

Интегрирование по Фурье

$f(x) \in L_R(-1, 1)$ и ум. непрерывна

L_R -адв. интегр., т.е. $\int_{-1}^1 f(x) dx$ адв. с.х.

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \sin \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad - \text{коэф-ты Фурье}$$

Лемма Римана

$$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos tx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

I - проме.

$$\int_I f(t) \sin tx dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие: $f(x) \in L_R(-1; 1) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

$$\text{Фун. ряд } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{1} + b_n \sin \frac{\pi n x}{1} \right] - \text{ряд Фурье } f(x)$$

Обсужда

1. Если $f(x)$ нечётно, то $a_n = 0$

Если $f(x)$ чётно, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - непрерывна \Rightarrow интеграл Римана даёт по модулю ошибку порядка 1

Дополнительное условие разрывности в п. Фурье (следствие из пр. Лейбница)

1. $f(x) \in L_R(-1; 1)$, ум. непрерывна

В т. x_0 имеет конечные односторонние пределы $f_+'(x_0)$ и $f_-'(x_0)$.

Тогда ряд Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Пусть $f(x) \in L_R(-1; 1)$, ум. непрерывна

x_0 - т. разрыва 1 рода, \exists конечные "ободуженные" односторонние

пределы:

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда ряд Фурье в т. x_0 сходится к ср. арифм. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



Число $l = \pi$, тогда $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Задача 1

Разложить в р. Фурье $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

р. суммируется через среднее.



Ф-ия нечет. $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \, dt \quad \text{— чет нечет, ф-ия}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign} t \sin nt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не св-ся равномерно с.х. на всей прямой, т.е. сумма его разбегается

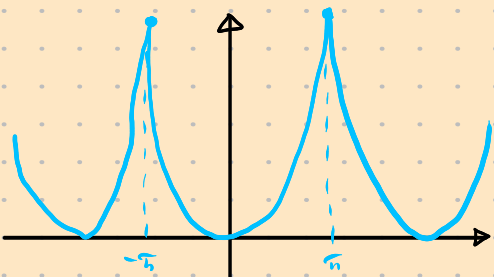
(р/н с.х. ряд из пер. ф-ии ил. пер. сумм).

Задача 2

$f(x) = x^2$ на $-\pi < x < \pi$

с.х-ца в $\forall \pi$, но \neq абсолютна

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Досл. як р/н cx. р. Фур'є

$f(x) \in L_R[-1; 1]$, непер. зл, у якого - непер. на $[-1; 1]$.

($f(x)$ непер. на $[-1; 1]$, $f'(x)$ екстрем. - непер. на $[-1; 1]$, т.е. єдине значення
т. розрива і поже). Тоді р-Фур'є $f(x)$ cx. р/н на всій числовій прямій.

Узгляньмо: якщо $f'(x)$ непер. вогнут на проміжку, то у ній не може бути розриву
і поже. Потім у розриві о павн. cx. р-Фур'є б о. розрива $f'(x)$ не непер.

Розв. Ф. x^2 cx. р/н на $(-\infty; +\infty)$.

Удл. 22-110

Розв. спр. розв. (для періоду $l=2\pi$)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (1) cx. р/н на $(-\infty; +\infty)$. Тоді це функція

$f(x)$ - непер. зл - непер. Ф-ції, у (1) - р. Фур'є цієї функції.

□ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - р/н cx.

$\Rightarrow f(x)$ непер.

Функція р/н cx. розв. уз непер. Ф-ції - непер. Ф-ції.

Унеї непер. зл - зл.

Р/н cx. розв. уз непер. Ф-ції на деякій інтервалі можна помітно інтер-
валі.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Якщо р/н cx. розв. згортає на Ф-ції, то отримаємо р/н cx.

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx), \quad m \text{ фіксовано}$$

- cx. р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt \right) =$$

$\stackrel{0}{=} \text{ якщо } n \neq m \quad \stackrel{0}{=}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt$$

Ортогональные функции $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ в пространстве функций на отрезке $[-\pi; \pi]$ со скалярным произведением $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

■

Задача 22-111

Дать в явном виде?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ — ряд сч. п/н на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ряд Фурье с членом $\cos nx$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ — расходится $\nrightarrow 0 \Rightarrow$ не р. Фурье

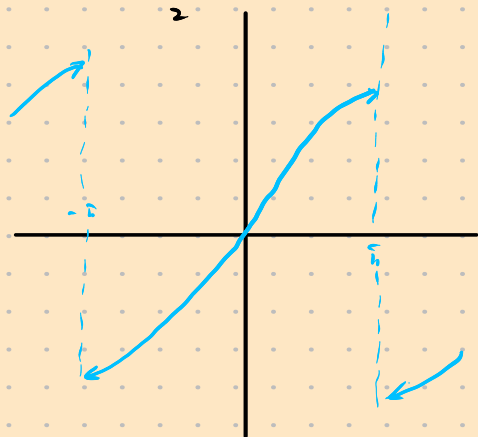
Задача 4

$f(x) = x \cos x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ — нечетная, $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t) \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \, dt + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \, dt \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad \text{— } b_n \text{ при } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{При } n=1 \quad b_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} \, dt \right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$



Ряд сч. не п/н

$$x \cos x = -\frac{\pi}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на $(-\pi; \pi)$

