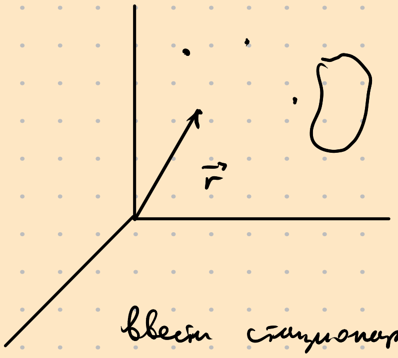
Литература: те же (Муравьёв, Гантмахер, Амелькин, Маркеев - новая версия)

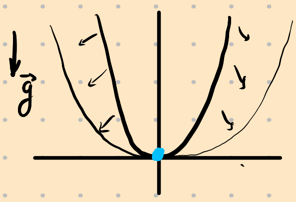
Равновесие механических систем



Система нах-ся в равновесии в выбранной сис-ме коор-т $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \vec r \to \vec r = \vec r_0 = \overline{const}$

Далее будем рас-ивать стационарные системы (ур-я связи не завис. от времени) $\Rightarrow \exists$ возможность ввести стационарную параметризацию, и $\vec r = \vec r(q)$ после введ-я обобщ. коор-т.



У не стац. систем тоже могут быть полож. равновес. – см. картинку (кривая эволюционирует со временем)

$$(\mathcal{L}_{,\dot k})^{\cdot} - \mathcal{L}_{,k} = Q_k(q,\dot q,t)$$

$\Updownarrow$ – т.к. разрешимость отн. старших произв.

$$\begin{cases} \dot q = u \\ \dot u = f(q,u,t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot x = x(x,t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Положения равновесия нах-ся во вз. однознач. соотв. с точками вида

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\square$ $\Leftarrow$ Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec r = \vec r(q_0) = \vec r_0 = const$

$\Rightarrow$ $\dot{\vec r} = \vec r_{,k}\dot q^k \equiv \vec 0$ (1), однако обобщ. коор-ты q вводились так, что

$\vec r_{,k}\delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q: \delta q^{1^2} + \ldots + \delta q^{n^2} \neq 0.$

Таким образом (1) $\Rightarrow \dot q = 0$ $\blacksquare$

Критерий полож. равновесия стац. системы

Стац. сис-ма нах-ся в полож. равновесия $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0.$

$\square \quad (T_{,\dot k})^{\cdot} - T_{,k} = Q_k(q, \dot q, t)$

$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\, \dot q^i \dot q^j$

$T_{,\dot k} = a_{kj}\, \dot q^j$ – т.к. a_{ij} – симметричная матрица!

$(T_{,\dot k})^{\cdot} = a_{kj} \ddot q^j + a_{kj,i} \cdot \dot q^i \dot q^j$

$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k}\, \dot q^i \dot q^j \Rightarrow a_{kj} \ddot q^j + (a_{kj,i} - \frac{1}{2} a_{ij,k}) \dot q^i \dot q^j = Q_k(q, \dot q, t) \quad (2)$

Для полож. равновес. $q = q_0$, $\dot q = 0 \Rightarrow$

$0 = Q_k(q, \dot q, t)$

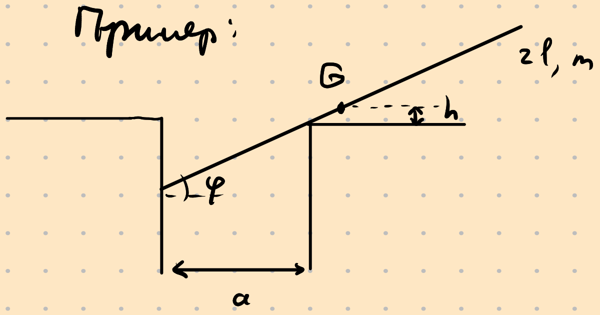
С другой стороны, если $Q(q_0, 0, t) = 0$, то (2) имеет решение $q = q_0$, $\dot q = 0$ – по т. Коши оно сущ-ет и единственно. ▨

Однако если сила имеет вид, не удовл. т. Коши ($Q(\ldots)$ не удовл. усл. Липшица), то критерий в обратную сторону не сработает – может быть > 1 реш-я (см. Маркевича).

Следствие

Если $Q = -\nabla \Pi(q, t)$, то полож. равновес. соотв. стац. т. потенц. энергии: $\nabla \Pi(q, t) = 0$.

Пример:



т. G – центр масс (теперь всегда так будет).

$\Pi = mgh = mg(l \sin\varphi - a \operatorname{tg}\varphi)$

$\Pi_{,\varphi}: \quad l \cos\varphi_* - \frac{a}{\cos^2\varphi_*} = 0$

$\cos\varphi_* = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ – полож. равновес.

Теорема – принцип виртуальных перемещений

Полож. $\vec r = \vec r_0$ мех. сис-мы яв-ся полож. равновес. $\Leftrightarrow$ $\forall$ вирт. перемещ. $\delta \vec r$ из этого полож. $\delta A = \int f\, \delta \vec r\, dm = 0$

□ (для стац. случая)