Неявные ф-ии

$y^2 = x^2$

а) Сколько ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? Бесконечно много:

$X \subset \mathbb{R}$: $f(x) = x, \ x \in X$

$f(x) = -x, \ x \notin X$

б) Сколько непрерывных ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 4:

$x, \ -x, \ |x|, \ -|x|$

в) Ск. непр. ф-ий $y: [1; 2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 2:

$x, \ -x$

г) Ск. непр. ф-ий $y: [1; 2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 1:

x

Теорема о неявной ф-ии

Пусть $F(x,y)$ непр. дифф. в (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда $\exists \ \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, \ y_0 - b < y < y_0 + b\}$ в к-ром $F(x,y) = 0 \iff f(x) = y$.

При этом $f(x)$ непр. дифф. на $(x_0 - a, \ x_0 + a)$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$F(x, f(x)) = 0$

$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow$ формула - не док-во!

Должна быть $\neq 0$ произв. той переменной, которая зависима (равна ф-ии).

№1

$u^3 - xu + y = 0, \quad u = u(x,y)$

Найти u'_x, u'_y и du в т. $(3, -2, 2)$ и $(3, -2, -1)$ - надо задать u! иначе непонятно что за точка

$x = 3, \ y = -2, \ u = ?$

$u^3 - 3u - 2 = 0 \ | \ u = 2$ - реш.

$$(u-2)(u^2+2u+1)=0$$

$$\begin{array}{r|l} u^3-3u-2 & u-2 \\ \cline{2-2} -\ \underline{u^3-2u^2} & u^2+2u+1 \\ 2u^2-3u & \\ -\ \underline{2u^2-4u} & \\ u-2 & \\ -\ \underline{u-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(u-2)(u+1)^2=0 \qquad (u=-1)$$

$$3u^2u'_x - xu'_x - u = 0$$

$$u_x = \frac{u}{3u^2-x}$$

$$3u^2u'_y - xu'_y + 1 = 0$$

$$u'_y = -\frac{1}{3u^2-x}$$

$$u'_x(A) = \frac{2}{9} \qquad u'_y(A) = -\frac{1}{9}$$

$$du(3,-2,2) = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$$

! Лучше сразу брать дифференциал, не считая производные

$$3u^2du - xdu - udx + dy = 0$$

$$du = \frac{udx - dy}{3u^2-x}$$

№2

$F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0 \Rightarrow z=z(x,y)$ – найти dz

$$F(u,v,w)$$

$$F'_u(x-y,\ y-z,\ z-x)(dx-dy) + F'_v(x-y,\ y-z,\ z-x)(dy-dz) + F'_w(x-y,\ y-z,\ z-x)\cdot$$
$$\cdot(dz-dx)=0$$

$$dz = \frac{F'_u dx - F'_u dy + F'_v dy - F'_w dx}{F'_v - F'_w}$$

№3

$$\begin{cases} xe^{u+v}+2uv=1 \\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x \end{cases} \qquad u=u(x,y) \quad v=v(x,y)$$

$u(1,2)=v(1,2)=0$ (подходит)

Найти $u'_x,\ u'_y,\ v'_x,\ v'_y$ при $x=1, y=2, u=v=0$

! При попытке найти u, v – трансц. ур-е. А произв. в т. – линейное

№ 4

$u^3 + 2yu + xy = 0 \quad u(1,-1) = -1$ (проверим: ОК)

Найти $d^2u\,(1,-1,-1)$

$3u^2du + 2udy + 2ydu + dx\,y + dy\,x = 0$

$du = -\dfrac{2udy + dxy + dy\,x}{3u^2 + 2y} \qquad du = dx + dy$

$6udu^2 + 3u^2d^2u + 2dudy + 2yd^2u + 2dudy + dxdy + dxdy = 0$

$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 \cdot 6u + 4dudy + 2dxdy = 0$

$d^2u - 6(dx+dy)^2 + 4dxdy + 4dy^2 + 2dxdy = 0$

$d^2u = 6dx^2 + 12dxdy + 6dy^2 - 4dxdy - 4dy^2 - 2dxdy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dxdy$

№ T4

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

Выразить r'_x, r'_y, φ'_x, φ'_y через r, φ

$\begin{cases} 1 = r'_y \sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_y \\ 0 = r'_y \cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_y \end{cases}$

$\Delta = -r$

$\Delta_r = -r\sin\varphi$

$\Delta_\varphi = -\cos\varphi$

$r'_y = \sin\varphi \qquad \varphi'_y = \dfrac{\cos\varphi}{r}$

$\begin{cases} 1 = r'_x\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_x \\ 0 = r'_x\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_x \end{cases}$

$\Delta = r$

$\Delta_r = r\cos\varphi$

$\Delta_\varphi = -\sin\varphi$

$r'_x = \cos\varphi \qquad \varphi'_x = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$

№ почему всё это было?

$u = u(x,y)$

Решить ур-е $xu'_y - yu'_x = 0$

Полярная замена: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u = (r,\varphi)$

u'_y, u'_x выразить через u'_r, u'_φ

$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi\,\varphi'_x$

$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y$

$u'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$ $\qquad$ $u'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$

Ур-е:

$$\cancel{r}\cos\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \sin\varphi} + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{\cancel{r}}\right) - \cancel{r}\sin\varphi \cdot \left(\cancel{u'_r \cdot \cos\varphi} - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\cancel{r}}\right) = u'_\varphi$$

$u'_\varphi = 0$

Ур-е $u = f(r)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Отв.: $u = F(x^2+y^2)$

№5

$(y-z)z'_x + (y+z)\, z'_y = 0$ $\qquad$ $z = z(x,y)$

Замена: новые незав. переменные $u = y - z,\ v = y + z$

новая ф-ия $x = x(u,v)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x(x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$$
$$+ z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$$

$dx = x'_u du + x'_v dv$

$$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y)\,dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1)\,dz = 0$$

$dy,\ dz$ - произвольные => коэф-ты при них $= 0$.

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\dfrac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Подставляем:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v\left(\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u}\right) = 0 \qquad \frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

№ T3

$f: R^2 \to R^2$, $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

1) Д-ть, что $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$, но f не яв-ся биективным

2) Найти $f(R^2)$ - мн-во значений f.

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Не яв-ся биективной в силу периодичности: $u(r,\varphi) = u(r, \varphi+2\pi)$

$v(r,\varphi) = v(r, \varphi+2\pi)$

2) $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$

$v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$ $\quad e^z$ прин. все знач. кроме 0

Экстремумы ф-ий нескольких переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Необх. усл-е: Если в точке лок. экстремума F дифф., то $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ (стац. т.)

Дост. усл-е: Если $F(x_1, \dots, x_n)$ - дважды дифф. в $U_\delta(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0$ - стац. т., то рас-им квадратичную форму от $(dx_1, \dots, dx_n)$:

$$d^2F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} F''_{x_i x_i}(\bar{x}_0)dx^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F''_{x_i x_j}(\bar{x}_0)dx_i dx_j$$

1. кв. ф. полож. опр. => $\bar{x}_0$ - лок. min
2. отриц. опред. => лок. max
3. неопр. => $\bar{x}_0$ - не лок. экстр.
4. полуопред. => ? (смотрим приращение)

Исследование кв. форм

1. Приведение в канонический вид $K(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этот вид однозначен с точностью до перестановок ε_i

p = кол-во $\varepsilon_i = +1$ - положит. индекс инерции

q = кол-во $\varepsilon_i = -1$ - отриц. индекс инерции

$r = p+q$ - ранг

Положит. опред. <=> все $\varepsilon_i = +1$ $\quad p = n,\ q = 0$

Отриц. опред. <=> все $\varepsilon_i = -1$ $\quad p = 0,\ q = n$

Неопред. <=> $\exists \varepsilon_i = 1$ и $\exists \varepsilon_j = -1$ $\quad 1 \le q, p \le n-1$

Полож. полуопред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \ge 0$, $\exists \varepsilon_j = 0$ $\quad p \le n-1,\ q = 0$

Отриц. опред. <=> $\forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \le 0$, $\exists \varepsilon_j = 0$ $\quad p = 0,\ q \le n-1$

2. Критерий Сильвестра

$B = (b_{ij})$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow \operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$

Полож. опред. $\Leftrightarrow$ все $\Delta_i > 0$

3. Частный случай $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ Полож. опред. $\Leftrightarrow A > 0,\ AC - B^2 > 0\ (\Rightarrow C > 0)$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow A < 0,\ AC - B^2 > 0\ (\Rightarrow C < 0)$

Неопр $\Leftrightarrow AC - B^2 < 0$

№1

$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$u'_x = 6xy - 12$

$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$

$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \ \pm 1 \\ y = \pm 1, \ \pm 2 \end{cases}$

$u''_{xx} = 6y \qquad u''_{xy} = 6x$

$u''_{yy} = 6y$

$d^2F = 6y\,dx^2 + 6y\,dy^2 + 12x\,dx\,dy$

$\dfrac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0$ – неопред.

$\dfrac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dx\,dy$ – неопред.

$\dfrac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$ – положит. опред. – min

$\dfrac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dx\,dy$ – отриц. опред. – max

№2

$u = xyz\,(16 - x - y - 2z),\quad x, y, z > 0$

$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$

$u'_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \qquad u'_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$

$u'_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$

$$\begin{cases} yz(16 - 2x - y - 2z) = 0 \\ xz(16 - x - 2y - 2z) = 0 \\ xy(16 - x - y - 4z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 2z = 16 \\ x + 2y + 2z = 16 \\ x + y + 4z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$u''_{xx} = -2yz = -16 \qquad u''_{yy} = -2xz = -16 \qquad u''_{zz} = -4xy = -64$

$u''_{xy} = z(16 - 2x - y - 2z) - yz = -8 \qquad u''_{xz} = y(16 - 2x - y - 2z) - 2yz = -16$

$u''_{yz} = x(16 - x - 2y - 2z) - 2xz = -16$

$d^2u(4,4,2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdy - 32dydz$

$$\frac{d^2u(4,4,2)}{16}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 > 0 \qquad \Delta_2 > 0 \qquad \Delta_3 > 0$

Полож. опред. $\Rightarrow$ d^2u отриц. опред. $\Rightarrow$ лок. max

№3

$u = x^4 + y^4 - 2x^2$

$u'_x = 4x^3 - 4x \qquad u'_y = 4y^3$

$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad u''_{yy} = 12y^2 \qquad u''_{xy} = 0$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy$

$d^2u(0,0) = -4dx^2$ – отриц. полуопред – ?

$u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 = 0$: $\quad \Delta x = 0 \quad \Delta y \neq 0 \quad (+)$; $\quad 0 < \Delta x < \sqrt{2} \quad \Delta y = 0 \quad (-)$

Экстремума нет.

$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2$ – полож. полуопр.

$u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x^4) + \Delta y^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$

$= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + \Delta y^4 > 0$ – min

№ Т5

В стац. т. кв. форма $d^2 f$ полож. полуопред.

а) Может ли это быть min? Да.

б) Может ли быть max? Нет (всегда есть такие dx и dy, что приращение >0 - вылад $d^2 f$)

в) Не быть экстремума? Да

№ 4

$x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0$ - исслед. каждую ф-ию, зад. ур-ем.

$2x\,dx + 2y\,dy + 2u\,du + 2dx - 2dy + 2du = 0$

$(u+2)\,du + (x+1)\,dx + (y-1)\,dy = 0$

$$du = -\frac{(x+1)\,dx + (y-1)\,dy}{u+2}$$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ - $du = 0$

$u^2 + 4u - 5 = 0 \quad u = 1, -5; \quad (-1, 1, 1), \ (-1, 1, -5)$

$(u+2)\,d^2u + \underset{0}{du^2} + dx^2 + dy^2 = 0$

$$d^2u = \frac{-dx^2 - dy^2}{u+2}$$

$d^2u\,(-1, 1, 1) = -dx^2 - dy^2$ - отриц. опред. (max)

$d^2u\,(-1, 1, -5) = \frac{dx^2}{3} + \frac{dy^2}{3}$ - полож. опред. (min)

Условный экстремум

$u = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (\bar{x} \in \mathbb{R}^n)$

Условия связи: $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_m(\bar{x}) = 0 \quad (*) \qquad n > m$

Точка $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ наз-ся условным экстремумом $f(\bar{x})$ при усл. $(*)$ $\Leftrightarrow$

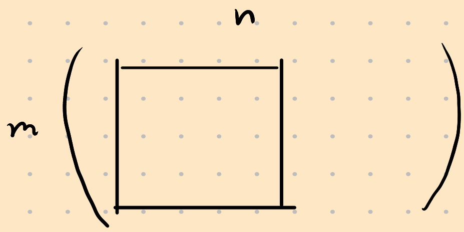
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ при вып. ус-ий $(*) \to f(\bar{x}) > f(\bar{x}^0)$

Ф-ия Лагранжа $\mathcal{L}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$ далее $x \equiv \bar{x}$, $x^0 \equiv \bar{x}^0$

$\mathcal{L}(x)\big|_* = f(x)\big|_* \quad \forall \lambda_i$

Необх. усл.: Пусть $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ непр.-дифф. в $U_\delta(x^0)$, тогда

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} = m$$



При этом $x_1, \dots, x_m$ выраж. через $x_{m+1}, \dots, x_n$ (неявно)

Пусть x^0 – т. усл. экстр. $f(x)$ при вып. (*)

Тогда $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 – стац. т. ф-ии Лагранжа

Сис-ма $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв. $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dots = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

Пример

$n = 2, \quad m = 1$

$u = \ln xy, \qquad x^3 + xy + y^3 = 0$

$\mathcal{L} = \ln xy + \lambda(x^3 + xy + y^3)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = \dfrac{1}{x} + \lambda(3x^2 + y) = 0 \\ \mathcal{L}'_y = \dfrac{1}{y} + \lambda(3y^2 + x) = 0 \\ x^3 + xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = -\lambda(3x^2 + y) \\ \dfrac{1}{y} = -\lambda(3y^2 + x) \end{cases} \qquad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy} = -\lambda \cdot \dfrac{3x^2}{y} - \lambda \\ \dfrac{1}{xy} = -\lambda \dfrac{3y^2}{x} - \lambda \end{cases}$$

$\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow y = x$

$2x^3 + x^2 = 0$

$x_1 = 0$ – не подх. $\qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

$x = y = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = 8$ – возможно усл. экстр.!

Достаточное усл-е: $(**)$ – продифф. ур-я связи

$dx_1, \dots, dx_m$ выраж. через $dx_{m+1}, \dots, dx_n$

Пусть f, φ_i – дважды непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$, x^0, λ_i – реш. сис-мы n+m ур-ий с n+m неизв.

$d^2 \mathcal{L}(x^0)\big|_{(**)}$ – квадр. форма от n−m незав. дифф-ов

По ней окончательно опр-ся характер усл. экстремума и его сущ-е.

! Если $d^2\mathcal{L}(x^0)$ до подстановки полож. или отриц. опред. – подстановку можно не делать, и так всё ясно. Иначе нужна подстановка. Если после подстановки форма полуопред. – нужно доп. исследование.

Пример (всё тот же)

$$\mathcal{L}''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \lambda \cdot 6x = -4 + 8\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -28$$

$$\mathcal{L}''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda\cdot 6y = -28$$

$$\mathcal{L}''_{xy} = \lambda = 8$$

$$d^2\mathcal{L} = -28\,dx^2 - 28\,dy^2 + 16\,dx\,dy$$

$$\frac{d^2\mathcal{L}}{4} = -7dx^2 - 7dy^2 + 4dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0\end{matrix}$$ – отриц. опред.

Понятно, что $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ – условный максимум.

Пример 2

$$u = 1 - 4x - 8y \qquad x^2 - 8y^2 = 8$$

$$\mathcal{L} = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ y = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mp 4 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = \mp\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda = \mp 1 \qquad \mathcal{L}''_{yy} = -16\lambda = \pm 8 \qquad \mathcal{L}''_{xy} = 0$$

$$d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 - 8dy^2) \qquad d^2\mathcal{L}\big|_{**} = \pm 4\,dy^2$$

$(**)$ $2x\,dx - 16y\,dy = 0$ ⊕ $(-4, 1)$ – полож. опред. => усл. min

$dx = 8y\frac{dy}{x} = -2dy$ ⊖ $(4, -1)$ – отриц. опред. => усл. max

Пример 3

$u = xy, \quad x^2+y^2=1$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad \lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}$$

$2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$

$2y^2 - 1 = 0$

Подходят: $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\lambda = -\frac12 \qquad -\frac12 \qquad \frac12 \qquad \frac12$

$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \quad \mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda \quad \mathcal{L}''_{xy} = 1 \qquad \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 2\lambda, \ \Delta_2 = 4\lambda^2 - 1$ – незнакоопред. форма

$d^2\mathcal{L} = 2\lambda\,dx^2 + 2\lambda\,dy^2 + 2\,dx\,dy$

$(**)\ 2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$$dy = -\frac{2x\,dx}{2y} = \begin{cases} -dx, & x=y, \ \lambda=-\frac12 \\ +dx, & x=-y, \ \lambda=\frac12 \end{cases}$$

$$d^2\mathcal{L}\Big|_{**} = \pm dx^2 \pm dy^2 + 2\,dx\,dy = \begin{cases} -4\,dx^2, & \lambda=-\frac12 \ \text{– отриц. форма – усл. min} \\ 4\,dx^2, & \lambda=\frac12 \ \text{– полож. форма – усл. max} \end{cases}$$

Ответ: $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. min}}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. max}}$

Пример 4

$u = 2x^2 + 12xy + y^2 \qquad x^2+4y^2=25$

$\mathcal{L} = 2x^2 + 12xy + \lambda(x^2+4y^2-25)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 4x + 12y + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 12x + 2y + 8y\lambda = 0 \\ x^2+4y^2-25=0 \end{cases} \qquad (1) \begin{cases} x(2+\lambda) + 6y = 0 \\ 6x + y(1+4\lambda) = 0 \end{cases}$$ – $(0,0)$ не подходит под усл-я связи

Чтобы у (1) было реш-я кроме $(0,0)$: $\begin{vmatrix} 2+\lambda & 6 \\ 6 & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 0$

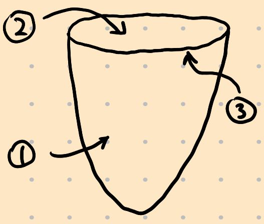
$-34 + 9\lambda + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -\frac{17}{4} \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Далее ничего интересного. мне лень.

Ответ: при $\lambda = 2$: два усл. min, при $\lambda = -\frac{17}{4}$: два усл. max

Наиб. и наим. значения ф-ии на мн-ве

Найти max и min $u = x+y+z$ на мн-ве $x^2+y^2 \le z \le 1$ (параболоид)



1. Найти стац. т. в пов-ти: их нет, ф-я линейна
2. Исследовать границы: пов-ть, её крышка, грань крышки

① $u = x+y+z, \quad x^2+y^2 = z, \quad x^2+y^2<1$

$u = x+y+x^2+y^2, \quad x^2+y^2<1$

Стац. т.: $u'_x = 1+2x = 0 \qquad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$u'_y = 1+2y = 0 \qquad u = -\frac{1}{2}$

② $u = x+y+z \quad x^2+y^2<z, \; z=1$

$u = x+y+1, \quad x^2+y^2<z$

Стац. т.: нет, $u(x,y)$ линейна

③ $u = x+y+z, \quad x^2+y^2=1, \quad z=1$

$u = x+y+1, \quad x^2+y^2=1$

$\mathcal{L} = x+y+1 + \lambda(x^2+y^2-1)$

$\mathcal{L}'_x = 1+2\lambda x = 0 \qquad \mathcal{L}'_y = 1+2\lambda y = 0$

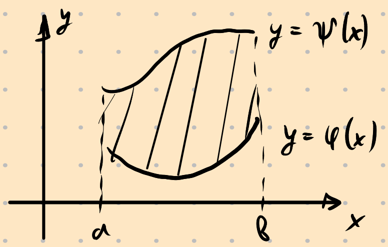
$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+\sqrt{2} \qquad u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1-\sqrt{2}$

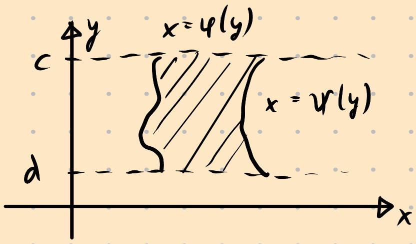
Кратные интегралы

Двойной интеграл

Двойной интеграл воспринимается как повторный.



$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$



$$\int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

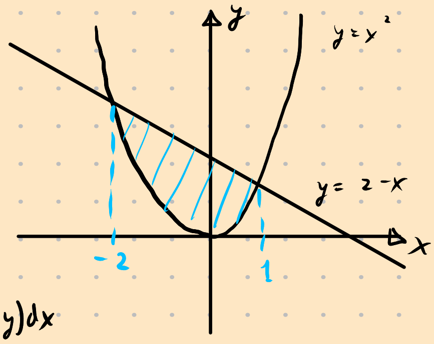
Пример 1

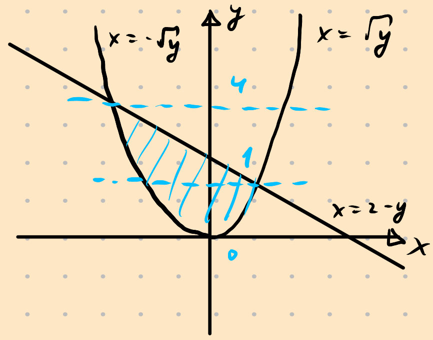
Расставить пределы инт-я 2-мя способами

$y = x^2$; $x + y = 2$ - область

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\, dy$$

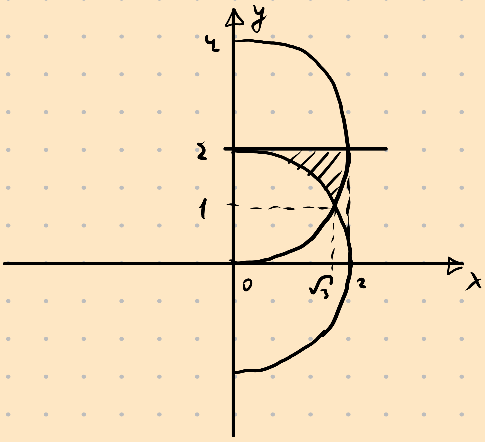
$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\, dx$$





Пример 3

$x = \sqrt{4-y^2}$, $x = \sqrt{4y - y^2}$, $y = 2$ $(x > 0)$



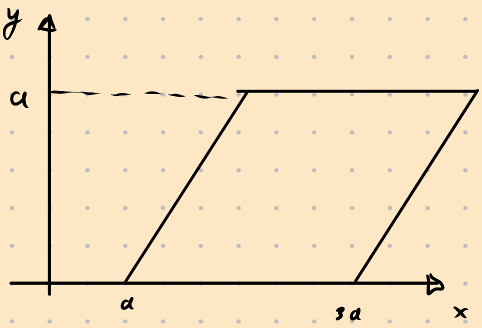
$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2} f(x,y)\, dy + \int_{\sqrt{3}}^{0} dx \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2} f(x,y)\, dy$$

$$\int_1^2 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\, dx$$

Пример 4

$\iint\limits_G (x^2+y^2)\, dx\, dy$, G огр. прямыми $y=0$, $y=a$, $y=x-a$, $y=x-3a$, $a>0$

Внеш. y: $\int_0^a dy \int_{y+a}^{y+3a} (x^2+y^2)\, dx$



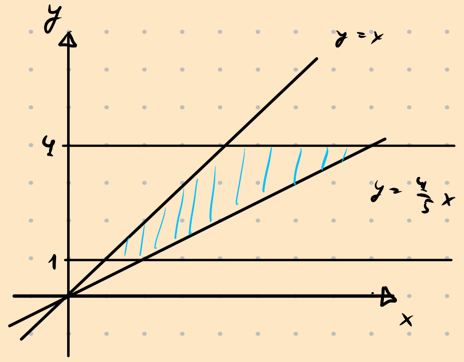
$$\int_0^a dy \left(\frac{1}{3}x^3 + y^2 x\right)\Bigg|_{y+a}^{y+3a} =$$

$$= \int_0^a dy \left(\frac{1}{3}(y+3a)^3 + y^2(y+3a) - \frac{1}{3}(y+a)^3 - y^2(y+a)\right) =$$

$$= \int_0^a dy \left(4y^2 a + 8y a^2 + \frac{26}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}y^3 a + \frac{8}{2}y^2 a^2 + \frac{26}{3} y a^3 \Bigg|_0^a = 14a^4$$

Пример 5

$$\iint\limits_G \sqrt{x-y}\,dx\,dy \qquad G=\left\{\frac{4}{5}x \le y \le x;\ 1\le y\le 4\right\}$$



$$\int_1^4 dy \int_y^{\frac{5}{4}y}\sqrt{x-y}\,dx = \int_1^4 dy\, \frac{2}{3}(x-y)^{3/2}\Big|_y^{5/4\,y} =$$

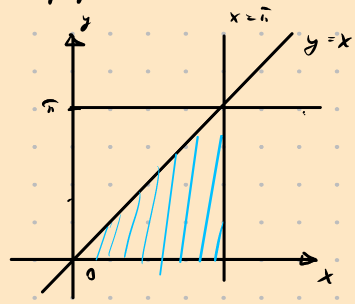
$$= \int_1^4 \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\, y^{3/2}\, dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\, y^{5/2}\Big|_1^4 = \frac{31}{30}$$

Пример 6

Вычислить повторный интеграл, поменяв порядок интегрирования

$$\int_0^\pi dy\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy =$$

$$= \int_0^\pi dx\, \frac{\sin x}{x}\cdot x = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$$



! Площадь половинки синусоиды = 2

Замечание

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x)\,g(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy$$

Замена переменных в двойном интеграле

$$\underset{(x,y)}{G} \longleftrightarrow \underset{(u,v)}{D}$$ — биективное отображение

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$ — непр. дифф.

Тогда $$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(x(u,v), y(u,v))\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

Интеграл однократный был ориентирован — предел переворачивались при произв. < 0

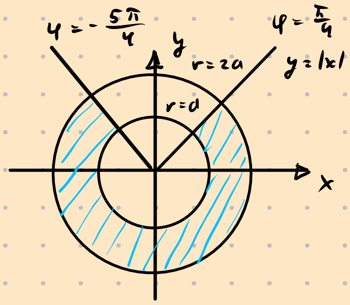
Кратный инт. неориентирован — поэтому модуль якобиана

Частная замена — полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

Пример 1

$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к пол. коорд. $G=\{a^2<x^2+y^2<4a^2,\ y<|x|\}$



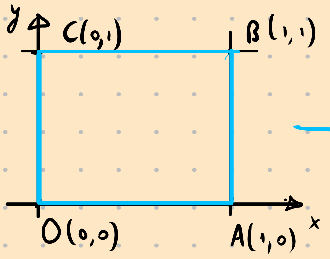
$$\int\limits_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_a^{2a} r f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_a^{2a} r\,dr \int\limits_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi$$

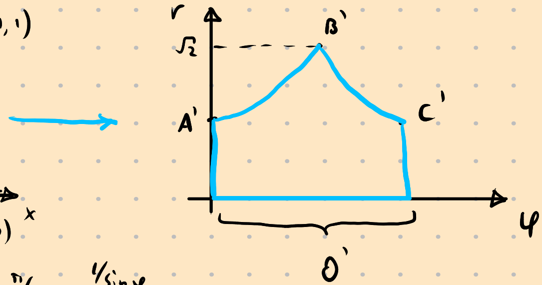
Пример 2

$G=\{0\le x,\ y\le 1\}$

$C:\ r=1,\ \varphi=\frac{\pi}{2}$ $\qquad B:\ r=\sqrt{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}$

$O:\ r=0,\ \varphi$ - неопред. $\qquad A:\ r=1,\ \varphi=0$



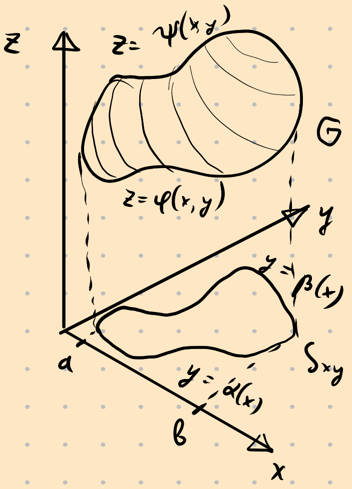


Лучше плевать на правую картинку.

$$\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} r f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} r f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$$

$$\int\limits_0^{1} r\,dr \int\limits_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$$

Тройные интегралы



$G \subset R$

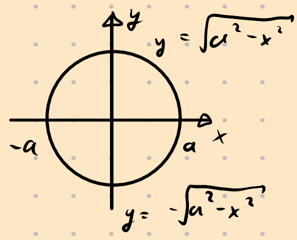
$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_{xy}} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

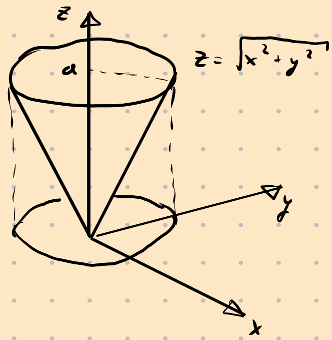
$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Пример 1

Переставить пределы

$$\underbrace{\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy}_{\text{круг}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} f(x,y,z)\,dz$$



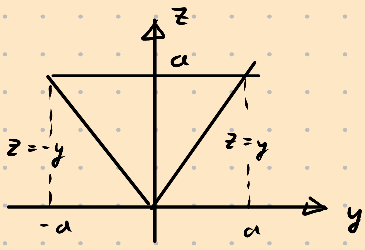


G - конус. Сначала по z от пов-ти конуса до a, потом по (x y) по кругу

Перестановки:

1. xyz 2. yxz 3. xzy x ↔ y

4. zyx 5. yzx 6. zxy (1) ↔ (2) (3) ↔ (5) (4) ↔ (6)



(2) $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} f(x,y,z)\,dz$

(4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{a} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx$

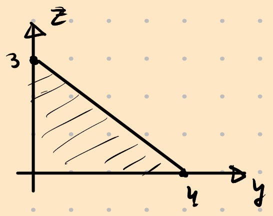
(5) $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{|y|}^{a} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$

(6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{a} dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy$

(3) $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{|x|}^{a} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy$

Пример 2

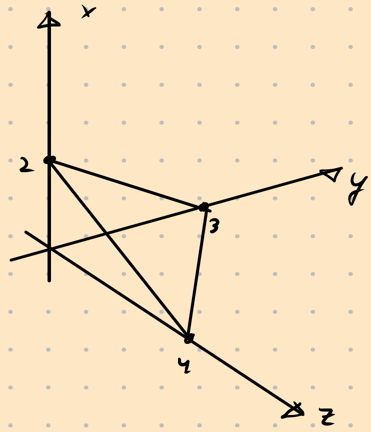
$$\underbrace{\int_0^4 dz \int_0^{3-\frac{3}{4}z} dy}_{S_{yz}} \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x,y,z)dx$$

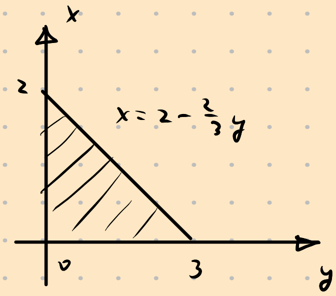


$0 \le y \le 3 - \frac{3}{4}z$

$x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$

$0 \le x \le 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$





$zyx \longrightarrow xyz$

$$\int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int_0^{4-\frac{4}{3}y-2x} f(x,y,z)dz$$

Ур-е пл-ти: $x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$

$z = 4 - \frac{4}{3}y - 2x$

Замена переменных в тройном интеграле

① Цилиндрические координаты

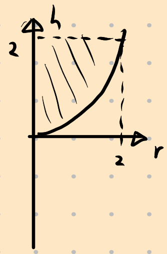
$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h$ $\qquad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r$

Если φ нет, считаем, что $0 \le \varphi \le 2\pi$

Пример 1

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

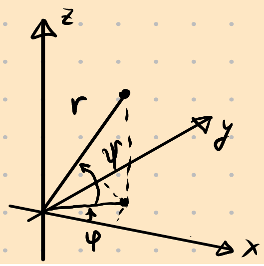
$\frac{x^2+y^2}{2} < z < 2 \qquad \frac{r^2}{2} < h < 2$



$r > 0$ по опр-ю

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dh \int_0^{\sqrt{2h}} r^3 dr$$ — от φ ничего не зависит

② Сферические коор-ты



$0 \le \psi \le \frac{\pi}{2} \qquad -\pi \le \varphi \le \pi \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$

$z = r\sin\psi$

$x = r\cos\psi\cos\varphi \qquad y = r\cos\psi\sin\varphi \qquad x^2+y^2+z^2 = r$

$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi$ — Якобиан ≥ 0, а z меняет знак, тогда $\sin\psi$ в z, $\cos\psi$ в Якобиане

В физике берут $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ $(0 \le \theta \le \pi)$ — $\sin\psi$ меняется на $\cos\theta$ и наоб.

Пример 1

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\sin\psi} r^3\cos\psi\,dr = 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4\psi}{4}\cos\psi\,d\psi \ominus$$

$u = \sin\psi$

$du = \cos\psi\,d\psi$

$G: x^2+y^2+z^2 < z$ — от φ ничего не завис.

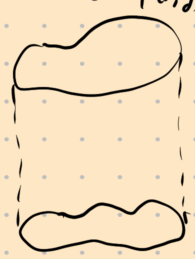
$r^2 < r\sin\psi$

$0 < r < \sin\psi$ $\quad 0 < \varphi < 2\pi$ — $\sin\psi \ge 0$ поэтому $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$

$$\ominus\ 2\pi\int_0^1 \frac{u^4}{4}\,du = 2\pi\cdot\frac{1}{20} = \frac{\pi}{10}$$

Объём

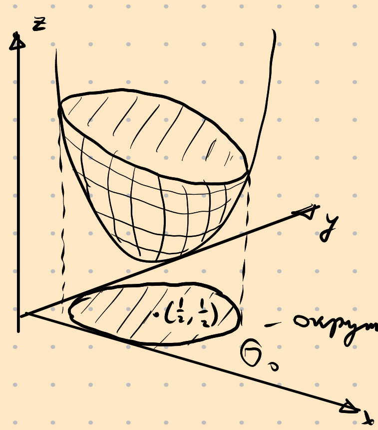
$$V_G = \iiint_G dx\,dy\,dz = \iint_{G_0}\left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right)dx\,dy$$



Пример 1

Найти объём между $z = x^2+y^2$ и $z = x+y$

$$\iint_{G_0}(x+y-x^2-y^2) \ominus$$



Введём сдвинутые полярные

$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi$ $\quad 0 < \varphi < 2\pi$

$y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$ $\quad 0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x+y-x^2-y^2 = \frac{1}{2} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - r^2$$

$$\ominus \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} r\left(\frac{1}{2} - r^2\right)dr = 2\pi\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

Пример 2

$$\iiint\limits_G \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz \circleddash$$

G – эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1$

Введём сферические с растяжением

$x = ar\cos\psi\cos\varphi \quad y = br\cos\psi\sin\varphi \quad z = cr\sin\psi$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = abcr^2\cos\psi$$

$0<\varphi<2\pi \qquad -\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2} \qquad 0<r<1$

$$\circleddash \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^1 abcr^2\cos\psi\sqrt{1-r^2}\,dr = 2\pi abc\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi abc\cdot 2\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = 2\pi abc\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = 2\pi abc\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{\pi^2}{4}abc$$

$r = \sin t$

$dr = \cos t\,dt$

V_{S^3}: $\iint\limits_{x^2+y^2<R^2}(z^+-z^-)\,dxdy$

$x^2+y^2+z^2<R^2$

$z^+ = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$z^- = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

V_{S^4}: $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R^2}(u^+-u^-)\,dxdydz = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R^2} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz \circleddash$

$x^2+y^2+z^2+u^2<R^2$

$u^+ = \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$

$u^- = -\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$

$\circleddash \frac{\pi^2}{2}R^4$ – объём 4-мерного шара

Криволинейные интегралы

Формула Грина

$$\oint\limits_{\partial G^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad P, Q \in C^1(\bar G)$$

∂G^+ – полож. ориент. граница

$$S_G = -\int\limits_{\partial G^+} y\,dx = \int\limits_{\partial G^+} x\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G^+} (x\,dy + y\,dx)$$

Пример 1

Найти площадь огр. кривой

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$$

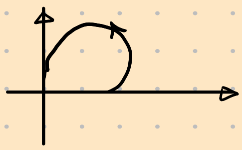
$$x = r\cos^4\varphi \qquad y = r\sin^4\varphi \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\sqrt{r}\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right)^{12} = r^2 \cdot \cos^4\varphi\,\sin^4\varphi$$

$$r^4 = \cos^4\varphi\,\sin^4\varphi$$

$$r = \cos\varphi\,\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x = \cos^5\varphi\,\sin\varphi \\ y = \sin^5\varphi\,\cos\varphi \end{cases}$$



Пример 2

Вычислить $\displaystyle\oint\limits_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

Γ – простая замкнутая кус.-гл. кривая, не сод. т. $(0,0)$

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Если $\Gamma = \partial G^+$, то $\oint\limits_\Gamma = 0$ по ф-ле Грина

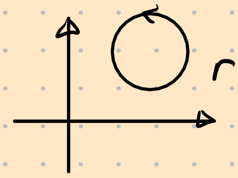
Покажем, что это не так. Возьмем $\Gamma = \{x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi\}$ – окружность с ц. в т. $(0,0)$

$$\oint\limits_\Gamma = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a\cos t\, a\cos t - a\sin t(-a\sin t)}{a^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

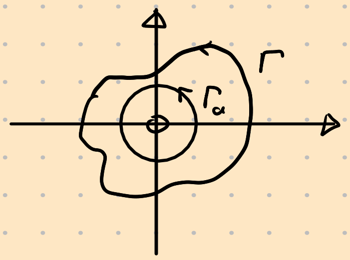
Здесь нельзя применять ф-лу Грина: P и Q не яв-ся непр. дифф. в $\bar G$

(т. $(0,0)$ проколотая)

Ф-лу Грина можно применить, если $(0,0)$ вне контура Γ.



Если $(0,0)$ внутри Γ:



$$\oint_{\Gamma_a} = 0$$

Можно подобрать a так, что Γ_a внутри Γ

Пусть G - неодносвязная область между Γ и Γ_a.

$P, Q \in C'(\overline{G})$ и к G применима ф-ла Грина.

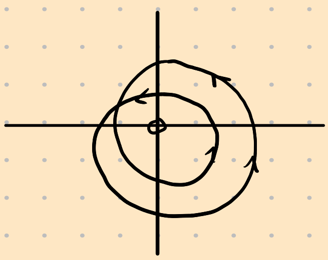
$$0 = \iint_G = \int_{\partial G^+} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} + \oint_{\Gamma_a} = \oint_{\Gamma} - \oint_{\Gamma_a}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \Gamma \\ 2\pi, & (0,0) \text{ внутри } \Gamma \end{cases}$$

Замечание $\quad \dfrac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = d\left(\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\right) = d\varphi$

Получаем $\displaystyle\int_{\Gamma} d\varphi = \Delta_{\Gamma} \varphi = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \Gamma \\ 2\pi, & (0,0) \text{ внутри } \Gamma \end{cases}$

Пример 2



$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = 0$$

Поверхностный интеграл 1 рода

Простая гладкая поверхность ППП:

$G \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$

$\Phi: \overline{G} \to \mathbb{R}^3_{xyz}$

Φ биективно отобр. $\overline{G}$ на $S \subset \mathbb{R}^3$, S - пов-ть

Простая - биективное отобр.

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned} \qquad (u,v) \in \overline{G}$$

$\vec{r}(u,v) \in C^1(\overline{G})$, $[\vec{r}_u', \vec{r}_v'] \neq \vec{0}$. — гладкая.

Поверхностный интеграл 1-го рода

S – ПГП, $\vec r = \vec r(u,v)$, $(u,v)\in \bar G$

$f(x,y,z)$ непр. на S

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G f(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))\,|[\vec r_u, \vec r_v]|\,du\,dv$$

$$|[\vec a,\vec b]|^2 = |\vec a|^2\cdot|\vec b|^2 - (\vec a,\vec b)^2 \qquad \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$|\vec r_u|^2 = E$, $|\vec r_v|^2 = G$, $(\vec r_u,\vec r_v) = F$

$|[\vec r_u,\vec r_v]| = \sqrt{EG-F^2}$

Примеры пов-тей:

1) График непр. дифф. ф-ии $z = f(x,y)$, $(x,y)\in\bar G$

$x=x$, $y=y$, $z=f(x,y)$

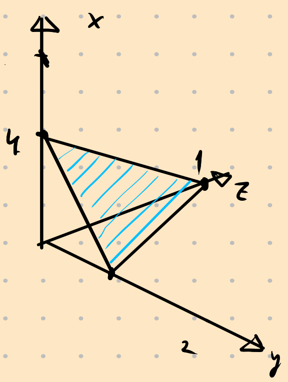
$$[\vec r_x, \vec r_y] = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\vec e_1 - f_y\vec e_2 + \vec e_3$$

$$|[\vec r_x,\vec r_y]| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$$

Аналогично, $x = f(y,z)$: $|[\vec r_x,\vec r_y]| = \sqrt{1+f_y^2+f_z^2}$

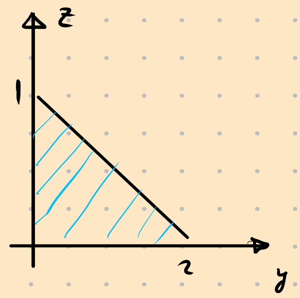
Пример 1

$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$ S – ПГП: $x+2y+4z=4$, $x,y,z\ge 0$



$x = 4-2y-4z$
$y=y$
$z=z$

G:



$|[r_y, r_z]| = \sqrt{1+2^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$

$$\int_0^2 dy\int_0^{1-y/2}(4-2y-4z+y+z)\sqrt{21}\,dz =$$

$$= \sqrt{21}\int_0^2 dy\left((4-y)\left(1-\frac y2\right) - \frac32\left(1-\frac y2\right)^2\right) = \sqrt{21}\int_0^2\left(4-3y+\frac{y^2}{2}-\frac32+\frac32 y-\frac38 y^2\right)dy =$$

$$= \frac73\sqrt{21}$$

② Сферическая параметризация

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\varphi \\ y = R\cos\psi\sin\varphi \\ z = R\sin\psi \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2} \qquad R \text{ фиксировано!}$$

$$[\vec r_\varphi, \vec r_\psi] = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ -R\cos\psi\sin\varphi & R\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -R\cos\varphi\sin\psi & -R\sin\varphi\sin\psi & R\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2(\cos^2\psi\cos\varphi\,\vec e_1 + \cos^2\psi\sin\varphi\,\vec e_2 + \cos\psi\sin\psi\,\vec e_3)$$

$|[\vec r_\varphi, \vec r_\psi]| = R^2\cos\psi$ — Якобиан, но на поверхности!

Пример 2

$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$ $\qquad S$ — верх. полусферы: $x^2+y^2+z^2=1$, $z \ge 0$

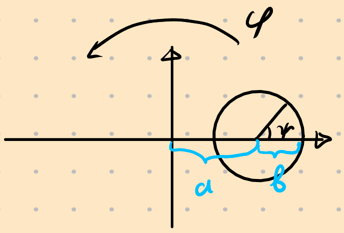
Сферическая параметризация $\qquad \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$

$$\iint\limits_S = \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi)\cos\psi\, R^3\,dR =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\psi\sin\psi\,d\psi = \pi$$

• Площадь $S = \iint\limits_S 1\,ds = \iint\limits_G |[\vec r_u, \vec r_v]|\,du\,dv$

③ Тор:



$a > b \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi$

$$\begin{cases} x = (a + b\cos\psi)\cos\varphi \\ y = (a + b\cos\psi)\sin\varphi \\ z = b\sin\psi \end{cases} \qquad |[\vec r_\varphi, \vec r_\psi]| = (a + b\cos\psi)b$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi\,(a + b\cos\psi)b = ab\,4\pi^2$$

Ориентация ПГП

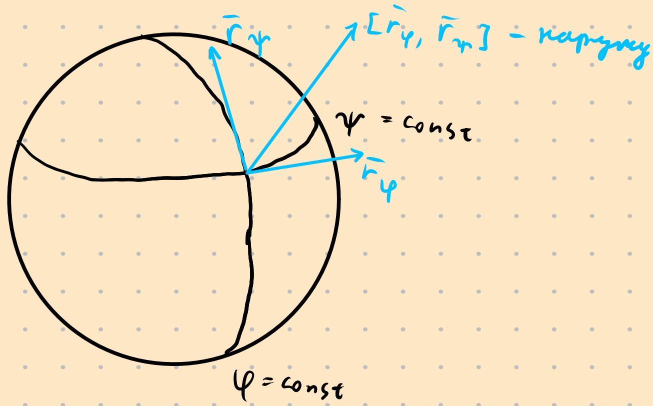
Это выбор „внутренней" и „внешней" стороны

$S:\quad \bar r = \bar r(u,v),\quad (u,v)\in \bar D$

$$\bar\nu = \pm\frac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}$$ — пара век-ров ед. нормали

1. Сфера:

$$\begin{cases} x = a\cos\psi\cos\varphi \\ y = a\cos\psi\sin\varphi \\ z = a\sin\psi \end{cases}$$



$$\bar\nu = +\frac{[\bar r_\varphi, \bar r_\psi]}{|[\bar r_\varphi, \bar r_\psi]|}$$ — внешняя сторона

$-$ — внутр.

2. График ф-ии $z = z(x,y)$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases} \qquad [\bar r_x, \bar r_y] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$ — Торчит наверх (образует острый угол с полож. направл. оси Z)

$$\bar\nu = +\frac{[\bar r_x, \bar r_y]}{|[\bar r_x, \bar r_y]|}$$ — соотв. верхней ст. графика

$-$ — нижней

Поверхностный интеграл II рода

$\bar a(x,y,z) = (P, Q, R)$ — непрерывна на ориентированной ПГП

Тогда символ: $$\iint\limits_S (\vec a, d\vec S) \equiv \iint\limits_S (P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy)$$

Это поток вектора через выбранную сторону пов-ти (в физике)

$$\iint\limits_S (\vec a, d\vec s) = \iint\limits_S (\vec a, \bar\nu)\,dS$$ — **определение**

↘ интеграл I рода

$\bar\nu$ — выбранная ед. нормаль

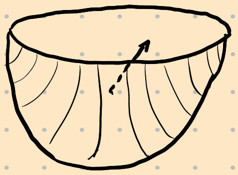
Вычисление: $\iint\limits_S (\bar a, d\vec S) = \iint\limits_S \left(\bar a, \pm \frac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}\right) dS = \pm\iint\limits_D \left(\bar a, \frac{[\bar r_u, \bar r_v]}{|[\bar r_u, \bar r_v]|}\right)|[\bar r_u, \bar r_v]|\,du\,dv =$

$$= \pm\iint\limits_D (\bar a, \bar r_u, \bar r_v)\,du\,dv = \pm\iint\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\,dv =$$

$$= \pm\iint\limits_D \left(P\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\,dv$$

Пример 1

$\iint\limits_S z^2\,dxdy$, S – внутр. сторона полусферы $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=c^2$, $z \le 0$



<u>1-й способ</u>

$x = a + c\cos\psi\cos\varphi$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$y = b + c\cos\psi\sin\varphi$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \psi \le 0$

$z = c\sin\psi$

$$\iint\limits_S = -\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\psi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \begin{vmatrix} 0 & 0 & c^2\sin^2\psi \\ -c\cos\psi\sin\varphi & c\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -c\sin\psi\cos\varphi & -c\sin\psi\sin\varphi & c\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= -c^4\int\limits_{-\pi/2}^{0} d\psi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,(\cos\psi\sin\psi\cdot\sin^2\psi) = -2\pi c^4 \int\limits_{-\pi/2}^{0} \cos\psi\sin^3\psi\,d\psi =$$

$$= -2\pi c^4 \int\limits_{-1}^{0} \sin^3\psi\,d(\sin\psi) = \frac{\pi c^4}{2}$$

<u>2-й способ</u> $\quad z = \sqrt{c^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$

Интеграл специального вида: $\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_D \begin{vmatrix} 0 & 0 & R(x,y,z(x,y)) \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dxdy =$

(S – график $z = z(x,y)$)

$$= \pm\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

$$\iint\limits_S = +\iint\limits_D \left(c^2-(x-a)^2-(y-b)^2\right)dxdy =$$

D: $(x-a)^2+(y-b)^2 < c^2$

Надо ввести полярные коор-ты:

$0 \le \varphi \le 2\pi$ $\quad x = a + r\cos\varphi$

$0 \le r \le c$ $\quad y = b + r\sin\varphi$

$$= \int\limits_0^c dr \int\limits_0^{2\pi} (c^2-r^2)\,\overbrace{r}^{\text{якобиан полярных коор-т}}\,d\varphi = 2\pi\int\limits_0^c (c^2r - r^3)\,dr =$$

$$= 2\pi\cdot\left(c^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^c = \frac{\pi c^4}{2}$$

Формула Остроградского-Гаусса

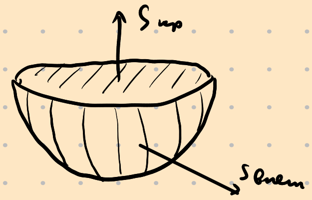
$G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ — образ спец. вида

$P, Q, R \in C^1(\bar{G})$

$$\iint\limits_{\partial G} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) = \iiint\limits_G \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div} \bar{a}} dx\,dy\,dz$$

$\partial G \to$ внешняя граница

3-й способ



$\bar{a} = (0, 0, z^2)$ $\quad \operatorname{div} \bar{a} = 2z$

$$\iint\limits_{S_{вн}} + \iint\limits_{S_{кр}} = \iiint\limits_G 2z\,dx\,dy\,dz \;⊜$$

Сферич. коорд.
$x = a + r\cos\psi\cos\varphi$
$y = b + r\cos\psi\sin\varphi$
$z = r\sin\psi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$
$-\frac{\pi}{2} \le \psi \le 0$
$0 \le r \le c$

$$⊜ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{0} d\psi \int_0^c 2r\sin\psi\, r^2\cos\psi\, dr = \pi \int_{-\pi/2}^{0} \sin 2\psi\, d2\psi\, \frac{c^4}{4} = -\frac{\pi c^4}{2}$$

$$S_{кр}: \; z = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{кр}} z^2\,dx\,dy = 0$$

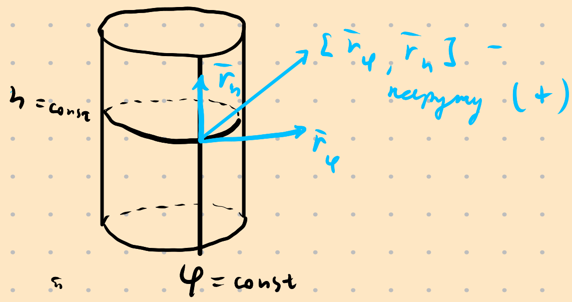
$$\iint\limits_{S_{вн}} = -\frac{\pi c^4}{2} \Rightarrow \iint\limits_{S_{внутр}} = \frac{\pi c^4}{2}$$

Пример 2

$$\iint\limits_S yz\,dx\,dy + zx\,dy\,dz + xy\,dz\,dx$$

S — внеш. сторона части цилиндр. пов-ти $x^2 + y^2 = a^2$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le H$

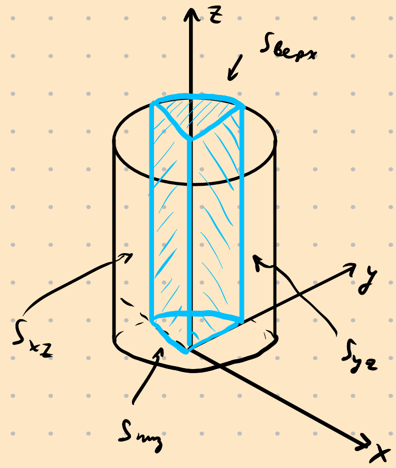
$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le h \le H$$



$$\iint\limits_S = \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^H dh \begin{vmatrix} ah\cos\varphi & a^2\cos\varphi\sin\varphi & ah\sin\varphi \\ -a\sin\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^H (a^2 h\cos^2\varphi + a^3\cos\varphi\sin^2\varphi)\,dh = a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^H h\,dh + a^3 H \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= a^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{H^2}{2} - \frac{1}{3} a^3 H$$



<u>2-й способ</u> (Остроградский)   Пов-ть незамкнута, крышек много.

$$\iint\limits_{S_{бок}} + \iint\limits_{S_{верх}} + \iint\limits_{S_{низ}} + \iint\limits_{S_{xz}} + \iint\limits_{S_{yz}} = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \bar{a}\, dx\,dy\,dz =$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = x + y + z$$

$$= \iiint\limits_{G} (x+y+z)\, dx\,dy\,dz =$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \qquad 0 < r < a \qquad 0 < h < H$$

$$= \frac{H^2 a^2 \pi}{8}$$

S_{xz}: $y = 0 \Rightarrow \bar{a} = (zx, 0, 0)$

$$\iint\limits_{S} (\bar{a}, \vec{\nu})\, dS, \quad \vec{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{a}, \vec{\nu}) = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{xz}} = 0$$

S_{yz}: то же самое, $\iint\limits_{S_{yz}} = 0$

$S_{низ}$: $z = 0 \qquad \bar{a} = (0, xy, 0) \qquad \vec{\nu} = (0, 0, -1)$

$$(\vec{a}, \vec{\nu}) = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_{низ}} = 0$$

$S_{верх}$: $z = H \qquad \bar{a} = (Hx, xy, yH) \qquad \vec{\nu} = (0, 0, 1)$

S - график ф-ии $z(x,y) \equiv H$, верхняя сторона $\Rightarrow +$

D: $x \le 0$, $y \ge 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \le a^2$ Введём полярные, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le a$

$$\iint\limits_{S_{верх}} = + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^a \begin{vmatrix} Hr\cos\varphi & r^2\cos\varphi\sin\varphi & Hr\sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} dr =$$

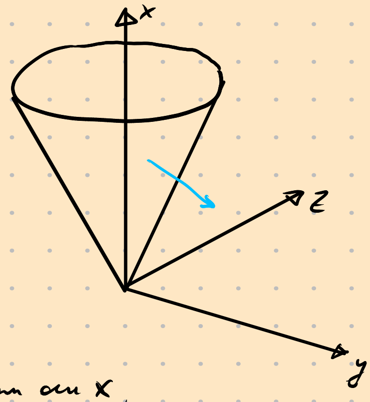
$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^a Hr\sin\varphi \cdot r\, dr = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^a Hr^2\, dr = \frac{Ha^3}{3}$$

$$\iint\limits_{S} = \frac{a^2 H^2 \pi}{8} - \frac{Ha^3}{3}$$

Пример 3

$$\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz$$

S — внешн. ст. бок. пов-ти конуса $\sqrt{y^2+z^2} \le x \le H$



<u>1-й способ</u>

Гр. ф-ии $x=\sqrt{y^2+z^2}$ - пов-ть

$(y^2+z^2 \le H^2)$

Верхняя ст. гр. $\Leftrightarrow$ если нормаль гр. $x=x(y,z)$ обр-ет острый угол с полож. направл. оси x, нижн., если тупой

У нас тупой => $\ominus$

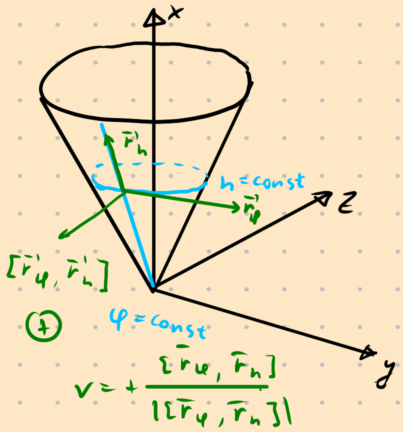
$y=r\cos\varphi \quad 0\le r\le H$

$z=r\sin\varphi \quad 0\le\varphi\le 2\pi$

$$-\iint\limits_D (3y^2+3z^2)\,dy\,dz = -3\iint\limits_D (y^2+z^2)\,dy\,dz = -3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H r^2\cdot r\,dr = -\frac{3\pi H^4}{2}$$

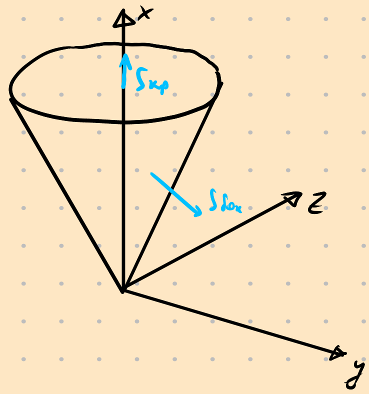
<u>2-й способ</u> „Коническая" параметризация

$$\begin{cases} x=h \\ y=h\cos\varphi \\ z=h\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le h\le H \end{matrix}$$



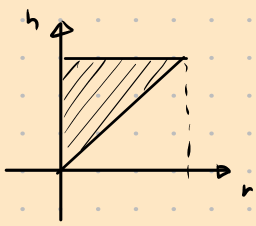
<u>3-й способ</u> (ф-ла О.-Г.)

$$\iint\limits_{S_{бок}} + \iint\limits_{S_{кр}} = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec a\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G 4x\,dx\,dy\,dz \ominus$$



Цилиндр. коор-ты

$$\begin{cases} x=h \\ y=r\cos\varphi \\ z=r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le h\le H \end{matrix}$$



$$\ominus \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H dh\int_0^h 4hr\,dr = 8\pi\int_0^H h\frac{h^2}{2}\,dh = \pi H^4$$

$S_{\text{кр}}$: $x = H$ $\quad \bar{a} = (2H^2 + y^2 + z^2, 0, 0)$

График ф-ии $x = x(y,z) \equiv H$, $y^2 + z^2 \le H^2$, верх. ст. графика

$$+ \iint\limits_{y^2+z^2 \le H^2} (2H^2 + y^2 + z^2)\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H (2H^2 + r^2)\, r\, dr = 2\pi \left(\int_0^H 2rH^2 dr + \int_0^H r^3 dr \right) = 2\pi \frac{5}{4} H^4 = \frac{5\pi}{2} H^4$$

$y = r\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$z = r\sin\varphi \quad 0 \le r \le H$

Тогда $\iint\limits_{S_{\text{бок}}} = \pi H^4 - \frac{5\pi}{2} H^4 = -\frac{3\pi}{2} H^4$

Теорема Стокса

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} u$$

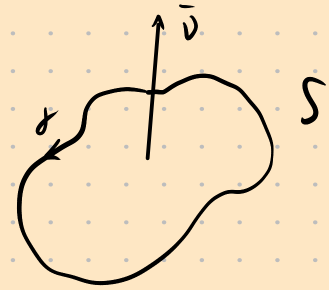
$$\bar a = (P, Q, R), \quad \operatorname{div} \bar a = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla \cdot \bar a)$$

$$(\bar a \cdot \nabla) = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— оператор!}$$

$$\operatorname{rot} \bar a = [\nabla \times \bar a] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar e_1 + \ldots$$

(цикл. перестановка)

Теорема Стокса



S – ПГП, γ – край, ориентация согласована

$$\int_\gamma (\bar a, d\bar r) = \iint_S (\operatorname{rot} \bar a, d\bar S)$$

Не очень применима на практике. В основном если S – кусок плоскости ($\bar\nu = \text{const}$)

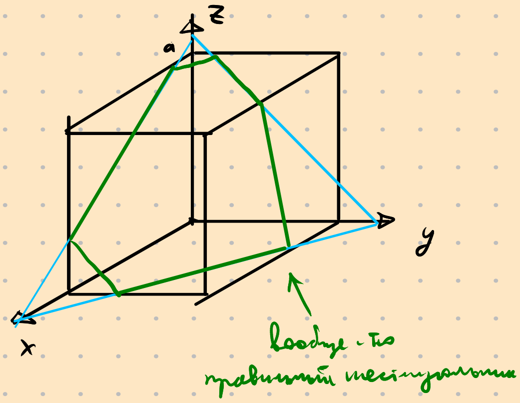
Пример 1

$$\int_\gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

γ – сеч-е пов-ти куба $0 \le x, y, z \le a$ пл-тью $x + y + z = \frac{3}{2}a$.

Контур полож. ориентирован отн. вектора $(1,0,0)$.

(Лучше сказать так: если смотреть с полож. луча оси X, то обход контура против час. стрелки)



Криволин. интеграл – „можно сдохнуть" (6 кусков)

А по Стоксу норм:

$$\operatorname{rot} \bar a = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ -2z - 2x \\ -2x - 2y \end{pmatrix}$$

$$\bar\nu = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\mathrm{rot}\,\bar a, \bar\nu) = -\frac{4}{\sqrt3}(x+y+z) = -\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac{3}{2}a = -2\sqrt3\, a$ $\quad (x+y+z = \frac{3}{2}a$ на пл-ти$)$

$\iint\limits_S (\mathrm{rot}\,\bar a, \bar\nu)\,dS = -2\sqrt3\, a\, S_6 = -2\sqrt3\, a\cdot 6 S_3 =$

$S_3 = \frac{b^2\sqrt3}{4} = \frac{a^2}{8}\sqrt3 = -\frac{9}{2}a^3$

Пример 2

$\iint\limits_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + z\,dz$, γ – линия пересеч. сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ пл-тью $x+y+z=0$

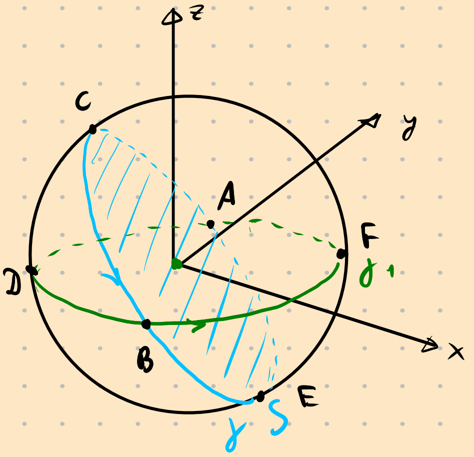
Обх. против ч.с., если смотреть с + оси Z.

$$\bar a = \Big(\overset{P}{-\frac{y}{x^2+y^2}},\ \overset{Q}{\frac{x}{x^2+y^2}},\ \overset{R}{z}\Big)$$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (т. 1)

$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\bar a = 0$

Интеграл – 0?



Теорему Стокса применить нельзя!

$\forall$ пов-ти S, натянутой на γ $\to$ эта пов-ть протыкается осью Z, а там $x=y=0$ – дырка.

γ_1 – окр-ть в пл-ти (x,y)

$x=\cos t \quad y=\sin t \quad z=0$

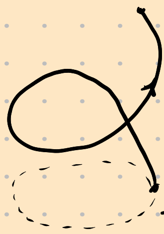
Ориентация та же, что у γ

$\int\limits_{ACBDA} = 0$ по т. Стокса (её можно применить – контур целиком на сфере и на нем можно натянуть кусок сферы, не протык. осью Z)

Аналогично $\int\limits_{AFBEA} = 0$

$\oint\limits_\gamma - \oint\limits_{\gamma_1} = 0 \Rightarrow \oint\limits_\gamma = \oint\limits_{\gamma_1} = 2\pi$

Пример 3



$$\int\limits_{\gamma} (x^2+yz)\,dx + (y^2+zx)\,dy + (z^2+xy)\,dz$$

γ – кусок винтовой линии, $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $a, b > 0$, $0 \le t \le 2\pi$

Направление обх. в ст. $\uparrow t$.

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[-(a^2\cos^2 t + ab\sin t \cdot t)\,a\sin t + (a^2\sin^2 t - ab\cos t \cdot t)\,a\cos t + (b^2t^2 + a^2\cos t\sin t)\,b \right] dt$$

Потенциальность

Векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = (P, Q, R)$ наз-ся потенциальным в обл. $G \subset R^3$, если $\exists$ непр.-дифф. ф-ия $u(x,y,z)$ (потенциал), что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$

Пусть дано непр. векторное поле $\vec{a}$ в обл. G

Тогда равносильны 3 усл.:

1°. $\vec{a}$ — потенциально в G с u — потенциалом

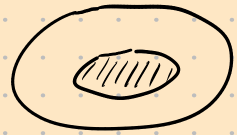
2°. $\oint_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ по $\forall$ замкнутой кус.-гл. кривой $\gamma \subset G$

3°. $\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ по кус.-гл. кривой $\gamma \subset G$ зависит только от нач. и кон. точек кривой A и B ($\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, обх. в ст. $t\uparrow$, $t = a \to A$, $t = b \to B$)

В этих случаях $\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A)$ (в R^2 — аналогично)

Односвязность

- Обл. $G \subset R^2$ наз. односвязной, если $\forall$ замкнутой кус.-гл. кривой $\gamma \subset G$ яв-ся границей области $D \subset G$.



- Обл. $G \subset R^3$ наз. поверхностно односвязной, если $\forall$ замкнутая кус.-гл. кривая $\gamma \subset G$ яв-ся краем кус.-гл. пов-ти $S \subset G$.
- Обл. $G \subset R^3$ наз. объёмно односвязной, если $\forall$ замкн. КГП $S \subset G$ яв-ся гр. обл. $D \subset G$

 $G = R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ — не объёмно односв., но яв-ся пов. односв.

 $G = R^3 \setminus \{x=0, y=0\}$ — не пов. односв.

Пусть век. поле $\vec{a}$ непр. дифф. в $G \subset R^3$. Тогда

1. Если $\vec{a}$ — потенц. в G, то $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.
2. Если $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ в поверхн. односв. обл-ти G, то поле потенц.

$n=2$ Пусть $\vec{a}(x,y)$ непр. дифф. в $G \subset R^2$. Тогда

1. Если $\vec{a}$ — потенц. в G, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
2. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в односв. обл-ти G, то $\vec{a}$ — потенц. в G.

Пример Т 1 Контрпример

$$\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi \qquad \gamma: \begin{matrix} x = a\sin t \\ y = a\cos t \end{matrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Инт. по замкн. кривой $\ne 0 \Rightarrow$ потенц. нет

Но $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, т.к. $G = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ — неодносвязна.

А в R^3:

$$\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + 0\cdot dz = 2\pi \ne 0 \Rightarrow \text{нет потенц.}$$

Но $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$

Пример 1

$$\int_\gamma (x^2+yz)\,dx + (y^2+xz)\,dy + (z^2+xy)\,dz =$$

γ — кусок винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$ в сн. $t\uparrow$

<u>2-й способ</u>

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2+yz & y^2+xz & z^2+yz \end{vmatrix} = \bar{e}_1(x-x) + \ldots = 0$$

$\Rightarrow$ поле потенциально

$G = R^3$ — пов. односв.

т.е. интеграл не зависит от пути, инт. можно посчитать по отрезку, соед. концы кривой. $x=a,\ y=0,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi$ $t\uparrow$

$$\ominus + \int_0^{2\pi} b^2t^2 b\,dt = b^3\,\frac{8\pi^3}{3}$$

3-й способ

Под интегралом стоит du, где $u=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}+xyz$, т.е.

$$\ominus\ u(a,0,2\pi)-u(a,0,0)=\frac{8\pi^3 b^3}{3}$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla u=\operatorname{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\qquad (\nabla\cdot\vec a)=\operatorname{div}\vec a=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$(\vec a\cdot\nabla)=P\dfrac{\partial}{\partial x}+Q\dfrac{\partial}{\partial y}+R\dfrac{\partial}{\partial z}$ – оператор! „градиент по вектору $\vec a$"

$$(\vec a\cdot\nabla)u=P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=(\vec a,\nabla u)=(\vec a,\operatorname{grad}u)$$

В частности, если $\vec a=\vec l$, $|\vec l|=1$, то $(\vec l,\nabla)u$ – произв. по направл. в-ра $\vec l$.

$$(\vec a,\nabla)\vec b=\left((\vec a,\nabla)b_x,\ (\vec a,\nabla)b_y,\ (\vec a,\nabla)b_z\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec a=[\nabla\times\vec a]$$

$$\Delta=(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\qquad \Delta\vec a=(\Delta a_x,\Delta a_y,\Delta a_z)$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec a=(\nabla\cdot[\nabla\times\vec a])=0$ – ортогональные векторы...

$\operatorname{rot}\operatorname{div}\vec a$ – не существует

$$\operatorname{div}(u\vec a)=(\nabla,u\vec a)=(\nabla_u,u\vec a)+(\nabla_{\vec a},u\vec a)=(\nabla_u u,\vec a)+u(\nabla_{\vec a},\vec a)=$$

$$=(\operatorname{grad}u,\vec a)+u\operatorname{div}\vec a$$

В заданиях в коор-ах выводить не стоит – лучше вот так.

$$\operatorname{rot}(u\vec a)=[\operatorname{grad}u,\vec a]+u\operatorname{rot}\vec a$$

Исследуем центральное поле

$\vec r = (x, y, z)$ $\qquad r = |\vec r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\operatorname{div} \vec r = 3$ $\qquad \operatorname{grad} |\vec r| = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\vec r}{r}$

$\operatorname{rot} \vec r = 0$

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$$

Центральное поле $\vec a = f(r) \vec r$

$$\operatorname{div} (f(r) \vec r) = (\operatorname{grad} f(r), \vec r) + f(r) \operatorname{div} \vec r = \left(\frac{f'(r)}{r} \vec r, \vec r\right) + 3f(r) = r f'(r) + 3f(r)$$

$$\operatorname{rot} [f(r) \vec r] = [\operatorname{grad} f(r), \vec r] + f'(r) \underbrace{\operatorname{rot} \vec r}_{=0} = \left[\frac{f'(r)}{r} \vec r, \vec r\right] = 0$$

$G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ – пов. односв. => центр. поле потенциально.

Соленоидальность

Век. поле $\vec a$ наз-ся соленоидальным в обл-ти $G \subset \mathbb{R}^3$, если $\forall$ замкнутой КГП $S \subset G$ $\iint\limits_S (\vec a, d\vec S) = 0$

Пусть $\vec a$ – непр. дифф. век. поле в $G \subset \mathbb{R}^3$, тогда

1. Если $\vec a$ соленоидально, то $\operatorname{div} \vec a = 0$.
2. Если $\operatorname{div} \vec a = 0$ в объёмно односв. обл-ти G, то поле соленоидально.

Контрпример

Пусть $\vec a$ – центр. поле

$\operatorname{div} \vec a = 0 \Rightarrow r f'(r) + 3 f(r) = 0 \quad | \cdot r^2$

$r^3 f'(r) + 3r^2 f(r) = 0 \Rightarrow (r^3 f(r))' = 0 \Rightarrow r^3 f(r) = const$

$f(r) = \frac{C}{r^3}$ $\qquad$ Поле $\vec a = \frac{C}{r^3} \vec r$ – кулоновское поле

По т. Гаусса поток через пов-ти не нул.

$\iint\limits_{S_{\text{внеш}}} (\vec a, d\vec S) = 4\pi C$ – не соленоидально $\quad (S$ – сфера, $r = R)$

$$\oint\!\!\oint_S \left(\frac{c}{r^3}\vec r, d\vec S\right) = \frac{c}{R^3}\iint_S (\vec r, d\vec S) = \frac{c}{R^3}\iiint_{Ш} \underbrace{\operatorname{div}\vec r}_{3}\, dx\,dy\,dz = \frac{c}{R^3}\, 3V_ш = 4\pi C$$

Т. О.-Г. не работает т.к. внутри шара дырка

а тут т. О.-Г. уже работает — нет дырки

Всё потому что область не яв-ся объёмно односвязной.

$$\operatorname{div}[\vec a, \vec b] = (\nabla, [\vec a, \vec b]) = (\nabla_a, [\vec a, \vec b]) + (\nabla_b, [\vec a, \vec b]) \ominus$$

$$(\nabla_a, [\vec a, \vec b]) = (\nabla_a, \vec a, \vec b) = (\vec b, \nabla_a, \vec a) = (\vec b, \operatorname{rot}\vec a)$$

$$(\nabla_b, [\vec a, \vec b]) = -(\nabla_b, \vec b, \vec a) = -(\vec a, \operatorname{rot}\vec b)$$

$$\ominus\ (\vec b, \operatorname{rot}\vec a) - (\vec a, \operatorname{rot}\vec b)$$

$\bar c = (c_x, c_y, c_z)$ — пост. в-р

$$\operatorname{div}[\bar c, \bar r] = (\bar r, \operatorname{rot}\bar c) - (\bar c, \operatorname{rot}\bar r) = 0$$

$$\operatorname{rot}[\bar a, \bar b] = [\nabla_a, [\bar a, \bar b]] + [\nabla_b, [\bar a, \bar b]]\ ; \quad [\nabla_a, [\bar a, \bar b]] \ominus$$

$$[\bar A, [\bar B, \bar C]] = \bar B(\bar A, \bar C) - \bar C(\bar A, \bar B)$$

$$\ominus\ \bar a\underbrace{(\nabla_a, \bar b)}_{=(\bar b, \nabla_a)\bar a} - \bar b\underbrace{(\nabla_a, \bar a)}_{\operatorname{div}\bar a} = (\bar b, \nabla)\bar a - \bar b \operatorname{div}\bar a$$

$$\operatorname{rot}[\bar a, \bar b] = \bar a \operatorname{div}\bar b - \bar b \operatorname{div}\bar a + (\bar b, \nabla)\bar a - (\bar a, \nabla)\bar b$$

$$\operatorname{grad}(\bar r, \bar c) = \operatorname{grad}(xc_x + yc_y + zc_z) = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(\bar c, \nabla)\bar r = \bar c$$

$$\operatorname{div}[\bar c, \bar r] = 0$$

$$\operatorname{rot}[\bar c, \bar r] = \bar c \overbrace{\operatorname{div}\bar r}^{3} - \bar r \overbrace{\operatorname{div}\bar c}^{0} + \underbrace{(\bar r, \nabla)\bar c}_{0} - \underbrace{(\bar c, \nabla)\bar r}_{\bar c} = 2\bar c$$

$$\operatorname{rot}[\bar r, [\bar c, \bar r]] = \operatorname{rot}(\bar c(\bar r, \bar r) - \bar r(\bar r, \bar c)) = r^2 \underbrace{\operatorname{rot}\bar c}_{0} + [\operatorname{grad} r^2, \bar c] -$$

$$- (\bar r, \bar c)\underbrace{\operatorname{rot}\bar r}_{0} - [\operatorname{grad}(\bar r, \bar c), \bar r] = [2\bar r, \bar c] - [\bar c, \bar r] = 3[\bar r, \bar c]$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a} = [\nabla, [\nabla, \bar{a}]] = \nabla(\nabla, \bar{a}) - \bar{a}\underset{\underset{(\nabla,\nabla)\bar{a}}{\shortparallel}}{(\nabla,\nabla)} = \operatorname{grad}\operatorname{div} a - \Delta\bar{a}$$