

Риназов Иван Васильевич

Введение



• Все ящики не описать

• Рассматриваем только линейные и стационарные

Линейность:
$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Стационарность: $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t + \Delta t) \rightarrow y(t + \Delta t)$

Чёрный ящик описывается:

- схемой
- набором параметров H

Любая сх-ма, составленная из RLC, явл-я линейной и стационарной.

Топологические эл-ты

Ветвь - участок эл. цепи, вдоль к-рого протекает один и тот же I . Может состоять из ≥ 1 идеализированных двухполюсника.

Узел - место соединения ветвей

Кустарный - > 2 ветвей

Четверный - 2 ветви

Контур - любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям цепи.

Характериз. направлением обхода, каждая ветвь / узел пропущен 1 раз

Опас. нам можно записать:

Компонентные гр-ы - свойства цепи, опред. её компонентами

Топологические гр-ы - свойства цепи, опред. только её топологией

Правила Кирхгофа

- Закон сохр-я заряда
- Провода не накапливают заряд (узлы)

I закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных значений токов всех ветвей, входящих в каждый из узлов в любой момент времени, равна 0.

$$\sum_i i_k = 0.$$

- Потенциальность э. поля
- Консервативность э. поля
- Поток вектора \vec{B} во времени в цепи не изменяется (несилив связь эл-ов)

II закон Кирхгофа

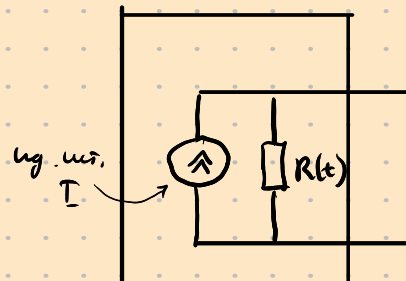
Алг. сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур обходящийся один раз, равна 0.

Теорема об эквивалентном генераторе

Ток произвольной ветви линейной э. цепи не изменится, если абстрактный двухполюсник, к к-му подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линейтизированным источником энергии, к-рый может быть представлен последовательной (Тевенин) или параллельной (Нортон) схемой замещения. При этом ЭДС идеального источника напряжения равна напряжению холостого хода абстрактного двухполюсника, ток идеального источника тока равен току КЗ абстрактного двухполюсника, а внутреннее сопротивление и проводимость экв. источника равны соответственно комплексным входным сопротивл. и проводимости абстрактного двухполюсника.



Парал. - Нортон



Послед. - Тевенин



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}; \quad U_{xx} = -I R_2 = -\frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}$$

напряжения
нагрузки

Заменяем идеализированный источник ЭДС на перемычку или идеализированный источник тока на разрыв цепи, считаем сопротивление цепи, найденный выходное сопротивление генератора.

Это работает только с независимыми источниками. Для зависимых придется составить систему уравнений (разберись с этим)

Частотный анализ характеристик цепи

$$\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{линейный} \\ \text{стационарный процесс} \end{array}} \rightarrow k(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

ЛИБ



$k(\omega)$ - АЧХ



$\varphi(\omega)$ - ФЧХ

Самое полное описание цепи!

Трёхмерный подход - переходим к комплексам



$$z = |z| \cos \arg z + i |z| \sin \arg z \quad (\varphi = \arg z)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos \omega t + i \sin \omega t \rightarrow \boxed{\text{ЛИБ}} \rightarrow k(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (\dots) i \sin(\dots)$$

①  $I = \frac{U}{R} \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$

②  $I = C \frac{dU}{dt} \quad \tilde{I} = C \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\frac{1}{j\omega C}}$
интеграл

③  $U = L \frac{dI}{dt} \quad \tilde{U} = j\omega L \tilde{I}, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{j\omega L}$

Импеданс - комплексное сопротивление (Z)

$j = i$ в радиотехнике

Комплексная проводимость - Y

Линейные цепи 1 порядка

① Непрерывная RC-цепь



$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}_{\text{вх}}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\tilde{U}_{\text{вых}} = \tilde{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde{U}_{\text{вх}}}{j\omega RC + 1}$$

$$\tilde{U}_{\text{вых}} = \frac{\tilde{U}_{\text{вх}}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Что будет, если на входе $\cos \omega t$?

$$U_{\text{вых}} = \text{Re}(\tilde{U}_{\text{вых}}) = (\cos \omega t + \sin \omega \cdot \omega RC) \cdot (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1}$$

Анализировать можно: $\cos \omega t + i \sin \omega t$

$$K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{\text{вых}}}{\tilde{U}_{\text{вх}}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

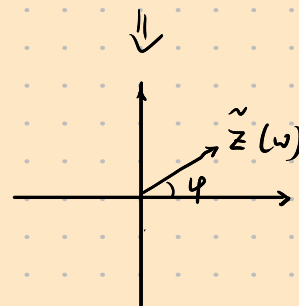
$$\frac{\tilde{U}_{\text{вых}}}{\tilde{U}_{\text{вх}}} = \frac{A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0} \cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0} e^{j\varphi}$$

Поиграем с Z - сдвинем фазу - аргумент, модуль - соотношение амплитуд

Чтобы найти φ , нужно из $K(\omega)$ выделить вещ. часть, мним. и вно комплексную комплексная часть имеет модуль 1 (это $e^{j\varphi}$).

$$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}{\frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1/2}$$

$$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$



При $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$ получаем 4 константы, харак. четырехполюсника.

Физ. смысл производных:

1. $\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$ - входная проводимость

3. $\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$ - прямая пробожная проводимость

2. $\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$ - обратная пробожная проводимость

4. $\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$ - выходная проводимость

Аналитический сигнал (выполает L и C - инерционность)

Вещный сигнал - зависит нек-ой ЛК u и i от времени. При преобр-ии Фурье обязательно получится симметричный спектр (он симметричен относительно ω относительно до комплексного сопряжения, а мнимая часть $= 0$).

Это неудобно - приходится работать с кривой \sin и \cos .

Добавим к сигналу комплексную добавку - тангенс, это левая (правая) часть спектра сигнала обнуляется.



Выходит аналитический сигнал. Получается два провода - один с действ. частью сигнала, другой - с мнимой. Используя аналит. сигнал, можно рас-ивать инерционные цепи. Сигнал будет позан как бы бесконечно долго и длится бесконечно долго.

$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\tilde{x}(t) = A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \quad - \text{аналитический сигнал} \quad |e^{j\omega t}| = 1$$

$$A_0(\omega), \varphi(\omega). \quad A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} - \text{комплексная амплитуда}$$

$$e^{j\omega t} - \text{комплексная вращающаяся экспонента}$$

Y - параметры (комплексные)

$$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12} \tilde{U}_2$$

$$\tilde{I}_2 = Y_{21} \tilde{U}_1 + Y_{22} \tilde{U}_2$$

При поиске Y_{1x} \tilde{U}_2 замыкают (закорачивают выход), аналогично для Y_{2x} .

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = Y \cdot \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{pmatrix}$$

Если взять I_1 и I_2 как независимые, найдем их значения:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_1}{\partial i_2} di_2$$

- здесь рассуждения это сопротивление

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2$$

Сделаем на другом, аналогично:

$$u_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$u_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Следовательно: $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$

$$Z_{12} = - \frac{Y_{12}}{|Y|}$$

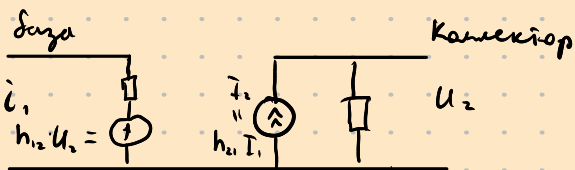
$$Z_{21} = - \frac{Y_{21}}{|Y|}$$

$$Z_{22} = \frac{Y_{11}}{|Y|}$$

H - параметры

$$\begin{cases} u_1 = h_{11} I_1 + h_{12} u_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} u_2 \end{cases}$$

- полезно для динамических транзисторов



- аналогичная динамическая транзисторная схема

Эквивалент

h_{21} - передача по напряжению (ср.)

h_{11} - входное сопротивление

h_{12} -

(ср.)

h_{22} - выходная проводимость (ср.)

(ср.) - средняя величина

Следовательно: $h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$

$$h_{12} = - \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

$$h_{21} = - \frac{Z_{21}}{Z_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$$

Комплексный коэффициент передачи



Анализированный - из ТФКП

Комплексная часть в реальности не используется
 $|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$ - комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{\tilde{y}_{\text{вн}}}{\tilde{y}_{\text{вх}}} = \frac{B(\omega) e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t}}{A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} \equiv$$

Модель анализ. сигнала с одной. переменной можно положить на вход и $K(j\omega)$ тоже будет

$$\equiv \frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + A_0} = \frac{b_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot \dots \cdot (\omega - b_n)}{a_0 \cdot (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot \dots \cdot (\omega - a_m)} \equiv$$

числитель - нулевой полюс *знаменатель - полюс*

Самая сложная задача разложения

Условия:

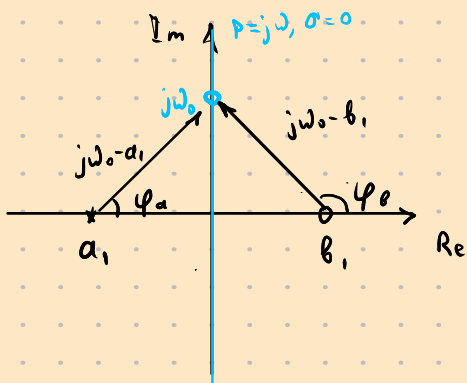
- Когда $\omega = b_k$, $|K| = 0$
- Когда $\omega = a_k$, возможен распад.

$$\equiv \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{|\omega - b_1| \cdot e^{j \arg(\omega - b_1)} \cdot \dots \cdot |\omega - b_n| \cdot e^{j \arg(\omega - b_n)}}{|\omega - a_1| \cdot e^{j \arg(\omega - a_1)} \cdot \dots \cdot |\omega - a_m| \cdot e^{j \arg(\omega - a_m)}} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^n |\omega - b_k|}{\prod_{p=1}^m |\omega - a_p|} \cdot e^{j \sum_{k=1}^n \arg(\omega - b_k) - j \sum_{p=1}^m \arg(\omega - a_p)}$$

"Нули" - корни числителя (b_i)

"Полюсы" - корни знаменателя (a_i)

ω должен быть комплексной (p), иначе от комплексной φ -и произойдет переход к $b_{\text{вн}} - a_{\text{вн}}$.



$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} = \frac{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + A_0} = \dots$$

По полюсам, нулям и $\frac{b_0}{a_0}$ можно полностью восстановить φ -ую.

$p = j\omega + \sigma$ - при p -и комплексной части, $\sigma = 0$.

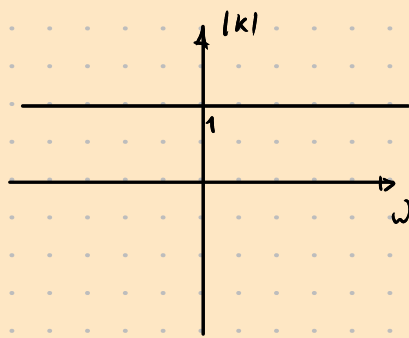
Учтите, что нули и полюсы могут быть комплексно сопряженными.

$$K(j\omega) = \frac{|j\omega_0 - b_1|}{|j\omega_0 - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega_0 - b_1) - \arg(j\omega_0 - a_1))}$$

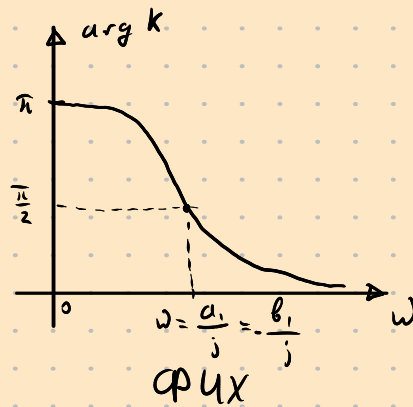
$|K(j\omega)|$ = отношение длин векторов из нуля и из полюса

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} - \text{АЧХ} \quad \arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A - \text{ФЧХ}$$

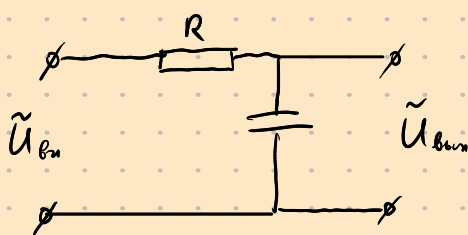
Пример $a_1 = -b_1$



Aux



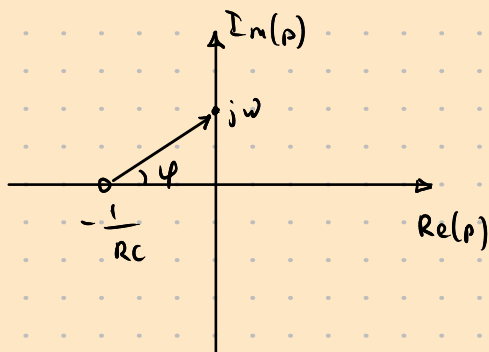
Усерединяна RC - чен



$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{\text{вых}}}{R + 1/j\omega C \cdot j\omega C \tilde{U}_{\text{вх}}} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC(j\omega + \frac{1}{RC})}$$

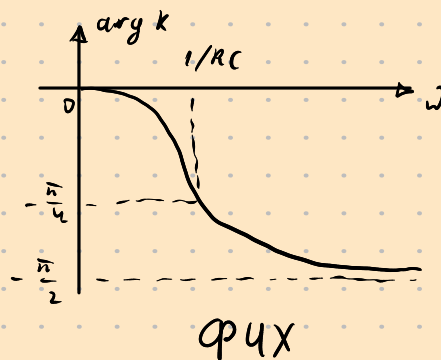
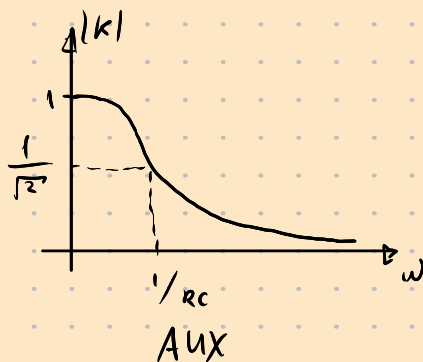
Так репс чен
(иерис репс конгенасеп)

$$= \frac{1}{RC(p + \frac{1}{RC})} \quad a_1 = -\frac{1}{RC} \quad \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

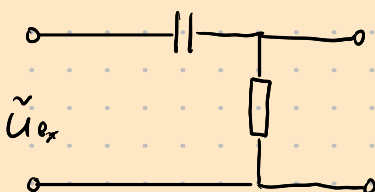


$$|K| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{R^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad - \text{АУХ}$$

$$\arg K = -\arctan(\omega RC) \quad - \text{ФУХ}$$



Дупереперенуруна RC - ченонка



$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - 0}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



He бересбенное повсое / ным бера численнм омос. Re он, ем кане 1 - бересбеннм

