

# Глава XVII

Несколько приложений к экстремумам функций нескольких переменных

## §1. Теорема о несуществовании

$$F(x, y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$  — не является гладкой ф-и



### Теорема

Пусть ф-я 2-х переменных гладк. в  $U(x, y)$ .  $F(x_0, y_0)$ ,

$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$

так что  $y = f(x)$  —  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ .

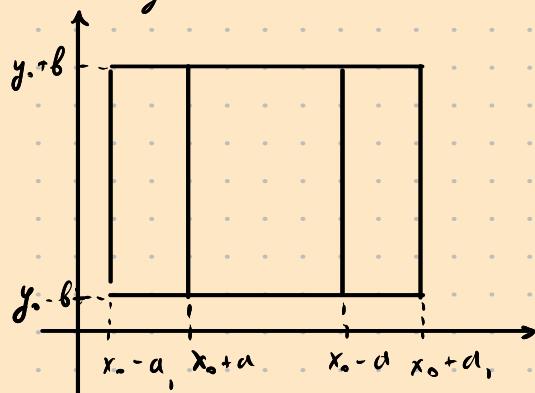
•  $F(x)$  непр-я на  $(x_0 - a, x_0 + a)$  и  $F'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$  на  $(x_0 - a, x_0 + a)$

### Доказательство

① Не паралл. одн.,  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ .

По лемме о сопр. знака,  $\exists$  отр-е  $(x_0, y_0)$  (в б-же прмнн).

$\tilde{\Pi} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ , т.к.  $F'_y > 0$  в  $\tilde{\Pi}$ .



$$\varphi(y) = F(x_0, y)$$

$$\varphi(y_0) = 0, \quad \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0, \quad y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

$\varphi(y) \uparrow$  справа

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$

По лемме о сопр. знака (зк  $F$ )  $\exists A: \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \left\{ \begin{array}{l} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{array} \right.$

Значит  $x^* \in (x_0 - a, x_0 + a)$

$$\varphi(y) = F(x^*, y)$$

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0$$

но т.к.  $F'_y(x^*, y_0 + b) > 0$ ,  $\varphi'(y^*) = 0$

$$\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \varphi(y) \uparrow$$
 справа  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Foga:  $f(y^*) = 0$  - egensid.

$\forall x^* \in [x_0-a, x_0+a] \exists! y^* \in [y_0-b, y_0+b]$

$$f(x^*, y^*) = 0$$

$$y^* = f(x^*) \quad \text{Replace } z \text{-variable}$$

② Nekras  $x \in [x_0-a, x_0+a]$ ,  $y = f(x)$ .

$$f(x, y) = 0$$

$\Delta x$  - naryanq.  $x$ ,  $\Delta y$  - kord. naryanq.  $y$ .

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$

No 1. laryanma qed q-p-uu necr. nep-wx,

$$0 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_x(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y) \Delta y,$$

$$\frac{1}{3} = \xi(\Delta x, \Delta y)$$

$$0 < \xi < 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y)}{f'_y(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y)}$$

$$\Pi = \{x_0-a < x \leq x_0+a, y_0-b < y \leq y_0+b\}$$

$$\bar{\Pi} = \{x_0-a \leq x \leq x_0+a, y_0-b \leq y \leq y_0+b\}$$

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \text{ na } \bar{\Pi}.$$

$\bar{\Pi}$  - komant, t.e.  $|f'_x| \leq \alpha$  - oys.

$$f'_y \geq \beta > 0 - \text{golum. inf.}$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq \frac{\alpha}{\beta} = M$$

$$|\Delta y| \leq M |\Delta x|$$

$y = f(x)$  oys. na  $[x_0-a, x_0+a]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0)$$

Foga  $f$  - paknenepti nep. na  $(x_0-a, x_0+a)$ .

No 3. o cypelnojennym nep. op-uu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x, f(x))}{f'_y(x, f(x))} - \text{nep.} \quad \text{UTA}$$

## Теорема (однознач.)

- ① Рассмотрим  $n+1$  неизвестных  $F(x_1, \dots, x_n, y)$  непр. гладкое. Имеется точка  $\bar{x} = (x_1^*, \dots, x_n^*, y^*)$ , при этом  $F(\bar{x}) = 0$ ,  $F'(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*) \neq 0$ . Тогда существует однозначное отображение  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ :
- $$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n, y^* - \beta < y < y^* + \beta\},$$
- и имеем  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x_1, \dots, x_n)$ .
- ②  $F$  непр. гладкое. Имеется  $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n\}$ , при этом  $y \in \Pi'$
- $$f'_i = - \frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_{y}(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i=1, \dots, n.$$

Доказательство:

① Док. равенство, Тогда  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

② Докажем:

Пусть  $\gamma$ . Аддитивная грд  $g$  с ненулевым коэф.

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1 + \alpha x_1, \dots, x_n + \alpha x_n, y + \alpha y) - F(x_1, \dots, x_n, y) = \\ &= F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y) \alpha x_1 + \dots + \\ &\quad F'_{x_n}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y) \alpha x_n + \\ &\quad F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y) \alpha y \\ \alpha y &= - \frac{F'_{x_1} \alpha x_1 + \dots + F'_{x_n} \alpha x_n}{F'_{y}} + \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\beta} = m_g \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i, |F'_{y}| \geq \beta) \end{aligned}$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$  падает непр. на  $\Pi'$

$$\lim_{\alpha x_i \rightarrow 0} \alpha y = 0$$

Рассмотрим  $\alpha x_1 = \dots = \alpha x_n = 0$

$$\frac{\alpha y}{\alpha x_1} = - \frac{F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, x_2, \dots, x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y)}{F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, x_2, \dots, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{\alpha x_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{\alpha x_1} = \dots = - \frac{df}{dx_1}, \quad \text{аналогично для } x_2, \dots, x_n.$$

Чтож.

## § 2 Teorema o one-me neblivim p-ii

Dnach.  $u = u(x)$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad - \text{gugup - q-p-ii}$$

Marginalna deriva -  $D_u = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

Esim. ona kladymas, kai cyp - et apiegiavimas - deriva.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

### Teorema (o mese)

Pykne  $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  neyp-gugup-q-p-ii & aps-ii  
 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Torga  $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\text{Ie } \left. \begin{cases} F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \bar{y} = f(\bar{x}), \text{ apieini q-p-ii}$$

$y_i = F_i(\bar{x})$ ,  $i=1 \dots m$  - neyp-gugup. na

$$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$$

## § 3. Teorema apie svaranu apibraneniu.

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gugup.

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x})$$

Biamo gurejano: eim  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , Torga

$$D_{F \circ \Phi} = D_F \cdot D_\Phi.$$

Esim. eim  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$ , to

$$D_{F\Phi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\Phi|_{\bar{x}}$$

Пусть  $n=m=p$ , тогда

$$J_{F\Phi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\Phi|_{\bar{x}}$$

Однозначні симбр.:

$$\Phi: G \rightarrow D \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$$\Phi^{-1}: D \rightarrow G$$

$$\Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \Phi - \text{бінарній симбр.}$$

$$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1} - \text{єсли оно дифер.!}$$

Если симбр. диференційовна в груп., то однозначні симбр. не обирають дифер. груп.!

$n=1$ :

$$y=x^3 - \text{дифер., дифер.}$$

однозначні непарні. & т. д.

Бінарній симбр.

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$

$$\boxed{J \neq 0}$$

Опрац.

Симбр.  $\Phi$  - існує однозначні симбр. в одн. ви  $G$ , якщо  $\forall \bar{x}_0 \in G \rightarrow \exists \delta > 0$ ;  $\Phi$  обирається в  $U_\delta(\bar{x}_0)$ .

Теорема щодо однозначності симбр.-ів

Пусть  $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  непр. дифер. в  $J_\Phi \neq 0 \& G$  ( $G \subset \mathbb{R}^n$ ). Тогда  $\Phi$  існує однозначні симбр.:

$\forall x_0 \in G \rightarrow \exists \Phi^{-1}$  - непр. дифер. симбр. в  $y_0 = \Phi(x_0)$ .

Д-бо:

$$\text{Роз-вм } F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j, \quad j=1 \dots n$$

$$(y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Оно непр. дифер.  $\forall (y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$  також, якщо  $x \in G$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y, x_0)$$

Із т. є ок-не нервніні оп-нні  $\exists \Pi = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

б к-пом

$$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$$

$F_i$  непр. функц. на  $\Pi' = \{y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i\} \subset R^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$  динамично отображает нен-е мн-ло  $X \subset R^n$  на  $\Pi'$ .

$$x = \Phi^{-1}(\Pi')$$

$\Pi'$ - отр. мн-ло, наимн. праобраз отр. мн-ла или непр. отр. един. отр. мн-ло  $\Rightarrow$

$\Rightarrow X$ - отображение



$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset X$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists U_\delta(x_0) \text{ б к-пом отр. гл-о отображения.} \quad \text{УГД}$$

## § 4. Экстремумы ф-ии нескольких переменных

Опт-е

$x^* \in R^n$  наз-ся локальн. макс. локального экстремума ф-ии  $y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x^*) \geq f(x) \forall x \in U_\delta(x^*) \text{ и } \forall x \in U_\delta(x^*) \rightarrow f(x) > f(x^*)$

Аналогично для мин. лок. экстр.

Несобственное ум. локального экстремума

Если  $f(x)$  непр. в  $x^*$  и  $x^*$  гл-о лок. экстр., то  $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \quad (\text{стационарное условие})$$

П-ло:

Рассмотрим ф-ию  $\varphi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Тако, что  $x_i^*$  - лок. экстремум токо по одн.  $x_i$ . Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{Аналогичные выражения}$$

УГД

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j$$

Норм. опр.:  $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) > 0$

Опим. опр.:  $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) < 0$

Ненорм., опр.:  $\exists x_1, x_2 : K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Ненорм. наизнеч.:  $\forall x \rightarrow K(x) \geq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Опим. наизнеч.:  $\forall x \rightarrow K(x) \leq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Если  $K(x) \equiv 0$ , то она назнеч. и опим. наизнеч., также ненорм. сущ не.

Рассл f. глануя непр. групп. в  $G \in R^n$ , т.е. unless bee непр. различне групп. биорес  
негад, але якщо  $\tau, \tau$  відповідають обм. ( $F_{yx}'' = F_{xy}''$ )

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(x^0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n F''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j - \text{вл. група} \text{ or. лемпа } (dx_1, \dots, dx_n)$$

### Диференц. як-е використано заспособ

Рассл f(x) глануя непр. групп. в  $U_s(x^0)$  в  $x^0$ -смт. Тогда

$$K(x) = d^2 f(x^0) - \text{вл. група}. Тогда:$$

1. еслі  $K(x)$  норм. опререна, то  $x^0 - \tau$ . симетрична та. недисперсійна
2. еслі  $K(x)$  опим. опр., то  $x^0 - \tau$ . симетрична та. мінімумна
3. еслі  $K(x)$  ненорм., то  $x^0$  не єб-ся  $\tau$ . та. мінімумна
4. еслі  $K(x)$  наизнеч., то ніанс. єон неєгабельн.

### Лемма

Рассл  $K(x) \in R^n$  назнеч. опр., та  $\exists C > 0 : \forall x \in R^n \rightarrow K(x) \geq C|x|^2$

Еслі опим. опр., то  $\exists C > 0 : \forall x \in R^n \rightarrow K(x) \leq -C|x|^2$

D-то 1 розмір:

Згенерум, що  $K(x)$  норм. опререна в окрестності  $R^n$ , т.е.  $K(x)$  - змінні на бен-  
тапе в окрестності не єоднорідн.

$$K(x_1, \dots, x_n) - \text{непр. на } R^n$$

$$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} - \text{ср. в замкнут. - кінціах}$$

Тогда єп-в, непр. на замкнут. інтервал. інт на S.

$K(x) \geq 0$  na  $S \Rightarrow \inf_s K = C > 0$ .

$\forall x \in S \rightarrow K(x) \geq C$ .

При  $x \neq 0 \in R^n$ . Рад-ун  $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$$

$$K(x) \geq C |x|^2 \quad \text{УТА}$$

D-бо тапсару

1.  $f(x)$  ғанаңын непр. грөзүп  $\mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow$  ынанымалык жиындар (Редно):

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0) \rightarrow f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(|g|^2), \quad g^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$$
$$df \equiv 0 \rightarrow \text{сигеу.}$$

$d^2 f$  - нарам. орын.

Т.е.  $f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} (|dx|^2) + o(|dx|^2) =$

$$= f(x^0) + \frac{C}{2} |dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$$
$$= f(x^0) + |dx|^2 \left( \frac{C}{2} + \varepsilon(dx) \right)$$

$$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0 \quad \& \quad \mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0).$$

Т.е.  $x^0$  - с. орындың ишкемдүүлүгү.

2. Анализмалык

3.  $d^2 f(x^0)$  - неңгыл. кеб. сипатта.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$ .

Рад-ун бекіспен нындаңызу  $dx = \lambda z$ ,  $\lambda \neq 0$  (нындаңыз  $\parallel z$ )

$$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\left( \lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} \right)}_{\beta > 0} |z|^2$$

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$$
$$= f(x^0) + \frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2$$

$$\frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0 \quad \text{нын жеңи маңын} \quad \varepsilon(dx)$$

Т.е.  $f(x) > f(x^0)$  на  $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Анализмалык да  $dx = \lambda z'$ , то нын жақындаңыз маңын  $\varepsilon(dx)$   $f(x) < f(x^0)$ .

$x^0$  - не с. ишкемдүүлүгү.

Пример:  $z = x^4 + y^4$ ,  $z'_x = 4x^3$ ,  $z'_y = 4y^3$ , жаңыл.  $(0,0)$ ,  $z''_x = 12x^2$ ,  $z''_y = 12y^2$ ,  $z''_{xy} = 0$ ,  $d^2 z(0,0) = 0$ .

Mayo conjecture  $\Delta z(0,0)$ :  $z(\alpha x, \alpha y) - z(0,0) > 0$  then  $\alpha x^2 + \alpha y^2 > 0$  - max. min.

### § 5. Установка (стартовая) экспрессии.

$$z = xy \quad (\text{csgos})$$

$$z_x' = y, \quad z_y' = x \quad (\text{at } (0,0))$$

$$z_{xx}^1 = z_{yy}^1 = 0, \quad z_{xy}^{''} = 1$$

$d^2 z = \text{neur. ab. q.} - \text{neur. exp.}$

Given  $y = x + z$ ,  $x = z(1-z)$ , so max. is  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Onp

T.  $x^*$  nazywamy T. węzłem zgodnym opisanym  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  gdy dla każdego  $i$  mamy  $\varphi_i(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0$ ,存在着  $\exists \delta > 0$ :  $\forall x \in U_\delta(x^*)$  mamy  $f(x) > f(x^*)$

Если из ус. слова можно это выражение оценить через группу, то возможны  
загара на солнце и выражение оценки через группу.

A eum nei, zo symmetrisch op- en terugdraaien.

Ngars  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , Tonga qip-wa Marpanmaa  $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 u_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_n u_n(x)$

Then both  $\varphi$ - $\lambda$  change  $L = f, \forall \lambda_i$ . - you equip  $f$  in  $L$  cobragars.

Модификация ул-нг сине. экспрессия

Приєдні  $f(x)$ ,  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1 \dots n$ ) непр. функції в  $U_\delta(x^*)$ . Приєдні  $x^* - \tau$ -оної. доки не можна

$f(x)$  ypm  $\varphi_i(x) = 0$ , ypm  $\text{ry} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) = m$  (ypravlenie q-p-mi  $\varphi_i$  mnejno nezavisimym).

Tогда  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ :  $x^* - r.$  одновременно экстремумы  $f(x)$ .

$$\text{Mean. permiss. are - my } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{array} \right. \quad - \text{are - my } n+m \text{ yp - mi c } n+m \text{ wenz.} \\ (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

D - 69:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad \operatorname{rg} \Phi = m, \quad x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

Er muss nun genau  $n = 0$ . Das ergibt in 1-n nun:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{array} \right| \neq 0 \quad \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (\varphi_1, \dots, \varphi_m)} \neq 0 \text{ bei } x^* \Rightarrow \varphi(x^*) \text{ eindeutig}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ \psi_m(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \end{cases} \quad \text{в т. окрестности } \exists \text{ оп-то } x^*, \text{ б-к-пн}$$

ес-на небудет ни ж-зажи.

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{matrix} x_{m+1}, \dots, x_n - \text{незав. ф-м} \\ x_1, \dots, x_m - \text{зависимые} \end{matrix}$$

9-и г. квадратичн. б. опр-ии  $\tilde{x}^o = (x_{1+o}, \dots, x_n^o)$ . Продолж. же. вез:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n & dx_1, \dots, dx_m - \text{zab. Gruppen - var} \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n & dx_{m+1}, \dots, dx_n - \text{negab. Gruppen - var} \end{cases}$$

При каком  $x$  значение  $f(x)$  будет наибольшим?

$$f(x)|_*= f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = F_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_* = \mathcal{L}(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathcal{L}_*(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_*=f(x)|_*$$

$$L_\alpha(\tilde{x}) = f_\alpha(\tilde{x}) \quad \forall \alpha;$$

$$d\mathcal{L}(\tilde{x}^*) = df_*(\tilde{x}^*) = 0 \quad (\text{T.R. zero norm outer gradient}) \quad \forall i$$

В any unbarmehnem gup - ic относ. замена переменной

$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^*) = d(\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}) = d\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}$  - греческое обозначение  
 (греческое обозначение введенное в определение)

$$d \mathcal{L}(x) \Big|_{x_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} dx_n$$

$\swarrow$   $\searrow$

zabranen negativen

До сих пор  $\lambda_i$ -прост. Поэтому  $\lambda_i$  так, что  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*) = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}(x^*) = 0$ .

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \int \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i}(x^*) = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^o) + \lambda_1 \frac{\partial q_{f_1}}{\partial x_m}(x^o) + \dots + \lambda_m \frac{\partial q_{f_m}}{\partial x_m}(x^o) = 0 \right.$$

- Cuc - ma un - zp - mi, ei onreg!

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \Big|_{x^0} \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ pern-e}$$

2: nāngenu.

Рынок равн. 2:1

$$dL_0(\tilde{x}^*) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) dx_m}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) dx_n}_{=0}$$

Но  $dL_0(\tilde{x}^*) = 0$   $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0 \Rightarrow$  рыноч. равн. 2:1  $x^*$  - стаб. точка.  
 $dx_{m+1}, \dots, dx_n$  - ненул.

УДА

Две проверки неодн. ус-я  $\Rightarrow$  однос. экстремуму можно пользоваться:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \psi_1 = \dots = \psi_m = 0 \end{array} \right. \quad \text{n+m уп-ий, n+m ненул.}$$

### Дискриминантное критерий

Функции  $f(x)$ ,  $\psi_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m < n$  - гладкие непр. функц. с нулевыми производными по  $x_i$  в точке  $\tilde{x}$ .  
При этом матрица Гессе  $\left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$  падает в Т.Х.

При этом  $\tilde{x}^*$  и  $\lambda_i$ ,  $i=1 \dots n$  являются решением (I). Тогда в Т.Х. получаем квадратичную форму  $d^2L(\tilde{x}^*) \Big|_{**}$  - квадратичная форма  $n \times n$  непр. функц. (обозначение  $\lambda$  не то же, что и в квадратичной форме).

Тогда если эта форма положит. опред., то  $\tilde{x}^*$  - л.ст. максимума  $f$  на всем  $(*)$  множестве опред., то  $\tilde{x}^*$  - л.ст. максимума  $f$  на множестве, то  $\tilde{x}^*$  - л.ст. максимума  $f$ .

**Пример:** Если  $d^2L(\tilde{x}^*)$  - неотриц. опред. квадратичная форма в группе об (то максимум), то есть максимум  $(**)$  она также является.

Иначе имеем генеральный максимум  $(**)$ .

Если имеем максимум  $(**)$  квадратичная форма опред., то есть минимум.

**Пример:**

$$f = xy \text{ при ус-и } x+y=1$$

$$L = xy + \lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = y = \frac{1}{2}$$

$$d^2 \lambda = 2dx dy - \text{неоптим. кб. огранка от } dx, dy$$

Прогресс. ум. образ:  $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$

$$d^2 \lambda|_{x,y} = -2dx^2 - \text{сигн. оптим. кб. огранка от } dy = 0$$

Значит  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  - ум. минимум.

### Справка

$d^2 f$  не одн. ил. огранка от  $\lambda$  знач. непрерывн.

$f = f(x_1, \dots, x_n)$  - гладкая непр. функц.

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^n dx_k d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k + \sum_{k=1}^n dx_k \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \right) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k \end{aligned}$$

Если  $x_1, \dots, x_n$  - незав. непрерывн., то  $d^2 x_k = 0$

$$d^2 f = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Также если все  $x_i$  лин. в  $\lambda$ , то  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$  в незав.  $i$ .

(б) синг. т.) - квадратичн. огранка  $d^2 f$  от  $\lambda$  знач. непр. в  $\lambda$  синг. точке

### D-B

Составленные из  $g_i$  н.д.  $\Rightarrow$  н.п. н.спр.

Доказано, что  $x_i = g_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$  - гладкая непр. функ. в окр.  $\tilde{x}^0$

$$\varphi_i(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1 \dots m)$$

Прогресс. поб-бо по  $x_j$ :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i=1 \dots m$$

Норм. огран.  $j$ ,  $m+1 \leq j \leq n$  - это одна из  $m$  н.п. в незав.  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ .

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{m+1}, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ в окр. } \tilde{x}^0$$

Берем  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$  разделяя  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ , значение  $\neq 0$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \text{ непр. функ.} \Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \text{ непр. функ.} \Rightarrow g_i - \text{гладкая непр. функ.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  н.п. н.д.  $d^2 \lambda$  в коорд.  $y_p$ -коорд.

В общ. обозначении огранка  $d^2 \lambda(x^0)$  (бес  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}(x^0) = 0$ )

$$d^2 \mathcal{L}(x^0) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k \quad (\text{незав. от } x^0, \text{ т.е. } dx_j dx_k \text{ гипер-плоск. незав. непен-} \\ \text{норм. к ним гипер-плоск. оп-мин}).$$

$$\mathcal{L}(x)|_* = \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) \quad \text{б. аргумент.}$$

$$d^2 \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d^2 (\mathcal{L}(x^0)|_*) \stackrel{*}{=} d^2 \mathcal{L}(x^0)|_{**} \\ \text{||} \quad \text{б. орт. гипер-плоск. оп-мин н-н непен-бл} \quad \text{б. орт. гипер-плоск. оп-мин н непен-бл}$$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}(x^0)|_{**} = 0 \quad (\text{б. арг. кон-мин I}) \Rightarrow \tilde{x}^0 - \text{стаци. т. } f_0(\tilde{x}^0)$$

Характер экстремума в точке т. оптим. гл. условий

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 \mathcal{L}(x^0)|_{**}$$

Характер экстремума оптим. условиям. точек оптим.

УТД

# Глава XIX

## Кратные интегралы

**§ L Определение. Критерий интегрируемости Дордь.**

Прим.  $G$  - измеримое мн-во,  $G \subset R^n$ ,  $G \neq \emptyset$ .

$R$  - разбиение  $G$  на конечн. изм. мн-ва  $G_i$ :  $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ .

$$\forall i \neq j \rightarrow \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

Максим. разбиение  $|R| = \max_{i=1 \dots N} \operatorname{diam} G_i$

Границы, т.е.  $f(x)$  опр. на  $G$ . Расс-ии  $M_i = \sup_{G_i} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{G_i} f(x)$

Оп-е

Верхнее и нижнее суммы Дордь:

$$S_a^* = \sum_{i=1}^N M_i \mu G_i, \quad S_{*a} = \sum_{i=1}^N m_i \mu G_i$$

Сумма Римана

$$\forall i=1 \dots N \rightarrow \xi_i \in G_i$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu G_i$$

$$\text{Две гранич. } R_a: S_{*a} \leq \sigma_a \leq S_a^*$$

Коэффициенты гр-ии

$$\omega_a = S_a^* - S_{*a} = \sum_{i=1}^N \omega_i \mu G_i, \quad \omega_i = M_i - m_i$$

Разбиение  $R_2$  согласно за  $R_1$ . ( $R_2 \geq R_1$ )  $\Leftrightarrow$

$R_1: G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ ;  $\forall G_i$  - однозначное пакетование из  $G_j$

$$R_2: G = \bigcup_{j=1}^{n'} G_j$$

Упр

Если  $R_2 \geq R_1$ , то

$$S_{R_2}^* \leq S_{R_1}^*, \quad S_{*R_2} \geq S_{*R_1}, \quad \omega_{R_2} \leq \omega_{R_1}$$

