Фомичёв Александр Владимирович

Литература

Чёрный список: лекции Фомичёва, интернет

Белый список: Журавлёв; Маркеев; Гантмахер (~ конец сема); Болотенко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома R^3 – все объекты – в Евклидовом пр-ве R^3.
2. $\exists$ движение: $R \mapsto R^3$ (в R – время)
3. $\exists$ мат. точка: $(m, \vec r)$, $m = const > 0$, $\vec r \in R^3$
4. $\exists$ взаимодействие: $\forall\ (m_1, \vec r_1), (m_2, r_2) \to \exists\ \vec F$ – сила: $F \parallel (\vec r_1 - \vec r_2)$

$$(m_1, \vec r_1) \xrightarrow{\vec F} \quad \xleftarrow{-\vec F} (m_2, \vec r_2)$$

5. $\exists$ сис-ма координат и способ параметризации времени, такие что

$$m \ddot{\vec r} = \vec F$$

Такие сис-мы наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot q, \ldots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

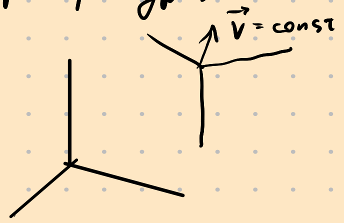
$t = t(t', q')$, $q = q(t', q')$

$F_i(t', q', \dot q', \ldots, q'^{(n)}) = 0$ – те же ф-ии!

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правила составления ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны отнс. преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} r' = \vec r_0 + \vec v t + A t, \quad A \text{ – ортог. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

← преобр. (группа) Галилея.

$\vec r_0, \vec v, A, \tau = const$

$$m \ddot{\vec r} = \vec F \longmapsto m \ddot{\vec r}' = \vec F$$

Индексные обозначения

① $\vec{r} \to r^i, \quad i = 1 \ldots 3$

② $A \to a_{ij}$

a_j

a^{ij}

немой индекс

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i \equiv a^i b^i$ (правило Эйнштейна)

$A\vec{r} = a_{ij} r^j$

бегущий индекс

④ $a, \ldots, h$ – фиксирующие индексы

$x^a b^a$ – эл-т с номером a; без суммирования!

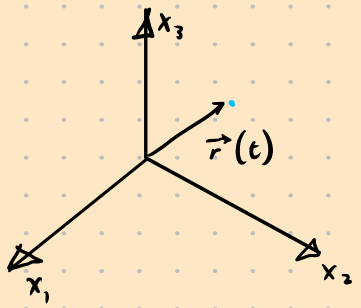
⑤ $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$

Напр. $df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k}\, dx^k$

Кинематика точки

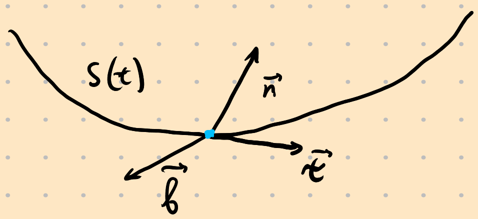
Декартовы координаты



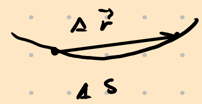
$$\vec r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} \qquad V = \dot{\vec r} = \begin{bmatrix} \dot r^1 \\ \dot r^2 \\ \dot r^3 \end{bmatrix} \text{ — скорость}$$

$$\vec w = \ddot{\vec r} = \dot{\vec V} = \begin{bmatrix} \ddot r^1 \\ \ddot r^2 \\ \ddot r^3 \end{bmatrix} \text{ — ускорение}$$

Сопровождающий трёхгранник Френе

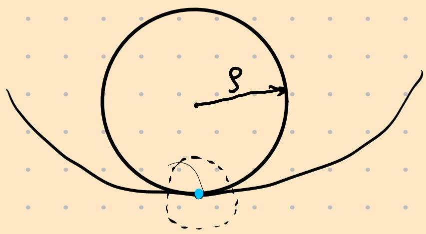


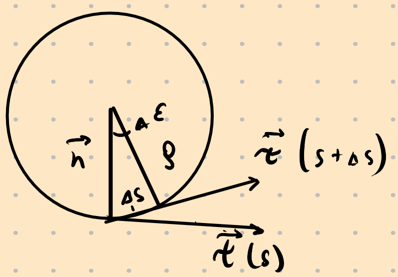
$$\vec r = \vec r(s(t))$$



$$\vec V = \underbrace{\vec r_{,s}}_{\vec\tau}\,\dot s = \vec\tau V$$

$$\vec w = \vec\tau_{,s} V^2 + \vec\tau \dot V$$





$$\Delta s \simeq \rho\,\Delta\varepsilon$$

$$\Delta\vec\tau \simeq \Delta\varepsilon\,\vec n = \frac{\Delta s}{\rho}\vec n$$

$$\vec\tau_{,s} = \frac{\vec n}{\rho} \Rightarrow \vec w = \underbrace{\dot V\vec\tau}_{w_\tau} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho}\vec n}_{w_n}$$

w_τ тангенц. $\qquad w_n$ нормальное

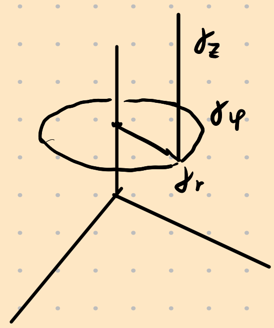
Криволинейные координаты

$\vec r = \vec r(q)$; $\quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}$ — криволинейные (обобщённые) координаты

$\det[r^i_{,j}] \ne 0$! Взаимно-однознач. соотв.

$\vec r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$, $\quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$ — цилиндрические координаты

$\begin{cases} q^i \text{ — var} & i = 1, 2, 3 \\ q^{j\ne i} \text{ — fix} \end{cases}$ — γ_i — координатные линии

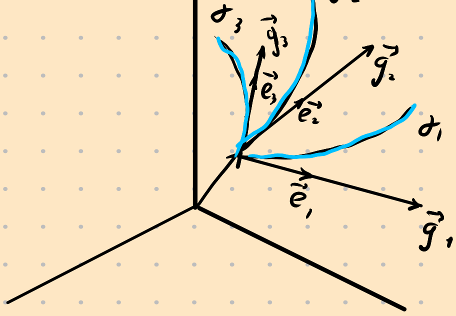


$H_k = |\vec{g}_k|$ — к-т Ламе

$H_k = \sqrt{(r^1_{,k})^2 + (r^2_{,k})^2 + (r^3_{,k})^2}$

$\vec{e}_\alpha = \dfrac{\vec{g}_\alpha}{H_\alpha}$ — Орты (норм. векторы) лок. базиса

$|\vec{e}_\alpha| = 1$



Скорость в кривол. коорд.

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}\dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^k}_{\text{составляющая}}\vec{g}_k$

1 $\vec{v} = \sum \underbrace{H_k \dot{q}^k}_{\text{составляющая}} \vec{e}_k$

$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik}\text{ - метрич. тензор}} \cdot \dot{q}^i \cdot \dot{q}^k = g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k$

2 $v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$

Если $\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$:

$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot{q}^i)^2$

Ускорение в кривол. сис-ме

$\vec{w} \cdot \vec{g}_k = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k})^{\cdot} - \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k}$

Произв. по q_k $\leftrightarrow$ точки:

$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i$ $\quad \dot{\vec{r}}_{,k} = \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i$

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,i} \cdot \dot{q}^i$

$\dfrac{\partial}{\partial q^k}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$

! $\;{}^{\cdot} = \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$

$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \left(\dfrac{v^2}{2}\right)_{,k}$ $\qquad$ (т.к. $v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$)

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec{r}}_{,\dot{k}}}_{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}^k}} = \vec{r}_{,k}$

$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,\dot{k}} = (v^2/2)_{,\dot{k}}$

(3) $\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,a}$

(4) $\vec{w}\cdot\vec{e}_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - (v^2/2)_{,a}\right]$

Оператор Эйлера - Лагранжа

$$\xi_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Геометрический смысл H_k и их вычисление

$q^a \to q^a + dq^a$ — только одна комп.

$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a}\cdot dq^a$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad |\cdot\vec{g}_k$ $\qquad T = \frac{mv^2}{2}$ — кин. энергия

$m\,\xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{g}_k = Q_k$ — обобщённая сила

$\xi_k(T) = Q_k$

(6) $\frac{d}{dt}T_{,\dot{k}} - T_{,k} = Q_k$

Для базиса $\vec{e}_k$: $\quad \frac{1}{H_a}\xi_a(T) = \vec{F}\vec{e}_a$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ - зависимость $\qquad q(q')$ - замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot{q}^i = \underbrace{q^i_{,i'}}_{\text{матрица Якоби}}\dot{q}^{i'}$ — контравариантный вектор (набор чисел, к-рый при смене базиса ведёт себя вот так) (тензор I ранга)

$\dot{q} = J\dot{q}'$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ - скал. ф-ция

$f(q(q'))$ $\qquad f_{,i'} = f_{,i}\cdot q^i_{,i'}$ — градиент меняется уже не так! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор - тензор I ранга)

$\underbrace{\nabla' f}_{\text{строка}} = \nabla f J \qquad \nabla' f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже столбец!}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$

Разница (между ко- и контра-) теряется, если преобр-е ортогонально $\left((J^T)^{-1} = J\right)$

Метрический тензор

$\vec{g}_k = \vec{r}_{,k} \qquad \vec{r}(q(q')) - \text{замена}$

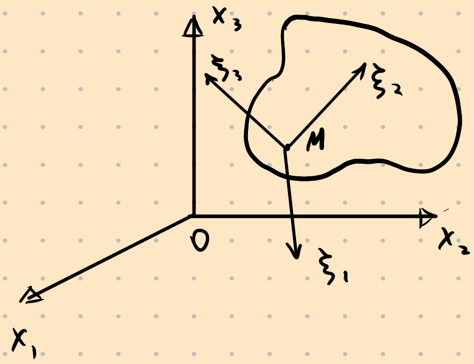
$g_{k'} = \vec{r}_{,k} \cdot q^k_{,k'} = \vec{g}_k\, q^k_{,k'}$ — получается, $\vec{g}_k$ — ковариантный вектор

Метрический тензор: $\vec{V} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow V^2 = \underbrace{g_i g_k}\, \dot{q}^i \dot{q}^k$, $g_{ik} = g_i g_k$ — метрич. тензор!

$g_{i'k'} = q^i_{,i'}\, q^k_{,k'}\, g_{ik}$ — ковариантный тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Кинематика твёрдого тела

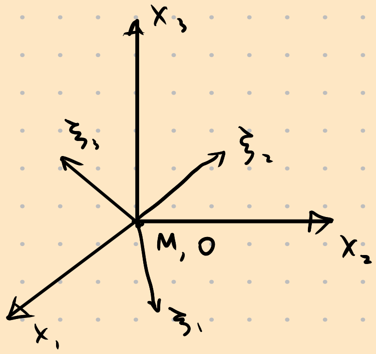
Твёрдое тело – совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



$M \in$ телу – полюс ТТ (твёрдого тела)

Движение твёрдого тела – это движение полюса и движение ТТ относ. полюса (вращение).

Вращение. Углы конечного вращения



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

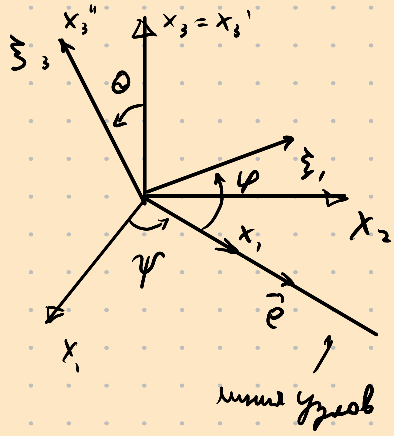
- Углы Эйлера

$\exists$ (пусть) $\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем сис-му координат Ox:

$$x \xrightarrow[3\,(\text{относ. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



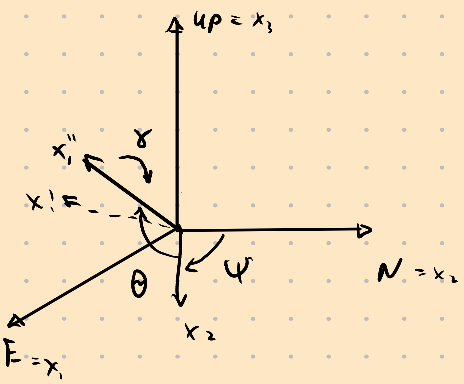
ψ – угол прецессии

θ – угол нутации

φ – угол собственного вращения

Параметры ψ, θ и φ наход. во вз.-одн. соотв. с положением твёрдого тела везде кроме полож. $\theta = \{0, \pi\}$

- Самолётные (корабельные) углы



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ – курс

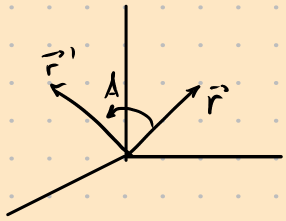
θ – тангаж

γ – крен

Вырождение при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Любая сис-ма углов конечного вращения будет иметь вырождение.

Ортогональная матрица



$\vec{r}\,' = A\vec{r}$

$|\vec{r}\,'|^2 = |\vec{r}|^2 \quad \forall \vec{r}$

$|\vec{r}\,'|^2 = \vec{r}\,'^T \vec{r}\,' = \vec{r}\,' A' A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^{\,T} \cdot \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = 1$ –

Определение ортог. матрицы

Св-ва

1. Теорема Бине - Коши: $|AB| = |A| \cdot |B|$

$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$

поворот

зеркальный поворот