

# Рамирёв Александр Владимирович

## Интересы

Центры смещ.: лекции Рамирёва, интернет

Велич. смещ.: Журавлёв; Маркеев; Горюнов (и конусов); Болотенко

## Аксиоматика Кусачинской механики

1. Аксиома  $\mathbb{R}^3$  - все объекты - в Евклидовом пр-ве  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $\exists$  движение:  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$  (в  $\mathbb{R}$  - время)
3.  $\exists$  мат. точка:  $(m, \vec{r})$ ,  $m = \text{const} > 0$ ,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4.  $\exists$  взаимодействие:  $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2) \rightarrow \exists \vec{F}$ -мех:  $\vec{F} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$   

$$\begin{array}{ccc} \vec{F} & & -\vec{F} \\ \longrightarrow & & \longleftarrow \\ (m_1, \vec{r}_1) & & (m_2, \vec{r}_2) \end{array}$$
5.  $\exists$  сис-мы координат и способ параметризации времени, такие что  

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Также сис-мы коор-сз ИСО

## Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.:  $\int F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0$   

$$q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix}$$

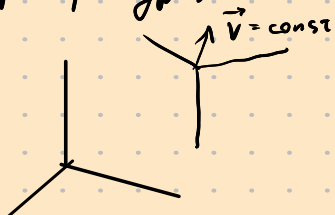
$$t = t(t', q'), \quad q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0 - \text{те же } q\text{-ы!}$$

Тогда  $F_i$  инв.

Ковариантность: инвариантность правил составленных ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относ. преобр-ию Галилея.



$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{v}t + A\vec{r} \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

← преобр. (группа) Галилея.

$$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = \text{const}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \mapsto m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}$$

## Угловые обозначения

①  $\vec{r} \rightarrow r^i, i = 1 \dots 3$

②  $A \rightarrow a_{ij}$

$$\begin{matrix} a_j \\ a^i_j \end{matrix}$$

норм. углы  
↙ ↘

③  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \equiv a^i b^i$  (проблемы индексации)

$$A\vec{r} = a_{ij} r^j$$

↖ ↗  
деформ. углы

④  $a, \dots, h$  - фиксированные углы

$x^a b^a$  - эт. с номером  $a$ ; без суммирования!

⑤  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$$

напр.  $df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$

# Кинематика Точки

## Декартовы координаты



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{r}^2 \\ \dot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{скорость}$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}^1 \\ \ddot{r}^2 \\ \ddot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{ускорение}$$

## Сопровождающий трёхмерный процесс



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \vec{r}_{,s} \dot{s} = \vec{t} v$$

$$\vec{w} = \vec{t}_{,s} v^2 + \vec{t} \dot{v}$$



$$\Delta s \approx \rho \Delta \epsilon$$

$$\Delta \vec{t} \approx \Delta \epsilon \vec{n} = \frac{\Delta s}{\rho} \vec{n}$$

$$\vec{t}_{,s} = \frac{\vec{n}}{\rho} \Rightarrow \vec{w} = \underbrace{\dot{v} \vec{t}}_{w_t \text{ тангент.}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho} \vec{n}}_{w_n \text{ нормальн.}}$$



## Криволинейные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} - \text{криволинейные (обобщённые) координаты}$$

$$\det [r_{ij}^1] \neq 0! \quad \text{Взаимно-однознач. соотв.}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} - \text{цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i - \text{var} \\ q^{fix i} - \text{fix} \end{cases} \quad i=1, 2, 3 \quad - \quad \gamma_i - \text{координатные линии}$$

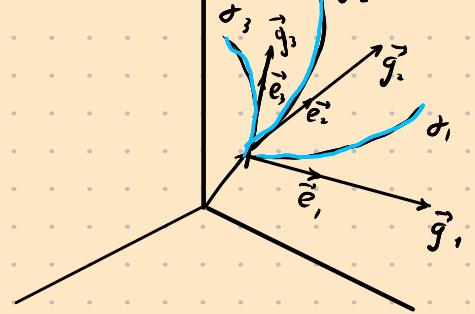


$$H_k = |\vec{g}_k| - k-я \text{ компонента}$$

$$H_k = \sqrt{(r_{,k}^1)^2 + (r_{,k}^2)^2 + (r_{,k}^3)^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{g}_a}{H_a} - \text{Орты (норм. векторы) локального базиса}$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$



## Скорость в кривых коорд.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \dot{q}^k \vec{g}_k$$

$$\textcircled{1} \vec{v} = \sum \underbrace{H_k}_{\text{составляющая}} \dot{q}^k \vec{e}_k$$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik} - \text{метрич. тензор}} \dot{q}^i \dot{q}^k = g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\textcircled{2} v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\text{Если } \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$v^2 = \sum H_i^2 (\dot{q}^i)^2$$

## Ускорение в кривых коорд.

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{,k} = \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_{,k} \right) = \dot{\vec{r}}_{,k}$$

Применяя по  $q_k \leftrightarrow \text{формулы}$

$$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec{r}_{,ki} \dot{q}^i \quad \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,i} \dot{q}^i \quad \dot{\vec{r}}_{,k} = \vec{r}_{,ki} \dot{q}^i$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k} \quad \left( \text{т.к. } v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\frac{d\dot{\vec{r}}}{d\dot{q}^k}}_{\dot{\vec{r}}_{,k}} = \vec{r}_{,k}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d\dot{\vec{r}}}{d\dot{q}^k} = \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k}$$

$$! \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$③ \vec{w} \cdot \vec{g}_a = \frac{d}{dt} (v^2/2),_a - (v^2/2),_a$$

$$④ \vec{w} \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{H_a} \left[ \frac{d}{dt} (v^2/2),_a - (v^2/2),_a \right]$$

Оператор Гамильтона - лагранжиана

$$\mathcal{E}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_a = \mathcal{E}_k \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

Преобразование системы  $H_k$  и их вычисления

$$q^a \rightarrow q^a + dq^a \quad - \text{только одна координата}$$

$$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a} \cdot dq^a$$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_k$$

$$T = \frac{mv^2}{2} - \text{кин. энергия}$$

$$m \mathcal{E}_k \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \vec{g}_k = Q_k - \text{обобщенная сила}$$

$$\mathcal{E}_k(T) = Q_k$$

$$(6) \frac{d}{dt} T_{,k} - T_{,k} = Q_k$$

$$\text{Для силы } \vec{e}_k: \quad \frac{1}{H_a} \mathcal{E}_a(T) = \vec{F} \vec{e}_a$$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$  - зависимость  $q(q')$  - замена переменных

Как измерить скорость?

$\dot{q}^i = \underbrace{a^i_{,j}}_{\text{матрица Якоби}} \dot{q}^j$  - контравариантный вектор (подар или, к-рый при смене базиса бежит себя встать)  
(тензор 2 рода)

$$\dot{q} = J \dot{q}'$$

Что будет с градиентом?

$f(q)$  - скал. ср-ва

$f(q(q'))$   $f_{,i} = f_{,i} a^i_{,j}$  - градиент не будет уже не скал! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор - тензор 1 рода)

$$\underbrace{\nabla' f}_{\text{спроси}} = \nabla f J \quad \nabla f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже считали!}} = (J^T)^{-1} \nabla f^T$$

Разница (между ко- и контр-) теряется, если преобр-е ортогонально  $((J^T)^{-1} = J)$

## Метрический тензор

$$\vec{g}_\kappa = \vec{r}_{,\kappa} \quad \vec{r}(q(q')) - \text{замена}$$

$$g_{\kappa'} = \vec{r}_{,\kappa} \cdot \vec{r}_{,\kappa'} = \vec{g}_\kappa \cdot \vec{r}_{,\kappa'} \quad - \text{получается, } \vec{g}_\kappa - \text{ковариантный тензор}$$

Метрический тензор:  $\vec{v} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow v^2 = \underbrace{g_i g_\kappa}_{\text{метрич. тензор!}} \dot{q}^i \dot{q}^\kappa$

$$g_{i'\kappa'} = \dot{q}_{i'}^i \dot{q}_{\kappa'}^\kappa g_{ik} - \text{ковариантный тензор 2-го ранга вида } (0, 2)$$

# Кинематика Твёрдого Тела

Твёрдое тело - совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



$M \in \text{телу}$  - носок ПТ (Твёрдого тела)

Движение Твёрдого тела - это движение носка и движение ПТ относ. носка (вращение).

## Вращение. Углы конечного вращення



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

Угол Эйлера

$\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем си-му координат  $Ox$ :

$$x \xrightarrow[\substack{\psi \\ 3 \text{ (относ. } x_3)}]{\psi} x' \xrightarrow[\substack{\theta \\ 1'}]{\theta} x'' \xrightarrow[\substack{\varphi \\ 3''}]{\varphi} \xi$$



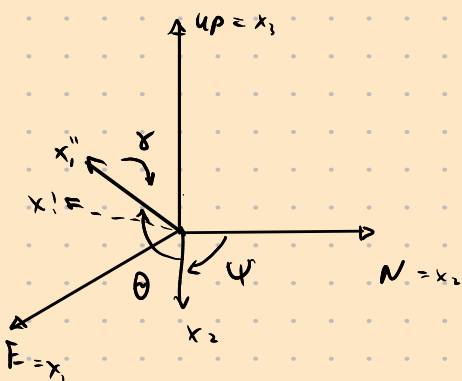
$\psi$  - угол прецессии

$\theta$  - угол нутации

$\varphi$  - угол собственного вращения

Параметры  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  зависят от в-зи-огн соотв. с положением Твёрдого тела  
Везде кроме носка.  $\theta = \{0, \pi\}$

Самые простые (картабельные) углы



$$x \xrightarrow[\substack{\psi \\ 3}]{\psi} x' \xrightarrow[\substack{\theta \\ 1'}]{\theta} x'' \xrightarrow[\substack{\gamma \\ 2''}]{\gamma} \xi$$

$\psi$  - куты

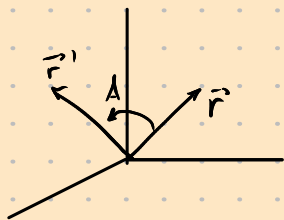
$\theta$  - тангенс

$\gamma$  - крен

Вращение при  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Каждая си-ма углов конечного вращення может иметь вырождение.

## Ортогональные матрицы



$$\vec{r}' = A \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 \quad \forall \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T A^T A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = I$$

Определение орт. матрицы

Сб-бу

1. Теорема Фробениуса - Келли:  $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

↗ неопределён  
↘ определённый неопределён



