Филатов Иван Васильевич

Введение

$$\frac{x(t)}{i_x(t)} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Чёрный}\\ \text{ящик}\\ (H)\end{array}} \longrightarrow \frac{y(t)}{i_y(t)}$$

- Все ящики не описать
- Рас-иваем только линейные и стационарные

Линейность:
$$\left.\begin{array}{c} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Стационарность:
$$x(t) \to y(t) \implies x(t + \Delta t) \to y(t + \Delta t)$$

Чёрный ящик описывается:

- схемой
- набором параметров H

Любая сис-ма, составленная из RLC, яв-ся линейной и стационарной.

Топологические эл-ты

Ветвь — участок эл. цепи, вдоль к-рого протекает один и тот же I. Может состоять из ≥ 1 идеализированных двухполюсника.

Узел — место соединения ветвей

     Неустранимый — > 2 ветвей   Устранимый — 2 ветви

Контур — любой замкнутый путь, проход. по неск-им ветвям цепи.
     Характериз. направлением обхода, каждая ветвь/узел проход. 1 раз

Отнош. них можно записать:

Компонентные ур-я — свойства цепи, опред. её компонентами

Топологические ур-я — свойства цепи, опред. только её топологией

Правила Кирхгофра

- Закон сохр-я заряда
- Провода не накапливают заряд (узлы)

I закон Кирхгофра

Алг. сумма мгновенных знач-ий токов всех ветвей, подключ. к каждому из узлов в любой момент времени, равна 0.

$$\sum_k i_k = 0.$$

- Потенциальность эл. поля
- Консервативность эл. сил
- Поток вектора $\vec{B}$ во времени в схеме не изменяется (не считая особых эл-тов)

II закон Кирхгофра

Алг. сумма мгновенных знач-ий напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделируемой цепи, равна 0.

Теорема об эквивалентном генераторе

Ток произвольной ветви линейной эл. цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к к-му подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линеаризированным источником энергии, к-рый может быть представлен последовательной (Тевенен) или параллельной (Нортон) схемой замещения. При этом ЭДС идеального источника напряжения равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника, ток идеального источника тока равен току КЗ автономного двухполюсника, а внутреннее сопротивление и проводимость экв. источника равны соотв. комплексным входным сопрот. и проводимости автономного двухполюсника.

Парал. - Нортон

Послед. - Тевенен

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} \; ; \quad U_{xx} = -I R_2 = -\frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\underset{\text{холостого хода}}{}$$

Заменяем идеализированный ист. ЭДС на перемычку или идеализированный ист. тока на разрыв цепи, считаем сопротивление схемы, получаем выходное сопротивление генератора.

Это работает только с Независимыми источника. Для зависимых придётся составлять сис-му ин. ур-ий (разберись с этим).

Частотный анализ характеристик цепей

$$l \cos(\omega t) \to \boxed{\begin{array}{c}\text{линейный}\\\text{четырёхполюсник}\end{array}} \to k(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

ЛИВ

$k(\omega)$ — АЧХ
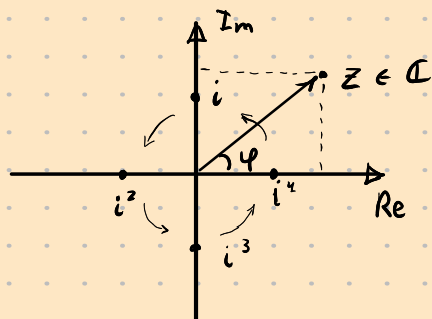
$\varphi(\omega)$ — ФЧХ

Самое полное описание схемы!

Тригонометрия неудобна — переходим к комплексным

$$z = |z| \cos \arg z + i|z| \sin \arg z \quad (\varphi = \arg z)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos \omega t + i \sin \omega t \to \boxed{\text{ЛИВ}} \to k(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (\dots) i \sin(\dots)$$

①

$$I = \frac{U}{R} \qquad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$$

②

$$I = C\frac{dU}{dt} \qquad \tilde{I} = C\frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C\tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\frac{1}{j\omega C}}$$

импеданс

③

$$U = L\frac{dI}{dt} \qquad \tilde{U} = j\omega L\tilde{I}, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{j\omega L}$$

Импеданс — комплексное сопротивление (Z) $\qquad j = i$ в радиотехнике

Комплексная проводимость — Y

Линейные цепи 1 порядка

① Интегрирующая RC — цепь

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \qquad \tilde{U}_{вых} = \tilde{I}\cdot\frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{j\omega RC + 1}$$

$$\tilde{U}_{вых} = \frac{\tilde{U}_{вх}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Что будет, если на вход подать $\cos\omega t$?

$$U_{вых} = Re(\tilde{U}_{вых}) = (\cos\omega t + \sin\omega\cdot\omega RC)\cdot(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1}$$

Аналитический сигнал: $\cos\omega t + i\sin\omega t$

$$K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{A_0\cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0\cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0}\cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0}e^{j\varphi}$$

Получим точку Z — сдвиг фаз — аргумент, модуль —

соотношение амплитуд

Чтобы найти их, нужно из $K(\omega)$ выделить всю действ. часть и всю комплексную
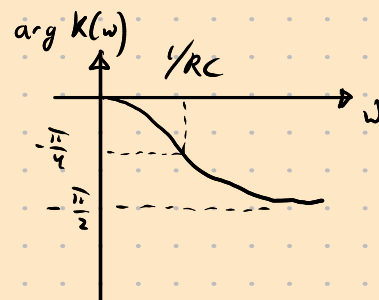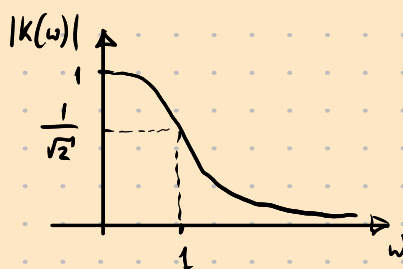
комплексная притом должна иметь модуль 1 (это $e^{j\varphi}$).

$$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1/2}$$

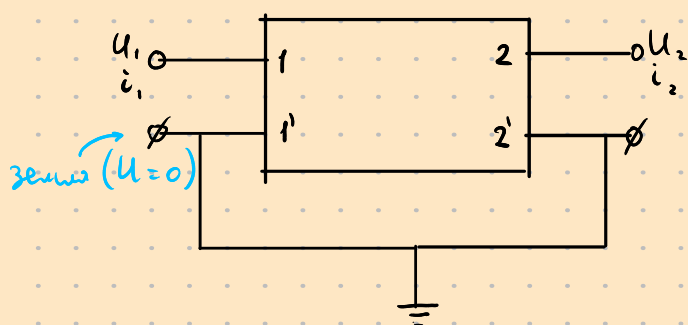$$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\frac{-j\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

$\operatorname{arg} K = \varphi = -\operatorname{arctg} \omega RC$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$

Im, Re

$|k(\omega)|$ ... $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ... 1 ... ω

$\operatorname{arg} K(\omega)$ ... $1/RC$ ... $-\frac{\pi}{4}$ ... $-\frac{\pi}{2}$ ... ω

Линейный четырёхполюсник

земля $(U=0)$

U_1, i_1 — 1 ; 2 — U_2, i_2

$1'$; $2'$

- U_1, U_2 — относительно земли
- Не накапливает заряд
- По выходам земли течёт некоторый ток
- Выбрать незав. переменные (их 2) можно ∞ числом способов (выбор плоскости в 4х мерном пространстве) — любое 2 ЛК U_1, U_2, i_1 и i_2.

Система g параметров (для безынерционных (только R) цепей!)

Система из 2 линейных ур-ий, описывающих четырёхполюсник, например:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, u_2) \\ i_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

Т.е. четырёхполюсник задаётся двумя ландшафтами f_1 и f_2.
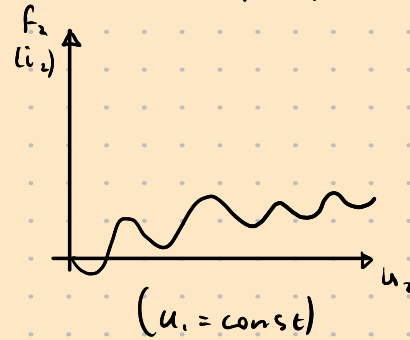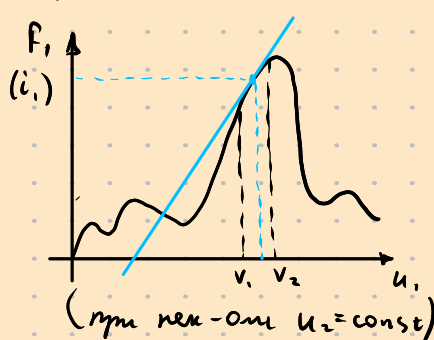
Причём для f_1 и f_2 они

- Непрерывны
- Производ. $\neq \infty$

f_1 (i_1) ... v_1 v_2 ... u_1

(при нек-ом $u_2 = \text{const}$)

f_2 (i_2) ... u_2

$(u_1 = \text{const})$

Т.е. их можно линеаризовать в окрестности рабочей точки.

$$di_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 \qquad di_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2$$

$= \text{const}$ при фикс. u_1 и u_2

При $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$ получаем 4 константы, характ. четырёхполюсник.

Физ. смысл производной:

1. $\dfrac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$ — входная проводимость

3. $\dfrac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$ — прямая проходная проводимость

2. $\dfrac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$ — обратная проходная проводимость

4. $\dfrac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$ — выходная проводимость

Аналитический сигнал (включаем L и C — инерционность)

Вещественный сигнал — зависимость нек-ой ЛК u и i от времени. При преобр-ии Фурье обязательно получится симметричный спектр (он симметричен отн. $0y$ с точностью до комплексного сопряжения, а мнимая часть $= 0$).

Это неудобно — приходится работать с кучей $\sin$ и $\cos$.

Добавим к сигналу комплексную добавку — такую, что левая (правая) часть спектра сигнала обнулится.

Выйдет аналитический сигнал. Получается два провода — один с действ. частью сигнала, другой — с мнимой. Используя аналит. сигнал, можно рас-вать инерционные цепи.

Сигнал будет подан как бы бесконечно давно и длится бесконечно долго.

$x(t) =$

$\tilde{x}(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$ — аналитический сигнал. $\left| e^{j\omega t} \right| = 1$

$A_0(\omega),\ \varphi(\omega).\qquad A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ — комплексная амплитуда

$\qquad\qquad\qquad\quad e^{j\omega t}$ — комплексная вращающаяся экспонента.

Y - параметры (комплексные)

$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12}\tilde{U}_2 \qquad\qquad \tilde{I}_2 = Y_{21}\tilde{U}_1 + Y_{22}\tilde{U}_2$

При поиске Y_{1x} $\tilde{U}_2$ зануляют (закорачивают выход), аналогично для Y_{2x}.

$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

Если взять I_1 и I_2 как неизв., математика та же:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_2$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2$$

— здесь коэф-ты это сопротивления

Смотря на анализ, сигнал:

$$u_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$u_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

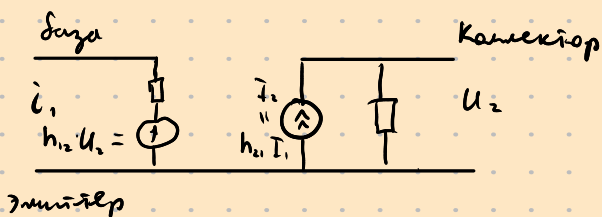Связь: $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$ $Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}$

$Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|}$ $Z_{22} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$

H - параметры

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases}$$

— полезно для биполярных транзисторов

— аналогичная бипол. транзистору схема

h_{21} — передача по постоянному току (спр.) h_{11} — входное сопротивление

h_{12} —   (спр.) h_{22} — выходная проводимость (спр.)

(спр.) — справочная величина

Связь: $h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$ $h_{12} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$

$h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ $h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$

$Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$ → [ЛИВ] → $B(\omega)e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}$

аналитический сигнал

Аналитический — из ТФКП

Комплексная часть в реальности не наблюдается

$|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$ — комплексный коэф-т передачи

$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{B(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}\,e^{j\omega t}}{A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} \quad \boxed{=}$$

Любой аналит. сигнал с однокр. спектром можно подать на вход и $K(j\omega)$ тоже будет

$$\boxed{=} \frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + ... + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + ... + A_0} = \frac{b_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot ... \cdot (\omega - b_n)}{a_0 \cdot (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot ... \cdot (\omega - a_m)} \quad \boxed{=}$$

самый удобный вид ——— самый ценный вид

Самая сложная задача радиотехники

Свойства:

- Когда $\omega = b_к$, $|K| = 0$
- Когда $\omega = a_к$, выходит особенность.

$$\boxed{=} \frac{b_0}{d_0} \cdot \frac{|\omega - b_1| \cdot e^{j\arg(\omega - b_1)} \cdot ... \cdot |\omega - b_n| \cdot e^{j\arg(\omega - b_n)}}{|\omega - a_1| \cdot e^{j\arg(\omega - a_1)} \cdot ... \cdot |\omega - a_m| \cdot e^{j\arg(\omega - a_m)}} = \frac{b_0}{d_0} \cdot \frac{\prod_{к=1}^{n} |\omega - b_к|}{\prod_{p=1}^{m} |\omega - a_p|} \cdot e^{j\sum_{к=1}^{n}\arg(\omega - b_к) - j\sum_{p=1}^{m}\arg(\omega - a_p)}$$

„Нули" — корни числителя (b_i) „Полюса" — корни знаменателя (a_i)

ω должна быть комплексной (p), иначе от комплексной ф-ии произошёл переход к вещ-ой.

$p = j\omega, \sigma = 0$
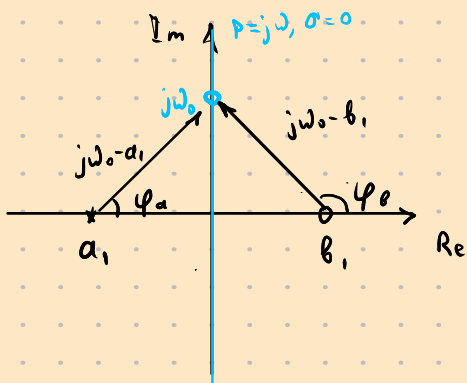
$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} = \frac{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + B_0}{A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + A_0} = ...$$

По полюсам, нулям и $\frac{b_0}{d_0}$ можно полностью восстановить ф-ию.

$p = j\omega + \sigma$ — при рас-ии конкретной частоты, $\sigma = 0$.

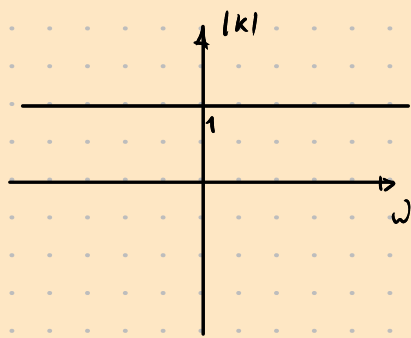Иначе получим какая-то непонятная хар-ка сис-мы.

$$K(j\omega) = \frac{|j\omega_0 - b_1|}{|j\omega_0 - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega_0 - b_1) - \arg(j\omega_0 - a_1))}$$

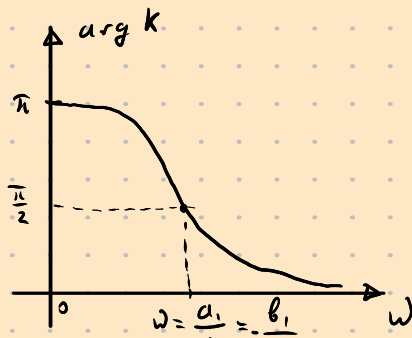$|K(j\omega)| = $ отношение длин векторов из нуля и из полюса

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} - АЧХ \qquad \arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A - ФЧХ$$
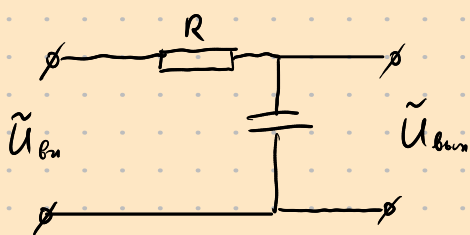
$|k|$

$\arg k$

π

$\dfrac{\pi}{2}$

$0 \qquad \omega = \dfrac{a_1}{j} = -\dfrac{b_1}{j}$

АЧХ

ФЧХ

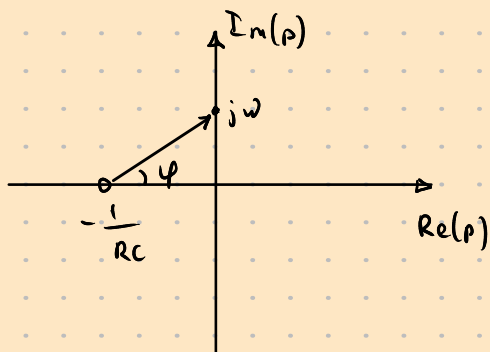## Интегрирующая RC - цепь

$\tilde{U}_{вх}$ $\quad R \quad$ $\tilde{U}_{вых}$

$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{вх}}{R + 1/j\omega C} \cdot j\omega C \tilde{U}_{вх} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC\left(j\omega + \dfrac{1}{RC}\right)} =$$

Ток через цепь
(течёт через конденсатор)

$$= \frac{1}{RC\left(p + \dfrac{1}{RC}\right)} \qquad a_1 = -\frac{1}{RC} \qquad \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

$Im(p)$

$j\omega$

φ
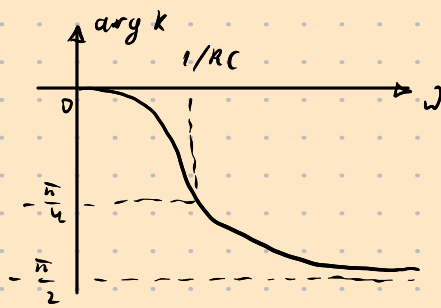
$-\dfrac{1}{RC}$ $\qquad Re(p)$

$$|k| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \dfrac{1}{R^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad - \text{АЧХ}$$

$$\arg K = -\operatorname{arctg}(\omega RC) \quad - \text{ФЧХ}$$

$|k|$

1

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$1/RC$

АЧХ

$\arg k$

$1/RC$

0

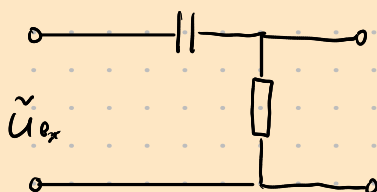$-\dfrac{\pi}{4}$

$-\dfrac{\pi}{2}$

ФЧХ

Дифференцирующая RC - цепочка

$\tilde{U}_{вх}$

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - 0}{j\omega + \dfrac{1}{RC}}$$

AYX (АЧХ)

$$\frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + A_0}$$

ФЧХ

Не вещественные полюса/нули всегда симметричны относ. Re оси, если канал 1 - вещественный