

Интегрирование по Фурье

$f(x) \in L_R(-1, 1)$ и ум. непрерывна

L_R -адв. интегр., т.е. $\int_{-1}^1 f(x) dx$ адв. с.х.

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \sin \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad - \text{коэф-ты Фурье}$$

Лемма Римана

$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos tx dt \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$
 I - проме.

$$\int_I f(t) \sin tx dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие: $f(x) \in L_R(-1; 1) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

Форм. разг. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{1} + b_n \sin \frac{\pi n x}{1} \right]$ - разг. Фурье $f(x)$

Обсужда

1. Если $f(x)$ нечётна, то $a_n = 0$

Если $f(x)$ чётна, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - непрерывна \Rightarrow универсальная норма. Тогда по лемме Римана Фурье

Дополнительное условие разностности в п. Фурье (следствие из пр. Лебесга)

1. $f(x) \in L_R(-1; 1)$, ум. непрерывна

В т. x_0 имеет конечные односторонние производ. $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Тогда разг. Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Пусть $f(x) \in L_R(-1; 1)$, ум. непрерывна

x_0 - т. разрыва 1 рода, \exists конечные "обобщённые" односторонние

производные:

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда разг. Фурье в т. x_0 сходится к ср. арифм. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



Число $l = \pi$, тогда $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Задача 1

Рассмотрим в п. 4-м $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

гр. симметрична относительно начала координат.



Ф-ция нечетная $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \, dt \quad \text{— четная, } \varphi\text{-чл.}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign} t \sin nt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не св-ся равномерно с.х. на всей прямой, т.е. сумма его разбегается

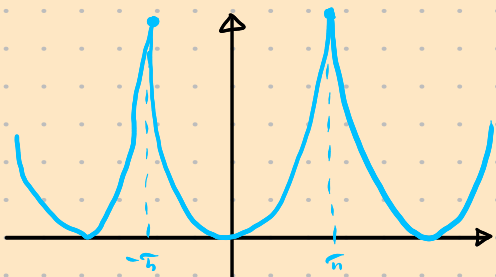
(р/н с.х. ряд из перп. ф-ции им. перп. члены).

Задача 2

$f(x) = x^2$ на $-\pi < x < \pi$

с.х.-а в $\forall \pi$, но не равномерно

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Докз. что p/n c_x p -Фурье

$f(x) \in L_R[-1; 1]$, неубывающ, и равномерно непрерывна на $[-1; 1]$.

($f(x)$ неуб. на $[-1; 1]$, $f'(x)$ равномерно неуб. на $[-1; 1]$, т.е. есть конечное число τ -разрывов Σ точек). Тогда p -Фурье $f(x)$ c_x p/n на всей числовой прямой.

Узлемо: если $f'(x)$ убывающ на промеж, то у нее не может быть разрывов Σ точек. Поэтому в теореме о равн. c_x p -Фурье в τ -разрывах $f'(x)$ не уб.

Реш. Ф. x^2 c_x p/n на $(-\infty; +\infty)$.

Упр. 22-110

Решит спм. ряд (для периода $l=2\pi$)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1) \quad c_x \text{ } p/n \text{ на } (-\infty; +\infty). \text{ Тогда это сумма}$$

$f(x)$ - неуб. 2π -неубыв. ф-ции, и (1) - p -Фурье этой суммы.

$$\square \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) - p/n \text{ } c_x.$$

$\Rightarrow f(x)$ неуб.

Сумма p/n c_x рядов из неуб. ф-ций - неуб. ф-ция.

У нее неубывающ 2π -св.

p/n c_x ряд из неуб. ф-ций на конечном отрезке можно почленно интегрировать.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Если p/n c_x ряд сходится на отрезке, то остается p/n c_x .

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx), \quad m \text{ фикс.}$$

- c_x p/n .

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt \right) =$$

$\stackrel{0}{=} \text{ если } n \neq m \quad \stackrel{0}{=}$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt$$

Ортонормированный базис $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ в пространстве функций на отрезке $[-\pi; \pi]$ со скалярным произведением $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

■

Задача 22-111

Дать в явном виде?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ — ряд сч. п/н на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ряд Фурье с членом $\cos nx$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ — расходится $\nrightarrow 0 \Rightarrow$ не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ — нечетная, $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t) \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \, dt + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \, dt \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad \text{— } b_n \text{ при } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{При } n=1 \quad b_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} \, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}$$



Ряд сч. не п/н

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на $(-\pi; \pi)$

Рационале no cos u no sin

$$f(x) \in L_n(0; 1)$$

Ем еэ програмуно на зэмаин $\rightarrow f(x) \in L_n(-1; 1)$

То еэ пры прыме - раэіонеме $P(t)$ на $(-1; 1)$ no cos

Ем no неіэмаин, ро no sin

Задача 1

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{no sin}$$



Пры с.х. непаўнамерна (разрываў) на $(-\infty; +\infty)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

Задача 2

Рационале в пры прыме $f(x) = x^2$ на $(0; 1)$ с непугоем 1



$$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t^2 \cos 2\pi n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t^2 \sin 2\pi n t \, dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{на } 0 < x < 1$$

Пры с.х.-с непаўнамерна на $(-\infty; +\infty)$ т.к. узровень разрываў

Рационале no sin или cos зэтных или неіэтных крайных дзг

$$\textcircled{1} f(x) \in L_n(0; \frac{1}{2})$$



$$f(x) = f(1-x), \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{— симетрыя адносна } x = \frac{1}{2}$$

Далее no неіэмаин, галее с непугоем 2l

$$\text{В зям узровень } a_n = b_n = 0$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{l} \quad - \text{розкладемо по sin невідомих кривих згд}$$

② $f(x) \in L_R(0; \frac{l}{2})$

$$f(x) = -f(l-x), \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad - \text{симетрія стн. і. } (\frac{l}{2}; 0)$$



$$a_n = 0, \quad b_{n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{l} dt$$

Розкладемо по sin відомих кр. згд
(розкладемо по sin є невідомі l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2\pi n x}{l}$$

③ $f(x) = -f(l-x)$ на $0 < x < \frac{l}{2}$ - сим. стн. і. $(\frac{l}{2}; 0)$



Далі по відомим, далі є невідомі 2 l

$$b_n = 0 \quad a_{2n} = 0$$

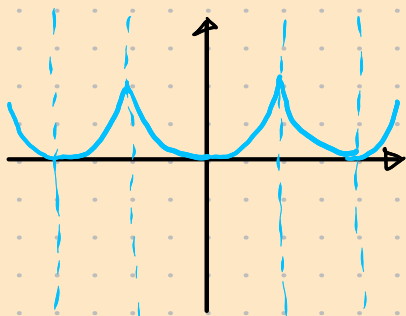
$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt$$

Розкладемо по cos невідомих кр. згд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

④ $f(x) = f(l-x)$ $0 < x < \frac{l}{2}$ - сим. стн. $x = \frac{l}{2}$

Далі по відомим, далі є невідомі 2 l



$$b_n = 0 \quad a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi \cdot 2n t}{l} dt$$

Розкладемо по cos відомих кр. згд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{\pi \cdot 2n x}{l}$$

(далі по розкладемо по cos є невідомі l)

Задача 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Разложить по \sin на $[0; 2]$ $l=2!$



Продолжить симм. осн. $x=1$

$$f(x) = f(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Разложить по \sin четных кр. гуд

$$b_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) x$$

Ряд сходимости по \sin на $(-\infty; +\infty)$ т.к. $f(x)$ имеет период 4 и экстремумы на $[-4; 4]$

Задача 2

Построить гр. функции рядов Фурье по \cos и \sin итд. и четт. кр. гуд.

Сходится ли они по \sin ?

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



Синусы четт. кр. гуд
сх. по \sin т.к. им.
перiod 2π и экстр.
максимум на $[-\pi; \pi]$

Синусы итт. кр. гуд
сх. не по \sin т.к.
разрывы

Косинусы четт. кр. гуд
сх. не по \sin

Косинусы итт. кр. гуд
сх. по \sin

$$f(x) = \sin x + 1$$



суммы пер. кр.
сх. не ρ/n



суммы лев. кр. гл.
сх. не ρ/n



суммы прав. кр. гл.
сх. не ρ/n



суммы лев. кр. гл.
сх. ρ/n

Полное гипергеометрическое разложение Фурье

1. $f(x)$ ун. непрерывна и кр. на $[-l; l]$, тогда:

1. Разг Ф. сх. ρ/n на $(-\infty; +\infty)$

2. Разг Ф. можно полностью гипер:

$$\text{Если } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right]$$

То разг Ф. $f'(x)$ (k -ой кр. пер. на $[-l; l]$) разг. гиперметрич.
гипер. разг Фурье f' :

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{\pi n}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} \right) - \text{не сходится!}$$

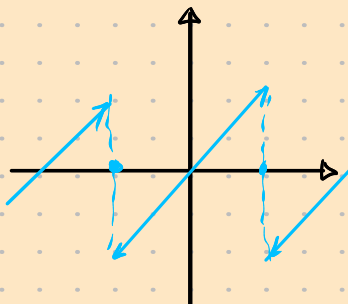
интер. разг Фурье

Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{схема разг полна } 2x \text{ на } (-\pi; \pi) \text{ по}$$

сх. 1 пр. Гиббса



$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

Равенство Парсеваля

$L^2_R(I)$ - м.б.о. ф-ция, аде. унт. на I высеет $f(x)^2$.

Для конечного I $L^2_R(I) \subset L_R(I)$

Все конеч. унт. - из $L^2_R(a; b)$

Если $f(x) \in L^2_R(-1; 1)$ и унт. нормог 21 , то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx$$

В разном раз. себя сч.

Пример

$$f(x) = x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(x) = x^2;$$

$$\frac{2}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Неравенство Бундземана

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq C \int_a^b f'(x)^2 dx$$

Задача 2

$f(x)$ унт. н. на $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$

$$\text{Тоже } \int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'(x)^2 dx$$

$$\square \text{ Рас-ум } \varphi(x) = f(x+a), \quad \varphi(a) = f(a) = 0 \\ \varphi(b-a) = f(b) = 0$$

Продолж. по периодичности, задаем периодом $2 \cdot (b-a)$ ($l = b-a$)

Т.к. она чёт.-ч., p -период π , p/n



$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{b-a} \quad \text{нет cos т.к. нечётная}$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b-a} b_n \cos \frac{\pi n x}{b-a}$$

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(b-a)^2} b_n^2$$

~~12~~

Усреднение рядов

Пусть $f(x)$ кр. - пер. на $[-l; l]$, и н. пер. \mathbb{R}

$$f(x) \sim \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{ср. п. Фурье}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

Тогда $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} -$ кр. и. на $[-l; l]$, $F(-l) = F(l)$

$$F(x) = \frac{C}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{\pi n} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} - \frac{l}{\pi n} b_n \cos \frac{\pi n x}{l} \right) - \text{сумма р. с. п. Фурье}$$

$$C = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt$$

Если $\frac{a_0 x}{2}$ не симметрич, то номер n не выбирается р.м.

Порядок убывания коэф-ов Фурье

Если $f(x)$ кр. и. на $[-l; l]$ и н. пер. \mathbb{R} , то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(x)$ - кр. пер. глуп. на $[a, b]$, если $f'(x)$ сум. больш, кроме конечного мн. τ , где τ не разрывн и рог.

Кот-ни Фурье такой гр-ки, $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $|a_n|, |b_n| \leq C \frac{1}{n}$

$f(x)$ кр.-н., если она непрерывна и кр. пер. глуп.

Например, $\sin x$ - кр. пер. глуп., но не кр. и.

Обобщение

Заб. А. Если $f(x)$ н. пер. \mathbb{R} и $f^{(k-1)}(x)$ кр. и. на $[-l; l]$, то коэф. Фурье $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Заб. Б. Если $f(x)$ н. пер. \mathbb{R} , $f^{(k-2)}(x)$ пер. на $[-l; l]$, $f^{(k-1)}(x)$ кр. пер. глуп., то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Здесь важно: порядок убывания коэф-ов Фурье.

Пример

$$f(x) = x^2 \quad \text{на } [-\pi; \pi], \quad \text{с пер. } 2\pi$$

$$A) \quad k-1=0, \quad k=1 \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = 0$$

$$k-2=0, \quad k-1=1, \quad k=2 \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad - \text{удобнее применение}$$

$$f(x) = x^3$$

A) непрерывно (and same не кр. и.)

$$B) \quad k-1=0, \quad k=1 \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n = 0$$

$$f(x) = (\pi^2 - x^2)^2 \quad [-\pi; \pi] \quad \text{с пер. } 2\pi$$

Нужно графиками или проверить в π , π и $-\pi$ (на концах интервала)

$$f(\pi) = f(-\pi) = 0 \quad - \text{непр.}$$

$$f'(x) = 2(\pi^2 - x^2) \cdot (-2x)$$

$$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$$

$$f''(\pi) = f''(-\pi) \quad - \text{кр. и.}$$

$$f'''(\pi) \neq f'''(-\pi) \quad - \text{кр. неп. групп.}$$

$$A) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad b_n = 0$$

$$B) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad - \text{на практике сделать можно B!}$$

Задача 1

$$f(x) = \pi^3 x - x^4, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{раскл. в р. Фурье по } \sin.$$

Понятно, что сумма Фурье и двойная сумма Фурье



$f(x)$



$f_1(x)$



$f_2(x)$

Сформулировать рядов неограниченных асимптотических

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 0$$

Однако неверно, $(-1)^n$ - ряд, с. асимпт. $\rightarrow 0$.

Ряд $1 + 3 - 3 + 1 + 3 - 3 + \dots$ расходящийся (одна из рядов $\rightarrow 0$)

$$S_n = \begin{cases} K & n = 3k \\ K+1 & n = 3k+1 \\ K+4 & n = 3k+2 \end{cases}$$

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$$

