевает пред. утверждение именем $\alpha_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$.

Критерий ус. пас-ма для дес. пол-а (ав. Мурабиба ии Денизбекова)

Критерий Раяса - Гурвица

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

Симметрическая матрица Гурвица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & & a_n \end{pmatrix}^{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n}$$

По диагонали каск-ри a_1, a_2, \dots
себя каск-ри по бокам, симметрическое условие.

$$P_\lambda - \text{ус.} \Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

! Есть реальное значение замен Γ !

Задернел ож. $a_0 > 0$

Пример

$$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0. \quad \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1} \Rightarrow \text{наимен. ус.} \Leftrightarrow \text{sign } a_0 = \text{sign } a_1$$

$$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0 - ?? \quad \text{правое ус. ??}$$

"Народное" значение от zero, т.к. $P(\lambda)$ не приведен к виду $a_0 > 0$.

Приведение к виду $a_0 > 0$:

$$P(\lambda) \rightarrow \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1, \quad 1 \text{ забегает } \Rightarrow$$

(если $a_0 = 0$ то $P(\lambda)$ пропущено независимо от него $\lambda = 0$)

$$\Gamma = \left(\frac{a_1}{a_0} \right) - \text{теперь всё верно.}$$

Второе критерий - Минара

$$P(\lambda) - \text{ус.} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array} \right] \quad (\text{недо/недо})$$

Пример

$$P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

1. $a_2 > 0, \quad a_1 > 0$

$$2. \quad P = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) - \text{pos.} \Leftrightarrow a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$$

Устойчивое линейное уравнение

Первое линейное уравнение \Leftrightarrow уст-ся по линейному приближению

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

X -линейн. зависим. ф. $x=0$, а X_{ijk}^i - в уп-и ф. лин-ой оп-ии н.п. $x=0$ (1)

Тогда:

$$X = Ax + f(x), \quad A = [X_{ij}^i(0)] ; \quad \|f(x)\| \leq a \|x\|^2, \quad a = \text{const}$$

Линейное приближение: $\dot{x} = Ax$

Теорема Ляпунова - "запас стабильности"

1. Рассмотрим лин. ур-е $\dot{x} = X(x)$ лин. уст. (1), тогда для н.п. линейного приближения $\dot{x} = Ax$ - ас. уст. \Rightarrow н.п. $x=0$ ас-ни $\dot{x} = X(x)$ - ас. уст.

2. Есть $\exists \lambda_i$ - корень $\det(\lambda E - A) = 0 : \operatorname{Re} \lambda_i > 0 \Rightarrow$ н.п. $x=0$ неуст. в одних направлениях.

Lemma Frobenius

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(t) f(t) dt, \quad u, f, C > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u(t) \leq C \exp \left[\int_0^t f(t) dt \right]$$

$\square \frac{u(t) f(t)}{C + \int_0^t u(t) f(t) dt} \leq f(t)$ - unbeschränkt: (unr. = unreg. gema.)

$$\ln \left[C + \int_0^t u(t) f(t) dt \right] - \ln C \leq \int_0^t f(t) dt$$

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(t) f(t) dt \leq C \exp \left[\int_0^t f(t) dt \right]$$

\square (1. Weynabe): $x = e^{-ht} y(t), \quad z_h = \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|$ - dann

$$e^{-ht} \dot{y} - h e^{-ht} y = A y e^{-ht} + f(y e^{-ht})$$

$$\dot{y} = \underbrace{(A + hE)}_B y + e^{ht} f(y e^{-ht}) \quad (2)$$

$$\dot{y} = B y - \text{ac. ges.}$$

$$\dot{x} = Ax - \text{ac. ges.} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

$$\dot{x} = (A + hE)x \Rightarrow \tilde{\lambda}_i = \lambda_i + h \Rightarrow \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_i < 0 \quad \left(h = \frac{\min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|}{2} \right)$$

$$(2) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{(Bt-t)} e^{ht} f[y(t) e^{-ht}] dt$$

$$(\text{uz. grundsatz: } \dot{y} = By + f(t) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-t)} f(t) dt)$$

Rekurrenz gruppierungsweise

$$\|y(t)\| \leq \|e^{Bt}\| \cdot \|y_0\| + \int_0^t \|e^{(Bt-t)}\| \cdot e^{ht} \|f(y e^{-ht})\| dt$$

$$\|f(x)\| \leq \alpha \|x\|^2 \Rightarrow \|f(y e^{-ht})\| \leq \alpha \|e^{-2ht}\| \cdot \|y\|^2$$

$$\|y(t)\| \leq M \|y_0\| + \int_0^t M \alpha e^{-ht} \|y(t)\|^2 dt$$

Esse $\|y_0\| \ll 1$, so $\exists t: \forall t \in [0, t] \rightarrow \|y(t)\| \leq 1$ (für alle $t \geq t$)

Also $\|y(t)\| \leq \|y(t)\| \quad \forall t \in [0, t] \Rightarrow$ nur ziem unlesbar!

$\|y(t)\| \leq M \|y_0\| + \int_0^t M \alpha e^{-ht} \|y(t)\| dt$ - für zuerst lange verne Frobenius

Also $\|y(t)\| \leq M \|y_0\| \exp \left[\int_0^t M \alpha e^{-ht} dt \right] \leq K \|y_0\| \Rightarrow$

ist unlesbar ex-cc, i.e.
pellen const vor $t \rightarrow \infty$, i.e.
nur ein konst. dopp. const

→ eigentlich unlesbar
aber kein

$\Rightarrow y(t)$ - ортогональна. Данное означает что в окрестности $|y(t)|$ симметрия, и вблизи $\forall t \in [0; \infty)$ (окрестность точки, неподалеку, гипотеза оценки, это то же самое) $x = e^{-kt} \underbrace{y(t)}_{\text{орт.}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow$ н.п. $x = 0$ - ас. уст.

Также неподалеку аналогично.

Задача Т. линейная неподалеку, есть $\exists \lambda_j = \pm i\omega$ или $\lambda_j = 0$

неподалеку
треугольник симметрический или

Также неподалеку. Треугольник симметрический склон узким краем навстречу зевом.

Возможные виды линий

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0.$$

Возможные виды линий: $V(x)$, $V(0) = 0$, $V(x) \in \mathbb{R}$ - непр.гладк.

Прямоугольник в окрестности нулевой точки линии: $\dot{V}_x = V_{,i} \cdot X^i = \nabla V \cdot X$

Знакосочетательный вид линии: $V(x) > 0$ - максимум, ортогр. $\Leftrightarrow V(x) > 0$ в окрестности 0 .

Или $U_\epsilon(0)$. (в окрестности нулевой точки, где ортогональны касательные).

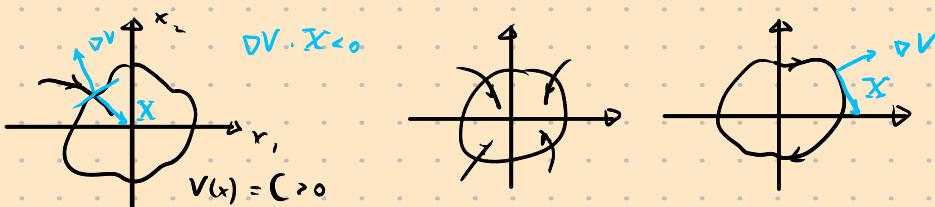
Как видят виды линий в окрестности нулевого решения.

Например: есть в окрестности 0 $\exists V(x)$: $V(x) > 0$ и $\dot{V}_x \leq 0$ (в окрестности нулевого решения) \Rightarrow н.п. $x=0$ - устойчивый.

мин на $\partial U_\epsilon(0)$

\square Рассмотрим $U_\epsilon(0)$. $V(x)$ -непр. $\Rightarrow \exists V^* = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x)$, $V(0) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists \delta > 0: V(x) < V^*$ при $\|x\| < \delta$

Таким образом при x_0 : $\|x_0\| < \delta \quad V[x(x_0, t)] < V^*$, т.к. $V[x(x_0, t)]$ - не возрастает (бесконечно малое значение $V(x)$ подле нуля, подле узла), т.к. $\dot{V}_x(x) \leq 0 \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \epsilon$



Следствие. Т. Лагранжа - Дарси

Если $\Pi(q)$ квадр. мес. ф-ия имеет строгий мин в н.п., то н.п. устойчиво

$$\square V = E = T + \Pi = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} + \Pi(q) \geq 0 \quad (\Pi(0) = 0)$$

$\geq 0 \quad \geq 0$

$$\dot{V}_2 = 0 \quad (\text{такж. в интегрированном уравнении Лагранжа}) \quad \blacksquare$$

Проверка условия $\Pi(q) \rightarrow \min$

$$\Pi \approx \Pi(0) + \Pi_{,i}(0) q^i + \frac{1}{2} \Pi_{,ij}(0) q^i q^j \quad \begin{array}{l} \text{--- линейная часть} \\ \text{--- квадратичная н.п.} \end{array}$$

- разложение $\Pi(q)$ по q

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q, \quad C - \text{матрица мат. энергии}$$

$$\text{Если } \Pi_2(q) > 0 \Rightarrow \Pi \text{ имеет кв. мин (и } U_e(0)).$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = C^T \quad \Pi_2(q) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta_i > 0 \\ i = 1, n \end{array} \right.$$

Замечание Т. Лагранжа - Дарси не является достаточным условием.

Пример



$$\Pi = \begin{cases} q^2 \sin \frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$

$$E = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \Pi(q)$$

$$\Delta \Big|_{E=0} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{n.п. есть, но устойчивость нет.}$$

Теорема Абрамова 1

Если $\exists q' : \Pi_2(q') < 0 \Rightarrow$ н. п. $q = 0$ неустойчиво.

\square Рассмотрим симметричный случай:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \cdot \dot{q} \approx \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{A(0)}_{A=\text{const}} q$$

$$\Pi = \Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q$$

$$\text{Ур-е Лагранжа: } A\ddot{q} + Cq = 0$$

Задача: $q \mapsto U\Theta$ (U -матрица, Θ - квадр)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T U^T A U \dot{\Theta}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \Theta^T U^T C U \Theta$$

T. Оптимальное решение: $\exists U: U^T A U = E$
 $U^T C U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\ddot{\Theta}_i + \lambda_i \Theta_i = 0 \quad - \text{рабочие ур-е Лагранжа}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ кол. для } \lambda_k < 0 \Rightarrow \Theta_k \sim e^{\sqrt{|\lambda_k|} t} \Rightarrow \text{но } \uparrow \text{. Капитала } \circ$$

Несовместимо с.н. $q=0$ - неуст.



Теорема Ляпунова 2

Если н.р.н.н. рабоч. пограничные решения $\Pi(q) = \Pi_m(q)$, ... устойчивы, то Π имеет max \Rightarrow н.р. $q=0$ - неуст.

Теорема Барбасина - Красовского (60-е!)

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0)=0 \quad (1)$$

Если $\exists U_\varepsilon(0) \exists V(x)$:

$$1. \dot{V}_x \leq 0$$

2. $M\{x \mid \dot{V}_x(x)=0\}$ - не содержит членов траекторий решения (1),

т.к. $\nabla_x \cdot X=0$, тогда

a. Если $V(x) > 0 \Rightarrow x=0$ - ас. гр.уст.

б. Если $V(x)$ не имеет min, б.к. неустойч. \Rightarrow н.р. $x=0$ - неуст.

□ доказательство по т. Ляпунова, н.р. $x=0$ - устойчив. Докажем ас. гр.

Пусть $x_0 = x(t_0) : \|x_0\| < \varepsilon$. Тогда

$V[x(x_0, t)]$ - монотонно \downarrow в оп. конф. \Rightarrow

$$\Rightarrow \exists V^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V[x(x_0, t)]$$

Если $V^* = 0 \Rightarrow x=0$ - ас. гр.

Domyzum spainibnei: pacem. nare-in $\{x(x_0, t_i)\}$ - esp.

(b alyg yessizibnei n.p. $x=0$) \Rightarrow no 1. Fozionas - Bessieruprasa.

\exists exogenas negn. $\{x_k\} = \{x(x_0, t_{ik})\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \quad V^* = V(x^*)$$

Pac-un pemenne (1) $x(x^*, t)$ c nor. ysu. $x(x^*, 0) = x^*$. Fozya, t.k.

$x^* \neq 0$ (i.e. $V^* \neq 0$, $aV^* = 0$ b. $x=0$) u $\dot{V}_x < 0$ na gennai sprekigym \Rightarrow

$\Rightarrow \exists t : V[x(x^*, t)] < V^*$ - protivberne.

Cayrae δ



$$G = \{x \mid V(x) < 0\}$$

Besdepen $x_0 \in U_{\epsilon}(0) \cap G$.

Domyzum, zso $x = x(x_0, t)$ - ysu. \Rightarrow

\Rightarrow nabzopre yessibnei neg. pacayng. negyruu, zso $\exists \{x_k\} = \{x(x_0, t_k)\} :$

$$V^* = \lim_{k \rightarrow \infty} V[x_k] = V(x^*)$$

Pac-un pem. $x(x^*, t)$ c nor. ysu. $x(0) = x^* \Rightarrow \exists t : V[x(x^*, t)] < V^* \Rightarrow$

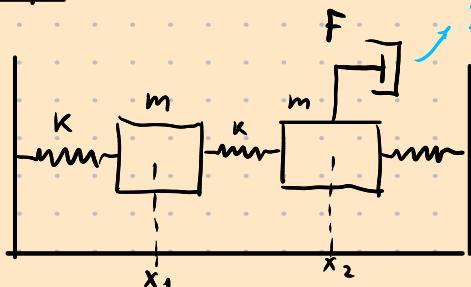
\Rightarrow protivberne.



Zauerzine

β alyrae δ bsm. ysu i u2 gecidornu sprekigym rausko b odasini G .

Пример



spec gennai sprekigym F

$$F = -\beta \dot{x}_2$$

Чынагын n.p. na ysu:

$$V = E > 0, \quad \dot{V}_2 = -\beta \dot{x}_2^2$$

$M\{\dot{x}_2 = 0\}$ - ne segerni uchuk sprekigym,

кесе n.p. (moyi in dais sprekigym, zge brossi yuzz eten, a neplini res?

ke momei) \Rightarrow no 1. F.-K. n.p. ac. ysu.

Следствия из теоремы Бардемана - Красовского

① Теорема Чепурова о) стационар. уст.

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

Если $\forall U_\varepsilon(0) \exists V(x) > 0 : \dot{V}_x < 0$ (т.е. $\dot{U}_\varepsilon(0)$), то $x=0$ - ас.уст.

□ $M\{x=0\}$ + Б.К. ■■■

② Теорема Чебаева

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

Если $\forall U_\varepsilon(0) \exists V(x) \in \mathbb{R}$ одн. $G\{x | V(x) < 0\}$, $\dot{V}_x < 0$ при $x \in G \Rightarrow$
 \Rightarrow н.п. $x=0$ - неуст.

□ $M\{x=0\}$ + Б.К. ■■■



③ Осторожность т. Арганова - Рубинштейна

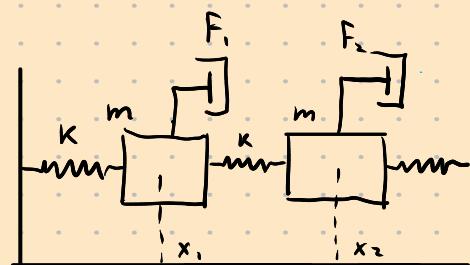
1. Если бал. уст. т. А.-Р. и генерирующие генерируют устойчив. или неуст. сим., то н.п. стабильна устойчивым.
2. Если бал. уст. т. А.-Р. и генерирующие генерируют неуст. сим. с разной амплитудой: $N = Q_i \dot{q}_i < 0$ (причем $\dot{q}_i = 0$), то н.п. стабильна ас.уст.

□ $M\{\dot{q}=0\}$ - паког. по условию - однозначно сим. с н.п. \Rightarrow
 \Rightarrow н.п. симметрии в M неуст. (причем $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) \Rightarrow Б.К. ■■■

Замечание



- застывшая неустойчивость
 $N = -\beta \dot{x}_2^2 \leq 0$
 (как сл. график от \dot{x}_1 и \dot{x}_2 ,
 она симм. неустойч.)



- движущая неустойчивость
 $N = -\beta \dot{x}_1^2 - \beta \dot{x}_2^2 < 0$ ($\forall \dot{x}_1, \dot{x}_2$
 кроме случая $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$)

Основы теории дискурса

