

## Проблема фильтрации



$$s = \frac{p}{\omega_0} - \text{характер. частота}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \begin{array}{l} \text{числитель} \\ \text{— рациональная ф-ца} \end{array}$$

1. Синтез  $H(s)$  — как её выбрать? Синтез по АЧХ
2. Реализация — как сделать реализуемость? Условий выполнения



Сопрежённые пары полюсов

Они не реализуемы RL и RC цепями.

Нужны RLC



— резонаторы дают сопр. полюса

Однако индуктивности исп. не хочется. Их можно заменить усилителями!



RC — активные RC-цепи / фильтры

## Синтез по АЧХ



$$H(s) = \underbrace{|H(s)|}_{\text{АЧХ}} e^{\underbrace{j \arg H(s)}_{\text{ФЧХ}}}$$

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H^*(s) \quad - \text{к этому предельно требованию}$$

$$\text{Нам интересен только } H(s) \cdot H^*(s) \big|_{s=j\omega}$$

- Придем т.к. нам дана  $N$  и  $D$  без корней, то  $H^*(s) = H(s^*)$ , т.е. рассматриваем  $H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\omega}$

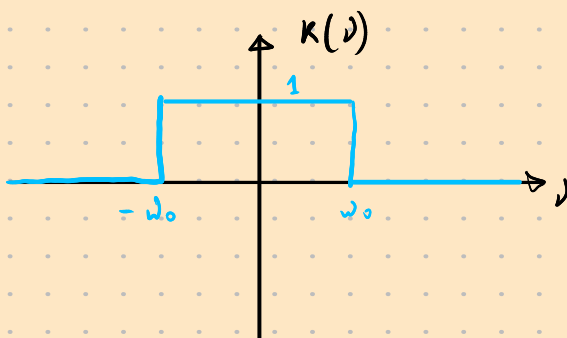
- Поменяем переменную: при  $s=j\omega$ ,  $H(s^*) = H(-s)$ , и так удобнее работать:  $H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\omega} = H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\omega}$

$$H(s) \cdot H(-s) = |K(\omega)|^2$$

АЧХ<sup>2</sup> — у нас ФЧХ еще надо выбрать нули и полюсы

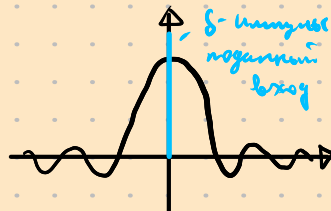
Создадим нули и полюсы АЧХ<sup>2</sup> всегда будет симметрично (имеет смысл заменить  $s \rightarrow -s$ ), и полюсы мы возведем в  $H(s)$ , полюсы —  $H(-s)$ .

## Пример. фильтр нижних частот



$$h(t) = \int_{-1}^{+1} h(f) e^{2\pi j f t} df = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

Импульс Хатчинса



не удобо. импульсы приращены (реализуются лучше без задержек)

Т.е. такой фильтр не реализуем.

Допустим неравномерность АЧХ в полосе пропускания:



$\epsilon$  - неравномерность в ПП

$\eta$  - селективность

$\eta_1$  - уровень на границе ПЗ

К усилку приводим:  $H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_n^2(\omega)}$   $n$  - порядок фильтра

$$|F_n(\omega)| = \begin{cases} \leq 1, & \omega \in (-1; 1) \\ \geq \eta_1, & \omega \geq \eta \end{cases}$$

Варианты выбора:

1.  $F_n(\omega) = \omega^n$  - фильтр **Баттерворта**
2.  $F_n(\omega) = P_n(\omega)$  - фильтр **Чебышева**, где  $P_n(\omega)$  - полином Чебышева
3.  $F_n(\omega) = R_n(\omega)$  - **эллиптический** фильтр,  $R_n(\omega)$  - рационал. эллипич. ф-ция

## Баттерпорт

$$H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^{2n}}$$

$\epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}$  - изменение  $\epsilon$  эквивалентно изменению  $\omega_0$ , т.е.  $\epsilon$  не нужен - он всегда 1

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$



При  $n \rightarrow \infty$  эта АЧХ теор. стремится к идеальной прямоугольной.  
Всегда дает затухание -3 дБ

$$H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \Rightarrow H(s) H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Ищем корни:  $\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} + 1 = 0$

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = e^{j\pi} = e^{j \cdot 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad -1 = e^{j\pi}$$

$$\frac{s}{j} = e^{j \frac{\pi}{2n}} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{2n}}$$

$$j = e^{j \frac{\pi}{2}}$$

$$s_k = e^{j \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n} k \right]}$$

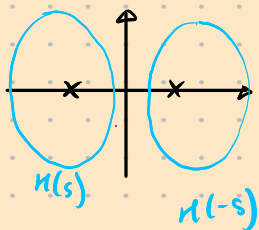
- корни произв.  $q$ -м  $H(s) \cdot H(-s)$

- корни  $\in$  кругу  $\frac{\pi}{n}$ , корнями симметричны относительно мнимой оси!



Примеры

$n=1$ :  $\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^2} = \frac{1}{1 - s^2} \quad s = \pm 1$  - корни



$$H(s) = \frac{1}{1 + s}$$

Устойчивость нет!

$n=2$ :



Согласенная пара на еж. круге характеризуется

углом захвата  $\xi$

$$\text{Полном } s^2 + 2\xi s + 1$$

$$\text{Корни } -\xi \pm i \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

У фильтров Баттерворта симметричный спад.

Если задать большой порядок, получаются очень длинные к imaginary axis  
параметры (углы  $\frac{\pi}{2n}$ ) - высокая добротность



$$\xi = \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2n}}$$

Фильтры с максимальной плоской характеристикой.

## Чебышев

$$|K(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 P_n^2(\nu)}$$

$-1 \leq \nu \leq +1$ ;  $|P_n(\nu)| \leq 1$  - осциллирует в единичном промежутке

$$P_n(\nu) = \cos(n \arccos \nu) \quad - \text{инвариант Чебышева (1)}$$

$$\cos[(n+1)\alpha] + \cos[(n-1)\alpha] = 2 \cos n\alpha \cdot \cos \alpha \quad - \text{по ф-ле cos суммы}$$

$$\alpha = \arccos x$$

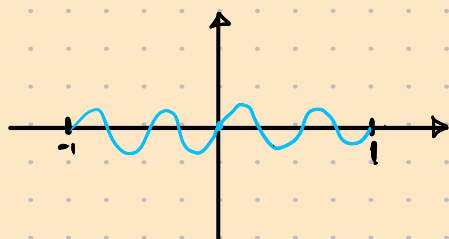
$$\text{Получаем } P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2 P_n(x) \cdot x$$

$$P_{n+1} = 2x P_n - P_{n-1} \quad - \text{рекуррентная ф-ла}$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$P_1(x) = x \quad P_3(x) = 4x^3 - 3x$$

По ф-ле (1) получается, что  $P_n(x)$  определён только на  $[-1; +1]$  из-за аркосинуса. Проверим о нём



$n \arccos x$  меняется от 0 до  $n\pi$

Значит, в  $[-1; 1]$  трансцендентное целое число

непрерывно осциллирует. Если  $n$  - чётное, то в 0-0

Почему функции определены на всей осн?  $\arccos$  надо рас-убавлять как гр-но от комплексного аргумента.

$$\cos(z) = \cos(x + jy) = \cos x \cdot \overbrace{\cos jy}^{ch y} - \sin x \cdot \overbrace{\sin jy}^{j sh y}$$

$$\cos jy = \frac{e^{j \cdot jy} + e^{-j \cdot jy}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = ch y$$

$$\sin jy = j sh y$$

• Получим  $\cos z = \cos x \cdot ch y - j \sin x \cdot sh y$

Если  $y=0$ , то  $\cos z = \cos x$ .

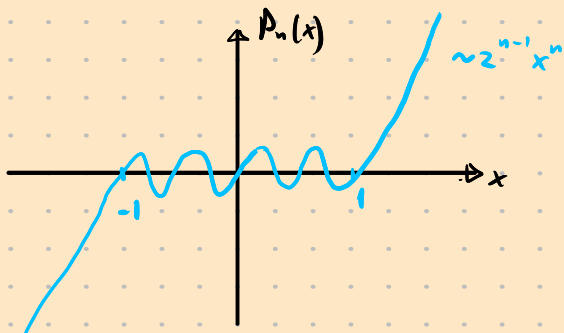
• Комплексная годограмма  $\cos$  обрывается в 0, когда  $\sin x = 0$ ,



То есть аргумент  $\arccos$  - модуль  $x \in \mathbb{R}$ , и тогда  $\arccos x$  мнимый, но  $\cos(n \arccos x)$  останется вещественным.

•  $P_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots$  - старший коэф-т

При  $|x| > 1$  он быстро растёт.



$P_n(x)$ ,  $n$  - нечётное



$P_n$ ,  $n$  - чётное

У Чебышева выпуклы по селективности осн. Баттерворта.

Намек назовов:

$$H(s) H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_n^2\left(\frac{s}{j}\right)} = 0$$

$$P_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\cos\left(n \arccos\left(\frac{s}{j}\right)\right) = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

$u - jv$

$$\begin{cases} \cos(n(u - jv)) = \pm \frac{j}{\varepsilon} \\ \frac{s}{j} = \cos(u - jv) \end{cases}$$

$$\cos nu \cdot \operatorname{ch} nv + j \sin nu \cdot \operatorname{sh} nv = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow \cos nu \neq 0$

$$nu = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k \quad - \text{нахождение на контуре}$$

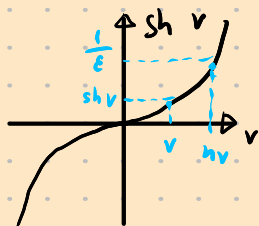
$$\operatorname{sh} nv = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow v = \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{s}{j} = \cos(u - jv) = \cos u \cdot \operatorname{ch} v + j \sin u \cdot \operatorname{sh} v$$

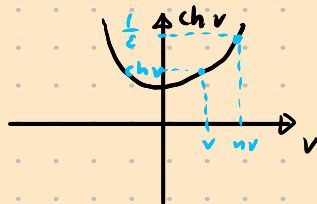
$$S_k = j \left[ \operatorname{ch} v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right) \operatorname{sh} v \right]$$

$$S_k = -\operatorname{sh} v \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right) + j \operatorname{ch} v \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right)$$

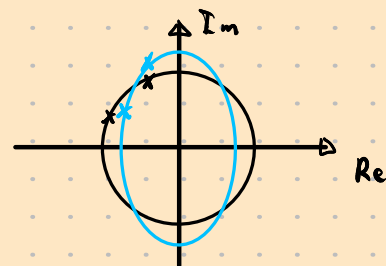
Опред. контуры по координатам  $\operatorname{sh} v$  и  $\operatorname{ch} v$ .



$\operatorname{sh} v$  уменьшается ( $< 1$ )



$\operatorname{ch} v$  увеличивается ( $> 1$ )



нахождение  $z$ -на контура

Базис  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ , ортогональный к  $z$ -ке Фурье, если измерены значения.

# Эллиптические функции



$$a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \quad k \in [0; 1)$$

$$v = \int_0^\theta r(\theta) d\theta$$

$$dn(v) = r$$

$$cd = \frac{cn}{dn}$$

При  $k=0$  - вырождение в эллипс,  $\sin$  и  $\cos$

$$\int_0^{\pi/2} r(\theta) d\theta - \text{эллиптический интеграл}$$

Поэтому там, как  $\cos(n \arccos x)$  - многочлен, можно тоже

интеграл сделать и в эллипс. функциях. - т.н. **рациональные эллиптические**

**функции.**

$$P_n(x) = \cos n\omega, \quad \text{где } x = \cos(\omega)$$

$$\varphi_n(x) = cd(k, n\omega), \quad \text{где } x = cd(k, \omega), \quad k, k_1 \in (0; 1)$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 нар-р  $\downarrow$   $\downarrow$   
 эллиптический  $[0; 1]$

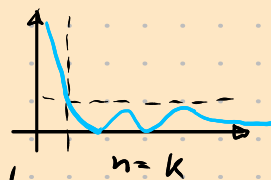
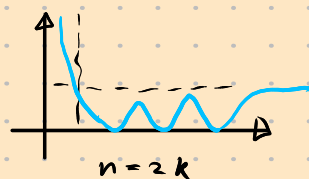
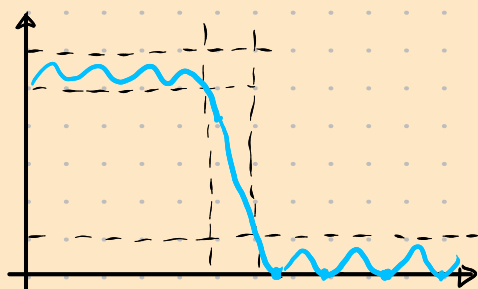
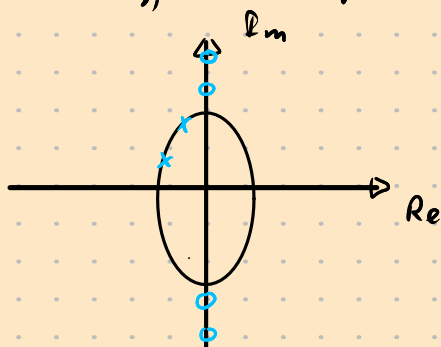
Получается, что  $\varphi_n(x) = \frac{N(x)}{\Delta(x)}$  - рац. ф-ция. (если нули и полюсы)

Поиск нулей и полюсов:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \varphi_n^2(v)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{\Delta^4}{N^2}} = \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon^2 \Delta^2} = 0 \quad \text{нуль}$$

$$N^2 - \varepsilon^2 \Delta^2 = 0 \quad \text{полюс}$$

По полюсам Орель переходит на ф-ции Чебышева (они тоже не имеют), все нули - на мнимой оси.



Нули и интегр.

$k$  раз, где  $\text{закрытие} = 0!$

$n = 2k$  - нули на полюсах

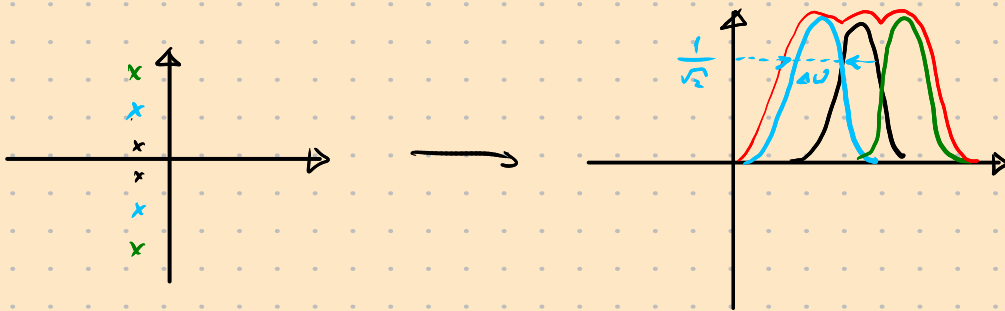
$n = 2k+1$  - один нуль на  $co$



## Пар-ры синтеза

1. Баттерверт - задается только порядок  $n$
2. Чебышев - задается  $n$  и  $\varepsilon$  (также  $\eta_1 = \eta_1(\eta)$  - определена)
3. Эллиптические - задается  $(n, \varepsilon, \eta)$  или  $(n, \varepsilon, \eta_1)$  или  $(\varepsilon, \eta, \eta_1)$   
(в пом. углах  $n$  можно умножить на  $2$ )

В промисл все фильтры канон. кентры делаем так:



$$\frac{1}{Q} = \frac{4\omega}{\omega_0}$$

Широкая ПП с крутыми склонами

Но! Если их расн. имеем, в ПП АЧХ неравномерна.

Лучше по кругу или эллипсу! Коса и пологие.

