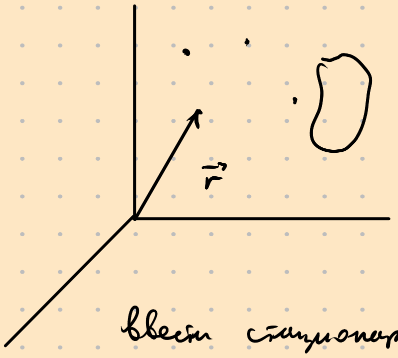
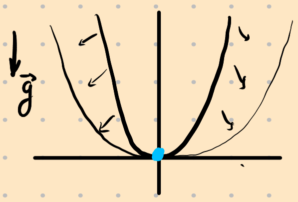
Литература: те же (Муравьёв, Гантмахер, Амелькин, Маркеев - новая версия)

Равновесие механических систем



Система нах-ся в равновесии в выбранной сис-ме коорд-т <=>
<=> $\forall \vec{r} \to \vec{r} = \vec{r}_0 = \overline{const}$

Далее будем рас-ивать стационарные системы (ур-я связи не завият от времени) => $\exists$ возможность ввести стационарную параметризацию, и $\vec{r} = \vec{r}(q)$ после введ-я обобщ. коор-т.



У не стац. систем тоже могут быть полож. равновес. - см. картинку (кривая эволюционирует со временем)

$$(L_{,\dot{k}})^{\cdot} - L_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$\Updownarrow$ — т. о разрешимости отн. старших произв.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = f(q, u, t) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x} = x(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Положения равновесия нах-ся во вз. однознач. соотв. с точками вида $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\square$ (<=) Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = const$

(=>) $\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}\dot{q}^k \equiv \vec{0}$ (1), однако обобщ. коор-ты q вводились так, что $\vec{r}_{,k}\delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q: \delta q^{1^2} + \ldots + \delta q^{n^2} \neq 0$.

Таким образом (1) => $\dot{q} = 0$ $\blacksquare$

Критерий полож. равновесия стац. системы

Стац. сис-ма нах-ся в полож. равновесия <=> $Q(q_0, 0, t) = 0$.

$\square \quad (T_{,\dot{k}})^{\cdot} - T_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$

$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\, \dot{q}^i \dot{q}^j$

$T_{,\dot{k}} = a_{kj}\, \dot{q}^j$ – т.к. a_{ij} – симметричная матрица!

$(T_{,\dot{k}})^{\cdot} = a_{kj}\ddot{q}^j + a_{kj,i}\, \dot{q}^i \dot{q}^j$

$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k}\, \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow a_{kj}\ddot{q}^j + (a_{kj,i} - \frac{1}{2} a_{ij,k})\dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (2)$

Для полож. равновес. $q = q_0$, $\dot{q} = 0 \Rightarrow$

$0 = Q_k(q, \dot{q}, t)$

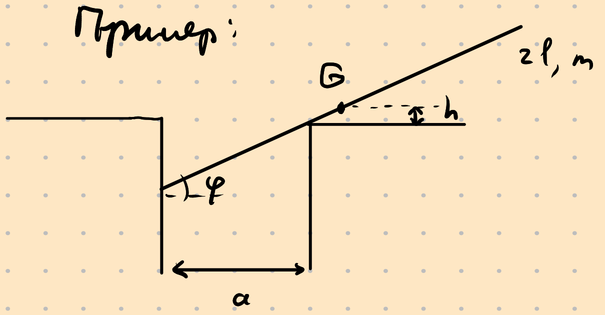
С другой стороны, если $Q(q_0, 0, t) = 0$, то (2) имеет решение $q = q_0$, $\dot{q} = 0$ – по т. Коши оно сущ-ет и единственно. ■

Однако если сила имеет вид, не удовл. т. Коши ($Q(\dots)$ не удовл. усл. Липшица), то критерий в обратную сторону не сработает – может быть > 1 реш-я (см. Маркеева).

Следствие

Если $Q = -\nabla \Pi(q, t)$, то полож. равновес. соотв. стац. т. потенц. энергии: $\nabla \Pi(q, t) = 0$.

Пример:



т. G – центр масс (теперь всегда так будет).

$\Pi = mgh = mg(l \sin\varphi - a \operatorname{tg}\varphi)$

$\Pi_{,\varphi}: \quad l\cos\varphi_* - \frac{a}{\cos^2\varphi_*} = 0$

$\cos\varphi_* = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ – полож. равновес.

Теорема – принцип виртуальных перемещений

Полож. $\vec{r} = \vec{r}_0$ мех. сис-мы яв-ся полож. равновес. $\Leftrightarrow$ $\forall$ вирт. перемещ. $\delta\vec{r}$ из этого полож. $\delta A = \int f\, \delta\vec{r}\, dm = 0$

□ (для стац. случая)

$\delta\vec{r} = \vec{r}_{,k}\,\delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec{r}_{,k}\cdot\vec{f}\,dm\cdot\delta q^k = Q_k\,\delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0$ –

– критерий полож. равновес. ■

Замечание 1 (фундаментальное)

Вообще, эта теорема более общая – она работает и для нестац. сис-м, в одну сторону док-во элементарно, но в другую на порядок сложнее.

□ $\Rightarrow$ $\int (\vec{w} - \vec{f})\,\delta\vec{r}\,dm = 0$ – осн. ур-е динамики

$\vec{w} = 0$ в полож. равн. $\Rightarrow \int \vec{f}\,\delta\vec{r}\,dm = 0$ ■

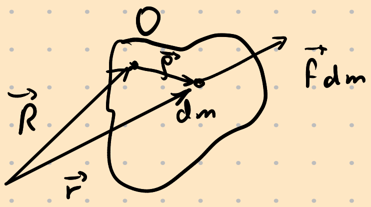
В обратную сторону – см. Маркеев.

Замечание 2 (прикладное)

Важно обратить внимание, что усл. теор-мы должно выполняться $\forall\,\delta\vec{r}$ из полож. равновес.

Пример

Условие равновесия твёрдого тела



$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

$\delta\vec{r} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\rho} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi}\times\vec{\rho}$, $\delta\vec{\varphi}$ – в-р малого поворота

$\delta A = \int \vec{f}\,dm\cdot\delta\vec{R} + \int \vec{f}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{\rho})\cdot dm =$

$= \vec{F}\cdot\delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi}\cdot\underbrace{\int \vec{\rho}\times\vec{f}\,dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{R} + \vec{M}_0\cdot\delta\vec{\varphi} = 0 \quad \forall\,\delta\vec{R},\ \delta\vec{\varphi} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$ и $\vec{M}_0 = \vec{0}$

$\vec{F}$ – главный вектор сил, $\vec{M}_0$ – главный момент.

(полезно вспомнить динам. ваш)

Основы теории устойчивости

Рассматривается система общего вида в нормальной форме Коши:

$\dot{x} = F(x,t)$ (3)

Реш-е $x = a = const$ наз-ся положением равновесия сист-мы (3).

Полож. равновес. $x = a$ всегда можно сместить в начало коор-т, в т. $x = 0$:

$x \to x - a$.

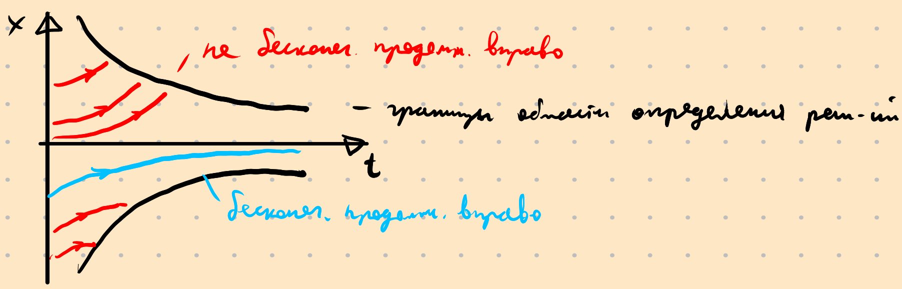
Далее будем считать, что $a = 0$ без ограничения общности.

x можно трактовать как отклонения от полож. равновесия.

Определение

Реш-е $x = x(x_0, t)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз-ся бесконечно продолжаемым вправо, если оно $\exists \ \forall t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



Определение (уст. по Ляпунову)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) наз-ся уст. по Ляпунову, если

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta: \ \forall x_0 = x(t_0), \ \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0; +\infty) \to \|x(t)\| < \varepsilon$

$\|x(t)\| = \sqrt{x^i x^i}$

Замечание

1. Опр. уст. $\Leftrightarrow$ равномерная непрерывность по нач. усл.
2. Из опр. уст. $\Rightarrow$ реш-е $x(t)$ бесконечно продолж. вправо

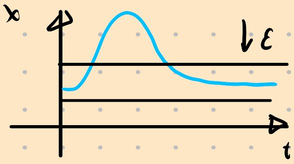
Определение (асимптот. уст.)

Полож. равновес. $x=0$ сист. (3) – асимптотически устойчиво, если

1. $x=0$ – уст. по Ляпунову.
2. $\exists\, \Delta: \ \forall x_0, \ \|x_0\| < \Delta \to \ x(t)\big|_{t\to\infty} \to 0$

   $U_\Delta(0)$ – область притяжения.

Если забыть про (1):



Определение (неуст.)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) неуст., если $\exists\, \varepsilon: \forall \delta \to \exists\, x_0:$ $\|x_0\| < \delta \ \ \exists\, t^*: \|x(t^*)\| > \varepsilon$, либо реш. $x(x_0, t)$ не зб-ся ∞ прод. вправо.