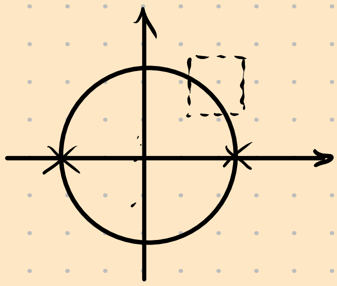
Глава XVIII

Неявные ф-ии и экстремумы ф-ий многих переменных

§1. Теорема о неявной ф-ии

$F(x, y) = 0$

$x^2 + y^2 = 1$ — не задаёт явной ф-ии



Теорема

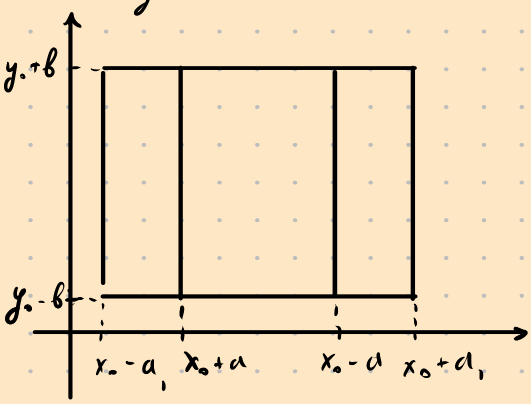
Пусть ф-ия 2-х переменных дифф. в $U(x, y)$. $F(x_0, y_0)$,
$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists\, \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b\}$
в к-ром ур-е $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

· $f(x)$ непр. дифф. на $(x_0 - a,\ x_0 + a)$ и $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ на $(x_0 - a,\ x_0 + a)$

Д-во

① Не наруш. общн., $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

По лемме о сохр. знака, $\exists$ окр-ть (x_0, y_0) (в виде прямоуг. $\widetilde{\Pi} = \{x_0 - a_1 \le x \le x_0 + a_1,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$), причём такая, что $F'_y > 0$ в $\widetilde{\Pi}$.



$\varphi(y) = F(x_0, y)$

$\varphi(y_0) = 0, \quad \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0,\ y \in [y_0 - b,\ y_0 + b]$

$\varphi(y) \uparrow$ строго

$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$

$F(x_0, y_0 - b) < 0$

По лемме о сохр. знака (для F) $\exists A$: $\forall x \in (x_0 - a,\ x_0 + a)$ $\begin{cases} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{cases}$

Зафикс. $x^* \in [x_0 - a,\ x_0 + a]$

$\psi(y) = F(x^*, y)$

$\psi(y_0 + b) > 0, \quad \psi(y_0 - b) < 0$

По т. Б-К, $\exists y^* \in [y_0 - b,\ y_0 + b]$: $\psi(y^*) = 0$

$\psi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \psi(y) \uparrow$ строго $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Тогда: $\psi(y^*) = 0$ - единств.

$\forall x^* \in [x_0 - a, x_0 + a]$ $\exists! \; y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$

$F(x^*, y^*) = 0$

$y^* = f(x^*)$ Первая ч. доказана

② Пусть $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, $y = f(x)$.

$F(x, y) = 0$

Δx - приращ. x, Δy - соотв. приращ. y.

$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$

По т. Лагранжа для ф-ии неск. пер-ных,

$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y) \cdot \Delta x + F'_y(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y) \Delta y,$

$\xi = \xi(\Delta x, \Delta y)$

$0 < \xi < 1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y)}{F'_y(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y)}$$

$\Pi = \{x_0 - a < x \le x_0 + a, \; y_0 - b < y < y_0 + b\}$

$\bar{\Pi} = \{x_0 - a \le x \le x_0 + a, \; y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$

$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ на $\bar{\Pi}$.

$\bar{\Pi}$ - компакт, т.е. $|F'_x| \le \alpha$ - огр.

$F'_y \ge \beta > 0$ - достиг. inf.

$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \le \frac{\alpha}{\beta} = M$

$|\Delta y| \le M |\Delta x|$

$y = f(x)$ огр. на $[x_0 - a, x_0 + a]$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0)$

Тогда f - равномерно непр. на $(x_0 - a, x_0 + a)$.

По т. о суперпозиции непр. ф-ий

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ - непр. ЧТД

Теорема (общая)

① Пусть ф-ия $n+1$ переменной $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ непр. дифф. в нек-рой окр-ти т. $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$, причём $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$, $F'(x_1^0, \ldots, x_n^0, y) \neq 0$. Тогда $\exists$ параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a,\ i = 1, \ldots, n,\ \ y^0 - b < y < y^0 + b\}$, в к-ром $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

② f непр. дифф. в $\Pi' = \{(x_1, \ldots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a,\ i = 1, \ldots, n\}$, причём в Π'

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, f)}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, f)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Д-во:

① Док. также, только $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

② Отличается:

По т. Лагранжа для ф-ии многих пер.,

$$0 = F(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) - F(x_1, \ldots, x_n, y) =$$

$$= F'_{x_1}(x_1 + \xi \Delta x_1, \ldots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y)\Delta x_1 + \ldots + F'_{x_n}(x_1 + \xi \Delta x_1, \ldots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y)\Delta x_n + F'_y(x_1 + \xi \Delta x_1, \ldots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y)\Delta y$$

$$\Delta y = -\frac{F'_{x_1}\Delta x_1 + \ldots + F'_{x_n}\Delta x_n}{F'_y} \leq \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}{\beta} = M\rho \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i,\ |F'_y| \geq \beta)$$

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$ равном. непр. на $\bar{\Pi}'$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \Delta y = 0$$

Пусть $\Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \xi \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n, y + \xi \Delta y)}{F'_y(x_1 + \xi \Delta x_1, x_2, \ldots, y + \xi \Delta y)}, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \ldots = -\frac{\partial f}{\partial x_1},$$ аналог. для $x_2, \ldots, x_n$.

ЧТД.

§ 2. Теорема о сис-ме неявных ф-ий

Отобр. $u = u(x)$, $u \in R^m$, $x \in R^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{— дифф. ф-ии}$$

Матрица Якоби — $D_u = \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$, $\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m \end{matrix}$

Если она квадратная, то сущ-ет определитель — Якобиан.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

<u>Теорема</u> (о системе)

Пусть $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ непр. дифф. ф-ии в окр-ти $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in R^{n+m}$

$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \ne 0.$$

Тогда $\exists \Pi = \{ x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \; y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b \} \subset R^{n+m}$

в к-ром $\begin{cases} F_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \iff \bar{y} = f(\bar{x})$, причём ф-ии

$y_i = f_i(\bar{x})$, $i = 1 \dots m$ — непр. дифф. на

$\Pi' = \{ x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i \}$

§ 3. Теорема об обратном отображении.

$\varphi : R^n \to R^m$, дифф.

$\bar{u} = \varphi(\bar{x})$

Было доказано: если $\varphi : R^n \to R^m$, $F : R^m \to R^p$, тогда

$D_{F \circ \varphi} = D_F \cdot D_\varphi$.

Если есть $\bar{x} \in R^n$, $\bar{y} \in R^m$, $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$, то

$D_{F\varphi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\varphi|_{\bar{x}}$

Пусть $n = m = p$, тогда

$J_{F\varphi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\varphi|_{\bar{x}}$

Обратное отобр.:

$\Phi : G \to D \qquad G\,D \subset \mathbb{R}^n$

$\Phi^{-1} : D \to D$

$\Phi\Phi^{-1} = \Phi^{-1}\Phi$ – тождественное отобр.

$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1}$ – если оба дифф.!

Если отобр. биективно и дифф., то обратное не обязано быть дифф.!

$n=1$:

$y = x^3$ – биект., дифф.

обратное недифф. в т. 0.

Биективность отобр. $\not\Rightarrow \not\Leftarrow$ $J \neq 0$

Опред

Отобр. Φ – локально обратимо в обл-ти G, если $\forall\, \bar{x}_0 \in G \to \exists\, \delta > 0$: Φ обратимо в $U_\delta(\bar{x}_0)$.

Теорема об обратном отобр-ии

Пусть $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ непр. дифф. и $J_\Phi \neq 0$ в G ($G \subset \mathbb{R}^n$). Тогда Φ локально обратимо:

$\forall\, x_0 \in G \to \exists\, \Phi^{-1}$ – непр. дифф. обр. отобр. в $y_0 = \Phi(x_0)$.

Д-во:

Рас-им $F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j$, $j = 1 \dots n$

$(y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$

Оно непр. дифф. $\forall (y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$ такой, что $x \in G$, $y \in \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1 \dots n$

$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y_0, x_0)$

По т. о сис-ме неявных ф-ий $\exists\, \Pi = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i,\ x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

в к-рой

$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \iff F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \iff x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$

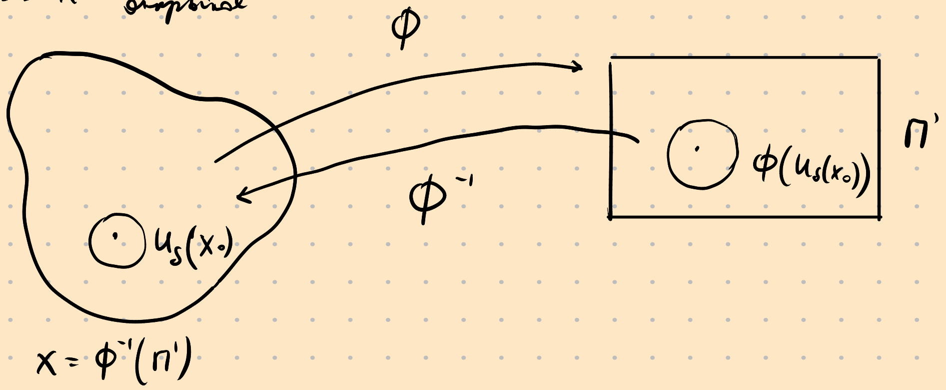
f_i непр. дифф. на $\Pi' = \{ y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i \} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ биективно отображает нек-е мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ на Π'.

$X = \Phi^{-1}(\Pi')$

Π' - откр. мн-во, полный прообраз откр. мн-ва при непр. отобр. есть откр. мн-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow X$ - открытое



$\forall x_0 \in X \to \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \in X$

$\forall x_0 \in X \to \exists U_\delta(x_0)$ в к-рой отобр. яв-ся обратимым. ЧТД

§ 4. Экстремумы ф-ий нескольких переменных

Опр-е

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ наз-ся точкой макс. локального экстремума ф-ии $y = f(x_1, \dots, x_n) \iff$

$\iff \exists \delta > 0 : f(x)$ опред. в $U_\delta(x^0)$ и $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0)$.

Аналогично для мин. лок. экстр.

Необходимое усл. локального экстремума

Если $f(x)$ дифф. в x^0 и x^0 яв-ся т. лок. экстр., то $df(x^0) = 0 \iff$

$\iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$ (стационарные точки)

Д-во:

Рас-им ф-ию $\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Ясно, что x_1^0 - лок. экстремум того же типа. Тогда

$\frac{d\varphi}{dx_1}(x_1^0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 0$ Аналогично дальше

ЧТД

$$K(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Положит. опред.: $\forall x\neq 0 \to K(x)>0$

Отриц. опред.: $\forall x\neq 0 \to K(x)<0$

Неопред.: $\exists x_1, x_2: K(x_1)>0,\ K(x_2)<0$

Положит. полуопред.: $\forall x - K(x)\geq 0,\ \exists x\neq 0: K(x)=0$

Отриц. полуопред.: $\forall x - K(x)\leq 0,\ \exists x\neq 0: K(x)=0$

Если $K(x)\equiv 0$, то она положит. и отриц. полуопред., больше пересечений типов нет.

Пусть f дважды непр. дифф. в $G\in\mathbb{R}^n$, т.е. имеет все непр. частные произв. второго порядка, при этом ч.п. в разном порядке совп. ($f''_{yx}=f''_{xy}$)

$d^2 f(x^0)=\sum_{i=1}^{n} f''_{x_ix_i}(x^0)\,dx_i^2+2\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} f''_{x_ix_j}(x^0)\,dx_i dx_j$ – кв. форма от вектора $(dx_1,\dots,dx_n)$

Достаточное усл-е локального экстремума

Пусть $f(x)$ дважды непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$ и x^0 – стац. точка. Тогда $K(x)=d^2 f(x^0)$ – кв. форма. Тогда:

1. если $K(x)$ положит. определена, то x^0 – т. строгого лок. максимума
2. если $K(x)$ отриц. опред., то x^0 – т. строгого лок. минимума
3. если $K(x)$ неопред., то x^0 не яв-ся т. лок. экстремума.
4. если $K(x)$ полуопред., то нужно доп. исследование.

Лемма

Пусть $K(x)$ в $\mathbb{R}^n$ положит. опред., тогда $\exists C>0: \forall x\in\mathbb{R}^n \to K(x)\geq C|x|^2$

Если отриц. опред., то $\exists C>0: \forall x\in\mathbb{R}^n \to K(x)\leq -C|x|^2$

Д-во 1 пункта:

Заметим, что $K(x)$ можно определить в точечном $\mathbb{R}^n$, т.е. $K(x)$ – значение на векторе с такими же координатами.

$K(x_1,\dots,x_n)$ – непр. на $\mathbb{R}^n$.

$S=\{x_1^2+\dots+x_n^2=1\}$ – огр. и замкнутое. – компакт

Тогда ф-ия, непр. на компакте, достигает inf на S.

$K(x) > 0$ на $S \Rightarrow \inf\limits_S K = C > 0$.

$\forall x \in S \to K(x) \geq C$.

Пусть $x \neq 0 \in R^n$. Рас-им $z = \frac{x}{|x|}$ $\equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$

$K(x) \geq C|x|^2$ ЧТД

Д-во теоремы

1. $f(x)$ дважды непр. диффер в $U_\delta(x^0) \Rightarrow$ применим ф-лу Тейлора (Пеано):

$\forall x \in U_\delta(x^0) \to f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho^2)$, $\rho^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$

$df \equiv 0$ – т. стац.

$d^2 f$ – полож. опред.

Т.е. $f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2} C|dx|^2 + o(|dx|^2) =$ | $dx \to (0, \dots, 0)$, $\lim\limits_{dx \to (0,\dots,0)} \varepsilon(dx) = 0$

$= f(x^0) + \frac{C}{2}|dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$

$= f(x^0) + |dx|^2 \cdot \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx)\right)$

$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0$ в $U_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0)$ $\forall x \in U_\delta(x^0)$.

Т.е. x^0 – т. строгого лок. минимума.

2. Аналогично

3. $d^2 f(x^0)$ – неопр. кв. форма.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$.

Рас-им вектор приращений $dx = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ (приращ. $\parallel z$).

$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2}}_{\beta > 0} |z|^2$

$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2}\beta |z|^2 + \varepsilon(dx)\lambda^2 z^2 =$

$= f(x^0) + \frac{1}{2}\beta + \varepsilon(dx)\lambda^2 z^2$

$\frac{1}{2}\beta + \varepsilon(dx)\lambda^2 z^2 > 0$ при дост. малых $\varepsilon(dx)$

Т.е. $f(x) > f(x^0)$ на $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Аналогично если $dx = \lambda z'$, то при достаточно малых $\varepsilon(dx)$ $f(x) < f(x^0)$.

x^0 – не т. лок. экстремума.

Пример: $z = x^4 + y^4$, $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$, стац. т. $(0,0)$, $z''_x = 12x^2$, $z''_y = 12y^2$, $z''_{xy} = 0$, $d^2 z(0,0) = 0$.

Надо смотреть $\Delta z(0,0)$: $z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) > 0$ если $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$ – лок. мин.

§ 5. Условный (относительный) экстремум.

$z = xy$ (седло)

$z'_x = y$, $z'_y = x$ (ст. т. $(0,0)$)

$z''_{xx} = z''_{yy} = 0$, $z''_{xy} = 1$

$d^2 z$ – неопр. кв. ф. – нелок. экстр.

При усл. $x + y = 1$: $z = x(1-x)$, лок. макс. в $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Опр

Т. x^0 наз-ют т. строгого условного минимума ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_n)$ при выполнении условия связи $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_m(x) = 0$, если $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \dot{U}_\delta(x^0)$ при вып. усл. связи $\to f(x) > f(x^0)$

Если из усл. связи можно явно выразить одни переменные через другие, то возникнет задача на обычный экстремум ф-ии меньшего числа переменных.

А если нет, то применяется ф-ия Лагранжа.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^m$, тогда ф-ия Лагранжа $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x)$

При вып. усл-я связи $\mathcal{L} = f$, $\forall \lambda_i$. – усл. экстр. f и $\mathcal{L}$ совпадают.

Необходимые усл-ия относ. экстремума

Пусть $f(x)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 1 \dots n)$ непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$. Пусть x^0 – т. относ. экстремума $f(x)$ при $\varphi_i(x) = 0$, причём $\operatorname{rg}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} = m$ (градиенты ф-ий φ_i линейно независимы).

Тогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 – т. обычного экстремума $\mathcal{L}(x)$.

Необх. решить сис-му $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$ – сис-ма $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв. $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$.