Тригонометрические ряды Фурье

$f(x) \in L_R(-l, l)$ и им. период $2l$

L_R - абс. интегр., т.е. $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$ абс. сх.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

– коэф-ты Фурье

Лемма Римана

$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t)\cos tx\,dt \to 0$ при $x \to \infty$

I - промеж.

$$\int_I f(t)\sin tx\,dt \to 0, \quad x \to \infty$$

Следствие: $f(x) \in L_R(-l; l) \Rightarrow a_n, b_n \to 0$

Трит. ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right]$ - ряд Фурье $f(x)$

Свойства

1. Если $f(x)$ нечётна, то $a_n = 0$

   Если $f(x)$ чётна, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - периодична $\Rightarrow$ интеграл можно брать по любому отрезку длиной $2l$

Достаточное условие разложимости в р. Фурье (следствие из пр. Липшица)

1. $f(x) \in L_R(-l; l)$, им. период $2l$

   В т. x_0 имеет конечные односторонние произв. $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

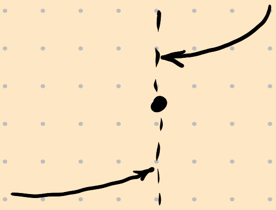
   Тогда ряд Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Пусть $f(x) \in L_R(-l; l)$, им. период $2l$

   x_0 - т. разрыва 1 рода, $\exists$ конечные „обобщённые" односторонние производные:

   $$\lim_{u \to +0}\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \to +0}\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

   Тогда ряд Фурье в т. x_0 сходится к ср. арифм. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



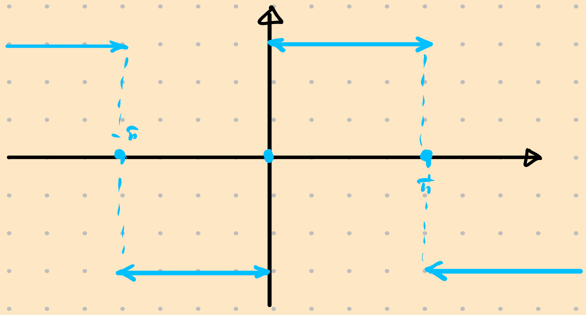
Часто $l=\pi$, тогда $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right]$$

Задача 1

Разложить в р. Фурье $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

Гр. суммы ряда строится сразу.



ф-ия нечёт. $\Rightarrow$ $a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt$ – для нечёт. ф-ии

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sign} t\,\sin nt\,dt =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi n}\left(-\cos nt\right)\Big|_0^{\pi} =$

$= \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$

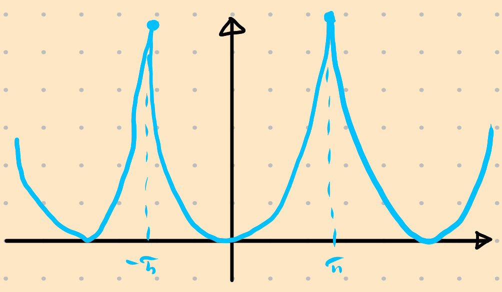
$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не яв-ся равномерно сх. на всей прямой, т.к. сумма его разрывна (р/н сх. ряд из непр. ф-ий им. непр. сумму).

Задача 2

$f(x) = x^2$ на $-\pi < x < \pi$ сх-ся в $\forall$ т., по 2 следствию

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$, $b_n = 0$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n(-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Дост. усл. р/н сх. р. Фурье

$f(x) \in L_R[-l;l]$, период $2l$, и кусочно-гладкая на $[-l;l]$.
($f(x)$ непр. на $[-l;l]$, $f'(x)$ кусочно-непр. на $[-l;l]$, т.е. есть конечное число т. разрыва I рода). Тогда р. Фурье $f(x)$ сх. р/н на всей числовой прямой.

Известно: если $f'(x)$ опр. всюду на промеж., то у нее не может быть разрывов I рода. Поэтому в теореме о равн. сх. р. Фурье в т. разрыва $f'(x)$ не опр.

Ряд Ф. x^2 сх. р/н на $(-\infty; +\infty)$.

Утв. 22-110

Пусть тригон. ряд (для простоты $l = \pi$)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (1) сх. р/н на $(-\infty; +\infty)$. Тогда его сумма $f(x)$ – непр. 2π-период. ф-ия, и (1) – р. Фурье своей суммы.

□ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ – р/н сх. $\Rightarrow f(x)$ непр.

Сумма р/н сх. ряда из непр. ф-ий – непр. ф-ия.

Имеет период 2π – очев.

Р/н сх. ряд из непр. ф-ий на конечном отрезке можно почленно интегрировать.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt}_{0}\Big) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

Если р/н сх. ряд умножить на огр. ф-ю, он останется р/н сх.

$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$, m фикс.
– сх р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt \, dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, dt}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt}_{=0 \text{ если } n \neq m} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt \, dt}_{=0}\Big) =$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \; dt$$

Ортогональность системы $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ в пр-ве непр. ф-ций на отр. $[-\pi; \pi]$ со скалярным произв. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \; dt$$

$\blacksquare$

Задача 22-III

Являются ли рядами Фурье?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ – ряд сх. р/м на $\mathbb{R}$ => ряд Фурье от своей суммы

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ – коэфф-ты $\not\to 0$ => не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x$, $-\pi \le x \le \pi$ – нечётная, $a_n = 0$

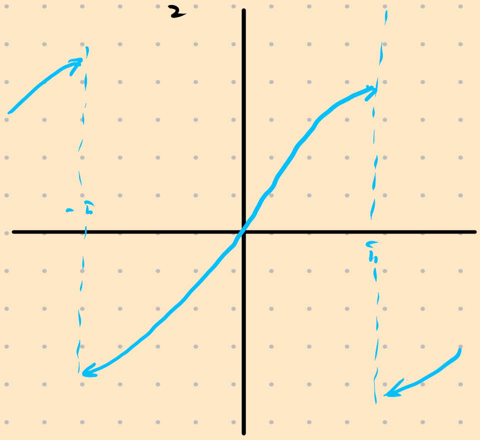
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t\cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t\cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1}\, dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1}\, dt}_{=0} \right] =$$

$$\underset{n \ge 2}{=} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \text{ – } b_n \text{ при } n \ge 2$$

При $n=1$ $\quad b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2}\, dt}_{0} \right] =$

$$= -\frac{\pi}{2}$$



Ряд сх. не р/м

$$x \cos x = -\frac{\pi}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на $(-\pi; \pi)$