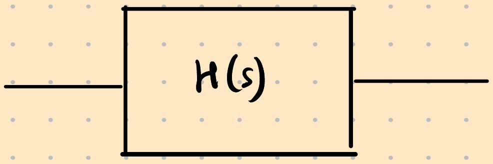
Григорьев Александр Алексеевич

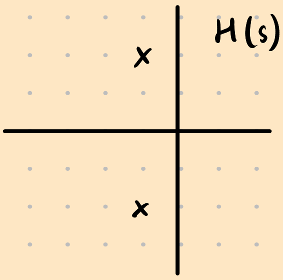
Проблема фильтрации



$s = \frac{f}{\omega_0}$ — характер. частота

$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ / полином / — рациональная ф-ия

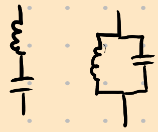
1. Синтез $H(s)$ — как её выбрать? Синтез по АЧХ
2. Реализация — как сделать четырёхполюсник? Центр внимания



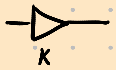
сопряжённые пары полюсов

Они не реализуемы RL и RC цепями.

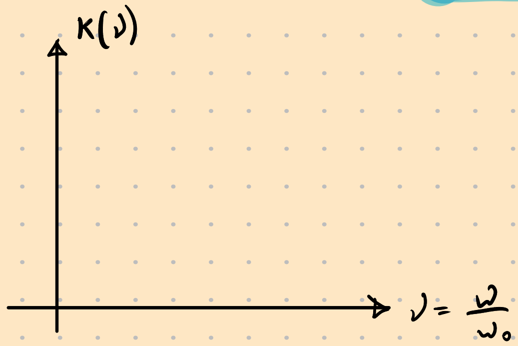
Нужны RLC

 — резонаторы дают сопр. полюса

Однако индуктивности исп. не хочется. Их можно заменить усилителями!

RC  — активные RC-цепи / фильтры

Синтез по АЧХ



АЧХ

$$H(s) = \underbrace{|H(s)|}_{\text{АЧХ}}\, e^{j \underbrace{\arg H(s)}_{\text{ФЧХ}}}$$

$|H(s)|^2 = H(s)\cdot H^*(s)$ – к этому предъяв. требования

Нас интересует только $H(s)\cdot H^*(s)\big|_{s=j\nu}$

- Причём т.к. полиномы N и D веществ., то $H^*(s) = H(s^*)$, т.е. рассматриваем $H(s)\cdot H(s^*)\big|_{s=j\nu}$

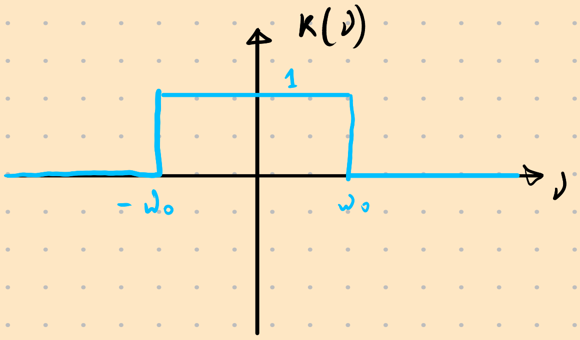
- Подменим задачу: при $s=j\nu$, $H(s^*) = H(-s)$, и так удобнее работать:
  $H(s)\cdot H(s^*)\big|_{s=j\nu} = H(s)\cdot H(-s)\big|_{s=j\nu}$

$$H(s)\cdot H(-s) = |K(\nu)|^2$$

АЧХ^2 — у этой ф-ии есть набор нулей и полюсов

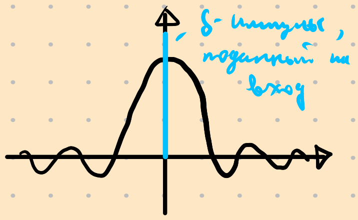
Созвездие нулей и полюсов АЧХ^2 всегда будет симметрично (отн. относ. замены $s \to -s$), и половину их возьмём в $H(s)$, половину — $H(-s)$.

Прямоуг. фильтр нижних частот



$$h(t) = \int_{-1}^{+1} h(f)\, e^{2\pi j f t}\, df = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

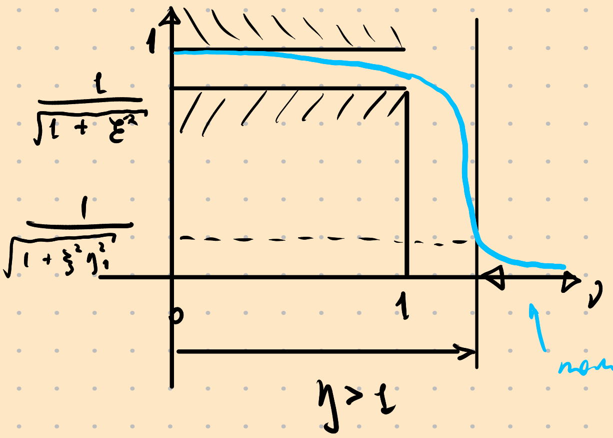
Импульс Найквиста



δ-импульс, поданный на вход — не удовл. принципу причинности (реакция раньше воздействия)

Т.е. такой фильтр не реализуем.

Допустим неравномерность АЧХ в полосе пропускания:



ε – неравномерность в ПП

η – селективность

η_1 – уровень на границе ПЗ

К успеху приводит: $H(s)\cdot H(-s)\big|_{s=j\nu} = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$ n – порядок фильтра

$$|F_n(\nu)| = \begin{cases} \le 1, & \nu \in (-1;1) \\ \ge \eta_1, & \ge \eta \end{cases}$$

Варианты выбора:

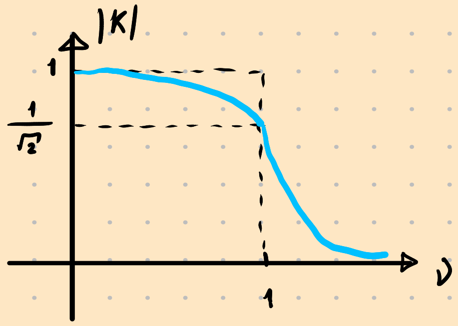
1. $F_n(\nu) = \nu^n$ – фильтр Баттерворта
2. $F_n(\nu) = P_n(\nu)$ – фильтр Чебышева, где $P_n(\nu)$ – полином Чебышева
3. $F_n(\nu) = R_n(\nu)$ – эллиптический фильтр, $R_n(\nu)$ – рационал. эллиптич. ф-ия

Баттерворт

$$H(s)\cdot H(-s)\big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\nu^{2n}}$$

$\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}$ – изменение ε эквивалентно изменению ω_0, т.е. ε не нужен – он всегда 1

$$K(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^{2n}}}$$



При $n \to \infty$ эта АЧХ неогр. стремится к идеальной прямоугольной.

Всегда дает затухание -3 дБ

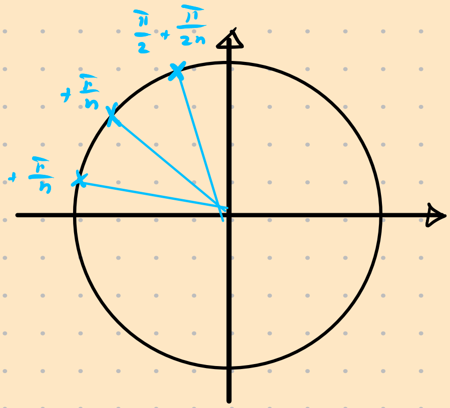
$$H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\nu^{2n}} \Rightarrow H(s)\,H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Ищем полюса: $\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}+1=0$

$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = e^{j\pi}\cdot e^{j\cdot 2\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$ $\qquad -1 = e^{j\pi}$

$\frac{s}{j} = e^{j\frac{\pi}{2n}}\cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot\frac{k}{2n}}$ $\qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

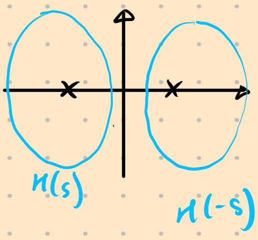
$s_k = e^{j\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}k\right]}$ — полюса произв. ф-ций $H(s)\cdot H(-s)$



— полюса с шагом $\frac{\pi}{n}$, картинка симметрична относ. мнимой оси!

Примеры

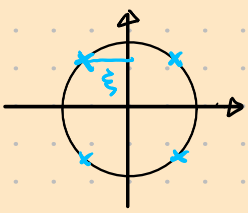
$n=1$: $\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^2} = \frac{1}{1-s^2}$ $\qquad s=\pm 1$ — полюса



$H(s) = \frac{1}{1+s}$

Интегрирующая цепь!

$n=2$:



Сопряжённая пара на ед. круге характеризуется затуханием ξ

Полином $s^2+2\xi s+1$

Корни $-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$