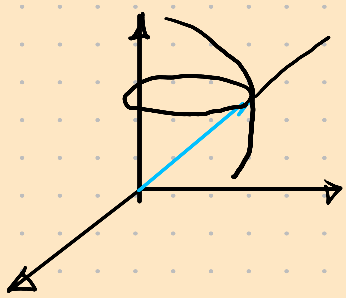
Кинематика материальной точки

Сферическая сис-ма



$$\vec{q} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ – ОНБ

$\vec{V} = \dot{q}^i \cdot \vec{q}_i = \sum H_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$

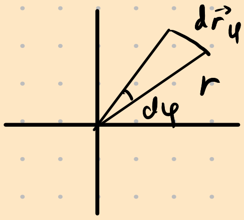
$H_k = |\vec{r}_{,k}|$

$$\vec{r}_{,r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow H_r = 1 \qquad H_\lambda = r\cos\varphi \qquad H_\varphi = r$$

Геометр. способ расчёта Ламе

$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \simeq \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a} \cdot dq^a$



$d\vec{r}_\varphi \quad |d\vec{r}_\varphi| \simeq \underbrace{r}_{H_\varphi} d\varphi$

$$(2):\ \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$w_k = \vec{w} \cdot \vec{e}_k$

$(V^2/2)_{,\dot{r}} = \dot{r}\ ; \quad \frac{d}{dt}(V^2/2)_{,\dot{r}} = \ddot{r}$

$(V^2/2)_{,r} = r(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2) \overset{(4)}{\Rightarrow} w_r = \ddot{r} - r(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2)$

2-й закон Ньютона в ковариантной форме

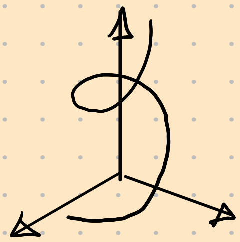
$m\vec{w} = \vec{F} \ | \cdot \vec{g}_a$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,\dot{a}} - \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,a} = \vec{F} \cdot g_a = Q_a$$

$\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a} = Q_a$ – в любой кривол. сис-ме координат!

$$\frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a}\right] = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Движение по винтовой линии



$$\begin{cases} x^1 = a\cos\omega t \\ x^2 = a\sin\omega t \\ x^3 = bt \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

$$\vec w = \dot v \vec\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec n$$

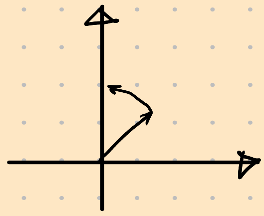
$$\vec w_\tau = 0$$

$$\vec w_n = a\omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$$

Задача

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \qquad a, b = const$$



$r(\varphi)$ – ? $\qquad w_r(r), \quad w_\varphi(r)$

$r(0) = r_0$

$\varphi(0) = \varphi_0$

$V_r = \dot r$

$V_\varphi = r\dot\varphi$

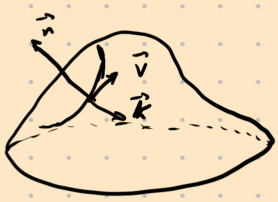
$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{br}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 \leftarrow \ddot r = -2a\dot r/r^3 = -2a^2/r^5$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\underbrace{r^2\dot\varphi}_{b}) = 0 \qquad \dot\varphi = b/r^2$$

№ 1.40



$$\vec k = \frac{\vec n}{\rho} \text{ (вектор кривизны)}$$

$q^1 = const$

$V = const$

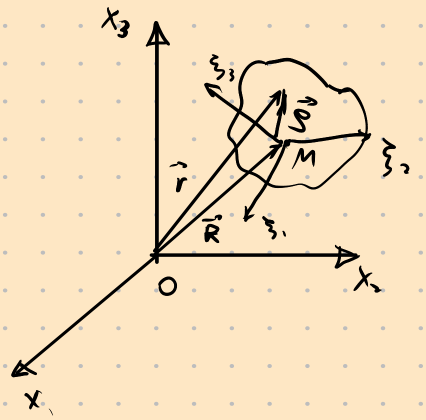
$\vec r_{,1}$ – нормаль

$\vec r_{,2}, \ \vec r_{,3}$ – касательные

$$\begin{cases} \vec w \cdot \vec r_{,2} = 0 \\ \vec w \cdot \vec r_{,3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

условие движения по геодезической

Кинематика твёрдого тела



$\vec r = \vec R + \vec\rho$

$\vec\rho = A(t)\vec\rho_0$

$\vec R(t)$, $A(t)$ – зад. $\Rightarrow$ движ. т. задано.

$A^T A = E$

$\det A = 1$ — ортог. матрицы обр-ют группу

Рас-им $A(t)$: $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt}\Big|\ A^T A = E \Rightarrow \dot A^T(0)\underbrace{A(0)}_{E} + \underbrace{A(0)}_{E}\dot A^T = 0$$

$\dot A(0) = \hat\omega$: $\hat\omega^T = -\hat\omega$

$dt \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat\omega\, dt$

$\vec v = \dot{\vec r} = \underbrace{\dot{\vec R}}_{\vec v_0} + \dot{\vec\rho}$, $\rho = A\rho_0$

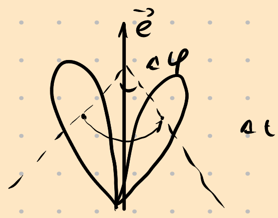
$\rho(dt) \approx (E + \hat\omega\, dt)\vec\rho_0$ $\Rightarrow$ $\dot\rho|_{t=0} = \hat\omega\,\rho|_{t=0}$

$\dot{\vec\rho} = \hat\omega\vec\rho$

$\vec V = \vec V_0 + \hat\omega\vec\rho$

В R^3: $\hat\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\hat\omega\vec\rho = \vec\omega \times \vec\rho$, где $\vec\omega = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix}$ – угловая скорость

$\vec V = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec\rho$ – ф-ла Эйлера



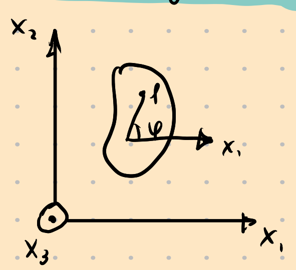
$\vec\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec e\,\Delta\varphi}{\Delta t}$

$\vec e\,\Delta\varphi = \Delta\vec\varphi$ – вектор Эйлера

$\vec W = \dot{\vec V} = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\rho)$

Формула Ривальса, $\vec\varepsilon = \dot{\vec\omega}$ – угл. ускорение

Плоское движение



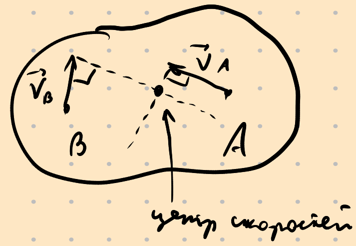
$\vec\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$, $\vec\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\omega \end{bmatrix}$

$\omega = \dot\varphi$

$\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\rho) = \vec\omega(\cancel{\vec\omega\vec\rho})^{0} - \omega^2\vec\rho$

$\vec W = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho - \omega^2\vec\rho$ – 2D Ривальс

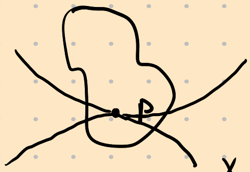
Мгновенные центры скоростей и ускорений



Центр скоростей: $P: \vec V_P = 0 = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec\rho_P$

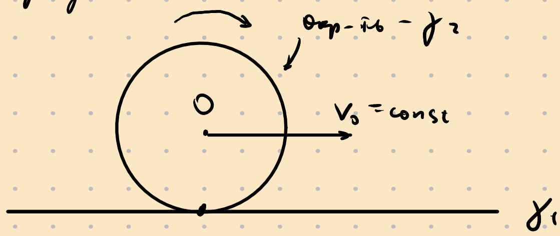
$$\vec\omega \times V_0 - \omega^2 \vec\rho_P = 0 \Rightarrow \rho_P = \frac{\vec\omega \times \vec V_0}{\omega^2} \text{ — всегда есть}$$

Но! P движется как в пр-ве, так и в теле — по центроидам



γ_2 — подв. центроида

γ_1 — неподв. центроида



Качение без проскальзывания

(в т. касания V тел равны)

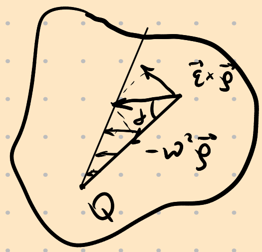
Центр ускорений Q

$$\vec W_Q = 0 = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\rho_Q$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q = 0$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^4 \vec\rho_Q + \omega^2 \vec W_0 = 0$$

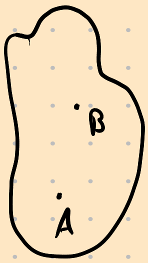
$$\vec\rho_Q = \frac{\vec\varepsilon \times \vec W_0 + \omega^2 \vec W_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Полезный факт (можно в 3D и в 2D)

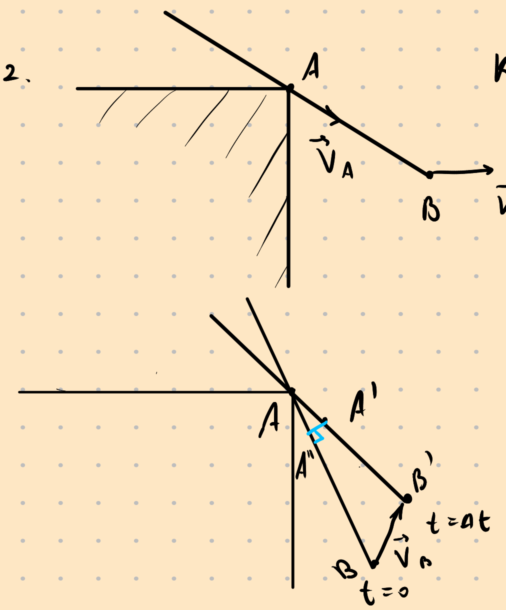
1.



$$\vec V_B = \vec V_A + \vec\omega \times \vec{AB} \quad \Big| \; \vec e_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec V_B \cdot \vec e_{AB} = \vec V_A \cdot \vec e_{AB}$$

2.



Куда направлена $\vec V_A$, если палка скользит по углу?

Ответ: вдоль AB:

$$\vec{AA'} = \vec{AA''} + \vec{A''A'}$$

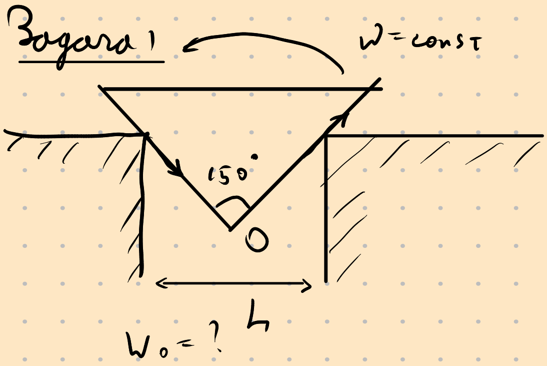
$$\vec{A''A'} \simeq AA''\Delta\varphi$$

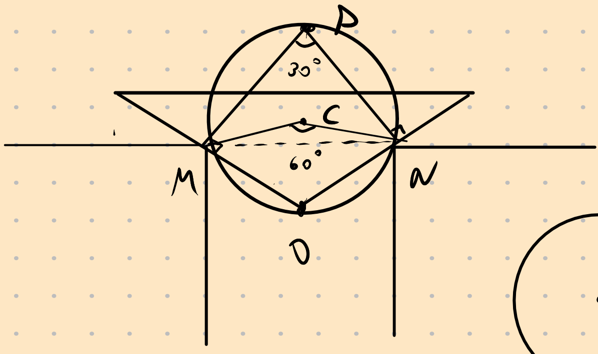
$$\vec V_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \Bigg(\underbrace{\frac{\vec{AA''}}{\Delta t}}_{\text{коллинеарно стержню } - \vec V_A} + \underbrace{\frac{\vec{AA''}\Delta\varphi}{\Delta t}}_{\to 0} \Bigg) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA''}}{\Delta t} = \vec V_A$$

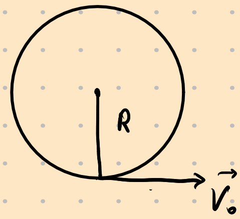
$\vec V_A$

ЧТД

Задача 1





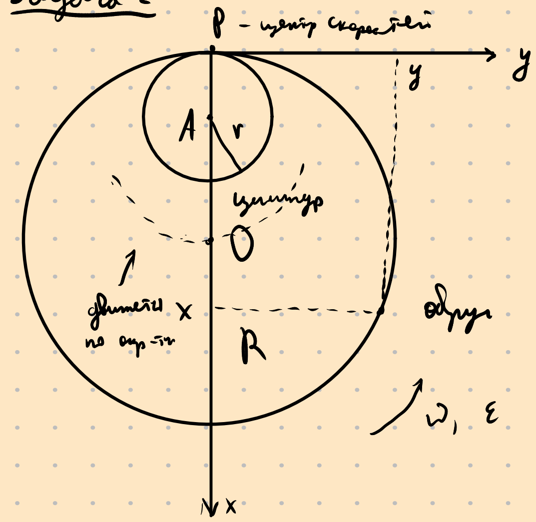


$MN = L = 2R\sin 30^\circ = R$

$PO = 2L \qquad V_0 = 2\omega L$

$$W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$

Задача 2



Без проскальзывания

ω, ε заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

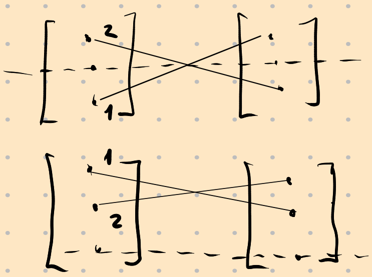
$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

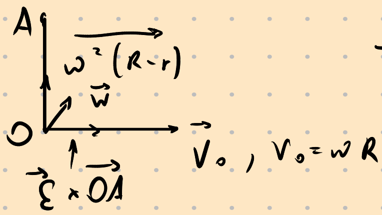
Траектория O – окр-ть с ц. A $\qquad \vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y - R \\ 0 \end{bmatrix}$

Полезная штука: (векторное умножение)

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^2 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix}$$



Отрезок AO – новое тело!



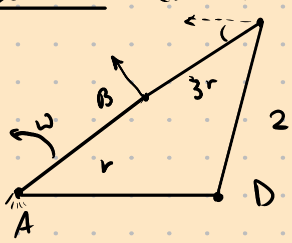
Ω – угл. скор. AO

$$V_0 = \omega R = \Omega(R - r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R-r}\,\omega$$

$$\mathcal{E} = \frac{R}{R-r}\,\varepsilon$$

Задача 2 (3.24 ~)



$V_c - ?$

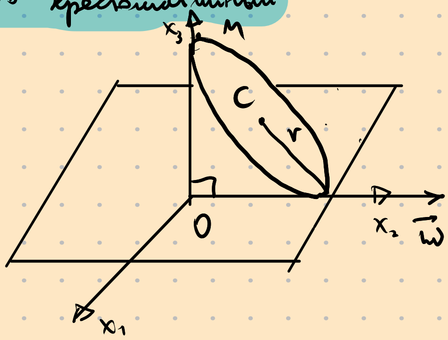
$W_c - ?$

$\vec V_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec V_c \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_c = 0$

$\omega = const$

(палка крутится в т-ти месте и имеет цент)

№ хрестоматийный



$r, \omega = const$, движение без проскальзывания

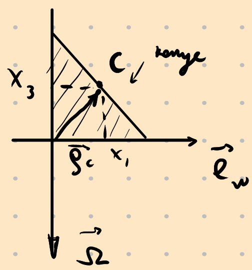
$\vec V_M, \vec W_M, \rho_M, \vec\omega, \vec\varepsilon - ?$

$\vec V = \underset{\parallel 0}{\vec V_0} + \vec\omega \times \vec\rho = \vec\omega \times \vec\rho$ – т.к. образующая конуса, касающаяся пов-ти, имеет в каждой т. $\vec V = 0$, то $\vec\omega \parallel$ с этой обр-ей

$$\vec\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec V_M = \vec\omega \times \vec\rho_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt2 \omega r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec\omega = \omega \vec e_\omega, \quad \vec e_\omega = \frac{\vec\omega}{\omega}$

$\vec\varepsilon = \dot\omega \vec e_\omega + \omega \dot{\vec e}_\omega$



$\vec e_\omega$ вращается со скоростью $\vec\omega$

Введём фиктивное ТТ:

Получим, что

$\vec\varepsilon = \omega \vec\Omega \times \vec e_\omega$ (здесь $\vec e_\omega$ это как бы $\vec\rho$, $\vec\Omega$ это её $\vec\omega$)

$\vec V_c = \vec\omega \times \vec\rho_c = \vec\Omega \times \vec\rho_c$

$x_1: \quad \omega \frac{r}{\sqrt2} = \Omega \frac{r}{\sqrt2} \Rightarrow \Omega = \omega$

$$\vec\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \Rightarrow \vec\varepsilon = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec W_M = \underbrace{\vec\varepsilon \times \vec\rho_M}_{\perp \vec\tau} + \vec\omega \times (\underbrace{\vec\omega \times \vec\rho_M}_{\vec V_M \text{ (как правило)}, \perp \vec\tau})$$

$\vec W_M = \vec W_M^\tau \vec\tau + \frac{V_M^2}{\rho_M} \vec n$

$\vec V_M \parallel \vec x_1 \Rightarrow \vec\tau = \vec x_1$

Таким образом $\vec W_M = \frac{\vec V_M^2}{\vec\rho_M} \vec n \Rightarrow \rho_M = \frac{V_M^2}{W_M}$

! При качении без проск-ния, скорость в каждой т. линии касания = 0,

$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}\,\vec{e}_\omega + \vec{\omega}\, e_\omega$

Ортог. матрицы

$A\vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(a_2^3 - a_3^2\right) \qquad e_2 = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(a_3^1 - a_1^3\right) \qquad e_3 = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(a_1^2 - a_2^1\right)$$

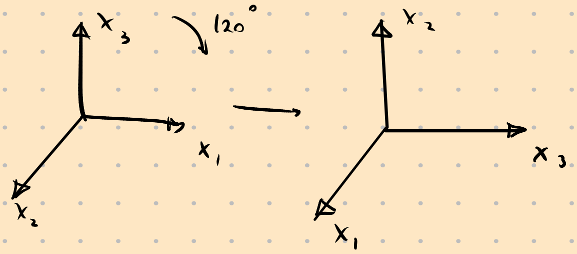
$$A = E\cos\varphi + \hat{e}\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec{e}^{\,T}\vec{e}$$

$$\operatorname{tr} A = 3\cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}, \ \varphi - ?$$



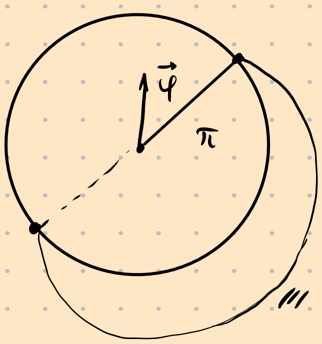
$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Крутые штуки

Группа поворотов $SO(3)$ отождествляется с шаром:



(противоп. т. отождествлены)

Многообразие - плоскость без разрывов и (обычно) гладкая

Сложение поворотов

Повороты → активные – вращаются пр-во и элементы при фикс. базисе

Повороты → пассивные – вращается базис, а эл-ты фикс.

Активный: $\vec r\,' = A\vec r$

Пассивный: $\vec e_{i'} = a^i_{i'}\vec e_i$

! Обозначение: $\vec r^{(1)}$ – вектор $\vec r$ не трогаем, изменили базис

$\vec r^{(1)} = r^{i'} e_{i'} = r^{i'} a^i_{i'} e_i = r^i \vec e_i$

$r^i = a^i_{i'} r^{i'} \iff \vec r = A\vec r^{(1)}$

$\vec r^{(1)} = A^T \vec r$ – обратное к A преобр-е

1. Сложение активных поворотов

$\vec r\,' = A_1\vec r$, $\vec r\,'' = A_2\vec r\,'$

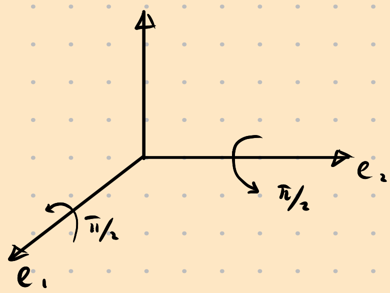
$\vec r\,'' = A_2A_1\vec r \Rightarrow A = A_n\cdot\ldots\cdot A_1$

2. Сложение пассивных поворотов

$\vec r^{(1)} = A_1^T\vec r \qquad \vec r^{(11)} = A_2^T r^{(1)}$

$\vec r^{(11)} = A_2^T A_1^T \vec r = (A_1A_2)^T\vec r \Rightarrow A = A_1\cdot\ldots\cdot A_n$

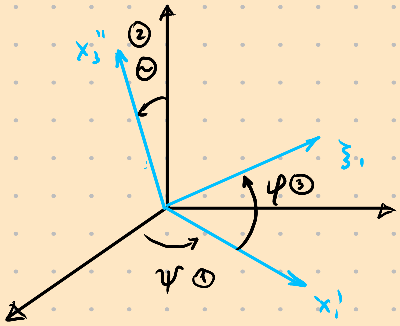
Пример 1



Считаем повороты активными (базис фиксирован)

$A = A_2A_1$

Пример 2 (углы Эйлера в матрицу)



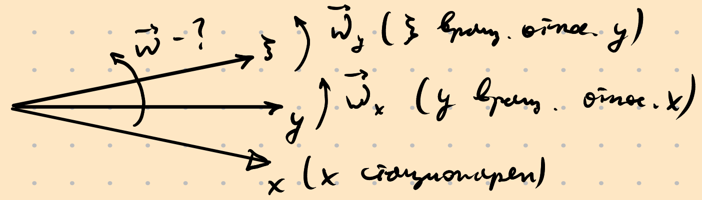
Поворот пассивный – так повороты будут вокруг базиса

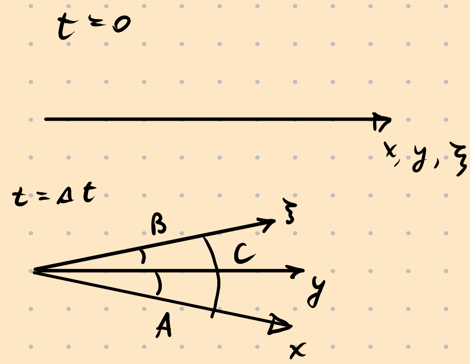
$A = A_\psi A_\Theta A_\varphi$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сложение угловых скоростей



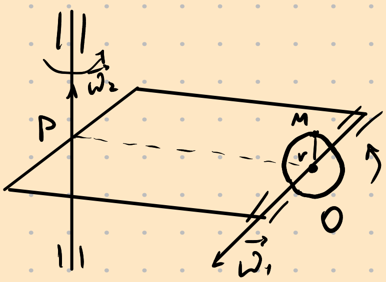


$$A \simeq E + \hat\omega_x \Delta t$$

$$B \simeq E + \omega_y \Delta t$$

$$C = AB \simeq E + \underbrace{(\hat\omega_x + \hat\omega_y)}_{\hat\omega} \Delta t$$

Пример



Рамка крутится + колесо крутится на рамке

$\vec\omega$, $\vec\varepsilon$ - ? $\qquad \omega_1, \omega_2 = const$

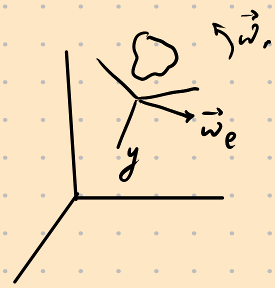
$\vec V_M$, $\vec W_M$ - ?

$\vec\omega = \vec\omega_1 + \vec\omega_2$

Вращение т.т. во вращающемся базисе

$$\vec\omega = \vec\omega_e + \omega_r^i \vec y_i$$

$$\vec\varepsilon = \underbrace{\dot{\vec\omega}_e}_{\vec\varepsilon_e} + \underbrace{\dot\omega_r^i \vec y_i}_{\vec\varepsilon_r} + \underbrace{\omega_r^i \vec\omega_e \times \vec y_i}_{\vec\omega_e \times \vec\omega_r}$$



$$\vec\varepsilon = \vec\varepsilon_e + \vec\varepsilon_r + \vec\omega_e \times \vec\omega_r$$

В задаче: $\quad \vec\varepsilon = \vec\omega_1 \times \vec\omega_2$

$$\vec V_M = \underbrace{\vec V_0}_{\vec\omega_2 \times \vec{PO}} + \vec\omega \times \vec{OM}$$

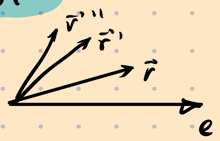
$$\vec W_M = \underbrace{\vec W_0}_{\vec\omega_2 \times (\vec\omega_2 \times \vec{PO}) = -\omega_2^2 \vec{PO}} + \vec\varepsilon \times \vec{OM} + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec{OM})$$

Кватернионы

$R' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \qquad \|\Lambda\| = 1 \qquad \Lambda = \cos \varphi/2 + \vec{e} \sin \varphi/2 \qquad |\vec{e}| = 1$

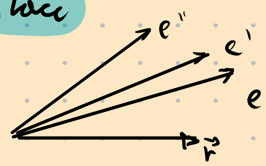
$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix} \simeq \vec{r} \Rightarrow \vec{r}\,' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$ – поворот относ. $\vec{e}$ на φ.

Акт



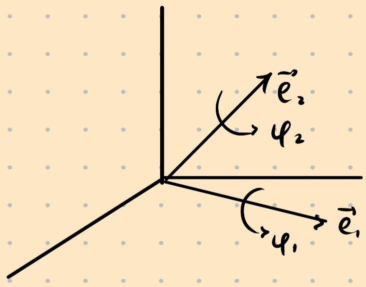
$$\vec{r}\,'' = \underbrace{\Lambda_2 \circ \Lambda_1}_{\Lambda} \circ \vec{r} \circ \widetilde{\Lambda_2 \circ \Lambda_1}$$

Пасс



$$\vec{r}_{e''} = \widetilde{\Lambda_1 \circ \Lambda_2} \circ \vec{r} \circ \underbrace{\Lambda_1 \circ \Lambda_2}_{\Lambda}$$

Пример 1



$\Lambda_1 = \cos \varphi_1/2 + \vec{e}_1 \sin \varphi_1/2$

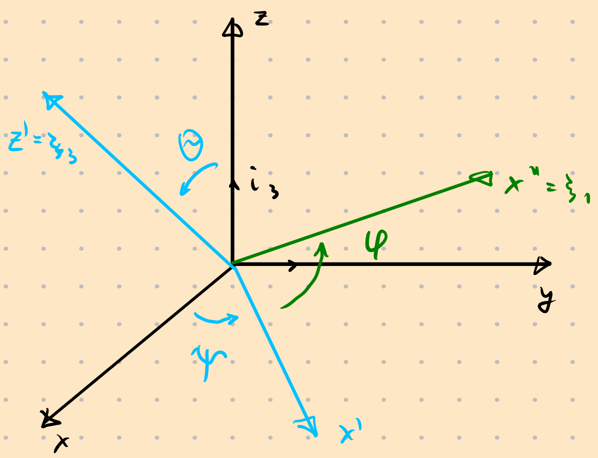
$\Lambda_2 = \cos \varphi_2/2 + \vec{e}_2 \sin \varphi_2/2$

$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \underbrace{\cos \varphi_1/2 \cos \varphi_2/2 - \vec{e}_1 \vec{e}_2 \sin \varphi_1/2 \sin \varphi_2/2}_{} \;\; \dot{=} \cos \varphi/2$

$+ \underbrace{\sin \varphi_1/2 \cos \varphi_2/2\, \vec{e}_1 + \sin \varphi_2/2 \cos \varphi_1/2\, \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin \varphi_1/2 \sin \varphi_2/2}_{}$

$e \sin \varphi/2$ причина некоммутативности поворотов – малое второго порядка

Пример 2



$\Lambda_\psi = \cos \psi/2 + i_3 \sin \psi/2$

$\Lambda_\Theta = \cos \Theta/2 + i_1 \sin \Theta/2$

$\Lambda_\varphi = \cos \varphi/2 + i_3 \sin \varphi/2$

$\Lambda = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\Theta \circ \Lambda_\varphi$ – формальная операция, чисто алгебр. перемножение (см. заметку про базис)

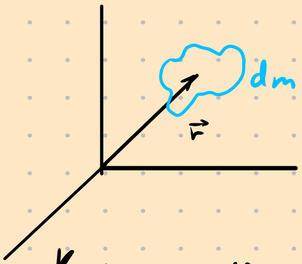
Несмотря на то, что повороты все в разных базисах, коор-ты кватернионов мы не пересчитываем – можно их все записать в первом или в последнем, взяв их координаты из собственных базисов (формально).

А если считать с физ. т. зр. – нужно действительно ставить настоящие, повёрнутые орты в кватернион.

Уравнения Пуассона

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}_x \circ \Lambda \qquad \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\,\Lambda \circ \vec{\omega}_\xi$$

Основы динамики



Континуальная система!

$$m = \int dm \quad \text{— масса}$$

$$I = \int \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, dm \quad \text{— интеграл по массе}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm \quad \text{— центр масс}$$

$$P = \int \vec{v}\, dm = m\vec{V}_c \quad \text{— импульс}$$

$$\vec{K}_0 = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}\, dm \quad \text{— момент импульса (кинетический момент)}$$

$$\vec{K}_{0'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\, dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_0 + \vec{r}_0 - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\, dm = K_0 + \vec{O'O} \times \vec{P} \quad \text{— ф-ла переноса полюса}$$

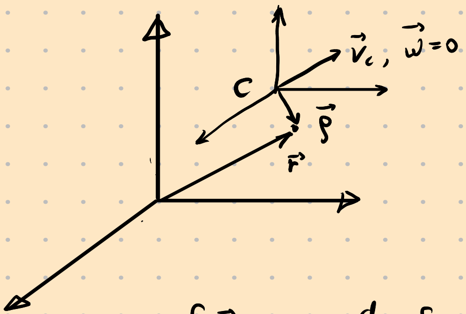
↑ момент импульса - возможно, поэтому $\vec{K}_0$ так и наз-ся

$$\vec{V}_{0'} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OO'} \quad \text{— похожая ф-ла из кинематики!}$$

тв. тело

$$T = \frac{1}{2}\int v^2\, dm \quad \text{— кинетическая энергия}$$

Теорема Кёнига



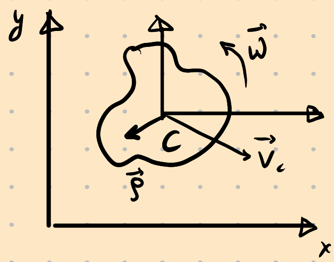
— кёнигова С.О.

$$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

$$T = \frac{1}{2}\int (V_c^2 + 2\vec{V}_c\vec{V}_r + V_r^2)\, dm$$

$$\int \vec{V}_r\, dm = \frac{d}{dt}\underbrace{\int \vec{\rho}\, dm}_{m\vec{\rho}_c = 0} = 0 \quad \Rightarrow T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2}\int V_r^2\, dm$$

Случай плоских тел



$$\vec{V}_r = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$V_r^2 = \omega^2 \rho^2, \quad \vec{\omega} \perp \vec{\rho}$$

, момент инерции (отн. оси, прох. через C и ⊥ пл-ти)

$$\frac{1}{2}\int V_r^2\, dm = \frac{\omega^2}{2}\int \rho^2\, dm = \frac{J_c\omega^2}{2} \Rightarrow T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}$$

Момент инерции в 3D становится тензором инерции.

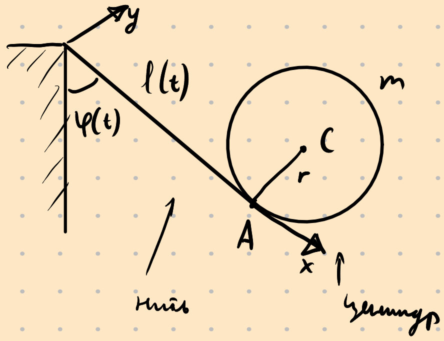
$$\vec{K}_0 = \vec{K}_c + \vec{OC} \times \vec{P}$$

$$\vec{K}_c = \int (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{V}\, dm = \int \vec{\rho} \times (\vec{V}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = \vec{\omega}\int \rho^2\, dm = J_c\vec{\omega}$$

в сис-ме ц.м. $\vec{V}_c = 0$

$$\vec{K}_0 = \underbrace{J_c\vec{\omega}}_{K_c} + \vec{OC} \times \underbrace{\vec{P}}_{m\vec{V}_c}$$

Пример 1



Обратите внимание на расчёт кин. энергии!

$\vec P,\ \vec K_A,\ T$ - ?

$\vec P = m\vec V_c$

$$\vec V_c = \underbrace{\vec V_c^{\,e}}_{\text{переносная}} + \underbrace{\vec V_c^{\,r}}_{\text{относительная}} = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}l\\r\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot l\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot l - r\dot\varphi\\ l\dot\varphi\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec P = m\vec V_c = \dots$$

Надо найти $\vec\omega$ (абсолютную)

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{mr^2}{4}\omega^2$$

$$\vec\omega = \vec\omega^{\,e} + \vec\omega^{\,r} = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-\dot l/r\end{bmatrix} \Rightarrow \omega^2 = (\dot\varphi - \dot l/r)^2 \qquad \Rightarrow T = \dots$$

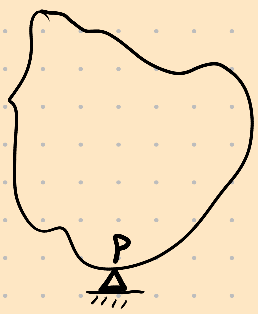
Если точка A неподвижной в абс. сис-ме, $\vec K_A = J_A\vec\omega$

Иначе (здесь - она подвижна): $\vec K_A = J_c\vec\omega + \vec{AC}\times m\vec V_c = \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{mr^2}{2}(\dot\varphi - \dot l/r)\end{bmatrix} + m\begin{bmatrix}0\\r\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\dot l - r\dot\varphi\\ l\dot\varphi\\0\end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{3}{2}mr^2(\dot\varphi - \dot l/r)\end{bmatrix}$$

Неправильное решение дало бы правильный ответ - ой...

Неподвижная точка

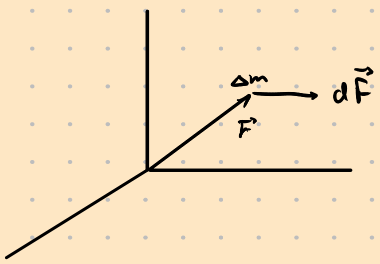


$$T = \frac12\int v^2\,dm = \frac12\int \omega^2\rho^2\,dm = \frac{J_P\omega^2}{2}$$

$$\vec K_P = \int \vec\rho\times(\vec\omega\times\vec\rho)\,dm = J_P\vec\omega$$ - а тут так можно!

Законы изменения

(общий случай! не только 2D)



$$\Delta m\,\ddot{\vec r} = \Delta\vec F$$

$$\vec f = \lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\vec F}{\Delta m}$$ - удельная сила

$$\ddot{\vec r} = \vec f = \vec f^{\,e} + \vec f^{\,i}$$ (внешняя и внутренняя)

1. Импульс: $\dot{\vec{P}} = \int \dot{\vec{v}}\,dm = \int \left(\vec{F}^e + \vec{F}^i\right) dm \;{=}0\; = \vec{R}^e$ — главный вектор внешних сил.

$\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e$; $\quad m\dot{\vec{V}}_c = \vec{R}^e$ — ур-е движ-я центра масс

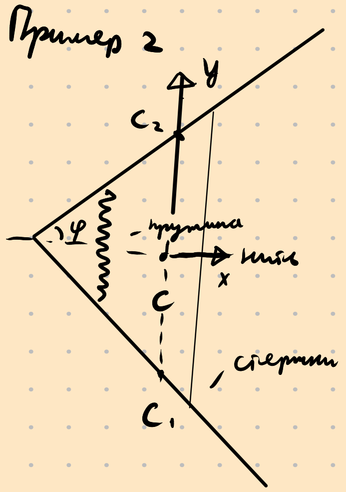
2. Кин. момент: $\vec{K}_0 = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}\,dm \Rightarrow \dot{\vec{K}}_0 = \underbrace{\int (\vec{v} - \vec{v}_0) \times \vec{v}\,dm}_{-m\vec{V}_0 \times \vec{V}_c = -\vec{V}_0 \times \vec{P}} + \underbrace{\int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \left(\vec{F}^e + \vec{F}^i\right) dm}_{\vec{M}^e_0}$

$$\dot{\vec{K}}_0 = \vec{M}^e_0 - m\vec{V}_0 \times \vec{V}_c$$ ($\vec{M}^e_0$ — момент внешних сил относ. полюса 0)

3. Кин. энергия: $\dot{T} = \int \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}\,dm = \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{F}^e dm}_{N^e} + \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{F}^i dm}_{N^i} = N^e + N^i$

N^i — нельзя выкинуть!
(пот. энергия → кин. энергия)

Пример 2



1. Траектория концов стержней?

2. $\dot{\varphi}(\varphi)$ — ?

Центр масс неподвижен

$x = \frac{l}{2}\cos\varphi$

$y = l\sin\varphi$

$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$ — концы движутся по эллипсу

2. $T = \text{const}$, где T — один стержень

$y_c = \frac{l}{2}\sin\varphi \Rightarrow V_c = \frac{l\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi$

$$T = \frac{m}{8} l^2 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \frac{ml^2}{24}\dot{\varphi}^2 = \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi)$$