Фомичёв Александр Владимирович

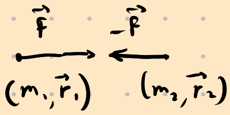
Литература

Чёрный список: лекции Фомичёва, интернет

Белый список: Журавлёв; Маркеев; Гантмахер (~ конец сема); Болотенко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома R^3 – все объекты – в Евклидовом пр-ве R^3.
2. $\exists$ движение: $R \mapsto R^3$ (в R – время)
3. $\exists$ мат. точка: $(m, \vec r)$, $m = const > 0$, $\vec r \in R^3$
4. $\exists$ взаимодействие: $\forall\, (m_1, \vec r_1), (m_2, r_2) \to \exists\, \vec F$ – сила: $F \parallel (\vec r_1 - \vec r_2)$



5. $\exists$ сис-ма координат и способ параметризации времени, такие что

$$m\ddot{\vec r} = \vec F$$

Такие сис-мы наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot q, \ldots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

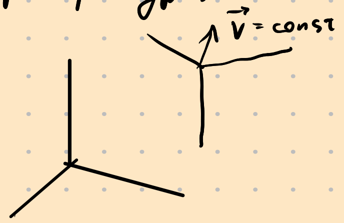
$$t = t(t', q'), \quad q = q(t', q')$$

$F_i(t', q', \dot q', \ldots, q'^{(n)}) = 0$ – те же ф-ии!

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правила составления ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относ. преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} r' = \vec r_0 + \vec v t + A t, \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

A – ортог. матрица

преобр. (группа) Галилея

$\vec r_0, \vec v, A, \tau = const$

$$m\ddot{\vec r} = \vec F \longmapsto m\ddot{\vec r}' = \ddot{\vec F}$$

Индексные обозначения

① $\vec{r} \to r^i$, $i = 1 \dots 3$

② $A \to a_{ij}$

a^i_j

a^{ij}

немой индекс

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i \equiv a^i b^i$ (правило Эйнштейна)

$A\vec{r} = a_{ij} r^j$

бегущий индекс

④ $a, \dots, h$ – фиксирующие индексы

$x^a b^a$ – эл-т с номером a; без суммирования!

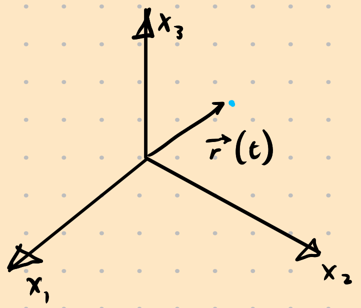
⑤ $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k}$ $\qquad$ $\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$

Напр. $df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$

Кинематика точки

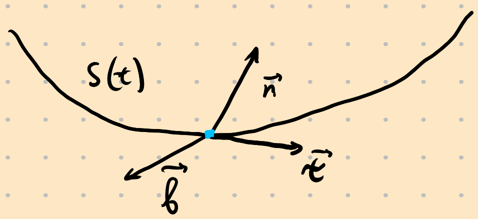
Декартовы координаты

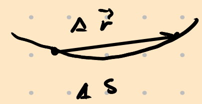


$$\vec r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} \qquad V = \dot{\vec r} = \begin{bmatrix} \dot r^1 \\ \dot r^2 \\ \dot r^3 \end{bmatrix}$$ — скорость

$$\vec w = \ddot{\vec r} = \dot{\vec V} = \begin{bmatrix} \ddot r^1 \\ \ddot r^2 \\ \ddot r^3 \end{bmatrix}$$ — ускорение

Сопровождающий трёхгранник Френе

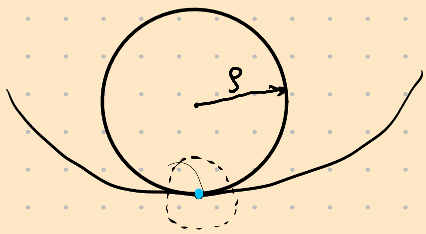


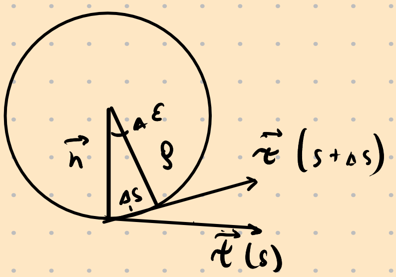


$$\vec r = \vec r(s(t))$$

$$\vec V = \underbrace{\vec r_{,s}}_{\vec\tau}\,\dot s = \vec\tau V$$

$$\vec w = \vec\tau_{,s} V^2 + \vec\tau \dot V$$





$$\Delta s \simeq \rho\Delta\varepsilon$$

$$\Delta\vec\tau \simeq \Delta\varepsilon\vec n = \frac{\Delta s}{\rho}\vec n$$

$$\vec\tau_{,s} = \frac{\vec n}{\rho} \Rightarrow \vec w = \underbrace{\dot V\vec\tau}_{w_\tau} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho}\vec n}_{w_n}$$

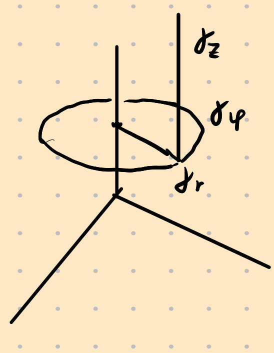
тангенц. нормальное

Криволинейные координаты

$\vec r = \vec r(q)$; $q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}$ — криволинейные (обобщённые) координаты

$\det\left[r^i_{,j}\right] \neq 0$! Взаимно-однознач. соотв.

$\vec r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$ — цилиндрические координаты



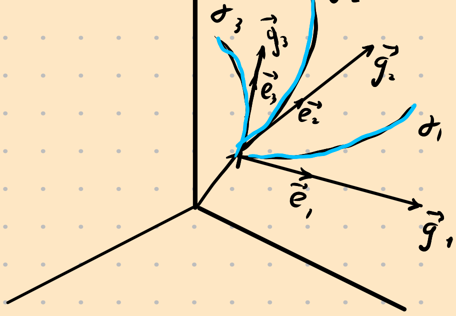
$\begin{cases} q^i \text{ - var} \\ q^{j\neq i} \text{ - fix} \end{cases}$ $i = 1, 2, 3$ — γ_i — координатные линии

$H_k = |\vec{g}_k|$ — к-т Ламе

$H_k = \sqrt{(r^1_{,k})^2 + (r^2_{,k})^2 + (r^3_{,k})^2}$

$\vec{e}_\alpha = \dfrac{\vec{g}_\alpha}{H_\alpha}$ - Орты (норм. векторы) лок. базиса

$|\vec{e}_\alpha| = 1$



Скорость в кривол. коорд.

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}\dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^k}_{\text{составляющая}}\vec{g}_k$

① $\vec{v} = \sum \underbrace{H_k \dot{q}^k}_{\text{составляющая}} \vec{e}_k$

$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik}\text{ - метрич. тензор}} \dot{q}^i \cdot \dot{q}^k = g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k$

② $v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$

Если $\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$:

$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot{q}^i)^2$

Ускорение в кривол. сис-ме

$\vec{w} \cdot \vec{g}_k = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k})^{\cdot} - \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k}$

! $^{\cdot} = \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$

Произв. по q_k ↔ точки:

$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i$ $\qquad \dfrac{\partial}{\partial q^k}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,i} \cdot \dot{q}^i \qquad \dot{\vec{r}}_{,k} = \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i$

$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \left(\dfrac{v^2}{2}\right)_{,k} \qquad (\text{т.к. } v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec{r}}_{,\dot{k}}}_{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}^k}} = \vec{r}_{,k}$

$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,\dot{k}} = (v^2/2)_{,\dot{k}}$

③ $\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,a}$

④ $\vec{w}\cdot\vec{e}_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - (v^2/2)_{,a}\right]$

Оператор Эйлера – Лагранжа

$$\xi_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Геометрический смысл H_k и их вычисление

$q^a \to q^a + dq^a$ – только одна комп.

$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a}\cdot dq^a$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad |\cdot\vec{g}_k$ $\qquad T = \frac{mv^2}{2}$ – кин. энергия

$m\,\xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{g}_k = Q_k$ – обобщенная сила

$\xi_k(T) = Q_k$

(6) $\frac{d}{dt}T_{,\dot{k}} - T_{,k} = Q_k$

Для базиса $\vec{e}_k$: $\quad \frac{1}{H_a}\xi_a(T) = \vec{F}\vec{e}_a$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ – зависимость $\qquad q(q')$ – замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot{q}^i = \underbrace{q^i_{,i'}}_{\text{матрица Якоби}}\dot{q}^{i'}$ – контравариантный вектор (набор чисел, к-рый при смене базиса ведет себя вот так) (тензор I ранга)

$\dot{q} = J\dot{q}'$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ – скал. ф-ия

$f(q(q'))$ $\qquad f_{,i'} = f_{,i}\cdot q^i_{,i'}$ – градиент меняется уже не так! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор – тензор I ранга)

$\underbrace{\nabla' f}_{\text{строка}} = \nabla f J \qquad \nabla' f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже столбец!}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$

Разница (между ко- и контра-) теряется, если преобр-е ортогонально $\left((J^T)^{-1} = J\right)$

Метрический тензор

$\vec{g}_k = \vec{r}_{,k} \qquad \vec{r}(q(q'))$ – замена

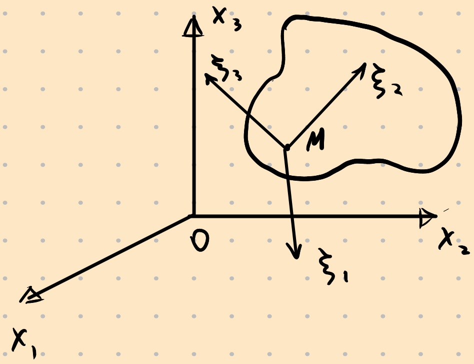
$g_{k'} = \vec{r}_{,k} \cdot q^k_{,k'} = \vec{g}_k \, q^k_{,k'}$ – получается, $\vec{g}_k$ – ковариантный вектор

Метрический тензор: $\vec{V} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow V^2 = \underbrace{g_i g_k}\, \dot{q}^i \dot{q}^k$, $g_{ik} = g_i g_k$ – метрич. тензор!

$g_{i'k'} = q^i_{,i'} \, q^k_{,k'} \, g_{ik}$ – ковариантный тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Кинематика твёрдого тела

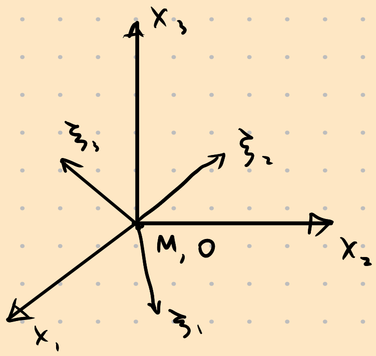
Твёрдое тело – совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



$M \in$ телу – полюс ТТ (твёрдого тела)

Движение твёрдого тела – это движение полюса и движение ТТ относ. полюса (вращение).

Вращение. Углы конечного вращения



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

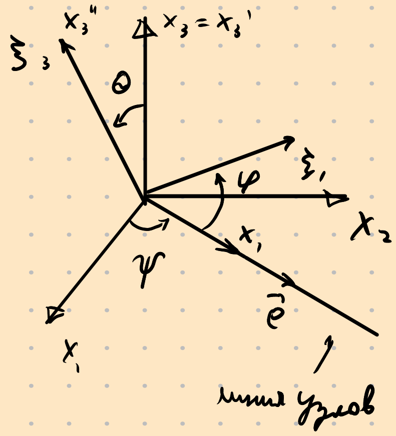
- Углы Эйлера

$\exists$ (пусть) $\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем сис-му координат Ox:

$$X \xrightarrow[3\,(\text{относ. } x^3)]{\psi} X' \xrightarrow[1']{\theta} X'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



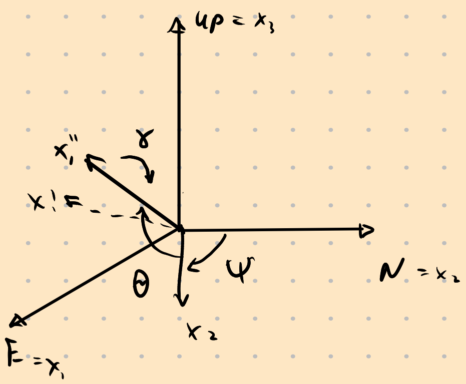
ψ – угол прецессии

θ – угол нутации

φ – угол собственного вращения

Параметры ψ, θ и φ напод. во вз.-одн. соотв. с положением твёрдого тела везде кроме полож. $\theta = \{0, \pi\}$

- Самолётные (корабельные) углы



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ – курс

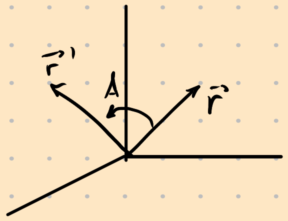
θ – тангаж

γ – крен

Вырождение при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Любая сис-ма углов конечного вращения будет иметь вырождение.

Ортогональная матрица



$$\vec r\,' = A\vec r$$

$$|\vec r\,'|^2 = |\vec r|^2 \quad \forall \vec r$$

$$|\vec r\,'|^2 = \vec r\,'^T \vec r\,' = \vec r^T A^T A \vec r = |\vec r|^2 = \vec r^T \cdot \vec r \quad \forall \vec r \Rightarrow A^T A = 1 \text{ –}$$

Определение ортог. матрицы

Св-ва

① Теорема Бине-Коши: $|AB| = |A| \cdot |B|$

$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$ поворот; зеркальный поворот

② $A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③ $\forall A, B$ - ортог. $\to C = AB$ - ортогональная

$C^T C = B^T \cdot A^T \cdot AB = E$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

① $\forall A, B \in G \to C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

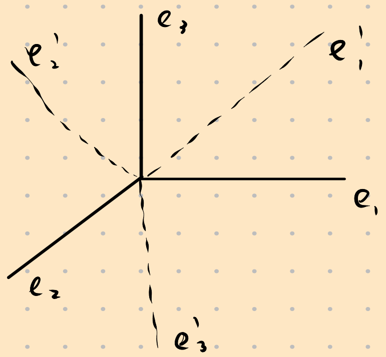
③ $\exists E \in G: \ \forall A \in G \to AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \to \exists A^{-1} \in G: A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пусть $O(3)$ – группа ортогональных матриц: $A^T A = E$

$SO(3)$ – спец. орт. группа; $\forall A \in SO(3) \to |A| = 1$ (группа поворотов)

⑤ $SO(3)$ – основная мат. модель твёрдого тела с неподвижной точкой.



$$\vec e_{i'} = a^i_{i'} \vec e_i$$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{1'} & \\ a^2_{1'} & \dots \\ a^3_{1'} & \end{pmatrix} = [\,[\vec e_{i'}]\,]_e$$

$[e_1']_e$

$$\vec e_{i'} \cdot \vec e_j = a^i_{i'} \vec e_i \vec e_j = a^j_{i'} \overset{j \to i}{\Rightarrow} a^i_{i'} = \cos(\widehat{e_i, e_{i'}})$$

A – матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однознач. соответствие между положением твёрдого тела и $A \in SO(3)$.

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ $\quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$ => 6 независимых формул =>

=> матрицы из $SO(3)$ – трёхмерное многообразие в 9-мерном пр-ве матриц

6 $\quad a^i_{i'} = \Delta^i_{i'}$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{[\Delta^i_{i'}]^T}{\underbrace{|A|}_{=1}} = A^T$ => ЧТД

эл-т A $\qquad$ ал. дополнение

Собственные векторы и собственные числа ортогональных матриц

$A\vec{r} = \lambda \vec{r}$ => $|\lambda E - A| = 0$ $\qquad \operatorname{tr} A = a^i_i$

$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$ => $\exists \vec{r}_1 : A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$ – инвариантный вектор

Докажем, что $|\lambda_a| = 1$

$A\vec{r}_a = \lambda_a \vec{r}_a \,|\cdot (\text{сопр-е})^+$ $\qquad A^+ = \overline{A^T}$ – эрмитово сопряжение $\quad$ ↙ комплексное сопр-е

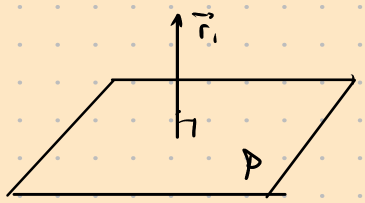
$\vec{r}^{\,+}_a \underbrace{A^+ A}_{E} \vec{r}_a = \underbrace{\lambda^+_a \lambda_a}_{|\lambda_a|^2} \cdot \vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a$ $\qquad$ Если $\vec{r}_a = \vec{p} + i\vec{a}$, то $\vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a = \vec{p}^T p + \vec{a}^T a = |\vec{r}_a|^2 > 0$

$|\vec{r}_a|^2 = |\lambda_a|^2 \cdot |\vec{r}_a|^2$ => $|\lambda_a| = 1$

$$\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{(\operatorname{tr} A - 1)^2}{4}}$$

$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i\vec{q}$ $\qquad \{\vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q}\}$ – правый ОНБ

Инвар. подпр-во A:



$P \perp \vec{r}_1$, $\quad P$ – инвар. подпр-во A.

$\exists\, \vec{r} \in P$ $\qquad A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$ => $A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$

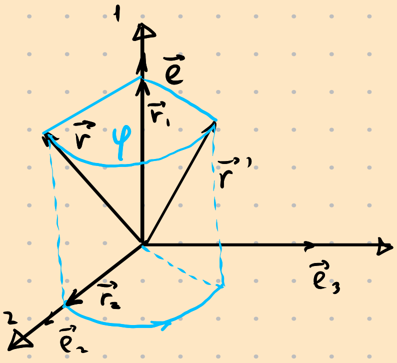
$\underbrace{(A\vec{r})^T \vec{r}_1 = \vec{r}^{\,T} \underbrace{A^T \vec{r}_1}_{\vec{r}_1}}_{0}$ => $A\vec{r} \in P$

ЧТД

Теорема Эйлера о конечных поворотах

$\forall$ e^x положении тв. тела с неподв. точкой $\exists\, \vec{e}$ и угол φ конечн. поворота, совмещ. положение тела (в силу существования $\vec{r}_1$)

Связь ортогональной матрицы и пар-ов Эйлерова поворота



Выберем $\vec e$ как ось поворота, $\vec e_2 \perp \vec e$ лежит в плоскости с $\vec r$ и $\vec e$.

$\vec r$ поворачивается на φ относ. $\vec e$ в $\vec r\,'$.

$\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$, где $\vec r_1 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$\vec r_2 = \vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$$\vec e_2 = \frac{\vec r_2}{|\vec r_2|}$$

$$\vec e_3 = \vec e_1 \times \vec e_2 = \frac{\vec e \times \vec r}{|\vec r_2|}$$

$$\vec r\,' = \vec r_1 + r_2 \cos\varphi\, \vec e_2 + r_2 \sin\varphi\, \vec e_3 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \cdot \vec e + (\vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e)\cos\varphi + \vec e \times \vec r \sin\varphi =$$

$$= (E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e\, \vec e^{T})\vec r$$

$$\hat e \vec r = \vec e \times \vec r; \quad \hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \ (1) \qquad \vec e\, \vec e^{T} = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1 e^2 & e^1 e^3 \\ e^2 e^1 & \dots & \\ & & \end{bmatrix}$$

Получим $\boxed{A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e\, \vec e^{T}}$ (2) — причем инв. относ. базиса!

$$\vec e \times (\vec e \times \vec r) = \langle \vec e\, \vec r \rangle \vec e - \vec r$$

$$\hat e^2 \vec r = (e e^T - E)\vec r$$

$$\boxed{A = E + \hat e \sin\varphi + \hat e^2 (1-\cos\varphi)}$$

Пусть $\vec\varphi = \vec e \varphi$ — вектор Эйлера (условный вектор — сложение не работает)

* $\vec\varphi \mapsto \hat\varphi$ — соотв. оператор вида (1).

Тогда можно пок-ть, что $A = e^{\hat\varphi}$ (ряд Тейлора)

Выражение парам. Эйл. поворота через эл-ты $A \in SO(3)$

Из (2) $\Rightarrow$ $\operatorname{tr} A = \underbrace{3\cos\varphi}_{E\cos\varphi} + \underbrace{1-\cos\varphi}_{(1-\cos\varphi)\vec e\, \vec e^{T}}$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$$A = [a^i_j]$$

$$a^3_2 - a^2_3 = 2e^1 \sin\varphi \Rightarrow e^1 = \frac{a^3_2 - a^2_3}{2\sin\varphi} \qquad e^2 = \frac{a^1_3 - a^3_1}{2\sin\varphi} \qquad e^3 = \frac{a^2_1 - a^1_2}{2\sin\varphi}$$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$; полагаем, что $\varphi \in [0;\pi]$! это делает $\vec e$ таким, что полож. поворот — это против часовой стрелки. Поворот в обр. сторону — берём $-\vec e$.

Оператор малого поворота. Угловая скорость твёрдого тела

Если $\varphi \ll 1$, то

$$A \simeq E + \hat{\varphi} \text{ — оператор малого поворота}$$

Это верно и для $A \in SO(n)$:

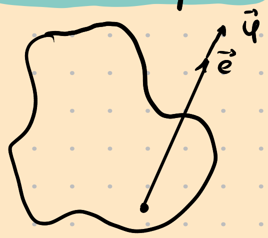
$$A(t) \in SO(n); \quad A(0) = E$$

$$A^T A = E \;\Big|\; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$\dot{A}^T \underset{E}{\underset{\parallel}{A}} + \underset{E}{\underset{\parallel}{A^T}} \dot{A} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\dot{A}^T(0) = -\underset{\hat{\omega}}{\underset{\parallel}{\dot{A}(0)}} \Rightarrow \dot{A}(0) \text{ — кососимметрическая} \Rightarrow A \simeq E + \Delta t\, \hat{\omega}$$

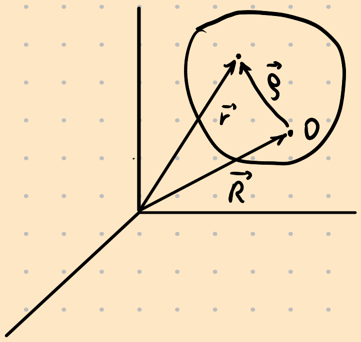
Угловая скорость



$$\exists\, \Delta\vec{\varphi} = \vec{e}\,\Delta\varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \text{ — угловая скорость}$$

Распределение скоростей и ускорений в твёрдом теле



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \underset{\vec{V}_0}{\underbrace{\dot{\vec{R}}}} + \dot{\vec{\rho}}$$

$$\rho(t + \Delta t) \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\,\vec{\rho}(t)$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}\,\vec{\rho} = \hat{\omega}\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

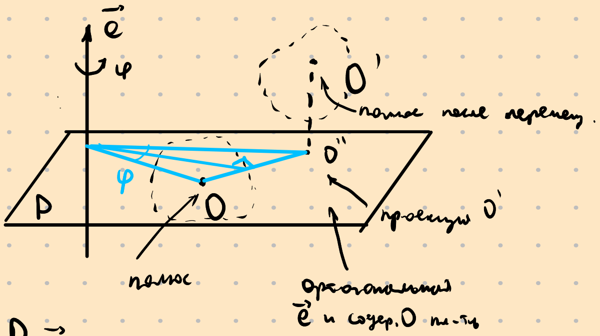
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \text{ — ф-ла Эйлера}$$

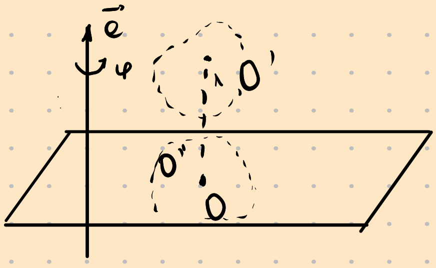
$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \text{ — ф-ла Ривальса}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Кинематический винт твёрдого тела

Пользуемся эйлеровыми поворотами





Винтовое движение

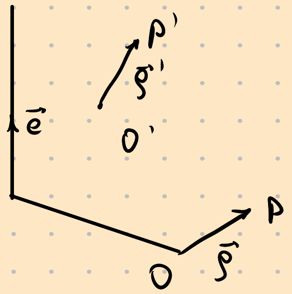
$P \perp \vec e$

Любое движение тела эквивалентно винтовому перемещению.

Перемещ-ем тело на рас-е $\Delta l = \overrightarrow{OO'} \cdot \vec e$ и повернуть на φ.

Теорема Шаля: $\forall$ перемещ-е тв. тела эквивалентно винтовому перемещению.

Линейная часть перемещ. не зависит от выбора полюса:



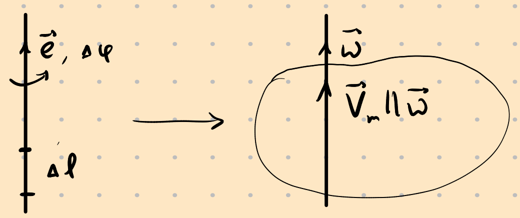
$$\vec\rho\,' = A\vec\rho$$

$$\vec\rho\,' \cdot \vec e = \vec\rho\,'^{T}\vec e = (A\vec\rho)^{T}\vec e = \vec\rho^{\,T}\underbrace{A^{T}\vec e}_{\vec e} = \vec\rho^{\,T}\vec e$$

Проекция $\vec\rho$ на $\vec e$ не меняется.

Если $\vec\rho = \overrightarrow{OO'}$ — не важно, как выбрать O, $\overrightarrow{OO'} \cdot \vec e = \text{const}$.

Рассм. движ-е тела за время Δt



$$\vec V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec\varphi}{\Delta t}$$

Тело совершает мгновенное винтовое перемещение.

Ось кинематического винта

ГМТ: $\vec V = \vec V_0 + \omega \times \rho = \lambda\vec\omega$

$$\underbrace{\vec\omega \cdot \vec V}_{\text{не зав. от полюса}} = \vec\omega \cdot \vec V_0 = \lambda\omega^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec V_0 \cdot \vec\omega}{\omega^2}$$ — кинемат. инвариант

Раскроем покомпонентно:

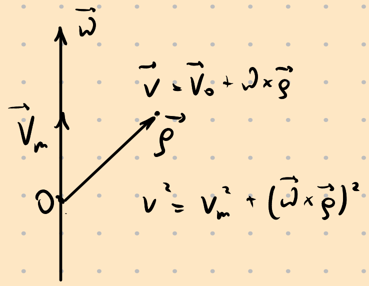
$$\begin{cases} V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{0y} + \ldots = \lambda \omega_y \\ V_{0z} + \ldots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{V_{0y} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{0z} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}}$$ – выражение оси кинемат. винта

Найти кинемат. винт <=> найти ω, уравнение оси, V_m.

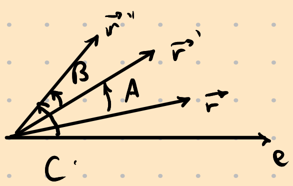
$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Причём V_m – мин. скорость в тв. теле.



Сложение поворотов

1. Активные повороты

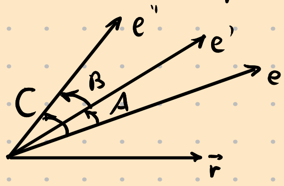


$$\vec{r}' = A\vec{r} \qquad \vec{r}'' = B\vec{r}' = BA\vec{r}$$

$$C = BA$$

n поворотов: $C = A_n A_{n-1} \ldots A_1$

2. Пассивные повороты



$$\vec{r}^{(1)} = \sum r_i^{(1)} e_i' \qquad \vec{e}_i' = A\vec{e}_i$$

сходим т.к. вектор тот же, базис другой

$$\vec{r} = \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i' \Big|_e = \sum r_i^{(1)} A\vec{e}_i \text{ (в базисе e)}$$

В базисе e:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

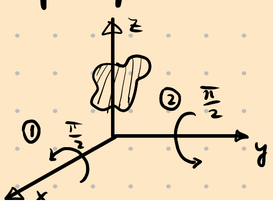
$$\vec{r} = A\vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}' = A^T \vec{r}$$

$$\vec{r}^{(11)} = B^T \vec{r}^{(1)} = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$$

$$C = AB$$

n поворотов: $C = A_1 A_2 \ldots A_n$

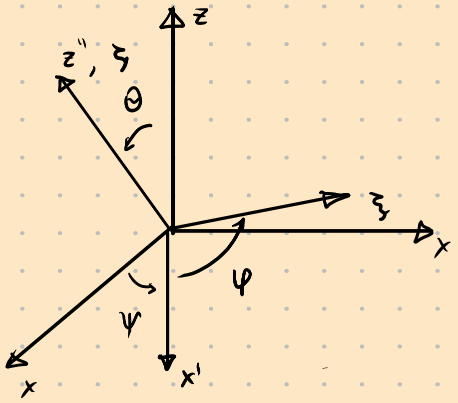
Пример 1



$$C - ? \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ – коор-ты повёрнутого базиса в исх.

Ясно, что активная т. зрения, т.е. $C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Пример 2



1. Вокруг z на ψ
2. Вокруг x' на θ — углы Эйлера
3. Вокруг z'' на φ

Очевидно, пассивная т. зрения

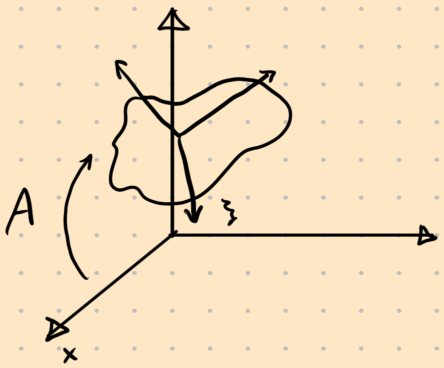
$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ — просто координаты нового базиса в старом

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

Кинематические ур-я Пуассона для ортогональных матриц



A — связь подв. базиса тела с неподв. базисом x

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta\hat{\varphi}_x)A(t) & \text{— акт. т. зр.} \\ A(t)(E + \Delta\hat{\varphi}_\xi) & \text{— пасс. т. зр.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta\vec{\varphi} & \longleftrightarrow & \Delta\hat{\varphi} \\ \Big\downarrow \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot & & \Big\downarrow \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot \\ \vec{\omega} & \longleftrightarrow & \hat{\omega} \end{array}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A\hat{\omega}_\xi \end{array} \right. \quad (1)$$ — Кинемат. ур-я Пуассона.

Если есть $A(t_1)$ и $\hat{\omega}_x(t)$ либо $\hat{\omega}_\xi(t)$ то интегрируя эти ур-я, можно получить текущую ориентацию.

Матрица акт. и пас. поворота одинаковы: угол тот же, орт один и тот же в X и в ξ т.е. это собств. вектор преобр-я.

Ур-ия интегрируются численно, но не аналитически.

Чаще пользуются пассивной т. зрения (датчики угловой скорости на корпусе).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k,\ k = 1, 2, 3$$ — 9 уравнений!

Можно сократить число ур-ий, подлежащих интегрированию:

Базис - правый ОНБ, т.е. третий столбец A выраж. через первые два

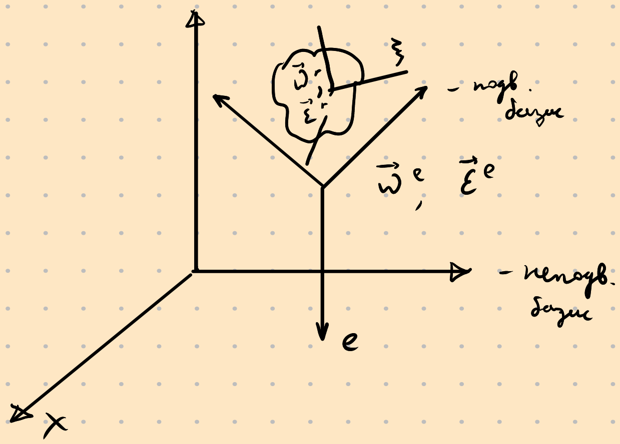
$$\dot A = \hat\omega_x A \iff \begin{cases} \dot{\vec a}_k = \vec\omega_x \times \vec a_k, \quad k=1,2 \quad \text{— 6 ур-ий} \\ \vec a_3 = \vec a_1 \times \vec a_2 \end{cases}$$

$\vec a_k \cdot \vec a_m = \delta_{km}$ - проверка численного интегрирования в процессе

Следствие из (1):

$$\begin{cases} \hat\omega_x = \dot A A^T \\ \hat\omega_\xi = A^T \dot A \end{cases}$$ - зная $A(t)$, можно вычислить $\omega_x(t)$ и $\omega_\xi(t)$

Сложное движение твёрдого тела



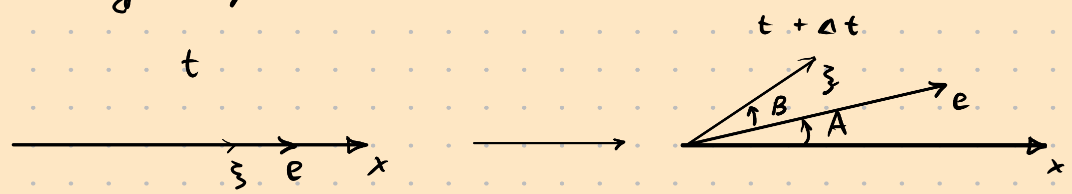
$\vec\omega^e, \vec\varepsilon^e$ - угловые скорость и уск. подв. базиса

$\vec\omega^r, \vec\varepsilon^r$ - угл. ск. и уск. тела относ. подв. базиса

Найти: $\vec\omega, \vec\varepsilon$ - абс. угл. ск. и уск.

1. Угловая скорость

Свяжем с телом и подв. базисом промежуточные базисы, совп. по ориентации с неподв. базисом.



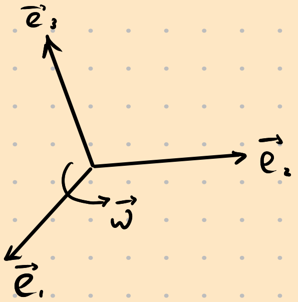
$$A \simeq E + \Delta\hat\varphi^e, \quad B \simeq E + \Delta\hat\varphi^r$$

$$C = AB \simeq E + \underbrace{\Delta\hat\varphi^e + \Delta\hat\varphi^r}_{\Delta\varphi} \quad \text{(малые 1 порядка)}$$

$$\hat\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \hat\omega = \hat\omega^e + \hat\omega^r$$

$\hat\omega^e$ - переносная угл. ск. $\quad \hat\omega^r$ - относительная угл. ск. $\quad \hat\omega$ - абсолютная угл. ск.

2. Скорость вектора в подвижном базисе



$$\vec a = \sum a_k \vec e_k \quad \text{– произв. вектор}$$

$$\dot{\vec a} = \sum \dot a_k \vec e_k + a_k \dot{\vec e}_k = \frac{d'\vec a}{dt} + \vec\omega \times \vec a$$

локальная/относит. произв. — переносная производная

$$\frac{d'\vec a}{dt} = \begin{bmatrix} \dot a_1 \\ \dot a_2 \\ \dot a_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec e}_k = \omega \times \vec e_k \quad \text{(из ф-лы Эйлера)}$$

3. Угловое ускорение

$$\vec\omega = \vec\omega^e + \vec\omega^r = \vec\omega^e + \sum \omega^r \vec e_k$$

$$\boxed{\vec\varepsilon = \dot{\vec\omega} = \dot{\vec\omega}^e + \dot{\vec\omega}^r = \vec\varepsilon^e + \vec\varepsilon^r + \vec\omega^e \times \vec\omega^r}$$

4. Особый вектор

$$\dot{\vec a} = \frac{d'\vec a}{dt} + \vec\omega \times \vec a \Rightarrow \dot{\vec\omega} = \frac{d'\vec\omega}{dt}$$ – угл. скорость вращения базиса – абс. произв. = относ. произв.

Кинематические уравнения Эйлера

• У кватернионов есть матричная интерпретация (напомнят в задании).

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec\lambda = \begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}, \qquad \tilde\Lambda = \lambda_0 - \vec\lambda \text{ — сопряжение},$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec\lambda\cdot\vec\mu + \lambda_0\vec\mu + \mu_0\vec\lambda + \vec\lambda\times\vec\mu$$

Нормированные кватернионы: $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec e \sin\frac{\varphi}{2}$; $\quad |\vec e| = 1$

Деление — редкая операция, и у кватернионов есть!

$R' = Ad\,R = \Lambda \circ R \circ \tilde\Lambda$ — присоединённое отображение

Свойства $Ad\,R$

$\exists\, R = r_0 + \vec r$

1. $r_0' = r_0$

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{R'}= r_0' + \vec r\,' = \Lambda\circ(r_0+\vec r)\circ\tilde\Lambda = r_0 + \Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda \\ &\widetilde{\Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda} = \Lambda\circ\tilde{\vec r}\circ\tilde\Lambda = -\Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda \Rightarrow \operatorname{vect} \Lambda\circ\vec r\,\tilde\Lambda = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow r_0' = r_0$$

2. $\vec r\,' = A\vec r$, $A \in O(3)$

$\Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda$ — лин. преобр $\Rightarrow \exists A: \Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda = A\vec r = \vec r\,'$

$\|\vec r\,'\| = \|\Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda\| = \|\Lambda\|^{\nearrow 1}\cdot\|\vec r\|\cdot\|\tilde\Lambda\|^{\nearrow 1} \Rightarrow \|\vec r\,'\| = \|\vec r\| \Rightarrow A \in O(3)$ ЧТД

Замечание $\exists\, \Lambda(t) \in \mathbb{H}$, $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(0) = 1$.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Lambda\circ\tilde\Lambda = 1 \Rightarrow \dot\Lambda(0) + \dot{\tilde\Lambda}(0) = 0 \Rightarrow \dot\Lambda(0) = \begin{bmatrix}0\\ \vec r\end{bmatrix}, \quad \vec r \in \mathbb{R}$$

(т.к. $\dot{\tilde\Lambda}(0) = \dot{\tilde\Lambda}(0)$)

Кватернионы вида $\begin{bmatrix}0\\ \vec r\end{bmatrix}$ в механике обычно отождествляют с векторами

Теорема

Преобр-е $\vec r\,' = \Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda$, где $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec e\sin\frac{\varphi}{2}$ задаёт Эйлеров поворот вокруг $\vec e$ на угол φ.

Д-во

$$\Lambda\circ\vec r - \vec r\circ\overset{\text{коммутатор?}}{\Lambda} = 2\vec\lambda\times\vec r$$

$$\Lambda\circ\vec r = \vec r\circ\Lambda + 2\vec\lambda\times\vec r \Rightarrow \vec r\,' = (\vec r\circ\Lambda + 2\vec\lambda\times\vec r)\circ\tilde\Lambda$$

$$\vec r\,' = \vec r + 2(\vec\lambda\times\vec r)\circ\tilde\Lambda = \vec r + 2\lambda_0\vec\lambda\times\vec r + 2\vec\lambda\times(\vec\lambda\times\vec r) = (E + 2\lambda_0\hat\lambda + 2\hat\lambda^2)\vec r \Rightarrow$$

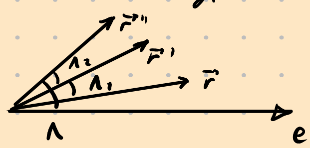
$\Rightarrow \boxed{A = E + 2\lambda_0\hat\lambda + 2\hat\lambda^2}$ — связь ортогональной матрицы и нормированного кватерниона

$$A = E + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\hat e + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\hat e^2 = E + \sin\varphi\,\hat e + (1-\cos\varphi)\,\hat e^2 -$$

Выражение $A \in SO(3)$ через пар-ры Эйл. поворота. ИТД

Сложение поворотов в кватернионах

1. Активная т. зр.

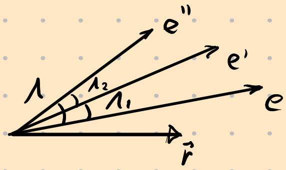


$\vec r' = \Lambda_1 \circ \vec r \circ \tilde\Lambda_1$ $\quad \vec r'' = \Lambda_2 \circ \vec r' \circ \tilde\Lambda_2$ $\quad \vec r'' = \Lambda \circ \vec r \circ \tilde\Lambda$

$$\vec r'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \vec r \circ \widetilde{\Lambda_2 \circ \Lambda_1} \Rightarrow \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$$

$\Lambda = \Lambda_n \circ \ldots \circ \Lambda_1$ Повороты в одном и том же базисе

2. Пассивная т. зр.



$\vec e'_k = \Lambda_1 \circ \vec e_k \circ \tilde\Lambda_1$

$\vec r = r'_k \vec e'_k = \Lambda_1 r'_k \vec e_k \circ \tilde\Lambda_1$

В базисе e: $r = \vec r_e \Rightarrow \vec r_e = \Lambda_1 \circ \vec r_{e'} \circ \tilde\Lambda_1$

Тогда $\vec r_{e'} = \tilde\Lambda_1 \circ \vec r_e \circ \Lambda_1$

$$\vec r_{e''} = \tilde\Lambda_2 \circ \vec r_{e'} \circ \Lambda_2 = \widetilde{\Lambda_1 \circ \Lambda_2} \circ \vec r_e \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

$\Lambda = \Lambda_1 \circ \ldots \circ \Lambda_n$

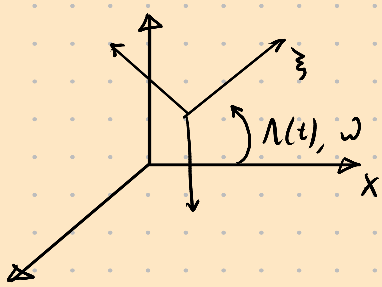
Замечание: коор-ты кватерниона в Λ одинаковы в базисах $\{e_i\}$ и $\{e_n\}$, т.к.

$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec e \sin\frac{\varphi}{2}$, φ – скаляр, коор-ты $\vec e$ одинаковы в $\{e_i\}$ и $\{e_n\}$.

Коор-ты кватерниона в собственных базисах наз-ют параметрами Родрига-Гамильтона.

(собственный = базис, к-рый кватернион поворачивает)

Уравнения Пуассона в кватернионах



$\Lambda(t)$ – поворот ξ отн. x

$$\Lambda(t+\Delta t) = \begin{cases} \Lambda_x(\Delta t) \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Lambda_\xi(\Delta t) \end{cases}$$

$\Lambda_*(\Delta t) = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \vec e_* \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx 1 + \vec e_* \frac{\Delta\varphi}{2}$ – кв. малого поворота

$* = \{x, \xi\}$

$$\dot\Lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec\omega_x \circ \Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \circ \vec\omega_\xi$$

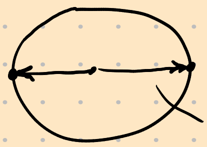
Ур-я Пуассона имеют размерность 4, линейны, вырождение отсутствует. Общего аналит. реш-я нет.

Они позволяют: а) найти $\Lambda(t)$ по $\vec\omega_*(t)$ и $\Lambda(0)$ б) найти $\vec\omega_*$ по $\Lambda(t)$

$\vec{\omega}_x = 2\dot{\Lambda}\circ\tilde{\Lambda}$, $\vec{\omega}_\xi = 2\tilde{\Lambda}\circ\dot{\Lambda}$

Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями твердого тела, т.к. Λ и $-\Lambda$ задают один и тот же поворот.

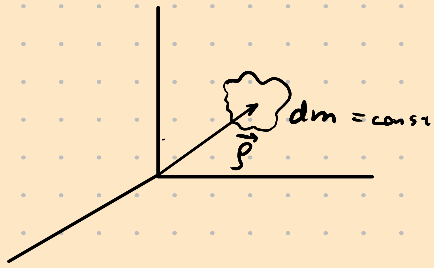
$\|\Lambda\| = 1 \Leftrightarrow \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ – $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ – сфера



один и тот же поворот

Основные понятия и законы динамики

1° Объекты континуальны (состоят из эл-ов массой dm с рад. вектором $\vec{\rho}$)



2° Интеграл по массе $I = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, dm = \lim\limits_{\substack{\Delta m_i \to 0 \\ \Delta m_i = const}} \sum f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)\Delta m_i$

Масса - это мера!

3° $m = \int dm$ - масса

$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm$ - центр масс

$\vec{p} = \int \vec{v}\, dm$ - импульс

$\dot{I} = \int \dot{f}\, dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt}\underbrace{\int \vec{r}\, dm}_{m\vec{r}_c} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{V}_c$

$T = \frac{1}{2}\int V^2 dm$ - кин. энергия

$\vec{K}_0 = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}\, dm$ - момент импульса

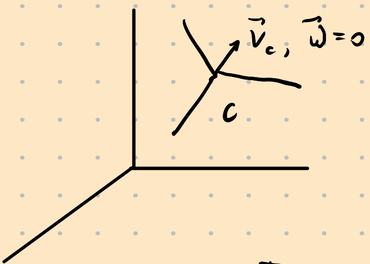
Переход к новому кин. полюсу

$\vec{K}_{0'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\, dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_0 + \vec{r}_0 - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\, dm = \vec{K}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{p}$

$\vec{K}_{0'} = \vec{K}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{p}$

$\vec{K}_{0'} = \vec{K}_0 + \vec{p} \times \overrightarrow{OO'}$ $\quad$ $\vec{V}_{0'} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'}$ - ф-лы аналогичны (все св-ва работают и для $\vec{K}_0$)

Теорема Кёнига



$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_c + \vec{V}_r$

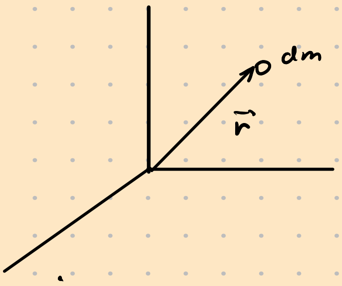
$T = \frac{1}{2}\int \left(V_c^2 + 2\vec{V}_c\vec{V}_r + V_r^2\right) dm$

$\int \vec{V}_r\, dm = \frac{d}{dt}\int \vec{\rho}\, dm = m\dot{\vec{\rho}}_c = 0$ (т.к. $\vec{\rho}_c \equiv 0$)

$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\int V_r^2\, dm$

Законы изменения динам. величин

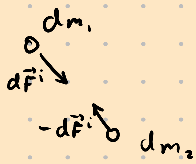
$m\ddot{\vec r} = \vec F$ — аксиома Ньютона



dm $\Rightarrow d\vec F = \vec f dm$, $\vec f$ — плотность силы

$\vec f = \underset{\text{внешние}}{\vec f^e} + \underset{\text{внутренние}}{\vec f^i}$

$\ddot{\vec r} = \vec f^e + \vec f^i$



$$\dot{\vec P} = \int \dot{\vec V} dm = \int (\vec f^e + \vec f^i) dm = \int \vec f^e dm = \vec R^e$$

- $\dot{\vec P} = \vec R^e$, $\vec R^e$ — главный вектор внешних сил

$\vec P = m\vec V_c \Rightarrow m\dot{\vec V}_c = \vec R^e$

- $m\ddot{\vec r}_c = \vec R^e$ — теорема о движении центра масс

$$\dot{\vec K}_o = \underbrace{\int (\vec V - \vec V_o)\times \vec V dm}_{-m\vec V_o\times\vec V_c} + \underbrace{\int (\vec r - \vec r_o)\times(\vec f^e + \vec f^i) dm}_{\vec M_o^e}$$

- $\dot{\vec K}_o = \vec M_o^e - m\vec V_o\times\vec V_c$ — теорема об изменении кинетического момента

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm \Rightarrow \dot T = \int \vec v\cdot\dot{\vec v} dm = \int \vec v\cdot(\vec f^e + \vec f^i) dm = N^e + N^i$$

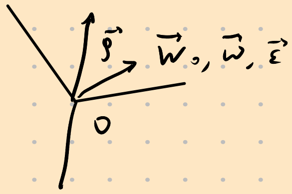
- $\dot T = N^e + N^i$

Основные теоремы динамики в неинерц. сис-ах отсчёта

$$\ddot{\vec r} = \vec W = \vec W^r + \vec W^e + \vec W^c = \vec f^e + \vec f^i$$

$$\vec W^r = \vec f^e + \vec f^i - \underbrace{\vec W^e}_{\vec j^e} - \underbrace{\vec W^c}_{\vec j^c}$$

$\vec j^e$, $\vec j^c$ — плотности переносных и кориолисовых сил



$$\vec j^e = -\vec W_o - \vec\varepsilon\times\vec\rho - \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$$

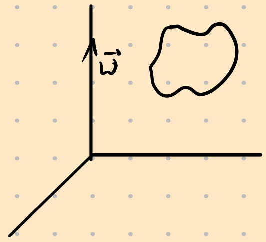
$$\vec j^c = -2\vec\omega\times\vec V^r$$

- $\dot{\vec P} = \vec R^{ex} + \vec R^e + \vec R^c$
- $\dot{\vec K}_o = \vec M_o^{ex} + \vec M_o^e + \vec M_o^c - m\vec V_o^r\times\vec V_c^r$
- $\dot T = N^{ex} + N^e + N^i$

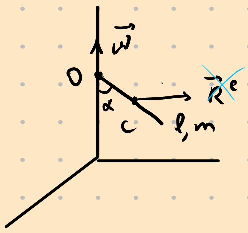
$\vec j^c = -2\vec\omega\times\vec V^r$ $n = \vec V^r\cdot\vec j^c = 0$ — мощность кориолисовых сил

Замечание

При решении задач **не следует** делать необоснованных допущений о точках приложения и линиях действия сил инерции



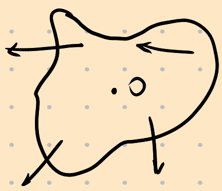
$$\vec R^e = -\int \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)\,dm = -m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho_c)$$



$$\vec M^e_o \neq \frac{1}{2}\vec R^e l \sin\alpha$$

Надо честно взять интеграл, а не прикладывать $\vec R^e$ к центру масс.

О моменте сил, действующих на тв. тело

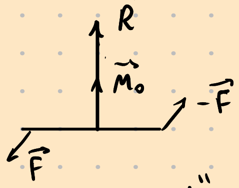


$$\vec M_o = \int(\vec r-\vec r_o)\times\vec f\,dm \quad (\text{неважно } \vec f^i \text{ или } \vec f^e)$$

$$\vec M_{o'} = \vec M_o + \vec{O'O}\times\vec R, \quad \vec R = \int\vec f\,dm$$

$$\begin{cases}\vec M_{o'} = \vec M_o + \vec R\times\vec{OO'}\\ \vec V_{o'} = \vec V_o + \vec\omega\times\vec{OO'}\end{cases} \text{ — статико-кинематическая аналогия}$$

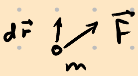
Следствие: любая система сил, приложенных к твёрдому телу, сводится к динамическому винту или к его частным случаям.



„динама"

Если $\vec M_o = 0$, то сис-ма сил сводится к равнодействующей.

Классификация сил



$\delta A = \vec F\cdot d\vec r$ — элементарная работа

$N = \vec F\cdot\vec v$

1 Если $N = \vec F\cdot\vec v \le 0$, то $\vec F$ — диссипативная. Если $N<0\ \forall\vec v\neq 0$, то $\vec F$ — строго дисс.

Пример: $\vec F = -\beta \vec V$

② Если $N \equiv 0$, то F — гироскопическая

Пример: $\vec F = \frac{q}{c}\vec V \times \vec B$, $\quad \vec F' = -2m\vec\omega \times \vec V$

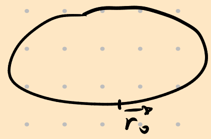
③ F наз-ся потенциальной, если $\exists\, \Pi(\vec r, t)$: $\vec F = -\nabla \Pi$

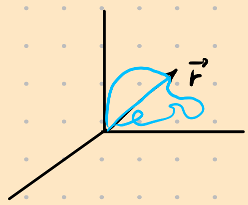
Критерий потенциальности

$\vec F(\vec r, t)$ — потенциальна $\iff \oint \vec F d\vec r \Big|_{t=const} = 0$

Д-во

Если $\vec F = -\nabla \Pi$, то $\oint \nabla \Pi\, d\vec r = 0$





Если $\oint = 0$, то $A(r, t) = \int_0^{\vec r} \vec F\, d\vec r$

$\vec r \to \vec r + \tau \vec e_i$, $\tau \in [0; \Delta h)$
базисный орт

$$\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\dots, r_i + \tau, \dots)\, d\tau \overset{\text{T. o}}{\underset{\text{среднем}}{=}} F_i(\dots, r_i + \theta, \dots)\,\Delta h$$

$$F_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \Pi = -A \qquad \text{ЧТД}$$

Если $F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$ (1)

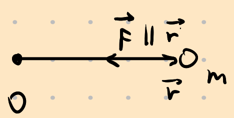
В $\mathbb{R}^3$ условие (1) $\iff$ $\operatorname{rot} \vec F = \vec 0$.

Область должна быть хорошей, односвязной и без особенностей.

Если $\vec F = -\nabla \Pi(\vec r)$ (потенциал стационарен), то

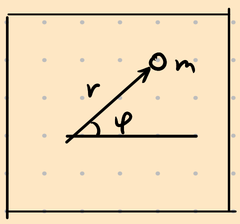
$$\delta T = \vec F d\vec r = -\nabla \Pi\, d\vec r = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = const$$

Движение точки в центральном поле



$\vec K_0 = const$ $\quad (\vec M_0^e = \vec 0)$

$\vec K_0 = \vec r \times m\vec V = const \Rightarrow \vec r$ и $\vec V$ всегда лежат в одной плоскости

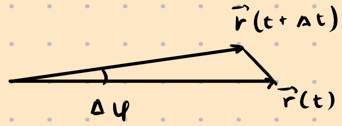


$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F = \vec F \cdot \dfrac{\vec r}{r} \\ \dfrac{1}{r}\,(r^2 \dot\varphi)^{\boldsymbol\cdot} = 0 \end{cases}$$

— закон Ньютона

Уметь писать к экзамену

$r^2 \dot\varphi = const$

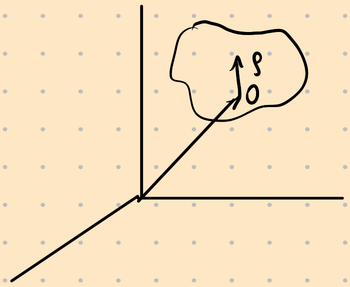


$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = const$$ – секториальная скорость

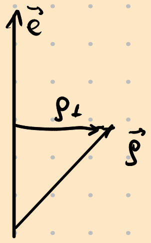
Второй закон Кеплера

Тензор инерции тв. тела и его свойства



$$\vec K_o = \int \vec\rho \times \vec v\, dm = \int \vec\rho \times (\vec v_o + \vec\omega\times\vec\rho)\, dm = \int \underbrace{\vec\rho \times \underbrace{(\vec\omega \times \vec\rho)}_{-\hat\rho\,\omega}\, dm}_{\hat\rho^T\hat\rho\, dm\,\vec\omega} + m\vec\rho_c \times \vec V_o \quad (1)$$

J_o – тензор инерции твёрдого тела в т. O



$$\rho_\perp^2 = (\vec\rho\times\vec e)\cdot(\vec\rho\times\vec e) = (\hat\rho\times\vec e)^T\hat\rho\,\vec e = \vec e^T\hat\rho^T\hat\rho\,\vec e$$

$j(\vec\rho) = \hat\rho^T\hat\rho$ – тензор квадратов расстояний

$$\rho_\perp^2 = \vec e^T j(\vec\rho)\,\vec e$$

$$\vec\rho\times(\vec\omega\times\vec\rho) = \rho^2\vec\omega - \langle\vec\rho\cdot\vec\omega\rangle\vec\rho = (\rho^2E - \vec\rho\,\vec\rho^T)\,\vec\omega$$

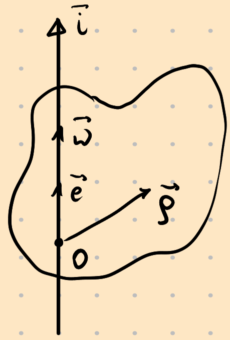
$$\hat\rho^T\hat\rho = \rho^2E - \rho\rho^T$$

$$J_o = \int(\rho^2E - \rho\rho^T)\,dm \Rightarrow J_o = \begin{pmatrix} \int(\rho_2^2+\rho_3^2)dm & -\int\rho_1\rho_2\,dm & -\int\rho_1\rho_3\,dm \\ & \int(\rho_1^2+\rho_3^2)dm & -\int\rho_2\rho_3\,dm \\ & & \int(\rho_1^2+\rho_2^2)dm \end{pmatrix}$$

J_{oii} – осевые моменты инерции

$J_{oi\neq j}$ – центр. момент инерции

Момент инерции относ. оси



$$T = \frac12\int(\vec\omega\times\vec\rho)^2\,dm \underset{\vec\omega=\omega\vec e}{=} \frac{\omega^2}{2}\,\underbrace{\vec e^T J_o\vec e}$$

J_e – момент инерции отн. оси

$$J_e = \vec e^T J_o\,\vec e$$

$$T = \frac12\vec\omega^T J_o\,\vec\omega = \frac{J_e\,\omega^2}{2}$$

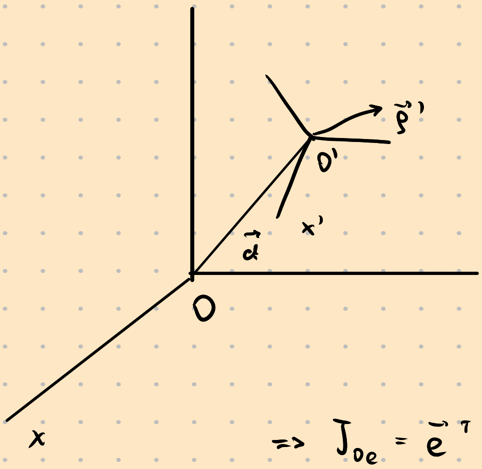
Выражения для K_o и T твёрдого тела

$$\vec K_o = \underbrace{\vec K_c}_{(1)\Rightarrow J_c\vec\omega} + \vec{CO}\times\underbrace{\vec P}_{m\vec V_c} = J_c\vec\omega + \vec{CO}\times m\vec V_c$$

O – ∀ точка (может быть вне тела)

$$T = m\frac{V_c^2}{2} + \frac12\underbrace{\int(\vec\omega\times\vec\rho)^2\,dm}_{(\text{относ. } C)} \Rightarrow \boxed{T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac12\vec\omega^T J_c\,\vec\omega}$$

Свойства J_0 при переносе и повороте осей



$$\vec\rho = \vec\rho\,' + \vec a$$

$$J_0 = \int \hat\rho^T\hat\rho\, dm = \int \hat\rho'^T \hat\rho\, dm + \hat a^T \int \hat\rho' dm + \int \hat\rho'^T dm\, \hat a +$$

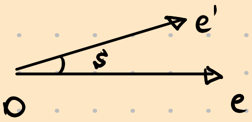
$$+ m\hat a^T \hat a = J_{0'} + m\hat a\, \hat\rho'_c + m\hat\rho'_c\, \hat a + m\hat a^T\hat a$$

$$\Rightarrow \boxed{J_0 = J_c + m\hat a^T \hat a}$$

Расширенная теорема Гюйгенса – Штейнера

$$\Rightarrow J_{0e} = \vec e^{\,T} J_c \vec e + m\vec e^{\,T} j(\vec a)\vec e = J_{ce} + m\rho_\perp^2$$

Поворот сист. коорд.



$$J_0^e = \rho_e^2 E - \vec\rho_e\vec\rho_e^{\,T} \qquad \rho_e^2 = \rho_{e'}^2 \text{ т.к. } S \in SO(3)$$

$$\vec\rho_{e'} = S^T\vec\rho_e \Rightarrow \vec\rho_e = S\vec\rho_{e'}$$

$$J_0^{e'} = \rho_{e'}^2 - S\vec\rho_{e'}\vec\rho_{e'}^{\,T} S^T = S(\rho_{e'}^2 E - \rho_{e'}\rho_{e'}^T)S^T$$

Таким образом,

$J_0^{e'} = S^T J_0^e S$ – с т. зр. лин. алгебры J_0 преобразуется как квадратичная форма

Это – разновидность закона преобразования тензора

Из школы известно, что $\exists S$:

$$S^T J_0 S = \mathrm{diag}[A, B, C], \quad A, B, C > 0$$

Соответствующие оси наз-ся главными осями в т. O. Если $O \equiv C$, то оси наз-ся главными центральными

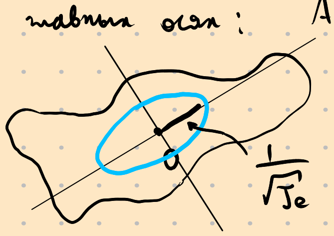
A, B, C – главные (главные центральные) моменты инерции

Эллипсоид инерции

Отложим $\vec r = \frac{1}{\sqrt{J_e}}\vec e$ $\qquad \vec r^{\,T} J_0 \vec r = \frac{1}{J_e} J_e = 1$

$$f(\vec r) = \vec r^{\,T} J_0\vec r - 1 = 0$$

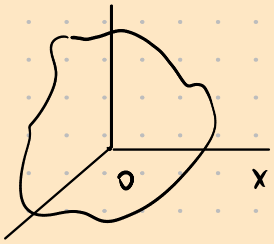
В главных осях: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$, x, y, z – компоненты $\vec r$



Эллипсоид в целом повторяет контуры тела

Нахождение главных осей инерции

1° Общий случай – нет динамической симметрии



В гл. осях: $J_0 \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$

$\lambda_i = \{A, B, C\}$, $\vec{x}_i$ – орты базиса

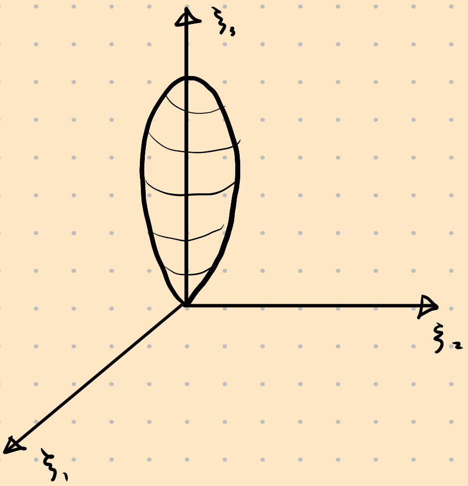
Для нахождения главных осей нужно решить задачу нах-я собств. знач.:

$(J_0 - \lambda E) h = 0$

$\det(\lambda E - J_0) = 0 \Rightarrow \lambda_i \to \{A, B, C\}$

$\lambda_i \to h_i$ – собств. вектора $\xrightarrow[x_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}]{}$ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

2° Использование симметрии



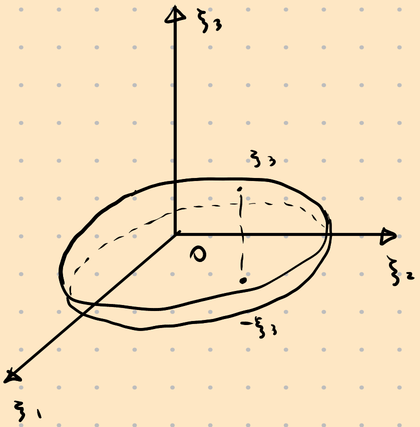
ξ_3 – ось динам. симметрии $\Rightarrow$ гл. ось

$J_{i3} = -\int \xi_i \xi_3 \, dm$

$\forall \xi_i \to \exists -\xi_i \Rightarrow J_{i3} = 0 \quad \forall i \neq 3$

3° Перпенд. плоскость симметрии

$J_{i3} = -\int \xi_i \underbrace{\xi_3} \, dm = 0$

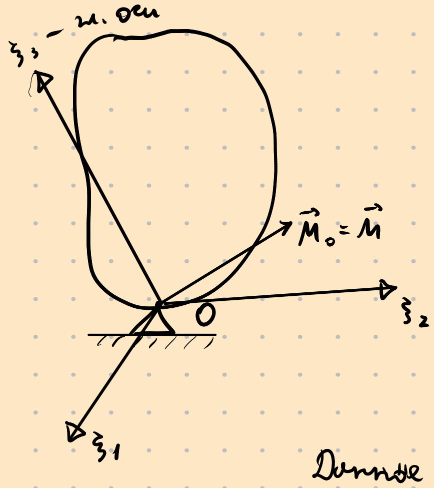


Простейший вид T и $\vec{K}_0$

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_c \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right) \quad ; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_0 = J_0 \vec{\omega} + \vec{OC} \times m\vec{V}_c = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} + \vec{OC} \times m\vec{V}_c$$

Основы динамики твёрдого тела с неподвижной точкой



Задана ориентация ξ относ. x

$\vec{\omega}(0)$. Найти текущее угловое положение

Если O – неподв. т., то

$$\vec{K} = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = J\vec{\omega}, \quad \vec{K}_0 = \vec{K}, \quad J_0 = J$$

$$T = \frac{1}{2}\int (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2\, dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J \vec{\omega},$$

Данные выражения принимают простейший вид в главных осях для т. O:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix}, \quad J = \operatorname{diag}[A, B, C]$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

Динамические уравнения Эйлера

$\dot{\vec{K}} = \vec{M}$ => В базисе главных осей:

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d'\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Пояснение:

$$\vec{K} = K_i \vec{\xi}_i$$

$$\dot{\vec{K}} = \underbrace{\dot{K}_i \vec{\xi}_i}_{\frac{d'\vec{K}}{dt}} + \underbrace{K_i \dot{\vec{\xi}}_i}_{\vec{\omega} \times \vec{K}} \qquad \dot{\vec{\xi}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_i$$

$$\boxed{\frac{d'\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}}$$

Система динам. ур-ий Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_1 \\ B\dot{q} + (A - C)pr = M_2 \\ C\dot{r} + (B - A)qp = M_3 \end{cases}$$