

## Решение линейного уравнения 2 порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in I \quad \text{все } a_i \text{ непрерывны, } a_0(x) \neq 0$$

Предположим, мы знаем  $y_1$  - решение однородного ур-я

Ищем в виде  $e^{\lambda x}$ ,  $x^k$ ,  $ax+b$  и т.д.

Методы ОРОУ:

$y_1$  - однородное

$y$  - произв. реш-е однородного ур-я

Ф-ла Лувье - Абеля:  $W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = C\varphi(x)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\varphi(x) \quad \frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2} dx + C_1$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ОРНУ: Выводим решение:  $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \frac{b(x)}{a_0}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$$

$$C_1'(x) = \dots \quad C_2'(x) = \dots$$

## Задача 1

$$2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, \quad x > 0$$

ОРОУ:  $y_1 = e^{-x}$

$y$  - произв.,  $y_1$  - известное

$$W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx} = Ce^{-(2x + \frac{1}{2} \ln x)} = Ce^{-2x} x^{-1/2}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx = 2x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx = 2x + \frac{1}{2} \ln x + C_1$$

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y'e^{-x} + ye^{-x}$$

Далее на  $e^{-2x}$ :

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-1/2}$$

$$\parallel$$
$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' = \frac{y}{e^{-x}} = C x^{-1/2} + C_1$$

ОПОР  $y = C_1 e^{-x} + C e^{-x} \sqrt{x}$

ОПНУ  $y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-x} \sqrt{x}$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} + C_2'(x) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad C_1'(x) = -1$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \quad C_1(x) = -x + C_1$$

Итого:  $y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x} \sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x} + x e^{-x}$

Задача 2

$$x^2 (\ln x - 1) y'' - x y' + y = x (\ln x - 1)^2, \quad x > e$$

ОПОР:  $y_1 = x$

$$\left| \frac{y_2}{y_1} \right| = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C (\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_2 y_1' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2} \quad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\parallel$$
$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C \frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

ОПНУ:  $y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x) x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \quad | \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x) x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$$C_2'(x) = -1$$

$$C_1'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$C_2(x) = -x + C_2$$

$$C_1(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1$$

$$\text{Ozber: } y = \left( \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \right) x + (C_2 - x) \ln x$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$$

### Задача 3

$$(2x+3) y'' - 2y' - \frac{6}{x^2} y = 3(2x+3)^2$$

Ищем ЧРД в виде  $x^k$ :

$$k(k-1)(2x+3)x^{k-2} - 2kx^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$$

$$(2x+3)k(k-1) - 2kx - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow y_1 = x^2$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_1' & y_1'' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{2}{2x+3} dx} = C(2x+3)$$

$$\left( \frac{y}{y_1} \right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = C \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + C_1$$

$$\text{ОПДЧ } y = C_1 x^2 + C_2 \left( \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\text{ОПДЧ: } \text{ВН: } y = C_1(x) x^2 + C_2(x) \left( \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\begin{cases} C_1'(x) x^2 + C_2'(x) \left( \frac{1}{x} + 1 \right) = 0 \quad | \cdot 2 \\ C_1'(x) 2x - C_2'(x) \frac{1}{x^2} = 6x + 9 \quad | \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C_1' x^2 + 2C_2' \left( \frac{1}{x} + 1 \right) = 0 \\ 2C_1' x^2 - C_2' \frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$$3C_2' \frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$$

$$C_2' = -3x^2 \quad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$$

$$C_2 = -x^3 + C_2 \quad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$$

Ответ:

$$y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2 \ln x + 2x^3 - x^2$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2 \ln x$$

## Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

Д-но, это ур-е не имеет корней  $z^2$  или незав. реш-ий, а в окр-ти 0 бесконечно много.

□ Предполагая  $y_1$  и  $y_2$  — 2 независ. реш-я.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0 \text{ и т.д. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ незав.}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{C}{x}$$

в окр-ти 0

линейно незав.



## Приведение indep. ур-ий 2-го порядка к виду, не соед. $y'$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\downarrow \quad \text{— преобр-е Бундеса (замена indep. с-ем)}$$

$$z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right)$$

$$\text{В ур-ии Бесселя: } y = z x^{-1/2}$$

$$y' = z' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z x^{-3/2}$$

$$y'' = z'' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} + \frac{3}{4} z x^{-5/2}$$

$$\text{Подставим: } z'' x^{3/2} - \cancel{z' x^{1/2}} + \frac{3}{4} z x^{-1/2} + \cancel{z' x^{1/2}} - \frac{1}{2} z x^{-1/2} + (x^2 - \nu^2) z x^{-1/2} = 0$$

$$z'' x^{3/2} + \frac{1}{4} z x^{-1/2} + z x^{3/2} - \nu^2 z x^{-1/2} = 0 \quad | : x^{3/2}$$

$$z'' + \frac{1}{4} x^{-2} z + (x - \nu^2 x^{-2}) z = 0$$

$$z'' + z \left( 1 + \frac{1}{4} - \nu^2 \right) = 0$$

$$\text{Пpm } \nu = \pm \frac{1}{2} \text{ это особое yp-e} \quad z'' + z = 0 \Rightarrow z' = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Пpm др.  $\nu$  пем-я не яв-ся элем. ф-цям.

**Задача Коши** для лн. yp-я  $n$ -го порядка

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Рем-е  $y$ , к-му  $\exists!$  на всём промежутке  $\mathbb{R}$

В окр-ти  $\tau$ , об-джен yp-ям, где ана  $\exists!$  в окр-ти  $x_0$ .

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \mapsto z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z e^{-\frac{1}{2} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \quad - \text{преобраз. Лувини}$$

$$y_{p-1} \text{ Бесселя: } x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

$$y = z x^{-1/2}$$

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) z = 0$$

**Замечание!** при таком замене кон-во нулей рен-х ур-х не меняется.

**Лемма** Пусть неспр-е рен-е ур-х Бесселя кн. со мною нулей на  $[a; +\infty)$ ,  $a > 0$

$$\square \quad Q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \Big|_{x \rightarrow +\infty} 1$$

$\exists C: \forall x > C \rightarrow Q(x) \gg \frac{1}{2}$ ; на отрезке  $[a; C]$  конечное число нулей.

Есть кор-т в самом ур-е или неспр-е, то по г. Мизнера ЧТА



С 10.6

Д-то, то  $\forall$  неспр-е рен-е  $y'' + x^2 y' + (x+4)y = 0$  кн.  $\leq 5$  нулей на  $(-\infty; +\infty)$

Замена Лувини: ...

$$\text{Получим } z'' + z \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = 0$$

Есть  $Q(x) < 0$ , то на промежутке  $\leq 1$  нулей

$$4 - \frac{x^2}{4} < 0 \quad x^2 \geq 16 \quad |x| \geq 2 \Rightarrow \text{на } [2; +\infty) \text{ и на } (-\infty; -2] \text{ не более 1 нуля}$$

Остается рассмотреть, то на  $[-2; 2]$  не более 3х нулей.

$$Q(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$$

$$z'' + z \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = 0 \quad (1)$$

$N_1$  - число нулей неспр-е рен. (1)

$$u'' + 4u = 0 \quad (2)$$

$N_2$  - число нулей неспр-е рен. (2)

- Оценки

$$N_1 \leq N_2 + 1$$

Д-то, то  $N_1 \leq 3 \Rightarrow N_2 \leq 2$ , нулей кор-в (2) больше кор-в (1)  $\left(4 - \frac{x^2}{4} < 0\right)$  на  $(-\infty; -2]$

Получим максимум 3х нулей для (2) рен-е (2) равен, то  $N_2 \leq 2$

$$(2): u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$u = \cos 2x \quad - \text{wyno } u_3 \text{ pem. (2)}$$



A eem bysio uny, dygei  $N_2 = 3$

$$\frac{\pi}{4} > 2$$

$$u_{\text{new}}: \leq 5 \text{ nyet}$$



## Terminobas

D-20, rto  $\forall$  nypm, pem. yp.  $y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$  (2) na oip.  $[-1; 6]$   $\exists$  ienar  $\xi$ ,  
ye  $y'(\xi) = 0$ . (gansai, nae-ib, rto eio  $\geq 2$  nyet, u no i. Pem dygei  $u(4)$ )

$$2 + \cos 3x \geq 1$$

$N_2$  - nae-ib nyet nypm. pem. (2),  $N_1$  - ome me yea (1)

$$\text{Gubnubnem} \subset \text{yp. } z'' + z = 0 \quad (1)$$

$N_1 \leq N_2 + 1 \Rightarrow N_2 \geq N_1 - 1$ , naeys  $N_2 \geq 3$  - nypm nae-ib nypm. pem. (1),  $y$

$\kappa$ -pao  $\geq 3$  nyet nae  $[-1; 6]$ .

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$z = \cos x \quad \text{nae } [-1; 6]$$

Aeio bueygi  $N_1 = 2$  - nae



$u_{\text{new}}$  pem-e b geyae  $z = \sin(x-y)$

## q. 223

D-20, rto eem  $f(x) \leq 0$ , nae pem. yp.  $y'' + q(x)y = 0$   $\subset$  naem. nae. yea.  
 $y(x_0) > 0$ ,  $y'(x_0) > 0$  aenae naem.  $\forall x \geq x_0$ .  $q(x)$  naem. nae  $[x_0; +\infty)$

$\square$  A nypmubnem nyet  $\exists x_1$ ,  $y(x_1) \leq 0$ . Eem rto nae,  $\exists \xi \in (x_0, x_1)$ :

$$y(\xi) = 0. \quad y'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(x_0+t) - y(x_0)}{t}$$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow y(x) > y(x_0)$$

Сначала, так  $z$  - наим. из  $I$ , где  $y(x) = 0$ .

Мы бы хотели доказать, что на некотором отрезке, конечно  $\Rightarrow$  не может быть  
конечных точек  $\tau$ ,  $\Rightarrow$  inf точек  $x$ , где  $y(x) = 0$ , совп. с min,  
 $\Rightarrow y(x)$  монотонна на  $(x_0, z)$ .

$$y'' + q(x)y = 0$$

$$q(x) \leq 0 \quad y > 0 \Rightarrow y'' \geq 0 \text{ на } (x_0, z) \Rightarrow y' \uparrow \text{ на } (x_0, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) \geq y'(x_0) > 0 \Rightarrow y(x) \uparrow \text{ на } [x_0, z) \Rightarrow y(x) = y(x_0) > 0, \text{ т.к.}$$

сп-на непрерывна на  $(x_0, z)$   $y(x) = y(x_0) > 0 \Rightarrow$  не может сбл. с 0 в  $z$ .

Противоположное.



# Разные траектории автономных систем

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Автономная линейная однородная система:  $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x})$  (автономная - в независимости от  $t$ )

3. Коул:  $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x}), t \geq t_0$   
 $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

Решение 3. Коул  $\exists!$  на  $[t_0, +\infty)$  если  $A(x)$  непрерывна в этой точке.

Решение есть только в  $(n+1)$ -мерном пространстве.

$n$ -мерное пространство - фазовое пространство.

Проекция решения на  $\mathbb{R}^{n+1}$  и  $\mathbb{R}^n$  - фазовый портрет.

Она задается тем же уравнением, но не зависит от времени. Значит, траектория в  $\mathbb{R}^n$ .

## Свойства



① Если  $x(t)$  - решение, то  $x(t+C)$  - решение с тем же фазовым портретом.

② 2 разных траектории не имеют общих точек.

③ Если решение имеет точку  $x = x_0$  и не является равновесием (тогда оно - точка равновесия).

## Как их искать ( $n=2$ )

①  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y) \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}$

Значит, решение имеет вид  $F(x, y) = C$ .

Ф - на  $F(x, y)$ , но не на конкретном решении  $x(t)$  и  $y(t)$ , но на наборе траекторий, называемых **линиями уровня системы**.

Траектория - линия уровня первого интеграла.

② просто решить см-мг.

Пример

①  $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases} \quad \text{n. p. } (0,0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$x dy - y dx = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = C \quad - \text{первый интеграл } F(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Линия уровня первого интеграла - прямая. Но траектория - линия, выходящая из 0 (н.р.)!



Нужно проверить, что линия уровня первого интеграла и из одного соотв. разделим их на траектории.

②  $\begin{cases} x = C_1 e^t \\ y = C_2 e^t \end{cases} \quad \text{при } t \uparrow \quad x, y \rightarrow \infty$

Траектория: 1. Прямые равновесия.  
2. Линия, выходящая из равнов. равновесия.

Классификация параметров равновесия для линейных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + a_2 y \\ \dot{y} = b_1 x + b_2 y \end{cases}$$

$(0,0)$  - н.р.

Других н.р. нет  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  или  $\lambda = 0$  не является собствен. значением.

