ОДУ - обыкновенные дифференциальные уравнения

ОДУ в общ. случае

$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{n}(x)) = 0$ – обыкновенные – произв. только по одной переменной (x)

Рас-им сис-му:

$$\begin{cases} F_1(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Ур-я 1-го порядка

$F(x, y, y') = 0$

- Еще проще: ур-я 1-го порядка, разрешённые относ. произв.:

$y' = F(x, y)$; $\quad dy = dF(x,y)\,dx$

$P(x,y)\,dy + Q(x,y)\,dx = 0$ } ур-я в дифер. форме

- Частный случай: ур-я с разделяющимися переменными

$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$; решение:

$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad G(x) = \int g(x)\,dx$

$dF(x) + dG(y) = 0$

$d(F(x) + G(x)) = 0$

$F(x) + G(x) = \text{const}$

$\iff \quad \int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = 0$

C2 №4

$y' \cos x + y(1+y)\sin x = 0$

$\dfrac{dy}{y(1+y)} + \dfrac{\sin x}{\cos x}\,dx = 0$

$\int \dfrac{dy}{y(1+y)} + \int \dfrac{\sin x}{\cos x}\,dx = 0$

$\ln\left|\dfrac{y}{(1+y)\cos x}\right| = C_3$

$\dfrac{y}{(1+y)\cos x} = \pm e^{C_3}$ $\quad C \in \mathbb{R}$ ($C = 0$ – тоже решение!)

$\dfrac{y}{(1+y)\cos x} = C$ или $y = -1$ (решения теряются когда мы делим!)

$\int \dfrac{dy}{y(1+y)} = \int \dfrac{(1+y) - y}{y(1+y)}\,dy = \int \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{1+y}\right) dy = \ln\left|\dfrac{y}{1+y}\right| + C_1$

$\int \dfrac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \dfrac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C_2$

$$y = \frac{C\cos x}{1 - C\cos x}$$

Ф №67*

$3y^2 y' + 16x = 2xy^3$ Найти $y(x)$ – огр. в $U(+\infty)$

$3y^2 y' = 2x(y^3 - 8)$

$\int \frac{3y^2\,dy}{y^3-8} = \int 2x\,dx$ – потеряли $y^3 = 8$

$\ln|y^3 - 8| = x^2 + C_1$

$y^3 - 8 = \pm e^{C_1} e^{x^2}$

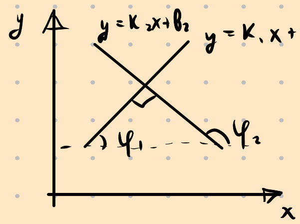
$C \in R$ (в т.ч. 0! $y^3 = 8$ тоже реш.)

$y^3 - 8 = Ce^{x^2}$

$y(x)$ – огр. при $C = 0$.

Ортогональные траектории

Рас-им 2 ортогональные прямые:



$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$

$k_2 = tg\,\varphi_2 = tg(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -ctg\,\varphi_1 = -\frac{1}{tg\,\varphi_1} = -\frac{1}{k_1}$

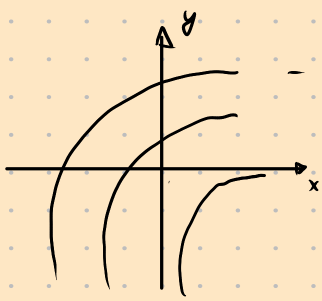
$k_1 k_2 = -1$ у $\perp$ прямых.

Пусть им. ур-е:

$y' = f(x,y)$

Ортогональные траектории:

$$\boxed{y' = -\frac{1}{f(x,y)}}$$



– интегральные кривые ур-я (основные траектории)

Пример

$y = Cx^2$ – семейство кривых. Найти ортогон. траектории

$C = \frac{y}{x^2}$

$0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}$

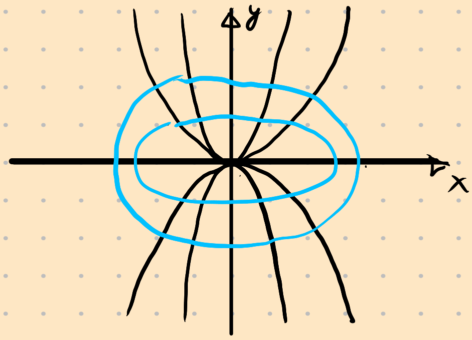
$y'x^2 = 2xy$

$y' = 2\frac{y}{x}$

Для ортог. кривых: $y' = -\frac{x}{2y}$

$2y\,dy + x\,dx = 0$

$y^2 + \frac{x^2}{2} = C$ – ур-е эллипсов



Однородные уравнения

Сводятся к ур-ю с разделяемыми переменными

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Замена: $y = x\,z(x)$

$y' = z + xz'$

$xz' + z = f(z)$

$z' + z - f(z) = 0 \quad \left(\frac{dz}{z - f(z)} + dx = 0\right)$

Ур-е, сводящееся к однородному

$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Замена: $x = \xi + x_0$, $y = \eta + y_0$

$\eta' = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + \overbrace{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}^{=0 \text{ (в силу выбора } x_0, y_0)}}{a_2\xi + b_2\eta + \underbrace{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}_{=0}}\right)$

Получим однородное ур-е

Ф №117

$(y+2)\,dx = 2x + y - 4\,dy$

$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ – x_0, y_0

$x = \xi + 3 \qquad y = \eta - 2$

$\eta\,d\xi = (2\xi + \eta)\,d\eta$

$\frac{\eta}{\xi} = z$

$z\xi\, d\xi = (2\xi + z\xi)(z\, d\xi + \xi dz)$

$(z\xi - z(2\xi + z\xi))\, d\xi = \xi \cdot (2\xi + z\xi) dz$

$z\xi(1 - 2 - z)\, d\xi = \xi^2 (2 + z)\, dz \quad \Big| \ \xi = 0$ - не реш-е

$-z(1+z)\, d\xi = \xi(2+z)\, dz$

$-\dfrac{d\xi}{\xi} = \dfrac{2+z}{z(z+1)}\, dz$

$-\displaystyle\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz$

$\dfrac{z^2}{z+1} \cdot \xi = C$

$\dfrac{\eta^2}{\eta + \xi} = C \ \Rightarrow \ \dfrac{(y+2)^2}{y+x-1} = C \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (y+2)^2 = C(y+x-1) \\ x+y=1 \end{array} \right.$ (не теряем $x+y=1$)

Линейные ур-я I порядка

$y' + a(x) y = b(x)$ - неоднородное

Рас-им линейное однородное ур-е:

$y' + a(x) y = 0$

$\dfrac{dy}{y} + a(x) dx = 0$

$\ln|y| + \displaystyle\int a(x) dx = 0$

$y = C_0 e^{\int a(x) dx}$ ← одна первообр.

$y = C_0 \cdot \varphi(x)$ - структура решения однородного ур-я; $\varphi(x)$ - частное решение

Метод вариации постоянной: (C_0 меняем на ф-ию)

Замена $y = C(x) \cdot \varphi(x)$ в неоднородном ур-ии:

$C'\varphi + C\varphi' + aC\varphi = b$

$C'\varphi + C\underbrace{(\varphi' + a\varphi)}_{=0} = b$ (φ - реш-е однор. ур-я)

$C'(x)\varphi(x) = b(x)$ - ур-е с разд. переменными

C 3.37

$x^2 y' = 5xy + 6, \quad y(1) = 1$

Рас-им однородное: $x^2 y' = 5xy$

$$\frac{dy}{y} = 5\frac{dx}{x}$$

$y = x^5 C_0 \quad \Big| \; y(x) = C_0(x)\, x^5$

$x^2 (C' x^5 + C 5 x^4) = 5x\, C x^5 + 6$

$C' = \frac{6}{x^7}$; $\quad C = -\frac{1}{x^6} + D$

$y = \left(-\frac{1}{x^6} + D\right) x^5 \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + D x^5$ - реш-е

$y(1) = 1 : \quad 1 = -1 + D \Rightarrow D = 2$

$y = -\frac{1}{x} + 2x^5$

№1

$xy' - 2y = 2x^4$

ОУ: $xy' - 2y = 0$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = 2\ln|x| + C$

$y = Cx^2$

ВП: $y = C(x)\, x^2$

$x[C' x^2 + 2Cx] - 2Cx^2 = 2x^4$

$C' x^3 = 2x^4$

$C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C$

$y = (x^2 + C)\, x^2 = x^4 + x^2 C$

№2

Без ВП: $\quad xy' - 2y = 2x^4 \;\Big|\cdot x$

$x^2 y' - 2xy = 2x^5$

$$\frac{x^2 y' - 2xy}{x^4} = 2x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

$\frac{y}{x^2} = x^2 + C \Rightarrow y = x^4 + Cx^2$

- Опытные люди делают так: переставляют всё так, чтобы получилась какая-то произв. (без ВП)

- Можно переставлять y и x в дифф. форме:

$$(1+y^2)\,dx + (2xy-1)\,dy = 0$$

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = 1-2xy \quad \text{— лин. ур-е}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

ОУ: $\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$

$$x = \frac{C}{1+y^2}$$

ВП: $x = \frac{C(y)}{1+y^2}$ Ответ: $C(y) = y + C$, $x = \frac{y+C}{1+y^2}$

Уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad \text{— приводится к линейному!}$$

$n = 0 \to$ ЛУ $\qquad n > 0 \Rightarrow y = 0$ — реш.

$n = 1 \to$ ОЛУ $\qquad n < 0 \Rightarrow y = 0$ — не реш.

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$$

Замена: $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$$

Получим $(1-n)^{-1}z' + a(x)z = b(x)$ — ЛУ

№4

$y' - y + 2xy^3 = 0 \quad |\quad y = 0$ — реш.

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$$

$z = \frac{1}{y^2} \qquad z' = -\frac{2}{y^3}y'$

$$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$$

$$2x = \frac{z'}{2} + z$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$$

ОУ: $\frac{dz}{dx} + 2z = 0$

$$\frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

ВП: $z = C(x)e^{-2x}$

$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x$

$C'(x) = 4xe^{2x}$

$C(x) = \int 4xe^{2x}dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$

$\frac{1}{y^2} = (2xe^{2x} - e^{2x} + C)\cdot e^{-2x}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y^2 = \left((2x-1) + Ce^{-2x}\right)^{-1} \\ y = 0 \end{array}\right.$

Уравнение Риккатти

$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$

Пусть y_0 - решение

$y = z + y_0$ $\quad z$ - новая неизв. ф-ия => ур-е Бернулли

№5

$x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0$

$y_0 = \frac{k}{x}$

$-\frac{x^2k}{x^2} - \frac{5xk}{x} + x^2\frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$

$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$

$k = 2, \; k = 4$

Сделаем замену $y = z + \frac{2}{x}$:

$x^2\cdot\left(z' - \frac{2}{x^2}\right) - 5x\left(z + \frac{2}{x}\right) + x^2\cdot\left(z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2}\right) + 8 = 0$

$x^2z' - zx + x^2z^2 = 0 \quad |:x$

$xz' - z + xz^2 = 0$

$\frac{z'x - z}{z^2} = -x \quad => \quad \left(\frac{x}{z}\right)' = x$

$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad => \quad \frac{x^2}{xy-2} = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \frac{2}{x}$

Уравнение в полных дифференциалах

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ $\quad$ - P и Q непр.

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y)$ $\quad$ - F непр. дифф. в $G \subset \mathbb{R}^2$

$\exists F: \; P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

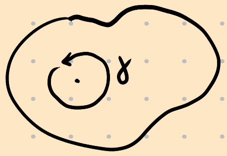
Реш-е: $F(x,y) = C$ $\quad$ (т.е. F - потенциал)

Пусть F - дважды непр. дифф в G:

Если $\exists P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{cases}$$ — должны быть равны! — необходимое усл-е наличия потенциала

Условие яв-ся достаточным, если обл. G односвязна.



G нет дырок!

№6

$$(1 + 3x^2 \ln y)\,dx + \left(3y^2 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0$$

$G = [y > 0]$ - односвязна

$\exists F: \ \dfrac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$

Можно угадать, но если нет:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 3x^2 \ln y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \dfrac{x^3}{y} \end{cases} \xrightarrow[\text{по } x]{\text{интегрируем}} F = x + x^3 \ln y + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C$$

$$F = x + x^3 \ln y + y^3$$

Интегрирующий множитель

Если потенциальности сразу нет:

$\mu P = \dfrac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ — надо решить сис-му — конечно, так никто не делает.

№7

$$(y - 3x^2y^3)\,dx - (x + x^3y^2)\,dy = 0$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - 9x^2y^2 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 3x^2y^2$ — не равны

$y\,dx - x\,dy - 3x^2y^3\,dx - x^3y^2\,dy = 0 \quad | \ y = 0$ - реш, $x = 0$ - реш

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 3x^2y\,dx - x^3\,dy$$

$d\left(\dfrac{x}{y}\right) = d(x^3y) \Rightarrow \dfrac{x}{y} = x^3y + C; \quad y = 0; \quad x = 0.$

Уравнения высшего порядка

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ – надо понизить порядок! коэф-т при $y^{(n)} \neq 0$ при реш!

Методы понижения порядка

① Нет явного y! $y' = z$, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \to F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$

$xy'' + xy'^2 + y' = 0$, $y' = z$; $y = const$ – реш-е

$xz' + xz^2 + z = 0 \quad | x \neq 0$ для удобства

$x\frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0$, $\quad \frac{1}{z} = u$

$-xu' + x + u = 0 \quad | : x^2$

$\frac{u - xu'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = \ln x + C$, $\quad \frac{1}{zx} = \ln x + C$

$z = y' = \frac{1}{x(\ln x + C)}$ $\qquad y = \int \frac{dx}{x(\ln x + C)} = \ln|\ln x + C| + C_1$ $\qquad \left[\begin{array}{l} y = \ln|\ln x + C| + C_1 \\ y = const \end{array}\right.$

② Ур-е без явного x

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$; y – новая незав. переменная

$y' = z(y)$ – новая ф-ия

$y'' = (y'_x)'_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x = z \cdot z'_y$

$y''' = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})'_y \, y'_x = (z \cdot z'_y)'_y \cdot y'_x = (z'^2_y + z \cdot z''_{yy})\, z = z \cdot z'^2_y + z^2 z''_{yy}$

Пример

$yy'' = 2y'^2 - 4y^2y'^3$ $\qquad y' = z(y) \qquad y'' = zz'$

$yzz' = 2z^2 - 4y^2z^3 \quad | : z$

$z = 0$ – реш-е

$y = C$

$yz' = 2z - 4y^2z^2 \quad | : z^2$

$\frac{y}{z^2}z' = \frac{2}{z} - 4y^2$ $\qquad \frac{1}{z} = u \qquad u' = -\frac{1}{z^2}z'$

$-yu' = 2u - 4y^2$

ОУ: $2u + yu' = 0$ $\qquad \ln|u| = -2\ln|y| + C$

$2u = -\frac{du}{dy}y$ $\qquad u = \frac{C}{y^2}$

$\frac{du}{u} = -2\frac{dy}{y}$

ВП: $u = \dfrac{C(y)}{y^2}$

$$\frac{-C'(y)\,y^2 + \cancel{2y\,C(y)}}{y^3} = \cancel{2\frac{C(y)}{y^2}} - 4y^2$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + C \Rightarrow u = \frac{y^4+C}{y^2} \Rightarrow z = \frac{y^2}{y^4+C}$$

$$y' = \frac{y^2}{y^4+C}$$

$$\left(y^2 + \frac{C}{y^2}\right)dy = dx$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{C}{y} = x + C_1$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{C}{y} = x + C_1 \\ y = C \end{array}\right.$

Задача Коши для ур-я n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

2 способа решения

1. Найти общее реш-е с $C_1 \dots C_n$, подставить в нач. усл-я, получить сис-му из n ур-ий с n неизв.
2. Находить константы постепенно, после каждого понижения порядка

Пример

$$yy'' - y'^2 = y^4 \qquad y(1) = 2,\quad y'(1) = -4$$

$$yzz' - z^2 = y^4 \qquad y' = z(y)$$

$$y\cdot\frac{u'}{2} - u = y^4 \qquad u = z^2,\quad u' = 2zz'$$

ОУ: $y\dfrac{du}{dy} = 2u$

$$\frac{du}{u} = \frac{2dy}{y}$$

$$u = y^2 C$$

ВП: $u = C(y)\cdot y^2$

$$\frac{y}{2}\cdot\left(C'(y)\cdot y^2 + \cancel{2y\,C(y)}\right) - \cancel{C(y)\,y^2} = y^4$$

$$C'(y) = 2y$$

$$C(y) = y^2 + C$$

$$u = y^4 + Cy^2$$

$z(2) = -4$

$16 = 16 + C4 \Rightarrow C = 0$

$z^2 = y^4$

$y' = \pm y^2$

$y' < 0$ в т. $x = 1$

$y' = -y^2$

$\frac{dy}{y^2} = -dx$

$\frac{1}{y} = x + C_1$

$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$

Отв.: $\frac{1}{y} = x - \frac{1}{2}$

3 Ур-е, однородное относ. $y, y', \dots, y^{(n)}$

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ - однородный многочлен относ. $y, y', \dots, y^{(n)}$ с коэф-тами $f_i(x)$

$y = 0$ - всегда реш-е!

Пример 1

$(\sin x + 1) y^2 y' y''^3 - \sqrt{1-x^2}\, y^4 y''^2 + \operatorname{arcctg} x\, y y' y'' y'''^3 = 0$ | $y = 0$ - реш-е

$\frac{y'}{y} = z \quad y' = zy \quad y'' = y(z' + y'z) = y(z^2 + z')$

$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$

После подстановки в ур-е - сокр-е на y

Пример 2

$yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0 \qquad y = 0$ реш-е

$z = \frac{y'}{y} \quad y' = zy \quad y'' = y(z^2 + z')$

$y^2(z^2 + z') - z^2 y^2 + y^2 \sin x = 0$

$z^2 + z' - z^2 + \sin x = 0$

$\frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow z = \cos x + C = \frac{y'}{y}$

$\ln|y| = \sin x + Cx + C_1$

$y = C_1 e^{\sin x + Cx}$

Задача Коши

$$2x y^2 y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2 \qquad y(1) = y'(1) = -1$$

$y=0$ – реш-е, но не реш-е задачи Коши

$$y' = yz, \qquad y'' = y(z^2+z')$$

$$2x y^3 \cdot (z^2+z') - 2xy^3z^2 + 2xy^3z^3 = y^3 z$$ – должен сократиться y!

$$2xz^2 + 2xz' - 2xz^2 + 2xz^3 = z$$ – должно что-то уйти!

$$2xz' + 2xz^3 = z \quad \Big| \begin{array}{l} z=0 \text{ – не реш-е Коши}: \quad z(1)=1 \\ : z^3 \end{array}$$

$$2x\frac{z'}{z^3} + 2xz = \frac{1}{z^2} \qquad u = \frac{1}{z^2} \quad u' = -2\frac{z'}{z^3}$$

$$-xu' + 2x = u$$

$$(u + xu') = 2x$$

$$(xu)' = 2x$$

$$xu = x^2 + C \qquad u(1) = 1$$

$$1 - 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u = x$$

$$z^2 = \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = 2\sqrt{x} + C$$

$$0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\ln|y| = 2\sqrt{x} - 2$$

$$|y| = e^{2\sqrt{x}-2}$$

$$y = -e^{2\sqrt{x}-2}, \qquad y(1) = -1 \Rightarrow y < 0$$

4 Обобщённая однородность

Пусть $\exists k \in \mathbb{R}$: при замене x на λx, y на $\lambda^k y$, y' на $\lambda^{k-1} y'$, …, $y^{(n)}$ на $\lambda^{k-n} y^{(n)}$, то всё связанное с λ сокращается (ур-е не изменится)

Введём новую незав. пер. t и ф-ию $z(t)$:

$$x = \begin{cases} e^t, & x>0, \\ -e^t, & x<0 \end{cases} \qquad y = z e^{kt} \quad (zx^k)$$

Тогда ур-е не будет содержать явно t. (п.2)

Пример (7.65 а, б)

$x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0 \qquad y(1) = -1 \qquad y'(1) = 1$

$x \to \lambda x \quad y \to \lambda^k y \quad y' \to \lambda^{k-1} y' \quad y'' \to \lambda^{k-2} y''$

$\lambda^2 x^2 \lambda^{k-2} y'' + 2\lambda^2 x^2 \lambda^{2k-1} yy' + 2\lambda x \lambda^{2k} y - 2\lambda^k y = 0$

$2+k-2 = 2+2k-1 = 1+2k = k$

$k = 2k+1 = 2k+1 = k$

$k = -1$

$x = e^t, \quad y = ze^{-t}$

y, y'_x, y''_{xx} выр. через z, z'_t, z''_{tt}

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'e^{-t} - ze^{-t}}{e^t} = e^{-2t}(z'-z)$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(z''-z')e^{-2t} - 2(z'-z)e^{-2t}}{e^t} = e^{-3t}\cdot(z''-z'-2z'+2z) = e^{-3t}(z''-3z'+2z)$$

$$\cancel{e^{2t}}\cancel{e^{-3t}}\cdot(z''-3z'+2z) + 2\cancel{e^{2t}}\cdot z\cdot\cancel{e^{-t}}\cdot\cancel{e^{-2t}}(z'-z) + 2\cancel{e^{t}}\cdot z^2\cdot\cancel{e^{-2t}} - 2z\cancel{e^{-t}} = 0$$

$z'' - 3z' + 2z + 2zz' - 2z^2 + 2z^2 - 2z = 0$

$z'' + z'(2z-3) = 0 \qquad x=1,\ y=-1,\ y'=1 \Rightarrow t=0,\ z=-1,\ z'=0$

$z = -1$ — реш-е задачи Коши! И по т. о задаче Коши оно единственно.

Теорема о существовании и единственности реш-я задачи Коши

$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$ (*)

f непр. дифф. в окр-ти $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

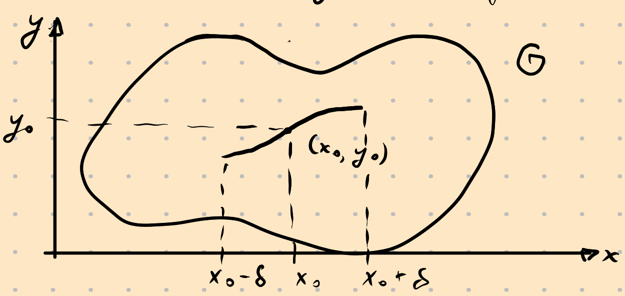
Тогда реш-е з. Коши (*) + усл-я $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

сущ-ет и единственно на нек-ом $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

$n=1$. Теор. сущ-я и ед-сти:

З. Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Если ф-ия $f(x,y)$ дифф. в $G \ni (x_0, y_0)$, то

$\exists \delta > 0$: на $[x_0-\delta, y_0+\delta]$ реш-е з. Коши сущ-ет и ед.



Примеры

$y' = y, \quad y(0) = 1$

$F(x,y) = y$ непр. дифф. в $\mathbb{R}^2$

$y = Ce^x, \quad y(0) = 1, \quad C = 1$

$y = e^x \ \forall x$

Везде есть реш-е

$y' = 1 - y^2 \qquad y(0) = 0$

$\frac{dy}{1+y^2} = dx$

$\operatorname{arctg} y = x + C, \quad C = 0$

$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Реш-е есть только в окр-ти

$y' = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$

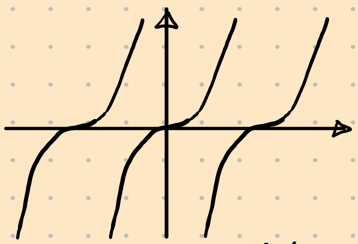
$y = 0$ – реш-е, но $y^{2/3}$ – не яв-ся непр. дифф. ($\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ не сущ-ет)

Сказать, что реш-е единственно, нельзя.

$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \qquad y^{1/3} = x + C \qquad y = (x+C)^3 \qquad y(0) = 0 \Rightarrow y = x^3$ – реш-е

Для $f \notin C^1_G$ т. о сущ. и ед. не работает

Особые решения



Реш-ия задачи Коши, опр. на всей прямой, со много

Реш-е ур-я $F(x, y, y') = 0$ наз. особым, если через каждую его точку проходит еще одна интегральная кривая, касающаяся в этой точке данной кривой и не совп. с ней ни в одной окр-ти точки.

$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \qquad y(0) = 0$

Если $y_0 \neq 0$, то реш-е з. Коши единственно в малой окр-ти т., но не яв-ся ед., если его расс. во всей пл-ти.

Краевые ур-я

$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$y(-4) = -1, \quad y(2) = 1$

$y = (x+C)^3: \quad y = (x+3)^3$ при $y(-4) = -1$

$y = (x+1)^3$ при $y(2) = 1$

$$y = \begin{cases} (x-1)^3, & x \geq 1 \\ 0, & x \in (-3, 1) \\ (x+3)^3, & x \leq -3 \end{cases}$$

Ур-я 1 порядка, не разрем. относ. y'

$y = f(x, y')$ - разрем. относ. y

Метод введения параметра: $y' = p$

$y = f(x, p)$

$dy = f'_x\, dx + f'_p\, dp$; $\quad dy = p\,dx$

$f'_p\, dp = (p - f'_x)\,dx$

$\frac{dp}{dx} = F(x, p)$ или $\frac{dx}{dp} = G(x, p)$ - ДУ 1 пор. разрем. относ. произв.

1. Найти реш-е в виде $x = x(p, C)$

   $y = f(x, p) = y(p, C)$

   Семейство реш-ий, завис. от C в парам. виде.

2. Найти реш-е в виде $p = p(x, C)$

   $y = f(x, p) = y(x, C)$

   Семейство реш-ий, завис. от C в явном виде

Пример 1

$y = 2xy' - 4y'^3$ - не разрем. относ. y'

$p = y'$

$y = 2xp - 4p^3$

$dy = 2p\,dx + 2x\,dp - 12p^2\,dp = p\,dx$

$p\,dx = (12p^2 - 2x)\,dp$

$p\frac{dx}{dp} = 12p^2 - 2x$ - ЛУ

$p = 0 \Rightarrow y = 0$ - реш-е

Иначе $x = x(p)$, $p = $ const - не подх.

ОЛУ: $p\frac{dx}{dp} = -2x$

$\frac{dx}{x} = -\frac{2\,dp}{p}$

$\ln|x| = -2\ln|p| + C$

$x = \frac{C}{p^2}$

ВП: $x = \frac{C(p)}{p^2}$

$p\frac{C'(p)p^2 - 2pC(p)}{p^4} = 12p^2 - 2\frac{C(p)}{p^2}$

$\frac{C'(p)}{p} = 12p^2 \Rightarrow C(p) = 3p^4 + C$

$$x = \frac{3p^4 + C}{p^2} = 3p^2 + \frac{C}{p^2}$$

$$y = 6p^3 + 2\frac{C}{p} - 4p^3 = 2p^3 + 2\frac{C}{p}$$ Ответ: $x = 3p^2 + \frac{C}{p^2}$, $y = 2p^3 + 2\frac{C}{p}$ или $y = 0$.

Пример 2

$$4(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2 \qquad y' = p$$

$$4(xp - 2y) = 4x^2 - p^2$$

$$y = \frac{xp}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{8}$$

$$dy = \frac{p\,dx}{2} + \frac{x\,dp}{2} - x\,dx + \frac{p\,dp}{4} = p\,dx$$

$$\frac{p + 2x}{2}\,dx = \frac{2x + p}{4}\,dp$$

1. $p = -2x \Rightarrow y = -x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = -x^2$
2. $2\,dx = dp$

$$p = 2x + C$$

$$y = \frac{2x^2 + Cx}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{(2x + C)^2}{8}$$

$$y = \frac{x^2 + Cx}{2} + \frac{4x^2 + 4xC + C^2}{8}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = x^2 + Cx + \frac{C^2}{8} \\ y = -x^2 \end{array}\right.$

3. А нельзя ли сделать так (глубоко и философски):

$$p = p(x, C)$$

$y' = p(x, C)$ – интегрировать

В примере $p = -2x \Rightarrow y = -x^2 + C$

Если подставить в ур-е, получим: $C = 0$. Стало быть что-то не то

Так произ., потому, что в данный момент $p = p(x, C)$ – следствие исх. ур-я,

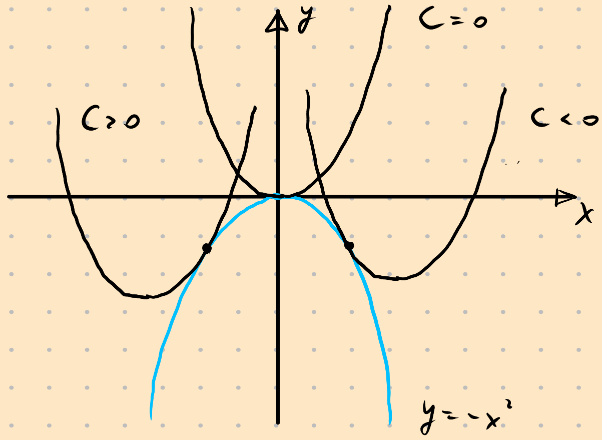
т.е. проинтегрированное $p(x, C)$ нужно подставить в ур-е и проверить реш.-я.

Но: так вообще-то можно. Главное подставить.

Интегр. кривые.

$x^2 + Cx + \frac{C^2}{8} = -x^2 \Rightarrow \left(x + \frac{C}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow$ 2 параболы кас-ся в т. $x = -\frac{C}{4}$

C - любое $\Rightarrow x_{\text{касания}}$ - любое $\Rightarrow y = -x^2$ - особое решение.



Почему нет других особых реш-ий?

$F(x, y, y') = 0$, F - непр. диффер.

$\exists$ p - дискриминантная кривая:

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p) = 0 \end{cases} \quad \text{исключ. } p \Rightarrow \Phi(x,y) = 0$$

Если реш-е ур-я $F(x,y,y')$ яв-ся особым, то оно лежит на p - дискр. кривой.

Нахождение на p - дискр. кривой - необх. усл-е особого реш-я.

Для нашего ур-я:

$$\begin{cases} 4(xp - 2y) = 4x^2 - p^2 \\ 4x = -2p \end{cases}$$

$$-8x^2 - 8y = 4x^2 - 4x^2$$

$y = -x^2$ - p - дискр. кривая совпала с особым решением => других особых реш-ий нет.

Ветвь дискриминантной кривой яв-ся решением, но не особым:

$y'^2 = y^2$ д. кр. $y=0$ — реш., но не особое

Ветвь д. кр. не яв-ся реш-ем:

$(1+y')^2 = y'(y-x)^2$ д. кр.: $\begin{cases} (1+p)^2 = p(y-x)^2 \\ 2(1+p) = (y-x)^2 \end{cases}$ $p=-1 \Rightarrow y=x$ — не реш.

$p=1 \Rightarrow y-x=\pm 2$ — реш.

$\left[\begin{array}{l} p=1 \\ p=-1 \end{array}\right.$

Теоретические задачки

Теорема сущ. и единственности реш. з. Коши для ур-ий n-го порядка

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ $y(x_0)=y_0,$ $y'(x_0)=y_1, \dots,$ $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$

Если f непр. дифф. в окр. $G \subset R^{n+1}$, $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$

$\exists \delta > 0$: реш. з. Коши сущ. и ед. на $[x_0-\delta; x_0+\delta]$

№ ФФ-230

Могут ли гр-2-х реш. ур-ий касаться в т. (x_0, y_0):

а) $y' = x+y^2$

Нет. 2 реш. ур-я з. Коши $y(x_0)=y_0$

б) $y'' = x+y^2$

Нет 2 реш. ур-я з. Коши $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$

в) $y''' = x+y^2$

Да. Могут быть разные вторые произв. $y''(x_0)$

№ ФФ-231

Ск. сущ. реш-ий $y^{(n)} = x+y^2$, удовл. усл. $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $n=1,2,3$

$n=1$: $y'=x+y^2$ - 0 реш-ий $(2\neq 0+1)$

$n=2$: $y''=x+y^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ - 1 реш-е (реш-е з. Коши)

$n=3$: $y'''=x+y^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ - ∞ много (любое знач. $y''(0)$ даёт реш-е своей з. Коши)

№ Ф-233

При каких n ур-е $y^{(n)}=f(x,y)$, $(f, f'_y$ непр.) ур-е им. среди своих реш. $y_1=x$, $y_2=x+x^4$

з. Коши $y^{(n)}=f(x,y)$ $\quad y(x_0)=y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=0$ $\qquad$ Ищем n, при к-рых $y_1^{(n)}(0)$ и $y_2^{(n)}(0)$ отличаются - разные реш. з. Коши

$y_1'=1$, $y_2'=1+4x^3$

$y_1''=0$, $y_2''=12x^2$ $\quad y_1''(0)=0$, $y_2''(0)=0$

$y_1'''(0)=0$, $y_2'''=24x$ $\quad y_1'''(0)=0$, $y_2'''(0)=0$

$y_1^{(4)}=0$, $y_2^{(4)}=24$ $\quad y_1^{(4)}(0)\neq y_2^{(4)}(0)$

$1\leq n\leq 4$ => 2 разных реш. одной з. Коши (невозможно)

$n=5$ - обе ф-ии яв-ся реш. ур-я $y^{(5)}=0$ (вдруг в других т. тоже 2 реш. одной з. Коши?)

Лин. однородные ур-я n-го порядка с пост. коэф.

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_n=0 \qquad a_n\in R$$

- можно понижать порядок, т.к. нет явного x, а можно хитрее:

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda'+a_ny=0$$

Мн-во реш-ий ур-я обр. лин. пр-во разм-ти n:

$y_1(x),\dots, y_n(x)$ - базис (ФСР - фунд. сис-ма реш-ий)

ОРОУ $\quad y=C_1y_1(x)+\dots+C_ny_n(x)$

Как найти ФСР?

1. Все λ_i действ-и различны

ФСР: $e^{\lambda_1 x},\dots, e^{\lambda_n x}$

Пример 1: $y''-6y'+8y=0$

$\lambda^2-6\lambda+8=0$ => $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$

② λ - действ. реш. хар. ур. кратности k

Ему соотв. k реш. в ФСР

$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$

$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_m)^{k_m}=0$

$k_1+k_2+\ldots+k_m=n$ реш.

Пример 1. $y'''-y''-y'+y=0$

$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$

$(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1, \ \lambda_2=1$ кр. 2

$y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3xe^x$

Пример 2 $y'''-6y''+12y'-8y=0$

$\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=0$

$(\lambda-2)^3=0 \Rightarrow \lambda_1=2$ кр. 3

$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3x^2e^{2x}$

③ Сущ-ет комплексный корень $\lambda=\alpha+\beta i, \ \beta\neq 0$

$\bar\lambda=\alpha-\beta i$ - тоже корень

$e^{\lambda x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$

$e^{\bar\lambda x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$

Возьмём другой базис в этом линейном подпространстве:

$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x$ - действ. ф-ии яв-ся реш.

Пример 1: уре - гарм. колебаний $y''+\omega y^2=0, \quad \omega>0$

$\lambda^2+\omega^2=0, \quad \lambda=\pm\omega i, \quad \alpha=0, \ \beta=\omega$

ФСР: $e^{i\omega x}, \ e^{-i\omega x}$

В действ. числах: $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$ - других реш-ий нет!

Пример 2: $\lambda=\alpha+\beta i$ - корень кр. k

В ФСР $2k$ реш-ий: $e^{\alpha x}\cos\beta x, \ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, \ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Пример 3: $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$

$\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$

$(\lambda^2 + 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3i, \quad \lambda_2 = -3i$

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 x \sin 3x$

Внимание Количество констант равно порядку уравнения!!! (Иначе 0 за задачу)

Пример 4: $y'' + 6y' + 10y = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 - i, \quad \lambda_2 = -3 + i$

$y = C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x$

Линейные неоднородные ур-я с пост. коэфф-ами

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$

ОРНУ = ОРОУ + ЧРНУ

Пусть $f(x) = P_m(x) e^{\mu x}$ – квазимногочлен P_m – многочлен ст. m

Как искать частное решение?

① μ не яв-ся корнем характ. ур-я

ЧРНУ ищется в виде $Q_m(x) e^{\mu x}$, $Q_m(x)$ – многочлен ст. m с неопр. коэфф.

Пример 1: $y'' - 4y' + 4y = 32x e^{-2x}$ $m = 1$, $\mu = -2$ – не корень хар. ур.

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ кр. 2

$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ – ОРОУ

ЧРНУ: $y = (Ax + B) e^{-2x}$

$y' = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} = e^{-2x}(-2Ax + A - 2B)$

$y'' = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4(Ax + B)e^{-2x} = e^{-2x}(4Ax - 4A + 4B)$

Подставим: $(4Ax - 4A + 4B) - (-8Ax + 4A - 8B) + (4Ax + 4B) = 32x$

$16A = 32 \Rightarrow A = 2$ $-16 + 16B = 0 \Rightarrow B = 1$

ЧРНУ: $y = (2x + 1)e^{-2x}$ ОРНУ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + (2x + 1)e^{-2x}$

2. Если $P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

или $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

или их лин. комб.

$\mu=\alpha x+\beta i$ не яв-ся корнем хар. ур.

ЧРНУ: $y=Q_m^{(1)}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m^{(2)}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$Q_1^{(1)}, Q_1^{(2)}$ - многочлены ст. $\leq m$

Пример 1: $y''-y'-2y=(2x+1)\cos 3x$ $\quad m=1 \quad \mu=3i$

$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow$ ОРОУ $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

ЧРНУ: $y=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x$

$y'=A\cos 3x-3(Ax+B)\sin 3x+C\sin 3x+3(Cx+D)\cos 3x=$

$=(3(Cx+3D)+A)\cos 3x+(-3Ax-3B+C)\sin 3x$

$y''=3C\cos 3x-3(3Cx+3D+A)\sin 3x-3A\sin 3x+3(-3Ax-3B+C)\cos 3x=$

$=(-9Ax-9B+6C)\cos 3x+(-9Cx-9D-6A)\sin 3x$

$(-9Ax-9B+6C)\cos 3x+(-9Cx-9D-6A)\sin 3x-(3Cx+3D+A)\cos 3x+$

$+(3Ax-3B+C)\sin 3x-2(Ax+B)\cos 3x-2(Cx+D)\sin 3x=(2x+1)\cos 3x$

3. μ - корень характ. ур-я порядка k

(резонанс порядка k)

ЧРНУ: $y=x^kQ_m(x)e^{\mu x}$

$\sim m+1$ коэфф.

Многочлен степени $m+k$

Для нахождения неопр. коэфф.: $m+k+1$ ур-е

Получается, что старшие K коэфф. автоматически обращаются в 0.

В итоге получается $m+1$ ур-е с $m+1$ неизв. - реш-е однозначно.

Пример

$y''-y'-2y=-9xe^{-x}$ $\quad \mu=-1$ - корень хар. ур-я кр. 1 $\quad m=1$

$\lambda^2-\lambda-2=0$ $\quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-1\end{array}\right.$

ОРОУ: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

ЧРНУ: $y=x(Ax+B)e^{-x}=(Ax^2+Bx)e^{-x}$

$$y' = e^{-x}(-Ax^2 - Bx + 2Ax + B)$$
$$y'' = -e^{-x}(-Ax^2 + (2A-B)x + B) + e^{-x}(-2Ax + 2A - B) =$$
$$= e^{-x}(Ax^2 + (B-4A)x + 2A - 2B)$$

$$Ax^2 + (B-4A)x + 2A - 2B$$

Старший коэф. уходит! (=0)

$$Ax^2 + (B-2A)x \quad - B \quad = -9x$$
$$-2Ax^2 \quad - 2Bx$$

$$-6Ax + 2A - 3B = -9x$$

$$A = \frac{3}{2} \quad B = 1$$

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)e^{-x}$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)e^{-x}$

(4) Если в правой части 2 квазимногочлена: $P_{m_1}(x)e^{\mu_1 x} + P_{m_2}(x)e^{\mu_2 x}$, то нужно найти ЧРНУ для каждой из правых частей и сложить их.

Пример

$$y^{(4)} + y''' - 2y'' = 3e^x + 16e^{2x}, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0$$
$$\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \ 1, \quad \lambda = 0 \text{ кр. } 2$$

ОРОУ: $y = C_1 \cdot 1 + C_2 x \cdot 1 + C_3 e^x + C_4 e^{-2x}$

Решаем для $3e^x$: $\mu = 1$, $k = 1$

$$y = x \cdot A \cdot e^x \qquad y' = e^x(Ax + A) \qquad y'' = e^x(Ax + 2A) \qquad y''' = Ae^x(x+3) \qquad y^{(4)} = Ae^x(x+4)$$
$$Ae^x(x + 4 + x + 3 - 2x - 4) = 3e^x \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y = xe^x$$

Решаем для $16e^{2x}$: $\mu = 2$, $k = 0$

$$y = Be^{2x} \qquad y'' = 4Be^{2x} \qquad y''' = 8Be^{2x} \qquad y^{(4)} = 16Be^{2x}$$
$$16B + 8B - 2 \cdot 4 \cdot B = 16 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow y = e^{2x}$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-2x} + xe^x + e^{2x}$

(5) Если правая часть имеет вид $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ или $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, или лин. комбинация этих выражений, причём $\mu = \alpha + \beta i$ – корень хар. ур-я кр-ти k, то ЧРНУ $y = x^k\left(Q_m^{(1)}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right)$

$$y''' - 16y' = 48x^2 + 2\cos^2 2x$$

$\lambda^3 - 16\lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = -4$

ОРОУ: $y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-4x}$

Правая часть: $\underbrace{48x^2+1}_{\mu=0} + \underbrace{\cos 4x}_{\mu=\pm 4i}$

Пр. часть: $48x^2+1$; $\mu = 0$, $m = 2$, $k = 1$

ЧРНУ: $y = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \qquad y'' = 6Ax + 2B \qquad y''' = 6A$

$6A - 48Ax^2 - 32Bx - 16C = 48x^2 + 1$

$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{7}{16}$

$y = x\left(-x^2 - \frac{7}{16}\right)$

Пр. часть: $\cos 4x$: $\mu = \pm 4i \quad k = 0 \quad m = 0$

ЧРНУ: $y = A\cos 4x + B\sin 4x$

Пр. ч. чётная, произв. только нечётного порядка => ЧРНУ можно искать в виде нечётной функции. Ищем ЧРНУ в виде $y = B\sin 4x$

$y' = 4B\cos 4x \qquad y''' = -64B\cos 4x$

$-128B\cos 4x = \cos 4x \qquad B = -\frac{1}{128}$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-4x} - x^3 - \frac{7}{16}x - \frac{\sin 4x}{128}$

№ из д/з - ужас! много счёта!

опечатка

$y'' - ay' + 2y = e^x \cos x$

Характ. ур-е: $\lambda^2 - a\lambda + 2 = 0$

$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$

Если $|a| > 2$: $\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$

ОРОУ $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Если $|a| = 2$: $\lambda = \frac{a}{2}$ кр. 2

ОРОУ $y = Ce^{a/2\, x} + C_2 x e^{a/2\, x}$

Если $|a| < 2$: $\lambda_{1,2} = \frac{a \pm i\sqrt{4-a^2}}{2}$

ОРОУ $y = e^{a/2\, x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)$

Пр. часть $e^x \cos x \qquad \mu = 1 \pm i$

μ - корень хар. ур-я: $(1+i)^2 - a(1+i) + 2 = 0$

$a=2$

Если $a\neq 2$, то резонанса нет, $K=0$, $m=0$

ЧРНУ $y=Ae^x\cos x+Be^x\sin x$

Если $a=2$, есть резонанс $K=1$, $m=0$

ЧРНУ $y=x(Ae^x\cos x+Be^x\sin x)$

- Для решения з. Коши нужно написать общее реш-е, затем сис-мы для $C_1 \dots C_n$

Пример 1

$y''+4y=\sin 2x \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$

$\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

ОРОУ $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

Пр. часть $\sin 2x$ $\mu=\pm 2i$ $K=1$ $m=0$

ЧРНУ $y=x(A\sin x+B\cos x)$

Пр. часть нечётна, произв. только чётных порядков => ЧРНУ можно искать в виде чёт. ф-ии

$y=xB\cos 2x \qquad y''=-4B(\sin 2x+x\cos 2x)$

$y'=B\cos 2x+2Bx\sin 2x$

ОРНУ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x$

А теперь задача Коши:

$y(0)=1 \Rightarrow C_1=1$

$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$

$y'(0)=0 \Rightarrow 2C_2-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow C_2=\frac{1}{8}$

Ответ: $y=\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x$

Произвольная правая часть

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$

$a_i(x)$, $f(x)$ непр. на нек-ром промежутке

- Мн-во реш-ий ОУ:

$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$, $y_1 \ldots y_n$ - ФСР

- Метод вариации постоянных:

ОРНУ ищем в виде $y = C_1(x)\, y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$

$C_i'(x)$ ищутся из сис-мы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + \ldots + C_n'(x) y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + \ldots + C_n'(x) y_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 \ldots & y_n \\ y_1' \ldots & y_n' \\ \ddots & \\ y_1^{(n-1)} \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ - определитель Вронского

ФСР $\Delta \neq 0$

Пример 2

$$y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

ОРОУ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

ОРНУ: $y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)\, e^x - C_2'(x) e^{-x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{2(e^x + e^{-x})} \qquad C_2'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2(e^x + e^{-x})}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} dx \underset{e^{-x} = t}{=} \frac{1}{2}\int e^{-x} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \frac{t}{2} - \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{t}{2} - \operatorname{arctg} t + C_1 = \frac{e^{-x}}{2} - \operatorname{arctg} e^{-x} + C_1$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + e^{-x}} dx \underset{e^x = t}{=} -\frac{1}{2}\int e^x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} - \int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} dt = \ldots = -\frac{e^x}{2} + \operatorname{arctg} e^x + C_2$$

Ответ: $y = \left(\frac{e^{-x}}{2} - \operatorname{arctg} + C_1\right) e^x + \left(-\frac{e^x}{2} + \operatorname{arctg} e^x + C_2\right) e^{-x} =$

$= e^{-x} \operatorname{arctg} e^x - e^x \operatorname{arctg} e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = 0$$

(на $(0, +\infty)$ или на $(-\infty, 0)$)

- Рекомендуется след. замена незав. переменной:

$x = e^t$ $(x > 0)$ или $x = -e^t$ $(x < 0)$

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t} y'_t \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

После чего ур-е приводится к ур-ю с постоянными коэф-ами.

- Даже более общее – $(ax+b)^n$ вместо x^n – замена та же: $ax+b = e^t$

Пример 1

$x^2 y'' - 2y = -2x^3$ ($x>0$, хотя это почти ни на что не влияет)

$x = e^t \qquad y'' = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

$y'' - y' - 2y = -2e^{3t}$

Х.у.: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$

ОРОУ: $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$

Пр. часть: $-2e^{3t} \qquad \mu = 3 \quad K = 0 \quad m = 0$

ЧРНУ: $y = Ae^{3t}$

$9A - 3A - 2A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2} e^{3t}$

ОРНУ: $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2} e^{3t} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{2} x^3$

Пример 2

$x^2 y'' + xy' + y = \cos(\ln x)$

$x = e^t \qquad y'_x = e^{-t} y'_t \qquad y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

$y'' - y' + y' + y = \cos t$

$y'' + y = \cos t$

Х.у.: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

ОРОУ: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Пр. часть: $\cos t \qquad \mu = \pm i \quad K = 1 \quad m = 0$

ЧРНУ $y = t(A \cancel{\cos t} + B \sin t)$

$y = Bt\sin t \qquad y' = Bt\cos t + B\sin t \qquad y'' = 2B\cos t - Bt\sin t$

$y'' + y = 2B\cos t = \cos t \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

ОРНУ: $y = C_1\cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2}\sin t = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + \frac{\ln x}{2} \sin \ln x$

Пример 1 (важный)

Составить ЛОУ (пост. коэфф. с наим. порядком), имеющее данные реш-я:

① $y_1 = x^2 e^x$

$\lambda = 1$ кр. 3

$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

② $y_1 = xe^x, \quad y_2 = e^{-x}$

$\lambda_1 = 1$ кр. 2 $\qquad \lambda_2 = -1$ кр. 1

$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

$y''' - y'' - y' + y = 0$

③ $y_1 = x \qquad y_2 = \sin x$

$\lambda_1 = 0$ кр. 2 $\qquad \lambda_{2,3} = \pm i$

$\lambda^2(\lambda^2 + 1) = \lambda^4 + \lambda^2$

$y^{(4)} + y'' = 0$

Линейные однородные системы с постоянными коэф.

Неизв. ф-ии $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, произв. обозн. точками

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A = (a_{ij})$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad \dot{\bar{x}} = Ax$$

Реш-я образуют лин. пр-во

$\bar{x} = C_1\bar{x}^{(1)}(t) + C_2\bar{x}^{(2)}(t) + \dots + C_n\bar{x}^{(n)}(t)$

$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)}(t)$ – ФСР

Надо найти собств. знач. A => характ. ур-е:

$\det(A - \lambda E) = 0$

- Если $\lambda \in \mathbb{R}$ – корень характ. ур-я, то

  $\underbrace{\bar{x} = e^{\lambda t}\bar{h}}_{\text{реш-е сис-мы}}$, $\bar{h}$ – собств. вектор, соотв. данному λ.

  Если все $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и различны => общее реш-е

  $\bar{x} = C_1e^{\lambda_1 t}\bar{h}_1 + \dots + C_ne^{\lambda_n t}\bar{h}_n \quad (*)$

- Пусть λ – корень х.у., $\lambda \in \mathbb{R}$

  E_λ – собств. подпростр-во, $E_\lambda = \{\bar{x} : A\bar{x} = \lambda\bar{x}\}$

  $1 \le \dim E_\lambda \le$ кр-ть λ

  Преобр-е A наз-ся диагонализируемым, если $\exists$ базис, в к-ром A им. диагональный вид:

  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n$ – собств. базис

  Достаточное усл-е: если все корни хар. многочлена $\in \mathbb{R}$ и различны, то преобр-е диагонализируемо.

  Необходимое и достаточное усл-е: все корни хар. ур-я действительны и $\forall \lambda_i \to \dim E_{\lambda_i} =$ кр. λ_i (алгебр. и геом. кратность – ?)

Если A диагонализируема, то $(*)$ для общего реш-я сохраняется.

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z \\ \dot{y} = 2x + y + 2z \\ \dot{z} = 2x + 2y + z \end{cases}$$

Собств. знач.: $\lambda_1 = -1$ кр.2, $\lambda_2 = 5$ кр.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$:

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad rg = 1 \Rightarrow \dim E_{-1} = 2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\overline{h}_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\overline{h}_2}$$

$\lambda = 5$:

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\overline{h}_3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- В общем случае матрица приводится к Жордановой форме.

Жорданова клетка $K \times K$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

При $n = 3$: $K=1$: (λ) $\quad K=2$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad K=3$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Жорданова форма: $\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_p} \end{pmatrix}$

В разных клетках могут быть разные λ, могут быть одинаковые λ.

На каждую клетку прих-ся ровно 1 лин. незав. собств. в-р, соотв. данному λ.

Размерность E_λ – кол-во клеток, соотв. данному λ.

Кратность корня λ – сумма размеров клеток, соотв. данному λ.

Диагонализируемость <=> все клетки им. размер 1.

Клетка размера k даёт k решений в ФСР.

Пусть $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k$ – соотв. векторы базиса, в к-ром матрица им. Жорданов вид:

$$A\bar{h}_1 = \lambda \bar{h}_1 \qquad (A - \lambda E)\bar{h}_1 = 0$$

$$A\bar{h}_2 = \bar{h}_1 + \lambda \bar{h}_2 \qquad (A - \lambda E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A\bar{h}_k = \bar{h}_{k-1} + \lambda \bar{h}_k \qquad (A - \lambda E)\bar{h}_k = \bar{h}_{k-1}$$

И так можно делать до тех пор, пока неоднородная сис-ма совместна.

$\bar{h}_1$ – собств., $\underbrace{\bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n}_{\text{Жорданова цепочка}}$ – присоединённые

Эта клетка и эта цепочка даёт k реш-ий в ФСР

$$e^{\lambda t}\bar{h}_1, \quad e^{\lambda t}(\bar{h}_2 + t\bar{h}_1), \quad e^{\lambda t}\left(\bar{h}_3 + t\bar{h}_2 + \frac{t^2}{2}\bar{h}_3\right), \dots, \quad e^{\lambda t}\left(\bar{h}_k + t\bar{h}_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h}_1\right)$$

- Все возм. случаи при $n = 3$:

I $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – различны

$$\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t}\bar{h}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\bar{h}_2 + C_3 e^{\lambda_3 t}\bar{h}_3 \quad (*)$$

II $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

а) $\dim E_{\lambda_1} = 2$

Сохр. $(*)$

б) Возникает Жорданова клетка

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$$

$$(A - \lambda E)\bar{h}_1 = 0$$

$$(A - \lambda E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$$

$$(A - \lambda E)\bar{h}_3 = 0$$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t}\bar{h}_1 + C_2 e^{\lambda_1 t}(\bar{h}_2 + t\bar{h}_1) + C_3 e^{\lambda_3 t}\bar{h}_3$$

Пример 1

$$\begin{cases} \dot x = -2y - 2z \\ \dot y = 3x + 5y + 3z \\ \dot z = -x - 2y - z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \text{ кр. } 2 \\ \lambda_2 = 2 \text{ кр. } 1 \end{array}$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{2} x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\dim E_1 = 1 \Rightarrow$ будет присоед. вектор

$$(A - E)\bar h_2 = \bar h_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = -\frac{3}{2} x_3 - \frac{3}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нам нужно хоть какое-то реш-е сис-мы.
Возьмём $x_3 = -1 \Rightarrow \bar h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Присоединённый вектор – реш-е неоднородной сис-мы. Его нельзя менять на пропорциональный!

$\lambda = 2$:

$$(A - 2E) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad \bar h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

III $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

а) $\dim E_\lambda = 3$ $\qquad \bar x = e^{\lambda t}(C_1 \bar h_1 + C_2 \bar h_2 + C_3 \bar h_3) = e^{\lambda t} \bar C$

б) $\dim E_\lambda = 2$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \bar h_1 \quad \bar h_2 \quad \bar h_3 \end{array} \qquad \bar x = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar h_1 + C_2 e^{\lambda_1 t}(\bar h_2 + t \bar h_1) + C_3 e^{\lambda_1 t} \bar h_3$$

Куда присоединить h_1? Не к произвольному!

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z \end{cases} \qquad \lambda_1 = -3 \text{ кр. } 3$$

$$(A+3E) = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$

$rg = 1 \Rightarrow \dim E_\lambda = 1$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 6x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\bar{f}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{= f_2}$$

f_1, f_2 – собств. но непонятно, к какому присоединить $\bar{h}_2$

$\bar{h}_1 = \alpha \bar{f}_1 + \beta \bar{f}_2$ – ищем вектор, к к-рому можно присоединить

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 6\alpha - 3\beta \end{pmatrix} \qquad (A+3E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$$ – надо чтобы сис-ма была совместна

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & -2 & \alpha \\ 18 & -9 & -3 & \beta \\ 18 & -9 & -3 & 6\alpha - 3\beta \end{array}\right) \qquad \begin{cases} \beta = 6\alpha - 3\beta \\ 2\beta = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow 2\beta = 3\alpha$$

rg расширенной = rg основной = 1
(усл-е совместности)

Можно взять $\beta = 3$, $\alpha = 2$

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\dim E_{-3} = 2$, но подпр-во векторов $\bar{h}_1$, к к-рым можно присоединить вектор, одномерно.

$\bar{h}_2$ ищется из $(A+3E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & -2 & 2 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Получаем $6x_1 - 3x_2 - x_3 = 1$

Возьмём $\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

В кач-ве $\bar{h}_3$ можно взять любой собств. вектор, линейно незав. с $\bar{h}_1$, напр. $\bar{f}_1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

в) $\dim E_\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
$\bar{h}_1 \quad \bar{h}_2 \quad h_3$

$$\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t}\bar{h}_1 + C_2 e^{\lambda_1 t}(\bar{h}_2 + t\bar{h}_1) + C_3 e^{\lambda_1 t}\left(\bar{h}_3 + \bar{h}_2 t + \bar{h}_1 \frac{t^2}{2}\right)$$

$(A-\lambda E)\bar{h}_1 = 0$

$(A-\lambda E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$

$(A-\lambda E)\bar{h}_3 = \bar{h}_2$

IV Комплексные корни

$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \neq 0$

$\bar{h}_1 \qquad \bar{h}_2, \bar{h}_3$ - комплексные! $\bar{h}_2 = \overline{\bar{h}_3}$ (сопряжённые)

$e^{\lambda_1 t}\bar{h}_1 \qquad e^{\lambda_2 t}\bar{h}_2, \quad e^{\bar{\lambda}_2 t}\overline{\bar{h}_2}$

$$\frac{e^{\lambda_2 t}\bar{h}_2 + e^{\bar{\lambda}_2 t}\overline{\bar{h}_2}}{2} = \operatorname{Re} e^{\lambda_2 t}\bar{h}_2 \qquad \frac{e^{\lambda_2 t}\bar{h}_2 - e^{\bar{\lambda}_2 t}\overline{\bar{h}_2}}{2} = \operatorname{Im} e^{\lambda_2 t}\bar{h}_2$$

Фунд. реш. - Re и Im $e^{\lambda_2 t}\bar{h}_2$

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2z \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z \\ \dot{z} = -2x - 4y - z \end{cases} \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2 + i$

$$A + (2-i)E = \begin{pmatrix} 5-i & -1 & 2 \\ 2 & -3-i & 2 \\ -2 & -4 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{i-1}{2} \\ 0 & -7-i & 3-i \\ 0 & -11+2i & 4-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{i-1}{2} \\ 0 & 7+i & -3+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Проверим $\det\begin{pmatrix} -7-i & 3-i \\ -11+2i & 4-3i \end{pmatrix}$: $(-7-i)(4-3i) + (11-2i)(3-i) = 0 \Rightarrow rg = 2, \dim = 1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i+3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{i-2}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{-3-i}{10}x_3 \\ x_2 &= \frac{2-i}{5}x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} -3-i \\ 4-2i \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \bar{h}_3 = \begin{pmatrix} -3+i \\ 4+2i \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\bar{h}_3$ искать не надо!

Фунд. реш.:

$$e^{(-2+i)t}\begin{pmatrix}-3-i\\4-2i\\10\end{pmatrix} = e^{-2t}\left(\cos t + i\sin t\right)\begin{pmatrix}-3-i\\4-2i\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\cos t+\sin t\\4\cos t+2\sin t\\10\cos t\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-\cos t-3\sin t\\-2\cos t+4\sin t\\10\sin t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}-3\cos t+\sin t\\4\cos t+2\sin t\\10\cos t\end{pmatrix} + C_3 e^{2t}\begin{pmatrix}-\cos t-3\sin t\\-2\cos t+4\sin t\\10\sin t\end{pmatrix}$$

Линейные неоднородные системы с пост. коэф-ами и правой частью – квазиполиномом

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{P}_m(t)e^{\mu t}$$ (или сумма таких выр-ий)

ОРНС = ОРОС + ЧРНС

1. μ – не корень хар. ур-я

ЧРНС $\bar{x} = \bar{Q}_m(t)e^{\mu t}$

$\bar{P}_m(t)$ – многочлен векторов, макс. степень координаты $= m$

2. Если $\bar{P}_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ или $\bar{P}_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$,

$\mu = \alpha + \beta i$ не яв-ся корнем хар. ур-я

ЧРНС $\bar{x} = \bar{Q}_m^{(1)} e^{\alpha t}\cos\beta t + \bar{Q}_m^{(2)}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\bar{Q}_m(t)$ – с неопр. коэфф., нах-ся однозначно

3. Если μ яв-ся корнем хар. ур-я кр. k

ЧРНС: $\bar{x} = \bar{Q}_{m+k}(t)e^{\mu t}$ – неизв. больше, чем ур-ий, ЧР нах-ся неоднозначно

(в отл. от одного ур-я, где $t^k Q_m(t)$)

$\mu = \alpha + \beta i$ – то же, что и (2)

$\bar{Q}_{m+k}^{(1)}(t)$ и $\bar{Q}_{m+k}^{(2)}(t)$

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t} \end{cases}$$

1. Одн. ур-е:

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 3$ кр. 2

$(A - 3E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \bar{h}_1 \ \ \bar{h}_2 \end{array}$ – Жорданова клетка

$A\bar{h}_1 = 3\bar{h}_1$

$A\bar{h}_2 = \bar{h}_1 + 3\bar{h}_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ОРОС. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2. Пр. часть: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$ $\quad \mu = 3 \quad K = 2 \quad m = 0 \quad m + k = 2$

ЧРНС: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At^2 + Bt + C \\ Dt^2 + Et + F \end{pmatrix} e^{3t}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (2At + B)e^{3t} + 3e^{3t}(At^2 + Bt + C) = (3At^2 + (2A + 3B)t + (B + 3C))e^{3t} \\ \dot{y} = (3Dt^2 + (2D + 3E)t + (E + 3F))e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3At^2 + (2A + 3B)t + B + 3C = 4At^2 + 4Bt + 4C - Dt^2 - Et - F \\ 3Dt^2 + (2D + 3E)t + E + 3F = At^2 + Bt + C + 2Dt^2 + 2Et + 2F + 2 \end{cases}$$

При t^2: $\quad 3A = 4A - D \quad (1) \qquad 3D = A + 2D \quad (4)$

t: $\quad 2A + 3B = 4B - E \quad (2) \qquad 2D + 3E = B + 2E \quad (5)$

1: $\quad B + 3C = 4C - B \quad (3) \qquad E + 3F = C + 2F + 2 \quad (6)$

(1) и (4) - одно и то же $\quad (A = D)$

С учётом $A = D$ (2) и (5) - одно и то же $\quad (2A = 2D = B - E)$

Из (3) и (6) $\Rightarrow A = -1, \quad D = -1$

A и D нашлись однозначно, для остальных - 2 ур-я:

$$\begin{cases} E = C - F + 2 \\ B = E - 2 \end{cases}$$

Положим произвольно $E = F = 0$, тогда $B = -2 \quad C = -2$.

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - e^{3t} \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Линейные неоднородные сис-мы с пост. коэфф.

Вариация постоянной

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{f}(t)$

ОР ОС $\quad \bar{x} = C_1 \bar{x}^{(1)}(t) + \dots + C_n \bar{x}^{(n)}(t)$

ОРНС $\quad \bar{x} = C_1(t)\bar{x}^{(1)}(t) + \dots + C_n(t)\bar{x}^{(n)}(t)$ – метод вариации постоянной

↓ подставить в сис-му – получим ур-я для $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$

Ответ записывается в форме: $\bar{x} = C_1 \cdot f_1(t) + C_2 \cdot f_2(t) + \dots + C_n f_n(t) + F(t)$

Экспонента от матрицы

$\underset{n\times n}{A} = (a_{ij}),\quad i,j = 1..n$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots$$

Как понимать сходимость такого ряда? Поэлементно.

$\forall i,j = 1..n \to \exists \lim\limits_{m\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(A^k)_{ij}}{k!} \right)$ — оказывается, он сх-ся

Свойства

1. $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ — только если $AB = BA$
2. $e^0 = E$
3. $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A} \qquad \left(\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$
4. Матрица e^A невырождена, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
5. $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Применение

Пусть $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ - сис-ма с пост. коэфф.

Общее реш-е $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{C} \qquad \bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix}$ — $\bar{C}$ надо писать справа!

Реш-е з. Коши $\dot{\bar{x}} = A\bar{x},\quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0:\quad x(t) = e^{A(t-t_0)}\bar{x}_0$

На практике так задачи решать неудобно — проще так, как делали раньше.

Реш-е систем с помощью e^A

(1) Все корни хар. ур-я действ. и матрица диаг.:

A - матрица в усл-ях задачи (в данном базисе)

A' - диаг. матрица (в базисе собств. век.)

$A' = S^{-1}AS$, S - матр. перехода от данного к собств.

$A = SA'S^{-1},\quad A^2 = SA'S^{-1}SA'S^{-1} = SA'^2S^{-1},\ \ldots\ \forall k \to A^k = SA'^kS^{-1}$

В пределе $e^A = Se^{A'}S^{-1}$

Если $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то $A'^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & 0 \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$, тогда

$$e^{A'} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Для нах-я общего реш-я или реш-я з. Коши, если матр. A приводится к диаг. виду A', то очевидно что At прив. к $A't$ с той же матр. перехода S:

$$e^{At} = S e^{At} S^{-1}$$

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

При помощи e^A найти общ. реш. и реш. з. Коши $x(0) = y(0) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ОРОС: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — задача как бы решена

Но для e^A всё только начинается!

$$S = (\bar{h}_1 \ \ \bar{h}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$(\Delta = ad - bc)$

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Общее реш-е: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C_1(e^{3t} + e^{-t}) + C_2(e^{3t} - e^{-t}) \\ C_1(e^{3t} - e^{-t}) + C_2(e^{3t} + e^{-t}) \end{pmatrix} =$

$$= \frac{C_1 + C_2}{2} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C_1 - C_2}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Реш-е з. Коши: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

II Случай комплексных корней

То же самое - только с комп. числами

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -x+y \\ \dot{y} = -5x+3y \end{cases}$$

Опр. нах-ием e^{At}

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$A-(1+i)E = \begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (2+i)x_1 = x_2 \Rightarrow \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ (сопряжённый)

$\begin{vmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg\,(A-(1+i)E) = 1 \Rightarrow dim = 1$

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}$ $\qquad \det S = -2i$

$S^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A' = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$

$e^{At} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix} \circleddash$

Внимание: e^{At} - действительная матрица!! $\qquad (2+i)(2-i) = 5$

$\circleddash\ -\frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix} = -\frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ (2+i)e^{it} & (2-i)e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} \underbrace{(2-i)e^{it} - (2+i)e^{-it}}_{2i(2\sin t - \cos t)} & \underbrace{-e^{it}+e^{-it}}_{2i\sin t} \\ \underbrace{5e^{it} - 5e^{-it}}_{10i\sin t} & \underbrace{-(2+i)e^{it} + (2-i)e^{-it}}_{2i(-2\sin t - \cos t)} \end{pmatrix}$$

$\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t$ $\qquad (2+i)e^{-it} = \overline{(2-i)e^{it}}$ $\qquad (2-i)e^{it} = (2-i)(\cos t + i\sin t)$

$z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$ $\qquad \operatorname{Im} = 2\sin t - \cos t$

$$e^{At} = -e^t\begin{pmatrix} 2\sin t - \cos t & -\sin t \\ 5\sin t & -2\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

Общее реш-е: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ реш-е з. Коши: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Для $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots\end{pmatrix}$ — Жорданова клетка:

$$e^A=\begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & e^\lambda/2 & \cdots & \frac{e^\lambda}{(n-1)!} \\ & e^\lambda & e^\lambda & e^\lambda/2 & \vdots \\ & & e^\lambda & e^\lambda & \ddots \\ & & & \ddots & \\ & & e^\lambda & e^\lambda & e^\lambda/2 \end{pmatrix}$$

А вообще, когда $A'_t=\begin{pmatrix}\lambda t & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda t & t\end{pmatrix}$, то

$$A'_t=\begin{pmatrix}\lambda t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & t & \\ & 0 & \ddots \\ & & t\end{pmatrix}=A+B$$

$$e^{A'_t}=e^{At}\cdot e^{Bt}=e^{\lambda t}\cdot E\cdot\left(E+B+B^2/2+\ldots+B^n/(n-1)!\right),$$

пока $B^n\neq 0$

Пример 1

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & 1 & & & \\ & & 3 & & & \\ \hline & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 4\end{array}\right) \qquad e^A=\left(\begin{array}{ccc|cc|c} e^3 & e^3 & e^3/2 & & & \\ & e^3 & e^3 & & & \\ & & e^3 & & & \\ \hline & & & e^4 & e^4 & \\ & & & & e^4 & \\ \hline & & & & & e^4\end{array}\right)$$

$$\bar{x}=C_1e^{3t}h_1+C_2e^{3t}(\bar{h}_2+t\bar{h}_1)+C_3e^{3t}\left(\bar{h}_3+t\bar{h}_2+\frac{t^2}{2}\bar{h}_1\right)+$$
$$+C_4e^{4t}\bar{h}_4+C_5e^{4t}(\bar{h}_5+t\bar{h}_4)+C_6e^{4t}\bar{h}_6$$

Пример 2

$$\begin{cases}\dot{x}=3x+y\\ \dot{y}=-x+5y\end{cases}$$

Найти общ. реш. и реш. з. Коши $x(0)=y(0)=1$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{At}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

Коши: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{At}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 5\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\-1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-5)+1=\lambda^2-8\lambda+16$$

$\lambda_1=4$ кр. 2

$$A-4E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \qquad \bar{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$(A-4E)\bar{h}_2=h_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{array}\right) \qquad -x_1+x_2=1 \qquad \bar{h}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{pmatrix} \qquad e^{At}=Se^{A't}S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A't = \begin{pmatrix} 4t & t \\ 0 & 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \qquad B^2 = 0$$

$$e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot e^{B} \quad ; \quad e^{B} = E + B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \qquad \text{Tenga } e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Операционный метод

$f(t)$ опред. и непр. на $[0; +\infty)$ (возможно конечное число т. разрыва 1^го рода)

$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt$, $p \in R$ (хотя p может быть и комплексным)

Интеграл сходится (абсолютно), если $|f(t)| \leq M e^{\lambda t}$, $p > \lambda$

$f(t) \doteqdot F(p)$ — преобразование Лапласа

оригинал изображение

Таблица оригиналов и изображений

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$\left\{\begin{matrix} t^k \cos \omega t \\ t^k \sin \omega t \end{matrix}\right\}$	$\frac{k!}{(p^2+\omega^2)^{k+1}} \left\{\begin{matrix} Re \\ Im \end{matrix}\right\} (p+i\omega)^{k+1}$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$, $\lambda + p > 0$		
t^k, $k \in N$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{-\lambda t} t$	$\frac{k!}{(p+\lambda)^{k+1}}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$		

Зная изображение, легко брать производные:

$f(t) \doteqdot F(p)$

$$f'(t) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

$u = e^{-pt}$ $\quad dv = f'(t) dt$

$du = -pe^{-pt} dt$ $\quad v = f(t)$

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Оригинал восст. по изображению однозначно (д-во методами ТФКП)

Пример 1

$y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ реш. з. Коши

$$y(t) \risingdotseq Y(p) \qquad y'' \risingdotseq p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1$$

$$p^2 Y(p) - 1 + 4 Y(p) = \frac{8}{p^2+4} + \frac{4p}{p^2+4}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+4} + \frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{4p}{(p^2+4)^2} = \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{p^2+12}{(p^2+4)^2} = \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{2}{p^2+4} - \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} \risingdotseq$$

$$p^2 + 12 = A(p^2+4) + B(p^2-4)$$

$$A = 2, \quad B = -1$$

$$\risingdotseq \sin 2t + t \sin 2t - t \cos 2t$$

Это — довольно удобный метод на практике.

(На КР нельзя! На экз. можно, но ошибку очень тяжело искать)

Для нах-я общего решения, в кач-ве нач. ус. берутся произв. C_1 и C_2

Пример 2

$$\begin{cases} \dot x = -x - 2y + 2e^{-t} \\ \dot y = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = -1$$

$$x(t) \risingdotseq X(p) \qquad y(t) \risingdotseq Y(p)$$

$$\dot x(t) \risingdotseq pX(p) + 1 \qquad \dot y(t) \risingdotseq pY(p) + 1$$

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = -X(p) - 2Y(p) + \dfrac{2}{p+1} \\ pY(p) + 1 = 3X(p) + 4Y(p) + \dfrac{1}{p+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p+1)X + 2Y = \dfrac{2}{p+1} - 1 = \dfrac{1-p}{p+1} \\ -3X + (p-4)Y = \dfrac{1}{p+1} - 1 = -\dfrac{p}{p+1} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & 2 \\ -3 & p-4 \end{vmatrix} = \ldots = (p-1)(p-2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1-p}{p+1} & 2 \\ -\frac{p}{p+1} & p-4 \end{vmatrix} = \ldots = \frac{-p^2+7p-4}{p+1} \qquad \Delta_y = \ldots = \frac{-p^2-4p+3}{p+1}$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-p^2+7p-4}{(p-1)(p-2)(p+1)} \qquad Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-p^2-4p+3}{(p-1)(p-2)(p+1)}$$

$$X(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+1}$$

$$A(p-2)(p+1) + B(p-1)(p+1) + C(p-1)(p-2) = -p^2 + 7p - 4$$

$A = -1$, $B = 2$, $C = -2$

— Системы операционным методом делать не стоит. Особенно те что без клеток и комплексных чисел.

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+1}$$

$A = 1$, $B = -3$, $C = 1$

$$x(t) = -e^{t} + 2e^{2t} - 2e^{-t} \qquad y(t) = e^{t} - 3e^{2t} + e^{-t}$$