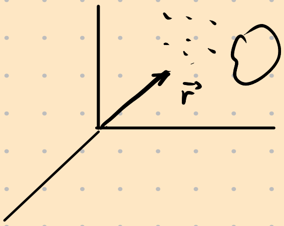
Равновесие



$\vec r = \vec r_0 = const$ — для всех т. => система в равновесии в данной с.к.

$\vec r = \vec r(q)$ для стац. сис-м (связи стационарны)

Полож. равновес. (п.р.) наз. точки $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(x = \begin{pmatrix} q \\ \dot q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}\right)$

Если q_0 - п.р., в стац. сис-ме $\Leftrightarrow$ $Q(q_0, 0, t) = 0$

Если $Q = -\nabla \Pi$, то в п.р. $\nabla \Pi = 0$.

Принцип вирт. перемещ.

$\vec r = \vec r_0$ (набор точек) яв-ся п.р. $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{\forall}}\, \delta \vec r$ из п.р. $\to$ $\delta A = \int \vec F \cdot \delta \vec r \, dm = 0$.

Об условии $Q = 0$

Пример

$\ddot x = \alpha x^\beta$, $\beta \in (0;1)$ („Сила“ $m \alpha x^\beta$ равна 0 в т. 0. Яв-ся ли т. 0 полож. равновес.?)

$x(0) = 0$, $\dot x(0) = 0$

1. $x = 0$ – реш-е.
2. Рассм. $x = a t^b \not\equiv 0$

$ab(b-1) t^{b-2} = \alpha a^\beta t^{\beta b}$

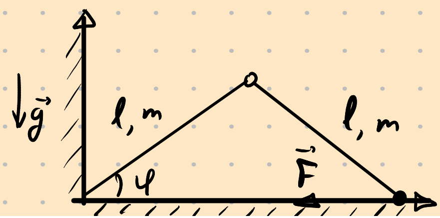
$b - 2 = \beta b \Rightarrow b = \frac{2}{1-\beta} > 0 \Rightarrow x(0) = 0$, причём $\dot x(0) = 0$ тоже.

$\frac{2(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = \alpha a^{\beta - 1} \Rightarrow a = \left[\frac{2(1+\beta)}{\alpha(1-\beta)^2}\right]^{\frac{1}{\beta-1}}$

Как так? 2 реш-я для нач. усл. $x = 0$, $\dot x = 0$.

А потому что αx^β не удовл. усл. Липшица! Из-за этого т. Коши не работает.

Задача 1



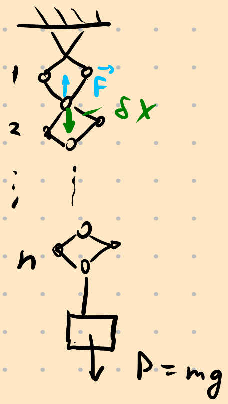
$\Pi = 2lF\cos\varphi + mgl\sin\varphi$

$\Pi_{,\varphi} = mgl\cos\varphi - 2lF\sin\varphi = 0$

$F = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\varphi$

Чем острее угол, тем меньше нужна сила.

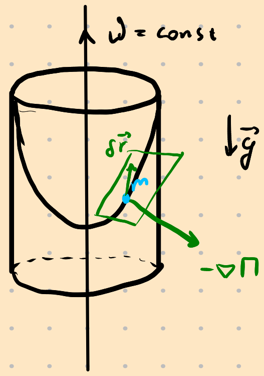
Задача 2



$$\delta A = nP\delta x - F\delta x = 0$$

$$F = nP$$

Задача 3



Жидкость во вращ. сосуде.

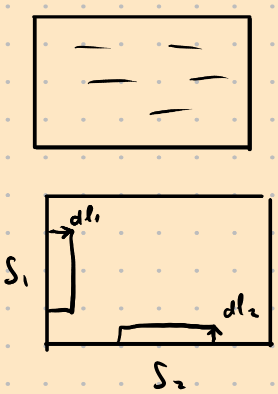
Т. массой m должна нах-ся в равновесии, иначе форма пов-ти будет меняться.

Во вращ. сис-ме отсчёта:

$$\vec{F} = -\nabla\Pi \qquad \Pi = mgz - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$$\delta A = -\nabla\Pi\,\delta\vec{r} = 0 = -d\Pi \Rightarrow \Pi = const \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + C$$

Задача 4



Несжим. жидкость.

Д-ть, что давл. жидк-ти равномерно

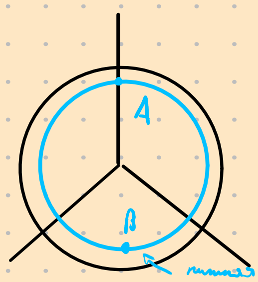
$$\begin{cases} \delta A = P_1 S_1 dl_1 + P_2 S_2 dl_2 = 0 \\ S_1 dl_1 + S_2 dl_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dl_2 = -\frac{S_1}{S_2} dl_1 \Rightarrow \delta A = (P_1 - P_2)\, dl_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

Задача 5

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

— мат. т. движется по кривой в поле тяжести



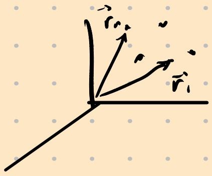
Найти полож. равновесия

1. Из принципа вирт. перемещ. — т. A и B, т.к. $\delta\vec{r} \perp m\vec{g}$

Формальное решение:

- Если связь задана в виде $F(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n,t)=0$, то $f_{i,\vec{r}_k}\cdot\delta\vec{r}^{\,k}=0$

! Это градиент !



$$\begin{cases} 2x\,\delta x+2y\,\delta y+2z\,\delta z=0\\ \delta x+\delta y+\delta z=0\\ x^2+y^2+z^2-1=0\\ x+y+z-1=0\end{cases}$$

Из принципа вирт. перемещ. $\delta A = mg\,\delta z \Rightarrow \delta z=0$

$$\begin{cases} x\,\delta x+y\,\delta y=0\\ \delta x+\delta y=0\end{cases} \Rightarrow \delta y=-\delta x,\quad x-y=0 \Rightarrow x=y$$

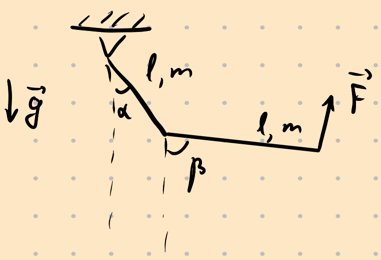
$$\begin{cases} 2x^2+z^2=1\\ z=1-2x\end{cases}$$

$$2x^2+1-4x+4x^2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\frac{2}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=\frac{2}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1\\ z=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

2. Поиск условного экстремума потенциальной энергии при усл. этих связей

Задача 6



$F=\text{const}$

Найти п.р.

$$\begin{cases} Q_\alpha=-\Pi^g_{,\alpha}+Q^F_\alpha=0\\ Q_\beta=-\Pi^g_{,\beta}+Q^F_\beta=0\end{cases}$$

$$\Pi=-\frac{3}{2}mgl\cos\alpha-\frac{1}{2}mgl\cos\beta$$

$$Q^F_\beta=Fl \qquad Q^F_\alpha=Fl\cos(\alpha-\beta)$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} mgl\sin\alpha + Fl\cos(\alpha-\beta) = 0 \\ \frac{1}{2} mgl\sin\beta + Fl = 0 \end{cases}$$

$\sin\beta = \frac{2F}{mg}$ — есть 3 случая: 1. $F > mg/2$ — нет н.р.

2. $F = mg/2$ — $\beta = \frac{\pi}{2}$

3. $F < mg/2$ — $\beta_1 = \arcsin\frac{2F}{mg}$, $\beta_2 = \pi - \beta_1$

$$-\frac{3}{2} mg\sin\alpha + F(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 0$$

$$F\cos\beta + \left(F\sin\beta - \frac{3}{2}mg\right)\operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \underbrace{\frac{F\cos\beta}{\frac{3}{2}mg - F\sin\beta}}_{f(\beta)} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \operatorname{arctg} f(\beta_1) \\ \alpha_2 = \pi + \alpha_1\end{array}\right\} - \beta_1 \\ \left.\begin{array}{l}\alpha_3 = -\alpha_1 \\ \alpha_4 = \pi - \alpha_1\end{array}\right\} - \pi - \beta_1 \end{array}$$