ОДУ - обыкновенные дифференциальные уравнения

ОДУ в общ. случае

$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{n}(x)) = 0$ - обыкновенные - произв. только по одной переменной (x)

Рас-им сис-му:

$$\begin{cases} F_1(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Ур-я 1-го порядка

$F(x, y, y') = 0$

- Еще проще: ур-я 1-го порядка, разрешённые относ. произв.:

$y' = F(x, y)$; $\left.\begin{matrix} dy = dF(x,y)\,dx \\ P(x,y)\,dy + Q(x,y)\,dx = 0 \end{matrix}\right\}$ ур-я в дифер. форме

- Частный случай: ур-я с разделяющимися переменными

$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$; **решение:**

$F(x) = \int f(x)dx \qquad G(x) = \int g(x)dx$

$dF(x) + dG(y) = 0$

$d(F(x) + G(x)) = 0$

$F(x) + G(x) = \text{const}$

$\Longleftrightarrow \quad \int f(x)dx + \int g(y)\,dy = 0$

С2 №4

$y' \cos x + y(1+y)\sin x = 0$

$\frac{dy}{y(1+y)} + \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = 0$

$\int \frac{dy}{y(1+y)} + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = 0$

$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{(1+y) - y}{y(1+y)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \ln\left|\frac{y}{1+y}\right| + C_1$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C_2$

$\ln\left|\frac{y}{(1+y)\cos x}\right| = C_3$

$\frac{y}{(1+y)\cos x} = \pm e^{C_3}$ $\quad C \in \mathbb{R}$ ($C = 0$ - тоже решение!)

$\frac{y}{(1+y)\cos x} = C$ или $y = -1$ (решения теряются когда мы делим!)

$$y = \frac{C\cos x}{1 - C\cos x}$$

Ф № 67*

$3y^2 y' + 16x = 2xy^3$ Найти $y(x)$ - огр. в $U(+\infty)$

$3y^2 y' = 2x(y^3 - 8)$

$\int \frac{3y^2\,dy}{y^3 - 8} = \int 2x\,dx$ — потеряли $y^3 = 8$

$\ln|y^3 - 8| = x^2 + C_1$

$y^3 - 8 = \pm e^{C_1} e^{x^2}$

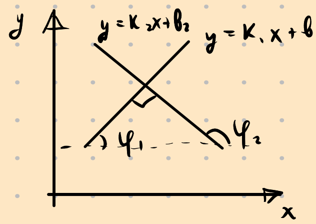
$C \in \mathbb{R}$ (в т.ч. 0! $y^3 = 8$ тоже реш.)

$y^3 - 8 = Ce^{x^2}$

$y(x)$ - огр. при $C = 0$.

Ортогональные траектории

Рас-им 2 ортогональные прямые:



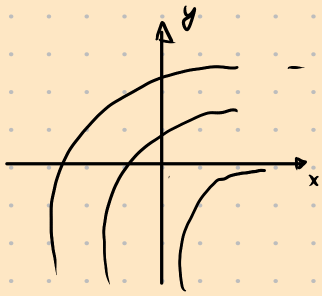
$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$

$k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\frac{1}{k_1}$

$k_1 k_2 = -1$ у $\perp$ прямых.

Пусть им. ур-е:

$y' = f(x, y)$



— интегральные кривые ур-я (основные траектории)

Ортогональные траектории:

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$

Пример

$y = Cx^2$ — семейство кривых. Найти ортогон. траектории

$C = \frac{y}{x^2}$

$0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}$

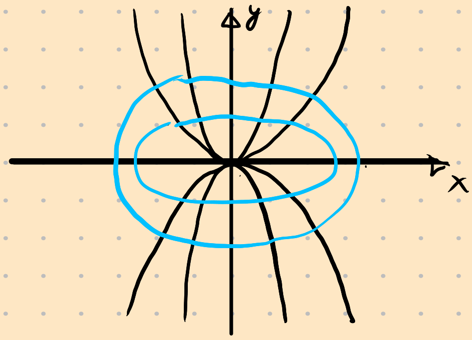
$y'x^2 = 2xy$

$y' = 2\frac{y}{x}$

Для ортог. кривых: $y' = -\frac{x}{2y}$

$2y\,dy + x\,dx = 0$

$y^2 + \frac{x^2}{2} = C$ — ур-е эллипсов



Однородные уравнения

Сводятся к ур-ю с разделяемыми переменными

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Замена: $y = x\,z(x)$

$y' = z + xz'$

$xz' + z = f(z)$

$z' + z - f(z) = 0 \quad \left(\frac{dz}{z - f(z)} + dx = 0\right)$

Ур-е, сводящееся к однородному

$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Замена: $x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0$

$\eta' = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + \overbrace{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}^{=0 \text{ (в силу выбора } x_0, y_0)}}{a_2\xi + b_2\eta + \underbrace{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}_{=0}}\right)$

Получим однородное ур-е

Ф № 117

$(y+2)\,dx = 2x + y - 4\,dy$

$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ — x_0, y_0

$x = \xi + 3 \qquad y = \eta - 2$

$\eta\,d\xi = (2\xi + \eta)\,d\eta$

$\frac{\eta}{\xi} = z$

$z\xi\, d\xi = (2\xi + z\xi)(z\, d\xi + \xi dz)$

$(z\xi - z(2\xi + z\xi))\, d\xi = \xi\cdot(2\xi + z\xi) dz$

$z\xi(1 - 2 - z)\, d\xi = \xi^2 (2 + z) dz \quad \Big|\ \xi = 0$ - не реш-е

$-z(1+z)\, d\xi = \xi(2+z) dz$

$$-\frac{d\xi}{\xi} = \frac{2+z}{z(z+1)} dz$$

$$-\int \frac{d\xi}{\xi} = \int\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz$$

$$\frac{z^2}{z+1}\cdot\xi = C$$

$$\frac{\eta^2}{\eta+\xi} = C \Rightarrow \frac{(y+2)^2}{y+x-1} = C \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(y+2)^2 = C(y+x-1)\\ x+y=1\end{array}\right. \quad (\text{не теряем } x+y=1)$$

Линейные ур-я I порядка

$y' + a(x)y = b(x)$ - неоднородное

Рас-им линейное однородное ур-е:

$y' + a(x)y = 0$

$\frac{dy}{y} + a(x)dx = 0$

$\ln|y| + \int a(x)dx = 0$

$y = C_0 e^{\int a(x)dx}$ ← одна первообр.

$y = C_0\cdot \varphi(x)$ - структура решения однородного ур-я; $\varphi(x)$ - частное решение

Метод вариации постоянной: (C_0 меняем на ф-ию)

Замена $y = C(x)\cdot\varphi(x)$ в неоднородном ур-ии:

$C'\varphi + C\varphi' + aC\varphi = b$

$C'\varphi + C\underbrace{(\varphi' + a\varphi)}_{=0\ (\varphi\text{-реш-е однор. ур-я})} = b$

$C'(x)\varphi(x) = b(x)$ - ур-е с разд. переменными

C 3.37

$x^2 y' = 5xy + 6, \quad y(1) = 1$

Рас-им однор-одное: $x^2 y' = 5xy$

$$\frac{dy}{y} = 5\frac{dx}{x}$$

$$y = x^5 C_0 \quad \Big| \; y(x) = C_0(x)\, x^5$$

$$x^2(C' x^5 + C\, 5x^4) = 5x\, Cx^5 + 6$$

$$C' = \frac{6}{x^7}\ ; \quad C = -\frac{1}{x^6} + D$$

$$y = \left(-\frac{1}{x^6} + D\right)x^5 \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + Dx^5 \text{ - реш-е}$$

$$y(1) = 1: \quad 1 = -1 + D \Rightarrow D = 2$$

$$y = -\frac{1}{x} + 2x^5$$

№1

$$xy' - 2y = 2x^4$$

ОУ: $xy' - 2y = 0$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C$$

$$y = Cx^2$$

ВП: $y = C(x)\, x^2$

$$x[C'x^2 + 2Cx] - 2Cx^2 = 2x^4$$

$$C'x^3 = 2x^4$$

$$C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C$$

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + x^2 C$$

№2

Без ВП: $xy' - 2y = 2x^4 \ | \cdot x$

$$x^2y' - 2xy = 2x^5$$

$$\frac{x^2y' - 2xy}{x^4} = 2x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C \Rightarrow y = x^4 + Cx^2$$

- Опытные люди делают так: переставляют всё так, чтобы получилась какая-то произв. (без ВП)

- Можно переставлять y и x в дифф. форме:

$$(1+y^2)\,dx + (2xy-1)\,dy = 0$$

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = 1-2xy \quad \text{— лин. ур-е}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

ОУ: $\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$

$$x = \frac{C}{1+y^2}$$

ВП: $x = \frac{C(y)}{1+y^2}$ Ответ: $C(y) = y + C$, $x = \frac{y+C}{1+y^2}$

Уравнение Бернулли

$y' + a(x)y = b(x)\,y^n$, $n \in \mathbb{R}$ — приводится к линейному!

$n=0 \to$ ЛУ $\quad n>0 \Rightarrow y=0$ — реш.

$n=1 \to$ ОЛУ $\quad n<0 \Rightarrow y=0$ — не реш.

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$$

Замена: $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$

$$z' = (1-n)\,y^{-n}\,y' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$$

Получим $(1-n)^{-1}z' + a(x)\,z = b(x)$ — ЛУ

№4

$y' - y + 2xy^3 = 0 \quad | \quad y=0$ — реш.

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$$

$z = \frac{1}{y^2} \qquad z' = -\frac{2}{y^3}\,y'$

$$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$$

$$2x = \frac{z'}{2} + z$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$$

ОУ: $\frac{dz}{dx} + 2z = 0$

$$\frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

ВП: $z = C(x)\,e^{-2x}$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x$$

$$C'(x) = 4xe^{2x}$$

$$C(x) = \int 4xe^{2x}dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$$

$$\frac{1}{y^2} = (2xe^{2x} - e^{2x} + C)\cdot e^{-2x}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y^2 = \left((2x-1) + Ce^{-2x}\right)^{-1} \\ y = 0 \end{array}\right.$

Уравнение Риккатти

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$$

Пусть y_0 - решение

$y = z + y_0$ z - новая неизв. ф-ия => ур-е Бернулли

№5

$$x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0$$

$$y_0 = \frac{k}{x}$$

$$-\frac{x^2k}{x^2} - \frac{5xk}{x} + x^2\frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$$

$$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$$

$k = 2,\ k = 4$

Сделаем замену $y = z + \frac{2}{x}$:

$$x^2\cdot\left(z' - \frac{2}{x^2}\right) - 5x\left(z + \frac{2}{x}\right) + x^2\cdot\left(z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2}\right) + 8 = 0$$

$$x^2z' - zx + x^2z^2 = 0 \quad \Big|: x$$

$$xz' - z + xz^2 = 0$$

$$\frac{z'x - z}{z^2} = -x \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)' = x$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow \frac{x^2}{xy-2} = \frac{x^2}{2} + C;\quad y = \frac{2}{x}$$

Уравнение в полных дифференциалах

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ - P и Q непр.

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y)$ - F непр. дифф. в $G \subset \mathbb{R}^2$

$\exists F$: $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

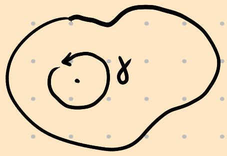
Реш-е: $F(x,y) = C$ (т.е. F - потенциал)

Пусть F - дважды непр. дифф в G:

Если $\exists P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{cases}$$ – должны быть равны! – необходимое усл-е наличия потенциала

Условие яв-ся достаточным, если обл. G односвязна.


G нет дырок!

№6

$$(1+3x^2 \ln y)\,dx + \left(3y^2 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0$$

$G = [y>0]$ – односвязна

$\exists F: \ \dfrac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$

Можно угадать, но если нет:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 3x^2 \ln y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \dfrac{x^3}{y} \end{cases} \xrightarrow[\text{по } x]{\text{интегрируем}} F = x + x^3 \ln y + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C$$

$$F = x + x^3 \ln y + y^3$$

Интегрирующий множитель

Если потенциальности сразу нет:

$\mu P = \dfrac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ – надо решить сис-му – конечно, так никто не делает.

№7

$$(y - 3x^2y^3)\,dx - (x + x^3y^2)\,dy = 0$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - 9x^2y^2 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 3x^2y^2$ – не равны

$y\,dx - x\,dy - 3x^2y^3\,dx - x^3y^2\,dy = 0 \quad | \ y=0$ – реш, $x=0$ – реш

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 3x^2y\,dx - x^3\,dy$$

$d\left(\dfrac{x}{y}\right) = d(x^3y) \Rightarrow \dfrac{x}{y} = x^3y + C; \quad y=0; \quad x=0.$

Уравнения высшего порядка

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ – надо понизить порядок! коэф-т при $y^{(n)} \neq 0$ при реш!

Методы понижения порядка

1. Нет явного y! $y' = z$, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \to F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$

$xy'' + xy'^2 + y' = 0$, $y' = z$; $y = \text{const}$ – реш-е

$xz' + xz + z = 0 \quad | x \neq 0$ для удобства

$x\frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0$, $\quad \frac{1}{z} = u$

$-xu' + x + u = 0 \quad | : x^2$

$\frac{u - xu'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = \ln x + C$, $\quad \frac{1}{zx} = \ln x + C$

$z = y' = \frac{1}{x(\ln x + C)} \qquad y = \int \frac{dx}{x(\ln x + C)} = \ln|\ln x + C| + C_1 \qquad \left[\begin{array}{l} y = \ln|\ln x + C| + C_1 \\ y = \text{const} \end{array}\right.$

2. Ур-е без явного x

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$; y – новая незав. переменная

$y' = z(y)$ – новая ф-ия

$y'' = (y'_x)'_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x = z \cdot z'_y$

$y''' = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})'_y \, y'_x = (z \cdot z'_y)'_y \cdot y'_x = (z'^2_y + z \cdot z''_{yy})\, z = z \cdot z'^2_y + z^2 z''_{yy}$