

Глава I

Аналитические методы решения ДУ

§ 1. Основные понятия

Опр-е (однородные ДУ)

ОДУ - это соотношение:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

$$x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x).$$

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2) \text{ - ур-е, разрешённое относительно старшего порядка произв.}$$

n - порядок ДУ

$y = \varphi(x)$ - решение ДУ, если:

1. Она n раз дифференцируема

2. После её подстановки в (1) или (2) получим тождество по x :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

$$\varphi^{(n)} \equiv F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

Связь F (или f) должна быть установлена! $F(F'(x)) = 0$ - не ДУ

Пример: модель хищника - жертва: $x(t)$ - жертва, $y(t)$ - хищник

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha xy + \beta x \\ \dot{y} = \alpha xy - \beta y \end{cases} \quad \text{- модель Лотки - Вольтерра}$$

В курсе рассматриваются также системы ур-ий:

$$\begin{cases} \dot{x}' = f_1(t, x', \dots, x^n) \\ \dots \\ \dot{x}'' = f_n(t, x', \dots, x^n) \end{cases} \quad (3) \text{ - нормальная система ДУ (слева - только 1-й порядок)}$$

Разрешённое ур-е

Приведём ур-е n -го порядка к системе ур-ий 1-го порядка:

$$x^{(n)} = f(t, \dots, x^{(n)}, \dots, x^{(1)})$$

$$x(t) = v^1, \quad x'(t) = v^2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t) = v^n \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{v}^1 = v^2 \\ \dot{v}^2 = v^3 \\ \dots \\ \dot{v}^{n-1} = v^n \\ \dot{v}^n = f(t, v^1, \dots, v^n) \end{cases} \quad (5)$$

Теорема

(4) и (5) эквивалентны.

D-бо

\Rightarrow Пусть $x(t)$ - решение ур-я (4).

$$x(t) = v^1, \quad v^2 = \frac{dx}{dt}, \dots, \quad v^n = x^{(n-1)} \Rightarrow x(t) \text{ - р-е (5).}$$

\Leftarrow Пусть $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ - р-е (5).

$$x(t) = v^1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dv^1}{dt} = v^2, \dots, \quad x^{(n)}(t) = \frac{dv^n}{dt} = f(t, v^1, \dots, v^n) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

ИТА

Не обыкновенные ДУ

$$\Phi(x^1, \dots, x^n, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}) = 0 \quad (6)$$

$$u = u(x^1, \dots, x^n)$$

- ур-е в частных производных.

Пример: $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u = u(t, x)$ - волновое ур-е

Реш-е: $u = f(x - ct)$ - любая непр. ф-ия вместо константы!

§2. ДУ в частных производных. ДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (1) \quad - \text{ДУ 1-го порядка, разрыв. относ. старшей произв.}$$

Задача Коши - найти р-е (1) такое, что $y(x_0) = y_0$.

$F(x, y)$ - ф-ия 2-х переменных. Пусть $F(x, y)$ в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ непрерывна, т.е.

$F(x, y) \in C_\Omega$. Если $(x_0, y_0) \in \Omega$, то \exists р-е задачи Коши, которое не определено.

Ω - область определения ур-я (1).

Пример: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ на $[-1, 1]$, р-е: $y = Cx$, $x \neq 0$

Если $\varphi(x)$ - р-е (1), то $\varphi(x)$ - непр. дифф. ф-ия, т.е. $\varphi(x) \in C^1_\Omega$.

$$\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x)) \in C_\Omega$$



$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$$

Если в каждой т. Ω провести такие малые отрезки, то $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$, и $\operatorname{tg} \alpha(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, то получим поле направлений ур-я (1).

Греницы р-на $\varphi(x)$ наз-ся интегральные кривые.

В каждой точке интегральные кривые касательны полю направлению.

Такой метод р-на наз-ся методом изоклин.

Т.к. $f(x, y)$ - непрерывна, то поле направлений не им. вертикальных прямых. Тогда

$dx \neq 0$, т.е.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Leftrightarrow dy - f(x, y) dx = 0$$

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad \text{— ур-е в полном дифференциале}$$

$$P(x, y), Q(x, y) \in C$$

Здесь x и y равноправны, и dx может быть $\neq 0$ (сильно вертикальные ур-я)

