

# ОДУ - однородное дифференциальное уравнение

ОДУ & одн. уравн.

$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$  - однородное - право-сторона оговаривает  $y^{(n)}(x)$

Рассмотрим:

$$\begin{cases} F_1(x, y^1, \dots, y^{(n)}, z, z^1, \dots, z^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y^1, \dots, y^{(n)}, z, z^1, \dots, z^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Уп-2 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

- Если реш.:  $y_{p-2}$  1-го порядка, произведение всех право-сторон.:

$$\begin{aligned} y' &= F(x, y); \quad dy = df(x, y) dx \\ P(x, y) dy + Q(x, y) dx &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Уп-2 в дифр. форме} \\ \text{Уп-2 в дифр. форме} \end{array} \right\}$$

- Чтобы упрост.:  $y_{p-2}$  с различными переменными

$$f(x) dx + g(y) dy = 0; \quad \text{решение:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx \quad G(x) = \int g(x) dx$$

$$df(x) + dg(y) = 0$$

$$d(F(x) + G(x)) = 0$$

$$F(x) + G(x) = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \int f(x) dx + \int g(y) dy = 0$$

С2 №4

$$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{y(1+y)} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{(1+y)-y}{y(1+y)} dy = \int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} \right) dy = \ln \left| \frac{y}{1+y} \right| + C_1$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C_2$$

$$\ln \left| \frac{y}{(1+y)\cos x} \right| = C_3$$

$$\frac{y}{(1+y)\cos x} = \pm e^{C_3} \quad C \in \mathbb{R} \quad (C=0 - \text{точка решения!})$$

$$\frac{y}{(1+y)\cos x} = C \quad \text{или} \quad y = -1 \quad (\text{решение уравнения когда } x = 0)$$

$$y = \frac{C \cos x}{1 - C \cos x}$$

№ 67 \*

$$3y^2 y' + 16x = 2xy^3 \quad \text{Найдите } y(x) - \text{одн. л. } U(+\infty)$$

$$3y^2 y' = 2x(y^3 - 8)$$

$$\int \frac{3y^2 dy}{y^3 - 8} = \int 2x dx \quad - \text{неравенство } y^3 \neq 8$$

$$\ln |y^3 - 8| = x^2 + C,$$

$$y^3 - 8 = \pm e^{x^2+C}$$

$$C \in \mathbb{R} \quad (\delta > 0, \text{такое что } y^3 \neq 8)$$

$$y^3 - 8 = Ce^{x^2}$$

$$y(x) - \text{одн. линия } C=0.$$

## Ортогональные траектории

Рассмотрим 2 ортогональные прямые:



$$y_2 = y_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = -\frac{1}{k_1}$$

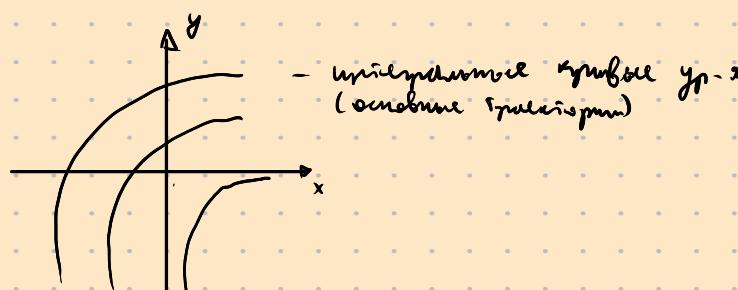
$k_1 k_2 = -1$   $y \perp$  прямик.

Пусть ум.  $y_p = e^x$ :

$$y' = f(x, y)$$

Ортогональные траектории:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$



- ортогональные кривые  $y_p = e^x$  (основные траектории)

Пример

$y = Cx^2$  - симметрические кривые. Найдите основные траектории.

$$C = \frac{y}{x^2}$$

$$0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}$$

$$y'x^2 = 2xy$$

$$y' = 2 \frac{y}{x}$$

$$\text{Другой вариант: } y' = -\frac{x}{2y}$$

$$2y dy + x dx = 0$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C \quad - \text{ип-е эллипс}$$



## Однородные уравнения

Согласно ип-е с разделяющимися переменными

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Замена:  $y = x z(x)$

$$y' = z + x z'$$

$$x z' + z = f(z)$$

$$z' + z - f(z) = 0 \quad \left( \frac{dz}{z - f(z)} + dx = 0 \right)$$

## Ип-е, связанные с однородным

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Замена:  $x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0$

$$= 0 \quad (\text{Вида } x_0, y_0)$$

$$y' = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta + \underbrace{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}_{= 0}}{a_2 \xi + b_2 \eta + \underbrace{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}_{= 0}}\right)$$

Получим однородное ип-е

Ф № 117

$$(y+2) dx = 2x+y-4 dy$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \quad -x_0, y_0$$

$$x = \xi + 3 \quad y = \eta - 2$$

$$\eta d\xi = (2\xi + \eta) d\eta$$

$$\frac{\eta}{\xi} = z$$

$$z \xi dz = (2\xi + z\xi)(z d\xi + \xi dz)$$

$$(z\xi - z(2\xi + z\xi))d\xi = \xi \cdot (2\xi + z\xi)dz$$

$$z\xi(1-z-z)d\xi = \xi^2(2+z)dz \quad | \quad \xi=0 \text{ - не реш-е}$$

$$-z(1+z)d\xi = \xi(2+z)dz$$

$$-\frac{d\xi}{\xi} = \frac{2+z}{z(z+1)} dz$$

$$-\int \frac{d\xi}{\xi} = \left( \frac{2}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$\frac{z^2}{z+1} \cdot \xi = C$$

$$\frac{y^2}{y+\xi} = C \Rightarrow \frac{(y+z)^2}{y+x-1} = C \Rightarrow \begin{cases} (y+z)^2 = C(y+x-1) \\ x+y = 1 \end{cases} \quad (\text{не теряем } x+y=1)$$

### линейное ур-е I порядка

$$y' + a(x)y = b(x) \quad - \text{неоднородное}$$

Рас-шее линейное однородное ур-е:

$$y' + a(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + a(x)dx = 0$$

$$\ln|y| + \int a(x)dx = 0$$

$$y = C_0 e^{\int a(x)dx} \leftarrow \text{одна независим.}$$

$y = C_0 \varphi(x)$  - общее решение однородного ур-а;  $\varphi(x)$ - частное решение

### Метод вариации параметров: ((о членах на ур-е))

Задана  $y = C(x) \cdot \varphi(x)$  в неоднородном ур-е:

$$C' \varphi + C \varphi' + aC \varphi = b$$

$$C' \varphi + \underbrace{C(\varphi' + a\varphi)}_{=0 \text{ (у-е реш-е однор. ур-а)}} = b$$

$$C'(x)\varphi(x) = b(x) \quad - \text{ур-е с разг. переменными}$$

C 3.37

$$x^2 y' = 5xy + 6, \quad y(1)=1$$

Рас-шее однор. ур-е:  $x^2 y' = 5xy$

$$\frac{dy}{y} = 5 \frac{dx}{x}$$

$$y = x^5 C_0 \quad | \quad y(x) = C_0(x) x^5$$

$$x^2(C'x^5 + C_0x^4) = 5x(Cx^5 + 6)$$

$$C' = \frac{6}{x^2} ; \quad C = -\frac{1}{x^6} + D$$

$$y = \left(-\frac{1}{x^6} + D\right)x^5 \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + Dx^5 - \text{perm-e}$$

$$y(1) = 1 ; \quad 1 = -1 + D \Rightarrow D = 2$$

$$y = -\frac{1}{x} + 2x^5$$

Nº 1

$$xy' - 2y = 2x^4$$

$$\text{Dy: } xy' - 2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

$$y = Cx^2$$

$$\text{Bn: } y = C(x) x^2$$

$$x[C'x^2 + 2Cx] - 2Cx^2 = 2x^4$$

$$C'x^3 = 2x^4$$

$$C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C$$

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + x^2 C$$

Nº 2

$$\text{bez Bn: } xy' - 2y = 2x^4 | \cdot x$$

$$x^2y' - 2xy = 2x^5$$

$$\frac{x^2y' - 2xy}{x^4} = 2x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C \Rightarrow y = x^4 + Cx^2$$

- Однородные уравнения т.е.: неизвестная входит в линейной форме в правл. (см. БП)

- Метод неизвестных  $y$  и  $x$  & способа:

$$(1+y^2) dx + (2xy-1) dy = 0$$

$$(1+y^2) \frac{dx}{dy} = 1-2xy - \text{линейное}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

$$\text{ОУ: } \frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$$

$$x = \frac{C}{1+y^2}$$

$$\text{БП: } x = \frac{C(y)}{1+y^2} \quad \text{Ответ: } C(y) = y + C, \quad x = \frac{y+C}{1+y^2}$$

## Уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad - \text{приводится к линейному!}$$

$$n=0 \rightarrow \text{ЛУ} \quad n \geq 0 \Rightarrow y=0 - \text{реш.}$$

$$n=1 \rightarrow \text{ЛУ} \quad n < 0 \Rightarrow y=0 - \text{не реш.}$$

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$$

$$\text{Замена: } z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$$

$$\text{Получим } (1-n)z' + a(x)z = b(x) \quad - \text{ЛУ}$$

№4

$$y' - y + 2xy^3 = 0 \quad | \quad y=0 - \text{реш.}$$

$$2x = \frac{z'}{z} + z$$

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$$

$$z = \frac{1}{y^2}, \quad z' = -\frac{2}{y^3}y'$$

$$\text{ОУ: } \frac{dz}{dx} + 2z = 0$$

$$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

$$\text{БП: } z = C(x) e^{-2x}$$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x$$

$$C'(x) = 4x e^{2x}$$

$$C(x) = \int 4x e^{2x} dx = 2x e^{2x} - e^{2x} + C$$

$$\frac{1}{y} = (2x e^{2x} - e^{2x} + C) \cdot e^{-2x}$$

Orter:

$$\begin{cases} y^2 = ((2x-1) + Ce^{-2x})^{-1} \\ y = 0 \end{cases}$$

## Уравнение Риккатти

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$$

Пусть  $y_0$  - решение

$$y = z + y_0 \quad z - новая неизв. оп-ия \Rightarrow y_0 - е. Бернулли$$

№5

$$x^2 y' - 5xy + x^2 y^2 + 8 = 0$$

$$y_0 = \frac{k}{x}$$

$$-\frac{x^2 k}{x^2} - \frac{5xk}{x} + x^2 \frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$$

$$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$$

$$k=2, \quad k=y$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow \frac{x^2}{xy-2} = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \frac{2}{x}$$

Сделаем замену  $y = z + \frac{2}{x}$ :

$$x^2 \left( z' - \frac{2}{x^2} \right) - 5x \left( z + \frac{2}{x} \right) + x^2 \left( z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2} \right) + 8 = 0$$

$$x^2 z' - zx + x^2 z^2 = 0 \quad | : x$$

$$xz' - z + xz^2 = 0$$

$$\frac{z'x-z}{z^2} = -x \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)' = x$$

## Уравнение 8 порядка гиперпериодическое

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad - P \text{ и } Q \text{ неяв.}$$

Пусть  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y)$  -  $F$  неяв. гипер. 8 Г в  $\mathbb{R}^2$

$$\exists F: \quad P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Реш. е:  $F(x,y) = C$  (т.е.  $F$  - неявные)

Пусть  $F$  - гипер. неяв. гипер. 8 Г:

$$\text{Если } \exists P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{array} \right. - \text{ должны быть равны!} \quad - \text{ необходимо учесть неявные переменные}$$

Условие 2б-го гласит о том, если одн.  $G$  односвязна.



№6

$$(1+3x^2 \ln y) dx + (3y^2 + \frac{x^3}{y}) dy = 0$$

$G = \{y > 0\}$  - односвязна

$$\exists F: \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

Можно угадать, но есть нет:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 1+3x^2 \ln y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \frac{x^3}{y} \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{no } x]{\text{интегрируем}} \\ \xrightarrow{\text{no } y} \end{array} \begin{array}{l} F = x + x^3 \ln y + C(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C \\ F = x + x^3 \ln y + y^3 \end{array}$$

### Интегрируемый множитель

Если поделим на  $y$  сразу нет:

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y} \quad - \text{ надо решить систему - конечно, так никто не решает.}$$

№7

$$(y - 3x^2 y^3) dx - (x + x^3 y^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 9x^2 y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 3x^2 y^2 \quad - \text{ не равны}$$

$$y dx - x dy - 3x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy = 0 \quad |y=0-\text{perm}, x=0-\text{perm}$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = 3x^2 y dx - x^3 dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x^3 y) \Rightarrow \frac{x}{y} = x^3 y + C; \quad y=0; \quad x=0.$$

## Уравнения высшего порядка

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  - надо поменять порядок! каскад при  $y^{(n)} \neq 0$  примен!

### Методы понижения порядка

① Использование  $y$ :  $y' = z$ ,  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \rightarrow F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$

$$xy'' + xy''' + y' = 0, \quad y' = z; \quad y = \text{const} - \text{решение}$$

$$xz' + xz + z = 0 \quad | \times x \Rightarrow \text{условие}$$

$$x \frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0, \quad \frac{1}{z} = u$$

$$-xu' + x + u = 0 \quad | : x^2$$

$$\frac{u - xu'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = \ln x + C, \quad \frac{1}{zx} = \ln x + C$$

$$z = y' = \frac{1}{x(\ln x + C)} \quad y = \int \frac{dx}{x(\ln x + C)} = \ln |\ln x + C| + C_1 \quad \begin{cases} y = \ln |\ln x + C| + C_1 \\ y = \text{const} \end{cases}$$

② Уп-е для  $z$  в  $y$

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ;  $y$ -некая неизв. переменная

$y' = z(y)$  - некая пр-ва

$$y'' = (y'_x)'_x = (y'_x)_y \cdot y'_x = z \cdot z'_y$$

$$y''' = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})_y \cdot y'_x = (z \cdot z'_y)'_y \cdot y'_x = (z'^2 + z \cdot z''_{yy}) z = z \cdot z'^2 + z^2 z''_{yy}$$

### Пример

$$yy'' = 2y'^2 - 4y^2y'^3 \quad y' = z(y) \quad y'' = zz'$$

$$yzz' = 2z^2 - 4y^2z^3 \quad | : z$$

$$z = 0 - \text{решение}$$

$$y = C$$

$$yz' = 2z - 4y^2z^2 \quad | : z^2$$

$$\frac{y}{z^2} z' = \frac{2}{z} - 4y^2 \quad \frac{1}{z} = u \quad u' = -\frac{1}{z^2} z'$$

$$-yu' = 2u - 4y^2$$

$$\text{DIV: } 2u + yu' = 0 \quad \ln|u| = -2 \ln|y| + C$$

$$2u = -\frac{du}{dy} y \quad u = \frac{C}{y^2}$$

$$\frac{dy}{u} = -2 \frac{dy}{y}$$

$$B\cap: u = \frac{c(y)}{y^2}$$

$$\frac{-c'(y)y^2 + 2yC(y)}{y^3} = 2\frac{c(y)}{y^2} - 4y^2$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + C \Rightarrow u = \frac{y^3 + C}{y^2} \Rightarrow z = \frac{y^2}{y^4 + C}$$

$$y' = \frac{y^2}{y^4 + C}$$

$$\left( y^2 + \frac{C}{y^2} \right) dy = dx$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{C}{y} = x + C_1 \quad \text{Oder: } \begin{cases} \frac{y^3}{3} + \frac{C}{y} = x + C, \\ y = C \end{cases}$$

Задача Коши для ур-я n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

2 способа решения

1. Найти однор. ур-е  $C_1 \dots C_n$ , неравн. к ним.  $y_{n-1}$ , находим все-ли  $y_j$  в  $n$  ур-ях с  $n$  неизв.
2. Аналогич. константами нациененно, наше к-во задачи нахождения порядка

Пример

$$yy'' - y'^2 = y^4 \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -4$$

$$y \cdot z' - z^2 = y^4 \quad y' = z(y)$$

$$y \cdot \frac{u'}{2} - u = y^4 \quad u = z^2, \quad u' = 2zz'$$

$$Dy: y \frac{du}{dy} = 2u$$

$$B\cap: u = C(y) \cdot y^2$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2dy}{y}$$

$$u = y^2 C$$

$$\frac{y}{2} \cdot (C'(y) \cdot y^2 + 2yC(y)) - C(y) \cdot y^2 = y^4$$

$$C'(y) = 2y$$

$$C(y) = y^2 + C$$

$$u = y^4 + C y^2$$

$$z(2) = -4$$

$y' < 0$  &  $x=1$

$$16 = 16 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$y' = -y^2$$

$$z^2 = y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = -dx$$

$$y' = \pm y^2$$

$$\frac{1}{y} = x + C_1$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Def.: } \frac{1}{y} = x - \frac{1}{2}$$

③

yp-e, ognopognoe otne.  $y, y', \dots, y^{(n)}$

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  - ognopognomu uwaroveni otne.  $y, y', \dots, y^{(n)}$   
c kosp.-ramu  $f_i(x)$

$y=0$  - bceaga pem-e!

Пример 1

$$(sin x + 1)y^2 y' y''' - \sqrt{1-x^2} y^4 y''^2 + arctg x y y' y'' y''' = 0 \quad | \quad y=0 \text{ - pem-e}$$

$$\frac{y'}{y} = z \quad y' = zy \quad y'' = y(z' + y'z) = y(z^2 + z')$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

Plane negizatkolen  $\delta$  y-p-e - vosp-e na y

Пример 2

$$yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0 \quad y=0 \text{ - pem-e}$$

$$z = \frac{y'}{y} \quad y' = zy \quad y'' = y(z^2 + z')$$

$$y^2(z^2 + z') - z^2 y^2 + y^2 \sin x = 0$$

$$z^2 + z' - z^2 + \sin x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow z = \cos x + C = \frac{y'}{y}$$

$$\ln|y'| = \sin x + C_x + C_1$$

$$y = C_1 e^{\sin x + C_x}$$

Zagara kumm

$$2x y^2 y'' - 2xyy' + 2xy'^3 = y'y'' \quad y'(1) = y'(1) = -1$$

$y=0$  - penu-e, no ne penu-e Zagara kumm

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z')$$

$$2x y^3 (z^2 + z') - 2xy^3 z^2 + 2xy^3 z^3 = y^3 z - \text{gammal korpusuress } y!$$

$$2x z^2 + 2xz' - 2xz^2 + 2xz^3 = z \quad - \text{gammal korpusuress } y!$$

$$2xz' + 2xz^3 = z \quad \left| \begin{array}{l} z=0 - \text{ne penu-e kumm: } z(1)=1 \\ :z^3 \end{array} \right.$$

$$2x \frac{z'}{z^3} + 2xz = \frac{1}{z^2} \quad u = \frac{1}{z^2} \quad u' = -2 \frac{z'}{z^3}$$

$$-xu' + 2x = u$$

$$(u + xu') = 2x$$

$$(xu)' = 2x$$

$$xu = x^2 + C \quad u(1) = 1$$

$$1 - 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u = x$$

$$z^2 = \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln |y| = 2\sqrt{x} + C$$

$$0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\ln |y| = 2\sqrt{x} - 2$$

$$|y| = e^{2\sqrt{x}-2}$$

$$y = -e^{2\sqrt{x}-2}, \quad y(1) = -1 \Rightarrow y < 0$$

#### ④ Однороднай однородност

Пусть  $\exists K \in \mathbb{R}$ : при замене  $x$  на  $\lambda x$ ,  $y$  на  $\lambda^n y$ ,  $y'$  на  $\lambda^{n-1} y'$ , ...,  $y^{(n)}$  на  $\lambda^{n-n} y^{(n)}$ , то б'є доказаное с  $\lambda$  корпушас (yp-e ne uзненас)

Всегда нейт. незав. нр.  $t$  и оп-но  $z(t)$ :

$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0, \\ -e^t, & x < 0, \end{cases} \quad y = z e^{-xt} \quad (z \neq 0)$$

Togu yp-e ne syhet содепнаас эбис  $t$ . ( $n=2$ )

Пример (7.65 а, д)

$$x^2 y'' + 2x^2 y' + 2xy - 2y = 0 \quad y(1) = -1 \quad y'(1) = 1$$

$$x \rightarrow \lambda x \quad y \rightarrow \lambda^k y \quad y' \rightarrow \lambda^{k-1} y' \quad y'' \rightarrow \lambda^{k-2} y''$$

$$\lambda^2 x^2 \lambda^{k-2} y'' + 2\lambda^2 x^2 \lambda^{k-1} y' + 2\lambda x \lambda^k y - 2\lambda^k y = 0$$

$$2+k-2 = 2+2k-1 = 1+2k = k$$

$$k = 2k+1 = 2k+1 = k$$

$$k = -1$$

$$x = e^t, \quad y = z e^{-t}$$

$$y, \quad y_x = \frac{y'}{x_t} = \frac{\text{lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x)}{x} - \frac{y(x_0)}{x_0}}{e^t - e^{t_0}} = e^{-2t} (z' - z)$$

$$y'' = \frac{(y_x)'_t}{x_t} = \frac{(z'' - z') e^{-2t} - 2(z' - z) e^{-2t}}{e^t} = e^{-3t} \cdot (z'' - z' - 2z' + 2z) = e^{-3t} (z'' - 3z' + 2z)$$

$$e^{2t} \cdot e^{-3t} \cdot (z'' - 3z' + 2z) + 2e^{2t} \cdot z \cdot e^{-t} \cdot e^{-2t} (z' - z) + 2e^{2t} \cdot z^2 \cdot e^{-2t} - 2ze^{-t} = 0$$

$$z'' - 3z' + 2z + 2z^2 - 2z^2 + 2z^2 - 2z = 0$$

$$z'' + z' (2z - 3) = 0 \quad x=1, \quad y=-1, \quad y'=1 \Rightarrow t=0, \quad z=-1, \quad z'=0$$

$z = -1$  — рим-е загорн. Коин! У ню т. о загорн. Коин оно егунсиверно.

Теорема о сунгесівованні «егунсиверном» рим-е загорн. Коин

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

$f$  непр. дифгрп. в окр-ини  $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Тогда рим-е з. Коин  $(*)$  + уе- $\rightarrow$   $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

сунг-ел в егунсиверно на кен-ам  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$n=1$ . Теор. сунг-ел в ег-сан:

3. Коин  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ . Еан қп-ас  $f(x, y)$  дифгрп. в  $G > (x_0, y_0)$ , то

$\exists \delta > 0$ : на  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  рим-е з. Коин сунг-ел в ег.



## Примеры

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

$F(x, y) = y$  непр. зависим. в  $\mathbb{R}^2$

$$y = Ce^x, \quad y(0) = 1, \quad C = 1$$

$$y = e^x + C$$

Безже есть реш-е

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

$y=0$  - реш-е, но  $y^{2/3}$  - неяв-е непр. зависим. ( $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$  не определено)

Казалось, это реш-е единственное, но нет.

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \quad y^{1/3} = x + C \quad y = (x + C)^3 \quad y(0) = 0 \Rightarrow y = x^3 - \text{реш-е}$$

Для  $f \in C_G^1$  т. о. каск. неяв. не подходит

## Особые решения



Реш-е вида  $y = x^3$ , оп. на всей прямой, и это

Реш-е  $y \mapsto F(x, y, y') = 0$  наз. особым, если реш-е касается в точке прохождения кривой, расположенной в зоне замкнутой кривой и не содержит ни одной очевидной доп-и точки.

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad y(0) = 0$$

Если  $y_0 \neq 0$ , то реш-е  $y = x^3$  единственно в зоне доп-и т., но не гл-е eq., если это точка, то есть не-т.

## Краевые упр-я

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

$$y(-4) = -1, \quad y(2) = 1$$

$$y = (x + C)^3 : \quad y = (x + 3)^3 \text{ при } y(-4) = -1$$

$$y = (x + 1)^3 \text{ при } y(2) = 1$$

$$y = \begin{cases} (x+1)^3, & x \geq 1 \\ 0, & x \in (-3, 1) \\ (x+3)^3, & x \leq -3 \end{cases}$$

$y_p \rightarrow$  1 порядка, не зависим. относ.  $y'$

$y = f(x, y')$  - зависим. относ.  $y$

Метод свободного параметра:  $y' = p$

$y = f(x, p)$

$$dy = f'_x dx + f'_p dp; \quad dy = pdx$$

$$f'_p dp = (p - f'_x) dx$$

$$\frac{dp}{dx} = F(x, p) \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dp} = G(x, p) \quad - \text{для } Y \text{ 1-го. порядка. относ. групп.}$$

1. Канон. пере-е вида  $x = x(p, C)$

$$y = f(x, p) = y(p, C)$$

Генер. пере-ии, забв. от  $C$  в непр. вида.

2. Канон. пере-е вида  $p = p(x, C)$

$$y = f(x, p) = y(x, C)$$

Генер. пере-ии, забв. от  $C$  в общем виде

Пример 1

$$y = 2xy' - 4y'^3 \quad - \text{не зависим. относ. } y'$$

$$p = y'$$

$$y = 2xp - 4p^3$$

$$dy = 2p dx + 2x dp - 12p^2 dp = pdx$$

$$p dx = (12p^2 - 2x) dp$$

$$p \frac{dx}{dp} = 12p^2 - 2x \quad - \text{для}$$

$$p=0 \Rightarrow y=0 - \text{пер-е}$$

Ищем  $x = x(p)$ ,  $p = \text{const} - \text{не ноль.}$

$$\text{Одн: } p \frac{dx}{dp} = -2x$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p}$$

$$\text{Бд: } x = \frac{C(p)}{p^2}$$

$$\ln|x| = -2 \ln|p| + C$$

$$p \frac{\frac{C'(p)p^2 - 2pC(p)}{p^4}}{p^4} = 12p^2 - 2 \frac{C(p)}{p^2}$$

$$x = \frac{C}{p^2}$$

$$\frac{C'(p)}{p} = 12p^2 \Rightarrow C(p) = 3p^4 + C$$

$$x = \frac{3p^4 + C}{p^2} = 3p^2 + \frac{C}{p^2}$$

$$y = 6p^3 + 2\frac{C}{p} - 4p^3 = 2p^3 + 2\frac{C}{p} \quad \text{Dabei: } x = 3p^2 + \frac{C}{p^2}, \quad y = 2p^3 + 2\frac{C}{p} \text{ und } y = 0.$$

Пример 2

$$u(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2 \quad y' = p$$

$$u(xp - 2y) = 4x^2 - p^2$$

$$y = \frac{xp}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{8}$$

$$dy = \frac{pdx}{2} + \frac{xdp}{2} - xdx + \frac{pd\cancel{p}}{\cancel{y}} = pdx$$

$$\frac{p+2x}{2} dx = \frac{2x+p}{4} dp$$

$$1. \quad p = -2x \Rightarrow y = -x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = -x^2$$

$$2. \quad 2dx = dp$$

$$p = 2x + C$$

$$y = \frac{2x^2 + Cx}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{(2x+C)^2}{8}$$

$$y = \frac{x^2 + Cx}{2} + \frac{4x^2 + 4xC + C^2}{8}$$

$$\text{Dabei: } \begin{cases} y = x^2 + Cx + \frac{C^2}{8} \\ y = -x^2 \end{cases}$$

3. А теперь мы сделали так (здесь в группе):

$$p = p(x, C)$$

$$y' = p(x, C) - \text{некоторое}$$

$$\text{В примере } p = -2x \Rightarrow y = -x^2 + C$$

Если некоторое \$b\$ \$y'\$-е, например: \$C = 0\$. Где для \$x=0\$ \$y=0\$ не \$y=0\$

Так решен, потому, что в данном момент \$p = p(x, C)\$ - некоторое нек. \$y'\$,

t.e. производительное \$p(x, C)\$ нужно некоторое \$b\$ \$y'\$-е и выбрать \$p(x, C)

Но: Так будем \$-x^2\$ носит. График некоторое.

Испр. группе.

$$x^2 + Cx + \frac{C^2}{8} = -x^2 \Rightarrow \left(x + \frac{C}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow 2 \text{ различных корней} \Leftrightarrow 0 \text{ t. } x = -\frac{C}{4}$$

\$C\$ - модуль \$\Rightarrow x\_{\text{какие}}\$ - модуль \$\Rightarrow y = -x^2\$ - однозначная функция.



Проверить на  $\rho$ -группа однородных решений?

$$F(x, y, y') = 0, \quad F - \text{непр. группа.}$$

$\exists \rho$  - гомогенизирующая кривая:

$$\begin{cases} F(x, y, \rho) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \rho}(x, y, \rho) = 0 \end{cases} \text{ иначе } \rho \Rightarrow \Phi(x, y) = 0$$

Если решение  $y$  для  $F(x, y, y')$  является однородным, то оно будет на  $\rho$ -груп. кривой.

Несовпадение на  $\rho$ -груп. кривой - неодн. реш. есть однородные решения.

Две равные  $\rho$ -группы:

$$\begin{cases} 4(x\rho - 2y) = 4x^2 - \rho^2 \\ 4x = -2\rho \end{cases}$$

$$-8x^2 - 8y = 4x^2 - 4x^2$$

$y = -x^2$  -  $\rho$ -груп. кривая с однородными решениями  $\Rightarrow$  группа однородных решений нет.

Всіх диференційовані кривій зб-ся рівнення, що не є однією:

$$y' = y^2 \quad \text{g. кр. } y=0 - \text{ рівн., що не є однією}$$

Всіх г. кр. не зб-ся рівн-єм:

$$(1+y)^2 = y'(y-x)^2 \quad \text{г. кр.:} \quad \begin{cases} (1+p)^2 = p(y-x)^2 \\ 2(1+p) = (y-x)^2 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} p=-1 \Rightarrow y=x - \text{не рівн.} \\ p=1 \Rightarrow y-x = \pm 2 - \text{рівн.} \end{array}$$
$$\begin{cases} p=1 \\ p=-1 \end{cases}$$

## Теоретичні задачі

Teorema cyuz. u eквівалентності рівн. з. Kожна гіп-я від n-го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Exist F непр. функц. від G  $\subset R^{n+1}$ ,  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$

$\exists \delta > 0$ : рівн. з. Kожна cyuz. u ек. на  $[x_0-\delta; x_0+\delta]$

№ OP-230

Монотонні рівн. 2-х зм. рівн. 2-їх відповідає від  $(x_0, y_0)$ :

a)  $y' = x + y^2$

Нерівн. 2 рівн. 2-їх з. Kожна  $y(x_0) = y_0$

b)  $y'' = x + y^2$

Нерівн. 2 рівн. 2-їх з. Kожна  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$

c)  $y''' = x + y^2$

Да. Монотонні рівн. 3-їх відповідає  $y'''(x_0)$

№ OP-231

Ex. cyuz. рівн-їв  $y^{(n)} = x + y^2$ , які від. юн.  $y(0)=1, y'(0)=2, n=1, 2, 3$

$$n=1: \quad y' = x + y^2 - 0 \text{ при } n=1 \quad (x \neq 0+1)$$

$$n=2: \quad y'' = x + y^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2 - 1 \text{ при } n=2 \quad (\text{при } x_0=0)$$

$$n=3: \quad y''' = x + y^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2 - \infty \text{ при } n=3 \quad (\text{при } x_0=0) \quad y''(0) \text{ есть при } n=3 \text{ при } x_0=0$$

№ 9P-233

При каких  $n$  ур-е  $y^{(n)} = f(x, y)$ , ( $f, f'$  непр.) ур-е имеет сингулярные реш.  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x+x^4$

$$\text{3. Касм} \quad y^{(n)} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

Учтем  $n$ , что  $x_0$ -точка  $y_1^{(n)}(0) \text{ и } y_2^{(n)}(0)$  одновременно - полные реш. 3. Касм

$$y_1' = 1, \quad y_2' = 1+4x^3$$

$$y_1'' = 0, \quad y_2'' = 12x^2 \quad y_1'''(0) = 0, \quad y_2'''(0) = 0$$

$1 \leq n \leq 4 \Rightarrow 2$  полные реш. Одной 3. Касм  
(невозможно)

$$y_1^{(4)}(0) = 0, \quad y_2^{(4)} = 24 \quad y_1^{(5)}(0) = 0, \quad y_2^{(5)}(0) = 0$$

$$y_1^{(5)} = 0, \quad y_2^{(5)} = 24 \quad y_1^{(6)}(0) \neq y_2^{(6)}(0)$$

$n=5$  - одн. спр-е 26-го полн. ур-я  $y^{(5)} = 0$   
(Вдруг в группе 7. Касм 2 полн. один 3. Касм?)

Нес. однородное ур-е  $n=20$  порядка с нач.к.з.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad a_i \in \mathbb{R} \quad -\text{ночес. ненулев. полн., т.к. нет общего } x, \text{ а только конст.}$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda' + a_n y = 0$$

Мн-ло реш-и ур-я одн. квад. ур-я порядка  $n$ :

$y_1(x), \dots, y_n(x)$  - решения (QCP - квад. не-линейное реш-и)

$$\text{ОДД} \quad y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Как наимен QCP?

① Все  $\lambda_i$  генер-и различны

$$\text{QCP: } e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

$$\text{Пример: } y'' - 6y' + 8y = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

② 1-й генер. реш. для ур. характеристики

Если корни к реш. л. QCP

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \text{ реш.}$$

Пример 1.  $y''' - y'' - y' + y = 0$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ кратн. 2}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

Пример 2.  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda - 2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ кратн. 3}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$$

③ Част. кратн. корень  $\lambda = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$

$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  - сопряженный корень

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

Возьмем гипотезу для  $\lambda$  в этом виде и подставим:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ - генер. реш. 2к реш.}$$

Пример 1: Упр. - задача  $y'' + \omega^2 y = 0, \omega > 0$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \quad \lambda = \pm \omega i, \quad \alpha = 0, \beta = \omega$$

$$\text{QCP: } e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}$$

В генер. решении:  $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$  - гипотеза верна!

Пример 2:  $\lambda = \alpha + \beta i$  - корень кр. к.

В QCP 2к реш-ий:  $e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$

$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Пример 3:  $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$

$$\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$$

$$(\lambda^2 + 9)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 x \sin 3x$$

**Внимание** Камерабиң көндінің пабно нағызын үзебнен!!! (Күнде 0 да залар)

Пример 4:  $y''' + 6y' + 10y = 0$

$$\lambda^3 + 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 - i, \lambda_2 = -3 + i$$

$$y = C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x$$

Демек не оғындардың  $yp=2$  с мәні. Қозғалысы

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

$$OPHY = OPOY + UPHY$$

$$f(x) = P_m(x) e^{mx} - \text{квазимоюзан} \quad P_m - \text{модулар менш.}$$

Как искать частное решение?

① М не кв-сі көрлем жарал.  $yp=2$

УПНУ ишерде білдігі  $Q_m(x) e^{mx}$ ,  $Q_m(x) -$  монадан  $a_m$  с нелік. қозғалы.

Пример 1:  $y''' - 4y' + 4y = 32x e^{-2x} \quad m=1, \mu=-2 - \text{не көрлем жар. } yp.$

$$\lambda^3 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ кв. 2}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - OPOY$$

$$\text{УПНУ: } y = (Ax + B)e^{-2x}$$

$$y' = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} = e^{-2x}(-2Ax + A - 2B)$$

$$y'' = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4(Ax + B)e^{-2x} = e^{-2x}(4Ax - 4A + 4B)$$

$$\text{Решілабы: } (4Ax - 4A + 4B) - (-8Ax + 4A - 8B) + (4Ax + 4B) = 32x$$

$$16A = 32 \Rightarrow A = 2 \quad -16 + 16B = 0 \Rightarrow B = 1$$

$$\text{УПНУ: } y = (2x + 1)e^{-2x} \quad \text{OPHY: } y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + (2x + 1)e^{-2x}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Если } P_m(x) e^{dx} \cos px$$

$$\text{или } P_m(x) e^{dx} \sin px$$

или их комб.

$m = dx + pi$  не является корнем характерист.

$$\text{ЧПНУ: } y = Q_m^{(1)}(x) e^{dx} \cos px + Q_m^{(2)}(x) e^{dx} \sin px$$

$Q_1^{(1)}, Q_2^{(2)}$  - многочлены от  $x$   $\leq m$

$$\text{Пример 1: } y''' - y'' - 2y = (2x+1) \cos 3x \quad m=1, \quad p=3i$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \text{ДПОУ } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

$$\text{ЧПНУ: } y = (Ax+B) \cos 3x + (Cx+D) \sin 3x$$

$$y' = A \cos 3x - 3(Ax+B) \sin 3x + C \sin 3x + 3(Cx+D) \cos 3x = \\ = (3(Cx+D)+A) \cos 3x + (-3Ax - 3B+C) \sin 3x$$

$$y'' = 3(-3Ax - 3B+C) \sin 3x - 3(3(Cx+D)+A) \cos 3x - 3A \sin 3x + 3(-3Ax - 3B+C) \cos 3x = \\ = (-9Ax - 9B + 6C) \cos 3x + (-9Cx - 9D - 6A) \sin 3x \\ (-9Ax - 9B + 6C) \cos 3x + (-9Cx - 9D - 6A) \sin 3x - (3Cx + 3D + A) \cos 3x + \\ + (3Ax - 3B + C) \sin 3x - 2(Ax+B) \cos 3x - 2(Cx+D) \sin 3x = (2x+1) \cos 3x$$

