

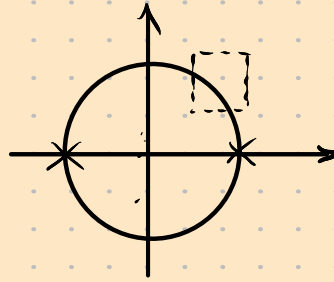
Глава XVIII

Неявные ф-ии и экстремумы ф-ии многих переменных

§1. Теорема о неявной ф-ии

$$F(x, y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$ - не задает явной ф-ии



Теорема

Пусть ф-ия 2-х переменных задана в $U(x, y)$. $F(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$

в к-ром ур-е $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

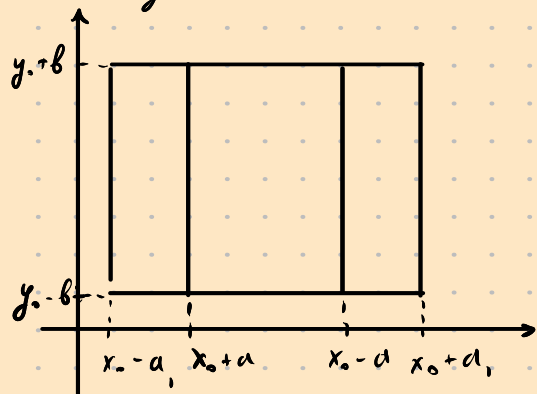
$f(x)$ непрерывна на $(x_0 - a, x_0 + a)$ и $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ на $(x_0 - a, x_0 + a)$

До-во

① Не наруш. общ., $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

По лемме о сопр. знаках, \exists окр-ть (x_0, y_0) (в виде прямоугол.

$\tilde{\Pi} = \{x_0 - a_1 \leq x \leq x_0 + a_1, y_0 - b_1 \leq y \leq y_0 + b_1\}$), причем таков, что $F'_y > 0$ в $\tilde{\Pi}$.



$$\varphi(y) = F(x_0, y)$$

$$\varphi(y_0) = 0, \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0, y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

$$\varphi(y) \uparrow \text{ строго}$$

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$

По лемме о сопр. знаках (для F) $\exists A: \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \begin{cases} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{cases}$

Зафиксируем $x^* \in [x_0 - a, x_0 + a]$

$$\psi(y) = F(x^*, y)$$

$$\psi(y_0 + b) > 0, \psi(y_0 - b) < 0$$

По т. В-К, $\exists y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]: \psi(y^*) = 0$

$$\psi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \psi(y) \uparrow \text{ строго} \Rightarrow$$

\Rightarrow Тогда: $\forall (y^*) = 0$ - эквивал.

$\forall x^* \in [x_0 - a, x_0 + a] \exists! y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$

$$F(x^*, y^*) = 0$$

$$y^* = f(x^*) \quad \text{Решает 2. замечание}$$

② Пусть $x \in [x_0 - a, x_0 + a], y = f(x)$.

$$F(x, y) = 0$$

Δx - произвольн. x , Δy - произвольн. y .

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

По т. Лагранжа для φ -ин неск. пер-ых,

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y) \cdot \Delta x + F'_y(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y) \Delta y,$$

$$\xi = \xi(\Delta x, \Delta y)$$

$$0 < \xi < 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y)}{F'_y(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y)}$$

$$\Pi = \{x_0 - a < x \leq x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$$

$$\bar{\Pi} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \text{ на } \bar{\Pi}.$$

$\bar{\Pi}$ - компакт, т.е. $|F'_x| \leq \alpha$ - оп.

$F'_y \geq \beta > 0$ - ограничен. inf.

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq \frac{\alpha}{\beta} = M$$

$$|\Delta y| \leq M |\Delta x|$$

$y = f(x)$ оп. на $[x_0 - a, x_0 + a]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0)$$

Тогда f - равномерно непрерывна на $(x_0 - a, x_0 + a)$.

По т. о непрерывности непрерыв. φ -ин

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \text{ - непрерыв.} \quad \text{УТД}$$

Теорема (одна)

- ① Пусть q -из $n+1$ переменных $F(x_1, \dots, x_n, y)$ непрерывна в нек-рой окр-ти $\tau(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, пусть $F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$, $F'(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$. Тогда \exists направление в \mathbb{R}^{n+1} :
- $$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a, i=1, \dots, n, y^0 - b < y < y^0 + b\},$$
- в к-ром $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \dots, x_n)$.
- ② f непрерывна в $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a, i=1, \dots, n\}$, пусть в Π'

$$f'_{x_i} = - \frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_y(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i=1, \dots, n.$$

До-во:

- ① Док. формул, только $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- ② Оказывается:

По τ . направление q -из $n+1$ переменных непрерывно.

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) - F(x_1, \dots, x_n, y) = \\ &= F'_{x_1}(x_1 + \xi \Delta x_1, \dots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y) \Delta x_1 + \dots + \\ &+ F'_{x_n}(x_1 + \xi \Delta x_1, \dots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y) \Delta x_n + \\ &+ F'_y(x_1 + \xi \Delta x_1, \dots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y) \Delta y \\ \Delta y &= - \frac{F'_{x_1} \Delta x_1 + \dots + F'_{x_n} \Delta x_n}{F'_y} \leq \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\beta} = M_\beta \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i, |F'_y| \geq \beta) \end{aligned}$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ равномерно непрерывна на Π'

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Пусть $\Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = - \frac{F'_{x_1}(x_1 + \xi \Delta x_1, x_2, \dots, x_n, y + \xi \Delta y)}{F'_y(x_1 + \xi \Delta x_1, x_2, \dots, y + \xi \Delta y)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \dots = - \frac{df}{dx_1}, \quad \text{аналогично для } x_2, \dots, x_n.$$

Утв.

§2. Теорема о неявных функциях

Отобр. $u = u(x)$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{— групп-ф-ция}$$

Матрица Якоби — $D_u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Если она невырождена, то существует обратное — Якобиан.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

Теорема Коши

Пусть $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ непрерывно-групп-ф-ция в окр-сти $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Тогда $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

в к-ром $\begin{cases} F_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{y} = f(\bar{x})$, непрерывно-групп-ф-ция

$y_i = F_i(\bar{x})$, $i = 1 \dots m$ — непрерывно-групп-ф-ция на

$$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$$

§3. Теорема об обратном отображении.

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, групп.

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x})$$

Будет показано: если $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, Тогда

$$D_{F \circ \Phi} = D_F \cdot D_\Phi.$$

Если еще $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$, то

$$D_{\Phi\varphi}|_{\bar{x}} = D_{\Phi}|_{\bar{y}} \cdot D\varphi|_{\bar{x}}$$

Пусть $h = m - p$, тогда

$$J_{\Phi\varphi}|_{\bar{x}} = J_{\Phi}|_{\bar{y}} \cdot J_{\varphi}|_{\bar{x}}$$

Обратное отображ.:

$$\Phi: G \rightarrow D \quad G, D \subset \mathbb{R}^n$$

$$\Phi^{-1}: D \rightarrow G$$

$$\Phi\Phi^{-1} = \Phi^{-1}\Phi - \text{тождественное отображ.}$$

$$J_{\Phi^{-1}} = J_{\Phi}^{-1} - \text{если оба гомеоморфизмы!}$$

Если отображ. инъективно и гомеоморфизм, то обратное не обязательно будет гомеоморфизмом!

$n=1$:

$y=x^3$ - инъект., гомеоморфизм.

обратное не гомеоморфизм. и т. д.

Инъективность отображ.

\nexists \nexists

$$J \neq 0$$

Опреж

Отобж. Φ локально обратимо в точке $\bar{x}_0 \in G$, если $\forall \bar{x}_0 \in G \rightarrow \exists \delta > 0$, Φ обратимо в $U_{\delta}(\bar{x}_0)$.

Теорема об обратном отображ.-ии

Пусть $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерыв. гомеоморфизм и $J_{\Phi} \neq 0$ в G ($G \subset \mathbb{R}^n$). Тогда Φ локально обратимо:

$$\forall x_0 \in G \rightarrow \exists \Phi^{-1} - \text{непр. гомеоморф. обр. отображ. в } y_0 = \Phi(x_0).$$

Д-во:

$$\text{Расс-им } F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(y, x) \in \mathbb{R}^n$$

Оно непрерыв. $\forall (y, x) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x \in G, y \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y, x_0)$$

По т. о имеем неединств. ср-ии $\exists \Pi = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

б κ-ραν

$$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$$

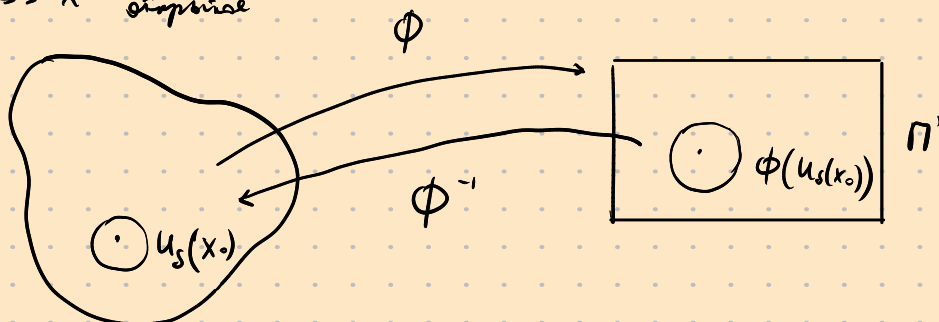
F_j непрерыв. на $\Pi' = \{y_i^0 - \alpha_i < y_i < y_i^0 + \alpha_i\} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ биективно отображает нек-е мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ на Π' .

$$X = \Phi^{-1}(\Pi')$$

Π' - окр. мн-во, поэтому прообраз окр. мн-ва при непрерыв. отображ. есть окр. мн-во \Rightarrow

$\Rightarrow X$ - открытое



$$X = \Phi^{-1}(\Pi')$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset X$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists U_\delta(x_0) \text{ в } \kappa\text{-ром отображ. яв-ся открытым.} \quad \text{ЧТД}$$

§4. Экстремумы ф-ции нескольких переменных

Опр-е

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ наз-ся точкой макс. локального экстремума ф-ции $y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \text{ опреж. в } U_\delta(x^0) \text{ и } \forall x \in U_\delta(x^0) \rightarrow f(x) < f(x^0).$$

Аналогично для мин. лока. экстр.

Необходимые усл. локального экстремума

Если $f(x)$ непрерыв. в x^0 и x^0 яв-ся т. лока. экстр., то $df(x^0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) = 0 \quad (\text{стационарные точки})$$

Д-во:

Расс-им ф-ию $\varphi(x_i) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Дано, что x^0 - лока. экстремум того же функ. Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx_i}(x_i^0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0 \quad \text{Аналогично докажем}$$

ЧТД

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j$$

Положит. опред.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) > 0$

Отриц. опред.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) < 0$

Неопред.: $\exists x_1, x_2: K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Положит. полуопред.: $\forall x \rightarrow K(x) \geq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Отриц. полуопред.: $\forall x \rightarrow K(x) \leq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Если $K(x) \equiv 0$, то она положит. и отриц. полуопред., данное представление имеет.

Пусть f — гладкая непр. функц. в $G \in \mathbb{R}^n$, т.е. имеет все непр. частные производ. второго порядка, при этом г.н. в разных порядке свн. ($f_{yx}'' = f_{xy}''$)

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}''(x^0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n f_{x_i x_j}''(x^0) dx_i dx_j - \text{кв. форма от перемен. } (dx_1, \dots, dx_n)$$

Достаточное усл-е локального экстремума

Пусть $f(x)$ — гладкая непр. функц. в $U_\delta(x^0)$ и x^0 — ст. точка. Тогда

$K(x) = d^2 f(x^0)$ — кв. форма. Тогда:

1. если $K(x)$ положит. определена, то x^0 — т. строгого лок. максимума
2. если $K(x)$ отриц. опред., то x^0 — т. строгого лок. минимума
3. если $K(x)$ неопред., то x^0 не явл-ся т. лок. экстремума
4. если $K(x)$ полуопред., то нужно год. исследование.

Лемма

Пусть $K(x)$ в \mathbb{R}^n положит. опред., тогда $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \geq C|x|^2$

Если отриц. опред., то $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \leq -C|x|^2$

До 1 пункта:

Заметим, что $K(x)$ можно определить в евклидовом \mathbb{R}^n , т.е. $K(x)$ — значение на век-торе с фикс. н.е. координатами.

$K(x_1, \dots, x_n)$ — непр. на \mathbb{R}^n .

$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ — сф. и замкнутая. — компакт

Тогда гр-но, непр. на компакте, достигает \inf на S .

$$K(x) > 0 \text{ на } S \Rightarrow \inf_S K = C > 0.$$

$$\forall x \in S \rightarrow K(x) \geq C.$$

$$\text{Положим } x \neq 0 \in \mathbb{R}^n, \text{ Положим } z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$$

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$$

$$K(x) \geq C |x|^2 \quad \text{УТД}$$

2-й теорема

1. $f(x)$ гладкая вып. функ. в $U_\delta(x^0) \Rightarrow$ минимум q -ой степени (Релан):

$$\forall x \in U_\delta(x^0) \rightarrow f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho^2), \quad \rho^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$$

$$df \equiv 0 \text{ — т. экстр.}$$

$$d^2 f \text{ — неоп. опреж.}$$

$$\begin{aligned} \text{т.е. } f(x) &\geq f(x^0) + \frac{1}{2} C |dx|^2 + o(|dx|^2) = \\ &= f(x^0) + \frac{C}{2} |dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = \\ &= f(x^0) + |dx|^2 \cdot \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) \right) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} dx \rightarrow (0, \dots, 0) \\ \lim_{dx \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(dx) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0 \text{ в } U_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in U_\delta(x^0).$$

т.е. x^0 — т. экстремума локального минимума.

2. Аналогично

3. $d^2 f(x^0)$ — неоп. кб. форма.

$$\exists z \neq 0 : K(z) > 0.$$

Положим для удобства направления $dx = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ (выберем $\parallel z$).

$$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\left(\lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} \right)}_{\beta > 0} |z|^2$$

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$$

$$= f(x^0) + \frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2$$

$$\frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0 \text{ при достаточно малом } \varepsilon(dx)$$

т.е. $f(x) > f(x^0)$ на $x \parallel z$

$$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$$

Аналогично если $dx = \lambda z'$, то при достаточно малом $\varepsilon(dx)$ $f(x) < f(x^0)$.

x^0 — не т. экстремума.

Примеры: $z = x^4 + y^4$, $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$, экстр. в $(0, 0)$, $z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{yy} = 12y^2$, $z''_{xy} = 0$, $d^2 z(0, 0) = 0$.

Надо проверить $\Delta z(0,0)$: $z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) > 0$ если $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$ - лок. мин.

§ 5. Условный (относительный) экстремум.

$$z = xy \text{ (сегно)}$$

$$z'_x = y, \quad z'_y = x \quad (\text{ср. т. } (0,0))$$

$$z''_{xx} = z''_{yy} = 0, \quad z''_{xy} = 1$$

d^2z - неопр. кв. ф. - неок. экстр.

При уст. $x+y=1$: $z=x(1-x)$, лок. макс. в $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Опр

Т. x^0 наз-ют т. строгого условного минимума ф-ции $u=f(x_1, \dots, x_n)$ при выполнении условия связи $\varphi_1(x)=0, \dots, \varphi_m(x)=0$, если $\exists \delta > 0$: $\forall x \in U_\delta(x^0)$ при вып. уст. связи $\rightarrow f(x) > f(x^0)$

Если из уст. связи можно явно выразить одну переменную через другие, то возникает задача на абсолютный экстремум ф-ции меньшего числа переменных.

А если нет, то применяется ф-ла Лагранжа.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, тогда ф-ла Лагранжа $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x)$

При вып. уст. -а связи $L=f$, $\forall \lambda_i$ - уст. экстр. f и L совпадают.

Необходимые уст.-ые усл. экстремума

Пусть $f(x)$, $\varphi_i(x)$ ($i=1, \dots, m$) непрерывны в $U_\delta(x^0)$. Пусть x^0 - т. услов. экстремума

$f(x)$ при $\varphi_i(x)=0$, причем $\text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} = m$ (произведен ф-ции φ_i линейно независимы),
 $i=1, \dots, m$
 $j=1, \dots, n$

Тогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 - т. абсолютного экстремума $L(x)$.

$$\text{Необ. условия макс-м} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

- все-гда $n+m$ ур-ний $\in n+m$ неув.,
 $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

