

Рамиев Александер Владимирович

Минимум

Члены совета: Акимов Рамиев, Чистяков

Бывшие члены: Журабек; Мархел; Гармашев (в коньсена); Бондаренко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома \mathbb{R}^3 - все объекты - в Евклидовомпр-де \mathbb{R}^3 .
2. \exists движение: $R \rightarrow \mathbb{R}^3$ (в \mathbb{R} -время)
3. \exists мат. форма: (m, \vec{r}) , $m = \text{const} > 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4. \exists взаимодействие: $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2) \rightarrow \exists \vec{F}$ -акция: $\vec{F} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\begin{array}{c} \vec{F} \\ \longrightarrow \\ (m_1, \vec{r}_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} -\vec{F} \\ \longleftarrow \\ (m_2, \vec{r}_2) \end{array}$$

5. \exists час-ые координаты и час-ое параллелизм временем, такие что

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие час-ые наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Учеб.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

$$t = t(t', q'), q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0 - \text{же не } q\text{-ун!}$$

Тогда F_i учб.

Ковариантность: инвариантность правил соединения ур-ий.

Пример: ур-я 9. Несущая ковариантна относ. предп-ии Гамильт.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{v} t + A t, \quad A - \text{опис. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{предп. (группа) Гамильт.}}$$

$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = \text{const}$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longleftrightarrow m \ddot{\vec{r}'} = \vec{F}$$

Універсальне обозначення

$$\textcircled{1} \quad \vec{r} \rightarrow r^i, \quad i = 1 \dots 3$$

$$\textcircled{2} \quad A \rightarrow a_{ij}$$

$$a_j \\ a_{ij} \quad \begin{matrix} \text{ненін універ} \\ \swarrow \end{matrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^i b^i \quad (\text{правило дужини})$$

$$A\vec{r} = \underbrace{a_{ij}}_{\text{другим універ}} \vec{r}^i$$

$$\textcircled{4} \quad a, \dots, h - \text{циклическое універса}$$

$x^a b^a - \exists i \in \mathbb{N} \text{ с номером } a; \text{ без суммирования!}$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$$

$$\text{Нпр.} \quad df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$$

Координаты Торка

Декартовы координаты

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

$$v = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{r}^2 \\ \dot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{скорость}$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}^1 \\ \ddot{r}^2 \\ \ddot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{ускорение}$$

Сопровождающие трёхвекторы Торка



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \vec{r}_{,s} \quad \dot{s} = \vec{t} v$$

$$\vec{w} = \vec{t}_{,s} v^2 + \vec{v} \vec{v}$$



$$\Delta \vec{s} \approx g \Delta \epsilon$$

$$\Delta \vec{t} \approx \Delta \vec{e}_n = \frac{4s}{g} \vec{n}$$

$$\vec{t}_{,s} = \frac{\vec{n}}{g} \Rightarrow \vec{w} = \underbrace{\vec{v} t}_{w_t} + \underbrace{\frac{v^2}{g} \vec{n}}_{w_n}$$

Tangential. Normal



Криволинейные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} - \text{криволинейные (однозначные) координаты}$$

$\det [r_{ij}] \neq 0!$ Взаимно-однознач. соотв.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} - \text{цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i - \text{var} & i=1, 2, 3 \\ q^{j+i} - \text{fix} \end{cases} - \gamma_i - \text{координатные линии}$$



$$H_x = |\vec{g}_x| - \kappa r \text{ крив}$$

$$H_x = \sqrt{(r'_x)^2 + (r''_x)^2 + (r'''_x)^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{g}_a}{H_a} - \text{Ориг (норм. вектор) на единица}$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$



Скорость в кривой коорд.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,x} \dot{q}^x \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^x}_{\text{координаты}} \vec{g}_x$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{v} = \sum \underbrace{H_x}_{\text{координаты}} \dot{q}^x \vec{e}_x \quad \text{координаты}$$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_x \cdot \vec{g}_x}_{g_{xx} \text{- метрик. тензор}} \cdot \dot{q}^x \cdot \dot{q}^x = g_{xx} \dot{q}^x \dot{q}^x$$

$$\textcircled{2} \quad v^2 = \sum H_i^2 \cdot \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_x \rangle \dot{q}^i \dot{q}^i$$

$$\text{Если } \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}:$$

$$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot{q}^i)^2$$

Ускорение в кривой коорд.

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_x = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x}) \dot{q}^x - \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}_{,x}$$

Равнл. по $q_x \Leftrightarrow$ вектор:

$$\vec{r}_{,x} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{r}_{,xi} \cdot \dot{q}^i \quad \vec{r}_{,xi} = \vec{r}_{,ki} \cdot q^i \quad \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x} = \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,x} \quad \left(\vec{r}_{,x}, \quad v^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \right)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{,x}(q) \cdot \dot{q}^x \Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{q}^x}}_{\frac{d\ddot{\vec{r}}}{dq^x}} = \vec{r}_{,x}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x} = \vec{r} \cdot \vec{r}_{,x} = \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,x}$$

$$! \quad \dot{q}^i = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$③ \vec{w} \cdot \vec{g}_a = \frac{d}{dt} \left(v^2/2 \right)_{,a} - \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,a}$$

$$④ \vec{w} \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{M_a} \left[\frac{d}{dt} \left(v^2/2 \right)_{,a} - \left(v^2/2 \right)_{,a} \right]$$

Оператор Эйнштейна - дифференциал

$$\xi_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_a = \xi_k \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Кинематический закон Ньютона в виде вспомогательного

$$q^a \rightarrow q^a + dq^a - \text{расположение центра}$$

$$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{M_a} \cdot dq^a$$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \mid \vec{g}_k$$

$$T = \frac{mv^2}{2} - \text{кин. энергия}$$

$$m \xi_k \left(\frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \vec{g}_k \quad Q_k - \text{отдаляемая энергия}$$

$$\xi_k(T) = Q_k$$

$$(6) \frac{d}{dt} T_{,k} - T_{,k} = Q_k$$

$$\text{Другой вид: } \frac{1}{M_a} \xi_a(T) = \vec{F} \vec{e}_a$$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ - зависимость $q(q')$ - замена переменной

Как изменится скорость?

$q^i = \underbrace{q^i}_{\text{координата}} \cdot \underbrace{q^{i'}}_{\text{координата}} - \text{координатный вектор (коорд. вектор, к-ром описано движение)}$
 $\text{изменяется} \quad (\text{тензор 2-го рода}) \quad \text{без сдвигов}$

$$\dot{q} = J q'$$

Что связь с уравнением?

$f(q)$ - час. оп-в

$f(q(q')) \quad f_{,i} = F_{,i} \cdot q^{i'} - \text{уравнение не то! Это ковариантный вектор}$
 $(\text{ковариантный вектор - тензор 2-го рода})$

$$\underbrace{\nabla' f}_{\text{second}} = \nabla f J \quad \nabla f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{yine cok dus}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$$

Paydaya (nemgy ko - u kenige-) teoreti, ean yedap-e oprimonuus $((J^T)^{-1} = J)$

Međurečni Tenzor

$$\vec{g}_x = \vec{r}_{,x} \quad \vec{r}(q(q)) - \text{zavera}$$

$$g_{xx} = \vec{r}_{,x} \cdot \vec{q}_{,x}^* = \vec{g}_x \cdot \vec{q}_{,x}^* \quad \text{- nepravil}, \vec{g}_x \text{ - nekupružnim vektor}$$

$$\text{Međurečni Tenzor: } \hat{V} = q^i \vec{g}_i \Rightarrow V^2 = \underbrace{g_{ii}}_{g_{ik}=g_i g_k} q^i q^k, \quad g_{ik} = g_i g_k - \text{međur. Tenzor!}$$

$$g_{i^1 k^1} = q_{,i^1}^i q_{,k^1}^k g_{ik} - \text{kupružnim Tenzor z-vo parna reda (0,2)}$$

Күрнәмәләндә төбәгесең тәс

Төбәгесең тәс - сабакыннан мат. борк, рас-аси менен к-рләре не извеснедет.



$M \in \text{тәс}$ - нараси ТТ (төбәгесең тәс)

Движение төбәгесең тәс - это гомотетия нараси и
гомоморфия оның, нараси (вращение).

Вращение. Числ. координаты вращения

Собакындан нараси координаты и рас-асында вращение.

- Числ. формула

$$\boxed{\text{уравнение}} \quad \vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3 \\ \vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Неберегидағы си-ми координаты Ох:

$$x \xrightarrow[3 \text{ (числ. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\Theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



Числ. уравн

ψ - уран превращен

Θ - уран нуткашын

φ - уран садақиленесең вращен

Паралеллары ψ , Θ и φ нараси би-зиг. оғын көрб. с позициямен төбәгесең тәс
бенде крате нараси. $\Theta = \{0, \pi\}$

- Симметрия (караданование) уран



Вращение при $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Мадаң си-ми ураның көрнекесең вращен дүгөт иштес вращение.

Ортогональные матрицы



$$\vec{r}' = A \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 A^T A$$

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T A^T A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = I -$$

Определение орт. матрицы

Часть 1

① Теорема Фурье - Крамера: $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |\mathbb{E}| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

небольшой
значительный небольшой

② $A^T A = \mathbb{E} \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③ $\forall A, B$ - орт. $\rightarrow C = AB$ - ортогональная

$$C^T C = B^T A^T \cdot AB = \mathbb{E}$$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

① $\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

③ $\exists E \in G: \forall A \in G \rightarrow AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \rightarrow \exists A^{-1} \in G: A^{-1} A = AA^{-1} = E$

Линия $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = \mathbb{E}$

$SO(3)$ - симм. орт. группы; $\forall A \in SO(3) \rightarrow |A| = 1$ (группа поворотов)

⑤ $SO(3)$ - основная ми. инв. матрица 3-го ранга с неотрицательной формой.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' & \dots \\ a_{21}' & \dots \\ a_{31}' & \dots \end{pmatrix} = [\vec{e}_i]_e$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \stackrel{j \rightarrow i}{\Rightarrow} a_{ii}^1 = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{ii})$$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаим. однознач. соответствие между параметрами 3-го ранга $A \in SO(3)$.

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} \Rightarrow$ 6 независимых строк \Rightarrow
 \Rightarrow матрица из $SO(3)$ — трехмерное многообразие в 9-мерном нр-е пространстве

$$\textcircled{6} \quad a_{ii}^i = \Delta_{ii}^i \quad A^{-1} = \frac{[\Delta_{ii}^i]^T}{|A|_{\infty}} = A^T \Rightarrow UTA$$

↑
3x-я A
an. назначение

Собственные векторы и собственные значения ортогональных матриц

$$A \vec{r} = \lambda \vec{r} \Rightarrow |\lambda E - A| = 0 \quad \text{tr } A = a_{ii}^i$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr } A + \lambda \text{tr } A - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec{r}_1 : A \vec{r}_1 = \vec{r}_1$ — собственный вектор

Докажем, что $|\lambda_0| = 1$

$$A \vec{r}_0 = \lambda_0 \vec{r}_0 \mid \cdot (\text{кв-е})^+ \quad A^+ = \overline{A^T} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{коэффициент комп-а} \\ - \text{правило сопряжения} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_0^T A^+ A \vec{r}_0 = \lambda_0^+ \lambda_0 \cdot \vec{r}_0^T \vec{r}_0 \quad \text{Если } \vec{r}_0 = \vec{p} + i \vec{q}, \text{ то } \vec{r}_0^T \vec{r}_0 = \vec{p}^T \vec{p} + \vec{q}^T \vec{q} = |\vec{r}_0|^2 > 0$$

"F" "iλ₀"²

$$|\vec{r}_0|^2 = |\lambda_0| \cdot |\vec{r}_0|^2 \Rightarrow |\lambda_0| = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = \frac{\text{tr } A - 1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{(\text{tr } A - 1)^2}{4}}$$

$$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i \vec{q} \quad \{ \vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q} \} - \text{нр-е ОКБ}$$

Умнож. нр-е по A:



$P \perp \vec{r}_1$, P -унмнож. нр-е по A.

$$\boxed{I \vec{r} \in P} \quad A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$$

$$(A \vec{r})^T \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}^T A^T}_{\vec{r}_1} \vec{r}_1 \Rightarrow A \vec{r} \in P$$

УД



Теорема Фризера о конечных побородах

А е^{*} — наименш. sl. реда с неогр. колич. Э є в нем 4 конеч. побороды,
 симметр. побороды реда (8 или 16 для каждого \vec{r}_i)

Через ортогональную матрицу и нап-об Эйнштейна поверота



Видим \vec{e} как ось поворота, \vec{r} - лежащая в плоскости с \vec{e} и \vec{r} .

\vec{r} подразумевается на φ омоз. \vec{e} & \vec{r} .

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \text{ где } \vec{r}_1 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}_2|}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \cdot \vec{e} + (\vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}) \cos \varphi + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi = \\ &= (\vec{e} \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top) \vec{r} \end{aligned}$$

$$\hat{\vec{e}} \vec{r} = \vec{e} \times \vec{r}; \quad \hat{\vec{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad \vec{e} \vec{e}^\top = \begin{bmatrix} (e')^2 & e' e^2 & e' e^3 \\ e' e^2 & \dots & \dots \\ e' e^3 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Получим $A = E \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top$ (2) - правило куб. омоз. доказ!

$$\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) = \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle \vec{e} - \vec{r}$$

$$\hat{\vec{e}}^2 \vec{r} = (e \vec{e}^\top - E) \vec{r}$$

$$(A = E + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + \hat{\vec{e}}^2 (1 - \cos \varphi))$$

Пусть $\vec{\varphi} = \vec{e} \varphi$ - вектор Эйнштейна (где \vec{e} единичный вектор - изменение не подходит)

* $\vec{\varphi} \hookrightarrow \hat{\vec{e}} - \cos \varphi$ - ортогон. ортогон. вектор (1).

Тогда можно нап-ти, что $A = e \vec{\varphi}$ (пог. линия)

Выражение нап-об. Эйнштейна. поверота через тр-ти $A \in SO(3)$

$$2\vec{y}_3 (2) \Rightarrow \operatorname{tr} A = 3 \underbrace{\cos \varphi}_{E \cos \varphi} + 1 \underbrace{- \cos \varphi}_{(1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$$A = [a_{ij}^i]$$

$$a_2^3 - a_3^2 = 2 e^1 \sin \varphi \Rightarrow e^1 = \frac{a_2^3 - a_3^2}{2 \sin \varphi} \quad e^2 = \frac{a_3^1 - a_1^3}{2 \sin \varphi} \quad e^3 = \frac{a_1^2 - a_2^1}{2 \sin \varphi}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}; \text{ поэтому, что } \varphi \in [0; \pi]! \text{ т.к. } \vec{e} \text{ единичный вектор, что}$$

нап-об. поверота - это против часовой стрелки. Поверот в одн. направлении - движение $-\vec{e}$.

Оператор наименьшего квадрата. Угловая скорость Тейлора Тесс

Если $\dot{\varphi} \ll 1$, то

$A \approx E + \hat{\varphi}$ - оператор наименьшего квадрата

То близко к гр $A \in SO(n)$:

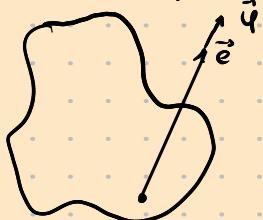
$A(t) \in SO(n); A(0) = E$

$$A^T A = E \quad | \frac{d}{dt}|_{t=0}$$

$$\overset{\cdot}{A}^T A + A^T \overset{\cdot}{A} \underset{\overset{\cdot}{E}}{|}_{t=0} = 0$$

$$\overset{\cdot}{A}^T (0) = -\overset{\cdot}{A}(0) \underset{\overset{\cdot}{\omega}}{|} \Rightarrow \overset{\cdot}{A}(0) - \text{кососимметрическое} \Rightarrow A \approx E + I + \hat{\omega}$$

Угловая скорость



$$\exists \Delta \vec{\varphi} = \vec{e}_A \Delta \varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \quad - \text{угловая скорость}$$

Распределение скоростей и ускорений в Тейлоре Тесс



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{g}}$$

$$g(t + \Delta t) \approx (E + \Delta \hat{\varphi}) \vec{g}(t)$$

$$\dot{\vec{g}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \vec{g} = \hat{\omega} \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{g} \quad - \text{cp-ва Эйнеша}$$

$$\vec{W} = \vec{V} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) \quad - \text{cp-ва Робинсона}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Кинематический закон второго рода

Приложен движением изображение



Базисное движение

Модель движения тела задаётся базисным движением перемещения.

Перемещение тела на расстояние $\Delta l = \overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e}$ и повернуто на φ .

Теорема Маро: А) перемещение тела задаётся базисным движением перемещения.

Б) движение тела перемещение не зависит от базисной массы:



$$\vec{g}' = A \vec{g}$$

$$\vec{g}' \cdot \vec{e} = \vec{g}'^T \vec{e} = (A \vec{g})^T \vec{e} = \vec{g}^T \underline{A^T \vec{e}} = \vec{g}^T \vec{e}$$

Предыдущий \vec{g} не \vec{e} не имеет.

Если $\vec{g} = \overrightarrow{O O'}$ — не важно, как будит O , $\overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e} = \text{const.}$

Рассмотрим движение тела за время Δt



$$\vec{V}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Тело совершает ускоренное базисное перемещение.

Ось кинематического баланса

$$ГМТ: \vec{V} = \vec{V}_0 + \omega \times \vec{r} = \lambda \vec{\omega}$$

$$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}}_{\text{не заб. ор. н.в.в.}} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_0 = \lambda \omega^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} - \text{крутиз. ускорение}$$

не заб. ор.
н.в.в.

Рассмотрим вращение:

$$\begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{oy} + \dots = \lambda \omega_y \\ V_{oz} + \dots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y \\ V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z \\ V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x \end{cases} \right\} = \frac{V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z} \quad \text{- выражение орт. кинематики. Быстро}$$

Несколько кинемат. формул \Leftrightarrow наим. ω , уравнение орт. V_m .

$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Примеч. V_m - мин. скорость в тб. точке.



Сложение вращений

1. Аксиомные вращения



$$\vec{r}' = A \vec{r} \quad \vec{r}'' = B \vec{r}' = BA \vec{r}$$

$$C = BA$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

2. Пассивное вращение



$$\vec{r}^{(1)} = \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i \quad \vec{e}_i^{(1)} = A \vec{e}_i$$

(один и тот же вектор, но в другой форме)

$$\vec{r} = \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_i \text{ (в форме e)} \\ \vec{e}_i^{(1)} = A \vec{e}_i \end{array} \right.$$

B дает e :

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = A \vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}^{(1)} = A^T \vec{r}$$

$$\vec{r}^{(1)} = B^T \vec{r}^{(1)} = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$$

$$C = AB$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

Пример 1



$$C - ? \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Дно, это означает в зеркале, т.е.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- координаты вектора в нов.

$$C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример 2



$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

1. Вокруг z на ψ
2. Вокруг x' на θ - углов динамики
3. Вокруг z'' на φ

Однобугорное, наименее т. зрения

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- привод координат новому базису в шагах

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Кинематические уп-2 Пуассона для ортогональных матриц



A - общее положение базиса тела с ненул. базисом x

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta \hat{\varphi}_x) A(t) & - \text{авт. т. зп.} \\ A(t) (E + \Delta \hat{\varphi}_y) & - \text{нас. т. зп.} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{array}{c} \Delta \vec{\varphi} \leftrightarrow \Delta \hat{\varphi} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \vec{\omega} \leftrightarrow \hat{\omega} \end{array}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A \hat{\omega}_y \end{bmatrix} \quad (1) - \text{Кинем. уп-2 Пуассона.}$$

Если есть $A(t_i)$ и $\hat{\omega}_x(t)$ ибо $\hat{\omega}_y(t)$ то используя эти уп-2, можно находит текущую ориентацию.

Матрица авт. и нас. векторов оговаривает: что это же, что оговаривает в X и в $\hat{\omega}$? т.е. это симб. блоков предп-9.

Уп-2 не универсального назначения, но не ограничено.

Используются наимен. т. зрения (для них лучше строить на копии).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2,3 - 9 \text{ уравнений!}$$

Можно записать это в векторной форме

Причем - правило ОНБ, т.е. спин вращения A вращ. через первое вращ.

$$\vec{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2 \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \end{cases} \quad - \text{6 вр.-вн}$$

$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = \delta_{km}$ - проверка правильности инцидентирования в процессе

Легкое из (1):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_x = \vec{A} \vec{A}^T \\ \hat{\omega}_z = \vec{A}^T \vec{A} \end{cases} \quad - \text{знаем } A(t), \text{ можно вычислить } \omega_x(t) \text{ и } \omega_z(t)$$

Горизонтальное вращение Тейлора



$\vec{\omega}^e, \vec{\epsilon}^e$ - горизонтальное вращение в точке, н.в. вращения
 $\vec{\omega}^r, \vec{\epsilon}^r$ - гориз. вращ. в точ. земли относ. н.в. вращения
 Итак: $\vec{\omega}, \vec{\epsilon}$ - общ. гориз. вращ. в точке.

1. Угловая скорость

Связан с тем, что в н.в. вращением приводимое движение, синхрон. со вращением с н.в. вращением.



$$A \approx E + \Delta \hat{\phi}^e, \quad B \approx E + \Delta \hat{\phi}^r$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{\Delta \hat{\phi}^e + \Delta \hat{\phi}^r}_{\text{(нашествие и н.в. вращ.)}}$$

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r$$

$\hat{\omega}^e$ - неподвижн. гр. вр.

$\hat{\omega}^r$ - синхроничн. гр. вр.

$\hat{\omega}$ - общ. вращ. гр. вр.

2. Скорость винора в ненормированной форме



$$\vec{a} = \sum a_i \vec{e}_i - \text{прямой винор}$$

$$\dot{\vec{a}} = \sum \dot{a}_i \vec{e}_i + a_i \dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

↑ акселер/омни. прям.

↑ ненормир. прямознач

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i \quad (\text{из к-ва Эйнера})$$

3. Чистое ускорение

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\omega}^e + \sum \omega^i \vec{e}_i$$

$$(\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^r + \vec{\omega}^e \times \vec{\omega}^r)$$

4. Осадочный винор

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{ч. винор вращения движущ. - осад. прям.} = \text{осад. прям.}$$

Кинематические уравнения Эйнера

У кватернионов есть наименее избыточные (нанесены в заголовок).

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda} - \text{complement},$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}$$

Нормированное кватернион: $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}; \quad |\vec{e}| = 1$

Действие — погружение ортогональной, и у кватернионов есть!

$R' = Ad R = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$ — приведенное представление

Свойства $Ad R$

$$] R = r_0 + \vec{r}$$

$$1. \quad r'_0 = r_0$$

$$\left. \begin{aligned} R' &= r'_0 + \vec{r}' = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \\ \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \tilde{\vec{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \Rightarrow \text{rect } \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r'_0 = r_0$$

$$2. \quad \vec{r}' = A \vec{r}, \quad A \in O(3)$$

$$\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \sim \text{пр. предп} \Rightarrow \exists A: \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = A \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\|\vec{r}'\| = \|\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| \Rightarrow \|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\| \Rightarrow A \in O(3) \quad \text{Итд,}$$

Задача: $\] \Lambda(t) \in \mathbb{H}, \quad \|\Lambda\| = 1, \quad \Lambda(0) = 1.$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Lambda \circ \tilde{\Lambda} &= 1 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) + \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R} \\ (\text{i.e. } \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = \dot{\Lambda}(0)) \end{aligned} \right.$$

Кватернион вида $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ & механизм действия соподчиняется с вектором

Теорема

Предположим $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$, где $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}$ задает движение погружения
вокруг \vec{e} на угол φ .

D-бо

$$\Lambda \circ \vec{r} - \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \stackrel{\text{континуатор?}}{=} 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}$$

$$\Lambda \circ \vec{r} = \vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = (\vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + 2(\vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = \vec{r} + 2 \lambda_0 \vec{\lambda} \times \vec{r} + 2 \vec{\lambda} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}) = (E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2) \vec{r} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2$ — общий представитель наименее избыточного кватерниона

$$A = E + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \hat{e} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \hat{e}^2 = R + \sin \varphi \hat{e} + (1 - \cos \varphi) \hat{e}^2 -$$

Берілгенде $A \in SO(3)$ резеке негізгі динамикада.

УТА

Симметрия поворотов в кватернионах

1. Аксиоматика 1. зп.



$$\vec{r}' = \Lambda_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}_1, \quad \vec{r}'' = \Lambda_2 \circ \vec{r}' \circ \tilde{\Lambda}_2 \quad \vec{r}'' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\vec{r}'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}_2 \circ \tilde{\Lambda}_1 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$$

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \dots \circ \Lambda_1$$

Поворот бойынша ω мөнде де жүзеге

2. Пасибната 1. зп.



$$\vec{r}'_e = \Lambda_1 \circ \vec{r}_e \circ \tilde{\Lambda}_1$$

$$\vec{r} = r'_e \vec{e}'_e = \Lambda_1 r'_e \vec{e}'_e \circ \tilde{\Lambda}_1$$

$$\text{Б} \text{ жүзеге } e: \quad r = \vec{r}_e \Rightarrow \vec{r}_e = \Lambda_1 \circ \vec{r}_{e'} \circ \tilde{\Lambda}_1$$

$$\text{Тогда } \vec{r}_{e'} = \tilde{\Lambda}_1 \circ \vec{r}_e \circ \Lambda_1$$

$$\vec{r}_{e'} = \tilde{\Lambda}_2 \circ \vec{r}_{e'} \circ \Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2 \circ \Lambda_2 \circ \vec{r}_e \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n$$

Заданное: коор-ти кватерниона Λ ортосимметриялық жүзеге $\{e_i\} \cup \{e_n\}$, т.к.

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi - \text{сандыр, коор-ти } \vec{e} \text{ ортосимметриялық } \{e_i\} \cup \{e_n\}.$$

Коор-ти кватерниона Λ солишенмен жүзеге наложит подчинение Родрига - Раменского.
(солишенмен = жүзеге, а-жыл кватернион поворачивает)

Численные Гиросконы в кватернионах



$\Lambda(t)$ - поворот \lesssim орн. X

$$\Lambda(t+\Delta t) = \begin{cases} \Lambda_x(\Delta t) \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Lambda_z(\Delta t) \end{cases}$$

$$\Lambda_x(\Delta t) = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \vec{e}_x \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 1 + \vec{e}_x \frac{\Delta \varphi}{2} - \text{кб. малого поворота}$$

$$r = \{x, z\}$$

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \vec{\omega}_x \circ \Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \circ \vec{\omega}_x$$

Численный гироскоп на основе разногоризонталей $\vec{\omega}_x$, имеющий, береженное ортосимметрия. Ось z ортосимметриялық жүзеге.

Они называются: а) началь $\Lambda(t)$ по $\vec{\omega}_x(t)$ и $\Lambda(0)$ б) началь $\vec{\omega}_x$ по $\Lambda(t)$

$$\vec{\omega}_x = 2\vec{i} \cdot \tilde{\vec{r}}, \quad \vec{\omega}_y = 2\tilde{\vec{r}} \cdot \vec{i}$$

Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами твердого тела, т.к. $\vec{1}$ и $-\vec{1}$ дают один и тот же поворот.

$$\|\vec{1}\| = 1 \Leftrightarrow \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad - S^3 \subset \mathbb{R}^4 \text{ - сфера}$$



один и тот же поворот

Основные понятия и законов динамики

1° Объем континуума (часть из общей массы с раб. состоянием \vec{p})



2° Центральная масса $\vec{I} = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dm = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{m_i = \text{const}} f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \Delta m_i$
Масса - это мера!

$$m = \int dm - \text{масса}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm - \text{центр масс}$$

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm - \text{импульс}$$

$$\vec{I} = \int f dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt} \int \vec{r} dm \Rightarrow \vec{p} = m \vec{V}_c$$

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm - \text{кин. энергия}$$

$$\vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm - \text{внешн. импульс}$$

Перенос и навесн. массы

$$\vec{K}_{o'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_o + \vec{r}_o - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{K}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{R}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{p} \times \vec{o'o} \quad \vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{o'o} \quad - \text{qp-им. аналогии} \\ (\text{без об-ва подразумевают } \vec{K}_o)$$

Теорема Кинуна



$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

$$T = \frac{1}{2} \int (V_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot \vec{V}_r + V_r^2) dm$$

$$\int \vec{V}_r dm = \frac{d}{dt} \int \vec{p} dm = m \dot{\vec{p}}_c = 0 \quad (т.к. \vec{p}_c = 0)$$

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int V_r^2 dm$$

Закони визначення грав. центру

$m \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{F}}$ - акселерація маси



$$dm \Rightarrow d\vec{F} = \vec{f} dm, \quad \vec{f} - \text{моменти сили}$$

$$\vec{f} = \vec{f}^e + \vec{f}^i$$

бескоштовне
вироблене

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$



$$\dot{\vec{P}} = \int \dot{\vec{V}} dm = \int (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = \int \vec{f}^e dm = -d\vec{F}_i dm,$$

$$= \vec{R}^e$$

$\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e$, \vec{R}^e - зображеній вектор балансу сили

$$\dot{\vec{P}} = m \ddot{\vec{V}}_c \Rightarrow m \dot{\vec{V}}_c = \vec{R}^e$$

$m \ddot{\vec{r}}_c = \vec{R}^e$ - теорема про збереження центра мас

$$\dot{\vec{K}}_o = \frac{\int (\vec{V} - \vec{V}_o) \times \vec{V} dm}{m \vec{V}_o \times \vec{V}_c} + \frac{\int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm}{M_o^e}$$

$\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^e - m \vec{V}_o \times \vec{V}_c$ - теорема про збереження кінетичного моменту

$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm \Rightarrow \dot{T} = \int \vec{V} \cdot \dot{\vec{V}} dm = \int \vec{V} \cdot (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = N^e + N^i$$

$$\dot{T} = N^e + N^i$$

Додаткові теореми гармонічного в руху

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{W}} = \ddot{\vec{W}}^r + \ddot{\vec{W}}^e + \ddot{\vec{W}}^c = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$

$$\ddot{\vec{W}}^r = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^e}_{\vec{j}^e} - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^c}_{\vec{j}^c} \quad \vec{j}^e, \vec{j}^c - \text{моменти непорівності та криволінійного руху}$$



$$\vec{j}^e = -\vec{w}_o - \vec{\epsilon} \times \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g})$$

$$\vec{j}^c = -2\vec{\omega} \times \vec{V}^r$$

$$\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{ex} + \vec{R}^e + \vec{R}^c$$

$$\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^{ex} + \vec{M}_o^e + \vec{M}_o^c - m \vec{V}_o^r \times \vec{V}_c^r$$

$$\dot{T} = N^{ex} + N^e + N^i$$

$$\vec{j}^c = -2\vec{\omega} \times \vec{V}^r \quad n = \vec{V}^r \cdot \vec{j}^c = 0 \quad \text{- нульовий криволінійний рух}$$



\vec{g}

Замечание

При решении задач не всегда удобно
использовать гравитацию в форме приведенное и
иметь гибкую систему координат.



$$\vec{R}^e = - \int \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{g}) dm = - m \vec{\omega} \times (\vec{r}_c \times \vec{g}_c)$$



$$\vec{M}_o^e \neq \frac{1}{2} \vec{R}^e l_{\text{rod}}$$

Но это не всегда удобно, а не упрощает \vec{R}^e в конечном итоге.

Одномерные системы, движущиеся на плоскости



$$\vec{M}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{f} dm \quad (\text{здесь } \vec{f}^i \text{ и } \vec{f}^e)$$

$$\vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{O}'O \times \vec{R}, \quad \vec{R} = \int \vec{f} dm$$

$$\begin{cases} \vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{R} \times \vec{O}' \\ \vec{V}_o = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{O}' \end{cases} \quad - \text{стационарные и неподвижные}$$

Несколько моделей центра масс, примененных к движению Тела, obtained в зависимости от того какого центра мы хотим выбрать.



Если $\vec{M}_o = 0$, то все же есть способы подавить движение.

Квазинеоднородные тела

$$d\vec{r} \neq \vec{F} \quad \delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} - движение под действием$$

$$N \approx \vec{F} \cdot \vec{V}$$

① Если $N = \vec{F} \cdot \vec{V} \leq 0$, то \vec{F} - движущее. Если $N > 0 \quad \forall \vec{V} \neq 0$, то \vec{F} - сопротивление.

Пример: $\vec{F} = -\beta \vec{V}$

② Еслай $N = 0$, то F - гиростатический

Пример: $\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$, $\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}$

③ F ноз. а потенциалын, еслай $\exists \Pi(\vec{r}, t)$: $\vec{F} = -\nabla \Pi$

Күмбезлік потенциалын

$\vec{F}(\vec{r}, t)$ - потенциалда $\Leftrightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} \Big|_{t=\text{const}} = 0$

D-бұ

Еслай $\vec{F} = -\nabla \Pi$, т.к. $\oint \nabla \Pi d\vec{r} = 0$

Еслай $\oint = 0$, т.к. $A(r, t) = \int_0^r \vec{F} d\vec{r}$

$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \epsilon \vec{e}_i$, $t \in [0, \Delta h]$
Lagrange's
variables

$\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\dots, r_0 + \epsilon, \dots) d\epsilon \stackrel{\text{т.о.}}{=} F_i(\dots, r_0 + \theta, \dots) \Delta h$

$F_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \Pi = -A$ $\nabla \Pi$



Еслай $F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$ (1)

B \mathbb{R}^3 үздінде (1) $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

Одесінде жаңадан дәл көрсетіліп, оғындырылған в. деяқ оқынналады.

Еслай $\vec{F} = -\nabla \Pi(\vec{r})$ (потенциалдың сандықшылығы), т.к.

$dT = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla \Pi d\vec{r} = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$

Движенине Торин б. үзілішінан наше



$$\vec{K}_0 = \text{const} \quad (\vec{M}_0 = \vec{0})$$

$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{const} \Rightarrow \vec{r} \text{ и } \vec{V} \text{ берілген кемелерде оның мәндерін}$

$$\begin{cases} m(r - r\dot{\varphi}^2) = F = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{r} & -\text{закон Ньютона} \\ \frac{1}{r} (r^2 \dot{\varphi})' = 0 & \text{жерде күзгілік} \end{cases}$$

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = \text{const}$$





$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const} - \text{diskopasalas ekspresis}$$

Biopāri zēzēm Kēmpē

Рензор инерции тв. тела в его центре



$$\vec{K}_o = \int \vec{p} \times \vec{v} dm = \int \vec{p} \times (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \int \vec{p} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{p})}_{-\hat{p}\hat{\omega}} dm + m \vec{p}_c \times \vec{v}_o \quad (1)$$

$\hat{p}^T \hat{p} dm \vec{v}$

J_o - рензор инерции тв. тела в т. О



$$p^2 = (\vec{p} \times \vec{e}) \cdot (\vec{p} \times \vec{e}) = (\hat{p} \times \vec{e})^T \hat{p} \vec{e} = \vec{e}^T \hat{p}^T \hat{p} \vec{e}$$

$j(\vec{p}) = \hat{p}^T \hat{p}$ - рензор квадратов расстояний

$$p^2 = \vec{e}^T j(\vec{p}) \vec{e}$$

$$\vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) = p^2 \vec{\omega} - \langle \vec{p} \cdot \vec{\omega} \rangle \vec{p} = (p^2 E - \vec{p} \hat{p}^T) \vec{\omega}$$

$$\hat{p}^T \hat{p} = p^2 E - \vec{p} \vec{p}^T$$

$$J_o = \int (p^2 E - \vec{p} \vec{p}^T) dm \Rightarrow J_o = \begin{pmatrix} \int (p_1^2 + p_2^2) dm & -\int p_1 p_2 dm & -\int p_1 p_3 dm \\ -\int p_2 p_1 dm & \int (p_2^2 + p_3^2) dm & -\int p_2 p_3 dm \\ -\int p_3 p_1 dm & -\int p_3 p_2 dm & \int (p_1^2 + p_2^2) dm \end{pmatrix}$$

$J_{o,ii}$ - осевые моменты инерции

$J_{o,i+j}$ - кин. момент инерции

Момент инерции относ. оси



$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \underset{\vec{\omega} = \omega \vec{e}}{=} \frac{\omega^2}{2} \vec{e}^T J_o \vec{e}$$

J_e - момент инерции относ. оси

$$J_e = \vec{e}^T J_o \vec{e}$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_o \vec{\omega} = \frac{J_e \omega^2}{2}$$

Балансировка гирь K_o и T тв. тела

$$\vec{K}_o = \underbrace{\vec{K}_c}_{(1) \Rightarrow \vec{J}_c \vec{\omega}} + \vec{C}_O \times \underbrace{\vec{P}}_{m \vec{V}_c} = \vec{J}_c \vec{\omega} + \vec{C}_O \times m \vec{V}_c$$

О - вращение (норм. диска бл. тела)

$$T = m \frac{\vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \Rightarrow T = \frac{m \vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{J}_c \vec{\omega}$$

Чисівка J_0 при репозиції в новій осі



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

$$J_0 = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm + \hat{a}^\top \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a} = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a} + m \hat{\rho}' \cdot \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

$$\Rightarrow J_0 = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

Рекуррентна формула Фокінса - Міннера

$$\Rightarrow J_{0e} = \vec{e}^\top J_e \vec{e} + m \vec{e}^\top j(\vec{a}) \vec{e} = J_{ce} + m p_i^2$$

Побудовімо це.

$$\begin{aligned} & \text{Для } e' \quad J_{0e} = \rho_e^2 F - \vec{\rho}_e \vec{\rho}_e^\top \quad \vec{\rho}_e = \rho_{e'} \quad \text{т.е. } S \in SO(3) \\ & \text{Для } e \quad \vec{\rho}_e = S^\top \vec{\rho}_{e'} \Rightarrow \vec{\rho}_0 = S \vec{\rho}_{e'} \\ & J_{0e} = \vec{\rho}_{e'}^\top - S \vec{\rho}_{e'} \cdot \vec{\rho}_{e'}^\top S^\top = S (\rho_{e'}^2 F - \rho_{e'} \cdot \rho_{e'}^\top) S^\top \end{aligned}$$

Таким образом,

$J_{0e} = S^\top J_{0e} S$ - с т.зр. ум. андро J_0 преобразуется в кватерніонне дроби
 \Rightarrow - правильності закону преобразування тензора

У нас маємо зберігши $\exists S$:

$$S^\top J_0 S = \text{diag}[A, B, C], \quad A, B, C > 0$$

Квадратичні умови на най-важливіші осі $B + D$. Если $D \equiv 0$, то осі най-важливішими є

A, B, C - масивні (масивні квадратичні) моменти інерції

Експоненція інерції

$$\text{Осьожен } \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{J_e}} \vec{e} \quad \vec{r}^\top J_0 \vec{r} = \frac{1}{J_e} J_0 = 1$$

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^\top J_0 \vec{r} - 1 = 0$$

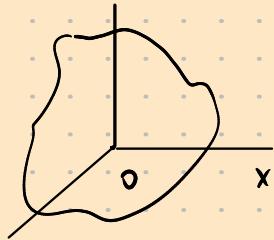
В масивні осі: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$, x, y, z -координати \vec{r}



Формула в умові побудови конформної

Неконформне мабине осін кимелерін

1⁰ Однорівн. анықт - нет гомоморфизм кимелерін



$$\text{B н. анықт: } J_0 \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$

$$\lambda_i = \{A, B, C\}, \vec{x}_i - оған деген$$

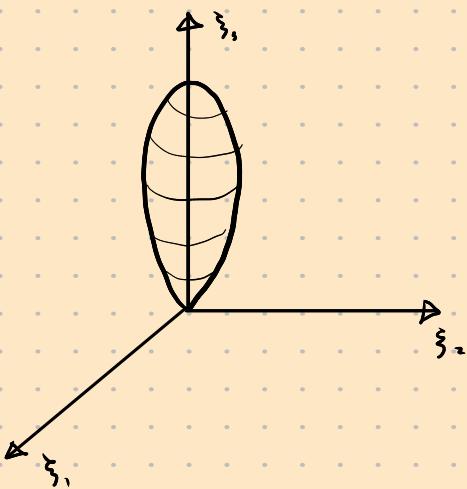
Дереккөздөгінен мабине осін ныңыз ресми зертгандай
нек-а. көркеб. зерт.

$$(J_0 - \lambda E) h = 0$$

$$\det(\lambda E - J_0) = 0 \Rightarrow \lambda_i \rightarrow \{A, B, C\}$$

$$\lambda_i \rightarrow h_i - \text{көркеб. белгілдік} \quad \vec{x}_i = \frac{\vec{h}_i}{\|\vec{h}_i\|} \quad \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$$

2⁰ Ненесозабарне кимелерін



ξ_3 - Ота гендер. кимелерін \Rightarrow н. анықт.

$$J_{i3} = - \int \xi_i \xi_3 dm$$

$$\forall \xi_i \rightarrow \exists - \xi_i \Rightarrow J_{i3} = 0 \quad \forall i + 3$$

3⁰ Негринг. максатын кимелерін



$$J_{i3} = - \int \xi_i \xi_3 dm = 0$$

Проделанній виг T та K₀

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{J}_c \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) ; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_0 = \mathbf{J}_c \vec{\omega} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c$$

Определение гибкости тела с неограниченной формой



Задача определяется в общем виде

$\vec{\omega}(t)$. Которую называют угловое разложение

Если O - неогр. т., то

$$\vec{K} = \int \vec{g} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) dm = J \vec{\omega}, \quad \vec{k}_0 = \vec{K}, \quad J_0 = J$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{g})^2 dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega},$$

Данные выражения применимы приложению для тел, имеющих ось симметрии O .

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} A_p \\ B_q \\ C_r \end{bmatrix}, \quad J = \text{diag}[A, B, C]$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2} (A_p^2 + B_q^2 + C_r^2)$$

Динамическое уравнение движения

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M} \Rightarrow B \text{ называется инерцией вращения}$$

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Покажем: $\dot{\vec{K}} = K_i \ddot{\xi}_i$

$$\dot{\vec{K}} = \underbrace{\frac{d\vec{K}}{dt}}_{\vec{d}\vec{K}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{K}}_{\vec{\omega} \times \vec{K}} \quad \dot{\xi}_i = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_i$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A\ddot{p} + (C-B)\dot{q}r = M_1 \\ B\ddot{q} + (A-C)\dot{r}p = M_2 \\ C\ddot{r} + (B-A)\dot{p}q = M_3 \end{cases}$$

- Система уравнений движения (1)

$\vec{M}_s = \vec{M}_s(\vec{\Theta}, \vec{\omega})(2)$, где $\vec{\Theta}$ - радиальный вектор определения (аналогично $\vec{F} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$)

$\vec{\Theta}$ - единичный вектор $SO(3)$, кватернион, имеет конформное представление, ...

В общем случае система (1) и (2) независимы.

Две эти зависимости являются взаимно определяющими уравнениями:

$\vec{\Theta} = f_0(\vec{\theta}, \vec{\omega})$ (3)-күнеш үр-ж в көз-жан бүгі (үр-ж Ридонд, күнешінде
үр-ж динеме, ...)

- Көз-жан $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ - заманыңас в мөнде жағынан тұрақтапады.

(заманыңас зертте ≈ жалғыз көз-жан үр-ж көз-ж негенен)

- Көз-жан $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ не инвертируется в квадратиках, в гене глумме т.б. ғана с
менди. Терін в оғындаудан наше көзенде не инвер. в квадратиках.



Сүйз-ет 3 сурал инвер-сан зерттегінде Аар. яс-жин -
ауран динеме, Ларинна и Кобалевская.

① Сүйзін динеме



② Сүйзін Ларинна



Көзенде гүлшам. инвертируется:

$$A = B \neq C$$

$$\text{ү. ж. } \epsilon \xi_3$$

③ Сүйзін Кобалевской



$$A = B = C$$

Т. С көзін на экваториальной плоскости инвертируется.

Градиенттерин инвертируемас мүнделек көздең тұрақтас.

А инвертируемас бодын мүнделек тұрақтас гүлшам. жағе.

Егер бүгі ауран, инвертируемас при оптик. жағе жи-ж.

Лекция №6

① Тривое універсальне рівняння кв. згублення

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 & A \geq B \geq C, \quad A > C \\ B\dot{q} + (A-C)pr = 0 & (A=B=C - \text{спец. випадок: } \vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \text{const}) \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 & \text{если } \vec{\omega} \text{ и } \vec{\zeta} - \text{const, то и } \vec{x} \text{ const,} \\ & \text{также } \vec{\zeta} - \text{независим., } \vec{x} - \text{независим.} \end{cases} \quad (4)$$

Універсале згублення кв. (4):

$$A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 = 2T = \text{const} \quad (5)$$

$$\vec{K}_x = \text{const} \Rightarrow K_3^2 = \text{const} \Leftrightarrow A^2\dot{p}^2 + B^2\dot{q}^2 + C^2\dot{r}^2 = \text{const} \quad (6)$$

Відповідно до (5) та (6) - непланарне універсале рівняння (4)

- Задумано: якщо $\dot{x} = F(x, t)$ - кв. згублення, то $G(t, x)$ - непланарне універсале \Leftrightarrow
- $$\Leftrightarrow G(t, \underbrace{x(x_0, t_0, t)}_{\text{Реш. в з. в.м.}}) = \text{const} = G_0$$

Критерій н.в.:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + F_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{правильність кв. згублення.}$$

$$2A\dot{p}\dot{p} + 2B\dot{q}\dot{q} + 2C\dot{r}\dot{r} = 2(B-C)pqr + 2(C-A)pqr + 2(A-B)pqr = 0$$

Если $A > C$, то (5) та (6) \Rightarrow

$$\begin{aligned} p &= \pm \sqrt{a - Bq^2} \quad (7) \quad a, b, c, d - \text{какие - то const} \\ r &= \pm \sqrt{c - dq^2} \end{aligned}$$

Погодимо b_0 з е. згублення (4):

$$B\dot{q} \pm (A-C)\sqrt{a - Bq^2} \sqrt{c - dq^2} = 0$$

$$\pm \int \frac{dq}{\sqrt{a - Bq^2} \cdot \sqrt{c - dq^2}} = \frac{C-A}{B} t + \text{const} \Rightarrow q(t) \quad (8) - \text{захоплення універсалу} \\ (\text{багаторазовий залік згублення})$$

Погодимо (8) з (7), находимо $p(t)$, $r(t)$.



Въгълът между двете x оси, когато $\vec{K} \parallel \vec{x}_3$ и градуси

директи ψ, θ, φ .

$$\vec{K}_3 = \begin{bmatrix} A p(t) \\ B q(t) \\ C r(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$K = |\vec{K}_3| = \text{const} \quad \dot{\varphi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (\text{из кинемат.})$$

↓

$$\cos \theta(t) = \frac{C r(t)}{K}$$

$$\tan \psi(t) = \frac{A p(t)}{B q(t)}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f_\varphi(t) dt$$

Геометрически интерпретации Мах-Курда

Резултант K в единици \vec{K}_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = \text{const} - \text{сърца} \\ \frac{K_1^2}{A} + \frac{K_2^2}{B} + \frac{K_3^2}{C} = 2T - \text{закон на Мах-Курда} \end{array} \right.$$

$$\vec{K}_3 = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

\vec{K}_3 приема различни траектории на пересечени сърца и закона на Мах-Курда.



$$K^2 = 2BT - \text{yp-e сепаратрис}$$

$$\left(1 - \frac{B}{A}\right) K_1^2 + \left(1 - \frac{B}{C}\right) K_3^2 = 0$$

$$\lambda^2$$

$$-\mu^2$$

$$(\lambda K_1 - \mu K_2)(\lambda K_1 + \mu K_2) > 0$$

A - канава даващ движение
еса по x_1 - канава глумка

Синя - сепаратриса,
зелено - кривите глумки K_3



Линия Дикандерова обяснява неустойчивото
(външно глумче) движение външна сепара-
тристична - парabolична (какът е външна
външна предпълната равнина) - и резулт.
переходят чрез него

Недостатък на интерпретацията: Трябва да съмните \vec{K} .

Интерпретация Резонанса

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^T J \vec{F} - 1 = 0 \quad - \text{закон сохранения энергии}$$

$$\vec{r} = \lambda \vec{\omega} \quad \lambda^2 \underbrace{\vec{\omega}^T J \vec{\omega}}_{2T} - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

$$\triangleright f = 2J\vec{r} \quad (\text{проверка независимости})$$

$$\triangleright f = \frac{2}{\sqrt{2T}} J \vec{\omega} \quad \frac{2\vec{K}}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

