$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = b(x)$, $x \in I$ все ф. непр., $a_0(x) \neq 0$

Предполагаем, мы угадали y_1 – решение однородного ур-я

Ищем в виде $e^{\alpha x}$, x^k, $ax+b$ и т.д.

Найдем ОРОУ:

y_1 – нашли

y – произв. реш-е однородного ур-я

Ф-ла Лиувилля – Остроградского: $W(y_1, y) = C e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = C \varphi(x)$

$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C \varphi(x)$ $\dfrac{y \cdot y_1' - y_1 y'}{y_1^2} = \dfrac{C \varphi(x)}{y_1^2}$

$\left(\dfrac{y}{y_1} \right)' = \dfrac{C \varphi(x)}{y_1^2}$

$\dfrac{y}{y_1} = C_2 \int \dfrac{\varphi(x)}{y_1^2} dx + C_1$

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

ОРНУ: вариация постоянной: $y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$

$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \dfrac{b(x)}{a_0}$

$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$

$C_1'(x) = \dots$ $C_2'(x) = \dots$

Задача 1

$2x y'' + (4x+1) y' + (2x+1) y = e^{-x}$, $x > 0$

ЧРОУ: $y_1 = e^{-x}$

y – произв., y_1 – угадали

$W(y_1, y) = C e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x} dx} = C e^{-(2x + \frac{1}{2} \ln x)} = C e^{-2x} x^{-1/2}$

$\int_{x_0}^{x} \dfrac{4x+1}{2x} dx = 2x + \dfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \dfrac{1}{x} dx = 2x + \dfrac{1}{2} \ln x + C_1$

$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y' e^{-x} + y e^{-x}$

Делим на e^{-2x}:

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-1/2}$$

$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' \qquad \frac{y}{e^{-x}} = C x^{1/2} + C_1$$

ОРОУ $\quad y = C_1 e^{-x} + C e^{-x} \sqrt{x}$

ОРНУ $\quad y = C_1(x) e^{-x} + C(x) e^{-x} \sqrt{x}$

$$\left. + \right\{ \begin{array}{l} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} = 0 \\ - C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} + C_2'(x) \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{-x}}{2x} \end{array} \right.$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad\qquad C_1'(x) = -1$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \qquad\qquad C_1(x) = -x + C_1$$

Ответ: $\quad y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x} \sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x} + x e^{-x}$

Задача 2

$$x^2 (\ln x - 1) y'' - x y' + y = x (\ln x - 1)^2, \qquad x > e$$

ЧРОУ: $\quad y_1 = x$

$$\left| \begin{array}{cc} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{array} \right| = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C (\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2} \qquad\qquad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C \frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

ОРН У: $\quad y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, x + C_2'(x)\, \ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)\, \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \quad |\cdot x \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} C_1'(x)\, x + C_2'(x)\, \ln x = 0 \\ C_1'(x)\, x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$$C_2'(x) = -1 \qquad\qquad C_1'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$C_2(x) = -x + C_2 \qquad\quad C_1(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1$$

Ответ: $y = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1\right) x + (C_2 - x)\, \ln x$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$$

Задача 3

$$(2x+3)\, y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}\, y = 3(2x+3)^2$$

Ищем ЧРОУ в виде x^n:

$$k(k-1)(2x+3)\, x^{k-2} - 2k x^{k-1} - 6 x^{k-2} = 0$$

$$(2x+3)\, k(k-1) - 2kx - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x^2$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{2}{2x+3}\, dx} = C(2x+3)$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{y_1} = C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + C_1$$

ОРОУ $\quad y = C_1 x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

ОРНУ: ВП: $y = C_1(x)\, x^2 + C_2(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, x^2 + C_2'(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \quad |\cdot 2 \\ C_1'(x)\, 2x - C_2'(x)\, \frac{1}{x^2} = 6x + 9 \quad |\cdot x \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2C_1'\, x^2 + 2C_2'\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ 2C_1'\, x^2 - C_2'\, \frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$$3C_2'\, \frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$$

$$C_2' = -3x^2 \qquad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$$

$$C_2 = -x^3 + C_2 \qquad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$$

Ответ:
$$y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$y = C_1 x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2\ln x + 2x^3 - x^2$$

$$y = C_1 x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2\ln x$$

Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0, \qquad \nu = \text{const}$$

Д-ть, что ур-е не может иметь 2^x лин. незав. реш-ий, огр. в окр-ти 0 вместе с производными.

□ Предположим y_1 и y_2 — 2 таких реш-я.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t}} = \frac{C}{x}, \qquad C \neq 0 \text{ т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ лин. незав.}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{C}{x}$$

↳ огр. в окр-ти 0   ↳ явно неогр.   ▨

Приведение лин. ур-ий $2^{го}$ порядка к виду, не сод. y'

$$a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0$$

↓   — преобр-е Лиувилля (замена неизв. ф-ии)

$$z'' + \vartheta(x)\, z = 0$$

$$y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt\right)$$

В ур-ии Бесселя: $y = z\, x^{-1/2}$

$$y' = z' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z\, x^{-3/2}$$

$$y'' = z'' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} + \frac{3}{4} z\, x^{-5/2}$$

Получим
$$z'' x^{3/2} - z' x^{1/2} + \frac{3}{4} z\, x^{-1/2} + z' x^{1/2} - \frac{1}{2} z\, x^{-1/2} + (x^2 - \nu^2)\, z\, x^{-1/2} = 0$$

$$z'' x^{3/2} + \frac{1}{4} z\, x^{-1/2} + z\, x^{1/2} - \nu^2 z\, x^{-1/2} = 0 \quad \Big|\, : x^{3/2}$$

$$z'' + \frac{1}{4} x^{-2} + z - \nu^2 z\, x^{-2} = 0$$

$$z'' + z\left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) = 0$$

При $\nu = \pm\frac{1}{2}$ это простее ур-е $z'' + z = 0$ => $z = C_1\cos x + C_2\sin x$

При ост. ν реш-я не выр-ся элем. ф-иями.

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

$x_0 \in \hat{I}$

$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Реш-е з. Коши $\exists!$ на всём промежутке I

В отл. от Т. об общем ур-и, где оно $\exists!$ в окр-ти x_0.