

## Несколько оп-ий

$$y^2 = x^2$$

a) Сколько оп-ий  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? Бессмысльные имена:

$$X \subset \mathbb{R}: f(x) = x, x \in X$$

$$f(x) = -x, x \notin X$$

б) Сколько непрерывных оп-ий  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? 4:

$$x, -x, |x|, -|x|$$

в) Сколько непр-оп-ий  $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? 2:

$$x, -x$$

г) Сколько непр-оп-ий  $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  задает ур-е? 1:

$$x$$

## Теорема о неявной оп-ии

Пусть  $F(x, y)$  непр. дифгр. в  $(x_0, y_0)$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , тогда  $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$  в  $\Pi$   $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$ .

Определим  $f(x)$  непр. дифгр. на  $(x_0 - a, x_0 + a)$

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \text{правильное} - \text{не так-то!}$$

Две одна друг + 0 правиль. тк непрерывн., касаясь касательной (рабина оп-ии).

№1

$$u^3 - xy + y = 0, u = u(x, y)$$

Найдем  $u'_x, u'_y$  и  $du$  в т.  $(3, -2, 2)$  и  $(3, -2, -1)$  - надо угадать  $u'_x$  ищем

$$x=3, y=-2, u=?$$

$$u^3 - 3u - 2 = 0 \mid u=2 - \text{прав.}$$

$$(u-2)(u^2+2u+1)=0$$

$$(u-2)(u+1)^2=0 \quad (u=-1)$$

$$3u^2u'_x - xu'_x - u = 0$$

$$u'_x = \frac{u}{3u^2-x}$$

$$3u^2u'_y - xu'_y + 1 = 0$$

$$u'_y = -\frac{1}{3u^2-x}$$

$$u'_x(A) = \frac{2}{9} \quad u'_y(A) = -\frac{1}{9}$$

$$du(3, -2, 2) = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$$

! Норме спэзы драен гуарепенчан, не crucial наэнбэгнэ

$$3u^2du - xdu - udx + dy = 0$$

$$du = \frac{udx - dy}{3u^2-x}$$

No 2

$$f(x-y, y-z, z-x) = 0 \Rightarrow z = z(x, y) \text{ - наин дз}$$

$$f(u, v, w)$$

$$f'_u(x-y, y-z, z-x)(dx-dy) + f'_v(x-y, y-z, z-x)(dy-dz) + f'_w(x-y, y-z, z-x) \cdot (dz-dx) = 0$$

$$dz = \frac{f'_u dx - f'_v dy + f'_w dz - f'_w dx}{f'_v - f'_w}$$

No 3

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 & u=u(x, y) & u(1, 2) = v(1, 2) = 0 \quad (\text{ногжэгни}) \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x & v=v(x, y) & \text{Наини } u'_x, u'_y, v'_x, v'_y \text{ нэм } x=1, y=2, u=v=0, \end{cases}$$

! Рим номжие наини  $u, v$  - гранч. яр. - e. А номж. бт. - ижинч

$$\begin{array}{r} u^3 - 3u - 2 \\ u^3 - 2u^2 \\ \hline 2u^2 - 3u \\ 2u^2 - 4u \\ \hline u - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

No 4

$$u^3 + 2yu + xy = 0 \quad u(1, -1) = -1 \quad (\text{problem: OK})$$

Karim  $d^2u(1, -1, -1)$

$$3u^2du + 2ydu + 2ydu + dx \cdot y + dy \cdot x = 0$$

$$du = -\frac{2u dy + dxy + dy x}{3u^2 + 2y} \quad du = dx + dy$$

$$6u du^2 + 3u^2 d^2u + 2dudy + 2yd^2u + 2dydy + dx dy + dx dy = 0$$

$$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 \cdot 6u + u du dy + 2dx dy = 0$$

$$d^2u - 6(dx + dy)^2 + 4dx dy + u dy^2 + 2dx dy = 0$$

$$d^2u = 6dx^2 + 12dx dy + 6dy^2 - 4dx dy - u dy^2 - 2dx dy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dx dy$$

No T4

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Basisvektoren  $r'_x, r'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$  bezügl.  $r, \varphi$

$$\begin{cases} 1 = r'_y \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_y \\ 0 = r'_y \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_x \\ 0 = r'_x \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_x \end{cases}$$

$$\Delta = r$$

$$\Delta_r = -r$$

$$\Delta_r = r \cos \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\sin \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\sin \varphi$$

$$r'_y = \sin \varphi \quad \varphi'_y = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$r'_x = \cos \varphi \quad \varphi'_x = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

No nærmere bei 2. so domo?

$$u = u(x, y)$$

$$\text{Fremde yd-e } x u'_y - y u'_x = 0$$

Basisektoren gennem:  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, u = (r, \varphi)$

$u'_y, u'_x$  basisektoren bezügl.  $u_r, u_\varphi$

$$u'_x = u_r \cdot r'_x + u_\varphi \varphi'_x$$

$$u'_y = u_r \cdot r'_y + u_\varphi \varphi'_y$$

$$\vec{u}_x = u_r \cdot \cos \varphi - u_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \quad \vec{u}_y = u_r \cdot \sin \varphi + u_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$$

$\vec{u}_{p-e}$ :

$$r \cos \varphi \cdot (u_r \cdot \sin \varphi + u_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}) - r \sin \varphi \cdot (u_r \cdot \cos \varphi - u_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r}) = u_\varphi$$

$$u_\varphi = 0$$

$$\vec{u}_{p-e} \quad u = f(r)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Orb.: } u = F(x^2 + y^2)$$

No 5

$$(y - z) z'_x + (y + z) z'_y = 0 \quad z = z(x, y)$$

3dnuend: naber negab. neperenenne  $u = y - z, v = y + z$

naber q-u  $x = x(u, v)$ .

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x (x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$$

$$dx = x'_u du + x'_v dv \quad + z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$$

$$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y) dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1) dz = 0$$

dy, dz - neperenenne  $\Rightarrow$  kospf-für syn min  $\approx 0$ .

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z'_x = \frac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Negativeren:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v \left( \frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \right) = 0 \quad \frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

No T3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

1) D-ir, no  $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$ , no f negab-wa funksionen

2) Karien  $f(\mathbb{R}^2)$  - un-ko zonoren f.

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

На ab-е доказано и very неподтверждено:  $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$   
 $v(r, \varphi) = v(r, \varphi + 2\pi)$

2)  $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$

$v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$   $e^z$  нум. бе зерт. күнде?

### Жекеңшисіліктердегі көзқарастар

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Неданыңде: Егер бір көзқарастың  $F$  гана, то  $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$  (сандык)

Дөйн. жаңа: Егер  $F(x_1, \dots, x_n)$ - ганаң гана, то  $u_s(\bar{x}_0)$ ,  $\bar{x}_0$ - сандык, то пәннен квадратичного орында  $(dx_1, \dots, dx_n)$ :

$$d^2F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^n f''_{x_i x_i}(\bar{x}_0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^n f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. Кб-кп. наим. орын  $\Rightarrow \bar{x}_0$  - наим. мин

2. Сынш. орын  $\Rightarrow$  наим. макс

3. Неданың  $\Rightarrow \bar{x}_0$  - не наим.  $\Rightarrow$  кп.

4. Негонш.  $\Rightarrow ?$  (антиформ присущен)

### Использование КБ. формул

1. Применим в каноническом виде  $k(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$ ,  $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Для вида означают с помощью коэффициентов  $\varepsilon_i$ :

$p = \operatorname{количество} \varepsilon_i = +1$  - неданың. ненулев. члены

$q = \operatorname{количество} \varepsilon_i = -1$  - сынш. ненулев. члены

$r = p+q$  - ранг

Неданың. орын  $\Leftrightarrow$  бе  $\varepsilon_i = +1$

$$p = n, q = 0$$

Сынш. орын  $\Leftrightarrow$  бе  $\varepsilon_i = -1$

$$p = 0, q = n$$

Неданың. наимонш.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \geq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$$1 \leq q, p \leq n-1$$

Сынш. наимонш.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \leq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$$p \leq n-1, q = 0$$

Сынш. орын  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \leq 0, \exists \varepsilon_j = 0$   $p = 0, q \leq n-1$

## 2. Критерий Симсона

$$B = (b_{ij})$$

$$\left( \begin{array}{c|c|c} - & - & \\ - & - & \\ \hline - & - & \end{array} \right) \quad \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

Однозначн. оптим.  $\Leftrightarrow \text{sign } \Delta_i = (-1)^i$

Несовм. оптим.  $\Leftrightarrow \text{ber } \Delta_i > 0$

## 3. Условия оптимума $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$  Несовм. оптим.  $\Leftrightarrow A > 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C > 0)$

Однозначн. оптим.  $\Leftrightarrow A < 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C < 0)$

Неонп.  $\Leftrightarrow AC - B^2 < 0$

№1

$$U = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$$

$$u'_x = 6xy - 12$$

$$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \pm 1 \\ y = \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = 6y \quad u''_{xy} = 6x$$

$$u''_{yy} = 6y$$

$$d^2F = 6y dx^2 + 6y dy^2 + 12x dx dy$$

$$\frac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dxdy \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0 \quad -\text{неонп.}$$

$$\frac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dxdy \quad -\text{неонп.}$$

$$\frac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \quad -\text{неконн. оптим.} - \min$$

$$\frac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dxdy \quad -\text{однозначн. оптим.} - \max$$

Nº 2

$$u = xyz(16-x-y-2z), \quad x, y, z \geq 0$$

$$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$$

$$u_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \quad u_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$$

$$u_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$$

$$\begin{cases} yz(16-2x-y-2z) = 0 \\ xz(16-x-2y-2z) = 0 \\ xy(16-x-y-4z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+2z = 16 \\ x+2y+2z = 16 \\ x+y+4z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$$

$$u_{xx}'' = -2yz = -16 \quad u_{xy}'' = -2xz = -16 \quad u_{zz}'' = -4xy = -64$$

$$u_{xy}'' = z(16-2x-y-2z) - yz = -8 \quad u_{xz}'' = y(16-2x-y-2z) - 2yz = -16$$

$$u_{yz}'' = x(16-x-2y-2z) - 2xz = -16$$

$$d^2u(4,4,2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdz - 32dydz$$

$$\frac{d^2u(4,4,2)}{16} : \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 > 0$$

Паром. оптим.  $\Rightarrow$   $d^2u$  оптим. оптим.  $\Rightarrow$  мин.  $mdx$

Nº 3

$$u = x^4 + y^4 - 2x^2$$

$$u_x' = 4x^3 - 4x \quad u_y' = 4y^3$$

$$u_{xx}'' = 12x^2 - 4 \quad u_{yy}'' = 12y^2 \quad u_{xy}'' = 0$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy$$

$$d^2u(0,0) = -4dx^2 - 0 \text{ разн. насыщ.} - ?$$

$$u(ax, ay) - u(0,0) = ax^4 + ay^4 - 2ax^2 = 0 : \quad \begin{array}{l} \Delta x = 0 \quad \Delta y \neq 0 \quad \oplus \\ 0 < ax < \sqrt{2} \quad ay = 0 \quad \ominus \end{array}$$

Фокальная нес.

$$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2 - \text{паром. насыщ.}$$

$$u(\pm 1 + \Delta x, ay) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x^4) + ay^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= \Delta x^4 + 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + ay^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + ay^4 > 0 \quad - \text{min}$$

## № T5

B) cras. t. kb. graphma d<sup>2</sup>f razom. naryanyey.

a) Mamer u sivo dars max? Da.

§) Mamer u dars min? Ket (berga etis idene skusy, razo naryanyemne > 0 - keng d<sup>2</sup>f)

b) He dars ekstremyna? Da

## №4

$$x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0 \quad - \text{lickey. naryanyo q-p-u, 3ay. y-p-en.}$$

$$2x \, dx + 2y \, dy + 2u \, du + 2 \, dx - 2 \, dy + 2 \, du = 0$$

$$(u+2) \, du + (x+1) \, dx + (y-1) \, dy = 0$$

$$du = - \frac{(x+1) \, dx + (y-1) \, dy}{u+2}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad du = 0$$

$$u^2 + 4u - 5 = 0 \quad u = 1, -5 ; \quad (-1, 1, 1), (-1, 1, -5)$$

$$(u+2) \, d^2u + du''_0 + dx^2 + dy^2 = 0$$

$$d^2u = \frac{-dx^2 - dy^2}{u+2}$$

$$d^2u(-1, 1, 1) = -dx^2 - dy^2 \quad -\text{oymy. onpey. (max)}$$

$$d^2u(-1, 1, -5) = \frac{dx^2}{3} + \frac{dy^2}{3} \quad -\text{razom. onpey. (min)}$$

## Yukobniy ekstremu

$$u = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (\bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

Yukobniy obz:  $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_m(\bar{x}) = 0 \quad (*) \quad n > m$

Tora da  $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  raz-eciz yukobniy ekstremum f( $\bar{x}$ ) ypu ypu. (\*)  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in U_\delta(x_0) \text{ ypu bun. ynu-nu} \quad (*) \rightarrow f(\bar{x}) > f(\bar{x}^0)$

$$\text{Q-p-u} \quad L(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$$

$$L(\bar{x})|_{*} = f(\bar{x})|_{*} \quad \forall \lambda_i$$

guree  $x \equiv \bar{x}$   
 $x^0 \in \bar{x}^0$

Kedch. ynu.1. Naryse f(x) u  $\varphi_i(x)$  naryanyey. b)  $U_\delta(x^0)$ , tang

$$\operatorname{rg} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}} = m$$



$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

Първи етап  $x_1, \dots, x_n$  боядиса. решават се  $x_{m+1}, \dots, x_n$  (небиво)  
Решават  $x^* - \tau$ . вкл. огранич.  $f(x)$  нямаше минимум ( $*$ )  
Тогава  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m : x^* - \text{минимум}$ .  $\tau$ . оп-м на параметри  
Съществува  $n+m$  гр-вни сънч-м наше.  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$

## Пример

$$n=2, m=1$$

$$u = \ln xy, \quad x^3 + xy + y^3 = 0$$

$$L = \ln xy + \lambda(x^3 + xy + y^3)$$

$$\begin{cases} L'_x = \frac{1}{x} + \lambda(3x^2 + y) = 0 \\ L'_y = \frac{1}{y} + \lambda(3y^2 + x) = 0 \\ x^3 + xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = -\lambda(3x^2 + y) \\ \frac{1}{y} = -\lambda(3y^2 + x) \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3x^2}{y} - \lambda \\ \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3y^2}{x} - \lambda \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow y = x$$

$$2x^3 + x^2 = 0$$

$$x_1 = 0 - \text{не може}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x=y=-\frac{1}{2}, \quad \lambda = \delta - \text{без значение за минимум!}$$

**Доказателство:**  $(**)$  - проговарят сънч-м случаи

$dx_1, \dots, dx_m$  боядиса. решават се  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$

Решават  $F, \varphi_i$  - гравитационни напр. грав. в  $U_s(x^*)$ ,  $x^*, \lambda_i$  - първ. сънч-м

$n+m$  yп-ии с  $n+m$  неизб.

$d^2 L(x^0) \Big|_{(x^0)} -$  квадр-графика от  $n-m$  неизб-граф - об

По неї можна зробити висновок що функція має мінімум або максимум.

! Існує  $d^2 L(x^0)$  як незалежні від  $x$  та  $y$  змінні. тоді  $d^2 L(x^0)$  - незалежні від  $x$  та  $y$  змінні. Існує критерій діагональності, що використовується для перевірки наявності мінімуму чи максимуму.

### Приклад (більше не менше)

$$L''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \lambda \cdot 6x = -4 + 8 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -28$$

$$L''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda \cdot 6y = -28$$

$$L''_{xy} = \lambda = 8$$

$$d^2 L = -28 dx^2 - 28 dy^2 + 16 dx dy$$

$$\frac{d^2 L}{4} = -7 dx^2 - 7 dy^2 + 4 dx dy \quad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix} - \text{діагональний оптим.}$$

Також, точка  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  - точка мінімуму.

### Приклад 2

$$u = 1 - 4x - 8y \quad x^2 - 8y^2 = 8$$

$$L = 1 - 4x - 8y + \lambda (x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$L''_{xx} = 2\lambda = \mp 1 \quad L''_{yy} = -(16\lambda) = \mp 8 \quad L''_{xy} = 0$$

$$d^2 L = 2\lambda (dx^2 - 8dy^2) \quad d^2 L \Big|_{(x,y)} = \mp 4 dy^2$$

$$(x,y) \quad 2x dx - 16y dy = 0 \quad \textcircled{1} (-4, 1) - \text{неч. оптим.} \Rightarrow \text{y.m. min}$$

$$dx = 8y \quad \frac{dy}{x} = -2dy \quad \textcircled{2} (4, -1) - \text{діагональний оптим.} \Rightarrow \text{y.m. max}$$

### Пример 3

$$u = xy, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}$$

$2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$   
 $2y^2 - 1 = 0$

Насыщ.:  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\lambda = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$L''_{xx} = 2\lambda \quad L''_{yy} = 2\lambda \quad L''_{xy} = 1 \quad \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 2\lambda \quad \Delta_2 = 4\lambda^2 - 1$$

- насыщ. грани

$$(**) \quad 2x \, dx + 2y \, dy = 0$$

$$dy = -\frac{2x \, dx}{2y} = \begin{cases} -dx, & x=y, \lambda = -\frac{1}{2} \\ +dx, & x=-y, \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d^2 L \Big|_{**} = \pm dx^2 \pm dy^2 + 2dxdy = \begin{cases} -4dx^2, & \lambda = -\frac{1}{2} \\ 4dx^2, & \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{-эпв. грани - мин.} \\ \text{-надм. грани - макс.} \end{matrix}$$

Обрати!  $\underbrace{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}_{\text{мин.}} \underbrace{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}_{\text{макс.}}$

### Пример 4

$$u = 2x^2 + 12xy + y^2 \quad x^2 + 4y^2 = 25$$

$$L = 2x^2 + 12xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 12x + 2y + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x(2+2\lambda) + 6y = 0 \\ 6x + y(1+4\lambda) = 0 \end{cases} \quad - (0, 0) \text{ не насыщ. на гранич.}$$

Убеди, что (1) имеет реш.  $(0, 0)$ :  $\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 6 \\ 6 & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$-34 + 9\lambda + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{17}{4} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Две нули неизвестное. это иль.

Обрати: при  $\lambda = 2$ : глб. мин., при  $\lambda = -\frac{17}{4}$ : глб. макс.

## Задача. искомое значение определено на множестве

Найти максимум и минимум  $u = x + y + z$  на множестве  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$  (наподобие)



1. Найти стационарные точки; на них, проверить

2. Проверить граничные условия, т.е. границы, грани граничные

$$\text{1) } u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 = z, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$u = x + y + x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\text{Границы: } U'_x = 1 + 2x = 0 \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$U'_y = 1 + 2y = 0 \quad u = -\frac{1}{2}$$

$$\text{2) } u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leq z, \quad z = 1$$

$$u = x + y + 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Границы: нет,  $u(x, y)$  ограничен

$$\text{3) } u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1$$

$$u = x + y + 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$L = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \quad L'_y = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} \quad u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

## Кратковременное интегрирование

### Двумерное интегрирование

Двумерное интегрирование беспрепятственно для небольших областей,  $y = \psi(x)$



$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\psi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$



$$\int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

### Пример 2

Рассмотрим интеграл  $\int \int f(x, y) dy dx$

$$y = x^2, \quad x + y = 2 - \text{область}$$

$$\int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{2-y}^{2-y} f(x, y) dx dy$$



### Пример 3

$$x = \sqrt{4-y^2}, \quad x = \sqrt{4y-y^2}, \quad y = 2 \quad (x > 0)$$



$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4y-y^2}}}^2 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^2 f(x, y) dy$$

$$\int_1^2 dy \int_{\frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{4y-y^2}}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

### Пример 4

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy, \quad G \text{ орт. симметрична } y=0, y=a, y=x-a, y = x-3a, a > 0$$

$$\text{Вычисл. } y: \int_0^a dy \int_{y+a}^{y+3a} (x^2 + y^2) dx$$

$$\int_0^a dy \left( \frac{1}{3}x^3 + y^2 x \right) \Big|_{y+a}^{y+3a} =$$



$$= \int_0^a dy \left( \frac{1}{3}(y+3a)^3 + y^2(y+3a) - \frac{1}{3}(y+a)^3 - y^2(y+a) \right) =$$

$$= \int_0^a dy \left( 4y^3 a + 8y^2 a^2 + \frac{26}{3} y^3 a^3 \right) = \frac{4}{3} y^4 a + \frac{8}{2} y^3 a^2 + \frac{26}{3} y^4 a^3 \Big|_0^a = 16a^4$$

## Пример 5

$$\iint \sqrt{x-y} \, dx \, dy \quad G = \left\{ \frac{4}{5}x \leq y \leq x, 1 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^4 dy \int_{\frac{4}{5}y}^y \sqrt{x-y} \, dx = \int_1^4 dy \cdot \frac{2}{3} (x-y)^{3/2} \Big|_{\frac{4}{5}y}^y = \\ & = \int_1^4 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} y^{5/2} \, dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} y^{5/2} \Big|_1^4 = \frac{31}{30} \end{aligned}$$



## Пример 6

Возьмем небольшой интервал, на котором можно аппроксимировать

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} \, dy = \\ & = \int_0^\pi dx \frac{\sin x}{x} \cdot x = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2 \end{aligned}$$

! Площадь квадрата  $\sin x \cos x = 2$



## Замена

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x) g(y) \, dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) \, dy$$

## Замена переменных в общем интервале

$\begin{matrix} G \\ (x,y) \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} D \\ (u,v) \end{matrix}$  - двумерное однородение

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad - \text{квадратичн.}$$

$$\text{Тогда } \iint_G f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, du \, dv$$

Интервал охватываемый для определения - предел переворота при производ.  $< 0$

Красный или зеленый цвет - настолько можно ясно видеть

Числ. замена - полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$$

### Пример 1

$$\iint f(x, y) dx dy \quad \text{непарит. в нел. коорд.} \quad G = \{a^2 < x^2 + y^2 < 4a^2, y < |x|\}$$

$G$

$y = -\frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{\pi}{4}$

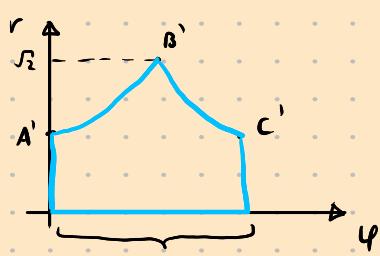
$r = a, \quad r = 2a, \quad y = |x|$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_a^{2a} r dr \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi = \int_a^{2a} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

### Пример 2

$$G = \{0 < x, y \leq 1\} \quad C: r=1, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad D: r=\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$O: r=0, \varphi - \text{неконг.} \quad A: r=1, \varphi = 0$$



также находит  
на практике важность.

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$$

$$\int_0^1 rdr \int_0^{1/r} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} rdr \int_0^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

$\arccos \frac{1}{r}$

# Пространство интегрирования



$G \subset R^2$

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{S_{xy}} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int_{\varphi(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Пример 1

Рассмотрим неправильный

$$\underbrace{\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\rho(x, y, z)} \rho(x, y, z) dz dy dx}_{\text{непр}}$$



$G$  - конус. Согласно  $z$  от нуб-им можно по  $a$ , но и по  $(x, y)$  не непр

Рассмотрим:

1.  $xyz$       2.  $yxz$       3.  $xzy$

$x \leftrightarrow y$

4.  $zxy$       5.  $yxz$       6.  $zxy$

$(1) \leftrightarrow (2) \quad (3) \leftrightarrow (5) \quad (4) \leftrightarrow (6)$



$$(2) \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\rho(x, y, z)} \rho(x, y, z) dz dx$$

$$(4) \int_0^a dz \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\rho(x, y, z)} \rho(x, y, z) dx$$

$$(5) \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\rho(x, y, z)} \rho(x, y, z) dz$$

$$(6) \int_0^a dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} \int_{\sqrt{y^2+x^2}}^{\rho(x, y, z)} \rho(x, y, z) dy$$

$$(3) \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\rho(x, y, z)} \rho(x, y, z) dy$$

Пример 2

$$\int_0^4 dz \int_0^{3-z} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x,y,z) dx$$

$\underbrace{\phantom{...}}$   
Syz



$$0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{4}z$$

$$x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$$

$$0 \leq x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$$

$$zyx \rightarrow xyz$$

$$\int_0^2 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{4-\frac{4}{3}y-2x} f(x,y,z) dz$$



$$y_p\text{-е нер-вн}: x = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{z}{2}$$

$$z = 4 - \frac{4}{3}y - 2x$$

## Замена переменных в трёхмерном пространстве

### 1 Углополярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h \quad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r$$

Если  $\varphi$  не линейный, то  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

### Пример 1

$$\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$$

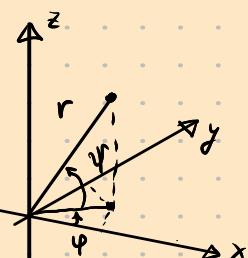
$$\frac{x^2 + y^2}{2} < z < 2 \quad \frac{r^2}{2} < h < 2$$

$r > 0$  нонпр-во

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dh \int_0^{\sqrt{2h}} r^3 dr \quad - \text{если } \varphi \text{ нужно не забыть}$$



### 2 Сферические координаты



$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$z = r \sin \psi$$

$$x = r \cos \psi \cos \varphi \quad y = r \cos \psi \sin \varphi \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r \cos \psi$  - радиус  $> 0$ , а  $z$  может быть любым, т.к.  
 $\sin \psi \neq 0$ ,  $\cos \psi \neq 0$  (радиус)

Вокруг центральной оси  $\Theta = \frac{\pi}{2} - \psi$  ( $0 \leq \Theta \leq \pi$ ) —  $\sin \psi$  меняется на  $\cos \Theta$  и наоборот.

Пример 1

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \psi \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \psi dr = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 \psi}{4} \cos \psi d\psi \quad \textcircled{1}$$

G:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$  — ог. в кубе не забыть

$$r^2 \leq r \sin \psi$$

$$0 < r < \sin \psi \quad 0 < \psi < 2\pi \quad - \sin \psi \geq 0 \text{ поэтому } 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{u^4}{4} du = 2\pi \cdot \frac{1}{20} = \frac{\pi}{10}$$

Объем

$$V_G = \iiint_G dx dy dz = \iint_{G_0} (v(x,y) - \psi(x,y)) dx dy$$



Пример 1

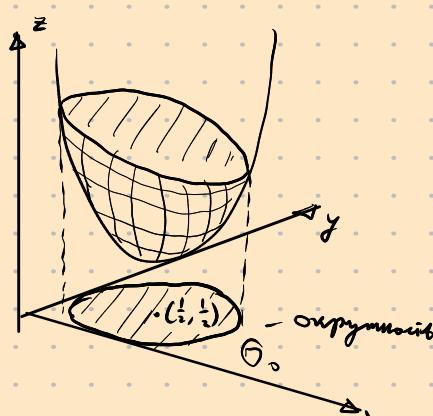
Найти объем между  $z = x^2 + y^2$  и  $z = x + y$

$$\iint_{G_0} (x+y - x^2 - y^2) \quad \textcircled{1}$$

Вокруг центральной оси

$$x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

$$y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi \quad 0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$x+y - x^2 - y^2 = \frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} - r^2$$

$$\textcircled{1} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r \left( \frac{1}{2} - r^2 \right) dr = 2\pi \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-r^2}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}$$

Пример 2

$$\iiint_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz \quad (1)$$

$$G - \text{ellipsoid: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$$

Объем сопряженное с полем

$$x = ar \cos \psi \cos \varphi \quad y = br \cos \psi \sin \varphi \quad z = cr \sin \psi$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = abc r^2 \cos \psi$$

$$0 < \psi < 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad 0 < r < 1$$

$$(1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \sqrt{1-r^2} dr = 2\pi abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr =$$

$$= 2\pi abc \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt = 2\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos 4t}{2}\right) dt = \frac{\pi^2}{4} abc$$

$$r = \sin t$$

$$dr = \cos t dt$$

$$V_{S^3} : \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (z^+ - z^-) dx dy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

$$z^+ = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$z^- = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$V_{S^3} : \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (u^+ - u^-) dx dy dz = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz \quad (2)$$

$$u^+ = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$u^- = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} R^4$  - объем 4-мерного шара

# Криволинейные интегралы

Пример 1

$$\oint_{\partial G^+} (Pdx + Qdy) = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad P, Q \in C^1(\bar{G})$$

$\partial G^+$  — внешн. гранич. граница

$$S_G = - \int_{\partial G^+} y dx = \int_{\partial G^+} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial G^+} (x dy + y dx)$$

Пример 1

Найти значение оп. кубик

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$$

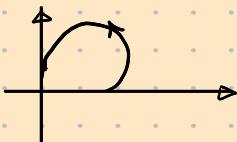
$$x = r \cos^4 \varphi \quad y = r \sin^4 \varphi \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$(\sqrt{r} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi))^2 = r^2 \cdot \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi$$

$$r^8 = \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi$$

$$r = \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\begin{cases} x = \cos^5 \varphi \sin \varphi \\ y = \sin^5 \varphi \cos \varphi \end{cases}$$



Пример 2

$$\text{Воспомин} \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

$\Gamma$  — прямая замкнутая крив. в. кубик, не согл. т. (0,0)

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Если  $\Gamma = \partial G^+$ , то  $\oint_{\Gamma} = 0$  по теореме Гамильтона

Покажем, что это не так. Возьмем  $\Gamma = \{x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$  — огибающая крив. в. т. (0,0)

$$\oint_{\Gamma} \frac{a \cos t \cdot a \cos t - a \sin t (-a \sin t)}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Здесь можно применить оп-ую формулу:  $P$  и  $Q$  не являются непр. гранич. ф.  $\bar{G}$

(т.  $(0,0)$  присвоено)

Ф-ия  $\Gamma$  имеет конечно множество точек, кроме  $(0,0)$  вне конуса  $\Gamma$ .

Если  $(0,0)$  входит в  $\Gamma$ :



$$\oint_{\Gamma_a} \phi = 0$$

Множество нулей для  $\phi$ , это  $\Gamma_a$  входит в  $\Gamma$

Нули  $G$ -непрерывных однородных функций  $\Gamma$  и  $\Gamma_a$ .

$P, Q \in C^1(\bar{G})$  и  $\kappa_G$  присвоено ф-ии  $\Gamma$ .

$$0 = \iint_G P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} \phi + \oint_{\Gamma_a} \phi = \oint_{\Gamma} \phi - \oint_{\Gamma_a} \phi$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \Gamma \\ 2\pi i, & (0,0) \text{ входит в } \Gamma \end{cases}$$

Замечание

$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d(\arctg \frac{y}{x}) = d\varphi$$

$$\text{Равноцен} \quad \int_{\Gamma} d\varphi = \oint_{\Gamma} \varphi = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \Gamma \\ 2\pi i, & (0,0) \text{ входит в } \Gamma \end{cases}$$

Пример 2



$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$$

Поверхностный интеграл 1 рода

Простая мажная поверхность  $\Pi \Gamma \Pi$ :

$$G \subset \mathbb{R}_{u,v}$$

$$\Phi: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$$

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

$$(u, v) \in \bar{G}$$

$\Phi$  дифференцируема на  $S \subset \mathbb{R}^3$ ,  $S$  - под-множество

Простая - дифференцируемое отображение.

$\vec{r}(u, v) \in C^1(\bar{G})$ ,  $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$ . —  
— неизгл.

Поверхностный интеграл 1-го рода

$$S - \text{ПРП}, \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{G}$$

$f(x, y, z)$  непр. на  $S$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\vec{F}_u, \vec{F}_v]| du dv$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}]|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2 \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$|\vec{F}_u|^2 = F, \quad |\vec{F}_v|^2 = G, \quad (\vec{F}_u, \vec{F}_v) = f$$

$$|[\vec{F}_u, \vec{F}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$$

Пример на 1-ий:

① Пример непр. гладк. оп-ии  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{G}$

$$[\vec{F}_x, \vec{F}_y] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{array} = -f_x \vec{e}_1 - f_y \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$|[\vec{F}_x, \vec{F}_y]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

$$\text{Аналогично, } x = g(y, z): |[\vec{F}_x, \vec{F}_y]| = \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}$$

Пример 1

$$\iint_S (x + y + z) dS \quad S - \text{ПРП: } x + 2y + 4z = 4, \quad x, y, z \geq 0$$



$$x = 4 - 2y - 4z$$

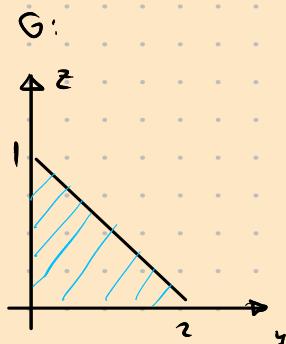
$$\frac{y}{2} = z$$

$$|[\vec{r}_y, \vec{r}_z]| = \sqrt{1 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\int_0^1 dy \int_0^{4-2y} (4 - 2y - 4z + y + z) \sqrt{21} dz =$$

$$= \sqrt{21} \int_0^1 dy \left( (4 - y)(1 - \frac{y}{2}) - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 \right) = \sqrt{21} \int_0^1 \left(4 - \frac{7}{2}y + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{8}y^2\right) dy =$$

$$= \frac{7}{3} \sqrt{21}$$



## ② Сферическая координаты

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \psi \\ y = R \cos \varphi \sin \psi \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad R \text{ масштаб!}$$

$$[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R \cos \varphi \sin \psi & R \cos \varphi \cos \psi & 0 \\ -R \cos \varphi \sin \psi & -R \sin \varphi \sin \psi & R \sin \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 (\cos^2 \varphi \cos \psi \vec{e}_1 + \cos^2 \varphi \sin \psi \vec{e}_2 + \cos \varphi \sin \psi \vec{e}_3)$$

$$|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| = R^2 \cos \varphi \quad - \text{Геодиаметр, но не объемный!}$$

## Пример 2

$$\iint_S (x+y+z) dS \quad S - \text{бокс: параметры: } x^2+y^2+z^2=1, \quad z \geq 0$$

$S$  Сферические координаты

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \iint_S &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 (\cos \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi) \cos \varphi R^3 dR = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi \end{aligned}$$

- **Например**  $S = \iint_S 1 dS = \iint_G |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv$

## ③ Тор:



$$\begin{cases} x = (a + b \cos \psi) \cos \varphi \\ y = (a + b \cos \psi) \sin \varphi \\ z = b \sin \psi \end{cases}$$

$$|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| = (a+b \cos \psi)b$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi (a+b \cos \psi)b = ab 4\pi^2$$

## Определение ППП

Это задача "внешней" и "внутренней" нормали

$$S: \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}$$

$$\vec{v} = \pm \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|} \quad - \text{нормаля на плоскость нормали}$$

1. Сфера:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \cos \psi \\ y = a \cos \varphi \sin \psi \\ z = a \sin \varphi \end{cases}$$



$$\vec{v} = + \frac{[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]}{|\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi|} \quad - \text{внешняя нормаль}$$

- - - внутр.

2. Поверхность вида  $z = z(x, y)$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{cases}$$

$$[\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Точка на плоскости задается  
координатами с помощью  
функции  $z$

$$\vec{v} = + \frac{[\vec{r}_x, \vec{r}_y]}{|\vec{r}_x, \vec{r}_y|} \quad - \text{коорд. верхней с. нормаль}$$

- - - нижней

## Поверхности вида $\Sigma$ I погр

$$\vec{a}(x, y, z) = (P, Q, R) \quad - \text{непрерывна на определенном ППП}$$

$$\text{Тогда формула: } \iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) \equiv \iint_S (P dy dz + Q dz dx + R dx dy)$$

Это норма внешней нормали к поверхности на плоскости (в погр.)

$$\iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_S (\vec{a}, \vec{v}) dS \quad - \text{он же}$$

$\rightarrow$  поверхность I погр.

$\vec{v}$  - единичная нормаль

$$\text{Баранене: } \iint_S (\vec{a}, d\vec{s}) = \iint_S \left( \vec{a}, \pm \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} \right) dS = \pm \int_D \left( \vec{a}, \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} \right) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv =$$

$$= \pm \iint_D (\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv = \pm \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv =$$

$$= \pm \iint_D \left( P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv$$

Пример 1

$$\iint_S z^2 dx dy, \quad S - \text{бүрэгийн цирконийн нэгжүүдэл } (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = c^2, \quad z \leq 0$$



1-йн чадвад  $x = a + c \cos \varphi \cos \psi \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$   
 $y = b + c \cos \varphi \sin \psi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$   
 $z = c \sin \varphi$

$$\iint_S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c \cos \varphi \sin \psi & c \cos \varphi \cos \psi & c^2 \sin^2 \varphi \\ -c \sin \varphi \cos \psi & -c \sin \varphi \sin \psi & c \cos \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -c^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi (\cos \varphi \sin \psi \cdot \sin^2 \varphi) = -2\pi c^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \varphi \sin^3 \varphi d\varphi =$$

$$= -2\pi c^4 \int_{-1}^0 \sin^3 \varphi d(\sin \varphi) = \frac{\pi c^4}{2}$$

2-йн чадвад  $z = \sqrt{c^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$

Уншижсан ичирнэхийн бүрэг:  $\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D \begin{vmatrix} 0 & 0 & R(x, y, z(x, y)) \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dx dy =$   
 $(S - \text{нэгжүүлэх } z = z(x, y))$

$$= \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

$$\iint_S = \pm \iint_D (c^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2) dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} dr \int_0^c (c^2 - r^2) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^c (c^2 r - r^3) dr =$$

$$= 2\pi \cdot \left( c^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^c = \frac{\pi c^4}{2}$$

$$D: (x-a)^2 + (y-b)^2 < c^2$$

Наго бийн нэгжүүлэх хувь:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq 2\pi & \quad r = a + r \cos \varphi \\ 0 \leq r \leq c & \quad y = b + r \sin \varphi \end{aligned}$$

## Решение Ориентировано-Распределенное

$G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$  — открытая конечная область

$P, Q, R \in C^1(\bar{G})$

$$\iint_{\partial G} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) \equiv \iiint_G \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)}_{\operatorname{div} \vec{a}} dx dy dz$$

$\rightarrow$  Внешняя граница

### Задача

$$\vec{a} = (0, 0, z^2) \quad \operatorname{div} \vec{a} = 2z$$

$$\iint_{S_{\text{вн}}} + \iint_{S_{\text{вр}}} = \iiint_G z^2 dx dy dz \quad (\Rightarrow)$$



Сферич. коорд.

$$\begin{aligned} x &= a + r \cos \varphi \cos \psi \\ y &= b + r \cos \varphi \sin \psi \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \psi \leq 0 \\ 0 &\leq r \leq c \end{aligned}$$

$$\iint_{S_{\text{вр}}} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi} d\psi \int_0^c 2r \sin \varphi r^2 \cos \varphi \cos \psi dr = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \frac{c^4}{4} = -\frac{\pi c^4}{2}$$

$$S_{\text{вр}} : z = 0 \Rightarrow \iint_{S_{\text{вр}}} z^2 dx dy = 0$$

$$\iint_{S_{\text{вн}}} = -\frac{\pi c^4}{2} \Rightarrow \iint_{S_{\text{вн}}} = \frac{\pi c^4}{2}$$

### Пример 2

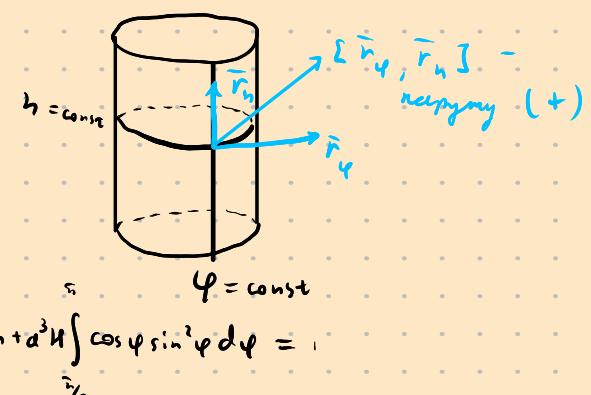
$$\iint_S yz dx dy + zx dy dz + xy dz dx$$

$S$  — внеш. симметрическая поверхность, обра.  
 $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq H$

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \\ y = a \sin \varphi & \\ z = h & 0 \leq h \leq H \end{cases}$$

$$\iint_S d\varphi \int_0^H \begin{vmatrix} a h \cos \varphi & a^2 \cos \varphi \sin \varphi & a \sin \varphi \\ -a \sin \varphi & a \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dh =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^H (a^2 h \cos^2 \varphi + a^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) dh = a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^H h dh + a^3 H \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi =$$



$$= a^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{H^2}{2} - \frac{1}{3} a^3 H$$

2-i anel (Dispariagum) Nob-iň neýemysa, kütümex unra.

$$\iint_S + \iint_{S_{xz}} + \iint_{S_{xy}} + \iint_{S_{yz}} + \iint_G = \iiint_G \operatorname{div} \vec{a} \, dx \, dy \, dz =$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = x + y + z$$

$$= \iiint_G (x + y + z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \quad 0 < r < a \quad 0 < h < H$$

$$= \frac{\pi a^2 H}{8}$$

$$S_{xz}: y=0 \Rightarrow \vec{a} = (z, 0, 0)$$

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{v}) \, dS, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{a}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow \iint_{S_{xz}} = 0$$

$$S_{yz}: z=0 \Rightarrow \vec{a} = (0, x, 0) \quad \vec{v} = (0, 0, -1)$$

$$(\vec{a}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow \iint_{S_{yz}} = 0$$

$$S_{\text{top}}: z = H \quad \vec{a} = (Hx, xy, yH) \quad \vec{v} = (0, 0, 1)$$

S - ýapram qy ñin  $z(x, y) \equiv H$ , berneş ciyanma  $\Rightarrow +$

D:  $x \geq 0, y \geq 0, z = 0$  Bölgem neýipinde,  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq a$

$$\iint_{S_{\text{top}}} = + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a \begin{vmatrix} Hr \cos \varphi & r^2 \cos \varphi \sin \varphi & Hr \sin \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} dr =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a Hr \sin \varphi \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a Hr^2 dr = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$\iint_S = \frac{a^2 H^2}{8} - \frac{\pi a^3}{3}$$



