

# Кинематика материальной точки

Сферическая система



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} - \text{ОКБ}$$

$$\vec{v} = \dot{q}^i \cdot \vec{q}_i = \sum h_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$$

$$h_i = |\vec{r}_{,i}|$$

$$\vec{r}_{,r} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow h_r = 1 \quad h_\lambda = r \cos \varphi \quad h_\varphi = r$$

Рассмотрим малое перемещение

$$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \approx \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{h_a} \cdot dq^a$$



$$(2): \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right]$$

$$w_k = \vec{w} \cdot \vec{e}_k$$

$$\left( \frac{v^2}{2} \right)_{,i} = \dot{r} ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,i} = \ddot{r}$$

$$\left( \frac{v^2}{2} \right)_{,r} = r (\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) \Rightarrow w_r = \ddot{r} - r (\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2)$$

2-й закон Ньютона в координатной форме

$$m \vec{w} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_a$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} - \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} = \vec{F} \cdot \vec{g}_a = Q_a$$

$$\frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} = Q_a \quad - \text{в модаль криволинейной системе координат!}$$

$$\frac{1}{h_a} \left[ \frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} \right] = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Движение по винтовой линии



$$\begin{cases} x^1 = a \cos \omega t \\ x^2 = a \sin \omega t \\ x^3 = b t \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2}$$

$$\vec{v} = v \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

$$\vec{w}_\tau = 0$$

$$\vec{w}_n = a \omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2 \omega^2 + b^2}{a \omega^2}$$

Задача

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \quad a, b = \text{const}$$

$$r(\varphi) = ? \quad w_r(r), \quad w_\varphi(r)$$

$$r(0) = r_0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$



$$V_r = \dot{r}$$

$$V_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{br}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b} (\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \quad \leftarrow \quad \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^3$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\underbrace{r^2 \dot{\varphi}}_b) = 0 \quad \dot{\varphi} = b/r^2$$

№ 1.20

$$\dot{\varphi} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$



$$\vec{k} = \frac{\vec{v}}{\rho} \quad (\text{вектор кривизны})$$

$\vec{r}_1$  — нормаль

$\vec{r}_2, \vec{r}_3$  — касательные

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{r}_2 = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{r}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

↑  
условие движения по геодезической

# Кинематика вращающегося тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{\rho} = A(t) \vec{\rho}_0$$

$\vec{R}(t)$ ,  $A(t)$  - зад.  $\Rightarrow$  гл.м. т. задано.

$$A^T A = E$$

$$\det A = 1$$

опред. матрица отпр-ия системы

Пред-ум  $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt} | A^T A = E \Rightarrow \dot{A}^T(0) A(0) + A(0) \dot{A}^T = 0$$

$$\dot{A}(0) = \hat{\omega} : \hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$$

$$\text{д } t \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat{\omega} dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}, \quad \vec{\rho} = A \vec{\rho}_0$$

$$\vec{\rho}(dt) = (E + \hat{\omega} dt) \vec{\rho}_0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\rho}}|_{t=0} = \hat{\omega} \vec{\rho}|_{t=0}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \hat{\omega} \vec{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \hat{\omega} \vec{\rho}$$

$$\text{В } \mathbb{R}^3: \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\omega} \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \text{ где } \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} - \text{угловая скорость}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} - \text{формула Эйлера}$$



$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{e} \Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\vec{e} \Delta \varphi = \Delta \vec{\rho} - \text{вектор Эйлера}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

Формула Пуанкаре,  $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$  - угл. ускорение

## Плоское движение



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \omega^2 \vec{\rho}$$

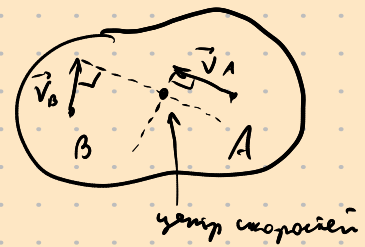
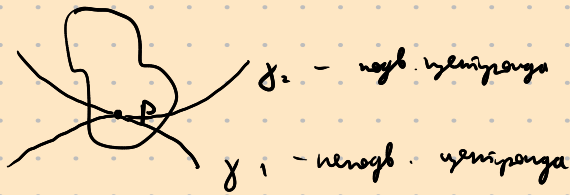
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho} - \text{2D Пуанкаре}$$

## Мгновенные центры скоростей и ускорений

Центр скоростей:  $P: \vec{V}_P = 0 = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_P$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_O - \vec{\omega} \times \vec{r}_P = 0 \Rightarrow \vec{r}_P = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_O}{\omega^2} - \text{всегда есть}$$

Но!  $P$  существует как в н-бе, так и в тел - но центр масс



Коренне без преобразования  
(в т. координат  $V$  тел равны)

Центр ускорения  $Q$

$$\vec{W}_Q = 0 = \vec{W}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_Q - \omega^2 \vec{r}_Q$$

$$\vec{\epsilon} \times \vec{W}_O - \epsilon^2 \vec{r}_Q - \omega^2 \vec{\epsilon} \times \vec{r}_Q = 0$$

$$\vec{\epsilon} \times \vec{W}_O - \epsilon^2 \vec{r}_Q - \omega^2 \vec{r}_Q + \omega^2 \vec{W}_O = 0$$

$$\vec{r}_Q = \frac{\vec{\epsilon} \times \vec{W}_O + \omega^2 \vec{W}_O}{\epsilon^2 + \omega^2}$$



$$\tan \gamma = \frac{\epsilon}{\omega^2}$$

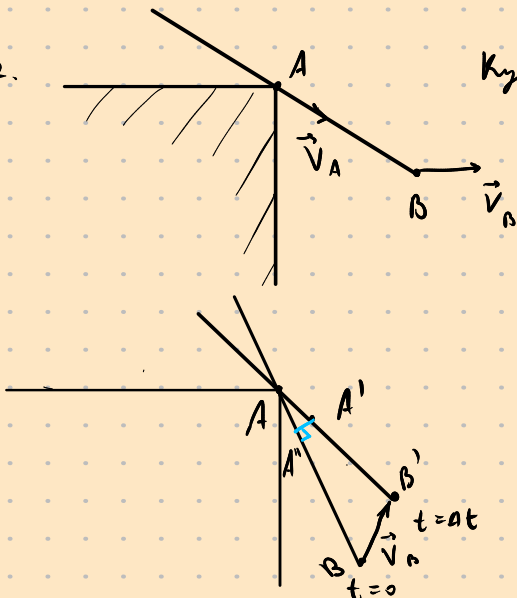
## Ползущий пункт (можно в 3D и в 2D)



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad | \quad \vec{e}_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{V}_A \cdot \vec{e}_{AB}$$

2.



Куда направлена  $\vec{V}_A$ , если точка скользит по углу?

Ответ: вдоль  $AB$ :

$$\vec{AA'} = \vec{AA''} + \vec{A''A'}$$

$$\vec{A'A'} \approx \vec{AA''} \text{ дуг}$$

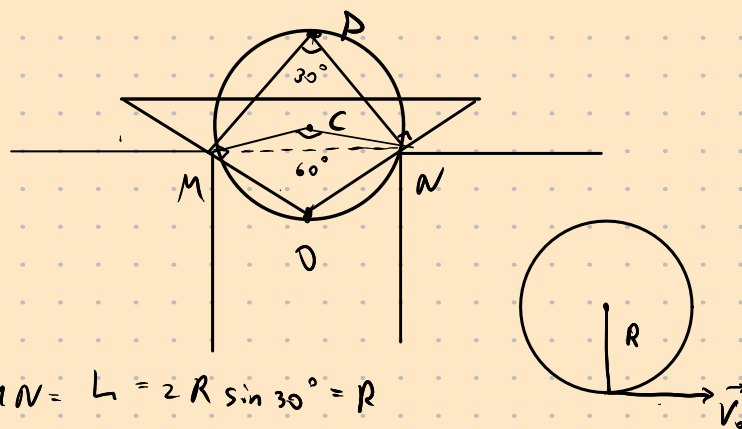
$$\vec{V}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{\vec{AA''}}{\Delta t}}_{\text{касательная}} + \underbrace{\frac{\vec{A''A'}}{\Delta t}}_{\text{дуг}} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA''}}{\Delta t} = \vec{V}_A$$

касательная  
дуга -  $\vec{V}_A$

УРА



$$W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$



$$MN = L = 2R \sin 30^\circ = R$$

$$PD = 2L \quad V_0 = 2\omega L$$



Без преобразования

$\omega, \varepsilon$  заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Проекция  $O$  - ось  $z$  с  $A$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y - R \\ 0 \end{bmatrix}$$

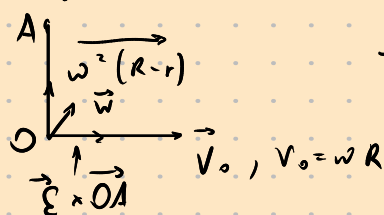
Полная скорость:  
(векторное  
умножение)

$$\begin{bmatrix} -a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Отрезок  $AO$  - некое тело!



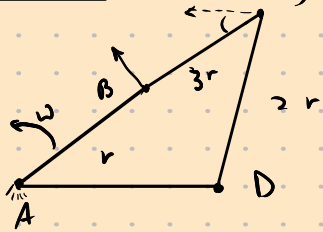
$\Omega$  - угл. скор.  $AO$

$$V_0 = \omega R = \Omega (R-r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R-r} \omega$$

$$\varepsilon = \frac{R}{R-r} \varepsilon$$

Задача 2 (3.24 ~)



$v_c = ?$

$v_c = ?$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec{V}_C \cdot \vec{BC} \Rightarrow v_c = 0$$

$\omega = \text{const}$

(найти кинетическую энергию в m-й мере и найти угол)

