Решение линейного уравнения 2 порядка

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$, $x \in I$ все ф. непр., $a_0(x) \neq 0$

Предположим, мы угадали y_1 – решение однородного ур-я

Ищем в виде $e^{\alpha x}$, x^k, $ax+b$ и т.д.

Найдем ОРОУ:

y_1 – найдено

y – произв. реш-е однородного ур-я

Ф-ла Лиувилля – Остроградского: $W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = C\varphi(x)$

$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\varphi(x)$ $\quad \frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$

$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$

$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2} dx + C_1$

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

ОРНУ: вариация постоянной: $y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \frac{b(x)}{a_0} \end{cases}$$

$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$

$C_1'(x) = \dots \quad C_2'(x) = \dots$

Задача 1

$2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}$, $x > 0$

ЧРОУ: $y_1 = e^{-x}$

y – произв., y_1 – угаданное

$W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x} dx} = Ce^{-(2x + \frac{1}{2}\ln x)} = Ce^{-2x} x^{-1/2}$

$\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x} dx = 2x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} dx = 2x + \frac{1}{2}\ln x + C_1$

$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y'e^{-x} + ye^{-x}$

Делим на e^{-2x}:

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-1/2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' \qquad \frac{y}{e^{-x}} = C x^{1/2} + C_1$$

ОРОУ $\quad y = C_1 e^{-x} + C e^{-x}\sqrt{x}$

ОРНУ $\quad y = C_1(x) e^{-x} + C(x) e^{-x}\sqrt{x}$

$$+\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x}\sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x}\sqrt{x} + C_2'(x)\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad C_1'(x) = -1$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \qquad C_1(x) = -x + C_1$$

Ответ: $y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x}\sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}\sqrt{x} + x e^{-x}$

Задача 2

$$x^2(\ln x - 1) y'' - x y' + y = x(\ln x - 1)^2, \quad x > e$$

ЧРОУ: $\quad y_1 = x$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C(\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2} \qquad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C\,\frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

ОРНУ: $\quad y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)\,\frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \quad \big|\cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{cases} C_1'(x)\,x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x)\,x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$$C_2'(x) = -1 \qquad C_1'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$C_2(x) = -x + C_2 \qquad C_1(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1$$

Ответ: $y = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1\right) x + (C_2 - x)\ln x$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$$

Задача 3

$$(2x+3)\,y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}\,y = 3(2x+3)^2$$

Ищем ЧРОУ в виде x^k:

$$k(k-1)\cdot(2x+3)\,x^{k-2} - 2kx^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$$

$$(2x+3)\,k(k-1) - 2kx - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$k = 2 \implies y_1 = x^2$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{\int \frac{2}{2x+3}dx} = C(2x+3)$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \implies \frac{y}{y_1} = C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + C_1$$

ОРОУ $y = C_1 x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

ОРНУ: ВП: $y = C_1(x)\,x^2 + C_2(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x^2 + C_2'(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \quad \big|\cdot 2 \\ C_1'(x)\,2x - C_2'(x)\,\frac{1}{x^2} = 6x + 9 \quad \big|\cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 2C_1' x^2 + 2C_2'\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ 2C_1' x^2 - C_2'\,\frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$$3C_2'\,\frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$$

$$C_2' = -3x^2 \qquad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$$

$$C_2 = -x^3 + C_2 \qquad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$$

Ответ: $$y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$y = C_1x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2\ln x + 2x^3 - x^2$$

$$y = C_1x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2\ln x$$

Уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad \nu = const$$

Д-ть, что ур-е не может иметь $2^х$ лин. незав. реш-ий, огр. в окр-ти 0 вмес-те с производными.

□ Предположим y_1 и y_2 – 2 таких реш-я.

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0 \text{ т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ лин. незав.}$$

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{C}{x}$$

↳ огр. в окр-ти 0 ↳ явно неогр. ■

Приведение лин. ур-ий $2^{го}$ порядка к виду, не сод. y'

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

↓ – преобр-е Лиувилля (замена неизв. ф-ии)

$$z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt\right)$$

В ур-ии Бесселя: $y = zx^{-1/2}$

$$y' = z'x^{-1/2} - \frac{1}{2}zx^{-3/2}$$

$$y'' = z''x^{-1/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} + \frac{3}{4}zx^{-5/2}$$

Получаем $$z''x^{3/2} - \cancel{z'x^{1/2}} + \frac{3}{4}zx^{-1/2} + \cancel{z'x^{1/2}} - \frac{1}{2}zx^{-1/2} + (x^2 - \nu^2)zx^{-1/2} = 0$$

$$z''x^{3/2} + \frac{1}{4}zx^{-1/2} + zx^{3/2} - \nu^2zx^{-1/2} = 0 \quad \Big| : x^{3/2}$$

$$z'' + \frac{1}{4}x^{-2} + z - \nu^2zx^{-2} = 0$$

$$z'' + z\left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) = 0$$

При $\nu = \pm\frac{1}{2}$ это простое ур-е $z'' + z = 0 \Rightarrow z = C_1\cos x + C_2\sin x$

При ост. ν реш-я не яв-ся элем. ф-ями.

Задача Коши для лин. ур-я n-го порядка

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

$x_0 \in I$

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Реш-е з. Коши $\exists!$ на <u>всём</u> промежутке I

В отл. от т. об общем ур-ии, где оно $\exists!$ в окр-ти x_0.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \longmapsto z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z\, e^{-\frac{1}{2}\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$ – преобр-е Лиувилля

Ур-е Бесселя: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

$$y = z x^{-1/2}$$

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right)z = 0$$

Замечание: при такой замене кол-во нулей реш-я ур-я не меняется.

Утв Любое нетрив. реш-е ур-я Бесселя им. ∞ много нулей на $[a; +\infty)$, $a > 0$

□ $Q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \Big|\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

$\exists C: \forall x \geq C \to Q(x) \geq \frac{1}{2}$; на отрезке $[a; C]$ конечное число нулей.

Если коэф-т в данном ур-ии им. полож. коэф-т, то по т. Штурма ЧТД ■

С 10.6

Д-ть, что $\forall$ нетрив. реш-е $y'' + x^2y' + (x+4)y = 0$ им. ≤ 5 нулей на $(-\infty; +\infty)$

Замена Лиувилля: ...

Получим $z'' + z\left(4 - \frac{x^4}{4}\right) = 0$

Если $Q(x) < 0$, то на промежутке ≤ 1 нуля

$4 - \frac{x^4}{4} \leq 0$ $x^4 \geq 16$ $|x| \geq 2 \Rightarrow$ на $[2; +\infty)$ и на $(-\infty; -2]$ не более 1 нуля

Осталось показать, что на $[-2; 2]$ не более 3-х нулей.

$Q(x) = 4 - \frac{x^4}{4}$

$z'' + z\left(4 - \frac{x^4}{4}\right) = 0$ (1) N_1 – число нулей нетрив. реш. (1)

$u'' + 4u = 0$ (2) N_2 – число нулей нетрив. реш. (2) – Оцениваем

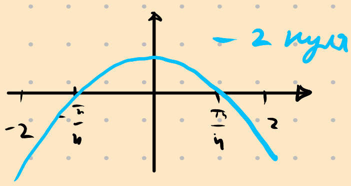
$N_1 \leq N_2 + 1$

Д-ть, что $N_1 \leq 3 \Rightarrow N_2 \leq 2$, причем коэф. в (2) больше коэф. Q в (1) ($4 > \frac{x^4}{4}$ на $(-2; 2)$)

Нужно найти хотя бы 1 реш-е (2) такое, что $N_2 \leq 2$

(2): $u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$u = \cos 2x$ — одно из реш-ий (2)



А если взять синус, будет $N_2 = 3$

$\frac{3\pi}{4} > 2$

Итого: ≤ 5 нулей ■

Тестовая

Д-ть, что $\forall$ нетрив. реш. ур-я $y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$ (2) на отр. $[-1; 6]$ $\exists$ точка ξ, где $y'(\xi) = 0$. (достат. док-ть, что есть ≥ 2 нуля, и по т. Ролля будет ч.т.д.)

$2 + \cos 3x \geq 1$ $\qquad$ N_2 - кол-во нулей нетрив. реш. (2), N_1 - одно же для (1)

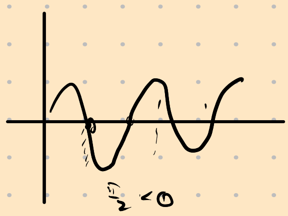
Сравниваем с ур. $z'' + z = 0$ (1)

$N_1 \leq N_2 + 1 \Rightarrow N_2 \geq N_1 - 1$, надо $N_2 \geq 3$ — нужно найти нетрив. реш. (1), у к-рого ≥ 3 нулей на $[-1; 6]$.

$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$z = \cos x$ на $[-1; 6]$

Всего внутри $N_1 = 2$ — мало



Ищем реш-е в форме $z = \sin(x - \gamma)$

Ф.723

Д-ть, что если $q(x) \leq 0$, то все реш-я ур-я $y'' + q(x)y = 0$ с полож. нач. усл. $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ остаются полож. $\forall x \geq x_0$. $q(x)$ непр. на $[x_0; +\infty)$

□ От противного: пусть $\exists x_1$: $y(x_1) \leq 0$. Если это так, $\exists \xi \in (x_0, x_1)$: $y(\xi) = 0$. $\quad y'(x_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(x_0 + t) - y(x_0)}{t}$

$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \to y(x) > y(x_0)$

Считаем, что ξ — наимен. из т., где $y(x)=0$.

Мн-во нулей непрерыв. реш. на конечном отр. конечно $\Rightarrow$ не может иметь конечных пределных т. $\Rightarrow$ inf таких x, что $y(x)=0$, совп. с min.

$\Rightarrow y(x)$ положит. на $(x_0; \xi)$.

$y'' + q(x)y = 0$

$q(x) \leq 0 \quad y > 0 \Rightarrow y'' \geq 0$ на $(x_0; \xi)$. $\Rightarrow y' \uparrow$ на $(x_0, \xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) \geq y'(x_0) > 0 \Rightarrow y(x) \uparrow$ на $[x_0; \xi) \Rightarrow y(x) \geq y(x_0) > 0$. Т.к.

ф-ия непр-на на $[x_0; \xi)$ $y(x) \geq y(x_0) > 0 \Rightarrow$ не может обр. в 0 в ξ.

Противоречие.

Фазовые траектории автономных систем

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Автономная линейная однородная система: $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x})$ (автономность — в независимости от t)

З. Коши: $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x}),\ t \geq t_0$

$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

Реш-е з. Коши $\exists!$ на $[t_0; +\infty)$ если $A(x)$ непр. вектор ф-ия.

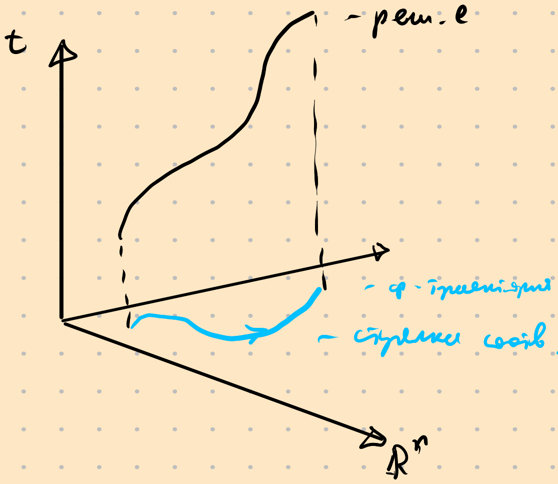
Реш-е есть кривая в $(n+1)$-мерном пр-ве.

n-мерное пр-во — **фазовое пр-во.**

Проекция решения из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ — **фазовая траектория.**

Она задаётся теми же ур-ями, но как параметрич. заданная кривая в $\mathbb{R}^n$.

Свойства



1. Если $x(t)$ - реш-е, то $x(t+C)$ - реш-е с той же траекторией.
2. 2 разных траектории не имеют общих точек.
3. Const реш-я сис-мы $x = x_0$ имеет траекторию - точку (положение равновесия)

Как их искать $(n=2)$

1. $\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x,y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x,y) \end{cases}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$

Запишем реш-е этого дифур. ур-я в виде $F(x,y) = C$.

φ-ия $F(x,y)$, пост. на каждом реш. сис-мы $\Leftrightarrow$ пост. на любой траектории наз-ся **первым интегралом системы**

Траектории — линии уровня первого интеграла.

2. просто решить сис-му.

Пример

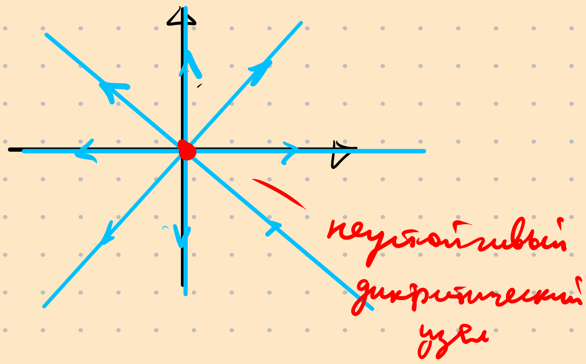
1. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$ П. р. $(0,0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = C$ — первый интеграл $F(x,y) = \frac{y}{x}$.

Линии уровня первого интеграла — прямые. Но траектории — лучи, исходящие из 0 (п.р.)!



Нужно найти линии уровня первого инт. и из общих сообр. разделить их на траектории.

2. $x = C_1 e^t$

$y = C_2 e^t$ при $t \uparrow$ $x, y \to \infty$

Траектории: 1. Положение равновес.

2. Лучи, выходящие из полож. равновес.

Классификация положений равновесия для линейных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + a_2 y \\ \dot{y} = b_1 x + b_2 y \end{cases}$$

$(0,0)$ — п.р.

Других п.р. нет $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ или $\lambda = 0$ не яв-ся собств. знач. матрицы.