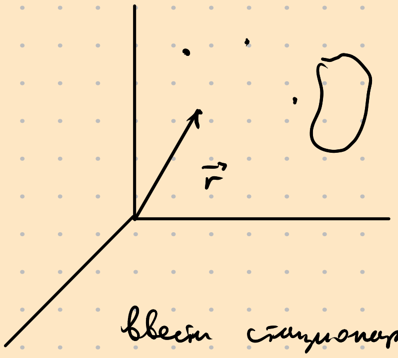
Литература: те же (Муравьёв, Гантмахер, Амелькин, Маркеев - новая версия)

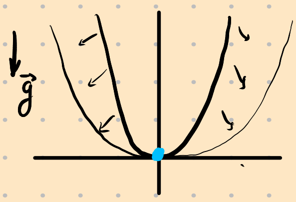
Равновесие механических систем



Система нах-ся в равновесии в выбранной сис-ме коор-т $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \vec{r} \to \vec{r} = \vec{r}_0 = \overline{const}$

Далее будем рас-ивать стационарные системы (ур-я связи не завият от времени) $\Rightarrow \exists$ возможность ввести стационарную параметризацию, и $\vec{r} = \vec{r}(q)$ после вв-я обобщ. коор-т.



У не стац. систем тоже могут быть полож. равновес. - см. картинку (кривая эволюционирует со временем)

$$(\mathcal{L}_{,\dot{k}})^{\cdot} - \mathcal{L}_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$\Updownarrow$ – т.к. разрешимость отн. старших произв.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = F(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = X(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Положения равновесия нах-ся во вз. однознач. соотв. с точками вида $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\square$ ($\Leftarrow$) Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = const$

($\Rightarrow$) $\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}\dot{q}^k \equiv \vec{0}$ (1), однако обобщ. коор-ты q вводились так, что

$\vec{r}_{,k}\,\delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q : \delta q^{1^2} + \ldots + \delta q^{n^2} \neq 0.$

Таким образом (1) $\Rightarrow \dot{q} = 0$ $\blacksquare$

Критерий полож. равновесия стац. системы

Стац. сис-ма нах-ся в полож. равновесия $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$.

□ $(T_{,\dot k})^{\cdot} - T_{,k} = Q_k(q,\dot q, t)$

$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\,\dot q^i \dot q^j$

$T_{,\dot k} = a_{kj}\,\dot q^j$ — т.к. a_{ij} — симметричная матрица!

$(T_{,\dot k})^{\cdot} = a_{kj}\,\ddot q^j + a_{kj,i}\,\dot q^i \dot q^j$

$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k}\,\dot q^i \dot q^j \Rightarrow a_{kj}\,\ddot q^j + \left(a_{kj,i} - \frac{1}{2} a_{ij,k}\right)\dot q^i \dot q^j = Q_k(q,\dot q,t)$ (2)

Для полож. равновес. $q = q_0$, $\dot q = 0 \Rightarrow$

$0 = Q_k(q, \dot q, t)$

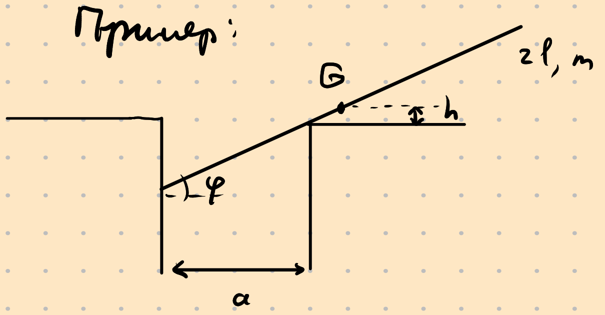
С другой стороны, если $Q(q_0, 0, t) = 0$, то (2) имеет решение $q = q_0$, $\dot q = 0$ — по т. Коши оно сущ-ет и единственно. ■

Однако если сила имеет вид, не удовл. т. Коши ($Q(\dots)$ не удовл. усл. Липшица), то критерий в обратную сторону не сработает — может быть >1 реш-я (см. Маркевича).

Следствие

Если $Q = -\nabla \Pi(q,t)$, то полож. равновес. соотв. стац. т. потенц. энергии $\nabla \Pi(q,t) = 0$.

Пример:



т. G — центр масс (теперь всегда так будет).

$\Pi = mgh = mg(l\sin\varphi - a\,\mathrm{tg}\,\varphi)$

$\Pi_{,\varphi}:\quad l\cos\varphi_* - \frac{a}{\cos^2\varphi_*} = 0$

$\cos\varphi_* = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ — полож. равновес.

Теорема — принцип виртуальных перемещений

Полож. $\vec r = \vec r_0$ мех. сис-мы яв-ся полож. равновес. $\Leftrightarrow$ $\forall$ вирт. перемещ. $\delta \vec r$ из этого полож. $\delta A = \int f\,\delta\vec r\,dm = 0$

□ (для стац. случая)

$\delta\vec{r} = \vec{r}_{,k}\,\delta q^k \Rightarrow \quad \delta A = \int \vec{r}_{,k} \cdot \vec{F}\, dm \cdot \delta q^k = Q_k\, \delta q^k = 0 \quad \Rightarrow \delta A = 0 \iff Q = 0$ –

– критерий полож. равновес. ■

Замечание 1 (фундаментальное)

Вообще, эта теорема более общая – она работает и для нестац. сис-м, в одну сторону док-во элементарно, но в другую на порядок сложнее.

□ $\Rightarrow$ $\int (\vec{w} - \vec{F})\,\delta\vec{r}\, dm = 0$ – осн. ур-е динамики

$\vec{w} = 0$ в полож. равн. $\Rightarrow \int \vec{F}\,\delta\vec{r}\, dm = 0$ ■

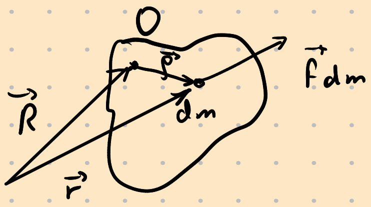
В обратную сторону – см. Маркеев.

Замечание 2 (прикладное)

Важно обратить внимание, что усл. теор-мы должно выполняться $\forall\, \delta\vec{r}$ из полож. равновес.

Пример

Условие равновесия твёрдого тела



$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

$\delta\vec{r} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\rho} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\rho}$, $\delta\vec{\varphi}$ – в-р малого поворота

$\delta A = \int \vec{F} dm \cdot \delta\vec{R} + \int \vec{F} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{\rho}) \cdot dm =$

$= \vec{F} \cdot \delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi} \cdot \underbrace{\int \vec{\rho} \times \vec{F}\, dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{R} + \vec{M}_0 \cdot \delta\vec{\varphi} = 0 \quad \forall\, \delta\vec{R},\ \delta\vec{\varphi} \quad \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$ и $\vec{M}_0 = \vec{0}$

$\vec{F}$ – главный вектор сил, $\vec{M}_0$ – главный момент.

(полезно вспомнить динам. вин́т)

Основы теории устойчивости

Рассматривается система общего вида в нормальной форме Коши:

$\dot{x} = F(x, t)$ (3) Здесь и далее: $x(t) = x(x_0, t)$

Реш-е $x = q = const$ наз-ся положением равновесия сист-мы (3).

Полож. равновес. $x = a$ всегда можно сместить в начало коор-т, в т. $x = 0$:

$x \to x - a$.

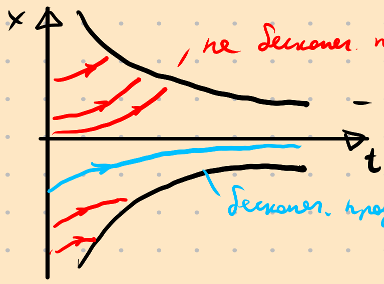
Далее будем считать, что $a = 0$ без ограничения общности.

x можно трактовать как отклонения от полож. равновесия.

Определение

Реш-е $x = x(x_0, t)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз-ся бесконечно продолжаемым вправо, если оно $\exists$ $\forall t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



Определение (уст. по Ляпунову)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) наз-ся уст. по Ляпунову, если

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0; +\infty) \to \|x(t)\| < \varepsilon$

$\|x(t)\| = \sqrt{x^i x^i}$

Замечание

1. Опр. уст. <=> равномерная непрерывность по нач. ус.
2. Из опр. уст. => реш-е $x(t)$ бесконечно продолж. вправо

Определение (асимптот. уст.)

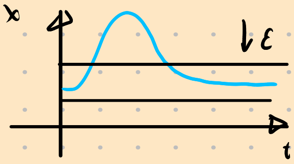
Полож. равновес. $x = 0$ сист. (3) — асимптотически устойчиво, если

* 1. $x = 0$ — уст. по Ляпунову.

2. $\exists \Delta: \forall x_0, \ \|x_0\| < \Delta \to x(t)\Big|_{t \to \infty} \to 0$

$U_\Delta(0)$ — область притяжения.

Если забыть про (1):

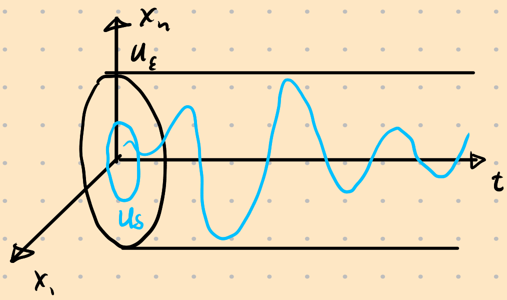


Определение (неуст.)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) неуст., если $\exists \varepsilon: \forall \delta \to \exists x_0:$ $\|x_0\| < \delta$ $\exists t^*: \|x(t^*)\| > \varepsilon$, либо реш. $x(x_0, t)$ не яв-ся ∞ прод. вправо.

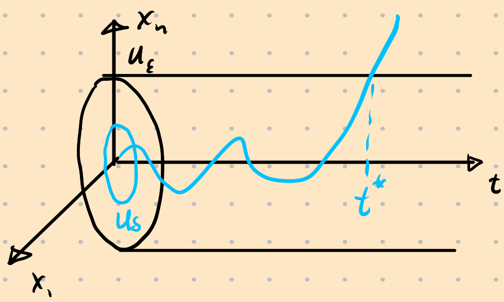
Качественные представления

① Устойчивое

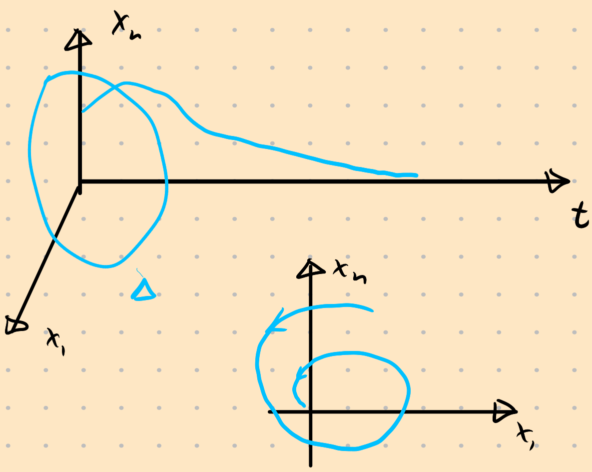


$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: траектория, начавшаяся в δ-окрестности, остается внутри ε-окр-ти

② Неуст.



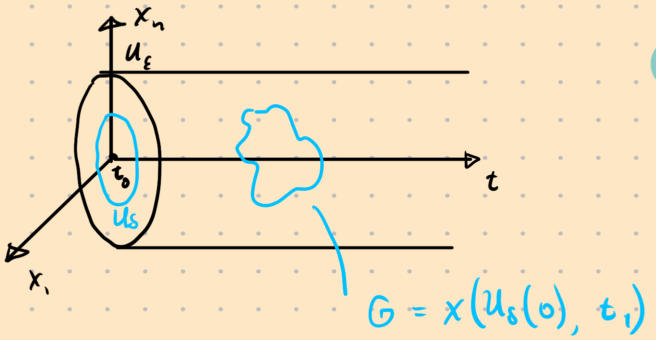
③ Асимптот.



Корректность понятия устойчивости

Если п.р. (положение равновесия) $x=0$ устойчиво для вр. t_0, то оно уст. $\forall t_1 > t_0$.

□ $x = 0$ − уст. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0: \forall x_0 = x(t_0),\ \|x_0\| < \delta \to \|x(t)\| < \varepsilon$



Фазовый поток: G − мн-во реш-ий задач Коши при заданном мн-ве нач. усл.

$x(x_0, t)$ − вполне однозн. и непр. (т. Коши) $\Rightarrow \rho(\partial G, 0) > 0$ (расс-ие от $x=0$ до ∂G)

Выберем $\delta_1 = \rho$, $t_0 \mapsto t_1$, $\delta \mapsto \delta_1$ (замена) ■

Устойчивость траектории

$\dot{x} = X(x, t)$ $\qquad \psi$ − частное решение (траектория)

$\dot{\psi} = X(\psi, t)$

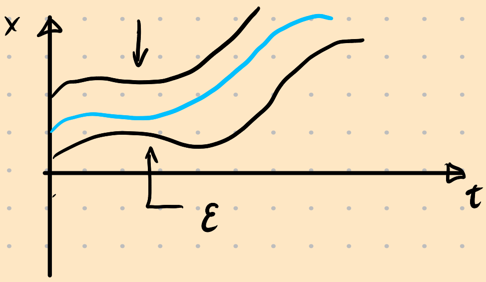
Рассмотрим решение $x = \psi + y$ (y − отклонение от траектории)

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\psi}}_{X(\psi, t)} + \dot{y} = X(\psi + y, t) \Rightarrow \dot{y} = X(\psi + y, t) - X(\psi, t) \quad (1)$$

$y = 0$ − п.р. сис-мы (1)

Таким образом, если $y=0$ − устойчивое п.р., то тр-ия ψ наз-ся **устойчивой**.

Если $\forall$ тр-ия сис-мы устойчива, то сис-ма наз-ся устойчивой.



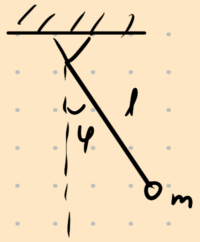
Все траектории, откл. на δ от ψ в нач. усл., отличаются $< \varepsilon$ от ψ.

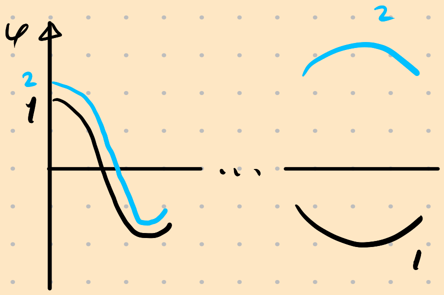
Если $y=0$ − неуст. $\Rightarrow$ тр-я неуст., $y=0$ − асимпт. уст. $\Rightarrow$ тр-ия асимпт. уст.

Замечание Устойчивость траектории обозначает близость возмущённых траекторий в те же моменты времени.

Пример

Рас-им колеб. с конечной амплитудой





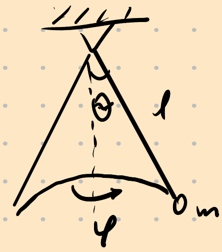
— расходятся (т.к. амплитуды разные => период разный).

Траектории, кроме близких к $\varphi = 0$, неустойчивы.

О выборе переменных в задачах исс-я устойчивости

Переменные не должны иметь особенностей в окр-ти п.р.

Пример



$\forall \theta_0 \ll 1$ $\exists$ реш. вида $\varphi = \dot\varphi_0 t + \varphi_0 \to \infty$

П.р. на самом деле уст-во, $\dot\varphi \to \infty$ — следствие вырождения с.к.

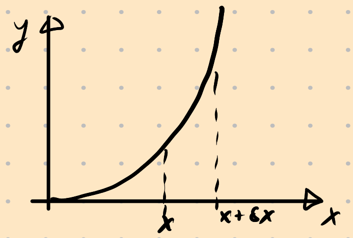
Пример

$\dot x = \frac{1}{2}$ $\qquad x = x_0 + \frac{t}{2}$

$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \forall$ траект. уст.

Замена $y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + t/2)^2$

$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + t/2)^2 = (x_0 + t/2)^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \to \infty$



Определение (ДЗП)

Замена $x = x(y,t)$, $x(0,t)=0$ наз-ся **допустимой**, если

1. $\det(X_{,y}) \neq 0$ в нек-рой окр-ти полож. равновес. (чтобы диффеур разрешился)
2. Замена $x = x(y,t)$ и обратная ей $y = y(x,t)$ непрерывны в 0 равномерно по t. (годится из 2 примера)

Допустимые замены не изменяют хар-ра устойчивости.

Устойчивость линейных систем

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $A(t)$ вообще говоря переменная

$\exists\ \psi(t)$ – траектория, $x = \psi + y$ – возмущённая тр-ия,

$$\cancel{\dot{\psi}} + \dot{y} = Ay + \cancel{A\psi} + \cancel{f} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ иссл-е уст. любой траектории сводится к иссл-ю уст. п.р. $y=0$ однородной сис-мы $\dot{y} = Ay$. (2)

Теорема

П.р. $y=0$ – уст. $\Leftrightarrow$ $\forall$ реш-я сис-мы (2) ограничено.

$\square$ ($\Rightarrow$) $\exists\ \psi$ – неогр. реш., рас-им $y = \dfrac{\delta}{2}\dfrac{\psi(t)}{\|\psi(t_0)\|}$

$\|y(t_0)\| < \delta$, $y(t)\big|_{t\to\infty} \to \infty \Rightarrow y=0$ – неуст.

($\Leftarrow$) Если $\forall$ реш. огр. $\Rightarrow$ огр. $\Phi(t,t_0)$ – фунд. матрица сис-мы, $\forall$ реш. (2) имеет вид $y = \Phi(t,t_0)\,y(t_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi(t_0,t_0) = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \le \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \le M \cdot \|y(t_0)\|$$

$\blacksquare$

Замечание: норма матрицы: $\|\Phi\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$ – „максимальное растяжение"

С евклидовой нормой норма матрицы – max сингулярное число матрицы (собств. число матрицы $\Phi\Phi^T$)

Устойчивость систем с постоянной матрицей

$$\dot y = Ay, \qquad A = const \qquad (3)$$

Особый интерес представляет асимпт. устойчивость н.р. $y=0$.
Многие радиотех. сис-мы, сис-мы управления, отклонения от уст. полож. описываются именно так.

Решения (3): $y = he^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни

Теорема

Н. р. $y=0$ сис-мы (3) асимпт. уст. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \ \forall k = 1, \dots, n$

□ $y(t) \sim P_{\sigma_k - 1}(t)\, e^{\lambda_k t}$ Если $\exists \lambda_k: \operatorname{Re}\lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \to \infty \Rightarrow$ неуст.

Если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \Rightarrow \forall$ реш. огр. $\Rightarrow$ н.р. $y=0$ уст. по пред. теор.

$y(t)\big|_{t\to\infty} \to 0 \Rightarrow$ н.р. $y=0$ – ас. уст. ■

(σ_k – кратность корня λ_k)

Определение

Многочлен $P(\lambda)$ наз-ся уст. если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \ \forall k = 1, \dots, n$
(уст. полином соотв. асимпт. уст. н.р. в сис-ме с const коэф.)

Теорема (необх. усл-е уст. полинома)

Если $P(\lambda)$ уст., то знаки его коэф-ов должны быть одинаковы.

□ $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_i > 0 \qquad \bar\lambda_j$ – тоже корень

$\lambda_k = -\gamma_k, \quad \gamma_k > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod[(\lambda + \alpha_j - i\beta_j)(\lambda + \alpha_j + i\beta_j)]^{\sigma_j} \prod(\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k} =$$
$$= a_n \prod(\lambda^2 + 2\alpha_j\lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod(\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k}$$

Раскрытие скобок даст коэф-ты одного знака. ■

Замечание

Иногда это ус. формулируют в виде: $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$. Это подразумевает предв. приведение многочлена к виду $a_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$.

Критерии уст. рас-ния без док-в (см. Журавлёва или Демидовича)

Критерий Рауса - Гурвица

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$

Строится матрица Гурвица

$$\underset{n \times n}{\Gamma} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \ldots & & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

По диагонали коэф-ты $a_1, a_2, \ldots$ Слева коэф-ты по возраст., справа - по убыванию.

P_λ - уст. $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$

! Есть разные формы записи Γ!

Замечание об усл. $a_0 > 0$

Пример

$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 \qquad \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1} \Rightarrow$ асимпт. уст. $\Leftrightarrow \operatorname{sign} a_0 = \operatorname{sign} a_1$

$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0$ - ?? другое ус.??

„Парадокс" возник от того, что $P(\lambda)$ не приведён к виду $a_0 > 0$.

Приведение к виду $a_0 > 0$:

$P(\lambda) \to \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1$, 1 заведомо > 0

(если $a_0 = 0$ то $P(\lambda)$ сразу неуст.: есть корень $\lambda = 0$)

$\Gamma = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)$ — теперь всё верно.

В форме Льенара - Шипара

$P(\lambda)$ - уст. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array} \right.$ (либо/либо)

Пример

$$P(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

1. $a_2 > 0, \quad a_1 > 0$
2. $\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = a_1 > 0$

$\Rightarrow P(\lambda)$ – уст. $\Leftrightarrow a_i > 0 \ \forall i = \overline{0,n}$

Устойчивость нелинейных систем

Первый метод Ляпунова иссл-я уст-ти по линейному приближению

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

X – непр. дифф. в $x = 0$, а $X^i_{,jk}$ – $\exists$ и огр. в нек-ой окр-ти н.р. $x = 0$ (1)

Тогда:

$$X = Ax + f(x), \quad A = [X^i_{,j}(0)]; \quad \|f(x)\| \le a\|x\|^2, \quad a = const$$

Система линейного приближения: $\dot{x} = Ax$

Теорема Ляпунова – „грубое свойство"

1. Пусть для сис-мы $\dot{x} = X(x)$ вып. усл. (1), тогда если н.р. системы линейного приближения $\dot{x} = Ax$ – ас. уст. $\Rightarrow$ н.р. $x = 0$ сис-мы $\dot{x} = X(x)$ – ас. уст.

2. Если $\exists \lambda_i$ – корень $\det(\lambda E - A) = 0$: $\operatorname{Re}\lambda_i > 0 \Rightarrow$ н.р. $x = 0$ неуст. в обеих системах.

Лемма Гронуолла

$$u(t) \le C + \int_0^t u(t)\, f(t)\,dt, \qquad u,\ f,\ C > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) \le C \exp\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]$$

□ $$\frac{u(t)\, f(t)}{C + \int_0^t u(t')\, f(t')\,dt'} \le f(t)$$ — проинтегрируем: (числ. = производн. знам.)

$$\ln\left[C + \int_0^t u(t) f(t)\,dt\right] - \ln C \le \int_0^t f(t)\,dt$$

$$u(t) \le C + \int_0^t u(t) f(t)\,dt \le C \exp\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]$$

□ (т. Ляпунова): $x = e^{-ht} y(t)$, $2h = \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|$ — замена

$$e^{-ht}\dot{y} - h e^{-ht} y = A y e^{-ht} + f(y e^{-ht})$$

$$\dot{y} = \underbrace{(A + hE)}_{B}\, y + e^{ht} f(y e^{-ht}) \qquad (2)$$

$\dot{y} = By$ — ас. уст.:

$\dot{x} = Ax$ — ас. уст. $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0$

$\dot{x} = (A + hE)x \Rightarrow \tilde{\lambda}_i = \lambda_i + h \Rightarrow \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_i < 0$ $\quad \left(h = \dfrac{\min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|}{2}\right)$

$$(2) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{(Bt-t)} e^{ht} f\left[y(t) e^{-ht}\right] dt$$

(из дифуравнений: $\dot{y} = By + f(t) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-t)} f(t)\,dt$)

Проверяется дифференцированием

$$\|y(t)\| \le \|e^{Bt}\| \cdot \|y_0\| + \int_0^t \|e^{B(t-t)}\| \cdot e^{ht} \cdot \|f(y e^{-ht})\|\,dt$$

$$\|f(x)\| \le a\|x\|^2 \Rightarrow \|f(y e^{-ht})\| \le a\|e^{-2ht}\| \cdot \|y\|^2$$

$$\|y(t)\| \le M\|y_0\| + \int_0^t M a e^{-ht} \|y(t)\|^2\,dt$$

Если $\|y_0\| \ll 1$, то $\exists t: \forall t \in [0; t] \to \|y(t)\| \le 1$ (в силу непр-сти)

Тогда $\|y(t)\| \le \|y(t)\|$ $\forall t \in [0, t] \Rightarrow$ на этом интервале:

$\|y(t)\| \le M\|y_0\| + \int_0^t M a e^{-ht} \|y(t)\|\,dt$ — в чистом виде лемма Гронуолла

Тогда $\|y(t)\| \le M\|y_0\| \exp\left[\int_0^t M a e^{-ht}\,dt\right] \le K\|y_0\| \Rightarrow$

этот интеграл сх-ся, т.е. равен const при $t \to \infty$, т.е. можно оценить сверху const

оценка максимального роста нормы

$\Rightarrow y(t)$ - ограничена. Данная оценка яв-ся оценкой $\|y(t)\|$ сверху, и верна $\forall t \in [0; \infty)$ (оценка роста, порядка, грубые оценки, что-то такое)

$x = e^{-ht}\underbrace{y(t)}_{огр.}\Big|_{t\to\infty} \longrightarrow 0 \Rightarrow$ н.р. $x = 0$ - ас. уст. ■

Док-во неустойчивости аналогично.

Замечание Т. Ляпунова неприменима, если $\exists \lambda_j = \underbrace{\pm i\omega}$ или $\lambda_j = 0$

периодические траектории линеаризованных сис-м

Такие период. траектории разрушаются сколь угодно малыми нелинейными добавками.

Второй (прямой) метод Ляпунова

$\dot x = X(x), \quad X(0) = 0.$

Вводится ф-ия Ляпунова: $V(x)$, $V(0)=0$, $V(x) \in \mathbb{R}$ - непр. диффер.

Производная в силу системы от ф-ии Ляпунова: $\dot V_X = V_{,i} \cdot X^i = \nabla V \cdot X$

Знакоопределённость ф-ии Ляпунова: $V(x) > 0$ - полож. опред. $\Leftrightarrow V(x) > 0$ в нек. $\mathring{U}_\varepsilon(0)$. (в $x=0$ она всегда 0), для остальных случаев аналогично.

Как искать ф-ию Ляпунова, к сожалению, неясно.

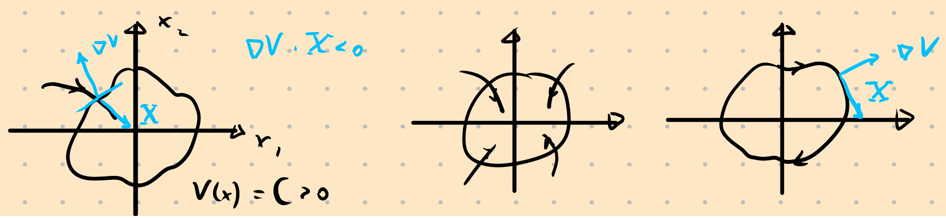
Теорема: если в $U_\varepsilon(0)$ $\exists V(x)$: $V(x) > 0$ и $\dot V_X \le 0$ (в опр. выше смысле) $\Rightarrow$ н.р. $x=0$ - устойчиво.

min на $\partial U_\varepsilon(0)$

□ Рас-им $U_\varepsilon(0)$. $V(x)$ - непр. $\Rightarrow \exists V^* = \min\limits_{\|x\|=\varepsilon} V(x)$, $V(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: $V(x) < V^*$ при $\|x\| < \delta$

Таким образом при x_0: $\|x_0\| < \delta$ $V[x(x_0,t)] < V^*$, т.к. $V[x(x_0,t)]$ - не возрастает (вдоль траекторий нашей сис-мы $V(x)$ либо не изм., либо убывает, т.к. $\dot V_X(x) \le 0$) $\Rightarrow \|x(x_0,t)\| < \varepsilon$



Следствие. Т. Лагранжа - Дирихле

Если $\Pi(q)$ консерв. мех. сис-мы имеет строгий min в п.р., то п.р. устойчиво

$\square$ V