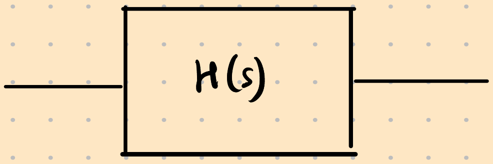
Григорьев Александр Алексеевич

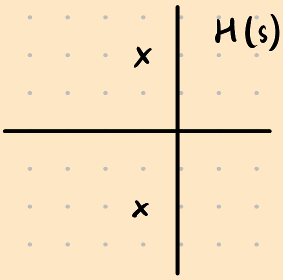
Проблема фильтрации



$s = \frac{p}{\omega_0}$ - характер. частота

$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ полином - рациональная ф-ия

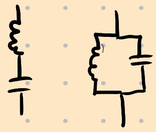
1. Синтез $H(s)$ - как её выбрать? Синтез по АЧХ
2. Реализация - как сделать четырёхполюсник? Центр внимания



сопряжённые пары полюсов

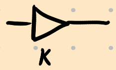
Они не реализуемы RL и RC цепями.

Нужны RLC



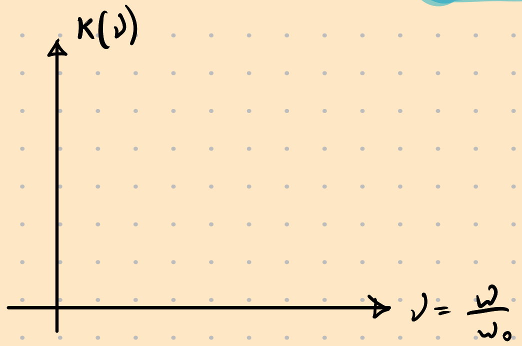
- резонаторы дают сопр. полоса

Однако индуктивности исп. не хочется. Их можно заменить усилителями!

RC 

- активные RC- цепи / фильтры

Синтез по АЧХ



АЧХ

$$H(s) = \underbrace{|H(s)|}_{\text{АЧХ}}\, e^{j \overbrace{\arg H(s)}^{\text{ФЧХ}}}$$

$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H^*(s)$ — к этому предъяв. требования

Нас интересует только $H(s) \cdot H^*(s) \big|_{s=j\nu}$

- Причём т.к. полиномы N и D веществ., то $H^*(s) = H(s^*)$, т.е. рассматриваем $H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\nu}$

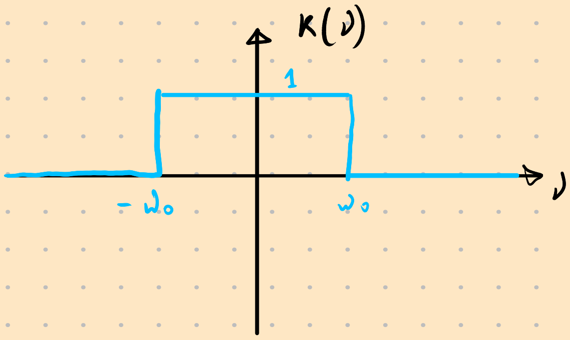
- Подменим задачу: при $s = j\nu$, $H(s^*) = H(-s)$, и так удобнее работать:
$H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\nu} = H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\nu}$

$$H(s) \cdot H(-s) = |K(\nu)|^2$$

АЧХ^2 — у этой ф-ии есть набор нулей и полюсов

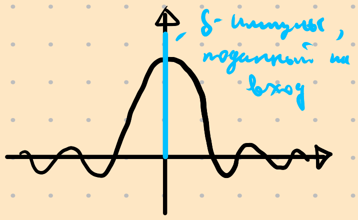
Созвездие нулей и полюсов АЧХ^2 всегда будет симметрично (отн. относ. замены $s \to -s$), и половину их возьмём в $H(s)$, половину — $H(-s)$.

Прямоуг. фильтр нижних частот



$$h(t) = \int_{-1}^{+1} h(f)\, e^{2\pi j f t}\, df = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

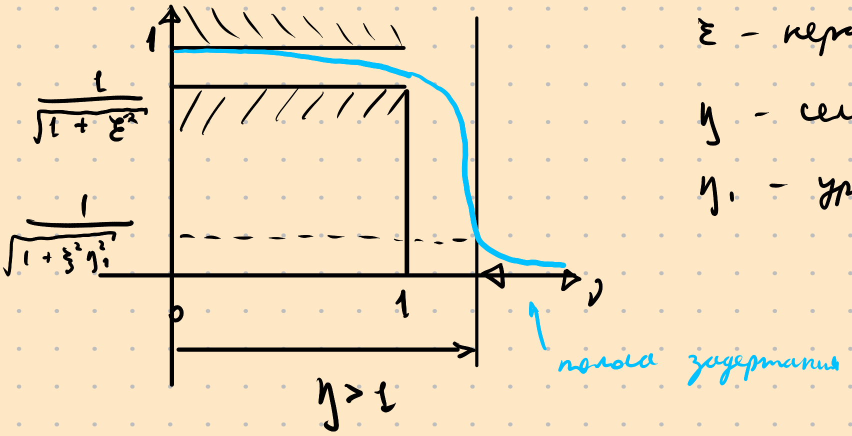
Импульс Найквиста



— не удовл. принципу причинности (реакция раньше воздействия)

Т.е. такой фильтр не реализуем.

Допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания:



ε – неравномерность в ПП

η – селективность

η_1 – уровень на границе ПЗ

К успеху приводит: $H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$ n – порядок фильтра

$$|F_n(\nu)| = \begin{cases} \le 1, & \nu\in(-1;1) \\ \ge \eta_1, & \ge \eta \end{cases}$$

Варианты выбора:

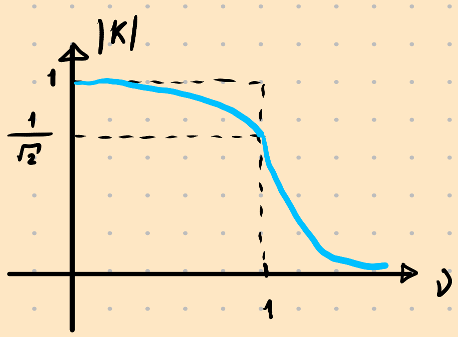
1. $F_n(\nu) = \nu^n$ – фильтр Баттерворта
2. $F_n(\nu) = P_n(\nu)$ – фильтр Чебышева, где $P_n(\nu)$ – полином Чебышева
3. $F_n(\nu) = R_n(\nu)$ – эллиптический фильтр, $R_n(\nu)$ – рацион. эллиптич. ф-ия

Баттерворт

$$H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\nu^{2n}}$$

$\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}$ – изменение ε эквивалентно изменению ω_0, т.е. ε не нужен – он всегда 1

$$K(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^{2n}}}$$



При $n\to\infty$ эта АЧХ неогр. стремится к идеальной прямоугольной.

Всегда даёт затухание −3 дБ

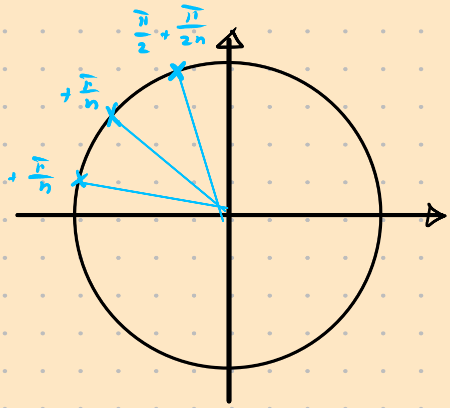
$$H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\nu^{2n}} \quad\Rightarrow\quad H(s)\,H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Ищем полюса: $\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} + 1 = 0$

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = e^{j\pi}\cdot e^{j\cdot 2\pi k}, \quad k\in\mathbb{Z} \qquad -1 = e^{j\pi}$$

$$\frac{s}{j} = e^{j\frac{\pi}{2n}}\cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot\frac{k}{2n}} \qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

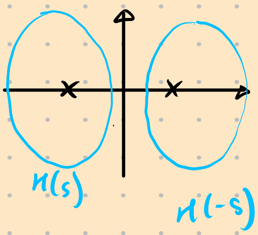
$$s_k = e^{j\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}k\right]}$$ — полюса произв. ф-ии $H(s)\cdot H(-s)$



— полюса с шагом $\frac{\pi}{n}$, картинка симметрична относ. мнимой оси!

Примеры

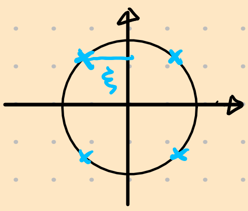
$n=1$: $\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^2} = \frac{1}{1-s^2}$ $\quad s=\pm 1$ — полюса



$$H(s) = \frac{1}{1+s}$$

Интегрирующая цепь!

$n=2$:



Сопряжённая пара на ед. круге характеризуется затуханием ξ

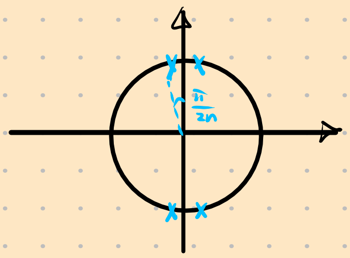
Полином $s^2+2\xi s+1$

Корни $-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

• У фильтров Баттерворта слишком медленный спад.

Если делать большой порядок, получаются очень близкие к мнимой оси полюса (угол $\frac{\pi}{2n}$) – высокая добротность



$$\xi = \sin\frac{\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Фильтры с максимально плоской частотной хар-ой.

Чебышев

$$|K(\nu)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2 P_n^2(\nu)}$$

$-1 \le \nu \le +1; \quad |P_n(\nu)| \le 1$ – осциллирует в обл-ти пропускания

$P_n(\nu) = \cos(n \arccos \nu)$ – многочлен Чебышева (1)

$\cos[(n+1)\alpha] + \cos[(n-1)\alpha] = 2\cos n\alpha \cdot \cos\alpha$ – по ф-ле cos суммы

$\alpha = \arccos x$

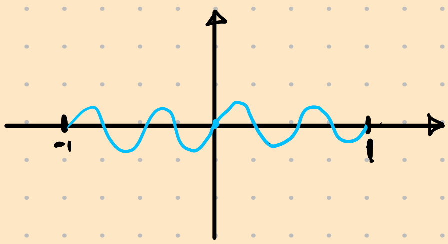
Получаем $P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2P_n(x) \cdot x$

$P_{n+1} = 2x P_n - P_{n-1}$ – рекуррентная ф-ла

$P_0(x) = -1 \qquad P_2(x) = 2x^2 - 1$

$P_1(x) = x \qquad P_3(x) = 4x^3 - 3x$

По ф-ле (1) получается, что $P_n(x)$ определён только на $[-1; +1]$ из-за арккосинуса. Поговорим о нём



$n \arccos x$ меняется от 0 до $n\pi$

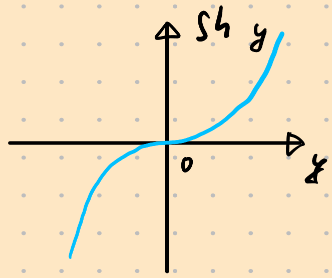
Значит, в $[-1; 1]$ происходит целое число полупериодов осцилляции. Если n – чётное, то в 0-0

Почему полиномы определены на всей оси? arccos надо рас-ивать как ф-ию от комплексного аргумента.

$$\cos(z) = \cos(x+jy) = \cos x \cdot \overbrace{\cos jy}^{ch\, y} - \sin x \cdot \overbrace{\sin jy}^{j\, sh\, y}$$

$$\cos jy = \frac{e^{j\cdot jy} + e^{-j\cdot jy}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = ch\, y$$

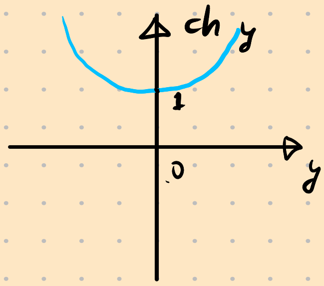
$$\sin jy = j\, sh\, y$$

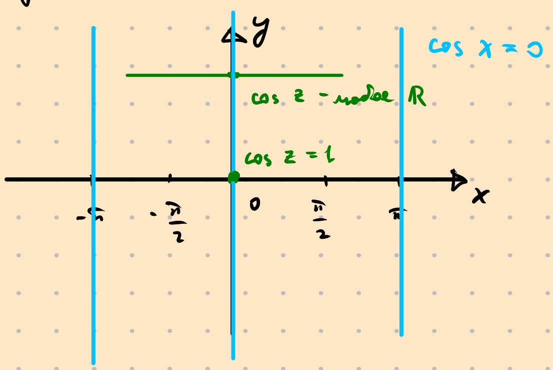


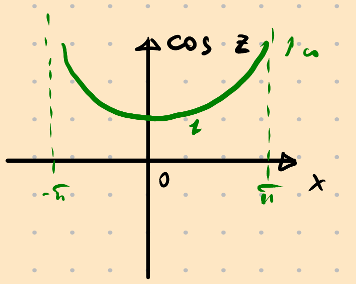
- Получим $\cos z = \cos x\, ch\, y - j \sin x\, sh\, y$

Если $y = 0$, то $\cos z = \cos x$.

- Комплексная добавка в cos обращается в 0, когда $\sin x = 0$.





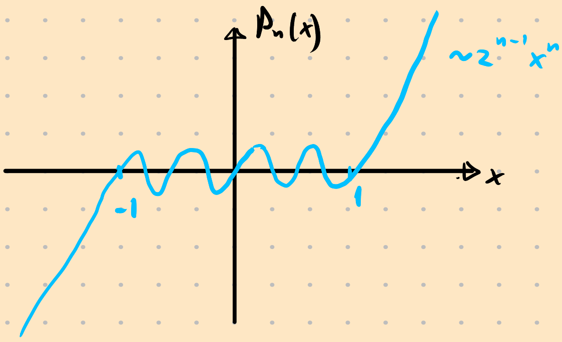


(cos z при $y > 0$)

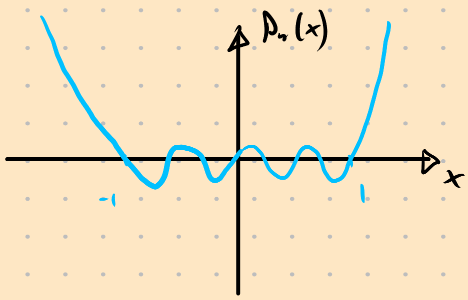
То есть аргумент arccos - любое $x \in R$, иногда $\arccos x$ мнимый, но $\cos(n \arccos x)$ остается вещественным.

- $P_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots$ - старший коэф-т

При $x > 1$ он быстро растёт.



$P_n(x)$, n - нечётное



P_n, n - чётное

У Чебышева быстрее по селективности отн. Баттерворта.

Поиск полюсов:

$$H(s)\,H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 P_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 0}$$

$$P_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\cos\Big(n \underbrace{\arccos\left(\frac{s}{j}\right)}_{u-jv}\Big) = \pm\frac{j}{\varepsilon}$$

$$\begin{cases} \cos\left(n(u-jv)\right) = \pm\dfrac{j}{\varepsilon} \\ \dfrac{s}{j} = \cos(u-jv) \end{cases}$$

$$\underbrace{\cos nu \cdot \operatorname{ch} nv}_{=\,0\ \Rightarrow\ \cos nu = 0} + j\overbrace{\sin nu}^{(-1)^k} \cdot \operatorname{sh} nv = \pm\frac{j}{\varepsilon}$$

$nu = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k$ — похоже на Баттерворта

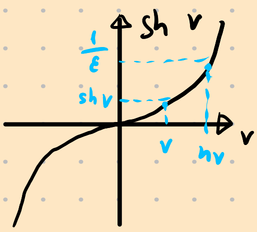
$\operatorname{sh} nv = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow v = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$\frac{s}{j} = \cos(u-jv) = \cos u \cdot \operatorname{ch} u + j\sin v \cdot \operatorname{sh} v$$

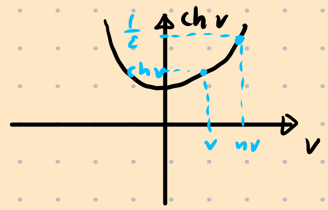
$$s_k = j\left[\operatorname{ch} v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{k}n\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right)\operatorname{sh} v\right]$$

$$s_k = -\operatorname{sh} v \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right) + j\operatorname{ch} v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right)$$

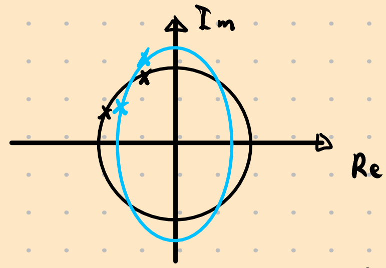
Отн. Баттерворта просто коор-ты умножить на sh v и ch v.



sh v уменьшает (<1)



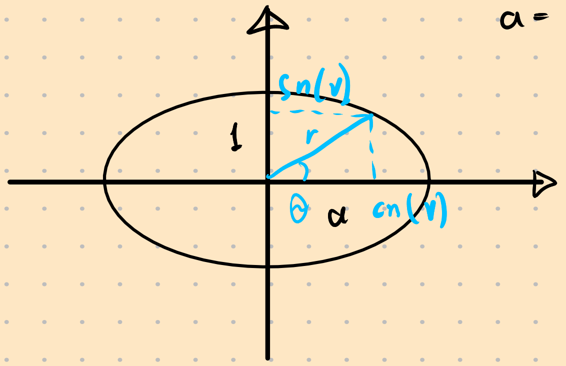
ch v увеличивает (>1)



полюса ф-ра Чебышева

Базис $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, ортогонализованный в пр-ве Гильберта, есть многочлены Чебышева.

Эллиптические фильтры



$a = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ $\quad k \in [0; 1)$

$v = \int_0^{\theta} r(\theta)\, d\theta$

$dn(v) = r$ $\qquad cd = \dfrac{cn}{dn}$

При $k = 0$ – вырождение в окружность, sin и cos

$\int_0^{\pi/2} r(\theta)\, d\theta$ – эллиптический интеграл

Подобно тому, как $\cos(n \arccos x)$ – многочлен, можно также штуки сделать и в эллипт. тригоном. – т.н. рациональные эллиптические функции.

$P_n(x) = \cos nw,$ где $x = \cos(w)$

$\varphi_n(x) = cd(K, nw)$, где $x = cd(K_1, w)$, $K, K_1 \in (0; 1)$

K – пар-р эксцентриситета, nw – $[0; 1]$

Получается, что $\varphi_n(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ – рац. ф-ия. (есть нули и полюса)

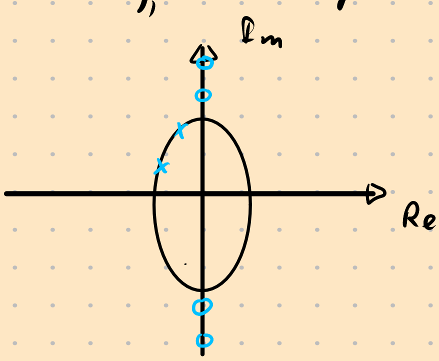
Поиск нулей и полюсов:

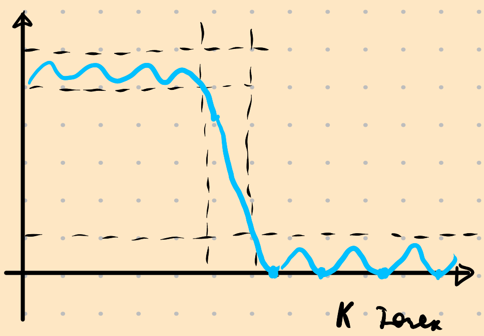
$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \varphi_n^2(v)} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \frac{D^2}{N^2}} = \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon^2 D^2}$$

$N^2 = 0$ – нули

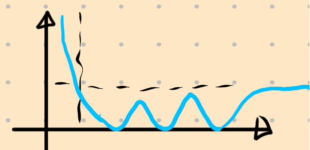
$N^2 - \varepsilon^2 D^2 = 0$ – полюса

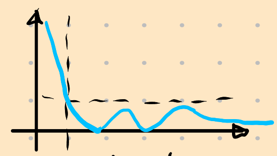
По полюсам очень похоже на ф-ры Чебышева (они тоже на эллипсе), все нули – на мнимой оси.





K точек, где затухание – 0!





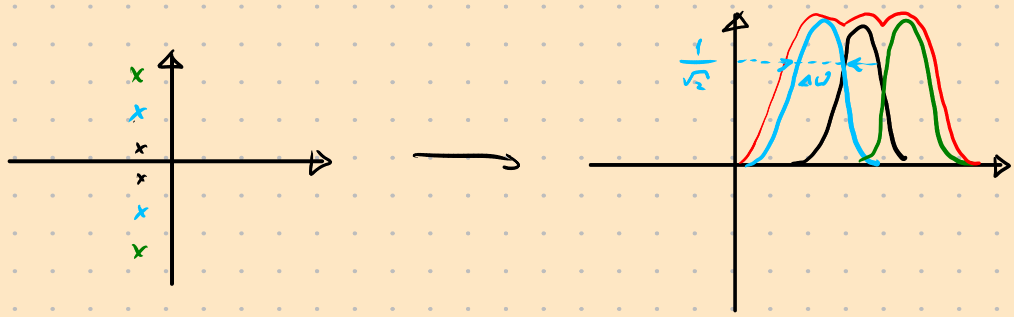
Нулей n штук.

$n = 2k$ – нули парные $\qquad n = 2k+1$ – один нуль на ∞

Пар-ры синтеза

1. Баттерворт – задаётся только порядок n
2. Чебышев – задаётся n и ε (тогда $\eta_1 = \eta_1(\eta)$ – определена)
3. Эллиптические – задаётся (n, ε, η) или (n, ε, η_1) или $(\varepsilon, \eta, \eta_1)$
(в посл. случае n можно примерно посчитать)

В прошлом семе связанные колеб. контуры делали так:



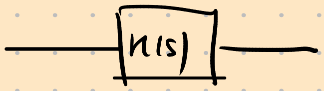
$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Широкая ПП с крутыми скатами

Но! Если их расп. линейкой, в ПП АЧХ неравномерна.

Лучше по кругу или эллипсу! Как и получили.

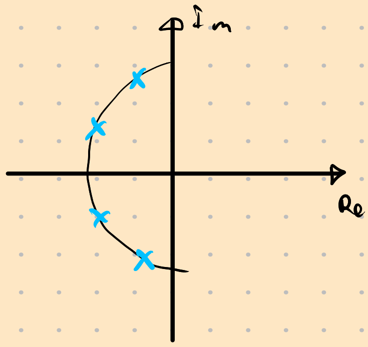
Лестничные фильтры



$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\left|H(s)\right|^2_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$$

$F_n(\nu) = \nu^n$; $P_n(\nu)$; $\varphi_n(\nu)$



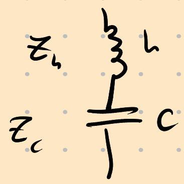
В классах RC и RL цепей сопряжённые полюса (= колебательные процессы) нереализуемы.

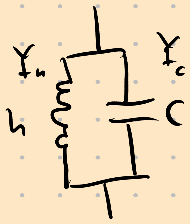
$$|K(s)| = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \text{расс-е до нулей}}{\prod_{n=1}^{\infty} \text{расс-е до полюсов}}$$

=> только вещест- венными полюсами хороший срез в прямоугольнике не сделать. Хороший срез создаётся высокодобротными полюсами.

RLC-класс;

можно образовывать резонаторы;



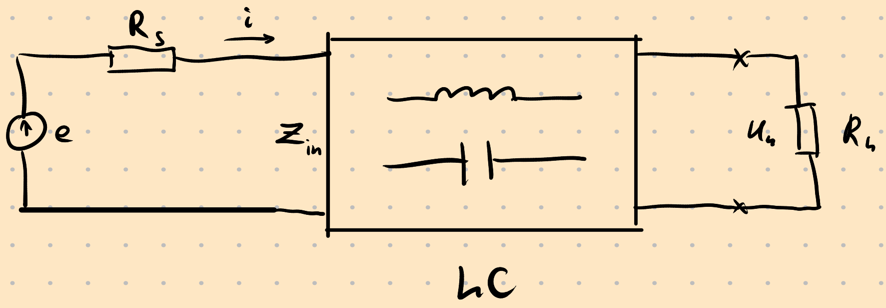


– получаются друг из друга заменой импеданса на адмитанс

$Z_{\text{резонанс}} = 0$ $\qquad Y_{\text{резонанс}} = 0$

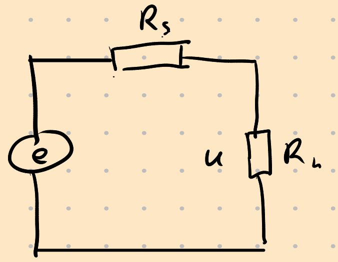
Бездиссипативные лестничные фильтры

Резисторов (и потерь) в фильтре нет!



$P_н = Re\left[\frac{u \cdot i^*}{2}\right]$ – мощность на нагрузке

Переходим к мощностям.



Какова мощность источника?

Она max когда $R_s = R_н$.

$$u = \frac{e}{R_s + R_н} R_L = \frac{e}{2}$$

$$P = \frac{u^2}{R} \text{ (пост. напр.)} \qquad P = \frac{|u|^2}{2R} \text{ (пер. напр.)}$$

здесь u – амплитуда

$$P_s = \frac{e^2}{4R_s}$$
(пост. напр.)

$$P_s = \frac{|e|^2}{8R_s}$$
(гармонич. напр.)

– мощность источника

Источник можно характеризовать P_s и R_s.

Коэф-т передачи мощности $\quad G = \dfrac{P_н}{P_s} \quad$ (gain)

$$G = \frac{\frac{|u_н|^2}{2R_н}}{\frac{|e|^2}{8R_s}} = \frac{4R_s}{R_н}\frac{|u|^2}{|e|^2} = \frac{4R_s}{R_н}|K|^2$$
$|K|$ – коэф-т передачи напряжения

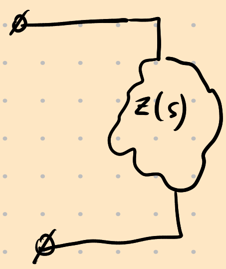
$|K|$ – в лучшем случае $\frac{1}{2}$ (половина на R_s, половина на $R_н$) =>

=> G – в лучшем случае 1 (лучший случай: $R_s = R_н$)

$$G(\nu) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$$
– требования к фильтру предъявляем по коэф-ту передачи мощности

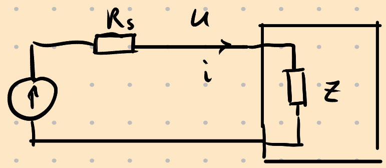
Т.к. нет диссипации внутри фильтра, то $G = \dfrac{P_{in}}{P_s}$ – это зависит только от входного импеданса Z_{in}

$$u_{in} = \frac{eZ_{in}}{R_s + Z_{in}} \qquad P_{in} = \frac{|u_{in}|^2}{2Z_{in}^*}$$



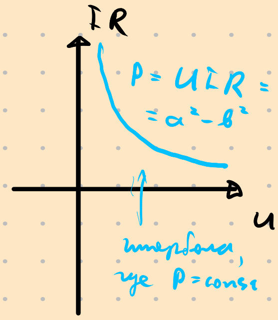
Задача: имея $Z(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$, реализовать двухполюсник с этим импедансом. (развитая техника в теории цепей)

Для перехода от P_{in} к Z_{in}, можно перейти от u и i к волновым параметрам (в них проще работать с мощностями)



$$a = \frac{u_{in} + iR_s}{2} \qquad b = \frac{u_{in} - iR_s}{2}$$

$$u_{in} = a + b \qquad i = \frac{a-b}{R_s}$$



$$P^+ = \frac{u i^*}{2} = \frac{(a+b)(a^*-b^*)}{2R_s} = \frac{\underbrace{|a|^2 - |b|^2}_{P} + \underbrace{ba^* - b^*a}_{Q}}{2R_s}$$

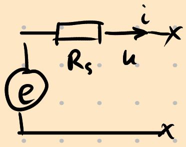
$$ba^* - b^*a = ba^* - (ba^*)^* = \mathrm{Im}\,[ba^*]$$

$$P_{in} = \frac{|a|^2 - |b|^2}{2R_s}$$ Введём коэф-т отражения $\rho = \frac{b}{a}$;

$$P_{in} = \frac{|a|^2}{2R_s}\left(1 - |\rho|^2\right)$$

Посмотрим на ρ: $\frac{b}{a} = \frac{u_{in} - iR_s}{u_{in} + iR_s} = \frac{Z_{in} - R_s}{Z_{in} + R_s}$

Посмотрим на $|a|$:



$$u = e - iR_s$$

$$a + b = e - \frac{a-b}{R_s} R_s$$

$$a + b = e - a + b \Rightarrow a = \frac{e}{2}$$

Итого $$P_{in} = \underbrace{\frac{e^2}{8R_s}}_{P_s}\left(1 - |\rho|^2\right)$$

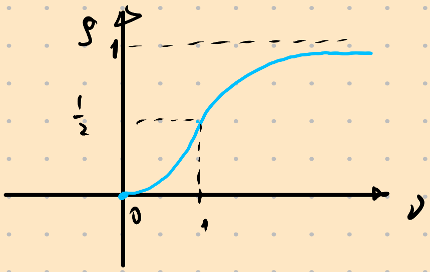
$$P_н = P_{in} = P_s\left(1 - |\rho|^2\right)$$

$$G = \frac{P_н}{P_s} = 1 - |\rho|^2$$ – требования к G = требования к $|\rho|^2$

$$G = 1 - |\rho|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$$

Баттерворт:

$$|\rho|^2 = \frac{\nu^{2n}}{1 + \nu^{2n}}$$



В полосе пропускания $|\rho| \to 0$,

в полосе заграждения $|\rho| \to 1$

Поставим требование на Z_{in}:

$$\pm\rho = \frac{Z_{in}-R_s}{Z_{in}+R_s}$$

причём для нас $\pm\rho$ – одно и то же (в силу того что требования для $|\rho|^2$)

Выбор знака связан к переходу от сопротивлений к проводимостям:

$$\rho = \frac{Y_{in}^{-1}-R_s}{Y_{in}^{-1}+R_s} = \frac{\gamma_s - Y_{in}}{\gamma_s + Y_{in}} = -\frac{Y_{in}-\gamma_s}{Y_{in}+\gamma_s}, \quad \gamma_s = \frac{1}{R_s}$$

Будем мерить все сопротивления в долях от R_s, тогда

$$\pm\rho = \frac{Z_{in}-1}{Z_{in}+1} = -\frac{Y_{in}-1}{Y_{in}+1}$$

Проблемы реализации

Если ввести эталонные частоту и сопротивление ω_0 и R_0, то все единицы станут безразмерными.

$$\frac{X_L}{R_0} = \frac{\omega L}{R_0} = x = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}L}{\frac{R_0}{\omega_0}} \Rightarrow L_0 = \frac{1}{\frac{R_0}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{R_0}$$ – эталонная индуктивность

(на частоте ω_0 им. сопротивление R_0)

Также для ёмкости:

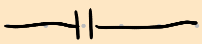
$$C_0 = \frac{1}{\omega_0 R_0}$$

$Z = qs$

qL_0

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{j\omega q L_0 \omega_0}{R_0\omega_0} = qs\overbrace{\frac{\omega_0 L_0}{R_0}}^{1} = qs$$

$Y = qs$



qC_0

$$YR_0 = \frac{j\omega \cdot qC_0 \cdot R_0\omega_0}{\omega_0} = qs\,\underbrace{\omega_0 C_0 R_0}_{1} = qs$$

$$|\rho(s)|^2 = \frac{\nu^{2n}}{1+\nu^{2n}}$$

$$\rho(s) = \frac{s^n}{D_n(s)} \Rightarrow \left.\frac{s^{2n}}{D_n^2(s)}\right|_{s=j\nu} = \frac{\nu^{2n}}{1+\nu^{2n}}$$

Сопряжение эквивалентно замене знака

$$\left.\frac{s^n(-s)^n}{D_n(s)D_n(-s)}\right|_{s=j\nu} = \frac{\nu^{2n}}{1+\nu^{2n}} \qquad s^n(-s)^n\Big|_{s=j\nu} = \nu^{2n}$$

$$D_n(s)\cdot D_n(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Оказывается всё то же самое, как для $h(s)$ и ф. Баттерворта.

$$D_1(s) = s+1$$

$$D_2(s) = s^2+\sqrt{2}\,s+1$$

$$D_3(s) = (s+1)(s^2+s+1) = s^3+2s^2+2s+1$$

Теперь импеданс $Z(s)$:

$$\rho = \frac{Z-1}{Z+1}$$

$$Z(s) = \frac{1+\rho}{1-\rho} \qquad Y(s) = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

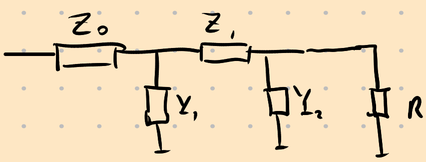
$$Z(s) = \frac{D_n(s)+s^n}{D_n(s)-s^n}$$

$n=1$: $D_n(s) = s+1$ $\qquad Z(s) = 2s+1$

2: $D_n(s) = s^2+\sqrt{2}s+1$ $\qquad Z(s) = \dfrac{2s^2+\sqrt{2}s+1}{\sqrt{2}s+1}$

3: $D_n(s) = s^3+2s^2+2s+1$ $\qquad Z(s) = \dfrac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1}$

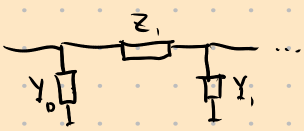
De-Кауэрова лестничная структура



— реализация импеданса

$$Z = Z_0 + \cfrac{1}{Y_1 + \cfrac{1}{Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_2+R}}}}$$

— цепная дробь



— реализация адмиттанса

$z(s) = \dfrac{N(s)^{\text{nominator}}}{D(s)_{\text{denominator}}}$ надо преобразовать в цепную дробь:

$$N(s) = \underbrace{Q(s)}_{\text{quotient}} D(s) + \underbrace{R(s)}_{\text{remainder}}$$

$$Z(s) = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} = Q(s) + \cfrac{1}{\cfrac{D(s)}{R(s)}}$$

— первый этап разложения

Делаем то же самое для $\dfrac{D(s)}{R(s)}$, и т.д. — конечная процедура!

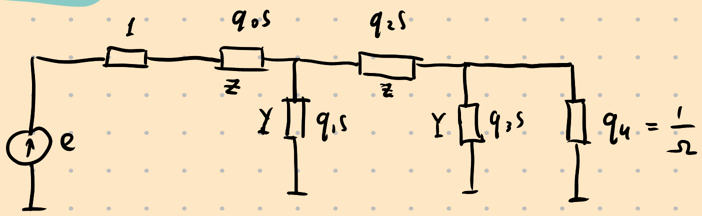
Возникает посл-ть частных: $Q_0(s), Q_1(s), \ldots, Q_r(s)$

Как правило, $Q_n(s)$ – многочлен первого порядка, т.е. можно ввести т.н.

q - коэффициенты:

$Q_i(s) = q_i s$ – такое реализуемо импедансом

Реализация



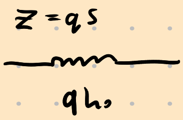
$$Z = q_0 s + \cfrac{1}{q_1 s + \cfrac{1}{q_2 s + \cfrac{1}{q_3 s + q_4}}}$$

$P_s = P_1$

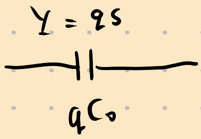
Наборы коэф-ов – данные табличные.

Это реализация импедансом, можно реализовать проводимостью.

Последний q-коэф – активное сопротивление



$$\frac{Z}{R_0} = \frac{j\omega q L_0 \omega_0}{R_0 \omega_0} = qs \overbrace{\frac{\omega_0 L_0}{R_0}}^{1} = qs$$



$$Y R_0 = \frac{j\omega \cdot q C_0 \cdot R_0 \omega_0}{\omega_0} = qs \underbrace{\omega_0 C_0 R_0}_{1} = qs$$

R_0 – эталонное сопротивление (сопротивл. источника)

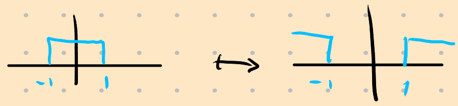
ω_0 – эталонная частота (которую фильтруем)

L_0, C_0 – считаются из R_0, ω_0

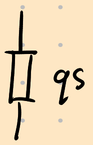
Чаще всего, $q_n = 1$, т.е. последнее сопротивл./проводимость $= R_0$.

Переход к другим фильтрам

1. $s \mapsto \frac{1}{s}$ – фильтр верхних частот

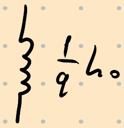


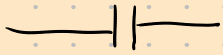
$Y = qs$:



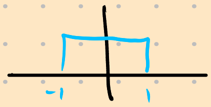
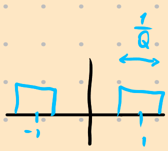
$\longmapsto$

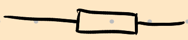
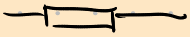
$\frac{q}{s} = \cfrac{1}{\frac{1}{q} \cdot s}$ $\Rightarrow$



$Z = qs$:  qs $\mapsto$  $\frac{q}{s} = \frac{1}{\frac{1}{q}\cdot s}$ $\Rightarrow$  $\frac{1}{q}C_0$

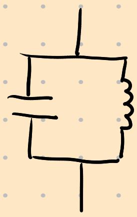
обобщённая расстройка

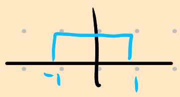
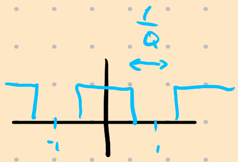
2. $s \mapsto Q\left(s + \frac{1}{s}\right)$ — полосовой фильтр  $\mapsto$ 

$Z = qs$:  $\mapsto$ $qQ\left(s+\frac{1}{s}\right) = qQs + \frac{1}{\frac{1}{qQ}s}$  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  qQL_0, $\frac{1}{qQ}C_0$

$Y = qs$:  qs $\mapsto$  $qQ\left(s+\frac{1}{s}\right) = qQs + \frac{1}{\frac{1}{qQ}s}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ qQC_0  $\frac{1}{qQ}L_0$

3. $s \mapsto \frac{1}{Q\left(s+\frac{1}{s}\right)}$ — режекторный фильтр  $\mapsto$ 

$Z = qs$:  $\mapsto$ $\frac{q}{Q\left(s+\frac{1}{s}\right)} = \frac{1}{\frac{Q}{q}s + \frac{1}{\frac{q}{Q}s}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  $\frac{Q}{q}C_0$, $\frac{q}{Q}L_0$

$Y = qs$:  qs $\mapsto$ $\frac{q}{Q\left(s+\frac{1}{s}\right)}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  $\frac{q}{Q}C_0$, $\frac{Q}{q}L_0$

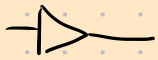
Но! Это работает только для Баттерворта и Чебышева: у них в разложении многочлены первого порядка. У эллиптических нет.

Для реализации импеданса вида qs^2 нужен „двойной дифференциатор" – вторая производная. В виде двухполюсника – нереализуемо

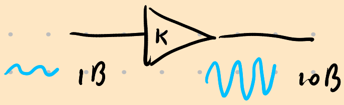
№3 Такие фильтры полезны в высоких частотах, когда оп. усилители работают плохо.

Резонаторы как правило реализуют не LC, но кварцевыми резонаторами (твердотельными).

Активные фильтры

R C 

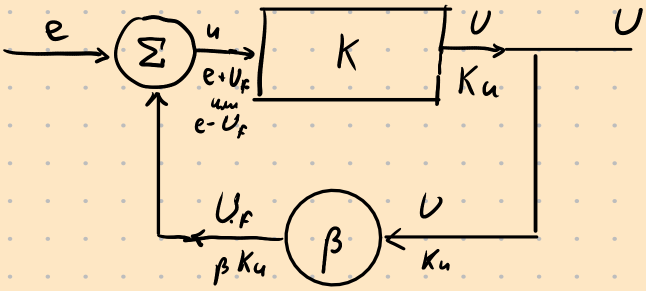
Операционный усилитель



~ 0 - 500 MHz

Петля обратной связи

Feedback loop



β - коэф-т обратной связи
($\beta << 1$)

Автоматическое управление основано на таких петлях.

Такие петли могут „сойти с ума" - колебаться. Это решает теория устойчивости петель обратной связи.

$u = e + U_f$ — положительная обратная связь (типично неустойчива),

$u = e - U_f$ — отрицательная

При данных K и β, $K_e = \frac{U}{e}$ — ?

$u = e - U_f = e - \beta K U$, $U = K u$

$u = \frac{e}{1+\beta K} \Rightarrow K_e = \frac{K}{1+\beta K}$ — основная ф-ла теории обратной связи

$K_e(p) = \frac{K(p)}{1+\beta K(p)}$ — ищем полюса => исследуем устойчивость

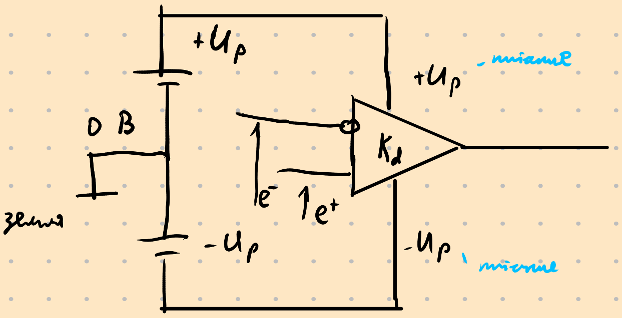
$\beta K(p) \equiv -1$ — собственные частоты петли

Если полюса в левой полуп., то колебания затухают - всё ± устойчиво

Если в правой, сис-ма неустойчива.

Внутри петель обратной связи образуются новые собств. частоты — новые полюса.

Операционный усилитель



e^+, e^-, U – относительно земли!

$$U = K_d(e^+ - e^-)$$

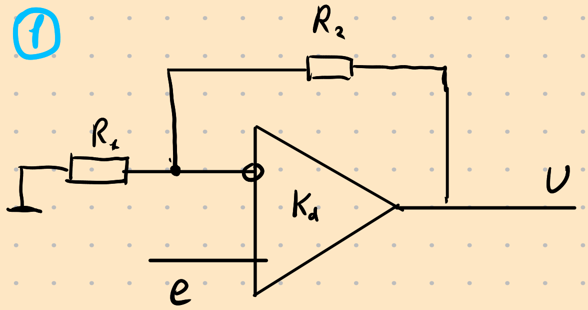
Отриц. вход – инвертирующий

Положительный – неинвертирующий

Оп. усилитель нужен для петель обр. связи!

Оп – сумматор + усилитель.

1



$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U = (e - U_f)K_d = (e - \beta U)K_d$$

$$U(1 + \beta K_d) = K_d$$

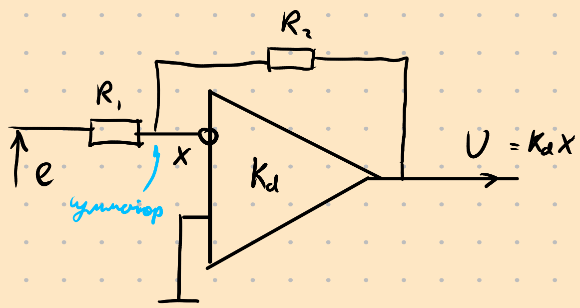
$$K_e = \frac{U}{e} = \frac{K_d}{1 + \beta K_d}$$

βK_d – коэф-т передачи разомкнутой петли

Если $\beta K_d \gg 1$: $K_e \approx \beta^{-1}$

Получается, K_d просто должно быть большим, а β легко выбрать (двумя резисторами).

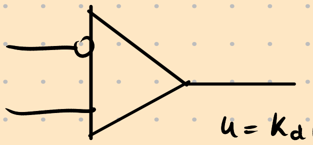
2



$$X = \alpha e + \beta U$$

$$K_e = \frac{U}{e} = ?$$

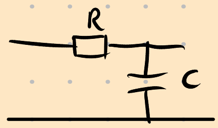
АЧХ операционного усилителя



$$u = K_d(e^+ - e^-) = K_d e_d$$

$$K_d(jf) = \frac{K_0}{1 + j\left(\frac{f}{f_p}\right)}$$

Внутри ОУ как бы интегр. цепь:



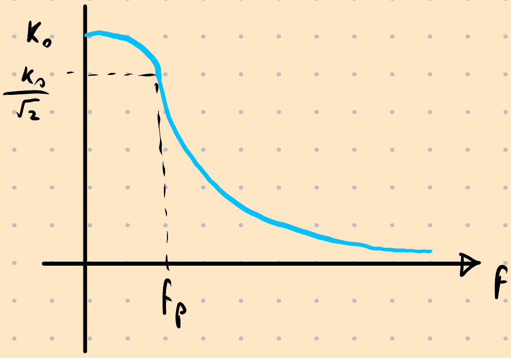
$\tau = RC$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$K(jf) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{f}{f_0}\right)}$$

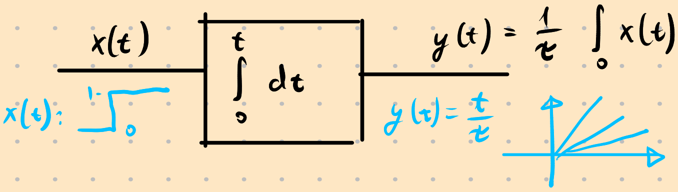
$$|K_d(jf)| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_p}\right)^2}}$$



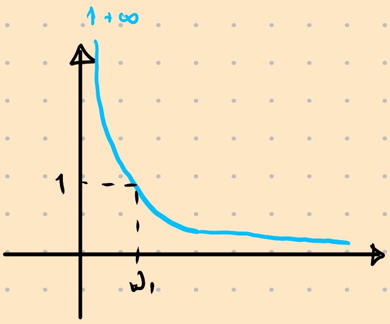
f_p катастрофически мала: ~ 10 Гц

Это сделано для устойчивости обратных связей. Внутрь добавлена интегр. цепь, к-рая добавляет полюс с $f_p = 10$ Гц — ведущий полюс.

Идеальный интегратор



$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^t x(t)\,dt$$



$$y(t) = y\,e^{j\omega t}$$

$$x(t) = \tau\, y\, j\omega\, e^{j\omega t}$$

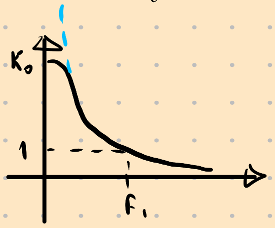
$$K(j\omega) = \frac{y}{x} = \frac{1}{j\omega\tau} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{\omega_1}{j\omega}$$

Характеризуется всего одним параметром: τ (ω_1) — частота единичного усиления / угол наклона переходной характеристики

Для ОУ: $K_d = \dfrac{1}{\cancel{\frac{1}{K_0}} + j\left(\frac{f}{K_0 f_p}\right)} \approx \dfrac{f_1}{jf}$, $f_1 = K_0 f_p$

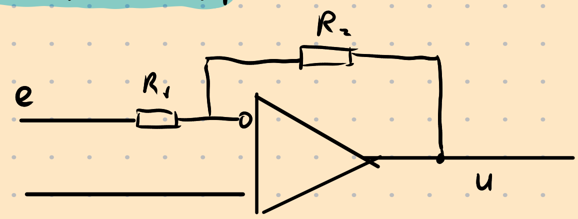
частота единичного усиления

Поэтому ОУ очень похож на идеальный интегратор



f_1 - важный параметр ОУ!!

Применение f_1



$\beta = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$

$\alpha = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ – „масштабный" усилитель

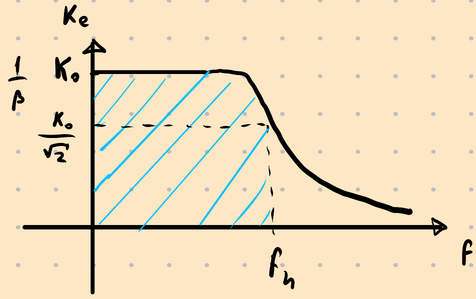
$K_e = \dfrac{K_d}{1 + \beta K_d}$ $\qquad K_e = \dfrac{\alpha K_d}{1 + \beta K_d}$

$$K_e(jf) = \frac{\frac{f_1}{jf}}{1 + \frac{\beta f_1}{jf}} = \frac{1}{\beta + \frac{jf}{f_1}} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{jf}{\beta f_1}\right]}$$

$\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{R_2 + R_1}{R_1} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1} = K_0$ – коэф. усиления на 0 частоте

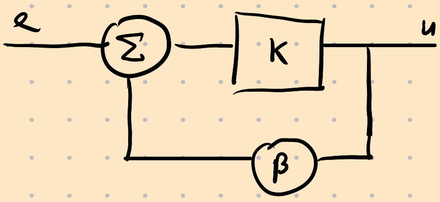
$f_h = \beta f_1 = \dfrac{f_1}{K_0}$ – верхняя граничная частота

$f_h K_0 = f_1$



$K_0 f_h = f_1$ – площадь усиления

ОУ в цепи обратной связи



$$K_e = \frac{K}{1+\beta K}$$

$$K_e(p) = \frac{K(p)}{1+\beta K(p)}$$

Полюса: $1+\beta K(p) = 0$

$$K_\beta(p) = \beta K_0 \frac{N(p)}{D(p)} = \beta K_0 \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{p}{\eta_j}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{p}{\mu_k}\right)}$$

η_j – нули K_β

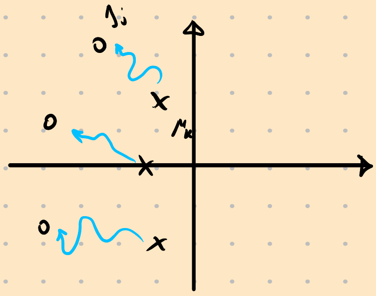
μ_k – полюса K_β

$D(p) + \beta K_0 N(p) = 0$ – полюса K_e (βK_0 – петлевое усиление)

$0 \le \beta K_0 \le +\infty$:

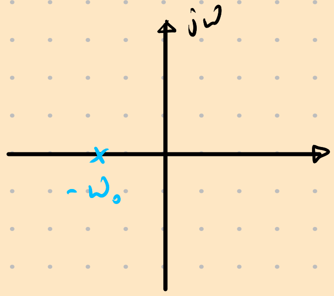
1. $\beta K_0 = 0 \Rightarrow D(p) = 0$ – в отсутствие обр. связи полюса остаются те же
2. $\beta K_0 \to \infty \Rightarrow N(p) = 0$

При увеличении глубины обр. связи (βK_0) полюса дрейфуют к нулям.



root locus

Пример – усилитель с одной интегр. цепью



$$K = \frac{K_0}{1+j\frac{f}{f_p}} = \frac{K_0\omega_0}{\omega_0 + j\omega}$$

Ноль – в бесконечности

$$K_e = \frac{\frac{K_0}{1+p\tau}}{1+\frac{\beta K_0}{1+p\tau}} = \frac{K_0}{1+\beta K_0} \cdot \frac{1}{1+p\frac{\tau}{1+\beta K_0}}$$

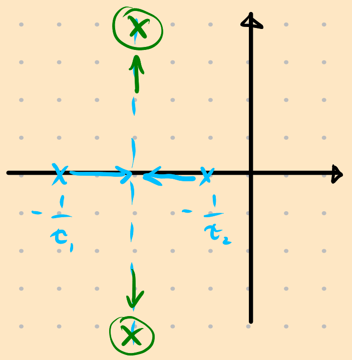
Полюс перекочевал в точку $-\frac{1+\beta K_0}{\tau} = -\frac{1}{\tau'}$

Если у сис-мы 2 полюса:

$$K(p) = \frac{k_0}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$$

$$K_e(p) = \frac{K_0}{p^2\tau_1\tau_2 + p(\tau_1+\tau_2) + 1 + \beta K_0}$$

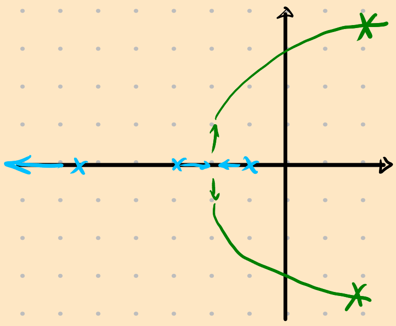
$$D = (\tau_1+\tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1+\beta K_0) = (\tau_1-\tau_2)^2 - 4\beta K_0 \tau_1 \tau_2$$



2 вещественных полюса при $\beta K_0 \to \infty$ сливаются и становятся сопряжённой парой (колебания!)

Это — реализация пары сопр. полюсов активными RC — цепями.

Для трёх полюсов:



— сис-ма становится неустойчивой.

Реализация звеньев

$$\frac{K_0 \cdot \{1, s, s^2\}}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}$$ — ФНЧ

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1}$$ — ФВЧ

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1}$$ — ПФ