

## Несколько оп-ий

$$y^2 = x^2$$

a) Сколько оп-ий  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? Бессенкошко ишо:

$$X \subset \mathbb{R}: f(x) = x, x \in X$$

$$f(x) = -x, x \notin X$$

б) Сколько непрерывных оп-ий  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? 4:

$$x, -x, |x|, -|x|$$

в) Сколько непр-оп-ий  $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? 2:

$$x, -x$$

г) Сколько непр-оп-ий  $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? 1:

$$x$$

## Теорема о несуществовании оп-ий

Пусть  $F(x, y)$  непр. дифгр. в  $(x_0, y_0)$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , тогда  $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$  в  $\Pi$ -ном  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$ .

Определим  $f(x)$  непр. дифгр. на  $(x_0 - a, x_0 + a)$

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \text{правильное} - \text{не так-то!}$$

Данная формула +0 правильн. тк непрерывн., каская зависим. (рабна оп-ий).

№1

$$u^3 - xy + y = 0, u = u(x, y)$$

Найдем  $u'_x, u'_y$  и  $du$  в т.  $(3, -2, 2)$  и  $(3, -2, -1)$  - надо угадать  $u'_1$  ищите

$$x=3, y=-2, u=?$$

$$u^3 - 3u - 2 = 0 \mid u=2 - \text{прав.}$$

$$(u-2)(u^2+2u+1)=0$$

$$(u-2)(u+1)^2=0 \quad (u=-1)$$

$$3u^2u'_x - xu'_x - u = 0$$

$$u'_x = \frac{u}{3u^2-x}$$

$$3u^2u'_y - xu'_y + 1 = 0$$

$$u'_y = -\frac{1}{3u^2-x}$$

$$u'_x(A) = \frac{2}{9} \quad u'_y(A) = -\frac{1}{9}$$

$$du(3, -2, 2) = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$$

! Норме спэзы драен гуарепенчан, не crucial наэвзбужнне

$$3u^2du - xdu - udx + dy = 0$$

$$du = \frac{udx - dy}{3u^2-x}$$

No 2

$$f(x-y, y-z, z-x) = 0 \Rightarrow z = z(x, y) \text{ - наиминим } dz$$

$$f(u, v, w)$$

$$f'_u(x-y, y-z, z-x)(dx-dy) + f'_v(x-y, y-z, z-x)(dy-dz) + f'_w(x-y, y-z, z-x) \cdot (dz-dx) = 0$$

$$dz = \frac{f'_u dx - f'_v dy + f'_w dy - f'_w dx}{f'_v - f'_w}$$

No 3

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 & u=u(x, y) \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x & v=v(x, y) \end{cases} \quad u(1, 2) = v(1, 2) = 0 \quad (\text{ногрэхийн})$$

Наиминим  $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$  нэмь  $x=1, y=2, u=v=0$

! Рэндээ норме наиминим  $u, v$  - гаранс. яр. - е. А нэгэндээ бт. - ижүүлэл

$$\begin{array}{r} u^3 - 3u - 2 \\ u^3 - 2u^2 \\ \hline 2u^2 - 3u \\ 2u^2 - 4u \\ \hline u - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} u-2 \\ u^2+2u+1 \end{array} \right.$$

No 4

$$u^3 + 2yu + xy = 0 \quad u(1, -1) = -1 \quad (\text{problem: OK})$$

Karim  $d^2u(1, -1, -1)$

$$3u^2du + 2ydu + 2ydu + dx \cdot y + dy \cdot x = 0$$

$$du = -\frac{2u dy + dxy + dy x}{3u^2 + 2y} \quad du = dx + dy$$

$$6u du^2 + 3u^2 d^2u + 2dudy + 2yd^2u + 2du dy + dx dy + dx dy = 0$$

$$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 \cdot 6u + u du dy + 2dx dy = 0$$

$$d^2u - 6(dx + dy)^2 + 4dx dy + u dy^2 + 2dx dy = 0$$

$$d^2u = 6dx^2 + 12dx dy + 6dy^2 - 4dx dy - u dy^2 - 2dx dy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dx dy$$

No T4

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Basisvektoren  $r'_x, r'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$  bezügl.  $r, \varphi$

$$\begin{cases} 1 = r'_y \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_y \\ 0 = r'_y \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_x \\ 0 = r'_x \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_x \end{cases}$$

$$\Delta = r$$

$$\Delta_r = -r$$

$$\Delta_r = r \cos \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\sin \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\sin \varphi$$

$$r'_y = \sin \varphi \quad \varphi'_y = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$r'_x = \cos \varphi \quad \varphi'_x = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

No nærmere bei 2. so domo?

$$u = u(x, y)$$

$$\text{Fremde yd-e } x u'_y - y u'_x = 0$$

Basisektoren gennem:  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, u = (r, \varphi)$

$u'_y, u'_x$  basisektoren bezügl.  $u_r, u_\varphi$

$$u'_x = u_r \cdot r'_x + u_\varphi \varphi'_x$$

$$u'_y = u_r \cdot r'_y + u_\varphi \varphi'_y$$

$$\vec{u}_x = u_r \cdot \cos \varphi - u_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \quad \vec{u}_y = u_r \cdot \sin \varphi + u_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$$

$\vec{u}_{p-e}$ :

$$r \cos \varphi \cdot (u_r \cdot \sin \varphi + u_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}) - r \sin \varphi \cdot (u_r \cdot \cos \varphi - u_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r}) = u_\varphi$$

$$u_\varphi = 0$$

$$\vec{u}_{p-e} \quad u = f(r)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Orb.: } u = F(x^2 + y^2)$$

No 5

$$(y - z) z'_x + (y + z) z'_y = 0 \quad z = z(x, y)$$

3dnuend: naber negab. neperenenne  $u = y - z, v = y + z$

naber q-u  $x = x(u, v)$ .

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x (x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$$

$$dx = x'_u du + x'_v dv \quad + z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$$

$$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y) dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1) dz = 0$$

dy, dz - neperenenne  $\Rightarrow$  kospf-für syn min  $\approx 0$ .

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z'_x = \frac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Negativeren:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v \left( \frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \right) = 0 \quad \frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

No T3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

1) D-ir, no  $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$ , no f negab-wa funksionen

2) Karien  $f(\mathbb{R}^2)$  - un-ko zonoren f.

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

На 26-м занятии было выяснено, что  $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$   
 $v(r, \varphi) = v(r, \varphi + 2\pi)$

2)  $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$

$v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$   $e^z$  ненул. для  $z \neq 0$ .

### Экстремумы в $n$ -мн. переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Несобр. уравн.: Если в точке нес. диф. ф-ии  $F$  непр., то  $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$  (стаци. т.)

Дост. уравн.: Если  $F(x_1, \dots, x_n)$  - гладкая ф-ия в  $U_\delta(\bar{x}_0)$ ,  $\bar{x}_0$  - стаци. т., то пос-вие квадратичного приближения в  $(x_1, \dots, x_n)$ :

$$d^2F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^n f''_{x_i x_i}(\bar{x}_0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^n f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. Кл. опт. норм. опр.  $\Rightarrow \bar{x}_0$  - лок. мин.

2. Стаци. опр.  $\Rightarrow$  лок. макс.

3. Несобр.  $\Rightarrow \bar{x}_0$  - не лок. экстрап.

4. нестаци.  $\Rightarrow ?$  (антипризмы неприменим)

### Использование кл. оптим.

1. Приведение к каноническому виду  $k(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$ ,  $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этот вид означает с равными коэффициентами  $\varepsilon_i$ :

$p = \operatorname{кн-ко} \varepsilon_i = +1$  - нестаци. максимум

$q = \operatorname{кн-ко} \varepsilon_i = -1$  - стаци. максимум

$$r = p+q = \operatorname{кн-ко}$$

Нестаци. опр.  $\Leftrightarrow$  все  $\varepsilon_i = +1$

$$p=n, q=0$$

Стаци. опр.  $\Leftrightarrow$  все  $\varepsilon_i = -1$

$$p=0, q=n$$

Несобр. опр.  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_i = +1 \text{ и } \exists \varepsilon_j = -1$

$$1 \leq q, p \leq n-1$$

Нестаци. нестаци.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \geq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$$p \leq n-1, q=0$$

Стаци. нестаци.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \leq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$$p=0, q \leq n-1$$

## 2. Критерий Симсона

$$B = (b_{ij})$$

$$\left( \begin{array}{c|c|c} - & - & \\ - & - & \\ - & - & \end{array} \right) \quad \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

Однознач. оптим.  $\Leftrightarrow \text{sign } \Delta_i = (-1)^i$

Несимм. оптим.  $\Leftrightarrow \text{ber } \Delta_i > 0$

## 3. Условия оптимума $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$  Несимм. оптим.  $\Leftrightarrow A > 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C > 0)$

Однознач. оптим.  $\Leftrightarrow A < 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C < 0)$

Неонп.  $\Leftrightarrow AC - B^2 < 0$

№1

$$U = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$$

$$u'_x = 6xy - 12$$

$$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \pm 1 \\ y = \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = 6y \quad u''_{xy} = 6x$$

$$u''_{yy} = 6y$$

$$d^2F = 6y dx^2 + 6y dy^2 + 12x dx dy$$

$$\frac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dxdy \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0 \quad -\text{неонп.}$$

$$\frac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dxdy \quad -\text{неонп.}$$

$$\frac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \quad -\text{наимин. оптим.} - \min$$

$$\frac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dxdy \quad -\text{однознач. оптим.} - \max$$

Nº 2

$$u = xyz(16-x-y-2z), \quad x, y, z \geq 0$$

$$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$$

$$u_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \quad u_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$$

$$u_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$$

$$\begin{cases} yz(16-2x-y-2z) = 0 \\ xz(16-x-2y-2z) = 0 \\ xy(16-x-y-4z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+2z = 16 \\ x+2y+2z = 16 \\ x+y+4z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$$

$$u_{xx}'' = -2yz = -16 \quad u_{xy}'' = -2xz = -16 \quad u_{zz}'' = -4xy = -64$$

$$u_{xy}'' = z(16-2x-y-2z) - yz = -8 \quad u_{xz}'' = y(16-2x-y-2z) - 2yz = -16$$

$$u_{yz}'' = x(16-x-2y-2z) - 2xz = -16$$

$$d^2u(4,4,2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdz - 32dydz$$

$$\frac{d^2u(4,4,2)}{16} : \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 > 0$$

Паром. оптим.  $\Rightarrow$   $d^2u$  оптим. оптим.  $\Rightarrow$  мин.  $mdx$

Nº 3

$$u = x^4 + y^4 - 2x^2$$

$$u_x' = 4x^3 - 4x \quad u_y' = 4y^3$$

$$u_{xx}'' = 12x^2 - 4 \quad u_{yy}'' = 12y^2 \quad u_{xy}'' = 0$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy$$

$$d^2u(0,0) = -4dx^2 - 0 \text{ разн. началь.} - ?$$

$$u(ax, ay) - u(0,0) = ax^4 + ay^4 - 2ax^2 = 0 : \quad \begin{array}{l} \Delta x = 0 \quad \Delta y \neq 0 \quad \oplus \\ 0 < ax < \sqrt{2} \quad ay = 0 \quad \ominus \end{array}$$

Фокальная нес.

$$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2 - \text{паром. начальн.}$$

$$u(\pm 1 + \Delta x, ay) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x^4) + ay^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= \Delta x^4 + 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + ay^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + ay^4 > 0 - \text{min}$$

## № T5

B) cras. t. kb. graphma d<sup>2</sup>f razom. naryanyey.

a) Mamer u sivo dars max? Da.

§) Mamer u dars min? Ket (berga etis idene skusy, razo naryanyemne > 0 - keng d<sup>2</sup>f)

b) He dars ekstremyna? Da

## №4

$$x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0 \quad - \text{lickey naryanyo q-p-u, 3ay. y-p-en.}$$

$$2x \, dx + 2y \, dy + 2u \, du + 2 \, dx - 2 \, dy + 2 \, du = 0$$

$$(u+2) \, du + (x+1) \, dx + (y-1) \, dy = 0$$

$$du = - \frac{(x+1) \, dx + (y-1) \, dy}{u+2}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad du = 0$$

$$u^2 + 4u - 5 = 0 \quad u = 1, -5 ; \quad (-1, 1, 1), (-1, 1, -5)$$

$$(u+2) \, d^2u + du''_0 + dx^2 + dy^2 = 0$$

$$d^2u = \frac{-dx^2 - dy^2}{u+2}$$

$$d^2u(-1, 1, 1) = -dx^2 - dy^2 \quad -\text{oymy. onpey. (max)}$$

$$d^2u(-1, 1, -5) = \frac{dx^2}{3} + \frac{dy^2}{3} \quad -\text{razom. onpey. (min)}$$

## Yukobniy ekstremu

$$u = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (\bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

Yukobniy obz:  $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_m(\bar{x}) = 0 \quad (*) \quad n > m$

Tora da  $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  raz-eciz yukobniy ekstremum f( $\bar{x}$ ) ypu ypu. (\*)  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in U_\delta(x_0) \text{ ypu bun. ynu-nu} \quad (*) \rightarrow f(\bar{x}) > f(\bar{x}^0)$

$$\text{Q-p-u} \quad L(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$$

$$L(\bar{x})|_{*} = f(\bar{x})|_{*} \quad \forall \lambda_i$$

guree  $x \equiv \bar{x}$   
 $x^0 \in \bar{x}^0$

Kedch. ynu.1. Naryse f(x) u  $\varphi_i(x)$  naryanyey. b)  $U_\delta(x^0)$ , tang

$$\operatorname{rg} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}} = m$$



$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

Підмініть  $x_1, \dots, x_n$  барвом. зваж  $x_{m+1}, \dots, x_n$  (нервно)  
Розглянь  $x^0 - \tau$ . що  $\varphi_i(x)$  нічій більш. ( $*$ )  
Знайди  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m : x^0 - \text{сагр. } \tau$ -оп-мі лініаризації  
Лін-на  $n+m$  зг-ні  $c_{n+m}$  наяв.  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$

## Приклад

$$n=2, m=1$$

$$u = \ln xy, \quad x^3 + xy + y^3 = 0$$

$$L = \ln xy + \lambda(x^3 + xy + y^3)$$

$$\begin{cases} L'_x = \frac{1}{x} + \lambda(3x^2 + y) = 0 \\ L'_y = \frac{1}{y} + \lambda(3y^2 + x) = 0 \\ x^3 + xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = -\lambda(3x^2 + y) \\ \frac{1}{y} = -\lambda(3y^2 + x) \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3x^2}{y} - \lambda \\ \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3y^2}{x} - \lambda \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow y = x$$

$$2x^3 + x^2 = 0$$

$$x_1 = 0 - \text{не може.} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x=y=-\frac{1}{2}, \quad \lambda = \delta - \text{безумовно юн. мір!}$$

**Доказати юн. е:**  $(**)$  - прогурує. юн. відповідь

$dx_1, \dots, dx_m$  лініариз. зваж  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$

Розглянь  $F, \varphi_i$  - обмежені нерв. функції  $\delta$  та  $L_\delta(x^0), x^0, \lambda_i$  - певн. лін-на

$n+m$  yп-ии с  $n+m$  неизб.

$d^2 L(x^0) \Big|_{(x^0)} -$  квадр-графика от  $n-m$  неизб-граф - об

По неї можна зробити висновок що функція має мінімум або максимум.

! Існує  $d^2 L(x^0)$  як незалежні від  $x$  та  $y$  змінні. тоді  $d^2 L(x^0)$  - незалежні від  $x$  та  $y$  змінні. Існує критерій діагональності якщо всі елементи матриці  $d^2 L(x^0)$  бін зеро. Тоді функція незалежні. Існує критерій діагональності якщо всі елементи матриці  $d^2 L(x^0)$  бін зеро. Тоді функція незалежні.

### Приклад (бін тут же)

$$L''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \lambda \cdot 6x = -4 + 8 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -28$$

$$L''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda \cdot 6y = -28$$

$$L''_{xy} = \lambda = 8$$

$$d^2 L = -28 dx^2 - 28 dy^2 + 16 dx dy$$

$$\frac{d^2 L}{4} = -7 dx^2 - 7 dy^2 + 4 dx dy \quad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \quad - \text{діаг. оптим.}$$

Також, точка  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  - точка мінімуму.

### Приклад 2

$$u = 1 - 4x - 8y \quad x^2 - 8y^2 = 8$$

$$L = 1 - 4x - 8y + \lambda (x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$L''_{xx} = 2\lambda = \mp 1 \quad L''_{yy} = -(16\lambda) = \mp 8 \quad L''_{xy} = 0$$

$$d^2 L = 2\lambda (dx^2 - 8dy^2) \quad d^2 L \Big|_{(x,y)} = \mp 4 dy^2$$

$$(1+) \quad 2x dx - 16y dy = 0 \quad \textcircled{1} (-4, 1) - \text{неч. оптим.} \Rightarrow \text{фун. мін}$$

$$dx = 8y \quad \frac{dy}{x} = -2dy \quad \textcircled{2} (4, -1) - \text{діаг. оптим.} \Rightarrow \text{фун. макс}$$

### Пример 3

$$u = xy, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}$$

$2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$   
 $2y^2 - 1 = 0$

Насыщ.:  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\lambda = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$L''_{xx} = 2\lambda \quad L''_{yy} = 2\lambda \quad L''_{xy} = 1 \quad \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 2\lambda \quad \Delta_2 = 4\lambda^2 - 1$$

- насыщ. грани

$$(**) \quad 2x \, dx + 2y \, dy = 0$$

$$dy = -\frac{2x \, dx}{2y} = \begin{cases} -dx, & x=y, \lambda = -\frac{1}{2} \\ +dx, & x=-y, \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d^2 L \Big|_{**} = \pm dx^2 \pm dy^2 + 2dxdy = \begin{cases} -4dx^2, & \lambda = -\frac{1}{2} \\ 4dx^2, & \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{-эпв. грани - мин.} \\ \text{-надм. грани - макс.} \end{matrix}$$

Обрати!  $\underbrace{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}_{\text{мин.}} \underbrace{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}_{\text{макс.}}$

### Пример 4

$$u = 2x^2 + 12xy + y^2 \quad x^2 + 4y^2 = 25$$

$$L = 2x^2 + 12xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 12x + 2y + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x(2+2\lambda) + 6y = 0 \\ 6x + y(1+4\lambda) = 0 \end{cases} \quad - (0, 0) \text{ не насыщ. на гранич.}$$

Убеди, что (1) имеет реш.  $(0, 0)$ :  $\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 6 \\ 6 & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$-34 + 9\lambda + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{17}{4} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Две нули неизвестное. это иль.

Обрати: при  $\lambda = 2$ : глб. мин., при  $\lambda = -\frac{17}{4}$ : глб. макс.

## Задача. искать значение оптимума на множестве

Найти максимум и минимум  $u = x + y + z$  на множестве  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$  (неподходящий)



1. Найти стационарные и критические точки; на них, проверить значение

2. Исследовать граничные условия, если граница, грани граничны

$$\text{① } u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 = z, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$u = x + y + x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\text{Границы: } U'_x = 1 + 2x = 0 \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$U'_y = 1 + 2y = 0 \quad u = -\frac{1}{2}$$

$$\text{② } u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leq z, \quad z = 1$$

$$u = x + y + 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Границы: нет,  $u(x, y)$  ограничен

$$\text{③ } u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1$$

$$u = x + y + 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$L = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \quad L'_y = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} \quad u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

## Кратковременное интегрирование

### Двумерное интегрирование

Двумерное интегрирование бесприменимо для неподходящих множеств,  $y = \psi(x)$



$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy$$



$$\int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\phi(y)} f(x, y) dx$$

### Пример 2

Рассмотрим интеграл  $\int \int f(x, y) dy dx$

$$y = x^2, \quad x + y = 2 - \text{область}$$

$$\int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{2-y}^{2-y} f(x, y) dx dy$$



### Пример 3

$$x = \sqrt{4-y^2}, \quad x = \sqrt{4y-y^2}, \quad y = 2 \quad (x > 0)$$



$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4y-y^2}}}^2 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^2 f(x, y) dy$$

$$\int_1^2 dy \int_{\frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{4y-y^2}}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

### Пример 4

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy, \quad G \text{ орт. симметрическое } y=0, y=a, y=x-a, y = x-3a, a > 0$$

$$\text{Вычисл. } y: \int_0^a dy \int_{y+a}^{y+3a} (x^2 + y^2) dx$$

$$\int_0^a dy \left( \frac{1}{3}x^3 + y^2 x \right) \Big|_{y+a}^{y+3a} =$$



$$= \int_0^a dy \left( \frac{1}{3}(y+3a)^3 + y^2(y+3a) - \frac{1}{3}(y+a)^3 - y^2(y+a) \right) =$$

$$= \int_0^a dy \left( 4y^3 a + 8y^2 a^2 + \frac{26}{3} y^3 a^3 \right) = \left. \frac{4}{3} y^4 a + \frac{8}{2} y^3 a^2 + \frac{26}{3} y^4 a^3 \right|_0^a = 16a^4$$

## Пример 5

$$\iint \sqrt{x-y} \, dx \, dy \quad G = \left\{ \frac{4}{5}x \leq y \leq x, 1 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^4 dy \int_{\frac{4}{5}y}^y \sqrt{x-y} \, dx = \int_1^4 dy \cdot \frac{2}{3} (x-y)^{3/2} \Big|_{\frac{4}{5}y}^y = \\ & = \int_1^4 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} y^{5/2} \, dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} y^{5/2} \Big|_1^4 = \frac{31}{30} \end{aligned}$$



## Пример 6

Возьмем небольшой интервал, на котором можно аппроксимировать

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} \, dy = \\ & = \int_0^\pi dx \frac{\sin x}{x} \cdot x = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2 \end{aligned}$$

! Площадь квадрата  $\sin x \cos x = 2$



## Замена

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x) g(y) \, dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) \, dy$$

## Замена переменных в общем интервале

$\begin{matrix} G \\ (x,y) \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} D \\ (u,v) \end{matrix}$  - двумерное однородение

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad - \text{квадратичн.}$$

$$\text{Тогда } \iint_G f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, du \, dv$$

Интервал охватываемый для определения - предел переворота при производ.  $< 0$

Красный или зеленый цвет - настолько можно ясно видеть

Числ. замена - полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$$

### Пример 1

$$\iint f(x, y) dx dy \quad \text{непарит. в нел. коорд.} \quad G = \{a^2 < x^2 + y^2 < 4a^2, y < |x|\}$$

$G$

$y = -\frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{\pi}{4}$

$r = a, \quad r = 2a$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_a^{2a} r f(2\cos\varphi, 2\sin\varphi) dr = \int_a^{2a} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) d\varphi$

### Пример 2

$$G = \{0 < x, y \leq 1\} \quad C: r=1, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad D: r=\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$

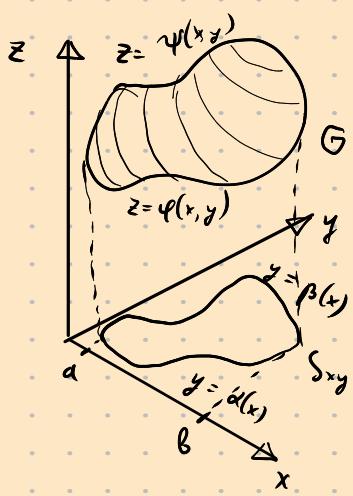
$$O: r=0, \varphi - \text{неконечн.} \quad A: r=1, \varphi = 0$$



$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\varphi} r f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) dr d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\sin\varphi} r f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) dr d\varphi \\ & \int_0^1 \int_0^{\arcsin 1/r} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) d\varphi dr + \int_0^1 \int_0^{\arccos 1/r} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) d\varphi dr \end{aligned}$$

*area  $\approx \frac{1}{r}$*

# Тройное интегрирование



$G \subset R^3$

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{S_{xy}} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Пример 1

Рассмотрим неподвижную

$$\underbrace{\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\rho(x, y, z)} f(x, y, z) dz}_{\text{неподвиг}}$$



$G$  - конус. Сечение по  $z$  от небесного конца до  $a$ , наше же  $(x, y)$  не кружок

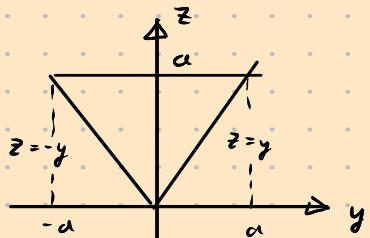
Рассмотрим:

$$1. xyz \quad 2. yxz \quad 3. xzy$$

$$x \leftrightarrow y$$

$$4. zyx \quad 5. yzx \quad 6. zxy$$

$$(1) \leftrightarrow (2) \quad (3) \leftrightarrow (5) \quad (4) \leftrightarrow (6)$$



$$(2) \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\rho(x, y, z)} f(x, y, z) dz$$

$$(4) \int_0^a dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx$$

$$(5) \int_{-a}^a dy \int_{-|y|}^{|y|} dz \int_{\sqrt{z^2-y^2}}^{\rho(x, y, z)} f(x, y, z) dz$$

$$(6) \int_0^a dz \int_{-z}^z dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy$$

$$(3) \int_{-a}^a dx \int_{-|x|}^{|x|} dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy$$

Пример 2

$$\int_0^4 dz \int_0^{3-z} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x,y,z) dx$$

$\underbrace{\phantom{...}}$   
Syz



$$0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{4}z$$

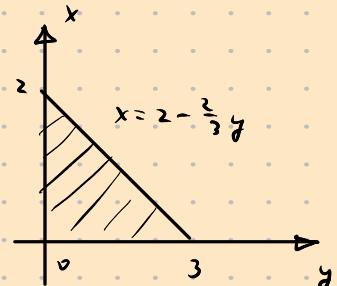
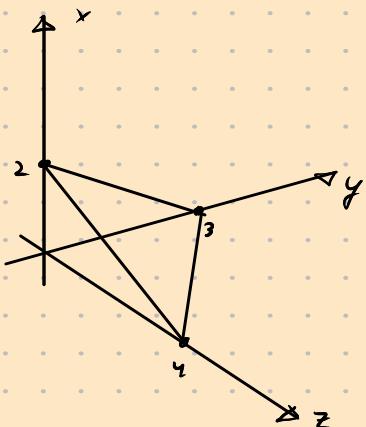
$$x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$$

$$0 \leq x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$$

$$zyx \rightarrow xyz$$

$$z = 3 - \frac{3}{2}x - 4 - \frac{4}{3}y - 2x$$

$$\int_0^4 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-2x} f(x,y,z) dz$$



$$y_p\text{-е н-е}: x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$$

$$z = 4 - \frac{4}{3}y - 2x$$

## Замена переменных в трёхмерном пространстве

### 1 Углополярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h \quad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r$$

Если  $\varphi$  не линейный, то  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

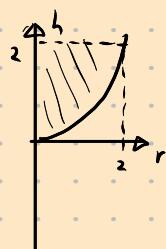
### Пример 1

$$\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$$

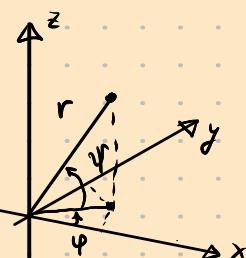
$$\frac{x^2 + y^2}{2} < z < 2 \quad \frac{r^2}{2} < h < 2$$

$r > 0$  нонпр-ко

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dh \int_0^{\sqrt{2h}} r^3 dr \quad - \text{если } \varphi \text{ нужно не забыть}$$



### 2 Сферические координаты



$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$z = r \sin \psi$$

$$x = r \cos \psi \cos \varphi \quad y = r \cos \psi \sin \varphi \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r \cos \psi$  - радиус  $> 0$ , а  $z$  может быть любым, т.к.  
 $\sin \psi \neq 0$ ,  $\cos \psi \neq 0$  (радиус)

Вспомогательный угол  $\Theta = \frac{\pi}{2} - \psi$  ( $0 < \Theta < \pi$ ) —  $\sin \psi$  меняется на  $\cos \Theta$  и наоборот.

Пример 1

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \psi \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \psi dr = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 \psi}{4} \cos \psi d\psi \quad \Theta$$

G:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$  — ог. в кубе не забыть

$$u = \sin \psi$$

$$du = \cos \psi d\psi$$

$$r^2 \leq r \sin \psi$$

$$0 < r < \sin \psi \quad 0 < \psi < 2\pi \quad - \sin \psi \geq 0 \text{ поэтому } 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$\Theta: 2\pi \int_0^1 \frac{u^4}{4} du = 2\pi \cdot \frac{1}{20} = \frac{\pi}{10}$$

Объем

$$V_G = \iiint_G dx dy dz = \iint_{G_0} (v(x,y) - \psi(x,y)) dx dy$$



Пример 1

Найти объем между  $z = x^2 + y^2$  и  $z = x + y$

$$\iint_{G_0} (x+y - x^2 - y^2) \quad \Theta$$

Введен симметрическое выражение

$$x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

$$y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi \quad 0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$x+y - x^2 - y^2 = \frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} - r^2$$

$$\Theta: \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1/2}} r \left( \frac{1}{2} - r^2 \right) dr = 2\pi \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}$$

Пример 2

$$\iiint_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz \quad (1)$$

$$G - \text{ellipsoid: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$$

Объем сопряженное с полем

$$x = ar \cos \psi \cos \varphi \quad y = br \cos \psi \sin \varphi \quad z = cr \sin \psi$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = abc r^2 \cos \psi$$

$$0 < \psi < 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad 0 < r < 1$$

$$(1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \sqrt{1-r^2} dr = 2\pi abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr =$$

$$= 2\pi abc \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt = 2\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos 4t}{2}\right) dt = \frac{\pi^2}{4} abc$$

$$r = \sin t$$

$$dr = \cos t dt$$

$$V_{S^3} : \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (z^+ - z^-) dx dy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

$$z^+ = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$z^- = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$V_{S^3} : \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (u^+ - u^-) dx dy dz = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz \quad (2)$$

$$u^+ = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$u^- = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} R^4$  - объем 4-мерного шара

