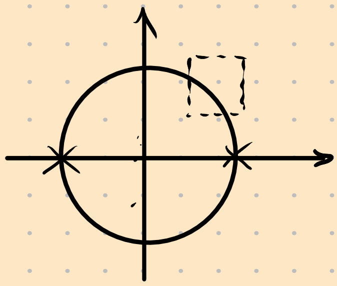
# Глава XVIII

## Неявные ф-ии и экстремумы ф-ий многих переменных

### §1. Теорема о неявной ф-ии

$F(x,y)=0$

$x^2+y^2=1$ – не задаёт явной ф-ии



**Теорема**

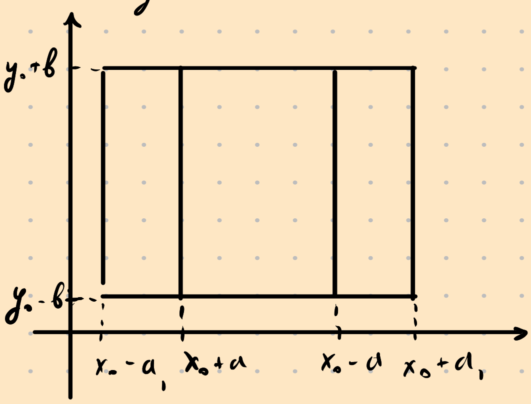
Пусть ф-ия 2-х переменных дифф. в $U(x,y)$. $F(x_0,y_0)$,
$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тогда $\exists\, \Pi=\{x_0-a<x<x_0+a,\ y_0-b<y<y_0+b\}$
в к-ром ур-е $F(x,y)=0 \iff y=f(x)$.

· $f(x)$ непр. дифф. на $(x_0-a,\ x_0+a)$ и $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ на $(x_0-a,\ x_0+a)$

**Д-во**

① Не наруш. общ., $F'_y(x_0,y_0)>0$.

По лемме о сохр. знака, $\exists$ окр-ть $(x_0,y_0)$ (в виде прямоуг.
$\tilde{\Pi}=\{x_0-a_1\le x\le x_0+a_1,\ y_0-b\le y\le y_0+b\}$), причём такая, что
$F'_y>0$ в $\tilde{\Pi}$.




$\varphi(y)=F(x_0,y)$

$\varphi(y_0)=0,\quad \varphi'_y=F'_y(x_0,y)>0,\ y\in[y_0-b,\ y_0+b]$

$\varphi(y)\uparrow$ строго

$\varphi(y_0+b)>0,\quad \varphi(y_0-b)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x_0,\ y_0+b)>0$

$F(x_0,\ y_0-b)<0$

По лемме о сохр. знака (для $F$) $\exists A:\ \forall x\in(x_0-a,\ x_0+a)$ $\begin{cases}F(x,\ y_0-b)<0\\ F(x,\ y_0+b)>0\end{cases}$

Зафикс. $x^*\in[x_0-a,\ x_0+a]$

$\psi(y)=F(x^*,\ y)$

$\psi(y_0+b)>0,\quad \psi(y_0-b)<0$

По т. Б-К, $\exists\, y^*\in[y_0-b,\ y_0+b]:\ \psi(y^*)=0$

$\psi'(y)=F'_y(x^*,y)>0 \Rightarrow \psi(y)\uparrow$ строго $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Тогда: $\psi(y^*)=0$ - единств.

$\forall x^* \in [x_0-a, x_0+a]\ \exists!\ y^* \in [y_0-b, y_0+b]$

$F(x^*, y^*)=0$

$y^* = f(x^*)$ Первая т. доказана

② Пусть $x \in [x_0-a, x_0+a]$, $y=f(x)$.

$F(x, y)=0$

$\Delta x$ – прираш. $x$, $\Delta y$ – соотв. прираш. $y$.

$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$

По т. Лагранжа для ф-ии неск. пер-ых,

$0 = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y) = F'_x(x+\xi\Delta x, y+\xi\Delta y)\cdot\Delta x + F'_y(x+\xi\Delta x, y+\xi\Delta y)\Delta y,$

$\xi = \xi(\Delta x, \Delta y)$

$0<\xi<1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x+\xi\Delta x, y+\xi\Delta y)}{F'_y(x+\xi\Delta x, y+\xi\Delta y)}$$

$\Pi = \{x_0-a < x \le x_0+a,\ y_0-b < y < y_0+b\}$

$\bar{\Pi} = \{x_0-a \le x \le x_0+a,\ y_0-b \le y \le y_0+b\}$

$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=f(x)$ на $\bar{\Pi}$.

$\bar{\Pi}$ – компакт, т.е. $|F'_x| \le \alpha$ – огр.

$F'_y \ge \beta > 0$ – достиг. inf.

$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \le \frac{\alpha}{\beta} = M$

$|\Delta y| \le M|\Delta x|$

$y=f(x)$ огр. на $[x_0-a, x_0+a]$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \varepsilon>0 \to \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0)$

Тогда $f$ – равномерно непр. на $(x_0-a, x_0+a)$.

По т. о суперпозиции непр. ф-ии

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ – непр. ЧТД

Теорема (общая)

① Пусть ф-ия $n+1$ переменной $F(x_1, \dots, x_n, y)$ непр. дифф. в нек-рой окр-ти т. $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, причём $F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$, $F'(x_1^0, \dots, x_n^0, y) \neq 0$. Тогда $\exists$ параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a,\ i = 1, \dots, n,\ \ y^0 - b < y < y^0 + b\}$,

в к-ром $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \dots, x_n)$.

② $f$ непр. дифф. в $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a,\ i = 1, \dots, n\}$, причём в $\Pi'$

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_y(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Д-во:

① Док. также, только $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

② Отличается:

По т. Лагранжа для ф-ии многих пер.:

$$0 = F(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) - F(x_1, \dots, x_n, y) =$$

$$= F'_{x_1}(x_1 + \xi \Delta x_1, \dots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y)\Delta x_1 + \dots +$$
$$F'_{x_n}(x_1 + \xi \Delta x_1, \dots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y)\Delta x_n +$$
$$F'_y(x_1 + \xi \Delta x_1, \dots, x_n + \xi \Delta x_n, y + \xi \Delta y)\Delta y$$

$$\Delta y = -\frac{F'_{x_1}\Delta x_1 + \dots + F'_{x_n}\Delta x_n}{F'_y} \leq \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\beta} = M_\rho \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i,\ |F'_y| \geq \beta)$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ равном. непр. на $\bar{\Pi}'$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \Delta y = 0$$

Пусть $\Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \xi \Delta x_1, x_2, \dots, x_n, y + \xi \Delta y)}{F'_y(x_1 + \xi \Delta x_1, x_2, \dots, y + \xi \Delta y)}, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \dots = -\frac{\partial f}{\partial x_1}, \text{ аналог. для } x_2, \dots, x_n.$$

ЧТД.

## § 2. Теорема о сис-ме неявных ф-ий

Отобр. $u = u(x)$, $u \in R^m$, $x \in R^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \text{ — дифф. ф-ии}$$

Матрица Якоби — $D_u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$

Если она квадратная, то сущ-ет определитель — Якобиан.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|$$

**Теорема** (о системе)

Пусть $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ непр. дифф. ф-ии в окр-ти $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in R^{n+m}$

$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$

$$\left.\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}\right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \ne 0.$$

Тогда $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \ y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset R^{n+m}$

в к-ром $\begin{cases} F_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \iff \bar{y} = f(\bar{x})$, причём ф-ии

$y_i = f_i(\bar{x})$, $i = 1 \dots m$ — непр. дифф. на

$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$

## § 3. Теорема об обратном отображении.

$\varphi : R^n \to R^m$, дифф.

$\bar{u} = \varphi(\bar{x})$

Было доказано: если $\varphi : R^n \to R^m$, $F : R^m \to R^p$, тогда

$D_{F \circ \varphi} = D_F \cdot D_\varphi$.

Если есть $\bar{x} \in R^n$, $\bar{y} \in R^m$, $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$, то

$D_{F\varphi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\varphi|_{\bar{x}}$

Пусть $n = m = p$, тогда

$J_{F\varphi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\varphi|_{\bar{x}}$

Обратное отобр.:

$\Phi : G \to D \qquad G, D \subset \mathbb{R}^n$

$\Phi^{-1} : D \to D$

$\Phi\Phi^{-1} = \Phi^{-1}\Phi$ – тождественное отобр.

$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1}$ – если оба дифф.!

Если отобр. биективно и дифф., то обратное не обязано быть дифф.!

$n=1$:

$y = x^3$ – биект., дифф.

обратное недифф. в т. 0.

Биективность отобр.

$\not\Downarrow \quad \not\Downarrow$

$J \neq 0$

Опред.

Отобр. $\Phi$ – локально обратимо в обл-ти $G$, если $\forall \bar{x}_0 \in G \to \exists \delta > 0 : \Phi$ обратимо в $U_\delta(\bar{x}_0)$.

**Теорема об обратном отобр-ии**

Пусть $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$ непр. дифф. и $J_\Phi \neq 0$ в $G$ $(G \subset \mathbb{R}^n)$. Тогда $\Phi$ локально обратимо:

$\forall x_0 \in G \to \exists \Phi^{-1}$ – непр. дифф. обр. отобр. в $y_0 = \Phi(x_0)$.

Д-во:

Рас-им $F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j$, $j = 1 \dots n$

$(y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$

Оно непр. дифф. $\forall (y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$ такой, что $x \in G$, $y \in \mathbb{R}^n$

$\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1 \dots n$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y_0, x_0)$$

По т. о сис-ме неявных ф-ий $\exists \Pi = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i,\ x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

в к-рой

$y_j = \Phi_j(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1,\dots,y_n, x_1,\dots,x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1,\dots,y_n)$

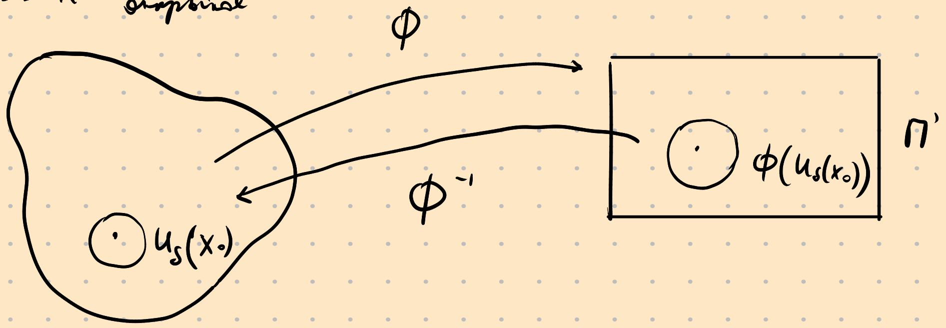
$f_i$ непр. дифф. на $\Pi' = \{ y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i \} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ биективно отображает нек-е мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ на $\Pi'$.

$X = \Phi^{-1}(\Pi')$

$\Pi'$ - откр. мн-во, полный прообраз откр. мн-ва при непр. отобр. есть откр. мн-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow X$ - открытое




$X = \Phi^{-1}(\Pi')$

$\forall x_0 \in X \to \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \in X$

$\forall x_0 \in X \to \exists U_\delta(x_0)$ в к-рой отобр. яв-ся обратимым. ЧТД

## §4. Экстремумы ф-ий нескольких переменных

**Опр-е**

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ наз-ся точкой макс. локального экстремума ф-ии $y = f(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x)$ опред. в $U_\delta(x^0)$ и $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0)$.

Аналогично для мин. лок. экстр.

**Необходимое усл. локального экстремума**

Если $f(x)$ дифф. в $x^0$ и $x^0$ яв-ся т. лок. экстр., то $df(x^0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$ (стационарные точки)

Д-во:

Рас-им ф-ию $\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Ясно, что $x_1^0$ - лок. экстремум того же типа. Тогда

$\frac{d\varphi}{dx_1}(x_1^0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 0$ Аналогично далее

ЧТД

$$K(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Положит. опред.: $\forall x \neq 0 \to K(x) > 0$

Отриц. опред.: $\forall x \neq 0 \to K(x) < 0$

Неопред.: $\exists x_1, x_2 : K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Положит. полуопред.: $\forall x - K(x) \geq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Отриц. полуопред.: $\forall x - K(x) \leq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Если $K(x) \equiv 0$, то она положит. и отриц. полуопред., больше пересечений типов нет.

Пусть $f$ дважды непр. дифф. в $G \in \mathbb{R}^n$, т.е. имеет все непр. частные произв. второго порядка, при этом ч.п. в разном порядке совп. $(f''_{yx} = f''_{xy})$

$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_i}(x^0)\, dx_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} f''_{x_i x_j}(x^0)\, dx_i dx_j$ – кв. форма от вектора $(dx_1, \dots, dx_n)$

## Достаточное усл-е локального экстремума

Пусть $f(x)$ дважды непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$ и $x^0$ – стац. точка. Тогда $K(x) = d^2 f(x^0)$ – кв. форма. Тогда:

1. если $K(x)$ положит. определена, то $x^0$ – т. строгого лок. максимума
2. если $K(x)$ отриц. опред., то $x^0$ – т. строгого лок. минимума
3. если $K(x)$ неопред., то $x^0$ не яв-ся т. лок. экстремума.
4. если $K(x)$ полуопред., то нужно доп. исследование.

Лемма

Пусть $K(x)$ в $\mathbb{R}^n$ положит. опред., тогда $\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \to K(x) \geq C|x|^2$

Если отриц. опред., то $\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \to K(x) \leq -C|x|^2$

Д-во 1 пункта:

Заметим, что $K(x)$ можно определить в точечном $\mathbb{R}^n$, т.е. $K(x)$ – значение на векторе с такими же координатами.

$K(x_1, \dots, x_n)$ – непр. на $\mathbb{R}^n$.

$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ – огр. и замкнутое. – компакт

Тогда ф-ия, непр. на компакте, достигает inf на $S$.

$K(x) > 0$ на $S \Rightarrow \inf\limits_S K = C > 0$.

$\forall x \in S \to K(x) \geq C$.

Пусть $x \neq 0 \in R^n$. Рас-им $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$

$K(x) \geq C|x|^2$ ЧТД

Д-во теоремы

1. $f(x)$ дважды непр. дифф в $U_\delta(x^0) \Rightarrow$ применим ф-лу Тейлора (Пеано):

$\forall x \in U_\delta(x^0) \to f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho^2)$, $\rho^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$

$df \equiv 0$ – т. стац.

$d^2 f$ – полож. опред.

Т.е. $f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2} C|dx|^2 + o(|dx|^2) =$

$= f(x^0) + \frac{C}{2}|dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$

$= f(x^0) + |dx|^2 \cdot \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx)\right)$

$dx \to (0, \dots, 0)$

$\lim\limits_{dx \to (0,\dots,0)} \varepsilon(dx) = 0$

$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0$ в $U_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0)$ $\forall x \in U_\delta(x^0)$.

Т.е. $x^0$ – т. строгого лок. минимума.

2. Аналогично

3. $d^2 f(x^0)$ – неопр. кв. форма.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$.

Рас-им векторы приращений $dx = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ (приращ. $\parallel z$).

$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2}}_{\beta > 0} |z|^2$

$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2}\beta |z|^2 + \varepsilon(dx)\lambda^2 z^2 =$

$= f(x^0) + \frac{1}{2}\beta + \varepsilon(dx)\lambda^2 z^2$

$\frac{1}{2}\beta + \varepsilon(dx)\lambda^2 z^2 > 0$ при дост. малых $\varepsilon(dx)$

Т.е. $f(x) > f(x^0)$ на $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Аналогично если $dx = \lambda z'$, то при достаточно малых $\varepsilon(dx)$ $f(x) < f(x^0)$.

$x^0$ – не т. лок. экстремума.

Пример: $z = x^4 + y^4$, $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$, стац. т. $(0,0)$, $z''_x = 12x^2$, $z''_y = 12y^2$, $z''_{xy} = 0$, $d^2 z(0,0) = 0$.

Надо смотреть $\Delta z(0,0)$: $z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) > 0$ если $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$ — лок. мин.

## § 5. Условный (относительный) экстремум

$z = xy$ (седло)

$z_x' = y$, $z_y' = x$ (ст. т. $(0,0)$)

$z''_{xx} = z''_{yy} = 0$, $z''_{xy} = 1$

$d^2 z$ — неопр. кв. ф. — нелок. экстр.

При усл. $x + y = 1$: $z = x(1-x)$, лок. макс. в $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Опр

Т. $x^0$ наз-ют т. строгого условного минимума ф-ии $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ при выполнении условия связи $\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_m(x) = 0$, если $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x^0)$ при вып. усл. связи $\to f(x) > f(x^0)$

Если из усл. связи можно явно выразить одни переменные через другие, то возникнет задача на обычный экстремум ф-ии меньшего числа переменных.

А если нет, то применяется ф-ия Лагранжа.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}^m$, тогда ф-ия Лагранжа $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(x)$

При вып. усл-я связи $\mathcal{L} = f$, $\forall \lambda_i$ — усл. экстр. $f$ и $\mathcal{L}$ совпадают.

### Необходимые усл-ия относ. экстремума

Пусть $f(x)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 1 \ldots m)$ непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$. Пусть $x^0$ — т. относ. экстремума $f(x)$ при $\varphi_i(x) = 0$, причём $rg\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}} = m$ (градиенты ф-ий $\varphi_i$ линейно независимы).

Тогда $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m$: $x^0$ — т. обычного экстремума $\mathcal{L}(x)$.

Необх. решить сис-му $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \ldots = \varphi_m = 0 \end{cases}$ — сис-ма $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв. $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Д-во:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad rg\, \Phi = m, \quad x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

∃ минор порядка n ≠ 0. Для опр-ти 1-й минор:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$$ в т. $x^\circ$ => в $U_\delta(x^\circ)$ в силу непр.

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

По т. о неявной ф-ии ∃ окр-ть $x^\circ$, в к-рой сис-ма эквивалентна усл. связи:

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_m) \end{cases}$$

$x_{m+1}, \dots, x_n$ − незав. ф-ии

$x_1, \dots, x_m$ − зависимые

Ф-ии $g_i$ непр. дифф. в окр-ти $\tilde{x}^\circ = (x^\circ_{m+1}, \dots, x^\circ_n)$. Продифф. усл. связи:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n \\ \dots \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n \end{cases}$$

$dx_1, \dots, dx_m$ − зав. дифф-лы

$dx_{m+1}, \dots, dx_n$ − незав. дифф-лы

При выполнении усл-ий связи для $f(x)$:

$$f(x)\big|_* = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = f_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)\big|_* = \mathcal{L}(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathcal{L}_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)\big|_* = f(x)\big|_* \quad \forall \lambda_i$$

$$\mathcal{L}_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}) \quad \forall \lambda_i$$

$d\mathcal{L}(\tilde{x}^\circ) = df_0(\tilde{x}^\circ) = 0$ (т.к. это точка относ. экстремума) $\forall \lambda_i$

В силу инвариантности дифф-ла относ. замены переменной:

$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^\circ) = d\left(\mathcal{L}(x)\big|_*\right) \underset{\text{инвариантность формы}}{=} d\mathcal{L}(x)\big|_{**}$ − дифф-ал ф-ии n переменных

(дифф-ал ф-ии n−m пер-ых)

$$d\mathcal{L}(x)\big|_{**} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} dx_m}_{\text{зависим.}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} dx_n}_{\text{независ.}}$$

Для этих пер $\lambda_i$ − произв. Подберём $\lambda_i$ так, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x^\circ) = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}(x^\circ) = 0$.

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^\circ) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^\circ) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^\circ) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^\circ) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^\circ) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^\circ) = 0 \end{cases}$$

− сис-ма лин. ур-ий, её опред.:

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\bigg|_{x^\circ} \neq 0 \Rightarrow \exists!\ \text{реш-е}$$

$\lambda_i$ найдены.

При найд. $\lambda_i$:

$$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x_1}(x^0)dx_1}_{=0} + \ldots + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}(x^0)dx_m}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}}(x^0)dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(x^0)dx_n$$

Но $d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = 0$, $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ - произв. $\Big\} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}}(x^0) = \ldots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(x^0) = 0 \Rightarrow$ при найд. $\lambda_i$ $x^0$ - стац. т. ф-ии Лагранжа.

ЧТД

Для проверки необх. усл-я относ. экстремума нужно решить сис-му:

$$(\text{I}) \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \ldots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

$n+m$ ур-ий, $n+m$ неизв.

## Достаточное условие относительного экстремума

Пусть $f(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1,\ldots,m<n$ - дважды непр. дифф. ф-ия в окр-ти $x^0$, причём ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ равен $m$ в т. $x^0$.

Пусть коор-ты $x^0$ и $\lambda_i$, $i=1\ldots n$ удовл. сис-ме (I). Тогда в т. $x^0$ расс-ивается квадр. форма $d^2\mathcal{L}(x^0)\Big|_{**}$ - кв. форма от $n-m$ незав. дифф. (обозначение те же, что и в док-ве пред. теоремы).

Тогда если эта форма положит. опред., то $x^0$ - т. строгого усл. минимума $f$ при вып. (*)

отриц. опред., то $x^0$ - т. строгого усл. максимума $f$

неопред., то $x^0$ - не яв-ся т. относ. экстремума.

**Примечание** Если $d^2\mathcal{L}(x^0)$ - полож. или отриц. опред. форма $n$ дифф-ов (до подстановки), то после подстановки (**) она такой останется.

Иначе нужно делать подстановку (**).

Если после подстановки (**) форма полуопред., нужно доп. исследование.

**Пример:** $f = xy$ при усл. $x+y=1$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(x+y-1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2},\quad x = y = \frac{1}{2}$$

$L''_{x}=0, \quad L''_{y}=0 \qquad d^2L = 2dxdy$ — неопр. кв. форма от $dx, dy$

Продифф. ур. связи: $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$

$d^2L|_{x^*} = -2dx^2$ — отриц. опред. кв. форма от одного $dx$

Значит $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — усл. минимума.

**Справка** $d^2f$ не обл-ет инв. формой относ. замены переменных:

$f = f(x_1,\dots,x_n)$ — дважды непр. дифф.

$d^2f = d(df) = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^{n} dx_k\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2x_k + \sum_{k=1}^{n} dx_k \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\right) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2x_k$

Если $x_1,\dots,x_n$ — незав. переменные, то $d^2x_k = 0$

$d^2f = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} dx_k + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$

Это замечание имеет место также в том случае, если $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ в нек-ой т. (в стац. т.) — квазиинвариантность формы $d^2f$ относ. замены пер-ых в стац. точке

D-во

Сохраняем все выводы и обозн-я пред. теоремы.

Докажем, что $\begin{matrix} x_1 = g_1(x_{m+1},\dots,x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1},\dots,x_n)\end{matrix}$ — дважды непр. дифф. в окр-ти $\tilde{x}^0$

$\varphi_i(g_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,g_m(x_{m+1},\dots,x_n), x_{m+1},\dots,x_n) = 0 \qquad (i=1\dots m)$

Продифф. рав-во по $x_j$:

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial g_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_m}\cdot\frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \qquad i=1\dots m$

При фикс. $j$, $m+1 \le j \le n$ — это сис-ма $m$ лин. ур-ий с $m$ незав. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

$\Delta = \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{D(x_1,\dots,x_m)} \ne 0$ в окр-ти $\tilde{x}^0$

Выраж. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ через $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$, знамен. $\ne 0$

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ непр. дифф. $\Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ непр. дифф. $\Rightarrow g_i$ — дважды непр. дифф. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно писать $d^2$ с соотв. ур-ями

В силу квазиинв-ти формы $d^2L(x^0)$ (все $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^0) = 0$)

$$d^2 \mathcal{L}(x^0) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$ (незав. от того, яв-ся $dx_j dx_k$ дифф-лами незав. перемен-ных или дифф-лами ф-ий).

$$\mathcal{L}(x)\Big|_{*} = \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0)$$

в силу инвариантн.

$$d^2 \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d^2\left(\mathcal{L}(x^0)\Big|_{*}\right) = d^2 \mathcal{L}(x^0)\Big|_{**}$$

второй диффер. ф-ии n-m пер-ых; второй дифф. ф-ии n перем-ых

$$\| $$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}(x^0)\Big|_{**} = 0$$ (в силу сис-мы I) $\Rightarrow \tilde{x}^0$ - стац. т. $f_0(\tilde{x}^0)$

Характер экстремума в этой т. опред. кв. формой

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 \mathcal{L}(x^0)\Big|_{**}$$

Характер экстремума опред. знакоопр. этой формы.

ЧТД

# Глава XIX

# Кратные интегралы

## §1. Определение. Критерий интегрируемости Дарбу.

Пусть $G$ - измеримое мн-во, $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \varnothing$.

$R$ - разбиение $G$ на произв. изм. мн-ва $G_i$: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_i$

$\forall i \neq j \to \mu(G_i \cap G_j) = 0$

Мелкость разбиения $|R| = \max\limits_{i=1\dots N} \operatorname{diam} G_i$

Считаем, что $f(x)$ опр. на $G$. Рас-им $M_i = \sup\limits_{G_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{G_i} f(x)$

**Опр-е**

Верхняя и нижняя суммы Дарбу:

$$S^*_R = \sum_{i=1}^{N} M_i \, \mu G_i \qquad S_{*R} = \sum_{i=1}^{R} m_i \, \mu G_i$$

Сумма Римана

$\forall i = 1 \dots N \to \xi_i \in G_i$

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \, \mu G_i$$

Для фикс. $R_M$: $S_{*R} \leq \sigma_R \leq S^*_R$

Колебания ф-ии

$$\omega_R = S^*_R - S_{*R} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \, \mu G_i, \quad \omega_i = M_i - m_i$$

Разбиение $R_2$ следует за $R_1$ $(R_2 \geqslant R_1)$ $\Leftrightarrow$

$R_1$: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N_1} G_i$ $\qquad \forall G_i$ - объединение нескольких из $G_j$

$R_2$: $G = \bigcup\limits_{j=1}^{N_2} G_j$

**Утв**

Если $R_2 \geqslant R_1$, то

$$S^*_{R_2} \leq S^*_{R_1}, \quad S_{*R_2} \geqslant S_{*R_1}, \quad \omega_{R_2} \leq \omega_{R_1}.$$

Д-во: (как в 1D)

Достаточно рас-еть случай, когда одно из мн-в $R_1$ разбивается надвое:

$G_i = G_i' \cup G_i''$, $\mu(G_i' \cap G_i'') = 0$

Любой другой случай получается повторным применением этого.

$M_i' = \sup\limits_{G_i'} f(x) \qquad M_i'' = \sup\limits_{G_i''} f(x) \qquad M_i = \sup\limits_{G_i} f(x)$

$M_i \mu G_i = M_i \mu G_i' + M_i \mu G_i'' \geq M_i' \mu G_i' + M_i'' \mu G_i''$

Все ост. слагаемые в $S^*_{R_1}$ и $S^*_{R_2}$ совпадают $\Rightarrow S^*_{R_1} \geq S^*_{R_2}$

Аналогично для нижних сумм.

$\omega_{R_2} = S^*_{R_2} - S_{*R_2} \leq S^*_{R_1} - S_{*R_1} = \omega_{R_1}$ ЧТД

Введём понятие $\max(R_1, R_2)$ — получается из всевозм. $G_i \cap \tilde{G}_j$

$\max(R_1, R_2) \geq R_1, \quad \max(R_1, R_2) \geq R_2$

**Лемма**

$\forall R_1, R_2 \rightarrow S^*_{R_1} \geq S_{*R_2}$

Д-во:

$R = \max(R_1, R_2) \Rightarrow R \geq R_1, R_2$

$S^*_{R_1} \geq S^*_R \geq S_{*R} \geq S_{*R_2}$ ЧТД

**Определение**

Пусть $f(x)$ — огр. на измеримом мн-ве $G \subset \mathbb{R}^n$. Рас-им $I^* = \inf\limits_R S^*_R$, $I_* = \sup\limits_R S_{*R}$ (инф. и суп. по всем разбиениям). Это — верхний и нижний интегралы Дарбу.

Если $I^* = I_* = I$, то $f(x)$ наз-ся интегрируемой на $G$, а $I$ — кратный интеграл Римана $f(x)$ по $G$: $I = \int\limits_G f(x)\,dx$

Очевидно: $-\infty \overset{(1)}{<} I_* \overset{(2)}{\leq} I^* \overset{(3)}{<} +\infty$

(2) следует из пред. леммы: $S^*_{R_1} \geq S_{*R_2} \Rightarrow \inf\limits_{R_1} S^*_{R_1} \geq \sup\limits_{R_2} S_{*R_2}$

(3) следует из того, что $I^* \leq S^*_R$ для нек-го $R$, аналогично (1)

**Критерий Дарбу интегрируемости**

Пусть $f(x)$ огр. на изм. $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда равносильны:

1. $f(x)$ интегрируема на $G$.

2. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists$ разбиение $R$ мн-ва $G$: $\omega_R < \varepsilon$

3. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: $\forall$ разбиения $R$, $|R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$

Д-во:

$(3) \Rightarrow (2)$ – очевидно

как раньше

$(2) \Rightarrow (1)$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \to \exists R: \omega_R < \varepsilon$

как раньше

$\forall$ разб. $R \to S_{*R} \leq I_* \leq I^* \leq S^*_R$.

$0 \leq I^* - I_* \leq S^*_R - S_{*R} = \omega_R$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R: \omega_R < \varepsilon \Rightarrow I^* - I_* < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ – любое $\Rightarrow I^* = I_* \Rightarrow f(x)$ инт

$(1) \Rightarrow (2)$ $\quad$ Пусть $f(x)$ – инт. на $G$.

как раньше

$I^* = \inf\limits_R S^*_R = I_* = \sup\limits_R S_{*R} = I$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R_1: S^*_{R_1} < I + \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad$ $\forall \varepsilon > 0 \to \exists R_2. S_{*R_2} > I - \frac{\varepsilon}{2}$

$R = \max(R_1, R_2)$

$S^*_R \leq S^*_{R_1} < I + \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad$ $S_{*R} \leq S_{*R_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\omega_R = S_R - S_{*R} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R: \omega_R < \varepsilon$

$(2) \Rightarrow (3)$: Предварительно докажем 4 леммы.

**Определение**

Пусть $X, Y$ – два непустых мн-ва в $\mathbb{R}^n$.

$\rho(X, Y) = \inf\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y)$ – расстояние между мн-вами.

Если $X \cap Y \neq \varnothing$, то $\rho(X, Y) = 0$. Обратно неверно.

**Лемма 1**

Пусть $F_1, F_2$ – 2 компакта в $\mathbb{R}_n$, $\rho(F_1, F_2) = 0$. Тогда $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$.

Следствие: если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\rho(F_1, F_2) > 0$

Д-во:

Пусть $\rho(F_1, F_2) = 0$.

$\forall \varepsilon>0 \to \exists x\in F_1,\ y\in F_2:\ \rho(x,y)<\varepsilon$

$\forall n=1,2,\dots \to \exists x_n\in F_1,\ y_n\in F_2:\ \rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$

Т.к. $F_1$ – огр. (компакт в $\mathbb{R}^n$), то $x_n$ – огр. пос-ть, по т. Больцано-Вейерштрасса

$\exists x_{n_k}: x_{n_k}\to x_0$ (сходится), причём $F_1$ – замкнуто $\Rightarrow x_0\in F_1$.

$$\rho(y_{n_k},x_0)\le \underbrace{\rho(y_{n_k},x_{n_k})}_{<\frac{1}{n_k}\to 0}+\underbrace{\rho(x_{n_k},x_0)}_{\to 0 \text{ при } k\to\infty} \Rightarrow y_{n_k}\to x_0.$$

$F_2$ – замкнуто $\Rightarrow x_0\in F_2$. $x_0\in F_1\cap F_2\ne\varnothing$. ЧТД

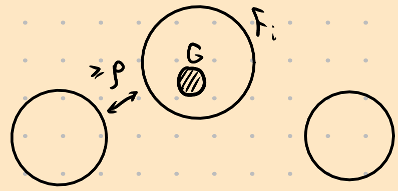
**Замечание** использовалась ограниченность только $F_1$. $F_2$ всего лишь замкнуто.
Если оба замкнуты, но не огр., лемма может не выполняться.

**Лемма 2**

Пусть $F_1,\dots,F_n,\ G\subset\mathbb{R}^n$, $\forall \underset{i\ne j}{i,j}=1\dots N \to \rho(F_i,F_j)=\rho_{ij}\ge\rho>0$

$\operatorname{diam} G<\rho$

Тогда если $G\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}F_i$, то $\exists j: G\in F_j$.




Док-во

Пусть $\exists x_0\in G,\ x_0\in F_i$
$\exists y_0\in G,\ x_0\in F_j$, $i\ne j$

$x_0, y_0\in G \Rightarrow \rho(x_0,y_0)<\rho$

$x_0\in F_i,\ y_0\in F_j \Rightarrow \rho(x_0,y_0)\ge\rho(F_i,F_j)\ge\rho$

Противоречие. ЧТД

**Лемма 3**

Пусть $G$ – огр. мн-во в $\mathbb{R}_n$. Тогда $\forall\varepsilon>0\to\exists S\supset G$, $S$ – клеточное и открытое:

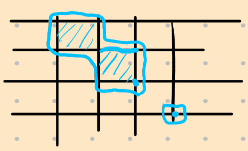
$mS<\mu^*G+\varepsilon$

Д-во

Сущ-е клеточного $S$ следует из опр-я клеточной меры:

$\mu^*G=\inf mS$, $S$-клет., $S\supset G$

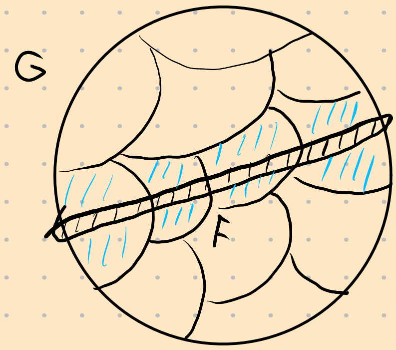
Почему $S$ можно выбрать открытым? $\exists$ клеточ. $S_1$: $mS_1<\mu^*G+\frac{\varepsilon}{2}$



Тогда $\exists S$ – клет. и откр. очень близкого размера: $mS<mS_1+\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow mS<\mu^*G+\varepsilon$ ЧТД

## Лемма 4




Пусть $G$, $F$ - изм. мн-ва в $\mathbb{R}^n$, $\mu F < \varepsilon$.

Тогда $\exists \delta > 0$: $\forall$ разб. $R$ мн-ва $G$, $|R| < \delta \to$

$$\to \sum_{G_i \cap F \neq \emptyset} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \cdot \varepsilon$$

Д-во

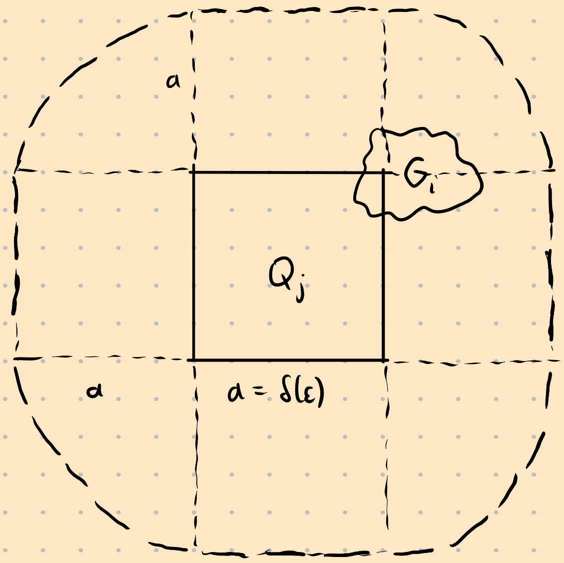
По лемме 3 $\exists S \supset F$ - клет. откр.: $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$

Причём $S$ состоит из клеток ранга $K = K(\varepsilon)$.

$\overline{S} = \bigcup_{j=1}^{N_1} \overline{Q}_j$, $Q_j$ - куб с ребром $a = a(\varepsilon)$ $\quad \left(a = \frac{1}{2^k}\right)$

$\delta(\varepsilon) = a$.

Рас-им разбиение $G$, $|R| < \delta$.




$$\sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \emptyset} \mu G_i \leqslant 3^n \mu \overline{Q}_j$$

$$\sum_{G_i \cap F \neq \emptyset} \mu G_i \leqslant \sum_{G_i \cap S \neq \emptyset} \mu G_i \leqslant \overbrace{\sum_{j=1}^{N_1} \sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \emptyset} \mu G_i}^{\text{по всем } Q_j} \ \varepsilon$$

Одни и те же $G_i$ могут пересекаться с разными $Q_j$.

$$\varepsilon \ 3^n \sum_{j=1}^{N_1} m\overline{Q}_j = 3^n \cdot mS < 3^n \cdot 2\varepsilon$$

ЧТД

## (2) => (3)

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R_0: \omega_{R_0} < \varepsilon$

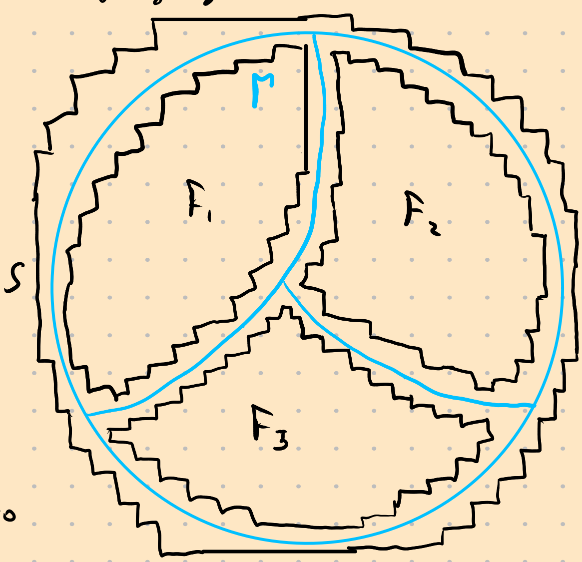
$R_0$: $G = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j^0$, $\omega_{R_0} = \sum_{j=1}^{N_0} \omega_j^0 \cdot \mu \cdot G_j^0$, $\mu(G_i^0 \cap G_j^0) = 0$, $i \neq j$

Не умаляя общности, $G_i^0 \cap G_j^0 = \emptyset$, $i \neq j$

Если есть какие-то мн-ва нулевой меры, отнесём к одному из мн-в.

$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_0} \partial G_j^0$

По лемме 3, $\exists$ откр. клет. $S \supset \Gamma$: $mS < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n}$




$\mu\Gamma = 0$ по крит. измеримости и в силу конечной аддитивности меры Жордана.

$M = \sup_G |f(x)|$

Т.к. $\Gamma \subset S$, то $\forall j \to \partial G_j^0 \subset S$

Рас-им $F_j = G_j^0 \setminus S = \underset{\text{замкнуто}}{\overline{G}_j^0} \setminus \underset{\text{открыто}}{S} \Rightarrow F_j$ - замкнуто

$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j^\circ \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$ ; Среди $F_j$ могут быть пустые.

(т.к. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B)$)

Будем считать, что непустые есть, в сумме оставим только их.

Тогда рас-им $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$ (т.к. $F_i, F_j$ - непересек. компакты)

Рас-им $\rho = \min_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$.

По лемме 4 т.к. $mS < \frac{\varepsilon}{8M3^n}$, то $\exists \delta_1 : \forall$ разб. $R$, $|R| < \delta_1 \to \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i < \frac{\varepsilon}{8M3^n} \cdot 2 \cdot 3^n = \frac{\varepsilon}{4M}$

$\delta = \min(\delta_1, \rho)$.

Рас-им любое разбиение $R$ мн-ва $G$ такое, что $|R| < \delta$.

Рас-им дмнс. мн-во разбиения $G_i \subset G \setminus S$ (i.e. $G_i \cap S = \varnothing$)

$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$ ; $\operatorname{diam} G_i \leq |R| < \delta \leq \rho$

$\forall i \neq j$ $\rho_{ij} \geq \rho$, тогда по лемме 2 $\exists j : G_i \subset F_j \subset G_j^\circ$

$R_1 = \max(R, R_0)$

$\sum_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i \leq \omega_{R_1} \leq \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad$ $\sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \omega_i \mu G_i \leq 2M \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i = 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$

Оконч.: $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 : \forall R, |R| < \delta \to \omega_R = \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \omega_i \mu G_i + \sum_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i < \varepsilon$

Если все $F_j$ пустые, то $G \subset S$ и вторая сумма отсутствует.

ЧТД

## Определение

Суммы Римана: Пусть $f$ огр. на изм. мн-ве $G$, $\exists R : G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$,

$G_i$ - изм., $\mu(G_i \cap G_j) \underset{i \neq j}{=} 0$

Возьмём $\xi_i \in G_i$, $\sigma_R = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \mu G_i$

## Критерий Римана

$f$ интегр. на изм. мн-ве $G$ <=> $f$ огр. на $G$ и $\forall$ пос-ти разбиений $R_k$, $|R_k| \to 0$,

при любом выборе $\xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)}$

$\lim_{k \to \infty} \sigma_{R_k}(f) = I$ $\qquad$ $\left(I = \int_G f(x)dx\right)$

NB на отрезке ограниченность $f$ следует из усл-ий критерия, с произв. $G$ - нет

Например, $n=1$, $\mu G = 0$, все $\sigma_{R_k} = 0$, но если ф-ия неогр. - то она не интегр.

Д-во

(=>) Если $f$ - инт., то по п.3 крит. Дарбу

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$ (1) $(\delta = \delta(\varepsilon))$

Но $S^*_R \geq \sigma_R \geq S_{*R}$ при любом выборе промеж. точек $(m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i)$

$S^*_R \geq I \geq S_{*R} \Rightarrow \sigma_R - I \leq S^*_R - S_{*R} < \varepsilon$

$R_k$ - посл-ть разбиений, $|R_k| \to 0$

$\forall \delta > 0 \to \exists K_0: \forall k \geq K_0 \to |R_k| < \delta \quad (K_0 = K_0(\delta)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \to \exists K_0: \forall k \geq K_0 \to \omega_{R_k} < \varepsilon \Rightarrow |\sigma_{R_k} - I| \leq \omega_{R_k} < \varepsilon$

(подставляем $R_k$ в (1))

$\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{R_k} = I$

(<=) $\forall R_k, |R_k| \to 0, \forall \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)} \to \lim\limits_{k=\infty} \sigma_{R_k} = I$, $f$ огр.

докажем, что $f$ инт. и $\int\limits_G f(x)dx = I$

Пусть это не так; По п.3 крит. Дарбу:

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \to \exists R, |R| < \delta: S^*_R - S_{*R} \geq \varepsilon$

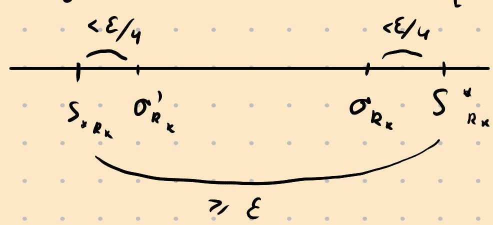
$\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2\ldots$, не нарушая общ-ти, $\mu G > 0$

$\exists \varepsilon > 0: \forall k \to \exists R_k, |R_k| < \frac{1}{k}: S^*_{R_k} - S_{*R_k} \geq \varepsilon \quad (|R_k| \to 0)$

$M_i^{(k)} = \sup\limits_{G_i^{(k)}} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)}: M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{4}$

$S^*_{R_k} - \sigma_{R_k} = \sum\limits_{i=1}^{N_k} (M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)}))\mu G_i^{(k)} < \frac{\varepsilon}{4\mu G} \cdot \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{N_k} \mu G_i^{(k)}}_{=\mu G} = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

Аналогично, $\exists \eta_i^{(k)} \in G_i^{(k)}: \sigma'_{R_k} - S_{*R} < \frac{\varepsilon}{4}$




$\Rightarrow \sigma'_{R_k} - \sigma_{R_k} \geq \frac{\varepsilon}{2}$, но $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{R_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma'_{R_k} = I \Rightarrow \sigma_{R_k} - \sigma'_{R_k} \to 0$

Противоречие. ЧТД

## Свойства интегрируемых ф-ий

1. На $G: \mu G = 0$ любая огр. ф-ия интегрируема и $\int\limits_G f(x)dx = 0$.

Очевидно: все $\mu G_i = 0 \Rightarrow S^*_R = \sigma_R = S_{*R} = 0$

2. Аддитивность интеграла по мн-ву

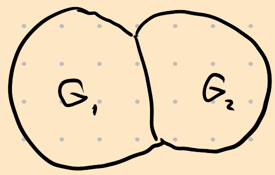
Пусть $G = G_1 \cup G_2$, $\mu(G_1 \cap G_2) = 0$

Если $f$ инт. на $G_1$ и $G_2$, то $f$ инт. на $G$ и $\int\limits_G f(x)dx = \int\limits_{G_1} f(x)dx + \int\limits_{G_2} f(x)dx$

Д-во: по п. 2 крит. Дарбу

$\exists R_1$ - разд. $G_1$: $\omega_{R_1} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists R_2$ - разд. $G_2$: $\omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$




$R_1'$ - разд. $G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$, к-рое получается из $R_1$ выкидыванием одного т. с $G_1 \cap G_2$.

Все откорочённые мн-ва имм. нулевую меру $\Rightarrow \omega_{R_1'} = \omega_R < \frac{\varepsilon}{2}$

$R_2'$ - то же самое, $\omega_{R_2'} = \omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Рас-им $R$ - разд. $R_1 \cup R_2$, включ. все мн-ва $R_1'$, $R_2'$ и $G_1 \cap G_2$.

$\omega_R = \omega_{R_1'} + \omega_{R_2'} + \omega_i \cdot \mu(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$

По п. 2 крит. Дарбу $f$ инт. на $G = G_1 \cup G_2$.

$\sigma_R = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2} + f(\xi_i) \cdot \mu(G_1 \cap G_2)$

$f$ - инт. на $G \Rightarrow$ по любой пос-ти Римановских сумм $\sigma_{R_k}$, $|R_k| \to 0$:

$\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{R_k} = I = \int\limits_G f(x)dx$

Если взять соотв. $\sigma_{R_k}'$ для $G_1$, то они отлич. от Римановских сумм для $G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$ на нулевое слагаемое, то

$\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{R_k}' = I_1 = \int\limits_{G_1} f(x)dx$

Аналогично $R_2$: $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{R_k}'' = I_2 = \int\limits_{G_2} f(x)dx$

$\sigma_{R_k}$ отлич. от $\sigma_{R_k}' + \sigma_{R_k}''$ на нулевое слагаемое $\Rightarrow I = I_1 + I_2$ ЧТД

3 Пусть $f$ - инт. на $G \subset \mathbb{R}^n$, $G_0 \subset G$ - изм. подмн-во, тогда $f$ инт. на $G_0$.

Д-во: по п. 3 крит. Дарбу

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: $\forall R$ - разд. $G$, $|R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$.

Рас-им любое разд. $R_0$ мн-ва $G_0$, $|R_0| < \delta$. Тогда его можно продолжить до разд. $R$ мн-ва $G$: $|R| < \delta$. $\omega_{R_0} \leq \omega_R < \varepsilon$,

по п. 3 крит. Дарбу $f$ инт. на $G_0$. ЧТД

4 Линейность интеграла

Пусть $f$ и $G$ инт. на мн-ве $G \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда

$\alpha f+\beta g$ - инт. на $G$, и $\int\limits_G \alpha f+\beta g=\alpha\int\limits_G f+\beta\int\limits_G g$

Д-во: Рас-им $R_k$ - разб. $G$, $|R_k|\to 0$

$\sigma_{R_k}(f)\to I_1=\int\limits_G f$, $\sigma_{R_k}(g)\to I_2=\int\limits_G g$, очевидно, что

$\sigma_{R_k}(\alpha f+\beta g)=\alpha\,\sigma_{R_k}(f)+\beta\,\sigma_{R_k}(g)\longrightarrow \alpha I_1+\beta I_2$

Т.к. $R_k$ - любое, $|R_k|\to 0$, $\xi_i^{(k)}\in G_i^{(k)}$ - любое $\Rightarrow \alpha f+\beta g$ - инт.,

$\int\limits_G \alpha f+\beta g=\alpha\int\limits_G f+\beta\int g$ ЧТД

5. Пусть $f, g$ - инт. на $G$. Тогда $fg$ - инт.

Д-во: $|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|=|f(x'')(g(x'')-g(x'))+(f(x'')-f(x'))g(x')|\leq$

$\leq M(|g(x'')-g(x')|+|f(x'')+f(x')|)$ $\textcircled{\leq}$ (т.к. $|f|, |g|\leq M$ - огр.)

$x'', x'\in G\Rightarrow |g(x'')-g(x')|\leq \omega_i(g)$

$|f(x'')-f(x')|\leq\omega_i(f)$

$\textcircled{\leq}$ $M(\omega_i(f)+\omega_i(g))$; переходя к sup: $\omega_i(fg)\leq M(\omega_i(f)+\omega_i(g))$

$\omega_R(fg)=\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i(fg)\,\mu G_i\leq\sum\limits_{i=1}^{N}M(\omega_i(f)+\omega_i(g))\cdot\mu G_i\leq$

$\leq M(\omega_R(f)+\omega_R(g))$

По п. 2 кр. Дарбу $\forall\varepsilon>0\to\exists R:\ \omega_R(f)<\frac{\varepsilon}{2M},\ \omega_R(g)<\frac{\varepsilon}{2M}\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega_R<\varepsilon\Rightarrow fg$ - инт. на $G$ ЧТД

6. $f$ - инт. на $G\Rightarrow |f|$ инт. на $G$

Д-во: аналогично, т.к. $||x''|-|x'||\leq|x''-x'|\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega_i(|f|)\leq\omega_i(f)\Rightarrow\omega_R(|f|)\leq\omega_i(f)$ ЧТД

7. Если $f(x)=\mathrm{const}$ на изм. $G\Rightarrow f$ - инт. на $G$, $\int\limits_G f(x)\,dx=C\cdot\mu G$.

Д-во: $M_i$, $m_i=\mathrm{const}\Rightarrow S^*_R=S_{*R}=\sum\limits_{i=1}^{N}C\cdot\mu G_i=C\mu G_i$ ЧТД

8. Интегрирование неравенств

Пусть $f$ и $g$ - инт. на $G$, $f(x)\geq g(x)$.

Тогда $\int\limits_G f(x)\,dx\geq\int\limits_G g(x)\,dx$

Д-во: очевидно из того, что $\forall R\to\sigma_R(f)\geq\sigma_R(g)$, далее перейти к пределу.

ЧТД

Следствия

a) Если $f(x)\geq 0$ и инт. на $G\Rightarrow\int\limits_G f(x)\,dx\geq 0$

⑦ Если $f(x)$ инт. на $G$, то $\left|\int\limits_G f(x)dx\right| \le \int\limits_G |f(x)|dx$

Д-во: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

Т.к. $f$ и $|f|$ - инт., то

$-\int\limits_G |f| \le \int\limits_G f \le \int\limits_G |f| \Rightarrow \left|\int\limits_G f\right| \le \int\limits_G |f|$ ЧТД

⑧ $f, g$ инт. на $G$, $|f| \le M \Rightarrow \left|\int\limits_G fg\right| \le M\int\limits_G g$

Д-во: $-M \le f(x) \le M \Rightarrow -M|g| \le fg \le M|g|$ - интегрируем, ЧТД.

⑨ Интегрирование строгих неравенств

$f(x) \ge g(x)$ на изм. мн-ве $G$, они обе непр. во внутр. т. $x_0 \in G$, $f(x_0) > g(x_0)$. Тогда $\int\limits_G f > \int\limits_G g$ - основная лемма вариационного исчисления.

Д-во: $\varphi(x) = f(x) - g(x) \ge 0$. $\varphi(x)$ непр. в $x_0$, $\varphi(x_0) > 0$.

Рас-им $G = U_\delta(x_0) \cup (G \setminus U_\delta(x_0))$

$U_\delta(x_0) \subset G$, $\varphi(x) > \frac{\varphi(x_0)}{2}$ в $U_\delta(x_0)$ (усил. лемма о сохр. знака).

$\int\limits_G \varphi(x)dx = \int\limits_{U_\delta(x_0)} \varphi(x)dx + \int\limits_{G\setminus U_\delta(x_0)} \varphi(x)dx \ge \frac{\varphi(x_0)}{2} \underbrace{\mu U_\delta(x_0)}_{>0 \text{ (т.к. } x_0 \text{ - внутр. т.)}} > 0$ ЧТД

⑩ Непрерывность интеграла по множеству

$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots \subset G$ - возраст. пос-ть мн-в, все изм.

$\mu G_k \to \mu G$, $k \to \infty$. $f(x)$ огр. на $G$ и инт. на всех $G_k$. Тогда она инт. на $G$ и $\int\limits_G f(x)dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(x)dx$

Д-во: $G = G_k + \underbrace{(G \setminus G_k)}_{\text{измеримо}}$.

$\mu(G \setminus G_k) = \mu G - \mu G_k \to 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists k : \mu(G - G_k) < \frac{\varepsilon}{4M}$, $M = \sup\limits_G |f(x)|$

Т.к. $f$ инт. на $G_k$, то по п.2 кр. Дарбу

$\exists R'$ - разб. $G_k$: $\omega_{R'} < \frac{\varepsilon}{2}$

Построим $R$ - разб. $G$: все мн-ва $R'$ и еще $G \setminus G_k$

$\omega_R = \omega_{R'} + \omega_0 \cdot \mu(G \setminus G_k) <$ ($\omega_0$ - колеб. $f$ на $(G \setminus G_k)$, $\omega_0 \le 2M$)

$< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$, по п.2 кр. Дарбу $f$ инт.

$\int\limits_G = \int\limits_{G_k} + \int\limits_{G\setminus G_k} \Rightarrow \int\limits_{G\setminus G_k} = \int\limits_G - \int\limits_{G_k}$

$$\left|\int\limits_G - \int\limits_{G_k}\right| = \left|\int\limits_{G\setminus G_k}\right| \le M\cdot\mu(G\setminus G_k)\to 0 \Rightarrow \int\limits_{G_k}\to\int\limits_G \quad \text{ЧТД}$$

## 11 Теорема о среднем

$f$ и $g$ - инт. на $G$, $g(x)$ сохр. знак. Тогда

$$\int\limits_G fg = \mu\int\limits_G g, \quad \text{где } \mu\in[m,M],\quad m=\inf_G f,\quad M=\sup_G f$$

Если $G$ - связный компакт и $f$-непр. на $G$, то $\mu = f(\xi)$, $\xi\in G$.

Д-во: для опр. $g\ge 0$.

$$m\le f(x)\le M$$

$$m\,g(x)\le fg\le M\,g(x)$$

$$m\int\limits_G g \le \int\limits_G fg \le M\int\limits_G g \quad - \text{если } \int\limits_G g = 0, \text{ то т. верна } \forall\mu. \text{ Иначе}$$

$$m\le \frac{\int fg}{\int g}\le M \Rightarrow \exists\mu\in[m,M]:\ \int fg = \mu\int g$$

Если $G$ - компакт, то $f$ достигает на нём $m$ и $M$, а т.к. мн-во связно, то приним. все знач. между $m$ и $M$, т.е. $\exists\xi\in G: \mu = f(\xi)$ ЧТД

**Утв**

Пусть $G = G_1\cup G_2$, $\mu G_2 = 0$, $G_1\cap G_2 = \varnothing$

Если $f(x)$ опр. и инт. на мн-ве $G_1$, то как её ни определи на $G_2$ (лишь бы ограничена), это не повлияет ни на интегрируемость, ни на знач-е интеграла

Д-во

$f(x)$ на $G_2$ опр. каким-то образом, огр.

$$\int\limits_{G_2} f(x)dx = 0$$

$$\int\limits_{G_1} f(x)dx \ -\text{сущ-ет} \Rightarrow \exists \int\limits_G f(x)dx = \int\limits_{G_1} f(x)dx + \int\limits_{G_2} f(x)dx = \int\limits_{G_1} f(x)dx.$$

Таким образом, на мн-ве нулевой меры $f(x)$ можно считать даже неопределённой.

**Пример** - огр. неинт. ф-ия

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\notin\mathbb{Q} \text{ или } y\notin\mathbb{Q}\end{cases} \qquad G: 0\le x,y\le 1$$

Пусть $f(x,y)$ - инт., $\int\limits_G f(x)\,dx = I$

$\forall$ посл-ти $R_k$: $|R_k|\to 0$, $\forall$ выборе промеж. точек $\to \sigma_{R_k}\to I$

$R_k$ - разб. на квадратики со стороной $\frac{1}{2^k}$.

$\exists\ \xi_i^{(k)},\ \xi_i^{(k)} \in G_i:\ f(\xi_i^{(k)}) = 1,\ \sigma'_{R_k} = 1$

$\exists\ \eta_i^{(k)},\ \eta_i^{(k)} \in G_i:\ f(\eta_i^{(k)}),\ \sigma''_{R_k} = 0$

Ясно, что ф-ия не инт.

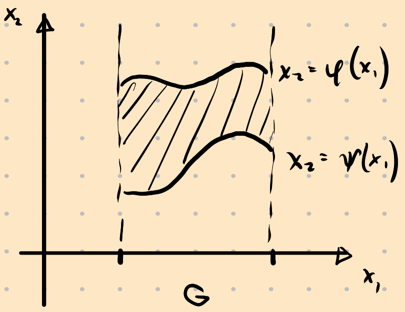
## §2 Элементарные мн-ва в $R^{n+1}$. Сведение кратного интеграла к повторному

$G^* \subset R^{n+1}$

$G^* = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : \psi(x_1, \ldots, x_n) \leq x_{n+1} \leq \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$

При этом $(x_1, \ldots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n$, $\psi$ и $\varphi$ опр. на $G$

Если $n = 1$:




Элементарное (простое) мн-во относ. оси $x_{n+1}$.

Пусть $\varphi$, $\psi$ - инт. на $G$. Тогда

1. Если $\varphi(x) \geq 0$, $\psi(x) = 0$, то $G^*$ - подграфик ф-ии $x_{n+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $(\Pi_\varphi)$
2. Если $\varphi(x) = \psi(x)$, то $G^*$ - график ф-ии $x_{n+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $(\Gamma_\varphi)$

   $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : x_{n+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_n),\ (x_1, \ldots, x_n) \in G\}$

### Теорема

1. Пусть $\varphi(x)$ инт. на $G \subset \mathbb{R}^n$, тогда $\Gamma_\varphi$ измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu \Gamma_\varphi = 0$.
2. Пусть $\varphi(x)$ неотриц. и инт. на $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\Pi_\varphi$ измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu \Pi_\varphi = \int_G f(x)dx$

Д-во:

Рас-им разбиение $G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$, $\mu(G_i \cap G_j) = 0$, $i \neq j$

2. Рас-им ступенчатые фигуры $S_R = \bigcup_{i=1}^{N} Ц(G_i, 0, m_i)$, $T_R = \bigcup_{i=1}^{N} Ц(G_i, 0, M_i)$, обоз. $\varphi \geq 0$.

$m_i = \inf_{G_i} \varphi(x)$ $\quad M_i = \sup_{G_i} \varphi(x)$

$\mu(Ц(G_i, 0, m_i)) = m_i \mu G_i$ в $\mathbb{R}^{n+1}$

При $i \neq j$ соотв. цилиндры пересек-ся по мн-ву нулевой меры в $\mathbb{R}^{n+1}$.

В силу конечной аддитивности меры Жордана

$$\mu S_R = \sum_{i=1}^{N} m_i \mu G_i = S_{*R}, \qquad \mu T_R = S^*_R.$$

$$S_{*R} \subset \Pi_\varphi \subset T_R$$

$$\mu S_{*R} = \mu_* S_R \le \mu_* \Pi_\varphi \le \mu^* \Pi_\varphi \le \mu^* T_R = \mu T_R = S^*_R$$

$$0 \le \mu^* \Pi_\varphi - \mu_* \Pi_\varphi \le S^*_R - S_{*R} = \omega_R$$

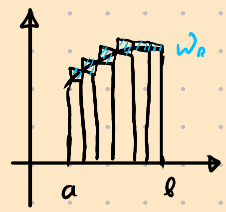
По п. 2 крит. Дарбу $\forall \varepsilon > 0 \to \exists R: \omega_R < \varepsilon \Rightarrow \mu^* \Pi_\varphi = \mu_* \Pi_\varphi \Rightarrow \Pi_\varphi$ измерим

$$S_{*R} \le \mu \Pi_\varphi \le S^*_R$$

Но $I = \int\limits_G \varphi(x)\,dx$, $S_{*R} \le I \le S^*_R$

Тогда $|\mu \Pi_\varphi - I| \le \omega_R < \varepsilon$, т.к. $\varepsilon > 0$ - любое $\Rightarrow \mu \Pi_\varphi = I$. ЧТД

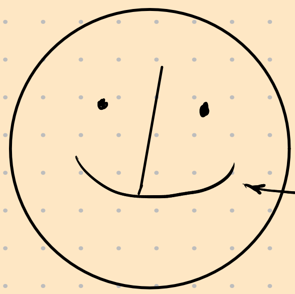
1. $P_R = \bigcup\limits_{i=1}^{N} Ц(G_i, m_i, M_i)$ - неод. где $\varphi > 0$.




$$\mu P_R = \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\, \mu G_i = \omega_R$$

$$P_R \supset \Gamma_\varphi \Rightarrow \mu^* \Gamma_\varphi \le \mu P_R < \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ - любое $\Rightarrow \mu^* \Gamma_\varphi = 0 \Rightarrow \mu \Gamma_\varphi = 0$ ЧТД



на таких мн-вах (точки + графики ф-ий меньшего числа переменных) не важно, опред. ф-ия или нет при несоб. интегр.

## Сведение к повторному интегралу

$\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

$$\int\limits_G f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$$

$n = m = 1$

$\iint\limits_G f(x)\,dx\,dy$ - двойной интеграл

$n = m = p = 1$

$\iiint\limits_G f(x)\,dx\,dy\,dz$ - тройной интеграл

Элем. мн-во $G^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$G^* = \{(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x \in \mathbb{R}^n}, \underbrace{x_{n+1}}_{y})\}$$

$G^* = \{(x, y),\ x \in G \subset \mathbb{R}^n,\ \psi(x) \le y \le \varphi(x)\}$, $\varphi, \psi$ - непр. на $G$

Элем. мн-во отн. от $y$.

$G^*$ изм. в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mu G^* = \int\limits_G (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$

Если $\varphi \ge \psi \ge 0$, то $G^* = (\Pi_\varphi \setminus \Pi_\psi) \cup \Gamma_\psi$ - все мн-ва изм., $\mu\Gamma_\psi = 0 \Rightarrow \mu G^* = \mu\Pi_\varphi - \mu\Pi_\psi$

## Теорема о сведении кратного интеграла к повторному

Пусть $G^* = \{(x,y): x \in G \subset \mathbb{R}^n, \ \psi(x) \le y \le \varphi(x)\}$, $\varphi$, $\psi$ - инт. на $G$, $G$ - изм. в $\mathbb{R}^n$.

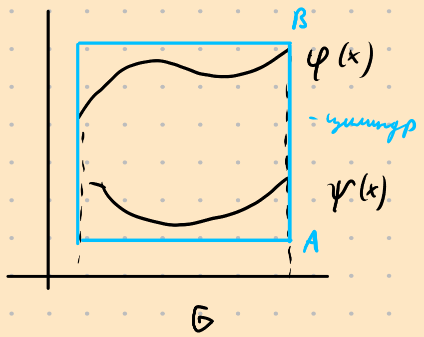
Пусть ф-ия $f(x,y)$ инт. на $G^*$, и $\forall x \in G \to \exists \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy = \Phi(x)$

Тогда $\Phi(x)$ инт. на $G$, и

$$\int\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_G \Phi(x)\,dx$$

$$\int\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_G \left\{ \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

Д-во:




$\varphi$, $\psi$ - инт. на $G \Rightarrow$ огр., т.е. $\exists A, B: \forall x \in G \to$

$\to A \le \psi(x) \le \varphi(x) \le B$

$\tilde{G} = Ц(G, A, B)$

Положим $f(x,y) = 0$ на $\tilde{G} \setminus G^*$.

Такое доопр-е не повлияет на написанные интегралы, тогда

$\Phi(x) = \int\limits_A^B f(x,y)\,dy$ - инт. сущ-ет $\forall x \in G$

$G^* \to \tilde{G}$

Нужно д-ть, что $\Phi$ инт. на $G$, и

$$\int\limits_{\tilde{G}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_G dx \int\limits_A^B f(x,y)\,dy$$

Пусть $G = \bigcup\limits_{i=1}^N G_i$ - произв. разбиение $G$

Отрезок $[A; B]$ разб. на отрезки $[\alpha_{j-1}; \alpha_j]$, $1 \le j \le p$

Возникает разбиение $\tilde{G}$ на цилиндры $Ц_{ij} = \{(x,y): x \in G_i, \ y \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]\}$

(пересеч-я по мн-вам нулевой меры: боковые пов-ти цилиндров и оснований)

— „цилиндрическое разбиение" $\tilde{G}$

$m_{ij} = \inf\limits_{Ц_{ij}} f(x,y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{Ц_{ij}} f(x,y)$

Пусть $j = 1..p$ - фикс., $x \in G_i$

$$m_{ij}\Delta\alpha_j \le \int\limits_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x,y)\,dy \le M_{ij}\Delta\alpha_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\Delta\alpha_j \le \underbrace{\int_A^B f(x,y)\,dy}_{\Phi(x)} \le \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\Delta\alpha_j$$ — верно $\forall x \in G_i$

Если $m_i = \inf\limits_{G_i} \Phi(x)$, $M_i = \sup\limits_{G_i} \Phi(x)$:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\Delta\alpha_j \le m_i \le M_i \le \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\Delta\alpha_j$$

$$0 \le M_i - m_i \le \sum_{j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij})\Delta\alpha_j$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu G_i \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p} \omega_{ij}\Delta\alpha_j \mu G_i$$

$$\omega_R(\Phi) \le \omega_{\tilde R}(f)$$

$R$ — разбиение $G$; $\tilde R$ — соотв. цилиндр. разбиение $\tilde G$

$f$ инт. на $\tilde G$, по п. 3 крит. Дарбу $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 : \forall \tilde R,\ |\tilde R| < \delta \to \omega_{\tilde R}(f) < \varepsilon$

В частности это верно $\forall$ цилиндр. разбиения $|\tilde R| < \delta$

Для соотв. разбиения $R$ мн-ва $G$ $\omega_R(\Phi) < \varepsilon$

По п. 2 кр. Дарбу $\Phi(x)$ инт. на $G$.

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\Delta\alpha_j \le \Phi(x) \le \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\Delta\alpha_j$$ — верно $\forall x \in G_i$, проинт. по $G_i$:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\Delta\alpha_j \mu G_i \le \int_{G_i} \Phi(x)\,dx \le \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\underbrace{\Delta\alpha_j \mu G_i}_{\mu G_{ij}}$$

Просуммируем по $i = 1..N$:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\mu G_{ij}}_{S_{*\tilde R}} \le \underbrace{\int_G \Phi(x)\,dx}_{I_1} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\mu G_{ij}}_{S^*_{\tilde R}}$$

$S_{*\tilde R} \le I_1 \le S^*_{\tilde R}$

$\tilde R$ — цилиндрическое разбиение $\tilde G$

$I_2 = \int_{\tilde G} f(x,y)\,dx\,dy$, тогда $S_{*\tilde R} \le I_2 \le S^*_{\tilde R}$

$|I_1 - I_2| \le S^*_{\tilde R} - S_{*\tilde R} = \omega_{\tilde R}(f)$

По п. 3 кр. Дарбу $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 : \forall \tilde R,\ |\tilde R| < \delta \to \omega_{\tilde R}(f) < \varepsilon$

В качестве такого разбиения можно взять цилиндрическое

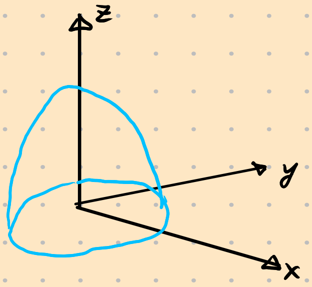
$\forall \varepsilon > 0 \to \exists$ цилиндр. $\tilde R$: $\omega_{\tilde R}(f) < \varepsilon$

$\varepsilon$ — любое, $|I_1 - I_2| < \varepsilon \Rightarrow I_1 = I_2$ ЧТД

Пример

$$\iiint\limits_{G^*} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)dz$$

$$G^* = \{x^2+y^2<1,\ 0<z<1-x^2-y^2\}$$




## § 3. Классы интегрируемых функций

**Теорема**

$f(x)$, непрерывная на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, интегрируема.

Д-во:

$\mu F = 0$ – $f$ огр. => всё ясно

$\mu F > 0$ => $f$ равномерно непр. на $F$ (по т. Кантора)

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0:\ \forall x', x'' \in F,\ \rho(x', x'') < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu F}$

$\omega(f)$ на $G_i$ – $\sup\limits_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')|$

Если $\operatorname{diam} G_i < \delta$: $\quad \sup\limits_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')| \le \dfrac{\varepsilon}{2\mu F} < \dfrac{\varepsilon}{\mu F}$

$$\omega_R = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu G_i < \frac{\varepsilon}{\mu F} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mu G_i}_{\mu F} = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0:\ \forall R,\ |R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$

По п. 3 кр. Дарбу $f$ интегрируема. ЧТД

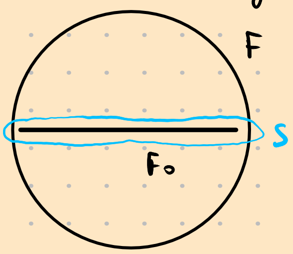
**Усиление**

Пусть $f$ огр. на компакте $F$ и мн-во точек, в к-рых она не яв-ся непрерывной на $F$, имеет меру 0. Тогда $f(x)$ инт. на $F$.

Д-во:

Пусть $F_0$ – мн-во т. разрыва, $\mu F_0 = 0$. $\qquad M = \sup\limits_F |f(x)|$

Лемма 3 перед кр. Дарбу: $\exists S$ – открытое клеточное, $\mu S < \mu F_0 + \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4M}$, $S \supset F_0$




$F \setminus S$ – замкнутое мн-во $\Rightarrow$ компакт.

$f$ непр. на $F \setminus S$ $\Rightarrow$ инт. на $F \setminus S$ по пред. т.

По п. 2 кр. Дарбу:

$\exists$ разб. $R$ мн-ва $F \setminus S$: $\omega_R < \frac{\varepsilon}{2}$

$R'$ – разб. $F$, сост. из $R$, к к-рому добавлено $S \cap F$. $\omega_0$ – колеб. $f$ на $F \cap S$

$$\omega_{R'} = \omega_R + \underbrace{\omega_0}_{\le 2M} \underbrace{\mu(F \cap S)}_{< \mu S}$$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R'$ – разб. $F$: $\omega_{R'} < \varepsilon$. По п. 2 кр. Дарбу $f$ инт. на $F$. ЧТД