

## Решение линейного уравнения 2 порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in I \quad \text{бес. кр. вып., } a_0(x) \neq 0$$

Примечание, что \$y\_1\$ - решение однородного \$y'' + a\_1(x)y' + a\_2(x)y = 0\$

Член \$b\$ буде \$e^{ax}\$, \$x^k\$, \$ax+b\$ и т.д.

Найдем ОПОY;

\$y\_2\$ - находим

\$y\$ - общ. реш. однородного \$y'' + a\_1(x)y' + a\_2(x)y = 0\$

Ф-на линейной - Определителью: \$W(y\_1, y) = C e^{-\int\_{x\_0}^x \frac{a\_1(t)}{a\_0(t)} dt} = C \varphi(x)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} = C \varphi(x) \quad \frac{y \cdot y' - y_1 y'_1}{y^2} = \frac{C \varphi(x)}{y}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C \varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2} dx + C_1$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ОПНУ: базисные решения: \$y = C\_1(x)y\_1(x) + C\_2(x)y\_2(x)\$

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \frac{b(x)}{a_0}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$$

$$C_1'(x) = \dots \quad C_2'(x) = \dots$$

### Задача 1

$$2x y'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, \quad x > 0$$

ОПОY: \$y\_1 = e^{-x}\$

\$y\$ - общ. \$y\_1\$ - решение

$$W(y_1, y) = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx} = C e^{-(2x + \frac{1}{2} \ln x)} = C e^{-2x} x^{-1/2}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx = 2x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx = 2x + \frac{1}{2} \ln x + C,$$

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y' e^{-x} + y e^{-x}$$

Darum na  $e^{-2x}$ :

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-\frac{1}{2}}$$

"

$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' \quad \frac{y'}{e^{-x}} = C x^{-\frac{1}{2}} + C_1$$

$$\text{DPOY} \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x}$$

$$\text{OPHY} \quad y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-x} \sqrt{x}$$

$$+ \begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} + C_2'(x) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad C_1'(x) = -1$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \quad C_1(x) = -x + C_1$$

$$\text{Orts: } y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x} \sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x} + x e^{-x}$$

## 3. ayana 2

$$x^2 (\ln x - 1) y'' - x y' + y = x (\ln x - 1)^2, \quad x > 0$$

$$\text{HPOY: } y_1 = x$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y_1'' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C (\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_1 y_1' - y_1' y_1}{y_1^2} = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2} \quad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C \frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

$$\text{OPHY: } y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \end{cases} \quad | \cdot x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x)x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= -1 & C_1'(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ C_2(x) &= -x + C_2 & C_1(x) &= \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Darfer:

$$y = \left( \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \right) x + (\ln x - 1) \ln x$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$$

### 3.ogara 3

$$(2x+3)y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}y = 3(2x+3)^2$$

Unseren UPDY & lange  $x^k$ :

$$k(k-1)(2x+3)x^{k-2} - 2kx^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$$

$$(2x+3)k(k-1) - 2kx - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow y_1 = x^2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{pmatrix} = C e^{\int \frac{2}{2x+3} dx} = C(2x+3)$$

$$\left( \frac{y}{y_1} \right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = C \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + C_1$$

$$\text{OPDY } y = C_1 x^2 + C_2 \left( \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\text{OPDY: BN: } y = C_1(x)x^2 + C_2(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ C_1'(x)2x - C_2'(x)\frac{1}{x^2} = 6x + 9 \end{cases} \quad | \cdot x$$

$$\begin{cases} 2C_1'x^2 + 2C_2'\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ 2C_1'x^2 - C_2'\frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$$3C_2'\frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$$

$$C_2' = -3x^3 \quad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$$

$$C_2 = -x^3 + C_2 \quad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$$

Общее:  $y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2 \ln x + 2x^3 - x^2$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2 \ln x$$

## Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

Д-рн, это ур-е не имеет чисто  $x^2$  члн. незав. поч-иц, ач-я сим-и 0 бнес-  
ре с промежутком.

□ Предположим  $y_1$  и  $y_2$  — 2 реш. поч-и.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0 \text{ тк. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ члн. незав.}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{C}{x}$$

↑  $\hookrightarrow$  поч-я сим-и 0      ↓  $\hookrightarrow$  поч-я незав.



Применение члн. поч-и 2<sup>го</sup> порядка к бесс., не ссы-я!

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\downarrow \quad -\text{метод субституции (замена поч-и сим-и)}$$

$$z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right)$$

В поч-и Бесселя:  $y = z x^{-1/2}$

$$y' = z' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z x^{-3/2}$$

$$y'' = z'' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} - \frac{1}{2} z x^{-5/2} + \frac{3}{4} z x^{-7/2}$$

Найдем  $z'' x^{3/2} - z' x^{1/2} + \frac{3}{4} z x^{-1/2} + z' x^{1/2} - \frac{1}{2} z x^{-1/2} + (x^2 - \nu^2) z x^{-1/2} = 0$

$$z'' x^{3/2} + \frac{1}{4} z x^{-1/2} + z x^{1/2} - \nu^2 z x^{-1/2} = 0 \quad | : x^{3/2}$$

$$z'' + \frac{1}{4} x^{-2} + z - \nu^2 z x^{-2} = 0$$

$$z'' + z \left( 1 + \frac{\frac{1}{4} - v^2}{x^2} \right) = 0$$

При  $v = \pm \frac{1}{2}$  для некоей  $y_1(x)$   $z'' + z = 0 \Rightarrow z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

При  $v \neq \pm \frac{1}{2}$  не хд-и в зоне оп-ции.

Задача Коши для ун-ой к-ии  $n=2$  решена

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Решение задачи Коши  $\exists!$  на бесконечном промежутке  $\mathbb{R}$

В общем виде задача Коши для  $n$ -ой к-ии  $\exists!$  в окрестности  $x_0$ .

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \rightarrow z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z e^{-\frac{1}{2} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

- neodsp-e Lyubans

yp-e:  $x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2) y = 0$

$$y = z x^{-1/2}$$

$$z'' + \left(1 + \frac{1-v^2}{x^2}\right) z = 0$$

**Zusammenfassung:** wenn rächen Zahlen kon-ko rückr. pum-2 yp-2 ne unendlich.

**Thm** Ist die reell. pum. pum. yp-2 konvergent bei  $x = \infty$  und wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0$ ,

$$a > 0$$

$$\square \quad Q(x) = 1 + \frac{1-v^2}{x^2} \quad | \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1$$

$\exists C: \forall x \geq C \rightarrow Q(x) \geq \frac{1}{2}$ ; da obige  $\{a, C\}$  konvex muss rückr.

Erst körp-t b rächen yp-an un. rächen. körp-s, so no 7. Mängma UT



## C 10.6

D-16, zw. A körp. pum. pum.  $y'' + x^2 y' + (x+4)y = 0$  un.  $\leq 5$  rückr. na  $(-\infty, +\infty)$

Zahlen Lyubans: ...

Rückr.  $z'' + z \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = 0$

Eben  $Q(x) < 0$ , zw. na rückr.  $\leq 1$  rückr.

$4 - \frac{x^2}{4} \leq 0 \quad x^2 \geq 16 \quad |x| \geq 2 \Rightarrow$  na  $[2, +\infty)$  un na  $(-\infty, -2]$  ne dene 1 rückr.

Dene 2 rückr. zw.  $[-2, 2]$  ne dene 3<sup>rd</sup> rückr.

$$Q(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$$

$$z'' + z \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = 0 \quad (1)$$

N<sub>1</sub>-rückr. rückr. pum. (1)

$$u'' + 4u = 0 \quad (2)$$

N<sub>2</sub>-rückr. rückr. rückr. pum. (2)

- Organbares

$$N_1 \leq N_2 + 1$$

D-16, zw.  $N_1 \leq 3 \Rightarrow N_2 \leq 2$ , rückr. körp. (2) dene 2 rückr. d. b. (1) ( $4 > \frac{x^2}{4}$ )

Rückr. maxima xord. dor. L pum. (2) rückr., zw.  $N_2 \leq 2$

$$(-2, 2)$$

$$(2): u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$u = \cos 2x \quad -\text{gyakorlás a parabola}$$



A ezen körülbelül 3 nyer, így  $N_2 = 3$

Ugyan:  $\leq 5$  nyer



### Térkezelés

D-mi zárt V-hez, plm. yz.  $y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$  a sz. [-1; 6]  $\exists$  néhány  $x$ , sz.  $y'(x) = 0$ . (gyorsan. meghib, mivel eztől 3 nyer, amit. Rögtölgéi U(4))

$$2 + \cos 3x \geq 1 \quad N_2 = \text{minimális néhány plm. } (2), \quad N_1 = \text{maximális plm. } (1)$$

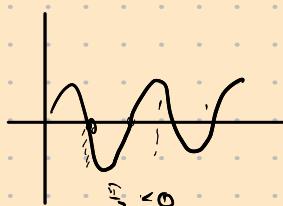
$$\text{Gyakorlásplm. c. yz. } z'' + z = 0 \quad (1)$$

$N_1 \leq N_2 + 1 \Rightarrow N_2 > N_1 - 1$ , vagy  $N_2 \geq 3$  - minden minimális néhány plm. (1),  $\kappa$ -paros  $\geq 3$  nyer a [-1; 6].

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$z = \cos x \quad \text{me} [-1; 6]$$

Báró hosszú  $N_1 = 2$  -nak



Ugyan plm. b. graphik  $z = \sin(x-y)$

### 9.223

D-26, zárt ezen  $\hat{q}(x) \leq 0$ , itt belsejű yz.  $y'' + q(x)y = 0$  c. nem. max. yz.  $y(x_0) > 0$ ,  $y'(x_0) > 0$  minden  $x > x_0$ .  $\forall x > x_0$ .  $q(x)$  nem. na  $[x_0; +\infty)$

$\square$  Az nyerelhetős. nyitott  $\exists x_1$ :  $y(x_1) \leq 0$ . Ezen zárt ránk,  $\exists \xi \in (x_0, x_1)$ :  $y(\xi) = 0$ .  $y'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(x_0+t) - y(x_0)}{t}$

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \quad \sim y(x) > y(x_0)$$

Справа, это  $\exists$ -выражение, т.е.  $y(b) \neq 0$ .

Мн.ко можно предпол. что в окрестности  $b$ ,  $y(x)$  не имеет экстремумов. Т.е.  $\inf_{(x_0, \delta)} y(x) > 0$ , т.к.  $\exists$  минимум в  $(x_0, \delta)$ .

$$y'' + q(x)y = 0$$

$y'' \leq 0$  и  $y > 0 \Rightarrow y'' \geq 0$  на  $(x_0, \delta)$ .  $\Rightarrow y' \uparrow$  на  $(x_0, \delta)$   $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow y'(x) \geq y'(x_0) > 0 \Rightarrow y(x) \uparrow$  на  $(x_0, \delta) \Rightarrow y(x) = y(x_0) > 0$ , т.к.

оп-ие непр. на  $(x_0, \delta)$   $y(x) \geq y(x_0) > 0 \Rightarrow$  не имеет одн. л. в  $\delta$ .

Продолжение.

## Рядовые Тривиальные решения систем

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Несложные решения называются **стационарными**:  $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x})$  (абсолютно - в независимости от  $t$ )

3-е. Касн.:  $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x}), t \geq t_0$   
 $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

Реш. 3-е. Касн.  $\exists!$  на  $[t_0; +\infty)$  для  $A(\bar{x})$  непр. вдоль гр-цы.

Реш. есть глобал в  $(n+1)$ -мерн.пр-бе.

$n$ -мерн. пр-бо - **стационарная пр-бо**.

Применяя решения из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  - **стационарные траектории**.

Она задается реш. не пр-зы, но как независим. залогом глобал в  $\mathbb{R}^n$ .

## Частичные



- ① Для  $x(t)$ -реш-е, то  $x(t+C)$  - реш-е с тем же траекториями.
- ② 2 разных траектории не могут одних точек.
- ③ Const. частичн. реш-е  $x=x_0$  имеет траектории - линии (наименее сложные)

## Как их искать ( $n=2$ )

①  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y) \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}$

Задаем  $\dot{x} \rightarrow$  это  $y$ .  $\dot{y} \rightarrow$  в быве  $F(x, y) = C$ .

$\Phi$  - ик  $F(x, y)$ , надо на  $\Phi$  накладывать  $\dot{x} = f_1(x, y)$   $\Rightarrow$  ик. ик. ик. накладывать  $\dot{y} = f_2(x, y)$  **небольшое упрощение**

Гомогичні - лінійні залежності між змінними.

② зростає початок координат.

Приклад

①  $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$  в р. (0,0)

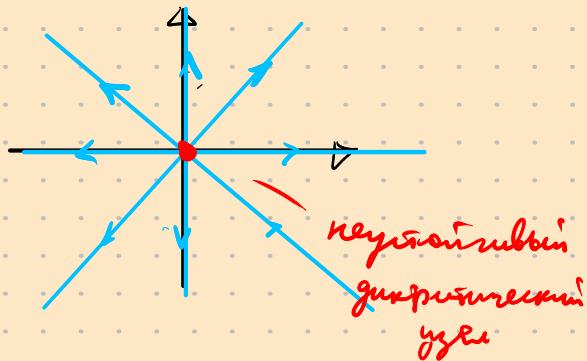
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$xdy - ydx = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = C \text{ - нестандартний варіант відповіді } F(x,y) = \frac{y}{x}.$$

Лінійні залежності неповного порядку - спрощені. Не залежності - складні, складніше ніж 0 (н.п.)!

Приклад: відповідь неповного порядку виконується в одній точці. Розглянемо це на площині.



②  $x = C_1 e^t$   
 $y = C_2 e^t$  при  $t \uparrow x, y \rightarrow \infty$

Примір: 1. Порівняємо підходи.

2. Низькі, близькі до реальних підходів.

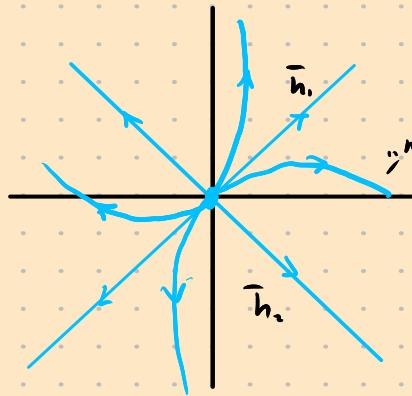
Класифікація незалежності розв'язків від початкових умов

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(0,0)-н.п.

Діагональний н.п.  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$  та  $\lambda = 0$  не є бл. чл. щод. змін. масив.

①  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$   $\lambda_1 \rightarrow \bar{h}_1, \lambda_2 \rightarrow \bar{h}_2$  Часто встречающийся



Продолжим:

1. П.р.
2. 4 типа, зависящие от  $\bar{h}_1$  и  $\bar{h}_2$
3. асимптотико-устойчивые кривые  $x = y^d$ ,  $d > 0$  с осью  $\bar{h}_1$ , касающиеся  $\bar{h}_2$

Система с n.p.

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-4) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$$

$$\lambda = 5 \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{h}_{11}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

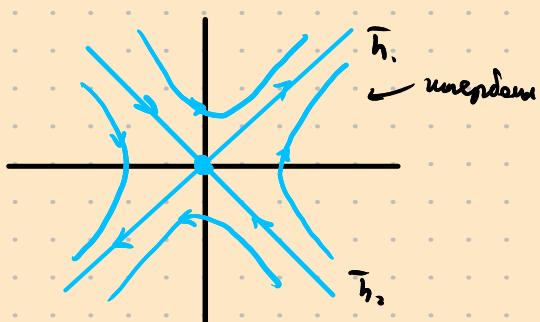


Продолжим не пересекающиеся!!

②  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$   $\lambda_1 \rightarrow \bar{h}_1, \lambda_2 \rightarrow \bar{h}_2$  Часто встречающийся

То же самое, но симметрично n.p.

③  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$   $\lambda_1 \rightarrow \bar{h}_1, \lambda_2 \rightarrow \bar{h}_2$  Часто встречающийся



Продолжим

1. П.р.

2. 4 типа, зависящие от  $\bar{h}_1$  и  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_1$ -неподвижная,  $\bar{h}_2$ -подвижная)

3. Асерпомо - кесім. күбесе бүгүн  $x = y^\alpha$ ,  $\alpha < 0$ . Сипекен соңк. сұран

Көнде  $\lambda_1 > 0$ , то сиран тұрақтандырылғанда  $\tilde{h}_1$  - науыншы

Көнде  $\lambda_1 < 0$  - балықшы

### Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1 \\ \tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



Күбесе тұрақтандырылған!

④  $\lambda = \alpha \pm \beta i, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha > 0$



### Негізгіліктер

#### Тұрақтандырылған

1. Н.р.

2. Симметрия, x-шары распределен орт. н.р. Каптыванне распределен - то нән ынтал 2.с. - нында распределен бесінші орт. симметрия  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$  б. не. ғ.  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Оның науыншына кесім. 2. Тұрақтандырылған т.т.

Асерпомо - кесім. күбесе бүгүн  $x = y^\alpha$ ,  $\alpha < 0$ . Сипекен соңк. сұран

### Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases} \quad \lambda = 1 \pm 2i$$



Бозасын  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- нүсөндөзүүлүк.

⑤  $\lambda = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha < 0, \quad \beta \neq 0$

Четверткесин сунгуу

То же самое, но спираль - к.п.р.

Направление - по вектору спиралей вправо.

⑥  $\lambda = \pm \beta i, \quad \beta \neq 0$

Четверт



Траекториям

1. К.п.р.

2. Траектории с центром в к.п.р.

Напр. обрата - по  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

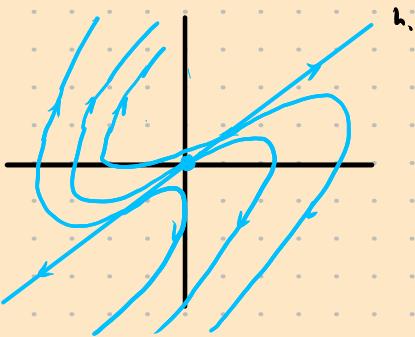


- нүсөндөзүүлүк.

⑦  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$   $\dim E_\lambda = 1$   
к.п.р.

Кейдеңүүлүк барынчалык узед

Монголдук узенеси:  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$  - сандар.



Тривалдемн

1. П.п.

2. 2 сиро, кесенгенде  $\tilde{h}_1$ . (негатив)

3. Асп.-жакын. күштөр бары  $x = y \ln y$ ,  
кес. негатив, мән. на  $\tilde{h}_1$ ,

Ди жаңынан кесенген нүсөнүн  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  б.т., кесенгендеги мәндер  $\approx 1 \times \tilde{h}_1$ ,  
бүнкайында  $(0,0)$ .

Решение

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases} \quad \lambda_1 = 2 \text{ к.п.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

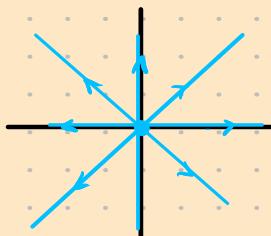
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⑧  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$   $\dim E_2 = 1$  **Жақынлабын берептегенде үзүл**  
то же самое, симметрия осталырып

⑨  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ,  $\dim E_2 = 2$  **Көзбеттің жақынлабын үзүл**

$$\dot{x} = \lambda x$$

$$\dot{y} = \lambda y$$



⑩  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ,  $\dim E_2 = 2$  **Жақынлабын жақынлабын үзүл**  
то же самое, но симметрия осталырып

При - им даете оценки на - мы:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (x_0, y_0) - \text{n.p.}$$

$$f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$$

Можно разложить в Тейлор:

$$f_1(x, y) = f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(g)$$

$$f_2(x, y) = f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(g)$$

(при  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ )

$$x - x_0 \mapsto u, \quad y - y_0 \mapsto v$$

$$\dot{u} = A_1 u + B_1 v + o(g)$$

$$\dot{v} = A_2 u + B_2 v + o(g) \quad u, v \rightarrow 0$$

$$A_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B_1 = \dots$$

$$A_2 = \dots \quad B_2 = \dots$$

### Линейизованная система

$$\begin{cases} \dot{u} = A_1 u + B_1 v \\ \dot{v} = A_2 u + B_2 v \end{cases}$$

$(0, 0)$  - н.п. линейизованной системы

### Фазовое пространство - решетка 5 точек

Если ненулевые корни  $\lambda$  - действительные и не коллинеарны

Конкр., если  $\lambda = \pm \beta i$ , то это - это корни - и 2 чисто вещественные (действия  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ , и ненулевые,  $\alpha > 0$  или  $\alpha < 0$ )

### Частичные

Если  $(0, 0)$  - фазовое н.п. линейиз. ун-тии, то оно однозначно

зародихъ знакою на  $F_1$  и  $F_2$ . Траектории вк. ко-орд. в окр-ии  $(x_0, y_0)$  симметрично симметричны и симметричны. Ко-орд.

Если  $f$  нелинейн. то-то же не верно. (может быть что-то проще, напр. нелинейн. предельные циклы).



Разобрано разреш. уп-е  $\dot{x} = f(x, y) \equiv$  разреш. разреш. ко-орд.  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$

$\dot{x} = -\sin x \equiv \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$  - н.п.  $(\pi k, 0)$ . Ко-ординации  $(0, 0)$ :

нелинейн. ко-орд.:  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$   $\lambda = \pm i$  - значит  $y$  макс. ко-орд. - ?

Ко-ординации  $(\pi, 0)$ :

$u = x - \pi$  ищ. ко-орд.:  $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = u \end{cases}$   $\lambda = \pm i$  - цепь  $y$  вер. ко-орд. - тоже



Если преобразовать, то в  $(0, 0)$ -ко-орд. в ко-ординации

