Неявные ф-ии

$y^2 = x^2$

а) Сколько ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? Бесконечно много:

$X \subset \mathbb{R}$: $f(x) = x$, $x \in X$

$f(x) = -x$, $x \notin X$

б) Сколько непрерывных ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 4:

x, $-x$, $|x|$, $-|x|$

в) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 2:

x, $-x$

г) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 1:

x

Теорема о неявной ф-ии

Пусть $F(x,y)$ непр. дифф. в (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда $\exists\ \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b\}$ в к-ром $F(x,y) = 0 \iff f(x) = y$.

При этом $f(x)$ непр. дифф. на $(x_0 - a,\ x_0 + a)$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$F(x, f(x)) = 0$

$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow$ формула – не док-во!

Должна быть $\neq 0$ произв. той переменной, которая зависима (равна ф-ии).

№1

$u^3 - xu + y = 0$, $u = u(x,y)$

Найти u'_x, u'_y и du в т. $(3, -2, 2)$ и $(3, -2, -1)$ – надо задать u! иначе непонятно что за точка

$x = 3$, $y = -2$, $u = ?$

$u^3 - 3u - 2 = 0$ | $u = 2$ – реш.

$(u-2)(u^2+2u+1)=0$

$(u-2)(u+1)^2=0 \qquad (u=-1)$

$$\begin{array}{l|l} u^3-3u-2 & u-2 \\ \hline \underline{u^3-2u^2} & u^2+2u+1 \\ \quad 2u^2-3u & \\ \quad \underline{2u^2-4u} & \\ \qquad u-2 & \\ \qquad \underline{u-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$3u^2u'_x - xu'_x - u = 0$

$u_x = \dfrac{u}{3u^2-x}$

$3u^2u'_y - xu'_y + 1 = 0$

$u'_y = -\dfrac{1}{3u^2-x}$

$u'_x(A) = \dfrac{2}{9} \qquad u'_y(A) = -\dfrac{1}{9}$

$du(3,-2,2) = \dfrac{2}{9}dx - \dfrac{1}{9}dy$

! Лучше сразу брать дифференциал, не считая производные

$3u^2du - xdu - udx + dy = 0$

$du = \dfrac{udx - dy}{3u^2-x}$

№2

$F(x-y,\ y-z,\ z-x) = 0 \Rightarrow z = z(x,y)$ – найти dz

$F(u, v, w)$

$F'_u(x-y,\ y-z,\ z-x)(dx-dy) + F'_v(x-y,\ y-z,\ z-x)(dy-dz) + F'_w(x-y,\ y-z,\ z-x)\cdot$
$\cdot(dz-dx) = 0$

$dz = \dfrac{F'_u dx - F'_u dy + F'_v dy - F'_w dx}{F'_v - F'_w}$

№3

$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x \end{cases} \qquad \begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix} \qquad u(1,2) = v(1,2) = 0$ (подходит)

Найти $u'_x,\ u'_y,\ v'_x,\ v'_y$ при $x=1, y=2, u=v=0$

! При попытке найти u, v – трансц. ур-е. А произв. в т. – линейное

№ 4

$u^3 + 2yu + xy = 0 \qquad u(1,-1) = -1$ (проверим: ОК)

Найти $d^2u\,(1,-1,-1)$

$3u^2du + 2udy + 2ydu + dx\,y + dy\,x = 0$

$du = -\dfrac{2udy + dxy + dy\,x}{3u^2 + 2y} \qquad du = dx + dy$

$6udu^2 + 3u^2d^2u + 2dudy + 2yd^2u + 2dudy + dxdy + dxdy = 0$

$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 \cdot 6u + 4dudy + 2dxdy = 0$

$d^2u - 6(dx+dy)^2 + 4dxdy + 4dy^2 + 2dxdy = 0$

$d^2u = 6dx^2 + 12dxdy + 6dy^2 - 4dxdy - 4dy^2 - 2dxdy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dxdy$

№ Т4

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

Выразить $r'_x,\ r'_y,\ \varphi'_x,\ \varphi'_y$ через r, φ

$\begin{cases} 1 = r'_y \sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_y \\ 0 = r'_y\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_y \end{cases}$

$\Delta = -r$

$\Delta_r = -r\sin\varphi$

$\Delta_\varphi = -\cos\varphi$

$r'_y = \sin\varphi \qquad \varphi'_y = \dfrac{\cos\varphi}{r}$

$\begin{cases} 1 = r'_x\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_x \\ 0 = r'_x\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_x \end{cases}$

$\Delta = r$

$\Delta_r = r\cos\varphi$

$\Delta_\varphi = -\sin\varphi$

$r'_x = \cos\varphi \qquad \varphi'_x = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$

№ почему всё это было?

$u = u(x,y)$

Решить ур-е $xu'_y - yu'_x = 0$

Полярная замена: $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ u = (r,\varphi)$

$u'_y,\ u'_x$ выразить через $u'_r,\ u'_\varphi$

$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi\,\varphi'_x$

$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y$

$u'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$ $\qquad$ $u'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$

Ур-е:

$$\cancel{r}\cos\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \sin\varphi} + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{\cancel{r}}\right) - \cancel{r}\sin\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \cos\varphi} - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\cancel{r}}\right) = u'_\varphi$$

$u'_\varphi = 0$

Ур-е $u = f(r)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Отв.: $u = F(x^2+y^2)$

№5

$(y-z)z'_x + (y+z)z'_y = 0 \qquad z = z(x,y)$

Замена: новые незав. переменные $u = y-z, \; v = y+z$

новая ф-ия $x = x(u,v)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x(x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$$

$dx = x'_u du + x'_v dv$ $\qquad$ $+ z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$

$$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y)dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1)dz = 0$$

dy, dz - произвольные $\Rightarrow$ коэф-ты при них $= 0$.

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\dfrac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Подставляем:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v\left(\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u}\right) = 0 \qquad \frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

№ T3

$f: R^2 \to R^2, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$

1) Д-ть, что $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$, но f не яв-ся биективным

2) Найти $f(R^2)$ - мн-во значений f.

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Не яв-ся биективной в силу периодичности: $u(r,\varphi) = u(r, \varphi+2\pi)$

$v(r,\varphi) = v(r, \varphi+2\pi)$

2) $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$

$v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$ $\quad e^z$ прин. все знач. кроме 0

Экстремумы ф-ий нескольких переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Необх. усл-е: Если в точке лок. экстремума F дифф., то $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ (стац. т.)

Дост. усл-е: Если $F(x_1,\dots,x_n)$ - дважды дифф. в $U_\delta(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0$ - стац. т., то рас-им квадратичную форму от $(dx_1, \dots, dx_n)$:

$$d^2F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} F''_{x_ix_i}(\bar{x}_0)dx_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F''_{x_ix_j}(\bar{x}_0)dx_idx_j$$

1. кв. ф. полож. опр. => $\bar{x}_0$ - лок. min
2. отриц. опред. => лок. max
3. неопр. => $\bar{x}_0$ - не лок. экстр.
4. полуопред. => ? (смотрим приращение)

Исследование кв. форм

1. Приведение в канонический вид $k(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этот вид однозначен с точностью до перестановок ε_i

p = кол-во $\varepsilon_i = +1$ - положит. индекс инерции

q = кол-во $\varepsilon_i = -1$ - отриц. индекс инерции

$r = p+q$ - ранг

Положит. опред. <=> все $\varepsilon_i = +1$	$p=n$, $q=0$
Отриц. опред. <=> все $\varepsilon_i = -1$	$p=0$, $q=n$
Неопред. <=> $\exists \varepsilon_i = 1$ и $\exists \varepsilon_j = -1$	$1 \le q, p \le n-1$
Полож. полуопред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \ge 0$, $\exists \varepsilon_j = 0$	$p \le n-1$, $q = 0$
Отриц. опред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \le 0$, $\exists \varepsilon_j = 0$	$p=0$, $q \le n-1$

2. Критерий Сильвестра

$B = (b_{ij})$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow \operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$

Полож. опред. $\Leftrightarrow$ все $\Delta_i > 0$

3. Частный случай $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ Полож. опред. $\Leftrightarrow A > 0,\ AC - B^2 > 0\ (\Rightarrow C > 0)$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow A < 0,\ AC - B^2 > 0\ (\Rightarrow C < 0)$

Неопр $\Leftrightarrow AC - B^2 < 0$

№1

$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$u'_x = 6xy - 12$

$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \ \pm 1 \\ y = \pm 1, \ \pm 2 \end{cases}$$

$u''_{xx} = 6y \qquad u''_{xy} = 6x$

$u''_{yy} = 6y$

$d^2F = 6y\,dx^2 + 6y\,dy^2 + 12x\,dx\,dy$

$\frac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0$ – неопред.

$\frac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dx\,dy$ – неопред.

$\frac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$ – положит. опред. – min

$\frac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dx\,dy$ – отриц. опред. – max

№2

$u = xyz\,(16 - x - y - 2z)\,, \quad x, y, z > 0$

$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$

$u'_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \qquad u'_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$

$u'_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$

$\begin{cases} yz(16 - 2x - y - 2z) = 0 \\ xz(16 - x - 2y - 2z) = 0 \\ xy(16 - x - y - 4z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 2z = 16 \\ x + 2y + 2z = 16 \\ x + y + 4z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

$u''_{xx} = -2yz = -16 \qquad u''_{yy} = -2xz = -16 \qquad u''_{zz} = -4xy = -64$

$u''_{xy} = z(16 - 2x - y - 2z) - yz = -8 \qquad u''_{xz} = y(16 - 2x - y - 2z) - 2yz = -16$

$u''_{yz} = x(16 - x - 2y - 2z) - 2xz = -16$

$d^2u(4,4,2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdy - 32dydz$

$\dfrac{d^2u(4,4,2)}{16}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 > 0$

Полож. опред. $\Rightarrow$ d^2u отриц. опред. $\Rightarrow$ лок. max

№3

$u = x^4 + y^4 - 2x^2$

$u'_x = 4x^3 - 4x \qquad u'_y = 4y^3$

$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad u''_{yy} = 12y^2 \qquad u''_{xy} = 0$

$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$

$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy$

$d^2u(0,0) = -4dx^2$ – отриц. полуопред. – ?

$u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 = 0 \;: \qquad \begin{matrix} \Delta x = 0 \quad \Delta y \neq 0 \; + \\ 0 < \Delta x < \sqrt{2} \quad \Delta y = 0 \; - \end{matrix}$

Экстремума нет.

$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2$ – полож. полуопр.

$u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x^4) + \Delta y^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$

$= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + \Delta y^4 > 0$ – min

№ T5

В стац. т. кв. форма d^2f полож. полуопред.

а) Может ли это быть min? Да.

б) Может ли быть max? Нет (всегда есть такие dx и dy, что приращение >0 - вслед d^2f)

в) Не быть экстремума? Да

№ 4

$x^2+y^2+u^2+2x-2y+4u-3=0$ - исслед. неявную ф-ию, зад. ур-ем.

$2x\,dx+2y\,dy+2u\,du+2dx-2dy+2du=0$

$(u+2)\,du+(x+1)\,dx+(y-1)\,dy=0$

$$du=-\frac{(x+1)\,dx+(y-1)\,dy}{u+2}$$

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ - $du=0$

$u^2+4u-5=0 \quad u=1,-5; \quad (-1,1,1), \ (-1,1,-5)$

$(u+2)\,d^2u+\underbrace{du^2}_{0}+dx^2+dy^2=0$

$$d^2u=\frac{-dx^2-dy^2}{u+2}$$

$d^2u(-1,1,1)=-dx^2-dy^2$ - отриц. опред. (max)

$d^2u(-1,1,-5)=\dfrac{dx^2}{3}+\dfrac{dy^2}{3}$ - полож. опред. (min)