Фомичёв Александр Владимирович

Литература

Чёрный список: лекции Фомичёва, интернет

Белый список: Журавлёв; Маркеев; Гантмахер (~ конец сема); Болотенко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома R^3 – все объекты – в Евклидовом пр-ве R^3.
2. $\exists$ движение: $R \to R^3$ (в R - время)
3. $\exists$ мат. точка: $(m, \vec r)$, $m = const > 0$, $\vec r \in R^3$
4. $\exists$ взаимодействие: $\forall\ (m_1, \vec r_1), (m_2, r_2) \to \exists\ \vec F$ - сила: $F \parallel (\vec r_1 - \vec r_2)$

$$(m_1, \vec r_1) \xrightarrow{\vec F} \quad \xleftarrow{-\vec F} (m_2, \vec r_2)$$

5. $\exists$ сис-ма координат и способ параметризации времени, такие что

$$m\ddot{\vec r} = \vec F$$

Такие сис-мы наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.:
$$\begin{cases} F_i(t, q, \dot q, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

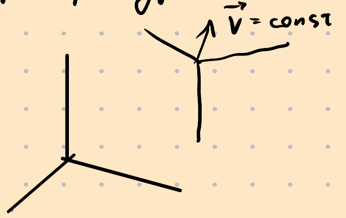
$$t = t(t', q'), \quad q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot q', \dots, q'^{(n)}) = 0 \text{ - те же ф-ии!}$$

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правила составления ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относ. преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} r' = \vec r_0 + \vec v t + A t, & A \text{ - ортог. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

← преобр. (группа) Галилея.

$\vec r_0, \vec v, A, \tau = const$

$$m\ddot{\vec r} = \vec F \longmapsto m\ddot{\vec r}' = \vec F$$

Индексные обозначения

① $\vec{r} \to r^i, \quad i = 1 \dots 3$

② $A \to a_{ij}$

a_j^i

a^{ij}

немой индекс

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i \equiv a^i b^i$ (правило Эйнштейна)

$A\vec{r} = a_{ij} r^j$

бегущий индекс

④ $a, \dots, h$ – фиксирующие индексы

$x^a b^a$ – эл-т с номером a; без суммирования!

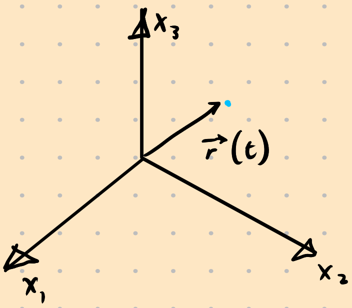
⑤ $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$

Напр. $df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k}\, dx^k$

Кинематика точки

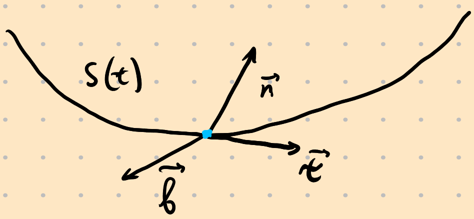
Декартовы координаты



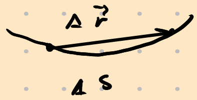
$$\vec r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} \qquad V = \dot{\vec r} = \begin{bmatrix} \dot r^1 \\ \dot r^2 \\ \dot r^3 \end{bmatrix} \text{ — скорость}$$

$$\vec w = \ddot{\vec r} = \dot{\vec V} = \begin{bmatrix} \ddot r^1 \\ \ddot r^2 \\ \ddot r^3 \end{bmatrix} \text{ — ускорение}$$

Сопровождающий трёхгранник Френе

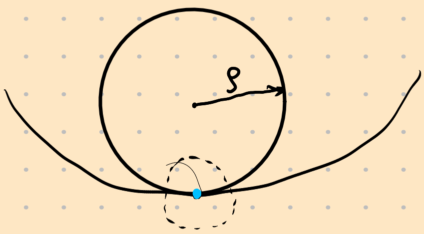


$$\vec r = \vec r(s(t))$$



$$\vec V = \underbrace{\vec r_{,s}}_{\vec \tau}\, \dot s = \vec \tau V$$

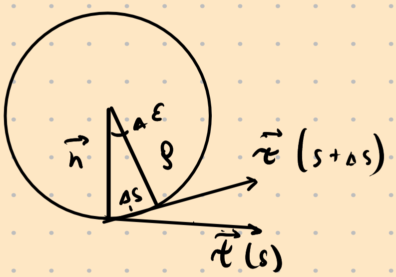
$$\vec w = \vec \tau_{,s} V^2 + \vec \tau \dot V$$



$$\Delta \vec s \simeq \rho \Delta \varepsilon$$

$$\Delta \vec \tau \simeq \Delta \varepsilon \vec n = \frac{\Delta s}{\rho} \vec n$$

$$\vec \tau_{,s} = \frac{\vec n}{\rho} \Rightarrow \vec w = \underbrace{\dot V \vec \tau}_{W_\tau \text{ танген.}} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho} \vec n}_{W_n \text{ нормальное}}$$



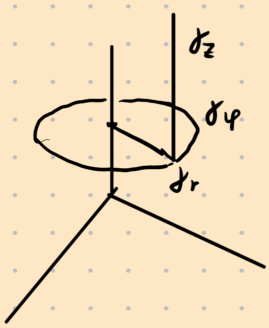
Криволинейные координаты

$$\vec r = \vec r(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} \text{ — криволинейные (обобщённые) координаты}$$

$$\det\left[r^i_{,j} \right] \neq 0 \, !$$ Взаимно-однознач. соотв.

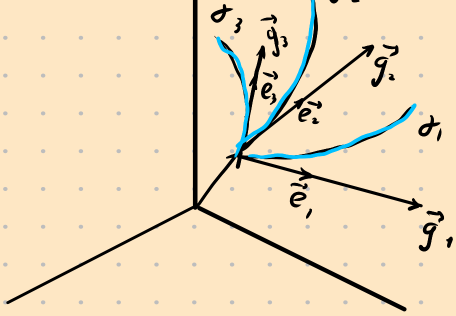
$$\vec r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} \text{ — цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i \text{ - var} \\ q^{j \neq i} \text{ - fix} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{— } \gamma_i \text{ — координатные линии}$$



$H_k = |\vec g_k|$ — к-т Ламе

$$H_k = \sqrt{(r^1_{,k})^2 + (r^2_{,k})^2 + (r^3_{,k})^2}$$



$\vec e_\alpha = \dfrac{\vec g_\alpha}{H_\alpha}$ — Орты (норм. векторы) лок. базиса

$|\vec e_\alpha| = 1$

Скорость в кривол. коорд.

$$\vec v = \dot{\vec r} = \vec r_{,k}\,\dot q^k \Rightarrow \vec v = \underbrace{\dot q^k}_{\text{составляющая}} \vec g_k$$

1. $\vec v = \sum \underbrace{H_k \dot q^k}_{\text{составляющая}} \vec e_k$

$$v^2 = \underbrace{\vec g_i \cdot \vec g_k}_{g_{ik}\text{ - метрич. тензор}} \cdot \dot q^i \cdot \dot q^k = g_{ik}\,\dot q^i \dot q^k$$

2. $v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec e_i \cdot \vec e_k \rangle \dot q^i \dot q^k$

Если $\langle \vec e_i \cdot \vec e_j \rangle = \delta_{ij}$:

$$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot q^i)^2$$

Ускорение в кривол. сис-ме

$$\vec w \cdot \vec g_k = \ddot{\vec r} \cdot \vec r_{,k} = (\dot{\vec r} \cdot \vec r_{,k})^{\cdot} - \dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}_{,k}$$

Произв. по q_k $\leftrightarrow$ точки:

$\vec r_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec r_{,ki}\,\dot q^i$

$\dot{\vec r} = \vec r_{,i}\,\dot q^i \qquad \dot{\vec r}_{,k} = \vec r_{,ki}\,\dot q^i$

$$\frac{\partial}{\partial q^k}\frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r}{\partial q^k}$$

! $\quad \dot{} = \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot q^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$

$$\dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}_{,k} = \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,k} \qquad (\text{т.к. } v^2 = \dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r})$$

$$\dot{\vec r} = \vec r_{,k}(q) \cdot \dot q^k \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec r}_{,\dot k}}_{\frac{\partial \dot{\vec r}}{\partial \dot q^k}} = \vec r_{,k}$$

$$\dot{\vec r} \cdot \vec r_{,k} = \dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r}_{,\dot k} = (v^2/2)_{,\dot k}$$

③ $\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \frac{d}{dt}\left(v^2/2\right)_{,\dot a} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,a}$

④ $\vec{w}\cdot\vec{e}_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}\left(v^2/2\right)_{,\dot a} - \left(v^2/2\right)_{,a}\right]$

Оператор Эйлера – Лагранжа $\quad \mathcal{E}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$

$$\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \mathcal{E}_k\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Геометрический смысл H_k и их вычисление

$q^a \to q^a + dq^a$ — только одна комп.

$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a}\cdot dq^a$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_k$ $\qquad T = \frac{mv^2}{2}$ – кин. энергия

$m\,\mathcal{E}_k\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{g}_k = Q_k$ – обобщенная сила

$\mathcal{E}_k(T) = Q_k$

(6) $\frac{d}{dt}T_{,\dot k} - T_{,k} = Q_k$

Для базиса $\vec{e}_k$: $\quad \frac{1}{H_a}\mathcal{E}_a(T) = \vec{F}\vec{e}_a$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ – зависимость $\qquad q(q')$ – замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot q^i = \underbrace{q^i_{,i'}}_{\text{матрица Якоби}}\dot q^{i'}$ – контравариантный вектор (тензор I ранга) (набор чисел, к-рый при смене базиса ведет себя вот так)

$\dot q = J\dot q'$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ – скал. ф-ия

$f(q(q'))$ $\qquad f_{,i'} = f_{,i}\cdot q^i_{,i'}$ – градиент меняется уже не так! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор – тензор I ранга)

$\underbrace{\nabla' f}_{\text{строка}} = \nabla f J \qquad \nabla' f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже столбец!}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$

Разница (между ко- и контра-) теряется, если преобр-е ортогонально $\left((J^T)^{-1} = J\right)$

Метрический тензор

$\vec{g}_k = \vec{r}_{,k} \qquad \vec{r}(q(q'))$ – замена

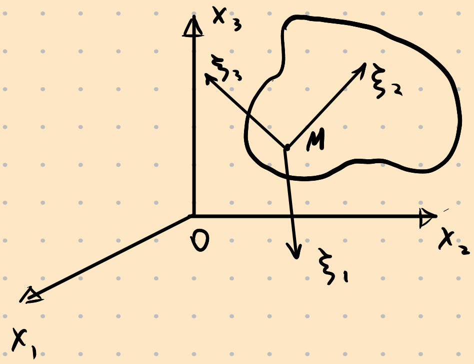
$g_{k'} = \vec{r}_{,k} \cdot q^k_{,k'} = \vec{g}_k \, q^k_{,k'}$ – получается, $\vec{g}_k$ – ковариантный вектор

Метрический тензор: $\vec{v} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow v^2 = g_i g_k \dot{q}^i \dot{q}^k$, $g_{ik} = g_i g_k$ – метрич. тензор!

$g_{i'k'} = q^i_{,i'} \, q^k_{,k'} \, g_{ik}$ – ковариантный тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Кинематика твёрдого тела

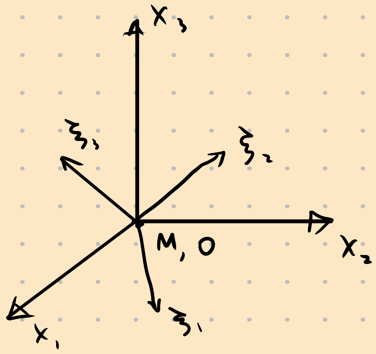
Твёрдое тело – совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



$M \in$ телу – полюс ТТ (твёрдого тела)

Движение твёрдого тела – это движение полюса и движение ТТ относ. полюса (вращение).

Вращение. Углы конечного вращения



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

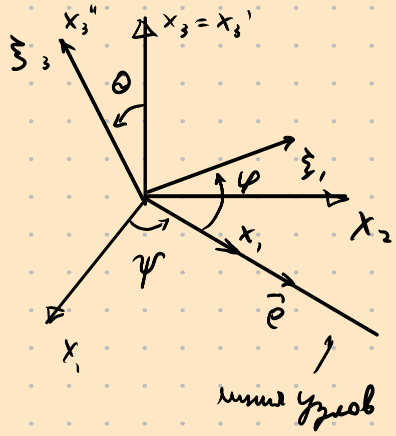
- Углы Эйлера

$\exists$ (пусть) $\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем сис-му координат Ox:

$$X \xrightarrow[3\,(\text{относ. } x^3)]{\psi} X' \xrightarrow[1']{\theta} X'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



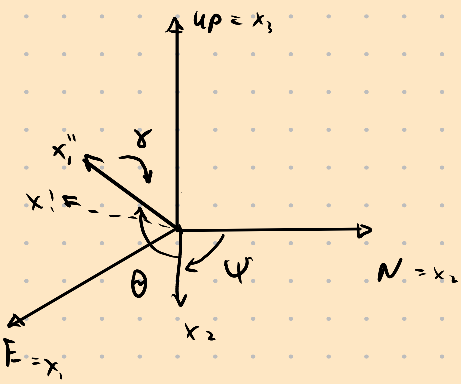
ψ – угол прецессии

θ – угол нутации

φ – угол собственного вращения

Параметры ψ, θ и φ наход. во вз.-одн. соотв. с положением твёрдого тела везде кроме полож. $\theta = \{0, \pi\}$

- Самолётные (корабельные) углы



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ – курс

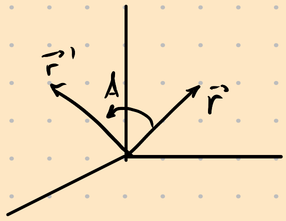
θ – тангаж

γ – крен

Вырождение при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Любая сис-ма углов конечного вращения будет иметь вырождение.

Ортогональная матрица



$\vec r\,' = A\vec r$

$|\vec r\,'|^2 = |\vec r|^2 \ \forall \vec r$

$|\vec r\,'|^2 = \vec r\,'^T \vec r\,' = \vec r^{\,T} A^T A \vec r = |\vec r|^2 = \vec r^{\,T}\cdot\vec r \quad \forall \vec r \Rightarrow A^T A = 1$ –

Определение ортог. матрицы

Св-ва

1. Теорема Бине-Коши: $|AB| = |A|\cdot|B|$

$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$

$+$ поворот

$-$ зеркальный поворот

2. $A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

3. $\forall A, B$ - ортог. $\to C = AB$ - ортогональная

$C^T C = B^T \cdot A^T \cdot AB = E$

4. Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

1) $\forall A, B \in G \to C = AB \in G$

2) $A(BC) = (AB)C$

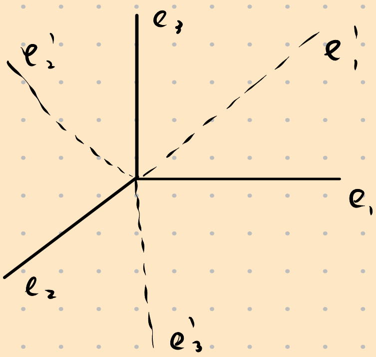
3) $\exists E \in G: \ \forall A \in G \to AE = EA = A$

4) $\forall A \in G \to \exists A^{-1} \in G: A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пусть $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = E$

$SO(3)$ - спец. орт. группа; $\forall A \in SO(3) \to |A| = 1$ (группа поворотов)

5. $SO(3)$ - основная мат. модель твёрдого тела с неподвижной точкой.



$\vec e_{i'} = a^i_{i'} \vec e_i$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{1'} & \\ a^2_{1'} & \dots \\ a^3_{1'} & \end{pmatrix} = [\,[\vec e_{i'}]\,]_e$$

$[e_{1'}]_e$

$\vec e_{i'}\cdot \vec e_j = a^i_{i'}\, \vec e_i \vec e_j = a^j_{i'} \overset{j\to i}{\Rightarrow} a^i_{i'} = \cos(\widehat{e_i, e_{i'}})$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однознач. соответствие между положением твёрдого тела и $A \in SO(3)$.

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ $\quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$ => 6 независимых формул =>
=> матрицы из $SO(3)$ – трёхмерное многообразие в 9-мерном пр-ве матриц

⑥ $a^i_{i'} = \Delta^i_{i'}$ $\quad A^{-1} = \frac{[\Delta^i_{i'}]^T}{\underset{=1}{|A|}} = A^T$ => ЧТД

эл-т A $\quad$ ал. дополнение

Собственные векторы и собственные числа ортогональных матриц

$A\vec{r} = \lambda \vec{r}$ => $|\lambda E - A| = 0$ $\qquad$ $\operatorname{tr} A = a^i_i$

$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$ => $\exists \vec{r}_1 : A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$ – инвариантный вектор

Докажем, что $|\lambda_a| = 1$

$A\vec{r}_a = \lambda_a \vec{r}_a \,\Big|\cdot (\text{компл. сопр-е})^+$ $\quad A^+ = \overline{A^T}$ – эрмитово сопряжение (комплексное сопр-е)

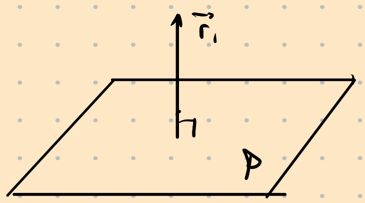
$\vec{r}^{\,+}_a \underbrace{A^+ A}_{E} \vec{r}_a = \underbrace{\lambda^+_a \lambda_a}_{|\lambda_a|^2} \cdot \vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a$ $\qquad$ Если $\vec{r}_a = \vec{p} + i\vec{a}$, то $\vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a = \vec{p}^T p + \vec{a}^T a = |\vec{r}_a|^2 > 0$

$|\vec{r}_a|^2 = |\lambda_a|^2 \cdot |\vec{r}_a|^2$ => $|\lambda_a| = 1$

$$\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{(\operatorname{tr} A - 1)^2}{4}}$$

$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i\vec{a}$ $\qquad$ $\{\vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q}\}$ – правый ОНБ

Инвар. подпр-во A:



$P \perp \vec{r}_1$, $\quad$ P – инвар. подпр-во A.

$\exists \vec{r} \in P$ $\qquad$ $A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$ => $A^T\vec{r}_1 = \vec{r}_1$

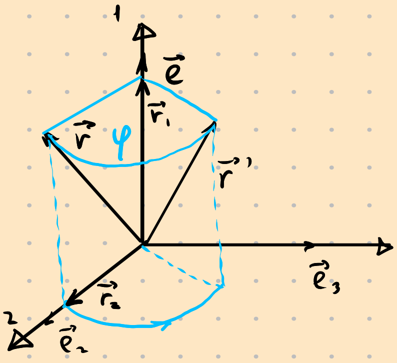
$$\underbrace{(A\vec{r})^T \vec{r}_1 = \vec{r}^{\,T} \underbrace{A^T \vec{r}_1}_{\vec{r}_1}}_{0} \Rightarrow A\vec{r} \in P$$

ЧТД

Теорема Эйлера о конечных поворотах

$\forall$ e^* положения тв. тела с неподв. точкой $\exists \vec{e}$ и угол φ конечн. поворота, совмещ. положение тела (в силу существования $\vec{r}_1$)

Связь ортогональной матрицы и пар-ов Эйлерова поворота



Выберем $\vec e$ как ось поворота, $\vec e_2 \perp \vec e$ лежит в плоскости с $\vec r$ и $\vec e$.

$\vec r$ поворачивается на φ относ. $\vec e$ в $\vec r\,'$.

$\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$, где $\vec r_1 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$\vec r_2 = \vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$$\vec e_2 = \frac{\vec r_2}{|\vec r_2|}$$

$$\vec e_3 = \vec e_1 \times \vec e_2 = \frac{\vec e \times \vec r}{|\vec r_2|}$$

$\vec r\,' = \vec r_1 + r_2 \cos\varphi\, \vec e_2 + r_2 \sin\varphi\, \vec e_3 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \cdot \vec e + (\vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e)\cos\varphi + \vec e \times \vec r \sin\varphi =$

$= (E \cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^{T})\vec r$

$\hat e \vec r = \vec e \times \vec r;\quad \hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^2 \\ -e^2 & e^2 & 0 \end{bmatrix}$ (1) $\quad \vec e \vec e^{T} = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1 e^2 & e^1 e^3 \\ e^2 e^1 & \dots & \\ & & \end{bmatrix}$

Получим $\boxed{A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^{T}}$ (2) – причем инв. относ. базиса!

$\vec e \times (\vec e \times \vec r) = \langle \vec e\, \vec r \rangle \vec e - \vec r$

$\hat e^2 \vec r = (e e^{T} - E)\vec r$

$\boxed{A = E + \hat e \sin\varphi + \hat e^2 (1-\cos\varphi)}$

Пусть $\vec\varphi = \vec e \varphi$ – вектор Эйлера (условный вектор – сложение не работает)

* $\vec\varphi \leftrightarrow \hat\varphi$ – соотв. оператор вида (1).

Тогда можно пок-ть, что $A = e^{\hat\varphi}$ (ряд Тейлора)

Выражение парам. Эйл. поворота через эл-ты $A \in SO(3)$

Из (2) $\Rightarrow$ $\operatorname{tr} A = \underbrace{3\cos\varphi}_{E\cos\varphi} + \underbrace{1-\cos\varphi}_{(1-\cos\varphi)\vec e \vec e^{T}}$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$A = [a^i_j]$

$a^3_2 - a^2_3 = 2e^1 \sin\varphi \Rightarrow e^1 = \dfrac{a^3_2 - a^2_3}{2\sin\varphi} \quad e^2 = \dfrac{a^1_3 - a^3_1}{2\sin\varphi} \quad e^3 = \dfrac{a^2_1 - a^1_2}{2\sin\varphi}$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$; полагаем, что $\varphi \in [0;\pi]$! это делает $\vec e$ таким, что полож. поворот – это против часовой стрелки. Поворот в обр. сторону – берётся $-\vec e$.

Оператор малого поворота. Угловая скорость твёрдого тела

Если $\varphi \ll 1$, то

$$A \simeq E + \hat{\varphi}$$ – оператор малого поворота

Это верно и для $A \in SO(n)$:

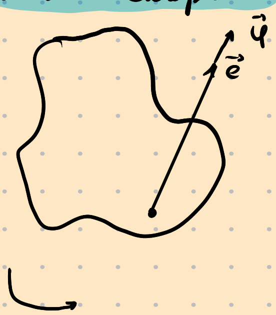
$$A(t) \in SO(n); \quad A(0) = E$$

$$A^T A = E \ \Big| \ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$\dot{A}^T \underbrace{A}_{E} + \underbrace{A^T}_{E} \dot{A} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\dot{A}^T(0) = -\underbrace{\dot{A}(0)}_{\hat{\omega}} \Rightarrow \dot{A}(0) \text{ – кососимметрическая} \Rightarrow A \simeq E + \Delta t\, \hat{\omega}$$

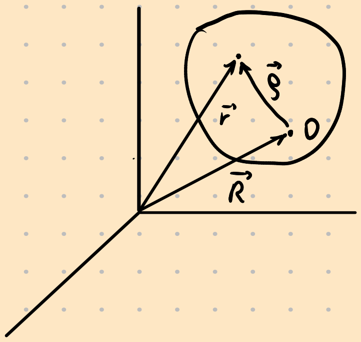
Угловая скорость



$$\exists\, \Delta\vec{\varphi} = \vec{e}\, \Delta\varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$ – угловая скорость

Распределение скоростей и ускорений в твёрдом теле



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\vec{V}_0} + \dot{\vec{\rho}}$$

$$\rho(t + \Delta t) \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\vec{\rho}(t)$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}\, \vec{\rho} = \hat{\omega}\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

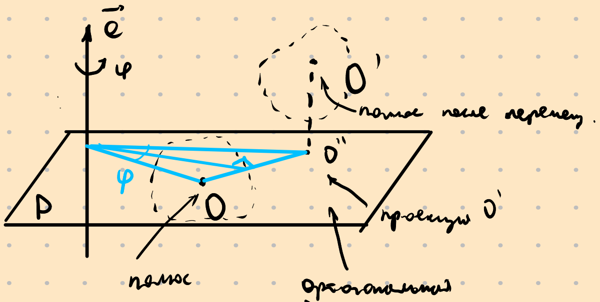
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$ – ф-ла Эйлера

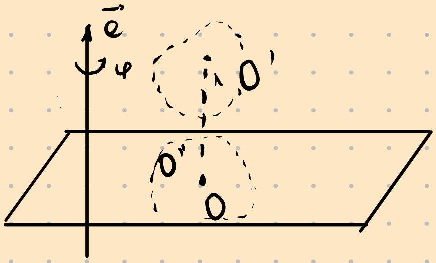
$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$ – ф-ла Ривальса

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Кинематический винт твёрдого тела

Пользуемся эйлеровыми поворотами





$P \perp \vec{e}$

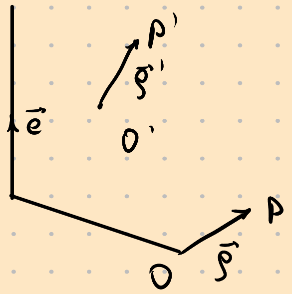
Винтовое движение

Любое движение тела эквивалентно винтовому перемещению.

Перемещ-ем тело на рас-е $\Delta l = \vec{OO'} \cdot \vec{e}$ и повернуть на φ.

Теорема Шаля: $\forall$ перемещ-е тв. тела эквивалентно винтовому перемещению.

Линейная часть перемещ. не зависит от выбора полюса:



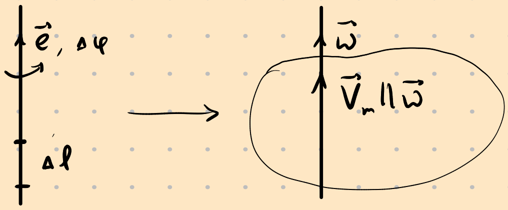
$$\vec{\rho}\,' = A\vec{\rho}$$

$$\vec{\rho}\,' \cdot \vec{e} = \vec{\rho}\,'^T \vec{e} = (A\vec{\rho})^T \vec{e} = \vec{\rho}^{\,T} \underbrace{A^T \vec{e}}_{\vec{e}} = \vec{\rho}^{\,T} \vec{e}$$

Проекция $\vec{\rho}$ на $\vec{e}$ не меняется.

Если $\vec{\rho} = \vec{OO'}$ – не важно, как выбрать O, $\vec{OO'} \cdot \vec{e} = const$.

Рассм. движ-е тела за время Δt



$$\vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Тело совершает мгновенное винтовое перемещение.

Ось кинематического винта

ГМТ: $\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega \times \rho = \lambda \vec{\omega}$

$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}}_{\text{не зав. от полюса}} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_0 = \lambda \omega^2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2}$ – кинемат. инвариант

Распишем покомпонентно:

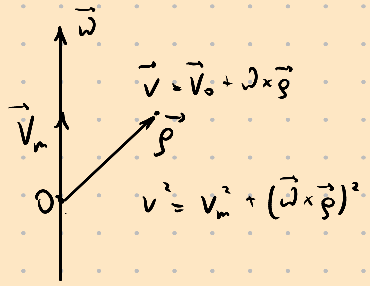
$$\begin{cases} V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{0y} + \ldots = \lambda \omega_y \\ V_{0z} + \ldots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{V_{0y} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{0z} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}}$$ – выражение оси кинемат. винта

Найти кинемат. винт <=> найти ω, уравнение оси, V_m.

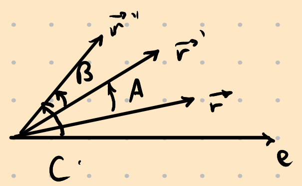
$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Причём V_m – мин. скорость в тв. теле.



Сложение поворотов

1. Активные повороты

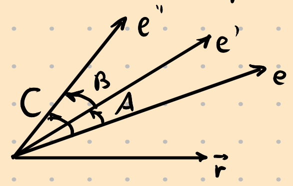


$$\vec{r}' = A\vec{r} \qquad \vec{r}'' = B\vec{r}' = BA\vec{r}$$

$$C = BA$$

n поворотов: $C = A_n A_{n-1} \ldots A_1$

2. Пассивные повороты



$$\vec{r}^{(1)} = \sum r_i^{(1)} e_i' \qquad \vec{e}_i' = A\vec{e}_i$$

сводим т.к. вектор тот же, базис другой

$$\vec{r} = \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i' \Big|_e = \sum r_i^{(1)} A\vec{e}_i$$ (в базисе e)

В базисе e:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

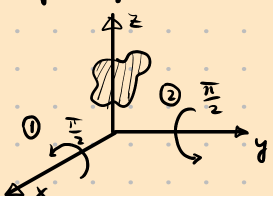
$$\vec{r} = A\vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}' = A^T \vec{r}$$

$$\vec{r}^{(11)} = B^T \vec{r}^{(1)} = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$$

$$C = AB$$

n поворотов: $C = A_1 A_2 \ldots A_n$

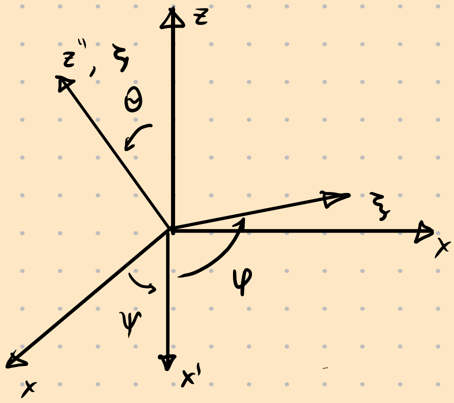
Пример 1



C – ? $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – коор-ты повёрнутого базиса в исх.

Ясно, что активная т. зрения, т.е. $C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Пример 2



1. Вокруг z на ψ
2. Вокруг x' на θ — углы Эйлера
3. Вокруг z'' на φ

Очевидно, пассивная т. зрения

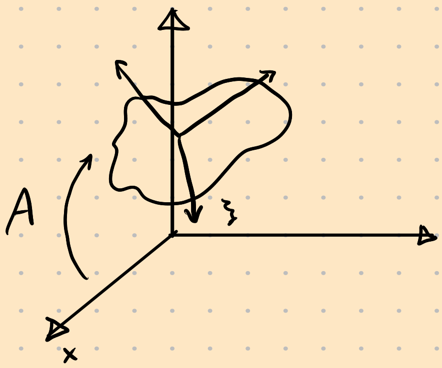
$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ — просто координаты нового базиса в старом

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Кинематические ур-я Пуассона для ортогональных матриц



A — связь подв. базиса тела с неподв. базисом x

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta\hat{\varphi}_x)\,A(t) & \text{— акт. т. зр.} \\ A(t)\,(E + \Delta\hat{\varphi}_\xi) & \text{— пасс. т. зр.} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta\vec{\varphi} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot"'] & \Delta\hat{\varphi} \arrow[d, "\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot"] \\ \vec{\omega} \arrow[r, leftrightarrow] & \hat{\omega} \end{tikzcd}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A\hat{\omega}_\xi \end{array}\right. \quad (1)$$ — Кинемат. ур-я Пуассона.

Если есть $A(t_1)$ и $\hat{\omega}_x(t)$ либо $\hat{\omega}_\xi(t)$ то интегрируя эти ур-я, можно получить текущую ориентацию.

Матрица акт. и пас. поворота одинаковы: угол тот же, орт один и тот же в X и в ξ т.е. это собств. вектор преобр-я.

Ур-ия интегрируются численно, но не аналитически.

Чаще пользуются пассивной т. зрения (датчики угловой скорости на корпусе).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \iff \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k,\ k = 1, 2, 3$$ — 9 уравнений!

Можно сократить число ур-ий, подлежащих интегрированию:

Базис - правый ОНБ, т.е. третий столбец A выраж. через первые два

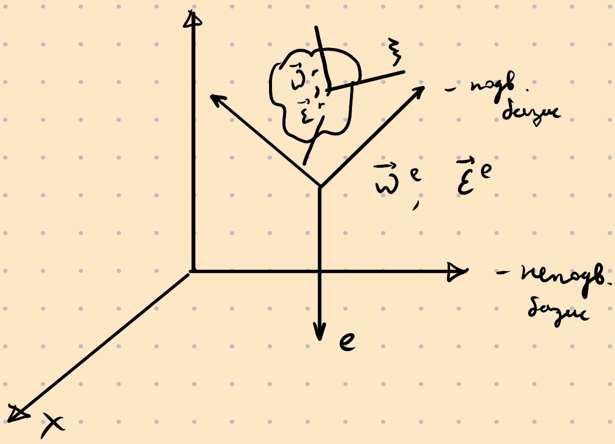
$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \iff \begin{cases} \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, \quad k = 1, 2 \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{- 6 ур-ий}$$

$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = \delta_{km}$ - проверка численного интегрирования в процессе

Следствие из (1):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_x = \dot{A} A^T \\ \hat{\omega}_\xi = A^T \dot{A} \end{cases}$$ - зная $A(t)$, можно вычислить $\omega_x(t)$ и $\omega_\xi(t)$

Сложное движение твёрдого тела



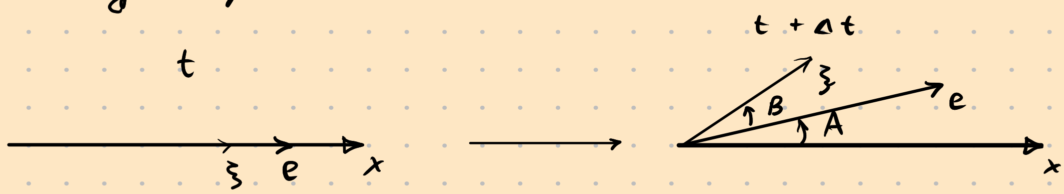
$\vec{\omega}^e$, $\vec{\varepsilon}^e$ - угловые скорость и уск. подв. базиса

$\vec{\omega}^r$, $\vec{\varepsilon}^r$ - угл. ск. и уск. тела относ. подв. базиса

Найти: $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ - абс. угл. ск. и уск.

1. Угловая скорость

Свяжем с телом и подв. базисом промежуточные базисы, совп. по ориентации с неподв. базисом.



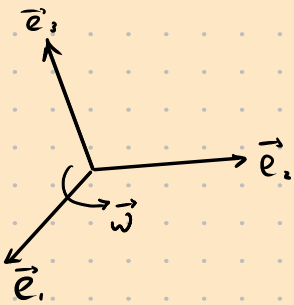
$$A \simeq E + \Delta\hat{\varphi}^e, \quad B \simeq E + \Delta\hat{\varphi}^r$$

$$C = AB \simeq E + \underbrace{\Delta\hat{\varphi}^e + \Delta\hat{\varphi}^r}_{\Delta\varphi} \quad \text{(малые 1 порядка)}$$

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r$$

$\hat{\omega}^e$ - переносная угл. ск. $\quad \hat{\omega}^r$ - относительная угл. ск. $\quad \hat{\omega}$ - абсолютная угл. ск.

2. Скорость вектора в подвижном базисе



$\vec a = \sum a_k \vec e_k$ – произв. вектор

$\dot{\vec a} = \sum \dot a_k \vec e_k + a_k \dot{\vec e}_k = \frac{d'\vec a}{dt} + \vec\omega \times \vec a$

локальная / относит. произв. переносная производная

$$\frac{d'\vec a}{dt} = \begin{bmatrix}\dot a_1 \\ \dot a_2 \\ \dot a_3\end{bmatrix}$$

$\dot{\vec e}_k = \omega \times \vec e_k$ (из ф-лы Эйлера)

3. Угловое ускорение

$$\vec\omega = \vec\omega^e + \vec\omega^r = \vec\omega^e + \sum \omega^r \vec e_k$$

$$\boxed{\vec\varepsilon = \dot{\vec\omega} = \dot{\vec\omega}^e + \dot{\vec\omega}^r = \vec\varepsilon^e + \vec\varepsilon^r + \vec\omega^e \times \vec\omega^r}$$

4. Особый вектор

$\dot{\vec a} = \frac{d'\vec a}{dt} + \vec\omega \times \vec a \Rightarrow \dot{\vec\omega} = \frac{d'\vec\omega}{dt}$ – угл. скорость вращения базиса – абс. произв. = относ. произв.

Кинематические уравнения Эйлера

• У кватернионов есть матричная интерпретация (поможет в задании).

$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$, $\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$ – сопряжение,

$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}$

Нормированные кватернионы: $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{e}\sin\frac{\varphi}{2}$; $|\vec{e}| = 1$

Деление – редкая операция, и у кватернионов есть!

$R' = AdR = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$ – присоединённое отображение

Свойства AdR

$\exists\, R = r_0 + \vec{r}$

1. $r_0' = r_0$

$$\left.\begin{aligned} &R' = r_0' + \vec{r}\,' = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \\ &\widetilde{\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}} = \Lambda \circ \tilde{\vec{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \Rightarrow \operatorname{scal} \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_0' = r_0$$

2. $\vec{r}\,' = A\vec{r}$, $A \in O(3)$

$\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$ – лин. преобр $\Rightarrow \exists A: \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = A\vec{r} = \vec{r}\,'$

$\|\vec{r}\,'\| = \|\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|^{\nearrow 1} \cdot \|\vec{r}\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\|^{\nearrow 1} \Rightarrow \|\vec{r}\,'\| = \|\vec{r}\| \Rightarrow A \in O(3)$ ЧТД

Замечание $\exists\, \Lambda(t) \in \mathbb{H}$, $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(0) = 1$.

$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = 1 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) + \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}$

(т.к. $\dot{\tilde{\Lambda}}(0) = \dot{\lambda}(0)$)

Кватернионы вида $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix}$ в механике обычно отождествляют с векторами

Теорема

Преобр-е $\vec{r}\,' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$, где $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ задаёт Эйлеров поворот вокруг $\vec{e}$ на угол φ.

Д-во

$\Lambda \circ \vec{r} - \vec{r} \circ \Lambda = 2\vec{\lambda} \times \vec{r}$ коммутатор?

$\Lambda \circ \vec{r} = \vec{r} \circ \Lambda + 2\vec{\lambda} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{r}\,' = (\vec{r} \circ \Lambda + 2\vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda}$

$\vec{r}\,' = \vec{r} + 2(\vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = \vec{r} + 2\lambda_0 \vec{\lambda} \times \vec{r} + 2\vec{\lambda} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}) = (E + 2\lambda_0 \hat{\lambda} + 2\hat{\lambda}^2)\vec{r} \Rightarrow$

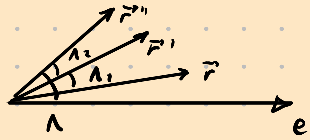
$\Rightarrow \boxed{A = E + 2\lambda_0 \hat{\lambda} + 2\hat{\lambda}^2}$ – связь ортогональной матрицы и нормированного кватерниона

$A = E + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\hat{e} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\hat{e}^2 = E + \sin\varphi\, \hat{e} + (1 - \cos\varphi)\hat{e}^2$ –

Выражение $A \in SO(3)$ через пар-ры Эйл. поворота. ИТД

Сложение поворотов в кватернионах

1. Активная т. зр.

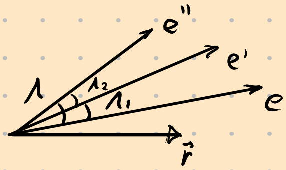


$\vec r' = \Lambda_1 \circ \vec r \circ \tilde\Lambda_1$ $\quad$ $\vec r'' = \Lambda_2 \circ \vec r' \circ \tilde\Lambda_2$ $\quad$ $\vec r'' = \Lambda \circ \vec r \circ \tilde\Lambda$

$$\vec r'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \vec r \circ \widetilde{\Lambda_2 \circ \Lambda_1} \Rightarrow \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$$

$\Lambda = \Lambda_n \circ \dots \circ \Lambda_1$ $\quad$ Повороты в одном и том же базисе

2. Пассивная т. зр.



$\vec e'_k = \Lambda_1 \circ \vec e_k \circ \tilde\Lambda_1$

$\vec r = r'_k \vec e'_k = \Lambda_1 r'_k \vec e_k \circ \tilde\Lambda_1$

В базисе e: $r = \vec r_e \Rightarrow \vec r_e = \Lambda_1 \circ \vec r_{e'} \circ \tilde\Lambda_1$

Тогда $\vec r_{e'} = \tilde\Lambda_1 \circ \vec r_e \circ \Lambda_1$

$$\vec r_{e''} = \tilde\Lambda_2 \circ \vec r_{e'} \circ \Lambda_2 = \widetilde{\Lambda_1 \circ \Lambda_2} \circ \vec r_e \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

$\Lambda = \Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n$

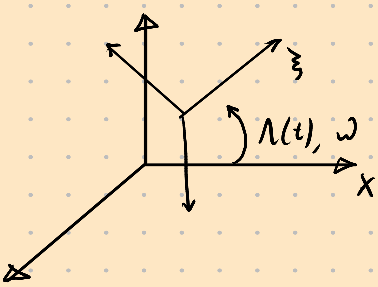
Замечание: коор-ты кватерниона в Λ одинаковы в базисах $\{e_i\}$ и $\{e_n\}$, т.к.

$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec e \sin\frac{\varphi}{2}$, φ – скаляр, коор-ты $\vec e$ одинаковы в $\{e_i\}$ и $\{e_n\}$.

Коор-ты кватерниона в собственных базисах наз-ют параметрами Родрига-Гамильтона.

(собственный = базис, к-рый кватернион поворачивает)

Уравнения Пуассона в кватернионах



$\Lambda(t)$ – поворот ξ отн. X

$$\Lambda(t+\Delta t) = \left[\begin{array}{l} \Lambda_X(\Delta t) \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Lambda_\xi(\Delta t) \end{array}\right.$$

$$\Lambda_*(\Delta t) = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \vec e_* \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \simeq 1 + \vec e_* \frac{\Delta\varphi}{2}$$ – кв. малого поворота

$* = \{X, \xi\}$

$$\dot\Lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec\omega_X \circ \Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \circ \vec\omega_\xi$$

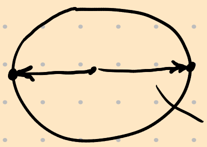
Ур-я Пуассона имеют размерность 4, линейны, вырождение отсутствует. Общего аналит. реш-я нет.

Они позволяют: а) найти $\Lambda(t)$ по $\vec\omega_*(t)$ и $\Lambda(0)$ б) найти $\vec\omega_*$ по $\Lambda(t)$

$\vec{\omega}_x = 2\dot{\Lambda}\circ\tilde{\Lambda}$, $\quad \vec{\omega}_\xi = 2\tilde{\Lambda}\circ\dot{\Lambda}$

Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями твердого тела, т.к. Λ и $-\Lambda$ задают один и тот же поворот.

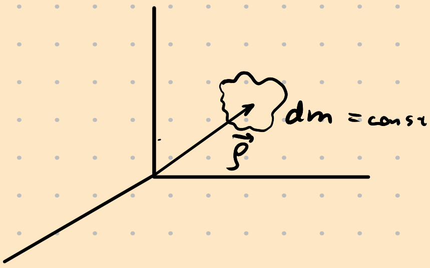
$\|\Lambda\| = 1 \iff \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ — $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ — сфера



один и тот же поворот

Основные понятия и законы динамики

1° Объекты континуальны (состоят из эл-ов массой dm с рад. вектором $\vec{\rho}$)



2° Интеграл по массе $I = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\,dm = \lim\limits_{\substack{\Delta m_i \to 0 \\ \Delta m_i = const}} \sum f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)\,\Delta m_i$

Масса - это мера!

3° $m = \int dm$ - масса

$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm$ - центр масс

$\vec{p} = \int \vec{v}\,dm$ - импульс

$\dot{I} = \int \dot{f}\,dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt}\underbrace{\int \vec{r}\,dm}_{m\vec{r}_c} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{V}_c$

$T = \frac{1}{2}\int v^2\,dm$ - кин. энергия

$\vec{K}_0 = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}\,dm$ - момент импульса

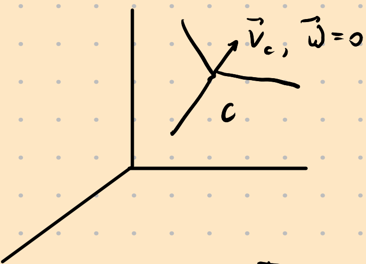
Переход к новому кин. полюсу

$\vec{K}_{0'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\,dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_0 + \vec{r}_0 - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\,dm = \vec{K}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{p}$

$\vec{K}_{0'} = \vec{K}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{p}$

$\vec{K}_{0'} = \vec{K}_0 + \vec{p} \times \overrightarrow{OO'}$ $\quad$ $\vec{V}_{0'} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'}$ - ф-лы аналогичны (все св-ва работают и для $\vec{K}_0$)

Теорема Кёнига



$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_c + \vec{V}_r$

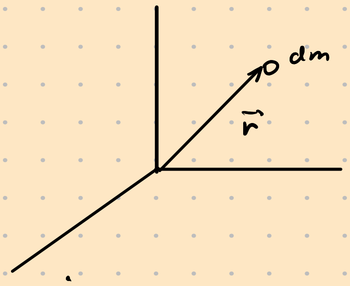
$T = \frac{1}{2}\int (V_c^2 + 2\vec{V}_c\vec{V}_r + V_r^2)\,dm$

$\int \vec{V}_r\,dm = \frac{d}{dt}\int \vec{\rho}\,dm = m\dot{\vec{\rho}}_c = 0$ (т.к. $\vec{\rho}_c \equiv 0$)

$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\int V_r^2\,dm$

Законы изменения динам. величин

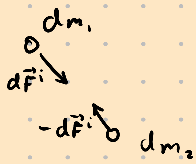
$m\ddot{\vec r} = \vec F$ – аксиома Ньютона



dm $\Rightarrow d\vec F = \vec f\, dm$, $\vec f$ - плотность силы

$\vec f = \underset{\text{внешние}}{\vec f^e} + \underset{\text{внутренние}}{\vec f^i}$

$\ddot{\vec r} = \vec f^e + \vec f^i$



$\dot{\vec P} = \int \dot{\vec V}\, dm = \int (\vec f^e + \vec f^i)\, dm = \int \vec f^e dm =$

$= \vec R^e$

- $\dot{\vec P} = \vec R^e$, $\vec R^e$ - главный вектор внешних сил

$\vec P = m\vec V_c \Rightarrow m\dot{\vec V}_c = \vec R^e$

- $m\ddot{\vec r}_c = \vec R^e$ – теорема о движении центра масс

$$\dot{\vec K}_o = \underbrace{\int (\vec v - \vec V_o)\times \vec V\, dm}_{-m\vec V_o \times \vec V_c} + \underbrace{\int (\vec r - \vec r_o)\times(\vec f^e + \vec f^i)}_{\vec M_o^e} dm$$

- $\dot{\vec K}_o = \vec M_o^e - m\vec V_o \times \vec V_c$ - теорема об изменении кинетического момента

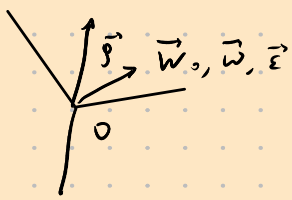
$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm \Rightarrow \dot T = \int \vec v\cdot\dot{\vec v}\, dm = \int \vec v\cdot(\vec f^e + \vec f^i)\, dm = N^e + N^i$

- $\dot T = N^e + N^i$

Основные теоремы динамики в неинерц. сис-ах отсчёта

$\ddot{\vec r} = \vec W = \vec W^r + \vec W^e + \vec W^c = \vec f^e + \vec f^i$

$\vec W^r = \vec f^e + \vec f^i - \underbrace{\vec W^e}_{\vec j^e} - \underbrace{\vec W^c}_{\vec j^c}$ $\vec j^e, \vec j^c$ - плотности переносных и кориолисовых сил

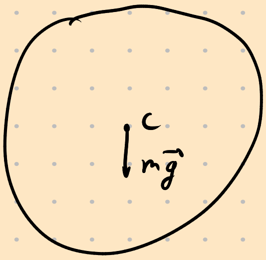


$\vec j^e = -\vec W_o - \vec\varepsilon\times\vec\rho - \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$

$\vec j^c = -2\vec\omega\times\vec V^r$

- $\dot{\vec P} = \vec R^{ex} + \vec R^e + \vec R^c$
- $\dot{\vec K}_o = \vec M_o^{ex} + \vec M_o^e + \vec M_o^c - m\vec V_o^r \times \vec V_c^r$
- $\dot T = N^{ex} + N^e + N^i$

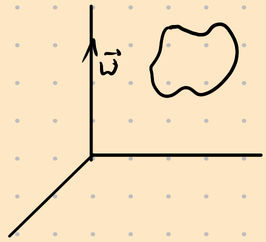
$\vec j^c = -2\vec\omega\times\vec V^r$ $n = \vec V^r\cdot\vec j^c = 0$ – мощность кориолисовых сил



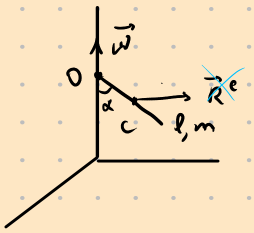
g

Замечание

При решении задач **не следует** делать необоснованных допущений о точках приложения и линиях действия сил инерции



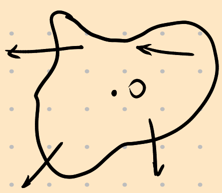
$$\vec R^e = -\int \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)\,dm = -m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho_c)$$



$$\vec M^e_o \neq \frac{1}{2} R^e l \sin\alpha$$

Надо честно взять интеграл, а не прилагать $\vec R^e$ к центру масс.

О моменте сил, действующих на тв. тело

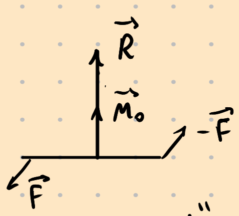


$$\vec M_o = \int (\vec r - \vec r_o)\times \vec f\,dm \quad (\text{неважно } \vec f^{\,i} \text{ или } \vec f^{\,e})$$

$$\vec M_{o'} = \vec M_o + \vec{O'O}\times\vec R, \quad \vec R = \int \vec f\,dm$$

$$\begin{cases} \vec M_{o'} = \vec M_o + \vec R\times\vec{OO'} \\ \vec V_{o'} = \vec V_o + \vec\omega\times\vec{OO'} \end{cases}$$ — статико-кинематическая аналогия

Следствие: любая система сил, приложенных к твёрдому телу, сводится к динамическому винту или к его частным случаям.



„динама"

Если $\vec M_o = 0$, то сис-ма сил сводится к равнодействующей.

Классификация сил

$d\vec r$, $\vec F$, m

$$\delta A = \vec F\cdot d\vec r$$ — элементарная работа

$$N = \vec F\cdot\vec V$$

① Если $N = \vec F\cdot\vec V \le 0$, то $\vec F$ — диссипативная. Если $N<0 \ \forall \vec V \ne 0$, то $\vec F$ — строго дисс.

Пример: $\vec F = -\beta \vec V$

② Если $N \equiv 0$, то F – гироскопическая

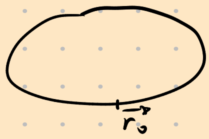
Пример: $\vec F = \frac{q}{c}\vec V \times \vec B$, $\vec F' = -2m\vec\omega \times \vec V$

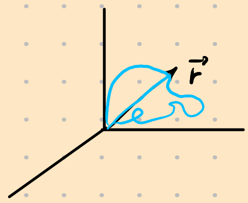
③ F наз-ся потенциальной, если $\exists\, \Pi(\vec r, t)$: $\vec F = -\nabla \Pi$

Критерий потенциальности

$\vec F(\vec r, t)$ – потенциальна $\Leftrightarrow \oint \vec F d\vec r \Big|_{t=const} = 0$

Д-во





Если $\vec F = -\nabla \Pi$, то $\oint \nabla \Pi \, d\vec r = 0$

Если $\oint = 0$, то $A(r,t) = \int_0^{\vec r} \vec F \, d\vec r$

$\vec r \to \vec r + \tau \vec e_i$, $\tau \in [0; \Delta h)$

базисный орт

$$\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\dots, r_i + \tau, \dots)\, d\tau \overset{\text{Т. о среднем}}{=} F_i(\dots, r_i + \theta, \dots)\,\Delta h$$

$F_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \Pi = -A$ ЧТД

Если $F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$ (1)

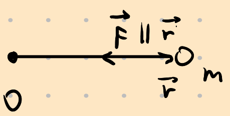
В $\mathbb{R}^3$ условие (1) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \vec F = \vec 0$.

Область должна быть хорошей, односвязной и без особенностей.

Если $\vec F = -\nabla \Pi(\vec r)$ (потенциал стационарен), то

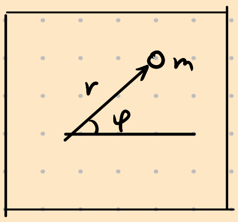
$\delta T = \vec F d\vec r = -\nabla \Pi d\vec r = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = const$

Движение точки в центральном поле



$\vec K_0 = const$ ($\vec M_0^e = \vec 0$)

$\vec K_0 = \vec r \times m\vec V = const \Rightarrow \vec r$ и $\vec V$ всегда лежат в одной плоскости

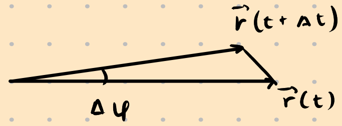


$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F = \vec F \cdot \frac{\vec r}{r} \\ \frac{1}{r}(r^2 \dot\varphi)^{\cdot} = 0 \end{cases}$$

– закон Ньютона

Уметь писать к экзамену

$r^2 \dot\varphi = const$

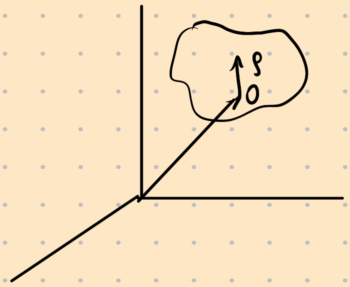


$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi$

$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = const$ – секториальная скорость

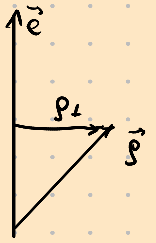
Второй закон Кеплера

Тензор инерции тв. тела и его свойства



$$\vec K_O = \int \vec\rho \times \vec v\, dm = \int \vec\rho \times (\vec v_O + \vec\omega \times \vec\rho)\, dm = \underbrace{\int \vec\rho \times \underbrace{(\vec\omega \times \vec\rho)}_{-\hat\rho\,\omega} dm}_{\hat\rho^T \hat\rho\, dm\, \vec\omega} + m\vec\rho_c \times \vec V_O \quad (1)$$

J_0 – тензор инерции твёрдого тела в т. О



$$\rho_\perp^2 = (\vec\rho \times \vec e)\cdot(\vec\rho \times \vec e) = (\hat\rho \times \vec e)^T \hat\rho \vec e = \vec e^T \hat\rho^T \hat\rho \vec e$$

$j(\vec\rho) = \hat\rho^T \hat\rho$ – тензор квадратов расстояний

$$\rho_\perp^2 = \vec e^T j(\vec\rho)\vec e$$

$$\vec\rho \times (\vec\omega \times \vec\rho) = \rho^2 \vec\omega - \langle \vec\rho \cdot \vec\omega \rangle \vec\rho = (\rho^2 E - \vec\rho\vec\rho^T)\vec\omega$$

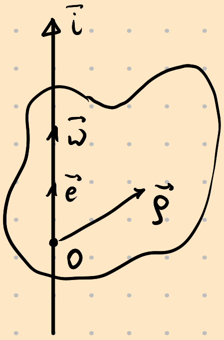
$$\hat\rho^T \hat\rho = \rho^2 E - \rho\rho^T$$

$$J_0 = \int (\rho^2 E - \rho\rho^T)\, dm \Rightarrow J_0 = \begin{pmatrix} \int(\rho_2^2+\rho_3^2)dm & -\int \rho_1\rho_2 dm & -\int \rho_1\rho_3 dm \\ & \int(\rho_1^2+\rho_3^2)dm & -\int \rho_2\rho_3 dm \\ & & \int(\rho_1^2+\rho_2^2)dm \end{pmatrix}$$

J_{0ii} – осевые моменты инерции

$J_{0i\neq j}$ – центр. момент инерции

Момент инерции относ. оси



$$T = \frac{1}{2}\int (\vec\omega \times \vec\rho)^2 dm \underset{\vec\omega = \omega\vec e}{=} \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\vec e^T J_0 \vec e}_{J_e}$$

J_e – момент инерции отн. оси

$$J_e = \vec e^T J_0 \vec e$$

$$T = \frac{1}{2}\vec\omega^T J_0 \vec\omega = \frac{J_e \omega^2}{2}$$

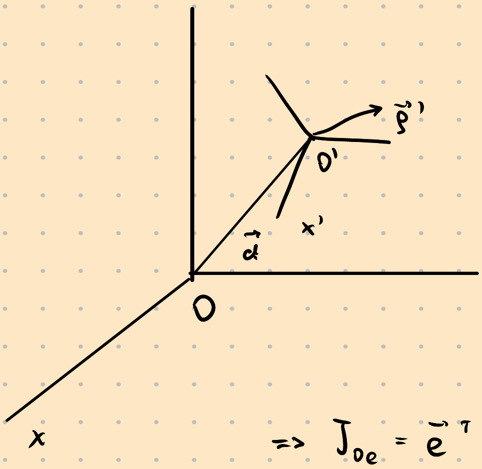
Выражения для K_0 и T твёрдого тела

$$\vec K_0 = \underbrace{\vec K_c}_{(1) \Rightarrow J_c\vec\omega} + \vec{CO} \times \underbrace{\vec P}_{m\vec V_c} = J_c\vec\omega + \vec{CO} \times m\vec V_c$$

O – $\forall$ точка (может быть вне тела)

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int (\vec\omega \times \vec\rho)^2 dm}_{(\text{относ. } C)} \Rightarrow T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\vec\omega^T J_c \vec\omega$$

Свойства J_0 при переносе и повороте осей



$$\vec\rho = \vec\rho\,' + \vec a$$

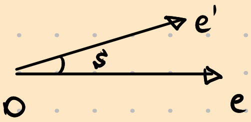
$$J_0 = \int \hat\rho^T \hat\rho\, dm = \int \hat\rho'^T \hat\rho\, dm + \hat a^T \int \hat\rho' dm + \int \hat\rho'^T dm\, \hat a + m\hat a^T \hat a = J_{0'} + m\hat a \hat\rho'_c + m\hat\rho'_c \hat a + m\hat a^T\hat a$$

$$\Rightarrow \boxed{J_0 = J_c + m\hat a^T \hat a}$$

Расширенная теорема Гюйгенса – Штейнера

$$\Rightarrow J_{0e} = \vec e^{\,T} J_c \vec e + m\vec e^{\,T} j(\vec a)\vec e = J_{ce} + m\rho_\perp^2$$

Поворот сист. коорд.



$$J_0^e = \rho_e^2 E - \vec\rho_e \vec\rho_e^{\,T} \qquad \rho_e^2 = \rho_{e'}^2 \text{ т.к. } S \in SO(3)$$

$$\vec\rho_{e'} = S^T \vec\rho_e \Rightarrow \vec\rho_e = S\vec\rho_{e'}$$

$$J_0^{e'} = \rho_{e'}^2 - S\vec\rho_{e'}\vec\rho_{e'}^{\,T} S^T = S(\rho_{e'}^2 E - \rho_{e'}\rho_{e'}^T) S^T$$

Таким образом,

$J_0^{e'} = S^T J_0^e S$ – с т. зр. лин. алгебры J_0 преобразуется как квадратичная форма

Это - разновидность закона преобразования тензора

Из школы известно, что $\exists S$:

$$S^T J_0 S = \mathrm{diag}[A, B, C], \quad A, B, C > 0$$

Соответствующие оси наз-ся главными осями в т. O. Если $O \equiv C$, то оси наз-ся главными центральными

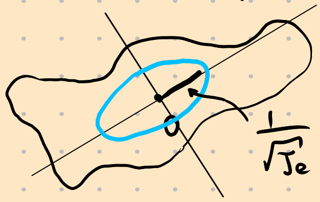
A, B, C – главные (главные центральные) моменты инерции

Эллипсоид инерции

Отложим $\vec r = \frac{1}{\sqrt{J_e}}\vec e$ $\qquad \vec r^{\,T} J_0 \vec r = \frac{1}{J_e} J_e = 1$

$$f(\vec r) = \vec r^{\,T} J_0 \vec r - 1 = 0$$

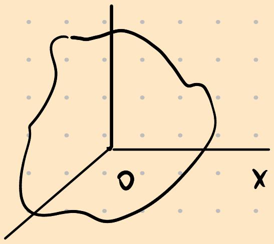
В главных осях: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$, x, y, z - компоненты $\vec r$



Эллипсоид в целом повторяет контуры тела

Нахождение главных осей инерции

1° Общий случай — нет динамической симметрии



В гл. осях: $J_0 \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$

$\lambda_i = \{A, B, C\}$, $\vec{x}_i$ — орты базиса

Для нахождения главных осей нужно решить задачу

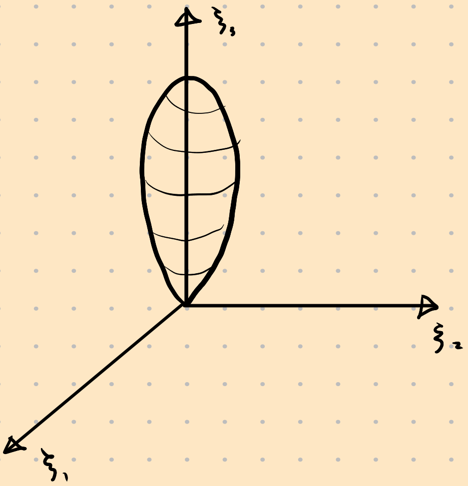
нах-я собств. знач.:

$(J_0 - \lambda E) h = 0$

$\det(\lambda E - J_0) = 0 \Rightarrow \lambda_i \to \{A, B, C\}$

$\lambda_i \to h_i$ — собств. вектора $\xrightarrow[x_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}]{} \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

2° Использование симметрии

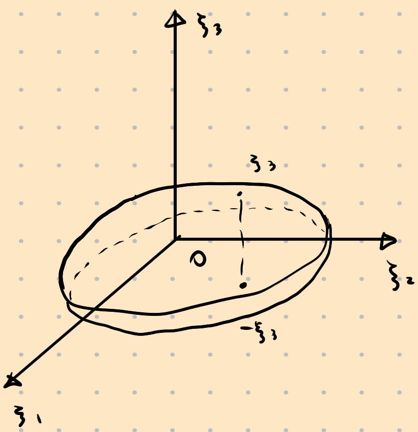


ξ_3 — ось динам. симметрии $\Rightarrow$ гл. ось

$J_{i3} = -\int \xi_i \xi_3 dm$

$\forall \xi_i \to \exists -\xi_i \Rightarrow J_{i3} = 0 \quad \forall i \neq 3$

3° Перпенд. плоскость симметрии



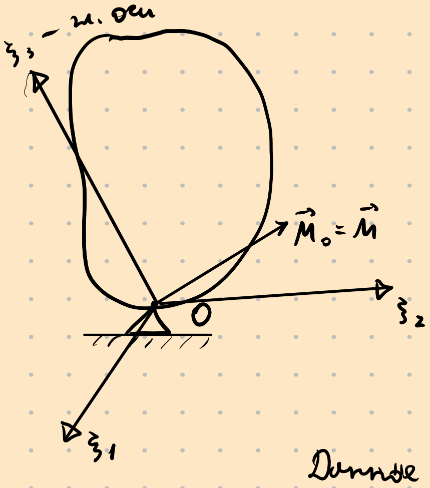
$J_{i3} = -\int \xi_i \underbrace{\xi_3}_{} dm = 0$

Простейший вид T и $\vec{K}_O$

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_c \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right) \quad ; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_O = J_O \vec{\omega} + \vec{OC} \times m\vec{V}_c = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} + \vec{OC} \times m\vec{V}_c$$

Основы динамики твёрдого тела с неподвижной точкой



Задана ориентация ξ относ. X

$\vec{\omega}(0)$. Найти текущее угловое положение

Если O – неподв. т., то

$$\vec{K} = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = J\vec{\omega}, \quad \vec{K}_0 = \vec{K}, \quad J_0 = J$$

$$T = \frac{1}{2}\int (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2\, dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J \vec{\omega},$$

Данные выражения принимают простейший вид в главных осях для т. O:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix}, \quad J = \operatorname{diag}[A, B, C]$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

Динамические уравнения Эйлера

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M} \Rightarrow \text{В базисе главных осей:}$$

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d'\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Пояснение: $\vec{K} = K_i \vec{\xi}_i$

$$\dot{\vec{K}} = \underbrace{\dot{K}_i \vec{\xi}_i}_{\frac{d'\vec{K}}{dt}} + \underbrace{K_i \dot{\vec{\xi}}_i}_{\vec{\omega} \times \vec{K}} \qquad \dot{\vec{\xi}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_i$$

$$\boxed{\frac{d'\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_1 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_2 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_3 \end{cases}$$ – Система динам. ур-ий Эйлера (1)

$\vec{M}_\xi = \vec{M}_\xi(\vec{\Theta}, \vec{\omega})$ (2), где $\vec{\Theta}$ – набор $\forall$ пар-ов ориентации (аналогия $\vec{F} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$)

$\vec{\Theta}$ – матрицы из $SO(3)$, кватернионы, углы конечного вращения,...

В общем случае сис-ма (1) для $\vec{M}_\xi$ из (2) незамкнута.

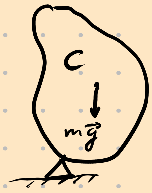
Для её замыкания следует добавить уравнение для пар-ов ориентации:

$\dot{\vec{\Theta}} = f_{\Theta}(\vec{\Theta}, \vec{\omega})$ (3) - кинем. ур-я в нек-ом виде (ур-я Пуассона, кинемат. ур-я Эйлера, ...)

- Сис-ма $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ - замкнутая и может быть проинтегрирована.

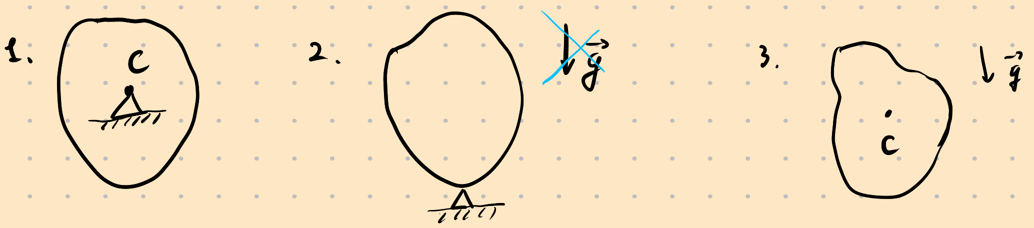
(Замкнутость здесь ≈ равенство кол-ва ур-ий кол-ву переменных)

- Сис-ма $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ не интегрируется в квадратурах, и даже движение тв. тела с неподв. точкой в однородном поле тяжести не интегр. в квадратурах.



Сущ-ет 3 случая интегр-сти этой задачи $\forall$ нач. усл-ий - случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

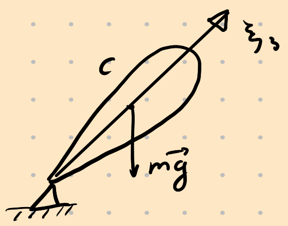
① Случай Эйлера



- движ-е отн. центра масс в одн. поле $\vec{g}$.

$\vec{M} = 0$!

② Случай Лагранжа

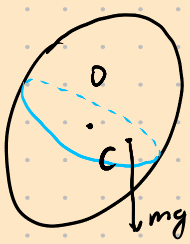


Наличие динам. симметрии:

$A = B \neq C$

ц.м. $\in \xi_3$

③ Случай Ковалевской



- эллипсоид инерции

$A = B = 2C$

т. C лежит на экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Траектории интегрируемых систем как правило просты.

А неинтегрируемые вообще могут проявлять динам. хаос.

Есть еще случаи, интегрируемые при опред. нач. усл-ях.

Случай Эйлера

1) Точное интегрирование сист. ур-ий движения

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)\,qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)\,pr = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)\,pq = 0 \end{cases} \qquad A \geq B \geq C, \quad A > C \qquad (4)$$

($A = B = C$ - трив. случай: $\vec{\omega}_\xi = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \text{const}$

если $\vec{\omega}$ в ξ - const, то и в базисе x она const,

где ξ - подв., x - неподв. базис).

Интегралы движения сист. (4):

$$Ap^2 + Bq^2 + Cq^2 = 2T = \text{const} \qquad (5)$$

$$\vec{K}_x = \text{const} \Rightarrow K_\xi^2 = \text{const} \Leftrightarrow A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const} \qquad (6)$$

Выр-я (5) и (6) - первые интегралы сис-мы (4)

- Замечание: если $\dot{x} = F(x,t)$ - сист. д.у., то $G(t,x)$ - первый интеграл $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow G(t, \underbrace{x(x_0, t_0, t)}_{\text{Реш-е з. Коши } \begin{cases} \dot{x} = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}}) = \text{const} = G_0$$

Критерий п.и.:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + F_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad \text{- производная в силу системы.}$$

$$2Ap\dot{p} + 2Bq\dot{q} + 2Cr\dot{r} = 2(B-C)pqr + 2(C-A)pqr + 2(A-B)pqr = 0$$

Если $A > C$, из (5) и (6) $\Rightarrow$

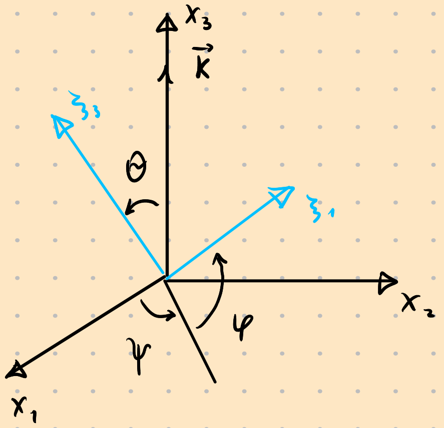
$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{a - bq^2} \\ r &= \pm\sqrt{c - dq^2} \end{aligned}\right. \qquad (7) \qquad a, b, c, d \text{ - какие-то const}$$

Подставим во 2-е ур-е (4):

$$B\dot{q} \pm (A-C)\sqrt{a-bq^2}\sqrt{c-dq^2} = 0$$

$$\pm\int \frac{dq}{\sqrt{a-bq^2}\cdot\sqrt{c-dq^2}} = \frac{C-A}{B}\,t + \text{const} \Rightarrow q(t)\ (8)$$ - эллиптический интеграл (выражается через элемент. ф-ии)

Подставив (8) в (7), получим $p(t)$, $r(t)$.



Введём неподв. базис X так, что $\vec K \parallel \vec x_3$ и углы Эйлера $\psi,\ \theta,\ \varphi$.

$$\vec K_\xi = \begin{bmatrix} Ap(t) \\ Bq(t) \\ Cr(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$K = |\vec K_\xi| = const$ $\qquad \dot\psi = \dfrac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta}$ (из кинемат. ур-ий Эйлера)

$$\Downarrow$$

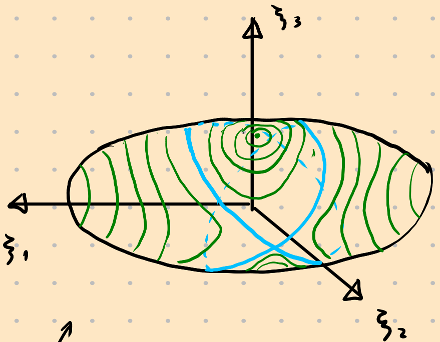
$$\cos\theta(t) = \frac{Cr(t)}{K} \qquad \operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{Ap(t)}{Bq(t)} \qquad \psi(t) = \psi_0 + \int_0^t f_\psi(t)\,dt$$

Геометрическая интерпретация Мак-Кулага

Перейдём к вектору $\vec K_\xi$:

$$\begin{cases} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = const & \text{– сфера} \\ \dfrac{K_1^2}{A} + \dfrac{K_2^2}{B} + \dfrac{K_3^2}{C} = 2T & \text{– эллипсоид Мак-Кулага} \end{cases} \qquad \vec K_\xi = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$\vec K_\xi$ может лежать только на пересечении сферы и эллипсоида Мак-Кулага.



A – самый большой момент => ось по ξ_1 – самая длинная

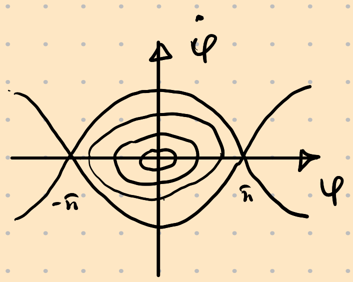
Синие – сепаратрисы, зелёные – кривые движения $\vec K_\xi$

$K^2 = 2BT$ – ур-е сепаратрис

$$\underbrace{\left(1 - \frac{B}{A}\right)}_{>0,\ \lambda^2} K_1^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{B}{C}\right)}_{<0,\ -\mu^2} K_3^2 = 0$$

$$(\lambda K_1 - \mu K_2)(\lambda K_1 + \mu K_2) > 0$$

Гайка Джанибекова объясняется медленным (~бесконечно долгим) движением вблизи сепаратрис – положении равновесия (как у маятника вблизи перевёрнутого положения) – и резким переходом через него

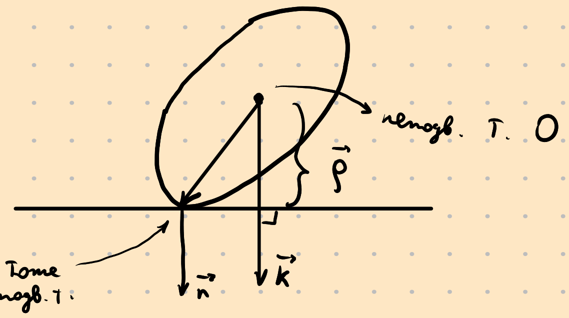


Недостаток интерпретации: теряется вращ-е вокруг $\vec K$.

Интерпретация Пуансо

$f(\vec r) = \vec r^{\,T} J \vec r - 1 = 0$ — эллипсоид инерции

$\vec r = \lambda \vec\omega \qquad \lambda^2 \underbrace{\vec\omega^{\,T} J \vec\omega}_{2T} - 1 = 0$

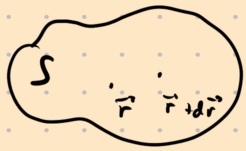


$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

$\nabla f = 2 J \vec r$ (проверяется покомпонентно)

$\nabla f = \frac{2}{\sqrt{2T}} J \vec\omega = \frac{2\vec K}{\sqrt{2T}} = \text{const}$, нормаль $\vec n \parallel \nabla f \parallel \vec K$

Почему $\nabla f \parallel \vec n$?



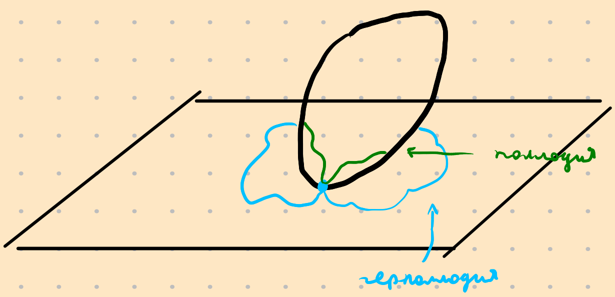
$f(\vec r) = 0$ — S

$\vec r \in S$, $\vec r + d\vec r \in S \Rightarrow f(\vec r) = 0$, $f(\vec r + d\vec r) = 0$

$f(\vec r + d\vec r) \simeq \cancel{f(\vec r)}^{\,0} + \nabla f \cdot \underbrace{d\vec r}_{\text{кас. вектор к } S \text{ в т. } \vec r} = 0 \Rightarrow \nabla f \perp T_{\vec r} S$ (ортогональное прост-во)

$$\vec\rho = \vec r \cdot \underbrace{\frac{\vec K}{K}}_{\vec n} = \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\vec\omega \cdot \vec K}{K} = \frac{\sqrt{2T}}{K} = \text{const}$$

Происходит качение эллипсоида инерции по пл-ти $\perp \vec K$ без проскальзывания.



Полодия — траектория т. касания по эллипсоиду (замкнутая)

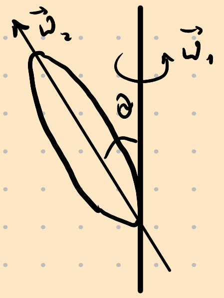
Герполодия — траектория т. касания по пл-ти касания (всюду плотная)

В случае эллипсоида-шара $(A = B = C)$ все совсем очевидно.

Случай Эйлера для $A = B$

Полодия и герполодия, очевидно, становятся окружностями.

Движение представляет собой **регулярную прецессию** (свободная)



$\theta = \text{const}$

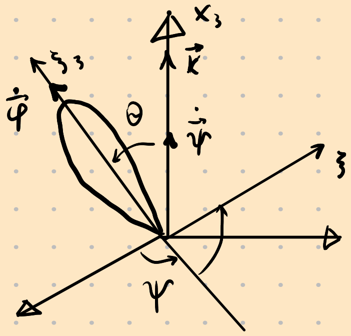
$\omega_1 = \text{const}$

$$C\dot r + \cancel{(B-A)}\,pq = 0 \Rightarrow Cr = H = \text{const}$$

$$Cr = K_{\xi_3} = K\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{Cr}{K} = \text{const}$$

$$\vec K = \begin{bmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + (C-A)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec\omega = \underbrace{\frac{\vec K}{A}}_{\dot{\vec\psi}} + \underbrace{\frac{A-C}{A}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}}_{\dot{\vec\varphi}}$$



$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} \qquad \dot\psi = \frac{K}{A} \qquad \dot\varphi = \frac{A-C}{A}r$$

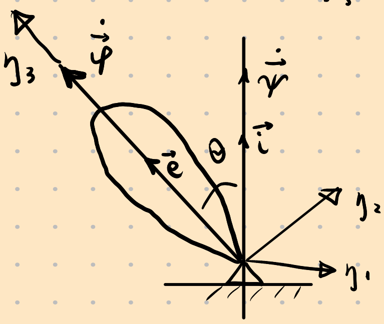
Параметры регулярной прецессии не могут быть произвольны.

$$\frac{\dot\varphi}{\dot\psi} = \frac{A-C}{A}r\frac{A}{K} = \frac{A-C}{C}\cdot\underbrace{\frac{Cr}{K}}_{\cos\theta}$$

$C\dot\varphi + (C-A)\dot\psi\cos\theta = 0$ – обязательно связаны!

Вынужденная регулярная прецессия не случ. Эйлера! Не случ. Лагранжа!

$A = B \neq C$ (ξ_3 – ось динам. симметрии! Вдоль C) Центр масс лежит на оси динам. симметрии.



Какой момент внешних сил надо приложить для поддержания такой прецессии? (прецессия с любыми пар-рами)

$\dot\varphi = \text{const}$, $\dot\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$

η – полусвяз. базис

$\eta_1\ \eta_3$ сод. $\dot{\vec\psi}$, $\dot{\vec\varphi}$

$$K_\eta = \begin{bmatrix} A\dot\psi\sin\theta \\ 0 \\ C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) \end{bmatrix} = \alpha\vec i + \beta\vec e = \alpha\begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = A\dot\psi, \quad \beta = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) - A\dot\psi\cos\theta = C\dot\varphi + (C-A)\dot\psi\cos\theta$$

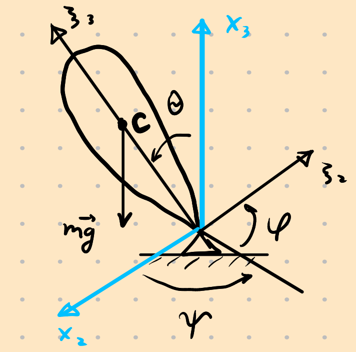
$\dot{\vec K} = \vec M$ (в абсолютном пр-ве)

$$\dot{\vec K} = \dot{\vec\psi}\times\vec K = \langle \dot{\vec\psi} \parallel \vec i \rangle = \beta\,\dot{\vec\psi}\times\vec e = \langle \dot\varphi\vec e = \dot{\vec\varphi} \rangle = \left[C + (C-A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta\right]\dot{\vec\psi}\times\dot{\vec\varphi}$$

$$\boxed{\vec M = \left[C + (C-A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta\right]\dot{\vec\psi}\times\dot{\vec\varphi}}$$ – „основная ф-ла гироскопии"

Если $|\dot\varphi| \gg |\dot\psi|$ или $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\vec M = C\,\dot{\vec\psi}\times\dot{\vec\varphi}$

Случай Лагранжа



$A = B \neq C$

$T + П = const$

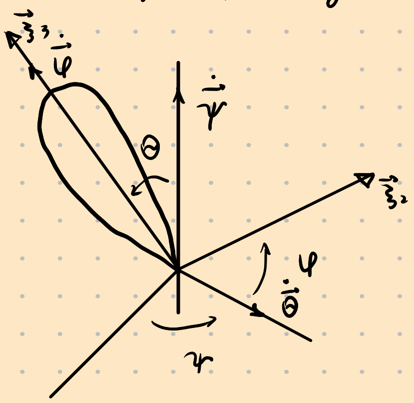
$C\dot r + \cancel{(B-A)}^{\,0}pq = 0 \Rightarrow Cr = H = const$

$\dot{\vec K} = \vec M$, проек. на $\vec x_3$: $\dot{\vec K}\cdot\vec x_3 = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec K\cdot\vec x_3)^{\cdot} = 0 \Rightarrow \vec K\cdot\vec x_3 = K = const$

$$\frac12 A(p^2+q^2) + \frac12 Cr^2 + mgl\cos\theta = \tilde E = const$$

$$\frac12 A(p^2+q^2) + mgl\cos\theta = E = \tilde E - \frac12\cdot\frac{H^2}{C} = const$$



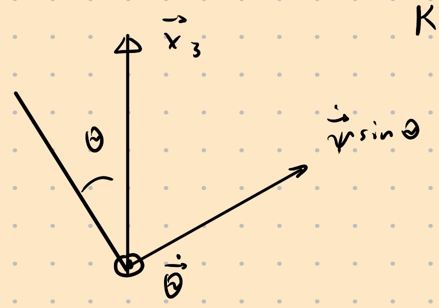
$$\frac12 A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + mgl\sin\theta = E \quad (1)$$

(можно вывести из геометрии или ур-ий Эйлера)

$$C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = H \quad (2)$$

$$\vec K = \begin{bmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{bmatrix} = A\vec\omega_\perp + H\vec\xi_3$$

$$K = \vec K\cdot\vec x_3 = A\underbrace{\vec\omega_\perp\cdot\vec x_3}_{\underbrace{\dot\psi\sin\theta\cdot\vec x_3}_{\dot\psi\sin^2\theta}} + H\underbrace{\vec\xi_3\cdot\vec x_3}_{\cos\theta} = A\dot\psi\sin^2\theta + H\cos\theta \quad (3)$$



$\vec\omega_\perp = \dot{\vec\theta} + \dot\psi\cdot\sin\theta$
$(\dot{\vec\theta}\perp\vec x_3)$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \dot\psi = \frac{K - H\cos\theta}{A\sin^2\theta} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac12 A\dot\theta + \underbrace{\frac12 A\frac{(K-H\cos\theta)^2\sin^2\theta}{A^2\sin^4\theta} + mgl\cos\theta}_{V(\theta)} = E$$

$$\pm\int\frac{\sqrt{A}\,d\theta}{2\sqrt{E-V(\theta)}} = t + const \Rightarrow \theta(t) = \text{эллиптический интеграл}$$

↳ периодическая ф-ия (т.к. движение в потенциальной яме – колебания)

Нет красивых интерпретаций :(

$$\dot\psi = \underbrace{\frac{K - H\cos\theta(t)}{A\sin^2\theta(t)}}_{f_\psi} \Rightarrow \psi = \int f_\psi(t)\,dt + const$$

↓ почти периодическая, но имеет ненулевое среднее (линейный тренд + колебания)

$$\dot\varphi \overset{(2)}{=} \frac{H}{C} - \dot\psi(t)\cos\theta(t) = f_\varphi(t) \Rightarrow \varphi = \int f_\varphi(t)\,dt + const$$

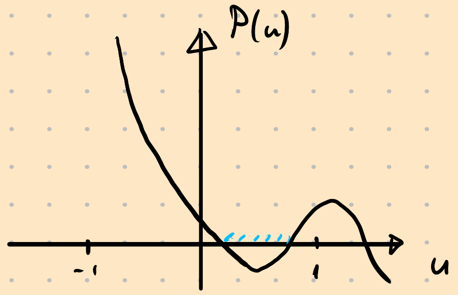
линейный тренд + колебания

из (3): $$\dot\theta^2 + \frac{(K - H\cos\theta)^2\sin^2\theta}{A^2\sin^4\theta} + \frac{2(mgl\cos\theta - E)}{A} \quad \Big| \cdot \sin^2\theta$$

$$\dot\theta\sin\theta = -(\cos\theta)^\cdot \qquad \text{Пусть } u = \cos\theta$$

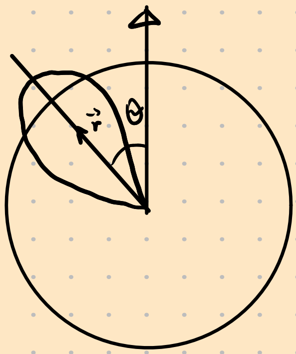
$$\dot u^2 + \frac{(K - Hu)^2}{A^2} + \frac{2(mglu - E)}{A}(1-u^2) = 0$$

Общее положение: $P(u)$ - кубич. полином

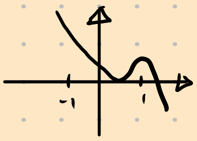


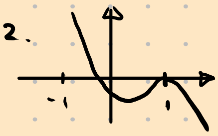
$P(u) \le 0$ - область движения

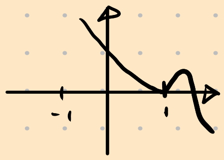
Сфера Пуассона:



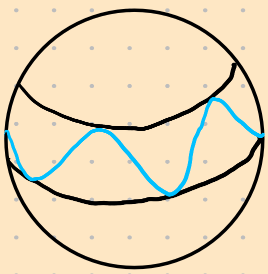
Частные случаи:

1.


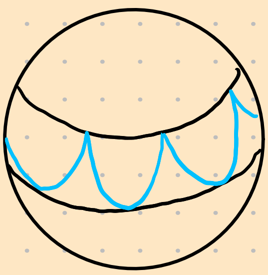
2.


3.


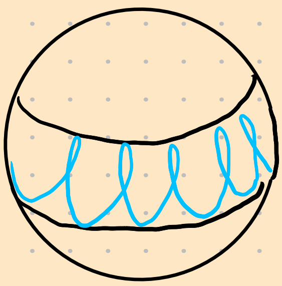
I. Общее положение:

1.


$$\operatorname{sign}\dot\psi\big|_{\theta_{min}} = \operatorname{sign}\dot\psi\big|_{\theta_{max}}$$

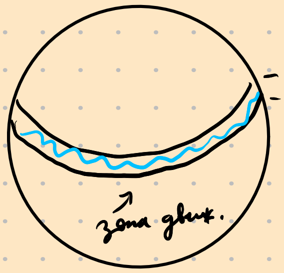
2.


$$\dot\psi\big|_{\theta_{max}} = 0$$

3.


$$\operatorname{sign}\dot\psi\big|_{\theta_{min}} \ne \operatorname{sign}\dot\psi\big|_{\theta_{max}}$$

У быстрораскрученных ($H \to \infty$) зона движения очень узка:



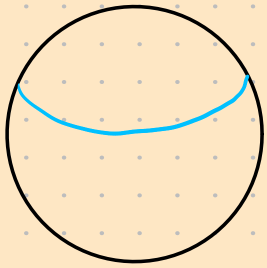
$\Delta \to 0$

$T \to 0$ (период колеб.)

Период колебаний при этом $\to \infty$.

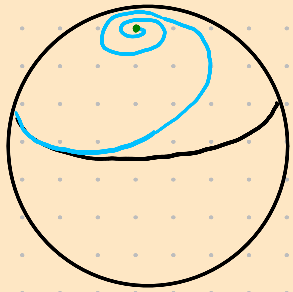
II. Частные случаи

1. Вынужденная прецессия



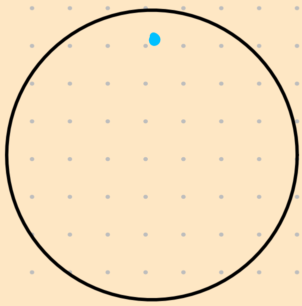
Если $\dot{\theta}(0) \neq 0$, то прецессии никогда не может быть.

2.



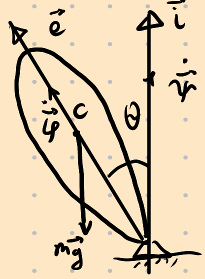
$T \to \infty$ Асимптотическое движение к точке вершины сферы Пуассона (верт. положение)

3. „Спящий" волчок



Волчок вращается вокруг верт. оси с постоянной угловой скоростью.

Регулярная прецессия в случае Лагранжа



$$\left[C + (C-A)\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right]\dot{\vec{\psi}}\times\dot{\vec{\varphi}} = \vec{M} \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\vec{M} = mgl\,\vec{i}\times\vec{e} = \frac{mgl}{\dot{\psi}\dot{\varphi}}\,\dot{\vec{\psi}}\times\dot{\vec{\varphi}}$$

$$C\dot{\varphi}\dot{\psi} + (C-A)\dot{\psi}^2\cos\theta = mgl$$

$$C(\dot\varphi + \dot\psi \cos\theta) = H = \text{const}$$

$$C\dot\varphi = H - C\dot\psi\cos\theta$$

$$H\dot\psi - A\dot\psi^2\cos\theta = mgl$$

$$A\dot\psi^2\cos\theta - H\dot\psi + mgl = 0$$

$$\dot\psi_{1,2} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4Amgl\cos\theta}}{2A\cos\theta} \qquad (1)$$

Если $H \to \infty$ (быстрый волчок)

$$\dot\psi_1 \to \frac{H}{A\cos\theta} \to \infty$$ — быстрая прецессия

$$\sqrt{H^2 - 4Amgl\cos\theta} \simeq H\left(1 - \frac{2Amgl\cos\theta}{H^2}\right)$$ — два варианта, зависит от нач. усл.

$$\dot\psi_2 \to \frac{mgl}{H} \to 0$$ — медленная прецессия

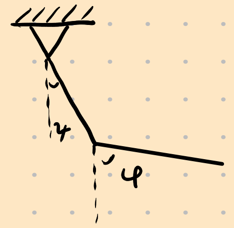
Из (1) $\Rightarrow$ для вынужд. прецессии должен быть достаточно большой H:

$$H^2 \geq 4Amgl\cos\theta.$$

$H^2 \geq 4Amgl$ — условие Маевского (устойчивости спящего волчка).

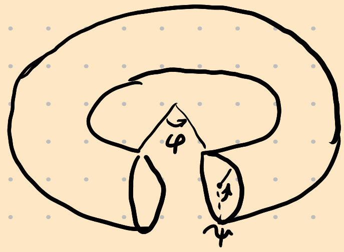
Уравнения Лагранжа 2-го рода

Примеры

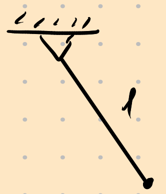
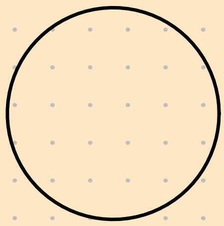
1. 

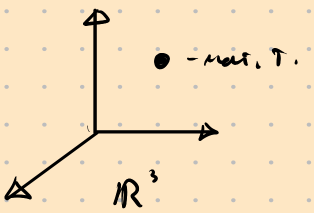
двойной маятник

взаимно-однозначное соответствие

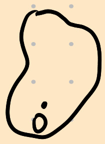


$= T^2$

2.  $\sim$  $= S^2$

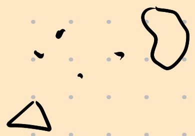
3. 

$\sim \mathbb{R}^3$

4. 

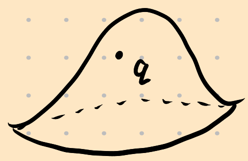
тв. тело

$\sim \mathbb{R}^3 \times SO(3)$



физ. система

$\sim$



$- M;\quad \dim M = n$

Конфигурационное многообразие

Любую физ. сис-му можно поставить во взаимно-однозн. соответствие с конфигурационным многообразием.

q — параметризация конфигурационного многообразия M (**обобщённые коор-ты**)

1. $q = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}$ 2. $q = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$ 3. $q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 4. $q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \psi \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix}$

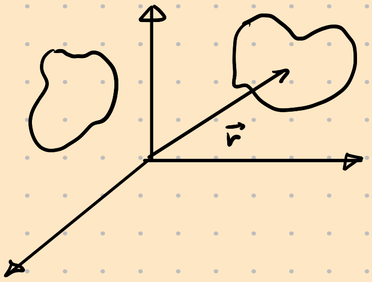
размерность n!

Она может быть:

① Глобальной (пример 3 - опред. везде)

② Локальной (пример 2 - имеет особенности в полюсах)

Иногда в многообр. глобальных коор-т быть не может (сфера)



После введения q:

$$\vec r = \vec r(q, t)$$

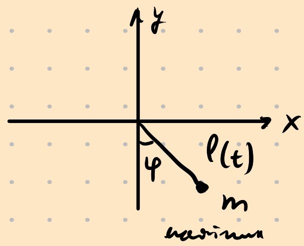
• Коор-ты должны удовл. условию невырожденности:

$$\vec r_{,i}\,\delta q^i \not\equiv 0 \quad \forall \delta q \neq 0$$ - дифференциал при фикс. времени

$$\left(\sum \frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\,\delta q^i\right)$$

Т.е. смещение в q обязательно вызывает отклик в $\vec r$.

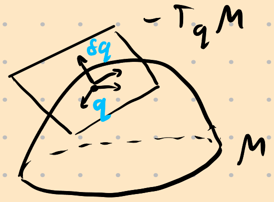
Пример



$$q = \varphi \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(t)\sin\varphi \\ -l(t)\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Виртуальное перемещение

$\delta \vec r = \vec r_{,i}\,\delta q^i$ - важно!



T_qM - касат. пр-во к M в т. q

δq - векторы в касательном пространстве (модуле)

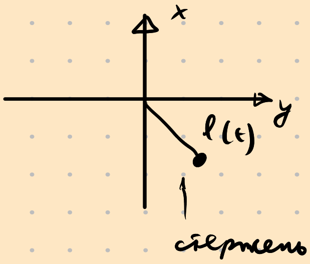
δq^i - вариации коор-т, могут быть произв.

Возможное перемещ.:

$d\vec r = \delta \vec r + \vec r_{,t}\,dt$ - нигде не исп.

Механические связи и их классификации

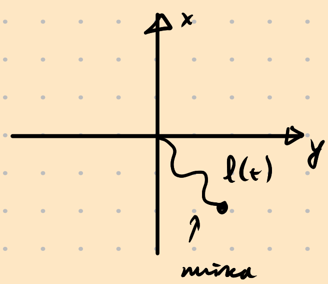
1.



$$x^2+y^2 = l^2(t) \iff x^2+y^2-l^2(t) = 0$$

$$\begin{cases} f_i(q,t) = 0 \\ i = \overline{1,m} \end{cases}$$ - геометрические (голономные) связи

2.



$$x^2+y^2-l^2(t) \leq 0$$

$$\begin{cases} f_i(q,t) \leq 0 \\ i = \overline{1,s} \end{cases}$$ - неудерживающие связи

3. $$\begin{cases} C_{ij}(q,t)\,\dot q^j + b_i(q,t) = 0 \\ i = \overline{1,r} \end{cases}$$ - Кинематические (дифференциальные) связи

→ интегрируемые

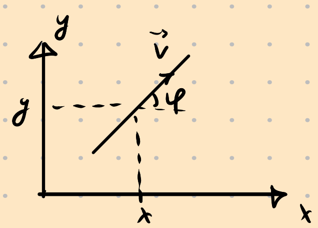
→ неинтегрируемые

a. Интегрируемые

$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = const \Leftrightarrow$ голономной связи

б. Неинтегрируемые

„конёк Чаплыгина":



$\dot{y} - \dot{x}\,tg\,\varphi = 0$

Скорость напр. по стержню - коньку

Докажем неинтегрируемость:

$$\mu\, tg\,\varphi\, dx - \mu\, dy + 0\, d\varphi \overset{?}{=} d f(x, y, \varphi)$$

интегр. множитель

$f_{,x}$ $f_{,y}$ $f_{,\varphi}$

$f_{,x\varphi} = f_{,\varphi x} \Rightarrow \frac{\mu}{\cos^2\varphi} = 0 \Rightarrow \mu = 0$ - нет интегр. множ. $\Rightarrow$ связь неинт.

Если в ур-е связи (1-3) явно входит время, то они наз-ся реономными (нестационарными), иначе - склерономными (стационарными)

Замечание: 1. далее будут рас-ся сис-мы только с голономными связями.

2. Для сис-м, сост. из n мат. т., ур-я связи им. вид:

$R = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_n \end{bmatrix}$

1) $f(R, t) = 0$ - голономная

2) $f(R, t) < 0$ - неудерживающая

3) $C\dot{R} + b = 0$ - кинемат. связь.

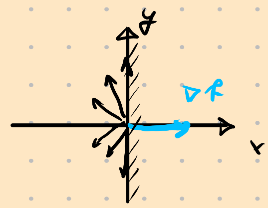
Виртуальные перемещения при наличии связи

1. $f_{i,j}\, \delta q^j = 0$ - гол. св.

$\nabla_R f(R, t) \cdot \delta R = 0$

2. $f_{i,j}\, \delta q^j \big|_f \le 0$ $\quad q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(для R аналогично) $\quad f = x \le 0 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



3. $C_{ij}\, \delta q^j = 0$

(для R аналогично)

Число степеней свободы мех. сис-мы $n = \dim M - r$ (разм. конфиг. многообразия минус кол-во кинемат. связей).

Для голономных сис-м $n = \dim M$.

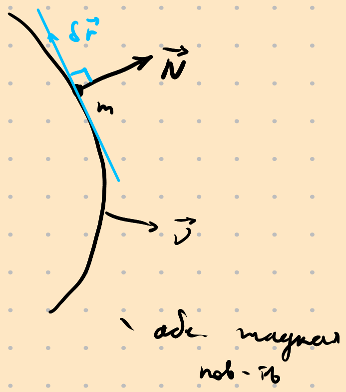
№3! Обобщённые коор-ты при описании голономных систем будут выбираться с учётом ур. связи: ур-я связи будут выполняться тождественно.

$$\begin{cases} f_i(q,t) = 0 \\ i = \overline{1,m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^1 = f^1(q^{m+1}, \dots, q^n, t) \\ \dots \\ q^m = f^m(q^{m+1}, \dots, q^n, t) \end{cases} - q^{m+1}, \dots, q^n - \text{незав. коор-ты.}$$

Точечные сис-мы:

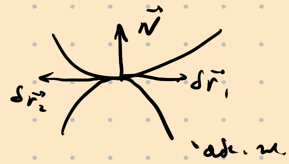
$$f(R,t) = 0 \longrightarrow R(q,t) \to f_i(R(q,t),t) \equiv 0.$$

Гипотеза идеальности связей

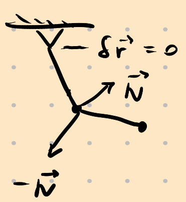


$\delta \vec r$ – в касат. пр-ве к пов-ти. $\vec N$ – сила реакции связи

$\delta A = \vec N\, \delta \vec r \equiv 0.$



$\delta A = 0.$



$\delta A = \vec N \delta \vec r - N \delta \vec r = 0$

Гипотеза идеальности связей:

$\ddot{\vec r} = \vec f + \vec n$

$\vec f$ – активная сила (кроме $\vec n$)

$\vec n$ – уд. сила реакции связей

$\delta A_n = \int \vec n \cdot \delta \vec r \, dm = 0$ – силы р-ии связей не соверш. работу $\forall$ вирт. перемещ.

Основное уравнение динамики

$$\int (\ddot{\vec r} - \vec f)\,\delta \vec r\, dm = 0$$

Вывод ур-я Лагранжа 2$^{\text{го}}$ рода

$$\int \vec f\,\delta \vec r = \underbrace{\int \vec f \cdot \vec r_{,k}\, dm}_{Q_k\text{ - обобщённая сила}}\,\delta q^k = Q_k\,\delta q^k$$

(Система голономная!)
(только голономные связи)

Замечание: пусть введены новые обобщ. коор-ты $q^{i'}$.

Тогда: $\delta q^i = q^i_{,i'}\,\delta q^{i'}$ => δq - контравариантный вектор

$Q_i\,\delta q^i = Q_i\, q^i_{,i'}\,\delta q^{i'} = Q_{i'}\,\delta q^{i'}$

$Q_{i'} = q^i_{,i'}\, Q_i$ => Q_i - ковариантный вектор

$$\int \ddot{\vec r}\cdot\delta\vec r\, dm = \int \ddot{\vec r}\cdot \vec r_{,k}\, dm\,\delta q^k = \int \Big[(\dot{\vec r}\cdot\vec r_{,k})^{\cdot} - \underbrace{\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}_{,k}}_{(v^2/2)_{,k}}\Big]\, dm\,\delta q^k \;\ominus$$

$$\dot{\vec r} = \vec r_{,k}\,\dot q^k + \vec r_{,t} \;\Rightarrow\; \dot{\vec r}_{,\dot k} = \vec r_{,k}$$

$$\dot{\vec r}_{,\dot k} = \frac{\partial \dot{\vec r}}{\partial \dot q_k}$$

$$\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}_{,\dot k} = (v^2/2)_{,\dot k}$$

$$\ominus\; \int\Big[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot k} - (v^2/2)_{,k}\Big]\, dm\,\delta q^k = [(T_{,\dot k})^{\cdot} - T_{,k}]\,\delta q^k = Q_k\,\delta q^k \Rightarrow$$

$$\int \frac{v^2}{2}\, dm = T$$

$$\Rightarrow [(T_{,\dot k})^{\cdot} - T_{,k} - Q_k]\,\delta q^k = 0$$

Верно $\forall\, \delta q^k$; δq^k - незав. и произв. =>

=> $(T_{,\dot k})^{\cdot} - T_{,k} = Q_k$ — ур-е Лагранжа 2$^{\text{го}}$ рода

Если $Q_k = -\Pi_{,k}$; $\Pi = \Pi(q,t)$, то такая обобщ. сила наз-ся потенциальной.

Тогда вводится $\mathcal{L} = T - \Pi$ - ф-ция Лагранжа (Лагранжиан). С ней:

$$(\mathcal{L}_{,\dot k})^{\cdot} - \mathcal{L}_{,k} = 0 \iff \mathcal{E}_k \mathcal{L} = 0 \quad \left(\mathcal{E}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}\right)$$

Замечание если часть сил не потенциальна $(Q_i = -\Pi_{,i} + \underbrace{Q_i^*}_{\text{непот. силы}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ введём $\mathcal{L} = T - \Pi$, получим $\mathcal{E}_k \mathcal{L} = Q_k^*$

Обобщённые потенциалы

$V(q, \dot q, t)$: $Q_k = \mathcal{E}_k V$ — для потенциальной силы получается Π

$$\mathcal{E}_k V = (V_{,\dot k})^{\cdot} - V_{,k} = V_{,\dot k \dot m}\, \ddot q^m + \underbrace{\dots}_{\text{нет } \ddot q} = Q(q, \dot q, t)$$

?

$\Rightarrow V_{,\dot k \dot m} = 0 \Rightarrow V$ - линеен по $\dot q$

Таким образом, $V = \dot q^T \gamma(q,t) + \Pi(q,t)$ ($\gamma(q,t)$ - вектор-столбец)

Пример: гироскопические силы

$Q = \Gamma \dot q$, $\Gamma^T = -\Gamma$

Сила Кориолиса: $F = -2m\vec\omega \times \vec v = \Gamma \dot{\vec r}$, $\Gamma = -2m\hat\omega$

Сила Лоренца: $e\vec v \times \vec H$; $\Gamma = -e\hat H$

$V = \frac{1}{2} \dot q^T \Gamma q = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \dot q^i q^j$