

Интегрирование по Фурье

$f(x) \in L_R(-1, 1)$ и ум. непрерывна

L_R -адв. интегр., т.е. $\int_{-1}^1 f(x) dx$ адв. сч.

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \sin \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad - \text{коэф-ты Фурье}$$

Лемма Римана

$$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos tx dt \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

I - проме.

$$\int_I f(t) \sin tx dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие: $f(x) \in L_R(-1; 1) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

$$\text{Фун. ряд } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{1} + b_n \sin \frac{\pi n x}{1} \right] - \text{ряд Фурье } f(x)$$

Обсужда

1. Если $f(x)$ нечётна, то $a_n = 0$

Если $f(x)$ чётна, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - непрерывна \Rightarrow универсальная норма. Дано по модулю сходимости функции

Дополнительное условие разрывности в п. Фурье (следствие из пр. Лейбница)

1. $f(x) \in L_R(-1; 1)$, ум. непрерывна

В т. x_0 имеет конечные односторонние пределы $f_+'(x_0)$ и $f_-'(x_0)$.

Тогда ряд Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Пусть $f(x) \in L_R(-1; 1)$, ум. непрерывна

x_0 - т. разрыва 1 рода, \exists конечные "ободуженные" односторонние

пределы:

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда ряд Фурье в т. x_0 сходится к ср. арифм. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



Число $l = \pi$, тогда $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Задача 1

Рассмотрим в п. 4-м $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

гр. симметрична относительно оси.



Ф-ция нечетная $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \, dt \quad \text{— четная, } \varphi\text{-ч.}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign} t \sin nt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не св-ся равномерно с.х. на всей прямой, т.е. сумма его разбегается

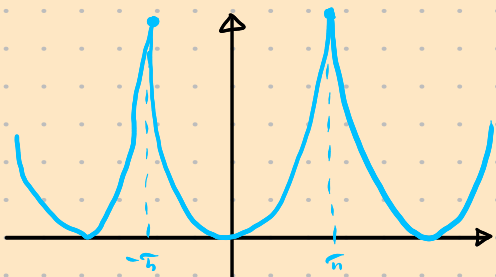
(р/н с.х. ряд из пер. ф-ции и. пер. функции).

Задача 2

$f(x) = x^2$ на $-\pi < x < \pi$

с.х-ца в $\forall \pi$, но не равномерно

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Досл. як р/н cx. р. Фур'є

$f(x) \in L_R[-1; 1]$, непер. зл, у якого - непер. на $[-1; 1]$.

($f(x)$ непер. на $[-1; 1]$, $f'(x)$ екстрем. - непер. на $[-1; 1]$, т.е. єдине значення
т. розрива і погуб). Тоді р-Фур'є $f(x)$ cx. р/н на всій числовій осі.

Узглянемо: якщо $f'(x)$ непер. вогнут на проміжку, то у ній не може бути розривів
і погуб. Потім у теоремі про рівн. cx. р-Фур'є б о. розрива $f'(x)$ не є.

Розв. Ф. x^2 cx. р/н на $(-\infty; +\infty)$.

Укр. 22-110

Розв. спр. розв. (за періоду $l=2\pi$)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (1) cx. р/н на $(-\infty; +\infty)$. Тоді це функція

$f(x)$ - непер. зл - непер. Ф-ції, у (1) - р. Фур'є цієї функції.

$$\square \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad - \text{р/н cx.}$$

$\Rightarrow f(x)$ непер.

Функція р/н cx. розв. у непер. Ф-ції - непер. Ф-ції.

У непер. розв. зл - зл.

Р/н cx. розв. у непер. Ф-ції на деякій ділянці можна помітно інтер-
претувати.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Якщо р/н cx. розв. згортається на Ф-ції, то отримаємо р/н cx.

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx), \quad m \text{ фіксовано,}$$

- cx. р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt \right) =$$

$\stackrel{0}{=} \text{ якщо } n \neq m \quad \stackrel{0}{=}$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt$$

Ортогональные функции $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ в пространстве функций на отрезке $[-\pi; \pi]$ со скалярным произведением $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

■

Задача 22-111

Дать в явном виде?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ — ряд сч. п/н на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ряд Фурье с членом $n=0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ — расходится $\nrightarrow 0 \Rightarrow$ не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ — нечетная, $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t) \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \stackrel{0}{dt} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \stackrel{0}{dt} \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad \text{— } b_n \text{ при } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{При } n=1 \quad b_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} \, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}$$



Ряд сч. не п/н

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на $(-\pi; \pi)$

Рационале no cos u no sin

$$f(x) \in L_n(0; 1)$$

Ем еэ програмуно на зэмаин $\rightarrow f(x) \in L_n(-1; 1)$

То еэ пры прыме - раэіонеме $P(t)$ на $(-1; 1)$ no cos

Ем no неіэмаин, ро no sin

Задача 1

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{no sin}$$



Пры сх. непаўнамерна (разрываў) на $(-\infty; +\infty)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

Задача 2

Рационале в пры прыме $f(x) = x^2$ на $(0; 1)$ с непугоем 1



$$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t^2 \cos 2\pi n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t^2 \sin 2\pi n t \, dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{на } 0 < x < 1$$

Пры сх-с непаўнамерна на $(-\infty; +\infty)$ т-к. узровень разрываў

Рационале no sin или cos зэтных или неіэтных крайных дзг

$$\textcircled{1} f(x) \in L_n(0; \frac{1}{2})$$



$$f(x) = f(1-x), \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{— симетрыя адносна } x = \frac{1}{2}$$

Далее no неіэмаин, галее с непугоем 2l

$$\text{В зям узровень } a_n = b_n = 0$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{l} \quad - \text{розкладемо по sin невідомих кривих згідно}$$

② $f(x) \in L_2(0; \frac{l}{2})$

$$f(x) = -f(l-x), \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad - \text{симетрія стос. до } (\frac{l}{2}; 0)$$



$$a_n = 0, \quad b_{n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{l} dt$$

Розкладемо по sin відомих кр. згідно
(розкладемо по sin з невідомим l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2\pi n x}{l}$$

③ $f(x) = -f(l-x)$ на $0 < x < \frac{l}{2}$ - сим. стос. до $(\frac{l}{2}; 0)$



Далі по відомим, далі з невідомим 2l

$$b_n = 0 \quad a_{2n} = 0$$

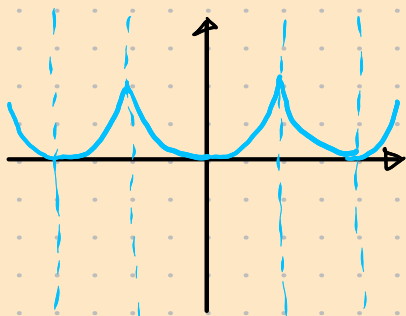
$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt$$

Розкладемо по cos невідомих кр. згідно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

④ $f(x) = f(l-x)$ $0 < x < \frac{l}{2}$ - сим. стос. $x = \frac{l}{2}$

Далі по відомим, далі з невідомим 2l



$$b_n = 0 \quad a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi \cdot 2n t}{l} dt$$

Розкладемо по cos відомих кр. згідно

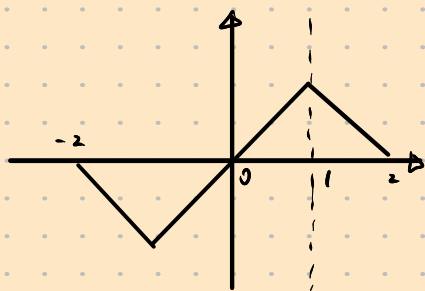
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{\pi \cdot 2n x}{l}$$

(далі по cos з невідомим l)

Задача 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Разложить по \sin на $[0; 2]$ $l=2!$



Продолжить симм. осн. $x=1$

$$f(x) = f(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Разложить по \sin несущих π -гуд

$$b_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) x$$

Ряд \cos -и p/n на $(-\infty; +\infty)$ т.к. $f(x)$ имеет период π и экстрем-максим на $[-\pi; \pi]$

Задача 2

Построить гр. суммы рядов Фурье по \cos и \sin π -гуд, и π -гуд, π -гуд π -гуд.

Сколько в них p/n ?

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



Синус π -гуд
сх. p/n π -гуд. π -гуд.
перiod π и экстрем-максим на $[-\pi; \pi]$

Синус π -гуд. π -гуд.
сх. p/n π -гуд.
период π

Косинус π -гуд. π -гуд.
сх. p/n

Косинус π -гуд. π -гуд.
сх. p/n

$$f(x) = \sin x + 1$$



суммы пер. кр.
сх. не π/n



суммы лев. кр. гл.
сх. не π/n



суммы прав. кр. гл.
сх. не π/n



суммы лев. кр. гл.
сх. π/n

Полное равномерное приближение по Фурье

1. $f(x)$ ун. непрерывна на $[-l; l]$, период.

2. Функция $f(x)$ имеет период $2l$ на $(-\infty; +\infty)$

3. Функция $f(x)$ имеет период $2l$ на $(-\infty; +\infty)$

$$\text{Если } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right]$$

То ряд Ф. $f'(x)$ (х-ой кр. пер. на $[-l; l]$) имеет равномерное приближение по Фурье:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{\pi n}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} \right) - \text{не сходится!}$$

линейно по Фурье

Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{сумма ряда равна } 2x \text{ на } (-\pi; \pi) \text{ по$$

сх. 1 пр. равномерная



$$-\pi < x < \pi$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

Равенство Парсеваля

$L^2_R(I)$ - м.б.о. ф-ция, аде. унт. на I высеет $f(x)^2$.

Для конечного I $L^2_R(I) \subset L_R(I)$

Все конеч. унт. - из $L^2_R(a; b)$

Если $f(x) \in L^2_R(-1; 1)$ и унт. период $2l$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(x))^2 dx$$

В разном раз. себя ср.

Пример

$f(x) = x$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$f(x) = x^2$;

$$\frac{2}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Неравенство Бундземана

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq C \int_a^b f'(x)^2 dx$$

Задача 2

$f(x)$ унт. н. на $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$

$$\text{Тоже } \int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'(x)^2 dx$$

$$\square \text{ Рас-ум } \varphi(x) = f(x+a), \quad \varphi(a) = f(a) = 0 \\ \varphi(b-a) = f(b) = 0$$

Продолж. по периодичности, задаем периодом $2 \cdot (b-a)$ ($l = b-a$)

Т.к. она чёт.-ч., p -период π , p/n



$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{b-a} \quad \text{нет cos т.к. нечётная}$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b-a} b_n \cos \frac{\pi n x}{b-a}$$

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(b-a)^2} b_n^2$$

~~12~~

Усреднение рядов

Пусть $f(x)$ кр. - пер. на $[-l; l]$, и н. пер. \mathbb{R}

$$f(x) \sim \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{ср. п. Фурье}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

Тогда $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} -$ кр. и. на $[-l; l]$, $F(-l) = F(l)$

$$F(x) = \frac{C}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{\pi n} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} - \frac{l}{\pi n} b_n \cos \frac{\pi n x}{l} \right) - \text{сумма р. с. п. Фурье}$$

$$C = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt$$

Если $\frac{a_0 x}{2}$ не симметрич, то номер n не выбирается р.м.

Порядок убывания коэф-ов Фурье

Если $f(x)$ кр. и. на $[-l; l]$ и н. пер. \mathbb{R} , то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(x)$ - кр. пер. глуп. на $[a, b]$, если $f'(x)$ сум. везом, кроме конечного мн. τ , где γ не разрывн и рог.

Котр-н Фурье такой гр-н, $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $|a_n|, |b_n| \leq C \frac{1}{n}$

$f(x)$ кр.-н., если она непрерывна и кр. пер. глуп.

Например, $\sin x$ - кр. пер. глуп., но не кр. и.

Обобщение

Заб. А. Если $f(x)$ н. пер. \mathbb{R} и $f^{(k-1)}(x)$ кр. и. на $[-l; l]$, то котр. Фурье $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Заб. Б. Если $f(x)$ н. пер. \mathbb{R} , $f^{(k-2)}(x)$ пер. на $[-l; l]$, $f^{(k-1)}(x)$ кр. пер. глуп., то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Здесь важно: порядок убывания коэф-ов Фурье.

Пример

$$f(x) = x^2 \quad \text{на } [-\pi; \pi], \quad \text{с пер. } 2\pi$$

$$A) \quad k-1=0, \quad k=1 \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = 0$$

$$k-2=0, \quad k-1=1, \quad k=2 \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad - \text{удобнее применение}$$

$$f(x) = x^3$$

A) непрерывно (and same не кр. и.)

$$B) \quad k-1=0, \quad k=1 \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n = 0$$

$$f(x) = (\pi^2 - x^2)^2 \quad [-\pi; \pi] \quad \text{с пер. } 2\pi$$

Нужно графиками или проверить в π , π и $-\pi$ (на концах интервала)

$$f(\pi) = f(-\pi) = 0 \quad - \text{непр.}$$

$$f'(x) = 2(\pi^2 - x^2) \cdot (-2x)$$

$$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$$

$$f''(\pi) = f''(-\pi) \quad - \text{кр. и.}$$

$$f'''(\pi) \neq f'''(-\pi) \quad - \text{кр. неп. групп.}$$

$$A) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad b_n = 0$$

$$B) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad - \text{на практике сделать можно B!}$$

Задача 1

$$f(x) = \pi^3 x - x^4, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{раскл. в р. Фурье по } \sin.$$

Функция не имеет периодич. и гранич. периодич. разн



$f(x)$



$f'(x)$



$f''(x)$

Сформулировать рядов неограниченных асимптотических

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 0$$

Однако неверно, $(-1)^n$ - ряд, с. асимпт. $\rightarrow 0$.

Ряд $1 + 3 - 3 + 1 + 3 - 3 + \dots$ расходящийся (одна из рядов $\rightarrow 0$)

$$S_n = \begin{cases} K & n = 3k \\ K+1 & n = 3k+1 \\ K+4 & n = 3k+2 \end{cases}$$

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$$

