Тригонометрические ряды Фурье

$f(x) \in L_R(-l, l)$ и им. период $2l$

L_R - абс. интегр., т.е. $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$ абс. сх.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

– коэф-ты Фурье

Лемма Римана

$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t)\cos tx\,dt \to 0$ при $x \to \infty$

I - промеж.

$\int_I f(t)\sin tx\,dt \to 0$, $x \to \infty$

Следствие: $f(x) \in L_R(-l; l) \Rightarrow a_n, b_n \to 0$

Триг. ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right]$ - ряд Фурье $f(x)$

Свойства

1. Если $f(x)$ нечётна, то $a_n = 0$

   Если $f(x)$ чётна, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - периодична $\Rightarrow$ интеграл можно брать по любому отрезку длиной $2l$

Достаточное условие разложимости в р. Фурье (следствие из пр. Липшица)

1. $f(x) \in L_R(-l; l)$, им. период $2l$

   В т. x_0 имеет конечные односторонние произв. $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

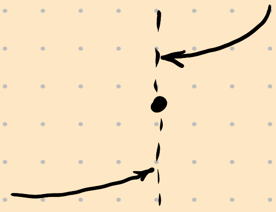
   Тогда ряд Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Пусть $f(x) \in L_R(-l; l)$, им. период $2l$

   x_0 - т. разрыва 1 рода, $\exists$ конечные „обобщённые" односторонние производные:

   $$\lim_{u\to+0}\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u\to+0}\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

   Тогда ряд Фурье в т. x_0 сходится к ср. арифм. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



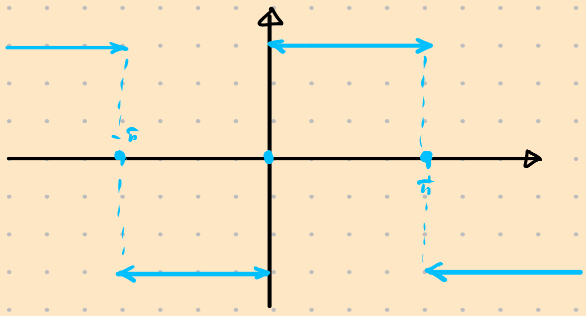
Часто $l = \pi$, тогда $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

Задача 1

Разложить в р. Фурье $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

Гр. суммы ряда строится сразу.



ф-ия нечёт. $\Rightarrow a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt$ — для нечёт. ф-ии

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sign} t \,\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi n}\left(-\cos nt\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

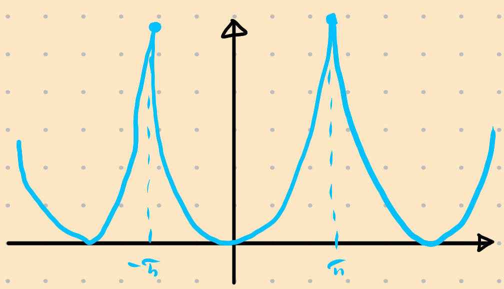
$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не яв-ся равномерно сх. на всей прямой, т.к. сумма его разрывна (р/н сх. ряд из непр. ф-ий им. непр. сумму).

Задача 2

$f(x) = x^2$ на $-\pi < x < \pi$ сх-ся в $\forall$ т. по 1 следствию

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$, $b_n = 0$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n(-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Дост. усл. р/н сх. р. Фурье

$f(x) \in L_R[-l;l]$, период $2l$, и кусочно-гладкая на $[-l;l]$.
($f(x)$ непр. на $[-l;l]$, $f'(x)$ кусочно-непр. на $[-l;l]$, т.е. есть конечное число т. разрыва I рода). Тогда р. Фурье $f(x)$ сх. р/н на всей числовой прямой.

Излишне: если $f'(x)$ опр. всюду на прямой, то у неё не может быть разрывов I рода. Поэтому в теореме о равн. сх. р. Фурье в т. разрыва $f'(x)$ не опр.

Ряд Ф. x^2 сх. р/н на $(-\infty; +\infty)$.

<u>Утв.</u> 22-110
Пусть триг. ряд (для простоты $l = \pi$)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (1) сх. р/н на $(-\infty; +\infty)$. Тогда его сумма $f(x)$ - непр. 2π-период. ф-ия, и (1) - р. Фурье своей суммы.

□ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - р/н сх. $\Rightarrow f(x)$ непр.

Сумма р/н сх. ряда из непр. ф-ий - непр. ф-ия.
Имеет период 2π - очев.
Р/н сх. ряд из непр. ф-ий на конечном отрезке можно почленно интегрировать.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\,dt}_{0}\Big) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

Если р/н сх. ряд умножить на огр. ф-ию, он останется р/н сх.

$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$, m фикс.
- сх р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\,dt}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt \cos mt\,dt}_{=0 \text{ если } n \neq m} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt \cos mt\,dt}_{=0}\Big) =$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \; dt$$

Ортогональность системы $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ в пр-ве непр. ф-ий на отр. $[-\pi; \pi]$ со скалярным произв. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \; dt$$

■

Задача 22-111

Явл-ся ли рядами Фурье?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ — ряд сх. р/н на R => ряд Фурье от своей суммы

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ — коэф-ты $\not\to 0$ => не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x, \quad -\pi \le x \le \pi$ — нечётная, $a_n = 0$

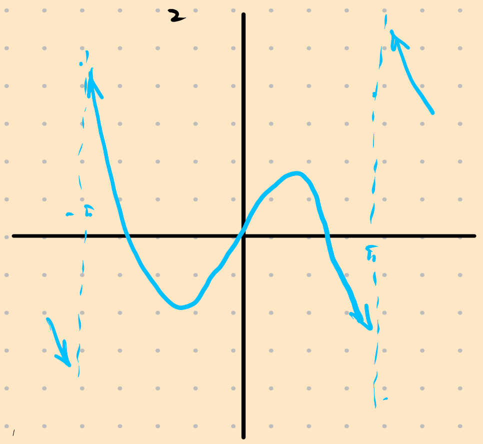
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \left(\sin(n+1)t + \sin(n-1)t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} dt}_{=0} \right] =$$

$$\underset{n \ge 2}{=} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad \text{— } b_n \text{ при } n \ge 2$$

При $n = 1$ $\quad b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt}_{=0} \right] =$

$$= -\frac{1}{2}$$



Ряд сх. не р/н

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2 - 1} \sin nx$$

на $(-\pi; \pi)$

Разложение по cos и по sin

$f(x) \in L_R(0; l)$

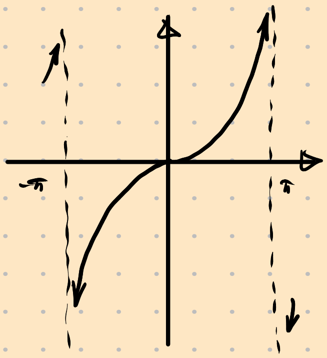
Если её продолжить по чётности $\rightarrow$ $f(x) \in L_R(-l; l)$

То её ряд Фурье — разложение $f(x)$ на $(-l; l)$ по cos

Если по нечётности, то по sin

Задача 1

$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi$ по sin



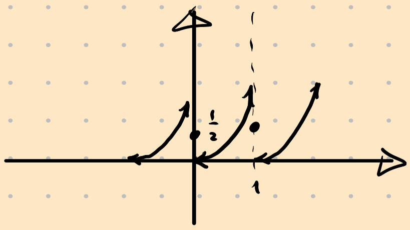
Ряд сх. неравномерно (разрывы) на $(-\infty; +\infty)$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

Задача 2

Разложить в ряд Фурье $f(x) = x^2$ на $(0; 1)$ с периодом 1



$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$

$$a_n = 2\int_0^1 t^2 \cos 2\pi n t \, dt \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

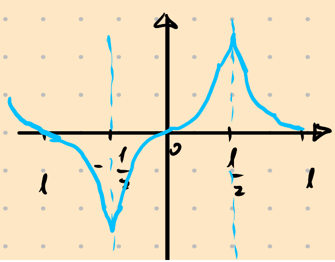
$$b_n = 2\int_0^1 t^2 \sin 2\pi n t \, dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{на } 0 < x < 1$$

Ряд сх-ся неравномерно на $(-\infty; +\infty)$ т.к. сумма разрывна

Разложение по sin или cos чётных или нечётных кратных дуг

① $f(x) \in L_R(0; \frac{l}{2})$



$f(x) = f(l - x)$, $0 < x < \frac{l}{2}$ — симметрия относ. $x = \frac{l}{2}$

Далее по нечётности, далее с периодом $2l$

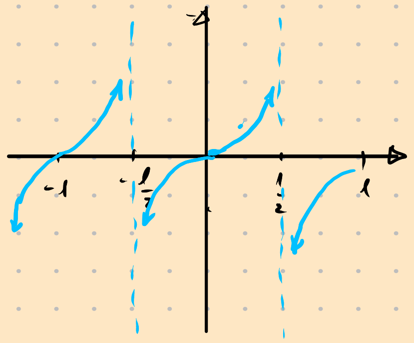
В этом случае $a_n = b_{2n} = 0$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\sin\frac{\pi(2n+1)t}{l}\,dt \qquad n=0,1,2,\dots$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{n}$ — Разложение по sin нечётных кратных дуг

② $f(x)\in L_R(0;\frac{l}{2})$

$f(x) = -f(l-x)$, $0<x<\frac{l}{2}$ — симметрия отн. т. $(\frac{l}{2};0)$



$a_n=0,\quad b_{n+1}=0,$

$$b_{2n} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\sin\frac{2\pi n t}{l}\,dt$$

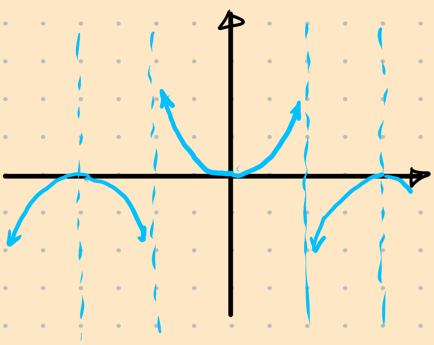
Разложение по sin чётных кр. дуг

(разложение по sin с периодом l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin\frac{2\pi n x}{l}$$

③ $f(x) = -f(l-x)$ на $0<x<\frac{l}{2}$ — симм. отн. т. $(\frac{l}{2};0)$

Далее по чётности, далее с периодом $2l$



$b_n=0 \qquad a_{2n}=0$

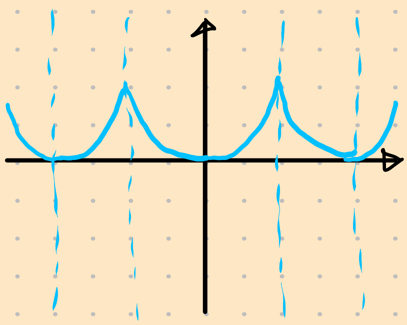
$$a_{2n+1}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\cos\frac{\pi(2n+1)t}{l}\,dt$$

Разложение по cos нечётных кр. дуг

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

④ $f(x) = f(l-x)$ $0<x<\frac{l}{2}$ — симм. отн. $x=\frac{l}{2}$

Далее по чётности, далее с периодом $2l$



$b_n=0 \qquad a_{2n+1}=0$

$$a_{2n}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\cos\frac{\pi\cdot 2nt}{l}\,dt$$

Разложение по cos чётных кр. дуг

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos\frac{\pi\cdot 2nx}{l}$$

(фактич. разложение по cos с периодом l)

Задача 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Разложить по sin на $[0; 2]$ $\qquad l = 2!$

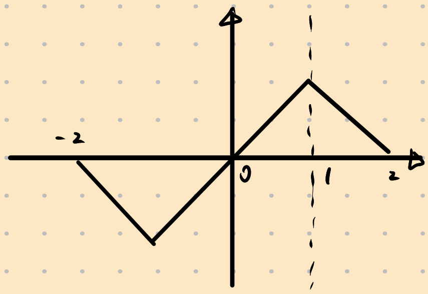


График симм. отн. $x = 1$

$f(x) = f(2-x)$, $0 \le x \le 1$

Получается по sin нечётных кр. дуг

$$b_{2n+1} = \frac{4}{2}\int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2}\, dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

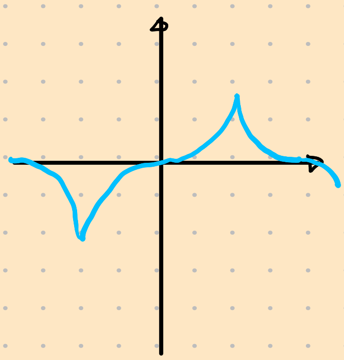
Ряд сх-ся р/н на $(-\infty; +\infty)$ т.к. $f(x)$ имеет период 4 и кусочно-гладкая на $[-4; 4]$

Задача 2

Построить гр. суммы рядов Фурье по cos и sin чёт. и нечёт. кратных дуг.

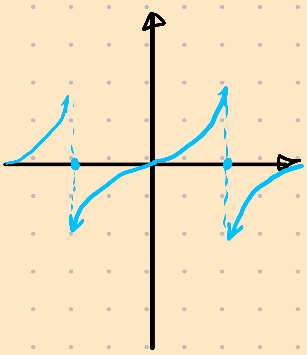
Сходятся ли они р/н?

$f(x) = \operatorname{sh} x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$



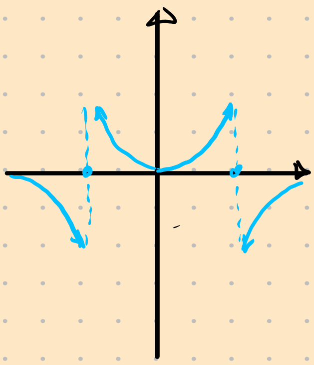
синусы неч. кр-дуг

сх. р/н т.к. им. период 2π и кусоч. гладкая на $[-\pi; \pi]$



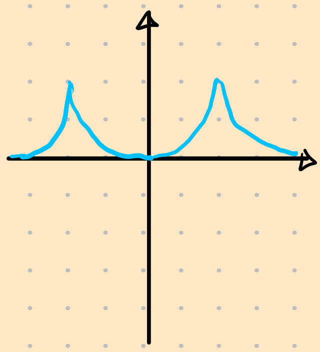
синусы чёт. кр. дуг

сх. не р/н т.к. разрывы



косинусы нечёт. кр. дуг

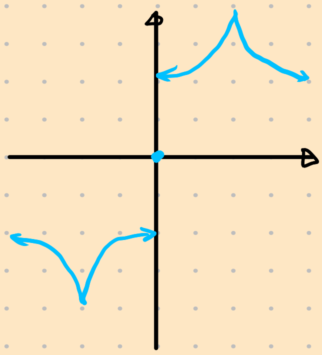
сх. не р/н



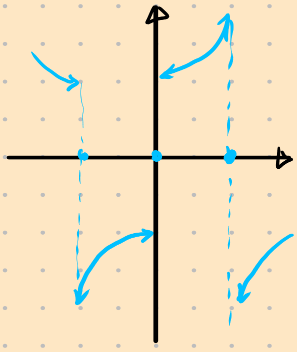
косинусы чёт. кр. дуг

сх. р/н

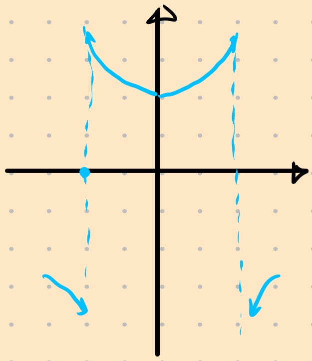
$f(x) = sh\ x + 1$



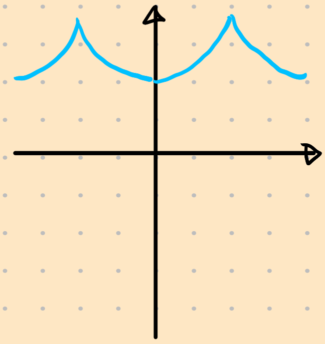
синусы нечёт. пр.
сх. не р/н



синусы чёт. пр. фун
сх. не р/н



косинусы нечёт. пр. фун
сх. не р/н



косинусы чёт. пр. фун
сх. р/н

Почленное дифференцирование рядов Фурье

$\exists\ f(x)$ им. период $2l$ и кус.-гл. на $[-l; l]$, тогда:

1. Ряд Ф. сх. р/н на $(-\infty; +\infty)$
2. Ряд Ф. можно почленно дифф.:

Если $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right]$

То ряд Ф. $f'(x)$ (к-рая кус. непр. на $[-l; l]$) получ. формальным дифф. ряда Фурье f:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{\pi n}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} + b_n \frac{\pi n}{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\right)$$ — не обязан сходиться!

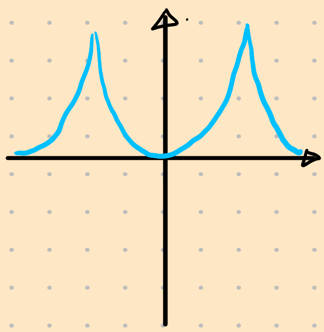
имеет ряд Фурье

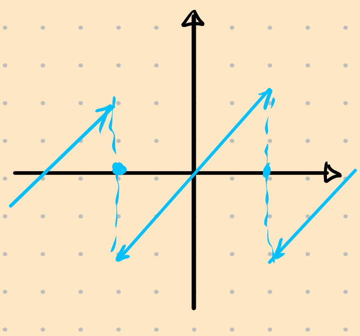
Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \qquad -\pi \le x \le \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

сумма ряда равна $2x$ на $(-\pi; \pi)$ по сл. 1 пр. Липшица





$-\pi < x < \pi$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

Равенство Парсеваля

$L^2_R(I)$ - мн-во ф-ий, абс. инт. на I вместе с $f(x)^2$.

Для конечного I $L^2_R(I) \subset L_R(I)$

Все собств. инт. - из $L^2_R(a;b)$

Если $f(x) \in L^2_R(-l;l)$ и им. период $2l$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} (f(x))^2\,dx$$

В частности ряд слева сх.

Пример

$f(x) = x$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$f(x) = x^2$;

$$\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\,dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Неравенство Виртингера

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \le C\int_a^b f'(x)^2\,dx$$

Задача 2

$f(x)$ нур. н. на $[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$

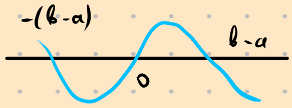
Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\,dx$

$\square$ Рас-им $\varphi(x) = f(x+a)$, $\varphi(0) = f(a) = 0$

$\varphi(b-a) = f(b) = 0$

Продол. по нечётности, задаём периодом $2\cdot(b-a)$ $(l = b-a)$

Т.к. она кус.-гл., р. Фурье сх. р/н



$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{b-a}$$ нет cos т.к. нечётная

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b-a} b_n \cos\frac{\pi n x}{b-a}$$

$$\frac{2}{b-a}\int_0^{b-a} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{b-a} \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(b-a)^2} b_n^2$$

Интегрирование рядов

Пусть $f(x)$ кус.-непр. на $[-l; l]$, пер. $2l$

$$f(x) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{пр. р.} \\ \text{Фурье}}}{\sim} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right)$$

Тогда $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$ — кус. гл. на $[-l; l]$, $F(-l) = F(l)$

$$F(x) = \frac{C}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{\pi n} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} - \frac{l}{\pi n} b_n \cos \frac{\pi n x}{l}\right)$$ — сумма р/м сх. р. Фурье

$$C = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(t)\,dt$$

Если $\frac{a_0 x}{2}$ не отнимать, то потеряем и не сходится р/м.

Порядок убывания коэф.-ов Фурье

Если $f(x)$ кус. гл. на $[-l; l]$ и пер. $2l$, то $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(x)$ — кус. непр. дифф. на $[a, b]$, если $f'(x)$ сущ. всюду, кроме конечного числа т., где у неё разрывы I рода.

Коэф-ты Фурье такой ф-ции, $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad |a_n|, |b_n| \leq C \frac{1}{n}$

$f(x)$ кус. гл., если она непрерывна и кус. непр. дифф.

Например, $\operatorname{sign} x$ — кус. непр. дифф., но не кус. гл.

Обобщение

Утв. А. Если $f(x)$ пер. $2l$ и $f^{(k-1)}(x)$ кус. гл. на $[-l; l]$, то коэф. Фурье $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Утв. Б. Если $f(x)$ пер. $2l$, $f^{(k-2)}(x)$ непр. на $[-l; l]$, $f^{(k-1)}(x)$ кус. непр. дифф., то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Задача такая: оценить порядок убывания коэф-ов Фурье.

Пример

$f(x)=x^2$ на $[-\pi;\pi]$, с пер. 2π

А) $k-1=0,\ k=1$ $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n=0$

$k-2=0,\ k-1=1,\ k=2$ $a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ — удобнее применять

$f(x)=x^3$

А) неприменимо (она сама не кус. н.)

Б) $k-1=0,\ k=1$ $b_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\ a_n=0$

$f(x)=(\pi^2-x^2)^2$ $[-\pi;\pi]$ с пер. 2π

Нужно проверить непр. произв. в т. π и $-\pi$ (на концах могут быть проблемы)

$f(\pi)=f(-\pi)=0$ — непр.

$f'(x)=2(\pi^2-x^2)\cdot(-2x)$

$f'(\pi)=f'(-\pi)=0$

$f''(\pi)=f''(-\pi)$ — кус. н.

$f'''(\pi)\neq f'''(-\pi)$ — кус. непр. дифф.

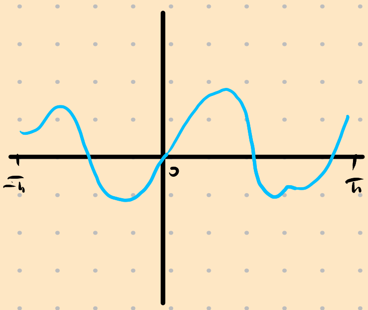
А) $a_n=o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ $b_n=0$

Б) $a_n=O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ — на практике делать только Б!

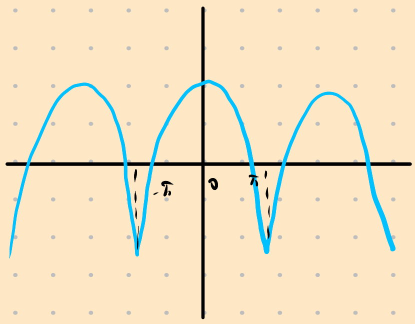
Задача 1

$f(x)=\pi^3x-x^4,\ 0\le x\le\pi$ разл. в р. Фурье по sin.

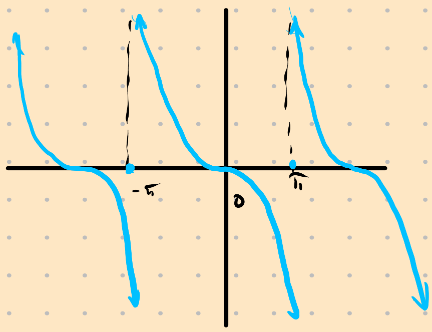
Тогда пр. сумм продифф. и дважды продифф. ряда



ряд



ряд'



ряд''

Суммирование рядов методом средних арифметических

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = a$

Обратное неверно, $(-1)^n$ – расх., ср. арифм. $\to 0$.

Ряд $1 + 3 - 3 + 1 + 3 - 3 + \ldots$ расходится (общий член ряда $\not\to 0$)

$$S_n = \begin{cases} k & n = 3k \\ k+1, & n = 3k+1 \\ k+4, & n = 3k+2 \end{cases}$$

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$$