

# Кинематика материальной точки

Сферическая система



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} - \text{OKB}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{q}}^i \cdot \vec{q}_i = \sum K_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$$

$$K_a = |\vec{r}_a|$$

$$\vec{r}_a = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow K_r = 1 \quad K_\lambda = r \cos \varphi \quad K_\varphi = r$$

Кинематика материальной точки

$$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \approx \vec{r}_{a0} dq^a$$

$$|\vec{d}\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{a0}|}_{K_a} \cdot dq^a$$



$$(2) \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} [r^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2]$$

$$w_a = \vec{w} \cdot \vec{e}_a$$

$$(v^2/2)_r = \dot{r}; \quad \frac{d}{dt} (v^2/2)_r = \ddot{r}$$

$$(v^2/2)_{,r} = r (\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) \stackrel{(4)}{=} w_r = \ddot{r} - r(\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2)$$

2-й закон Ньютона & количественная формула

$$m\vec{w} = \vec{F} \cdot \vec{l} \cdot \vec{g}_a$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} - \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} = \vec{F} \cdot \vec{g}_a = Q_a$$

$$\frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} = Q_a - \text{бесц. сила, не соизгрунт!}$$

$$\frac{1}{K_a} \left[ \frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} \right] = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Drehmenne no binebenow rymen



$$\begin{cases} x^1 = a \cos \omega t \\ x^2 = a \sin \omega t \\ x^3 = b t \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2}$$

$$\vec{w} = v \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}$$

$$\vec{w}_e = 0$$

$$\hat{\omega}_n = \omega \hat{z}$$

$$\rho = \frac{v}{\omega} = \frac{a^2 \omega^2 + b^2}{a \omega^2}$$

Zagora

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \quad a, b = \text{const}$$

$$r(\varphi) - ? \quad w_r(r), \quad w_\varphi(r)$$

$$r(0) = r_0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$



$$V_r = \dot{r}$$

$$V_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{b r}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b} (\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \quad \leftarrow \quad \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^3$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( \underbrace{r^2 \dot{\varphi}}_B \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = b/r^2$$

Nº 1.40

$$q^1 = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$



$$\vec{k} = \frac{\vec{n}}{g} \quad (\text{benachb. symmetrisch})$$

$\vec{r}_{11}$  - normal

$\vec{r}_{12}, \vec{r}_{13}$  - kardinale

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{r}_{12} = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{r}_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

zusätzl. glemenne no regezurückn

## Кинематика твёрдого тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\vec{g} = A(t) \vec{g}_0$$

$\vec{R}(t)$ ,  $A(t)$  - зал.  $\Rightarrow$  глоб. Т. заланс.

$$A^T A = E$$

$\det A = 1$  оптим. настройка адп-105. гироскоп

Пред-ум  $A(t)$ :  $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt} | A^T A = E \Rightarrow \dot{A}^T(0) A(0) + A(0) \dot{A} = 0$$

$$\dot{A}(0) = \hat{\omega} : \quad \hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$$

$$\text{дл } t \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat{\omega} dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{g}}, \quad \vec{g} = A \vec{g}_0$$

$$\vec{g}(dt) = (E + \hat{\omega} dt) \vec{g}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{g}}|_{t=0} = \hat{\omega} \vec{g}|_{t=0}$$

$$\dot{\vec{g}} = \hat{\omega} \vec{g}$$

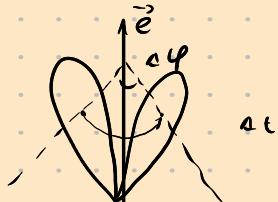
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \hat{\omega} \vec{g}$$

$$\text{В } \mathbb{R}^3: \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\omega} \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}, \text{ где } \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} - \text{гиро-коэффиц}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{g} - \text{qp-ое движение}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{e} \Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\vec{e} \Delta \varphi = \Delta \varphi - \text{базисное движение}$$



$$\vec{\omega} = \dot{\vec{V}} = \vec{V}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g})$$

Дополн. формула,  $\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}} - \text{им. угловое}$

## Простое глобене



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} / \vec{g}) - \omega^2 \vec{g}$$

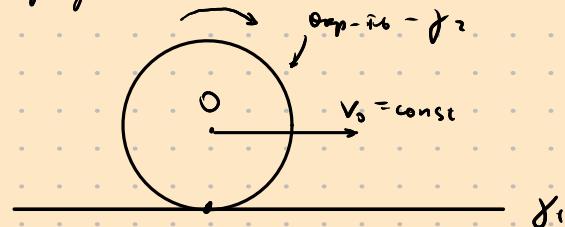
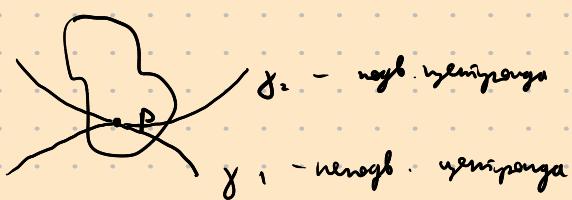
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{g} - \omega^2 \vec{g} - 2D \text{ Рубанов}$$

## Многовимірна геометрія векторів та усередині

Числові вектори:  $\rho: \vec{V}_p = 0 = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{g}_p$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_o - \vec{\omega} \vec{g}_p = 0 \Rightarrow \vec{g}_p = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_o}{\omega^2} - \text{безгравітація}$$

Но!  $\rho$  збирається як в р-бі, тає у б-рел - то юніверсальні



Кореневі дії неравність  
( $\gamma_1$  і кореневі  $V$  є рівно)

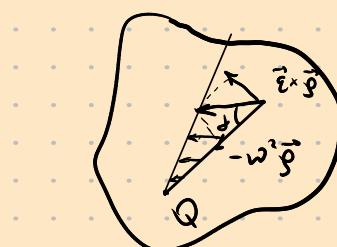
## Числові усередині Q

$$\vec{\omega}_Q = 0 = \vec{\omega}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{g}_Q - \vec{\omega} \vec{g}_Q$$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_o - \vec{\varepsilon} \vec{g}_Q - \vec{\omega} \vec{\varepsilon} \times \vec{g}_Q = 0$$

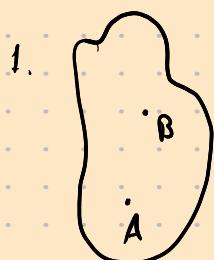
$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_o - \vec{\varepsilon} \vec{g}_Q - \vec{\omega} \vec{g}_Q + \vec{\omega} \vec{\omega}_o = 0$$

$$\vec{g}_Q = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_o + \vec{\omega} \vec{\omega}_o}{\vec{\varepsilon}^2 + \vec{\omega}^2}$$



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega}$$

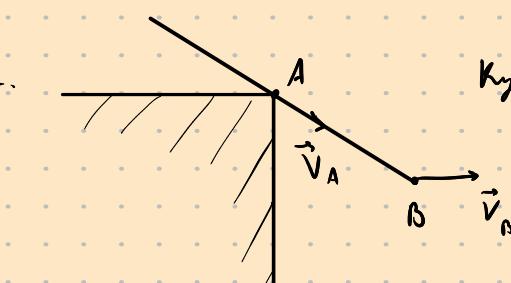
## Поверхоні гравіт (норма в 3D та 2D)



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad | \vec{e}_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{V}_A \cdot \vec{e}_{AB}$$

2.



Куди направлено  $\vec{V}_A$ , щоб норма виходила вгору?

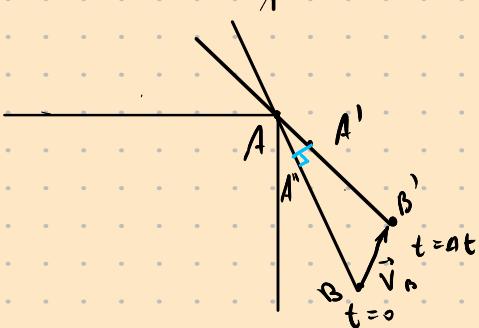
Оберіть логарифм  $AB$ :

$$\vec{AA}' = \vec{AA}'' + \vec{A}''A'$$

$$\vec{A}''A' \approx AA''04$$

$$\vec{V}_A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA}'}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{AA}''}{\Delta t} + \frac{\vec{AA}''04}{\Delta t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA}''}{\Delta t} = \vec{V}_A$$

кінцевий  
вектор  $-V_A$



УКА



$$V_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$



$$MN = L = 2R \sin 30^\circ = R$$

$$PD = 2L \quad V_0 = 2\omega L$$

Zagora 2



Без пренебрежений

$\omega, \epsilon$  заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{p} - \omega^2 \vec{p}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

Приближенный О - эксп-тиво ср. А

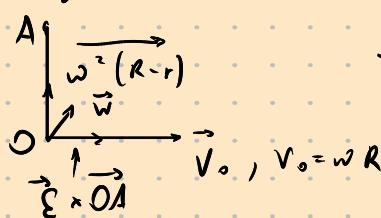
$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y - R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} -a^1 & -b_1 \\ a^2 & b_2 \\ a^3 & b_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Полезная мысль:

(бесконечное  
уничтожение)

Очень хороший тест!



$\Omega$  - угл. скр. АО

$$V_0 = \omega R = \Omega (R-r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R-r} \omega$$

$$\epsilon = \frac{R}{R-r} \epsilon$$

## Zadacha 2 (3.24 ~)



$$V_c - ?$$

$$V_c - ?$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec{V}_c \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_c = 0$$

$$\omega = \text{const}$$

(надо показать, что в м-ре имеется иной угол)

No xrestitomaticheskikh



$r, \omega = \text{const}$ , где  $\theta$  - угол наклона диска

$$\vec{V}_m, \vec{W}_m, g_m, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon} - ?$$

$\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}$  - т.к. образующая конуса, вращающиеся под-ми, имеет 0 кривизн.  $\vec{V} = 0$ , т.к.

$\vec{\omega} \parallel$  кривой образ-ки

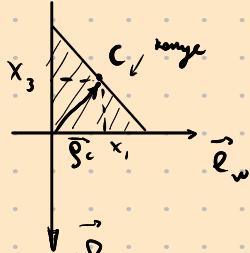
$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{V}_m = \vec{\omega} \times \vec{g}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega, \vec{e}_\omega = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega} \vec{e}_\omega + \omega \vec{e}_\omega$$

Всегда одинаковы

Нормал, это



$\vec{e}_\omega$  направлено вправо

$$\vec{E} = \omega \vec{\Omega} \times \vec{e}_\omega \quad (\text{здесь } \vec{e}_\omega \text{ это как } \vec{g}, \vec{\Omega} \text{ это } \vec{\omega})$$

$$\vec{V}_c = \vec{\omega} \times \vec{g}_c = \vec{\Omega} \times \vec{g}_c$$

$$x_1: \omega \frac{r}{\sqrt{2}} = \Omega \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Omega = \omega$$

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{W}_m = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{g}_m}_{\perp \vec{e}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}_m) \quad \vec{V}_m \text{ (как правило), } \perp \vec{e}$$

$$\vec{W}_m = \vec{W}_m^\top \vec{e} + \frac{V_m^2}{g_m} \vec{n}$$

$$\vec{V}_m \parallel \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{e} = \vec{x}_1$$

$$\text{Таким образом } \vec{W}_m = \frac{V_m^2}{g_m} \vec{n} \Leftrightarrow g_m = \frac{V_m^2}{w_m}$$

! При вращении дж. мом. нул., векторы в. компон. т. минимус векторов = 0,

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega} \times \vec{e}_w + \vec{\omega} \cdot \vec{e}_w$$

### Ориг. векторов

$$A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1$$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^1 \\ e^3 & 0 & -e^2 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_2^3 - a_3^2)$$

$$e_2 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_3^1 - a_1^3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_1^2 - a_2^1)$$

$$A = E \cos\varphi + \hat{e} \sin\varphi + (1 - \cos\varphi) \hat{e}^\top \hat{e}$$

$$\operatorname{tr} A = 3 \cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}, \quad \varphi - ?$$



$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

### Круговые штукан

Группа поворотов  $SO(3)$  связана с циклами:



Многосторонне - множества дж. разрывов и (однако) циклов

## Линейные изоморфии

Повероты

центрическое — вращаются нр-бо и сдвигают центр греч.  $\sigma_{\text{цент}}$

нацентрическое — вращаются дальше, а не-ц. греч.

Аксионометрия:  $\vec{r}' = A \vec{r}$

Плоскостное:  $\vec{r}_{ii} = d_i^i \vec{e}_i$

$$\vec{r}^{(1)} = r^{(1)} e_{1,1} = r^{(1)} d_1^1 \vec{e}_i = r^{(1)} \vec{e}_i$$

$$r^i = d_i^i r^{(1)} \Leftrightarrow \vec{r} = A \vec{r}^{(1)}$$

$$\vec{r}^{(1)} = A^T \vec{r} - \text{относич к } A \text{ нр-бо}$$

① Изоморфия центрическим поворотам

$$\vec{r}' = A_1 \vec{r}, \quad \vec{r}'' = A_2 \vec{r}'$$

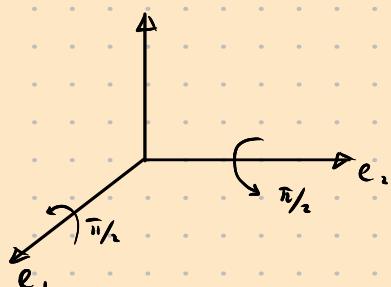
$$\vec{r}''' = A_3 A_1 \vec{r} \Rightarrow A = A_n \cdot \dots \cdot A_1$$

② Изоморфия нацентрическим поворотам

$$\vec{r}^{(1)} = A_1^T \vec{r} \quad \vec{r}^{(2)} = A_2^T \vec{r}^{(1)}$$

$$\vec{r}^{(n)} = A_n^T A_1^T \vec{r} = (A_1 A_2)^T \vec{r} \Rightarrow A = A_1 \cdot \dots \cdot A_n$$

Пример 1



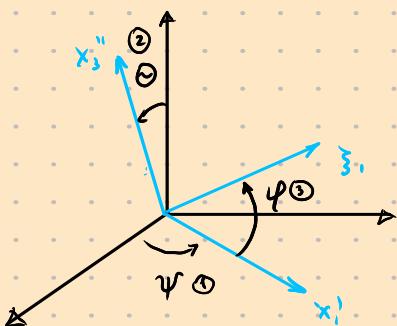
Линейный изоморфизм центрическим (две оси фиксированы)

$$A = A_2 A_1$$

Пример 2 (один пример в окружности)

Поверот нацентрический — так повернуты фигуры вокруг центра

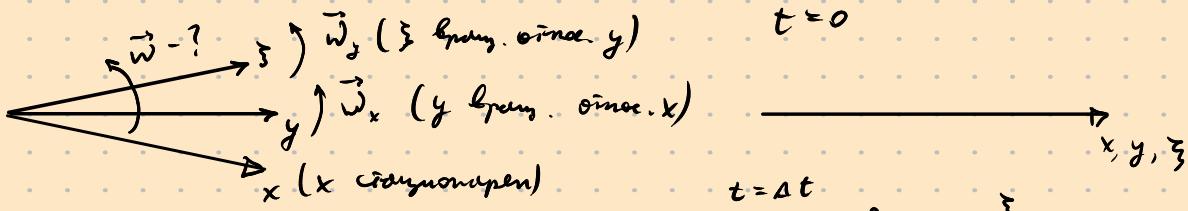
$$A = A_4 \circ A_3 \circ A_2 \circ A_1$$



$$A_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Суммирование угловых скоростей

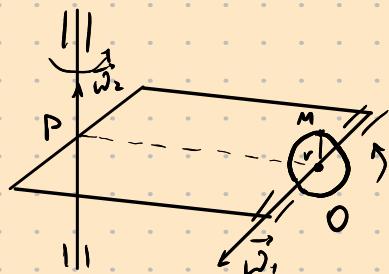


$$A \approx E + \hat{\omega}_x \Delta t$$

$$B \approx E + \hat{\omega}_y \Delta t$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{(\hat{\omega}_x + \hat{\omega}_y)}_{\hat{\omega}} \Delta t$$

Пример



Равномерное + вращение кругового на плоскости

$$\vec{\omega}, \vec{\xi} - ? \quad \omega_1, \omega_2 = \text{const}$$

$$\vec{v}_m, \vec{w}_m - ?$$

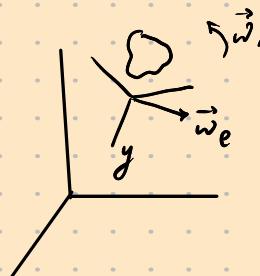
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

### Вращение Т.Т. во вращающемся пространстве

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \vec{y}_i$$

$$\vec{\xi} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_e}_{\vec{\xi}_e} + \underbrace{\vec{\omega}_r^i \vec{y}_i}_{\vec{\xi}_r} + \underbrace{\vec{\omega}_e \vec{\omega}_e \times \vec{y}_i}_{\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r}$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_e + \vec{\xi}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$



$$\beta \text{ зеркало: } \vec{\xi} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \quad \vec{W}_m = \underbrace{\vec{\omega}_0}_{\vec{\omega}_2 \times \vec{P}O} + \vec{\xi} \times \vec{O}M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}M)$$

$$\vec{V}_m = \underbrace{\vec{V}_0}_{\vec{\omega}_2 \times \vec{P}O} + \vec{\omega} \times \vec{O}M$$

$$\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{P}O) = -\omega_2^2 \vec{P}O$$

# Кватернионы

$$R' = \lambda \circ \vec{r} \circ \lambda \quad \| \lambda \| = 1 \quad \lambda = \cos \varphi/2 + \vec{e} \sin \varphi/2 \quad |\vec{e}| = 1$$

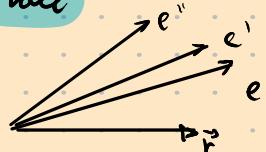
$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix} \approx \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = \lambda \circ \vec{r} \circ \lambda \quad - \text{некоторое орт. } \vec{e} \text{ на } \varphi.$

Акси



$$\vec{r}'' = \underbrace{\lambda_2 \circ \lambda_1}_{\lambda} \circ \vec{r} \circ \underbrace{\lambda_2 \circ \lambda_1}_{\lambda}$$

План



$$\vec{r}_{e''} = \underbrace{\lambda_1 \circ \lambda_2}_{\lambda} \circ \vec{r} \circ \underbrace{\lambda_1 \circ \lambda_2}_{\lambda}$$

Пример 1



$$\lambda_1 = \cos \varphi_{1/2} + \vec{e}_1 \sin \varphi_{1/2}$$

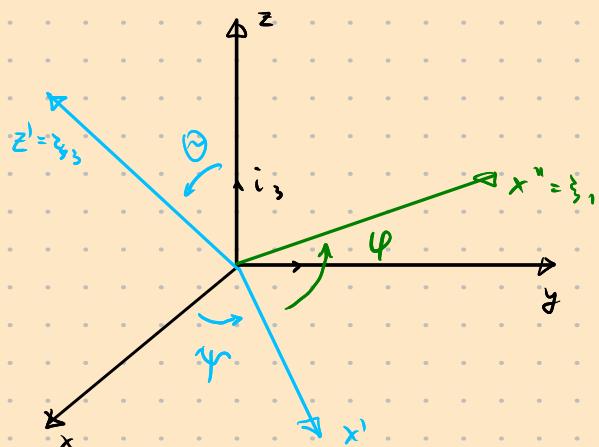
$$\lambda_2 = \cos \varphi_{2/2} + \vec{e}_2 \sin \varphi_{2/2}$$

$$\lambda = \lambda_2 \circ \lambda_1 = \cos \varphi_{1/2} \cos \varphi_{2/2} - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \sin \varphi_{1/2} \sin \varphi_{2/2} + \cos \varphi_{1/2}$$

$$+ \sin \varphi_{1/2} \cos \varphi_{2/2} \vec{e}_1 + \sin \varphi_{1/2} \sin \varphi_{2/2} \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin \varphi_{1/2} \sin \varphi_{2/2}$$

$\sin \varphi_{1/2}$  - прямое вращение некоторой - наше бывает неправо

Пример 2



$$\lambda_\varphi = \cos \varphi/2 + i_3 \sin \varphi/2$$

$$\lambda_\theta = \cos \theta/2 + i_1 \sin \theta/2$$

$$\lambda_\psi = \cos \psi/2 + i_3 \sin \psi/2$$

$\lambda = \lambda_\psi \circ \lambda_\theta \circ \lambda_\varphi$  - формальное описание, не всегда правильное (см. замечания про фазы)

Несмотря на то, что некоторое вращение в пространстве, напр. в кватернионах, не является однозначным - можно выбрать различные вращения для получения одинаковых результатов (гомотомии).

А если считать с акс. 1, 3р. - нужно генерировать вращение наименьшее, побегущее от 0 в кватернионах.

## Уравнение Ньютона

$$\ddot{\lambda} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_x \times \lambda \quad \ddot{\lambda} = \frac{1}{2} \lambda \times \vec{\omega}_y$$

## Основы гидравики



Кинематика  
материала!

$$m = \int dm \quad - \text{масса}$$

$$\vec{L} = \int \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dm \quad - \text{импульс}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm \quad - \text{重心 масс}$$

$$\vec{P} = \int \vec{v} dm = m \vec{V}_c \quad - \text{импульс}$$

$$\vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm \quad - \text{материальная кинетическая энергия}$$

$$\vec{K}_{o'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_o + \vec{r}_o - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = K_o + \vec{O}'\vec{O} \times \vec{P} \quad - \text{материальная кинетическая энергия - вогненно,}$$

$$\vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{O}' \quad - \text{материальная кинетическая энергия!}$$

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad - \text{кинетическая энергия}$$

## Теория Кинетики



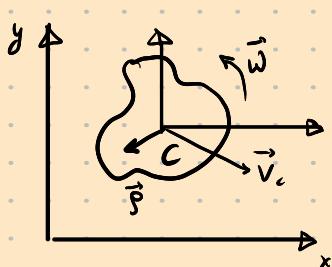
- кинематика С.О.

$$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

$$T = \frac{1}{2} \int (V_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot \vec{V}_r + V_r^2) dm$$

$$\int \vec{V}_r dm = \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{p} dm}_{m \vec{p}_c = 0} = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \int V_r^2 dm$$

## Гибридная модель Тей



$$\vec{V}_r = \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$V_r^2 = \omega^2 p^2, \quad \vec{\omega} \perp \vec{p}$$

$$\frac{1}{2} \int V_r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int p^2 dm = \frac{J_c \omega^2}{2} \Rightarrow T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$$

Момент инерции в 3D становится тензором инерции.

$$\vec{K}_o = \vec{K}_c + \vec{O}\vec{C} \times \vec{P}$$

$$\vec{K}_c = \int (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{v} dm = \int \vec{p} \times (\vec{V}_c + \vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \int \vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \vec{\omega} \int p^2 dm = J_c \vec{\omega}$$

$$\vec{K}_o = \underbrace{J_c \vec{\omega}}_{K_c} + \underbrace{\vec{O}\vec{C} \times \vec{P}}_{m \vec{V}_c}$$

Без неизв. м.

$\vec{V}_c = 0$

### Пример 1



Определите винчестер на путь кин. энергии!

$$\vec{P}, \vec{K}_A, T - ?$$

$$\vec{P} = m \vec{V}_c$$

$$\vec{V}_c = \vec{V}_c^e + \vec{V}_c^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{l} \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{l} - r \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P} = m \vec{V}_c = \dots$$

Найдем  $\vec{\omega}$  (адекватно)

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{m r^2}{4} \omega^2$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi}/r \end{bmatrix} \Rightarrow \omega^2 = (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}/r)^2 \Rightarrow T = \dots$$

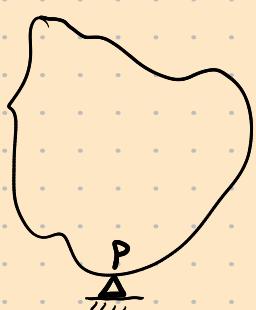
Если точка A неподвижна & адекватна,  $\vec{K}_A = J_A \vec{\omega}$

$$\text{Что} \quad (\text{здесь - она неподвижна}); \quad \vec{K}_A = J_A \vec{\omega} + \vec{AC} \times m \vec{V}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m r^2}{2} (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}/r) \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{l} - r \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} m r^2 (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}/r) \end{bmatrix}$$

Неподвижное тело не имеет кин. энергии

### Неподвижная форма



$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm = \frac{1}{2} \int \omega^2 \rho^2 dm = \frac{J_p \omega^2}{2}$$

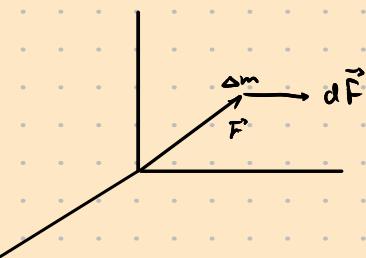
$$\vec{K}_p = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = J_p \vec{\omega} \quad - \text{это так нормально!}$$

### Закон изления (единица изречения! не забудь зд.)

$$\delta m \vec{r} = \delta \vec{F}$$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} \quad - \text{излияние сил}$$

$$\vec{r} = \vec{r} = \vec{r}^e + \vec{r}^i \quad (\text{бесконечн. излияние})$$



$$1. \text{Число: } \vec{P} = \int \vec{v} dm = \int (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = \vec{R}^e - \text{затраты борьбы времени сопротивл.}$$

$$\vec{P} = \vec{R}^e; \quad m\vec{V}_c = \vec{R}^e - \text{затраты времени на массу}$$

$$2. \text{Кин. момент: } \vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm \Rightarrow \vec{K}_o = \underbrace{\int (\vec{v} - \vec{v}_o) \times \vec{v} dm}_{-m\vec{V}_o \times \vec{V}_c} + \underbrace{\int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm}_{\vec{M}^e}$$

$$\vec{K}_o = \vec{M}^e - m\vec{V}_o \times \vec{V}_c \quad (\vec{M}^e - \text{момент времени сопротивления сопротивления})$$

$$3. \text{Кин. энергия: } T = \int \vec{v} \cdot \vec{v} dm = \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{f}^e dm}_{N^e} + \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{f}^i dm}_{N^i} = N^e + N^i$$

$N^i$  - расход времени!  
(нед. энергия  $\rightarrow$  кин. энергия)

## Пример 2



1. Принцип конечных разностей?

2.  $\dot{\varphi}(\varphi) = ?$

Через массу можно выразить

$$x = \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$y = \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{(l/2)^2} = 1 \quad \text{- конус гипотенузы по единице}$$

2.  $T = \text{const}$ , где  $T$  - огнищо кривизны

$$y_c = \frac{l}{2} \sin \varphi \Rightarrow V_c = \frac{l \dot{\varphi}}{2} \cos \varphi$$

$$T = \frac{m}{8} l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{ml^2}{2u} \dot{\varphi}^2 = \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi)$$

## Задача 1



изменение нормальной силы вспомогательной

$$\alpha(0) = \alpha_0$$

$$\dot{\alpha}(0) = 0$$

Определить ли кривизна при движении?

Определить уравнения  $\Leftrightarrow N_A$  или  $N_B$  одновременно в 0.

$$\underbrace{m\ddot{r}_c}_{m\vec{w}_c} = \underbrace{m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B}_{\vec{F}}$$

$$\vec{F} = -\nabla \Pi(\vec{r}) \Rightarrow T + \Pi = \text{const} = E$$

Ciunca peanum paderon ne cobepenaros

$$F = \frac{m l^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{4 m l^2 \dot{\alpha}^2}{24} + m g l \sin \alpha = m g l \sin \alpha.$$

$(m V_c^2 / 2)$

$$\frac{2}{3} \dot{\alpha}^2 = \frac{g}{l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

$$\ddot{\alpha}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

$$\vec{W}_n = l \ddot{\alpha}^2$$

Uroba gociaje  $\ddot{\alpha}$ , nago paderans c kurv. momeniam.

$$\vec{K}_o = \vec{M}_o - m \vec{V}_o \times \vec{V}_c$$

$$\vec{K}_p = J_p \dot{\vec{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} m l^2 \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m g l \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{g}{l} \cos \alpha$$

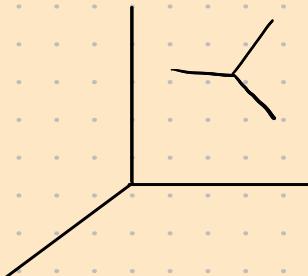
$$\vec{W}_{cx} = \underbrace{\frac{3}{4} g \cos \alpha_0 \sin \alpha_*}_{|W_t| \cdot \sin \alpha} - \frac{3}{2} g (\sin \alpha_0 - \sin \alpha) \cos \alpha_* = 0$$

$\cos \alpha_* = 0$  - ne negausi coradne kurv. yca.

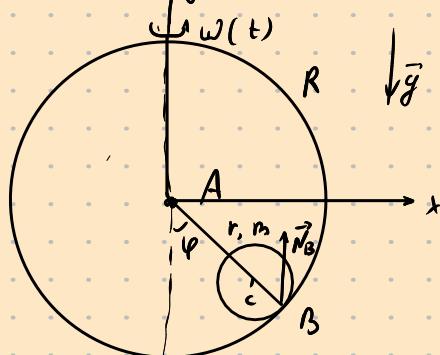
$\sin \alpha_* = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$  - pem. biengu cys-er  $\Rightarrow$  biengu nspozonzei oiprib

$$\vec{W} = \vec{f}^e + \vec{f}^i$$

$$\vec{W} = \vec{W}^r + \vec{W}^e + \vec{W}^i \Rightarrow \vec{W}^r = \vec{f}^{er} + \vec{f}^{ii} - \vec{j}^e - \vec{j}^i$$



3agara 2



1. Gociabnis  $y_p$ -e oin. gbum.

$$\vec{N}_B = ?$$

Uroba dey kremens kainic no reng-to  $\Rightarrow$  depein  $\vec{K}_o$  oin. kainam

Reperijs b naykumys cun-ny osriens

$$\vec{K}_B = \vec{M}_{B_B}^{ex} + \vec{M}_{B_B}^e + \vec{M}_{B_B}^c$$

Если момент  $B$ -координаты скрещен, то  $\dot{\vec{K}}_B = \vec{T}\omega$

$$\vec{V}_c = \dot{\vec{r}} \times \vec{AC} = \vec{\omega} \times \vec{BC}$$

$$\omega = \frac{R-r}{r} \dot{\varphi}$$

$$\dot{\vec{K}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}mr^2 \frac{R-r}{r} \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgr \sin \varphi \end{bmatrix} + \dots + \begin{matrix} \vec{M}_{B_B}^{ex} & \vec{M}_{B_B}^e \end{matrix}$$

Кинематика симметрична относительно оси  $I$  наклонена, зерни момент суммируется в моменте вращения и в нем она не участвует

$$-\vec{J} \times (\vec{J} \times \vec{r}) dm - \underbrace{\vec{\epsilon} \times \vec{r} dm}_{\text{нам не участвует}} = \omega^2 r dm$$

$\varphi$  - параллельное смещение



Уг. кин. углового момента  $\vec{M}_c^e = 0$

$$\vec{M}_{B_B}^e = \vec{M}_c^e + \vec{AC} \times \vec{R}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\omega^2 (R-r) r \cos \varphi \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}^e = - \int \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = - m \vec{\omega} \times (\vec{J} \times \vec{r}_c) =$$

$$R^e = m\omega^2 (R-r) \sin \varphi$$

$$-\frac{3}{2} mr(R-r) \ddot{\varphi} = mgr \sin \varphi - m\omega^2 r(R-r) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{3}{R-r} \sin \varphi - \frac{2}{3} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad - \text{уравнение}$$

$$mr_c^e = mg + \vec{N}_B + \vec{R}^e$$

$$W_n = (R-r)\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = (\dot{\varphi})^2$$

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{2}{3} \omega^2 \sin^2 \varphi$$

## Центральное поле.



$$r^2 \dot{\varphi} = C$$

$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 r^2 = \text{const}$  - центральная кинетика

$$\begin{cases} (mr - r\dot{\varphi}^2) = F \\ \frac{m}{r} (r^2 \dot{\varphi})' = 0 \end{cases}$$

$$\delta A = F dr + \partial \varphi = -\Pi_r dr - \Pi_\varphi d\varphi$$

$$\Pi = \Pi(r) = - \int F(r) dr$$

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \Pi(r) = E = \text{const}$$

$$\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{C^2}{r^2}}_{V(r)} + \Pi(r) = h = \frac{2E}{m} = \text{const}$$

Коэффициенты собственных чисел  
также называются (разрешимые состояния  
макс/мин скорости вспомогательных  
коэффиц.)



## Уп-я Банка

$$u = \frac{1}{r}, \quad t \mapsto \varphi \quad (r^2 \dot{\varphi} = C, \quad \varphi(t) \text{ однозначна} \Rightarrow \text{Гильберт})$$

$$m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2) = F$$

$$\Rightarrow u'' + u = -\frac{F}{m C^2 u^2}$$

## Задача 2

$$\vec{r} \quad \vec{R} \quad \vec{F} = -\frac{m \kappa \vec{r}}{r^3}, \quad \kappa = \frac{\partial M}{(1 + \frac{m}{M})^2}$$

$$F = -m \kappa u^2 \Rightarrow u'' + u = \frac{\kappa}{C^2} \Rightarrow r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} \quad (\text{б) на орбитальной скорости } e > 1)$$

$$P = \frac{C^2}{\kappa}$$

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}}$$

Задача 1.



$p, e - ?$

$$\lambda = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} - ?$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\lambda = \frac{\dot{\varphi}_{\max}}{\dot{\varphi}_{\min}}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

$$\dot{\varphi}_{\max} = \frac{C}{r_{\min}^2}$$

$$\dot{\varphi}_{\min} = \frac{C}{r_{\max}^2}$$

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

$$\Rightarrow \lambda = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2$$

Задача 2



$E - ?$

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{p = \frac{C}{k}}{1-1-h \frac{C^2}{k^2}} = - \frac{k}{h}$$

$$h = - \frac{k}{a} \Rightarrow E = \frac{m}{2} h = - \frac{mk}{2a}$$

Задача 3

$$F = - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^3} \quad \text{радиальный приводущий}$$

$$u'' + u = - \frac{F}{mc^2 u^2} = \frac{\alpha}{mc^2} + \frac{\beta u}{mc^2}$$

$$u'' + \left( 1 - \frac{\beta}{mc^2} \right) u = \frac{\alpha}{mc^2}$$

$$\omega^2 > 0 \Rightarrow r = \frac{1}{u} = \frac{p}{1+e \cos(\omega \varphi)}$$

$$\boxed{\omega^2 = 1 - \frac{\beta}{mc^2} > 0 \quad \text{и движение замкнуто}}$$

$\ll 1$

Наряду с приведенным выше:



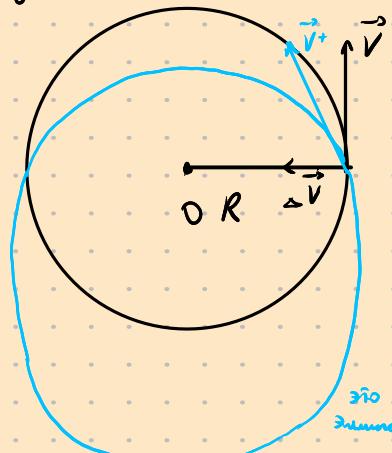
$\omega = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  Траектиориа замкнута

$\omega \neq \frac{m}{n} \Rightarrow$  Траектиориа буде норма в калюзі



Прямолинейні орбіти Меркурія - подібність з CTO

Задача 4



Найти нап-рів наклон орбіти

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \varphi_0)} \quad \begin{aligned} &\text{- не згадане єдине рішення орбіти} \\ &\Rightarrow \text{блакує } \varphi_0 \end{aligned}$$

$$R = \frac{p}{1 + 0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \Rightarrow p^- = R \quad (-\text{до} + \text{- воне})$$

$$p^+ = \frac{c^2}{k} \Rightarrow p^+ = p^- = R$$

$$r^2 \dot{\varphi} = rV_\varphi = C \Rightarrow C = rV - \alpha r \text{ не зм. } V_\varphi$$

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}}, \quad e^- = 0$$

$$h^- = V^2 - \frac{2k}{R}$$

$$h = \underbrace{r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}_{\vec{v}^2} - \frac{2k}{r} \quad e^+ = \sqrt{\Delta V^2 \frac{c^2}{k^2}} = \Delta V \frac{c}{k} \quad h^+ = V^2 + \Delta V^2 - \frac{2k}{R}$$

$$\frac{V^2}{R} = \frac{k}{R^2}$$

yg. квадратична закономірність

yg. універсальна конс.

$$e^+ = \Delta V \frac{R V}{R V^2} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$R = \frac{R}{1 + \frac{\Delta V}{V} \cos \varphi_0} \Rightarrow \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{R e^+ \sin \varphi_0 \dot{\varphi}_0}{(1 + e^+ \cos \varphi_0)^2} = -\Delta V \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$E = -\frac{mk}{2a} \Rightarrow \text{т.к. } E \text{ юб-о, т.о. } a \text{ юб-о}$$

## Drehmomente Begegnung

$$J_o = \begin{pmatrix} \int_{\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3}} dm & -\int_{\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{3}} dm & -\int_{\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3}} dm \\ \int_{\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{3}} dm & \int_{\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3}} dm & \\ \int_{\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3}} dm & \end{pmatrix}$$

$$J_o^T = J_o$$

$$J_{aa} + J_{cc} \geq J_{cc}$$

( $\Rightarrow$  ges. moment. gr. gg.  $a + c = m$ -m.)

$$J_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{ne normiert durch (normal. A-ma)}$$

$$J_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{ne normiert durch (nicht normieren)}$$

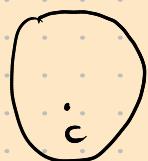
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tenzor KB. par. um } j(\vec{a}) = \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 & -a_2 a_3 & -a_1 a_3 \\ -a_2 a_3 & a_1^2 + a_3^2 & -a_2 a_3 \\ -a_1 a_3 & -a_2 a_3 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

Präzisionssatz 1. Einheitsmaß - Merkmale:  $J_o = J_c + m j(\vec{a})$

$$J' = S^T J S \Rightarrow 3 \text{ Eigenwerte } \lambda_i, \text{ wobei } J' = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \}$$

$$\vec{r}^T J \vec{r} - 1 = 0 \quad - \text{durchgang unregelm.}$$

$$(B \text{ u. } \alpha \text{ axi: } A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1)$$



$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_c \vec{\omega}$$



$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_o \vec{\omega}$$



$$\begin{aligned} K_o &= \vec{k}_c + \vec{OC} \times \vec{p} = \\ &= J_c \vec{\omega} + \vec{OC} \times m \vec{V}_c \end{aligned}$$



$$\vec{K}_o = J_o \vec{\omega}$$

Beispiel 1



$$J_c = ?$$

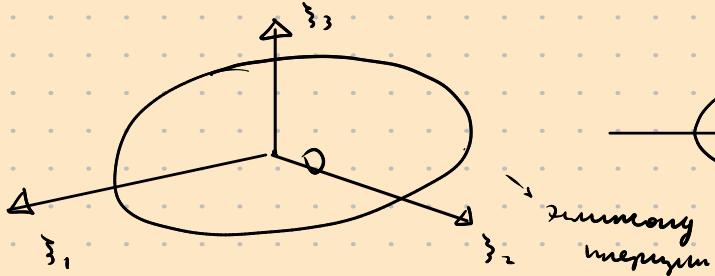
$$x = \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\alpha \sqrt{3}}{6}$$

$J$  - arm. axi,  $\perp$  zu -m. A-ax, rechteck C

Момент инерции параллелен оси  $\hat{z}$  -  $\frac{J}{16}$  т.к.  $J \sim m r^2 \sim r^4$

$$J = \frac{J}{16} \cdot 4 + 3 \cdot \frac{m}{4} x^2$$

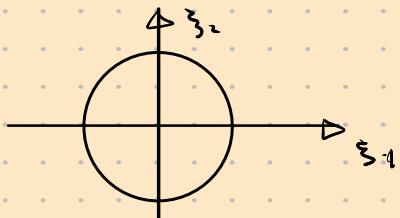
$$\frac{3J}{4} = \frac{3m}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{36} \Rightarrow J = \frac{ma^2}{12}$$



$\hat{z}_3$  беда ортогональна

бисектрисе  $\hat{z}_1$  и  $\hat{z}_2$

№ 8 Примеры:



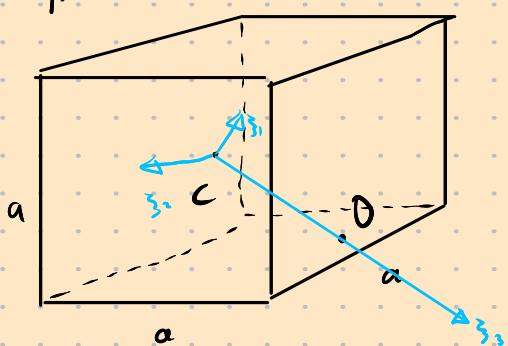
о каких способах! Но две из них  
(окруженность т.к. 3 ортогональны)

$$J = J_1 + J_2; \quad J_1 = J_2 \Rightarrow J_1 = J_2 = \frac{ma^2}{24}$$

(масса  $m$  и радиус  $a$ )



Пример 2



Найдем  $J_0$  для  $n$  в изотропной среде с радиусом  $R$  т.к.

$\beta$  т.к. - биссектриса

Используем  $\hat{z}_3$  через  $O$

$$J_0 = J_C + m_j(CO)$$

$$j(a) = \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 + a_2^2 & -a_2 a_3 \\ -a_1 a_3 & -a_2 a_3 & a_1^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

Неподвижные компоненты не фигурируют, т.к. масса  $a_3^2$

$$J'_1 = \frac{ma^2}{6} + m(CO)^2 = J'_2 \quad J_3 = J'_3$$



Диаграмма балки с отверстием, а также схема

Пример 3



$$S = \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2 = ?$$

$$S = J_0 = 4a^2$$

Пример 4



$\vec{O}\vec{A}$  м. момент, пана не відома,

$\vec{O}\vec{A}$  пропорційний квадрат б. висоти.

$\vec{O}$ -кенг. т. зустрічається в 2D випадку!

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^\top J_0 \vec{\omega} \\ \vec{K}_0 &= J_0 \vec{\omega} \end{aligned} \right\} \text{Також є кенг. формул!}$$

квадрат!

$\vec{\omega}$  - ось гуман. симетрії!

$$J_0 = J_c + m_j(\vec{O}\vec{C}) = \text{diag} \left[ \frac{ma^2}{12}, \frac{ma^2}{12}, \frac{ma^2}{6} \right] + \left[ \frac{mb^2}{2}, \frac{mb^2}{2}, 0 \right]$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_1 / \sqrt{2} \\ 0 \\ \vec{\omega}_1 / \sqrt{2} + \vec{\omega}_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_0 \parallel \vec{\omega} \Leftrightarrow J_0 = \lambda E$$

Пример 4

$$J = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & D \\ 0 & D & C \end{bmatrix}$$

Ключі використовують

Chodz 1: Wielokrotnie wiersz. znaczy

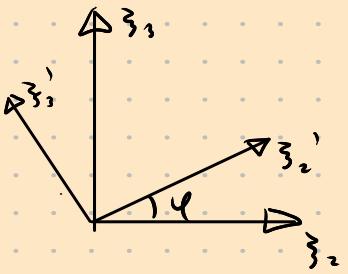
$$J_h = \lambda h \Rightarrow \det(\lambda E - J) = 0$$

$$(\lambda - A) \begin{vmatrix} \lambda - B & -D \\ -D & \lambda - C \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = B', \quad \lambda_2 = C'$$

$h_1, h_2$  - wiersz. znaczy daje innym ozn.

Chodz 2:



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$S^T JS = \text{diag}[A, B', C'] \Rightarrow \varphi$$

# Дискутируя Твёрдого тела

## Частная Фигура



$$K_3 = J \vec{\omega} = \begin{bmatrix} Aq \\ Bp \\ Cr \end{bmatrix}$$

$$A \neq B \neq C \quad A > C \quad M = 0$$

$\xi$  - дың махсус ортасында  $O$  (негізгі)

$$\dot{\vec{K}}_x = \vec{M}_x \iff \frac{d\vec{K}_3}{dt} + \vec{\omega}_{\xi} \times \vec{K}_3 = \vec{M}_{\xi}$$

$$\begin{cases} A\ddot{p} + (C-B)\dot{q}r = M_1, \\ B\ddot{q} + (A-C)\dot{r}p = M_2, \\ C\ddot{r} + (B-A)\dot{p}q = M_3, \end{cases}$$

- гүлден. үп-тә Фигура  
негіншінде 8 орын.

B анық. Фигура  $\vec{M} = 0$  (ағында заманында)

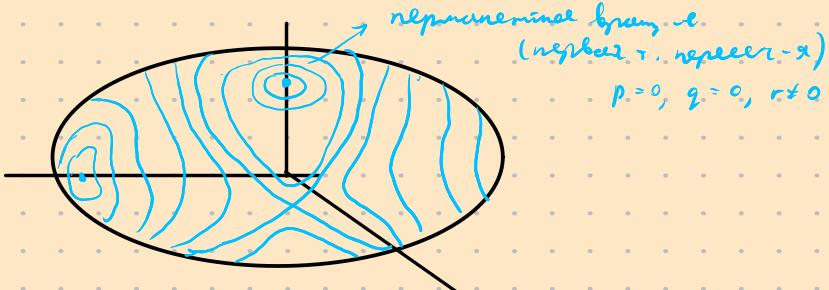
Консервативтік:  $\vec{K}_x = \text{const} \iff |K_3|^2 = \text{const}$

$$\begin{cases} A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const} \\ A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 = 2T = \text{const} \end{cases}$$

## Интерпретация Мах - Кулдара

$$\begin{cases} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = \text{const} \quad (\text{б. дың } \xi) \\ \frac{K_1^2}{A} + \frac{K_2^2}{B} + \frac{K_3^2}{C} = 2T = \text{const} \end{cases}$$

- кепес. 2-жылдан көбейткіштік  
(сарыда негіншінде)



## Симметрия Ернеста

Движение волнистого симметрического

## Интерпретация Рыжикова



- мах-жылдан  
келесі  
б. ж. негінші.  
 $\vec{\omega}$  негіншінде  
негіншінде

Чертеж фигура при  $A = B$  ( $\vec{M} = \vec{0}$ )

$$Cr = \text{const} \quad (Cr + (B-A) \dot{\varphi}) \stackrel{\circ}{pq} = 0$$



$$Cr = K \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{Cr}{K} = \text{const}$$

$\varphi$  - вращение  
 $r$  - преломление  
 $\theta$  - наклон (или наклон)

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} A_p \\ B_q \\ Cr \end{bmatrix} = A \vec{\omega} + (C-A) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{K}}{A} + \underbrace{\frac{A-C}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}}_{\dot{\varphi} \parallel \vec{K} \quad \dot{\varphi} \parallel \vec{x}_3}$$

$$\dot{r} = \frac{k}{A}, \quad \dot{\varphi} = \frac{A-C}{A} r$$

Задача 1



Движение тела  $B$  подчиняется уравнению  
движения и уравнению Эйлера в Канонической  
системе координат.

$$m \ddot{r}_c = m \vec{g} \quad - \text{уравнение о гравитации.}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{g} t^2}{2} + \vec{v}(0)t + \vec{r}_0$$

В Канонической системе координат движение при  $A = B$ .

$$A = B = \frac{mr^2}{4} \quad C = \frac{mr^2}{2}$$

$$\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \cos \alpha \\ \omega \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ m \omega r^2 \cos \alpha / 4 \\ m \omega r^2 \sin \alpha / 2 \end{bmatrix}$$

Как  $\vec{K}$  изменяется при  $\vec{\omega}$ ?



$A = B \Rightarrow$  пер. преломление

$$\cos \theta = \frac{m \omega r^2 \sin \alpha / 2}{\sqrt{\frac{m^2 \omega^2 r^4}{16} \cos^2 \alpha + \frac{m^2 \omega^2 r^4}{4} \sin^2 \alpha}} = \\ = \frac{Cr}{K}$$

$$\dot{r} = \frac{k}{A} = \dots$$

$$\dot{\varphi} = -r = -\omega \sin \alpha$$

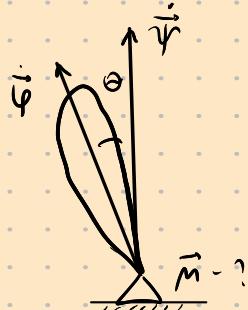
## Задача 2



Задача 2 проходж. 7.

Найти радиус земного шара вращения,  $A = B \Rightarrow$  <sup>пер.</sup>  $\omega$

## Более генеральное представление процессов



$$\Theta = \text{const}, \quad A = B \neq C$$

$$\dot{\psi} = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \text{const}$$

$$\vec{m} = \left[ C + (C - A) \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \Theta \right] \dot{\psi} \times \dot{\varphi}$$

## Задача 1



Симметричное тело совершают более генеральное представление.

$$C = \frac{mr^2}{2}$$

$$\dot{\psi} = \omega, \quad \dot{\varphi} = -\omega \frac{l}{r}$$

$$\text{Процесс на оси } \vec{\varphi}: \quad \frac{mr^2}{2} \frac{l}{r} \omega^2 = Nl - mgl$$

$$N = mg + \frac{mr\omega^2}{2} \quad - \text{так называемое инертное сопротивление}$$

## Задача 2



$N_A, N_B - ?$  (динамическое взаимодействие)

$$C \text{ конс} \Rightarrow \vec{N}_A + \vec{N}_B = 0 \quad (m\ddot{r}_c = 0 = \vec{N}_A + \vec{N}_B) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \vec{m} = \vec{r}_A \times \vec{N}_A + \vec{r}_B \times \vec{N}_B \Rightarrow \vec{N}_B = -\vec{N}_A = \vec{N}$$

Момент вращения для второго процесса одинаков  $\rightarrow$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega \cos \alpha \\ 0 \\ \omega \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{K} = \frac{\omega mr^2}{4} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ 2\sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{K}} = \vec{\omega} \times \vec{K} = \frac{m\omega^2 r^2}{4} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \left[ -\frac{m\omega^2 r^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2Np \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(kann man nur 0)  
(komponente  $\vec{k}$ ,  $\vec{\omega}$  parallel  $\vec{\omega}$ , rausziehen)

$$\Rightarrow N = -\frac{m\omega^2 r^2}{81} \sin \alpha \cos \alpha - \text{i.e. } \vec{N}_A \text{ und } \vec{N}_B \text{ auf Kapitole der Tafel nachschauen}$$

# Уравнение Лагранжа

$$(T_{ik})' - T_{ik} = Q_k \Leftrightarrow E_k T = Q_k$$

$$Q_{ik} = -\Pi_{ik} \Rightarrow L = T - \Pi \Rightarrow \sum_k L = 0$$

$$V - \text{одн. норем.} \therefore Q_k = E_k V, \quad L = T - V$$

Пример 1: наклоненное



$$\text{Введен } q = [r \varphi]$$

$M$  (кругл. момен.) — масса

$$T = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot (r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$\Pi = \int F(r) dr \quad \delta A = Q_i \delta q^i - \text{бук. работы}$$

$$\delta A_a = Q_a \delta q^a \Rightarrow Q_a = \frac{\delta A_a}{\delta q^a} \Rightarrow Q_r = -F = -\Pi_r$$

$$L = \frac{m}{2} (r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \int F(r) dr$$

$$L_{,r} = mr \dot{\varphi}^2 - F(r)$$

$$L_{,\varphi} = 0$$

$$L_{,r} = m \ddot{r}, \quad (L_{,r})' = m \ddot{r}$$

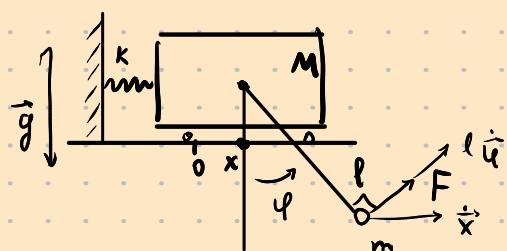
$$(L_{,r})' = 0$$

$$m \ddot{r} - mr \dot{\varphi}^2 + F(r) = 0 \quad (1)$$

$$mr^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (2)$$

(1) и (2) — 2п. уравнения

Пример 2



$$L = \frac{M \dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2} ((\dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) + m g l \cos \varphi - \frac{k x^2}{2}$$

$$g \rightarrow \Pi = m g l (1 - \cos \varphi) \sim -m g l \cos \varphi$$

Бес нас. центр тяжести сдвиг - в Лагрангии

$$K \rightarrow \Pi_x = \frac{k x^2}{2}$$

Следует, какую работу сделяет сопротивление силы  $F$  при движ. непрерыв. по  $x$  и  $\varphi$ :

$$Q_a = \frac{\delta A_a}{\delta q^a}$$

$$\vec{F} \quad \delta A_x = \underbrace{\int F \cos \varphi dx}_{Q_x}$$

$$\vec{F} \quad \delta A_\varphi = \underbrace{\int l \dot{\varphi} F dx}_{Q_\varphi}$$

$$(F_i)_k' - F_{ik} = Q_k \quad - \text{нагрузка, действующая}$$

Сост. уп-ии Аквариума в неупр. сим-ах огибаю

$$\int (\vec{r} - \vec{f}) \delta \vec{r} dm = 0$$

$\vec{w}$  - ак-заперме

$$\int \vec{w} \delta \vec{r} dm = \int \vec{f} \delta \vec{r} dm \quad - \text{в неупр. сим-ах огибаю}$$

$$E_x T \delta q^k = Q_k \delta q^k$$

Неупр. сим-ах:

$$\vec{w} = \vec{w}^r + \vec{w}^e + \vec{w}^c$$

$$\int \vec{w}^r \delta \vec{r} dm = \int (\vec{f} - \vec{w}^e - \vec{w}^c) \delta \vec{r} dm$$

$$E_x T^r = Q_k^{T^e} + Q_k^{T^c}$$

ориг. в  
неупр. сим-

$$(E_x T^r = Q_k^{T^e} + Q_k^{T^c})$$

Пример: движение в не ИСО



Точка глоб. в не-и в xy

Коэф-ты неприм

1-й метод - выражение акт. нап-ий глоб-я

$$T^a = \frac{1}{2} m [ \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\phi} + \omega(t))^2 ] = L^a$$

$$\{ \ddot{r} - r (\dot{\phi} + \omega(t))^2 = 0 \quad (1)$$

$$\{ m(r^2 \ddot{\phi}) = 0 \quad (2)$$

Все неупр. могут в  $T^a$

2-й метод

$$T^r = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)$$

$$J^e = J^1 + J^2$$

изолированное движ-е

$$J_1 = m\omega^2 r \Rightarrow \Pi = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

зенитодеманс  
q = m\omega

$$L' = T' + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Окружене күнде таң не барынан



$$\vec{J}_2 = -m\vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{J}^c = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}^r$$

-пазделбен на r и l if

$$Q_r = 2mr\dot{\varphi}$$

-т.к. дұр n J\_r солап.

$$Q_\varphi = -l(2m\omega r + m\dot{\omega}r)$$

-т.к. дұр n J\_\varphi нылжынан.

### Задергие

1-ші сабак мұнайшының көзінде.

### Первые интегриалы Лагрангевых систем

1.  $q^k$  - не входит в  $L$  - циклическая координата

$$\sum_i L = 0 \Rightarrow (L_{,k})' = 0 \quad (L_{,k} = 0)$$

$L_{,k} = \text{const}$  (адынжынның күнүсі)

2.  $L_{,t} = 0$  и  $N = \underbrace{\sum_i q_i \dot{q}_i}_{\text{нел. б. } L} = 0$  (адын. күнде не саб. жадын)

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$$

$$T = \frac{1}{2} \int \left( \sum_i \vec{r}_{ik} \dot{q}^k + \vec{r}_{it} \right)^2 dm = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int \vec{r}_{ik} \cdot \vec{F}_{ij} \cdot \dot{q}^k \dot{q}^j$$

- квадратичналық энергия

$T_1$  - кинетикалық энергия

$T_0$  - не зависи от адьын. скорості

Тогда саб. интегриалының күнінде (адын. күн. зерттеу);

$$E = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}$$

Пример Ньютона-Лагранжа



$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \mathcal{L} = T_2 + T_0$$

$$T_2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad T_0 = \frac{m}{2} \omega^2 x^2$$

$$E = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m \omega^2 x^2}{2} = \text{const}$$

