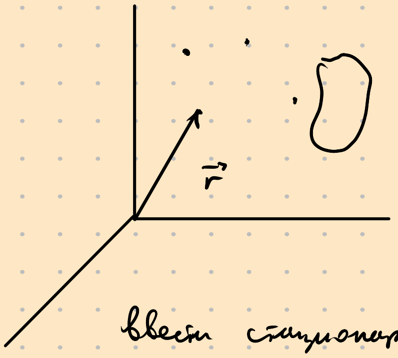
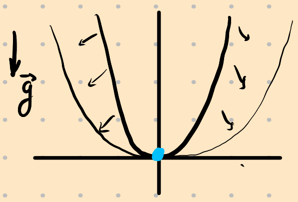
Литература: те же (Муравьёв, Гантмахер, Амелькин, Маркеев - новая версия)

Равновесие механических систем



Система нах-ся в равновесии в выбранной сис-ме коор-т $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \vec r \to \vec r = \vec r_0 = \overline{const}$

Далее будем рас-ивать стационарные системы (ур-я связи не зависят от времени) $\Rightarrow \exists$ возможность ввести стационарную параметризацию, и $\vec r = \vec r(q)$ после введ-я обобщ. коор-т.



У не стац. систем тоже могут быть полож. равновес. — см. картинку (кривая эволюционирует со временем)

$$(L_{,\dot k})^{\cdot} - L_{,k} = Q_k(q, \dot q, t)$$

$\Updownarrow$ — т.к. разрешимы отн. старших произв.

$$\begin{cases} \dot q = u \\ \dot u = f(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot x = x(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Положения равновесия нах-ся во вз. однознач. соотв. с точками вида

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□ ($\Leftarrow$) Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec r = \vec r(q_0) = \vec r_0 = const$

($\Rightarrow$) $\dot{\vec r} = \vec r_{,k} \dot q^k \equiv \vec 0$ (1), однако обобщ. коор-ты q вводились так, что

$\vec r_{,k} \delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q : \delta q^{1^2} + \ldots + \delta q^{n^2} \neq 0$.

Таким образом (1) $\Rightarrow \dot q = 0$ ∎

Критерий полож. равновесия стац. системы

Стац. сис-ма нах-ся в полож. равновесия $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$.

$\square$ $(T_{,\dot{k}})' - T_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$

$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\, \dot{q}^i \dot{q}^j$

$T_{,\dot{k}} = a_{kj}\, \dot{q}^j$ — т.к. a_{ij} — симметричная матрица!

$(T_{,\dot{k}})' = a_{kj} \ddot{q}^j + a_{kj,i}\, \dot{q}^i \dot{q}^j$

$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k}\, \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow a_{kj} \ddot{q}^j + (a_{kj,i} - \frac{1}{2} a_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t)$ (2)

Для полож. равновес. $q = q_0$, $\dot{q} = 0 \Rightarrow$

$0 = Q_k(q, \dot{q}, t)$

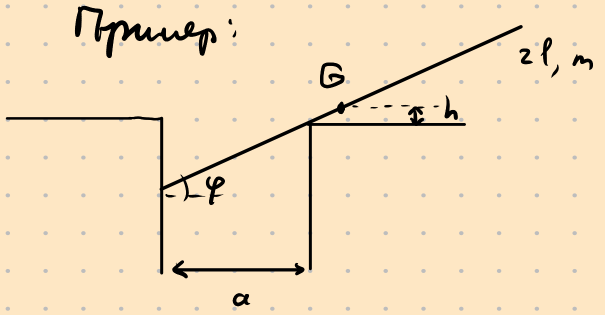
С другой стороны, если $Q(q_0, 0, t) = 0$, то (2) имеет решение $q = q_0$, $\dot{q} = 0$ — по т. Коши оно сущ-ет и единственно. ■

Однако если сила имеет вид, не удовл. т. Коши ($Q(\dots)$ не удовл. усл. Липшица), то критерий в обратную сторону не сработает — может быть > 1 реш-я (см. Маркеевича).

Следствие

Если $Q = -\nabla \Pi(q, t)$, то полож. равновес. соотв. стац. т. потенц. энергии: $\nabla \Pi(q, t) = 0$.

Пример:



т. G — центр масс (теперь всегда так будет).

$\Pi = mgh = mg(l \sin\varphi - a \operatorname{tg}\varphi)$

$\Pi_{,\varphi}: \quad l \cos\varphi_* - \frac{a}{\cos^2\varphi_*} = 0$

$\cos\varphi_* = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ — полож. равновес.

Теорема — принцип виртуальных перемещений

Полож. $\vec{r} = \vec{r}_0$ мех. сис-мы яв-ся полож. равновес. $\Leftrightarrow$ $\forall$ вирт. перемещ. $\delta\vec{r}$ из этого полож. $\delta A = \int f\, \delta\vec{r}\, dm = 0$

☐ (для стац. случая)

$\delta\vec{r} = \vec{r}_{,k}\,\delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec{r}_{,k}\cdot\vec{f}\,dm\cdot\delta q^k = Q_k\,\delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0$ -

- критерий полож. равновес. ■

Замечание 1 (фундаментальное)

Вообще, эта теорема более общая - она работает и для нестац. сис-м, в одну сторону док-во элементарно, но в другую на порядок сложнее.

☐ $\Rightarrow$ $\int(\vec{w}-\vec{f})\,\delta\vec{r}\,dm = 0$ - осн. ур-е динамики

$\vec{w} = 0$ в полож. равн. $\Rightarrow \int \vec{f}\,\delta\vec{r}\,dm = 0$ ■

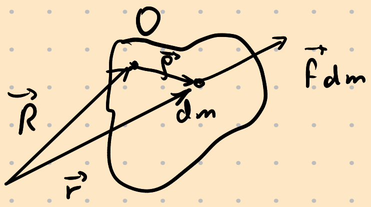
В обратную сторону - см. Маркеев.

Замечание 2 (прикладное)

Важно обратить внимание, что усл. теор-мы должно выполняться $\forall\,\delta\vec{r}$ из полож. равновес.

Пример

Условие равновесия твёрдого тела



$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

$\delta\vec{r} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\rho} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi}\times\vec{\rho}$, $\delta\vec{\varphi}$ - в-р малого поворота

$\delta A = \int \vec{f}\,dm\cdot\delta\vec{R} + \int \vec{f}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{\rho})\cdot dm =$

$= \vec{F}\cdot\delta\vec{R} + \delta\vec{\varphi}\cdot\underbrace{\int\vec{\rho}\times\vec{f}\,dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{R} + \vec{M}_0\cdot\delta\vec{\varphi} = 0 \quad \forall\,\delta\vec{R},\ \delta\vec{\varphi} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$ и $\vec{M}_0 = \vec{0}$

$\vec{F}$ - главный вектор сил, $\vec{M}_0$ - главный момент.

(полезно вспомнить динам. вып.)

Основы теории устойчивости

Рассматривается система общего вида в нормальной форме Коши:

$\dot{x} = F(x,t)$ (3) Здесь и далее: $x(t) = x(x_0, t)$

Реш-е $x = q = const$ наз-ся положением равновесия сист-мы (3).

Полож. равновес. $x = a$ всегда можно сместить в начало коор-т, в т. $x=0$:

$x \to x - a$.

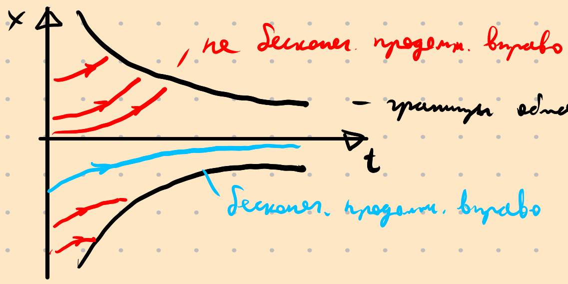
Далее будем считать, что $a = 0$ без ограничения общности.

x можно трактовать как отклонения от полож. равновесия.

Определение

Реш-е $x = x(x_0, t)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз-ся бесконечно продолжаемым вправо, если оно $\exists$ $\forall t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



Определение (уст. по Ляпунову)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) наз-ся уст. по Ляпунову, если

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0; +\infty) \to \|x(t)\| < \varepsilon$

$\|x(t)\| = \sqrt{x^i x^i}$

Замечание

1. Опр. уст. <=> равномерная непрерывность по нач. ус.
2. Из опр. уст. => реш-е $x(t)$ бесконечно продолж. вправо

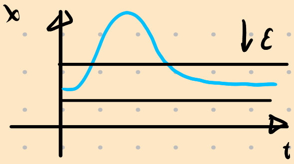
Определение (асимптот. уст.)

Полож. равновес. $x = 0$ сист. (3) – асимптотически устойчиво, если

1. $x=0$ – уст. по Ляпунову.
2. $\exists \Delta: \forall x_0, \|x_0\| < \Delta \to x(t)\Big|_{t\to\infty} \to 0$

$U_\Delta(0)$ – область притяжения.

Если забыть про (1):

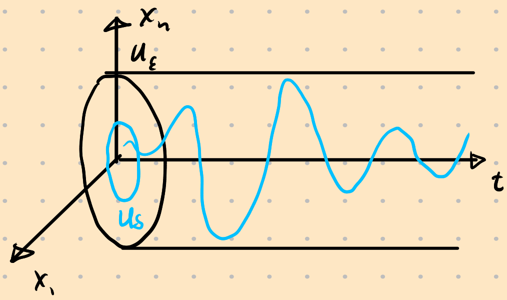


Определение (неуст.)

Полож. равновес. $x=0$ сис-мы (3) неуст., если $\exists\varepsilon: \forall\delta \to \exists x_0:$ $\|x_0\| < \delta$ $\exists t^*: \|x(t^*)\| > \varepsilon$, либо реш. $x(x_0, t)$ не явл. со прод. вправо.

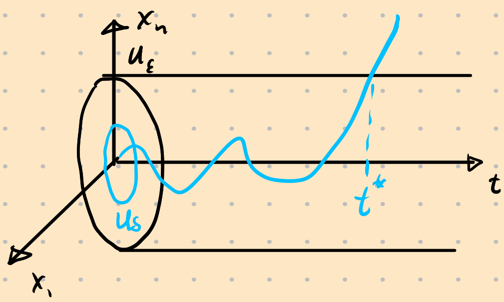
Качественные представления

① Устойчивое

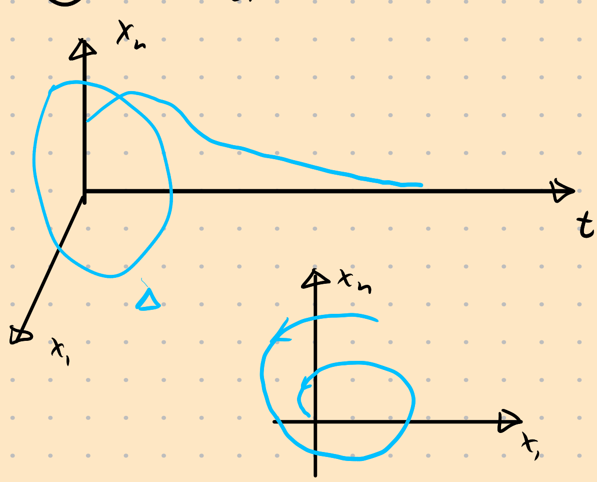


$\forall\varepsilon > 0 \to \exists\delta > 0$: траектория, начальная в δ-окрестности, остается внутри ε-окр-ти

② Неуст.



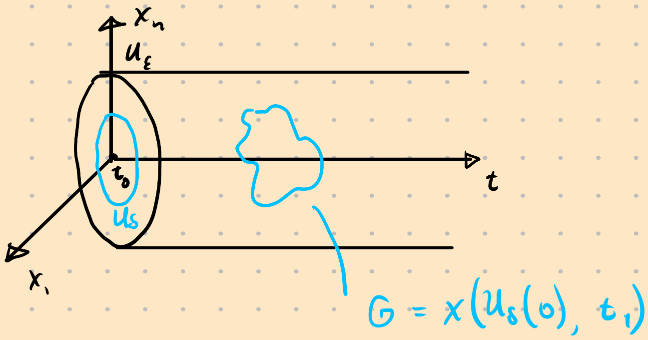
③ Асимптот.



Корректность понятия устойчивости

Если п.р. (положение равновесия) $x=0$ устойчиво для вр. t_0, то оно уст. $\forall t_1 > t_0$.

□ $x=0$ – уст. $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0 \to \exists \delta>0: \forall x_0 = x(t_0),\ \|x_0\|<\delta \to \|x(t)\|<\varepsilon$



Фазовый поток: G – мн-во реш-ий задачи Коши при заданном мн-ве нач. усл.

$x(x_0,t)$ – вполне однозн. и непр. (т. Коши) $\Rightarrow$ $\rho(\partial G, 0) > 0$ (расс-ие от $x=0$ до ∂G)

Выберем $\delta_1 = \rho$, $t_0 \mapsto t_1$, $\delta \mapsto \delta_1$ (замени) ■

Устойчивость траектории

$\dot x = X(x,t)$ $\qquad \psi$ – частное решение (траектория)

$\dot\psi = X(\psi,t)$

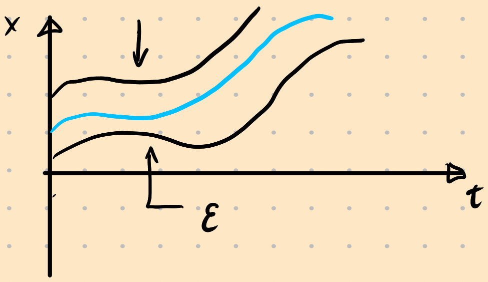
Рассмотрим решение $x=\psi+y$ (y – отклонение от траектории)

$$\dot x = \underbrace{\dot\psi}_{X(\psi,t)} + \dot y = X(\psi+y,t) \Rightarrow \dot y = X(\psi+y,t) - X(\psi,t) \quad (1)$$

$y=0$ – п.р. сис-мы (1)

Таким образом, если $y=0$ – устойчивое п.р., то тр-ия ψ наз-ся устойчивой.

Если $\forall$ тр-ия сис-мы устойчива, то сис-ма наз-ся устойчивой.



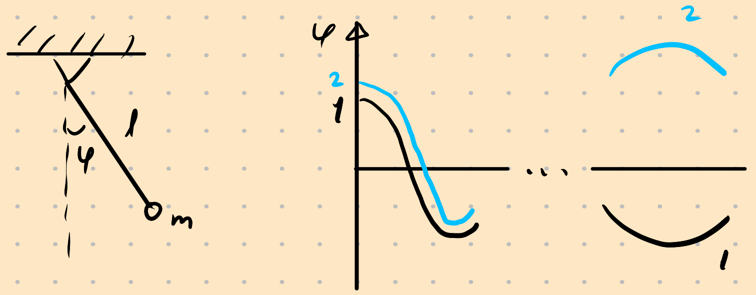
Все траектории, отлич. на δ от ψ в нач. усл., отличаются $<\varepsilon$ от ψ.

Если $y=0$ – неуст. $\Rightarrow$ тр-ия неуст., $y=0$ – асимпт. уст. $\Rightarrow$ тр-ия асимпт. уст.

Замечание Устойчивость траектории обозначает близость возмущённых траекторий в те же моменты времени.

Пример

Рас-им колеб. с конечной амплитудой



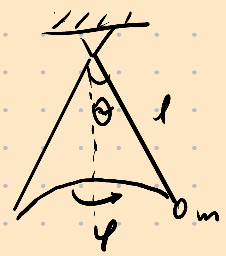
— расходятся (т.к. амплитуда разная => период разный).

Траектории, кроме близких к $\varphi=0$, неустойчивы.

О выборе переменных в задачах иссл-я устойчивости

Переменные не должны иметь особенностей в окр-ти п.р.

Пример



$\forall \theta_0 \ll 1$ $\exists$ реш. вида $\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 \to \infty$

П.р. на самом деле уст-во, $\dot{\varphi} \to \infty$ — следствие вырождения с.к.

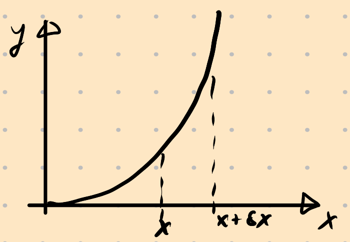
Пример

$\dot{x} = \frac{1}{2}$ $\qquad x = x_0 + \frac{t}{2}$

$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \forall$ траект. уст.

Замена $y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + t/2)^2$

$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + t/2)^2 = (x_0 + t/2)^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \to \infty$



Определение (ДЗП)

Замена $x = x(y,t)$, $x(0,t)=0$ наз-ся **допустимой**, если

1. $\det(X_{,y}) \neq 0$ в нек-рой окр-ти полож. равновес. (чтобы диффеур разрешился)
2. Замена $x = x(y,t)$ и обратная ей $y = y(x,t)$ непрерывны в 0 равномерно по t. (годится из 2 примера)

Допустимые замены не изменяют хар-ра устойчивости.

Устойчивость линейных систем

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $A(t)$ вообще говоря переменная

$\exists\ \psi(t)$ – траектория, $x = \psi + y$ – возмущённая тр-ия,

$\cancel{\dot\psi} + \dot y = Ay + \cancel{A\psi} + \cancel{f}$ =>

=> иссл-е уст. любой траектории сводится к иссл-ю уст. п.р. $y=0$ однородной сис-мы $\dot y = Ay$. (2)

Теорема

П.р. $y=0$ – уст. <=> $\forall$ реш-я сис-мы (2) ограничено.

□ (=>) $\exists\ \psi$ – неогр. реш., рас-им $y = \frac{\delta}{2} \frac{\psi(t)}{\|\psi(t_0)\|}$

$\|y(t_0)\| < \delta$, $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ => $y=0$ – неуст.

(<=) Если $\forall$ реш. огр. => огр. $\Phi(t,t_0)$ – фунд. матрица сист-мы, $\forall$ реш. (2) имеет вид $y = \Phi(t,t_0)\,y(t_0)$ =>

$$\begin{cases} \dot\Phi = A\Phi \\ \Phi(t_0,t_0) = E \end{cases}$$

=> $\|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$ ■

Замечание: норма матрицы: $\|\Phi\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$ – „максимальное растяжение"

С евклидовой нормой норма матрицы – max сингулярное число матрицы (собств. число матрицы $\Phi\Phi^T$)

Устойчивость систем с постоянной матрицей

$$\dot{y} = Ay, \qquad A = const \qquad (3)$$

Особый интерес представляет асимпт. устойчивость н.р. $y=0$.
Многие радиотех. сис-мы, сис-мы управления, отклонения от уст. полож. описываются именно так.

Решения (3): $y = he^{\lambda t}$ $\Rightarrow$ $P(\lambda) = \det(\lambda E - A) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – корни

Теорема

Н.р. $y=0$ сис-мы (3) асимпт. уст. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ $\forall k = 1, \ldots, n$

$\square$ $y(t) \sim P_{\sigma_k - 1}(t)\, e^{\lambda_k t}$ Если $\exists \lambda_k$: $\operatorname{Re}\lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \to \infty \Rightarrow$ неуст.

Если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \Rightarrow \forall$ реш. огр. $\Rightarrow$ н.р. $y=0$ уст. по пред. теор.

$y(t)\big|_{t\to\infty} \to 0 \Rightarrow$ н.р. $y=0$ – ас. уст. $\blacksquare$

(σ_k – кратность корня λ_k)

Определение

Многочлен $P(\lambda)$ наз-ся уст. если $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ $\forall k = 1, \ldots, n$
(уст. полином соотв. асимпт. уст. н.р. в сис-ме с const коэф.)

Теорема (необх. усл-е уст. полинома)

Если $P(\lambda)$ уст., то знаки его коэф-ов должны быть одинаковы.

$\square$ $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j > 0$ $\qquad \bar{\lambda}_j$ – тоже корень

$\lambda_k = -\gamma_k$, $\gamma_k > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod\left[(\lambda + \alpha_j - i\beta_j)(\lambda + \alpha_j + i\beta_j)\right]^{\sigma_j} \prod(\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k} =$$
$$= a_n \prod(\lambda^2 + 2\alpha_j\lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod(\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k}$$

Раскрытие скобок даст коэф-ты одного знака. $\blacksquare$

Замечание

Иногда это усл. формулируют в виде: $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$. Это подразумевает предв. приведение многочлена к виду $a_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$.

Критерии уст. рас-ия без док-в (см. Журавлёва или Демидовича)

Критерий Рауса - Гурвица

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$

Строится матрица Гурвица

$$\underset{n \times n}{\Gamma} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \ldots & & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_n$

По диагонали коэф-ты $a_1, a_2, \ldots$ Слева коэф-ты по возраст., справа - по убыванию.

P_λ - уст. $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$

! Есть разные формы записи Γ!

Замечание об усл. $a_0 > 0$

<u>Пример</u>

$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 \qquad \lambda_1 = -\dfrac{a_0}{a_1} \Rightarrow$ полином уст. $\Leftrightarrow \operatorname{sign} a_0 = \operatorname{sign} a_1$

$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0$ - ?? другое усл.??

„Парадокс" возник от того, что $P(\lambda)$ не приведён к виду $a_0 > 0$.

Приведение к виду $a_0 > 0$:

$P(\lambda) \to \dfrac{a_1}{a_0} \lambda + 1$, 1 заведомо > 0

(если $a_0 = 0$ то $P(\lambda)$ сразу неуст.: есть корень $\lambda = 0$)

$\Gamma = \left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)$ - теперь всё верно.

В форме Льенара - Шипара

$P(\lambda)$ - уст. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array}\right.$ (либо/либо)

Пример

$P(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad a_0 > 0$

1. $a_2 > 0, \quad a_1 > 0$

2. $\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = a_1 > 0$

$\Rightarrow P(\lambda)$ – уст. $\Leftrightarrow a_i > 0 \ \forall i = \overline{0,n}$

Устойчивость нелинейных систем

Первый метод Ляпунова исс-я уст-ти по линейному приближению

$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$

X – непр. дифф. в $x = 0$, а $X^i_{,jk}$ – $\exists$ и огр. в нек-ой окр-ти н.р. $x = 0$ (1)

Тогда:

$X = Ax + f(x), \quad A = [X^i_{,j}(0)]; \quad \|f(x)\| \leq a\|x\|^2, \quad a = const$

Система линейного приближения: $\dot{x} = Ax$

Теорема Ляпунова – „грубое свойство"

1. Пусть для сис-мы $\dot{x} = X(x)$ вып. усл. (1), тогда если н.р. системы линейного приближения $\dot{x} = Ax$ – ас. уст. $\Rightarrow$ н.р. $x = 0$ сис-мы $\dot{x} = X(x)$ – ас. уст.

2. Если $\exists \lambda_i$ – корень $\det(\lambda E - A) = 0$: $Re\ \lambda_i > 0 \Rightarrow$ н.р. $x = 0$ неуст. в обеих системах.

Лемма Гронуолла

$$u(t) \le C + \int_0^t u(t) f(t)\,dt, \qquad u, f, C > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) \le C \exp\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]$$

□ $$\frac{u(t) f(t)}{C + \int_0^t u(t') f(t')\,dt'} \le f(t)$$ — проинтегрируем: (числ. = произв. знам.)

$$\ln\left[C + \int_0^t u(t) f(t)\,dt\right] - \ln C \le \int_0^t f(t)\,dt$$

$$u(t) \le C + \int_0^t u(t) f(t)\,dt \le C \exp\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]$$

□ (т. Ляпунова): $x = e^{-ht} y(t)$, $2h = \min_k |\mathrm{Re}\,\lambda_k|$ — Замена

$$e^{-ht}\dot{y} - h e^{-ht} y = A y e^{-ht} + f(y e^{-ht})$$

$$\dot{y} = \underbrace{(A + hE)}_{B} y + e^{ht} f(y e^{-ht}) \qquad (2)$$

$\dot{y} = By$ — ас. уст.:

$\dot{x} = Ax$ — ас. уст. $\Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$

$$\dot{x} = (A + hE)x \Rightarrow \tilde{\lambda}_i = \lambda_i + h \Rightarrow \mathrm{Re}\,\tilde{\lambda}_i < 0 \qquad \left(h = \frac{\min_k |\mathrm{Re}\,\lambda_k|}{2}\right)$$

$$(2) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{(Bt - t)} e^{ht} f\left[y(t) e^{-ht}\right] dt$$

(из дифуров: $\dot{y} = By + f(t) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-t)} f(t)\,dt$)

Проверяется дифференцированием

$$\|y(t)\| \le \|e^{Bt}\| \cdot \|y_0\| + \int_0^t \|e^{B(t-t)}\| \cdot e^{ht} \cdot \|f(y e^{-ht})\|\,dt$$

$$\|f(x)\| \le a\|x\|^2 \Rightarrow \|f(y e^{-ht})\| \le a\|e^{-2ht}\| \cdot \|y\|^2$$

$$\|y(t)\| \le M\|y_0\| + \int_0^t M a e^{-ht} \|y(t)\|^2\,dt$$

Если $\|y_0\| \ll 1$, то $\exists t: \forall t \in [0; t] \to \|y(t)\| \le 1$ (в силу непр-ти)

Тогда $\|y(t)\| \le \|y(t)\|\ \forall t \in [0; t] \Rightarrow$ на этом интервале:

$\|y(t)\| \le M\|y_0\| + \int_0^t M a e^{-ht} \|y(t)\|\,dt$ — в чистом виде лемма Гронуолла

Тогда $\|y(t)\| \le M\|y_0\| \exp\left[\int_0^t M a e^{-ht}\,dt\right] \le K\|y_0\| \Rightarrow$

Этот интеграл сх-ся, т.е. равен const при $t \to \infty$, т.е. можно оценить сверху const

оценка максимального роста нормы

$\Rightarrow y(t)$ - ограничена. Данная оценка яв-ся оценкой $\|y(t)\|$ сверху, и верна $\forall t \in [0; \infty)$ (оценка роста, порядка, грубые оценки, что-то такое)

$x = e^{-ht} \underbrace{y(t)}_{\text{огр.}} \Big|_{t\to\infty} \longrightarrow 0 \Rightarrow$ п.р. $x = 0$ - ас. уст. ■

Док-во неустойчивости аналогично.

Замечание Т. Ляпунова неприменима, если $\exists \lambda_j = \underbrace{\pm i\omega}$ или $\lambda_j = 0$

периодические траектории линеаризованных сис-м

Такие период. траектории разрушаются сколь угодно малыми нелинейными добавками.

Второй (прямой) метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0.$

Вводится ф-ия Ляпунова: $V(x)$, $V(0) = 0$, $V(x) \in \mathbb{R}$ - непр. дифф.

Производная в силу системы от ф-ии Ляпунова: $\dot{V}_X = V_{,i} \cdot X^i = \nabla V \cdot X$

Знакоопределённость ф-ии Ляпунова: $V(x) > 0$ - полож. опред. $\Leftrightarrow V(x) > 0$ в нек. $\mathring{U}_\varepsilon(0)$. (в $x=0$ она всегда 0), для остальных случаев аналогично.

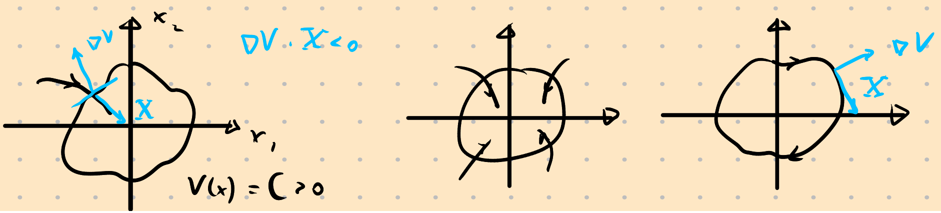
Как искать ф-ию Ляпунова, к сожалению, неясно.

Теорема: если в $U_\varepsilon(0)$ $\exists V(x)$: $V(x) > 0$ и $\dot{V}_X \leq 0$ (в опр. выше смысле) $\Rightarrow$ п.р. $x = 0$ - устойчиво.

□ Рас-им $U_\varepsilon(0)$. $V(x)$ - непр. $\Rightarrow \exists\, V^* = \min\limits_{\|x\| = \varepsilon} V(x)$ (min на $\partial U_\varepsilon(0)$), $V(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: $V(x) < V^*$ при $\|x\| < \delta$

Таким образом при x_0: $\|x_0\| < \delta$ $V[x(x_0,t)] < V^*$, т.к. $V[x(x_0,t)]$ - не возрастает (вдоль траектории нашей сис-мы $V(x)$ либо не изм., либо убывает, т.к. $\dot{V}_X(x) \leq 0$) $\Rightarrow \|x(x_0,t)\| < \varepsilon$



Следствие. **Т. Лагранжа - Дирихле**

Если $\Pi(q)$ консерв. мех. сис-мы имеет строгий min в п.р., то п.р. устойчиво

□ $V = E = T + \Pi = \frac{1}{2}\dot{q}^T \underset{>0}{A(q)}\,\dot{q} + \underset{>0}{\Pi(q)} > 0 \qquad (\Pi(0) = 0)$

$\dot{V}_L = 0$ (произв. в силу уравнений Лагранжа) ☒

Проверка условия $\Pi(q) \to \min$

$\Pi \simeq \cancel{\Pi(0)} + \cancel{\Pi_{,i}(0)} q^i + \frac{1}{2}\Pi_{,ij}(0) q^i q^j$ - разложение $\Pi(q)$ по q

$\Pi(0) \to 0$ - выбор уровня, $\Pi_{,i}(0) \to 0$ (критерий п.р.)

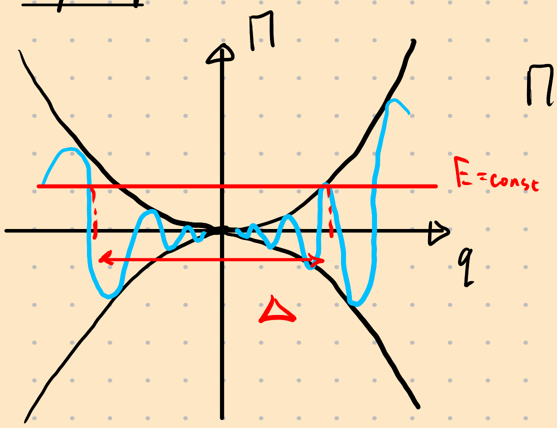
$\Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q$, C - матрица пот. энергии

Если $\Pi_2(q) > 0 \Rightarrow \Pi$ имеет стр. min (в $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(0)$).

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = C^T \qquad \Pi_2(q) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_i > 0 \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Замечание Т. Лагранжа - Дирихле даёт **достаточное** условие.

Пример



$$\Pi = \begin{cases} q^2 \sin\frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$

$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \Pi(q)$

$\Delta \big|_{E \to 0} \to 0 \Rightarrow$ п.р. уст., но минимума нет.

Теорема Ляпунова 1

Если $\exists\, q' : \Pi_2(q') < 0 \Rightarrow$ п. р. $q = 0$ неустойчиво.

□ Рас-им систему линейного прибл.:

$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\,\dot{q} \simeq \frac{1}{2}\dot{q}^T \underset{A = const}{A(0)}\,\dot{q}$

$\Pi = \Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q$

Ур-е Лагранжа: $A\ddot{q} + Cq = 0$

Замена: $q \mapsto U\theta$ (U - матрица, θ - столбец)

$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \underbrace{U^T A U^T}_{E} \dot{\theta}$

$\Pi = \frac{1}{2} \theta^T \underbrace{U^T C U}_{diag} \theta$

Т. о приведении пары форм: $\exists U: U^T A U = E$
$U^T C U = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = 0$ - новые ур-я Лагранжа $\quad \exists q' : \Pi_i(q') < 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ хотя бы один $\lambda_k < 0 \Rightarrow \theta_k \sim e^{\sqrt{|\lambda_k|}\, t} \Rightarrow$ по т. Ляпунова о неустойчивости по л.п. $q = 0$ - неуст. ■

Теорема Ляпунова 2

Если по членам наим. порядка разложения $\Pi(q) = \Pi_m(q) + \dots$ установлено, что Π имеет max $\Rightarrow$ п.р. $q = 0$ - неуст.

Теорема Барбашина - Красовского (60-е!)

$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0 \qquad (1)$

Если в $U_\varepsilon(0)$ $\exists V(x)$:

1. $\dot{V}_x \le 0$
2. $M\{x \mid \dot{V}_x(x) = 0\}$ - не содержит целых траекторий системы (1), кроме п.р. $x = 0$, тогда

a. Если $V(x) > 0 \Rightarrow x = 0$ - ас. ус. уст.

б. Если $V(x)$ не имеет min, вкл. нестрогий $\Rightarrow$ п.р. $x = 0$ - неуст.

□ <u>случай а</u> по т. Ляпунова, п.р. $x = 0$ - устойчиво. Докажем ас. уст.

Рас-им $x_0 = x(t_0)$: $\|x_0\| < \varepsilon$. Тогда

$V[x(x_0, t)]$ - монотонно $\downarrow$ и огр. снизу $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V^* = \lim\limits_{t \to \infty} V[x(x_0, t)]$

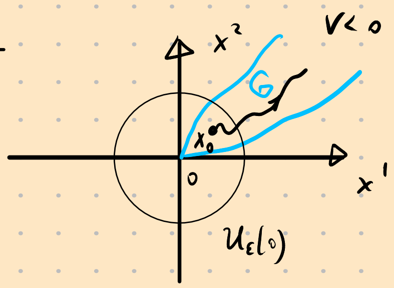
Если $V^* = 0 \Rightarrow x = 0$ - ас. уст.

Допустим противное: рассм. пос-ть $\{x(x_0, t_i)\}$ – огр.
(в силу устойчивости п.р. $x=0$) $\Rightarrow$ по т. Больцано – Вейерштрасса ..
$\exists$ сходящаяся подп. $\{x_k\} = \{x(x_0, t_{i_k})\}$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, $\quad V^* = V(x^*)$

Рас-им решение (1) $x(x^*, t)$ с нач. усл. $x(x^*, 0) = x^*$. Тогда, т.к. $x^* \neq 0$ (т.к. $V^* \neq 0$, а $V^* = 0$ в $x=0$) и $\dot V_x < 0$ на данной траектории $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, t.$ $V[x(x^*, t)] < V^*$ – противоречие.

Случай б



$G = \{x \mid V(x) < 0\}$

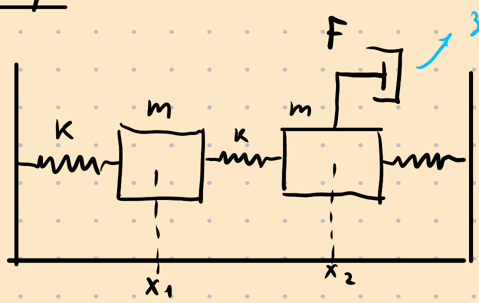
Выберем $x_0 \in U_\varepsilon(0) \cap G$.

Допустим, что $x = x(x_0, t)$ – уст. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ повторяя дословно пред. рассужд. получим, что $\exists \{x_k\} = \{x(x_0, t_k)\}$:
$V^* = \lim\limits_{k\to\infty} V[x_k] = V(x^*)$
Рас-им реш. $x(x^*, t)$ с нач. усл. $x(0) = x^* \Rightarrow \exists\, t: V[x(x^*, t)] < V^* \Rightarrow$
$\Rightarrow$ противоречие. ∎

Замечание В случае б вып. усл. 1 и 2 достаточно требовать только в области G.

Пример

здесь диссипативная сила F



$F = -\beta \dot x_2$

Исследуем п.р. на уст.:

$V = E > 0$; $\dot V_L = -\beta \dot x_2^2$

$M\{\dot x_2 = 0\}$ – не содержит целых траекторий, кроме п.р. (могут ли быть траектории, где второй груз стоит, а первый нет? Не может) $\Rightarrow$ по т. Б.-К. п.р. ас. уст.

Следствия из теоремы Барбашина – Красовского

① Теорема Ляпунова об асимпт. уст.

$\dot x = X(x)$, $X(0) = 0$

Если в $U_\varepsilon(0)$ $\exists\, V(x) > 0$: $\dot V_x < 0$ (всё в $\mathring{U}_\varepsilon(0)$), то $x = 0$ – ас. уст.

□ $M\{x = 0\}$ + Б.К. ■

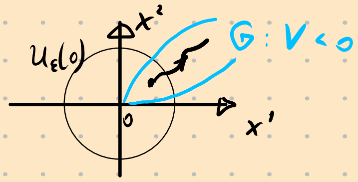
② Теорема Четаева

$\dot x = X(x)$, $X(0) = 0$

Если $\forall\, U_\varepsilon(0)$ $\exists\, V(x)$ и $\exists$ обл. $G\{x \mid V(x) < 0\}$, $\dot V_x < 0$ при $x \in G$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ п.р. $x = 0$ – неуст.

□ $M\{x = 0\}$ + Б.К. ■



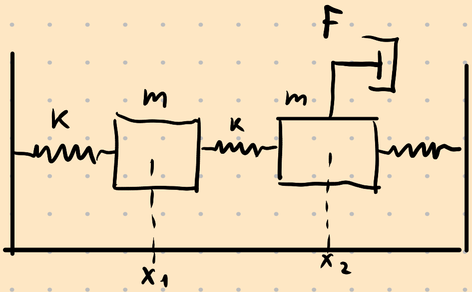
③ Обобщения т. Лагранжа – Дирихле

1. Если вып. усл. т. Л.-Д. и дополнительно действуют гироскопич. и/или диссипат. силы, то п.р. остаётся устойчивым.
2. Если вып. усл. т. Л.-Д. и дополнительно действуют диссипат. силы с полной диссипацией: $N = Q_i \dot q^i < 0$ (кроме $\dot q = 0$), то п.р. становится ас. уст.

□ $M\{\dot q = 0\}$ – наход. во взаимно-однозначном соотв. с п.р. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ целых траекторий в M не сущ-ет (кроме $\begin{pmatrix} q \\ \dot q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) $\Rightarrow$ Б.К. ■

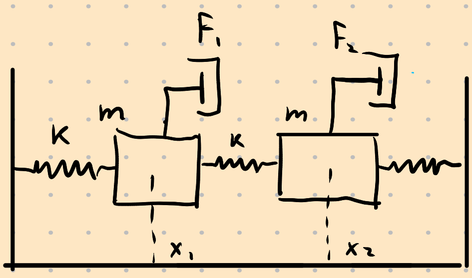
Замечание



– частичная диссипация

$N = -\beta \dot x_2^2 \le 0$

(как кв. форма от $\dot x_1$ и $\dot x_2$, она отриц. полуопред.)



– полная диссипация

$N = -\beta \dot x_1^2 - \beta \dot x_2^2 < 0$ ($\forall\, \dot x_1, \dot x_2$ кроме случая $\dot x_1 = \dot x_2 = 0$)

Основы теории бифуркации