

## Неявные ф-ии

$$y^2 = x^2$$

а) Сколько ф-ий  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт гр-е? Бесконечно много:

$$X \subset \mathbb{R}: F(x) = x, x \in X$$

$$F(x) = -x, x \notin X$$

б) Сколько непрерывных ф-ий  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт гр-е? 4:

$$x, -x, |x|, -|x|$$

в) Ск- непрер- ф-ий  $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт гр-е? 2:

$$x, -x$$

г) Ск- непрер- ф-ий  $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт гр-е? 1:

$$x$$

## Теорема о неявной ф-ии

Пусть  $F(x, y)$  непрерывна в  $(x_0, y_0)$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$  в к-ром  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$ .

При этом  $f(x)$  непрерывна на  $(x_0 - a, x_0 + a)$

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \text{формула} - \text{не доказано!}$$

Далее  $df/dx \neq 0$  произв. той переменной, которая задана (равна гр-ии),

№1

$$u^3 - xu + y = 0, \quad u = u(x, y)$$

Найти  $u'_x, u'_y$  и  $du$  в  $\pi(3, -2, 2)$  и  $(3, -2, -1)$  - надо задать  $u$ ! иначе неопределено что за точка

$$x=3, y=-2, u=?$$

$$u^3 - 3u - 2 = 0 \mid u=2 - \text{реш.}$$

$$(u-2)(u^2+2u+1)=0$$

$$(u-2)(u+1)^2=0 \quad (u=-1)$$

$$3u^2 u'_x - x u'_x - u = 0$$

$$u_x = \frac{u}{3u^2 - x}$$

$$3u^2 u'_y - x u'_y + 1 = 0$$

$$u'_y = -\frac{1}{3u^2 - x}$$

$$u'_x(A) = \frac{2}{9} \quad u'_y(A) = -\frac{1}{9}$$

$$du(3, -2, 2) = \frac{2}{9} dx - \frac{1}{9} dy$$

! Выше сразу спом. гиперповерх., не считая вырожденные

$$3u^2 du - x du - u dx + dy = 0$$

$$du = \frac{u dx - dy}{3u^2 - x}$$

№2

$$F(x-y, y-z, z-x) = 0 \Rightarrow z = z(x, y) \quad - \text{найдем } dz$$

$$f(u, v, w)$$

$$f'_u(x-y, y-z, z-x)(dx-dy) + f'_v(x-y, y-z, z-x)(dy-dz) + f'_w(x-y, y-z, z-x) \cdot (dz-dx) = 0$$

$$dz = \frac{f'_u dx - f'_u dy + f'_v dy - f'_v dx}{f'_v - f'_w}$$

№3

$$\begin{cases} x e^{u+v} + 2uv = 1 & u = u(x, y) & u(1, 2) = v(1, 2) = 0 \quad (\text{логарифм}) \\ y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x & v = v(x, y) & \text{Найдем } u'_x, u'_y, v'_x, v'_y \text{ при } x=1, y=2, u=v=0 \end{cases}$$

! При поиске найдем  $u, v$  - функции гр-е. Аргумент  $\ln$  - натуральный

$$\begin{array}{r|l} u^3 - 3u - 2 & u-2 \\ \hline u^3 - 2u^2 & \\ \hline -2u^2 - 3u & \\ -2u^2 - 4u & \\ \hline -u - 2 & \\ -u - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

№4

$$u^3 + 2yu + xy = 0 \quad u(1, -1) = -1 \quad (\text{проверка: OK})$$

$$\text{Найти } d^2u(1, -1)$$

$$3u^2 du + 2u dy + 2y du + dx y + dy x = 0$$

$$du = -\frac{2u dy + dx y + dy x}{3u^2 + 2y} \quad du = dx + dy$$

$$6u du^2 + 3u^2 d^2u + 2du dy + 2y d^2u + 2du dy + dx dy + dx dy = 0$$

$$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 - 6u + 4du dy + 2dx dy = 0$$

$$d^2u - 6(dx + dy)^2 + 4dx dy + 4dy^2 + 2dx dy = 0$$

$$d^2u = 6dx^2 + 12dx dy + 6dy^2 - 4dx dy - 4dy^2 - 2dx dy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dx dy$$

№ T4

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Выразить  $r'_x, r'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$  через  $r, \varphi$

$$\begin{cases} 1 = r'_y \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_y \\ 0 = r'_y \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_y \end{cases}$$

$$\Delta = -r$$

$$\Delta_r = -r \sin \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\cos \varphi$$

$$r'_y = \sin \varphi \quad \varphi'_y = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_x \\ 0 = r'_x \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_x \end{cases}$$

$$\Delta = r$$

$$\Delta_r = r \cos \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\sin \varphi$$

$$r'_x = \cos \varphi \quad \varphi'_x = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

№ поменяв всё это место?

$$u = u(x, y)$$

$$\text{Решить ур-е } xu'_y - yu'_x = 0$$

$$\text{Полная замена: } x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad u = (r, \varphi)$$

$$u'_y, u'_x \text{ выразить через } u'_r, u'_\varphi$$

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi \varphi'_x$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \varphi'_y$$

$$u'_x = u'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \quad u'_y = u'_r \cdot \sin \varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$$

$u_{p-e}$ :

$$r \cos \varphi \cdot (u'_r \cdot \sin \varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}) - r \sin \varphi \cdot (u'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r}) = u'_\varphi$$

$$u'_\varphi = 0$$

$$u_{p-e} \quad u = f(r)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Отб.: } u = F(x^2 + y^2)$$

no 5

$$(y-z)z'_x + (y+z)z'_y = 0 \quad z = z(x, y)$$

$$\text{Заменим: } u = y-z, \quad v = y+z$$

$$\text{тогда } x = x(u, v).$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x (x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$$

$$dx = x'_u du + x'_v dv + z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$$

$$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y) dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1) dz = 0$$

$dy, dz$  - независимые  $\Rightarrow$  коэффициенты при них  $= 0$ .

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z'_x = \frac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Подставим:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v \left( \frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \right) = 0$$

$$\frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

no T3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

$$1) \text{ Д-на, т.к. } J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то } f \text{ не является инволюцией}$$

$$2) \text{ Найдем } f(\mathbb{R}^2) \text{ - область значений } f.$$

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Аб-а функцион л илу периодичности:  $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$   
 $v(r, \varphi) = v(r, \varphi + 2\pi)$

2)  $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$   
 $v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$   $e^z$  прим. вл. экстр. краеве 0

## Экстремумы ф-ии нескольких переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Необх. усл-е: Если в точке лока. экстремума  $F$  стационар., то  $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$  (станд. т.)

Дост. усл-е: Если  $F(x_1, \dots, x_n)$  - двукратн. густр. в  $U_0(\bar{x}_0)$ ,  $\bar{x}_0$  - станд. т., то рас-им квадратичную форму  $\sigma(dx_1, \dots, dx_n)$ :

$$d^2 F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(\bar{x}_0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n F''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. кв. ф- полож. опре.  $\Rightarrow \bar{x}_0$  - лока. min
2. отриц. опре.  $\Rightarrow$  лока. max
3. неопр.  $\Rightarrow \bar{x}_0$  - не лока. экстр.
4. полуполупр.  $\Rightarrow ?$  (аналитич. приращенн)

## Исследование кв. форм

1. Приведение в канонический вид  $k(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$ ,  $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этой кв. обозначен с формальн. го преобразованием  $\varepsilon_i$ :

$p$  = кол-во  $\varepsilon_i = +1$  - положит. индекс инерции

$q$  = кол-во  $\varepsilon_i = -1$  - отриц. индекс инерции

$r = p + q$  - ранг

Положит. опре.  $\Leftrightarrow$  все  $\varepsilon_i = +1$

$p = n, q = 0$

Отриц. опре.  $\Leftrightarrow$  все  $\varepsilon_i = -1$

$p = 0, q = n$

Неопр.  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_i = +1$  и  $\exists \varepsilon_j = -1$

$1 \leq q, p \leq n-1$

Полож. полупр.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \geq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$p \leq n-1, q = 0$

Отриц. опре.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \leq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$p = 0, q \leq n-1$

## 2. Критерий Сильвестра

$$B = (b_{ij})$$

$$\left( \begin{array}{c} \sqsubset \\ \sqsubset \\ \sqsubset \end{array} \right) \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

$$\text{Остр. опре.} \Leftrightarrow \text{sign } \Delta_i = (-1)^i$$

$$\text{Полож. опре.} \Leftrightarrow \forall \Delta_i > 0$$

## 3. Частный случай $n=2$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{Полож. опре.} \Leftrightarrow A > 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C > 0)$$

$$\text{Остр. опре.} \Leftrightarrow A < 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C < 0)$$

$$\text{Неопр} \Leftrightarrow AC - B^2 < 0$$

№1

$$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$$

$$u'_x = 6xy - 12$$

$$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \pm 1 \\ y = \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = 6y \quad u''_{xy} = 6x$$

$$u''_{yy} = 6y$$

$$d^2F = 6y dx^2 + 6y dy^2 + 12x dx dy$$

$$\frac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dx dy \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0 - \text{неопре.}$$

$$\frac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dx dy - \text{неопре.}$$

$$\frac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dx dy \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 - \text{неосм. опре.} - \text{min}$$

$$\frac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dx dy - \text{Остр. опре.} - \text{max}$$

№ 2

$$u = xyz(16 - x - y - 2z), \quad x, y, z \geq 0$$

$$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$$

$$u'_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \quad u'_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$$

$$u'_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$$

$$\begin{cases} yz(16 - 2x - y - 2z) = 0 \\ xz(16 - x - 2y - 2z) = 0 \\ xy(16 - x - y - 4z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z = 16 \\ x + 2y + 2z = 16 \\ x + y + 4z = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = -2yz = -16 \quad u''_{yy} = -2xz = -16 \quad u''_{zz} = -4xy = -64$$

$$u''_{xy} = z(16 - 2x - y - 2z) - yz = -8 \quad u''_{xz} = y(16 - 2x - y - 2z) - 2yz = -16$$

$$u''_{yz} = x(16 - x - 2y - 2z) - 2xz = -16$$

$$d^2u(4, 4, 2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdz - 32dydz$$

$$\frac{d^2u(4, 4, 2)}{16} : \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 > 0$$

Полож. опреж.  $\Rightarrow d^2u$  отриц. опреж.  $\Rightarrow$  локал. макс

№ 3

$$u = x^4 + y^4 - 2x^2$$

$$u'_x = 4x^3 - 4x \quad u'_y = 4y^3$$

$$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \quad u''_{yy} = 12y^2 \quad u''_{xy} = 0$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy^2$$

$$d^2u(0, 0) = -4dx^2 - \text{отриц. невырожд.} - ?$$

$$u(\Delta x, \Delta y) - u(0, 0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 = 0 : \quad \begin{matrix} \Delta x \neq 0 & \Delta y \neq 0 & \textcircled{+} \\ 0 < \Delta x < \sqrt{2} & \Delta y = 0 & \textcircled{-} \end{matrix}$$

Интегрируем нес.

$$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2 - \text{полож. невырожд.}$$

$$\begin{aligned} u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) &= (\pm 1 + \Delta x)^4 + \Delta y^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 = \\ &= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + \Delta y^4 > 0 \quad - \text{min} \end{aligned}$$

№ 5

В числ. т. кл. графа  $d^2 f$  назов. невыпукл.

a) Может ли быть  $d^2 f$  min? Да.

б) Может ли быть  $d^2 f$  max? Нет (если есть точка  $dx \neq dy$ , то выпуклость  $> 0$  - бугор  $d^2 f$ )

в) Не  $d^2 f$  экстремум? Да

№ 4

$$x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0 \quad - \text{уравн. поверхности в } \mathbb{R}^3, \text{ замкн. выпукл.}$$

$$2x dx + 2y dy + 2u du + 2dx - 2dy + 4du = 0$$

$$(u+2) du + (x+1) dx + (y-1) dy = 0$$

$$du = - \frac{(x+1) dx + (y-1) dy}{u+2}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad - \quad du = 0$$

$$u^2 + 4u - 5 = 0 \quad u = 1, -5; \quad (-1, 1, 1), (-1, 1, -5)$$

$$(u+2) d^2 u + du^2 + dx^2 + dy^2 = 0$$

$$d^2 u = \frac{-dx^2 - dy^2}{u+2}$$

$$d^2 u(-1, 1, 1) = -dx^2 - dy^2 \quad - \text{определ. отриц. (max)}$$

$$d^2 u(-1, 1, -5) = \frac{dx^2}{3} + \frac{dy^2}{3} \quad - \text{назов. опред. (min)}$$



