

# Глава XVII

Несколько приложений к экстремумам функций нескольких переменных

## §1. Теорема о несуществовании

$$F(x, y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$  — не является гладкой ф-и



### Теорема

Пусть ф-я 2-х переменных гладк. в  $U(x_0, y_0)$ .  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$

б-к-ром ур-е  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ .

•  $F(x)$  непр-гладк. на  $(x_0 - a, x_0 + a)$  и  $f'(x) = -\frac{F'_x(x, F(x))}{F'_y(x, F(x))}$  на  $(x_0 - a, x_0 + a)$

### Д-бо

① Не наружн. одн.,  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ .

По лемме о сопр. знака,  $\exists$  отр-е  $(x_0, y_0)$  (б-к-е прямой).

$\tilde{\Pi} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ , можно сказать, что

$F'_y > 0$  в  $\tilde{\Pi}$ .



$$\varphi(y) = F(x_0, y)$$

$$\varphi(y_0) = 0, \quad \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0, \quad y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

$\varphi(y) \uparrow$  справа

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$

По лемме о сопр. знака (зак F)  $\exists A: \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \begin{cases} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{cases}$

Значит  $x^* \in (x_0 - a, x_0 + a)$

$$\varphi(y) = F(x^*, y)$$

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0$$

но т. б-к,  $\exists y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]: \varphi(y^*) = 0$

$$\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \varphi(y) \uparrow$$
 справа  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Foga:  $f(y^*) = 0$  - egensid.

$\forall x^* \in [x_0-a, x_0+a] \exists! y^* \in [y_0-b, y_0+b]$

$$f(x^*, y^*) = 0$$

$$y^* = f(x^*) \quad \text{Replace 2. givværdi}$$

② Hvis  $x \in [x_0-a, x_0+a]$ ,  $y = f(x)$ .

$$f(x, y) = 0$$

$\Delta x$  - udværdi af  $x$ ,  $\Delta y$  - udværdi af  $y$ .

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$

No 1. læren om der er en vektor mellem  $(x, y)$  og  $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ .

$$0 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_x(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta y,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y)}{f'_y(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y)}$$

$$\Pi = \{x_0-a < x \leq x_0+a, y_0-b < y \leq y_0+b\}$$

$$\bar{\Pi} = \{x_0-a \leq x \leq x_0+a, y_0-b \leq y \leq y_0+b\}$$

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \text{ på } \bar{\Pi}.$$

$\bar{\Pi}$  - konvex, d.h.  $|f'_x| \leq \alpha$  - v.p.

$$f'_y \geq \beta > 0 - \text{genn. inf.}$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq \frac{\alpha}{\beta} = M$$

$$|\Delta y| \leq M |\Delta x|$$

$y = f(x)$  v.p. på  $[x_0-a, x_0+a]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta = \frac{\epsilon}{M} > 0)$$

Foga  $f$  - påknapet v.p. på  $(x_0-a, x_0+a)$ .

No 3. o. sammenhæng mellem op-værdi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x, f(x))}{f'_y(x, f(x))} - \text{v.p.} \quad \text{UTD}$$

## Teorema (адызы)

- ① Рассмотрим  $n+1$  неизвестных  $F(x_1, \dots, x_n, y)$  непр. гладкое. Имеем  $\partial F/\partial x_i(x^*, \dots, x_n^*, y^*) = 0$ ,  $F'(x^*, \dots, x_n^*, y^*) \neq 0$ . Тогда  $\exists$  нахождение  $y$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ :
- $$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n, y^* - \beta < y < y^* + \beta\},$$
- и имеем  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \dots, x_n)$ .
- ②  $F$  непр. гладкое. Имеем  $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n\}$ , имеем в  $\Pi'$
- $$f'_i = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_{y}(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i=1, \dots, n.$$

Доказательство:

① Док. равене, Тогда  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

② Докажем:

Пусть  $\gamma$ . Аддитивна для  $q$ -умножения непр.

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1 + \alpha x_1, \dots, x_n + \alpha x_n, y + \alpha y) - F(x_1, \dots, x_n, y) = \\ &= F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y) \alpha x_1 + \dots + \\ &\quad F'_{x_n}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y) \alpha x_n + \\ &\quad F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y) \alpha y \\ \alpha y &= -\frac{F'_{x_1} \alpha x_1 + \dots + F'_{x_n} \alpha x_n}{F'_{y}} \leq \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\beta} = M_\beta \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i, |F'_{y}| \geq \beta) \end{aligned}$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$  падает непр. на  $\Pi'$

$$\lim_{\alpha x_i \rightarrow 0} \alpha y = 0$$

Рассмотрим  $\alpha x_1 = \dots = \alpha x_n = 0$

$$\frac{\alpha y}{\alpha x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, x_2, \dots, x_n, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y)}{F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\beta} \alpha x_1, x_2, \dots, y + \frac{\gamma}{\beta} \alpha y)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{\alpha x_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{\alpha x_1} = \dots = -\frac{df}{dx_1}, \quad \text{аналогично } x_2, \dots, x_n.$$

Чтож.

## § 2 Teorema o one-me neblivim p-ii

Dnach.  $u = u(x)$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad - \text{gugup-p-ii}$$

Marginalna deriva -  $D_u = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

Esim. ona kladymas, kai cyp-er atspiegiamus - deriva.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

### Teorema (o mese)

Pykne  $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  neyp-gugup-p-ii & cyp-ii  
 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Torga  $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\text{Ie } \left. \begin{cases} F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \bar{y} = f(\bar{x}), \text{ npvieni p-ii}$$

$y_i = F_i(\bar{x})$ ,  $i=1 \dots m$  - neyp-gugup. na

$$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$$

## § 3. Teorema apie atspalvius

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gugup.

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x})$$

Biamo gurejano: eim  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , Torga

$$D_{F \circ \Phi} = D_F \cdot D_\Phi.$$

Esim. eim  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$ , t0

$$D_{F\Phi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\Phi|_{\bar{x}}$$

Пусть  $n=m=p$ , тогда

$$J_{F\Phi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\Phi|_{\bar{x}}$$

Однозначні симбр.:

$$\Phi: G \rightarrow D \quad D \subset R^n$$

$$\Phi^{-1}: D \rightarrow G$$

$$\Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \Phi - \text{бінарній симбр.}$$

$$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1} - \text{если оно дифер.!}$$

Если симбр. диференційовна в груп., то однозначні симбр. не одержані для груп.!

$n=1$ :

$$y=x^3 - \text{дискр., дифер.}$$

однозначні непарні. & т. д.

Бінарній симбр.

$$\begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$\boxed{J \neq 0}$$

Опрац.

Симбр.  $\Phi$  - існує однозначні симбр. в окні  $G$ , якщо  $\forall \bar{x}_0 \in G \rightarrow \exists \delta > 0$ ;  $\Phi$  однозначні в  $U_\delta(\bar{x}_0)$ .

Теорема щодо однозначності симбр.-ів

Пусть  $\Phi: G \rightarrow R^n$  непр. дифер. в  $J_\Phi \neq 0 \& G$  ( $G \subset R^n$ ). Тогда  $\Phi$  існує однозначні:

$\forall x_0 \in G \rightarrow \exists \Phi^{-1}$  - непр. дифер. симбр. в  $y_0 = \Phi(x_0)$ .

Д-бо:

$$\text{Роз-вм } F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j, \quad j=1 \dots n$$

$$(y, x) \in R^{2n}$$

Оно непр. дифер.  $\forall (y, x) \in R^{2n}$  також, що  $x \in G$ ,  $y \in R^n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y, x_0)$$

Із т. є окн-не незвичайні  $\exists \Pi = \{(y, x) \in R^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

б к-пом

$$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$$

$F_i$  непр. функц. на  $\Pi' = \{y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i\} \subset R^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$  динамично отображает нен-е мн-ло  $X \subset R^n$  на  $\Pi'$ .

$$x = \Phi^{-1}(\Pi')$$

$\Pi'$ - отр. мн-ло, наимн. праобраз отр. мн-ла или непр. отр. един. отр. мн-ло  $\Rightarrow$

$\Rightarrow X$ - отображение



$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset X$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists U_\delta(x_0) \text{ б к-пом отр. гл-о отображения.} \quad \text{УГД}$$

## § 4. Экстремумы ф-ии нескольких переменных

Опт-е

$x^* \in R^n$  наз-ся локальн. макс. локального экстремума ф-ии  $y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x^*) \geq f(x) \forall x \in U_\delta(x^*) \text{ и } \forall x \in U_\delta(x^*) \rightarrow f(x) > f(x^*)$

Аналогично для мин. лок. экстр.

Несобственное ум. локального экстремума

Если  $f(x)$  непр. в  $x^*$  и  $x^*$  гл-о лок. экстр., то  $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \quad (\text{стационарное условие})$$

П-ло:

Рассмотрим ф-ию  $\varphi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Тако, что  $x_i^*$  - лок. экстремум токо по одн.  $x_i$ . Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{Аналогичные выражения}$$

УГД

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j$$

Норм. опр.:  $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) > 0$

Опим. опр.:  $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) < 0$

Ненорм., опр.:  $\exists x_1, x_2 : K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Ненорм. наизнеч.:  $\forall x \rightarrow K(x) \geq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Опим. наизнеч.:  $\forall x \rightarrow K(x) \leq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Если  $K(x) \equiv 0$ , то она назнеч. и опим. наизнеч., также ненормальна не будет.

Рассл.  $f$  гладкая непр. функц. в  $G \in \mathbb{R}^n$ , т.е. имеет все непр. производные порядка, начиная с 1-й и парные производные одинак. ( $F''_{yx} = F''_{xy}$ )

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(x^0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n F''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j - \text{кв. форма от. вектора } (dx_1, \dots, dx_n)$$

### Дифференцируемость функции

Рассл.  $f(x)$  гладкая непр. функц. в  $U_s(x^0)$  в  $x^0$ -связ. форме. Тогда  $K(x) = d^2 f(x^0)$  — кв. форма. Тогда:

1. если  $K(x)$  норм. определяема, то  $x^0$  — т. симметрии идентичной
2. если  $K(x)$  опим. опред., то  $x^0$  — т. симметрии минимумы
3. если  $K(x)$  ненорм., то  $x^0$  не гл-ся т. симметрии.
4. если  $K(x)$  наизнеч., то  $x^0$  — точка неэкстремума.

### Лемма

Рассл.  $K(x)$  в  $\mathbb{R}^n$  назнеч. опр., тогда  $\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \geq C|x|^2$

Если опим. опр., то  $\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \leq -C|x|^2$

Д-бо 1 доказ.

Задача, что  $K(x)$  норм. определяется в окрестности  $R'$ , т.е.  $K(x)$  — значение на бес-  
конечном множестве  $S$ .

$K(x_1, \dots, x_n)$  — непр. на  $R'$ .

$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  — опр. в замкнутой — ограниченной

Тогда опр. в  $S$ , непр. на  $S$ , замкнутая, поэтому  $\inf \text{ и } \sup \text{ на } S$ .

$K(x) \geq 0$  na  $S \Rightarrow \inf_s K = C > 0$ .

$\forall x \in S \rightarrow K(x) \geq C$ .

При  $x \neq 0 \in R^n$ . Рад-ун  $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$$

$$K(x) \geq C |x|^2 \quad \text{УТА}$$

D-бо тапсару

1.  $f(x)$  ғанаңын непр. грөзүп  $\mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow$  ынанымалык жиындар (Редно):

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0) \rightarrow f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(|g|^2), \quad g^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$$
$$df \equiv 0 \rightarrow \text{с. сипат.}$$

$d^2 f$  - нарам. орын.

Т.е.  $f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} (|dx|^2) + o(|dx|^2) =$

$$= f(x^0) + \frac{C}{2} |dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$$
$$= f(x^0) + |dx|^2 \left( \frac{C}{2} + \varepsilon(dx) \right)$$

$$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0 \quad \& \quad \mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0).$$

Т.е.  $x^0$  - с. сипат. нокт. минимум.

2. Анализмас

3.  $d^2 f(x^0)$  - неопр. кеб. сипат.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$ .

Рад-ун бекіспен нұтқаралғанда  $dx = \lambda z$ ,  $\lambda \neq 0$  (нұтқарынан  $\parallel z$ ).

$$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\left( \lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} \right)}_{\beta > 0} |z|^2$$

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$$
$$= f(x^0) + \frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2$$

$$\frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0 \quad \text{нан жи. нарын } \varepsilon(dx)$$

Т.е.  $f(x) > f(x^0)$  на  $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Анализмас енде  $dx = \lambda z'$ , то нұтқаралғанда нарын  $\varepsilon(dx)$   $f(x) < f(x^0)$ .

$x^0$  - не с. сипат.

Пример:  $z = x^4 + y^4$ ,  $z'_x = 4x^3$ ,  $z'_y = 4y^3$ , сипат. 1.  $(0,0)$ ,  $z''_x = 12x^2$ ,  $z''_y = 12y^2$ ,  $z''_{xy} = 0$ ,  $d^2 z(0,0) = 0$ .

Mayo conjecture  $\Delta z(0,0)$ :  $z(\alpha x, \alpha y) - z(0,0) > 0$  then  $\alpha x^2 + \alpha y^2 > 0$  - max. min.

## § 5. Установки (ориентации) экспрессии.

$$z = xy \quad (\text{csgos})$$

$$z_x' = y, \quad z_y' = x \quad (\text{gr. 1.} (0,0))$$

$$z_{xx}^1 = z_{yy}^1 = 0, \quad z_{xy}^{''} = 1$$

$d^2 z = \text{neur. ab. q.} - \text{neur. exp.}$

Given  $y = x + z$ ,  $x = z(1-z)$ , so mod. is  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Ons

T.  $x^*$  may not be T. extremes because necessary op-an  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  upon domain-  
nemum yustobt chayn  $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0$ , ecm  $\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x^*)$  upon boun. yec.  
chayn  $\rightarrow f(x) > f(x^*)$

Если из ус. слова можно это выражение оценить через группу, то возможна  
загадка на синоним. Загадка оп-ми менюса зайде оценкой.

A eum nei, zo symmetrisch op- en terugdraaien.

Приєсть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ , існує відповідна  $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 q_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_n q_n(x)$

Then both  $\varphi$ - $\lambda$  change  $L = f, \forall \lambda_i$ . - you equip  $f$  in  $L$  cobragars.

Модификация  $y = -x$  сине. экспрессия

Пусть  $f(x)$ ,  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1 \dots n$ ) непр. функции в  $U_\delta(x^*)$ . Пусть  $x^* - \tau$ -смк. экстремум

$f(x)$  якщо  $\varphi_i(x) = 0$ , інакше  $rg\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) = m$  (кофактори  $\varphi_i$  умільшують незалежність).

Tогда  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ :  $x^* - r.$  одновременно экстремумы  $L(x)$ .

Međutim, povezivajući  $\varphi$ -nuj,  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{array} \right.$  - one-juju  $n+m$  yp-ju u  $c$   $n+m$  kružbi,  $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

D - 69:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad \operatorname{rg} \Phi = m, \quad x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

Er muss nun genau  $n = 0$ . Das ergibt in 1-n nun:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{array} \right| \neq 0 \quad \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \neq 0 \text{ bei } T_x \Rightarrow \varphi \text{ ist } U_\delta(x) \text{ stetig nernp.}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ \psi_m(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \end{cases} \quad \text{No T. Onechnai p-cm } \exists \text{ ovp-to } x^*, \text{ b k-poin} \\ \text{are na nekubasenina yek. sluzhi}.$$

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_{m+1}, \dots, x_n - \text{незав. ф-ии} \\ x_1, \dots, x_m - \text{зависимые} \end{array}$$

9-и г. квадратичн. б. опр-ии  $\tilde{x}^o = (x_{1+o}, \dots, x_n^o)$ . Продолж. же. вез:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n & dx_1, \dots, dx_m - \text{zab. Gruppen - var} \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n & dx_{m+1}, \dots, dx_n - \text{negab. Gruppen - var} \end{cases}$$

При каком  $x$  значение  $f(x)$  будет наибольшим?

$$f(x)|_*= f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = F_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_* = \mathcal{L}(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathcal{L}_*(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_*=f(x)|_*$$

$$L_\alpha(\tilde{x}) = f_\alpha(\tilde{x}) \quad \forall x;$$

$$d\mathcal{L}(\tilde{x}^*) = df_*(\tilde{x}^*) = 0 \quad (\text{T.R. zero norm outer gradient}) \quad \forall i$$

В any unbarmehnem gup - ic относ. замена переменной

$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^*) = d(\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}) = d\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}$  - греческое обозначение  
 (греческое обозначение введенное в определение)

$$d \mathcal{L}(x) \Big|_{x_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} dx_n$$

$\swarrow$   $\searrow$

zabranen negativen

До сих пор  $\lambda_i$ -прост. Поэтому  $\lambda_i$  так, что  $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0$ .

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \int \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i}(x^*) = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m}(x^*) = 0 \right.$$

- Cine-nă sun-ză-mi, ei argeș!

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ perm-e}$$

2: nāngenu.

Рынок равн. 2:1

$$dL_0(\tilde{x}^*) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) dx_m}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) dx_n}_{=0}$$

Но  $dL_0(\tilde{x}^*) = 0$   $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0 \Rightarrow$  рыноч. равн. 2:1  $x^*$  - стаб. точка.  
 $dx_{m+1}, \dots, dx_n$  - ненул.

УДА

Две проверки неодн. ус-я  $\Rightarrow$  однос. экстремуму можно пользоваться:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \psi_1 = \dots = \psi_m = 0 \end{array} \right. \quad \text{n+m уп-ий, n+m ненул.}$$

### Дискриминантное критерий

Функции  $f(x)$ ,  $\psi_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m < n$  - гладкие непр. функц. с нулевыми производными по  $x_i$  в точке  $\tilde{x}$ .  
При этом матрица Гессеана  $\left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$  падает в Т.Х.

При этом  $\tilde{x}^*$  и  $\lambda_i$ ,  $i=1 \dots n$  являются решением (I). Тогда в Т.Х. получаем квадратичную форму  $d^2L(\tilde{x}^*) \Big|_{**}$  - квадратичная форма  $n-m$  независимых переменных. (обозначение  $\lambda$  не имеет смысла, т.к.  $\lambda$  не является независимой переменной).

Тогда если эта форма положит. симм., то  $\tilde{x}^*$  - л.стационарные точек минимума  $f$  (если  $\lambda$  неотрицательны), если отрицат. симм., то  $\tilde{x}^*$  - л.стационарные точки максимума  $f$  (если  $\lambda$  положительны), то  $\tilde{x}^*$  - не л.стационарные точки экстремума.

**Пример:** Если  $d^2L(\tilde{x}^*)$  - неотрицательная симм. квадратичная форма в группе об (то минимум), то есть минимум ( $**$ ) или максимум ( $**$ ).

Иначе имеем генеральный минимум ( $**$ ).

Если же негативна ( $**$ ) квадратичная форма в группе об, то есть максимум.

**Пример:**

$$f = xy \text{ при ус-и } x+y=1$$

$$L = xy + \lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = y = \frac{1}{2}$$

$$d^2 \lambda = 2dx dy - \text{неоптим. кб. огранка от } dx, dy$$

Прогресс. ум. образ:  $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$

$$d^2 \lambda|_{x,y} = -2dx^2 - \text{сигн. оптим. кб. огранка от } dy = 0$$

Значит  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  - ум. минимум.

### Справка

$d^2 f$  не одн. ил. огранка от  $\lambda$  знач. непрерывн.

$f = f(x_1, \dots, x_n)$  - гладкая непр. функц.

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^n dx_k d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k + \sum_{k=1}^n dx_k \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \right) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k \end{aligned}$$

Если  $x_1, \dots, x_n$  - незав. непрерывн., то  $d^2 x_k = 0$

$$d^2 f = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Также если все  $x_i$  лин. в  $\lambda$ , то  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$  в незав.  $i$ .

(б) синг. т.) - квадратичн. огранка  $d^2 f$  от  $\lambda$  знач. непр. в  $\lambda$  синг. точке

### D-B

Составленные из  $g_i$  н.д.  $\Rightarrow$  н.п. н.спр.

Доказано, что  $x_i = g_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$  - гладкая непр. функ. в окр.  $\tilde{x}^0$

$$\varphi_i(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1 \dots m)$$

Прогресс. поб-бо по  $x_j$ :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i=1 \dots m$$

Норм. огран.  $j$ ,  $m+1 \leq j \leq n$  - это одна из  $m$  н.п. в незав.  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ .

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{m+1}, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ в окр. } \tilde{x}^0$$

Берем  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$  разделяя  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ , значение  $\neq 0$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \text{ непр. функ.} \Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \text{ непр. функ.} \Rightarrow g_i - \text{гладкая непр. функ.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  н.п. н.д.  $d^2 \lambda$  в коорд.  $y_p$ -коорд.

В общ. обозначении огранка  $d^2 \lambda(x^0)$  (бес  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}(x^0) = 0$ )

$$d^2 L(x^0) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k \quad (\text{незав. от } x^0, \text{ т.е. } dx_j dx_k \text{ гипер-плоск. незав. непен-} \\ \text{норм. к ним гипер-плоск. оп-мин}).$$

$$L(x)|_x = L_0(\tilde{x}^0) \quad \text{б. аргумент.}$$

$$d^2 L_0(\tilde{x}^0) = d^2(L(x^0)|_x) \stackrel{\text{д}}{=} d^2 L(x^0)|_{**} \\ \text{!! б. арг. гипер-плоск. оп-мин н-н непен-бл.} \quad \text{б. арг. гипер-плоск. оп-мин н непен-бл.}$$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = dL_0(\tilde{x}^0) = dL(x^0)|_{**} = 0 \quad (\text{б. арг. асе-мин I}) \Rightarrow \tilde{x}^0 - \text{стаци. т. } f_0(\tilde{x}^0)$$

Характер экстремума в точке т. оптим. гл. условий

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 L(x^0)|_{**}$$

Характер экстремума оптим. условиям. точек оптим.

УТД

# Глава XIX

## Кратные интегралы

§ L Определение. Критерий интегрируемости Дордь.

Прим.  $G$  - измеримое мн-во,  $G \subset R^n$ ,  $G \neq \emptyset$ .

$R$  - разбиение  $G$  на изм. изм. мн-ва  $G_i$ :  $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ .

$$\forall i \neq j \rightarrow \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

Максим. разбиение  $|R| = \max_{i=1 \dots N} \operatorname{diam} G_i$

Границы, т.е.  $f(x)$  опр. на  $G$ . Равн.-мн.  $M_i = \sup_{G_i} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{G_i} f(x)$

Оп-е

Верхнее и нижнее суммы Дордь:

$$S_a^* = \sum_{i=1}^N M_i \mu G_i, \quad S_{+R} = \sum_{i=1}^N m_i \mu G_i$$

Сумма Римана

$$\forall i=1 \dots N \rightarrow \xi_i \in G_i$$

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu G_i$$

Две гранич.  $R$ :  $S_{+R} \leq \sigma_R \leq S_a^*$ .

Коэффициент оп-мн

$$w_R = S_a^* - S_{+R} = \sum_{i=1}^N w_i \mu G_i, \quad w_i = M_i - m_i$$

Равнение  $R_2$  симметрическое  $R$ . ( $R_2 \geq R_1$ )  $\Leftrightarrow$

$R_1: G = \bigcup_{i=1}^n G_i, \quad \forall G_i$  - однозначное пакетование из  $G$ ;

$R_2: G = \bigcup_{j=1}^m G_j$

Упр

Если  $R_2 \geq R_1$ , то

$$S_{+R_2}^* \leq S_{+R_1}^*, \quad S_{+R_2} \geq S_{+R_1}, \quad w_{R_2} \leq w_{R_1}$$

D-ко: (как в 1D)

Доказательство: если  $\mu(G_i) > 0$ , то  $\exists x \in G_i$  для которого  $\forall \delta > 0$   $\exists \eta > 0$   $\forall y \in B(x, \eta) \cap G_i$   $|f(x) - f(y)| < \delta$ .

$$G_i = G_i^1 \cup G_i^2, \quad \mu(G_i^1 \cap G_i^2) = 0$$

Надані граничні значення наведено позначенням  $\exists$  то є.

$$M_i^* = \sup_{G_i} f(x) \quad M_i'' = \sup_{G_i''} f(x) \quad M_i = \sup_{G_i} f(x)$$

$$M_i \mu G_i = M_i \mu G_i^* + M_i \mu G_i'' \geq M_i^* \mu G_i^* + M_i'' \mu G_i''$$

Все однакове  $\& S_{R_1}^* \cup S_{R_2}^*$  симетричні  $\Rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^*$ .

Аналогично для непарних сум.

$$\omega_{R_2} = S_{R_2}^* - S_{\pi R_2} \leq S_{R_1}^* - S_{\pi R_1} = \omega_{R_1} \quad \text{УДА}$$

Вважаємо  $\max(R_1, R_2)$  - найбільше з  $R_1, R_2$ .  $G_i \cap \tilde{G}_j$

$$\max(R_1, R_2) \geq R_1, \quad \max(R_1, R_2) \geq R_2.$$

### Лемма

$$\forall R_1, R_2 \rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^*$$

Д-бо:

$$R = \max(R_1, R_2) \Rightarrow R \geq R_1, R_2$$

$$S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^* \geq S_{\pi R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \quad \text{УДА}$$

### Операції

Пусть  $f(x)$  - функція на відрізку  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ . Розглянемо  $I^* = \inf_R S_R^*$ ,  $I_* = \sup_R S_{\pi R}^*$  (нап. в цьому випадку розглядаємо всі відкриті інтервали). Тоді - левий і правий країнні інтеграли Дарбу.

Если  $I^* = I_* = I$ , тоді  $f(x)$  наз.  $\omega$ -непреривна на  $G$ , а  $I$  -  $\omega$ -крайній інтеграл Римана  $F(x)$  на  $G$ :  $I = \int_G F(x) dx$

Оскільки  $-\infty < I_* \stackrel{(1)}{\leq} I^* \stackrel{(2)}{\leq} +\infty$

(1) відходить від операції лемми:  $S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \Rightarrow \inf_{R_1} S_{R_1}^* \geq \sup_{R_2} S_{\pi R_2}^*$

(2) відходить від того, що  $I^* = S_{R_1}^*$  є нен- $\omega$   $R$ , аналогично (1)

### Критерій Дарбу непреривності

Пусть  $f(x)$  оп. на відкритому  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Що за побачення:

1.  $f(x)$  непреривна на  $G$ .

2.  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$  раздение  $R$  на-ба  $G$ :  $\omega_R < \varepsilon$

3.  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall$  раздение  $R$ ,  $|R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$

D-б:

(3)  $\Rightarrow$  (2) - оребуно  
как паше

(2)  $\Rightarrow$  (1)  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

как паше  $\forall$  разд.  $R \rightarrow S_{x_R} \leq \bar{I}_x \leq I^* \leq S_x^*$ .

$$0 \leq I^* - \bar{I}_x \leq S_x^* - S_{x_R} = \omega_R$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon \Rightarrow |I^* - \bar{I}_x| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ -модел  $\Rightarrow I^* = \bar{I}_x \Rightarrow f(x)$  ннт

(1)  $\Rightarrow$  (2) Пусть  $f(x)$ -ннт. на  $G$ .  
как паше

$$I^* = \inf_n S_{x_n}^* = \underline{I}_x = \sup_Q S_{x_n} = \bar{I}$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_1: S_{x_{R_1}}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_2: S_{x_{R_2}} > \bar{I} - \frac{\varepsilon}{2}$

$$R = \max(R_1, R_2)$$

$$S_{x_n}^* \leq S_{x_{R_1}}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad S_{x_n} \leq S_{x_{R_2}} > \bar{I} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } \omega_R = S_{x_n} - S_{x_{R_2}} < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

(2)  $\Rightarrow$  (3): Преведение гомоморф. леммы.

### Определение

Пусть  $X, Y$ - два ннты на-ба в  $\mathbb{R}^n$ .

$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} d(x, y)$  - расстояние между на-бами.

Если  $X \cap Y \neq \emptyset$ , то  $\rho(X, Y) = 0$ . Остальное не верно.

### лемма 1

Пусть  $F_1, F_2$ - 2 на-бами в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\rho(F_1, F_2) = 0$ . Тогда  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ .

Доказательство: если  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , то  $\rho(F_1, F_2) > 0$

D-б:

Пусть  $\rho(F_1, F_2) = 0$ ,

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists x \in F_1, y \in F_2 : g(x, y) < \varepsilon$

$\forall n = 1, 2, \dots \rightarrow \exists x_n \in F_1, y_n \in F_2 : g(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

T.k.  $F_1$  - ovp. (какими л.  $R^n$ ), то  $x_n$  - ovp. нос-ти, но т. Банаховы - Внешнеграница

$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x_0$  (свойство), значит  $F_1$ -замкнуто  $\Rightarrow x_0 \in F_1$ .

$$g(y_{n_k}, x_0) \leq \underbrace{g(y_{n_k}, x_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \rightarrow 0} + \underbrace{g(x_{n_k}, x_0)}_{\text{при } k \rightarrow \infty} \Rightarrow y_{n_k} \rightarrow x_0.$$

$F_2$ -замкнуто  $\Rightarrow x_0 \in F_2$ .  $x_0 \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

**Замечание** меняться определение  $F_i$ .  $F_i$  может быть замкнутым.

Если эта замкнутая, то не овр., значит может не быть общим.

### лемма 2

Пусть  $F_1, \dots, F_n, G \subset R^n$ ,  $\forall i, j = 1 \dots N \rightarrow g(F_i, F_j) = p_{ij} \geq p > 0$

$\text{diam } G < p$

Тогда для  $G \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$ ,  $\exists j : G \in F_j$ .



Доказательство

Пусть  $\exists x_0 \in G$ ,  $x_0 \in F_i$   
 $\exists y_0 \in G$ ,  $y_0 \in F_j$ ,  $i \neq j$

$x_0, y_0 \in G \Rightarrow p(x_0, y_0) < p$

$x_0 \in F_i$ ,  $y_0 \in F_j \Rightarrow g(x_0, y_0) \geq g(F_i, F_j) \geq p$

Противоречие.  $\square$

### лемма 3

Пусть  $G$  - овр. мн-во в  $R^n$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists S \supseteq G$ ,  $S$ -мерное и симметричное!

$$mS < \mu^*G + \varepsilon$$

Д-бо

Сим-е мерное  $S$  имеет из овр-е мерное изнен:

$$\mu^*G = \inf mS, \quad S\text{-мер.}, \quad S \supseteq G$$

Но мы  $S$  можем выбрать скольжим?  $\exists$  мерн.  $S_1 : mS_1 < \mu^*G + \frac{\varepsilon}{2}$



Тогда  $\exists S$  - мерн. и симм. оно же близко пада:  $mS < mS_1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow mS < \mu^*G + \varepsilon \quad \square$$

## лемма 4

Пусть  $G, F$  - изм. мн-ва в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu F < \varepsilon$ .

Тогда  $\exists \delta > 0$ :  $\forall$  изм. мн-ва  $G$ ,  $|R| < \delta \rightarrow$

$$\sum_{G_i \cap F \neq \emptyset} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \cdot \varepsilon$$

D-то

По условию  $\exists S > F$  - квад. орт.:  $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$

Пусть  $S$  состоит из квадратов с параметром  $K = K(\varepsilon)$ .

$$S = \bigcup_{j=1}^N Q_j, \quad Q_j - \text{квд с параметром } a = a(\varepsilon) \quad (a = \frac{1}{2^K})$$

$$\delta(\varepsilon) = a.$$

Пусть изм. мн-во  $G$ ,  $|R| < \delta$ .

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq 3^n \mu \bar{Q}_j$$

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{G_i \cap S \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{j=1}^N \sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \quad (\text{если } Q_j \text{ содержит } G_i)$$

Однако все изм.  $G_i$  можно расположить в квадрате  $Q_j$ .

$$\Leftrightarrow 3^n \sum_{j=1}^N m \bar{Q}_j = 3^n \cdot mS < 3^n \cdot 2\varepsilon \quad \text{УДА}$$



(2)  $\Rightarrow$  (3)  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_0: \omega_{R_0} < \varepsilon$

$$R_0: G = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j^\circ, \quad \omega_{R_0} = \sum_{j=1}^{N_0} w_j^\circ \cdot \mu \cdot G_j^\circ, \quad \mu(G_i^\circ \cap G_j^\circ) = 0, \quad i \neq j$$

Но известно свойство,  $G_i^\circ \cap G_j^\circ = \emptyset, \quad i \neq j$

Если это не так - то мн-во нуль-мерное, а иначе - оно имеет изм. мн-во.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_0} \partial G_j^\circ$$

По условию,  $\exists$  орт. изм.  $S > \Gamma$ :  $mS < \frac{\varepsilon}{\rho M \cdot 3^n}$

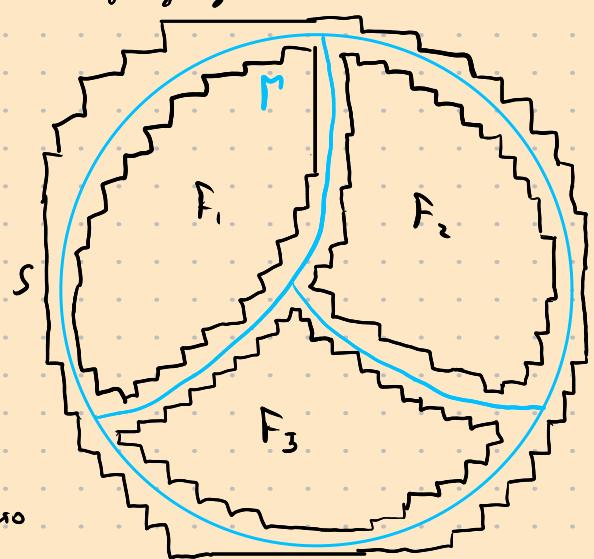
$\mu \Gamma = 0$  по свойству измеримости в  $\mathbb{R}^n$

Конечно измеримое изм. мн-во Моргана.

$$M = \sup_G \|f(x)\|$$

T.k.  $\Gamma \subset S$ ,  $\Rightarrow \forall j \rightarrow \partial G_j^\circ \subset S$

Последовательность  $F_j = G_j^\circ \setminus S = \overline{G_j^\circ} \setminus S \Rightarrow F_j$  - замкнутое измеримое изм. мн-во



$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n G_j \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \text{ (пред F_j многое для этого.)}$$

$$(т.к. (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B))$$

Третий условие, это ненулевые элементы, в которых остались только.

Тогда получим  $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$  (т.к.  $F_i, F_j$  - ненулевые компоненты)

$$\text{Пред-ум } \rho = \min_{i \neq j} \rho_{ij} > 0.$$

$$\text{По лемме 4 Т.к. } mS < \frac{\epsilon}{\delta M_3^n}, \text{ то } \exists \delta: \forall \text{ подл. } R, |R| < \delta \rightarrow \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \mu G_i < \frac{\epsilon}{\delta M_3^n} \cdot 2^n = \frac{\epsilon}{4M}$$

$$\delta = \min(\delta_1, \rho).$$

Пред-ум предположение R не-быть G такое, что  $|R| < \delta$ .

Пред-ум предположение G\_i не-быть подмножество G \ S (т.е.  $G_i \cap S = \emptyset$ )

$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \text{ diam } G_i \leq |R| < \delta \leq \rho$$

$$\forall i \neq j \quad \rho_{ij} \geq \rho, \text{ тогда по лемме } \exists j: G_i \subset F_j \subset G_j$$

$$R_* = \max(R, R_0)$$

$$\sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i \leq \omega_{R_*} \leq \omega_{R_0} < \frac{\epsilon}{2} \quad \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i \leq 2M \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \mu G_i = 2M \cdot \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Очевидно: } \forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_R = \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i + \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i < \epsilon$$

Если все F\_j ненулевые, то G \ S в виде суммы отсутствует.

ЧД

## Определение

Случай Римана: Пусть f определена изм. мн-бе G,  $\exists R: G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ ,

$$G_i - \text{изм., } \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

$$\text{Возьмем } z_i \in G_i, \sigma_R = \sum_{i=1}^n f(z_i) \mu G_i$$

## Компьютерный Риман

f измер. на изм. мн-бе G  $\Leftrightarrow f \text{ определена на } G \text{ и } \forall \text{ мес-ти подмножества } R_x, |R_x| \rightarrow 0$ ,

тогда можно выбрать  $z_i^{(x)} \in G_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{R_n}(f) = I \quad (I = \int_G f(x) dx)$$

**NB** на схемах изображение F не является функцией, а просто G - нет

Например,  $n=1, \mu G = 0$ , т.е.  $\sigma_{R_1} = 0$ , но если определить то она не измерима.

D-ho

$\Rightarrow$  Exist f-uni., so no n.3 approx. Doppoly

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon \quad (1) \quad (\delta = \delta(\varepsilon))$$

No  $S_R^* \geq \sigma_R \geq S_{R+}$  wpm modern budeope uparen. Torek ( $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ )

$$S_R^* \geq \Sigma \geq S_{R+} \Rightarrow \sigma_R - \Sigma \leq S_R^* - S_{R+} < \varepsilon$$

$R_k$ -noce-its problemi,  $|R_k| \rightarrow 0$

$$\forall \delta > 0 \rightarrow \exists K_0: \forall K \geq K_0 \rightarrow |R_k| < \delta \quad (K_0 = K_0(\delta)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists K_0: \forall K \geq K_0 \rightarrow \omega_{R_k} < \varepsilon \Rightarrow |\sigma_{R_k} - \Sigma| \leq \omega_{R_k} < \varepsilon$$

(nogutabellen  $R_k$  & (1))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k} = \Sigma$$

$\Leftarrow \forall R_k, |R_k| \rightarrow 0, \forall \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k} = \Sigma$ , f orp.

gorenadem, zio f uni. u  $\int_G f(x) dx = \Sigma$

Njeto zio neron; No n.3 approx. Doppoly:

$$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \rightarrow \exists R, |R| < \delta: S_R^* - S_{R+} \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ne napryedek obrazu}, \mu G > 0$$

$$\exists \varepsilon > 0: \forall K \rightarrow \exists R_k, |R_k| < \frac{1}{k}: S_{R_k}^* - S_{R_k+} \geq \varepsilon \quad (|R_k| \rightarrow 0)$$

$$M_i^{(k)} = \sup_{G_i^{(k)}} f(x), \text{ t.e. } \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)}: M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$S_{R_k}^* - \sigma_{R_k} = \sum_{i=1}^{N_k} (M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)})) \mu G_i^{(k)} < \frac{\varepsilon}{4 \mu G} \cdot \sum_{i=1}^{N_k} \mu G_i^{(k)} = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$$

Anawomno,  $\exists \eta_i^{(k)} \in G_i^{(k)}: \sigma_{R_k}^* - S_{R_k+} < \frac{\varepsilon}{4}$



$$\Rightarrow \sigma_{R_k}^* - \sigma_{R_k+} \geq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ no } \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{R_k}^* = \Sigma \Rightarrow \sigma_{R_k}^* - \sigma_{R_k+} \rightarrow 0$$

Praviloporne.  $\square$

Chanciba univergruzenek op-uni

① Nei  $G: \mu G = 0$  modat op. op-uni univergruzen u  $\int_G f(x) dx = 0$ .

Oreburgno: bee  $\mu G_i = 0 \rightarrow S_R^* = \sigma_R = S_{R+} = 0$

② Aggrumbraciis univergruzen no un- by

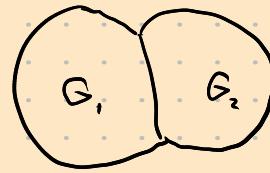
Нуцись  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $\mu(G_1 \cap G_2) = 0$

Если  $f$  мкт. на  $G_1 \cup G_2$ , то  $f$  мкт. на  $G$  и  $\int_G f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx + \int_{G_2} f(x) dx$

Д-бо: no n. 2 крит. Достат.

$\exists R$ -пазд.  $G_1$ :  $\omega_{R_1} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists R_2$ -пазд.  $G_2$ :  $\omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$



$R'$ -пазд.  $G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$ ,  $\kappa$ -пое наименше из  $R_1, R_2$  ближайшими  
однозначн.  $\tau_i \subset G_1 \cap G_2$ .

Все однозначн. на-ла  $\kappa$  нуцись непр.  $\Rightarrow \omega_{R'} = \omega_R < \frac{\varepsilon}{2}$

$R''$ -то же саме,  $\omega_{R''} = \omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Рас-на  $R$ -пазд.  $R_1 \cup R_2$ , близор. все на-ла  $R'_1, R''_2 \subset G_1 \cap G_2$ .

$$\omega_R = \omega_{R'_1} + \omega_{R''_2} + \omega_i \cdot \mu(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$$

No n. 2 крит. Достат.  $f$  мкт. на  $G = G_1 \cup G_2$ .

$$\sigma_R = \sigma_{R'_1} + \sigma_{R''_2} + f(\xi_i) \cdot \mu(G_1 \cap G_2)$$

$f$ -мкт. на  $G \Rightarrow$  no модеи мкт-и Римановские суми  $\sigma_{x_n}$ ,  $|R_n| \rightarrow 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{x_n} = I = \int_G f(x) dx$$

Если близко сюз  $\sigma_{x_n}$  где  $G_1$ , то оно остав. в Римановские суми где

$G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$  на нуцесе варене, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{x_n}' = I_1 = \int_{G_1} f(x) dx$$

$$\text{Аналогично } R_2: \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{x_n}'' = I_2 = \int_{G_2} f(x) dx$$

$\sigma_{x_n}$  остав. от  $\sigma_{x_n}' + \sigma_{x_n}''$  на нуцесе варене  $\Rightarrow I = I_1 + I_2$  УДА

③ Нуцись  $f$ -мкт. на  $G \subset R^n$ ,  $G_0 \subset G$ -нук. нуцеси-бо, йога  $f$  мкт. на  $G_0$ ,

Д-бо: no n. 3 крит. Достат.

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R$ -пазд.  $G$ ,  $|R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$ .

Рас-на модеи пазд.  $R_0$  на-ла  $G_0$ ,  $|R_0| < \delta$ . Йога еи монено

наподобие го пазд.  $R$  на-ла  $G$ :  $|R| < \delta$ .  $\omega_{R_0} \leq \omega_R < \varepsilon$ ,

no n. 3 крит. Достат.  $f$  мкт. на  $G_0$ . УДА

④ Множество нуцеси

Нуцись  $f$  на  $G$  мкт. на нуцеси  $G \subset R^n$ ,  $\alpha, \beta \in R$ , йога

$$\alpha f + \beta g - \text{univ. na } G, \quad \int_G f + g = \alpha \int_G f + \beta \int_G g$$

D-bo:  $\sigma_{R_n}(f) \rightarrow I_1 = \int_G f, \quad \sigma_{R_n}(g) \rightarrow I_2 = \int_G g$ , orebyno,  $\Rightarrow$

$$\sigma_{R_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_{R_n}(f) + \beta \sigma_{R_n}(g) \rightarrow \alpha I_1 + \beta I_2$$

T-k.  $R_n$ -model,  $|R_n| \rightarrow 0$ ,  $\exists_i^{(e)} \in G_i^{(e)}$  - model  $\Rightarrow \alpha f + \beta g$  - univ.,

$$\int_G \alpha f + \beta g = \alpha \int_G f + \beta \int_G g \quad \text{UTA}$$

⑤  $f, g$  - univ. na  $G$ . Torga  $fg$  - univ.

$$\begin{aligned} \text{D-bo: } & |f(x'')g(x') - f(x')g(x')| = |f(x'')(g(x'') - g(x')) + (f(x'') - f(x'))g(x')| \leq \\ & \leq M(|g(x'') - g(x')| + |f(x'') + f(x')|) \quad (\text{t-k. } |f|, |g| \leq M \text{ - op.}) \\ & x'', x' \in G \Rightarrow |g(x'') - g(x')| \leq \omega_i(g) \\ & |f(x'') - f(x')| \leq \omega_i(f) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow M(\omega_i(f) + \omega_i(g)); \text{ neperem k sup: } \omega_k(fg) \leq M(\omega_i(f) + \omega_i(g))$$

$$\begin{aligned} \omega_k(fg) &= \sum_{i=1}^n \omega_i(fg) \mu G_i \leq \sum_{i=1}^n M(\omega_i(f) + \omega_i(g)) \cdot \mu G_i \leq \\ &\leq M(\omega_k(f) + \omega_k(g)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{No n. 2 ksp. Dopolj } \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R(f) < \frac{\varepsilon}{2M}, \omega_R(g) < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_R < \varepsilon \Rightarrow fg - \text{univ. na } G \quad \text{UTA} \end{aligned}$$

⑥  $f$  - univ. na  $G \Rightarrow |f|$  univ. na  $G$

$$\begin{aligned} \text{D-bo: anahorico, t-k. } & ||x''| - |x'||| \leq |x'' - x'| \Rightarrow \\ & \Rightarrow \omega_i(|f|) \leq \omega_i(f) \Rightarrow \omega_k(|f|) \leq \omega_i(f) \quad \text{UTA} \end{aligned}$$

⑦  $\text{Eam } f(x) = \text{const na } \text{univ. } G \Rightarrow f - \text{univ. na } G, \quad \int f(x) dx = C \cdot \mu G.$

$$\text{D-bo: } M_i, m_i = \text{const} \Rightarrow S_n^* = S_n = \sum_{i=1}^n C \cdot \mu G_i = C \cdot \mu G. \quad \text{UTA}$$

⑧ Унекропадение неравенств

$f$  и  $g$  - univ. na  $G$ ,  $f(x) \geq g(x)$ .

$$\text{Torga } \int_G f(x) dx \geq \int_G g(x) dx$$

D-bo: orebyno uz torgo,  $\forall R \rightarrow \sigma_R(f) \geq \sigma_R(g)$ , gache neperim a nregey.

UTA

Следствие

⑨  $\text{Eam } f(x) \geq 0 \text{ na } \text{univ. } G \Rightarrow \int_G f(x) dx \geq 0$

⑤ Если  $f(x)$  мон. на  $G$ , то  $\left| \int_G f(x) dx \right| \leq \int_G |f(x)| dx$

Д-бо:  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

т.к.  $f$  и  $|f|$  мон., то

$$-\int_G |f| \leq \int_G f \leq \int_G |f| \Rightarrow \left| \int_G f \right| \leq \int_G |f|$$

УТД

⑥  $f, g$  мон. на  $G$ ,  $|f| \leq M \Rightarrow \left| \int_G fg \right| \leq M \int_G g$

Д-бо:  $-M \leq f(x) \leq M \Rightarrow -M|g| \leq fg \leq M|g|$  - умножаем, УТД.

### ⑦ Интегрирование сложных неравенств

$f(x) \geq g(x)$  на изм. мн-бе  $G$ , или одн. нерп. во внутр. т.  $x_0 \in G$ ,

$f(x_0) > g(x_0)$ , Тогда  $\int_G f > \int_G g$  - основное лемма доказательства неравенства.

Д-бо:  $\varphi(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ .  $\varphi(x)$  нерп. в  $x_0$ ,  $\varphi(x_0) > 0$ .

$$\text{Раз-е } G = U_\delta(x_0) \cup (G \setminus U_\delta(x_0))$$

$U_\delta(x_0) \subset G$ ,  $\varphi(x) > \frac{\varphi(x_0)}{2}$  в  $U_\delta(x_0)$  (уст. лемма о сопр. знако).

$$\int_G \varphi(x) dx = \int_{U_\delta(x_0)} \varphi(x) dx + \int_{G \setminus U_\delta(x_0)} \varphi(x) dx \geq \frac{\varphi(x_0)}{2} \underbrace{\mu(U_\delta(x_0))}_{> 0 \text{ (т.к. } x_0 \text{ - внутр. т.)}} > 0$$

УТД

### ⑧ Непрерывность интеграла по множеству

$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots \subset G$  - возрас. множ. мн-б, все изм.

$\mu G_n \rightarrow \mu G$ ,  $n \rightarrow \infty$ .  $f(x)$  опр. на  $G$  и мон. на всех  $G_n$ . Тогда она

$$\text{мн. на } G \text{ и } \int_G f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} f(x) dx$$

Д-бо:  $G = G_\infty + (G \setminus G_\infty)$   
измерим.

$$\mu(G \setminus G_\infty) = \mu G - \mu G_\infty \rightarrow 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists k : \mu(G \setminus G_k) < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad M = \sup_G |f(x)|$$

т.к.  $f$  мон. на  $G_\infty$ , то на  $n \cdot 2$  кр. Допод.

$$\exists R' - погр. G_\infty : \omega_{R'} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Найдем  $R$ -погр.  $G$ : бсв мн-ба  $R'$  и еще  $G \setminus G_\infty$

$$\omega_R = \omega_{R'} + \omega_{\omega} \cdot \mu(G \setminus G_\infty) < (\omega_{R'} + \text{коеф. } f \text{ на } (G \setminus G_\infty), \omega_{R'} \leq 2M)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon, \text{ на } n \cdot 2 \text{ кр. Допод } f \text{ мон.}$$

$$\int_G = \int_{G_\infty} + \int_{G \setminus G_\infty} \Rightarrow \int_G = \int_{G \setminus G_\infty} - \int_{G_\infty}$$

$$\left| \int_G f - \int_{G_k} f \right| = \left| \int_{G \setminus G_k} f \right| \leq M \cdot m(G \setminus G_k) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{G_k} f \rightarrow \int_G f \text{ UTA}$$

## 11 Teorema o opregnem

$f$  ug - uni. na  $G$ ,  $g(x)$  comp. znac. f-nya

$$\int_G fg = m \int_G g, \quad \forall \mu \in [m, M], \quad m = \inf_G f, \quad M = \sup_G f$$

Eam  $G$ -obznoi komaki u f-neye. na  $G$ , to  $\mu = f(z), z \in G$ .

D-bo: giz op.  $g \geq 0$

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$m g(x) \leq fg \leq M g(x)$$

$$m \int_G g \leq \int_G fg \leq M \int_G g - eam \int_G g = 0, \text{ to r. teorema } \nu_m. \text{ Unare}$$

$$m \leq \frac{\int_G fg}{\int_G g} \leq M \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int_G fg = \mu \int_G g$$

Eam  $G$ -komaki, to f gizmirei na nem  $m \leq M$ , d.t.k. uni-bo obzno,

To nymum. bee znac. nemyy  $m \leq M$ , i.e.  $\exists z \in G: m = f(z)$  UTA

## 7ib

Pryes  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $\mu G_2 = 0$ ,  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Eam  $f(x)$  op. na uni. na m-ke  $G_1$ , to kacce mi opregnem na  $G_2$  (unus da opregnem),

to ne robiat mi na unesuppeneto, mi na znac-e unesuppe

D-bo

$f(x)$  na  $G_2$  op. kaznen-to odrazem, op.

$$\int_{G_2} f(x) dx = 0$$

$$\int_{G_1} f(x) dx - cny-es \Rightarrow \int_G f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx + \int_{G_2} f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx.$$

Fazem odrazem, na m-be njeboi mpti  $f(x)$  monno smotri gane neopreglennom.

## Primer - op. neni. qz-ki

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ atau } y \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad G: 0 \leq x, y \leq 1$$

Pryes  $f(x, y)$  - uni.,  $\int_G f(x) dx = I$

$\forall$  neni-m  $R_n: |R_n| \rightarrow 0$ ,  $\forall$  bordze opregn. zore  $\rightarrow \sigma_{R_n} \rightarrow I$

$R_n$  - разд. на квадратики со стороной  $\frac{1}{2^n}$ .

$\exists \xi_i^{(n)} \in G_i : f(\xi_i^{(n)}) = 1, \alpha_{R_n}^1 = 1$

$\exists \eta_i^{(n)} \in G_i : f(\eta_i^{(n)}) = 0, \alpha_{R_n}^0 = 0$

Дено, что  $\eta$ -мн-во не ун.

## §2 Элементарные мн-ва в $R^{n+1}$ . Стеговые координаты и поверхности

$G^* \subset R^{n+1}$

$$G^* = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : \psi(x_1, \dots, x_n) \leq x_{n+1} \leq \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$$

Норм. мн-во  $(x_1, \dots, x_n) \in G \subset R^n$ ,  $\psi \leq \varphi$  опр. на  $G$

Если  $n=1$ :



Рассмотрим  $\psi, \varphi$  - ун. на  $G$ . Тогда

1. Если  $\psi(x) > 0, \varphi(x) = 0$ , то  $G^*$  - пограничие  $\eta$ -мн-ва  $x_{n+1} = \psi(x_1, \dots, x_n)$  ( $M_\psi$ )

2. Если  $\psi(x) = \varphi(x)$ , то  $G^*$  - граница  $\eta$ -мн-ва  $x_{n+1} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  ( $\Gamma_\varphi$ )

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} = \psi(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in G\}$$

## Теорема

1. Рассмотрим  $\psi(x)$  ун. на  $G \subset R^n$ , тогда  $\Gamma_\psi$  измерим в  $R^{n+1}$  и  $\mu \Gamma_\psi = 0$ .

2. Рассмотрим  $\psi(x)$  нестрог. ун. на  $G \subset R^n$ . Тогда  $\Pi_\psi$  измерим в  $R^{n+1}$  и  $\mu \Pi_\psi = \int f(x) dx$  D-бо:

Рас-во разбиение  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ ,  $m(G_i \cap G_j) = 0$ ,  $i \neq j$

2. Равн. измеримые множества  $S_\psi = \bigcup_{i=1}^n U_\psi(G_i, 0, m_i)$ ,  $T_\psi = \bigcup_{i=1}^n U_\psi(G_i, 0, M_i)$ , одн.  $\psi > 0$ .

$$m_i = \inf_{G_i} \psi(x) \quad M_i = \sup_{G_i} \psi(x)$$

$$m(U_\psi(G_i, 0, m_i)) = m_i \cdot \mu G_i \text{ в } R^{n+1}$$

Если  $i \neq j$  то в. измнжеское пересеч-е не м-но в. измнжеское пересеч-е в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

В смык конечной однородности мерой Моргана

$$\mu S_R = \sum_{i=1}^n m_i \mu G_i = S_{\#R}, \quad \mu T_R = S_{\#R}.$$

$$S_{\#R} \subset \Pi_\varphi \subset T_R$$

$$\mu S_{\#R} = \mu S_R \leq \mu \Pi_\varphi \leq \mu^* \Pi_\varphi \leq \mu^* T_R = \mu T_R = S_{\#R}$$

$$0 \leq \mu^* \Pi_\varphi - \mu \Pi_\varphi \leq S_{\#R} - S_{\#R} = w_R$$

По н-з крит. Доподы  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R : w_R < \varepsilon \Rightarrow \mu^* \Pi_\varphi = \mu \Pi_\varphi \Rightarrow \Pi_\varphi$  измерим

$$S_{\#R} \leq \mu \Pi_\varphi \leq S_{\#R}$$

$$\text{Но } I = \int_G \varphi(x) dx, \quad S_{\#R} \leq I \leq S_{\#R}$$

Также  $|\mu \Pi_\varphi - I| \leq w_R < \varepsilon$ , т.к.  $\varepsilon > 0$ -многе  $\Rightarrow \mu \Pi_\varphi = I$ .  $\square$

$$1. P_R = \bigcup_{i=1}^n U_i(G_i, m_i, M_i) - \text{нед. измнжеское}$$

$$\mu P_R = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \mu G_i = w_R$$

$$P_R \geq \Pi_\varphi \Rightarrow \mu^* \Pi_\varphi \leq \mu P_R < \varepsilon$$

$$\varepsilon > 0 \text{-многе} \Rightarrow \mu^* \Pi_\varphi = 0 \Rightarrow \mu \Pi_\varphi = 0 \quad \text{Итд}$$



на измнжеское (форма + градиент оп-ми элементами измнжескими)

не бывает, чтобы оп-ми имел нет измнжеское виды.

### Общие & неизвестные измнжескые

$$\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad n=m=1$$

$$\int_G f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_G f(x, y) dx dy \quad \iint_G f(x) dx dy - \text{общий измнжеск.}$$

$$n=m=p=1$$

$$\iiint_G f(x) dx dy dz - \text{тройной измнжеск.}$$

Задача:  $G^* \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$G^* = \left\{ \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{x \in \mathbb{R}^n}, \underbrace{y}_{y} \right\}$$

$$G^* = \left\{ (x, y), x \in G \subset \mathbb{R}^n, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}, \quad \varphi, \psi - \text{измнжеск. на } G$$

Задача: оценка измнжеск. на  $y$ .

$G^*$  изн. в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $mG^* = \int (\varphi(x) - \psi(x)) dx$

Если  $\varphi \geq \psi \geq 0$ , то  $G^* = \int_{\varphi}^{\psi} (\Pi_\varphi \setminus \Pi_\psi) d\Pi_\varphi$  - бесконтактная изн.,  $m\Pi_\varphi = 0 \Rightarrow mG^* = \mu\Pi_\varphi - \mu\Pi_\psi$

### Теорема о сжатии краиного интеграла к поборному

Пусть  $G^* = \{(x, y) : x \in G \subset \mathbb{R}^n, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$ ,  $\varphi, \psi$  - ун. на  $G$ ,  $G$  - изн. в  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $f$ -изн. на  $G^*$ , и  $\forall x \in G \rightarrow \exists \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy = \Phi(x)$

Тогда  $\Phi$  ун. на  $G$ , и

$$\int_{G^*} f(x, y) dx dy = \int_G \Phi(x) dx$$

$$\int_{G^*} f(x, y) dx dy = \int_G \left\{ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

Д-бо:



Чт.,  $\psi$  - ун. на  $G \Rightarrow$  омн. опр., т.е.  $\exists A, B : \forall x \in G \rightarrow A \leq \psi(x) \leq \varphi(x) \leq B$   
 $\tilde{G} = \cup_{y \in G} (G, A, B)$

Нулическое  $f(x, y) = 0$  на  $\tilde{G} \setminus G^*$ .

Такое зонир-е не влияет на значение интеграла, т.к.

$$\Phi(x) = \int_A^B f(x, y) dy - \text{ун. изн.-е} \quad \forall x \in G$$

$G^* \rightarrow \tilde{G}$

Пусть  $f$ -изн. на  $G$ , и

$$\int_{\tilde{G}} f(x, y) dx dy = \int_G dx \int_A^B f(x, y) dy$$

Назовем  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$  - многочленное разбиение  $G$

Отрезок  $[A; B]$  разб. на отрезки  $[d_{j-1}; d_j], 1 \leq j \leq p$

Возьмем разбиение  $\tilde{G}$  на изн.  $\tilde{G}_{i,j} = \{(x, y) : x \in G_i, y \in [d_{j-1}, d_j]\}$

(нечест.  $\rightarrow$  не изн. изн. меря: доказать собственность изн. меря)

- "зацикленное разбиение"  $\tilde{G}$

$$m_{i,j} = \inf_{y \in G_i} f(x, y), \quad M_{i,j} = \sup_{y \in G_i} f(x, y)$$

Пусть  $j = 1..p$  - индекс,  $x \in G_i$

$$m_{i,j} \Delta d_j \leq \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(x, y) dy \leq M_{i,j} \Delta d_j$$

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \leq \int_A f(x,y) dy \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_j \quad - \text{lepros } Vx \in G_i$$

$\Phi(x)$

Если  $m_i = \inf_{G_i} \Phi(x)$ ,  $M_i = \sup_{G_i} \Phi(x)$ :

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \leq m_i \leq M_i \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_j$$

$$0 \leq M_i - m_i \leq \sum_{j=1}^p (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_j$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu G_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p w_{ij} \Delta x_j \mu G_i$$

$$w_R(\Phi) \leq w_{\tilde{R}}(f)$$

последнее <sup>коэф. интегр.</sup>  
 $G$  <sup>последнее</sup>  $\tilde{R}$

Фунд. теор.  $\tilde{R}$ , но н. з. крит. Допод  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall \tilde{R}, |\tilde{R}| < \delta \rightarrow w_{\tilde{R}}(f) < \varepsilon$

В заключение гра лепроs  $V$  критерий, последнее  $|\tilde{R}| < \delta$ .

Далее коэф. последнее  $R$  и. б.  $G$   $w_R(\Phi) < \varepsilon$

Но н. з. крит. Допод  $\Phi(x)$  и. б. на  $G$ .

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \leq \Phi(x) \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \Delta x_j \quad - \text{лепроs } Vx \in G_i; \text{ н. б. на } G_i!$$

$$\sum_{j=1}^p m_{ij} \Delta x_j \mu G_i \leq \int_{G_i} \Phi(x) dx \leq \sum_{j=1}^p M_{ij} \underbrace{\Delta x_j \mu G_i}_{m_{ij}}$$

Продолжим по  $i=1..N$ :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} \mu G_i}_{S_{*\tilde{R}}} \leq \underbrace{\int_{\tilde{R}} \Phi(x) dx}_{I_1} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p M_{ij} \mu G_i}_{S_{\tilde{R}}^*}$$

$$S_{*\tilde{R}} \leq I_1 \leq S_{\tilde{R}}^*$$

<sup>крупногранечное последнее</sup>  $\tilde{R}$

$$I_2 = \iint_{\tilde{R}} f(x,y) dx dy, \text{ тогда } S_{*\tilde{R}} \leq I_2 \leq S_{\tilde{R}}^*$$

$$|I_1 - I_2| \leq S_{\tilde{R}}^* - S_{*\tilde{R}} = w_{\tilde{R}}(f)$$

Но н. з. крит. Допод  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall \tilde{R}, |\tilde{R}| < \delta \rightarrow w_{\tilde{R}}(f) < \varepsilon$

В заключение такого последнего можно брать критерий

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$  критерий  $\tilde{R}: w_{\tilde{R}}(f) < \varepsilon$

$\varepsilon$ -модель,  $|I_1 - I_2| < \varepsilon \Rightarrow I_1 = I_2$

УТА

## Пример

$$\iiint_{G^*} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z) dz$$

$$G^* = \{x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$$



## § 3. Классы интегрируемых функций

### Теорема

$f(x)$ , непрерывная на компакте  $F \subset \mathbb{R}^n$ , интегрируема.

Д-бо:

$$\mu F = 0 \Rightarrow f \text{ опр.} \Rightarrow \text{лишь zeros}$$

$\mu F > 0 \Rightarrow f$  подавлено непр. на  $F$  (но  $f$  конн.)

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in F, |x' - x''| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$$

$$\omega(f) \text{ на } G_i = \sup_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')|$$

$$\text{Еам } \text{diam } G_i < \delta: \sup_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2\mu F} < \frac{\varepsilon}{\mu F}$$

$$\omega_R = \sum_{i=1}^N \omega_i \mu G_i < \frac{\varepsilon}{\mu F} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N \mu G_i}_{\mu F} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$$

По п. 3 из доказ.  $f$  интегрируема.

УДА

### Упражнение

Пусть  $f$  опр. на компакте  $F$  и ин-бо zeros, в к-ром она не заб-са непрерывной на  $F$ , имеет меру 0. Тогда  $f(x)$  инт. на  $F$ .

D-Bo:

Рус F<sub>0</sub> - мн-бо т. полупл, mF<sub>0</sub>=0. M = sup<sub>F</sub> |f(x)|

Лемма 3: неравн. нрп. Допод:  $\exists S$  - открытое множество, mS < mF<sub>0</sub> +  $\frac{\varepsilon}{4M}$  =  $\frac{\varepsilon}{4M}$ , S ⊃ F<sub>0</sub>.



F \ S - замкнутое мн-бо  $\Rightarrow$  компакт.

f непр. на F \ S  $\Rightarrow$  мн-во на F \ S не нрп. т.

Но н.з нрп. Допод:

$\exists$  нрп. R мн-во F \ S:  $\omega_R < \frac{\varepsilon}{2}$

R' - подл. F, симм. R, x к-пама гомеоморфно S \ F.  $\omega_{R'} < \varepsilon$ . Рад F \ S

$$\omega_R = \omega_R + \underbrace{\omega_R \mu(F \cap S)}_{\leq 2M} < mS$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R'$  - подл. F:  $\omega_{R'} < \varepsilon$ . Но н.з нрп. Допод f мн-во F. UTA

