

# Риназов Иван Васильевич

## Введение



• Все ящики не описать

• Рассматриваем только линейные и стационарные

Линейность: 
$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Стационарность:  $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t + \Delta t) \rightarrow y(t + \Delta t)$

Чёрный ящик описывается:

- схемой
- набором параметров  $H$

Любая сх-ма, составленная из RLC, явл-ся линейной и стационарной.

## Топологические эл-ты

Ветвь - участок эл. цепи, вдоль к-рого протекает один и тот же  $I$ . Может состоять из  $\geq 1$  идеализированных двухполюсника.

Узел - место соединения ветвей

Кустарный -  $> 2$  ветвей

Устранимый - 2 ветви

Контур - любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям цепи.

Характериз. направлением обхода, каждая ветвь / узел пропущен 1 раз

Опас. нам можно записать:

Компонентные гр-ы - свойства цепи, опред. её компонентами

Топологические гр-ы - свойства цепи, опред. только её топологией

## Правила Кирхгофа

- Закон сохр-я заряда
- Провода не накапливают заряд (узлы)

## I закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных значений токов всех ветвей, входящих в каждый из узлов в любой момент времени, равна 0.

$$\sum_i i_k = 0.$$

- Потенциальность э. поля
- Консервативность э. поля
- Поток вектора  $\vec{B}$  во времени в цепи не изменяется (несилив связь эл-ов)

## II закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур обходящийся один раз, равна 0.

## Теорема об эквивалентном генераторе

Ток произвольной ветви линейной эл. цепи не изменится, если абстрактный двухполюсник, к к-му подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линейтизированным источником энергии, к-рый может быть представлен последовательной (Тевенин) или параллельной (Нортон) схемой замещения. При этом ЭДС идеального источника напряжения равна напряжению холостого хода абстрактного двухполюсника, ток идеального источника тока равен току КЗ абстрактного двухполюсника, а внутреннее сопротивление и проводимость экв. источника равны соответственно комплексным входным сопротивл. и проводимости абстрактного двухполюсника.



Парал. - Нортон



Послед. - Тевенин



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}; \quad U_{xx} = -I R_2 = -\frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}$$

напряжения  
тока

Законен идеализированный исл. ЭДС на перемычку или идеализированный исл. ток на разрыв цепи, считаем сопротивление цепи, найденный выходное сопротивление генератора.

Это работает только с независимыми источниками. Для зависимых придется составить сис-му мн-гр-ии (разберись с этим)

### Частотный анализ характеристик цепи

$$I \cos(\omega t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{линейный} \\ \text{стационарный процесс} \end{array}} \rightarrow k(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

ЛИБ



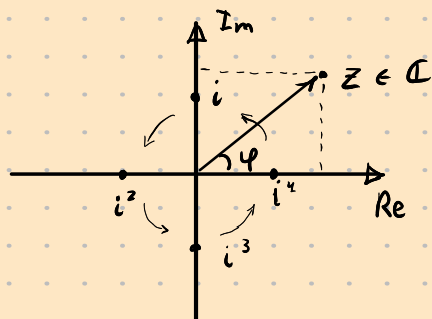
$k(\omega)$  - АЧХ



$\varphi(\omega)$  - ФЧХ

### Самое полное описание цепи!

Трёхмерный подход - переходим к комплексам



$$z = |z| \cos \arg z + i |z| \sin \arg z \quad (\varphi = \arg z)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos \omega t + i \sin \omega t \rightarrow \boxed{\text{ЛИБ}} \rightarrow k(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (\dots) i \sin(\dots)$$

①   
 $I = \frac{U}{R} \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$

②   
 $I = C \frac{dU}{dt} \quad \tilde{I} = C \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\frac{1}{j\omega C}}$   
*интеграл*

③   
 $U = L \frac{dI}{dt} \quad \tilde{U} = j\omega L \tilde{I}, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{j\omega L}$

Импеданс - комплексное сопротивление ( $Z$ )

$j = i$  в радиотехнике

Комплексная проводимость -  $Y$

**Линейные цепи 1 порядка**

① Интерпретация RC - цепи



$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}_{chn}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\tilde{U}_{chn} = \tilde{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde{U}_{en}}{j\omega RC + 1}$$

$$\tilde{U}_{chn} = \frac{\tilde{U}_{en}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Что будет, если на вход подать  $\cos \omega t$ ?

$$U_{chn} = \text{Re}(\tilde{U}_{chn}) = (\cos \omega t + \sin \omega \cdot \omega RC) \cdot (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1}$$

**Анализировать** сигнал:  $\cos \omega t + i \sin \omega t$

$$K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{chn}}{\tilde{U}_{en}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\frac{\tilde{U}_{chn}}{\tilde{U}_{en}} = \frac{A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0} \cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0} e^{j\varphi}$$

Поиграем с  $Z$  - сгруппируем фазы - аргументы, посмотрим соотношение амплитуд

Чтобы найти  $u$ , нужно из  $K(\omega)$  вычислить его действ. часть и без комплексного комплексной части найти  $\varphi$  (это  $e^{j\varphi}$ ).

$$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}{\frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1/2}$$

$$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$



При  $u_1 = \text{const}$ ,  $u_2 = \text{const}$  получаем 4 константы, харак. четырехугольника.

Физ. смысл производных:

1.  $\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$  - входная проводимость

3.  $\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$  - прямая пробожная проводимость

2.  $\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$  - обратная пробожная проводимость

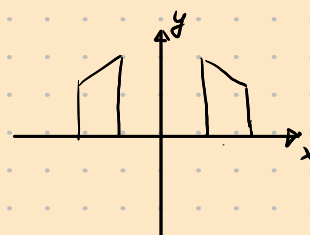
4.  $\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$  - выходная проводимость

## Аналитический сигнал (выполает $L$ и $C$ - инерционность)

Вещный сигнал - зависит нек-ой ЛК  $u$  и  $i$  от времени. При преобр-ии Фурье обязательно получится симметричный спектр (он симметричен относительно  $\omega$  с точностью до комплексного сопряжения, а мнимая часть  $= 0$ ).

Это неудобно - приходится работать с кривой  $\sin$  и  $\cos$ .

Добавим к сигналу комплексную добавку - тангенс, это левая (правая) часть спектра сигнала обнуляется.



Выходит аналитический сигнал. Получается два провода - один с действ. частью сигнала, другой - с мнимой. Используя аналит. сигнал, можно рас-ивать инерционные цепи. Сигнал будет позан как бы бесконечно долго и длится бесконечно долго.



$\tilde{x}(t) = A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$  - аналитический сигнал.  $|e^{j\omega t}| = 1$

$A_0(\omega), \varphi(\omega)$ .  $A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$  - комплексная амплитуда  
 $e^{j\omega t}$  - комплексная вращающаяся экспонента.

## $Y$ - параметры (комплексные)

$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12} \tilde{U}_2$

$\tilde{I}_2 = Y_{21} \tilde{U}_1 + Y_{22} \tilde{U}_2$

При поиске  $Y_{1x}$   $\tilde{U}_2$  замыкают (закоррективают выход), аналогично для  $Y_{2x}$ .

$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = Y \cdot \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{pmatrix}$

Если взять  $I_1$  и  $I_2$  как независимые, найдем их значения:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_1}{\partial i_2} di_2$$

- здесь рассуждения это сопротивление

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2$$

Сделаем на основании, получим:

$$u_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$u_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Следовательно:  $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$

$$Z_{12} = - \frac{Y_{12}}{|Y|}$$

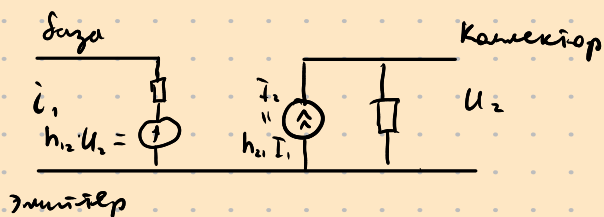
$$Z_{21} = - \frac{Y_{21}}{|Y|}$$

$$Z_{22} = \frac{Y_{11}}{|Y|}$$

**H - параметры**

$$\begin{cases} u_1 = h_{11} I_1 + h_{12} u_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} u_2 \end{cases}$$

- полезно для динамических транзисторов



- аналогичная динамическая транзисторная схема

$h_{21}$  - передача по напряжению (ср.)

$h_{11}$  - входное сопротивление

$h_{12}$  -

(ср.)

$h_{22}$  - выходная проводимость (ср.)

(ср.) - средняя величина

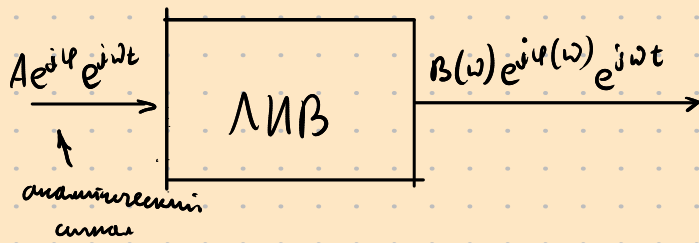
Следовательно:  $h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$

$$h_{12} = - \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

$$h_{21} = - \frac{Z_{21}}{Z_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$$

# Комплексный коэффициент передачи



Анализированный - из ТФКП

Комплексная запись в реальном времени не используется  
 $|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$  - комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{\tilde{y}_{\text{вн}}}{\tilde{y}_{\text{вх}}} = \frac{B(\omega) e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t}}{A_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} \equiv$$

Модель анализ. сигнала с одной. переменной можно записать на входе и  $K(j\omega)$  тоже будет

$$\equiv \frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + A_0} = \frac{b_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot \dots \cdot (\omega - b_n)}{a_0 \cdot (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot \dots \cdot (\omega - a_m)} \equiv$$

*числитель - нулевой полюс*      *знаменатель - полюс*

Самая сложная задача разложения

Условия:

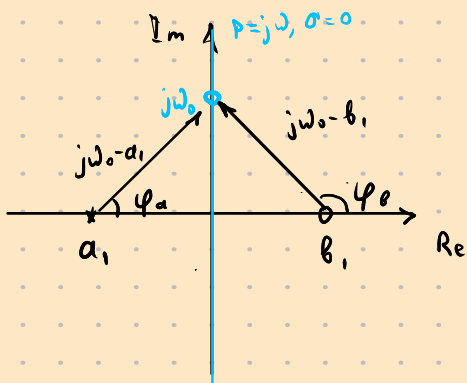
- Когда  $\omega = b_k$ ,  $|K| = 0$
- Когда  $\omega = a_k$ , возможен распад.

$$\equiv \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{|\omega - b_1| \cdot e^{j \arg(\omega - b_1)} \cdot \dots \cdot |\omega - b_n| \cdot e^{j \arg(\omega - b_n)}}{|\omega - a_1| \cdot e^{j \arg(\omega - a_1)} \cdot \dots \cdot |\omega - a_m| \cdot e^{j \arg(\omega - a_m)}} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^n |\omega - b_k|}{\prod_{p=1}^m |\omega - a_p|} \cdot e^{j \sum_{k=1}^n \arg(\omega - b_k) - j \sum_{p=1}^m \arg(\omega - a_p)}$$

"Нули" - корни числителя ( $b_i$ )

"Полюсы" - корни знаменателя ( $a_i$ )

$\omega$  должен быть комплексной ( $p$ ), иначе от комплексной  $\varphi$ -мы произойдет переход к  $b_{\text{вн}} - a_{\text{вн}}$ .



$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} = \frac{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + A_0} = \dots$$

По полюсам, нулям и  $\frac{b_0}{a_0}$  можно полностью восстановить  $\varphi$ -уго.

$p = j\omega + \sigma$  - при  $p$ -м комплексной записи,  $\sigma = 0$ .

Учтите, что нули и полюсы могут быть комплексными.

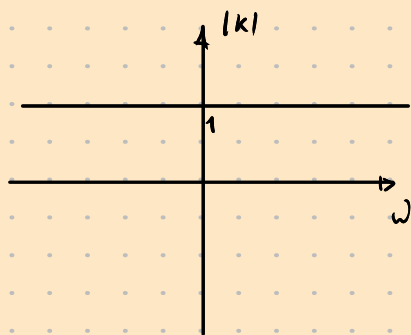
$$K(j\omega) = \frac{|j\omega_0 - b_1|}{|j\omega_0 - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega_0 - b_1) - \arg(j\omega_0 - a_1))}$$

$|K(j\omega)|$  = отношение длин векторов из нуля и из полюса

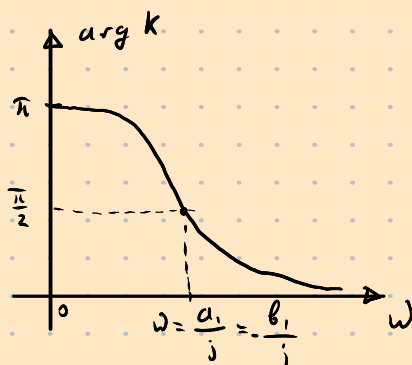
$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} - \text{АЧХ} \quad \arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A - \text{ФЧХ}$$



Пример  $a_1 = -b_1$

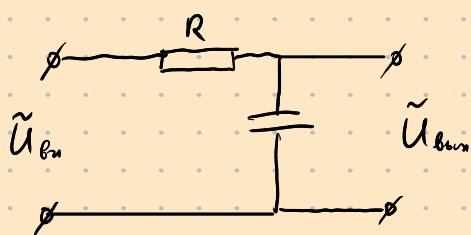


Aux



ФУХ

## Усередину RC-цепи



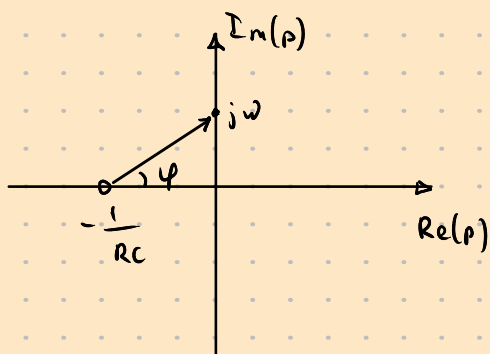
$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{\text{вых}}}{R + 1/j\omega C \cdot j\omega C \tilde{U}_{\text{вх}}} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC(j\omega + \frac{1}{RC})}$$

Так как цепь  
(первая цепь конденсатор)

$$= \frac{1}{RC(p + \frac{1}{RC})}$$

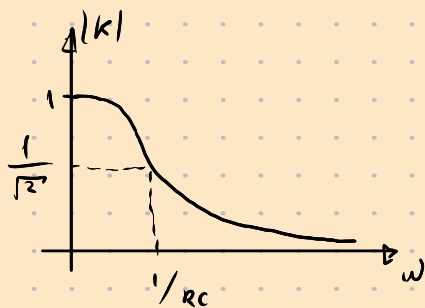
$$a_1 = -\frac{1}{RC}$$

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

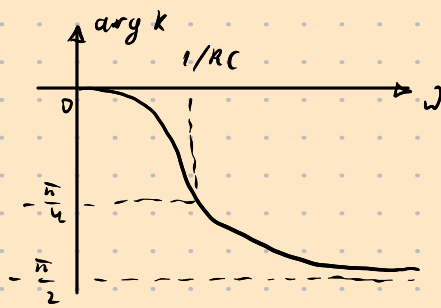


$$|K| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{R^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} - \text{АЧХ}$$

$$\arg K = -\arctg(\omega RC) - \text{ФУХ}$$

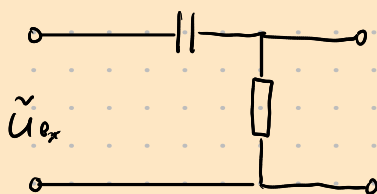


Aux



ФУХ

## Двухконтурная RC-цепочка



$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - 0}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



He берется по формуле / или берется численным способом. Ре сам, если канда 1 - берется по формуле

