

Интегрирование по Фурье

$f(x) \in L_R(-1, 1)$ и н. н. п. 21

L_R -ад. интегр., т.е. $\int_{-1}^1 f(x) dx$ ад. с.х.

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \sin \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad - \text{коэф-ты Фурье}$$

Лемма Римана

$$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos tx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

I - проме.

$$\int_I f(t) \sin tx dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие: $f(x) \in L_R(-1; 1) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

$$\text{Фун. ряд } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{1} + b_n \sin \frac{\pi n x}{1} \right] - \text{ряд Фурье } f(x)$$

Обсужда

1. Если $f(x)$ нечётно, то $a_n = 0$

Если $f(x)$ чётно, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - непрерывна \Rightarrow интеграл н.п. Фурье по модулю описанной функции 21

Дополнительное условие разрывности в п. Фурье (следствие из пр. Лейбница)

1. $f(x) \in L_R(-1; 1)$, н. н. п. 21

В т. x_0 имеет конечные односторонние пределы $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Тогда ряд Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Пусть $f(x) \in L_R(-1; 1)$, н. н. п. 21

x_0 - т. разрыва 1 рода, \exists конечные "обобщённые" односторонние

пределы:

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда ряд Фурье в т. x_0 сходится к ср. арифм. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



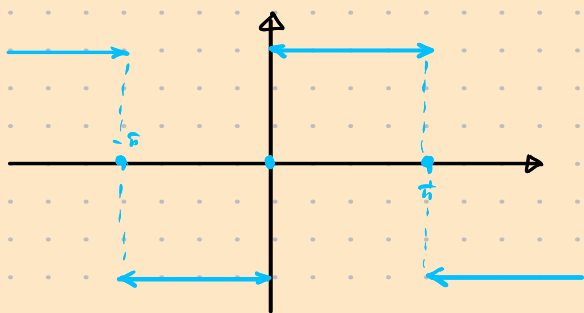
Число $l = \pi$, тогда $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Задача 1

Рассмотрим в п. 4-м $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

гр. симметрична относительно начала координат.



Ф-ция нечетная $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \, dt \quad \text{— четная, ф-ция}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign} t \sin nt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не св-ся равномерно с.х. на всей прямой, т.е. сумма его разбегается

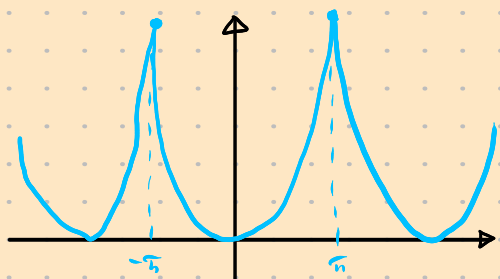
(р/н с.х. ряд из перп. ф-ции им. перп. сумму).

Задача 2

$f(x) = x^2$ на $-\pi < x < \pi$

с.х.-а в $\forall \pi$, но не равномерно

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Досл. як р/н cx. р. Фур'є

$f(x) \in L_R[-1; 1]$, непер. зл, у якого - непер. на $[-1; 1]$.

($f(x)$ непер. на $[-1; 1]$, $f'(x)$ непер. - непер. на $[-1; 1]$, т.е. єдине значення
т. розрива і поже). Тоді р-Фур'є $f(x)$ cx. р/н на всій числовій осі.

Узглянемо: якщо $f'(x)$ непер. вогнут на проміжку, то у ній не може бути розриву
і поже. Потім у теоремі про рівн. cx. р-Фур'є б о. розрива $f'(x)$ не пер.

Розв. Ф. x^2 cx. р/н на $(-\infty; +\infty)$.

Укр. 22-110

Розв. спр. розв. (за періоду $l=2\pi$)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (1) cx. р/н на $(-\infty; +\infty)$. Тоді це функція

$f(x)$ - непер. зл - непер. Ф-ції, у (1) - р. Фур'є цієї функції.

□ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - р/н cx.

$\Rightarrow f(x)$ непер.

Функція р/н cx. розв. уз непер. Ф-ції - непер. Ф-ції.

Усклад. непер. зл - зл.

Р/н cx. розв. уз непер. Ф-ції на деякій інтервалі можна помітно інтер-
претувати.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Якщо р/н cx. розв. згортається на Ф-ції, то отримаємо р/н cx.

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx), \quad m \text{ фіксовано,}$$

- cx. р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt \right) =$$

$\stackrel{0}{=} \text{ якщо } n \neq m \quad \stackrel{0}{=}$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt$$

Ортогональные функции $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ в пространстве функций на отрезке $[-\pi; \pi]$ со скалярным произведением $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

■

Задача 22-111

Дать в явном виде?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ — ряд сч. п/н на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ряд Фурье с членом $n=0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ — расходится $\nrightarrow 0 \Rightarrow$ не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ — нечетная, $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t) \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \, dt + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \, dt \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad \text{— } b_n \text{ при } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{При } n=1 \quad b_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} \, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}$$



Ряд сч. не п/н

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на $(-\pi; \pi)$

Рациональное по \cos и по \sin

$$f(x) \in L_n(0; 1)$$

Если f — непрерывно на \mathbb{R} — $f(x) \in L_n(-1; 1)$

То f — разг. Фурье — рациональное $P(t)$ на $(-1; 1)$ по \cos

Если по нечётности, то по \sin

Задача 1

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{по } \sin$$



Разг. с.х. неравномерно (разрывы) на $(-\infty; +\infty)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

Задача 2

Рациональное в разг. Фурье $f(x) = x^2$ на $(0; 1)$ с периодом $2l$



$$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t^2 \cos 2\pi n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t^2 \sin 2\pi n t \, dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{на } 0 < x < 1$$

Разг. с.х. — неравномерно на $(-\infty; +\infty)$ т.к. угловые разрывы

Рациональное по \sin или \cos чётных или нечётных крайних дуг

$$\textcircled{1} f(x) \in L_n(0; \frac{1}{2})$$



$$f(x) = f(1-x), \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{— симметрия относительно } x = \frac{1}{2}$$

Далее по нечётности, далее с периодом $2l$

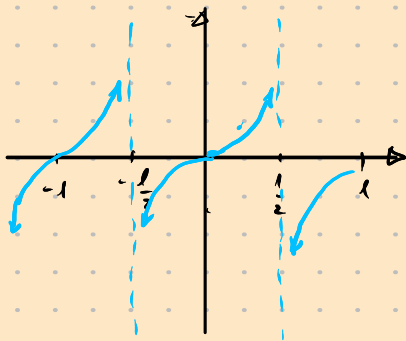
$$\text{В этом случае } a_n = b_n = 0$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{l} \quad - \text{розкладемо по sin невідомих кривих згд}$$

② $f(x) \in L_R(0; \frac{l}{2})$

$$f(x) = -f(l-x), \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad - \text{чужа симетрія стос. до } (\frac{l}{2}; 0)$$



$$a_n = 0, \quad b_{n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{l} dt$$

Розкладемо по sin відомих кр. згд
(розкладемо по sin з невідомим l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2\pi n x}{l}$$

③ $f(x) = -f(l-x)$ на $0 < x < \frac{l}{2}$ - чужа симетрія стос. до $(\frac{l}{2}; 0)$



Далі по відомим, далі з невідомим 2l

$$b_n = 0 \quad a_{2n} = 0$$

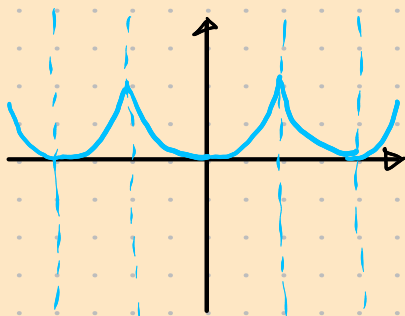
$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt$$

Розкладемо по cos невідомих кр. згд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

④ $f(x) = f(l-x)$ $0 < x < \frac{l}{2}$ - чужа симетрія стос. до $x = \frac{l}{2}$

Далі по відомим, далі з невідомим 2l



$$b_n = 0 \quad a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi \cdot 2n t}{l} dt$$

Розкладемо по cos відомих кр. згд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{\pi \cdot 2n x}{l}$$

(додатково розкладемо по cos з невідомим l)

Задача 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Разложить по \sin на $[0; 2]$ $l=2!$



Продолжить симм. осн. $x=1$

$$P(x) = f(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Разложить по \sin периодич. кр. гуд

$$b_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) x$$

Ряд сходимости по \sin на $(-\infty; +\infty)$ т.к. $f(x)$ имеет периодич. и нечетно-нечетно на $[-\pi; \pi]$

Задача 2

Построить кр. суммы рядов Фурье по \cos и \sin и т.д. и нечет, кр. гуд

Сходится ли они по \sin ?

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



Синус нечет. кр. гуд
сх. по \sin т.к. нечет.
непрерывно и нечетно на $[-\pi; \pi]$

Синус чет. кр. гуд
сх. не по \sin т.к.
непрерывно

Косинус нечет. кр. гуд
сх. не по \sin

Косинус чет. кр. гуд
сх. по \sin

$$f(x) = \sin x + 1$$



суммы пер. кр.
сх. не p/n



суммы чет. кр. гл.
сх. не p/n



суммы нечет. кр. гл.
сх. не p/n



суммы чет. кр. гл.
сх. p/n

Полное гипергеометрическое разложение Фурье

1. $f(x)$ ун. непрерывна на $[-l; l]$, период:

2. $f(x)$ периодическая функция на $(-\infty; +\infty)$

3. $f(x)$ имеет конечное число разрывов:

$$\text{Если } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right]$$

То разл. Ф. $f'(x)$ (х-раз кр. пер. на $[-l; l]$) разл. гипергеометрическое разл. Ф.:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{\pi n}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} \right) - \text{не сходится!}$$

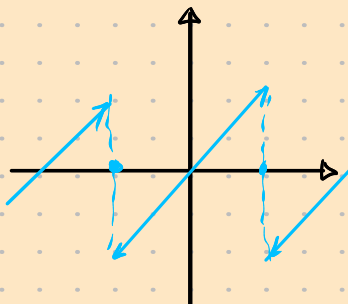
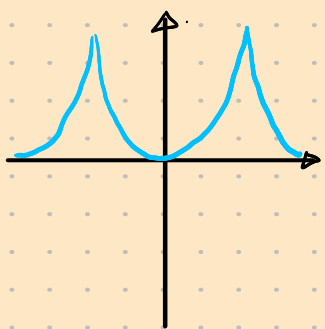
интер. разл. Ф.

Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{схема разл. полна } 2x \text{ на } (-\pi; \pi) \text{ по}$$

сх. 1 пр. Гиббса



$$-\pi < x < \pi$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

Равенство Парсеваля

$L_R^2(I)$ - м.б.о. ф-ции, аде. ун. на I высеет $f(x)^2$.

Для любого I $L_R^2(I) \subset L_R(I)$

Все адд. ун. - из $L_R^2(a; b)$

Ели $f(x) \in L_R^2(-1; 1)$ и ун. нрмог 21 , то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx$$

В расматр. раз. чеба ср.

Пример

$$f(x) = x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(x) = x^2;$$

$$\frac{2}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

