

Литература: Ра ме (Муравьев, Гельфандер, Аппельман, Маркеев - новая версия)

Равновесие механических систем



Система мех-са в равновесии в бездействующей мех-ме экв-т \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall \vec{r} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 = \text{const}$$

Далее будем расс-вать стационарные системы

(у-я связи не зависят от времени) \Rightarrow \exists возможность

ввести стационарную параметризацию, и $\vec{r} = \vec{r}(q)$ после введ-я обобщ. коор-т.



γ не стат. система тоже может быть полн. равновес. -
сл. кривизны (кривая эволюционирует со временем)

$$(\mathcal{L}_{,i})' - \mathcal{L}_{,i} = Q_i(q, \dot{q}, t)$$

\Uparrow - т.о. разрешимости систем старших произв.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = F(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = X(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Положения равновесия мех-са во вз. однознач. соотв. с точками бифу

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\square (\Leftarrow) \text{ Пусть } x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = \text{const}$$

$$\square (\Rightarrow) \vec{r} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \equiv \vec{0}(1), \text{ откуда обобщ. коор-ты } q \text{ близки к } q_0, \text{ т.о.}$$

$$\vec{r}_{,k} \delta q^k \neq 0 \quad \forall \delta q: \delta q^1 + \dots + \delta q^n \neq 0.$$

$$\text{Таким образом } (1) \Rightarrow \dot{q} = 0$$



Критерий полн. равновесия стат. системы

$$\text{Стат. мех-ма мех-са в полн. равновесии} \Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0.$$

$$\square \quad (T_{,i})' - T_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$T_{,i} = a_{ki} \dot{q}^k \quad \text{т.к. } a_{ij} \text{ — симметричная матрица!}$$

$$(T_{,i})' = a_{ki} \ddot{q}^k + a_{kij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow a_{ki} \ddot{q}^k + (a_{kij} - \frac{1}{2} a_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

Для поком. равновес. $q = q_0, \dot{q} = 0 \Rightarrow$

$$0 = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

(грубо говоря, если $Q(q_0, 0, t) = 0$, то (2) имеет решение $q = q_0, \dot{q} = 0$ — но т.к. этим оно удовлет. и единственно. \square)

Однако если сила имеет буг, не удовл. т.к. этим ($Q(\dots)$ не удовл. усл. Либмана), то критерий в обратную сторону не работает — может быть > 1 рел. (см. Маркелова).

Задача

Если $Q = -\nabla \Pi(q, t)$, то поком. равновес. соотв. стан. т.к. потен. энергии: $\nabla \Pi(q, t) = 0$.

Пример:



т. G — центр масс (теперь всегда так будет).

$$\Pi = mgh = mg(l \sin \varphi - a \tan \varphi)$$

$$\Pi_{,\varphi} : l \cos \varphi - \frac{a}{\cos^2 \varphi} = 0$$

$$\cos \varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \quad \text{— поком. равновес.}$$

Теорема — принцип виртуальных перемещений

Поком. $\vec{r} = \vec{r}_0$ мех. сис. — мн. ст. — поком. равновес. $\Leftrightarrow \forall$ вирт. перемещ.

$$\delta \vec{r} \text{ из этого поком.} \quad \delta A = \int \vec{f} \delta \vec{r} dm = 0$$

□ (за слай. выраз)

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_{,k} \delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec{r}_{,k} \cdot \vec{F} dm \cdot \delta q^k = Q_k \delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0 -$$

- критерий поком. равновес.



Замечание 1 (функциональное)

Важно, эта теорема Лагранжа - она требует и что система сил, в одну сторону док-во элементарно, но в другую на порядок сложнее.

$$\square \Leftrightarrow \int (\vec{w} - \vec{F}) \delta \vec{r} dm = 0 \quad \text{— осн. ур-е динамики}$$

$$\vec{w} = 0 \text{ в поком. равн.} \Rightarrow \int \vec{F} \delta \vec{r} dm = 0$$

В обратную сторону — см. Маркеев.

Замечание 2 (применение)

Важно обратить внимание, что ун. теор-мы должны выполняться

$\forall \delta \vec{r}$ из поком. равновес.

Пример

Условие равновесия твёрдого тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{p}$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{R} + \delta \vec{p} = \delta \vec{R} + \delta \vec{q} \times \vec{p}, \quad \delta \vec{q} \text{ — в.р. поворота}$$

$$\delta A = \int \vec{F} dm \cdot \delta \vec{R} + \int \vec{F} \cdot (\delta \vec{q} \times \vec{p}) \cdot dm =$$

$$= \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \delta \vec{q} \cdot \underbrace{\int \vec{p} \times \vec{F} dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \vec{M}_0 \cdot \delta \vec{q} = 0 \quad \forall \delta \vec{R}, \delta \vec{q} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \text{ и } \vec{M}_0 = \vec{0}$$

\vec{F} — главный вектор сил, \vec{M}_0 — главный момент.

(полезно вспомнить гл. теор. кин.)

Основы Теории устойчивости

Рассматривается система второго вида в нормальной форме Коши:

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (3) \quad \text{Здесь и далее: } x(t) = x(x_0, t)$$

Решение $x = q = \text{const}$ наз-ся постоянным решением сист-мы (3).

Полож. решение $x = a$ всегда можно сместить в начало коор-т, в т. $x = 0$:

$$x \rightarrow x - a.$$

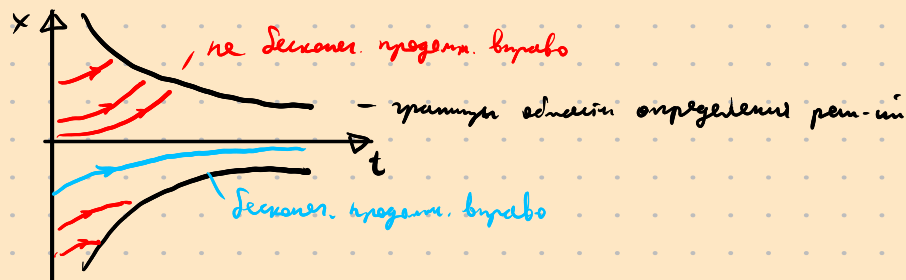
Далее будем считать, что $a = 0$ без ограничения общности.

x можно трактовать как отклонение от полож. равновесия.

Определение

Решение $x = x(x_0, t)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз-ся локально продолжимым вправо, если оно $\exists \forall t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



Определение (уст. по Ляпунову)

Полож. решение $x = 0$ сист-мы (3) наз-ся уст. по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0; +\infty) \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{x^2(t)}$$

Задача

1. Опр. уст. \Leftrightarrow равномерная непрерывность по нач. уст.
2. Из опр. уст. \Rightarrow реш-е $x(t)$ локально продолжим вправо

Определение (асимптот. уст.)

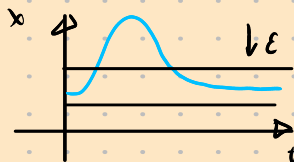
Полож. равновес. $x=0$ уст. (3) - асимптотически устойчиво, если

* 1. $x=0$ - уст. по Ляпунову.

2. $\exists \Delta: \forall x_0, \|x_0\| < \Delta \rightarrow x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$U_\Delta(0)$ - область притяжения.

Если задано при (1):



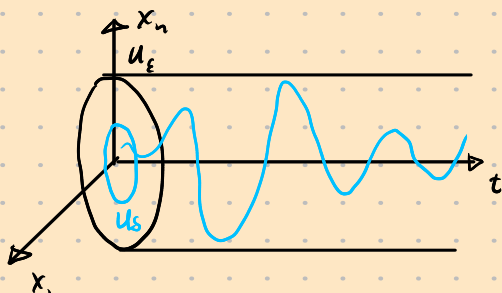
Определение (неуст.)

Полож. равновес. $x=0$ неуст. (3) неуст., если $\exists \varepsilon: \forall \delta \rightarrow \exists x_0:$

$\|x_0\| < \delta \exists t^*: \|x(t^*)\| > \varepsilon$, либо рел. $x(x_0, t)$ не остаётся со врем. вправо.

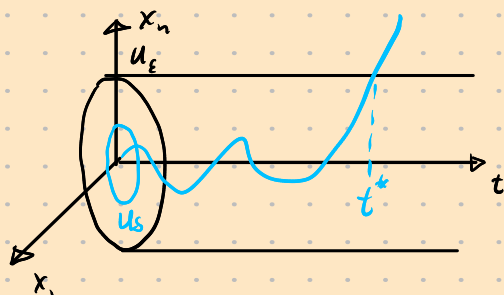
Классические определения

① Устойчивое

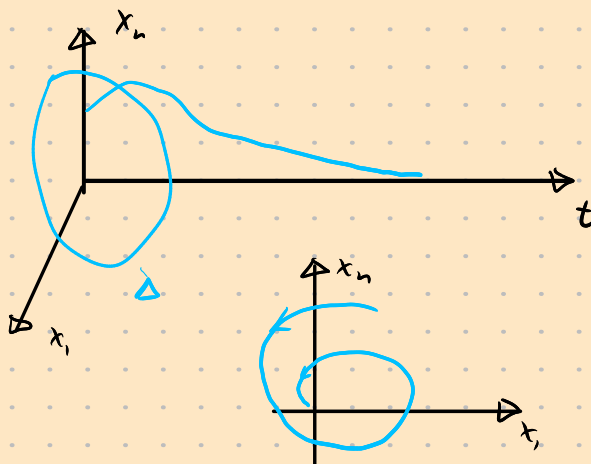


$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0$: траектория, начинающаяся в δ -окрестности, остаётся внутри ε -окр-ти

② Неуст.



③ Асимптот.



Корректность понятия устойчивости

Если н.р. (неустойчиво равновесие) $x=0$ устойчиво по бр. t_0 , то оно уст. $\forall t_1 > t_0$.

$$\square \quad x=0 \text{ - уст.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0; \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$



Результат теор.: G - м-во рел-ии
заполн. конн. при заданном м-ве
нер, уст.

$$G = x(u_\delta(0), t_1)$$

$x(x_0, t)$ - непрерывн. и непр. (т. конн.) $\Rightarrow \rho(\partial G, 0) > 0$ (рас-ле от $x=0$ до ∂G)

Возьдем $\delta_1 = \rho$, $t_0 \mapsto t_1$, $\delta \mapsto \delta_1$ (замен) \square

Устойчивость преобразий

$$\dot{x} = X(x, t) \quad \psi - \text{замен. решение (преобраз.)}$$

$$\dot{\psi} = X(\psi, t)$$

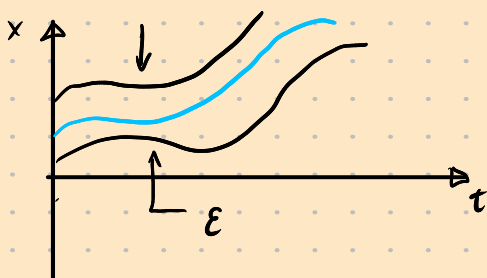
Рассмотрим решение $x = \psi + y$ (y - отклонение от преобраз.)

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\psi}}_{X(\psi, t)} + \dot{y} = X(\psi + y, t) \Rightarrow \dot{y} = X(\psi + y, t) - X(\psi, t) \quad (1)$$

$y=0$ - н.р. сис-мы (1)

Таким образом, если $y=0$ - устойчивое н.р., то тр-ие ψ наз-ся **устойчивой**.

Если \forall тр-ия сис-мы устойчива, то сис-ма наз-ся устойчивой.



Все преобразия, сближ. на δ от ψ , в пол. уст.,
отклонения $< \varepsilon$ от ψ .

Если $y=0$ - неуст. \Rightarrow тр-ия неуст., $y=0$ - асимпт. уст. \Rightarrow тр-ия асимптот. уст.

Замечание

Устойчивость траектории обозначает близость возмущенных траекторий в не не большие времена.

Пример

Рас-им колеб. с конечной амплитудой



- расхождение (т.к. амплитуды разные \Rightarrow разные периоды).

Траектории, кроме функции $\phi = 0$, неустойчивы.

0 выборе переменных в задачах нест-о устойчивости

Переменные не должны иметь ограничений в вар-ии п.р.

Пример



$\forall \theta_0 \ll 1 \exists$ рет. вида $\phi = \dot{\phi}_0 t + \phi_0 \rightarrow \infty$

П.р. на самом деле $\psi \rightarrow \infty$ - следствие выполнения с.к.

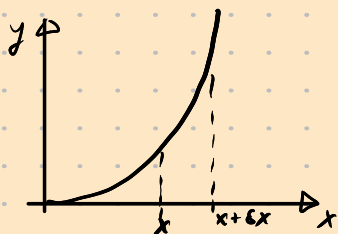
Пример

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \quad x = x_0 + \frac{t}{2}$$

$$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \forall \text{ времени, yes.}$$

$$\text{Замени } y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + t/2)^2$$

$$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + t/2)^2 = (x_0 + t/2)^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \rightarrow \infty$$



Определение (А3П)

Занесена $x = x(y, t)$, $x(0, t) = 0$ наз-ся **горизонтальной**, если

1. $\det(x, y) \neq 0$ в нек-рой окр-ти некоем y -м. (т.е. гиперпл. разрешима)
2. Занесена $x = x(y, t)$ и обратная ей $y = y(x, t)$ непрерывна в 0 равномерно по t . (таковы из 2 примеров)

Допустимые занесены не изменяют хар-ра горизонтальности.

Устойчивость линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad A(t) \text{ — матрица, которая не зависит от } t$$

$\exists \psi(t)$ — матрица, $x = \psi + y$ — возмущённая тр-ца,

$$\cancel{\dot{x}} + \dot{y} = A y + \cancel{A \psi} + \cancel{F} \Rightarrow$$

\Rightarrow мы-е уст. тогда матрица $A(t)$ и мы-е уст. н.р. $y=0$
однородной сис-мы $\dot{y} = A y. (2)$

Теорема

Н.р. $y=0$ — уст. $\Leftrightarrow \forall$ рен-я сис-мы (2) ограничено.

$$\square \quad \Leftrightarrow \quad \exists \psi - \text{неогр. рен-я, макс-ум } y = \frac{\delta}{2} \frac{\psi(t)}{\|\psi(t_0)\|}$$
$$\|y(t_0)\| < \delta, \quad y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow y=0 - \text{уст.}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Если } \forall \text{ рен-я } \Rightarrow \text{огр. } \Phi(t, t_0) - \text{матрица, зависящая от } t, t_0, \\ \forall \text{ рен-я (2) имеет вид } y = \Phi(t, t_0) y(t_0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A \Phi \\ \Phi(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$$

□

Замечание: норма матрицы: $\|\Phi\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$ — "максимальное растяжение"

С евклидовой нормой норма матрицы — max собственное число матрицы (собств. число матрицы $\Phi \Phi^T$)

Устойчивость систем с постоянной матрицей

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \text{const} \quad (3)$$

Каждый интерес представляет асимпт. устойчивость н.р. $y=0$.

Можно рассмотреть, как-то, как-то управление, зависимость от y и перем.

Омывается именно так.

Решения (3): $y = h e^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - корни

Теорема

Н.р. $y=0$ асимпт. устойчива $\Leftrightarrow \text{Re } \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

□ $y(t) \sim P_{\sigma_k}(t) e^{\lambda_k t}$ Если $\exists \lambda_k: \text{Re } \lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$ неуст.

Если $\text{Re } \lambda_k < 0 \Rightarrow \forall$ пер. орг. \Rightarrow н.р. $y=0$ уст. по пред. теор.

$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow$ н.р. $y=0$ - ас. уст.



(σ_k - кратность корня λ_k)

Определение

Устойчива $P(\lambda)$ наз-а уст. если $\text{Re } \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

(уст. означает асимпт. устойчив. уст. н.р. в ин-ле с const коэф.)

Теорема (крат. уст.-е уст. полинома)

Если $P(\lambda)$ уст., то знаки его коэф-ов должны быть одинаковы.

□ $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_j > 0 \quad \bar{\lambda}_j$ - сопр. корни

$\lambda_n = -\gamma_n, \quad \gamma_n > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod [(\lambda + \alpha_j - i\beta_j)(\lambda + \alpha_j + i\beta_j)]^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k} =$$
$$= a_n \prod (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k}$$

Разрешим каждый из коэф-ов одного знака.



Замечание

Условия для уст. группировки в виде: $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$. Это
эквивалентно предл. приведение многочлена к виду $a_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$.

Критерии уст. рас-на без дек-в (см. Муравьева или Демидовича)

Критерий Рауса - Гурвица

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

Сформируем матрицу Гурвица

$$\Gamma =_{n \times n} \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

По диагоналям коэф-ты a_1, a_2, \dots
слева коэф-ты по возраст., справа -
по убыванию.

$$P_\lambda \text{ - уст.} \Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

! Есть правило формирования матрицы Γ !

Замечание об уст. $a_0 > 0$

Пример

$$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 \quad \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1} \Rightarrow \text{нужно уст.} \Leftrightarrow \text{sign } a_0 = \text{sign } a_1$$

$$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0 - ?? \quad \text{нужное уст.} ??$$

"Парадокс" берем отсюда, что $P(\lambda)$ не приводится к виду $a_0 > 0$.

Приведение к виду $a_0 > 0$:

$$P(\lambda) \rightarrow \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1, \quad 1 \text{ задано } > 0$$

(если $a_0 = 0$ то $P(\lambda)$ сразу неуст.: есть корень $\lambda = 0$)

$$\Gamma = \left(\frac{a_1}{a_0} \right) \text{ - теперь всё верно.}$$

