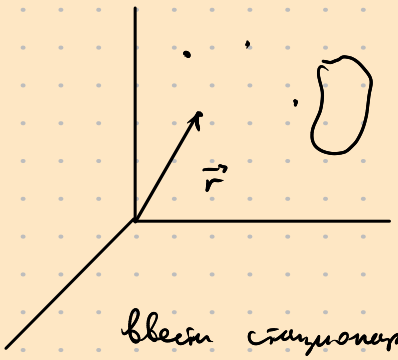
Литература: та же (Муравьёв, Гантмахер, Амелькин, Маркеев - новая версия)

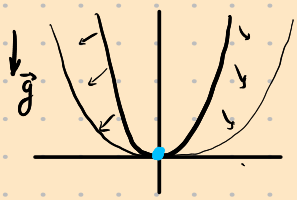
Равновесие механических систем



Система нах-ся в **равновесии** в выбранной сис-ме коор-т $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \vec{r} \to \vec{r} = \vec{r}_0 = \overline{const}$

Далее будем рассм-ивать стационарные системы (ур-я связи не зависят от времени) $\Rightarrow \exists$ возможность ввести стационарную параметризацию, и $\vec{r} = \vec{r}(q)$ после введ-я обобщ. коор-т.



У не стац. систем тоже могут быть полож. равновес. - см. картинку (кривая деформируется со временем)

$$(L_{,\dot{k}})^{\cdot} - L_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$\Updownarrow$ - т. о разрешимости отн. старших производ.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = f(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = x(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Положения равновесия нах-ся во вз. однознач. соотв. с точками вида $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

□ ($\Leftarrow$) Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = const$

($\Rightarrow$) $\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}\dot{q}^k \equiv \vec{0}$ (1), однако обобщ. коор-ты q введены так, что

$\vec{r}_{,k}\delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q: \delta q^1{}^2 + \dots + \delta q^n{}^2 \neq 0$.

Таким образом (1) $\Rightarrow \dot{q} = 0$ ▨

Критерий полож. равновесия стац. системы

Стац. сис-ма нах-ся в полож. равновесия $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$.

□ $(T_{,\dot{k}})^{\cdot} - T_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$

$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\, \dot{q}^i \dot{q}^j$

$T_{,\dot{k}} = a_{kj}\, \dot{q}^j$ — т.к. a_{ij} — симметричная матрица!

$(T_{,\dot{k}})^{\cdot} = a_{kj} \ddot{q}^j + a_{kj,i} \dot{q}^i \dot{q}^j$

$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k}\, \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow \quad a_{kj} \ddot{q}^j + \left(a_{kj,i} - \frac{1}{2} a_{ij,k}\right) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (2)$

Для полож. равновес. $q = q_0$, $\dot{q} = 0 \Rightarrow$

$0 = Q_k(q, \dot{q}, t)$

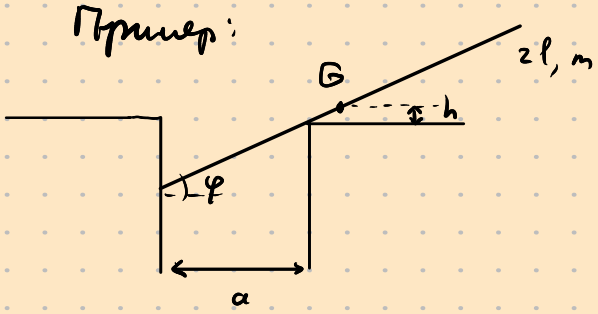
С другой стороны, если $Q(q_0, 0, t) = 0$, то (2) имеет решение $q = q_0$, $\dot{q} = 0$ — по т. Коши оно существует и единственно. ▨

Однако если сила имеет вид, не удовл. т. Коши (Q(...) не удовл. усл. Липшица), то критерий в обратную сторону не срабатывает — может быть > 1 реш-я (см. Маркеева).

Следствие

Если $Q = -\nabla \Pi(q,t)$, то полож. равновес. соотв. стац. т. потенц. энергии: $\nabla \Pi(q,t) = 0$.

Пример:



т. G — центр масс (теперь всегда так будет).

$\Pi = mgh = mg(l \sin\varphi - a\,\mathrm{tg}\,\varphi)$

$\Pi_{,\varphi}: \quad l\cos\varphi_* - \frac{a}{\cos^2\varphi_*} = 0$

$\cos\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ — полож. равновес.

Теорема — принцип виртуальных перемещений

Полож. $\vec{r} = \vec{r}_0$ мех. сис-мы яв-ся полож. равновес. $\Leftrightarrow \forall$ вирт. перемещ. $\delta\vec{r}$ из этого полож. $\delta A = \int \vec{f}\, \delta\vec{r}\, dm = 0$

□ (для стац. случая)

$\delta\vec{r} = \vec{r}_{,k}\,\delta q^k \Rightarrow \quad \delta A = \int \vec{r}_{,k} \cdot \vec{F}\, dm \cdot \delta q^k = Q_k \delta q^k = 0 \quad \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0$ –

– критерий полож. равновес. ▨

Замечание 1 (фундаментальное)

Вообще, эта теорема более общая – она работает и для нестац. сис-м, в одну сторону док-во элементарно, но в другую на порядок сложнее.

□ $\Rightarrow \quad \int (\vec{w} - \vec{F})\,\delta\vec{r}\, dm = 0$ – осн. ур-е динамики

$\vec{w} = 0$ в полож. равн. $\Rightarrow \int \vec{F}\,\delta\vec{r}\, dm = 0$ ▨

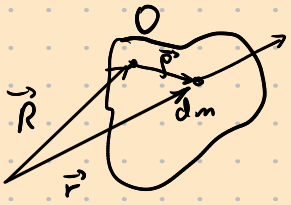
В обратную сторону – см. Маркеев.

Замечание 2 (принципиальное)

Важно обратить внимание, что усл. теор-мы должно выполняться $\forall\,\delta\vec{r}$ из полож. равновес.

Пример

Условие равновесия твёрдого тела



$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

$\delta\vec{r} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\rho} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\rho}$, $\delta\vec{\varphi}$ – в-р малого поворота

$\delta A = \int \vec{F}\, dm \cdot \delta\vec{R} + \int \vec{F} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{\rho}) \cdot dm =$

$= \vec{F} \cdot \delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi} \cdot \underbrace{\int \vec{\rho} \times \vec{F}\, dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{R} + \vec{M}_0 \cdot \delta\vec{\varphi} = 0 \quad \forall\,\delta\vec{R},\ \delta\vec{\varphi} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$ и $\vec{M}_0 = \vec{0}$

$\vec{F}$ – главный вектор сил, $\vec{M}_0$ – главный момент.

(полезно вспомнить динам. винт)

Основы теории устойчивости

Рассматривается система общего вида в нормальной форме Коши:

$\dot{x} = F(x, t)$ (3) Здесь и далее: $x(t) = x(x_0, t)$

Реш-е $x = q = \text{const}$ наз-ся положением равновесия сист-мы (3).

Полож. равновес. $x = a$ всегда можно смещать в начало коор-т, в т. $x = 0$:

$x \to x - a$.

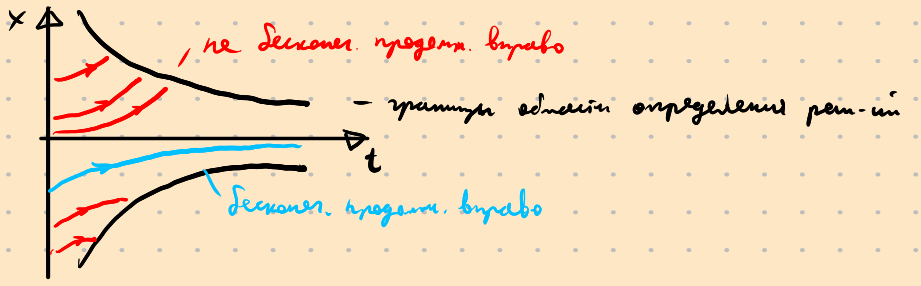
Далее будем считать, что $a = 0$ без ограничения общности.

x можно трактовать как отклонения от полож. равновесия.

Определение

Реш-е $x = x(x_0, t)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз-ся бесконечно продолжаемым вправо, если оно $\exists\ \forall\ t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



Определение (уст. по Ляпунову)

Полож. равновес. $x = 0$ сис-мы (3) наз-ся уст. по Ляпунову, если

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta:\ \forall x_0 = x(t_0),\ \|x_0\| < \delta\ \ \forall t \in [t_0; +\infty) \to \|x(t)\| < \varepsilon$

$\|x(t)\| = \sqrt{x^i x^i}$

Замечание

1. Опр. уст. $\Leftrightarrow$ равномерная непрерывность по нач. усл.
2. Из опр. уст. $\Rightarrow$ реш-е $x(t)$ бесконечно продолж. вправо

Определение (асимптот. уст.)

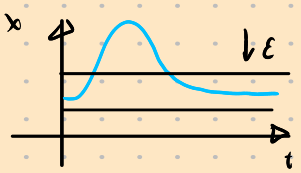
Полож. равновес. $x=0$ сист. (3) – асимптотически устойчиво, если

* 1. $x=0$ – уст. по Ляпунову.

2. $\exists \Delta: \forall x_0, \|x_0\| < \Delta \to x(t)\big|_{t\to\infty} \to 0$

$U_\Delta(0)$ – область притяжения.

Если забыть про (1):

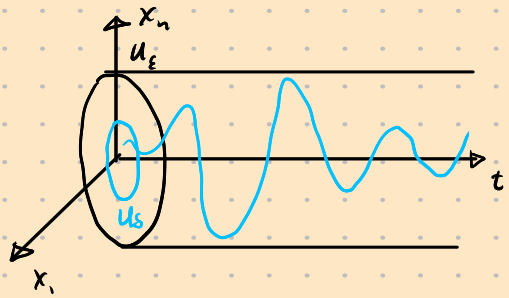


Определение (неуст.)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) неуст., если $\exists \varepsilon: \forall \delta \to \exists x_0:$ $\|x_0\| < \delta$ $\exists t^*: \|x(t^*)\| > \varepsilon$, либо рем. $x(x_0, t)$ не явл. со проод. вправо.

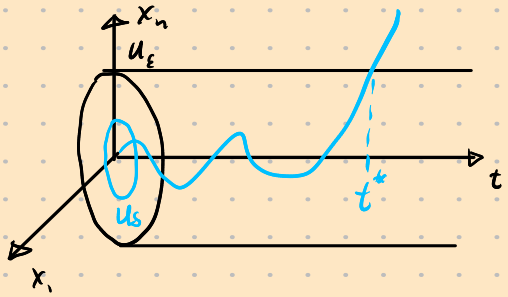
Качественные представления

① Устойчивое

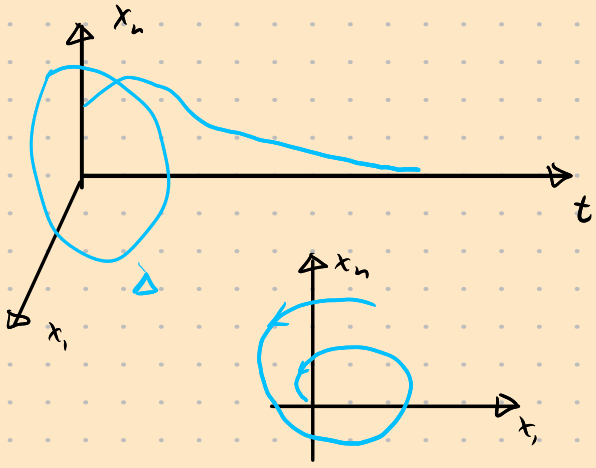


$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: траектория, начинающаяся в δ-окрестности, остается внутри ε-окр-ти

② Неуст.



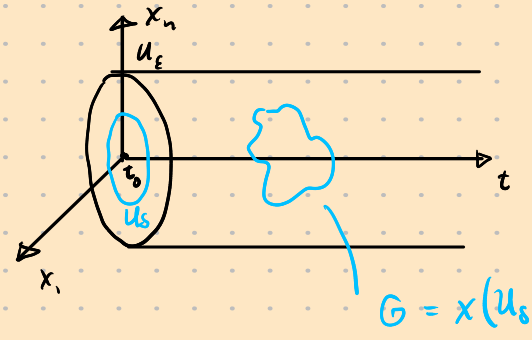
③ Асимптот.



Корректность понятия устойчивости

Если н.р. (положение равновесия) $x=0$ устойчиво для вр. t_0, т.о оно уст. $\forall t_1 > t_0$.

□ $x=0$ – уст. $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \to \exists \delta>0;\ \forall x_0 = x(t_0),\ \|x_0\|<\delta \to \|x(t)\|<\varepsilon$



Фазовый поток: G – мн-во реш-ий задачи Коши при заданном мн-ве нач. усл.

$x(x_0, t)$ – выходу однозн. и непр. (т. Коши) $\Rightarrow \rho(\partial G, 0) > 0$ (расс-ие от $x=0$ до ∂G)

Выберем $\delta_1 = \rho$, $t_0 \mapsto t_1$, $\delta \mapsto \delta_1$ (замена) ▨

Устойчивость траектории

$\dot x = X(x,t)$ $\quad\psi$ – частное решение (траектория)

$\dot\psi = X(\psi, t)$

Рассмотрим решение $x = \psi + y$ (y – отклонение от траектории)

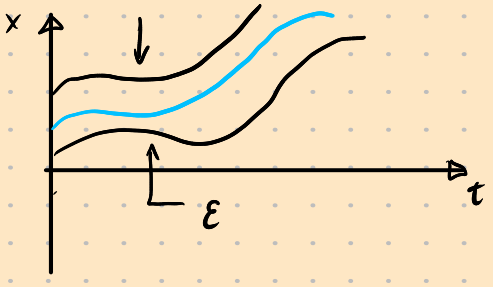
$\dot x = \dot\psi + \dot y = X(\psi+y, t) \Rightarrow \dot y = X(\psi+y, t) - X(\psi, t)$ (1)

($\dot\psi = X(\psi,t)$)

$y=0$ – н.р. сис-мы (1)

Таким образом, если $y=0$ – устойчивое н.р., то тр-ия ψ наз-ся **устойчивой**.

Если $\forall$ тр-ии сис-ма устойчива, то сис-ма наз-ся устойчивой.



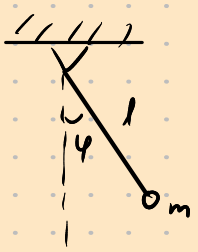
Все траектории, отлич. на δ от ψ в нач. усл., отличаются $<\varepsilon$ от ψ.

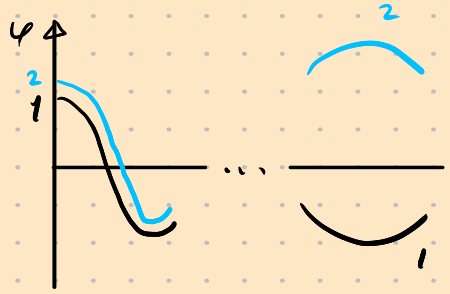
Если $y=0$ – неуст. $\Rightarrow$ тр-я неуст., $y=0$ – асимпт. уст. $\Rightarrow$ тр-ия асимптот. уст.

Замечание Устойчивость траектории обозначает близость возмущенных траекторий в те же моменты времени.

Пример

Рас-им колеб. с конечной амплитудой





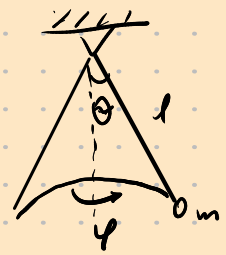
– расходятся (т.к. амплитуды разные ⇒ период разный).

Траектории, кроме близких к $\varphi = 0$, неустойчивы.

О выборе переменных в задачах исс-я устойчивости

Переменные не должны иметь особенностей в окр-ти н.р.

Пример



$\forall \theta_0 \ll 1$ ∃ рем. вида $\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 \to \infty$

П.р. на самом деле уст-во, $\dot{\varphi} \to \infty$ – следствие вырождения с.к.

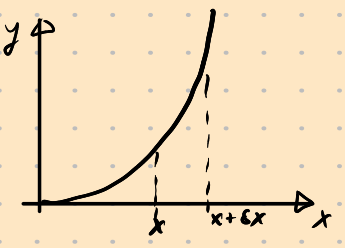
Пример

$\dot{x} = \frac{1}{2} \qquad x = x_0 + \frac{t}{2}$

$X + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow$ ∀ время. уст.

Замена $y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + t/2)^2$

$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + t/2)^2 = (x_0 + t/2)^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \to \infty$



Определение (АЗП)

Замена $x = x(y,t)$, $x(0,t) = 0$ наз-ся **допустимой**, если

1. $\det(x_{,y}) \neq 0$ в нек-рой окр-ти полож. равновес. (чтобы функция разрешима)
2. Замена $x = x(y,t)$ и обратная ей $y = y(x,t)$ непрерывны в 0 равномерно по t. (годится из 2 примера)

Допустимые замены не изменяют хар-ра устойчивости.

Устойчивость линейных систем

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $A(t)$ вообще говоря переменная

$\exists\, \psi(t)$ – траектория, $x = \psi + y$ – возмущённая тр-я,

$\dot{\psi} + \dot{y} = Ay + A\psi + f \Rightarrow$

$\Rightarrow$ иссл-е уст. любой траектории сводится к иссл-ю уст. т.р. $y = 0$ однородной сис-мы $\dot{y} = Ay$. (2)

Теорема

Т.р. $y = 0$ – уст. $\Leftrightarrow$ $\forall$ реш-я сис-мы (2) ограничено.

$\square$ $\Rightarrow$ $\exists\, \psi$ – неогр. реш., рас-им $y = \frac{\delta}{2} \frac{\psi(t)}{\|\psi(t_0)\|}$

$\|y(t_0)\| < \delta$, $y(t) \not\to 0$ при $t \to \infty$ $\Rightarrow$ $y = 0$ – неуст.

$\Leftarrow$ Если $\forall$ реш. огр. $\Rightarrow$ огр. $\Phi(t, t_0)$ – фунд. матрица сист-мы,

$\forall$ реш. (2) имеет вид $y = \Phi(t, t_0) y(t_0)$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$ ■

Замечание: норма матрицы: $\|\Phi\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$ – "максимальное растяжение"

С евклидовой нормой норма матрицы – max сингулярное число матрицы (собств. число матрицы $\Phi\Phi^T$)

Устойчивость систем с постоянной матрицей

$$\dot{y} = Ay, \qquad A = const \qquad (3)$$

Особый интерес представляет асимпт. устойчивость н.р. $y = 0$.

Многие реальных с-м, с-мы управления, отклонения от уст. полож.

описываются именно так.

Решения (3): $y = he^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda t - A) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни

Теорема

Н. р. $y = 0$ с-мы (3) асимпт. уст. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \ \forall k = 1, \dots, n$

□ $y(t) \sim P_{\sigma_k - 1}(t)\, e^{\lambda_k t}$ Если $\exists \lambda_k$: $\operatorname{Re}\lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \to \infty \Rightarrow$ неуст.

Если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \Rightarrow \forall$ реш. огр. $\Rightarrow$ н. р. $y = 0$ уст. по пред. теор.

$y(t) \not\to 0$ при $t \to \infty \Rightarrow$ н. р. $y = 0$ – асимпт. уст. ■

(σ_k – кратность корня λ_k)

Определение

Многочлен $P(\lambda)$ наз-ся уст. если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \ \forall k = 1, \dots, n$

(уст. матрица соотв. асимпт. уст. н. р. в с-ме с const коэф.)

Теорема (необх. усл-е уст. полинома)

Если $P(\lambda)$ уст., то знаки его коэф-ов должны быть одинаковы.

□ $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j > 0$ $\quad \bar{\lambda}_j$ – тоже корень

$\lambda_k = -\gamma_k$, $\gamma_k > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod \left[(\lambda + \alpha_j - i\beta_j)(\lambda + \alpha_j + i\beta_j)\right]^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k} =$$

$$= a_n \prod (\lambda^2 + 2\alpha_j\lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k}$$

Раскрытие скобок дает коэф-ты одного знака. ■

Замечание

Иногда это ус. формулируют в виде: $a_i > 0 \ \forall i = \overline{0,n}$. Это подразумевает предв. приведение многочлена к виду $a_n > 0 \iff a_0 > 0$.

Критерии уст. рас-ти без док-в (см. Журавлёва или Демидовича)

Критерий Рауса - Гурвица

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$

Строится матрица Гурвица

$$\Gamma_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

По диагонали коэф-ты $a_1, a_2, \dots$ Слева коэф-ты по возрас., справа по убыванию.

P_λ - уст. $\iff \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

! Есть разные формы записи Γ !

Замечание об ус. $a_0 > 0$

Пример

$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 \qquad \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1} \Rightarrow$ полином уст. $\iff \operatorname{sign} a_0 = \operatorname{sign} a_1$

$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0$ - ?? другое ус. ??

"Парадокс" возник от того, что $P(\lambda)$ не приведён к виду $a_0 > 0$.

Приведение к виду $a_0 > 0$:

$P(\lambda) \to \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1$, 1 заведомо > 0

(если $a_0 = 0$ то $P(\lambda)$ сразу неуст.: есть корень $\lambda = 0$)

$\Gamma = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)$ - теперь всё верно.