Неявные ф-ии

$y^2 = x^2$

а) Сколько ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? Бесконечно много:

$X \subset \mathbb{R}: \quad f(x) = x, \ x \in X$

$\qquad\qquad f(x) = -x, \ x \notin X$

б) Сколько непрерывных ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 4:

$x, \ -x, \ |x|, \ -|x|$

в) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 2:

$x, \ -x$

г) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 1:

x

Теорема о неявной ф-ии

Пусть $F(x,y)$ непр. дифф. в (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда $\exists\ \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b\}$ в к-ром $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$.

При этом $f(x)$ непр. дифф. на $(x_0 - a,\ x_0 + a)$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$F(x, f(x)) = 0$

$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow$ формула – не док-во!

Должна быть $\neq 0$ произв. той переменной, которая зависима (равна ф-ии).

№1

$u^3 - xu + y = 0, \qquad u = u(x,y)$

Найти u'_x, u'_y и du в т. $(3, -2, 2)$ и $(3, -2, -1)$ – надо задать u! иначе непонятно что за точка

$x = 3, \ y = -2, \ u = ?$

$u^3 - 3u - 2 = 0 \ \big| \ u = 2$ – реш.

$$(u-2)(u^2+2u+1)=0$$

$$(u-2)(u+1)^2=0 \qquad (u=-1)$$

$$\begin{array}{r|l} u^3-3u-2 & u-2 \\ \cline{2-2} -\;\underline{u^3-2u^2} & u^2+2u+1 \\ 2u^2-3u & \\ -\;\underline{2u^2-4u} & \\ u-2 & \\ -\;\underline{u-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$3u^2u'_x - xu'_x - u = 0$$

$$u_x = \frac{u}{3u^2-x}$$

$$3u^2u'_y - xu'_y + 1 = 0$$

$$u'_y = -\frac{1}{3u^2-x}$$

$$u'_x(A) = \frac{2}{9} \qquad u'_y(A) = -\frac{1}{9}$$

$$du(3,-2,2) = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$$

! Лучше сразу брать дифференциал, не считая производные

$$3u^2du - xdu - udx + dy = 0$$

$$du = \frac{udx - dy}{3u^2-x}$$

№2

$$F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0 \Rightarrow z=z(x,y)$$ – найти dz

$$F(u, v, w)$$

$$F'_u(x-y,\ y-z,\ z-x)(dx-dy) + F'_v(x-y,\ y-z,\ z-x)(dy-dz) + F'_w(x-y,\ y-z,\ z-x)\cdot$$
$$\cdot(dz-dx)=0$$

$$dz = \frac{F'_u dx - F'_u dy + F'_v dy - F'_w dx}{F'_v - F'_w}$$

№3

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x \end{cases} \qquad u=u(x,y) \quad v=v(x,y)$$

$u(1,2)=v(1,2)=0$ (подходит)

Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y при $x=1, y=2, u=v=0$

! При попытке найти u, v – трансц. ур-е. А произв. в т. – линейное

№ 4

$u^3 + 2yu + xy = 0 \qquad u(1,-1) = -1$ (проверим: ОК)

Найти $d^2u\,(1,-1,-1)$

$3u^2du + 2udy + 2ydu + dx\,y + dy\,x = 0$

$$du = -\frac{2udy + dxy + dy\,x}{3u^2 + 2y} \qquad du = dx + dy$$

$6udu^2 + 3u^2d^2u + 2dudy + 2yd^2u + 2dudy + dxdy + dxdy = 0$

$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 \cdot 6u + 4dudy + 2dxdy = 0$

$d^2u - 6(dx+dy)^2 + 4dxdy + 4dy^2 + 2dxdy = 0$

$d^2u = 6dx^2 + 12dxdy + 6dy^2 - 4dxdy - 4dy^2 - 2dxdy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dxdy$

№ Т4

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

Выразить $r'_x,\ r'_y,\ \varphi'_x,\ \varphi'_y$ через r, φ

$$\begin{cases} 1 = r'_y\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_y \\ 0 = r'_y\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_y \end{cases}$$

$\Delta = -r$

$\Delta_r = -r\sin\varphi$

$\Delta_\varphi = -\cos\varphi$

$r'_y = \sin\varphi \qquad \varphi'_y = \frac{\cos\varphi}{r}$

$$\begin{cases} 1 = r'_x\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_x \\ 0 = r'_x\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_x \end{cases}$$

$\Delta = r$

$\Delta_r = r\cos\varphi$

$\Delta_\varphi = -\sin\varphi$

$r'_x = \cos\varphi \qquad \varphi'_x = -\frac{\sin\varphi}{r}$

№ почему всё это было?

$u = u(x, y)$

Решить ур-е $xu'_y - yu'_x = 0$

Полярная замена: $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad u = (r, \varphi)$

$u'_y,\ u'_x$ выразить через $u'_r,\ u'_\varphi$

$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi\,\varphi'_x$

$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y$

$u'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r} \qquad u'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$

Ур-е:

$$\cancel{r}\cos\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \sin\varphi} + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{\cancel{r}}\right) - \cancel{r}\sin\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \cos\varphi} - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\cancel{r}}\right) = u'_\varphi$$

$u'_\varphi = 0$

Ур-е $u = f(r)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Отв.: $u = F(x^2+y^2)$

№5

$(y-z)z'_x + (y+z)z'_y = 0 \qquad z = z(x,y)$

Замена: новые незав. переменные $u = y - z$, $v = y + z$

новая ф-ия $x = x(u,v)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x (x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) + z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$$

$dx = x'_u du + x'_v dv$

$$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y) dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1) dz = 0$$

dy, dz - произвольные => коэф-ты при них $= 0$.

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\dfrac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Подставляем:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v\left(\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u}\right) = 0 \qquad \frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

№ Т3

$f: R^2 \to R^2$, $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

1) Д-ть, что $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$, но f не яв-ся биективным

2) Найти $f(R^2)$ - мн-во значений f.

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Не яв-ся биективной в силу периодичности: $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$

$v(r, \varphi) = v(r, \varphi + 2\pi)$

2) $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$

$v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$ $\quad e^z$ прин. все знач. кроме 0

Экстремумы ф-ий нескольких переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Необх. усл-е: Если в точке лок. экстремума F диффер., то $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ (стац. т.)

Дост. усл-е: Если $F(x_1, \dots, x_n)$ - дважды диффер. в $U_\delta(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0$ - стац. т., то рас-им квадратичную форму от $(dx_1, \dots, dx_n)$:

$$d^2F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} F''_{x_i x_i}(\bar{x}_0) dx_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. кв. ф. полож. опр. => $\bar{x}_0$ - лок. min
2. отриц. опред. => лок. max
3. неопр. => $\bar{x}_0$ - не лок. экстр.
4. полуопред. => ? (смотрим приращение)

Исследование кв. форм

1. Приведение в канонический вид $k(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этот вид однозначен с точностью до перестановок ε_i

p = кол-во $\varepsilon_i = +1$ - положит. индекс инерции

q = кол-во $\varepsilon_i = -1$ - отриц. индекс инерции

$r = p + q$ - ранг

Положит. опред. <=> все $\varepsilon_i = +1$ $\quad p = n, \ q = 0$

Отриц. опред. <=> все $\varepsilon_i = -1$ $\quad p = 0, \ q = n$

Неопред. <=> $\exists \varepsilon_i = 1$ и $\exists \varepsilon_j = -1$ $\quad 1 \le q, \ p \le n-1$

Полож. полуопред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \ge 0$, $\exists \varepsilon_j = 0$ $\quad p \le n-1, \ q = 0$

Отриц. опред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \le 0$, $\exists \varepsilon_j = 0$ $\quad p = 0, \ q \le n-1$

2. Критерий Сильвестра

$B = (b_{ij})$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$

Полож. опред. $\Leftrightarrow$ все $\Delta_i > 0$

3. Частный случай $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ Полож. опред. $\Leftrightarrow$ $A>0,\ AC-B^2>0\ (\Rightarrow C>0)$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow$ $A<0,\ AC-B^2>0\ (\Rightarrow C<0)$

Неопр $\Leftrightarrow$ $AC-B^2<0$

№1

$$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$$

$$u'_x = 6xy - 12$$

$$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2,\ \pm 1 \\ y = \pm 1,\ \pm 2 \end{cases}$$

$u''_{xx} = 6y \qquad u''_{xy} = 6x$

$u''_{yy} = 6y$

$$d^2F = 6y\,dx^2 + 6y\,dy^2 + 12x\,dx\,dy$$

$\dfrac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dx\,dy$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0$ – неопред.

$\dfrac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dx\,dy$ – неопред.

$\dfrac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dx\,dy$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ – положит. опред. – min

$\dfrac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dx\,dy$ – отриц. опред. – max

№ 2

$u = xyz\,(16-x-y-2z), \quad x,y,z>0$

$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$

$u'_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \qquad u'_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$

$u'_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$

$$\begin{cases} yz(16-2x-y-2z)=0 \\ xz(16-x-2y-2z)=0 \\ xy(16-x-y-4z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+2z=16 \\ x+2y+2z=16 \\ x+y+4z=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$$

$u''_{xx} = -2yz = -16 \qquad u''_{yy} = -2xz = -16 \qquad u''_{zz} = -4xy = -64$

$u''_{xy} = z(16-2x-y-2z) - yz = -8 \qquad u''_{xz} = y(16-2x-y-2z) - 2yz = -16$

$u''_{yz} = x(16-x-2y-2z) - 2xz = -16$

$d^2u(4,4,2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdy - 32dydz$

$$\frac{d^2u(4,4,2)}{16}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 > 0 \qquad \Delta_2 > 0 \qquad \Delta_3 > 0$

Полож. опред. $\Rightarrow$ d^2u отриц. опред. $\Rightarrow$ лок. max

№ 3

$u = x^4 + y^4 - 2x^2$

$u'_x = 4x^3 - 4x \qquad u'_y = 4y^3$

$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad u''_{yy} = 12y^2 \qquad u''_{xy} = 0$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy$

$d^2u(0,0) = -4dx^2$ – отриц. полуопред – ?

$u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 = 0$:

$\Delta x = 0 \quad \Delta y \neq 0$ (+)

$0 < \Delta x < \sqrt{2} \quad \Delta y = 0$ (−)

Экстремума нет.

$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2$ – полож. полуопр.

$u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x^4) + \Delta y^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$

$= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + \Delta y^4 > 0$ – min

№ T5

В стац. т. кв. форма d^2f полож. полуопред.

а) Может ли это быть min? Да.

б) Может ли быть max? Нет (всегда есть такие dx и dy, что приращение >0 - в силу d^2f)

в) Не быть экстремума? Да

№ 4

$x^2+y^2+u^2+2x-2y+4u-3=0$ - исслед. неявную ф-ию, зад. ур-ем.

$2x\,dx+2y\,dy+2u\,du+2dx-2dy+2du=0$

$(u+2)\,du+(x+1)\,dx+(y-1)\,dy=0$

$$du=-\frac{(x+1)dx+(y-1)dy}{u+2}$$

$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ - $du=0$

$u^2+4u-5=0$ $\quad u=1,-5$; $\quad(-1,1,1)$, $(-1,1,-5)$

$(u+2)d^2u+\underset{0}{du^2}+dx^2+dy^2=0$

$$d^2u=\frac{-dx^2-dy^2}{u+2}$$

$d^2u(-1,1,1)=-dx^2-dy^2$ - отриц. опред. (max)

$d^2u(-1,1,-5)=\frac{dx^2}{3}+\frac{dy^2}{3}$ - полож. опред. (min)

Условный экстремум

$u=f(\bar{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ $\quad(\bar{x}\in\mathbb{R}^n)$

Условия связи: $\varphi_1(\bar{x})=0,\dots,\varphi_m(\bar{x})=0$ $\quad(*)$ $\qquad n>m$

Точка $\bar{x}^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ наз-ся условным экстремумом $f(\bar{x})$ при усл. $(*)$ $\Leftrightarrow$

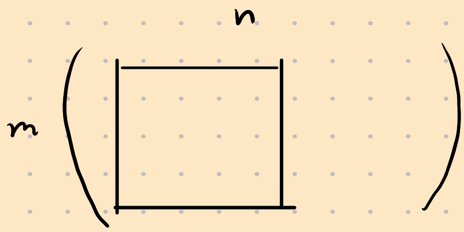
$\Leftrightarrow$ $\exists\delta>0:\forall\bar{x}\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ при вып. ус-ий $(*)$ $\to f(\bar{x})>f(\bar{x}^0)$

Ф-ия Лагранжа $\mathcal{L}(\bar{x})=f(\bar{x})+\lambda_1\varphi_1(\bar{x})+\dots+\lambda_m\varphi_m(\bar{x})$ $\qquad$ далее $x\equiv\bar{x}$, $x^0\equiv\bar{x}^0$

$\mathcal{L}(x)\big|_*=f(x)\big|_*\quad\forall\lambda_i$

Необх. усл.: Пусть $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ непр.-дифф. в $U_\delta(x^0)$, тогда

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}=m$$



При этом $x_1, \dots, x_m$ выраж. через $x_{m+1}, \dots, x_n$ (неявно)

Пусть x^0 – т. усл. экстр. $f(x)$ при вып. (*)

Тогда $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 – стац. т. ф-ии Лагранжа

Сис-ма $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв. $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dots = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

Пример

$n = 2, \quad m = 1$

$u = \ln xy, \qquad x^3 + xy + y^3 = 0$

$\mathcal{L} = \ln xy + \lambda(x^3 + xy + y^3)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = \frac{1}{x} + \lambda(3x^2 + y) = 0 \\ \mathcal{L}'_y = \frac{1}{y} + \lambda(3y^2 + x) = 0 \\ x^3 + xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = -\lambda(3x^2 + y) \\ \frac{1}{y} = -\lambda(3y^2 + x) \end{cases} \qquad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3x^2}{y} - \lambda \\ \frac{1}{xy} = -\lambda \frac{3y^2}{x} - \lambda \end{cases}$$

$\frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow y = x$

$2x^3 + x^2 = 0$

$x_1 = 0$ – не подх. $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$x = y = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = 8$ – возможно усл. экстр.!

Достаточное усл-е: (**) – продифф. ур-я связи

$dx_1, \dots, dx_m$ выраж. через $dx_{m+1}, \dots, dx_n$

Пусть f, φ_i – дважды непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$, x^0, λ_i – реш. сис-мы

$n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв.

$d^2\mathcal{L}(x^0)\Big|_{(**)}$ – квадр. форма от $n-m$ незав. дифф-ов

По ней окончательно опр-ся характер усл. экстремума и его сущ-е.

! Если $d^2\mathcal{L}(x^0)$ до подстановки полож. или отриц. опред. – подстановку можно не делать, и так всё ясно. Иначе нужна подстановка. Если после подстановки форма полуопред. – нужно доп. исследование.

Пример (всё тот же)

$$\mathcal{L}''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \lambda\cdot 6x = -4+8\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -28$$

$$\mathcal{L}''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda\cdot 6y = -28$$

$$\mathcal{L}''_{xy} = \lambda = 8$$

$$d^2\mathcal{L} = -28\,dx^2 - 28\,dy^2 + 16\,dx\,dy$$

$$\frac{d^2\mathcal{L}}{4} = -7dx^2 - 7dy^2 + 4dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix} \quad \text{– отриц. опред.}$$

Понятно, что $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ – условный максимум.

Пример 2

$$u = 1-4x-8y \qquad x^2-8y^2 = 8$$

$$\mathcal{L} = 1-4x-8y+\lambda(x^2-8y^2-8)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -4+2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -8-16\lambda y = 0 \\ x^2-8y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ y = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mp 4 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = \mp\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda = \mp 1 \qquad \mathcal{L}''_{yy} = -16\lambda = \pm 8 \qquad \mathcal{L}''_{xy} = 0$$

$$d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 - 8dy^2) \qquad d^2\mathcal{L}\Big|_{**} = \pm 4dy^2$$

$(**)$ $\quad 2x\,dx - 16y\,dy = 0$ $\qquad$ ⊕ $(-4, 1)$ – полож. опред. $\Rightarrow$ усл. min

$dx = 8y\,\frac{dy}{x} = -2dy$ $\qquad$ ⊖ $(4, -1)$ – отриц. опред. $\Rightarrow$ усл. max

Пример 3

$u = xy, \quad x^2+y^2=1$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$\lambda = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{x}{2y}$

$2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$

$2y^2 - 1 = 0$

Подходят: $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\lambda = -\frac12 \qquad -\frac12 \qquad \frac12 \qquad \frac12$

$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \qquad \mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda \qquad \mathcal{L}''_{xy} = 1 \qquad \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 = 2\lambda \\ \Delta_2 = 4\lambda^2 - 1 \end{matrix}$ – полуопред. форма

$d^2\mathcal{L} = 2\lambda\, dx^2 + 2\lambda\, dy^2 + 2\,dx\,dy$

$(**)\ 2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$$dy = -\frac{2x\,dx}{2y} = \begin{cases} -dx, & x = y,\ \lambda = -\frac12 \\ +dx, & x = -y,\ \lambda = \frac12 \end{cases}$$

$$d^2\mathcal{L}\Big|_{**} = \pm dx^2 \pm dy^2 + 2\,dx\,dy = \begin{cases} -4\,dx^2, & \lambda = -\frac12 \ \text{– отриц. форма – усл. min} \\ 4\,dx^2, & \lambda = \frac12 \ \text{– полож. форма – усл. max} \end{cases}$$

Ответ: $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. min}}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. max}}$

Пример 4

$u = 2x^2 + 12xy + y^2 \qquad x^2 + 4y^2 = 25$

$\mathcal{L} = 2x^2 + 12xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 4x + 12y + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 12x + 2y + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} x(2+\lambda) + 6y = 0 \\ 6x + y(1+4\lambda) = 0 \end{cases}$$ – $(0,0)$ не подходит под усл-я связи

Чтобы у (1) были реш-я кроме $(0,0)$: $\begin{vmatrix} 2+\lambda & 6 \\ 6 & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 0$

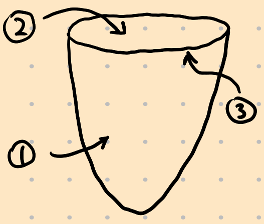
$-34 + 9\lambda + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -\frac{17}{4} \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Далее ничего интересного. мне лень.

Ответ: при $\lambda = 2$: два усл. min, при $\lambda = -\frac{17}{4}$: два усл. max

Наиб. и наим. значения ф-ии на мн-ве

Найти max и min $u=x+y+z$ на мн-ве $x^2+y^2\le z\le 1$ (параболоид)



1. Найти стац. т. в пов-ти: их нет, ф-ия линейна
2. Исследовать границы: пов-ть, её крышка, грань крышки

① $u=x+y+z$, $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2<1$

$u=x+y+x^2+y^2$, $x^2+y^2<1$

Стац. т.: $u'_x=1+2x=0$ $\quad\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$u'_y=1+2y=0$ $\quad u=-\frac{1}{2}$

② $u=x+y+z$ $\quad x^2+y^2<z$, $z=1$

$u=x+y+1$, $x^2+y^2<z$

Стац. т.: нет, $u(x,y)$ линейна

③ $u=x+y+z$, $x^2+y^2=1$, $z=1$

$u=x+y+1$, $x^2+y^2=1$

$\mathcal{L}=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$

$\mathcal{L}'_x=1+2\lambda x=0$ $\quad \mathcal{L}'_y=1+2\lambda y=0$

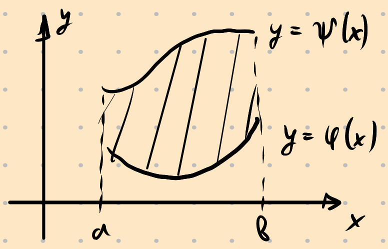
$x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+\sqrt{2}$ $\quad u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-\sqrt{2}$

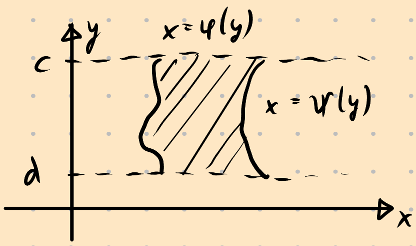
Кратные интегралы

Двойной интеграл

Двойной интеграл вычисляется как повторный.



$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$



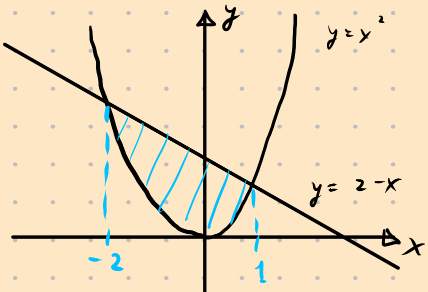
$$\int_c^d dy\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

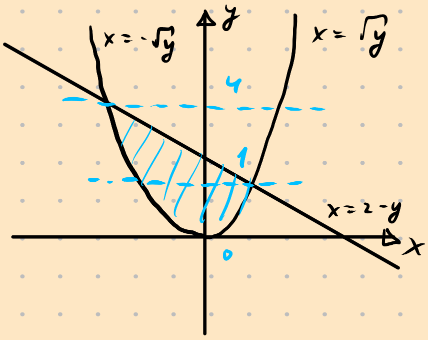
Пример 1

Расставить пределы инт-я 2-мя способами

$y=x^2$; $x+y=2$ - область

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$$

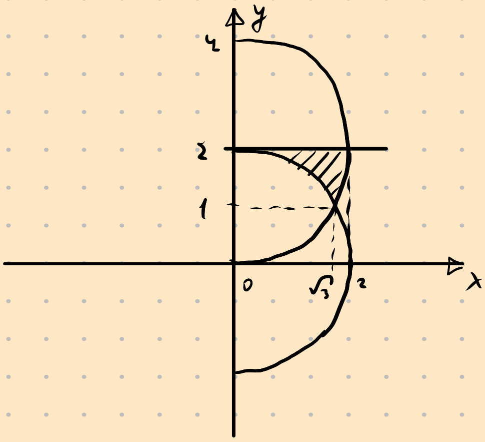




$$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$$

Пример 3

$x=\sqrt{4-y^2}$, $x=\sqrt{4y-y^2}$, $y=2$ $(x>0)$

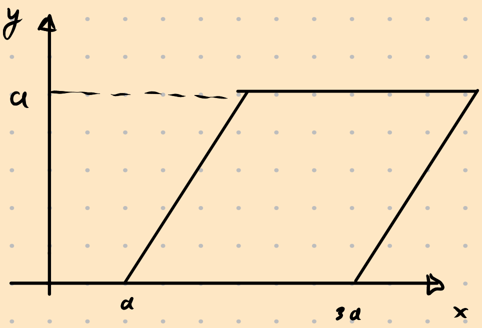


$$\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{0} dx \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2} f(x,y)\,dy$$

$$\int_{1}^{2} dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx$$

Пример 4

$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, G огр. прямыми $y=0$, $y=a$, $y=x-a$, $y=x-3a$, $a>0$



Внеш. y: $\int_{0}^{a} dy \int_{y+a}^{y+3a} (x^2+y^2)\,dx$

$$\int_{0}^{a} dy \left(\frac{1}{3}x^3 + y^2 x\right)\Bigg|_{y+a}^{y+3a} =$$

$$= \int_{0}^{a} dy \left(\frac{1}{3}(y+3a)^3 + y^2(y+3a) - \frac{1}{3}(y+a)^3 - y^2(y+a)\right) =$$

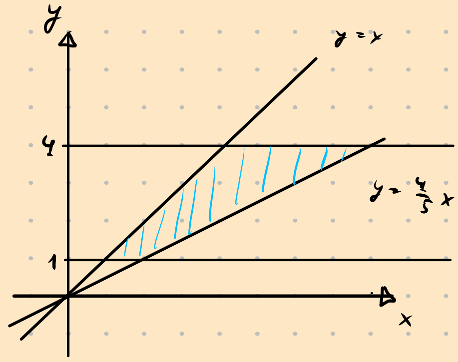
$$= \int_{0}^{a} dy \left(4y^2a + 8ya^2 + \frac{26}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}y^3a + \frac{8}{2}y^2a^2 + \frac{26}{3}ya^3 \Bigg|_{0}^{a} = 14a^4$$

Пример 5

$$\iint\limits_G \sqrt{x-y}\,dx\,dy \qquad G=\left\{\frac{4}{5}x\le y\le x;\ 1\le y\le 4\right\}$$

$$\int_1^4 dy\int_y^{\frac{5}{4}y}\sqrt{x-y}\,dx=\int_1^4 dy\,\frac{2}{3}(x-y)^{3/2}\Big|_y^{5/4\,y}=$$

$$=\int_1^4\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\,y^{3/2}\,dy=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\,y^{5/2}\Big|_1^4=\frac{31}{30}$$

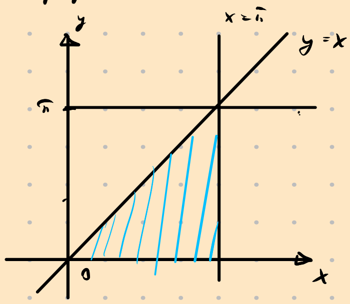


Пример 6

Вычислить повторный интеграл, поменяв порядок интегрирования

$$\int_0^\pi dy\int_y^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\pi dx\int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dy=$$

$$=\int_0^\pi dx\,\frac{\sin x}{x}\cdot x=\int_0^\pi\sin x\,dx=2$$



! Площадь половинки синусоиды = 2

Замечание

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x)\,g(y)\,dy=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy$$

Замена переменных в двойном интеграле

$\underset{(x,y)}{G}\longleftrightarrow\underset{(u,v)}{D}$ — биективное отображение

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$$ — непр. дифф.

Тогда $$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v))\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv$$

Интеграл однократный был ориентирован - пределы переворачивались при произв. < 0

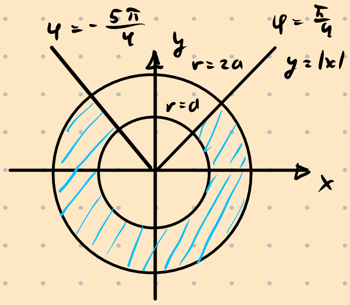
Кратный инт. неориентирован - поэтому модуль якобиана

Частая замена - полярные координаты:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\qquad\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=r$$

Пример 1

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$$ перейти к пол. коорд. $G = \{a^2 < x^2+y^2 < 4a^2,\ y < |x|\}$



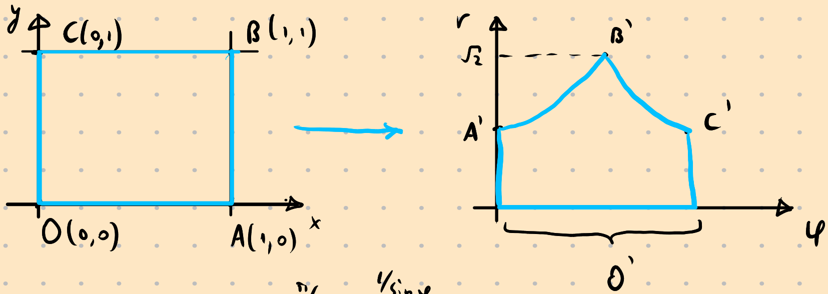
$$\int\limits_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{a}^{2a} r f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{a}^{2a} r\,dr \int\limits_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Пример 2

$G = \{0 \le x,\ y \le 1\}$

$C:\ r=1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$ $\qquad B:\ r=\sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}$

$O:\ r=0,\ \varphi$ - неопред. $\qquad A:\ r=1,\ \varphi=0$

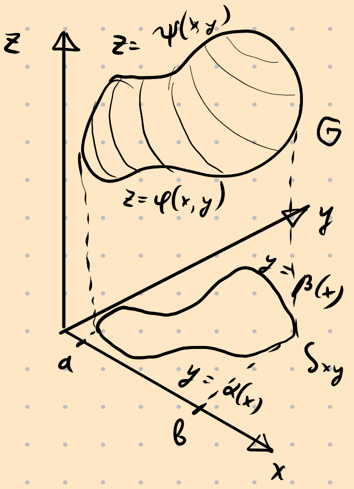


лучше плевать на правую картинку.

$$\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$$

$$\int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$$

Тройные интегралы



$G \subset R$

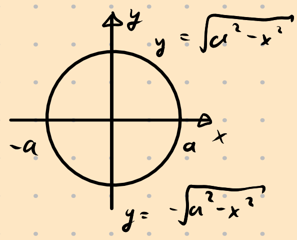
$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_{xy}} dx\,dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

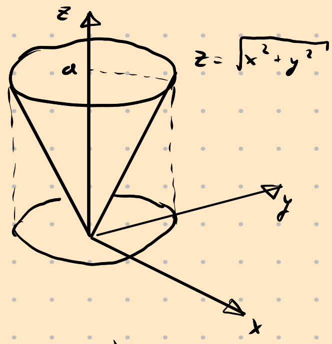
$$= \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Пример 1

Переставить пределы

$$\underbrace{\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy}_{\text{круг}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} f(x,y,z)\,dz$$



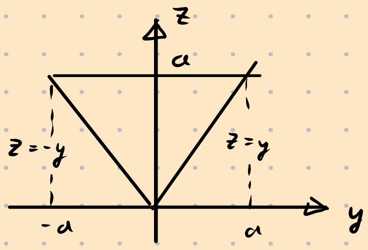


G - конус. Сначала по z от пов-ти конуса до a, потом по (x y) по кругу

Перестановки:

1. x y z 2. y x z 3. x z y $x \leftrightarrow y$

4. z y x 5. y z x 6. z x y $(1) \leftrightarrow (2)$ $(3) \leftrightarrow (5)$ $(4) \leftrightarrow (6)$



(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} f(x,y,z)\,dz$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{a} dz \int_{-z}^{z} dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx$

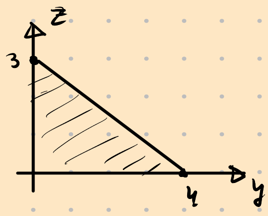
(5) $\displaystyle\int_{-a}^{a} dy \int_{|y|}^{a} dz \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{a} dz \int_{-z}^{z} dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy$

(3) $\displaystyle\int_{-a}^{a} dx \int_{|x|}^{a} dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy$

Пример 2

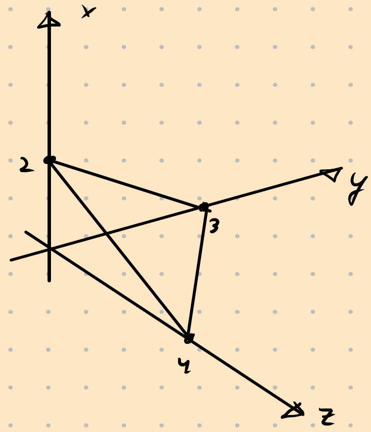
$$\underbrace{\int_0^4 dz \int_0^{3-\frac{3}{4}z} dy}_{S_{yz}} \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x,y,z)\,dx$$

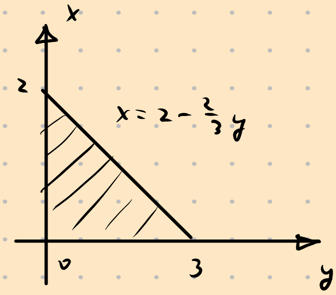


$0 \le y \le 3 - \frac{3}{4}z$

$x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$

$0 \le x \le 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$





$zyx \longrightarrow xyz$

$$\int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int_0^{4-\frac{4}{3}y-2x} f(x,y,z)\,dz$$

Ур-е пл-ти: $x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$

$z = 4 - \frac{4}{3}y - 2x$

Замена переменных в тройном интеграле

1. Цилиндрические координаты

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h$ $\qquad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r$

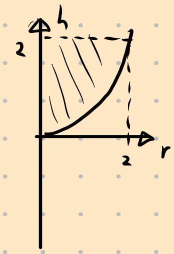
Если φ нет, считаем, что $0 \le \varphi \le 2\pi$

Пример 1

$$\iiint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

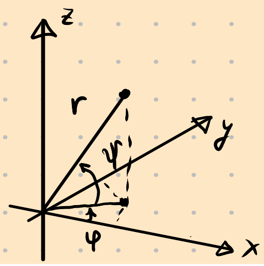
$\frac{x^2+y^2}{2} < z < 2 \qquad \frac{r^2}{2} < h < 2$

$r > 0$ по опр-ю



$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dh \int_0^{\sqrt{2h}} r^3\,dr$$ — от φ ничего не зависит

2. Сферические коорд-ты



$0 \le \psi \le \frac{\pi}{2} \qquad -\pi \le \varphi \le \pi \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$

$z = r\sin\psi$

$x = r\cos\psi\cos\varphi \qquad y = r\cos\psi\sin\varphi \qquad x^2+y^2+z^2 = r$

$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi$ — Якобиан ≥ 0, а z меняет знак, тогда $\sin\psi$ в z, $\cos\psi$ в Якобиане

В физике берут $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ — $\sin\psi$ меняется на $\cos\theta$ и наоб.

Пример 1

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \psi \int_0^{\sin\psi} r^3\cos\psi\,dr = 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4\psi}{4}\cos\psi\,d\psi =$$

$u = \sin\psi$

$du = \cos\psi\,d\psi$

$G: x^2+y^2+z^2 < z$ — от φ ничего не зависит

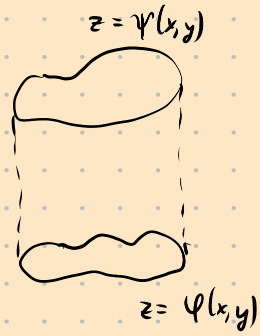
$r^2 < r\sin\psi$

$0 < r < \sin\psi$ $\quad 0 < \varphi < 2\pi$ $\quad$ — $\sin\psi \geq 0$ поэтому $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{u^4}{4}\,du = 2\pi \cdot \frac{1}{20} = \frac{\pi}{10}$$

Объём

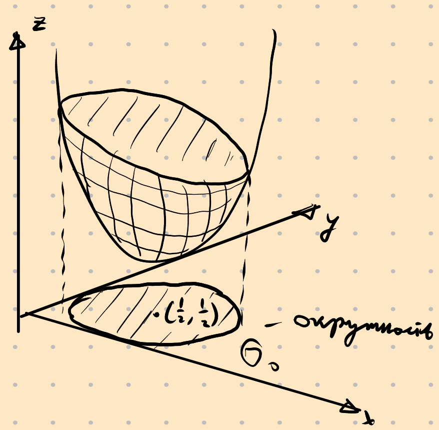
$$V_G = \iiint_G dx\,dy\,dz = \iint_{G_0} (\psi(x,y) - \varphi(x,y))\,dx\,dy$$



Пример 1

Найти объём между $z = x^2+y^2$ и $z = x+y$

$$\iint_{G_0} (x+y-x^2-y^2) =$$



Введём сдвинутые полярные

$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi$ $\quad 0 < \varphi < 2\pi$

$y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$ $\quad 0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x+y-x^2-y^2 = \frac{1}{2} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - r^2$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} r\left(\frac{1}{2} - r^2\right)dr = 2\pi \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

Пример 2

$$\iiint\limits_G \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz \ominus$$

G – эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1$

Введём сферические с растяжением

$x = ar\cos\psi\cos\varphi \quad y = br\cos\psi\sin\varphi \quad z = cr\sin\psi$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = abcr^2\cos\psi$$

$0<\varphi<2\pi \qquad -\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2} \qquad 0<r<1$

$$\ominus \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^1 abcr^2\cos\psi\sqrt{1-r^2}\,dr = 2\pi abc\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\, d\psi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi abc\cdot 2\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = 2\pi abc\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = 2\pi abc\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{\pi^2}{4}abc$$

$r=\sin t$

$dr = \cos t\,dt$

V_{S^3}: $\iint\limits_{x^2+y^2<R^2}(z^+-z^-)\,dxdy$

$x^2+y^2+z^2<R^2$

$z^+ = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$z^- = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

V_{S^4}: $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R^2}(u^+-u^-)\,dxdydz = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R^2} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz \ominus$

$x^2+y^2+z^2+u^2<R^2$

$u^+ = \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$

$u^- = -\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$

$\ominus \frac{\pi^2}{2}R^4$ – объём 4-мерного шара

Криволинейные интегралы

Формула Грина

$$\oint\limits_{\partial G^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$P, Q \in C^1(\bar{G})$

∂G^+ – полож. ориент. граница

$$S_G = -\int\limits_{\partial G^+} y\,dx = \int\limits_{\partial G^+} x\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G^+} (x\,dy + y\,dx)$$

Пример 1

Найти площадь огр. кривой

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

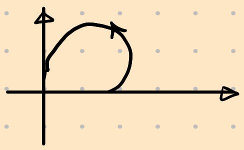
$x = r\cos^4\varphi \qquad y = r\sin^4\varphi$

$$\left(\sqrt{r}\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right)^{12} = r^2 \cdot \cos^4\varphi\,\sin^4\varphi$$

$$r^4 = \cos^4\varphi\,\sin^4\varphi$$

$$r = \cos\varphi\,\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x = \cos^5\varphi\,\sin\varphi \\ y = \sin^5\varphi\,\cos\varphi \end{cases}$$



Пример 2

Вычислить $\displaystyle\oint\limits_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

Γ – простая замкнутая кус.-гл. кривая, не сод. т. $(0,0)$

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Если $\Gamma = \partial G^+$, то $\oint\limits_\Gamma = 0$ по ф-ле Грина

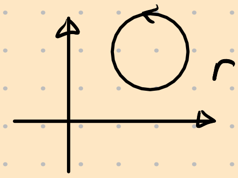
Покажем, что это не так. Возьмём $\Gamma = \{x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi\}$ – окружность с ц. в т. $(0,0)$

$$\oint\limits_\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{a\cos t\; a\cos t - a\sin t(-a\sin t)}{a^2}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

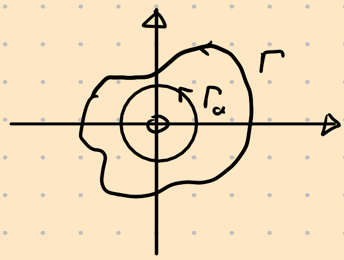
Здесь нельзя применять ф-лу Грина: P и Q не яв-ся непр. дифф. в $\bar{G}$

(т. $(0,0)$ проколотая)

Ф-лу Грина можно применить, если $(0,0)$ вне контура Γ.



Если $(0,0)$ внутри Γ:



$$\oint_{\Gamma_a} = 0$$

Можно подобрать a так, что Γ_a внутри Γ

Пусть G - неодносвязная область между Γ и Γ_a.

$P, Q \in C'(\bar{G})$ и к G применима ф-ла Грина.

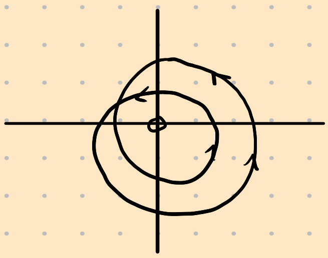
$$0 = \iint_G = \int_{\partial G^+} Pdx + Qdy = \oint_\Gamma + \oint_{\Gamma_a} = \oint_\Gamma - \oint_{\Gamma_a}$$

$$\oint_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \Gamma \\ 2\pi, & (0,0) \text{ внутри } \Gamma \end{cases}$$

Замечание $\quad \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = d\varphi$

Получаем $\displaystyle\int_\Gamma d\varphi = \Delta_\Gamma \varphi = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \Gamma \\ 2\pi, & (0,0) \text{ внутри } \Gamma \end{cases}$

Пример 2



$$\oint_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$$

Поверхностный интеграл I рода

Простая гладкая поверхность ПГП:

$G \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$

$\Phi: \bar{G} \to \mathbb{R}^3_{xyz}$

Φ биективно отобр. $\bar{G}$ на $S \subset \mathbb{R}^3$, S - пов-ть

Простая - биективное отобр.

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned} \qquad (u,v) \in \bar{G}$$

$\vec{r}(u,v) \in C^1(\bar{G})$, $[\vec{r}_u', \vec{r}_v'] \neq \vec{0}$. —

— гладкая.

Поверхностный интеграл 1-го рода

S – ПГП, $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$

$f(x,y,z)$ непр. на S

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv$$

$$|[\vec{a},\vec{b}]|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2 \qquad \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$|\vec{r}_u|^2 = E$, $|\vec{r}_v|^2 = G$, $(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = F$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$$

Примеры пов-тей:

1. График непр. дифф. ф-ии $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{G}$

$$[\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\vec{e}_1 - f_y\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

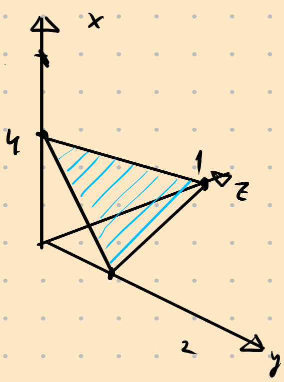
$x = x$
$y = y$
$z = f(x,y)$

$$|[\vec{r}_x, \vec{r}_y]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Аналогично, $x = f(y,z)$: $|[\vec{r}_x, \vec{r}_y]| = \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}$

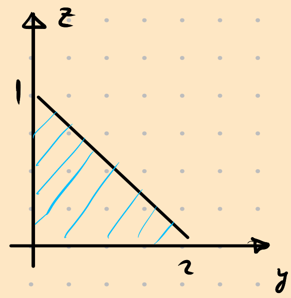
Пример 1

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS \qquad S \text{ – ПГП: } x + 2y + 4z = 4, \quad x,y,z \geq 0$$



$x = 4 - 2y - 4z$
$y = y$
$z = z$

G:



$$|[r_y, r_z]| = \sqrt{1 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\int_0^2 dy \int_0^{1-y/2} (4 - 2y - 4z + y + z)\sqrt{21}\,dz =$$

$$= \sqrt{21}\int_0^2 dy\left((4-y)\left(1-\frac{y}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(1-\frac{y}{2}\right)^2\right) = \sqrt{21}\int_0^2 \left(4 - 3y + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{3}{8}y^2\right)dy =$$

$$= \frac{7}{3}\sqrt{21}$$

(2) Сферическая параметризация

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\varphi \\ y = R\cos\psi\sin\varphi \\ z = R\sin\psi \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2} \qquad R \text{ фиксировано!}$$

$$[\vec r_\varphi, \vec r_\psi] = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ -R\cos\psi\sin\varphi & R\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -R\cos\varphi\sin\psi & -R\sin\varphi\sin\psi & R\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2(\cos^2\psi\cos\varphi\,\vec e_1 + \cos^2\psi\sin\varphi\,\vec e_2 + \cos\psi\sin\psi\,\vec e_3)$$

$$|[\vec r_\varphi, \vec r_\psi]| = R^2\cos\psi$$ — Якобиан, но на поверхности!

Пример 2

$$\iint_S (x+y+z)\,dS$$ S — верх. полусферы: $x^2+y^2+z^2=1$, $z \ge 0$

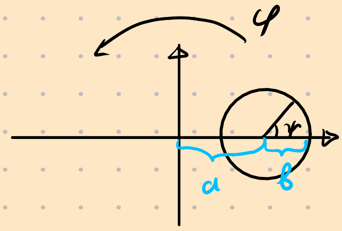
Сферическая параметризация $\qquad \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$

$$\iint_S = \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi)\cos\psi\, R^3\,dR =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\psi\sin\psi\,d\psi = \pi$$

• Площадь $S = \iint_S 1\,ds = \iint_G |[\vec r_u, \vec r_v]|\,du\,dv$

(3) Тор:



$a > b \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi$

$$\begin{cases} x = (a + b\cos\psi)\cos\varphi \\ y = (a + b\cos\psi)\sin\varphi \\ z = b\sin\psi \end{cases} \qquad |[\vec r_\varphi, \vec r_\psi]| = (a + b\cos\psi)b$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi\,(a + b\cos\psi)b = ab\,4\pi^2$$

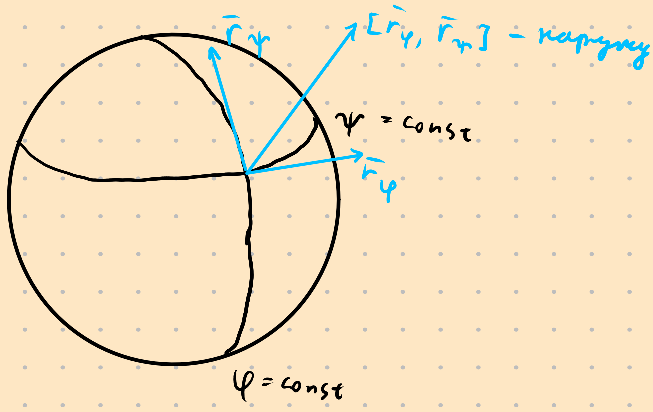
Ориентация ПГП

Это выбор „внутренней" и „внешней" стороны

$S: \quad \bar r = \bar r(u,v), \qquad (u,v) \in \bar D$

$\bar\nu = \pm \dfrac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}$ – пара век-ров ед. нормали

1. Сфера:



$$\begin{cases} x = a\cos\psi\cos\varphi \\ y = a\cos\psi\sin\varphi \\ z = a\sin\psi \end{cases}$$

$\bar\nu = + \dfrac{[\bar r_\varphi, \bar r_\psi]}{|[\bar r_\varphi, \bar r_\psi]|}$ – внешняя сторона

– – внутр.

2. График ф-ии $z = z(x,y)$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases} \qquad [\bar r_x, \bar r_y] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Торчит наверх (образует острый угол с полож. направ. оси Z)

$\bar\nu = + \dfrac{[\bar r_x, \bar r_y]}{|[\bar r_x, \bar r_y]|}$ – соотв. верхней ст. графика

– – нижней

Поверхностный интеграл II рода

$\bar a(x,y,z) = (P, Q, R)$ – непрерывна на ориентированной ПГП

Тогда символ: $\iint\limits_S (\vec a, d\vec S) \equiv \iint\limits_S (P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy)$

Это поток вектора через выбранную сторону пов-ти (в физике)

$\iint\limits_S (\vec a, d\vec s) = \iint\limits_S (\vec a, \bar\nu)\,dS$ – определение

↘ интеграл I рода

$\bar\nu$ – выбранная ед. нормаль

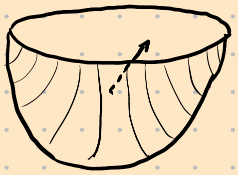
Вычисление: $\iint\limits_S (\bar a, d\vec S) = \iint\limits_S \left(\bar a, \pm \frac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}\right) dS = \pm \iint\limits_D \left(\bar a, \frac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}\right) |[\bar r_u, \bar r_v]|\, du\, dv =$

$$= \pm \iint\limits_D (\bar a, \bar r_u, \bar r_v)\, du\, dv = \pm \iint\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv =$$

$$= \pm \iint\limits_D \left(P \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\, dv$$

Пример 1

$\iint\limits_S z^2 dx dy$, S – внутр. сторона полусферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = c^2$, $z \le 0$



<u>1-й способ</u>

$x = a + c\cos\psi\cos\varphi$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$y = b + c\cos\psi\sin\varphi$ $\qquad -\frac{\pi}{2} \le \psi \le 0$

$z = c\sin\psi$

$$\iint\limits_S = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{vmatrix} 0 & 0 & c^2\sin^2\psi \\ -c\cos\psi\sin\varphi & c\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -c\sin\psi\cos\varphi & -c\sin\psi\sin\varphi & c\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= -c^4 \int_{-\pi/2}^{0} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi\, (\cos\psi\sin\psi \cdot \sin^2\psi) = -2\pi c^4 \int_{-\pi/2}^{0} \cos\psi \sin^3\psi\, d\psi =$$

$$= -2\pi c^4 \int_{-1}^{0} \sin^3\psi\, d(\sin\psi) = \frac{\pi c^4}{2}$$

<u>2-й способ</u> $\quad z = \sqrt{c^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$

Интеграл специального вида: $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_D \begin{vmatrix} 0 & 0 & R(x,y,z(x,y)) \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dxdy =$

(S – график $z = z(x,y)$)

$$= \pm \iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\, dxdy$$

$$\iint\limits_S = + \iint\limits_D (c^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2)\, dxdy =$$

D: $(x-a)^2 + (y-b)^2 < c^2$

Надо ввести полярные коор-ты:

$0 \le \varphi \le 2\pi$ $\qquad x = a + r\cos\varphi$

$0 \le r \le c$ $\qquad y = b + r\sin\varphi$

$$= \int_0^c dr \int_0^{2\pi} (c^2 - r^2) \overset{\text{якобиан полярных коор-т}}{r}\, d\varphi = 2\pi \int_0^c (c^2 r - r^3)\, dr =$$

$$= 2\pi \cdot \left(c^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^c = \frac{\pi c^4}{2}$$

Формула Остроградского-Гаусса

$G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ — область спец. вида

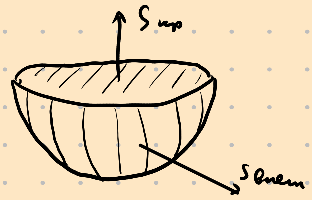
$P, Q, R \in C^1(\bar{G})$

$$\iint\limits_{\partial G} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) = \iiint\limits_{G} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div} \bar{a}} dx\,dy\,dz$$

$\partial G \to$ внешняя граница

<u>3-й способ</u>

$\bar{a} = (0, 0, z^2) \qquad \operatorname{div} \bar{a} = 2z$



$$\iint\limits_{S_{вн}} + \iint\limits_{S_{кр}} = \iiint\limits_{G} 2z\,dx\,dy\,dz \;⊜$$

Сферич. коорд. $\quad x = a + r\cos\psi\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$y = b + r\cos\psi\sin\varphi \qquad -\frac{\pi}{2} \le \psi \le 0$

$z = r\sin\psi \qquad 0 \le r \le c$

$$⊜ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{0} d\psi \int_0^c 2r\sin\psi\, r^2\cos\psi\, dr = \pi \int_{-\pi/2}^{0} \sin 2\psi\, d\psi \,\frac{c^4}{4} = -\frac{\pi c^4}{2}$$

$S_{кр}: \; z = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{кр}} z^2\,dx\,dy = 0$

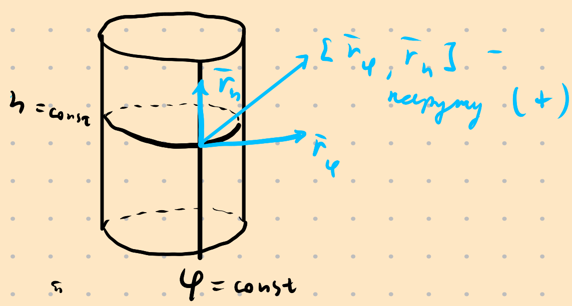
$$\iint\limits_{S_{вн}} = -\frac{\pi c^4}{2} \Rightarrow \iint\limits_{S_{внутр}} = \frac{\pi c^4}{2}$$

Пример 2

$$\iint\limits_{S} yz\,dx\,dy + zx\,dy\,dz + xy\,dz\,dx$$

S — внеш. сторона части цилиндр. пов-ти $\quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x \le 0, \; y \ge 0, \quad 0 \le z \le H$

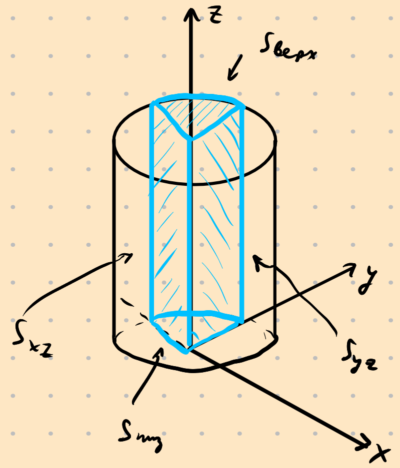
$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, \qquad 0 \le h \le H$$



$$\iint\limits_{S} = \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^H dh \begin{vmatrix} ah\cos\varphi & a^2\cos\varphi\sin\varphi & ah\sin\varphi \\ -a\sin\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^H (a^2 h\cos^2\varphi + a^3\cos\varphi\sin^2\varphi)\,dh = a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^H h\,dh + a^3 H \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= a^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{H^2}{2} - \frac{1}{3} a^3 H$$



<u>2-й способ</u> (Остроградский) Пов-ть незамкнута, крышек много.

$$\iint\limits_{S_{бок}} + \iint\limits_{S_{верх}} + \iint\limits_{S_{низ}} + \iint\limits_{S_{xz}} + \iint\limits_{S_{yz}} = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \bar{a} \, dx\,dy\,dz =$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = x + y + z$$

$$= \iiint\limits_{G} (x+y+z)\, dx\,dy\,dz =$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \qquad 0 < r < a \qquad 0 < h < H$$

$$= \frac{H^2 a^2 \pi}{8}$$

S_{xz}: $y = 0 \Rightarrow \bar{a} = (zx, 0, 0)$

$$\iint\limits_{S} (\bar{a}, \vec{\nu})\, dS, \quad \vec{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{a}, \vec{\nu}) = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{xz}} = 0$$

S_{yz}: то же самое, $\iint\limits_{S_{yz}} = 0$

$S_{низ}$: $z = 0 \qquad \bar{a} = (0, xy, 0) \qquad \vec{\nu} = (0, 0, -1)$

$$(\vec{a}, \vec{\nu}) = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{низ}} = 0$$

$S_{верх}$: $z = H \qquad \bar{a} = (Hx, xy, yH) \qquad \vec{\nu} = (0, 0, 1)$

S - график ф-ии $z(x,y) \equiv H$, верхняя сторона $\Rightarrow +$

D: $x \le 0$, $y \ge 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \le a^2$ Введём полярные, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le a$

$$\iint\limits_{S_{верх}} = + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} \begin{vmatrix} Hr\cos\varphi & r^2\cos\varphi\sin\varphi & Hr\sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} dr =$$

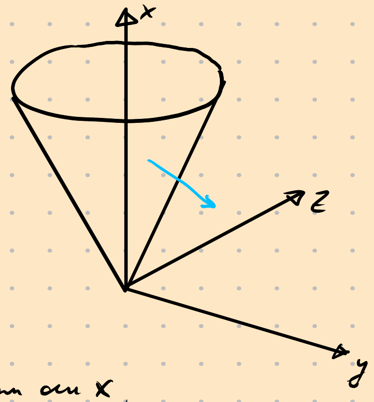
$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} Hr\sin\varphi \cdot r\,dr = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_{0}^{a} Hr^2\, dr = \frac{Ha^3}{3}$$

$$\iint\limits_{S} = \frac{a^2 H^2 \pi}{8} - \frac{Ha^3}{3}$$

Пример 3

$$\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz$$

S — внешн. ст. бок. пов-ти конуса $\sqrt{y^2+z^2} \le x \le H$



1-й способ

Гр. ф-ии $x=\sqrt{y^2+z^2}$ — пов-ть

$(y^2+z^2 \le H^2)$

Верхняя ст. гр. : если нормаль гр.

$x=x(y,z)$ обр-ет острый угол с полож. направл. оси x,

нижн., если тупой

У нас тупой $\Rightarrow$ $\ominus$

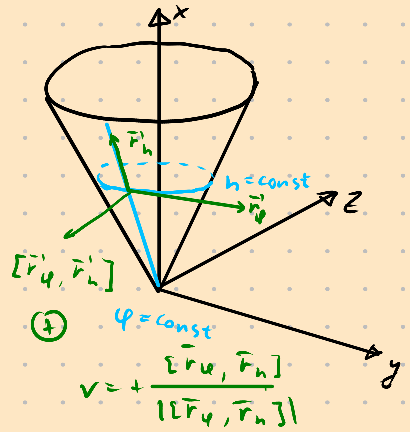
$y = r\cos\varphi$ $\quad 0\le r\le H$

$z = r\sin\varphi$ $\quad 0\le\varphi\le 2\pi$

$$-\iint\limits_D (3y^2+3z^2)\,dy\,dz = -3\iint\limits_D (y^2+z^2)\,dy\,dz = -3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H r^2\cdot r\,dr = -\frac{3\pi H^4}{2}$$

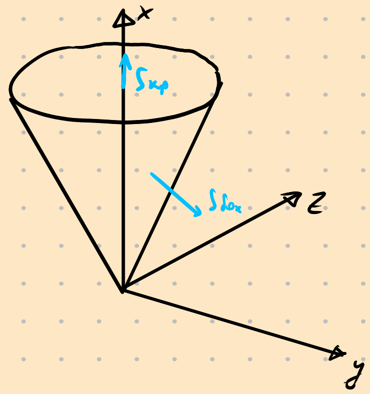
2-й способ „Коническая" параметризация

$$\begin{cases} x=h \\ y=h\cos\varphi \\ z=h\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le h\le H \end{matrix}$$



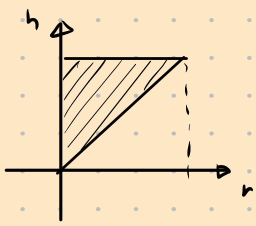
3-й способ (ф-ла О.-Г.)

$$\iint\limits_{S_{бок}} + \iint\limits_{S_{кр}} = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec a\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G 4x\,dx\,dy\,dz \;\ominus$$



Цилиндр. коор-ты

$$\begin{cases} x=h \\ y=r\cos\varphi \\ z=r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le h\le H \end{matrix}$$



$$\ominus \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H dh\int_0^h 4h\,r\,dr = 8\pi\int_0^H h\,\frac{h^2}{2}\,dh = \pi H^4$$

$S_{кр}:\quad x=H \qquad \bar{a}=(2H^2+y^2+z^2,0,0)$

График ф-ии $x=x(y,z)\equiv H$, $y^2+z^2\le H^2$, верх. ст. графика

$$+\iint\limits_{y^2+z^2\le H^2}(2H^2+y^2+z^2)\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H(2H^2+r^2)\,r\,dr=2\pi\left(\int_0^H 2rH^2\,dr+\int_0^H r^3\,dr\right)=2\pi\,\frac{5}{4}H^4=\frac{5\pi}{2}H^4$$

$$\begin{matrix} y=r\cos\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \\ z=r\sin\varphi & 0\le r\le H\end{matrix}$$

Тогда $\iint\limits_{S_{бок}}=\pi H^4-\frac{5\pi}{2}H^4=-\frac{3\pi}{2}H^4$

Теорема Стокса

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} u$$

$$\bar{a} = (P, Q, R), \quad \operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla \cdot \bar{a})$$

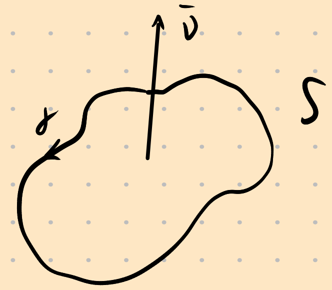
$$(\bar{a} \cdot \nabla) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— оператор!}$$

$$\operatorname{rot} \bar{a} = [\nabla \times \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \ldots$$

(цикл. перестановка)

Теорема Стокса

S — ПГП, γ — край, ориентация согласована



$$\int_\gamma (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}, d\bar{S})$$

Не очень применима на практике. В основном если S — кусок плоскости ($\bar{\nu} = \text{const}$)

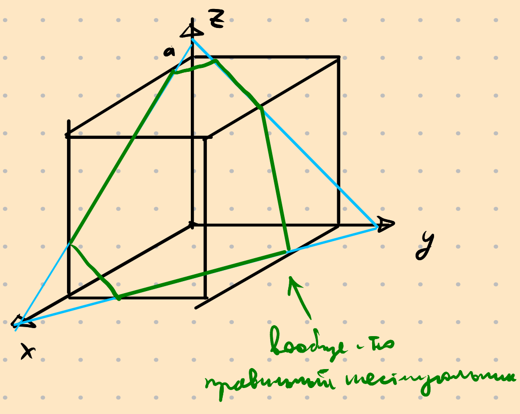
Пример 1

$$\int_\gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

γ — сеч-е пов-ти куба $0 \le x, y, z \le a$ пл-тью $x + y + z = \frac{3}{2}a$.

Контур полож. ориентирован отн. вектора $(1,0,0)$.

(Лучше сказать так: если смотреть с полож. луча оси X, то обход контура против час. стрелки)



Криволин. интеграл — „можно сдохнуть" (6 кусков)

А по Стоксу норм:

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ -2z - 2x \\ -2x - 2y \end{pmatrix}$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\text{rot}\,\bar a, \bar\nu) = -\frac{4}{\sqrt3}(x+y+z) = -\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac32 a = -2\sqrt3 a$ $\quad (x+y+z=\frac32 a$ на пл-ти$)$

$\iint\limits_S (\text{rot}\,\bar a,\bar\nu)\,dS = -2\sqrt3 a S_G = -2\sqrt3 a\cdot 6 S_3 =$

$S_3 = \frac{b^2\sqrt3}{4} = \frac{a^2}{8}\sqrt3 = -\frac92 a^3$

Пример 2

$\oint\limits_\gamma \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+z\,dz$, γ — линия пересеч. сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ пл-ти $x+y+z=0$

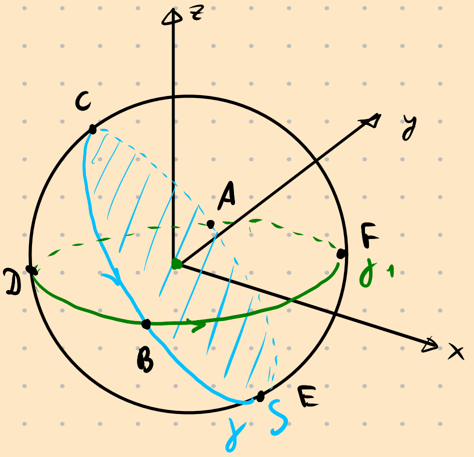
Обх. против ч.с., если смотреть с + оси Z.

$$\bar a = \Big(\underset{P}{-\frac{y}{x^2+y^2}},\ \underset{Q}{\frac{x}{x^2+y^2}},\ \underset{R}{z}\Big)$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ (т. 1)

$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=0$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial x}=0$ $\quad\Rightarrow$ $\text{rot}\,\bar a=0$

Интеграл $= 0$?



Теорему Стокса применить нельзя!

$\forall$ пов-ти S, натянутой на γ $\to$ эта пов-ть протыкается осью Z, а там $x=y=0$ — дырка.

γ_1 — окр-ть в пл-ти (x,y)

$x=\cos t \quad y=\sin t \quad z=0$

Ориентация та же, что у γ

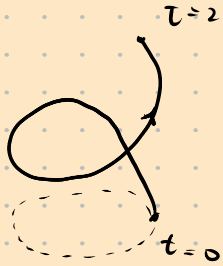
$\int\limits_{AcBDA} = 0$ по т. Стокса (её можно применить — контур целиком на сфере и на него можно натянуть кусок сферы, не протык. осью Z)

Аналогично $\int\limits_{AFBEA} = 0$

$\oint\limits_\gamma - \oint\limits_{\gamma_1} = 0 \Rightarrow \oint\limits_\gamma = \oint\limits_{\gamma_1} = 2\pi$

Пример 3

$$\int\limits_{\gamma} (x^2+yz)\,dx + (y^2+zx)\,dy + (z^2+xy)\,dz$$



γ – кусок винтовой линии, $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $\quad a, b > 0$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

Направление обх. в ст. $\uparrow t$.

$$\int_0^{2\pi} \Big[-(a^2\cos^2 t + ab\sin t \cdot t)\,a\sin t + (a^2\sin^2 t - ab\cos t \cdot t)\,a\cos t + (b^2t^2 + a^2\cos t\sin t)\,b \Big]\,dt$$

Потенциальность

Векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = (P, Q, R)$ наз-ся **потенциальным** в обл. $G \subset \mathbb{R}^3$, если $\exists$ непр.-дифф. ф-я $u(x,y,z)$ (потенциал), что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$

Пусть дано непр. векторное поле $\vec{a}$ в обл. G

Тогда равносильны 3 усл.:

1°. $\vec{a}$ – потенциально в G с u – потенциалом

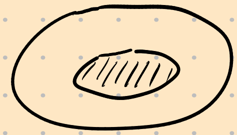
2°. $\int\limits_{\gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ по $\forall$ замкнутой кус.-гл. кривой $\gamma \subset G$

3°. $\int\limits_{\gamma} (\vec{a}, d\vec{r})$ по кус.-гл. кривой $\gamma \subset G$ зависит только от нач. и кон. точек кривой A и B ($\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, обх. в сл. $t \uparrow$, $t = a \to A$, $t = b \to B$)

В этих случаях $\int\limits_{\gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A)$ (в $\mathbb{R}^2$ – аналогично)

Односвязность

- Обл. $G \subset \mathbb{R}^2$ наз. **односвязной**, если $\forall$ замкнутой кус.-гл. кривой $\gamma \subset G$ яв-ся границей области $D \subset G$.



- Обл. $G \subset \mathbb{R}^3$ наз. **поверхностно односвязной**, если $\forall$ замкнутая кус.-гл. кривая $\gamma \subset G$ яв-ся краем кус.-гл. пов-ти $S \subset G$.

- Обл. $G \subset \mathbb{R}^3$ наз. **объёмно односвязной**, если $\forall$ замкн. КГП $S \subset G$ яв-ся гр. обл. $D \subset G$

 $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ – не объёмно односв., но яв-ся пов. односв.

 $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0, y = 0\}$ – не пов. односв.

Пусть вект. поле $\vec{a}$ непр. дифф. в $G \subset R^3$. Тогда

1. Если $\vec{a}$ - потенц. в G, то $rot\,\vec{a} = 0$.
2. Если $rot\,\vec{a} = 0$ в поверхн. односв. обл-ти G, то поле потенц.

$n = 2$ Пусть $\vec{a}(x,y)$ непр. дифф. в $G \subset R^2$. Тогда

1. Если $\vec{a}$ - потенц. в G, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
2. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в односв. обл-ти G, то $\vec{a}$ - потенц. в G.

Пример Т 1 **Контрпример**

$$\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi \qquad \gamma: \begin{matrix} x = a\sin t \\ y = a\cos t \end{matrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Инт. по замкн. кривой $\neq 0 \Rightarrow$ потенц. нет

Но $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, т.к. $G = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ - неодносвязна.

А в R^3:

$$\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + 0 \cdot dz = 2\pi \neq 0 \Rightarrow \text{нет потенц.}$$

Но $rot\,\vec{a} = 0$

Пример 1

$$\int_\gamma (x^2+yz)dx + (y^2+xz)dy + (z^2+xy)dz =$$

γ - кусок винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$ в сн. $t\uparrow$

<u>2-й способ</u>

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2+yz & y^2+xz & z^2+yz \end{vmatrix} = \bar{e}_1(x-x) + \ldots = 0$$

$\Rightarrow$ поле потенциально

$G = R^3$ - пов. односв.

т.е. интеграл не зависит от пути, знач. можно посчитать по отрезку, соед. концы кривой. $x=a,\ y=0,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi$ $t\uparrow$

$$\ominus + \int_0^{2\pi} b^2t^2 b\,dt = b^3\,\frac{8\pi^3}{3}$$

3-й способ

Под интегралом стоит du, где $u=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}+xyz$, т.е.

$$\ominus\ u(a,0,2\pi)-u(a,0,0)=\frac{8\pi^3 b^3}{3}$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla u=\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (\nabla\cdot\vec a)=\operatorname{div}\vec a=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$(\vec a\cdot\nabla)=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}+R\frac{\partial}{\partial z}$ — оператор! „градиент по вектору $\vec a$“

$$(\vec a\cdot\nabla)u=P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=(\vec a,\nabla u)=(\vec a,\operatorname{grad} u)$$

В частности, если $\vec a=\vec l$, $|\vec l|=1$, то $(\vec l,\nabla)u$ — произв. по направл. в-ра $\vec l$.

$$(\vec a,\nabla)\vec b=\left((\vec a,\nabla)b_x,\ (\vec a,\nabla)b_y,\ (\vec a,\nabla)b_z\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec a=[\nabla\times\vec a]$$

$$\Delta=(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \Delta\vec a=(\Delta a_x,\Delta a_y,\Delta a_z)$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec a=(\nabla\cdot[\nabla\times\vec a])=0$ — ортогональные векторы...

$\operatorname{rot}\operatorname{div}\vec a$ — не существует

$$\operatorname{div}(u\vec a)=(\nabla,u\vec a)=(\nabla_u,u\vec a)+(\nabla_{\vec a},u\vec a)=(\nabla_u u,\vec a)+u(\nabla_{\vec a},\vec a)=$$

$$=(\operatorname{grad}u,\vec a)+u\operatorname{div}\vec a$$

В заданиях в коорд-ах выводить не стоит — лучше вот так.

$$\operatorname{rot}(u\vec a)=[\operatorname{grad}u,\vec a]+u\operatorname{rot}\vec a$$

Исследуем центральное поле

$\vec{r} = (x, y, z)$ $\qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\operatorname{div} \vec{r} = 3$ $\qquad \operatorname{grad} |\vec{r}| = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r}$

$\operatorname{rot} \vec{r} = 0$

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$$

Центральное поле $\vec{a} = f(r)\vec{r}$

$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = (\operatorname{grad} f(r), \vec{r}) + f(r)\operatorname{div}\vec{r} = \left(\frac{f'(r)}{r}\vec{r}, \vec{r}\right) + 3f(r) = rf'(r) + 3f(r)$

$\operatorname{rot}[f(r)\vec{r}] = [\operatorname{grad} f(r), \vec{r}] + f'(r)\underbrace{\operatorname{rot}\vec{r}}_{=0} = \left[\frac{f'(r)}{r}\vec{r}, \vec{r}\right] = 0$

$G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ – пов. односв. => центр. поле потенциально.

Соленоидальность

Век. поле $\vec{a}$ наз-ся соленоидальным в обл-ти $G \subset \mathbb{R}^3$, если $\forall$ замкнутой КГП $S \subset G$ $\iint\limits_S (\vec{a}, d\vec{S}) = 0$

Пусть $\vec{a}$ – непр. дифф. век. поле в $G \subset \mathbb{R}^3$, тогда

1. Если $\vec{a}$ соленоидально, то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.
2. Если $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в объёмно односв. обл-ти G, то поле соленоидально.

Контрпример

Пусть $\vec{a}$ – центр. поле

$\operatorname{div}\vec{a} = 0 \Rightarrow rf'(r) + 3f(r) = 0 \quad | \cdot r^2$

$r^3 f'(r) + 3r^2 f(r) = 0 \Rightarrow (r^3 f(r))' = 0 \Rightarrow r^3 f(r) = \mathrm{const}$

$f(r) = \frac{C}{r^3}$ $\qquad$ Поле $\vec{a} = \frac{C}{r^3}\vec{r}$ – кулоновское поле

По т. Гаусса поток через пов-ти не нул.

$\iint\limits_{S_{\text{внеш}}} (\vec{a}, d\vec{S}) = 4\pi C$ – не соленоидально $\quad$ (S – сфера, $r = R$)

$$\iint\limits_{S} \left(\frac{c}{r^3}\vec r, d\vec S\right) = \frac{c}{R^3}\iint\limits_{S}(\vec r, d\vec S) = \frac{c}{R^3}\iiint\limits_{\omega} \underbrace{\operatorname{div}\vec r}_{=3}\, dx\,dy\,dz = \frac{c}{R^3}\, 3V_{\omega} = 4\pi C$$

т. О.-Г. не работает т.к. внутри шара дыра

а тут т. О.-Г. уже работает — нет дыры

Всё потому что область не яв-ся объёмно односвязной.

$$\operatorname{div}[\vec a, \vec b] = (\nabla, [\vec a, \vec b]) = (\nabla_{\vec a}, [\vec a, \vec b]) + (\nabla_{\vec b}, [\vec a, \vec b]) \circledequal$$

$$(\nabla_{\vec a}, [\vec a, \vec b]) = (\nabla_{\vec a}, \vec a, \vec b) = (\vec b, \nabla_a, \vec a) = (\vec b, \operatorname{rot}\vec a)$$

$$(\nabla_b, [\vec a, \vec b]) = -(\nabla_b, \vec b, \vec a) = -(\vec a, \operatorname{rot}\vec b)$$

$$\circledequal (\vec b, \operatorname{rot}\vec a) - (\vec a, \operatorname{rot}\vec b)$$

$\bar c = (c_x, c_y, c_z)$ — пост. в-р

$$\operatorname{div}[\bar c, \bar r] = (\bar r, \operatorname{rot}\bar c) - (\bar c, \operatorname{rot}\bar r) = 0$$

$$\operatorname{rot}[\bar a, \bar b] = [\nabla_{\bar a}, [\bar a, \bar b]] + [\nabla_b, [\bar a, \bar b]]\ ; \quad [\nabla_{\bar a}, [\bar a, \bar b]] \circledequal$$

$$[\bar A, [\bar B, \bar C]] = \bar B(\bar A, \bar C) - \bar C(\bar A, \bar B)$$

$$\circledequal \underbrace{\bar a(\nabla_{\bar a}, \bar b)}_{= (\bar b, \nabla_{\bar a})\bar a} - \bar b\underbrace{(\nabla_{\bar a}, \bar a)}_{\operatorname{div}\bar a} = (\bar b, \nabla)\bar a - \bar b \operatorname{div}\bar a$$

$$\operatorname{rot}[\bar a, \bar b] = \bar a \operatorname{div}\bar b - \bar b \operatorname{div}\bar a + (\bar b, \nabla)\bar a - (\bar a, \nabla)\bar b$$

$$\operatorname{grad}(\bar r, \bar c) = \operatorname{grad}(xc_x + yc_y + zc_z) = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(\bar c, \nabla)\bar r = \bar c$$

$$\operatorname{div}[\bar c, \bar r] = 0$$

$$\operatorname{rot}[\bar c, \bar r) = \bar c \overset{3}{\operatorname{div}\bar r} - \bar r \overset{0}{\operatorname{div}\bar c} + \underbrace{(\bar r, \nabla)\bar c}_{=0} - \underbrace{(\bar c, \nabla)\bar r}_{=\bar c} = 2\bar c$$

$$\operatorname{rot}[\bar r, [\bar c, \bar r]] = \operatorname{rot}(\bar c(\bar r, \bar r) - \bar r(\bar r, \bar c)) = r^2 \underbrace{\operatorname{rot}\bar c}_{=0} + [\operatorname{grad} r^2, \bar c] -$$

$$- (\bar r, \bar c)\underbrace{\operatorname{rot}\bar r}_{=0} - [\operatorname{grad}(\bar r, \bar c), \bar r] = [2\bar r, \bar c] - [\bar c, \bar r] = 3[\bar r, \bar c]$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a} = [\nabla, [\nabla, \bar{a}]] = \nabla(\nabla, \bar{a}) - \bar{a}\underbrace{(\nabla, \nabla)}_{\substack{\shortparallel \\ (\nabla, \nabla)\bar{a}}} = \operatorname{grad}\operatorname{div} a - \Delta\bar{a}$$