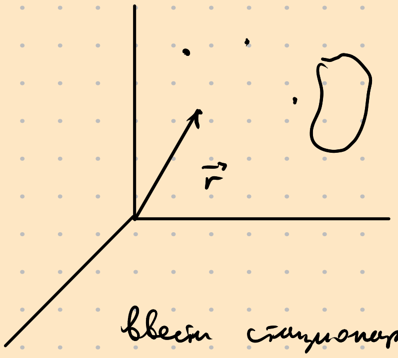
Литература: те же (Муравьёв, Гантмахер, Амелькин, Маркеев - новая версия)

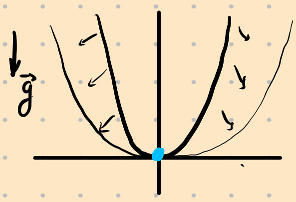
Равновесие механических систем



Система нах-ся в равновесии в выбранной сис-ме коор-т $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \vec{r} \to \vec{r} = \vec{r}_0 = \overline{const}$

Далее будем рас-ивать стационарные системы (ур-я связи не зависят от времени) $\Rightarrow \exists$ возможность ввести стационарную параметризацию, и $\vec{r} = \vec{r}(q)$ после введ-я обобщ. коор-т.



У не стац. систем тоже могут быть полож. равновес. - см. картинку (кривая эволюционирует со временем)

$$(\mathcal{L}_{,\dot{k}})^{\cdot} - \mathcal{L}_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$\Updownarrow$ - т.к. разрешимость относ. старших произв.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = F(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = x(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Положения равновесия нах-ся во вз. однознач. соотв. с точками вида $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\square$ ($\Leftarrow$) Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = const$

($\Rightarrow$) $\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \equiv \vec{0}$ (1), однако обобщ. коор-ты q вводились так, что $\vec{r}_{,k} \delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q : \delta {q^1}^2 + \ldots + \delta {q^n}^2 \neq 0$.

Таким образом (1) $\Rightarrow \dot{q} = 0$ $\blacksquare$

Критерий полож. равновесия стац. системы

Стац. сис-ма нах-ся в полож. равновесия $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$.

□ $(T_{,\dot k})' - T_{,k} = Q_k(q,\dot q,t)$

$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\,\dot q^i \dot q^j$

$T_{,\dot k} = a_{kj}\dot q^j$ — т.к. a_{ij} — симметричная матрица!

$(T_{,\dot k})' = a_{kj}\ddot q^j + a_{kj,i}\,\dot q^i\dot q^j$

$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k}\,\dot q^i \dot q^j \Rightarrow a_{kj}\ddot q^j + \left(a_{kj,i} - \frac{1}{2} a_{ij,k}\right)\dot q^i\dot q^j = Q_k(q,\dot q,t)$ (2)

Для полож. равновес. $q=q_0$, $\dot q = 0 \Rightarrow$

$0 = Q_k(q,\dot q,t)$

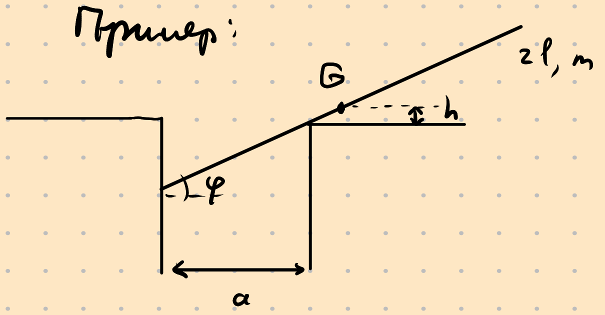
С другой стороны, если $Q(q_0, 0, t)=0$, то (2) имеет решение $q=q_0$, $\dot q=0$ — по т. Коши оно сущ-ет и единственно. ■

Однако если сила имеет вид, не удовл. т. Коши ($Q(\dots)$ не удовл. усл. Липшица), то критерий в обратную сторону не сработает — может быть >1 реш-я (см. Маркеева).

Следствие

Если $Q = -\nabla\Pi(q,t)$, то полож. равновес. соотв. стац. т. потенц. энергии $\nabla\Pi(q,t)=0$.

Пример:



т. G — центр масс (теперь всегда так будет).

$\Pi = mgh = mg(l\sin\varphi - a\,\mathrm{tg}\,\varphi)$

$\Pi_{,\varphi}:\ l\cos\varphi_* - \frac{a}{\cos^2\varphi_*} = 0$

$\cos\varphi_* = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ — полож. равновес.

Теорема — принцип виртуальных перемещений

Полож. $\vec r = \vec r_0$ мех. сис-мы яв-ся полож. равновес. $\Leftrightarrow$ $\forall$ вирт. перемещ. $\delta\vec r$ из этого полож. $\delta A = \int f\,\delta\vec r\,dm = 0$

□ (для стац. случая)

$\delta\vec r = \vec r_{,k}\,\delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec r_{,k}\cdot\vec f\,dm\cdot\delta q^k = Q_k\,\delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0$ –

– критерий полож. равновес. ■

Замечание 1 (фундаментальное)

Вообще, эта теорема более общая – она работает и для нестац. сис-м, в одну сторону док-во элементарно, но в другую на порядок сложнее.

□ $\Rightarrow$ $\int(\vec w - \vec f)\,\delta\vec r\,dm = 0$ – осн. ур-е динамики

$\vec w = 0$ в полож. равн. $\Rightarrow \int \vec f\,\delta\vec r\,dm = 0$ ■

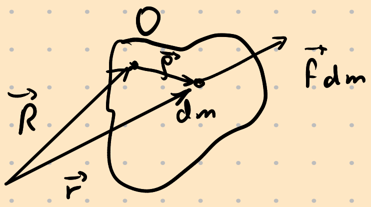
В обратную сторону – см. Маркеев.

Замечание 2 (прикладное)

Важно обратить внимание, что усл. теор-мы должно выполняться $\forall\,\delta\vec r$ из полож. равновес.

Пример

Условие равновесия твёрдого тела



$\vec r = \vec R + \vec\rho$

$\delta\vec r = \delta\vec R + \delta\vec\rho = \delta\vec R + \delta\vec\varphi\times\vec\rho$, $\delta\vec\varphi$ – в-р малого поворота

$\delta A = \int \vec f\,dm\cdot\delta\vec R + \int \vec f\cdot(\delta\vec\varphi\times\vec\rho)\cdot dm =$

$= \vec F\cdot\delta\vec R + \delta\vec\varphi\cdot\underbrace{\int\vec\rho\times\vec f\,dm}_{\vec M_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A = \vec F\cdot\delta\vec R + \vec M_0\cdot\delta\vec\varphi = 0 \quad \forall\,\delta\vec R,\ \delta\vec\varphi \Rightarrow \vec F = \vec 0$ и $\vec M_0 = \vec 0$

$\vec F$ – главный вектор сил, $\vec M_0$ – главный момент.

(полезно вспомнить динам. винт)

Основы теории устойчивости

Рассматривается система общего вида в нормальной форме Коши:

$\dot{x} = F(x,t)$ (3) Здесь и далее: $x(t) = x(x_0, t)$

Реш-е $x = q$ = const наз-ся положением равновесия сист-мы (3).

Полож. равновес. $x = a$ всегда можно сместить в начало коор-т, в т. $x=0$:

$x \to x - a$.

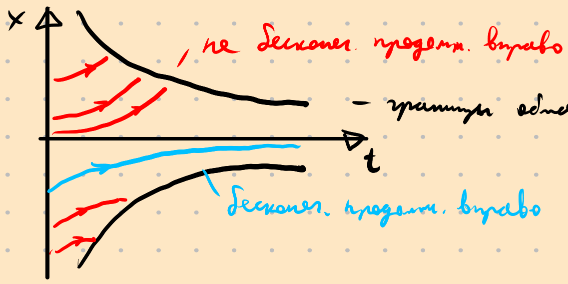
Далее будем считать, что $a=0$ без ограничения общности.

x можно трактовать как отклонения от полож. равновесия.

Определение

Реш-е $x = x(x_0, t)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз-ся бесконечно продолжаемым вправо, если оно $\exists$ $\forall t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



Определение (уст. по Ляпунову)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) наз-ся уст. по Ляпунову, если

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \ \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0; +\infty) \to \|x(t)\| < \varepsilon$

$\|x(t)\| = \sqrt{x^i x^i}$

Замечание

1. Опр. уст. <=> равномерная непрерывность по нач. ус.
2. Из опр. уст. => реш-е $x(t)$ бесконечно продолж. вправо

Определение (асимптот. уст.)

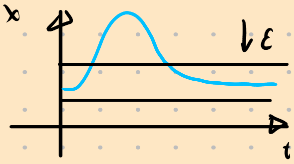
Полож. равновес. $x=0$ сист. (3) — асимптотически устойчиво, если

✱ 1. $x=0$ — уст. по Ляпунову.

2. $\exists \Delta : \forall x_0, \ \|x_0\| < \Delta \to x(t)\big|_{t\to\infty} \longrightarrow 0$

$U_\Delta(0)$ — область притяжения.

Если забыть про (1):

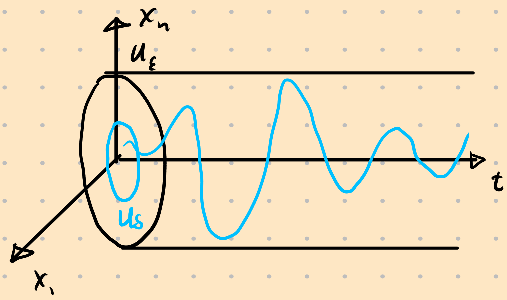


Определение (неуст.)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) неуст., если $\exists \varepsilon : \forall \delta \to \exists x_0 :$ $\|x_0\| < \delta$ $\exists t^* : \|x(t^*)\| > \varepsilon$, либо реш. $x(x_0, t)$ не яв-ся ∞ прод. вправо.

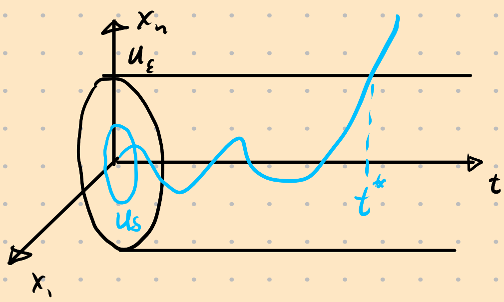
Качественные представления

① Устойчивое

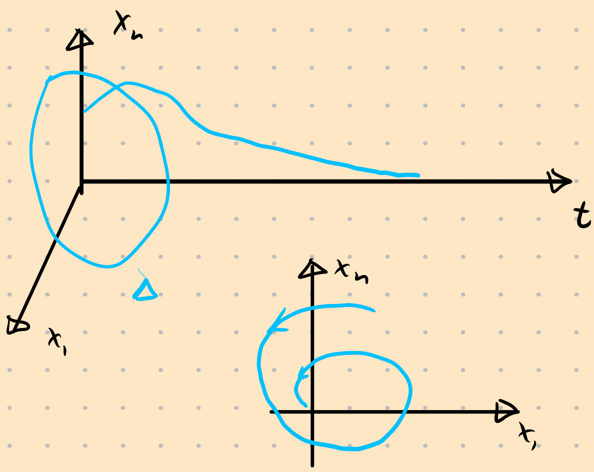


$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: траектория, начавшаяся в δ-окрестности, остается внутри ε-окр-ти

② Неуст.



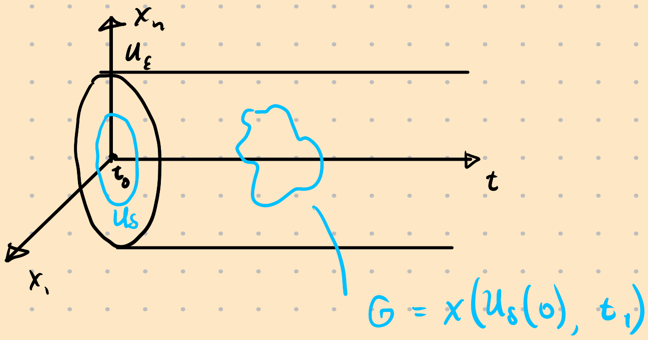
③ Асимпт.



Корректность понятия устойчивости

Если п.р. (положение равновесия) $x=0$ устойчиво для вр. t_0, то оно уст. $\forall t_1 > t_0$.

□ $x = 0$ - уст. $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0: \forall x_0 = x(t_0), \ \|x_0\| < \delta \to \|x(t)\| < \varepsilon$



Фазовый поток: G - мн-во реш-ий задачи Коши при заданном мн-ве нач. усл.

$x(x_0, t)$ - всюду однозн. и непр. (т. Коши) $\Rightarrow \rho(\partial G, 0) > 0$ (расс-ие от $x=0$ до ∂G)

Выберем $\delta_1 = \rho$, $t_0 \mapsto t_1$, $\delta \mapsto \delta_1$ (замена) ■

Устойчивость траектории

$\dot{x} = X(x, t)$ $\qquad \psi$ - частное решение (траектория)

$\dot{\psi} = X(\psi, t)$

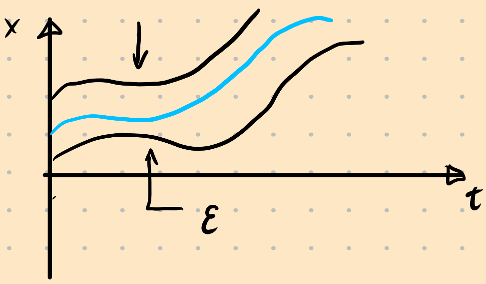
Рассмотрим решение $x = \psi + y$ (y - отклонение от траектории)

$\dot{x} = \underbrace{\dot{\psi}}_{X(\psi, t)} + \dot{y} = X(\psi + y, t) \Rightarrow \dot{y} = X(\psi + y, t) - X(\psi, t)$ (1)

$y = 0$ - п.р. сис-мы (1)

Таким образом, если $y=0$ - устойчивое п.р., то тр-ия ψ наз-ся устойчивой.

Если $\forall$ тр-ия сис-мы устойчива, то сис-ма наз-ся устойчивой.



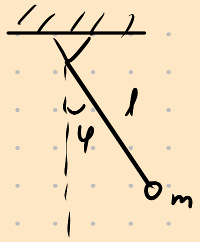
Все траектории, отклон. на δ от ψ в нач. усл., отклоняются $< \varepsilon$ от ψ.

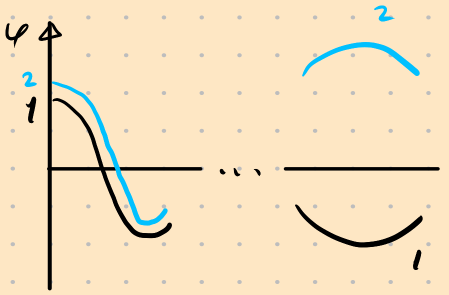
Если $y=0$ - неуст. $\Rightarrow$ тр-я неуст., $y=0$ - асимпт. уст. $\Rightarrow$ тр-ия асимптот. уст.

Замечание Устойчивость траектории обозначает близость возмущённых траекторий в те же моменты времени.

Пример

Рас-им колеб. с конечной амплитудой





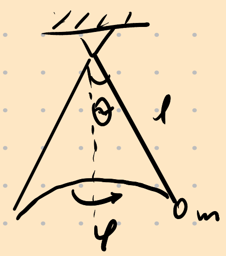
— расходятся (т.к. амплитуда разная => период разный).

Траектории, кроме близких к $\varphi = 0$, неустойчивы.

О выборе переменных в задачах иссл-я устойчивости

Переменные не должны иметь особенностей в окр-ти п.р.

Пример



$\forall \theta_0 \ll 1 \quad \exists$ реш. вида $\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 \to \infty$

П.р. на самом деле уст-во, $\dot{\varphi} \to \infty$ — следствие вырождения с.к.

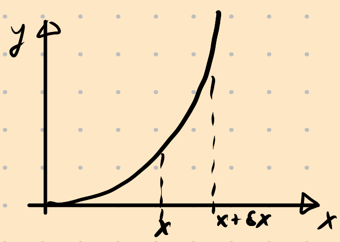
Пример

$\dot{x} = \frac{1}{2} \qquad x = x_0 + \frac{t}{2}$

$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \forall$ траект. уст.

Замена $y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + t/2)^2$

$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + t/2)^2 = (x_0 + t/2)^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \to \infty$



Определение (ДЗП)

Замена $x = x(y,t)$, $x(0,t)=0$ наз-ся **допустимой**, если

1. $\det(X_{,y}) \neq 0$ в нек-рой окр-ти полож. равновес. (чтобы диффеур разрешился)
2. Замена $x = x(y,t)$ и обратная ей $y = y(x,t)$ непрерывны в 0 равномерно по t. (годится из 2 примера)

Допустимые замены не изменяют хар-ра устойчивости.

Устойчивость линейных систем

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $A(t)$ вообще говоря переменная

$\exists\ \varphi(t)$ - траектория, $x = \varphi + y$ - возмущённая тр-я,

$\cancel{\dot{\varphi}} + \dot{y} = Ay + \cancel{A\varphi} + \cancel{f} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ исс-е уст. любой траектории сводится к иссл-ю уст. п.р. $y=0$ однородной сис-мы $\dot{y} = Ay$. (2)

Теорема

П.р. $y=0$ - уст. $\Leftrightarrow$ $\forall$ реш-я сис-мы (2) ограничено.

$\square$ ($\Rightarrow$) $\exists\ \psi$ - неогр. реш., рас-им $y = \frac{\delta}{2}\frac{\psi(t)}{\|\psi(t_0)\|}$

$\|y(t_0)\| < \delta$, $y(t)\ \Big|_{t\to\infty} \longrightarrow \infty \Rightarrow y=0$ - неуст.

($\Leftarrow$) Если $\forall$ реш. огр. $\Rightarrow$ огр. $\Phi(t,t_0)$ - фунд. матрица сис-мы, $\forall$ реш. (2) имеет вид $y = \Phi(t,t_0)\,y(t_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi(t_0,t_0) = E \end{cases}$$

$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$ $\blacksquare$

Замечание: норма матрицы: $\|\Phi\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$ - „максимальное растяжение"

С евклидовой нормой норма матрицы - max сингулярное число матрицы (собств. число матрицы $\Phi\Phi^T$)

Устойчивость систем с постоянной матрицей

$$\dot{y} = Ay, \qquad A = \text{const} \qquad (3)$$

Особый интерес представляет асимпт. устойчивость н.р. $y=0$.

Многие радиотех. сис-мы, сис-мы управления, отклонения от уст. полож. описываются именно так.

Решения (3): $y = h e^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda E - A) = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни

Теорема

Н. р. $y=0$ сис-мы (3) асимпт. уст. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$

□ $y(t) \sim P_{\sigma_k - 1}(t)\, e^{\lambda_k t}$ Если $\exists \lambda_k$: $\mathrm{Re}\, \lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \to \infty \Rightarrow$ неуст.

Если $\mathrm{Re}\, \lambda_k < 0 \Rightarrow \forall$ реш. огр. $\Rightarrow$ н.р. $y=0$ уст. по пред. теор.

$y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \Rightarrow$ н. р. $y=0$ — ас. уст. ■

(σ_k — кратность корня λ_k)

Определение

Многочлен $P(\lambda)$ наз-ся уст. если $\mathrm{Re}\, \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$

(уст. полином соотв. асимпт. уст. н.р. в сис-ме с const коэф.)

Теорема (необх. усл.-е уст. полинома)

Если $P(\lambda)$ уст., то знаки его коэф-ов должны быть одинаковы.

□ $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_i > 0 \qquad \bar{\lambda}_j$ — тоже корень

$\lambda_k = -\gamma_k, \quad \gamma_k > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod \left[(\lambda + \alpha_j - i\beta_j)(\lambda + \alpha_j + i\beta_j)\right]^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k} =$$

$$= a_n \prod (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k}$$

Раскрытие скобок даст коэф-ты одного знака. ■

Замечание

Иногда это ус. формулируют в виде: $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$. Это подразумевает предв. приведение многочлена к виду $a_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$.

Критерии уст. рас-ни без док-в (см. Журавлёва или Демидовича)

Критерий Рауса - Гурвица

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$

Строится матрица Гурвица

$$\underset{n \times n}{\Gamma} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \ldots & & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

По диагонали коэф-ты $a_1, a_2, \ldots$ Слева коэф-ты по возраст., справа - по убыванию.

P_λ - уст. $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$

! Есть разные формы записи Γ!

Замечание об усл. $a_0 > 0$

<u>Пример</u>

$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 \qquad \lambda_1 = -\dfrac{a_0}{a_1} \Rightarrow$ полином уст. $\Leftrightarrow \operatorname{sign} a_0 = \operatorname{sign} a_1$

$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0$ - ?? другое ус. ??

„Парадокс" возник от того, что $P(\lambda)$ не приведён к виду $a_0 > 0$.

Приведение к виду $a_0 > 0$:

$P(\lambda) \to \dfrac{a_1}{a_0} \lambda + 1, \quad 1$ заведомо > 0

(если $a_0 = 0$ то $P(\lambda)$ сразу неуст.: есть корень $\lambda = 0$)

$\Gamma = \left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)$ - теперь всё верно.