

Проблема фильтрации



$$s = \frac{p}{\omega_0} - \text{характер. частота}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \begin{array}{l} \text{числитель} \\ \text{— рациональная ф-ца} \end{array}$$

1. Синтез $H(s)$ — как её выбрать? Синтез по АЧХ
2. Реализация — как сделать реализуемой? Условие билинейности



Сопрежённые пары полюсов

Они не реализуемы RL и RC цепями

Нужны RLC



— резонаторы дают сопр. полюса

Однако индуктивности исп. не хочется. Их можно заменить усилителями!



— активные RC-цепи / фильтры

Синтез по АЧХ



$$H(s) = \underbrace{|H(s)|}_{\text{АЧХ}} e^{\underbrace{j \arg H(s)}_{\text{ФЧХ}}}$$

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H^*(s) \quad - \text{к этому предельно требованию}$$

$$\text{Нам интересен только } H(s) \cdot H^*(s) \big|_{s=j\omega}$$

- Придем т.к. нам дана N и D без корней, то $H^*(s) = H(s^*)$, т.е. рассматриваем $H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\omega}$

- Поменяем переменную: при $s=j\omega$, $H(s^*) = H(-s)$, и так удобнее работать: $H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\omega} = H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\omega}$

$$H(s) \cdot H(-s) = |K(\omega)|^2$$

АЧХ² — у нас ФЧХ еще надо выбрать нули и полюсы

Создадим нули и полюсы АЧХ² всегда будет симметрично (имеет смысл заменить $s \rightarrow -s$), и полюсы мы возведем в $H(s)$, полюсы — $H(-s)$.

Пример. фильтр нижних частот



$$h(t) = \int_{-1}^{+1} h(f) e^{2\pi j f t} df = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

Импульс Хартмана



не удобо. импульсы приращены (реализуются разное возмущение)

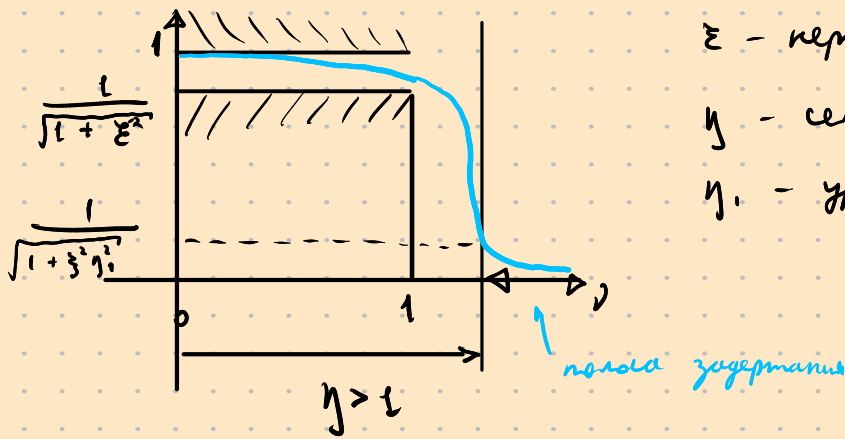
Т.е. такой фильтр не реализуем.

Допустим неравномерность АЧХ в полосе пропускания:

ε - неравномерность в ПП

η - селективность

η_1 - уровень на границе ПЗ



К усилению приводит: $H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega)}$ n - порядок фильтра

$$|F_n(\omega)| = \begin{cases} \leq 1, & \omega \in (-1; 1) \\ \geq \eta_1, & \omega \geq 1 \end{cases}$$

Варианты выбора:

1. $F_n(\omega) = \omega^n$ - фильтр **Баттерворта**
2. $F_n(\omega) = P_n(\omega)$ - фильтр **Чебышева**, где $P_n(\omega)$ - полином Чебышева
3. $F_n(\omega) = R_n(\omega)$ - **эллиптический** фильтр, $R_n(\omega)$ - рационал. эллипич. ф-ция

Баттерпорт

$$H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}$$

$\varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}$ - изменение ε эквивалентно изменению ω_0 , т.е. ε не нужен - он всегда 1

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$



При $n \rightarrow \infty$ для АЧХ теор. стремится к идеальной прямоугольной.
Всегда дает затухание -3 дБ

$$H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \Rightarrow H(s) H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Ищем корни: $\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} + 1 = 0$

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = e^{j\pi} = e^{j \cdot 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad -1 = e^{j\pi}$$

$$\frac{s}{j} = e^{j \frac{\pi}{2n}} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{2n}}$$

$$j = e^{j \frac{\pi}{2}}$$

$$s_k = e^{j \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n} k \right]}$$

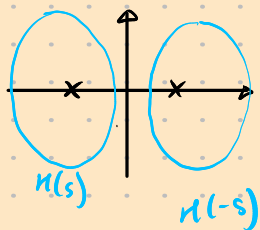
- корни образуют n -ю $H(s) \cdot H(-s)$

- корни \in кругу $\frac{\pi}{n}$, касаются мнимой оси!



Примеры

$n=1$: $\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^2} = \frac{1}{1 - s^2} \quad s = \pm 1$ - корни



$$H(s) = \frac{1}{1 + s}$$

Устойчивость нет!

$n=2$:



Согласенная пара на $сж$, круге характерист.

Здесь задан ξ

$$\text{Получим } s^2 + 2\xi s + 1$$

$$\text{Корни } -\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

У фильтров Баттерворта симметричный спад.

Если задать большой порядок, получаются очень длинные к imaginary оси
параметры (углы $\frac{\pi}{2n}$) - высокая добротность



$$\xi = \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2n}}$$

Фильтры с максимальной плоской характеристикой.

Чебышев

$$|K(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 P_n^2(\nu)}$$

$-1 \leq \nu \leq +1$; $|P_n(\nu)| \leq 1$ - осциллирует в единичном промежутке

$P_n(\nu) = \cos(n \arccos \nu)$ - многочлен Чебышева (1)

$$\cos[(n+1)\alpha] + \cos[(n-1)\alpha] = 2 \cos n\alpha \cdot \cos \alpha \quad - \text{по формуле косинусов}$$

$$\alpha = \arccos x$$

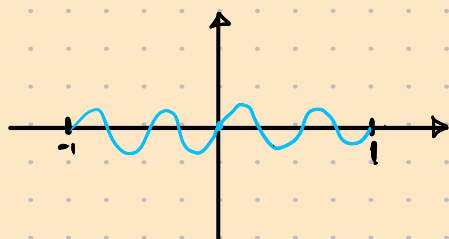
$$\text{Получаем } P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2 P_n(x) \cdot x$$

$$P_{n+1} = 2x P_n - P_{n-1} \quad - \text{рекуррентная формула}$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$P_1(x) = x \quad P_3(x) = 4x^3 - 3x$$

По формуле (1) получается, что $P_n(x)$ определён только на $[-1; +1]$ из-за аркосинуса. Проверим о нём



$n \arccos x$ меняется от 0 до $n\pi$

Значит, в $[-1; 1]$ трансцендентное целое число

непрерывно осциллирует. Если n - чётное, то в 0-0

Почему функции определены на всей осн? \arccos надо рас-убавлять как гр-но от комплексного аргумента.

$$\cos(z) = \cos(x + jy) = \cos x \cdot \overbrace{\cos jy}^{ch y} - \sin x \cdot \overbrace{\sin jy}^{j sh y}$$

$$\cos jy = \frac{e^{j \cdot jy} + e^{-j \cdot jy}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = ch y$$

$$\sin jy = j sh y$$

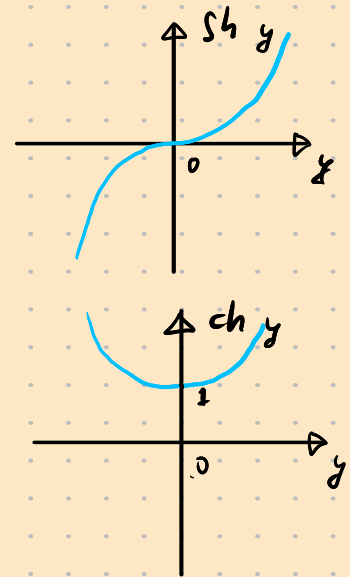
• Получим $\cos z = \cos x \cdot ch y - j \sin x \cdot sh y$

Если $y=0$, то $\cos z = \cos x$.

• Комплексная годограмма \cos обращается в 0, когда $\sin x = 0$,



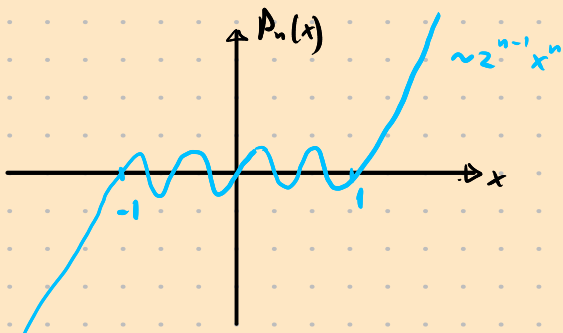
($\cos z$ при $y > 0$)



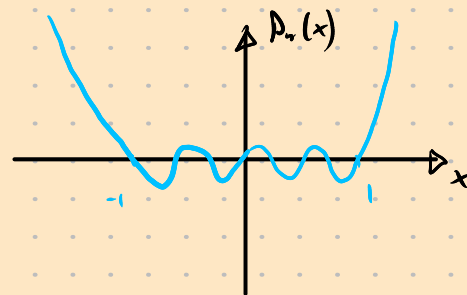
То есть аргумент \arccos - модуль $x \in \mathbb{R}$, и тогда $\arccos x$ мнимый, но $\cos(n \arccos x)$ останется вещественным.

• $P_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots$ - старший коэффициент

При $|x| > 1$ он быстро растет.



$P_n(x)$, n - четное



P_n , n - нечетное

У Чебышева свойства по селективности от Баттерворта.

Получим нормировки:

$$H(s) H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_n^2\left(\frac{s}{j}\right)} = 0$$

$$P_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\cos\left(n \arccos\left(\frac{s}{j}\right)\right) = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

$u - jv$

$$\begin{cases} \cos(n(u - jv)) = \pm \frac{j}{\varepsilon} \\ \frac{s}{j} = \cos(u - jv) \end{cases}$$

$$\cos nu \cdot \text{ch } nv + j \sin nu \cdot \text{sh } nv = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow \cos nu \neq 0$

$$nu = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k \quad - \text{нормы на частоте}$$

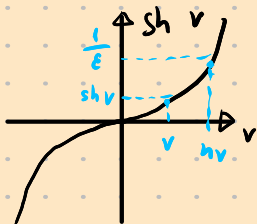
$$\text{sh } nv = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow v = \frac{1}{n} \text{sh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{s}{j} = \cos(u - jv) = \cos u \cdot \text{ch } v + j \sin u \cdot \text{sh } v$$

$$S_k = j \left[\text{ch } v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right) \text{sh } v \right]$$

$$S_k = -\text{sh } v \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right) + j \text{ch } v \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} k\right)$$

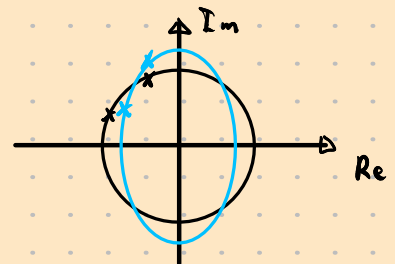
Опред. частоты нормировки по ш v и ch v.



sh v уменьшается (< 1)



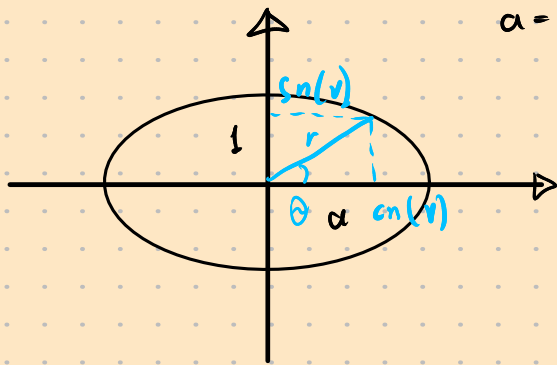
ch v увеличивается (> 1)



нормы по-прежнему

Базис $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, ортогональный к р-ке Фурье, если нормировка Чебышева.

Эллиптические функции



$$a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \quad k \in [0; 1)$$

$$v = \int_0^\theta r(\theta) d\theta$$

$$dn(v) = r$$

$$cd = \frac{cn}{dn}$$

При $k=0$ - вырождение в эллипс, \sin и \cos

$$\int_0^{\pi/2} r(\theta) d\theta - \text{эллиптический интеграл}$$

Поэтому там, как $\cos(n \arccos x)$ - многочлен, можно тоже

интерпретировать и в эллип. функциях. - т.н. **рациональные эллиптические**

функции.

$$P_n(x) = \cos n\omega, \quad \text{где } x = \cos(\omega)$$

$$\varphi_n(x) = cd(k, n\omega), \quad \text{где } x = cd(k, \omega), \quad k, k_1 \in (0; 1)$$

\downarrow \downarrow
 нар-р \downarrow \downarrow
 эллиптический $[0; 1]$

Получается, что $\varphi_n(x) = \frac{N(x)}{\Delta(x)}$ - рац. ф-ция. (если нули и полюсы)

Поиск нулей и полюсов:

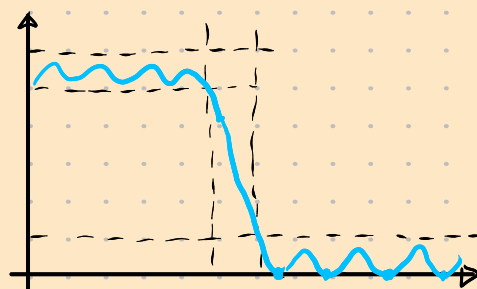
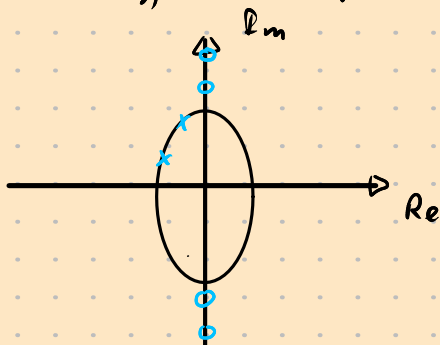
$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \varphi_n^2(v)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{\Delta^4}{N^2}} = \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon^2 \Delta^2} = 0$$

- нули

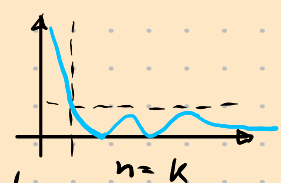
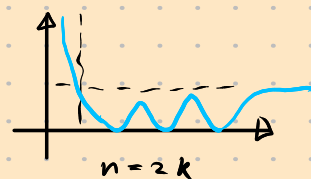
$N^2 - \varepsilon^2 \Delta^2 = 0$ - полюсы

По полюсам Орель переходит на ф-ции Чебышева (они тоже не

линейны), все нули - на мнимой оси.



K раз, где $\text{заграждение} = 0!$



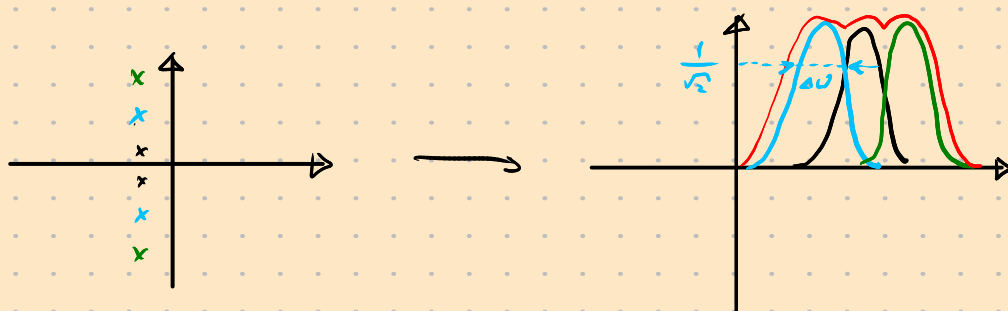
Нули и интегр.

$n=2k$ - нули на полюсах $n=2k+1$ - нули на нулях и т.д.

Пар-ры синтеза

1. Баттерверт - задается только порядок n
2. Чебышев - задается n и ε (тогда $\eta_1 = \eta_1(\eta)$ - определена)
3. Эллиптические - задается (n, ε, η) или (n, ε, η_1) или $(\varepsilon, \eta, \eta_1)$
(в пом. углах n можно умножить поделить)

В промисл все фильтры канон. кентры делаем так:



$$\frac{1}{Q} = \frac{4\omega}{\omega_0}$$

Широкое ПП с крутыми склонами

Но! Если их расн. имеем, в ПП АЧХ неравномерна.

Лучше по кругу или эллипсу! Коса и пологие.

