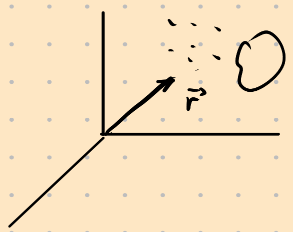
# Равновесие




$\vec r = \vec r_0 = const$ – для всех т. => система в равновесии в данной с.к.

$\vec r = \vec r(q)$ для стац. сис-м (связи стационарны)

Полож. равновес. (п.р.) опр. точки $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left( x = \begin{pmatrix} q \\ \dot q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} \right)$

Если $q_0$ – п.р., в стац. сис-ме <=> $Q(q_0, 0, t) = 0$

Если $Q = -\nabla \Pi$, то в п.р. $\nabla \Pi = 0$.

## Принцип вирт. перемещ.

$\vec r = \vec r_0$ (набор точек) яв-ся п.р. <=> $\underline{\underline{\forall}}\, \delta \vec r$ из п.р. $\to$ $\delta A = \int \vec F \cdot \delta \vec r \, dm = 0$.

## Об условии $Q = 0$

**Пример**

$\ddot x = \alpha x^\beta$, $\beta \in (0;1)$

$x(0) = 0$, $\dot x(0) = 0$

(„Сила" $m \alpha x^\beta$ равна 0 в т. 0. яв-ся ли т. 0 полож. равновес?)

1. $x = 0$ – реш-е.
2. Рассм. $x = at^b \not\equiv 0$

$ab(b-1)t^{b-2} = \alpha a^\beta t^{\beta b}$

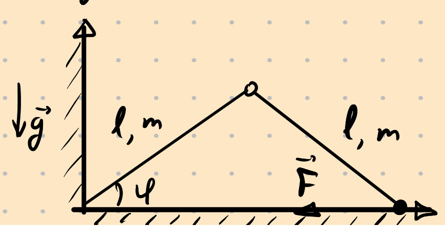
$b - 2 = \beta b$ => $b = \frac{2}{1-\beta} > 0$ => $x(0) = 0$, причём $\dot x(0) = 0$ тоже.

$\frac{2(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = \alpha a^{\beta - 1}$ => $a = \left[ \frac{2(1+\beta)}{\alpha(1-\beta)^2} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$

Как так? 2 реш-я для нач. усл. $x = 0$, $\dot x = 0$.

А потому что $\alpha x^\beta$ не удовл. усл. Липшица! Из-за этого т. Коши не работает.

**Задача 1**



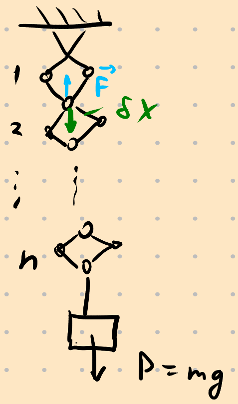

$\Pi = 2lF\cos\varphi + mgl\sin\varphi$

$\Pi_{,\varphi} = mgl\cos\varphi - 2lF\sin\varphi = 0$

$F = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \varphi$

Чем острее угол, тем меньше нужна сила.

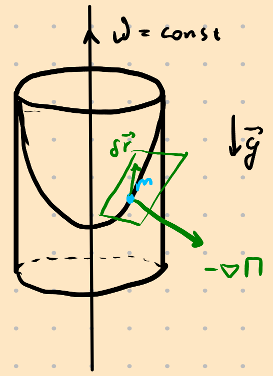
## Задача 2




$$\delta A = nP\delta x - F\delta x = 0$$

$$F = nP$$

## Задача 3




Жидкость во вращ. сосуде.

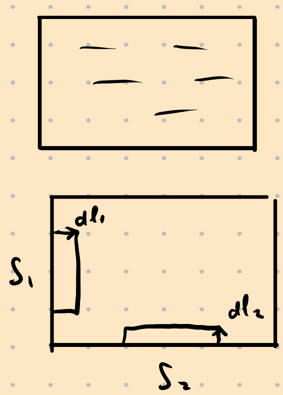
Т. массой m должна нах-ся в равновесии, иначе форма пов-ти будет меняться.

Во вращ. сис-ме отсчёта:

$$\vec F = -\nabla\Pi \qquad \Pi = mgz - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$$\delta A = -\nabla\Pi\,\delta\vec r = 0 = -d\Pi \Rightarrow \Pi = const \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + C$$

## Задача 4




Несжим. жидкость.

Д-ть, что давл. жидк-ти равномерно

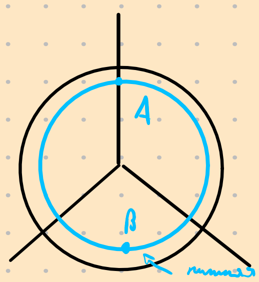
$$\begin{cases} \delta A = P_1 S_1 dl_1 + P_2 S_2 dl_2 = 0 \\ S_1 dl_1 + S_2 dl_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dl_2 = -\frac{S_1}{S_2} dl_1 \Rightarrow \delta A = (P_1 - P_2)\, dl_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

## Задача 5

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

– мат. т. движется по кривой в поле тяжести



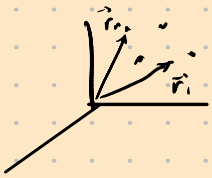

Найти полож. равновесия

1. Из принципа вирт. перемещ. — т. A и B, т.к. $\delta\vec{r} \perp m\vec{g}$

Формальное решение:

- Если связь задана в виде $F(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$, то $f_{i,\vec{r}_k} \cdot \delta\vec{r}^{\,k} = 0$

! Это градиент!




$$\begin{cases} 2x\,\delta x + 2y\,\delta y + 2z\,\delta z = 0 \\ \delta x + \delta y + \delta z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Из принципа вирт. перемещ. $\delta A = mg\,\delta z \Rightarrow \delta z = 0$

$$\begin{cases} x\,\delta x + y\,\delta y = 0 \\ \delta x + \delta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta y = -\delta x, \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

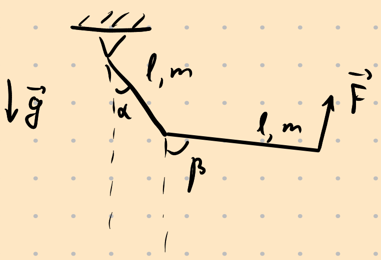
$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ z = 1 - 2x \end{cases}$$

$$2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

2. Поиск условного экстремума потенциальной энергии при усл. этих связей

## Задача 6




$F = const$

Найти п.р.

$$\begin{cases} Q_\alpha = -\Pi^g_{,\alpha} + Q^F_\alpha = 0 \\ Q_\beta = -\Pi^g_{,\beta} + Q^F_\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Pi = -\frac{3}{2} mgl\cos\alpha - \frac{1}{2} mgl\cos\beta$$

$$Q^F_\beta = Fl \qquad Q^F_\alpha = Fl\cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} mgl \sin\alpha + Fl\cos(\alpha-\beta) = 0 \\ \frac{1}{2} mgl \sin\beta + Fl = 0 \end{cases}$$

$\sin\beta = \dfrac{2F}{mg}$ – есть 3 случая: 1. $F > mg/2$ – нет п.р.

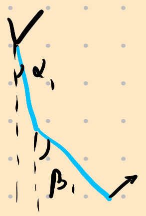
2. $F = mg/2$ – $\beta = \frac{\pi}{2}$

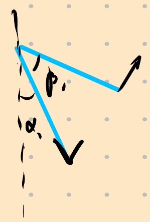
3. $F < mg/2$ – $\beta_1 = \arcsin\dfrac{2F}{mg}$, $\beta_2 = \pi - \beta_1$

$$-\frac{3}{2} mg \sin\alpha + F(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 0$$

$$F\cos\beta + \left(F\sin\beta - \frac{3}{2} mg\right)\operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \underbrace{\frac{F\cos\beta}{\frac{3}{2} mg - F\sin\beta}}_{f(\beta)} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \operatorname{arctg} f(\beta_1) \\ \alpha_2 &= \pi + \alpha_1 \end{aligned}\right\} - \beta_1 \quad \left.\begin{aligned} \alpha_3 &= -\alpha_1 \\ \alpha_4 &= \pi - \alpha_1 \end{aligned}\right\} - \pi - \beta_1$$



## Устойчивость пост. матриц

$\dot{x} = Ax, \quad A = \text{const}$

$x = he^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни

$x = 0$ – ас. уст. $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$

Необх. усл. $\operatorname{sign} a_n = \dots = \operatorname{sign} a_0$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad a_0 > 0 \text{ в } P(\lambda)$$

Матрица Гурвица

$P(\lambda)$ уст. $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$

## Критерий Рауса – Гурвица в форме Льенара и Шипара

1. Вып. усл-е $a_i > 0$, полином приведён к виду $a_0 > 0$.
2. $\left[ \begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array} \right.$ (либо, либо) – проверяется то, что удобнее

$\exists$ $P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$. Проверим, что необх. усл. уст. совпадает с критерием:

$P(\lambda) \mapsto \frac{a_2}{a_0} \lambda^2 + \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_0} & 1 \\ 0 & \frac{a_2}{a_0} \end{pmatrix}$$

1. Р.-Г.:

$\frac{a_1}{a_0} > 0$

$\frac{a_1 a_2}{a_0^2} > 0$ $\Rightarrow \operatorname{sign} a_2 = \operatorname{sign} a_1 = \operatorname{sign} a_0$

2. Р. Г. в форме Л.-Ш.:

То же самое

Линеаризация ур-ий движения мех. сис-м часто приводит к ур-ям вида:

$$\underbrace{A\ddot{q}}_{\text{из кин. энергии}} + \underbrace{B\dot{q}}_{\text{гироскоп., и диссипат. силы}} + \underbrace{Cq}_{\text{линеаризация консервативных сил}} = 0$$

Нормальная форма Коши: $\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = -A^{-1}Cq - A^{-1}Bu \end{cases}$ (1) $\longleftrightarrow$ $\dot{x} = Dx$

Как искать решения? Как получить $P(\lambda)$?

Покажем, что хар. мн-н сис-мы (1) ищется след. образом:

$$q = he^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda E - D) = \begin{vmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda E - D) = 0 \Leftrightarrow \det\big(F(\lambda E - D)\big) = 0 \quad \forall F,\ \det F \neq 0$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} \sim$$

$\lambda = 0$ - не реш. е

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ \lambda C & \lambda^2 A + \lambda B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \quad \text{ЧТД}$$

**Пример**

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} - x + y = 0 \end{cases}$$ - исследовать устойчивость п.р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -1 & \lambda^2 + \beta\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \beta\lambda + 1 - \alpha = 0$$

$$\lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + (1-\alpha) = 0$$

Т.к. $a_4 = 1 > 0$ то все коэф. должны быть $> 0$ по необх. усл. $\Rightarrow$

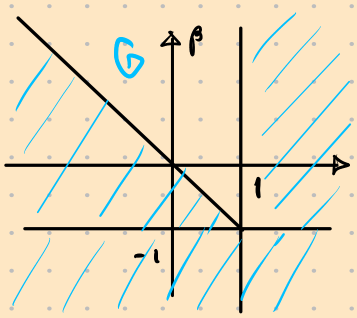
$\Rightarrow$ приведение делать не надо, используем кр. Р.-Г. в форме Л.-Ш.

Из необх. усл. $\beta > -1$, $\alpha < 1$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ \beta+1 & \beta+2 & \beta+1 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & \beta+1 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = \beta+1 > 0$ $\qquad$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & \beta+1 \end{vmatrix} =$

$= (\beta+1)^2(\alpha+\beta) > 0 \Rightarrow \beta > -\alpha$



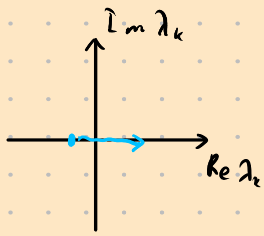

G – область устойчивости

Поведение корней на $\partial G$:

1. $\alpha = 1$

$$P(\lambda) = \lambda\,[\underbrace{\lambda^3 + \dots + \beta + 1}_{\text{уст. полином (можно показать)}}]$$

Появился корень $\lambda_k = 0$

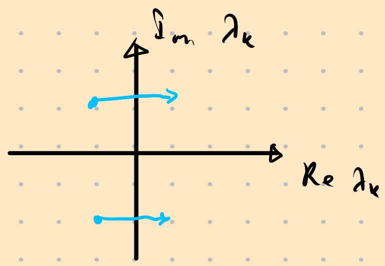



„жесткая потеря уст."

2. $\beta = -\alpha$

$P(\lambda) = \lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + 1 + \beta$

$\pm i$ – корень (можно показать)




„мягкая потеря уст."

## Первый метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$ – автономная СДУ (нелинейная)

$X(x)$ – непр. дифф. в т. $x=0$, а $X_{,ij}$ – $\exists$ и огр. в окр-ти н.р.

Тогда эту с-му можно линеаризовать: $\dot{x} = Ax + f(x)$

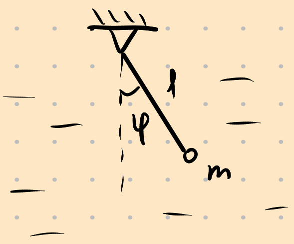
$A = X^i_{,j}(0)$ $\qquad$ $\|f\| \le a\|x\|^2$ (разл. в ряд Тейлора)

## Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Если в сис-ме $\dot{x} = Ax$ $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $\forall i = \overline{1,n}$, $\lambda_i$ – корни $P(\lambda)$ (хар. многочлен), то п.р. $x=0$ – ас. уст. и в линеаризованной, и в исходной сис-ах.

Если $\exists \lambda_i$: $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, то п.р. неуст. в обеих сис-ах.

Пример



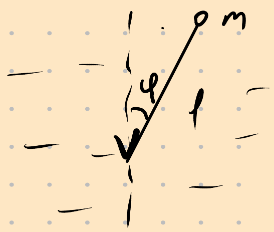
$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

Исследовать п.р. $\varphi = 0$ на устойчивость

Линейное прибл.: $ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0$

$$\underset{\vee\atop 0}{ml^2}\lambda^2 + \underset{\vee\atop 0}{\beta l}\lambda + \underset{\vee\atop 0}{mgl} = 0 \text{ – полином} \Rightarrow \text{устойчив} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ п.р. $\varphi = 0$ – ас. уст. по т. Ляпунова.



$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi = 0$$

$$\downarrow \text{лин.}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} - mgl\varphi = 0$$

$\varphi = 0$ – неуст. по т. Ляпунова.

## Второй (прямой) метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$ – автоном. СДУ

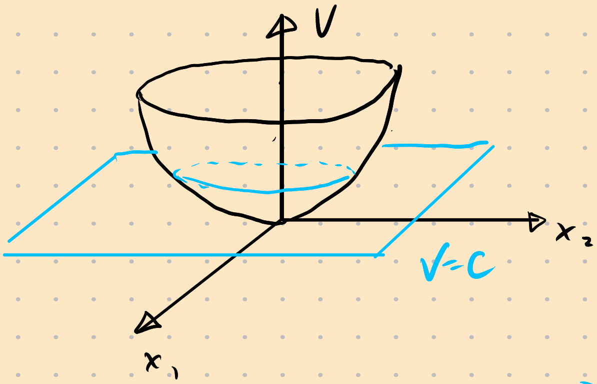
$V(x)$, $V(0) = 0$ – ф-ия Ляпунова (скалярная). $V(x)$ непр. дифф.

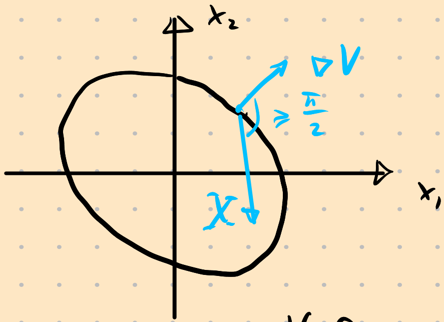
Производная в силу сис-мы: $\dot{V}_X = \nabla V \cdot X = V_{,i} X^i$.

### Теорема Ляпунова

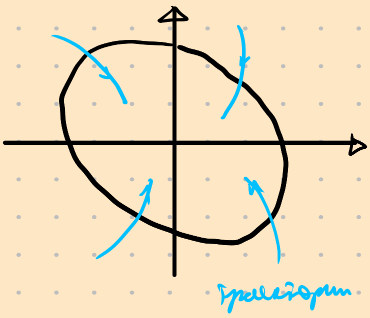
Если в окр-ти п.р. $U_\varepsilon(0)$ $\exists V(x)$: $V(x)$ имеет в $x=0$ строгий min, а $\dot{V}_X \le 0$ в $U_\varepsilon(0)$ $\Rightarrow$ п.р. $x=0$ – устойчиво.

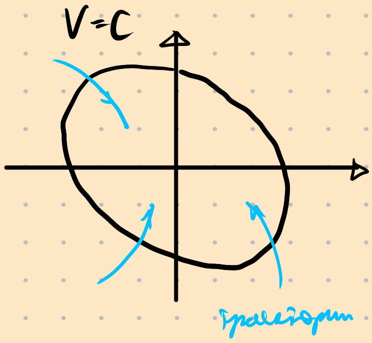
Когда есть мнимые корни хар. многочлена, то в лин. сис-ме появляются период. реш-я с sin и cos => в исходной (с тонкой добавкой) они могут стать как уст., так и неуст. Эта т. решает проблему.




$V = C = \text{const}$



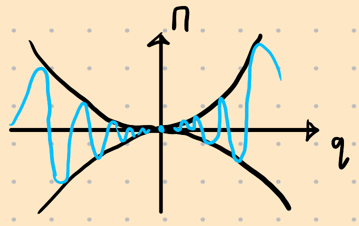



## Теорема Лагранжа – Дирихле

Если $\Pi(q) \to$ $q=0$ – строгий min $\Rightarrow$ $q=0$ – уст. п.р. $(V=E)$

Это достаточное, но не необх. усл-е:

$$\Pi = \begin{cases} q^2 \sin\frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q=0 \end{cases}$$




Из усл-я, что $T+\Pi = \text{const}$, $\quad V=E=T+\Pi$

следует, что п.р. $q=0$ уст. (если оно неуст., то т. уходит далеко от п.р. $\Rightarrow$ надо много $E$, а её мало при $q \to 0$), а усл. Л.-Д. не вып.

Но: если $\Pi$ – аналитическая ф-ия, то вообще-то т. обратима (доказано в 80-х).

## Исследование усл-я $\Pi \to \min$

$$\Pi(q) = \cancel{\Pi(0)}^{0} + \underbrace{\Pi_{,i}(0)}_{=0\,(q=0\ -\ \text{п.р.})} q^i + \frac{1}{2}\underbrace{\Pi_{,ij}(0)}_{C_{ij}} q^i q^j$$

$$\Pi \approx \frac{1}{2} q^T C q = \Pi_2(q) \quad \Big| \quad \Pi_2(q) > 0 \Rightarrow \Pi \to \min$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & & \Delta_n \\ & C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} & \end{array} \qquad \begin{cases} \Delta_i > 0 \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

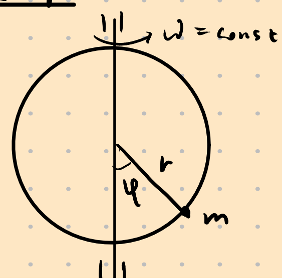
## Теорема Ляпунова-1

Если $\exists\, q'$: $\Pi_2(q') < 0$, то п.р. $q=0$ неустойчиво.

## Теорема Ляпунова-2

Если по членам наинизшего порядка разложения $\Pi(q) = \underbrace{\Pi_m(q)}_{\text{однор. многочлен ст. } m} + \dots$ установлено, что $\Pi(q) \to \max$ в $q=0$ $\Rightarrow$ $q=0$ – неуст.

**Пример**




Найти полож. относ. равновес. и исс. их уст-ть.

$$\Pi = mgr(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2\varphi \sim$$

$$\sim \frac{g}{\omega^2 r}(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2}\sin^2\varphi$$

п.р. $\Pi_{,\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2 r}\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi = 0 = \frac{g}{\omega^2 r}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

1: $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi_1 = 0\\ \varphi_2 = \pi\end{array}\right.$

2: $\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 r} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega < \sqrt{\frac{g}{r}} \text{ - нет реш-ий}\\ \varphi_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right), \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{r}}\end{array}\right.$

Исследуем устойчивость п.р.:

$\exists\ \varphi_*$ - любое из п.р., $\delta\varphi$ - отклонение от него, тогда

$\Pi \simeq \frac{1}{2}\Pi_{,\varphi\varphi}(\varphi_*)\,\delta\varphi^2$

$\Pi_{,\varphi\varphi} = \frac{g}{\omega^2 r}\cos\varphi - \cos 2\varphi$

$\Pi_{,\varphi\varphi}(0) = \frac{g}{\omega^2 r} - 1 \left\{\begin{array}{ll}>0, & \omega < \sqrt{g/r} \text{ - устойчиво по т. Л.-Д.}\\ =0, & \omega = \sqrt{g/r} \text{ - ?}\\ <0, & \omega > \sqrt{g/r} \text{ - неуст. по т. Л.-1 (или 2)}\end{array}\right. \quad - \varphi_{1,2}$

$\Pi_{,\varphi\varphi}(\pi) = -\frac{g}{\omega^2 r} - 1 < 0 \Rightarrow$ неуст. по т. Л.-1 (или 2)

$\Pi_{,\varphi\varphi} = \frac{g}{\omega^2 r}\cos\varphi - 2\cos^2\varphi + 1$

$\Pi_{,\varphi\varphi}(\varphi_{3,4}) = -\frac{g^2}{\omega^4 r^2} + 1 \left\{\begin{array}{ll}>0, & \omega > \sqrt{g/r} \text{ - уст. по т. Л.-Д.}\\ =0, & \omega = \sqrt{g/r} \text{ - ?}\\ <0, & \omega < \sqrt{g/r} \text{ - нет п.р. (не реализуемо)}\end{array}\right.$

Рас-им отдельно $\omega = \sqrt{g/r}$

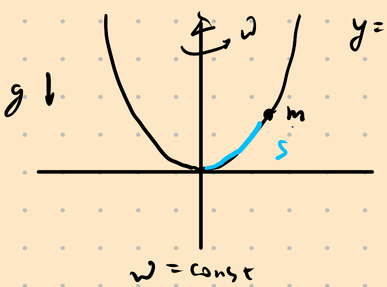
$\Pi \sim 1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi \approx 1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^2 =$

$= \underbrace{\varphi^4\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right)}_{>0}$ - удерживаем члены наименьшего (по степени) порядка

$\Rightarrow \min \Rightarrow \varphi = 0$ - уст. по т. Л.-Д.

**Пример 2**

Допустим, вращается парабола:




$y = \frac{1}{2}ax^2$

$\Pi = \frac{1}{2}amgx^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ (кооp-та $x$ - обобщ.)

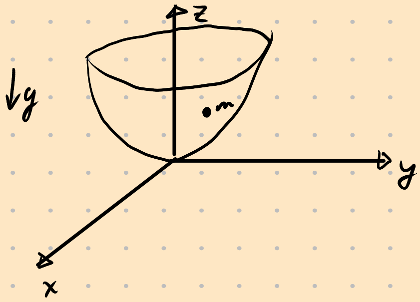
$\omega = \sqrt{ag} \Rightarrow \Pi \equiv 0.$

1. Любая т. параболы - п.р.

2. Устойчивость: выберем $q = s$, тогда

$T = \frac{m\dot{s}^2}{2} \Rightarrow \ddot{s} = 0 \Rightarrow s = s_0 + \dot{s}_0 t \Big|_{t\to\infty}^{\to\infty} \Rightarrow$ любое п.р. неуст. по опр-ю.

## Пример 3




Найти п. р., уст-ть

$\Pi = mgz(x,y) \sim z(x,y)$

$$\begin{cases} z_{,x} = \alpha x + \beta y = 0 \\ z_{,y} = \beta x + \gamma y = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) = \frac{1}{2} q^T C q, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$\det C \neq 0 \Rightarrow$ п. р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ — единств.

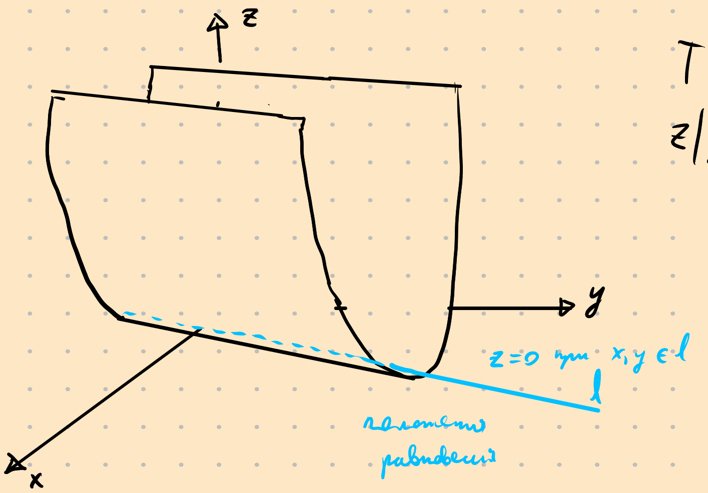
$\det C = 0$ (но $C \neq 0$) $\Rightarrow$ $\alpha x + \beta y = 0$ — целая прямая решений
или $x = 0$, или $y = 0$, ...

Устойчивость:

$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ п. р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ уст. по т. Л.-Д.

Если эта матрица невыр. и знаконеопределена или им. max, то п. р. неуст. по т. Л-1.

Случай $\det C = 0$: $\quad \Pi \sim \frac{1}{2}(\eta x + \mu y)^2 \geq 0$




$T = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z(x,y))$

$z|_{x,y \in l} = 0 \Rightarrow \exists$ реш-е $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{e}(t + t_0)$ —
— движение вдоль жёлоба
(неуст. п. р.)

## Задача 1

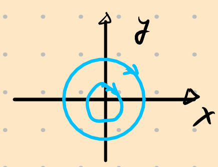
$$\begin{cases} \dot x = -y - x^3 - x^5 y \\ \dot y = x - y^5 + x y^6 \end{cases}$$

П. р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ — иссл. на уст.

Линеариз. сис-ма: $\begin{cases} \dot x = -y \\ \dot y = x \end{cases}$ — осциллятор!!!

$\ddot x + \omega^2 x = 0$

$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -\omega^2 x \end{cases}$



$|\lambda E - A| = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ — 1-й метод Ляпунова бесполезен

$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ — с кв.-ф. удобно работать

$\dot{V}_x = x(-y - x^3 - x^5 y) + y(x - y^5 + xy^6) \Rightarrow V$ - первый интеграл линейной си-мы

(т.к. $\dot{V}$ в силу линейной си-мы $\equiv 0$).

меньше по модулю 1 в окр-ти $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{V}_x = -x^4 - x^6 y - y^6 + xy^7 = -x^4(1 + x^2 y) - y^6(1 - xy) \sim -x^4 - y^6 < 0$ -

- устойчивость (даже асимптотическая по т. Ляпунова к-рую ещё не прошли).

# Теорема об асимпт. уст.

Пример

$$\begin{cases} \dot x = -a x y^4 \\ \dot y = b x^4 y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – н.р.} \qquad \text{исс. уст.}$$

$a, b > 0$

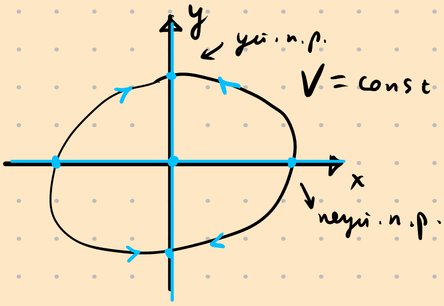
Линейных частей нет – сразу берём ф-ию Ляпунова

$\dot V_x = -V_{,x}\, a x y^4 + V_{,y}\, b x^4 y$ – методом пристального взгляда выделим $V$:

$V = \frac{1}{4}(\alpha x^4 + \beta y^4) \Rightarrow \dot V_x = (-\alpha a + \beta b) x^4 y^4 \qquad \alpha = b,\ \beta = a \Rightarrow \dot V_x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Ляпунова н.р. устойчиво.

**Замечание** У данной системы много н.р., а именно $\begin{pmatrix} x_* \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ y_* \end{pmatrix}$ $\forall x_*, y_*$




# Теорема Барбашина–Красовского

$\dot x = X(x) \qquad X(0) = 0$

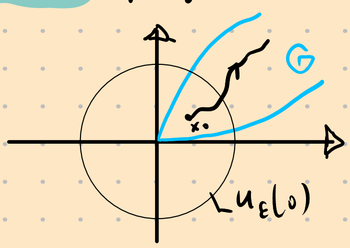
Если в $U_\varepsilon(0)$ $\exists V(x)$ $(V(0) = 0)$:

1. $\dot V_x \le 0$
2. $M\{x \mid \dot V_x(x) = 0\}$ – не содержит целых траекторий сист. (1), кроме н.р. $x = 0$. Тогда

а) Если $V(x) > 0 \Rightarrow x = 0$ – ас. уст.

б) Если $V(x)$ не им. min, вкл. нестр. $\Rightarrow x = 0$ – неуст.

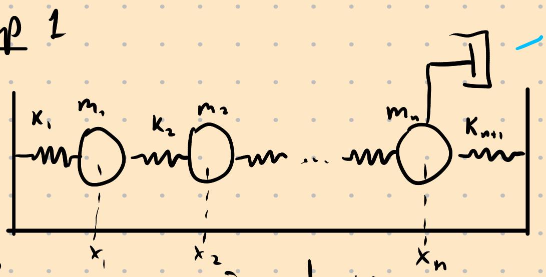
**Замечание** про усл. б




$\exists G = \{x \mid V(x) < 0\}$

Выполнение усл. 1 и 2 достаточно требовать только в $G$.

## Пример 1




— дэмпфер (тут действ. диссипат. силы)

$$F_n = -\beta \dot{x}_n$$

Система линейная! Но очень громоздко анализировать Гурвицем

$V = E = T + \Pi > 0$ (не очень строго но в целом понятно)

$\dot{V}_x = -\beta \dot{x}_n^2 \le 0 \qquad M\{\dot{x}_n = 0\}$

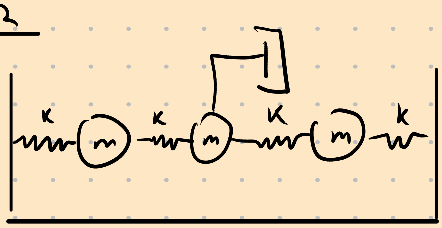
Если $\dot{x}_n = 0$, то по з. Ньютона, индукции и далее, $\dot{x} = 0$.

Но можно и строго: из ур-ий движения

$\Rightarrow$ $M$ не содержит целых траекторий, кроме н.р.

$\Rightarrow$ по т. Б.-К., н.р. ас. уст.

## Пример 2




$\exists$ целые траектории в $M$ вида

$$x = C\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

— т. Б.К. применять нельзя.

(1-й и 3-й колеблются, 2-й стоит)

Вообще, н.р. устойчиво.

**Замечание** Из т. Б.К. $\Rightarrow$ обобщение т. Л.-Д.: если действ. усл. т. Л.-Д. и доп. действуют силы с полной диссипацией, то н.р. становится ас. уст.

Полная диссипация: мощность $N = Q_i \dot{q}^i < 0$

## Пример 3

$\ddot{x} + \dot{x}^3 + (1+\dot{x}^2)x = 0$ исс. н.р. $x=0$ на уст.

$$\begin{cases}\dot x = y \\ \dot y = -y^3 - (1+y^2)x\end{cases} \qquad (1)$$

$W = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow \dot W_x = xy - y\left(y^3 + (1+y^2)x\right) = \cancel{xy} - y^4 - \cancel{xy} - xy^3$

знаконеопр.

$V = W - \frac{1}{4}y^4$ — добавка на знакопр. не влияет

$\dot V_x = -y^4 - xy^3 + y^3\left(y^3 + x + xy^2\right) = -y^4 + y^6 + xy^5 = -y^4\left(1 - y^2 - xy\right) \sim -y^4 \leq 0$

$\dot V_x = 0$

По т. Б.-К.: $M\{y=0\}$

Подставим $y=0$ в (1):

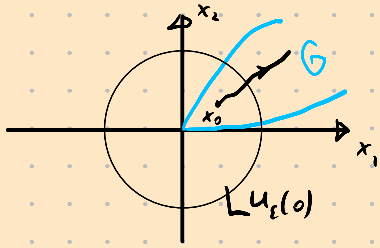
$$\begin{cases}\dot x = 0 \\ 0 = 0 - 1\cdot x\end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{нет цел. тр.} \in M \Rightarrow \text{н.р. ас. уст.}$$

кр. н.р.

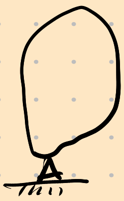
## Теорема Четаева о неуст.

$\dot x = X(x)$, $X(0)=0$

Если $\forall\, U_\varepsilon(0)$ $\exists\, V(x)$ и обл. $G = \{x \mid V(x) < 0\}$ и $\dot V_x < 0$ при $x \in U_\varepsilon(0) \cap G$, то н.р. неуст.




### Пример 1



случай Эйлера

$$\begin{cases} A\dot p + (C-B)qr = 0 \\ B\dot q + (A-C)pr = 0 \\ C\dot r + (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

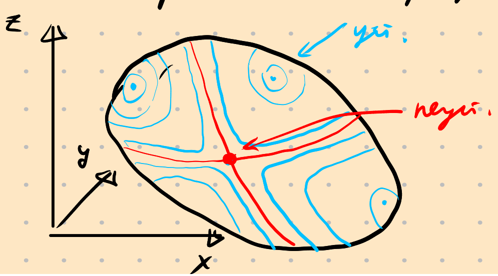
$\vec\omega = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — частные реш-я

$\vec\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{pmatrix}$

перманентные вращения

Перманентные вращения устойчивы




$\vec\omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ q_0 + y \\ z \end{pmatrix}$ — отклонение от н.р. $\begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

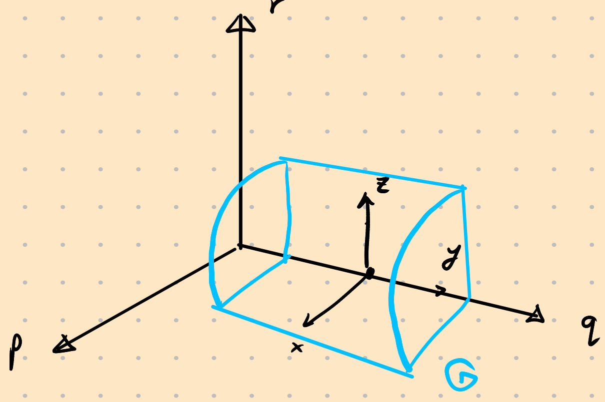
Докажем неуст. н.р. $\begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_0 > 0$;

$$\begin{cases} A\dot{x} + (C-B)(q_0+y)z = 0 \\ B\dot{y} + (A-C)xz = 0 \\ C\dot{z} + (B-A)x(q_0+y) = 0 \end{cases} \qquad A > B > C$$

$$V = -xz$$

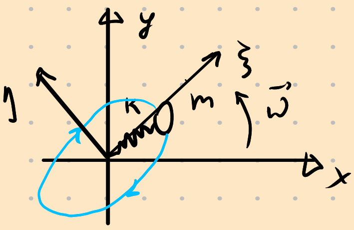
$$\dot{V}_x = \frac{C-B}{A}(q_0+y)z^2 + \frac{B-A}{C}(q_0+y)x^2 \sim \frac{C-B}{A}q_0 z^2 + \frac{B-A}{C}q_0 x^2 < 0$$

$V$ в обл. $G$ $< 0$,
$\dot{V}_x$ в обл. $G$ $< 0$ $\Rightarrow$




$\Rightarrow$ п. р. неуст. по т. Четаева

Пример (никаких т. в курсе не описать)




$$\Pi = \frac{1}{2}K(x^2+y^2)$$ – изотропный осциллятор (движется по эллипсу)

обеспечивают гироскопическую стабилизацию

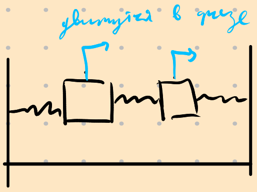
может быть $< 0$

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + 2m\omega\dot{\eta} + (k - m\omega^2)\xi = 0 \\ m\ddot{\eta} - \underbrace{2m\omega\dot{\xi}}_{\text{кориолис}} + \underbrace{(k - m\omega^2)}_{\text{пружина центробежная}}\eta = 0 \end{cases}$$

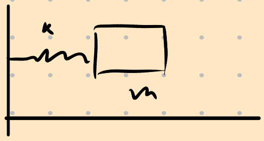
Траектория в п-ве $\xi, \eta$ всегда огр. $\Rightarrow$ п. р. уст.

Если бы не Кориолис, всё бы ушло в $\infty$

# Симметрия в колебаниях

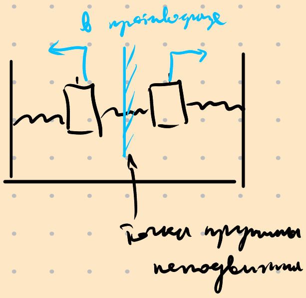



эквивалентно $\sim$

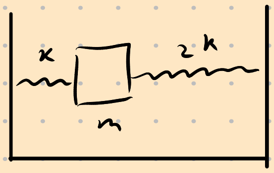



$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

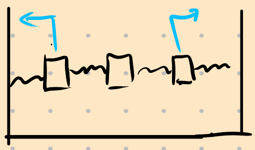
амплитудный вектор



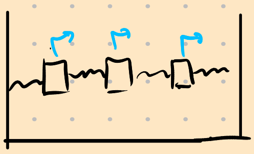

$\sim$




$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ $\qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$



$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – не сущ-ет!

(на центральный не действ. сил, а он двигается - [illegible] каркасом)

$A = mE$ – матрица кин. энергии

$$П = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 = \frac{1}{2}\left(2k\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 2kx_1x_2 - 2kx_2x_3\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

В силу симметрии попробуем искать $u$ в виде $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$

$u^T A u_1 = 0$ – ??? ортогональность?..

$$(C - \omega^2 A)u = \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

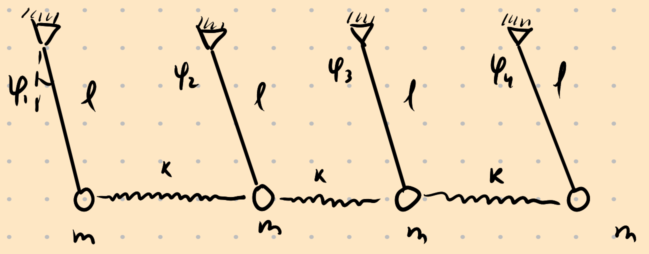
$\to$ вырожденная

$$\begin{cases} 2k - m\omega^2 - k\alpha = 0 \\ -2k + \alpha(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2K + K\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{2,3} = \pm\sqrt{2} \\ 2K - m\omega_{2,3}^2 \mp \sqrt{2}K = 0 \Rightarrow \omega_{2,3} = \sqrt{(2 \mp \sqrt{2})\frac{K}{m}} \end{cases}$$

$$u_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

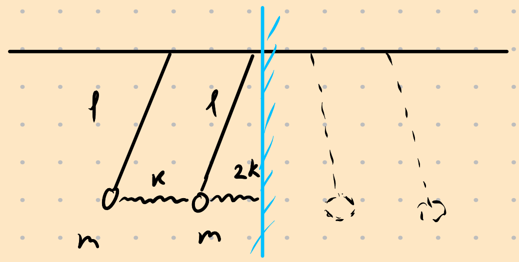
## Случай нулевого корня




первая мода: все синфазно

$\omega_1 = \sqrt{g/l}$ $\quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Симметрия:




Для полной сис-мы — ур-е 8 степени

Для половинки — биквадратное

$\Rightarrow$ находятся $\omega_{2,3}$ и амп. векторы

$$u_{2,3} = \begin{pmatrix} \alpha_{2,3} \\ \beta_{2,3} \\ -\beta_{2,3} \\ -\alpha_{2,3} \end{pmatrix}$$

$u_i^T A u_1 = 0$, $i = 2,3$ — ортогональны

Последний вектор нах-ся из св-в амплитудных векторов: ортогональности:

$$\begin{cases} u_i^T A u_4 = 0 \\ i = 1 \ldots 3 \end{cases} \Rightarrow u_4 \text{ (с точностью до множителя)}$$

Частоту $\omega_4$ ищем из ур-я $(C - \omega_4^2 A) u_4 = 0 \Rightarrow \omega_4^2$ нах-ся из любого ур-я

Не надо делать:

$$\omega_4^2 = \frac{u_4^T C u_4}{u_4^T A u_4}$$

Если $C \geq 0$, то $U^T C U = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2, 0, \ldots, 0)$

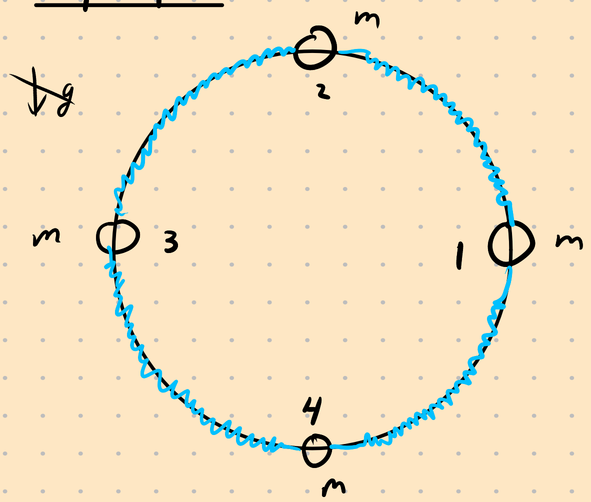
Нулевым частотам соотв. ур-я:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_i = 0 \\ i > k \end{cases} \Rightarrow \theta_i = A_i t + B_i$$

Возьмём $T = \frac{1}{2}\dot{q}^2$, $\Pi = \frac{1}{2}q^8$ $\Rightarrow$ $\Pi_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\ddot{q} = 0$ $\Rightarrow$ $q = At + B$ — неогр. реш-е при уст-ти в 0 — противоречие

Возьмём просто точку: $m\ddot{x} = 0$ — верно

## Пример 3




Найти движ-е сис-мы

Нулевой корень — они все вращаются:

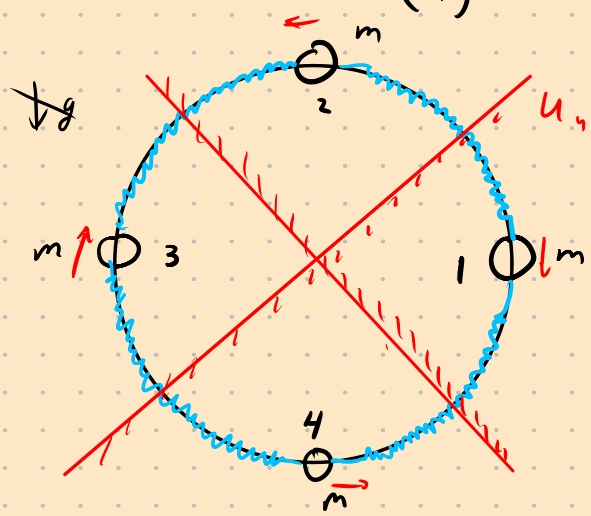
$\omega_1 = 0$ $\qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Если есть трансляционная симметрия, то нулевой корень как правило даёт адекватные движения

$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ (половинки верт. схему)

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

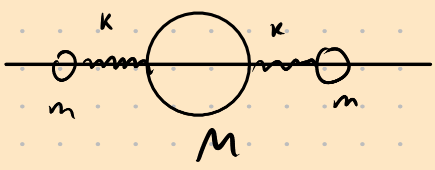
$\omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ $\qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$




$u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\omega_4 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

## Пример 4




$U$ — ? (норм. коор-ты)

$\omega_1 = 0$, $\quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} m & & \\ & M & \\ & & m \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad u_i^T A u_3 = 0$$

$$\begin{cases} mx + My + mz = 0 \\ mx - mz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = z = 1 \\ y = -\frac{2m}{M} \end{array} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2\right] = \frac{k}{2}\left(x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$(C - \omega_3^2 A) u_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} k - m\omega_3^2 & -k & 0 \\ & \dots\dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k - m\omega_3^2 + \frac{2m}{M} = 0 \Rightarrow \omega_3^2 \text{ - найдено}$$

# Вынужденные колебания

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = p\cos\omega t$$ – система (1)

Общее реш-е забудем, ищем только частные (вынужденные): (a)

$$A\ddot{\hat{q}} + B\dot{\hat{q}} + C\hat{q} = pe^{i\omega t}$$ – комплексифицируем

$$\hat{q}(t) \Rightarrow q(t) = \operatorname{Re}\hat{q}$$

$$\hat{q} = he^{i\omega t} \Rightarrow \underbrace{(-\omega^2 A + i\omega B + C)}_{D(\omega)}h = p$$

Если (1) ас. уст. (по признакам в (a)), то $\det D(\omega) \neq 0$

$$h = D^{-1}(\omega)\,p = W(\omega)\,p$$

$$D^{-1} = \frac{D^*}{\det D}$$ – удобнее правила Крамера в случае функц. матриц

$$D^* = (\Delta_{ij})^T$$ – присоед. матрица

$$\hat{q}_k = \sum \underbrace{W_{kj}(\omega)}_{R_{kj}(\omega)\cdot e^{i\psi_{kj}(\omega)}} h_j e^{i\omega t} = \sum R_{kj}(\omega)\cdot e^{i(\omega t + \psi_{kj}(\omega))}$$

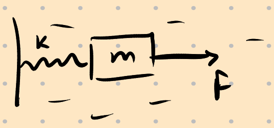
$W_{kj}(\omega)$ – АФХ $\qquad \psi_{kj} = \arg W_{kj}$

$R_{kj}(\omega)$ – АЧХ

$\psi_{kj}(\omega)$ – ФЧХ

$$q_k = \sum R_{kj}(\omega)\cdot h_j \cdot \cos(\omega t + \psi_{kj}(\omega))$$

Пример 1



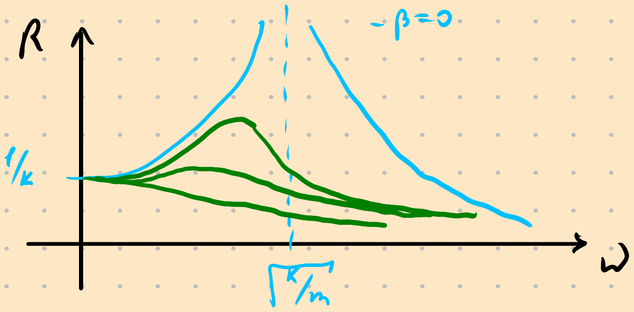

$$F = p\cos\omega t$$

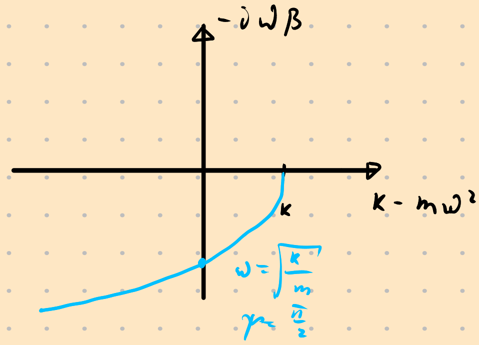
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = p\cos\omega t$$

$$m\ddot{\hat{x}} + \beta\dot{\hat{x}} + k\hat{x} = pe^{i\omega t}$$

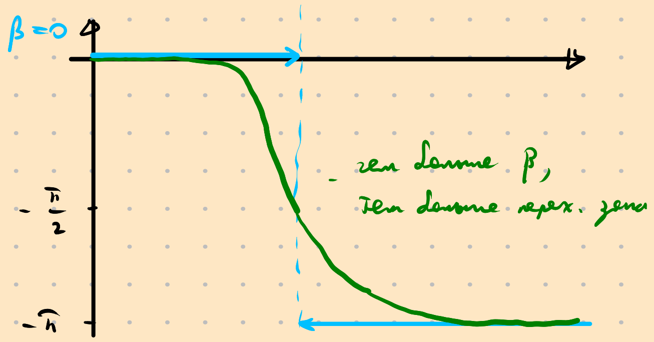
$$W(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega\beta} \qquad R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2}}$$

$$W(\omega) = \frac{k - m\omega^2 - i\omega\beta}{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2} \Rightarrow \psi(\omega) = \arg(k - m\omega^2 - i\omega\beta)$$




АЧХ

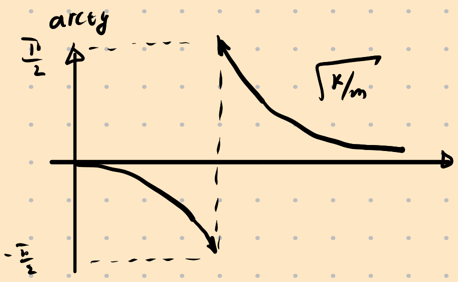



хорошо

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega\beta}{k - m\omega^2}$$ – в Ландау – Лифшице

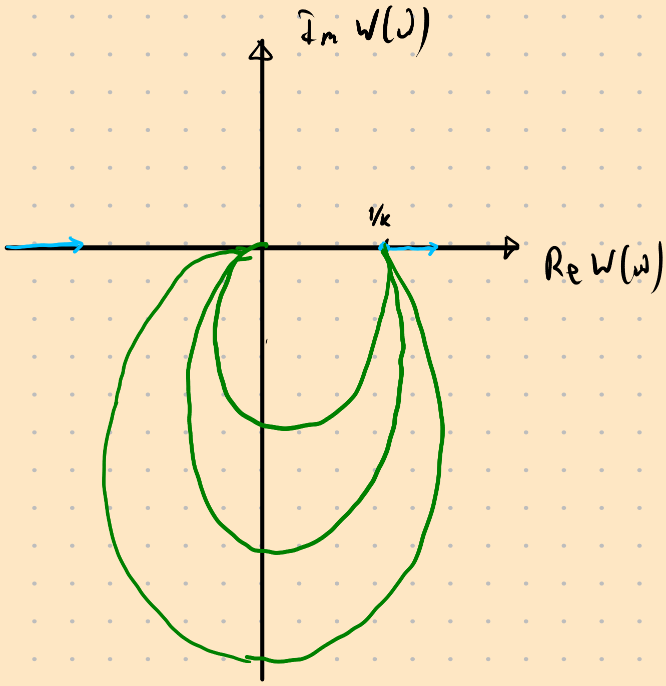
$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega\beta}{k - m\omega^2}$$ – чер-то ещё

плохо!




Пример со шваброй.

Всем спать!




Резонанс

$$\ddot{x} + x = \cos\omega t$$

$$x = \alpha t \sin t$$

$$\dot{x} = \alpha \sin t + \alpha t \cos t$$

$$\ddot{x} = 2\alpha \cos \cos t - \alpha t \sin t$$

$$2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{t}{2} \sin t$$