

Глава XVII

Несколько приложений к экстремумам функций нескольких переменных

§1. Теорема о несуществовании

$$F(x, y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$ — не является гладкой ф-и



Теорема

Пусть ф-я 2-х переменных гладк. в $U(x_0, y_0)$. $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$

б-к-ром y -е $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

• $F(x)$ непр-гладк. на $(x_0 - a, x_0 + a)$ и $F'(x) = -\frac{F'_x(x, F(x))}{F'_y(x, F(x))}$ на $(x_0 - a, x_0 + a)$

Д-бо

① Не наружн. одн., $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

По лемме о сопр. знака, \exists отр-ие (x_0, y_0) (б-к-е прямой).

$\tilde{\Pi} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, можно сказать, что

$F'_y > 0$ в $\tilde{\Pi}$.



$$\varphi(y) = F(x_0, y)$$

$$\varphi(y_0) = 0, \quad \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0, \quad y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

$\varphi(y) \uparrow$ справа

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$

По лемме о сопр. знака (зак F) $\exists A: \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \left\{ \begin{array}{l} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{array} \right.$

Значит $x^* \in (x_0 - a, x_0 + a)$

$$\varphi(y) = F(x^*, y)$$

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0$$

но т. б-к, $\exists y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]: \varphi(y^*) = 0$

$$\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \varphi(y) \uparrow$$
 справа \Rightarrow

\Rightarrow Foga: $f(y^*) = 0$ - egensid.

$\forall x^* \in [x_0-a, x_0+a] \exists! y^* \in [y_0-b, y_0+b]$

$$f(x^*, y^*) = 0$$

$$y^* = f(x^*) \quad \text{Replace } z \text{-variable}$$

② Nekras $x \in [x_0-a, x_0+a]$, $y = f(x)$.

$$f(x, y) = 0$$

Δx - naryanq. x , Δy - kord. naryanq. y .

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$

No 1. laryanma qed q-p-uu necr. nep-wx,

$$0 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_x(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y) \Delta y,$$

$$\frac{1}{3} = \xi(\Delta x, \Delta y)$$

$$0 < \xi < 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y)}{f'_y(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y)}$$

$$\Pi = \{x_0-a < x \leq x_0+a, y_0-b < y \leq y_0+b\}$$

$$\bar{\Pi} = \{x_0-a \leq x \leq x_0+a, y_0-b \leq y \leq y_0+b\}$$

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \text{ na } \bar{\Pi}.$$

$\bar{\Pi}$ - komant, t.e. $|f'_x| \leq \alpha$ - oys.

$$f'_y \geq \beta > 0 - \text{ganim. inf.}$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq \frac{\alpha}{\beta} = M$$

$$|\Delta y| \leq M |\Delta x|$$

$$y = f(x) \text{ oys. na } [x_0-a, x_0+a]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0)$$

Foga f - paknenepti nep. na (x_0-a, x_0+a) .

No 3. o cypenpojeyum nep. op.-uu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x, f(x))}{f'_y(x, f(x))} - \text{nep.} \quad \text{UTA}$$

Teorema (адызы)

- ① Рассмотрим $n+1$ неизвестных $F(x_1, \dots, x_n, y)$ непр. гладкое. Имеем $\partial F/\partial x_i(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*) = 0$, $F'(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*) \neq 0$. Тогда \exists нахождение y в \mathbb{R}^{n+1} :
- $$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n, y^* - \beta < y < y^* + \beta\},$$
- и имеем $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \dots, x_n)$.
- ② F непр. гладкое. Имеем $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n\}$, имеем в Π'
- $$f'_i = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_{y}(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i=1, \dots, n.$$

Доказательство:

① Док. равене, Тогда $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

② Докажем:

Пусть γ . Аддитивна для n -хим. ненулевым непр.

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1 + \alpha x_1, \dots, x_n + \alpha x_n, y + \alpha y) - F(x_1, \dots, x_n, y) = \\ &= F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y) \alpha x_1 + \dots + \\ &\quad F'_{x_n}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y) \alpha x_n + \\ &\quad F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y) \alpha y \\ \alpha y &= -\frac{F'_{x_1} \alpha x_1 + \dots + F'_{x_n} \alpha x_n}{F'_{y}} + \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\alpha} = m_\beta \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i, |F'_{y}| \geq \beta) \end{aligned}$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ падает непр. на Π'

$$\lim_{\alpha x_i \rightarrow 0} \alpha y = 0$$

Рассмотрим $\alpha x_1 = \dots = \alpha x_n = 0$

$$\frac{\alpha y}{\alpha x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, x_2, \dots, x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y)}{F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, x_2, \dots, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{\alpha x_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{\alpha x_1} = \dots = -\frac{df}{dx_1}, \quad \text{аналогично } x_2, \dots, x_n.$$

Чтож.

§ 2 Teorema o one-me neblivim p-ii

Dnach. $u = u(x)$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad - \text{gugup - q-p-ii}$$

Marginalna deriva - $D_u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

Esim. ona kladymas, kai cyp - et apiegiavimas - deriva.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

Teorema (o mese)

Pykne $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ neyp-gugup-q-p-ii & aps-ii
 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Torga $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{cases} F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \iff \bar{y} = f(\bar{x}), \text{ apriein q-p-ii}$$

$y_i = F_i(\bar{x})$, $i=1 \dots m$ - neyp-gugup. na

$$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$$

§ 3. Teorema apie svaranu apibraneniu.

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, gugup.

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x})$$

Biamo gurejano: eim $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, Torga

$$D_{F \circ \Phi} = D_F \cdot D_\Phi.$$

Esim. eim $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$, to

$$D_{F\Phi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\Phi|_{\bar{x}}$$

Пусть $n=m=p$, тогда

$$J_{F\Phi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\Phi|_{\bar{x}}$$

Однозначні симбр.:

$$\Phi: G \rightarrow D \quad D \subset R^n$$

$$\Phi^{-1}: D \rightarrow G$$

$$\Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \Phi - \text{бінарній симбр.}$$

$$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1} - \text{если оно дифер.!}$$

Если симбр. динамічне в груп., то однозначні не однозначні для груп.!

$n=1$:

$$y=x^3 - \text{динам.}, \text{дифер.}$$

однозначні непарні. & т. д.

Бінарній симбр.

$$\begin{matrix} \cancel{x} \\ \cancel{x} \end{matrix}$$

$$\boxed{J \neq 0}$$

Опрац.

Симбр. Φ - однозначні однозначні в одн. від G , якщо $\forall \bar{x}_0 \in G \rightarrow \exists \delta > 0$; Φ однозначні в $U_\delta(\bar{x}_0)$.

Теорема щодо однозначності симбр.-ів

Пусть $\Phi: G \rightarrow R^n$ непр. дифер. в $J_\Phi \neq 0$ в G ($G \subset R^n$). Тогда Φ покажено однозначно:

$\forall x_0 \in G \rightarrow \exists \Phi^{-1}$ - непр. дифер. симбр. в $y_0 = \Phi(x_0)$.

Д-бо:

$$\text{Роз-вм } F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j, \quad j=1 \dots n$$

$$(y, x) \in R^{2n}$$

Оно непр. дифер. $\forall (y, x) \in R^{2n}$ також, що $x \in G$, $y \in R^n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y, x_0)$$

Із т. є ок-не нервніні оп-нні $\exists \Pi = \{(y, x) \in R^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

б к-пом

$$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$$

F_i непр. функц. на $\Pi' = \{y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i\} \subset R^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ динамично отображает нен-е мн-ло $X \subset R^n$ на Π' .

$$x = \Phi^{-1}(\Pi')$$

Π' - отр. мн-ло, наимн. праобраз отр. мн-ла или непр. отр. един. отр. мн-ло \Rightarrow

$\Rightarrow X$ - отображение



$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset X$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists U_\delta(x_0) \text{ б к-пом отр. гл-о отображения.} \quad \text{УГД}$$

§ 4. Экстремумы ф-ии нескольких переменных

Опт-е

$x^* \in R^n$ наз-ся локальн. макс. локального экстремума ф-ии $y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x^*) \geq f(x) \forall x \in U_\delta(x^*) \text{ и } \forall x \in U_\delta(x^*) \rightarrow f(x) > f(x^*)$

Аналогично для мин. лок. экстр.

Несобственное ум. локального экстремума

Если $f(x)$ непр. в x^* и x^* гл-о т. лок. экстр., то $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \quad (\text{стационарное условие})$$

П-ло:

Рассмотрим ф-ию $\varphi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Тако, что x_i^* - лок. экстремум токо по одн. x_i . Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{Аналогичные выражения}$$

УГД

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j$$

Норм. опр.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) > 0$

Опим. опр.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) < 0$

Ненорм.: $\exists x_1, x_2: K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Ненорм. насыщ.: $\forall x \rightarrow K(x) \geq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Опим. насыщ.: $\forall x \rightarrow K(x) \leq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Если $K(x) \equiv 0$, то она назн. и опим. насыщ., также ненорм. сущ. нет.

Рассл. f глобаль непр. гладк. в $G \in \mathbb{R}^n$, т.е. unless все непр. гладкие
ненегатив, оптим. для x^* в $\partial f(x^*)$ симметрическое (если $F''_{xx} = F''_{yy}$)

$$d^2 f(x^*) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(x^*) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n F''_{x_i x_j}(x^*) dx_i dx_j - \text{квадратичное в окрестности } (dx_1, \dots, dx_n)$$

Дифференцируема и ненорм. экспонент

Рассл. $f(x)$ глобаль непр. гладк. в $U_s(x^*)$ в x^* -связ. форма. Тогда
 $K(x) = d^2 f(x^*)$ - квадратичная форма. Тогда:

1. если $K(x)$ норм. определяема, то x^* - т. стационарна идентична
2. если $K(x)$ опим. опред., то x^* - т. стационарна идентична
3. если $K(x)$ ненорм., то x^* не т. стационарна идентична
4. если $K(x)$ насыщ., то x^* не т. стационарна идентична

Лемма

Рассл. $K(x)$ в \mathbb{R}^n ненорм. опр., тогда $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \geq C|x|^2$

Если опим. опр., то $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \leq -C|x|^2$

Д-бо 1: доказ.

Задача, что $K(x)$ норм. определяема в некотором R' , т.е. $K(x)$ - знакоуст на б-ре R' в \mathbb{R}^n не координатам.

$K(x_1, \dots, x_n)$ - непр. на \mathbb{R}^n .

$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ - опт. в замкнут. - ограничен.

Тогда опт. в замкнут. - ограничен. \inf на S .

$K(x) \geq 0$ na $S \Rightarrow \inf_s K = C > 0$.

$\forall x \in S \rightarrow K(x) \geq C$.

При $x \neq 0 \in R^n$. Рад-ун $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$$

$$K(x) \geq C |x|^2 \quad \text{УТА}$$

D-бо тапсару

1. $f(x)$ ғанаңын непр. грөзүп $\mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow$ ынанымалык жиындар (Редно):

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0) \rightarrow f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(|g|^2), \quad g^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$$
$$df \equiv 0 \rightarrow \text{сигеу.}$$

$d^2 f$ - нарам. орын.

Т.е. $f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} (|dx|^2) + o(|dx|^2) =$

$$= f(x^0) + \frac{C}{2} |dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$$
$$= f(x^0) + |dx|^2 \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) \right)$$

$$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0 \quad \& \quad \mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0).$$

Т.е. x^0 - с. орындың ишкемдүүлүгү.

2. Анализмалык

3. $d^2 f(x^0)$ - неңгыл. кеб. сипатта.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$.

Рад-ун бекіспен нындаңызу $dx = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ (нындаңыз $\parallel z$).

$$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\left(\lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} \right)}_{\beta > 0} |z|^2$$

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$$
$$= f(x^0) + \frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2$$

$$\frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0 \quad \text{нын жеңи маанин } \varepsilon(dx)$$

Т.е. $f(x) > f(x^0)$ на $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Анализмалык да $dx = \lambda z'$, то нын жақындаңыз маанин $\varepsilon(dx)$ $f(x) < f(x^0)$.

x^0 - не с. ишкемдүүлүгү.

Пример: $z = x^4 + y^4$, $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$, жаңыл. $(0,0)$, $z''_x = 12x^2$, $z''_y = 12y^2$, $z''_{xy} = 0$, $d^2 z(0,0) = 0$.

Нагоң көтүспөрүш $\Delta z(0,0)$: $z(x,y) - z(0,0) \geq 0$ енде $x^2 + y^2 > 0$ - таң. шар.

§ 5. Үндөлжык (өмнөдөлжык) экстремум.

$$z = xy \text{ (сеге)}$$

$$z'_x = y, z'_y = x \quad (\text{са.т. } (0,0))$$

$$z''_{xx} = z''_{yy} = 0, z''_{xy} = 1$$

d^2z - неотп. ал. ғп. - неотп. мөнг.

Неме $x+y=1$: $z = x(1-x)$, мак. мад. б. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Оң

Т. x^* мак-точ. Т. сегерес үндөлжык мак. мад. $u = f(x_1, \dots, x_n)$ ним буланалынан үндөлжык ғыл. $\psi_1(x) = 0, \dots, \psi_n(x) = 0$, енде $\exists \delta > 0: \forall x \in U_S(x^*)$ ним бул. үе. үндөлжык $\rightarrow f(x) > f(x^*)$

Енде из. үндөлжык мак. мад. өзүн түрөндөшөөр жүргүн, то болжактың зияра на оданын экстремум ғп-ни мененесең мак. мад. түрөндөшөөр.

А енде нет, то түрөндөшөөр ғп-ни түрәнди.

Негизг. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, Тогда ғп-ни түрәнди $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \psi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_n \psi_n(x)$

Ним бул. үе-2 үндөлжык $L = f$, $\forall \lambda_i$. - үе-түрп. f и L сабактас.

Модификация үе-иң мак. мад. экстремуму

Негизг. $f(x), \psi_i(x)$ ($i=1 \dots n$) неотп. ғүрүп. б. $U_S(x^*)$. Негизг. x^* - т. оданын экстремуму $f(x)$ ним $\psi_i(x) = 0$, үзүнчөн $\operatorname{rg} \left(\begin{matrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \\ i=1 \dots n \\ j=1 \dots n \end{matrix} \right) = m$ (түрөндөшөөр ғп-ни мененесең мак. мад. түрөндөшөөр).

Тогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m: x^*$ - т. оданын экстремуму $L(x)$.

Модиф. көмүк аны-мы $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \psi_1 = \dots = \psi_m = 0 \end{cases}$ - аны-мы $n+m$ үп-түркі $\in n+m$ неотп. $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

D-бо:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad \operatorname{rg} \Phi = m, \quad x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

Если все неправильные $\lambda_i \neq 0$. Для каждого i -го ненулевого:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \frac{\partial (\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ в т. } x^* \Rightarrow \text{в } \varphi_i(x^*) \text{ в нем ненулевое}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{т.о. т. о. ненулевой в т. } x^*, \text{ в } x - \text{ном} \\ \text{св-ва локальной вып. ф-ии} \end{array}$$

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_{m+1}, \dots, x_n - \text{независимые ф-ии} \\ x_1, \dots, x_m - \text{зависимые} \end{array}$$

Ф-ии g_i выпуклые, в окрестности $\tilde{x}^* = (x_{m+1}^*, \dots, x_n^*)$. Продолжим далее:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n \end{cases} \quad \begin{array}{l} dx_1, \dots, dx_m - \text{заб. выпуклые ф-ии} \\ dx_{m+1}, \dots, dx_n - \text{независимые выпуклые ф-ии} \end{array}$$

При замене вида x на \tilde{x} :

$$f(x)|_* = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = F_0(\tilde{x})$$

$$L(x)|_* = L(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = L_0(\tilde{x})$$

$$L(x)|_x = f(x)|_* \quad \forall \lambda;$$

$$L_0(\tilde{x}) = F_0(\tilde{x}) \quad \forall \lambda;$$

$$dL(\tilde{x}^*) = dF_0(\tilde{x}^*) = 0 \quad (\text{т.к. это локальная вып. ф-ия}) \quad \forall \lambda;$$

Все небольшие изменения вида \tilde{x} не меняют ненулевых:

$$dL_0(\tilde{x}^*) = d(L(x)|_*) = dL(x)|_{**} \quad \begin{array}{l} \text{- выпуклые ф-ии в ненулевых} \\ \text{изменениях} \end{array}$$

(выпуклые ф-ии в н-м ненулевых)

$$dL(x)|_{**} = \frac{\partial L}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n} dx_n$$

\downarrow забавим \downarrow независим \downarrow

$$\text{Для каждого } \lambda_i - \text{ненулевого.} \quad \text{Найдем } \lambda_i \text{ так, что } \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0.$$

$$L = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^*) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^*) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- лин-я нулевые, если выпуклые!} \\ \Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}|_{x^*} \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ решения} \end{array}$$

λ_i ненулевые.

Рынок равн. 2:1

$$dL_0(\tilde{x}^*) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) dx_m}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) dx_n}_{=0}$$

Но $dL_0(\tilde{x}^*) = 0$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0 \Rightarrow$ рыноч. равн. 2:1 x^* - стаб. точка.
 dx_{m+1}, \dots, dx_n - ненул.

УДА

Две проверки неодн. ус-я \Rightarrow однос. экстремуму можно плюсовать и вычесть:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \psi_1 = \dots = \psi_m = 0 \end{array} \right. \quad \text{n+m уп-ий, n+m ненул.}$$

Дискриминантное критерий

Функции $f(x)$, $\psi_i(x)$, $i=1, \dots, m < n$ - гладкие непр. функц. определенные в окрестности x^* , а также
рама матрицы Гессеана $(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j})$, $i=1 \dots m$, $j=1 \dots n$ плавна в $T.x^*$.

Функция $L(x)$ в x^* и λ_i , $i=1 \dots n$ удовл. усло. (I). Тогда в $T.x^*$ плавна в окрестности x^* .
График $d^2L(x^*) \Big|_{**}$ - квадратичная $n-m$ непр. функц. (однозначно ли это, это и
без доказательства).

Тогда если для определения локальности минимума f нужно вычислить $(*)$
для $d^2L(x^*)$, то x^* - локальный минимум f
или максимум, то x^* - локальный максимум f .

Пример: Если $d^2L(x^*)$ - неотрицательная квадратичная форма в окрестности x^* , то x^* - локальный минимум f .

Иначе функция f имеет локальный максимум $(**)$.

Если же $d^2L(x^*)$ квадратичная негативная, то x^* - локальный максимум f .

Пример:

$$f = xy \text{ при ус-и } x+y=1$$

$$L = xy + \lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = y = \frac{1}{2}$$

$$d^2 \lambda = 2dx dy - \text{неоптим. кб. огранка от } dx, dy$$

Продифференцируя обе части $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$

$$d^2 \lambda|_{x,y} = -2dx^2 - \text{синг. оптим. кб. огранка от } dy = 0$$

Значит $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ - точка минимума.

Справка

$d^2 f$ не однозначно определяется заменой независимых

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ - функция непр. групп.

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^n dx_k d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k + \sum_{k=1}^n dx_k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \right) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k \end{aligned}$$

Если x_1, \dots, x_n - независимые переменные, то $d^2 x_k = 0$

$$d^2 f = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Также можно выразить $d^2 f$ в терминах производных, если $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ в некоторой точке

(б) синг. т.) - квадрикундированное ограничение $d^2 f$ однозначно определяется в синг. точке

D-B

Составляем систему уравнений для определения коэффициентов.

Доказано, что $x_i = g_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$

$x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$ - функция непр. групп. в окрестности \tilde{x}^0

$$\varphi_i(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1 \dots m)$$

Продифференцируем по x_j :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial g_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i=1 \dots m$$

Причем $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $m+1 \leq j \leq n$ - это производная по $n-m$ независимым переменным x_{m+1}, \dots, x_n .

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{m+1}, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ в окрестности } \tilde{x}^0$$

Берем $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ в виде $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, значит $\neq 0$.

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}$ непр.групп. $\Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_n}$ непр.групп. $\Rightarrow g_i$ - функция непр.групп. \Rightarrow

\Rightarrow имеем квадрикундированную огранку $d^2 \lambda(x^0)$

В общем случае $d^2 \lambda(x^0)$ (бес $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}(x^0) = 0$)

$$d^2 \mathcal{L}(x^0) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k \quad (\text{незав. от } x^0, \text{ т.е. } dx_j dx_k \text{ гипер-плоск. незав. непен-} \\ \text{норм. к ним гипер-плоск. оп-мин}).$$

$$\mathcal{L}(x)|_* = \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) \quad \text{б. аргумент.}$$

$$d^2 \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d^2 (\mathcal{L}(x^0)|_*) \stackrel{*}{=} d^2 \mathcal{L}(x^0)|_{**} \\ \text{||} \quad \text{б. орт. гипер-плоск. оп-мин н-н непен-бл} \quad \text{б. орт. гипер-плоск. оп-мин н непен-бл}$$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}(x^0)|_{**} = 0 \quad (\text{б. арг. кон-мин I}) \Rightarrow \tilde{x}^0 - \text{стаци. т. } f_0(\tilde{x}^0)$$

Характер экстремума в точке т. оптим. гл. условий

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 \mathcal{L}(x^0)|_{**}$$

Характер экстремума оптим. условия. точка оптим.

УТД

Глава XIX

Кратные интегралы

§ L Определение. Критерий интегрируемости Дордь.

Прим. G - измеримое мн-во, $G \subset R^n$, $G \neq \emptyset$.

R - разбиение G на изм. изм. мн-ва G_i : $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$.

$$\forall i \neq j \rightarrow \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

Максим. разбиение $|R| = \max_{i=1 \dots N} \operatorname{diam} G_i$

Границы, т.е. $f(x)$ опр. на G . Равн.-мн. $M_i = \sup_{G_i} f(x)$, $m_i = \inf_{G_i} f(x)$

Оп-е

Верхнее и нижнее суммы Дордь:

$$S_a^* = \sum_{i=1}^N M_i \mu G_i, \quad S_{+R} = \sum_{i=1}^N m_i \mu G_i$$

Сумма Римана

$$\forall i=1 \dots N \rightarrow \xi_i \in G_i$$

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu G_i$$

Две гранич. R : $S_{+R} \leq \sigma_R \leq S_a^*$.

Коэффициент оп-мн

$$\omega_R = S_a^* - S_{+R} = \sum_{i=1}^N \omega_i \mu G_i, \quad \omega_i = M_i - m_i$$

Разбиение R_2 включает за R . ($R_2 \supseteq R_1$) \Leftrightarrow

$R_1: G = \bigcup_{i=1}^n G_i$; $\forall G_i$ - однозначное пакетование из G ;

$R_2: G = \bigcup_{j=1}^{n'} G_j$

Упр

Если $R_2 \supseteq R_1$, то

$$S_{+R_2}^* \leq S_{+R_1}^*, \quad S_{+R_2} \geq S_{+R_1}, \quad \omega_{R_2} \leq \omega_{R_1}$$

D-ко: (как в 1D)

Доказываем пар-тию изм., когда одна из мн-в R_i подразбивается maybe:

$$G_i = G'_i \cup G''_i, \quad \mu(G'_i \cap G''_i) = 0$$

Надані граничні значення наведено позначенням \exists то є.

$$M_i^* = \sup_{G_i} f(x) \quad M_i'' = \sup_{G_i''} f(x) \quad M_i = \sup_{G_i} f(x)$$

$$M_i \mu G_i = M_i \mu G_i + M_i'' \mu G_i'' \geq M_i^* \mu G_i + M_i'' \mu G_i''$$

Все однакове $\& S_{R_1}^* \cup S_{R_2}^*$ симетричні $\Rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^*$.

Аналогично для непарних сум.

$$\omega_{R_2} = S_{R_2}^* - S_{\pi R_2} \leq S_{R_1}^* - S_{\pi R_1} = \omega_{R_1} \quad \text{УДА}$$

Вважаємо $\max(R_1, R_2)$ - найбільше з R_1, R_2 . $G_i \cap \tilde{G}_j$

$$\max(R_1, R_2) \geq R_1, \quad \max(R_1, R_2) \geq R_2.$$

Лемма

$$\forall R_1, R_2 \rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^*$$

Д-бо:

$$R = \max(R_1, R_2) \Rightarrow R \geq R_1, R_2$$

$$S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^* \geq S_{\pi R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \quad \text{УДА}$$

Операції

Пусть $f(x)$ - функція на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$. Розглянемо $I^* = \inf_R S_R^*$, $I_* = \sup_R S_{\pi R}^*$ (нап. в цьому випадку розглядаємо всі відкриті інтервали D додатково).

Если $I^* = I_* = I$, тоді $f(x)$ наз. ω -непреривною на G , а I - ω -крайнім непреривним функцією $f(x)$ на G : $I = \int_G f(x) dx$

Оскільки $-\infty < I_* \stackrel{(1)}{\leq} I^* \stackrel{(2)}{\leq} +\infty$

(1) відходить від операції лемми: $S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \Rightarrow \inf_{R_1} S_{R_1}^* \geq \sup_{R_2} S_{\pi R_2}^*$

(2) відходить від \exists то $I^* \leq S_{R_1}^*$ для всіх R , аналогично (1)

Критерій Дорбі у непреривності

Пусть $f(x)$ оп. на відкритому $G \subset \mathbb{R}^n$. Що за підумання:

1. $f(x)$ непреривна на G .

2. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$ раздение R на-ба G : $\omega_R < \varepsilon$

3. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall$ раздение R , $|R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$

D-б:

(3) \Rightarrow (2) - оребуно
как паше

(2) \Rightarrow (1) $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

как паше \forall разд. $R \rightarrow S_{x_R} \leq \bar{I}_x \leq I^* \leq S_x^*$.

$$0 \leq I^* - \bar{I}_x \leq S_x^* - S_{x_R} = \omega_R$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon \Rightarrow |I^* - \bar{I}_x| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ -модел $\Rightarrow I^* = \bar{I}_x \Rightarrow f(x)$ ннт

(1) \Rightarrow (2) Пусть $f(x)$ -ннт. на G .
как паше

$$I^* = \inf_n S_{x_n}^* = \underline{I}_x = \sup_Q S_{x_n} = \bar{I}$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_1: S_{x_{R_1}}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_2: S_{x_{R_2}} > \bar{I} - \frac{\varepsilon}{2}$

$$R = \max(R_1, R_2)$$

$$S_{x_n}^* \leq S_{x_{R_1}}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad S_{x_n} \leq S_{x_{R_2}} > \bar{I} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } \omega_R = S_{x_n} - S_{x_{R_2}} < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

(2) \Rightarrow (3): Преведение гомоморф. леммы.

Определение

Пусть X, Y - два ннты на-ба в \mathbb{R}^n .

$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y)$ - расстояние между на-бами.

Если $X \cap Y \neq \emptyset$, то $\rho(X, Y) = 0$. Остальное не верно.

лемма 1

Пусть F_1, F_2 - 2 на-бами в \mathbb{R}^n , $\rho(F_1, F_2) = 0$. Тогда $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

Доказательство: если $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, то $\rho(F_1, F_2) > 0$

D-б:

Пусть $\rho(F_1, F_2) = 0$,

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists x \in F_1, y \in F_2 : g(x, y) < \varepsilon$

$\forall n=1, 2, \dots \rightarrow \exists x_n \in F_1, y_n \in F_2 : g(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

T.k. F_1 - ovp. (какими л. R^n), то x_n - ovp. нос-ти, но т. Банаховы - Внешнеграница

$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x_0$ (свойство), значит F_1 -замкнуто $\Rightarrow x_0 \in F_1$.

$$g(y_{n_k}, x_0) \leq \underbrace{g(y_{n_k}, x_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \rightarrow 0} + \underbrace{g(x_{n_k}, x_0)}_{\text{при } k \rightarrow \infty} \Rightarrow y_{n_k} \rightarrow x_0.$$

F_2 -замкнуто $\Rightarrow x_0 \in F_2$. $x_0 \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. \square

Замечание меняться охватываемое пространство F_i . F_i может быть замкнутым.

Если эта замкнутость, но не овр., значит может не быть общим.

лемма 2

Пусть $F_1, \dots, F_n, G \subset R^n$, $\forall i, j = 1 \dots N \rightarrow g(F_i, F_j) = p_{ij} > p > 0$

$\text{diam } G < p$

Тогда для $G \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$, $\exists j : G \in F_j$.



Доказательство

Пусть $\exists x_0 \in G, x_0 \in F_i$
 $\exists y_0 \in G, x_0 \in F_j, i \neq j$

$x_0, y_0 \in G \Rightarrow p(x_0, y_0) < p$

$x_0 \in F_i, y_0 \in F_j \Rightarrow g(x_0, y_0) \geq g(F_i, F_j) \geq p$

Противоречие. \square

лемма 3

Пусть G - овр. мн-во в R^n . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists S \supseteq G$, S -мерное и симметричное!

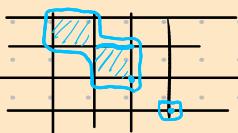
$$mS < \mu^*G + \varepsilon$$

Д-бо

Сим-е мерометр S не будет из овр-го мерометра меняться

$$\mu^*G = \inf mS, S\text{-мер.}, S \supseteq G$$

Но мы S можем выбрать сколь угодно? \exists мером. $S_1 : mS_1 < \mu^*G + \frac{\varepsilon}{2}$



Тогда $\exists S$ - мер. и симм. овр. мерометр такого: $mS < mS_1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow mS < \mu^*G + \varepsilon \quad \square$$

лемма 4

Пусть G, F - изм. мн-ва в \mathbb{R}^n , $\mu F < \varepsilon$.

Тогда $\exists \delta > 0$: \forall изм. мн-ва G , $|R| < \delta \rightarrow$

$$\sum_{G_i \cap F \neq \emptyset} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \cdot \varepsilon$$

D-то

По условию $\exists S > F$ - квад. орт.: $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$

Пусть S состоит из квадратов с параметром $K = K(\varepsilon)$.

$$S = \bigcup_{j=1}^N Q_j, \quad Q_j - \text{квд с параметром } a = a(\varepsilon) \quad (a = \frac{1}{2^K})$$

$$\delta(\varepsilon) = a.$$

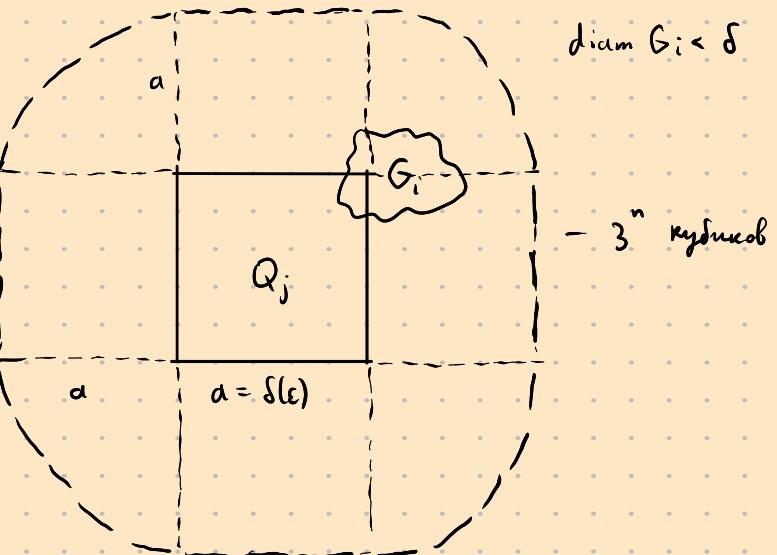
Пусть изм. мн-во G , $|R| < \delta$.

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq 3^n \mu \bar{Q}_j$$

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{G_i \cap S \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{j=1}^N \sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \quad (\text{если } Q_j \text{ содержит } G_i)$$

Однако все изм. G_i можно расположить в квадрате Q_j .

$$\Leftrightarrow 3^n \sum_{j=1}^N m \bar{Q}_j = 3^n \cdot mS < 3^n \cdot 2\varepsilon \quad \text{УДА}$$



(2) \Rightarrow (3) $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_0: \omega_{R_0} < \varepsilon$

$$R_0: G = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j^\circ, \quad \omega_{R_0} = \sum_{j=1}^{N_0} w_j^\circ \cdot \mu \cdot G_j^\circ, \quad \mu(G_i^\circ \cap G_j^\circ) = 0, \quad i \neq j$$

Но известно свойство, $G_i^\circ \cap G_j^\circ = \emptyset, \quad i \neq j$

Если это не так - то мн-во нуль-мерное, а иначе - оно имеет изм. мн-во.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_0} \partial G_j^\circ$$

По условию, \exists изм. мн-во $S > \Gamma$: $mS < \frac{\varepsilon}{\rho M \cdot 3^n}$

$\mu \Gamma = 0$ по свойству измеримости в \mathbb{R}^n

Конечно измеримое изм. мн-во Моргана.

$$M = \sup_G \|f(x)\|$$

T.k. $\Gamma \subset S$, $\Rightarrow \forall j \rightarrow \partial G_j^\circ \subset S$

Последовательность $F_j = G_j^\circ \setminus S = \overline{G_j^\circ} \setminus S \Rightarrow F_j$ - замкнутое измеримое изм. мн-во



$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n G_j \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \text{ (пред F_j многое для этого.)}$$

$$(т.к. (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B))$$

Третий условие, это ненулевые элементы, в которых оставшись подмножество.

Тогда получим $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$ (т.к. F_i, F_j - ненулевые компоненты)

$$\text{Предел } \rho = \min_{i \neq j} \rho_{ij} > 0.$$

$$\text{По лемме 4 Т.к. } mS < \frac{\varepsilon}{8M_3^n}, \text{ то } \exists \delta: \forall \text{ подл. } R, |R| < \delta \rightarrow \sum_{G_i \in S} \mu G_i < \frac{\varepsilon}{8M_3^n} \cdot 2^n = \frac{\varepsilon}{4M}$$

$$\delta = \min(\delta_1, \rho).$$

Предел подлогиение R на-быть G такое, что $|R| < \delta$.

Предел, что все подлогиение $G_i \subset G \setminus S$ (т.е. $G_i \cap S = \emptyset$)

$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \quad \text{diam } G_i \leq |R| < \delta \leq \rho$$

$$\forall i \neq j \quad \rho_{ij} \geq \rho, \text{ тогда по лемме } \exists z_{ij}: G_i \subset F_j \subset G_j$$

$$R_* = \max(R, R_0)$$

$$\sum_{G_i \in S} \omega_i \mu G_i \leq \omega_{R_*} \leq \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \sum_{G_i \in S} \omega_i \mu G_i \leq 2M \sum_{G_i \in S} \mu G_i = 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Очевидно: } \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_R = \sum_{G_i \in S} \omega_i \mu G_i + \sum_{G_i \in S} \omega_i \mu G_i < \varepsilon$$

Если все F_j ненулевые, то $G \setminus S$ в бирюзовая сумма отсутствует.

ЧТД,

Определение

Случай Римана: Пусть f определена изм. мн-бе G , $\exists R: G = \bigcup_{i=1}^n G_i$,

$$G_i - \text{изм., } \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

$$\text{Возьмем } z_i \in G_i, \sigma_R = \sum_{i=1}^n f(z_i) \mu G_i$$

Компьютерный Риман

f нестр. на изм. мн-бе $G \Leftrightarrow f$ определена на G и \forall мере-та подлогиение R_n , $|R_n| \rightarrow 0$,

таким образом $z_i^{(n)} \in G_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{R_n}(f) = I \quad (I = \int_G f(x) dx)$$

NB на схемах определенности F фигурирует из-за-ми ограничения, с помощью G - нет

Например, $n=1$, $\mu G=0$, т.е. $\sigma_{R_1}=0$, но если оп-ва не стр. - то она не нестр.

D-ho

\Rightarrow Exist f-uni., so no n.3 approx. Doppoly

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon \quad (1) \quad (\delta = \delta(\varepsilon))$$

No $S_R^* \geq \sigma_R \geq S_{R+}$ wpm modern budeope upravem. Torek ($m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$)

$$S_R^* \geq \Sigma \geq S_{R+} \Rightarrow \sigma_R - \Sigma \leq S_R^* - S_{R+} < \varepsilon$$

R_k -noce-imb problem, $|R_k| \rightarrow 0$

$$\forall \delta > 0 \rightarrow \exists K_0: \forall K \geq K_0 \rightarrow |R_k| < \delta \quad (K_0 = K_0(\delta)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists K_0: \forall K \geq K_0 \rightarrow \omega_{R_k} < \varepsilon \Rightarrow |\sigma_{R_k} - \Sigma| \leq \omega_{R_k} < \varepsilon$$

(nogurabreen R_k & (1))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k} = \Sigma$$

$\Leftarrow \forall R_k, |R_k| \rightarrow 0, \forall \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k} = \Sigma$, f orp.

gorendem, zio f uni. u $\int_G f(x) dx = \Sigma$

Njeto zio nerevn; No n.3 approx. Doppoly:

$$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \rightarrow \exists R, |R| < \delta: S_R^* - S_{R+} \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ne napryedek odrys-fu}, \mu G > 0$$

$$\exists \varepsilon > 0: \forall K \rightarrow \exists R_k, |R_k| < \frac{1}{k}: S_{R_k}^* - S_{R_k+} \geq \varepsilon \quad (|R_k| \rightarrow 0)$$

$$M_i^{(k)} = \sup_{G_i^{(k)}} f(x), \text{ t.e. } \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)}: M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$S_{R_k}^* - \sigma_{R_k} = \sum_{i=1}^{N_k} (M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)})) \mu G_i^{(k)} < \frac{\varepsilon}{4 \mu G} \cdot \sum_{i=1}^{N_k} \mu G_i^{(k)} = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$$

Analogovo, $\exists \eta_i^{(k)} \in G_i^{(k)}: \sigma_{R_k+}^* - S_{R_k+} \leq \frac{\varepsilon}{4}$



$$\Rightarrow \sigma_{R_k}^* - \sigma_{R_k+} \geq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ no } \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k+}^* = \Sigma \Rightarrow \sigma_{R_k} - \sigma_{R_k+}^* \rightarrow 0$$

Pravikoperne. \square

Chanciba univergruzenek op-uni

① Nei $G: \mu G = 0$ modat op. op-uni univergruzen u $\int_G f(x) dx = 0$.

Orebuyno: bee $\mu G_i = 0 \rightarrow S_R^* = \sigma_R = S_{R+} = 0$

② Aggrumbraciis univergruzen no un- by

Нуцись $G = G_1 \cup G_2$, $\mu(G_1 \cap G_2) = 0$

Если f мкт. на $G_1 \cup G_2$, то f мкт. на G и $\int_G f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx + \int_{G_2} f(x) dx$

Д-бо: no n. 2 крит. Достат.

$\exists R$ -пазд. G_1 : $\omega_{R_1} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists R_2$ -пазд. G_2 : $\omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$



R' -пазд. $G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$, κ -пое наименше из R_1, R_2 ближайшими
одинаки $r_i < G_1 \cap G_2$.

Все оцінювання ум-да мкт. нульової мепы $\Rightarrow \omega_{R'} = \omega_R < \frac{\varepsilon}{2}$

R'' -то же саме, $\omega_{R''} = \omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Рас-ун R -пазд. $R_1 \cup R_2$, близор. все ун-да $R'_1, R''_2 \in G_1 \cap G_2$.

$$\omega_R = \omega_{R_1} + \omega_{R_2} + \omega_{R'} \cdot \mu(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$$

No n. 2 крит. Достат. f мкт. на $G = G_1 \cup G_2$.

$$\sigma_R = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2} + f(\xi_i) \cdot \mu(G_1 \cap G_2)$$

f -мкт. на $G \Rightarrow$ no мод-да мкт-и Римановських сум σ_{x_n} , $|R_n| \rightarrow 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{x_n} = I = \int_G f(x) dx$$

Если біз-коє σ'_{x_n} гд- G_1 , то єн-о-так-и Римановська сума гд-

$G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$ та нульове варіанте, та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_{x_n} = I_1 = \int_{G_1} f(x) dx$$

$$\text{Аналогично } R_2: \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma''_{x_n} = I_2 = \int_{G_2} f(x) dx$$

σ_{x_n} сума. of $\sigma'_{x_n} + \sigma''_{x_n}$ та нульове варіанте $\Rightarrow I = I_1 + I_2$ УДА

③ Нуцись f -мкт. на $G \subset R^n$, $G_0 \subset G$ -мкт. нульової, існує f мкт. на G_0 ,

Д-бо: no n. 3 крит. Достат.

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R$ -пазд. G , $|R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$.

Рас-ун мод-да пазд. R_0 ун-да G_0 , $|R_0| < \delta$. Існує ек-максимум

нагромадження g пазд. R ун-да G : $|R| < \delta$. $\omega_R \leq \omega_R < \varepsilon$,

no n. 3 крит. Достат. f мкт. на G_0 . УДА

④ Множинний виведення

Нуцись f мкт. на ун-да $G \subset R^n$, $\alpha, \beta \in R$, існує

$$\alpha f + \beta g - \text{univ. na } G, \quad \int_G f + g = \alpha \int_G f + \beta \int_G g$$

D-bo: $\sigma_{R_n}(f) \rightarrow I_1 = \int_G f, \quad \sigma_{R_n}(g) \rightarrow I_2 = \int_G g$, orebyno, \Rightarrow

$$\sigma_{R_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_{R_n}(f) + \beta \sigma_{R_n}(g) \rightarrow \alpha I_1 + \beta I_2$$

T-k. R_n -model, $|R_n| \rightarrow 0$, $\exists_i^{(e)} \in G_i^{(e)}$ - model $\Rightarrow \alpha f + \beta g$ - univ.,

$$\int_G \alpha f + \beta g = \alpha \int_G f + \beta \int_G g \quad \text{UTA}$$

⑤ f, g - univ. na G . Torga fg - univ.

$$\begin{aligned} \text{D-bo: } & |f(x'')g(x') - f(x')g(x')| = |f(x'')(g(x'') - g(x')) + (f(x'') - f(x'))g(x')| \leq \\ & \leq M(|g(x'') - g(x')| + |f(x'') + f(x')|) \quad (\text{t-k. } |f|, |g| \leq M - \text{op.}) \\ & x'', x' \in G \Rightarrow |g(x'') - g(x')| \leq \omega_i(g) \\ & |f(x'') - f(x')| \leq \omega_i(f) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow M(\omega_i(f) + \omega_i(g)); \text{ neperem k sup: } \omega_k(fg) \leq M(\omega_i(f) + \omega_i(g))$$

$$\begin{aligned} \omega_k(fg) &= \sum_{i=1}^n \omega_i(fg) \mu G_i \leq \sum_{i=1}^n M(\omega_i(f) + \omega_i(g)) \cdot \mu G_i \leq \\ &\leq M(\omega_k(f) + \omega_k(g)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{No n. 2 ksp. Dopolj } \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R(f) < \frac{\varepsilon}{2M}, \omega_R(g) < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_R < \varepsilon \Rightarrow fg - \text{univ. na } G \quad \text{UTA} \end{aligned}$$

⑥ f - univ. na $G \Rightarrow |f|$ univ. na G

$$\begin{aligned} \text{D-bo: anayomno, t-k. } & ||x''| - |x'||| \leq |x'' - x'| \Rightarrow \\ & \Rightarrow \omega_i(|f|) \leq \omega_i(f) \Rightarrow \omega_k(|f|) \leq \omega_i(f) \quad \text{UTA} \end{aligned}$$

⑦ $\text{Eam } f(x) = \text{const na } \text{univ. } G \Rightarrow f - \text{univ. na } G, \quad \int f(x) dx = C \cdot \mu G.$

$$\text{D-bo: } M_i, m_i = \text{const} \Rightarrow S_n^* = S_n = \sum_{i=1}^n C \cdot \mu G_i = C \cdot \mu G. \quad \text{UTA}$$

⑧ Унекропадение неравенств

f и g - univ. na G , $f(x) \geq g(x)$.

$$\text{Torga } \int_G f(x) dx \geq \int_G g(x) dx$$

D-bo: orebyno uz torgo, $\forall R \rightarrow \sigma_R(f) \geq \sigma_R(g)$, gache neperem k nregey.

UTA

Следствие

⑨ $\text{Eam } f(x) \geq 0 \text{ na } \text{univ. } G \Rightarrow \int_G f(x) dx \geq 0$

⑤ Если $f(x)$ мон. на G , то $\left| \int_G f(x) dx \right| \leq \int_G |f(x)| dx$

Д-бо: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

т.к. f и $|f|$ мон., то

$$-\int_G |f| \leq \int_G f \leq \int_G |f| \Rightarrow \left| \int_G f \right| \leq \int_G |f|$$

УТД

⑥ f, g мон. на G , $|f| \leq M \Rightarrow \left| \int_G fg \right| \leq M \int_G g$

Д-бо: $-M \leq f(x) \leq M \Rightarrow -M|g| \leq fg \leq M|g|$ - умножаем, УТД.

⑦ Интегрирование сложных неравенств

$f(x) \geq g(x)$ на изм. мн-бе G , или одн. нерп. во внутр. т. $x_0 \in G$,

$f(x_0) > g(x_0)$, Тогда $\int_G f > \int_G g$ - основное лемма доказательства неравенства.

Д-бо: $\varphi(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. $\varphi(x)$ нерп. в x_0 , $\varphi(x_0) > 0$.

$$\text{Раз-е } G = U_\delta(x_0) \cup (G \setminus U_\delta(x_0))$$

$U_\delta(x_0) \subset G$, $\varphi(x) > \frac{\varphi(x_0)}{2}$ в $U_\delta(x_0)$ (уст. лемма о сопр. знако).

$$\int_G \varphi(x) dx = \int_{U_\delta(x_0)} \varphi(x) dx + \int_{G \setminus U_\delta(x_0)} \varphi(x) dx \geq \frac{\varphi(x_0)}{2} \underbrace{\mu(U_\delta(x_0))}_{> 0 \text{ (т.к. } x_0 \text{ - внутр. т.)}} > 0$$

УТД

⑧ Непрерывность интеграла по множеству

$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots \subset G$ - возрас. множ. мн-б, все изм.

$\mu G_n \rightarrow \mu G$, $n \rightarrow \infty$. $f(x)$ опр. на G и мон. на всех G_n . Тогда она

$$\text{мн. на } G \text{ и } \int_G f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} f(x) dx$$

Д-бо: $G = G_\infty + (G \setminus G_\infty)$
измерим.

$$\mu(G \setminus G_\infty) = \mu G - \mu G_\infty \rightarrow 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists k : \mu(G \setminus G_k) < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad M = \sup_G |f(x)|$$

т.к. f мон. на G_∞ , то на $n \cdot 2$ кр. Допод.

$$\exists R' - погр. G_\infty : \omega_{R'} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Найдем R -погр. G : бсв мн-ба R' и еще $G \setminus G_\infty$

$$\omega_R = \omega_{R'} + \omega_{\omega} \cdot \mu(G \setminus G_\infty) < (\omega_{R'} + \text{коеф. } f \text{ на } (G \setminus G_\infty), \omega_{R'} \leq 2M)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon, \text{ на } n \cdot 2 \text{ кр. Допод } f \text{ мон.}$$

$$\int_G = \int_{G_\infty} + \int_{G \setminus G_\infty} \Rightarrow \int_G = \int_{G \setminus G_\infty} - \int_{G_\infty}$$

$$\left| \int_G f - \int_{G_k} f \right| = \left| \int_{G \setminus G_k} f \right| \leq M \cdot m(G \setminus G_k) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{G_k} f \rightarrow \int_G f \text{ UTA}$$

11 Teorema o opregnem

f ug - uni. na G , $g(x)$ comp. znac. f-nya

$$\int_G fg = m \int_G g, \quad \forall \mu \in [m, M], \quad m = \inf_G f, \quad M = \sup_G f$$

Eam G -bezvoini komponi u f-neye. na G , to $\mu = f(z)$, $z \in G$.

D-bo: giz op. $g \geq 0$

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$m g(x) \leq fg \leq M g(x)$$

$$m \int_G g \leq \int_G fg \leq M \int_G g \quad -\text{eam } \int_G g = 0, \text{ to r. lempa } \nu_m. \text{ Unare}$$

$$m \leq \frac{\int_G fg}{\int_G g} \leq M \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int_G fg = \mu \int_G g$$

Eam G -komponi, to f gizmirei na nem $m \leq M$, a.r.k. uni-bo obzno,

To nymum. bee znac. nemyy $m \leq M$, i.e. $\exists z \in G: m = f(z)$ UTA

7ib

Pryes $G = G_1 \cup G_2$, $\mu G_2 = 0$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Eam $f(x)$ op. u uni. na un. de G , to kacce u opregnem na G_2 (unus de opagnem),

to ne vobimet u ne uslyupjennosti, to na znac-e uslyuda

D-bo

$f(x)$ na G_2 op. kazann-to odrazom, op.

$$\int_{G_2} f(x) dx = 0$$

$$\int_{G_1} f(x) dx - cnyz-es \Rightarrow \exists \int_G f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx + \int_{G_2} f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx.$$

Fakun odrazom, na un-be njeboi mpti $f(x)$ monno smotri gane neopregnem.

Primer - op. uuni. op-ur

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ atau } y \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad G: 0 \leq x, y \leq 1$$

Pryes $f(x, y)$ - uni., $\int_G f(x) dx = I$

\forall nac.-iu $R_n: |R_n| \rightarrow 0$, \forall bordone opagnem. izre $\rightarrow \sigma_{R_n} \rightarrow I$

R_n - разд. на квадратики со стороной $\frac{1}{2^n}$.

$\exists \xi_i^{(n)} \in G_i : f(\xi_i^{(n)}) = 1, \alpha_{R_n}^1 = 1$

$\exists \eta_i^{(n)} \in G_i : f(\eta_i^{(n)}) = 0, \alpha_{R_n}^0 = 0$

Дено, что η -мн-во не ун.

§2 Элементарные мн-ва в R^n . Стеговые координаты и поверхности

$G^* \subset R^{n+1}$

$$G^* = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : \psi(x_1, \dots, x_n) \leq x_{n+1} \leq \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$$

Норм. мн-во $(x_1, \dots, x_n) \in G \subset R^n$, $\psi \leq \varphi$ опр. на G

Если $n=1$:



Рассмотрим ψ, φ - ун. на G . Тогда

1. Если $\varphi(x) > 0, \psi(x) = 0$, то G^* - пограничное мн-во $x_{n+1} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ (M_φ)

2. Если $\varphi(x) = \psi(x)$, то G^* - гладкое мн-во $x_{n+1} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ (Γ_φ)

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} = \varphi(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in G\}$$

Теорема

1. Рассмотрим $\psi(x)$ ун. на $G \subset R^n$, тогда Γ_ψ измерим в R^{n+1} и $\mu \Gamma_\psi = 0$.

2. Рассмотрим $\varphi(x)$ неприм. ун. на $G \subset R^n$. Тогда Π_φ измерим в R^{n+1} и $\mu \Pi_\varphi = \int f(x) dx$ D-бо:

Разд-во разбиение $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$, $m(G_i \cap G_j) = 0, i \neq j$

2. Равн. измеримые множества $S_\varphi = \bigcup_{i=1}^n U_\varphi(G_i, 0, m_i)$, $T_\varphi = \bigcup_{i=1}^n U_\varphi(G_i, 0, M_i)$, где $\varphi > 0$.

$$m_i = \inf_{G_i} \varphi(x) \quad M_i = \sup_{G_i} \varphi(x)$$

$$m(U_\varphi(G_i, 0, m_i)) = m_i \cdot \mu G_i \text{ в } R^{n+1}$$

Если $i \neq j$ то в. измнжеское пересеч-е не м-но в. измнжеское пересеч-е в \mathbb{R}^{n+1} .

В смык конечной однородности мерой Моргана

$$\mu S_R = \sum_{i=1}^n m_i \mu G_i = S_{\#R}, \quad \mu T_R = S_{\#R}.$$

$$S_{\#R} \subset \Pi_\varphi \subset T_R$$

$$\mu S_{\#R} = \mu S_R \leq \mu \Pi_\varphi \leq \mu^* \Pi_\varphi \leq \mu^* T_R = \mu T_R = S_{\#R}$$

$$0 \leq \mu^* \Pi_\varphi - \mu \Pi_\varphi \leq S_{\#R} - S_{\#R} = w_R$$

По н-з крит. Доподы $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R : w_R < \varepsilon \Rightarrow \mu^* \Pi_\varphi = \mu \Pi_\varphi \Rightarrow \Pi_\varphi$ измерим

$$S_{\#R} \leq \mu \Pi_\varphi \leq S_{\#R}$$

$$\text{Но } I = \int_G \varphi(x) dx, \quad S_{\#R} \leq I \leq S_{\#R}$$

Также $|\mu \Pi_\varphi - I| \leq w_R < \varepsilon$, т.к. $\varepsilon > 0$ -модер $\Rightarrow \mu \Pi_\varphi = I$. \square

$$1. P_R = \bigcup_{i=1}^n U_i(G_i, m_i, M_i) - \text{нед. измнжеское}$$

$$\mu P_R = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \mu G_i = w_R$$

$$P_R \geq \Pi_\varphi \Rightarrow \mu^* \Pi_\varphi \leq \mu P_R < \varepsilon$$

$$\varepsilon > 0 \text{-модер} \Rightarrow \mu^* \Pi_\varphi = 0 \Rightarrow \mu \Pi_\varphi = 0 \quad \text{Итд}$$



на самом деле бах (форма + правильное оп-ми элементов измнжеское измеримое)

не бах, окаян. оп-ми измнжеское неизр. измер.

Общие & необщие измеримые

$$\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad n=m=1$$

$$\int_G f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_G f(x, y) dx dy \quad \iint_G f(x) dx dy - \text{общий измеримый}$$

$$n=m=p=1$$

$$\iiint_G f(x) dx dy dz - \text{тройной измеримый}$$

Задача: $G^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$G^* = \left\{ \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{x \in \mathbb{R}^n}, \underbrace{x_{n+1}}_y \right\}$$

$$G^* = \left\{ (x, y), x \in G \subset \mathbb{R}^n, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}, \quad \varphi, \psi - \text{изр.-ные в. измнжеское } G$$

Задача: сим. сим. в. измнжеское

G^* изн. в \mathbb{R}^{n+1} , $mG^* = \int (\varphi(x) - \psi(x)) dx$

Если $\varphi \geq \psi \geq 0$, то $G^* = \int_{\varphi}^{\psi} (\Pi_\varphi \setminus \Pi_\psi) d\Pi_\varphi$ - бесконтактная изн., $m\Pi_\varphi = 0 \Rightarrow mG^* = \mu\Pi_\varphi - \mu\Pi_\psi$

Теорема о сжатии краиного интеграла к поборному

Пусть $G^* = \{(x, y) : x \in G \subset \mathbb{R}^n, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$, φ, ψ - монотонные на G , G - изн. в \mathbb{R}^n .

Пусть f -изн. на G^* , и $\forall x \in G \rightarrow \exists \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy = \Phi(x)$

Тогда Φ изн. на G , и

$$\int_{G^*} f(x, y) dx dy = \int_G \Phi(x) dx$$

$$\int_{G^*} f(x, y) dx dy = \int_G \left\{ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

Д-бо:



Чтобы φ - монотонная на $G \rightarrow$ она выпуклая, т.е. $\exists A, B : \forall x \in G \rightarrow A \leq \psi(x) \leq \varphi(x) \leq B$
 $\tilde{G} = \cup (G, A, B)$

Нулюм $f(x, y) = 0$ на $\tilde{G} \setminus G^*$.

Такое зонир-е не влияет на значение интеграла, т.к.

$$\Phi(x) = \int_A^B f(x, y) dy - \text{ун. изн.-е} \quad \forall x \in G$$

$G^* \rightarrow \tilde{G}$

Пусть g -изн. на Φ изн. на G , и

$$\int_{\tilde{G}} f(x, y) dx dy = \int_G dx \int_A^B f(x, y) dy$$

Нулюм $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ - конечное разбиение G

Отрезок $[A; B]$ разб. на отрезки $[d_{j-1}; d_j], 1 \leq j \leq p$

Возникает разбиение \tilde{G} на изн. $\tilde{G}_{i,j} = \{(x, y) : x \in G_i, y \in [d_{j-1}, d_j]\}$

(нечет. \rightarrow не изн. изн. мерой: доказать под-е изн. мерой и основание)

- "зашерченное разбиение" \tilde{G}

$$m_{i,j} = \inf_{y \in G_i} f(x, y), \quad M_{i,j} = \sup_{y \in G_i} f(x, y)$$

Пусть $j = 1..p$ - индекс, $x \in G_i$

$$m_{i,j} \Delta d_j \leq \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(x, y) dy \leq M_{i,j} \Delta d_j$$

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \leq \int_A f(x,y) dy \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_j \quad - \text{lepros } Vx \in G_i$$

$\Phi(x)$

Если $m_i = \inf_{G_i} \Phi(x)$, $M_i = \sup_{G_i} \Phi(x)$:

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \leq m_i \leq M_i \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_j$$

$$0 \leq M_i - m_i \leq \sum_{j=1}^p (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_j$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu G_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p w_{ij} \Delta x_j \mu G_i$$

$$w_R(\Phi) \leq w_{\tilde{R}}(f)$$

последнее $\overset{\text{коэф. суммы}}{\underset{\text{последнее}}{\leq}}$

Фунд. теория \tilde{G} , но п. 3 касн. Допод $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall \tilde{R}, |\tilde{R}| < \delta \rightarrow w_{\tilde{R}}(f) < \varepsilon$

В заключение это лепрос V касн. последнее $|\tilde{R}| < \delta$.

Далее коэф. последнее R и.да G $w_R(\Phi) < \varepsilon$

Но п. 2 касн. Допод $\Phi(x)$ и.да G .

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \leq \Phi(x) \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_j \quad - \text{лепрос } Vx \in G_i; \text{ и.да } G_i!$$

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \mu G_i \leq \int_{G_i} \Phi(x) dx \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_j \underbrace{\mu G_i}_{m_{ij}}$$

Продолжим по $i=1..N$:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} \mu G_i}_{S_{*\tilde{R}}} \leq \int_{\tilde{R}} \Phi(x) dx \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p M_{ij} \mu G_i}_{S_{\tilde{R}}^*}$$

$S_{*\tilde{R}}$ \tilde{I}_1 $S_{\tilde{R}}^*$

$$S_{*\tilde{R}} \leq \tilde{I}_1 \leq S_{\tilde{R}}^*$$

$\text{какое-то последнее}$
 \tilde{G}

$$I_2 = \iint_{\tilde{G}} f(x,y) dx dy, \text{ тогда } S_{*\tilde{R}} \leq I_2 \leq S_{\tilde{R}}^*$$

$$|I_1 - I_2| \leq S_{\tilde{R}}^* - S_{*\tilde{R}} = w_{\tilde{R}}(f)$$

Но п. 3 касн. Допод $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall \tilde{R}, |\tilde{R}| < \delta \rightarrow w_{\tilde{R}}(f) < \varepsilon$

В заключение такого последнего можно брать касн. последнее

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$ касн. $\tilde{R}: w_{\tilde{R}}(f) < \varepsilon$

ε -модер, $|I_1 - I_2| < \varepsilon \Rightarrow I_1 = I_2$

УТА

Пример

$$\iiint_{G^*} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z) dz$$

$$G^* = \{x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$$



§ 3. Классы интегрируемых функций

Теорема

$f(x)$, непрерывная на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, интегрируема.

Д-бо:

$$\mu F = 0 \Rightarrow f \text{ опр.} \Rightarrow \text{лишь zeros}$$

$\mu F > 0 \Rightarrow f$ подавлено непр. на F (но f конн.)

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in F, |g(x', x'')| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$$

$$\omega(f) \text{ на } G_i = \sup_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')|$$

$$\text{Еам } \text{diam } G_i < \delta: \sup_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2\mu F} < \frac{\varepsilon}{\mu F}$$

$$\omega_R = \sum_{i=1}^N \omega_i \mu G_i < \frac{\varepsilon}{\mu F} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N \mu G_i}_{\mu F} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$$

По п. 3 из доказ. f интегрируема.

УДА

Упражнение

Пусть f опр. на компакте F и ин-бо зоре, в к-ром она не заб-ся непрерывной на F , имеет нерг. 0. Тогда $f(x)$ инт. на F .

D-Bo:

Рус F₀ - мн-бо т. полупл, $\mu F_0 = 0$. $M = \sup_F |f(x)|$

Лемма 3: неравн. нрп. Допод: $\exists S$ - открытое множество, $mS < \mu F_0 + \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4M}$, $S \supset F_0$.



$F \setminus S$ - замкнутое мн-бо \Rightarrow компакт.

f непр. на $F \setminus S \Rightarrow$ мкт. на $F \setminus S$ нрп. т.

Но н.2 нрп. Допод:

\exists пол. R мн-бо $F \setminus S$: $\omega_R < \frac{\varepsilon}{2}$

R' - пол. F, сор. из R, к-к-прыг. добудено $S \cap F$. $\omega_{R'}$ -замкн. F на $F \cap S$

$$\omega_R = \omega_R + \underbrace{\omega_R \mu(F \cap S)}_{\leq 2M} < mS$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R'$ - пол. F: $\omega_{R'} < \varepsilon$. Но н.2 нрп. Допод f мкт. на F. UTA

