

Ниже приведены: для me (Мурабиб, Фандахер, Амеликян, Маркел - новые версии)

### Равновесные механические системы



Система называется равновесной в физическом смысле тогда и только тогда, когда

$$\Leftrightarrow \nabla \vec{r} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 = \text{const}$$

Где  $\vec{r}_0$  - радиус-вектор центра масс системы

(уп-т. сила не зависит от времени)  $\Rightarrow$  Эквивалентно

Быть стационарным параметром, т.е.  $\vec{r} = \vec{r}(q)$  неизменяется в коор-т.



Или система имеет постоянный радиус-вектор центра масс.

$$(L_{,i})^i - L_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$\Updownarrow$   $\Rightarrow$  разрешимо сист. линейных уравн.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = F(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = x(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

### Теорема

Причины равновесия называются б-з. однознач. корн. с корнями  $q_0$

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\square$   $\Leftarrow$  Пусть  $x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = \text{const}$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0, \dot{q}^k \equiv 0$ , однако однознач. корни  $q$  должны быть, т.к.

$$\vec{r}_0 \cdot \delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q: \delta q^1 + \dots + \delta q^n \neq 0.$$

Таким образом (1)  $\Rightarrow \dot{q} = 0$



### Критерий наз. равновесия для диф. уравнений

Диф. уравн. наз. наз. равновесия  $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$ .

$$\square (T_{ik})' - T_{ik} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$$T = \frac{1}{2} q_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$T_{ik} = a_{kj} \dot{q}^j$  — т.к.  $a_{ij}$  — симметрическая матрица!

$$(T_{ik})' = a_{kj} \ddot{q}^j + a_{kji} \cdot \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$T_{ik} = \frac{1}{2} a_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow a_{kj} \dot{q}^j + (a_{kji} - \frac{1}{2} a_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

Для нач. полож.  $q = q_0, \dot{q} = 0 \Rightarrow$

$$0 = Q_k(q_0, \dot{q}_0, t)$$

(где  $q_0$  — нач. полож.,  $\dot{q}_0 = 0$ , т.к. (2) имеет решение  $q = q_0, \dot{q} = 0$  — н.о. т. Комн. одно изу. в. в. в. еднозначно.)

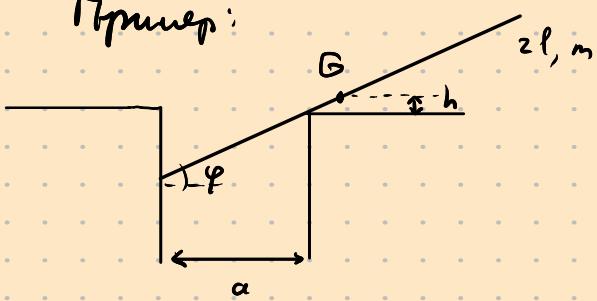


Однако если имеется буг, не убирая т. Комн. ( $Q(\dots)$  не убирая), то кинетич. & однозначное выражение не гарантировано для  $\dot{q} > 1$  реч. (см. Марковича).

## Следствие

Если  $Q = -\nabla \Pi(q, t)$ , то нач. полож. состояния т. назыв. энерг.  $\nabla \Pi(q, t) = 0$ .

Пример:



т.  $G$  — центр масс (также скажем так буги).

$$\Pi = mg h = mg (l \sin \varphi - a \cos \varphi)$$

$$\Pi_{,q}: l \cos \varphi - \frac{a}{\cos^2 \varphi} = 0$$

$$\cos \varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \quad - \text{н.о. полож.}$$

## Теорема — принцип виртуальных перемещений

Нач.  $\vec{r} = \vec{r}_0$  — нач. конф. — в. нач. полож.  $\Leftrightarrow$   $\nabla$  б. н. о. перем.

$$\delta \vec{r} \text{ из } \mathcal{A} \text{ нач. } \delta A = \int f \delta \vec{r} dm = 0$$

(из симметрии)

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_{ik} \delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec{F}_{ik} \cdot \vec{F} dm \cdot \delta q^k = Q_k \delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0 -$$

- кинетич. момент. равновес.



### Занятие 1 (динамическое)

Вывод, что центр масс движется и подчиняется закону Ньютона, т.к. в этом случае есть одна-единственная сила, действующая на центр масс.

$\Rightarrow \int (\vec{w} - \vec{F}) \delta \vec{r} dm = 0$  - акц. уп-е гравитации

$$\vec{w} = 0 \text{ в нач. полож.} \Rightarrow \int \vec{F} \delta \vec{r} dm = 0 \quad \blacksquare$$

В отрасли машины - ин. Маркеев.

### Занятие 2 (динамическое)

Вывод обобщенное уравнение, т.е. уп-е центра масс и кинематика

$\forall \delta \vec{r}$  в нач. полож. равновес.

### Пример

#### Численное представление твердого тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{R} + \delta \vec{g} = \delta \vec{R} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{g}, \delta \vec{\varphi} - в-р. момента количества$$

$$\delta A = \int \vec{F} dm \cdot \delta \vec{R} + \int \vec{F} \cdot (\delta \vec{\varphi} \times \vec{g}) dm =$$

$$= \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \delta \vec{\varphi} \cdot \underbrace{\int \vec{g} \times \vec{F} dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \vec{M}_0 \cdot \delta \vec{\varphi} = 0 \quad \forall \delta \vec{R}, \delta \vec{\varphi} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \text{ и } \vec{M}_0 = \vec{0}$$

$\vec{F}$  - инерций. сила,  $\vec{M}_0$  - инерций. момент,

(нужно доказать гравит. law)

## Основы Теории Устойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Камминса:

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (3) \quad \text{Здесь и далее: } x(t) = x(x_0, t)$$

При  $x = q = \text{const}$  на  $\rightarrow$  независимое производство нет - это (3).

Норм. производ.  $x = a$  берется потому что если в ней  $x = a$ , то  $\dot{x} = 0$ :  
 $x \rightarrow x - a$ .

Далее будем считать, что  $a = 0$  для определенности обозначения.

$x$  можно рассматривать как отклонение от норм. производ.

### Определение

При  $x = x(t_0)$ , где  $x_0 = x(t_0)$ , наз.  $\rightarrow$  локально притягивающим бифурк., если для  $\exists \forall t \in [t_0, \infty)$ .

Пример:  $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2}$



### Определение (уст. по Липшицу)

Норм. производ.  $x=0$  из-за (3) наз.  $\rightarrow$  уст. по Липшицу, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{x^1 \cdot x^1}$$

### Задачи

1. Уст. уст.  $\Rightarrow$  производная непрерывна по нач. уст.

2. Уст. уст.  $\Rightarrow$  при  $x(t)$  локально притягивающим бифурк.

## Определение (асимпт. ст.)

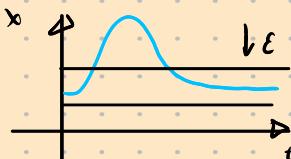
Поном. правилое.  $x=0$  сис. (3) - асимптотически устойчиво, если

\* 1.  $x=0$  - ст. но динам.

2.  $\exists \Delta: \forall x_0, \|x_0\| < \Delta \rightarrow x(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$

$U_\delta(0)$  - облако притяжения.

Если задано  $u_1$ :



## Определение (нест.)

Поном. правилое.  $x=0$  не-уст. (3) нест., если  $\exists \varepsilon: \forall \delta > 0 \exists x_0:$

$\|x_0\| < \delta \quad \exists t^*: \|x(t)\| > \varepsilon$ , т.е. при  $x(x_0, t)$  не вер. со ст. непр. управ.

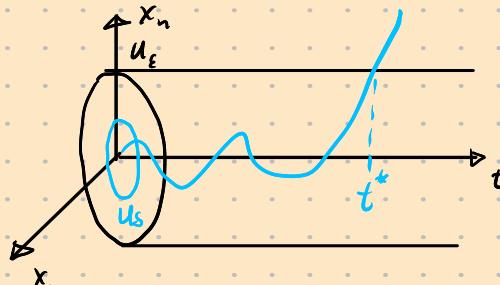
## Картиныные определения

### ① Устойчивое



$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0$ : независимо от  $\delta$ -окрестости, огибающая  $\varepsilon$ -окрестности

### ② Нестаб.



### ③ Асимпт.



## Kooperativnost' novykh chislivikov

Esim n.p. (nachalnoe polnenie)  $x=0$  yekvibratsiya gde bsp.  $t_0$ , to ono yek.  $\forall t_1 > t_0$ .

$$\square \quad x = 0 - yek. \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0; \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$



$$G = x(u_s(0), t_0)$$

Розглянутий випадок:  $G$  - ум. функція

загалом  $x_0$  нічим залежить від початкових умов, та.

$x(x_0, t)$  - будь-який експр. в непр. (i. korm)  $\Rightarrow \rho(\delta G, 0) > 0$  (последнє означає  $x=0$  як  $\delta G$ )

Введемо  $\delta_1 = \rho$ ,  $t_0 \mapsto t_1$ ,  $\delta \mapsto \delta_1$  (занурюємо)



## Умови стабільності функції

$$\dot{x} = X(x, t) \quad \psi - \text{закон руху (трасекторія)}$$

$$\dot{\psi} = X(\psi, t)$$

Розширення руху  $x = \psi + y$  ( $y$ -відхилення від трасекторії)

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\psi}}_{X(\psi, t)} + \dot{y} = X(\psi + y, t) \Rightarrow \dot{y} = X(\psi + y, t) - X(\psi, t) \quad (1)$$

$y=0$  - n.p. вик. вид (1)

Припустимо, що  $y=0$  - умови стабільності n.p., то тоді  $y$  має відхилення від нуля.

Если  $\forall t$  відхилення  $y$  від нуля, то вик. вид  $y$  відхилення від нуля.



Все трасекторії, окрім, на  $\delta$  від  $\psi$ , б. вик. вид, отже  $|y| < \varepsilon$  від  $\psi$ .

Если  $y=0$  - нест.,  $\Rightarrow$  тоді нест.,  $y=0$  - дестабіл. вид.  $\Rightarrow$  тоді дестабіл. вид.

## Задачи

Численные геометрические задачи возникающие  
при движении в реальном времени.

## Пример

Рас-ши-рение с конечной амплитудой



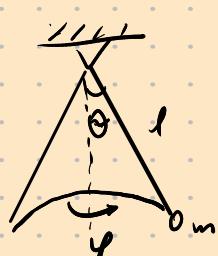
- патологич. (т.к. амплитуда  
период  $\Rightarrow$  нечетный период).

Графиком, кроме функции  $\kappa \neq 0$ , не будет.

## 0 Быть непрерывных & загорах $\Rightarrow$ уравнения

Переменные не должны иметь особенности в точках n.p.

## Пример



$$\forall \theta_0 < 1 \exists \text{ нач. угла } \varphi = \varphi_0 t + \varphi_0 \rightarrow \infty$$

Н.п. на конечной величине,  $\varphi \rightarrow \infty$  - неизвестное  
с.к.

## Пример

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \quad x = x_0 + \frac{t}{2}$$

$$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \text{Непр. выс.}$$

$$\text{Задана } y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + \frac{t}{2})^2$$

$$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + \frac{t}{2})^2 = (x_0 + \frac{t}{2})^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \rightarrow \infty$$



## Дополнение (A3П)

Задана  $x = x(y, t)$ ,  $x(0, t) = 0$  наз-ся **дополнением**, или

1.  $\det(X_{y,y}) \neq 0$  в нек-хнх оп-хнх наим. публиках (исходн. группу разрешаются)
2. Задана  $x = x(y, t)$  и одновременно  $y = y(x, t)$  непрерывна в 0 публикации по  $t$ . (разные из 2 групп)

Дополнение заданы не изменяют хар-ва устойчивости.

## Устойчивость линейных систем

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$ ,  $A(t)$  бесконечн. разбог. непрерывна

$\exists \gamma(t)$  - непрерывн.,  $x = \gamma + y$  - базисная нп-в,

$$\dot{\gamma} + \dot{y} = Ay + A\gamma + f \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  нек-е нп-в. нлнн. траектории базиса и нек-ио нп-в. н.п.  $y=0$

однородн. сис-ма  $\dot{y} = Ay$ . (2)

## Теорема

Н.п.  $y=0$  - нп-в.  $\Leftrightarrow$   $\forall$  нек-ио сис-м (2) однородн.

$\square \quad \Rightarrow$   $\exists$   $\gamma$  - непр. публ., нач-ие  $y = \frac{\delta}{2} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$   
 $\|y(t_0)\| < \delta$ ,  $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow y=0$  - нп-в.

$\Leftarrow$  Есл.  $\forall$  нек. оп.  $\Rightarrow$  оп.  $\Phi(t, t_0)$  - огни. однородн. сис-ма,

$\forall$  нек. (2) нек-ие быт  $y = \Phi(t, t_0)y(t_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$$

□

Замечание: норма матрицы:  $\|\Phi\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$  - "нормальное значение"

С единичной нормой норма матрицы - max. сумма элем.  
 нек-ио матрицы (одн. нек-ио матрицы  $\Phi \Phi^T$ )

## Устойчивость решения с несогласованной матрицей

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \text{const} \quad (3)$$

Следовательно уравнение имеет решение вида  $y(t) = e^{At}y_0$ . Для  $y(t) \rightarrow 0$  необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения  $A$  имели отрицательные реальные части.

Многие физические процессы, связанные с теплообменом, стационарны и устойчивы.

Однако это не всегда так.

Рассмотрим (3):  $y = h e^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda t - A) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — корни

## Лемма

Пусть  $P(\lambda) = 0$  имеет (3) действительные корни. Тогда  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

□  $y(t) \sim P_{\alpha_{k+1}}(t) e^{\lambda_{k+1} t}$  Если  $\exists \lambda_k: \operatorname{Re} \lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$  неустойчивое.

Если  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \Rightarrow$  для каждого  $k$  имеется соответствующий коэффициент  $a_k \neq 0$ , то  $y(t) \rightarrow 0$  — устойчивое.

$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow$  н.п.  $y=0$  — аттрактор.



( $\alpha_k$  — коэффициенты корней  $\lambda_k$ )

## Продолжение

Если  $P(\lambda) = 0$  имеет действительные корни  $\lambda_k$  с  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

(действительные собственные значения  $A$  наименее  $n$ -го порядка)

## Лемма (наиб. уст. крит. реш.)

Если  $P(\lambda) = 0$ , то знаки его корней определяются следующим образом.

□  $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_j > 0 \quad \bar{\lambda}_j$  — комплексный корень

$\lambda_n = -\gamma_n, \quad \gamma_n > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod [(1 + \alpha_j - i\beta_j)(1 + \alpha_j + i\beta_j)]^{\alpha_j} \prod (1 + \gamma_n)^{\alpha_n} = \\ = a_n \prod (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\alpha_j} \prod (1 + \gamma_n)^{\alpha_n}$$

Последние члены дают корни с положительными реальными частями.



## Задернел

Иногда это ум. доказательство в бухг.:  $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$ . Это подразумевает пред. утверждение именем  $\alpha_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$ .

Критерий ус. пас-ма для дес. пол-а (ав. Мурабиба ии Денизбекова)

## Критерий Раяса - Гурвица

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

Симметрическая матрица Гурвица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & & a_n \end{pmatrix}^{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n}$$

По диагонали каск-ри  $a_1, a_2, \dots$   
себя каск-ри по бокам, симметрическое условие.

$$P_\lambda - \text{ус.} \Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

! Есть реальное значение замен  $\Gamma$ !

Задернел ож.  $a_0 > 0$

### Пример

$$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0. \quad \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1} \Rightarrow \text{наимен. ус.} \Leftrightarrow \text{sign } a_0 = \text{sign } a_1$$

$$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0 - ?? \quad \text{запрос ус.} ??$$

"Ненулевые" величины от zero, т.к.  $P(\lambda)$  не приведен к виду  $a_0 > 0$ .

Приведение к виду  $a_0 > 0$ :

$$P(\lambda) \rightarrow \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1, \quad 1 \text{ забегено} \Rightarrow$$

(если  $a_0 = 0$  то  $P(\lambda)$  прозу неяв.: есть корень  $\lambda = 0$ )

$$\Gamma = \left( \frac{a_1}{a_0} \right) - \text{теперь всё верно.}$$

## Вторые критерии - Минара

$$P(\lambda) - \text{ус.} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array} \right] \quad (\text{недо/недо})$$

## Пример

$$P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

1.  $a_2 > 0, \quad a_1 > 0$

$$2. \quad P = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) - \text{pos.} \Leftrightarrow a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$$

## Устойчивое линейное уравнение

Первое линейное уравнение  $\Leftrightarrow$  уст-ся по линейному приближению

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

$X$ -линейн. зависим. ф.  $x=0$ , а  $X_{ijk}^i$  - в уп-и ф. лин-ой оп-ии н.п.  $x=0$  (1)

Тогда:

$$X = Ax + f(x), \quad A = [X_{ij}^i(0)] ; \quad \|f(x)\| \leq a\|x\|^2, \quad a = \text{const}$$

Линейное приближение:  $\dot{x} = Ax$

## Теорема Ляпунова - "запас стабильности"

1. Рассмотрим лин. ур-е  $\dot{x} = X(x)$  лин. уст. (1), тогда для н.п. линейного приближения  $\dot{x} = Ax$  - ас. уст.  $\Rightarrow$  н.п.  $x=0$  ас-ни  $\dot{x} = X(x)$  - ас. уст.

2. Есть  $\exists \lambda_i$  - корень  $\det(\lambda E - A) = 0 : \operatorname{Re} \lambda_i > 0 \Rightarrow$  н.п.  $x=0$  неуст. в одних направлениях.

## Lemma Frobenius

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(t) f(t) dt, \quad u, f, C > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u(t) \leq C \exp \left[ \int_0^t f(t) dt \right]$$

$\square \frac{u(t) f(t)}{C + \int_0^t u(t) f(t) dt} \leq f(t)$  - unbeschränkt: (unr. = unreg. gema.)

$$\ln \left[ C + \int_0^t u(t) f(t) dt \right] - \ln C \leq \int_0^t f(t) dt$$

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(t) f(t) dt \leq C \exp \left[ \int_0^t f(t) dt \right]$$

$\square$  (1. Weynabe):  $x = e^{-ht} y(t), \quad z_h = \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|$  - dann

$$e^{-ht} \dot{y} - h e^{-ht} y = A y e^{-ht} + f(y e^{-ht})$$

$$\dot{y} = \underbrace{(A + hE)}_B y + e^{ht} f(y e^{-ht}) \quad (2)$$

$$\dot{y} = B y - \text{ac. ges.}$$

$$\dot{x} = Ax - \text{ac. ges.} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

$$\dot{x} = (A + hE)x \Rightarrow \tilde{\lambda}_i = \lambda_i + h \Rightarrow \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_i < 0 \quad \left( h = \frac{\min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|}{2} \right)$$

$$(2) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{(Bt-t)} e^{ht} f[y(t) e^{-ht}] dt$$

$$(\text{uz. grundsatz: } \dot{y} = By + f(t) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-t)} f(t) dt)$$

Rekurrenz gruppierungsweise

$$\|y(t)\| \leq \|e^{Bt}\| \cdot \|y_0\| + \int_0^t \|e^{(Bt-t)}\| \cdot e^{ht} \|f(y e^{-ht})\| dt$$

$$\|f(x)\| \leq \alpha \|x\|^2 \Rightarrow \|f(y e^{-ht})\| \leq \alpha \|e^{-2ht}\| \cdot \|y\|^2$$

$$\|y(t)\| \leq M \|y_0\| + \int_0^t M \alpha e^{-ht} \|y(t)\|^2 dt$$

Esse  $\|y_0\| \ll 1$ , so  $\exists t: \forall t \in [0, t] \rightarrow \|y(t)\| \leq 1$  (für alle  $t \geq t$ )

Also  $\|y(t)\| \leq \|y(t)\| \quad \forall t \in [0, t] \Rightarrow$  nur ziem unlesbar!

$\|y(t)\| \leq M \|y_0\| + \int_0^t M \alpha e^{-ht} \|y(t)\| dt$  - für zuerst lange verne Frobenius

Also  $\|y(t)\| \leq M \|y_0\| \exp \left[ \int_0^t M \alpha e^{-ht} dt \right] \leq K \|y_0\| \Rightarrow$

ist unlesbar ex-cc, i.e.  
pellen const vor  $t \rightarrow \infty$ , i.e.  
nur ein konst. dopp. const

→ eigentlich unlesbar  
aber kein

$\Rightarrow y(t)$  - ортогональна. Данное означает что в окрестности  $|y(t)|$  симметрия, и вблизи  $\forall t \in [0; \infty)$  (окрестность точки, неподалеку, гипотеза оценки, это то же самое)  $x = e^{-kt} \underbrace{y(t)}_{\text{орт.}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow$  н.п.  $x = 0$  - ас. уст.

Также неподалеку аналогично.

**Задача** Т. линейная неподалеку, есть  $\exists \lambda_j = \pm i\omega$  или  $\lambda_j = 0$

неподалеку  
треугольник симметрический или

Также неподалеку. Треугольник симметрический склон узким краем навстречу зевом.

### Возможные виды линий

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0.$$

Возможные виды линий:  $V(x)$ ,  $V(0) = 0$ ,  $V(x) \in \mathbb{R}$  - непр.гладк.

Прямоугольник в окрестности нулевой точки линии:  $\dot{V}_x = V_{,i} \cdot X^i = \nabla V \cdot X$

Знакосочетательный вид линии:  $V(x) > 0$  - максимум, ортогр.  $\Leftrightarrow V(x) > 0$  в окрестности  $0$ .

Или  $U_\epsilon(0)$ . (в окрестности нулевой точки, где ортогональны касательные).

Как видят виды линий в окрестности нулевого решения.

Например: есть в окрестности  $0$   $\exists V(x)$ :  $V(x) > 0$  и  $\dot{V}_x \leq 0$  (в окрестности нулевого решения)  $\Rightarrow$  н.п.  $x=0$  - устойчивый.

мин на  $\partial U_\epsilon(0)$

$\square$  Рассмотрим  $U_\epsilon(0)$ .  $V(x)$ -непр.  $\Rightarrow \exists V^* = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x)$ ,  $V(0) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \exists \delta > 0: V(x) < V^*$  при  $\|x\| < \delta$

Таким образом при  $x_0$ :  $\|x_0\| < \delta \quad V[x(x_0, t)] < V^*$ , т.к.  $V[x(x_0, t)]$  - не возрастает (бесконечно малое значение  $V(x)$  подле нуля, подле узла), т.к.  $\dot{V}_x(x) \leq 0 \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \epsilon$



## Следствие. Т. Лагранжа - Дарси

Если  $\Pi(q)$  квадр. мес. ф-ия имеет строгий мин в н.п., то н.п. устойчиво

$$\square V = E = T + \Pi = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} + \Pi(q) \geq 0 \quad (\Pi(0) = 0)$$

$\geq 0 \quad \geq 0$

$$\dot{V}_2 = 0 \quad (\text{такж. в интегрированном уравнении Лагранжа}) \quad \blacksquare$$

## Проверка условия $\Pi(q) \rightarrow \min$

$$\Pi \approx \Pi(0) + \Pi_{,i}(0) q^i + \frac{1}{2} \Pi_{,ij}(0) q^i q^j \quad \begin{array}{l} \text{--- линейная часть} \\ \text{--- квадратичный н.п.} \end{array}$$

- разложение  $\Pi(q)$  по  $q$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q, \quad C - \text{матрица мат. энергии}$$

$$\text{Если } \Pi_2(q) > 0 \Rightarrow \Pi \text{ имеет кв. мин (и } U_e(0)).$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = C^T \quad \Pi_2(q) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta_i > 0 \\ i = 1, n \end{array} \right.$$

Замечание Т. Лагранжа - Дарси не является достаточным условием.

## Пример



$$\Pi = \begin{cases} q^2 \sin \frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$

$$E = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \Pi(q)$$

$$\Delta \Big|_{E=0} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{n.п.Yes., но потенциал н.ст.}$$

## Теорема Абрамова 1

Если  $\exists q' : \Pi_2(q') < 0 \Rightarrow$  н. п.  $q = 0$  неустойчиво.

$\square$  Рассмотрим симметричную матрицу

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \cdot \dot{q} \approx \frac{1}{2} \dot{q}^T \underline{A(0)} \dot{q}$$

$A = \text{const}$

$$\Pi = \Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q$$

$$\text{Ур-е Лагранжа: } A\ddot{q} + Cq = 0$$

Задача:  $q \mapsto U\Theta$  ( $U$ -матрица,  $\Theta$  - квадр)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T U^T A U \dot{\Theta}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \Theta^T U^T C U \Theta$$

T. Оптимальное решение:  $\exists U: U^T A U = E$   
 $U^T C U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\ddot{\Theta}_i + \lambda_i \Theta_i = 0 \quad - \text{рабочие ур-е Лагранжа}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ кол. для } \lambda_k < 0 \Rightarrow \Theta_k \sim e^{\sqrt{|\lambda_k|} t} \Rightarrow \text{но } \uparrow \text{. Капитала } \circ$$

Несовместимо с.н.  $q=0$  - неуст.



## Теорема Ляпунова 2

Если н.р.н.н. рабоч. пограничные решения  $\Pi(q) = \Pi_m(q)$ , ... устойчивы, то  $\Pi$  имеет max  $\Rightarrow$  н.р.  $q=0$  - неуст.

## Теорема Барбасина - Красовского (60-е!)

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0)=0 \quad (1)$$

Если  $\exists U_\varepsilon(0) \exists V(x)$ :

$$1. \dot{V}_x \leq 0$$

2.  $M\{x \mid \dot{V}_x(x)=0\}$  - не содержит членов траекторий решения (1),

т.к.  $x \in M$ ,  $\dot{V}_x(x)=0$

a. Если  $V(x) > 0 \Rightarrow x=0$  - ас. гр.уст.

б. Если  $V(x)$  не имеет min, б.к. неустойч.  $\Rightarrow$  н.р.  $x=0$  - неуст.

□ доказательство по т. Ляпунова, н.р.  $x=0$  - устойчив. Докажем ас. гр.

Пусть  $x_0 = x(t_0) : \|x_0\| < \varepsilon$ . Тогда

$V[x(x_0, t)]$  - монотонна в  $t$  оп. конеч.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists V^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V[x(x_0, t)]$$

Если  $V^* = 0 \Rightarrow x=0$  - ас. гр.

Domyzum spainibnei: pacem. nare-in  $\{x(x_0, t_i)\}$  - esp.

(b alyg yessizibnei n.p.  $x=0$ )  $\Rightarrow$  no 1. Fozionas - Bessieruprasa.

$\exists$  exogenas negn.  $\{x_k\} = \{x(x_0, t_{ik})\}$

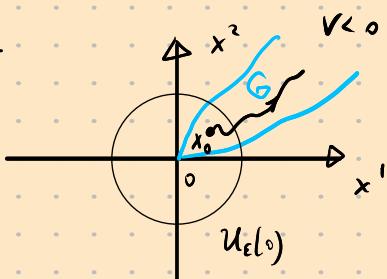
$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \quad V^* = V(x^*)$$

Pac-un pemenne (1)  $x(x^*, t)$  c nor. yu.  $x(x^*, 0) = x^*$ . Fozya, t.k.

$x^* \neq 0$  (i.e.  $V^* \neq 0$ ,  $aV^* = 0$  b.  $x=0$ ) u  $\dot{V}_x < 0$  na gennai sprekigym  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists t : V[x(x^*, t)] < V^*$  - protivberne.

Cayrae  $\delta$



$$G = \{x \mid V(x) < 0\}$$

Besdepen  $x_0 \in U_{\epsilon}(0) \cap G$ .

Domyzum, zso  $x = x(x_0, t)$  - yu.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  nabzopee yessobus neg. pacayng. negyren, zso  $\exists \{x_k\} = \{x(x_0, t_k)\} :$

$$V^* = \lim_{k \rightarrow \infty} V[x_k] = V(x^*)$$

Pac-un pem.  $x(x^*, t)$  c nor. yu.  $x(0) = x^* \Rightarrow \exists t : V[x(x^*, t)] < V^* \Rightarrow$

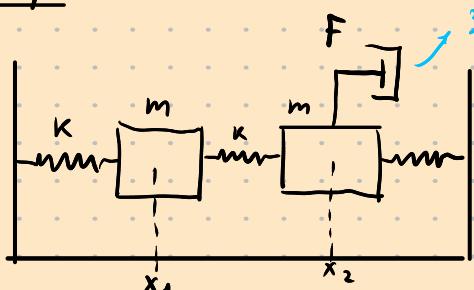
$\Rightarrow$  protivberne.



Zauverdune

$\beta$  alyrae  $\delta$  bun. yu. i u 2 gecidorni sprekigym rameko b odasen  $\Theta$ .

Пример



spes gennasibnaia area F

$$F = -\beta \dot{x}_2$$

Ussaygen n.p. na yu.:

$$V = E > 0, \quad \dot{V}_2 = -\beta \dot{x}_2^2$$

$M\{\dot{x}_2 = 0\}$  - ne segerni uchokh sprekigym,

keene n.p. (moyi uchokh sprekigym, qe bropai yuzz eten, a neplui net?

Ke momei)  $\Rightarrow$  no 1. F.-K. n.p. ac. yu.

## Следствия из теоремы Бардемана - Красовского

① Теорема Чепурова о) стационар. уст.

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

Если  $\forall U_\varepsilon(0) \exists V(x) > 0 : \dot{V}_x < 0$  (т.е.  $\dot{U}_\varepsilon(0)$ ), то  $x=0$  - ас.уст.

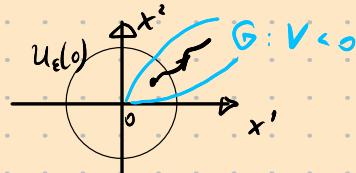
□  $M\{x=0\}$  + Б.К. ■■■

② Теорема Чебаева

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

Если  $\forall U_\varepsilon(0) \exists V(x) \in \mathbb{R}$  одн.  $G\{x | V(x) < 0\}$ ,  $\dot{V}_x < 0$  при  $x \in G \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  н.п.  $x=0$  - неуст.

□  $M\{x=0\}$  + Б.К. ■■■



③ Осторожность т. Арганова - Рубинштейна

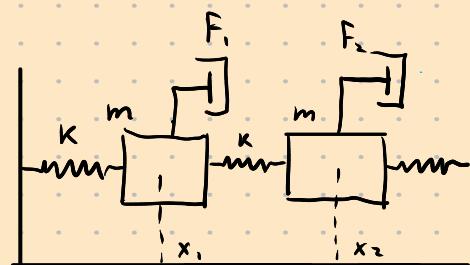
1. Если бал. уст. т. А.-Р. и генерирующие генерируют устойчив. или неуст. сим., то н.п. стабильна устойчивым.
2. Если бал. уст. т. А.-Р. и генерирующие генерируют неуст. сим. с разной амплитудой:  $N = Q_i \dot{q}_i < 0$  (причем  $\dot{q}_i = 0$ ), то н.п. стабильна ас.уст.

□  $M\{\dot{q}=0\}$  - паког. по условию - однозначно сим. с н.п.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  любых проколотых в  $M$  не могут (причем  $\binom{q}{\dot{q}} = \binom{0}{0}$ )  $\Rightarrow$  Б.К. ■■■

### Замечание



- застывшая генерация  
 $N = -\beta \dot{x}_2^2 \leq 0$   
 (как сл. график от  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ ,  
 она симм. неустойч.)



- движущая генерация  
 $N = -\beta \dot{x}_1^2 - \beta \dot{x}_2^2 < 0$  ( $\forall \dot{x}_1, \dot{x}_2$   
 кроме случая  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ )

# Основы теории дискурса

