Неявные ф-ии

$y^2 = x^2$

а) Сколько ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? Бесконечно много:

$X \subset \mathbb{R}$: $f(x) = x$, $x \in X$

$f(x) = -x$, $x \notin X$

б) Сколько непрерывных ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 4:

x, $-x$, $|x|$, $-|x|$

в) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 2:

x, $-x$

г) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 1:

x

Теорема о неявной ф-ии

Пусть $F(x,y)$ непр. дифф. в (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда $\exists\ \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b\}$ в к-ром $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$.

При этом $f(x)$ непр. дифф. на $(x_0 - a,\ x_0 + a)$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$F(x, f(x)) = 0$

$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow$ формула - не док-во!

Должна быть $\neq 0$ произв. той переменной, которая зависима (равна ф-ии).

№1

$u^3 - xu + y = 0$, $u = u(x,y)$

Найти u'_x, u'_y и du в т. $(3,-2,2)$ и $(3,-2,-1)$ - надо задать u! иначе непонятно что за точка

$x = 3$, $y = -2$, $u = ?$

$u^3 - 3u - 2 = 0$ | $u = 2$ - реш.

$(u-2)(u^2+2u+1)=0$

$(u-2)(u+1)^2=0 \qquad (u=-1)$

$$\begin{array}{r|l} -\,u^3-3u-2 & u-2 \\ \underline{u^3-2u^2} & \overline{u^2+2u+1} \\ -\,2u^2-3u & \\ \underline{2u^2-4u} & \\ -\,u-2 & \\ \underline{u-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$3u^2u'_x - xu'_x - u = 0$

$$u_x = \frac{u}{3u^2-x}$$

$3u^2u'_y - xu'_y + 1 = 0$

$$u'_y = -\frac{1}{3u^2-x}$$

$u'_x(A) = \frac{2}{9} \qquad u'_y(A) = -\frac{1}{9}$

$$du(3,-2,2) = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$$

! Лучше сразу брать дифференциал, не считая производные

$3u^2du - xdu - udx + dy = 0$

$$du = \frac{udx - dy}{3u^2-x}$$

№2

$F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0 \Rightarrow z=z(x,y)$ – найти dz

$F(u, v, w)$

$F'_u(x-y, y-z, z-x)(dx-dy) + F'_v(x-y, y-z, z-x)(dy-dz) + F'_w(x-y, y-z, z-x)\cdot$
$\cdot(dz-dx)=0$

$$dz = \frac{F'_u dx - F'_u dy + F'_v dy - F'_w dx}{F'_v - F'_w}$$

№3

$$\begin{cases} xe^{u+v}+2uv=1 \\ ye^{u-v}-\dfrac{u}{1+v}=2x \end{cases} \qquad \begin{matrix} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{matrix}$$

$u(1,2)=v(1,2)=0$ (подходит)

Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y при $x=1, y=2, u=v=0$

! При попытке найти u, v – трансц. ур-е. А произв. в т. – линейные

№4

$u^3 + 2yu + xy = 0 \quad u(1,-1) = -1$ (проверим: ОК)

Найти $d^2u\,(1,-1,-1)$

$3u^2du + 2udy + 2ydu + dx\,y + dy\,x = 0$

$du = -\frac{2udy + dxy + dy\,x}{3u^2+2y} \qquad du = dx + dy$

$6udu^2 + 3u^2d^2u + 2dudy + 2yd^2u + 2dudy + dxdy + dxdy = 0$

$d^2u(3u^2+2y) + du^2 \cdot 6u + 4dudy + 2dxdy = 0$

$d^2u - 6(dx+dy)^2 + 4dxdy + 4dy^2 + 2dxdy = 0$

$d^2u = 6dx^2 + 12dxdy + 6dy^2 - 4dxdy - 4dy^2 - 2dxdy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dxdy$

№ Т4

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

Выразить $r'_x,\ r'_y,\ \varphi'_x,\ \varphi'_y$ через r, φ

$$\begin{cases} 1 = r'_y \sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_y \\ 0 = r'_y\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_y \end{cases}$$

$\Delta = -r$

$\Delta_r = -r\sin\varphi$

$\Delta_\varphi = -\cos\varphi$

$r'_y = \sin\varphi \qquad \varphi'_y = \frac{\cos\varphi}{r}$

$$\begin{cases} 1 = r'_x\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_x \\ 0 = r'_x\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_x \end{cases}$$

$\Delta = r$

$\Delta_r = r\cos\varphi$

$\Delta_\varphi = -\sin\varphi$

$r'_x = \cos\varphi \qquad \varphi'_x = -\frac{\sin\varphi}{r}$

№ почему всё это было?

$u = u(x,y)$

Решить ур-е $xu'_y - yu'_x = 0$

Полярная замена: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ u = (r,\varphi)$

$u'_y,\ u'_x$ выразить через $u'_r,\ u'_\varphi$

$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi\,\varphi'_x$

$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y$

$u'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$ $\qquad$ $u'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$

Ур-е:

$\cancel{r}\cos\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \sin\varphi} + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{\cancel{r}}\right) - \cancel{r}\sin\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \cos\varphi} - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\cancel{r}}\right) = u'_\varphi$

$u'_\varphi = 0$

Ур-е $\quad u = f(r)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Отв.: $\quad u = F(x^2+y^2)$

№5

$(y-z)z'_x + (y+z)\, z'_y = 0 \qquad z = z(x,y)$

Замена: новые незав. переменные $\quad u = y - z, \; v = y + z$

новая ф-ия $\quad x = x(u,v)$.

$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x (x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$

$dx = x'_u du + x'_v dv$ $\qquad + z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$

$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y)\,dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1)\,dz = 0$

dy, dz - произвольные => коэф-ты при них $= 0$.

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\dfrac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Подставляем:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v\left(\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u}\right) = 0 \qquad \frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

№ Т3

$f: R^2 \to R^2, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$

1) Д-ть, что $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$, но f не яв-ся биективным

2) Найти $f(R^2)$ - мн-во значений f.

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Не яв-ся биективной в силу периодичности: $u(r,\varphi) = u(r, \varphi+2\pi)$

$v(r,\varphi) = v(r,\varphi+2\pi)$

2) $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$

$v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$ $\quad e^z$ прин. все знач. кроме 0

Экстремумы ф-ий нескольких переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Необх. усл-е: Если в точке лок. экстремума F диф., то $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ (стац. т.)

Дост. усл-е: Если $F(x_1,\dots,x_n)$ - дважды диф. в $U_\delta(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0$ - стац. т., то рас-им квадратичную форму от $(dx_1,\dots,dx_n)$:

$$d^2F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} F''_{x_ix_i}(\bar{x}_0)dx_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} F''_{x_ix_j}(\bar{x}_0)dx_idx_j$$

1. кв. ф. полож. опр. => $\bar{x}_0$ - лок. min
2. отриц. опред. => лок. max
3. неопр. => $\bar{x}_0$ - не лок. экстр.
4. полуопред. => ? (смотрим приращение)

Исследование кв. форм

1. Приведение к каноническому виду $k(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этот вид однозначен с точностью до перестановок ε_i

p = кол-во $\varepsilon_i = +1$ - положит. индекс инерции

q = кол-во $\varepsilon_i = -1$ - отриц. индекс инерции

$r = p+q$ - ранг

Положит. опред. <=> все $\varepsilon_i = +1$ $\quad p=n,\ q=0$

Отриц. опред <=> все $\varepsilon_i = -1$ $\quad p=0,\ q=n$

Неопред. <=> $\exists\, \varepsilon_i = 1$ и $\exists\, \varepsilon_j = -1$ $\quad 1 \le q,\ p \le n-1$

Полож. полуопред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \ge 0$, $\exists\, \varepsilon_j = 0$ $\quad p \le n-1,\ q=0$

Отриц. опред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \le 0$, $\exists\, \varepsilon_j = 0$ $\quad p=0,\ q \le n-1$

2. Критерий Сильвестра

$B = (b_{ij})$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$

Полож. опред. $\Leftrightarrow$ все $\Delta_i > 0$

3. Частный случай $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ Полож. опред. $\Leftrightarrow$ $A>0,\ AC-B^2>0$ $(\Rightarrow C>0)$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow$ $A<0,\ AC-B^2>0$ $(\Rightarrow C<0)$

Неопр $\Leftrightarrow$ $AC-B^2<0$

№1

$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$u'_x = 6xy - 12$

$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2,\ \pm 1 \\ y = \pm 1,\ \pm 2 \end{cases}$$

$u''_{xx} = 6y \qquad u''_{xy} = 6x$

$u''_{yy} = 6y$

$d^2F = 6y\,dx^2 + 6y\,dy^2 + 12x\,dx\,dy$

$\frac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dx\,dy \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0$ – неопред.

$\frac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dx\,dy$ – неопред.

$\frac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dx\,dy \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ – положит. опред. – min

$\frac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dx\,dy$ – отриц. опред. – max

№2

$$u = xyz\,(16 - x - y - 2z), \quad x, y, z > 0$$

$$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$$

$$u'_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \qquad u'_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$$

$$u'_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$$

$$\begin{cases} yz(16 - 2x - y - 2z) = 0 \\ xz(16 - x - 2y - 2z) = 0 \\ xy(16 - x - y - 4z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 2z = 16 \\ x + 2y + 2z = 16 \\ x + y + 4z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = -2yz = -16 \qquad u''_{yy} = -2xz = -16 \qquad u''_{zz} = -4xy = -64$$

$$u''_{xy} = z(16 - 2x - y - 2z) - yz = -8 \qquad u''_{xz} = y(16 - 2x - y - 2z) - 2yz = -16$$

$$u''_{yz} = x(16 - x - 2y - 2z) - 2xz = -16$$

$$d^2u(4,4,2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdy - 32dydz$$

$$\frac{d^2u(4,4,2)}{16}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0 \qquad \Delta_2 > 0 \qquad \Delta_3 > 0$$

Полож. опред. $\Rightarrow$ d^2u отриц. опред. $\Rightarrow$ лок. max

№3

$$u = x^4 + y^4 - 2x^2$$

$$u'_x = 4x^3 - 4x \qquad u'_y = 4y^3$$

$$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad u''_{yy} = 12y^2 \qquad u''_{xy} = 0$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy$$

$d^2u(0,0) = -4dx^2$ – отриц. полуопред. – ?

$u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 = 0$: $\quad \Delta x = 0 \quad \Delta y \neq 0$ $(+)$; $\quad 0 < \Delta x < \sqrt{2} \quad \Delta y = 0$ $(-)$

Экстремума нет.

$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2$ – полож. полуопр.

$$u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x^4) + \Delta y^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + \Delta y^4 > 0 \quad - \min$$

№ Т5

В стац. т. кв. форма d^2f полом. полуопред.

а) Может ли это быть min? Да.

б) Может ли быть max? Нет (всегда есть такие dx и dy, что приращение >0 - в силу d^2f)

в) Не быть экстремума? Да

№ 4

$x^2+y^2+u^2+2x-2y+4u-3=0$ - исслед. неявную ф-ию, зад. ур-ем.

$2x\,dx+2y\,dy+2u\,du+2dx-2dy+2du=0$

$(u+2)\,du+(x+1)\,dx+(y-1)\,dy=0$

$$du=-\frac{(x+1)dx+(y-1)dy}{u+2}$$

$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ - $du=0$

$u^2+4u-5=0$ $\quad u=1,-5$; $\quad(-1,1,1)$, $(-1,1,-5)$

$(u+2)d^2u+\underset{0}{du^2}+dx^2+dy^2=0$

$$d^2u=\frac{-dx^2-dy^2}{u+2}$$

$d^2u(-1,1,1)=-dx^2-dy^2$ - отриц. опред. (max)

$d^2u(-1,1,-5)=\frac{dx^2}{3}+\frac{dy^2}{3}$ - полом. опред. (min)

Условный экстремум

$u=f(\bar{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ $\quad(\bar{x}\in\mathbb{R}^n)$

Условия связи: $\varphi_1(\bar{x})=0,\dots,\varphi_m(\bar{x})=0$ $\quad(*)$ $\qquad n>m$

Точка $\bar{x}^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ наз-ся условным экстремумом $f(\bar{x})$ при усл. $(*)$ $\Leftrightarrow$

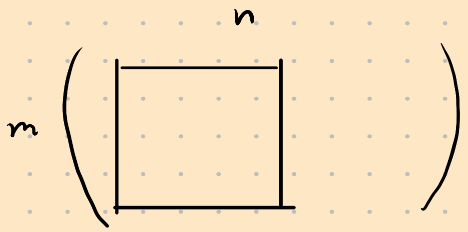
$\Leftrightarrow\ \exists\delta>0:\forall\bar{x}\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ при вып. ус-ий $(*)$ $\to f(\bar{x})>f(\bar{x}^0)$

Ф-ия Лагранжа $\mathcal{L}(\bar{x})=f(\bar{x})+\lambda_1\varphi_1(\bar{x})+\dots+\lambda_m\varphi_m(\bar{x})$ $\qquad$ далее $x\equiv\bar{x}$, $x^0\equiv\bar{x}^0$

$\mathcal{L}(x)\big|_*=f(x)\big|_*\quad\forall\lambda_i$

Необх. усл.: Пусть $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ непр.-дифф. в $U_\delta(x^0)$, тогда

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}=m$$



При этом $x_1, \dots, x_m$ выраж. через $x_{m+1}, \dots, x_n$ (неявно)

Пусть x^0 – т. усл. экстр. $f(x)$ при вып. (*)

Тогда $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 – стац. т. ф-ии Лагранжа

Сис-ма $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв. $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dots = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

Пример

$n = 2, \quad m = 1$

$u = \ln xy, \qquad x^3 + xy + y^3 = 0$

$\mathcal{L} = \ln xy + \lambda(x^3 + xy + y^3)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = \dfrac{1}{x} + \lambda(3x^2 + y) = 0 \\ \mathcal{L}'_y = \dfrac{1}{y} + \lambda(3y^2 + x) = 0 \\ x^3 + xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = -\lambda(3x^2 + y) \\ \dfrac{1}{y} = -\lambda(3y^2 + x) \end{cases} \qquad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy} = -\lambda \cdot \dfrac{3x^2}{y} - \lambda \\ \dfrac{1}{xy} = -\lambda \cdot \dfrac{3y^2}{x} - \lambda \end{cases}$$

$\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow y = x$

$2x^3 + x^2 = 0$

$x_1 = 0$ – не подх. $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$x = y = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = 8$ – возможно усл. экстр.!

Достаточное усл-е: (**) – продифф. ур-я связи

$dx_1, \dots, dx_m$ выраж. через $dx_{m+1}, \dots, dx_n$

Пусть f, φ_i – дважды непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$, x^0, λ_i – реш. сис-мы

$n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв.

$d^2 \mathcal{L}(x^0)\Big|_{(**)}$ - квадр. форма от $n-m$ незав. диф-ов

По ней окончательно опр-ся характер усл. экстремума и его сущ-е.

! Если $d^2\mathcal{L}(x^0)$ до подстановки полож. или отриц. опред. - подстановку можно не делать, и так всё ясно. Иначе нужна подстановка. Если после подстановки форма полуопред. - нужно доп. исследование.

Пример (всё тот же)

$$\mathcal{L}''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \lambda \cdot 6x = -4 + 8 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -28$$

$$\mathcal{L}''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda \cdot 6y = -28$$

$$\mathcal{L}''_{xy} = \lambda = 8$$

$$d^2\mathcal{L} = -28\,dx^2 - 28\,dy^2 + 16\,dx\,dy$$

$$\frac{d^2\mathcal{L}}{4} = -7dx^2 - 7dy^2 + 4dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$$ - отриц. опред.

Понятно, что $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ - условный максимум.

Пример 2

$$u = 1 - 4x - 8y \qquad x^2 - 8y^2 = 8$$

$$\mathcal{L} = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ y = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mp 4 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = \mp \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda = \mp 1 \qquad \mathcal{L}''_{yy} = -16\lambda = \pm 8 \qquad \mathcal{L}''_{xy} = 0$$

$$d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 - 8dy^2) \qquad d^2\mathcal{L}\Big|_{**} = \pm 4dy^2$$

$(**)$ $2x\,dx - 16y\,dy = 0$ ⊕ $(-4, 1)$ - полож. опред. => усл. min

$dx = 8y\frac{dy}{x} = -2dy$ ⊖ $(4, -1)$ - отриц. опред. => усл. max

Пример 3

$u = xy, \quad x^2+y^2=1$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}$

$2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$

$2y^2 - 1 = 0$

Подходят: $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\lambda = -\frac12 \qquad -\frac12 \qquad \frac12 \qquad \frac12$

$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \qquad \mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda \qquad \mathcal{L}''_{xy} = 1 \qquad \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 2\lambda, \quad \Delta_2 = 4\lambda^2 - 1$ — неопредел. форма

$d^2\mathcal{L} = 2\lambda\, dx^2 + 2\lambda\, dy^2 + 2\,dx\,dy$

$(**)\ 2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$$dy = -\frac{2x\,dx}{2y} = \begin{cases} -dx, & x=y,\ \lambda=-\frac12 \\ +dx, & x=-y,\ \lambda=\frac12 \end{cases}$$

$$d^2\mathcal{L}\Big|_{**} = \pm dx^2 \pm dy^2 + 2\,dx\,dy = \begin{cases} -4\,dx^2, & \lambda=-\frac12 \text{ — отриц. форма — усл. min} \\ 4\,dx^2, & \lambda=\frac12 \text{ — полож. форма — усл. max} \end{cases}$$

Ответ: $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. min}}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. max}}$

Пример 4

$u = 2x^2 + 12xy + y^2 \qquad x^2 + 4y^2 = 25$

$\mathcal{L} = 2x^2 + 12xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 4x + 12y + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 12x + 2y + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} x(2+\lambda) + 6y = 0 \\ 6x + y(1+4\lambda) = 0 \end{cases}$$ — $(0,0)$ не подходит под усл-я связи

Чтобы у (1) были реш-я кроме $(0,0)$: $\begin{vmatrix} 2+\lambda & 6 \\ 6 & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-34 + 9\lambda + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -\frac{17}{4} \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Далее ничего интересного. мне лень.

Ответ: при $\lambda = 2$: два усл. min, при $\lambda = -\frac{17}{4}$: два усл. max