

# Кинематика материальной точки

Сферическая система



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} - \text{ОКБ}$$

$$\vec{v} = \dot{q}^i \cdot \vec{q}_i = \sum h_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$$

$$h_i = |\vec{r}_{,i}|$$

$$\vec{r}_{,r} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow h_r = 1 \quad h_\lambda = r \cos \varphi \quad h_\varphi = r$$

Рассмотрим малое перемещение

$$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \approx \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{h_a} \cdot dq^a$$



$$(2): \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right]$$

$$w_k = \vec{w} \cdot \vec{e}_k$$

$$\left( \frac{v^2}{2} \right)_{,i} = \dot{r} ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,i} = \ddot{r}$$

$$\left( \frac{v^2}{2} \right)_{,r} = r (\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) \Rightarrow w_r = \ddot{r} - r (\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2)$$

2-й закон Ньютона в координатной форме

$$m \vec{w} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_a$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} - \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} = \vec{F} \cdot \vec{g}_a = Q_a$$

$\frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} = Q_a$  - в модаль криволинейной системе координат!

$$\frac{1}{h_a} \left[ \frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} \right] = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Движение по винтовой линии



$$\begin{cases} x^1 = a \cos \omega t \\ x^2 = a \sin \omega t \\ x^3 = b t \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

$$\vec{w}_\tau = 0$$

$$\vec{w}_n = a \omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2 \omega^2 + b^2}{a \omega^2}$$

Задача

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \quad a, b = \text{const}$$

$$r(\varphi) = ? \quad w_r(r), \quad w_\varphi(r)$$

$$r(0) = r_0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$



$$V_r = \dot{r}$$

$$V_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{br}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b} (\varphi - \varphi_0)$$

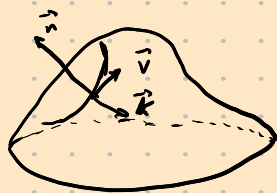
$$w_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \quad \leftarrow \quad \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^3$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\underbrace{r^2 \dot{\varphi}}_b) = 0 \quad \dot{\varphi} = b/r^2$$

№ 1.20

$$\dot{\varphi} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$



$$\vec{k} = \frac{\vec{v}}{\rho} \quad (\text{центр кривизмы})$$

$\vec{r}_1$  — нормаль

$\vec{r}_2, \vec{r}_3$  — касательные

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{r}_2 = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{r}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

↑  
условие движения по геодезической

# Кинематика вращающегося тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{\rho} = A(t) \vec{\rho}_0$$

$\vec{R}(t)$ ,  $A(t)$  - зад.  $\Rightarrow$  гл.м. т. задано.

$$A^T A = E$$

$$\det A = 1$$

опред. матрица отпр-ия системы

Пред-ум  $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt} | A^T A = E \Rightarrow \dot{A}^T(0) A(0) + A(0) \dot{A}^T = 0$$

$$\dot{A}(0) = \hat{\omega} : \hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$$

$$dt \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat{\omega} dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}, \quad \vec{\rho} = A \vec{\rho}_0$$

$$\vec{\rho}(dt) = (E + \hat{\omega} dt) \vec{\rho}_0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\rho}}|_{t=0} = \hat{\omega} \vec{\rho}|_{t=0}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \hat{\omega} \vec{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \hat{\omega} \vec{\rho}$$

$$\text{В } \mathbb{R}^3: \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\omega} \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \text{ где } \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} - \text{угловая скорость}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} - \text{формула Эйлера}$$



$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{e} \Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\vec{e} \Delta \varphi = \Delta \vec{\rho} - \text{вектор Эйлера}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}}_0 + \vec{e} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

Формула Пуанкаре,  $\vec{e} = \dot{\vec{\omega}}$  - угл. ускорение

## Плоское движение



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \omega^2 \vec{\rho}$$

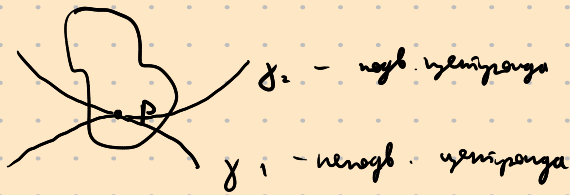
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{e} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho} - \text{2D Пуанкаре}$$

## Мгновенные центры скоростей и ускорений

Центр скоростей:  $P: \vec{V}_P = 0 = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_P$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_O - \vec{\omega} \times \vec{r}_P = 0 \Rightarrow \vec{r}_P = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_O}{\omega^2} - \text{вектор от } O$$

Но!  $P$  существует как в 2D, так и в 3D - но центр скорости



Коренне без преобразования  
(в т. центре  $V$  тем самым)

Центр ускорения  $Q$

$$\vec{W}_Q = 0 = \vec{W}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_Q - \omega^2 \vec{r}_Q$$

$$\vec{\epsilon} \times \vec{W}_O - \epsilon^2 \vec{r}_Q - \omega^2 \vec{\epsilon} \times \vec{r}_Q = 0$$

$$\vec{\epsilon} \times \vec{W}_O - \epsilon^2 \vec{r}_Q - \omega^2 \vec{r}_Q + \omega^2 \vec{W}_O = 0$$

$$\vec{r}_Q = \frac{\vec{\epsilon} \times \vec{W}_O + \omega^2 \vec{W}_O}{\epsilon^2 + \omega^2}$$



$$\tan \gamma = \frac{\epsilon}{\omega^2}$$

## Ползущий пункт (можно в 3D и в 2D)



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad | \quad \vec{e}_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{V}_A \cdot \vec{e}_{AB}$$

Куда направлена  $\vec{V}_A$ , если точка скользит по углу?

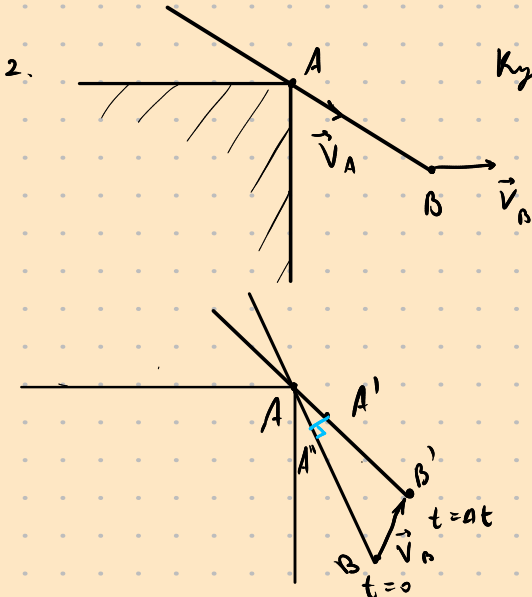
Ответ: вдоль AB:

$$\vec{AA}' = \vec{AA''} + \vec{A''A'}$$

$$\vec{A''A'} \approx \vec{AA''} \sin \varphi$$

$$\vec{V}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{\vec{AA''}}{\Delta t}}_{\text{касательная}} + \underbrace{\frac{\vec{A''A'}}{\Delta t}}_{\text{вертикаль}} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA''}}{\Delta t} = \vec{V}_A$$

УРА





$$W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$



$$MN = L = 2R \sin 30^\circ = R$$

$$PD = 2L \quad V_0 = 2\omega L$$



Без преобразования

$\omega, \epsilon$  заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Проекция  $O$  - ось  $z$  с  $A$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y - R \\ 0 \end{bmatrix}$$

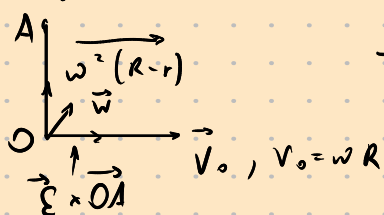
Полная угловая  
(векторное  
умножение)

$$\begin{bmatrix} -a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отрезок  $AO$  - некое тело!



$\Omega$  - угл. скор.  $AO$

$$V_0 = \omega R = \Omega(R-r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R-r} \omega$$

$$\epsilon = \frac{R}{R-r} \epsilon$$

## Задача 2 (3.24 ~)



$$V_c = ?$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec{V}_C \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_C = 0$$

$$V_c = ?$$

$$\omega = \text{const}$$

(палка кривится в m-м месте и имеет угол)

## № хрестоматийный



$r, \omega = \text{const}$ , движение без проскальзывания

$$\vec{V}_m, \vec{W}_m, \rho_m, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon} - ?$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{т.к. образующая кольца,}$$

касающаяся пов-ти, имеет в центре  $\vec{V} = 0$ , т.е.

$\vec{\omega} \parallel$  этой ось

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_m = \vec{\omega} \times \vec{r}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\omega r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega, \quad \vec{e}_\omega = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega} \vec{e}_\omega + \omega \dot{\vec{e}}_\omega$$

Введем промежуточные ПТ:

Понятно, что

$$\vec{\varepsilon} = \omega \vec{\Omega} \times \vec{e}_\omega \quad (\text{здесь } \vec{e}_\omega \text{ это как для } \vec{g}, \vec{\Omega} \text{ это для } \vec{\omega})$$

$$\vec{V}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_c = \vec{\Omega} \times \vec{r}_c$$

$$\text{т.к. } \omega \frac{r}{\sqrt{2}} = \Omega \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Omega = \omega$$

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{W}_m = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_m}_{\perp \vec{e}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_m)}_{\vec{V}_m \text{ (как правило)}, \perp \vec{e}}$$

$$\vec{W}_m = \vec{W}_m^T \vec{e} + \frac{V_m^2}{\rho_m} \vec{n}$$

$$\vec{V}_m \parallel \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{e} = \vec{x}_1$$

$$\text{Таким образом } \vec{W}_m = \frac{V_m^2}{\rho_m} \vec{n} \Rightarrow \rho_m = \frac{V_m^2}{\omega_m}$$



$\vec{e}_\omega$  совпадает со направлением  $\vec{\omega}$

! При повороте  $\vec{a}_3$  проекция на  $\vec{e}_3$  в координатной системе  $\vec{e}$  минимальна  $\Rightarrow 0$ .

$$\vec{e} = \vec{e}' + \vec{e}''$$

### Определ. вращения

$$A \vec{r}_i = \vec{r}_i \Rightarrow \vec{r}_i$$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^1 & e^2 \\ e^1 & 0 & -e^3 \\ -e^2 & e^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_2^1 - a_3^1)$$

$$e_2 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_3^1 - a_1^1)$$

$$e_3 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_1^1 - a_2^1)$$

$$A = E \cos\varphi + \hat{e} \sin\varphi + (1 - \cos\varphi) \vec{e}^T \vec{e}$$

$$\text{tr} A = 3 \cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{tr} A - 1}{2}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}, \quad \varphi = ?$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$e^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



### Круговые вращения

Группа поворотов  $SO(3)$  отождествляется с направлением:



(прямой и обратный)

Многообразие - множество из параметров и (одно) направление

## Системы поворотов

Повороты

- активные - вращаются пр-во и элементы при фикс. базисе
- пассивные - вращается базис, а не-то фикс.

Активный:  $\vec{r}' = A \vec{r}$

Пассивный:  $\vec{e}_i = a_{ij}^i \vec{e}_j$  ! Обозначение:  $\vec{r}^{(1)}$  - вектор  $\vec{r}$  не трогать, изменили базис

$$\vec{r}^{(1)} = r^i \vec{e}_i = r^i a_{ij}^i \vec{e}_j = r^j \vec{e}_j$$

$$r^j = a_{ij}^i r^i \Leftrightarrow \vec{r} = A \vec{r}^{(1)}$$

$$\vec{r}^{(1)} = A^T \vec{r} \text{ - обратное к } A \text{ преобр.}$$

### 1 Система активных поворотов

$$\vec{r}' = A_1 \vec{r}, \vec{r}'' = A_2 \vec{r}'$$

$$\vec{r}'' = A_2 A_1 \vec{r} \Rightarrow A = A_n \cdot \dots \cdot A_1$$

### 2 Система пассивных поворотов

$$\vec{r}^{(1)} = A_1^T \vec{r}, \vec{r}^{(2)} = A_2^T \vec{r}^{(1)}$$

$$\vec{r}^{(2)} = A_2^T A_1^T \vec{r} = (A_1 A_2)^T \vec{r} \Rightarrow A = A_1 \cdot \dots \cdot A_n$$

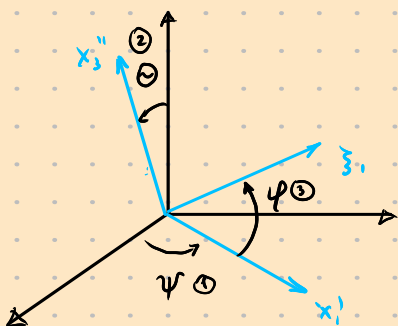
### Пример 1



Система поворотов активными (базис фиксирован)

$$A = A_2 A_1$$

### Пример 2 (углы Эйлера в последователь)



Повороты пассивный - так поворот базиса вокруг базиса

$$A = A_\psi A_\phi A_\psi$$

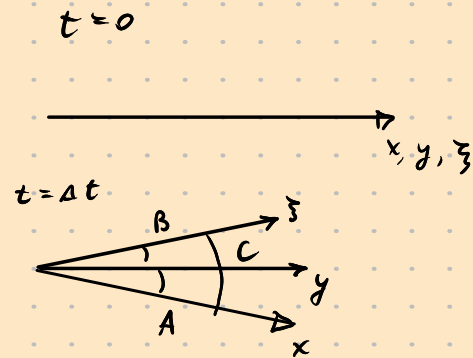
$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Сложение угловых скоростей

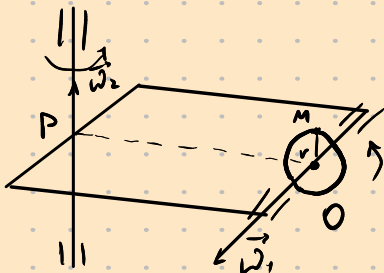


$$A \approx E + \hat{\omega}_x \Delta t$$

$$B \approx E + \hat{\omega}_y \Delta t$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{(\hat{\omega}_x + \hat{\omega}_y)}_{\hat{\omega}} \Delta t$$

## Пример



Платформа кружится + колесо кружится на платформе

$$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon} - ? \quad \omega_1, \omega_2 = \text{const}$$

$$\vec{V}_M, \vec{\omega}_M - ?$$

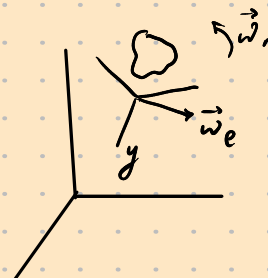
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

## Вращение Т.Т. во вращающемся движении

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \vec{y}_i$$

$$\vec{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_e}_{\vec{\varepsilon}_e} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_r \vec{y}_i}_{\vec{\varepsilon}_r} + \underbrace{\omega_r \vec{\omega}_e \times \vec{y}_i}_{\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$



В замкнутой:  $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM})$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \underbrace{\vec{\omega}_0 \times \vec{PO}}_{\vec{\omega}_0 \times \vec{PO}}$$

$$\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{PO}) = -\omega_2^2 \vec{PO}$$

