

## Интегрирование по Фурье

$f(x) \in L_R(-1, 1)$  и н. перм.  $2l$

$L_R$ -ад. интерп., т.е.  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  ад. с.х.

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \sin \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad - \text{коэф-ты Фурье}$$

## Лемма Римана

$$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos tx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

$I$  - проме.

$$\int_I f(t) \sin tx dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие:  $f(x) \in L_R(-1; 1) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

$$\text{Фун. ряд } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{\pi n x}{1} + b_n \sin \frac{\pi n x}{1} \right] - \text{ряд Фурье } f(x)$$

## Обсужда

1. Если  $f(x)$  нечётно, то  $a_n = 0$

Если  $f(x)$  чётно, то  $b_n = 0$

2.  $f(x)$  - непрерывна  $\Rightarrow$  универсальная норма. Дано по модулю сходимости функции  $2l$

## Дополнительное условие разностности в п. Фурье (следствие из пр. Лейбница)

1.  $f(x) \in L_R(-1; 1)$ , н. перм.  $2l$

В т.  $x_0$  имеет конечные односторонние пром.  $f'_+(x_0)$  и  $f'_-(x_0)$ .

Тогда ряд Ф.  $f(x)$  в т.  $x_0$  сходится к  $f(x_0)$ .

2. Пусть  $f(x) \in L_R(-1; 1)$ , н. перм.  $2l$

$x_0$  - т. разрыва 1 рода,  $\exists$  конечные "обобщённые" односторонние

пром. значения:

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда ряд Фурье в т.  $x_0$  сходится к ср. арифм.  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



Число  $l = \pi$ , тогда  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$ ,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

### Задача 1

Рассмотрим в п. 4-м  $f(x) = \operatorname{sign} x$ ,  $-\pi < x < \pi$

гр. симметрична относительно начала координат.



Ф-ция нечетная  $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\pi} \, dt \quad \text{— четная, ф-ция}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign} t \sin nt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не св-ся равномерно с.х. на всей прямой, т.е. сумма его разбегается

(р/н с.х. ряд из пер. ф-ции и пер. функции).

### Задача 2

$f(x) = x^2$  на  $-\pi < x < \pi$

с.х-ца в  $\forall \pi$ , но не равномерно

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Досл. як р/н cx. р. Фур'є

$f(x) \in L_R[-1; 1]$ , непер. зл, у якого - непер. на  $[-1; 1]$ .

( $f(x)$  непер. на  $[-1; 1]$ ,  $f'(x)$  екстрем. - непер. на  $[-1; 1]$ , т.е. єдине значення  
т. розрива і поже). Тоді р-Фур'є  $f(x)$  cx. р/н на всій числовій осі.

Узглянемо: якщо  $f'(x)$  непер. вогнут на проміжку, то у ній не може бути розривів  
і поже. Потім у теоремі про рівн. cx. р-Фур'є б о. розрива  $f'(x)$  не є.

Розв. Ф.  $x^2$  cx. р/н на  $(-\infty; +\infty)$ .

Укр. 22-110

Розв. спр. розв. (за періоду  $l=2\pi$ )

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  (1) cx. р/н на  $(-\infty; +\infty)$ . Тоді це функція

$f(x)$  - непер. зл - непер. Ф-ції, у (1) - р. Фур'є цієї функції.

$$\square \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad - \text{р/н cx.}$$

$\Rightarrow f(x)$  непер.

Функція р/н cx. розв. уз непер. Ф-ції - непер. Ф-ції.

Усклад. непер. зл - зл.

Р/н cx. розв. уз непер. Ф-ції на каноничній сім'язі можна помітно уніфікувати.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Якщо р/н cx. розв. уможливі на Ф-ції, то отримаємо р/н cx.

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx), \quad m \text{ фіксовано,}$$

- cx. р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right) =$$

$\stackrel{0}{=} \text{ якщо } n \neq m \quad \stackrel{0}{=}$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt$$

Ортогональные функции  $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$  в пространстве функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$  со скалярным произведением  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

■

Задача 22-111

Дать в явном виде?

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  — ряд сч. п/н на  $\mathbb{R} \Rightarrow$  ряд Фурье с членом  $\cos nx$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  — расходится  $\nrightarrow 0 \Rightarrow$  не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  — нечетная,  $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t) \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \left( -\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \, dt + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \, dt \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad \text{— } b_n \text{ при } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{При } n=1 \quad b_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} \, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}$$



Ряд сч. не п/н

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на  $(-\pi; \pi)$

## Рациональное по $\cos$ и по $\sin$

$$f(x) \in L_n(0; 1)$$

Если  $f$  — непрерывно на  $\mathbb{R}$  —  $f(x) \in L_n(-1; 1)$

То  $f$  — разг. Фурье — рациональное  $P(t)$  на  $(-1; 1)$  по  $\cos$

Если по нечётности, то по  $\sin$

### Задача 1

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{по } \sin$$



Разг. с.х. непериодическо (разг. разб.) на  $(-\infty; +\infty)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

### Задача 2

Рациональное в разг. Фурье  $f(x) = x^2$  на  $(0; 1)$  с периодом  $2l$



$$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t^2 \cos 2\pi n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t^2 \sin 2\pi n t \, dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{на } 0 < x < 1$$

Разг. с.х. — непериодическо на  $(-\infty; +\infty)$  т.к. излома разг. разб.

## Рациональное по $\sin$ или $\cos$ чётных или нечётных крайних дуг

$$\textcircled{1} f(x) \in L_n(0; \frac{1}{2})$$



$$f(x) = f(1-x), \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{— симметрично относительно } x = \frac{1}{2}$$

Далее по нечётности, далее с периодом  $2l$

$$\text{В этом случае } a_n = b_n = 0$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{l} \quad - \text{розкладемо по sin невідомих кривих згд}$$

②  $f(x) \in L_R(0; \frac{l}{2})$

$$f(x) = -f(l-x), \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad - \text{чужа симетрія стос. до } (\frac{l}{2}; 0)$$



$$a_n = 0, \quad b_{n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{l} dt$$

Розкладемо по sin відомих кр. згд  
(розкладемо по sin з невідомим l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2\pi n x}{l}$$

③  $f(x) = -f(l-x)$  на  $0 < x < \frac{l}{2}$  - чужа симетрія стос. до  $(\frac{l}{2}; 0)$



Далі по відомим, далі з невідомим 2l

$$b_n = 0 \quad a_{2n} = 0$$

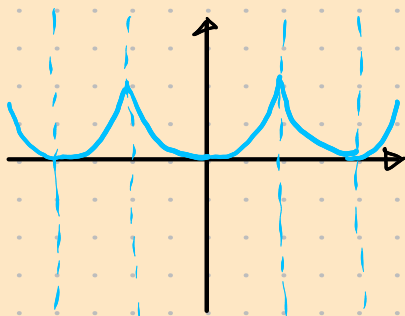
$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt$$

Розкладемо по cos невідомих кр. згд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

④  $f(x) = f(l-x)$   $0 < x < \frac{l}{2}$  - чужа симетрія стос. до  $x = \frac{l}{2}$

Далі по відомим, далі з невідомим 2l



$$b_n = 0 \quad a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi \cdot 2n t}{l} dt$$

Розкладемо по cos відомих кр. згд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{\pi \cdot 2n x}{l}$$

(дальше розкладемо по cos з невідомим l)

## Задача 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Разложить по  $\sin$  на  $[0; 2]$   $l=2!$



Продолжим симм. осн.  $x=1$

$$f(x) = f(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Разложить по  $\sin$  нечетных кр. гуд

$$b_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) x$$

Ряд сходимости по  $\sin$  на  $(-\infty; +\infty)$  т.к.  $f(x)$  имеет период 4 и экстремумы на  $[-4; 4]$

## Задача 2

Построить гр. функции рядов Фурье по  $\cos$  и  $\sin$  итд. и нечет. кр. гуд.

Сходится ли они по  $\sin$ ?

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



Синус нечет. кр. гуд  
сх. по  $\sin$  т.к. им.  
непрерывна и не имеет  
разрывов на  $[-\pi; \pi]$

Синус чет. кр. гуд  
сх. не по  $\sin$  т.к.  
разрывы

Косинус нечет. кр. гуд  
сх. не по  $\sin$

Косинус чет. кр. гуд  
сх. по  $\sin$

$$f(x) = \sin x + 1$$



суммы пер. кр.  
сх. не p/n



суммы i.e. кр. гл.  
сх. не p/n



суммы пер. кр. гл.  
сх. не p/n



суммы i.e. кр. гл.  
сх. p/n

## Полное гипергеометрическое разложение Фурье

1.  $f(x)$  ун. пер. на  $[-l; l]$ , пер. на  $[-l; l]$ , пер. на  $[-l; l]$ .

2. Пер. Ф. сх. p/n на  $(-\infty; +\infty)$

3. Пер. Ф. только полное гиперг.

$$\text{Един } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right]$$

То пер. Ф.  $f'(x)$  (х-ой кр. пер. на  $[-l; l]$ ) пер. гиперг. разложение Ф:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \cdot \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) - \text{не сходится!}$$

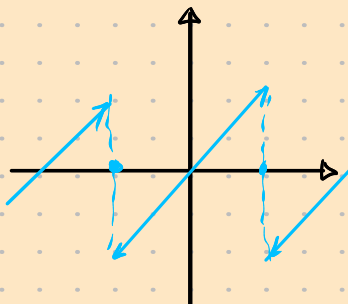
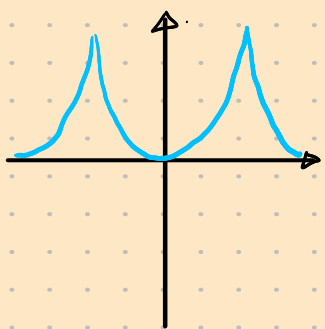
ищет пер. Фурье

## Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{схема разложения } 2x \text{ на } (-\pi; \pi) \text{ по}$$

сх. 1-го разложения



$$-\pi < x < \pi$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$



## Равенство Парсеваля

$L^2_R(I)$  - м.б.о. ф-ция, аде. ун. на  $I$  высеет  $f(x)^2$ .

Для любого  $I$   $L^2_R(I) \subset L_R(I)$

Все адд. ун. - из  $L^2_R(a; b)$

Ели  $f(x) \in L^2_R(-1; 1)$  и ун. нрмоз  $21$ , то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx$$

В расматр. раз. чеба ср.

### Пример

$$f(x) = x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(x) = x^2;$$

$$\frac{2}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

