

Глава XVII

Несколько приложений к экстремумам функций нескольких переменных

§1. Теорема о несуществовании

$$F(x, y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$ — не является гладкой ф-и



Теорема

Пусть ф-я 2-х переменных гладк. в $U(x_0, y_0)$. $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$

б-к-ром ур-е $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

• $F(x)$ непр-гладк. на $(x_0 - a, x_0 + a)$ и $f'(x) = -\frac{F'_x(x, F(x))}{F'_y(x, F(x))}$ на $(x_0 - a, x_0 + a)$

Д-бо

① Не наружн. одн., $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

По лемме о сопр. знака, \exists отр-е (x_0, y_0) (б-к-е прямой).

$\tilde{\Pi} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, можно сказать, что

$F'_y > 0$ в $\tilde{\Pi}$.



$$\varphi(y) = F(x_0, y)$$

$$\varphi(y_0) = 0, \quad \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0, \quad y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

$\varphi(y) \uparrow$ справа

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$

По лемме о сопр. знака (зак F) $\exists A: \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \begin{cases} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{cases}$

Значит $x^* \in (x_0 - a, x_0 + a)$

$$\varphi(y) = F(x^*, y)$$

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0$$

но т. б-к, $\exists y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]: \varphi(y^*) = 0$

$$\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \varphi(y) \uparrow$$
 справа \Rightarrow

\Rightarrow Foga: $f(y^*) = 0$ - egensid.

$\forall x^* \in [x_0-a, x_0+a] \exists! y^* \in [y_0-b, y_0+b]$

$$f(x^*, y^*) = 0$$

$$y^* = f(x^*) \quad \text{Replace 2. givværdi}$$

② Hvis $x \in [x_0-a, x_0+a]$, $y = f(x)$.

$$f(x, y) = 0$$

Δx - udværdi af x , Δy - udværdi af y .

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$

No 1. læren om der er en vektor mellem (x, y) og $(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

$$0 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_x(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta y,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y)}{f'_y(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y)}$$

$$\Pi = \{x_0-a < x \leq x_0+a, y_0-b < y \leq y_0+b\}$$

$$\bar{\Pi} = \{x_0-a \leq x \leq x_0+a, y_0-b \leq y \leq y_0+b\}$$

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \text{ på } \bar{\Pi}.$$

$\bar{\Pi}$ - konvex, d.h. $|f'_x| \leq \alpha$ - v.p.

$$f'_y \geq \beta > 0 - \text{genn. inf.}$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq \frac{\alpha}{\beta} = M$$

$$|\Delta y| \leq M |\Delta x|$$

$y = f(x)$ v.p. på $[x_0-a, x_0+a]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta = \frac{\epsilon}{M} > 0)$$

Foga f - påknapet v.p. på (x_0-a, x_0+a) .

No 3. o. sammenhæng mellem op-værdi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x, f(x))}{f'_y(x, f(x))} - \text{v.p.} \quad \text{UTD}$$

Теорема (однознач.)

- ① Рассмотрим $n+1$ неизвестных $F(x_1, \dots, x_n, y)$ непр. гладкое. Имеется точка $\bar{x} = (x_1^*, \dots, x_n^*, y^*)$, при этом $F(\bar{x}) = 0$, $F'(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*) \neq 0$. Тогда существует однозначное отображение $y = f(x_1, \dots, x_n)$:
- $$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n, y^* - \beta < y < y^* + \beta\},$$
- и имеем $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x_1, \dots, x_n)$.
- ② F непр. гладкое. Имеется $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n\}$, при этом $y \in \Pi'$
- $$f'_i = - \frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_{y}(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i=1, \dots, n.$$

Доказательство:

① Док. равене, Тогда $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

② Докажем:

Пусть γ . Аддитивна для n -хим. ненулевым непр.

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1 + \alpha x_1, \dots, x_n + \alpha x_n, y + \alpha y) - F(x_1, \dots, x_n, y) = \\ &= F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y) \alpha x_1 + \dots + \\ &\quad F'_{x_n}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y) \alpha x_n + \\ &\quad F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y) \alpha y \\ \alpha y &= - \frac{F'_{x_1} \alpha x_1 + \dots + F'_{x_n} \alpha x_n}{F'_{y}} + \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\alpha} = m_\beta \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i, |F'_{y}| \geq \beta) \end{aligned}$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ падает непр. на Π'

$$\lim_{\alpha x_i \rightarrow 0} \alpha y = 0$$

Рассмотрим $\alpha x_1 = \dots = \alpha x_n = 0$

$$\frac{\alpha y}{\alpha x_1} = - \frac{F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, x_2, \dots, x_n, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y)}{F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha x_1, x_2, \dots, y + \frac{\gamma}{\alpha} \alpha y)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{\alpha x_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{\alpha x_1} = \dots = - \frac{df}{dx_1}, \quad \text{аналогично } x_2, \dots, x_n.$$

Чтож.

§ 2 Teorema o one-me neblivim p-ii

Dnach. $u = u(x)$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad - \text{gugup - q-p-ii}$$

Marginalna deriva - $D_u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

Esim. ona kladymas, kai cyp - et apiegiavimas - deriva.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

Teorema (o mese)

Pykne $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ neyp-gugup-q-p-ii & aps-ii
 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Torga $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{cases} F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \iff \bar{y} = f(\bar{x}), \text{ apriein q-p-ii}$$

$y_i = F_i(\bar{x})$, $i=1 \dots m$ - neyp-gugup. na

$$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$$

§ 3. Teorema apie svaranu apibraneniu.

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, gugup.

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x})$$

Biamo gurejano: eim $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, Torga

$$D_{F \circ \Phi} = D_F \cdot D_\Phi.$$

Esim. eim $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$, to

$$D_{F\Phi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\Phi|_{\bar{x}}$$

Пусть $n=m=p$, тогда

$$J_{F\Phi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\Phi|_{\bar{x}}$$

Однозначні симбр.:

$$\Phi: G \rightarrow D \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$$\Phi^{-1}: D \rightarrow G$$

$$\Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \Phi - \text{бінарній симбр.}$$

$$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1} - \text{єсли оно дифер.!}$$

Если симбр. диференційовна в груп., то однозначні симбр. не обирають дифер. груп.!

$n=1$:

$$y=x^3 - \text{дифер., дифер.}$$

однозначні непарні. & т. д.

Бінарній симбр.

$$\begin{matrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{X} \end{matrix}$$

$$\boxed{J \neq 0}$$

Опрац.

Симбр. Φ - існуючий однозначний симбр. в G , тоді $\forall \bar{x}_0 \in G \rightarrow \exists \delta > 0$: Φ однозначний в $U_\delta(\bar{x}_0)$.

Теорема щодо однозначності симбр.-ів

Пусть $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ непр. дифер. в $J_\Phi \neq 0 \& G \subset \mathbb{R}^n$. Тоді Φ існує однозначно:

$\forall x_0 \in G \rightarrow \exists \Phi^{-1}$ - непр. дифер. симбр. в $y_0 = \Phi(x_0)$.

Д-бо:

$$\text{Роз-вм } F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j, \quad j=1 \dots n$$

$$(y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Оно непр. дифер. $\forall (y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$ також, що $x \in G$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y, x_0)$$

Із т. є ок-не нерівніс оп-ні $\exists \Pi = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

б к-пом

$$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$$

F_i непр. функц. на $\Pi' = \{y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i\} \subset R^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ динамично отображает нен-е мн-ло $X \subset R^n$ на Π' .

$$x = \Phi^{-1}(\Pi')$$

Π' - отр. мн-ло, наимн. праобраз отр. мн-ла или непр. отр. един. отр. мн-ло \Rightarrow

$\Rightarrow X$ - отображение



$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset X$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists U_\delta(x_0) \text{ б к-пом отр. гл-о отображения.} \quad \text{УГД}$$

§ 4. Экстремумы ф-ии нескольких переменных

Опт-е

$x^* \in R^n$ наз-ся локальн. макс. локального экстремума ф-ии $y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x^*) \geq f(x) \forall x \in U_\delta(x^*) \text{ и } \forall x \in U_\delta(x^*) \rightarrow f(x) > f(x^*)$

Аналогично для мин. лок. экстр.

Несобственное ум. локального экстремума

Если $f(x)$ непр. в x^* и x^* гл-о лок. экстр., то $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \quad (\text{стационарное условие})$$

П-ло:

Рассмотрим ф-ию $\varphi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Тако, что x_i^* - лок. экстремум токо по одн. x_i . Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{Аналогичные выражения}$$

УГД

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j$$

Норм. опр.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) > 0$

Опим. опр.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) < 0$

Ненорм.: $\exists x_1, x_2: K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Ненорм. насыщ.: $\forall x \rightarrow K(x) \geq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Опим. насыщ.: $\forall x \rightarrow K(x) \leq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Если $K(x) \equiv 0$, то она назн. и опим. насыщ., также ненорм. сущ. нет.

Рассл. f глобаль непр. гладк. в $G \in \mathbb{R}^n$, т.е. имеется лок. радиус оптим. в точке x^* . Тогда $F_{x,y} = f_{x,y}$

$$d^2 f(x^*) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(x^*) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n F''_{x_i x_j}(x^*) dx_i dx_j - \text{кв. форма от касательных } (dx_1, \dots, dx_n)$$

Дифференцируемость функции

Рассл. $f(x)$ глобаль непр. гладк. в $U_s(x^*)$ в x^* -этих. Тогда $K(x) = d^2 f(x^*)$ - кв. форма. Тогда:

1. если $K(x)$ норм. определяема, то x^* - т. квадратичн. индекса нулевого
2. если $K(x)$ опим. опред., то x^* - т. квадратичн. индекса ненулевого
3. если $K(x)$ ненорм., то x^* не глоб. т. квадратичн.
4. если $K(x)$ насыщ., то x^* не является квадратичн.

Лемма

Рассл. $K(x)$ в \mathbb{R}^n ненорм. опр., тогда $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \geq C|x|^2$

Если опим. опр., то $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \leq -C|x|^2$

Д-бо 1: доказ.

Задача, что $K(x)$ норм. определяема в некотором R' , т.е. $K(x)$ - значение на бесконечном множестве в R' .

$K(x_1, \dots, x_n)$ - непр. на \mathbb{R}^n .

$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ - опр. в замкнутой сфере.

Тогда гл-но, непр. на замкнутой сфере, где максимум \inf на S .

$K(x) \geq 0$ na $S \Rightarrow \inf_s K = C > 0$.

$\forall x \in S \rightarrow K(x) \geq C$.

При $x \neq 0 \in R^n$. Рад-ун $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$$

$$K(x) \geq C |x|^2 \quad \text{УТА}$$

D-бо тапсару

1. $f(x)$ ғанаңын непр. грөзүп $\mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow$ ынанымалык жиындар (Редно):

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0) \rightarrow f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(|g|^2), \quad g^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$$
$$df \equiv 0 \rightarrow \text{с. сипат.}$$

$d^2 f$ - нарам. орын.

Т.е. $f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} (|dx|^2) + o(|dx|^2) =$

$$= f(x^0) + \frac{C}{2} |dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$$
$$= f(x^0) + |dx|^2 \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) \right)$$

$$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0 \quad \& \quad \mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0).$$

Т.е. x^0 - с. сипат. нокт. минимум.

2. Анализмас

3. $d^2 f(x^0)$ - неч. кв. сипат.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$.

Рад-ун бекіспен нұтқаралғанда $dx = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ (нұтқарынан $\parallel z$).

$$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\left(\lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} \right)}_{\beta > 0} |z|^2$$

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$$
$$= f(x^0) + \frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2$$

$$\frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0 \quad \text{нан жи. макш. } \varepsilon(dx)$$

Т.е. $f(x) > f(x^0)$ на $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Анализмас енде $dx = \lambda z'$, то нұтқаралғанда макш. $\varepsilon(dx)$ $f(x) < f(x^0)$.

x^0 - не с. нокт. экстремума.

Пример: $z = x^4 + y^4$, $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$, сипат. 1. $(0, 0)$, $z''_x = 12x^2$, $z''_y = 12y^2$, $z''_{xy} = 0$, $d^2 z(0, 0) = 0$.

Mayo conjecture $\Delta z(0,0)$: $z(\alpha x, \alpha y) - z(0,0) > 0$ then $\alpha x^2 + \alpha y^2 > 0$ - max. min.

§ 5. Установки (ориентации) экспрессии.

$$z = xy \quad (\text{csgos})$$

$$z_x' = y, \quad z_y' = x \quad (\text{ca. r. } (0,0))$$

$$z_{xx}^1 = z_{yy}^1 = 0, \quad z_{xy}^{''} = 1$$

$d^2z = \text{neur. ab. q.} - \text{neur. exp.}$

Given $y = x + z$, $x = z(1-z)$, so mod. is $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ons

T. x^* may not be T. extremes because necessary op-an $u = f(x_1, \dots, x_n)$ upon domain-
nemum ymabut chay $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0$, even $\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x^*)$ upon boun. ym.
chay $\rightarrow f(x) > f(x^*)$

Если из ус. слова можно это выражение оценить через группу, то возможна
загадка на синоним. Загадка оп-ми менюса зайде оценкой.

A eum nei, zo symmetrisch op- en terugdraaien.

Приєсть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$, існує відповідна $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 q_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_n q_n(x)$

Then both φ - λ change $L = f, \forall \lambda_i$. - you equip f in L cobragars.

Модификация $y = -x$ сине. экспрессия

Приєднані функції $f(x)$, $\varphi_i(x)$ ($i = 1 \dots n$) належать групі B або $U_\delta(x^*)$. При цьому x^* — єдиний точковий

$f(x)$ якщо $\varphi_i(x) = 0$, інакше $rg\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) = m$ (кофактори φ_i умільшують незалежність).

Tогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: $x^* - r.$ одновременно экстремумы $L(x)$.

Međutim, povezivajući φ -nuj, $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{array} \right.$ - one-juju $n+m$ yp-ju i c n+m kružbi, $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

D-~~b~~:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad \operatorname{rg} \Phi = m, \quad x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

Er muss nun genau $n = 0$. Das ergibt in 1-n nun:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{array} \right| \neq 0 \quad \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \neq 0 \text{ bei } T, x^{\circ} \Rightarrow \text{b. } \varphi_0(x^{\circ}) \text{ einzig nesp.}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ \psi_m(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \end{cases} \quad \text{No T. Onechnai p-un } \exists \text{ ovp-to } x^*, \text{ b k-poin} \\ \text{av-va nekubazernye yar. sluzhi}.$$

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_{m+1}, \dots, x_n - \text{незав. ф-ии} \\ x_1, \dots, x_m - \text{зависимые} \end{array}$$

9-и г. квадратичн. б. опр-ии $\tilde{x}^o = (x_{1+o}, \dots, x_n^o)$. Продолж. же. вез:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n & dx_1, \dots, dx_m - \text{zab. Gruppen - var} \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n & dx_{m+1}, \dots, dx_n - \text{negab. Gruppen - var} \end{cases}$$

При каком x значение $f(x)$ будет наибольшим?

$$f(x)|_*= f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = F_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_* = \mathcal{L}(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathcal{L}_*(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_*=f(x)|_*$$

$$L_p(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}) \quad \forall x;$$

$$d\mathcal{L}(\tilde{x}^*) = df_*(\tilde{x}^*) = 0 \quad (\text{T.R. zero norm outer derivative}) \quad \forall x$$

В any unbarmehnem gup - ic относ. замена переменной

$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^*) = d(\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}) = d\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}$ - греческое обозначение
 (греческое обозначение введенное в определение)

$$d \mathcal{L}(x) \Big|_{x_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} dx_m + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} dx_n}_{\text{negative.}} \quad \xrightarrow{\text{zabieram}}$$

До сих пор λ_i -прост. Поэтому λ_i так, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*) = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}(x^*) = 0$.

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \int \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i}(x^*) = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^o) + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m}(x^o) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m}(x^o) = 0 \right.$$

- Cine-nă sun-ză-mi, ei argeș!

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ perm-e}$$

2: nāngenu.

Рынок равн. 2:1

$$dL_0(\tilde{x}^*) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) dx_m}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) dx_n}_{=0}$$

Но $dL_0(\tilde{x}^*) = 0$ $\left. \begin{array}{l} \\ \text{для } dx_{m+1}, \dots, dx_n - \text{произв.} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0 \Rightarrow \text{рынок равн. 2:1 } x^* - \text{стабильн.}$
оптимальна.

UTA

Две проверки наст. ус-я \Rightarrow один-экспрессия много планируему.

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \psi_1 = \dots = \psi_m = 0 \end{array} \right. \quad \text{и } n+m \text{ уп-ий, } n+m \text{ неизб.}$$

Дискриминантные критерии

Функции $f(x)$, $\psi_i(x)$, $i=1, \dots, m < n$ — главные несл. функц. оп-ия в окр-ии x^* , а также
параметрические функции $\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$ зависят от x^* .

Функции $\lambda_i(x^*)$, $i=1 \dots n$ удовл. уравн. (I). Тогда в окр-ии x^* параметрические
функции $d^2L(x^*) \Big|_{**}$ — это функции от $n-m$ несл. функц. (обозначение $**$ означает то, что в
них не входит ψ -функция. Теорема).

Тогда если эти функции положит. опред., то x^* — л. с. первого ус-я. максимум f называется
локальн. опред., если x^* — л. с. первого ус-я. максимум f
некомпакт., если x^* — л. с. 2-го или 3-го ус-я. максимум f .

Пример: Если $d^2L(x^*)$ — неотриц. опред. опред. функция в окр-ии x^* (то есть несл. функц.), то это локальный максимум ($**$) или локальный минимум.

Иначе функция является несл. функц. ($**$).

Если же несл. функц. ($**$) функция неогранич., то это гл. максимум.

Пример:

$$f = xy \text{ при ус-и } x+y=1$$

$$L = xy + \lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = y = \frac{1}{2}$$

$$L_x'' = 0, \quad L_y'' = 0 \quad \text{d}^2 L = 2dx dy - \text{neomp. xb. gruppiert at dx, dy}$$

$$\text{Продиференцируем обе части: } dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$$

$d^2 L_{xx} = -2 dx^2$ - signuz. ungew. kb. graphen or signo dx

Знайдіть $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ -тис. умову.

Copabka

d^2f не одн. и н.д. определен в окне. Задача решимо в:

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ - għamixx nemp. għixx.

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^n dx_k d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k + \sum_{k=1}^n dx_k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \right) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k \end{aligned}$$

Erm x_1, \dots, x_n - negab. reellen nole, Tz $d^2x_k = 0$

$$d^2f = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} dx_k + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Der zentrale Wert eines Extremes von χ^2 kann $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ für $k = 1, \dots, n$ gelten.

(b circu. 1.) - Квадрупедам носио програма d'f синх. заменяя неп-сен
b circu. Torne

P-B3

Сокращен бе боян и адъян-т през земство.

$$\text{Dokument, 210} \quad x_i = g_1(x_{n+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{n+1}, \dots, x_n) \quad - \text{gängige resp. grupp. Bampf-Form } \tilde{x}^0$$

$$q_i(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

Программ. поб-бо на x-и

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial g_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \Psi_i}{\partial g_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i=1 \dots m$$

Ням спаси. j , $m+1 \leq j \leq n$ - это как-то м. мн. $y_j = y_m$ с м. незав. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

$$\Delta = \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ if and only if } x^m \neq x^n.$$

Begramp. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ repes $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$, zunamen δ_{jk}^i

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} \text{ hemps - grupp.} \Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \text{ hemps - grupp.} \Rightarrow g_i - \text{gruppen} \text{ hemps - grupp.} \Rightarrow$$

\Rightarrow moment of inertia $d^2 c \cos^2 \theta p - 2m$

Всички изрази на производна $d^2 L(x^*)$ (без $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2}(x^*) = 0$)

$$d^2 L(x^0) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k \quad (\text{незав. от } x^0, \text{ т.е. } dx_j dx_k \text{ гипер-плоск. незав. непен-} \\ \text{норм. к ним гипер-плоск. оп-мин}).$$

$$L(x)|_x = L_0(\tilde{x}^0) \quad \text{б. аргумент.}$$

$$d^2 L_0(\tilde{x}^0) = d^2(L(x^0)|_x) \stackrel{?}{=} d^2 L(x^0)|_{**} \\ \text{!! б. арг. гипер-плоск. оп-мин н-н непен-бл} \quad \text{б. арг. гипер-плоск. оп-мин н непен-бл}$$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = dL_0(\tilde{x}^0) = dL(x^0)|_{**} = 0 \quad (\text{б. арг. асе-мин I}) \Rightarrow \tilde{x}^0 - \text{стаци. т. } f_0(\tilde{x}^0)$$

Характер экстремума в точке т. оптим. гл. условий

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 L(x^0)|_{**}$$

Характер экстремума оптим. условиям. точек оптим.

УТД

Глава XIX

Кратные интегралы

§ L Определение. Критерий интегрируемости Дордь.

Прим. G - измеримое мн-во, $G \subset R^n$, $G \neq \emptyset$.

R - разбиение G на изм. изм. мн-ва G_i : $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$.

$$\forall i \neq j \rightarrow \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

Максим. разбиение $|R| = \max_{i=1 \dots N} \operatorname{diam} G_i$

Границы, т.е. $f(x)$ опр. на G . Равн.-мн. $M_i = \sup_{G_i} f(x)$, $m_i = \inf_{G_i} f(x)$

Оп-е

Верхнее и нижнее суммы Дордь:

$$S_a^* = \sum_{i=1}^N M_i \mu G_i, \quad S_{+R} = \sum_{i=1}^N m_i \mu G_i$$

Сумма Римана

$$\forall i=1 \dots N \rightarrow \xi_i \in G_i$$

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu G_i$$

Две гранич. R : $S_{+R} \leq \sigma_R \leq S_a^*$.

Коэффициент оп-мн

$$w_R = S_a^* - S_{+R} = \sum_{i=1}^N w_i \mu G_i, \quad w_i = M_i - m_i$$

Равнение R_2 симметрическое R . ($R_2 \geq R_1$) \Leftrightarrow

$R_1: G = \bigcup_{i=1}^n G_i, \quad \forall G_i$ - однозначное пакетование из G ;

$R_2: G = \bigcup_{j=1}^m G_j$

Упр

Если $R_2 \geq R_1$, то

$$S_{+R_2}^* \leq S_{+R_1}^*, \quad S_{+R_2} \geq S_{+R_1}, \quad w_{R_2} \leq w_{R_1}$$

D-ко: (как в 1D)

Доказываем пар-тию изм., когда оно из мн-в R_1 подразбивается maybe:

$$G_i = G'_i \cup G''_i, \quad \mu(G'_i \cap G''_i) = 0$$

Надані граничні значення наведено позначенням \exists то є.

$$M_i^* = \sup_{G_i} f(x) \quad M_i'' = \sup_{G_i''} f(x) \quad M_i = \sup_{G_i} f(x)$$

$$M_i \mu G_i = M_i \mu G_i + M_i'' \mu G_i'' \geq M_i^* \mu G_i + M_i'' \mu G_i''$$

Все однакове $\& S_{R_1}^* \cup S_{R_2}^*$ симетричні $\Rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^*$.

Аналогично для непарних сум.

$$\omega_{R_2} = S_{R_2}^* - S_{\pi R_2} \leq S_{R_1}^* - S_{\pi R_1} = \omega_{R_1} \quad \text{УДА}$$

Вважаємо $\max(R_1, R_2)$ - найбільше з R_1, R_2 . $G_i \cap \tilde{G}_j$

$$\max(R_1, R_2) \geq R_1, \quad \max(R_1, R_2) \geq R_2.$$

Лемма

$$\forall R_1, R_2 \rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^*$$

Д-бо:

$$R = \max(R_1, R_2) \Rightarrow R \geq R_1, R_2$$

$$S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^* \geq S_{\pi R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \quad \text{УДА}$$

Операції

Пусть $f(x)$ - функція на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$. Розглянемо $I^* = \inf_R S_R^*$, $I_* = \sup_R S_{\pi R}^*$ (нап. в цьому випадку розглядаємо всі відкриті інтервали D додатково).

Если $I^* = I_* = I$, тоді $f(x)$ наз. ω -непреривною на G , а I - ω -крайнім непреривним функцією $f(x)$ на G : $I = \int_G f(x) dx$

Оскільки $-\infty < I_* \stackrel{(1)}{\leq} I^* \stackrel{(2)}{\leq} +\infty$

(1) відходить від операції лемми: $S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \Rightarrow \inf_{R_1} S_{R_1}^* \geq \sup_{R_2} S_{\pi R_2}^*$

(2) відходить від \exists то $I^* \leq S_{R_1}^*$ для всіх R , аналогично (1)

Критерій Дорбі у непреривності

Пусть $f(x)$ оп. на відкритому $G \subset \mathbb{R}^n$. Що за підумання:

1. $f(x)$ непреривна на G .

2. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$ раздение R на-ба G : $\omega_R < \varepsilon$

3. $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall$ раздение R , $|R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$

D-б:

(3) \Rightarrow (2) - оребуно
как паше

(2) \Rightarrow (1) $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

как паше \forall разд. $R \rightarrow S_{x_R} \leq \bar{I}_x \leq I^* \leq S_x^*$.

$$0 \leq I^* - \bar{I}_x \leq S_x^* - S_{x_R} = \omega_R$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon \Rightarrow |I^* - \bar{I}_x| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ -модел $\Rightarrow I^* = \bar{I}_x \Rightarrow f(x)$ ннт

(1) \Rightarrow (2) Пусть $f(x)$ -ннт. на G .
как паше

$$I^* = \inf_n S_{x_n}^* = \underline{I}_x = \sup_Q S_{x_n} = \bar{I}$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_1: S_{x_{R_1}}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_2: S_{x_{R_2}} > \bar{I} - \frac{\varepsilon}{2}$

$$R = \max(R_1, R_2)$$

$$S_{x_n}^* \leq S_{x_{R_1}}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad S_{x_n} \leq S_{x_{R_2}} > \bar{I} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } \omega_R = S_{x_n} - S_{x_{R_2}} < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

(2) \Rightarrow (3): Преведение гомоморф. леммы.

Определение

Пусть X, Y - два ннты на-ба в \mathbb{R}^n .

$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y)$ - расстояние между на-бами.

Если $X \cap Y \neq \emptyset$, то $\rho(X, Y) = 0$. Остальное не верно.

лемма 1

Пусть F_1, F_2 - 2 на-бами в \mathbb{R}^n , $\rho(F_1, F_2) = 0$. Тогда $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

Доказательство: если $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, то $\rho(F_1, F_2) > 0$

D-б:

Пусть $\rho(F_1, F_2) = 0$,

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists x \in F_1, y \in F_2 : g(x, y) < \varepsilon$

$\forall n = 1, 2, \dots \rightarrow \exists x_n \in F_1, y_n \in F_2 : g(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

T.k. F_1 - ovp. (какими л. R^n), то x_n - ovp. нос-ти, то т. Банахов - Венгерская

$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x_0$ (сходим), значит F_1 -замкнут $\Rightarrow x_0 \in F_1$.

$$g(y_{n_k}, x_0) \leq \underbrace{g(y_{n_k}, x_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \rightarrow 0} + \underbrace{g(x_{n_k}, x_0)}_{\text{при } k \rightarrow \infty} \Rightarrow y_{n_k} \rightarrow x_0.$$

F_2 -замкнут $\Rightarrow x_0 \in F_2$. $x_0 \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. \square

Замечание меняться определение F_i . F_i может не замкнут.

Если эта замкнут, но не овр., значит может не баниахов.

лемма 2

Пусть $F_1, \dots, F_n, G \subset R^n$, $\forall i, j = 1 \dots N \rightarrow g(F_i, F_j) = p_{ij} > 0$

$\text{diam } G < p$

Тогда для $G \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$, $\exists j : G \in F_j$.



Док-во

Пусть $\exists x_0 \in G, x_0 \in F_i$
 $\exists y_0 \in G, x_0 \in F_j, i \neq j$

$x_0, y_0 \in G \Rightarrow p(x_0, y_0) < p$

$x_0 \in F_i, y_0 \in F_j \Rightarrow g(x_0, y_0) \geq g(F_i, F_j) \geq p$

Противоречие. \square

лемма 3

Пусть G - овр. мн-во в R^n . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists S \supseteq G$, S -мерное и симмр.

$$mS < \mu^*G + \varepsilon$$

Д-во

Сыз-е мерное S имеет из овр-а мерное изерн:

$$\mu^*G = \inf mS, S\text{-мерн}, S \supseteq G$$

Но мож S можно бдлрно открыто? \exists мерн. $S_1 : mS_1 < \mu^*G + \frac{\varepsilon}{2}$



Тогда $\exists S$ - мерн. и симмр. оврн бдлрно панд: $mS < mS_1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow mS < \mu^*G + \varepsilon \quad \square$$

лемма 4

Пусть G, F - изм. мн-ва в \mathbb{R}^n , $\mu F < \varepsilon$.

Тогда $\exists \delta > 0$: \forall изм. мн-ва G , $|R| < \delta \rightarrow$

$$\sum_{G_i \cap F \neq \emptyset} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \cdot \varepsilon$$

D-то

По условию $\exists S > F$ - квад. орт.: $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$

Пусть S состоит из квадратов радиуса $R = R(\varepsilon)$.

$$S = \bigcup_{j=1}^N Q_j, \quad Q_j - квадрат радиуса r = r(\varepsilon) \quad (r = \frac{1}{2} \cdot \delta)$$

$$\delta(\varepsilon) = a.$$

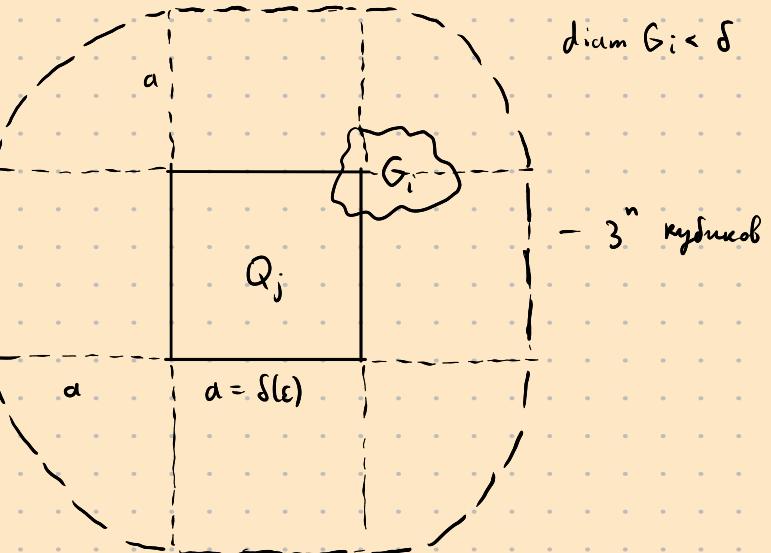
Пусть изм. мн-во G , $|R| < \delta$.

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq 3^n \mu \bar{Q}_j$$

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{G_i \cap S \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{j=1}^N \sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \quad (\text{если } Q_j \text{ содержит } G_i)$$

Однако все изм. мн-ва G_i можно расположить в квадрате Q_j .

$$\Leftrightarrow 3^n \sum_{j=1}^N m \bar{Q}_j = 3^n \cdot mS < 3^n \cdot 2\varepsilon \quad \text{УДА}$$



(2) \Rightarrow (3) $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_0: \omega_{R_0} < \varepsilon$

$$R_0; G = \bigcup_{j=1}^N G_j^\circ, \quad \omega_{R_0} = \sum_{j=1}^N w_j^\circ \cdot \mu \cdot G_j^\circ, \quad \mu(G_i^\circ \cap G_j^\circ) = 0, \quad i \neq j$$

Но известно свойство, $G_i^\circ \cap G_j^\circ = \emptyset, \quad i \neq j$

Если это не так - то мн-во изм. мн-ва неизб. непр., а иначе к оценкам из уз. мн-в.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \partial G_j^\circ$$

По условию, \exists орт. изм. $S > \Gamma$: $mS < \frac{\varepsilon}{\rho M \cdot 3^n}$

$\mu \Gamma = 0$ по свойствам измеримости в \mathbb{R}^n

Конечно измеримое изм. мн-во Моргана.

$$M = \sup_G \|f(x)\|$$

T.k. $\Gamma \subset S$, $\Rightarrow \forall j \rightarrow \partial G_j^\circ \subset S$

Последовательность $F_j = G_j^\circ \setminus S = \overline{G_j^\circ} \setminus S \Rightarrow F_j$ замкнтое



$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n G_j \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \quad (\text{преди } F_j \text{ много дали нынче.})$$

$$(i.e. (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B))$$

Түгем орнамен, шо көмүккөнен ессең, Р күннен осталбаш тарабынан.

Төзүлүштөрдөн $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$ (i.e. F_i, F_j - негенесек. көмүккөн)

Пар-нан $\rho = \min_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$.

$$\text{Но алдан үй Т.к. } mS < \frac{\epsilon}{\delta M_3^n}, \text{ то } \exists \delta: \forall \text{ подж. } R, |R| < \delta \rightarrow \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \mu G_i < \frac{\epsilon}{\delta M_3^n} \cdot 2^{-3} = \frac{\epsilon}{4M}$$

$$\delta = \min(\delta_1, \rho).$$

Пар-нан подж. подж. R ин-да G салады, шо $|R| < \delta$.

Пар-нан гана. ин-да подж. $G_i \subset G \setminus S$ (i.e. $G_i \cap S = \emptyset$)

$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \quad \text{diam } G_i \leq |R| < \delta \leq \rho$$

$\forall i \neq j \quad \rho_{ij} \geq \rho$, төзүлүштөрдөн $\exists j: G_i \subset F_j \subset G_j^\circ$

$$R_i = \max(R, R_0)$$

$$\sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i \leq \omega_{R_i} \leq \omega_{R_0} < \frac{\epsilon}{2} \quad \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i \leq 2M \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \mu G_i = 2M \cdot \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Охам.: } \forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_\epsilon = \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i + \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i < \epsilon$$

Ессең бе F_j нынан, то $G \setminus S$ ның берелгендеги сумма отызылбыш.

ЧТД,

