

Рамирёв Александр Владимирович

Интересы

Центры смеха: лекции Рамирёва, интернет

Белый смех: Муравьев; Маркеев; Горюнов (и конусы); Болотенко

Аксиоматика Кусачинской механики

1. Аксиома \mathbb{R}^3 - все объекты - в Евклидовом пр-ве \mathbb{R}^3 .
2. \exists движение: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ (в \mathbb{R} - время)
3. \exists мат. точка: (m, \vec{r}) , $m = \text{const} > 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4. \exists взаимодействие: $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2) \rightarrow \exists \vec{F}$ -мех: $\vec{F} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\begin{array}{ccc} \vec{F} & & -\vec{F} \\ \longrightarrow & & \longleftarrow \\ (m_1, \vec{r}_1) & & (m_2, \vec{r}_2) \end{array}$$
5. \exists сис-мы координат и способ параметризации времени, такие что

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Также сис-мы коор-сз ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.: $\int F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0$

$$q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix}$$

$$t = t(t', q'), \quad q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0 - \text{те же } q\text{-ы!}$$

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правил составленных ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относительно преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{v}t + A\vec{r} \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

← преобр. (группа) Галилея.

$$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = \text{const}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \mapsto m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}$$

Угловые обозначения

① $\vec{r} \rightarrow r^i, i = 1 \dots 3$

② $A \rightarrow a_{ij}$

$$\begin{matrix} a_j \\ a^j \end{matrix}$$

нормированные
↕

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \equiv a^i b^i$ (проблемы индексации)

$$A\vec{r} = a_{ij} r^j$$

↖
дезиндексированные

④ a, \dots, h - фиксированные индексы

$x^a b^a$ - ж-т с номером a ; без суммирования!

⑤ $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$$

напр. $df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$

Кинематика Точки

Декартовы координаты



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{r}^2 \\ \dot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{скорость}$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}^1 \\ \ddot{r}^2 \\ \ddot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{ускорение}$$

Сопровождающий трёхмерный процесс



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{r}_{,s}}_{\vec{t}} \dot{s} = \vec{t} v$$

$$\vec{w} = \vec{t}_{,s} v^2 + \vec{t} \dot{v}$$



$$\Delta s \approx \rho \Delta \epsilon$$

$$\Delta \vec{t} \approx \Delta \epsilon \vec{n} = \frac{\Delta s}{\rho} \vec{n}$$

$$\vec{t}_{,s} = \frac{\vec{n}}{\rho} \Rightarrow \vec{w} = \underbrace{\dot{v} \vec{t}}_{w_t \text{ тангенц.}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho} \vec{n}}_{w_n \text{ нормальн.}}$$



Криволинейные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} - \text{криволинейные (обобщённые) координаты}$$

$$\det [r_{ij}^1] \neq 0! \quad \text{Взаимно-однознач. соотв.}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} - \text{цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i - \text{var} \\ q^{fix i} - \text{fix} \end{cases} \quad i=1, 2, 3 \quad - \quad \gamma_i - \text{координатные линии}$$



$$H_k = |\vec{g}_k| - k-я \text{ компонента}$$

$$H_k = \sqrt{(r_{,k}^1)^2 + (r_{,k}^2)^2 + (r_{,k}^3)^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{g}_a}{H_a} - \text{орты (норм. векторы) локального базиса}$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$



Скорость в кривых коорд.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \dot{q}^k \vec{g}_k$$

$$\textcircled{1} \vec{v} = \sum \underbrace{H_k}_{\text{составляющая}} \dot{q}^k \vec{e}_k$$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik} - \text{метрич. тензор}} \dot{q}^i \dot{q}^k = g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\textcircled{2} v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\text{Если } \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$v^2 = \sum H_i^2 (\dot{q}^i)^2$$

Ускорение в кривых коорд.

$$\vec{w} = \dot{\vec{g}}_k = \ddot{\vec{r}} = \left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} \right)' = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k}$$

Применяя по $q_k \leftrightarrow \text{формулы}$

$$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec{r}_{,ki} \dot{q}^i \quad \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,i} \dot{q}^i \quad \dot{\vec{r}}_{,k} = \vec{r}_{,ki} \dot{q}^i$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,k} \quad \left(\text{т.к. } v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\frac{d\dot{\vec{r}}}{d\dot{q}^k}}_{\dot{\vec{r}}_{,k}} = \vec{r}_{,k}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = (v^2/2)_{,k}$$

$$! \quad ' = \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$③ \vec{w} \cdot \vec{g}_a = \frac{d}{dt} (v^2/2),_a - (v^2/2),_a$$

$$④ \vec{w} \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{H_a} \left[\frac{d}{dt} (v^2/2),_a - (v^2/2),_a \right]$$

Оператор Гамильтона - лагранжиана

$$\mathcal{E}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_a = \mathcal{E}_k \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Преобразованием системы H_k и их вычисления

$$q^a \rightarrow q^a + dq^a \quad - \text{только одна координата}$$

$$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a} \cdot dq^a$$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_k$$

$$T = \frac{mv^2}{2} - \text{кин. энергия}$$

$$m \mathcal{E}_k \left(\frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \vec{g}_k = Q_k - \text{обобщенная сила}$$

$$\mathcal{E}_k(T) = Q_k$$

$$(6) \frac{d}{dt} T_{,k} - T_{,k} = Q_k$$

$$\text{Для силы } \vec{e}_k: \quad \frac{1}{H_a} \mathcal{E}_a(T) = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ - зависимость $q(q')$ - замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot{q}^i = \underbrace{a^i_{,j}}_{\text{матрица Якоби}} \dot{q}^j$ - контравариантный вектор (подар или, к-рый при смене базиса бежит себя встать)
(тензор 2 рода)

$$\dot{q} = J \dot{q}'$$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ - скал. ср-ва

$f(q(q'))$ $f_{,i} = f_{,i} a^i_{,j}$ - градиент не будет уже не скал! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор - тензор 1 рода)

$$\underbrace{\nabla' f}_{\text{спроси}} = \nabla f J \quad \nabla f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже считали!}} = (J^T)^{-1} \nabla f^T$$

Разница (между ко- и контр-) теряется, если преобр-е ортогонально $((J^T)^{-1} = J)$

Метрический тензор

$$\vec{g}_\kappa = \vec{r}_{,\kappa} \quad \vec{r}(q(q')) - \text{замена}$$

$$g_{\kappa'} = \vec{r}_{,\kappa} \cdot \vec{r}_{,\kappa'} = \vec{g}_\kappa \cdot \vec{r}_{,\kappa'} \quad - \text{получается, } \vec{g}_\kappa - \text{ковариантный тензор}$$

$$\text{Метрический тензор: } \vec{v} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow v^2 = \underbrace{g_i g_\kappa}_{\text{метрич. тензор!}} \dot{q}^i \dot{q}^\kappa, \quad g_{i\kappa} = g_i g_\kappa$$

$$g_{i'\kappa'} = q_{,i'}^i q_{,\kappa'}^\kappa g_{i\kappa} - \text{ковариантный тензор 2-го ранга типа (0,2)}$$

Кинематика Твёрдого Тела

Твёрдое тело - совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



$M \in \text{телу}$ - носок ТТ (Твёрдого тела)

Движение Твёрдого тела - это движение носка и движение ТТ относ. носка (вращение).

Вращение. Углы конечного вращення



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

Углы Эйлера

$\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем си-му координат Ox :

$$x \xrightarrow[\substack{\psi \\ 3 \text{ (относ. } x_3)}]{\psi} x' \xrightarrow[\substack{\theta \\ 1'}]{\theta} x'' \xrightarrow[\substack{\varphi \\ 3''}]{\varphi} \xi$$



ψ - угол прецессии

θ - угол нутации

φ - угол собственного вращения

Параметры ψ , θ и φ зависят от в-зи-огн соотв. с положением Твёрдого тела
везде кроме носка. $\theta = \{0, \pi\}$

Самые простые (картабельные) углы



$$x \xrightarrow[\substack{\psi \\ 3}]{\psi} x' \xrightarrow[\substack{\theta \\ 1'}]{\theta} x'' \xrightarrow[\substack{\gamma \\ 2''}]{\gamma} \xi$$

ψ - крен

θ - танкет

γ - крен

Выводение при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Каждая си-ма углов конечного вращення может иметь вырождение.

Ортогональные матрицы



$$\vec{r}' = A \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 \quad \forall \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T A^T A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = I -$$

Определение орт. матрицы

Св-ва

① Теорема Бунге - Коши: $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

↗ поворот
↘ зеркальный поворот

② $A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③ $\forall A, B$ - орт. $\rightarrow C = AB$ - ортогональная

$$C^T C = B^T \cdot A^T \cdot AB = E$$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

① $\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

③ $\exists E \in G: \forall A \in G \rightarrow AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \rightarrow \exists A^{-1} \in G: A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Группа $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = E$

$SO(3)$ - спец. орт. группа; $\forall A \in SO(3) \rightarrow |A| = 1$ (группа поворотов)

⑤ $SO(3)$ - основная мат. модель твёрдого тела с неподвижной точкой.



$$\vec{e}'_i = a_{ij} \vec{e}_j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = [L\vec{e}'_i]_{\vec{e}}$$

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij} \overset{j \rightarrow i}{=} a_{ji} = \cos(\widehat{e'_i, e_i})$$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однознач. соответствие между положением твёрдого тела и $A \in SO(3)$.

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} \Rightarrow 6 \text{ независимых формул} \Rightarrow$$

\Rightarrow найдем из $SO(3)$ - трехмерное подпространство в 9-мерном пр-ве матриц

$$\textcircled{6} \quad a_{ij}^i = \delta_{ij} \quad A^{-1} = \frac{[a_{ij}^i]^T}{|A|} = A^T \Rightarrow \text{УТА}$$

\nwarrow из-за A \nearrow ан. гонометрии

Собственные векторы и собственные значения ортогональных матриц

$$A \vec{r} = \lambda \vec{r} \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\text{tr } A = a_{ii}^i$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr } A + \lambda \text{tr } A - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec{r}_1 : A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \text{инвариантный вектор}$$

Докажем, что $|\lambda_a| = 1$

$$A \vec{r}_a = \lambda_a \vec{r}_a \quad | \cdot (\text{век}-e)^+ \quad A^+ = \overline{A^T} \quad \leftarrow \text{комплексное сопр-е}$$

\leftarrow эрмитово сопр-е

$$\vec{r}_a^+ A^+ A \vec{r}_a = \lambda_a^+ \lambda_a \cdot \vec{r}_a^+ \vec{r}_a \quad \text{Если } \vec{r}_a = \vec{p} + i\vec{q}, \text{ то } \vec{r}_a^+ \vec{r}_a = \vec{p}^T \vec{p} + \vec{q}^T \vec{q} = |\vec{r}_a|^2 > 0$$

\uparrow "E \uparrow $|\lambda_a|^2$

$$|\vec{r}_a|^2 = |\lambda_a|^2 \cdot |\vec{r}_a|^2 \Rightarrow |\lambda_a| = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = \frac{\text{tr } A - 1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{(\text{tr } A - 1)^2}{4}}$$

$$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i\vec{q} \quad \{ \vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q} \} - \text{правый ОНБ}$$

Инвар. подпр-во A :



$P \perp \vec{r}_1$, P - инвар. подпр-во A .

$$\exists \vec{r} \in P \quad A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$$

$$(A \vec{r})^T \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}^T A^T}_{\vec{r}_1^T} \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}_1^T}_{0} \vec{r}_1 \Rightarrow A \vec{r} \in P$$

УТА

Теорема Эйлера о конечных поворотах

\forall е* вращения в 3-мерном пространстве с ненулев. осью $\exists \vec{e}$ и угол φ конечн. поворота, совмещающего тело (в эту систему введем \vec{r}_1)

Связь ортогональной матрицы и пар-ов Эйлера поворота



Рассмотрим \vec{e} как ось поворота, \vec{e}_2, \vec{e}_3 лежат в плоскости с \vec{r} и \vec{e} .

\vec{r} разлагается на φ относительно \vec{e} в \vec{r}' .

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \text{ где } \vec{r}_1 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e} + (\vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}) \cos \varphi + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi =$$

$$= (\mathbb{E} \cos \varphi + \hat{e} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^T) \vec{r}$$

$$\hat{e} \vec{r} = \vec{e} \times \vec{r}, \quad \hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{e} \vec{e}^T = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1 e^2 & e^1 e^3 \\ e^2 e^1 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Получим $A = \mathbb{E} \cos \varphi + \hat{e} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^T$ (2) - матрицу умб. опис. поворота!

$$\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) = \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle \vec{e} - \vec{r}$$

$$\hat{e}^2 \vec{r} = (e e^T - \mathbb{E}) \vec{r}$$

$$A = \mathbb{E} + \hat{e} \sin \varphi + \hat{e}^2 (1 - \cos \varphi)$$

Пусть $\vec{\varphi} = \vec{e} \varphi$ - вектор Эйлера (условный вектор - направление не подходит)

* $\vec{\varphi} \mapsto \hat{\varphi}$ - косин. оператор Вуга (1).

Тогда можно показать, что $A = e^{\hat{\varphi}}$ (по Эйлера)

Выражение парам. Эйл. поворота через э-ты $A \in SO(3)$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow \text{tr } A = \underbrace{3 \cos \varphi}_{\mathbb{E} \cos \varphi} + \underbrace{1 - \cos \varphi}_{(1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^T}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{tr } A - 1}{2}$$

$$A = [a_{ij}]$$

$$a_2^3 - a_3^2 = 2 e^1 \sin \varphi \Rightarrow e^1 = \frac{a_2^3 - a_3^2}{2 \sin \varphi} \quad e^2 = \frac{a_3^1 - a_1^3}{2 \sin \varphi} \quad e^3 = \frac{a_1^2 - a_2^1}{2 \sin \varphi}$$

$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$; показав, что $\varphi \in [0, \pi]$! получается \vec{e} таким, что

показ. поворот - это против часовой стрелки. Проверка в одр. сторону - даёт $-\vec{e}$.

Оператор малого поворота. Угловая скорость Тёрзгана Теорема

Если $\varphi \ll 1$, то

$A \simeq E + \hat{\varphi}$ - оператор малого поворота

Это верно и для $A \in SO(n)$:

$$A(t) \in SO(n); \quad A(0) = E$$

$$A^T A = E \quad | \quad d/dt|_{t=0}$$

$$\dot{A}^T A + A^T \dot{A} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\dot{A}^T(0) = -\dot{A}(0) \Rightarrow \dot{A}(0) - \text{кососимметричен} \Rightarrow A \simeq E + \Delta t \hat{\omega}$$

Угловая скорость



$$\Delta \varphi = \vec{e} \Delta \varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} - \text{угловая скорость}$$

Распределение скоростей и ускорений в Тёрзган Теореме



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}$$

$$\vec{\rho}(t + \Delta t) \simeq (E + \Delta \hat{\varphi}) \vec{\rho}(t)$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\rho}}{\Delta t} \quad \vec{\dot{\rho}} = \hat{\omega} \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} - \text{сп-ла Эйлера}$$

$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{W}}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) - \text{сп-ла Рубанова}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

