Тригонометрические ряды Фурье

$f(x) \in L_R(-l, l)$ и им. период $2l$

L_R - абс. интегр., т.е. $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$ абс. сх.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

— коэф-ты Фурье

Лемма Римана

$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t)\cos tx\,dt \to 0$ при $x \to \infty$

I - промеж.

$\int_I f(t)\sin tx\,dt \to 0, \quad x \to \infty$

Следствие: $f(x) \in L_R(-l; l) \Rightarrow a_n, b_n \to 0$

Трит. ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right]$ - ряд Фурье $f(x)$

Свойства

1. Если $f(x)$ нечётна, то $a_n = 0$

   Если $f(x)$ чётна, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - периодична $\Rightarrow$ интеграл можно брать по любому отрезку длиной $2l$

Достаточное условие разложимости в р. Фурье

(следствие из пр. Липшица)

1. $f(x) \in L_R(-l; l)$, им. период $2l$

   В т. x_0 имеет конечные односторонние произв. $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

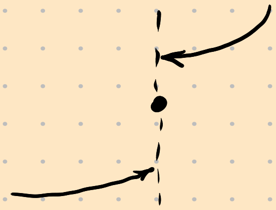
   Тогда ряд Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Пусть $f(x) \in L_R(-l; l)$, им. период $2l$

   x_0 - т. разрыва 1 рода, $\exists$ конечные „обобщённые" односторонние производные:

   $$\lim_{u \to +0}\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \to +0}\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

   Тогда ряд Фурье в т. x_0 сходится к ср. арифм. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



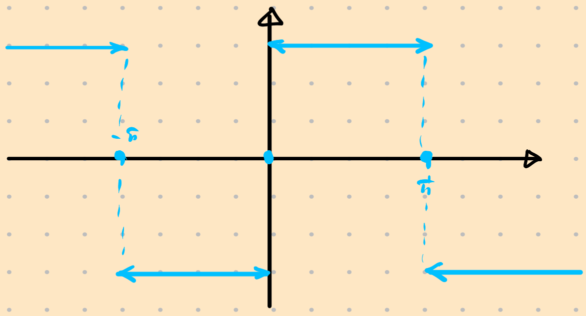
Часто $l=\pi$, тогда $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right]$$

Задача 1

Разложить в р. Фурье $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

Гр. суммы ряда строится сразу.



ф-ия нечёт. $\Rightarrow$ $a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\, dt$ — для нечёт. ф-ии

$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\operatorname{sign} t\,\sin nt\, dt =$

$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nt\, dt = \frac{2}{\pi n}\left(-\cos nt\right)\Big|_0^{\pi} =$

$= \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$

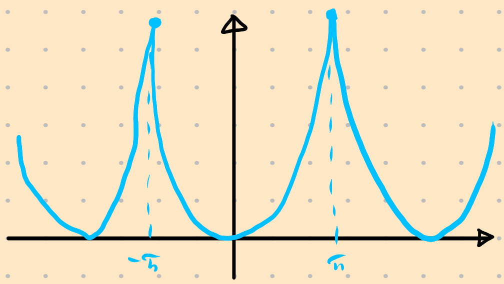
$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не яв-ся равномерно сх. на всей прямой, т.к. сумма его разрывна (р/н сх. ряд из непр. ф-ий им. непр. сумму).

Задача 2

$f(x) = x^2$ на $-\pi < x < \pi$ сх-ся в $\forall$ т. по 2 следствию

$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\cos nx\, dx$, $b_n = 0$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n(-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Дост. усл. р/н сх. р. Фурье

$f(x) \in L_R[-l;l]$, период $2l$, и кусочно-гладкая на $[-l;l]$.

($f(x)$ непр. на $[-l;l]$, $f'(x)$ кусочно-непр. на $[-l;l]$, т.е. есть конечное число т. разрыва I рода). Тогда р. Фурье $f(x)$ сх. р/н на всей числовой прямой.

Излишне: если $f'(x)$ опр. всюду на прямой, то у нее не может быть разрывов I рода. Поэтому в теореме о равн. сх. р. Фурье в т. разрыва $f'(x)$ не опр.

Ряд ф. x^2 сх. р/н на $(-\infty; +\infty)$.

Утв. 22-110

Пусть тригон. ряд (для простоты $l=\pi$)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (1) сх. р/н на $(-\infty;+\infty)$. Тогда его сумма

$f(x)$ - непр. 2π-период. ф-ия, и (1) - р. Фурье своей суммы.

□ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - р/н сх.

Сумма р/н сх. ряда из непр. ф-ий - непр. ф-ия. $\Rightarrow f(x)$ непр.

Имеет период 2π - очев.

Р/н сх. ряд из непр. ф-ий на конечном отрезке можно почленно интегрировать.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\, dt}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\, dt}_{0}\Big) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

Если р/н сх. ряд умножить на огр. ф-цию, он останется р/н сх.

$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$, m фикс.

- сх р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\, dt}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt \cos mt\, dt}_{=0 \text{ если } n\neq m} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt \cos mt\, dt}_{=0}\Big) =$$

$$= \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt$$

Ортогональность системы $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ в пр-ве непр. ф-ий на отр. $[-\pi; \pi]$ со скалярным произв. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt$$

■

Задача 22-111

Яв-ся ли рядами Фурье?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ – ряд сх. р/н на $\mathbb{R}$ => ряд Фурье от своей суммы

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ – коэф-ты $\not\to 0$ => не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x$, $-\pi \le x \le \pi$ – нечётная, $a_n = 0$

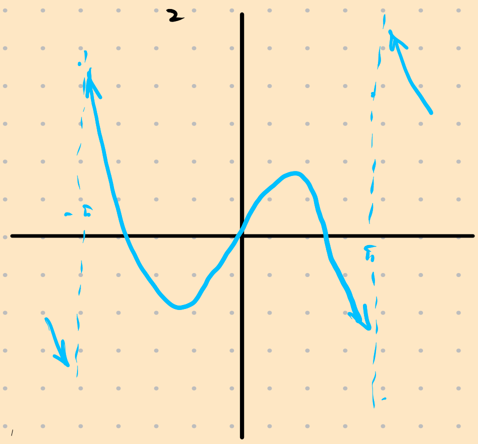
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t\cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1}\, dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1}\, dt}_{=0} \right] =$$

$$\underset{n \ge 2}{=} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad - b_n \text{ при } n \ge 2$$

При $n = 1$ $\quad b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2}\, dt}_{=0} \right] =$

$$= -\frac{1}{2}$$



Ряд сх. не р/н

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на $(-\pi; \pi)$

Разложение по cos и по sin

$f(x) \in L_R(0; l)$

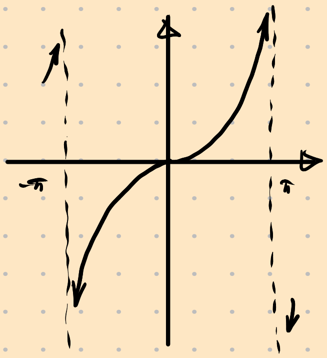
Если её продолжить по чётности $\rightarrow$ $f(x) \in L_R(-l; l)$

То её ряд Фурье – разложение $f(x)$ на $(-l; l)$ по cos

Если по нечётности, то по sin

Задача 1

$f(x) = x^2$ $\quad 0 < x < \pi$ $\quad$ по sin



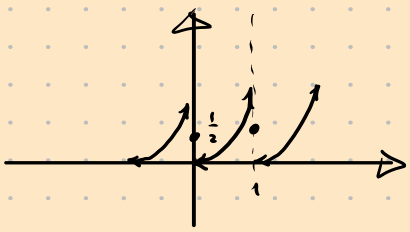
Ряд сх. неравномерно (разрывы) на $(-\infty; +\infty)$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

Задача 2

Разложить в ряд Фурье $f(x) = x^2$ на $(0; 1)$ с периодом 1



$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$

$$a_n = 2\int_0^1 t^2 \cos 2\pi n t \, dt \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

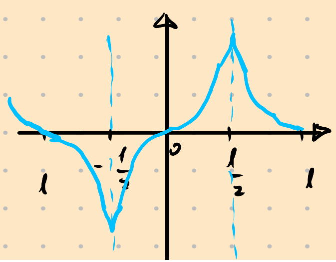
$$b_n = 2\int_0^1 t^2 \sin 2\pi n t \, dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{на } 0 < x < 1$$

Ряд сх-ся неравномерно на $(-\infty; +\infty)$ т.к. функция разрывна

Разложение по sin или cos чётных или нечётных кратных дуг

① $f(x) \in L_R(0; \frac{1}{2})$



$f(x) = f(l - x)$, $\quad 0 < x < \frac{1}{2}$ – симметрия относ. $x = \frac{1}{2}$

Далее по нечётности, далее с периодом $2l$

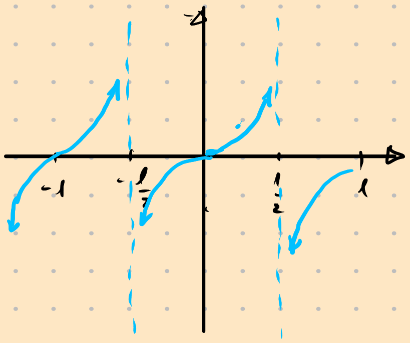
В этом случае $a_n = b_{2n} = 0$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\sin\frac{\pi(2n+1)t}{l}\,dt \qquad n=0,1,2,\dots$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{n}$ – Разложение по sin нечётных кратных дуг

② $f(x)\in L_R(0;\frac{l}{2})$

$f(x) = -f(l-x)$, $0<x<\frac{l}{2}$ – симметрия отн. т. $(\frac{l}{2};0)$



$a_n=0$, $b_{n+1}=0$,

$$b_{2n}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\sin\frac{2\pi n t}{l}\,dt$$

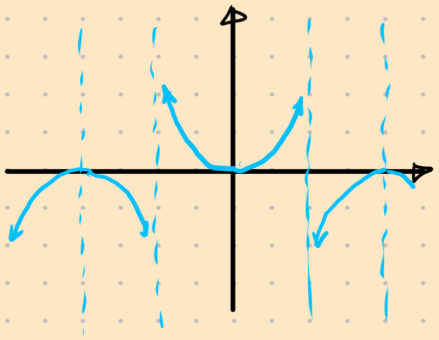
Разложение по sin чётных кр. дуг

(разложение по sin с периодом l)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin\frac{2\pi n x}{l}$

③ $f(x)=-f(l-x)$ на $0<x<\frac{l}{2}$ – симм. отн. т. $(\frac{l}{2};0)$

Далее по чётности, далее с периодом $2l$



$b_n=0 \qquad a_{2n}=0$

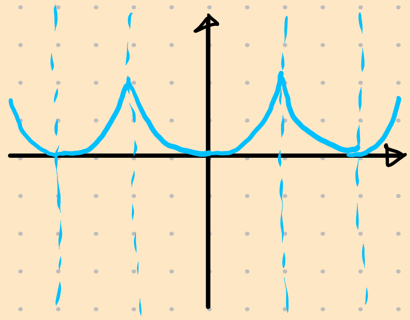
$$a_{2n+1}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\cos\frac{\pi(2n+1)t}{l}\,dt$$

Разложение по cos нечётных кр. дуг

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}$

④ $f(x)=f(l-x)$ $0<x<\frac{l}{2}$ – симм. отн. $x=\frac{l}{2}$

Далее по чётности, далее с периодом $2l$



$b_n=0 \qquad a_{2n+1}=0$

$$a_{2n}=\frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(t)\cos\frac{\pi\cdot 2nt}{l}\,dt$$

Разложение по cos чётных кр. дуг

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos\frac{\pi\cdot 2nx}{l}$$

(фактич. разложение по cos с периодом l)

Задача 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Разложить по sin на $[0;2]$ $\qquad l=2!$

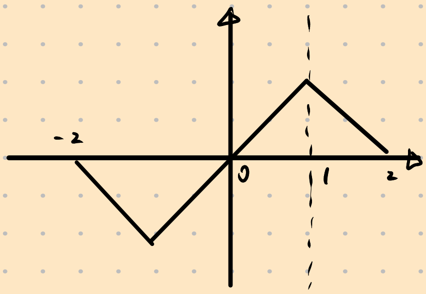


График симм. отн. $x=1$

$f(x) = f(2-x), \quad 0 \le x \le 1$

Получится по sin нечётных кр. дуг

$$b_{2n+1} = \frac{4}{2}\int_0^1 t \sin\frac{\pi(2n+1)t}{2}\,dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

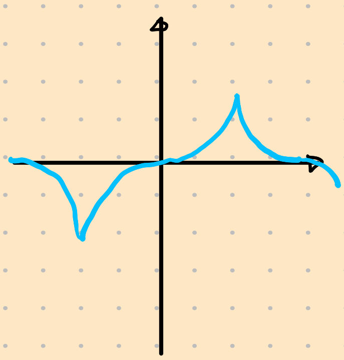
Ряд сх-ся р/н на $(-\infty; +\infty)$ т.к. $f(x)$ имеет период 4 и кусочно-гладкая на $[-4;4]$

Задача 2

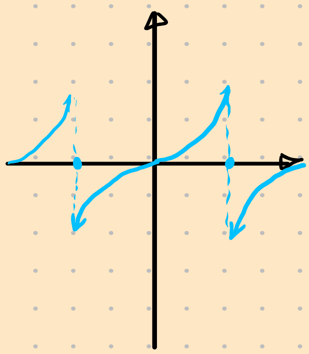
Построить гр. суммы рядов Фурье по cos и sin чёт. и нечёт. кратных дуг.

Сходятся ли они р/н?

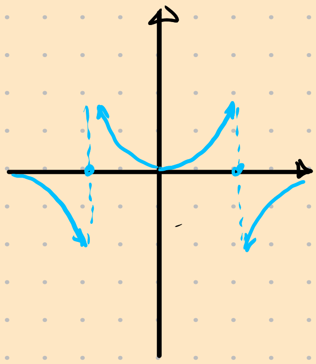
$f(x) = \operatorname{sh} x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$



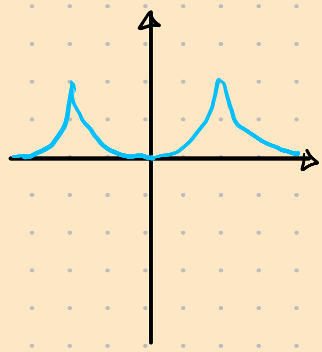
синусы неч. кр-дуг
сх. р/н т.к. им. период 2π и кусочно-гладкая на $[-\pi;\pi]$



синусы чёт. кр. дуг
сх. не р/н т.к. разрывы

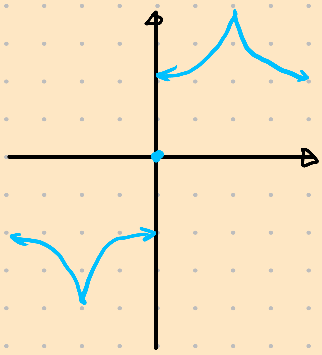


косинусы нечёт. кр. дуг
сх. не р/н

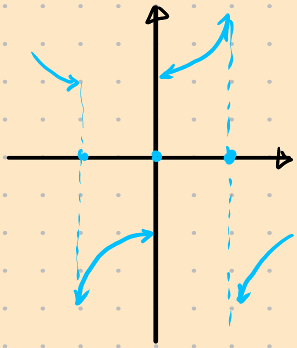


косинусы чёт. кр. дуг
сх. р/н

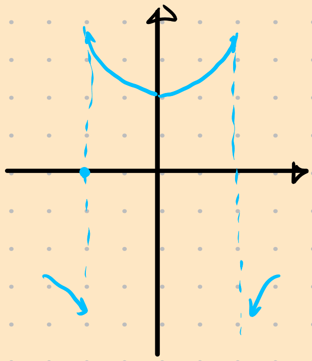
$f(x) = \operatorname{sh} x + 1$



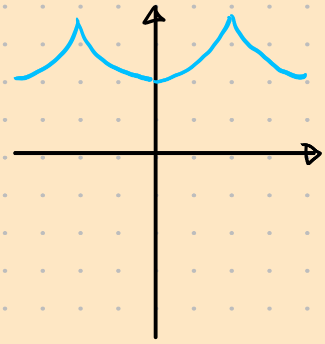
синусы неч. пр.
сх. не р/м



синусы чёт. пр. фун
сх. не р/м



косинусы нечёт. пр. фун
сх. не р/м



косинусы чёт. пр. фун
сх. р/м

Почленное дифференцирование рядов Фурье

$\exists\ f(x)$ им. период $2l$ и кус.-гл. на $[-l; l]$, тогда:

1. Ряд Ф. сх. р/м на $(-\infty; +\infty)$
2. Ряд Ф. можно почленно дифф.:

Если $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right]$

То ряд Ф. $f'(x)$ (к-рая кус. непр. на $[-l; l]$) получ. формальным дифф. ряда Фурье f:

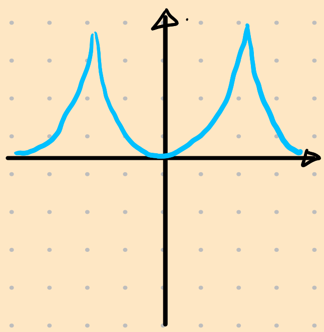
$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n \cdot \frac{\pi n}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} + b_n \frac{\pi n}{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\right)$$ — не обязан сходиться!

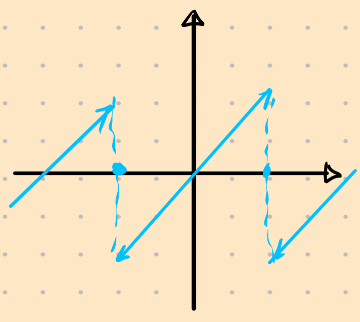
имеет ряд Фурье

Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \qquad -\pi \le x \le \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$ сумма ряда равна $2x$ на $(-\pi; \pi)$ по сл. 1 пр. Липшица





$-\pi < x < \pi$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

Равенство Парсеваля

$L_R^2(I)$ - мн-во ф-ий, абс. инт. на I вместе с $f(x)^2$.

Для конечного I $L_R^2(I) \subset L_R(I)$

Все собств. инт. - из $L_R^2(a;b)$

Если $f(x) \in L_R^2(-l;l)$ и им. период $2l$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} (f(x))^2 dx$$

В частности ряд слева сх.

Пример

$f(x) = x$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$f(x) = x^2$;

$$\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Неравенство Виртингера

$$\int_a^b f(x)^2 dx \le C\int_a^b f'(x)^2 dx$$

Задача 2

$f(x)$ нуп. н. на $[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$

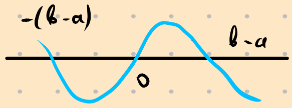
Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2 dx$

$\square$ Рас-им $\varphi(x) = f(x+a)$, $\quad \varphi(0) = f(a) = 0$

$\varphi(b-a) = f(b) = 0$

Продол. по нечётности, затем с периодом $2\cdot(b-a)$ $(l = b-a)$

Т.к. она кус.-гл., р. Фурье сх. р/н



$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{b-a}$$ нет cos т.к. нечётная

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b-a} b_n \cos \frac{\pi n x}{b-a}$$

$$\frac{2}{b-a} \int_0^{b-a} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(b-a)^2} b_n^2$$

$\blacksquare$

Интегрирование рядов

Пусть $f(x)$ кус.-непр. на $[-l; l]$, пл. пер. $2l$

$$\underset{\substack{\text{тр. р.}\\ \text{Фурье}}}{f(x) \sim} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Тогда $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$ — кус. гл. на $[-l; l]$, $F(-l) = F(l)$

$$F(x) = \frac{C}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{\pi n} a_n \sin\frac{\pi n x}{l} - \frac{l}{\pi n} b_n \cos\frac{\pi n x}{l}\right)$$ — сумма р/м сх. р. Фурье

$$C = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F(t)\,dt$$

Если $\frac{a_0 x}{2}$ не отнимать, то может и не сходиться р/м.

Порядок убывания коэф-ов Фурье

Если $f(x)$ кус. гл. на $[-l; l]$ и пл. пер. $2l$, то $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(x)$ — кус. непр. дифф. на $[a, b]$, если $f'(x)$ сущ. всюду, кроме конечного числа т., где у неё разрывы I рода.

Коэф-ты Фурье такой ф-ии, $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad |a_n|, |b_n| \leq C\frac{1}{n}$

$f(x)$ кус.-гл., если она непрерывна и кус. непр. дифф.

Например, $\operatorname{sign} x$ — кус. непр. дифф., но не кус. гл.

Обобщение

Утв. A. Если $f(x)$ пл. пер. $2l$ и $f^{(k-1)}(x)$ кус. гл. на $[-l; l]$, то коэф. Фурье $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Утв. Б. Если $f(x)$ пл. пер. $2l$, $f^{(k-2)}(x)$ непр. на $[-l; l]$, $f^{(k-1)}(x)$ кус. непр. дифф., то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Задача такая: оценить порядок убывания коэф-ов Фурье.

Пример

$f(x) = x^2$ на $[-\pi; \pi]$, с пер. 2π

A) $k-1=0$, $k=1$ $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = 0$

$k-2=0$, $k-1=1$, $k=2$ $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ – удобнее применять

$f(x) = x^3$

A) неприменимо (она сама не куc. гл.)

Б) $k-1=0$, $k=1$ $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $a_n = 0$

$f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ $[-\pi; \pi]$ с пер. 2π

Нужно сравнивать посл. произв. в т. π и $-\pi$ (на концах могут быть проблемы)

$f(\pi) = f(-\pi) = 0$ – непр.

$f'(x) = 2(\pi^2 - x^2)\cdot(-2x)$

$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$

$f''(\pi) = f''(-\pi)$ – кус. гл.

$f'''(\pi) \neq f'''(-\pi)$ – кус. непр. дифф.

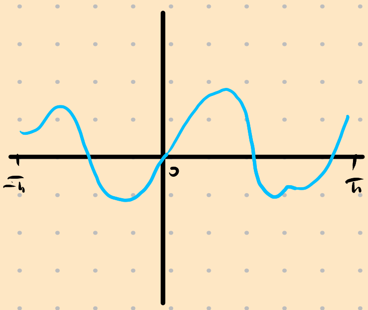
A) $a_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ $b_n = 0$

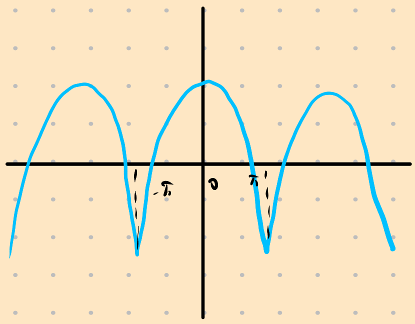
Б) $a_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ – на практике делать только Б!

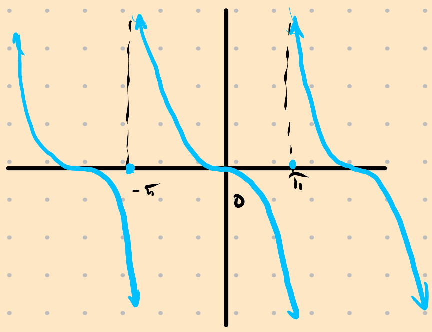
Задача 1

$f(x) = \pi^3 x - x^4$, $0 \leq x \leq \pi$ разл. в р. Фурье по $\sin$.

Тогда гр. сумм продифф. и дважды продифф. ряда







Суммирование рядов методом средних арифметических

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = a$

Обратное неверно, $(-1)^n$ – расх., ср. арифм. $\to 0$.

Ряд $1+2-3+1+2-3+\ldots$ расходится (общий член ряда $\not\to 0$)

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=3k \\ 1, & n=3k+1 \\ 3, & n=3k+2 \end{cases}$$

$$\sigma_n = \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}$$ – метод Фейера (метод ср. арифм.)

$$\sigma_n = \begin{cases} 4\frac{k}{n} = \frac{4}{3}, & n=3k \\ \frac{4k+1}{3k+1}, & n=3k+1 \\ \frac{4k+4}{3k+2}, & n=3k+2 \end{cases}$$

$\sigma_{3k} = \frac{4}{3}$ $\quad \sigma_{3k+1} \to \frac{4}{3}$ $\quad \sigma_{3k+2} \to \frac{4}{3}$

$\sigma_n \to \frac{4}{3}$

Задача 1

$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx + \ldots$ – ряд сходится $\Leftrightarrow x = \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

А вот методом Фейера суммируется: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ – сопряжённое ядро Дирихле

$$S_n = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$x \neq 2\pi k$

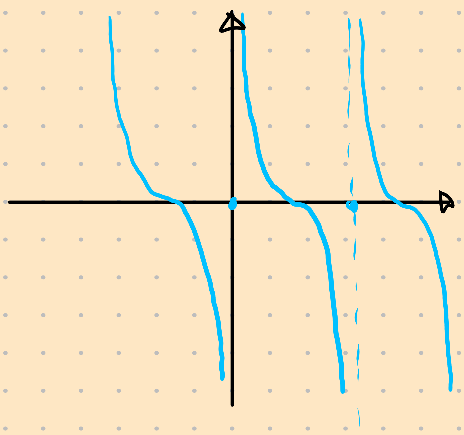
$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sigma_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}{n}$$ – сопряжённое ядро Фейера

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x \sin\frac{x}{2}}{n\, 4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin(k+1)x - \sin kx\right)}{n\cdot 4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \underbrace{\frac{\sin(n+1)x - \sin x}{4n\sin^2\frac{x}{2}}}_{\to 0},\quad n\to\infty$$

$$\lim \sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, & x \neq 2\pi k \\ 0, & x = 2\pi k \end{cases}$$



Суммирование р. Фурье методом Фейера

Пусть $f(x) \in L_R(-l, l)$, пер. период $2l$ и непр. в т. x_0. Тогда ряд Фурье $f(x)$ суммируем в т. x_0 к $f(x_0)$ методом Фейера

Равномерная непр. суммирования

Пусть $f(x)$ пер. период $2l$ и непр. на $[-l; l]$. Тогда р. Фурье f равномерно суммируется к $f(x)$ методом Фейера на $(-\infty; +\infty)$ $\left(\sigma_n(f, x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)\right)$

Утв Пусть $f(x) \in L_R(-l, l)$ и непр. в т. x_0, причём р. Фурье сх. в т. x_0. Тогда он сх. именно к $f(x_0)$.

Теорема Вейерштрасса тригонометрическая (следствие из пред.)

Пусть $f(x)$ непр. на $[-l; l]$, $f(-l) = f(l)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \to \exists$ тригоном. многочлен вида $T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\frac{\pi k x}{l} + \beta_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right)$, причём $\forall x \in [-l; l] \to |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Линейное нормированное пр-во

Лин. пр-во $\mathcal{L}$ наз-ся **нормированным** (ЛНП), если в нём введена норма. $\forall x \in \mathcal{L}$ опред. $\|x\| \in \mathbb{R}$, такое, что

1. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Для Евклидова пр-ва $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

ЛНП яв-ся **метрическим**, если $\rho(x,y) = \|x-y\|$

Пос-ть $x_n \to x$ в ЛНП $\mathcal{L}$, если $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$

$(\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \to \|x_n - x\| < \varepsilon)$

Пос-ть x_n в ЛНП яв-ся **фундаментальной**, если

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \to \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Любая сходящаяся x_n фундаментальна. Обратное неверно (вообще говоря).

ЛНП называется **полным (Банаховым)**, если в нём любая фунд. пос-ть сх-ся.

Примеры: $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^n$ $(\|x\| = |x|)$.

Внимание: фунд. числа ЛНП не образуют! (умножение на вещ. число не вид.)

Вообще, любые конечномерные пр-ва с любой нормой полные.

① $C[a,b]$ - пр-во ф-ий, непр. на $[a,b]$. $\|f\| = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|$.

$f_n \to f$ в $C[a,b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \to \|f_n - f\| < \varepsilon$

$(\max\limits_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

По кр. Коши о равномерной сх-ти, $C[a,b]$ полное.

② $C^1[a,b]$ - пр-во ф-ий, непр. дифф. на $[a,b]$, $\|f\| = \max\limits_{[a,b]} |f(x)| + \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$

$C^1[a,b]$ - полно.

$\square$ Пусть $f_n \subset C_1[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \to \|f_n - f_m\| < \varepsilon$

$\forall x \in [a,b] \to |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$. $\Rightarrow$

Теорема Если $f_n(x) \in C^1[a,b]$, $\exists x_0 \in [a,b]$: $f_n(x_0)$ сх.,

$f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,b]$, то $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$,

$f(x) \in C^1[a,b]$, $f'(x) = \varphi(x)$.

$\Rightarrow$ По кр. Коши р-й сх-ти, $f_n(x)$ и $f_n'(x)$ р/н сх. на $[a,b]$.

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x) = f'(x)$

$f(x) \in C^1[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \forall x \in [a,b]$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\Rightarrow$
$|f_n'(x) - f'(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \to f$ в $C^1[a,b]$, т.е. $C^1[a,b]$ полно.

③ Пример неполного пр-ва

Мн-во непр. диффер. ф-ий на $[a,b]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|$.

Возьмём $f(x) = |x|$ на $[-\pi;\pi]$, далее с периодом 2π - кусочно-гладкая на $[-\pi;\pi]$ и периодич. $\Rightarrow$ р. Фурье сх-ся равномерно: $S_n(f,x) \underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$

Т.е. она фундаментальна (пос-ть непр. диф. ф-ий), но предел не яв-ся непр. диф. $\Rightarrow$ пос-ть не яв-ся сходящейся в нашем пр-ве.

Значит оно неполное.

Другие нормы в пр-ве непр. ф-ий

$L_c^2[a,b]$ $\quad \|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2 dx}$

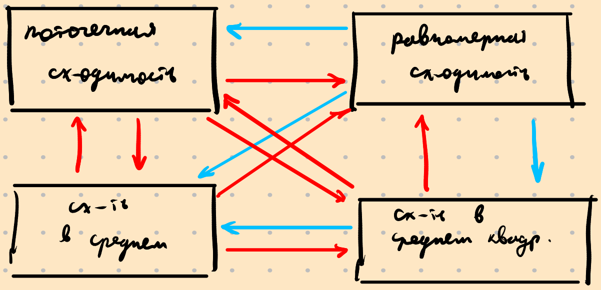
— неполные

$L_c^1[a,b]$ $\quad \|f\| = \int\limits_a^b |f(x)| dx$

$C[a,b]$ $\quad f_n \to f$, если $\|f_n - f\|_c \to 0$ — равномерная сх-ть

$L_c^2[a,b]$ $\quad \|f_n - f\|_2 \to 0$: $\int\limits_a^b |f_n - f|^2 dx \to 0$ — сх-ть в среднем квадратичном

$L_c^1[a,b]$ $\quad \|f_n - f\|_1 \to 0$: $\int\limits_a^b |f_n - f| dx \to 0$ — сх-ть в среднем



Все ф-ии непр.

Р/н сх-ть – самая сильная.

Из неё следует сх-ть в ср. кв.:

$\|f_n-f\|_C \to 0$

$\|f_n-f\|_2 \to 0$: $\int_a^b (f_n-f)^2 dx \le$

$\le \|f_n-f\|_C^2 \cdot \int_a^b 1\, dx = (b-a)\,\|f_n-f\|_C^2 \to 0$

Аналогично, р/н сх. → сх. ср.

Из сх. в ср.кв. → сх. ср.:

$\|f_n-f\|_2 \to 0$

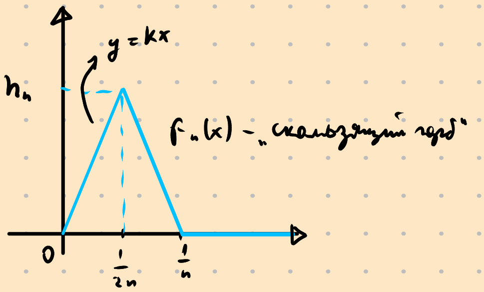
$$\|f_n-f\|_1 = \int_a^b |f_n-f|\,dx \le \sqrt{\int_a^b (f_n-f)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1\, dx} = \sqrt{b-a}\,\|f_n-f\|_2 \to 0$$

В евклидовом пр-ве L^2_R $|(f,g)| \le |f|\cdot|g|$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$$

неравенство Коши-Буняковского

Рас-им $f_n(x)$:



Какая бы ни была высота h_n горба, поточечная сх-ть к 0.

$\forall x \in [0;1]$ $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$

- р/н сх-ть $\Leftrightarrow h_n \to 0$: $\sup\limits_{[0;1]} |f_n(x)-f(x)| = h_n$

$\|f_n-f\|_1 = \int_0^1 |f_n-f|\,dx = \frac{h_n}{2n}$

- Сх-ть в среднем, если $h_n = o(n)$

$\|f_n-f\|_2 = \int_0^1 |f_n-f|^2 dx = 2\int_0^{1/2n} (kx)^2 dx =$ $\quad k\cdot\frac{1}{2n} = h_n \Rightarrow k = 2n\cdot h_n$

$= 2\cdot 4n^2 h_n^2 \int_0^{1/2n} x^2 dx = 8n^2\cdot h_n^2 \cdot \frac{1}{3\cdot 8n^3} = \frac{h_n^2}{3n}$ – • сх-ть в ср.кв., если $h_n = o(\sqrt{n})$

Если $h_n = 1$: есть в ср.кв., нет равномерной.

Если $h_n = \sqrt{n}$: есть в среднем, нет в ср.кв.

Если $h_n = n$: есть поточечная, нет остальных видов