I. Электростатика

§1. Электрический заряд

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ

Есть меньшие заряды у кварков: $\frac{1}{3}e$ или $\frac{2}{3}e$, но они всегда связаны

Закон сохранения заряда – полный заряд замкнутой сис-мы сохраняется.

$q = Ne$ – заряд дискретен

Заряд релятивистски инвариантен

Дискретность заряда – опыт Милликена (капля масла в конденсаторе)

1786 г. – закон Кулона (Кавендиш – 1771 г.)

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$ – точечные заряды (абстракция!)

В СИ: спец. единица заряда – 1 Кл (основная)

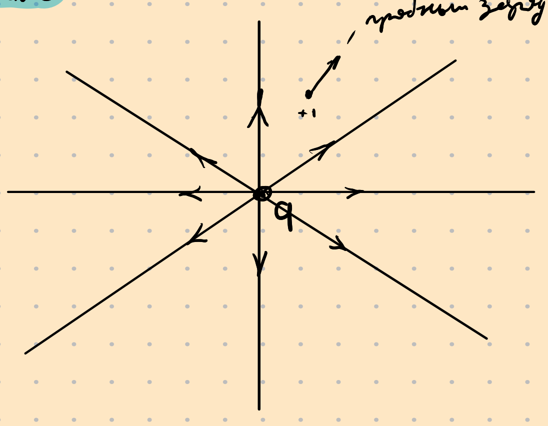
Из-за этого возникает $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9 \, \frac{\text{Н м}^2}{\text{Кл}^2}$

В СГСЭ: заряд – произв. единица

Из-за этого $k = 1$, $[q] = \sqrt{\text{дин}\cdot\text{см}^2} = 1$ ед. СГСЭ

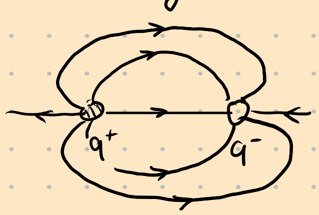
! 1 Кл $= 3\cdot 10^9$ ед. СГСЭ (Кулон – гигантская единица!)

Эл. поле

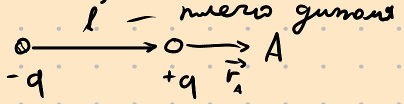


$$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$$

Эл-ий диполь



Электрический диполь

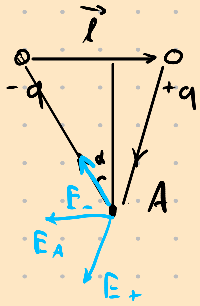


Дипольный момент $\vec{p} = q\vec{l}$

Ищем поле по принципу суперпозиций

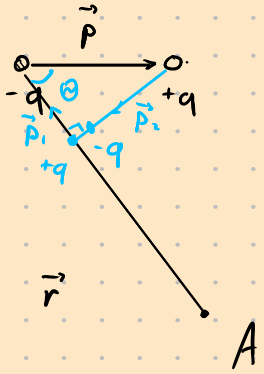
$|\vec{l}| \ll |\vec{r}_A|$ - точечный диполь $\qquad r_1 = |\vec{r}|, \quad r_2 = |\vec{r}| + |\vec{l}|$

$$E_A = q\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = q\,\frac{\underset{=l}{(r_1 - r_2)}\underset{=2r}{(r_1 + r_2)}}{r_1^2 r_2^2} \approx \frac{2ql}{r^3} = \frac{2\vec{p}}{r^3}$$



$$E_{+(-)} = \frac{q}{r^2} \qquad E_A = 2E_+ \sin\alpha = 2E_+\frac{l/2}{r} = \frac{ql}{r^2} = \frac{p}{r^2}$$

$$\vec{E}_A = -\frac{\vec{p}}{r^2}$$



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

$$E_A = \frac{1}{r^3}\left(2\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right) = \frac{1}{r^3}\left(3\vec{p}_1 - \vec{p}\right)$$

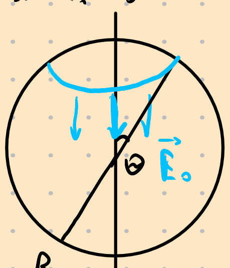
$$|\vec{p}_1| = p_1 = p\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{pr} \to p_1 = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^2}\vec{r}$$

$$! \quad E_A = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

№2.23



непроводящая сфера

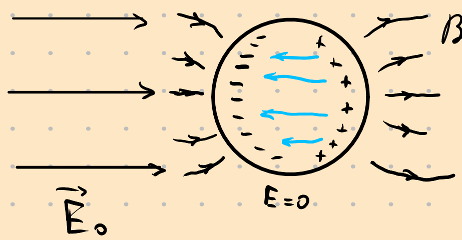
Каким образом распределить заряд по сфере, чтобы поле было однородным?

$$\sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$$

$$\vec{p} = -\vec{E}_0 R^3$$

Вдали от сферы она - диполь

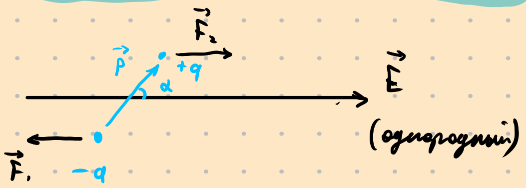
Внутри однородного поля металлические шары / сферы становятся такими!



Внутри шара возникает дипольный момент!

$$\vec{p} = \vec{E}_0 R^3$$

Диполь во внешнем поле



„Жёсткий" диполь – заряды закреплены на концах палки

В среде – наведённый диполь

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Если диполь свободный, он повернётся так, что $\vec{p} \parallel \vec{E}$

$$\vec{M} = [\vec{l}\,\vec{F}_2] = q[\vec{l}\,\vec{E}] = [\vec{p}\,\vec{E}]$$

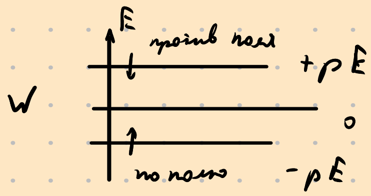
$$|\vec{M}| = pE\sin\alpha$$

Работа по повороту диполя на α:

$$\delta A = -M\,d\alpha = dW$$

$$W_{эл} = -pE\int_{\alpha}^{\alpha_0 = \pi/2} \sin\alpha\, d\alpha = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = -pE\cos\alpha$$

! $W_{эл} = -(\vec{p}\,\vec{E})$ $\qquad W_{min} = -pE \qquad W_{max} = pE$



Неоднородное поле

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$$

$$\vec{F} = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = q\,d\vec{E}$$

$$d\vec{E} = l_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + l_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + l_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$$

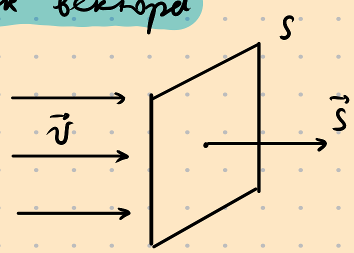
$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{F} = p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$$

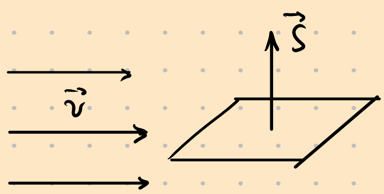
! $\vec{F} = (\vec{p}\,\vec{\nabla})\vec{E}$

$p_x \neq 0$; $p_y = p_z = 0$; ! $\vec{F} = p_x\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial x}$

Поток вектора



$\Phi = Q = vS$



$\Phi = 0$

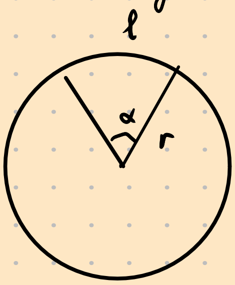
(для элементарной площадки)

$$\Phi = (\vec{v}\,\vec{S})$$

$\vec{v}$ – векторное поле

Поле $\vec{E} \longrightarrow \Phi = (\vec{E}\vec{S})$

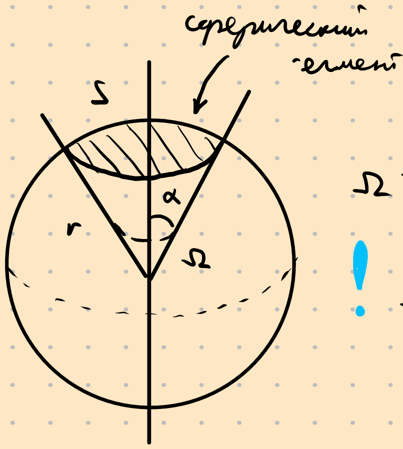
Телесный угол



$\alpha = \dfrac{l}{r}$

$\alpha_{max} = 2\pi$

2D

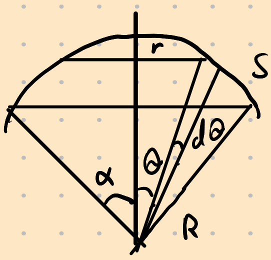


3D

$\Omega = \dfrac{S}{r^2}$

! $\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$

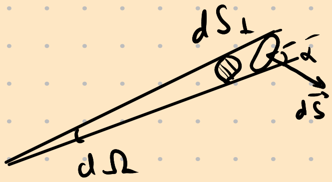
Площадь сферич. сегмента



$r = R\sin\theta$

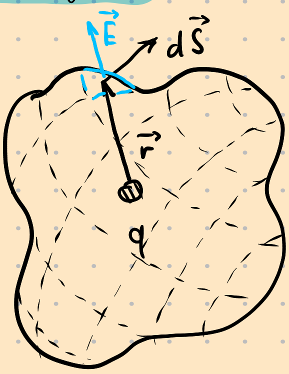
$$S = \int_0^{\alpha} 2\pi R\sin\theta\, R\, d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta = 2\pi R^2 (1-\cos\theta)$$

Бесконечно малый телесный угол



$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{(\vec{r}\cdot d\vec{S})}{r^3}$$

Теорема Гаусса



$$d\Phi = (\vec{E}\,d\vec{S}) \qquad \vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$$

$$\Phi = \oiint_S (\vec{E}\,d\vec{S}) = \oiint_S \overbrace{\frac{q(\vec{r}\,d\vec{S})}{r^3}}^{d\Omega} =$$

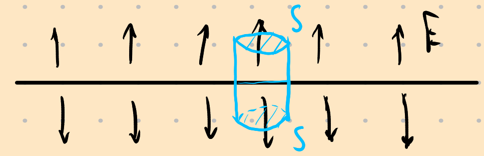
$$= \int q\, d\Omega = 4\pi q$$

$$\Phi = \oiint \vec{E}\,d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi \sum q_i \\ 0 \end{cases}$$

$$\Phi_E = \oiint(\vec{E}\,d\vec{S}) = \begin{cases} 4\pi\sum q_i \\ 0 \end{cases} = 4\pi \iiint_V \rho(x,y,z)\,\underbrace{dV}_{dx\,dy\,dz}$$ — интегральная форма

Примеры использования Гаусса

①



$\sigma\left[\frac{\text{эл}}{\text{см}^2}\right]$

Горизонт. компонент у E нет – иначе были бы токи!

$$\Phi = 2ES = 4\pi\sigma S$$

! $E = 2\pi\sigma$

При переходе сверху вниз поле исп. скачок: $\Delta E = 4\pi\sigma$

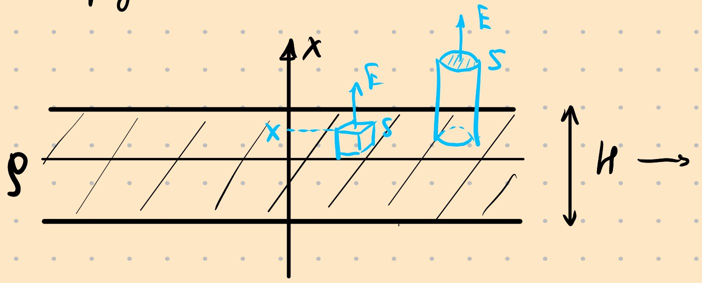
②

$$\Phi = ES = 4\pi\sigma S$$

$$E = 4\pi\sigma$$

Заряд – на пов-ти!

③

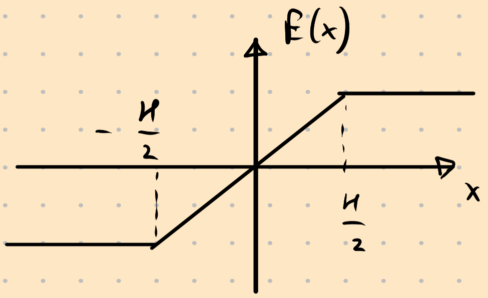


$x < \frac{H}{2}$: $\Phi = E(x)S = 4\pi\rho x S$

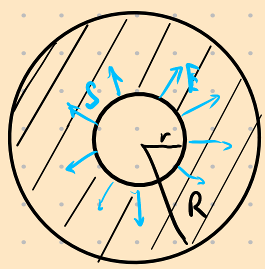
$E(x) = 4\pi\rho x, \quad x < \frac{H}{2}$

$x = \frac{H}{2}$: $ES = 4\pi\rho\frac{H}{2}S$

$E = 2\pi\rho H = 2\pi\sigma$



④



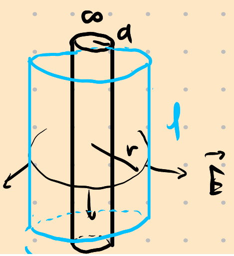
$$\Phi = E(r) = 4\pi r^2 = 4\pi\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

$$E(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r \quad (r \le R)$$

$$E(r) = \frac{4}{3}\rho\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{r^2}$$ – как точечный заряд!

E радиально симметрично

⑤



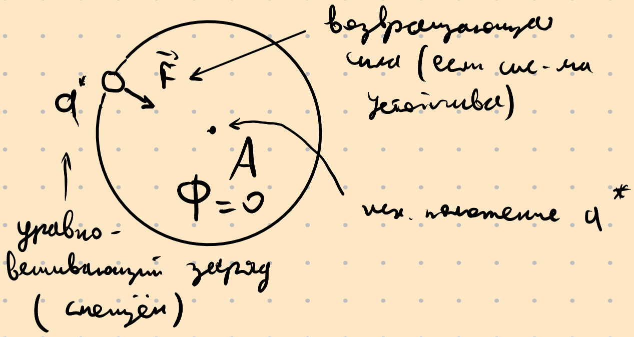
$$\Phi_E\big|_{r\ge a} = E(r)\cdot 2\pi r l = 4\pi\varkappa l$$ ($\varkappa$ – погонный заряд $\left[\frac{\text{эл}}{\text{см}}\right]$)

$$E(r)\big|_{r\ge a} = \frac{2\varkappa}{r}$$

Теорема Ирншоу

Сис-мы статически неподвижны

Всякая система уравновешенных зарядов неустойчива.

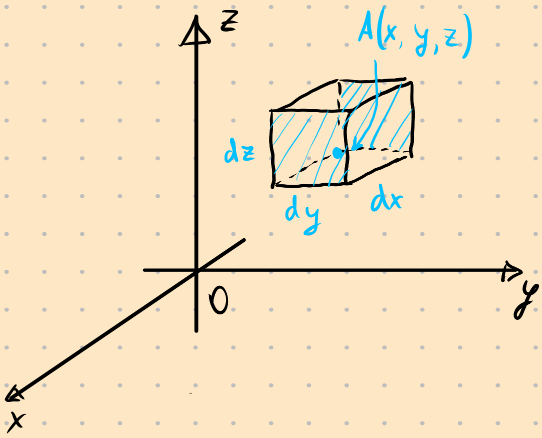


Если возникает $\vec{F}$, то $\Phi < 0$, но в пов-ти нет зарядов, и $\Phi = 0$, т.е. сис-ма неуст.

Из т. Ирншоу => заряды в атоме (как минимум) движутся.
В планетарной модели $\bar{e}$ движутся с ускорением => излучают =>
=> неустойчивы — решается квантовой механикой.

! Внутри проводника всегда $E = 0$ (незав. от внешнего E).

Теорема Гаусса в дифференциальной форме



$\rho(x,y,z)$ — какое-то распр-е зарядов

$dV = dx\,dy\,dz$

Поток E через грани $\perp Ox$

$$\text{Поток} = [\underbrace{E_x(x+dx)\,dy\,dz}_{\text{передняя грань}} - \underbrace{E_x(x)\,dy\,dz}_{\text{задняя грань}}]$$

$$[E_x(x+dx)\,dy\,dz - E_x(x)\,dy\,dz] \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

$$d\Phi = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\vec{E}} dx\,dy\,dz = 4\pi\rho\,dx\,dy\,dz$$

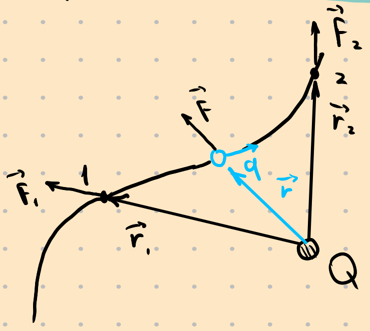
! $\operatorname{div}\vec E = 4\pi\rho$ $\qquad$ $\operatorname{div}\vec E = (\vec\nabla\cdot\vec E)$

Физ. смысл: $\operatorname{div}\vec E = \lim\limits_{V\to 0}\dfrac{\oint \vec E\, d\vec S}{V}$

Сферически симм. случай

$$\operatorname{div}\vec E = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E)$$ (д-во: Сивухин, задача §7)

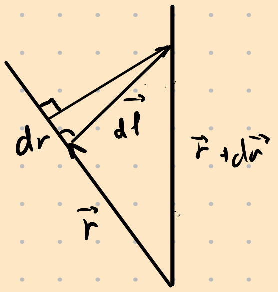
Электрический потенциал



Поле радиально симметрично, зависит только от координат, т.е. потенциально.

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec E\, d\vec l) = \int_1^2 \frac{qQ}{r^3}(\vec r\cdot d\vec l) = qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$\vec E = \frac{Q}{r^3}\vec r;\quad \vec F = q\vec E \qquad = q\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}\right) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$



$$(\vec r\, d\vec l) = r\, dl\cdot\cos\widehat{\vec r\, d\vec l} = r\, dr$$

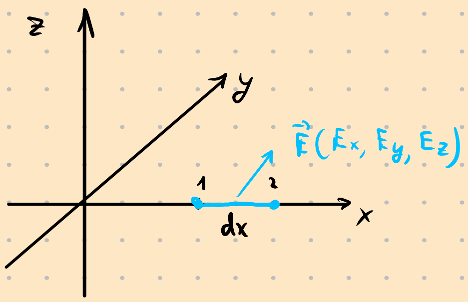
! $\varphi = \dfrac{Q}{r} + \text{const}$

const – нулевой уровень (на ∞)

Потенциал φ – работа по переносу заряда на бесконечность.

В СИ $[\varphi] = \text{В} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \dfrac{10^7\ \text{эрг}}{3\cdot 10^9\ \text{ед. зар.}} = \dfrac{1}{300}$ ед. СГСЭ

Связь φ и E



$\delta A_{12} = E_x\, dx = \varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$

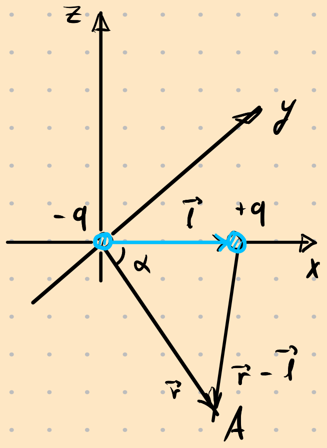
единичного пробного заряда

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\vec E = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec k\right) = -\vec\nabla\varphi = -\operatorname{grad}\varphi$$

! $\vec E = -\vec\nabla\varphi$

Потенциал поля диполя



$\vec{p} = q\vec{l}, \quad l \ll r$

$\varphi(r) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{l}|} - \frac{q}{|\vec{r}|}$

$|\vec{r}-\vec{l}| = r - l\cos\alpha = r - \frac{(\vec{l}\vec{r})}{r} = r\left(1 - \frac{(\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^2}\right)$

$\varphi(r) = \frac{q}{r\left(1-\frac{(\vec{l}\vec{r})}{r^2}\right)} - \frac{q}{r} = \frac{q}{r}\left(1 + \frac{(\vec{l}\vec{r})}{r^2} - 1\right) =$

$= \frac{q(\vec{l}\vec{r})}{r^3} = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}$

$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\parallel$

$(\vec{\nabla}\vec{E}) = -(\vec{\nabla}, -\vec{\nabla}\varphi) = 4\pi\rho$

$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\varphi) = -4\pi\rho$

$\vec{\nabla}^2\varphi = \Delta\varphi = -4\pi\rho$ — ур-е Пуассона

Лапласиан

Если найти $\varphi(x, y, z)$ из Пуассона, то оно сущ-ет и единственное.

Нужно г граничных условия.