# I. Электростатика

## §1. Электрический заряд

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ

Есть меньшие заряды у кварков: $\frac{1}{3}e$ или $\frac{2}{3}e$, но они всегда связаны

Закон сохранения заряда – полный заряд замкнутой сис-мы сохраняется.

$q = Ne$ – заряд дискретен

Заряд релятивистски инвариантен

Дискретность заряда – опыт Милликена (капля масла в конденсаторе)

1786 г. – закон Кулона (Кавендиш – 1771 г.)

$F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$ – точечные заряды (абстракция!)

В СИ: спец. единица заряда – 1 Кл (основная)

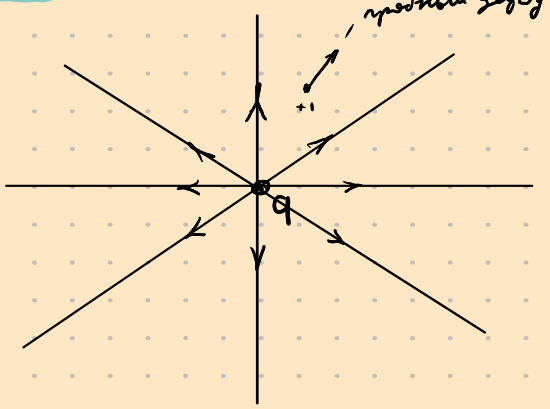
Из-за этого возникает $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{Н м^2}{Кл^2}$

В СГСЭ: заряд – произв. единица

Из-за этого $k = 1$, $[q] = \sqrt{дин \cdot см^2} = 1$ ед. СГСЭ

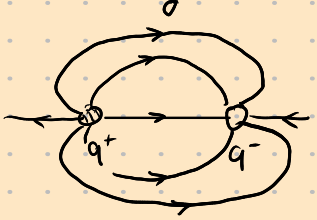
! 1 Кл $= 3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ (Кулон – гигантская единица!)

### Эл. поле

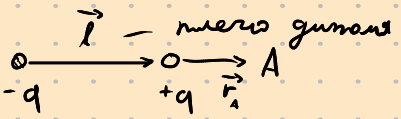



$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$

Эл-т диполя




### Электрический диполь



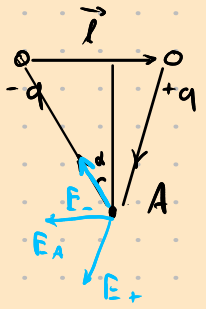

Дипольный момент $\vec{P} = q\vec{l}$

Ищем поле по принципу суперпозиций

$|\vec{l}| \ll |\vec{r}_A|$ - точечный диполь

$r_1 = |\vec{r}|, \quad r_2 = |\vec{r}| + |\vec{l}|$

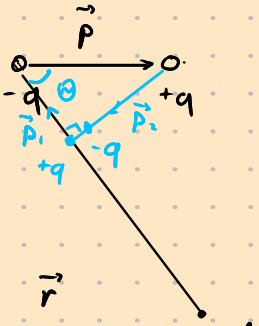
$$E_A = q\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = q\,\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2 r_2^2} \simeq \frac{2ql}{r^3} = \frac{2\vec{p}}{r^3}$$




$$E_{+(-)} = \frac{q}{r^2}$$

$$E_A = 2E_+ \sin\alpha = 2E_+ \frac{l/2}{r} = \frac{ql}{r^2} = \frac{p}{r^2}$$

$$\vec{E}_A = -\frac{\vec{p}}{r^2}$$




$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$

$$E_A = \frac{1}{r^3}\left(2\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right) = \frac{1}{r^3}\left(3\vec{p}_1 - \vec{p}\right)$$

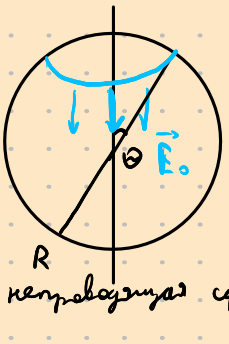
$|\vec{p}_1| = p_1 = p\cos\Theta$

$$\cos\Theta = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{pr} \rightarrow p_1 = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^2}\vec{r}$$

$$! \quad E_A = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

№ 2.23




непроводящая сфера

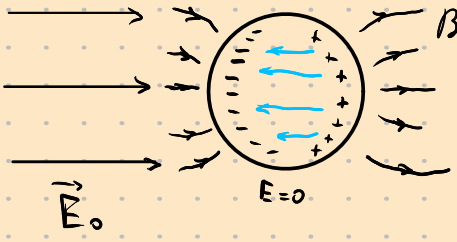
Каким образом распределить заряд по сфере, чтобы поле было однородным!

$$\sigma(\Theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\Theta$$

$$\vec{p} = -\vec{E}_0 R^3$$

Вдали от сферы она - диполь

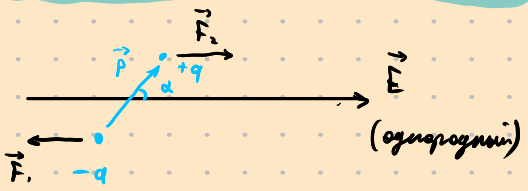
Внутри однородного поля металлические шары / сферы становятся диполями!




Внутри шара возникает дипольный момент!

$$\vec{p} = \vec{E}_0 R^3$$

## Диполь во внешнем поле




"Жесткий" диполь - заряды закреплены на концах плеча

В среде - наведённый диполь

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

Если диполь свободный, он повернётся так, что $\vec{p} \parallel \vec{E}$

$\vec{M} = [\vec{l}\,\vec{F}_2] = q[\vec{l}\,\vec{E}] = [\vec{p}\,\vec{E}]$

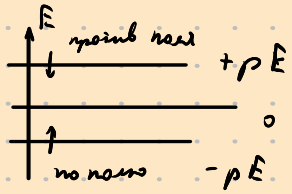
$|\vec{M}| = pE\sin\alpha$

Работа по повороту диполя на $\alpha$:

$\delta A = -M\,d\alpha = dW$

$W_{эл} = -pE\int_{\alpha_0=\pi/2}^{\alpha} \sin\alpha\,d\alpha = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = -pE\cos\alpha$

! $W_{эл} = -(\vec{p}\,\vec{E})$ $\quad W_{min} = -pE$ $\quad W_{max} = pE$




## Неоднородное поле

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$

$\vec{F} = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = q\,d\vec{E}$

$d\vec{E} = l_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + l_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + l_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$

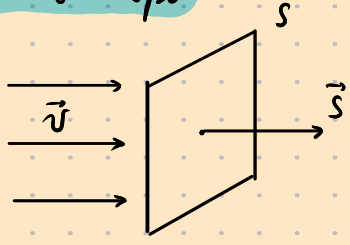
$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{F} = p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$

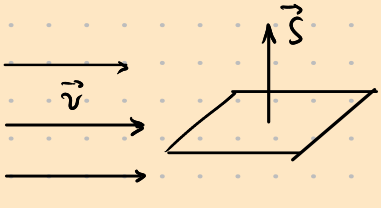
! $\vec{F} = (\vec{p}\,\vec{\nabla})\vec{E}$

$p_x \neq 0;\ p_y = p_z = 0$ : ! $\vec{F} = p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}$

## Поток вектора




$\Phi = Q = vS$




$\Phi = 0$

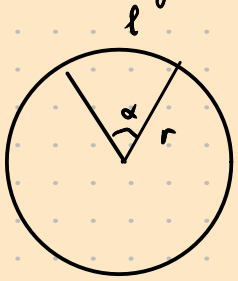
(для элементарной площадки)

$\Phi = (\vec{v}\,\vec{S})$

$\vec{v}$ - векторное поле

Поле $\vec{E} \longrightarrow \Phi = (\vec{E}\,\vec{S})$

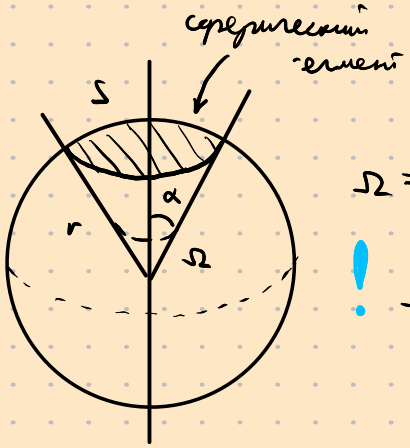
## Телесный угол




2D

$\alpha = \frac{l}{r}$

$\alpha_{max} = 2\pi$

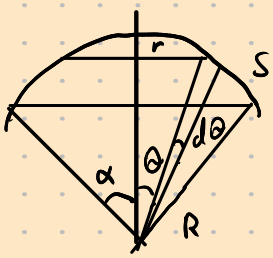



3D

$\Omega = \frac{S}{r^2}$

! $\Omega = 2\pi(1-\cos\Theta)$

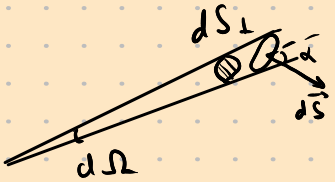
### Площадь сферич. сегмента




$r = R\sin\Theta$

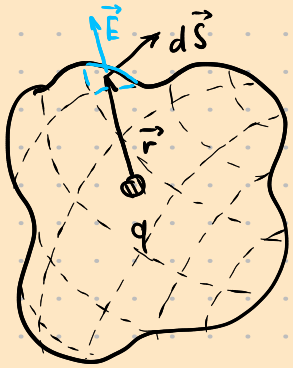
$$S = \int_0^{\alpha} 2\pi R\sin\Theta R\,d\Theta = 2\pi R^2 \int_0^{\alpha} \sin\Theta\,d\Theta = 2\pi R^2(1-\cos\Theta)$$

### Бесконечно малый телесный угол




$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{(\vec{r}\cdot d\vec{S})}{r^3}$$

## Теорема Гаусса




$d\Phi = (\vec{E}\,d\vec{S})$

$$\Phi = \oiint_S (\vec{E}\,d\vec{S}) = \oiint_S \frac{q(\vec{r}\,d\vec{S})}{r^3} = \quad (d\Omega)$$

$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$

$$= \int q\,d\Omega = 4\pi q$$

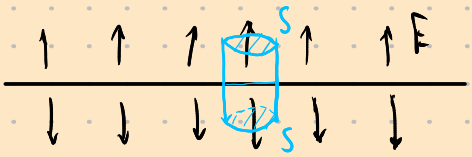
$$\Phi = \oiint \vec{E}\,d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi\sum q_i \\ 0 \end{cases}$$

$$\Phi_E = \oiint (\vec{E}\,d\vec{S}) = \begin{cases} 4\pi\sum q_i = 4\pi \iiint_V \rho(x,y,z)\,dV \\ 0 \end{cases}$$

$dV = dx\,dy\,dz$

– интегральная форма

# Примеры использования Гаусса

① 

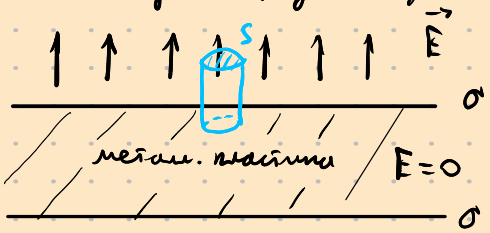
$\sigma\left[\frac{эл}{см^2}\right]$

Горизонт. компоненты у $\vec{E}$ нет - иначе были бы токи!

$\Phi = 2ES = 4\pi\sigma S$

! $E = 2\pi\sigma$

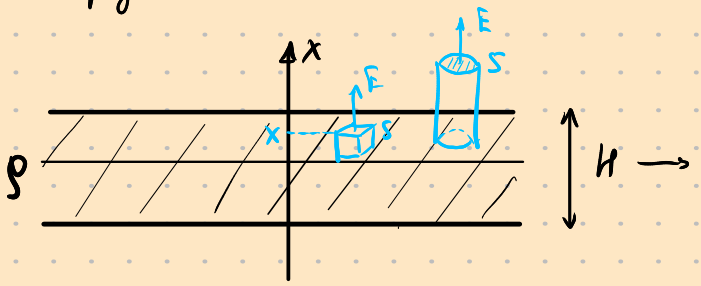
При переходе сверху вниз поле нен. скачок: $\Delta E = 4\pi\sigma$

② 


$\Phi = ES = 4\pi\sigma S$

$E = 4\pi\sigma$

Заряд - на пов-ти!

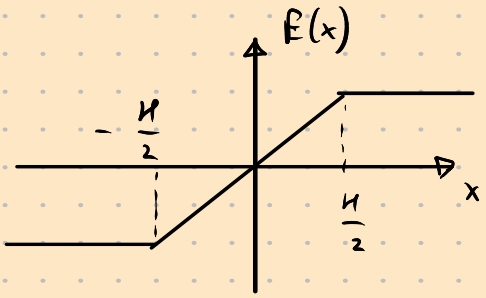
③ 

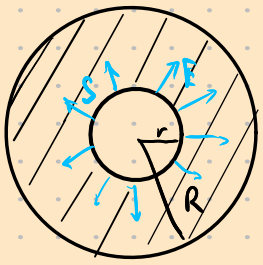

$x < \frac{H}{2}$: $\Phi = E(x)S = 4\pi\rho x S$

$E(x) = 4\pi\rho x, \quad x < \frac{H}{2}$

$x = \frac{H}{2}$ $ES = 4\pi\rho\frac{H}{2}S$

$E = 2\pi\rho H = 2\pi\sigma$



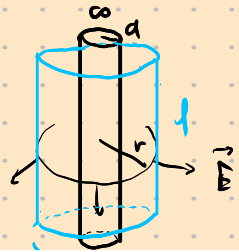

④ 


$\Phi = E(r) = 4\pi r^2 = 4\pi\frac{4}{3}\pi r^3\rho$

$E(r) = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} \quad (r \le R)$

$E(r) = \frac{4}{3}\rho\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{r^2}$ - как точечный заряд!

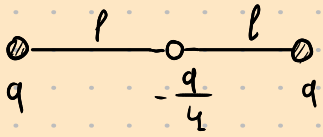
$\vec{E}$ радиально симметрично

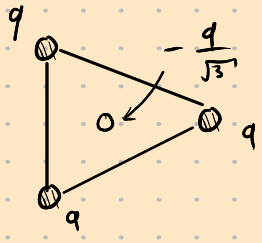
⑤ 


$\Phi_E\big|_{r \ge a} = E(r)\cdot 2\pi r l = 4\pi H l$ ($H$ - поверхн. заряд $\left[\frac{эл}{см}\right]$)

$E(r)\big|_{r \ge a} = \frac{2H}{r}$

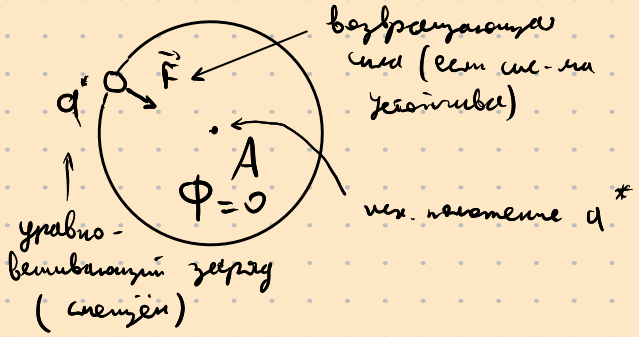
# Теорема Ирншоу




Сис-мы статически неподвижны

**Всякая система уравновешенных зарядов неустойчива.**




Если возникает $\vec{F}$, то $\Phi < 0$, но в нов-ти нет зарядов, и $\Phi = 0$, т.е. сис-ма неуст.

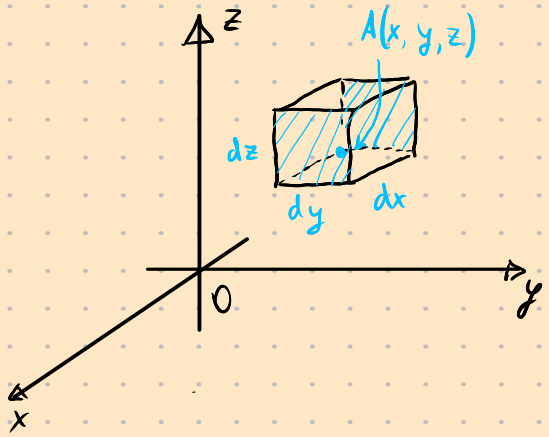
Из т. Ирншоу => заряды в атоме (как минимум) движутся.

В планетарной модели $\bar{e}$ двигаются с ускорением => излучают =>

=> неустойчивы – решается квантовой механикой.

! Внутри проводника всегда $E = 0$ (экран. от внешнего E).

# Теорема Гаусса в дифференциальной форме




$\rho(x,y,z)$ – какое-то распр-е зарядов

$dV = dx\,dy\,dz$

Поток E через грани $\perp Ox$

Поток $= [\underbrace{E_x(x+dx)\,dy\,dz}_{\text{передняя грань}} - \underbrace{E_x(x)\,dy\,dz}_{\text{задняя грань}}]$

$$[E_x(x+dx)\,dy\,dz - E_x(x)\,dy\,dz] \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

$$d\Phi = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\vec{E}}\,dx\,dy\,dz = 4\pi\rho\,dx\,dy\,dz$$

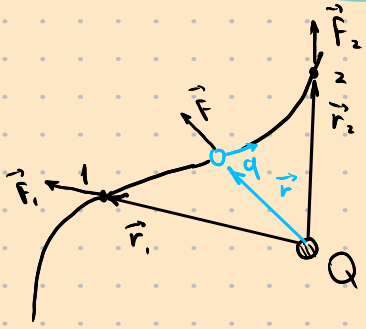
! $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ $\qquad \operatorname{div}\vec{E} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})$

**Физ. смысл**: $\operatorname{div}\vec{E} = \lim\limits_{V\to 0} \dfrac{\oint \vec{E}\,d\vec{S}}{V}$

Сферически симм. случай

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 E\right)$$ (д-во: Сивухин, задача §7)

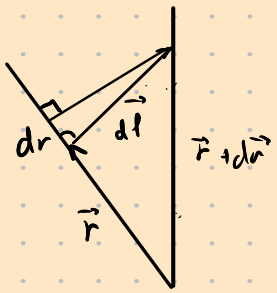
## Электрический потенциал




Поле радиально симметрично, зависит только от координаты, т.е. потенциально.

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{E}\cdot d\vec{l}) = \int_1^2 \frac{qQ}{r^3}(\vec{r}\cdot d\vec{l}) = qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^3}\vec{r};\quad \vec{F} = q\vec{E} \qquad = q\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}\right) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$




$(\vec{r}\,d\vec{l}) = r\,dl\cdot\cos\widehat{\vec{r}\,d\vec{l}} = r\,dr$

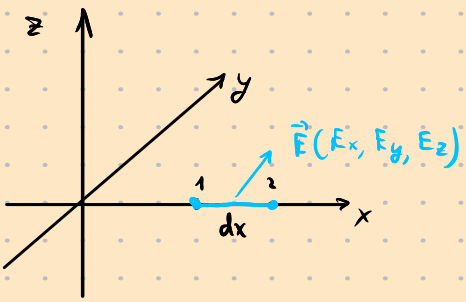
! $\varphi = \dfrac{Q}{r} + \text{const}$

const – нулевой уровень (на $\infty$)

Потенциал $\varphi$ – работа по переносу заряда на бесконечность.

В СИ $[\varphi] = В = \dfrac{Дж}{Кл} = \dfrac{10^7\ эрг}{3\cdot 10^9\ ед.заряд.} = \dfrac{1}{300}$ ед. СГСЭ

## Связь $\varphi$ и E




$\delta A_{12} = E_x\,dx = \varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$

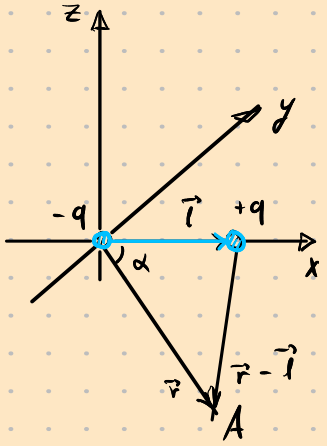
единичного пробного заряда

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \qquad E_y = -\frac{d\varphi}{dy} \qquad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}\right) = -\vec{\nabla}\varphi = -\operatorname{grad}\varphi$$

! $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

## Потенциал поля диполя




$\vec{p} = q\vec{l}$, $l \ll r$

$$\varphi(r) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{l}|} - \frac{q}{|\vec{r}|}$$

$$|\vec{r}-\vec{l}| = r - l\cos\alpha = r - \frac{(\vec{l}\vec{r})}{r} = r\left(1 - \frac{(\vec{l}\vec{r})}{r^2}\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{r\left(1-\frac{(\vec{l}\vec{r})}{r^2}\right)} - \frac{q}{r} = \frac{q}{r}\left(1 + \frac{(\vec{l}\vec{r})}{r^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{q(\vec{l}\vec{r})}{r^3} = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$(\vec{\nabla}\vec{E}) = -(\vec{\nabla}, -\vec{\nabla}\varphi) = 4\pi\rho$$

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\varphi) = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2\varphi = \Delta\varphi = -4\pi\rho$$

↑ Лапласиан

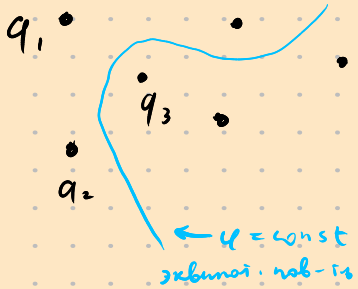
$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– ур-е Пуассона

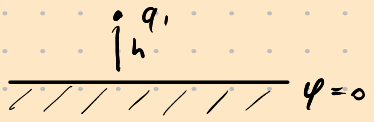
Если найти $\varphi(x, y, z)$ из Пуассона, то оно существует и единственное.

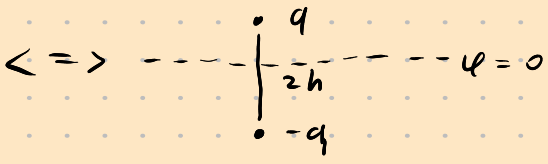
Нужно 2 граничных условия.

## Метод изображений




"Металлизируем" эквипот. пов-ть. Взаимодействие зарядов слева нее с зарядами справа ≡ взаим. зарядов слева с пов-тью.




<=>