

# Рамиев Александер Владимирович

Минимум

Члены совета: Акимов Рамиев, Чистяков

Бывшие члены: Журабек; Мархел; Гармашев (в коньсена); Бондаренко

## Аксиоматика классической механики

1. Аксиома  $\mathbb{R}^3$  - все объекты - в Евклидовомпр-де  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $\exists$  движение:  $R \rightarrow \mathbb{R}^3$  (в  $\mathbb{R}$ -время)
3.  $\exists$  мат. форма:  $(m, \vec{r})$ ,  $m = \text{const} > 0$ ,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4.  $\exists$  взаимодействие:  $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2) \rightarrow \exists \vec{F}$ -акт:  $\vec{F} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\begin{array}{c} \vec{F} \\ \longrightarrow \\ (m_1, \vec{r}_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} -\vec{F} \\ \longleftarrow \\ (m_2, \vec{r}_2) \end{array}$$

5.  $\exists$  час-ые координаты и час-ое параллелизм временем, такие что

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие час-ые наз-ся ИСО

## Инвариантность и ковариантность ур-ий

Учб.:  $\begin{cases} F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

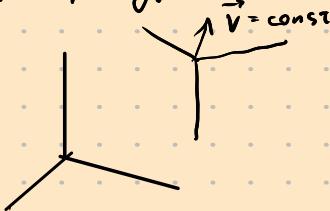
$$t = t(t', q'), q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0 - \text{же не } q\text{-ун!}$$

Тогда  $F_i$  учб.

Ковариантность: инвариантность правил сопровождения ур-ий.

Пример: ур-я №9 Несущая ковариантна относ. предп-ии Гамильт.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{v} t + A t, \quad A - \text{опис. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{предп. (группа) Гамильт.}}$$

$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = \text{const}$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longleftrightarrow m \ddot{\vec{r}'} = \vec{F}$$

## Універсальне обозначення

$$\textcircled{1} \quad \vec{r} \rightarrow r^i, \quad i = 1 \dots 3$$

$$\textcircled{2} \quad A \rightarrow a_{ij}$$

$$a_j \\ a_{ij} \quad \begin{matrix} \text{ненін універ} \\ \swarrow \end{matrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^i b^i \quad (\text{правило дужини})$$

$$A\vec{r} = \underbrace{a_{ij}}_{\text{другим універ}} \vec{r}^i$$

$$\textcircled{4} \quad a, \dots, h - \text{циклическое універса}$$

$x^a b^a - \exists i \in \mathbb{N} \text{ с номером } a; \text{ без суммирования!}$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$$

$$\text{Нпр.} \quad df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$$

## Координаты Торка

### Декартовы координаты

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

$$v = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{r}^2 \\ \dot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{скорость}$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}^1 \\ \ddot{r}^2 \\ \ddot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{ускорение}$$

### Сопровождающие трёхвекторы Торка



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \vec{r}_{,s} \quad \dot{s} = \vec{t} v$$

$$\vec{w} = \vec{t}_{,s} v^2 + \vec{v} \vec{v}$$

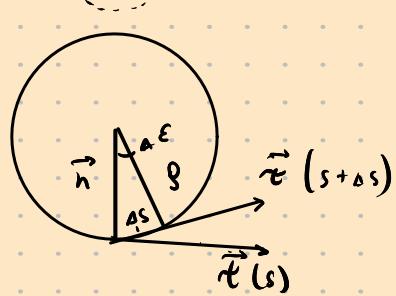


$$\Delta \vec{s} \approx g \Delta \epsilon$$

$$\Delta \vec{t} \approx \Delta \epsilon \vec{n} = \frac{4s}{g} \vec{n}$$

$$\vec{t}_{,s} = \frac{\vec{n}}{g} \Rightarrow \vec{w} = \underbrace{\vec{v} \vec{t}}_{w_t} + \underbrace{\frac{v^2}{g} \vec{n}}_{w_n}$$

тангенциал  
нормал



### Криволинейные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} - \text{криволинейные (однозначные) координаты}$$

$\det [r_{ij}] \neq 0!$  Канон.-однознач. коорд.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} - \text{цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i - \text{var} & i=1, 2, 3 \\ q^{j+i} - \text{fix} \end{cases} - \gamma_i - \text{координатные линии}$$



$$H_x = |\vec{g}_x| - \kappa r \text{ кривизна}$$

$$H_x = \sqrt{(r_{1x})^2 + (r_{2x})^2 + (r_{3x})^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{g}_a}{H_a} - \text{Оригинальный единичный вектор}$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$



### Скорость в кривой коорд.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^k}_{\text{координаты}} \vec{g}_k$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{v} = \sum \underbrace{H_k}_{\text{координаты}} \dot{q}^k \vec{e}_k$$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik} - \text{метрик. тензор}} \cdot \dot{q}^i \cdot \dot{q}^k = g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$g_{ik}$  - метрик. тензор

$$\textcircled{2} \quad v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\text{Если } \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}:$$

$$v^2 = \sum H_i \cdot (\dot{q}^i)^2$$

### Ускорение в кривой коорд.

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_x = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k}) \dot{r} + \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}_{,k}$$

Равнл. по  $q_k \Leftrightarrow$  формулы:

$$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i \quad \vec{r}_{,ki} = \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i \quad \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k} \quad (\vec{r}_{,k}, \quad v^2 = \vec{r} \cdot \vec{r})$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{,kk}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\ddot{\vec{r}}_{,k}}_{\frac{d\ddot{\vec{r}}}{d\dot{q}^k}} = \vec{r}_{,kk}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,kk} = \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k}$$

$$! \quad \dot{r}^i = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$③ \vec{w} \cdot \vec{g}_a = \frac{d}{dt} \left( v^2/2 \right)_{,a} - \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,a}$$

$$④ \vec{w} \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{M_a} \left[ \frac{d}{dt} \left( v^2/2 \right)_{,a} - \left( v^2/2 \right)_{,a} \right]$$

Оператор Эйнштейна - дифференциал

$$\xi_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_a = \xi_k \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

Кинематический закон Ньютона в виде вращения

$$q^a \rightarrow q^a + dq^a \quad - \text{расположение центра}$$

$$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{M_a} \cdot dq^a$$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_k$$

$$m \xi_k \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \vec{g}_k \quad Q_k - \text{относительная}$$

$$T = \frac{mv^2}{2} - \text{кин. энергия}$$

$$\xi_k(T) = Q_k$$

$$(6) \quad \frac{d}{dt} T_{,k} - T_{,k} = Q_k$$

$$\text{Другой вид: } \frac{1}{M_a} \xi_a(T) = \vec{F} \vec{e}_a$$

Понятие о тензорах

$$\vec{r}(q) - \text{зависимость} \quad q(q') - \text{замена переменной}$$

Как изменится скорость?

$$q^i = \underbrace{q^i}_{\text{координаты}} \cdot \underbrace{q^{i'}}_{\text{координаты}} - \text{координатный вектор (коорд. вектор, к-ром описано движение)} \\ (\text{тензор 2-го рода}) \quad \text{без смысла без Fok}$$

$$\dot{q} = J q'$$

Что связь с уравнением?

$$f(q) - \text{мат. оп-в}$$

$$f(q(q')) \quad f_{,i} = F_{,i} \cdot q^{i'} - \text{уравнение не то! Это ковариантный вектор} \\ (\text{ковариантный вектор - тензор 2-го рода})$$

$$\underbrace{\nabla' f}_{\text{second}} = \nabla f J \quad \nabla f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{yine cok dus}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$$

Paydaya (nemgy ko - u kenige-) teoreti, ean yedap-e oprimonuus  $((J^T)^{-1} = J)$

### Međurečni Tenzor

$$\vec{g}_x = \vec{r}_{,x} \quad \vec{r}(q(q)) - \text{zavera}$$

$$g_{xx} = \vec{r}_{,x} \cdot \vec{q}_{,x}^* = \vec{g}_x \cdot \vec{q}_{,x}^* \quad \text{- nepravil}, \vec{g}_x = \text{nevarjanim tenzor}$$

$$\text{Međurečni Tenzor: } \hat{V} = q^i \vec{g}_i \Rightarrow V^2 = \underbrace{g_{ii}}_{g_{ik}=g_i g_k} q^i q^k, \quad g_{ik} = g_i g_k - \text{međur. Tenzor!}$$

$$g_{i^1 k^1} = q_{,i^1}^i q_{,k^1}^k g_{ik} - \text{kozajudnim tenzor} \approx 20 \text{ parna sume } (0,2)$$

## Күрнәмәләндә төбәгесең тәс

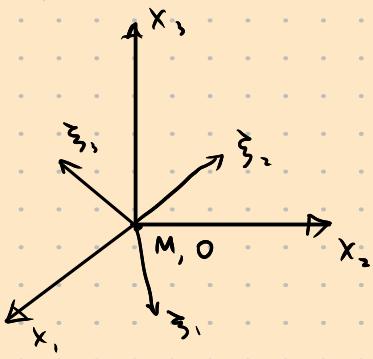
Төбәгесең тәс - сабакыннан мат. борк, рас-се шешү к-рләре не извеснедәр.



$M \in \text{тәс}$  - нәис ТТ (төбәгесең тәс)

Движение төбәгесең тәс - это движение нәиса и  
движение ТТ оның, нәисе (вращение).

## Вращение. Частичное вращение



Сабакындан нәисе координатында параллельное вращение.

- Частичное вращение

$$\boxed{\text{условие}} \quad \vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3 \\ \vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Неберегибадан сабакында ортасында 0x:

$$x \xrightarrow[3(\text{ортос. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\Theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



Частичное вращение

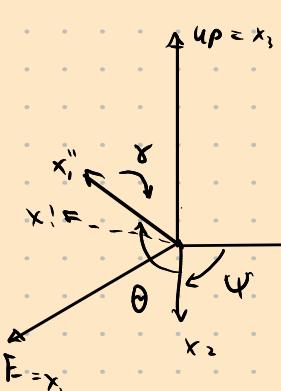
$\psi$  - урт. прецессия

$\Theta$  - урт. нутация

$\varphi$  - урт. собственного вращения

Параллельлы  $\psi$ ,  $\Theta$  и  $\varphi$  наның бо бүл-оғын орт. салынудан төбәгесең тәс  
бенде күрше нәисе.  $\Theta = \{0, \pi\}$

- Самые простые (карибетные) урт.



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\Theta} x'' \xrightarrow[2'']{\varphi} \xi$$

$\psi$  - күре

$\Theta$  - фиксация

$\varphi$  - крен

Вращение при  $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Мадаң сабакында урт. частичного вращения дайында берилгенде.

## Ортогональные матрицы



$$\vec{r}' = A \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 A^T A$$

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T A^T A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = I -$$

Определение орт. матрицы

### Часть 1

① Теорема Фурье - Крамера:  $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |\mathbb{E}| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

небольшой  
значительный небольшой

②  $A^T A = \mathbb{E} \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③  $\forall A, B$  - орт.  $\rightarrow C = AB$  - ортогональная

$$C^T C = B^T A^T \cdot AB = \mathbb{E}$$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

$G$  - группа

①  $\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G$

②  $A(BC) = (AB)C$

③  $\exists E \in G: \forall A \in G \rightarrow AE = EA = A$

④  $\forall A \in G \rightarrow \exists A^{-1} \in G: A^{-1} A = AA^{-1} = E$

Линия  $O(3)$  - группа ортогональных матриц:  $A^T A = \mathbb{E}$

$SO(3)$  - симм. орт. группы;  $\forall A \in SO(3) \rightarrow |A| = 1$  (группа поворотов)

⑤  $SO(3)$  - основная ми. инв. матрица 3-го ранга с неотрицательной формой.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' & \dots \\ a_{21}' & \dots \\ a_{31}' & \dots \end{pmatrix} = [\vec{e}_i]_e$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \stackrel{j \rightarrow i}{\Rightarrow} a_{ii}^1 = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{ii})$$

$A$  - матрица направляющих косинусов

Установлено взаим. однознач. соответствие между параметрами 3-го ранга  $A \in SO(3)$ .

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$   $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} \Rightarrow$  6 независимых строк  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  матрица из  $SO(3)$  — трехмерное многообразие в 9-мерном нр-ве матриц

$$\textcircled{6} \quad a_{ii}^i = \Delta_{ii}^i \quad A^{-1} = \frac{[\Delta_{ii}^i]^T}{|A|_{\infty}} = A^T \Rightarrow UTA$$

↑  
3x-1 A  
an. назначение

Собственные векторы и собственные значения ортогональных матриц

$$A \vec{r} = \lambda \vec{r} \Rightarrow |\lambda E - A| = 0 \quad \text{tr } A = a_{ii}^i$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr } A + \lambda \text{tr } A - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec{r}_1 : A \vec{r}_1 = \vec{r}_1$  — собственный вектор

Докажем, что  $|\lambda_0| = 1$

$$A \vec{r}_0 = \lambda_0 \vec{r}_0 \mid \cdot (\text{imp.-e})^+ \quad A^+ = \overline{A^T} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{коэффициент комп-а} \\ - \text{правило сопряжения} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_0^T A^+ A \vec{r}_0 = \lambda_0^+ \lambda_0 \cdot \vec{r}_0^T \vec{r}_0 \quad \text{Если } \vec{r}_0 = \vec{p} + i \vec{q}, \text{ то } \vec{r}_0^T \vec{r}_0 = \vec{p}^T \vec{p} + \vec{q}^T \vec{q} = |\vec{r}_0|^2 > 0$$

"F"                  "i  $|\lambda_0|^2$ "

$$|\vec{r}_0|^2 = |\lambda_0| \cdot |\vec{r}_0|^2 \Rightarrow |\lambda_0| = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = \frac{\text{tr } A - 1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{(\text{tr } A - 1)^2}{4}}$$

$$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i \vec{q} \quad \{ \vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q} \} - \text{набор ОКБ}$$

Умнож. нр-ва  $A$ :



$P \perp \vec{r}_1$ ,  $P$ -унмнож. нр-ва  $A$ .

$$\boxed{I \vec{r} \in P} \quad A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$$

$$(A \vec{r})^T \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}^T A^T}_{\vec{r}_1} \vec{r}_1 \Rightarrow A \vec{r} \in P$$

УД



Теорема Фризера о конечных наборах

$A$  — набор из 3. реда с неотр. ядрами  $\exists \vec{e}$  в ядре  $A$  конечн. набора,

однозн. назначение реда ( $\vec{e}$  — any суперсв-ство  $\vec{r}_1$ )

## Через ортогональную матрицу и нап-об Эйнштейна поверота



Видим  $\vec{e}$  как ось поворота,  $\vec{r}$  - лежащий в плоскости с  $\vec{e}$  в  $\vec{e}$ .

$\vec{r}$  подразумевается на  $\varphi$  онос.  $\vec{e}$  в  $\vec{r}$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \text{ где } \vec{r}_1 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}_2|}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3 = \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \cdot \vec{e} + (\vec{r} - \langle \vec{r}, \vec{e} \rangle \vec{e}) \cos \varphi + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi = \\ &= (\vec{e} \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top) \vec{r} \end{aligned}$$

$$\hat{\vec{e}} \vec{r} = \vec{e} \times \vec{r}; \quad \hat{\vec{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -\vec{e}^3 & \vec{e}^2 \\ \vec{e}^3 & 0 & -\vec{e}^1 \\ -\vec{e}^2 & \vec{e}^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad \vec{e} \vec{e}^\top = \begin{bmatrix} (\vec{e}')^2 & \vec{e}' \vec{e}^2 & \vec{e}' \vec{e}^3 \\ \vec{e}' \vec{e}^1 & \dots & \end{bmatrix}$$

Получим  $A = \vec{e} \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top$  (2) - правило куб. онос. доказан!

$$\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) = \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle \vec{e} - \vec{r}$$

$$\hat{\vec{e}}^2 \vec{r} = (\vec{e} \vec{e}^\top - \vec{e}) \vec{r}$$

$$(A = \vec{e} + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + \hat{\vec{e}}^2 (1 - \cos \varphi))$$

Пусть  $\vec{\varphi} = \vec{e} \varphi$  - вектор Эйнштейна (где  $\vec{e}$  единичный вектор - изменение не подходит)

\*  $\vec{\varphi} \hookrightarrow \hat{\vec{e}} - \cos \varphi$  - ортогон. ортогон. вектор (1).

Тогда можно нап-ти, что  $A = e^{\vec{\varphi}}$  (пог. формул)

## Выражение нап-об. Эин. поверота через эл-ти A $\in SO(3)$

$$2y_3(2) \Rightarrow \operatorname{tr} A = 3 \underbrace{\cos \varphi}_{\vec{e} \cos \varphi} + 1 \underbrace{- \cos \varphi}_{(1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$$A = [a_{ij}^i]$$

$$a_{ij}^i - a_{ii}^j = 2 \vec{e}^i \sin \varphi \Rightarrow \vec{e}^i = \frac{a_{ij}^i - a_{ii}^j}{2 \sin \varphi} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}; \text{ поэтому, что } \varphi \in [0; \pi]! \text{ т.к. } \vec{e} \text{ единич. вектор, что}$$

нап-об. поверота - это против часово вращение. Поверот в одн. направлении - движение  $-\vec{e}$ .

Оператор наименьшего квадрата. Угловая скорость Тейлора Тесс

Если  $\dot{\varphi} \ll 1$ , то

$A \approx E + \hat{\varphi}$  - оператор наименьшего квадрата

То близко к гр  $A \in SO(n)$ :

$A(t) \in SO(n); A(0) = E$

$$A^T A = E \quad | \frac{d}{dt}|_{t=0}$$

$$\overset{\cdot}{A}^T A + A^T \overset{\cdot}{A} \underset{\overset{\cdot}{E}}{|}_{t=0} = 0$$

$$\overset{\cdot}{A}^T (0) = -\overset{\cdot}{A}(0) \underset{\overset{\cdot}{\omega}}{|} \Rightarrow \overset{\cdot}{A}(0) - \text{кососимметрическое} \Rightarrow A \approx E + I + \hat{\omega}$$

Угловая скорость



$$\exists \Delta \vec{\varphi} = \vec{e}_A \Delta \varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \quad - \text{угловая скорость}$$

Распределение скоростей и ускорений в Тейлоре Тесс



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{g}}$$

$$g(t + \Delta t) \approx (E + \Delta \hat{\varphi}) \vec{g}(t)$$

$$\dot{\vec{g}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \vec{g} = \hat{\omega} \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{g} \quad - \text{сп-ва Эйнштейна}$$

$$\vec{W} = \vec{V} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) \quad - \text{сп-ва Равновесия}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

## Кинематический закон второго рода

Приложенное движение и абсолютное



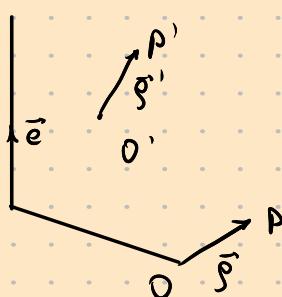
Бесшарое движение

Модель движения тела забыванием биномиального перемножения.

Перемещение тела на расстояние  $\Delta l = \overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e}$  и повернуть на  $\varphi$ .

**Теорема Макса:** Абсолютное движение тела забыванием биномиального перемножения.

Движение тела не зависит от бинома нами:



$$\vec{p}' = A \vec{p}$$

$$\vec{p}' \cdot \vec{e} = \vec{p}'^T \vec{e} = (A \vec{p})^T \vec{e} = \vec{p}^T \underline{A^T \vec{e}} = \vec{p}^T \vec{e}$$

Предмет  $\vec{p}'$  не  $\vec{e}$  не зависит.

Если  $\vec{p} = \overrightarrow{O O'}$  — не важно, как будитися  $O$ ,  $\overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e} = \text{const.}$

Равн. движение тела за время  $\Delta t$



$$\vec{V}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Тело совершает ускошение биномическое перемножение.

## Общее кинематическое уравнение

$$ГМТ: \vec{V} = \vec{V}_0 + \omega \times \vec{p} = \lambda \vec{\omega}$$

$$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}}_{\text{не заб. ор. номина}} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_0 = \lambda \omega^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} - \text{крутиз. извращен.}$$

не заб. ор.  
номина

Рассмотрим вращение:

$$\begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{oy} + \dots = \lambda \omega_y \\ V_{oz} + \dots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y \\ V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z \\ V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x \end{cases} \right\} = \frac{V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z} \quad \text{- выражение орт. кинематики. Быстро}$$

Несколько кинемат. формул  $\Leftrightarrow$  наим.  $\omega$ , уравнение орт.  $V_m$ .

$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Примеч.  $V_m$  - мин. скорость в тб. точке.



## Сложение вращений

### 1. Аксиоматическое вращение

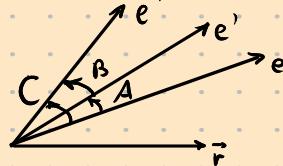


$$\vec{r}' = A \vec{r} \quad \vec{r}'' = B \vec{r}' = B A \vec{r}$$

$$C = BA$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

### 2. Пассивное вращение



$$\vec{r}^{(1)} = \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i^1 \quad \vec{e}_i^1 = A \vec{e}_i$$

(один и тот же вектор может быть разложен по разным базисам)

$$\vec{r} = \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i^1 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_i^1 = \sum_j r_i^{(1)} A_{ij} \vec{e}_j \\ (\text{все единичные}) \end{array} \right. = \sum_i r_i^{(1)} A \vec{e}_i$$

$B$  дает  $e'$ :

$$\vec{e}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = A \vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}' = A^T \vec{r}$$

$$\vec{r}^{(1)} = B^T \vec{r}^{(1)} = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$$

$$C = AB$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

## Пример 1



$$C - ? \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

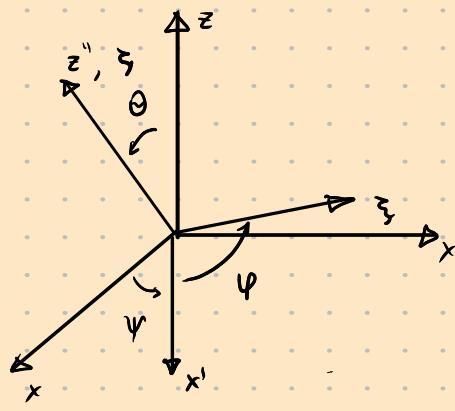
Дно, это означает в. зеркаль., т.е.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- координаты вращения даны в в. з.

$$C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Пример 2



$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

1. Вокруг  $z$  на  $\psi$
2. Вокруг  $x'$  на  $\theta$  - углов динамики
3. Вокруг  $z''$  на  $\varphi$

Однобугорное, наименее т. зрения

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- привод координат новому базису в шагах

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Кинематические уп-2 Пуассона для ортогональных матриц



$A$  - общее положение базиса тела с ненул. базисом  $x$

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta \hat{\varphi}_x) A(t) & - \text{авт. т. зп.} \\ A(t) (E + \Delta \hat{\varphi}_y) & - \text{нас. т. зп.} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{array}{c} \Delta \vec{\varphi} \leftrightarrow \Delta \hat{\varphi} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \vec{\omega} \leftrightarrow \hat{\omega} \end{array}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A \hat{\omega}_y \end{bmatrix} \quad (1) - \text{Кинем. уп-2 Пуассона.}$$

Если есть  $A(t_i)$  и  $\hat{\omega}_x(t)$  ибо  $\hat{\omega}_y(t)$  то используя эти уп-2, можно находит текущую ориентацию.

Матрица авт. и нас. векторов оговаривает: что это же, что оговаривает в  $X$  и в  $\hat{\omega}$ ? т.е. это симб. блоков предп-9.

Уп-2 не универсального назначения, но не ограничено.

Используются наимен. т. зрения (для них лучше строить на копии).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2,3 - 9 \text{ уравнений!}$$

Можно записать это в векторной форме

Причем - правило ОНБ, т.е. спин вращения  $A$  вращ. через первое вращ.

$$\vec{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2 \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \end{cases} \quad - \text{6 вр.-вн}$$

$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = \delta_{km}$  - проверка правильности инцидентирования в процессе

Легкое из (1):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_x = \vec{A} \vec{A}^T \\ \hat{\omega}_z = \vec{A}^T \vec{A} \end{cases} \quad - \text{знаем } A(t), \text{ можно вычислить } \omega_x(t) \text{ и } \omega_z(t)$$

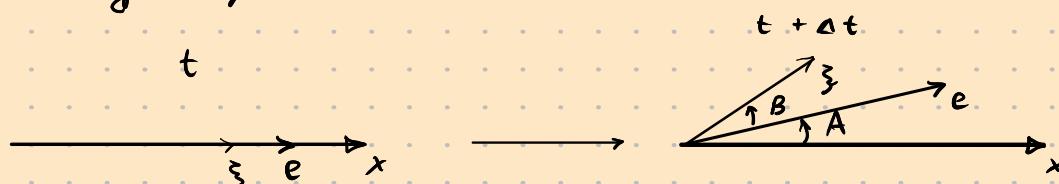
### Горизонтальное вращение Тейлора Теда



$\vec{\omega}^e, \vec{\epsilon}^e$  - горизонтальное вращение и перп. гориз. движение  
 $\vec{\omega}^r, \vec{\epsilon}^r$  - гор. син. и гор. зем. син. гориз. гориз. движение  
 Итак:  $\vec{\omega}, \vec{\epsilon}$  - общ. гор. син. и гор.

### 1. Угловая скорость

Связан с перем. в гориз. движении приведенное вращение, син. не оправдано с гориз. движением.



$$A \approx E + \Delta \hat{\phi}^e, \quad B \approx E + \Delta \hat{\phi}^r$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{\Delta \hat{\phi}^e + \Delta \hat{\phi}^r}_{\text{(нашествия)}} \quad (\text{нашествия})$$

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r$$

$\hat{\omega}^e$  - неподвижн. гор. син.

$\hat{\omega}^r$  - горизонтал. гор. син.

$\hat{\omega}$  - общ. гор. син.

## 2. Скорость винора в ненормированной форме



$$\vec{a} = \sum a_i \vec{e}_i - \text{прямой винор}$$

$$\dot{\vec{a}} = \sum \dot{a}_i \vec{e}_i + a_i \dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

акселерация/изменение прямого винора

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i \quad (\text{из к-ва Эйнера})$$

## 3. Чистое ускорение

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\omega}^e + \sum \omega^i \vec{e}_i$$

$$(\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^r + \vec{\omega}^e \times \vec{\omega}^r)$$

## 4. Осадочный винор

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{ч. винор вращения фигуры - осад. прям.} = \text{осад. прям.}$$

## Кинематические уравнения Эйнера

У кватернионов есть наименее избыточные (нанесены в заголовок).

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda} - \text{complement},$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}$$

Нормированное кватернион:  $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}; \quad |\vec{e}| = 1$

Действие — погружение ортогональной, и у кватернионов есть!

$R' = Ad R = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$  — приведенное представление

### Свойства $Ad R$

$$] R = r_0 + \vec{r}$$

$$1. \quad r'_0 = r_0$$

$$\left. \begin{aligned} R' &= r'_0 + \vec{r}' = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \\ \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \tilde{\vec{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \Rightarrow \text{rect } \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r'_0 = r_0$$

$$2. \quad \vec{r}' = A \vec{r}, \quad A \in O(3)$$

$$\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \sim \text{пр. предп} \Rightarrow \exists A: \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = A \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\|\vec{r}'\| = \|\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| \Rightarrow \|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\| \Rightarrow A \in O(3) \quad \text{Итд,}$$

Задача:  $\] \Lambda(t) \in \mathbb{H}, \quad \|\Lambda\| = 1, \quad \Lambda(0) = 1.$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Lambda \circ \tilde{\Lambda} &= 1 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) + \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R} \\ (\text{i.e. } \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = \dot{\Lambda}(0)) \end{aligned} \right.$$

Кватернион вида  $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$  & механизм действия соподчиняется с вектором

### Теорема

Предположим  $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$ , где  $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}$  задает движение погружения  
вокруг  $\vec{e}$  на угол  $\varphi$ .

D-бо

$$\Lambda \circ \vec{r} - \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \stackrel{\text{континуатор?}}{=} 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}$$

$$\Lambda \circ \vec{r} = \vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = (\vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + 2(\vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = \vec{r} + 2 \lambda_0 \vec{\lambda} \times \vec{r} + 2 \vec{\lambda} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}) = (E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2) \vec{r} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2$  — общий представитель наименее избыточного кватерниона

$$A = E + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \hat{e} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \hat{e}^2 = R + \sin \varphi \hat{e} + (1 - \cos \varphi) \hat{e}^2 -$$

Берілгенде  $A \in SO(3)$  резеке негізгі динамикада.

УТА

## Симметрия поворотов в кватернионах

1. Аксиоматика 1. зп.



$$\vec{r}' = L_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{L}_1, \quad \vec{r}'' = L_2 \circ \vec{r}' \circ \tilde{L}_2 \quad \vec{r}''' = L_n \circ \vec{r}'' \circ \tilde{L}_n$$

$$\vec{r}''' = L_2 \circ L_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{L}_2 \circ \tilde{L}_1 \Rightarrow L = L_2 \circ L_1,$$

$$L = L_n \circ \dots \circ L_1$$

Поворот в оном же порядке

2. Пасибната 1. зп.



$$\vec{r}'_e = L_1 \circ \vec{e}_e \circ \tilde{L}_1,$$

$$\vec{r} = r'_e \vec{e}'_e = L_1 r'_e \vec{e}_e \circ \tilde{L}_1,$$

$$\text{Важе } e: \vec{r} = \vec{r}_e \Rightarrow \vec{r}_e = L_1 \circ \vec{r}'_e \circ \tilde{L}_1,$$

$$\text{Тогда } \vec{r}'_e = \tilde{L}_1 \circ \vec{r}_e \circ L_1,$$

$$\vec{r}'_e = \tilde{L}_2 \circ \vec{r}'_e \circ L_2 = \tilde{L}_2 \circ L_1 \circ \vec{r}_e \circ L_1 \circ L_2 \Rightarrow L = L_1 \circ L_2$$

$$L = L_1 \circ \dots \circ L_n$$

Задача: коор-ти кватерниона в  $L$  описаны в базисах  $\{e_i\} \cup \{e_n\}$ , т.к.

$$L = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi - \text{угол}, \quad \text{коор-т } \vec{e} \text{ описаны в } \{e_i\} \cup \{e_n\}.$$

Коор-ти кватерниона в заданных базисах наз-ют параметрами Родрига - Раманудана.  
(заданный = важе, а при кватернионе поворачивает)

## Уравнение Гиацинда в кватернионах



$L(t)$  - поворот  $\Leftrightarrow$  орн.  $X$

$$L(t+\Delta t) = \begin{cases} L_x(\Delta t) \circ L(t) \\ L(t) \circ L_z(\Delta t) \end{cases}$$

$$L_x(\Delta t) = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \vec{\omega}_x \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 1 + \vec{\omega}_x \frac{\Delta \varphi}{2} - \text{кб. малого поворота}$$

$$\omega = \{\vec{x}, \vec{z}\}$$

$$\dot{L} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \vec{\omega}_x \circ L = \frac{1}{2} L \circ \vec{\omega}_x$$

Ур-е Гиацинда имені раздельності  $\dot{L}$ , инвариант, берілгенде орындырылады. Оның орнамен-тесі мей.

Оны изложимо: а) наим  $L(t)$  по  $\vec{\omega}_x(t)$  и  $L(0)$  б) наим  $\vec{\omega}_x$  по  $L(t)$

$$\vec{\omega}_x = 2\vec{i} \cdot \tilde{\vec{r}}, \quad \vec{\omega}_y = 2\tilde{\vec{r}} \cdot \vec{i}$$

Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами твердого тела, т.к.  $\vec{1}$  и  $-\vec{1}$  дают один и тот же поворот.

$$\|\vec{1}\| = 1 \Leftrightarrow \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad - S^3 \subset \mathbb{R}^4 \text{ - сфера}$$



один и тот же поворот

# Основные понятия и законов динамики

1° Объем континуума (часть из общей массы с раб. состоянием  $\vec{p}$ )



2° Центральная масса  $\vec{I} = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dm = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{m_i = \text{const}} f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \Delta m_i$   
Масса - это мера!

$$m = \int dm - \text{масса}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm - \text{центр масс}$$

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm - \text{импульс}$$

$$\vec{I} = \int f dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt} \int \vec{r} dm \Rightarrow \vec{p} = m \vec{V}_c$$

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm - \text{кин. энергия}$$

$$\vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm - \text{внешн. импульс}$$

Перенос и колебание кин. массы

$$\vec{K}_{o'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_o + \vec{r}_o - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{K}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{R}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{p} \times \vec{o'o} \quad \vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{o'o} \quad - \text{qp-импульс} \\ (\text{без об-ва подвижности в } \vec{K}_o)$$

Teorema Kérmána



$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

$$T = \frac{1}{2} \int (V_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot \vec{V}_r + V_r^2) dm$$

$$\int \vec{V}_r dm = \frac{d}{dt} \int \vec{p} dm = m \dot{\vec{p}}_c = 0 \quad (т.к. \vec{p}_c = 0)$$

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int V_r^2 dm$$

## Закони визначення грав. центру

$m \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{F}}$  - акселерація маси



$$dm \Rightarrow d\vec{F} = \vec{f} dm, \quad \vec{f} - \text{моменти сили}$$

$$\vec{f} = \vec{f}^e + \vec{f}^i$$

бескоштовне  
внутрішнє

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$



$$\dot{\vec{P}} = \int \dot{\vec{V}} dm = \int (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = \int \vec{f}^e dm = -d\vec{F}_i dm,$$

$$= \vec{R}^e$$

$$\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e, \quad \vec{R}^e - \text{задовільний вектор балансу сили}$$

$$\dot{\vec{P}} = m \ddot{\vec{V}}_c \Rightarrow m \ddot{\vec{V}}_c = \vec{R}^e$$

- $m \ddot{\vec{r}}_c = \vec{R}^e$  - теорема про збереження центра мас

$$\dot{\vec{K}}_o = \frac{\int (\vec{V} - \vec{V}_o) \times \vec{V} dm}{m \vec{V}_o \times \vec{V}_c} + \frac{\int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm}{M_o^e}$$

- $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^e - m \vec{V}_o \times \vec{V}_c$  - теорема про збереження кінетичного моменту

$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm \Rightarrow \dot{T} = \int \vec{V} \cdot \ddot{\vec{V}} dm = \int \vec{V} \cdot (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = N^e + N^i$$

- $\dot{T} = N^e + N^i$

## Додаткові теореми гармонічного в руху

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{W}} = \ddot{\vec{W}}^r + \ddot{\vec{W}}^e + \ddot{\vec{W}}^c = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$

$$\ddot{\vec{W}}^r = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^e}_{\vec{j}^e} - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^c}_{\vec{j}^c} \quad \vec{j}^e, \vec{j}^c - \text{моменти непорівності та кутомістивих сил}$$



$$\vec{j}^e = -\vec{w}_o - \vec{\epsilon} \times \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g})$$

$$\vec{j}^c = -2\vec{\omega} \times \vec{V}^r$$

- $\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{ex} + \vec{R}^e + \vec{R}^c$

- $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^{ex} + \vec{M}_o^e + \vec{M}_o^c - m \vec{V}_o^r \times \vec{V}_c^r$

- $\dot{T} = N^{ex} + N^e + N^i$

$$\vec{j}^c = -2\vec{\omega} \times \vec{V}^r \quad n = \vec{V}^r \cdot \vec{j}^c = 0 \quad \text{- нульовий кутомістивий сил}$$



$\vec{g}$

### Замечание

При решении задач не всегда удобно  
использовать гравитацию в форме приведенное и  
иметь гибкую систему координат.



$$\vec{R}^e = - \int \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{g}) dm = - m \vec{\omega} \times (\vec{r}_c \times \vec{g}_c)$$



$$\vec{M}_o^e \neq \frac{1}{2} \vec{R}^e l_{\text{rod}}$$

Но это не всегда удобно, а не упрощает  $\vec{R}^e$  в конечном итоге.

### Одномерные системы, движущиеся на плоскости



$$\vec{M}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{f} dm \quad (\text{здесь } \vec{f}^i \text{ и } \vec{f}^e)$$

$$\vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{O}'O \times \vec{R}, \quad \vec{R} = \int \vec{f} dm$$

$$\begin{cases} \vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{R} \times \vec{O}' \\ \vec{V}_o = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{O}' \end{cases} \quad - \text{стационарные и неподвижные}$$

Несколько моделей центра масс, примененных к движению Тела, obtained в зависимости от того какого центра мы хотим выбрать.



Если  $\vec{M}_o = 0$ , то все же есть способы подавить движение.

### Квазинеоднородные тела

$$d\vec{r} \neq \vec{F} \quad \delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} - движение под действием$$

$$N \approx \vec{F} \cdot \vec{v}$$

① Если  $N = \vec{F} \cdot \vec{v} \leq 0$ , то  $\vec{F}$  - движущее. Если  $N > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0$ , то  $\vec{F}$  - сопротивление.

Пример:  $\vec{F} = -\beta \vec{V}$

② Еслай  $N = 0$ , то  $F$  - гиростатический

Пример:  $\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$ ,  $\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}$

③  $F$  ноз. а потенциалын, еслай  $\exists \Pi(\vec{r}, t)$ :  $\vec{F} = -\nabla \Pi$

**Күмбезлік потенциалын**

$\vec{F}(\vec{r}, t)$  - потенциалда  $\Leftrightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} \Big|_{t=\text{const}} = 0$

D-бұ

Еслай  $\vec{F} = -\nabla \Pi$ , т.к.  $\oint \nabla \Pi d\vec{r} = 0$

Еслай  $\oint = 0$ , т.к.  $A(r, t) = \int_0^r \vec{F} d\vec{r}$

$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \epsilon \vec{e}_i$ ,  $t \in [0, \Delta h]$   
Lagrange's  
variables

$\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\dots, r_0 + \epsilon, \dots) d\epsilon \stackrel{\text{т.о.}}{=} F_i(\dots, r_0 + \theta, \dots) \Delta h$

$F_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \Pi = -A$   $\nabla \Pi$



Еслай  $F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$  (1)

B  $\mathbb{R}^3$  үздөнгө (1)  $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ .

Одесінде жаңа дәрі көрсетіліп, оның берілгенін деңгээлдерде.

Еслай  $\vec{F} = -\nabla \Pi(\vec{r})$  (потенциалдың сандықшылығы), т.к.

$dT = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla \Pi d\vec{r} = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$

**Движенине Торин б. үзіліштіктерінде наше**



$$\vec{K}_0 = \text{const} \quad (\vec{M}_0 = \vec{0})$$

$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{const} \Rightarrow \vec{r} \text{ и } \vec{V} \text{ берілген кезеңде } \vec{K}_0 \text{ дақылданады}$

$$\begin{cases} m(r - r\dot{\varphi}^2) = F = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{r} & -\text{закон Ньютона} \\ \frac{1}{r} (r^2 \dot{\varphi}^2) = 0 & \text{жерде } \vec{r} \perp \vec{V} \end{cases}$$

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = \text{const}$$





$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const} - \text{diskopasalas ekspresis}$$

Biopāri zēzēm Kēmpē

## Tensor инерции т. реа и его свойства



$$\vec{K}_o = \int \vec{p} \times \vec{v} dm = \int \vec{p} \times (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \int \underbrace{\vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p})}_{-\hat{p}\hat{\omega}} dm + m \vec{p}_c \times \vec{v}_o \quad (1)$$

$\hat{p}^T \hat{p} dm \vec{j}$

$J_o$  - tensor инерции звёздного тела в т. О



$$p^2 = (\vec{p} \times \vec{e}) \cdot (\vec{p} \times \vec{e}) = (\hat{p} \times \vec{e})^T \hat{p} \vec{e} = \vec{e}^T \hat{p}^T \hat{p} \vec{e}$$

$j(\vec{p}) = \hat{p}^T \hat{p}$  - tensor квадратичных расстояний

$$p^2 = \vec{e}^T j(\vec{p}) \vec{e}$$

$$\vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) = p^2 \vec{\omega} - \langle \vec{p} \cdot \vec{\omega} \rangle \vec{p} = (p^2 E - \vec{p} \hat{p}^T) \vec{\omega}$$

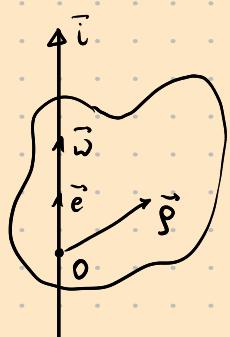
$$\hat{p}^T \hat{p} = p^2 E - p p^T$$

$$J_o = \int (p^2 E - p p^T) dm \Rightarrow J_o = \begin{pmatrix} \int (p_1^2 + p_3^2) dm & -\int p_1 p_2 dm & -\int p_1 p_3 dm \\ -\int p_2 p_1 dm & \int (p_2^2 + p_3^2) dm & -\int p_2 p_3 dm \\ -\int p_3 p_1 dm & -\int p_3 p_2 dm & \int (p_1^2 + p_2^2) dm \end{pmatrix}$$

$J_{o,ii}$  - осевые моменты инерции

$J_{o,i+j}$  - кинет. момент инерции

## Момент инерции относ. оси



$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \underset{\vec{\omega} = \omega \vec{e}}{=} \frac{\omega^2}{2} \vec{e}^T J_o \vec{e}$$

$$J_e = \vec{e}^T J_o \vec{e}$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_o \vec{\omega} = \frac{J_e \omega^2}{2}$$

$J_e$  - момент инерции относ. оси

## Балансировка гибкого тела

$$\vec{K}_o = \underbrace{\vec{K}_c}_{(1) \Rightarrow \vec{J}_c \vec{\omega}} + \vec{CO} \times \underbrace{\vec{P}}_{m \vec{V}_c} = \vec{J}_c \vec{\omega} + \vec{CO} \times m \vec{V}_c$$

O - вращение (норм. для реа)

$$T = m \frac{\vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \Rightarrow T = \frac{m \vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{J}_c \vec{\omega}$$

## Чисівка $J_0$ при репозиції в новій осі



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

$$J_0 = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm + \hat{a}^\top \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a} = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a} + m \hat{\rho}' \cdot \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

$$\Rightarrow J_0 = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

Рекуррентна формула Фокінса - Міннера

$$\Rightarrow J_{0e} = \vec{e}^\top J_e \vec{e} + m \vec{e}^\top j(\vec{a}) \vec{e} = J_{ce} + m p_i^2$$

Побудовімо це.

$$\begin{aligned} & \text{Для } e' \quad J_{0e} = \rho_e^2 F - \vec{\rho}_e \vec{\rho}_e^\top \quad \vec{\rho}_e = \rho_{e'} \quad \text{т.е. } S \in SO(3) \\ & \text{Для } e \quad \vec{\rho}_e = S^\top \vec{\rho}_{e'} \Rightarrow \vec{\rho}_0 = S \vec{\rho}_{e'} \\ & J_{0e} = \vec{\rho}_{e'}^\top - S \vec{\rho}_{e'} \cdot \vec{\rho}_{e'}^\top S^\top = S (\rho_{e'}^2 F - \rho_{e'} \cdot \rho_{e'}^\top) S^\top \end{aligned}$$

Таким образом,

$J_{0e} = S^\top J_{0e} S$  - с т.зр. ум. андро  $J_0$  преобразуется в кватерніонне дроби  
 $\Rightarrow$  - правильності закону преобразування тензора

У нас маємо зберігши  $\exists S$ :

$$S^\top J_0 S = \text{diag}[A, B, C], \quad A, B, C > 0$$

Квадратичні умови на най-важливіші осі  $B + D$ . Если  $D \equiv 0$ , то осі най-важливішими є

$A, B, C$  - масивні (масивні квадратичні) моменти інерції

## Експоненція інерції

$$\text{Ось один } \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{J_e}} \vec{e} \quad \vec{r}^\top J_0 \vec{r} = \frac{1}{J_e} J_e = 1$$

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^\top J_0 \vec{r} - 1 = 0$$

В масивні осі:  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$ ,  $x, y, z$ -координати  $\vec{r}$



Формула в умові побудови конформної

## Неконформне мабнин оең күннелгүш

1<sup>о</sup> Однорін аярай - нет гомоморфизм симметрия



$$\text{В н. оен: } J_0 \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$

$$\lambda_i = \{A, B, C\}, \vec{x}_i - оған деген$$

Дир неконформне мабнин оең нында ресми зертгүй  
нақ-ақ кодиб. зерт.

$$(J_0 - \lambda E) h = 0$$

$$\det(\lambda E - J_0) = 0 \Rightarrow \lambda_i \rightarrow \{A, B, C\}$$

$$\lambda_i \rightarrow h_i - \text{кодиб. белгілдік} \quad \vec{x}_i = \frac{h_i}{\|h_i\|} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \}$$

2<sup>о</sup> Ненесозабарне симметрия

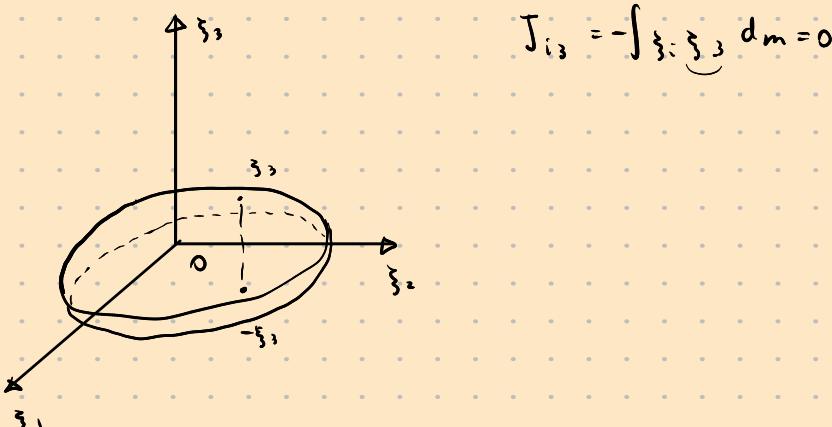


$\xi_3$  - Ота гендер. симметрия  $\Rightarrow$  н. оен

$$J_{i_3} = - \int \xi_i \xi_3 dm$$

$$\forall \xi_i \rightarrow \exists - \xi_i \Rightarrow J_{i_3} = 0 \quad \forall i + 3$$

3<sup>о</sup> Нернек. массаға симметрия



$$J_{i_3} = - \int \xi_i \xi_3 dm = 0$$

## Проделанній виг T u K<sub>o</sub>

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{J}_c \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) ; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_o = \mathbf{J}_c \vec{\omega} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c$$

# Определение гибкости тела с неограниченной формой



Задача определить \$J\$ для \$x =

$\vec{\omega}(t)$ . Наиболее удобное представление

Если \$O\$ - неогр. т., то

$$\vec{K} = \int \vec{g} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) dm = J \vec{\omega}, \quad \vec{k}_0 = \vec{K}, \quad J_0 = J$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{g})^2 dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega},$$

Данные выражения применимы приближенно для тел, имеющих форму т. о.

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} A_p \\ B_q \\ C_r \end{bmatrix}, \quad J = \text{diag}[A, B, C]$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2} (A_p^2 + B_q^2 + C_r^2)$$

## Динамическое уравнение Эйнштейна

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M} \Rightarrow B \text{ также можно обозн.}$$

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Покажем:  $\dot{\vec{K}} = K_i \ddot{\xi}_i$

$$\dot{\vec{K}} = \underbrace{\frac{d\vec{K}}{dt}}_{\vec{d}\vec{K}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{K}}_{\vec{\omega} \times \vec{K}} \quad \dot{\xi}_i = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_i$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A\ddot{p} + (C-B)\dot{q}r = M_1 \\ B\ddot{q} + (A-C)\dot{r}p = M_2 \\ C\ddot{r} + (B-A)\dot{p}q = M_3 \end{cases}$$

- Динам. уравн. 3-х-м. тела (1)

$\vec{M}_s = \vec{M}_s(\vec{\Theta}, \vec{\omega})(2)$ , где  $\vec{\Theta}$  - радиоп. & магн. ориентации (аналогично  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ )

$\vec{\Theta}$  - единицы из  $SO(3)$ , кватернионы, представляющие...

В одних и тех же (1) и (2) не совпадают.

Две эти зависимости могут быть заданы уравнениями для магн. ориентации:

$\vec{\Theta} = f_0(\vec{\theta}, \vec{\omega})$  (3)-күнеш үр-ж в көз-жан бүгі (үр-ж Ридонд, күнешінде  
үр-ж динеме, ...)

- Көз-жан  $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$  - заманыңас в мөнде жағынан тұрақтапады.

(заманыңас зертте ≈ жалғыз көз-жан үр-ж көз-ж негенен)

- Көз-жан  $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$  не инвертируется в квадратиках, в гене глумме т.б. ғана с  
менди. Терін в оғындаудан наше көзене не инвер. в квадратиках.



Сүйз-ет 3 сурал инвер-сан зерттегінде Аар. яс-жин -  
ауран динеме, Ларинна и Кобалевская.

### ① Сүйзін динеме



### ② Сүйзін Ларинна



Көзмене жиғаш. инвертируя:

$$A = B \neq C$$

$$u.g. u. \in \mathbb{R}$$

### ③ Сүйзін Кобалевской



$$A = B = C$$

T. С үлемін на экваториальной плоскости инвертируя  
инвертируем.

Градиенттер инвертируемас сүйзен как правило присо.

А инвертируемас бодын мөнін тұрақташып жиғаш. жағе.

Егер бул ауран, инвертируемас при оптик. жағ. жи-ж.

# Лекция №1

① Тривое універсальне рівняння кв. згублення

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 & A \geq B \geq C, \quad A > C \\ B\dot{q} + (A-C)pr = 0 & (A=B=C - \text{спец. випадок: } \vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \text{const}) \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 & \text{если } \vec{\omega} \text{ и } \vec{\zeta} - \text{const, то и } \vec{x} \text{ const,} \\ & \text{также } \vec{\zeta} - \text{независим., } \vec{x} - \text{независим.} \end{cases} \quad (4)$$

Універсале згублення кв. (4):

$$A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 = 2T = \text{const} \quad (5)$$

$$\vec{K}_x = \text{const} \Rightarrow K_3^2 = \text{const} \Leftrightarrow A^2\dot{p}^2 + B^2\dot{q}^2 + C^2\dot{r}^2 = \text{const} \quad (6)$$

Відповідно до (5) та (6) - непланарне універсале рівняння (4)

- Задумано: якщо  $\dot{x} = F(x, t)$  - кв. згублення, то  $G(t, x)$  - непланарне універсале  $\Leftrightarrow$
- $$\Leftrightarrow G(t, \underbrace{x(x_0, t_0, t)}_{\text{Реш. в з. в.м.}}) = \text{const} = G_0$$

Критерій н.в.:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + F_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{правильність кв. згублення.}$$

$$2A\dot{p}\dot{p} + 2B\dot{q}\dot{q} + 2C\dot{r}\dot{r} = 2(B-C)pqr + 2(C-A)pqr + 2(A-B)pqr = 0$$

Если  $A > C$ , то (5) та (6)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} p &= \pm \sqrt{a - Bq^2} \quad (7) \quad a, b, c, d - \text{какие - то const} \\ r &= \pm \sqrt{c - dq^2} \end{aligned}$$

Погодимо  $b_0$  з е. згублення (4):

$$B\dot{q} \pm (A-C)\sqrt{a - Bq^2} \sqrt{c - dq^2} = 0$$

$$\pm \int \frac{dq}{\sqrt{a - Bq^2} \cdot \sqrt{c - dq^2}} = \frac{C-A}{B} t + \text{const} \Rightarrow q(t) \quad (8) - \text{змінн. згублення універсале} \\ (\text{багаторазовий залежн. від часу})$$

Погодимо (8) з (7), находимо  $p(t)$ ,  $r(t)$ .



Въгълът между двете  $x$  оси, когато  $\vec{K} \parallel \vec{x}_3$  и градуси  
две са  $\psi, \theta, \varphi$ .

$$\vec{K}_3 = \begin{bmatrix} Ap(t) \\ Bq(t) \\ Cr(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$K = |\vec{K}_3| = \text{const} \quad \dot{\gamma} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (\text{из кинемат.})$$

↓

$$\cos \theta(t) = \frac{Cr(t)}{K}$$

$$\tan \psi(t) = \frac{Ap(t)}{Bq(t)}$$

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_0^t f_\gamma(t) dt$$

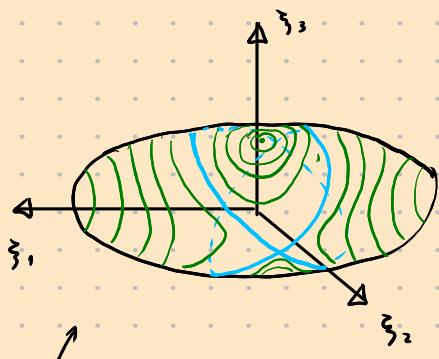
## Геометрически интерпретации Мах-Курна

Резултант на вектори  $\vec{K}_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = \text{const} - \text{сърца} \\ \frac{K_1^2}{A} + \frac{K_2^2}{B} + \frac{K_3^2}{C} = 2T - \text{еллиптични Мах-Курна} \end{array} \right.$$

$$\vec{K}_3 = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{K}_3$  приема различни траектоции на пересечени сърца и елиптични Мах-Курна.



$$K^2 = 2BT - \text{yp-e сепаратрис}$$

$$\left(1 - \frac{B}{A}\right) K_1^2 + \left(1 - \frac{B}{C}\right) K_3^2 = 0$$

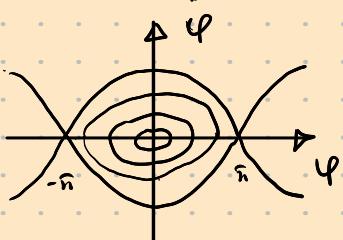
$$\lambda^2$$

$$-\mu^2$$

$$(\lambda K_1 - \mu K_2)(\lambda K_1 + \mu K_2) > 0$$

A - канава даващо движение  
еса по  $\vec{x}_3$  - канава гравитация

Симул - сепаратриса,  
зелено - кривите гравитации  $K_3$



Линия Дикандерова обединява негативните  
(недопустимо гравит.) движението в едини сепарат-  
рис - положението равновесия (какът гравитация  
в единица предизвиква движение) - и при което  
переходят чрез него

Негативни интерпретации: Третата форма на вектор  $\vec{K}$ .

## Интерпретация Пуассона

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^T J \vec{F} - 1 = 0 \quad - \text{значение инерции}$$

$$\vec{r} = \lambda \vec{\omega} \quad \lambda^2 \underbrace{\vec{\omega}^T J \vec{\omega}}_{2T} - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

$$\nabla f = 2J\vec{r} \quad (\text{проверка наклоненности})$$

$$\nabla f = \frac{2}{\sqrt{2T}} J \vec{\omega} = \frac{2\vec{K}}{\sqrt{2T}} = \text{const}, \quad \text{нормаль } \vec{n} \parallel \nabla f \parallel \vec{K}$$

Проверяется  $\nabla f \parallel \vec{n}$ ?

$$f(\vec{r}) = 0 - S$$



$$\vec{r} \in S \Rightarrow f(\vec{r}) = 0 \\ \vec{r} + d\vec{r} \in S \Rightarrow f(\vec{r} + d\vec{r}) = 0$$

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) \approx f(\vec{r}) + \underbrace{\nabla f \cdot d\vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \nabla f \perp T_{\vec{r}} S \quad (\text{однородное прост.})$$

$$\vec{g} = \vec{r} \cdot \underbrace{\frac{\vec{k}}{K}}_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{k}}{K} = \frac{\sqrt{2T}}{K} = \text{const}$$

Происходит касание эллипса инерции со нормалью  $\perp \vec{K}$   
без прескользывания.



Помехи - препятствие T. касание со землей (затормозил)

Прескользивание - препятствие T. касание со м-м касание (быстро остановил)

В случае земного - мая (A=B=C) все об этом очевидно.

## Симметрия Пуассона для A=B

Помехи и прескользивание, огибание, сдвиги и скручивания.

Движение предполагает один результирующий прескользив. (одноглав)



$$\Theta = \text{const}$$

$$\omega_1 = \text{const}$$

$$C_r + (\beta - A) \dot{\varphi}^0 = 0 \Rightarrow C_r = H = \text{const}$$

$$C_r = K_{zz} = k \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{C_r}{k} = \text{const}$$

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + (C-A) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{K}}{A} + \frac{A-C}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{Cr}{K} \quad \dot{r} = \frac{\vec{K}}{A} \quad \dot{\varphi} = \frac{A-C}{A} r$$



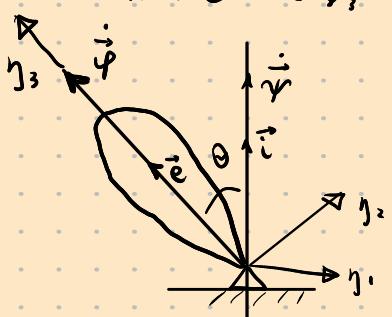
Параллельное вращение приводит к тому же самому результату.

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{A-C}{A} r \frac{A}{K} = \frac{A-C}{C} \cdot \frac{Cr}{K} \cos \theta$$

$$C\dot{\varphi} + (C-A)\dot{r} \cos \theta = 0 \quad -\text{однозначно связана!}$$

**Возможность параллельного вращения не аргумент!** Не арг. Эксперимент! Не арг. Аксиома!

$A = B \neq C$  ( $z_3$  - ось гориз. симметрии! Всегда C) Которое наше условие не ось гориз. симметрии



Какой наше преимущество что наше гипотезы это непротиворечие фактическим? (приводят к одному и тому же)

$$\dot{\varphi} = \text{const}, \quad \dot{r} = \text{const}, \quad \theta = \text{const}$$

$\eta$  - неизб. доказ

$$\eta_1, \eta_3 \text{ cog. } \dot{\varphi}, \dot{r}$$

$$K_z = \begin{bmatrix} A\dot{r} \sin \theta \\ 0 \\ C(\dot{\varphi} + \dot{r} \cos \theta) \end{bmatrix} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{e} = \alpha \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = A\dot{r}, \quad \beta = C(\dot{\varphi} + \dot{r} \cos \theta) - A\dot{r} \cos \theta = C\dot{\varphi} + (C-A)\dot{r} \cos \theta$$

$$\vec{K} = \vec{M} \quad (\theta \text{ одновременно np-be})$$

$$\vec{K} = \dot{\vec{r}} \times \vec{K} = \langle \dot{\vec{r}} \parallel \vec{i} \rangle = \beta \dot{\vec{r}} \times \vec{e} = \langle \dot{\varphi} \vec{e} = \vec{\varphi} \rangle = \left[ C + (C-A) \frac{\dot{r}}{l} \cos \theta \right] \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{\varphi}}$$

$$\vec{M} = \left[ C + (C-A) \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \cos \theta \right] \dot{\vec{\varphi}} \times \dot{\vec{\varphi}}$$

"одинаковая по-ва инерция"

$$\text{Если } |\dot{\varphi}| \gg |\dot{\psi}| \text{ и } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{M} = C \dot{\vec{\varphi}} \times \dot{\vec{\varphi}}$$

## Лагранг Аугенвальда



$$A = B \neq C$$

$$T + \Pi = \text{const}$$

$$C_r + (B - A) \rho q = 0 \Rightarrow C_r = H = \text{const}$$

$$\vec{K} = \vec{M}, \text{ носит. на } \vec{x}_3; \vec{K} \cdot \vec{x}_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{K} \cdot \vec{x}_3) = 0 \Rightarrow \vec{K} \cdot \vec{x}_3 = K = \text{const}$$

$$\frac{1}{2} A (\rho^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2 + mg l \cos \theta = \tilde{E} = \text{const}$$

$$\frac{1}{2} A (\rho^2 + q^2) + mg l \cos \theta = E = \tilde{E} - \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2}{C} = \text{const}$$



$$\frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mg l \sin \theta = E \quad (1)$$

(изменение кинетической энергии при вращении вокруг горизонтальной оси)

$$C(\dot{\varphi} + \dot{\theta} \cos \theta) = H \quad (2)$$

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} A \dot{\theta} \\ A \dot{q} \\ C \dot{r} \end{bmatrix} = A \vec{j}_2 + H \vec{\xi}_3$$

$$K = \vec{K} \cdot \vec{x}_3 = A \underbrace{\dot{\theta} \vec{x}_3}_{\dot{\varphi} \sin \theta} + H \underbrace{\vec{\xi}_3 \cdot \vec{x}_3}_{\cos \theta} = A \dot{\varphi} \sin^2 \theta + H \cos \theta \quad (3)$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \dot{\varphi} = \frac{K - H \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\vec{j}_2 = \dot{\theta} + \dot{\varphi} \cdot \sin \theta$$

$(\dot{\theta} \perp \vec{x}_3)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} A \dot{\theta} + \frac{1}{2} A \frac{(K - H \cos \theta)^2 \sin^2 \theta}{A^2 \sin^4 \theta} + mg l \cos \theta = E$$

$V(\theta)$

$$\int \frac{\sqrt{A} d\theta}{2(E - V(\theta))} = t + \text{const} \Rightarrow \theta(t) = \text{функция времени}$$

"реконструкция по-ут (т.к. функция в неявном виде - каскадные)"

Несколько интересных случаев:

$$\dot{\varphi} = \frac{K - H \cos \theta(t)}{A \sin^2 \theta(t)} \Rightarrow \dot{\varphi} = \int f_{\varphi}(t) dt + \text{const}$$

или реконструкция по-ут (минимум + максимум)

$$\dot{\varphi} = \frac{u}{c} - \dot{\varphi}(t) \cos \theta(t) = f_{\varphi}(t) \Rightarrow \dot{\varphi} = \int f_{\varphi}(t) dt + \text{const}$$

↓ minimum energy + conservation

$$m_3(3): \ddot{\Theta} + \frac{(K - Hu)^2 \sin^2 \Theta}{A^2 \sin^4 \Theta} + \frac{2(mgl \cos \Theta - E)}{A} \cdot \sin^2 \Theta$$

$$\dot{\Theta} \sin \Theta = -( \cos \Theta )' \quad \text{where } u = \cos \Theta$$

$$\dot{u}^2 + \frac{(K - Hu)^2}{A^2} + \frac{2(mglu - E)}{A} (1 - u^2) = 0$$

Однозначное назначение:  $P(u) = \text{коэф. назнач.}$



$P(u) \leq 0$  - однозначное назначение

Справа Радиусы:



Численные примеры:



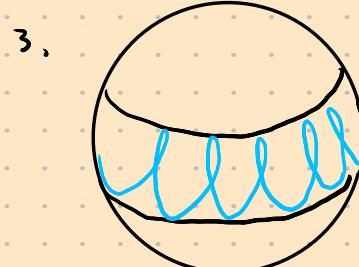
I. Однозначное назначение:



$$\operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\min}} = \operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\max}}$$

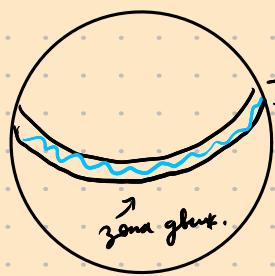


$$\dot{\varphi}|_{\theta_{\max}} = 0$$



$$\operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\min}} \neq \operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\max}}$$

У бесконечнорадиусных ( $H \rightarrow \infty$ ) зон глубина орбит уменьшается:



$\Delta \rightarrow 0$   
 $T \rightarrow 0$   
 (nemoy korek.)

Первый предел при  $\Omega \rightarrow \infty$ .

## II. Устойчивые вихри

### 1. Водоворотное превращение



Если  $\Theta(0) \neq 0$ , то превращение не может быть.

2.



$T \rightarrow \infty$

Асимметрическое вихревое к горизонтальной  
спирале Рюсселя (без. вращение)

### 3. "Конгри" барок



Барок брандлиса вихрь без. син. с наимен. градиентом  
сжатия.

## Регулярные превращения в вихре Карпантра



$$[C + (C-A) \frac{\dot{\varphi}}{l} \cos \theta] \hat{j} \times \hat{i} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = mgl \hat{i} \times \hat{e} = \frac{mgl}{\dot{\varphi} \cdot l} \hat{j} \times \hat{i}$$

$$C \dot{\varphi} \hat{i} + (C-A) \dot{\varphi}^2 \cos \theta = mgl$$

$$C(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = H = \text{const}$$

$$C\dot{\varphi} = H - C\dot{\varphi} \cos \theta$$

$$H\dot{\varphi} - A\dot{\varphi}^2 \cos \theta = mgl$$

$$A\dot{\varphi}^2 \cos \theta - H\dot{\varphi} + mgl = 0$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4A m g l \cos \theta}}{2A \cos \theta} \quad (1)$$

Ein  $H \rightarrow \infty$  (durchstoßendes Pendeln)

$$\dot{\varphi}_1 \rightarrow \frac{H}{A \cos \theta} \rightarrow \infty \quad - \text{Schnelles Pendeln}$$

$$\sqrt{H^2 - 4A m g l \cos \theta} \simeq H \left( 1 - \frac{2A m g l \cos \theta}{H^2} \right) \quad - \text{gleiches Pendeln, zulässig oder nicht}$$

$$\dot{\varphi}_2 \rightarrow \frac{mgl}{H} \rightarrow 0 \quad - \text{Langsam pendeln}$$

Um (1)  $\Rightarrow$  gilt folgende Bedingung für die Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  des Pendels:

$$H^2 \geq 4A m g l \cos \theta.$$

$H^2 \geq 4A m g l$  - genügend Energie (genügend endliches Pendeln).

# Уравнения Лагранжа 2-го рода

Примеры



взаимо-однозначное  
соответствие



$$= T^2$$

глобальное



$$= S^2$$



$$\sim R^3$$

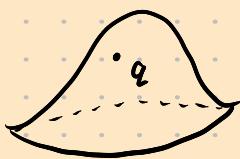


$$\sim R^3 \times SO(3)$$

локально



$$\sim$$



$$- M, \dim M = n$$

Конформно-однозначное многообразие

Многообразия с к-м изм. можно представить в взаимо-однознач. соответстве с конформно-однозначными многообразиями.

$q$  - параметризующий конформно-однозначное многообразие  $M$  (аддитивные коор-тны)

$$1. q = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} \quad 2. q = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} \quad 3. q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad 4. q =$$

размерность  $n!$

Она имеет вид.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi \end{bmatrix}$$

① Гладкостью (пример 3 - крив. Bezier)

② Покрытием (пример 2 - имеет однозначн в окрестах)

Многое в многообр. подавленных коор-т дает не имеет (сверх)



Новое положение  $q$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(q, t)$$

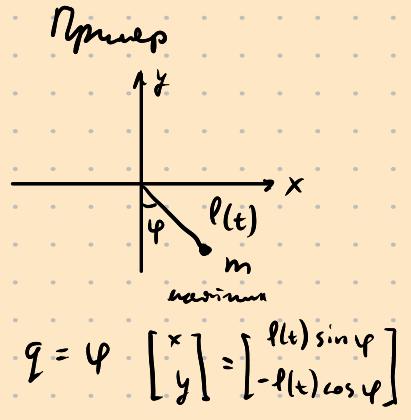
- Коор-тн вектора  $\vec{r}$  не изм.

условие нейтральности:

$$\vec{r}_i, \delta q^i \neq 0 \quad \forall \delta q^i \neq 0 \text{ - нейтральность при } \text{зап. времени}$$

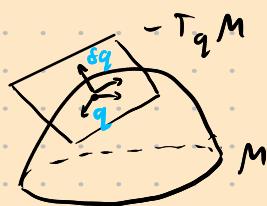
$$\left( \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q^i \right)$$

Т.е. изменение  $\delta q$  одновременно вызывает отклик  $\delta \vec{r}$ .



### Вариационное перемещение

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_{i,t} \delta q^i - \text{банал!}$$



Возможное перемещ.:

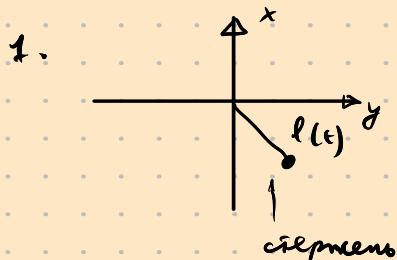
$$d\vec{r} = \delta \vec{r} + \vec{r}_{i,t} dt - \text{нужно не мен.}$$

$T_q M$  - касат. пл-ть к  $M$  в  $\tau \cdot q$

$\delta q$  - вектор в касательной прямой (норма)

$\delta q^i$  - возможный коор-т, меняя лишь направл.

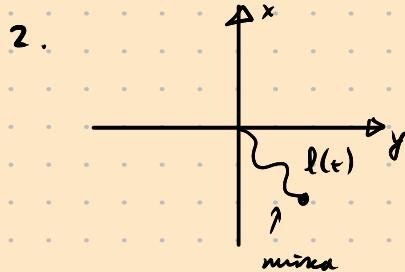
### Механические связи и их классификация



$$x^2 + y^2 = l^2(t) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$$

$$\begin{cases} f_i(q, t) = 0 \\ i = 1, m \end{cases}$$

гравитационные  
(равновесные)  
связи



$$x^2 + y^2 - l^2(t) \leq 0$$

$$\begin{cases} f_i(q, t) \leq 0 \\ i = 1, s \end{cases}$$

нейтривиальные  
связи

