Фомичёв Александр Владимирович

Литература

Чёрный список: лекции Фомичёва, интернет

Белый список: Журавлёв; Маркеев; Гантмахер (~ конец сема); Болотенко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома R^3 – все объекты – в Евклидовом пр-ве R^3.
2. $\exists$ движение: $R \mapsto R^3$ (в R – время)
3. $\exists$ мат. точка: $(m, \vec r)$, $m = const > 0$, $\vec r \in R^3$
4. $\exists$ взаимодействие: $\forall\ (m_1, \vec r_1), (m_2, r_2) \to \exists\ \vec F$ – сила: $F \parallel (\vec r_1 - \vec r_2)$

$$\underset{(m_1,\vec r_1)}{\bullet}\xrightarrow{\vec F}\ \xleftarrow{-\vec F}\underset{(m_2,\vec r_2)}{\bullet}$$

5. $\exists$ сис-мы координат и способ параметризации времени, такие что

$$m\ddot{\vec r} = \vec F$$

Такие сис-мы наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot q, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

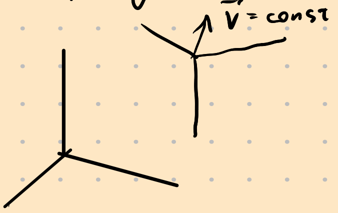
$t = t(t', q')$, $q = q(t', q')$

$F_i(t', q', \dot q', \dots, q'^{(n)}) = 0$ – те же ф-ии!

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правила составления ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относ. преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} r' = \vec r_0 + \vec v t + A t, & A \text{ – ортог. матрица} \\ t' = t + \tau & \leftarrow \text{преобр. (группа) Галилея.} \end{cases}$$

$\vec r_0, \vec v, A, \tau = const$

$$m\ddot{\vec r} = \vec F \longmapsto m\ddot{\vec r}' = \vec F$$

Индексные обозначения

① $\vec{r} \to r^i, \quad i = 1 \dots 3$

② $A \to a_{ij}$

a_j^i

a^{ij}

немой индекс

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i \equiv a^i b^i$ (правило Эйнштейна)

$A\vec{r} = a_{ij} r^j$

бегущий индекс

④ $a, \dots, h$ – фиксирующие индексы

$x^a b^a$ – эл-т с номером a; без суммирования!

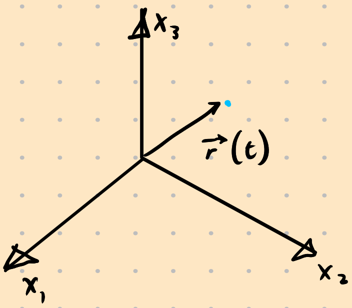
⑤ $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \qquad \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$

Напр. $df = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k}\, dx^k$

Кинематика точки

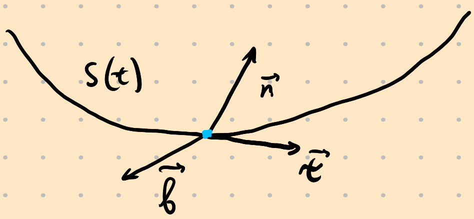
Декартовы координаты



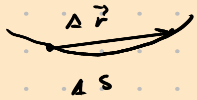
$$\vec r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} \qquad V = \dot{\vec r} = \begin{bmatrix} \dot r^1 \\ \dot r^2 \\ \dot r^3 \end{bmatrix} \text{ — скорость}$$

$$\vec w = \ddot{\vec r} = \dot{\vec v} = \begin{bmatrix} \ddot r^1 \\ \ddot r^2 \\ \ddot r^3 \end{bmatrix} \text{ — ускорение}$$

Сопровождающий трёхгранник Френе

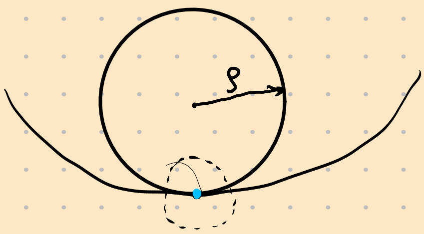


$$\vec r = \vec r(s(t))$$



$$\vec v = \underbrace{\vec r_{,s}}_{\vec\tau}\,\dot s = \vec\tau\, v$$

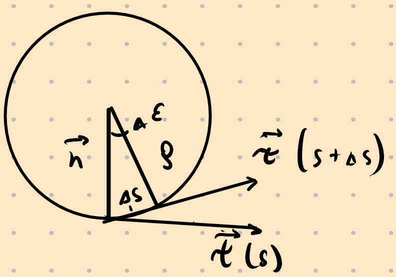
$$\vec w = \vec\tau_{,s} v^2 + \vec\tau \dot v$$



$$\Delta s \simeq \rho\,\Delta\varepsilon$$

$$\Delta\vec\tau \simeq \Delta\varepsilon\,\vec n = \frac{\Delta s}{\rho}\vec n$$

$$\vec\tau_{,s} = \frac{\vec n}{\rho} \Rightarrow \vec w = \underbrace{\dot v\vec\tau}_{\substack{w_\tau \\ \text{тангенц.}}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec n}_{\substack{w_n \\ \text{нормальное}}}$$

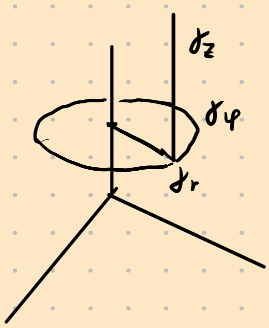


Криволинейные координаты

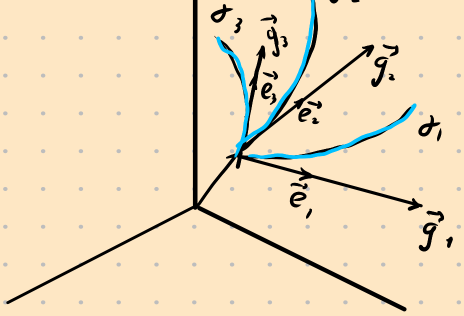
$\vec r = \vec r(q)$; $\quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}$ — криволинейные (обобщённые) координаты

$\det[r^i_{,j}] \neq 0$! Взаимно-однознач. соотв.

$\vec r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$ — цилиндрические координаты



$\begin{cases} q^i \text{ - var} \\ q^{j\neq i} \text{ - fix} \end{cases}$ $\quad i = 1, 2, 3$ — γ_i — координатные линии



$H_k = |\vec g_k|$ — к-т Ламе

$$H_k = \sqrt{(r^1_{,k})^2 + (r^2_{,k})^2 + (r^3_{,k})^2}$$

$\vec e_\alpha = \dfrac{\vec g_\alpha}{H_\alpha}$ - Орты (норм. векторы) лок. базиса

$|\vec e_\alpha| = 1$

Скорость в кривол. коорд.

$$\vec v = \dot{\vec r} = \vec r_{,k}\,\dot q^k \Rightarrow \vec v = \underbrace{\dot q^k}_{\text{составляющая}}\,\vec g_k$$

1 $$\vec v = \sum \underbrace{H_k\,\dot q^k}_{\text{составляющая}}\,\vec e_k$$

$$v^2 = \underbrace{\vec g_i \cdot \vec g_k}_{g_{ik}\text{ - метрич. тензор}} \cdot \dot q^i \cdot \dot q^k = g_{ik}\,\dot q^i \dot q^k$$

2 $$v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec e_i \cdot \vec e_k \rangle \dot q^i \dot q^k$$

Если $\langle \vec e_i \cdot \vec e_j \rangle = \delta_{ij}$:

$$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot q^i)^2$$

Ускорение в кривол. сис-ме

$$\vec w \cdot \vec g_k = \ddot{\vec r} \cdot \vec r_{,k} = (\dot{\vec r} \cdot \vec r_{,k})^{\cdot} - \dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}_{,k}$$

Произв. по q_k ↔ точки:

$\vec r_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec r_{,ki}\,\dot q^i$

$\dot{\vec r} = \vec r_{,i}\,\dot q^i \qquad \dot{\vec r}_{,k} = \vec r_{,ki}\,\dot q^i$

$$\frac{\partial}{\partial q^k}\frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r}{\partial q^k}$$

! $\;{}^{\cdot} = \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot q^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$

$$\dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}_{,k} = \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,k} \qquad (\text{т.к. } v^2 = \dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r})$$

$$\dot{\vec r} = \vec r_{,k}(q) \cdot \dot q^k \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec r}_{,\dot k}}_{\frac{\partial \dot{\vec r}}{\partial \dot q^k}} = \vec r_{,k}$$

$$\dot{\vec r} \cdot \vec r_{,k} = \dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}_{,\dot k} = (v^2/2)_{,\dot k}$$

(3) $\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,a}$

(4) $\vec{w}\cdot\vec{e}_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - (v^2/2)_{,a}\right]$

Оператор Эйлера – Лагранжа

$\xi_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$

$\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right)$

Геометрический смысл H_k и их вычисление

$q^a \to q^a + dq^a$ – только одна комп.

$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a}\cdot dq^a$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad |\cdot\vec{g}_k$ $\qquad T = \frac{mv^2}{2}$ – кин. энергия

$m\,\xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{g}_k = Q_k$ – обобщенная сила

$\xi_k(T) = Q_k$

(6) $\frac{d}{dt}T_{,\dot{k}} - T_{,k} = Q_k$

Для базиса $\vec{e}_k$: $\quad \frac{1}{H_a}\xi_a(T) = \vec{F}\vec{e}_a$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ – зависимость $\qquad q(q')$ – замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot{q}^i = \underbrace{q^i_{,i'}}_{\text{матрица Якоби}}\dot{q}^{i'}$ – контравариантный вектор (набор чисел, к-рый при смене базиса ведет себя вот так) (тензор I ранга)

$\dot{q} = J\dot{q}'$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ – скал. ф-ия

$f(q(q'))$ $\qquad f_{,i'} = f_{,i}\cdot q^i_{,i'}$ – градиент меняется уже не так! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор – тензор I ранга)

$\underbrace{\nabla' f}_{\text{строка}} = \nabla f J$ $\quad \nabla' f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже столбец!}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$

Разница (между ко- и контра-) теряется, если преобр-е ортогонально $\left((J^T)^{-1} = J\right)$

Метрический тензор

$\vec{g}_k = \vec{r}_{,k}$ $\quad \vec{r}(q(q'))$ – замена

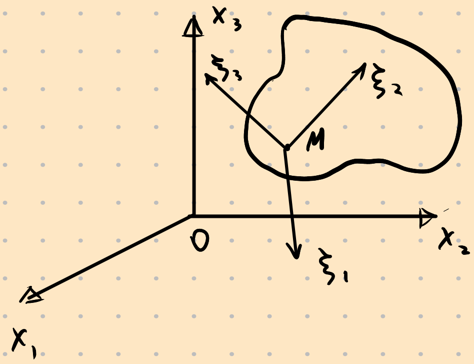
$g_{k'} = \vec{r}_{,k} \cdot q^k_{,k'} = \vec{g}_k\, q^k_{,k'}$ – получается, $\vec{g}_k$ – ковариантный вектор

Метрический тензор: $\vec{v} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow v^2 = \underbrace{g_i g_k}\, \dot{q}^i \dot{q}^k$, $g_{ik} = g_i g_k$ – метрич. тензор!

$g_{i'k'} = q^i_{,i'}\, q^k_{,k'}\, g_{ik}$ – ковариантный тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Кинематика твёрдого тела

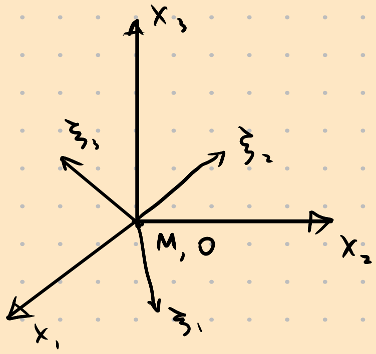
Твёрдое тело — совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



M ∈ телу — полюс ТТ (твёрдого тела)

Движение твёрдого тела — это движение полюса и движение ТТ относ. полюса (вращение).

Вращение. Углы конечного вращения



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

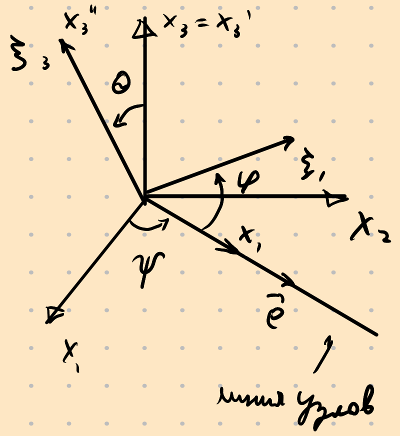
- Углы Эйлера

$\exists$ (пусть) $\vec{x}_3 \nparallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем сис-му координат Ox:

$$X \xrightarrow[3\,(\text{относ. } x^3)]{\psi} X' \xrightarrow[1']{\theta} X'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



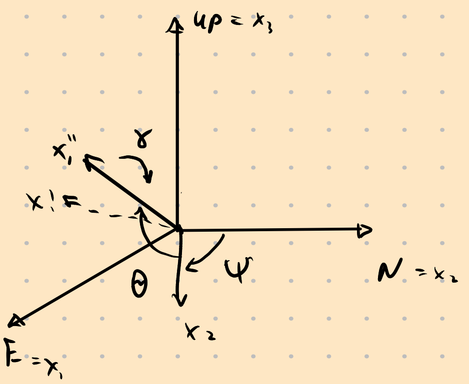
ψ - угол прецессии

θ - угол нутации

φ - угол собственного вращения

Параметры ψ, θ и φ наход. во вз.-одн. соотв. с положением твёрдого тела везде кроме полож. $\theta = \{0, \pi\}$

- Самолётные (корабельные) углы



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ - курс

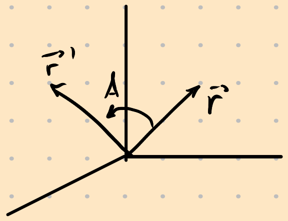
θ - тангаж

γ - крен

Вырождение при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Любая сис-ма углов конечного вращения будет иметь вырождение.

Ортогональная матрица



$\vec r\,' = A\vec r$

$|\vec r\,'|^2 = |\vec r|^2 \quad \forall \vec r$

$|\vec r\,'|^2 = \vec r\,'^T \vec r\,' = \vec r^{\,T} A^T A \vec r = |\vec r|^2 = \vec r^{\,T}\cdot\vec r \quad \forall \vec r \Rightarrow A^T A = 1$ –

Определение ортог. матрицы

Св-ва

1. Теорема Бине-Коши: $|AB| = |A|\cdot|B|$

$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$ поворот; зеркальный поворот

2. $A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

3. $\forall A, B$ - ортог. $\to C = AB$ - ортогональная

$C^T C = B^T \cdot A^T \cdot AB = E$

4. Ортогональные матрицы образуют группу.

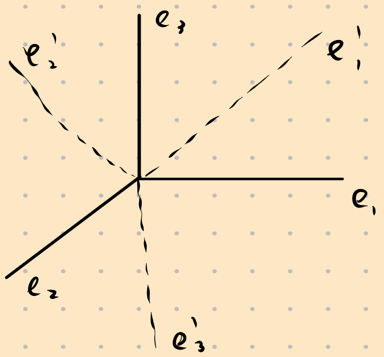
G - группа

1. $\forall A, B \in G \to C = AB \in G$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $\exists E \in G: \ \forall A \in G \to AE = EA = A$
4. $\forall A \in G \to \exists A^{-1} \in G: A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пусть $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = E$

$SO(3)$ - спец. орт. группа; $\forall A \in SO(3) \to |A| = 1$ (группа поворотов)

5. $SO(3)$ - основная мат. модель твёрдого тела с неподвижной точкой.



$\vec e_{i'} = a^i_{i'} \vec e_i$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{1'} & \\ a^2_{1'} & \dots \\ a^3_{1'} & \end{pmatrix} = [\,[\vec e_{i'}]\,]_e$$

$[e_{1'}]_e$

$\vec e_{i'} \cdot \vec e_j = a^i_{i'} \vec e_i \vec e_j = a^j_{i'} \overset{j\to i}{\Rightarrow} a^i_{i'} = \cos(\widehat{e_i, e_{i'}})$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однознач. соответствие между положением твёрдого тела и $A \in SO(3)$.

$A = [\vec a_1, \vec a_2, \vec a_3]$ $\vec a_i \cdot \vec a_j = \delta_{ij} \Rightarrow$ 6 независимых формул $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ матрицы из $SO(3)$ – трёхмерное многообразие в 9-мерном пр-ве матриц

6 $\quad a^i_{i'} = \Delta^i_{i'}$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{[\Delta^i_{i'}]^T}{|A|_{=1}} = A^T \Rightarrow$ ЧТД

эл-т A $\quad$ ал. дополнение

Собственные векторы и собственные числа ортогональных матриц

$A\vec r = \lambda \vec r \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$ $\qquad \operatorname{tr} A = a^i_i$

$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec r_1 : A\vec r_1 = \vec r_1$ – инвариантный вектор

Докажем, что $|\lambda_a| = 1$

$A\vec r_a = \lambda_a \vec r_a \,\Big|\cdot (\text{ком.-е})^+$ $\qquad A^+ = \overline{A^T}$ – эрмитово сопряжение (комплексное сопр-е)

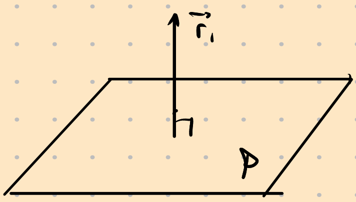
$\vec r_a^{\,+} \underbrace{A^+A}_{E} \vec r_a = \underbrace{\lambda_a^+\lambda_a}_{|\lambda_a|^2} \cdot \vec r_a^{\,+} \vec r_a$ $\qquad$ Если $\vec r_a = \vec p + i\vec q$, то $\vec r_a^{\,+} \vec r_a = \vec p^{\,T} p + \vec q^{\,T} q = |\vec r_a|^2 > 0$

$|\vec r_a|^2 = |\lambda_a|^2 \cdot |\vec r_a|^2 \Rightarrow |\lambda_a| = 1$

$$\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = \frac{\operatorname{tr}A - 1}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{(\operatorname{tr}A-1)^2}{4}}$$

$\vec r_{2,3} = \vec p \mp i\vec q$ $\qquad \{\vec r_1, \vec p, \vec q\}$ – правый ОНБ

Инвар. подпр-во A:



$P \perp \vec r_1$, P – инвар. подпр-во A.

$\exists \vec r \in P$ $\qquad A\vec r_1 = \vec r_1 \Rightarrow A^T \vec r_1 = \vec r_1$

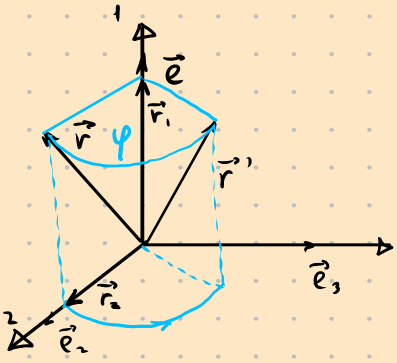
$(A\vec r)^T \vec r_1 = \underbrace{\vec r^{\,T} \underbrace{A^T \vec r_1}_{\vec r_1}}_{0} \Rightarrow A\vec r \in P$

ЧТД

Теорема Эйлера о конечных поворотах

$\forall$ 2х положения тв. тела с неподв. точкой $\exists\, \vec e$ и угол φ конечн. поворота, совмещ. положение тела (в силу существования $\vec r_1$)

Связь ортогональной матрицы и пар-ов Эйлерова поворота



Выберем $\vec e$ как ось поворота, $\vec e_2 \perp \vec e$ лежит в плоскости с $\vec r$ и $\vec e$.

$\vec r$ поворачивается на φ относ. $\vec e$ в $\vec r\,'$.

$\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$, где $\vec r_1 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$\vec r_2 = \vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$$\vec e_2 = \frac{\vec r_2}{|\vec r_2|}$$

$$\vec e_3 = \vec e_1 \times \vec e_2 = \frac{\vec e \times \vec r}{|\vec r_2|}$$

$$\vec r\,' = \vec r_1 + r_2 \cos\varphi\, \vec e_2 + r_2 \sin\varphi\, \vec e_3 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \cdot \vec e + (\vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e)\cos\varphi + \vec e \times \vec r \sin\varphi =$$

$$= (E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^T)\vec r$$

$\hat e \vec r = \vec e \times \vec r$; $\hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^2 \\ -e^2 & e^2 & 0 \end{bmatrix}$ (1) $\quad \vec e \vec e^T = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1e^2 & e^1e^3 \\ e^2e^1 & \dots & \\ & & \end{bmatrix}$

Получим $\boxed{A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^T}$ (2) — причём инв. относ. базиса!

$\vec e \times (\vec e \times \vec r) = \langle \vec e\, \vec r \rangle \vec e - \vec r$

$\hat e^2 \vec r = (ee^T - E)\vec r$

$$\boxed{A = E + \hat e \sin\varphi + \hat e^2 (1-\cos\varphi)}$$

Пусть $\vec\varphi = \vec e \varphi$ — вектор Эйлера (условный вектор — сложение не работает)

* $\vec\varphi \mapsto \hat\varphi$ — соотв. оператор вида (1).

Тогда можно пок-ть, что $A = e^{\hat\varphi}$ (ряд Тейлора)

Выражение парам. Эйл. поворота через эл-ты $A \in SO(3)$

Из (2) $\Rightarrow \operatorname{tr} A = \underbrace{3\cos\varphi}_{E\cos\varphi} + \underbrace{1-\cos\varphi}_{(1-\cos\varphi)\vec e \vec e^T}$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$A = [a^i_j]$

$a^3_2 - a^2_3 = 2e^1 \sin\varphi \Rightarrow e^1 = \dfrac{a^3_2 - a^2_3}{2\sin\varphi} \quad e^2 = \dfrac{a^1_3 - a^3_1}{2\sin\varphi} \quad e^3 = \dfrac{a^2_1 - a^1_2}{2\sin\varphi}$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$; полагаем, что $\varphi \in [0;\pi]$! это делает $\vec e$ таким, что полож. поворот — это против часовой стрелки. Поворот в обр. сторону — берётся $-\vec e$.

Оператор малого поворота. Угловая скорость твёрдого тела

Если $\varphi \ll 1$, то

$$A \simeq E + \hat{\varphi}$$ — оператор малого поворота

Это верно и для $A \in SO(n)$:

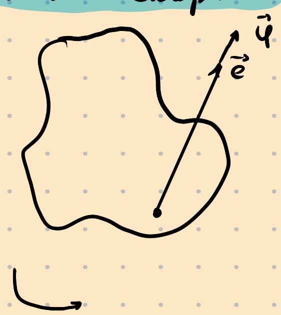
$$A(t) \in SO(n); \quad A(0) = E$$

$$A^T A = E \;\Big|\; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$\underbrace{\dot{A}^T A}_{A = E} + \underbrace{A^T \dot{A}}_{A = E}\Big|_{t=0} = 0$$

$$\dot{A}^T(0) = -\underbrace{\dot{A}(0)}_{=\hat{\omega}} \Rightarrow \dot{A}(0) \text{ — кососимметрическая} \Rightarrow A \simeq E + \Delta t\,\hat{\omega}$$

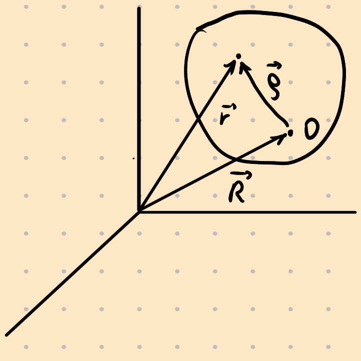
Угловая скорость



$$\exists\, \Delta\vec{\varphi} = \vec{e}\,\Delta\varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$ — угловая скорость

Распределение скоростей и ускорений в твёрдом теле



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\vec{v}_0} + \dot{\vec{\rho}}$$

$$\rho(t + \Delta t) \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\,\vec{\rho}(t)$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}\,\vec{\rho} = \hat{\omega}\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$ — ф-ла Эйлера

$$\vec{W} = \dot{\vec{v}} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$ — ф-ла Ривальса

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$