

## Равновесие



$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}_0} = \text{const}$  — гео бех  $r$ .  $\Rightarrow$  Медна в равновесии

В грави с.к.

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(q)$  гео цент. сим-и (без сопротив.)

План. равнобер. (н.п.) ст. форм  $x_0 = \binom{q}{0}$  ( $x = \binom{q}{q} = \binom{q}{q}$ )

Если  $q = -n.p.$ , в цент. сим-и  $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$

Если  $Q = -\nabla \Pi$ , то в н.п.  $\nabla \Pi = 0$ .

## Применение метода.

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}_0}$  (надея когд) вб-ся н.п.  $\Leftrightarrow \nabla \delta \vec{r}$  в н.п.  $\rightarrow S A = \int \vec{F} \cdot \delta \vec{r} dm = 0$ .

## Доказательство $Q = 0$

### Пример

$$\ddot{x} = \alpha x^\beta, \quad \beta \in (0, 1) \quad \left( \begin{array}{l} \text{"цена" } \alpha x^\beta \text{ публика } 0 \text{ в } t=0 \\ \text{вб-ся в } t=0 \text{ нач. равнобер.} \end{array} \right)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

1.  $x=0$  — реш-е.

2. Рассм.  $x = at^\beta \neq 0$

$$\alpha b(b-1) t^{b-2} = \alpha a^\beta t^{\beta b}$$

$$b-2 = \beta b \Rightarrow b = \frac{2}{1-\beta} > 0 \Rightarrow x(0) = 0, \text{ значит } \dot{x}(0) = 0 \text{ тоже.}$$

$$\frac{2(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = \alpha a^{\beta-1} \Rightarrow a = \left[ \frac{2(1+\beta)}{\alpha(1-\beta)^2} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Как реш? 2 реш-я гео нач. ус.  $x=0, \dot{x}=0$ .

А нач. это  $\alpha x^\beta$  не явля-ся. Извиняю! Уг-за знако  $t$ . Кому не нравится.

## Задача 1



$$\Pi = 2lF \cos \varphi + mg l \sin \varphi$$

$$\Pi_{, \varphi} = mg l \cos \varphi - 2lF \sin \varphi = 0$$

$$F = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \varphi$$

Item očípeť ťa, item menovate mymua cua.

## Základ 2



$$\delta A = nPSx - F\delta x = 0$$

$$F = nP$$

$$P = mg$$

## Základ 3



Myskais je bryz. cayze.

T. vacein m gavma raz-ω b pabnobečiu, uvale gavma nob-tu dne venice.

Bz bryz. cayze očividia,

$$\bar{F} = -\nabla P \quad P = mgz - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\delta A = -\nabla P \delta \vec{r} = 0 \Rightarrow -dP = 0 \Rightarrow P = \text{const} \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C$$

## Základ 4



Necum. myskais.

D-ib, zis gabe mysk-tu pabnabečiu

$$\begin{cases} \delta A = P_1 S_1 dL_1 + P_2 S_2 dL_2 = 0 \\ S_1 dL_1 + S_2 dL_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dL_2 = -\frac{S_1}{S_2} dL_1 \Rightarrow \delta A = (P_1 - P_2) dL_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$



## Základ 5

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- mat. s. gumeice no rypbci b nre pamečiu

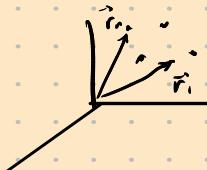
Necum nrom pabnobečiu



1. Үз үрдізгендегі бүрі, неренес - 1. A u B, т.к.  $\delta \vec{r} \perp m\vec{g}$

Решение:

- Есан өзбек зертапта бүрге  $F(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$ , т.о.  $f_i, \vec{r}_k \cdot \delta \vec{r}^k = 0$



! Дор жағдай!

$$\begin{cases} 2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0 \\ \delta x + \delta y + \delta z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Үз үрдізгендегі бүрі, неренес.  $\delta A = mg\delta z \Rightarrow \delta z = 0$

$$\begin{cases} x\delta x + y\delta y = 0 \\ \delta x + \delta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta y = -\delta x, \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

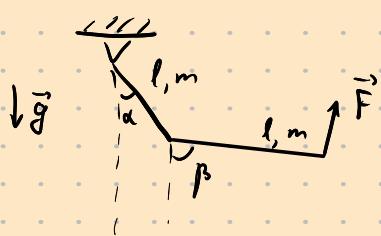
$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ z = 1 - 2x \end{cases}$$

$$2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

2. Ноне үшбұрыс өкілемнен неренеснан әмбес ын же. әмбес өзбек

### Задача 6



$$F = \text{const}$$

Неренес н.п.

$$\begin{cases} Q_\alpha = -\gamma_{,\alpha}^g + Q_\alpha^F = 0 \\ Q_\beta = -\gamma_{,\beta}^g + Q_\beta^F = 0 \end{cases}$$

$$\Pi = -\frac{3}{2}mgl\cos\alpha - \frac{1}{2}mgl\cos\beta$$

$$Q_\beta^F = Fl \quad Q_\alpha^F = Fl\cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}mg \sin \alpha + F \cos(\alpha - \beta) = 0 \\ \frac{1}{2}mg \sin \beta + Fl = 0 \end{cases}$$

$$\sin \beta = \frac{2F}{mg} \quad \text{- case 3 upwards: } 1. F > mg/2 \text{ - new n.p.}$$

$$2. F = mg/2 \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$3. F < mg/2 \quad \beta_1 = \arcsin \frac{2F}{mg}, \quad \beta_2 = \pi - \beta_1$$

$$-\frac{3}{2}mg \sin \alpha + F (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 0$$

$$F \cos \beta + (F \sin \beta - \frac{3}{2}mg) \tan \alpha = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{F \cos \beta}{\frac{3}{2}mg - F \sin \beta} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \operatorname{arctg} F(\beta_1) \\ \alpha_2 = \pi + \alpha_1 \\ \alpha_3 = -\alpha_1 \\ \alpha_4 = \pi - \alpha_1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \beta_1 \\ \beta_2 \end{array} \right\} - \beta_1$$



## Численные методы. матрицы

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \text{const}$$

$$x = he^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda + -A) = P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n - \text{корни}$$

$$x = e^{-\lambda t} \cdot y_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \\ i=1, \dots, n \end{cases}$$

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Neodr. yu. sign  $a_n = \dots = \operatorname{sign} a_0$

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad a_0 > 0 \text{ b } P(\lambda)$$

Матрица Фурье

$$P(\lambda) \text{ yu.} \Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, n$$

## Критерий Rayleigh - Фурье в форме Шенара и Чебышева

1. Бан. yu.  $a_i > 0$ , то нам приведен к виду  $a_0 > 0$ .

2.  $\begin{cases} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{cases}$  (модо, модо) - проверяется то, что условие

$\exists P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ . Проверка, что неодр. yu. yu. совпадает с критерием:

$$P(\lambda) \mapsto \frac{a_2}{a_0} \lambda^2 + \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_0} & 1 \\ 0 & \frac{a_2}{a_0} \end{pmatrix}$$

1.  $P = P_{++}$

$$\frac{a_1}{a_0} > 0$$

$$\frac{a_1 a_2}{a_0^2} > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sign} a_2 = \operatorname{sign} a_1 = \operatorname{sign} a_0$$

2.  $P, P$  в форме I.-III.

Решение cannot

Линейные дифференциальные ур-ия с постоянными коэффициентами приводят к ур-иям вида:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$$

из ур-ия, <sup>известн.</sup>  
 неизвестн., <sup>известн.</sup>  
 неизвестн., <sup>известн.</sup>  
 неизвестн., <sup>известн.</sup>  
 неизвестн., <sup>известн.</sup>

Нормированное уравнение Коши:

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = -A^{-1}Cq - A^{-1}Bu \end{cases} \quad (1) \quad \rightarrow \dot{t} = \delta_2$$

Как выразить  $u$  через  $t$ ? Как называется  $P(\lambda)$ ?

Покажем, что характеристическое уравнение (1) имеет вид. обра兹ован:

$$q = h e^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & F \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix} \quad \det(\lambda F - D) = \begin{vmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda F - D) = 0 \Leftrightarrow \det(F(\lambda E - D)) = 0 \quad \forall F, \det F \neq 0$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{-\text{неприм.}}{\overset{\lambda=0}{\sim}} \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ \lambda C & \lambda^2 A + \lambda B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \quad \text{ура!}$$

### Пример

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} - x + y = 0 \end{cases} \quad - \text{нерегулярное уравнение 2-го р-на.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -1 & \lambda^2 + \beta \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + \beta \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 + \beta \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \beta \lambda + 1 - \alpha = 0$$

$$\lambda^4 + (\beta + 1)\lambda^3 + (\beta + 2)\lambda^2 + (\beta + 1)\lambda + (1 - \alpha) = 0$$

T.k.  $a_4 = 1 > 0$  to bee resp. gamma daus  $> 0$  no needs. yes.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  побегение генерів не нало, чиниться кр. Р.-Р. в грани А.-Ц.

Уз. needs. yes.  $\beta > -1$ ,  $\alpha < 1$ .

$$R = \begin{pmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 & \Delta_3 \\ \beta+1 & \beta+2 & \beta+1 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & \beta+1 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \beta+1 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & \beta+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta+1)^2(\alpha+\beta) > 0 \Rightarrow \beta > -\alpha$$



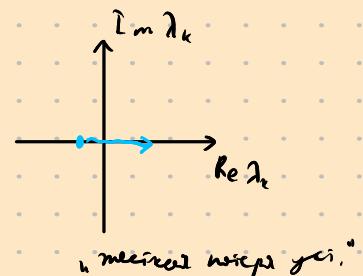
⑥ - однією з умов

Побегение генерів на  $\partial G$ :

1.  $\alpha = 1$

$$P(\lambda) = \lambda \underbrace{[\lambda^3 + \dots + \beta+1]}_{\text{yes. норма}} \quad (\text{норма ненулева})$$

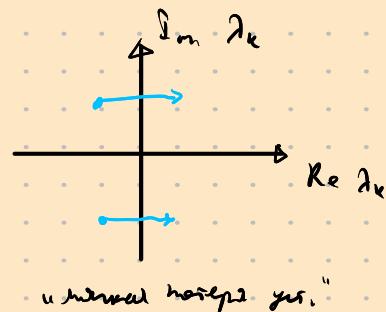
Небуде корені  $\lambda_k = 0$



2.  $\beta = -\alpha$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + 1 + \beta$$

$\pm i$  - корені ( $\text{норма ненулева}$ )



## Перший метод Каноніческі

$\dot{x} = X(x)$ ,  $X(0) = 0$  - автономна СДУ (ненулеві)

$X(x)$  - непр. функц. т.  $x \neq 0$ , а  $X_{,ij}$  - І в сп.  $\beta$  спр-н в.п.

Тогда для сим-н ненулеві лініаризовані:  $\dot{x} = Ax + f(x)$

$$A = X_{,ij}(0) \quad \|F\| \leq \alpha \|x\|^2 \quad (\text{пог. в пог. лініар.})$$

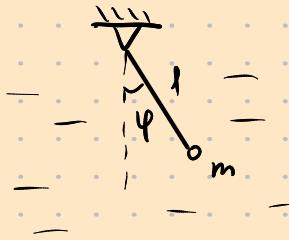
## Лягушка Лагунова и устойчивость равновесий.

Если лин-е  $\dot{x} = Ax$   $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i=1, n$ ,  $\lambda_i$  - eigen

$P(\lambda)$  (сп. многочл), то н.п.  $x=0$  - ас.уст. и б. неустойчив, и в. неустойчивое сущ-во.

Если  $\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , то н.п. неуст. в одних сущ-вах.

## Пример



$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

Начальные н.п.  $\varphi = 0$  на устойчивы

Движение н.п.:  $ml^2 \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + mgl \varphi = 0$

$ml^2 \ddot{\lambda} + \beta \dot{\lambda} + mgl = 0$  - равнен

$\checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$   $0 \quad 0 \quad 0 \Rightarrow$  устойчив  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  н.п.  $\varphi = 0$  - ас.уст. и т. Лягушка.



$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} - mgl \sin \varphi = 0$$

↓ неуст.

$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} - mgl \varphi = 0$$

$\varphi = 0$  - неуст. и т. Лягушка.

## Возникновение неустойчивости

$\dot{x} = X(x)$ ,  $X(0) = 0$  - стационар. (стаци.)

$V(x)$ ,  $V(0) = 0$  - гл-ое Лягушка (стационар).  $V(x)$  вып. греч.

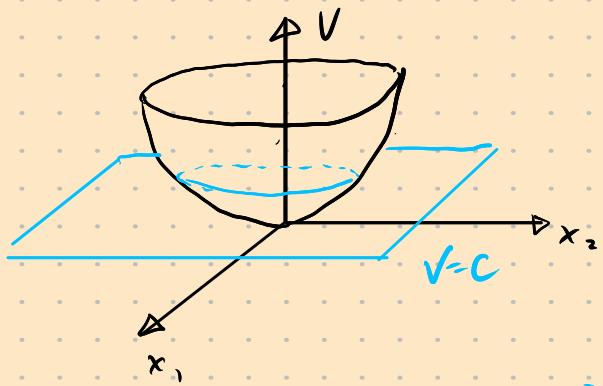
Производная в нач.сущ-ве:  $\dot{V}_x = \nabla V \cdot X = V_{,i} X^i$ .

## Лягушка Лягушка

Если в окр-ии н.п.  $U_\varepsilon(0) \ni V(x)$ :  $V(x)$  имеет в  $x=0$

локальн. мин., а  $\dot{V}_x \leq 0$  в  $U_\varepsilon(0)$   $\Rightarrow$  н.п.  $x=0$  - устойчив.

Kerja eisb ammenve kopen xop. unverenua, is b sun. cu-me herb-  
leidere neymoy, plm- $\Rightarrow$   $c \sin u \cos v = b$  nekognai ( $c$  nankon jekab-  
kan) our monji cekis kax yesi, tae n wayer. Tid i, pernalt pribedey.



$$V=c = \text{const}$$



# Teorema Narzenua - Dugmore

Even  $\Pi(q) \rightarrow q=0$  - czerwinski min  $\Rightarrow q=0$  - gis. n.p. ( $V=E$ )

The government, no we need yes - e;

$$f(q) = \begin{cases} q^2 \sin \frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$



$$U_g \text{ } g_{\mu-1}, \text{ } \text{and } T + P = \text{unst}, \quad V = E = T + P$$

$$V = E = T + \eta$$

reciprocamente, se  $n.p.q = 0$  y.s. (em onto negar, se o yxogar gaucho se  $n.p. \Rightarrow$  negar unico F, a esse unico ym  $q \rightarrow 0$ ), a y.s. 1.- D. se bnm.

No: em 17- andminneval ym-ns, its bouding-to T. odysseus. (gonyzene b 80-x).

Чемейодане  $y_1 - 2 \rightarrow \min$

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= \Pi(0) + \underbrace{\Pi_{,i}(0)}_{=0} q^i + \frac{1}{2} \underbrace{\Pi_{,ij}(0)}_{C_{ij}} q^i q^j \\ &= \dots\end{aligned}$$

$$N \approx \frac{1}{2} q^2 C_q = N_2(q) \quad | \quad N_2(q) > 0 \Rightarrow N \rightarrow \min$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{in} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta i > 0 \\ i = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

## Teopera longnoba - 1

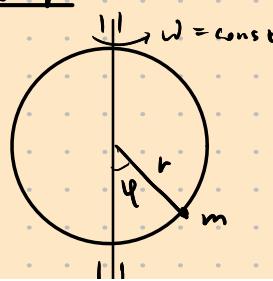
Eben:  $\exists q': \Pi_2(q') < 0$ , ist n.p.  $q=0$  negativ.

Теорема Лемнезса - 2

Eben nocheinmal nachzuhören mögliches Argumentum  $\hat{N}(q) = \underline{N_m}(q) + \dots$

benzene, но  $\Pi(q) \rightarrow \infty$  при  $q=0 \Rightarrow q=0$  - нестабильное.

Григор



Nation nation. Since rebukes a lot. UX you in.

$$\Pi = mg r (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi \sim$$

$$\sim \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$$

$$\text{N.p. } \Pi_{,\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2 r} \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0 = \frac{g}{\omega^2 r} \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

$$1: \sin \varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = \pi \end{cases}$$

$$2: \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 r} \Rightarrow \begin{cases} \omega < \sqrt{\frac{g}{r}} - \text{neit periodik} \\ \varphi_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right), \omega \geq \sqrt{\frac{g}{r}} \end{cases}$$

Используем уравнение для n.p.:

1)  $\varphi_x$  — модуль n.p.,  $\delta \varphi$  — сдвиг фазы по времени, тогда

$$\Pi \approx \frac{1}{2} \Pi_{,\varphi\varphi} (\varphi_x) \delta \varphi^2$$

$$\Pi_{,\varphi\varphi} = \frac{g}{\omega^2 r} \cos \varphi - \cos 2\varphi$$

$$\Pi_{,\varphi\varphi}(0) = \frac{g}{\omega^2 r} - 1 \quad \begin{cases} > 0, \omega < \sqrt{\frac{g}{r}} & - \text{устойчивое n.p.}, \lambda = D \\ = 0, \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} & - ? \\ < 0, \omega > \sqrt{\frac{g}{r}} & - \text{неустойчивое n.p.} \end{cases}$$

$$\Pi_{,\varphi\varphi}(\pi) = -\frac{g}{\omega^2 r} - 1 < 0 \Rightarrow \text{неустойчивое n.p.}$$

$$\Pi_{,\varphi\varphi} = \frac{g}{\omega^2 r} \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi + 1$$

$$\Pi_{,\varphi\varphi}(\varphi_{3,4}) = -\frac{g^2}{\omega^4 r^2} + 1 \quad \begin{cases} > 0, \omega > \sqrt{\frac{g}{r}} & - \text{устойчивое n.p.}, \lambda = D \\ = 0, \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} & - ? \\ < 0, \omega < \sqrt{\frac{g}{r}} & - \text{неустойчивое n.p.} \end{cases}$$

$$\text{Причина неустойчивости } \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\begin{aligned} \Pi &\sim 1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \approx 1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24} - \frac{1}{2} \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)^2 \approx \\ &= \varphi^4 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{24} \right) \quad - \text{устойчивое n.p. неустойчивое (но временно) неустойчивое} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min \Rightarrow \varphi = 0 - \text{устойчивое n.p.}$$

## Пример 2

Движение — брахистоидная траектория:



$$y = \frac{1}{2} a x^2 \quad \Pi = \frac{1}{2} a m g x^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (\text{контакт с осью})$$

$$\omega = \sqrt{a g} \Rightarrow \Pi \equiv 0.$$

1. Модуль т. парусника — n.p.

2. Устойчивость: будем  $g = S$ , тогда

$$T = \frac{m s^2}{2} \Rightarrow \ddot{s} = 0 \Rightarrow s = s_0 + \dot{s}_0 t \Big|_{t \rightarrow \infty} \Rightarrow \text{модуль n.p. неустойчивый}.$$

### Nummer 3



Kontur n. p., y ist -z

$$\Pi = mg z(x, y) \sim z(x, y)$$

$$\begin{cases} z_{,x} = \alpha x + \beta y = 0 \\ z_{,y} = \beta x + \gamma y = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) = \frac{1}{2}q^T C q, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\det C \neq 0 \Rightarrow \text{n.p. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 - \text{egentl.}$$

$\det C = 0$  ( $\text{no } C \neq 0$ )  $\Rightarrow \alpha x + \beta y = 0$  - general normal parameter  
then  $x=0$ , then  $y=0, \dots$

Unschärfe:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{n.p. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ggf. no r. l.-D.}$$

Es ist eine maximale Neben- u. Grenzbedingung nur am max, in n.p.  
ggf. no r. l.-D.

$$\text{Grenz } \det C = 0 : \quad \Pi \sim \frac{1}{2}(\gamma x + \mu y)^2 \geq 0$$



$$T = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z(x, y))$$

$z|_{x,y \in \mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \exists \text{ perp. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{e}(t+t_0) -$   
- ebene durch den Ursprung  
(negat. n.p.)

### Zugabe 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - x^5 y \\ \dot{y} = x - y^5 + x y^6 \end{cases} \quad \text{n.p. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 - \text{null. null. ggf.}$$

Liniengang. curv. max.  $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$  - oszillieren!!!

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$



$$|\lambda E - A| = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \quad - 1-i \text{ meneg lemynda deňaleget}$$

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad - \text{c kôq. yugda pôsobia}$$

$$\dot{V}_x = x(-y - x^3 - x^5y) + y(x - y^5 + xy^6) \Rightarrow V - neblivîi mielyre mininîi an-nur  
(T.k.  $\dot{V}$  b cny mininîi an-nur  $\equiv 0$ ),$$

$$\dot{V}_x = -x^4 - x^6y - y^6 + xy^7 = -x^4(1 + x^2y) - y^6(1 - xy) \sim -x^4 - y^6 < 0 -$$

nichu na gane 2 b aq-qa (3)

- yugdumbar (gene accuñiñineew nô i, lemynda e-pysa enjë ne yzheren).

## Теорема об асимпт. уст.

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha xy^2 \\ \dot{y} = \beta x^2y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{n.p. асимт. уст.}$$

$$a, b > 0$$

Несколько замечаний - орбиты линии симметрии

$$\dot{V}_x = -V_{,x} \alpha xy^2 + V_{,y} \beta x^2y - \text{некоторое производное вектора волны } V:$$

$$V = \frac{1}{n} (\alpha x^2 + \beta y^2) \Rightarrow \dot{V}_x = (-2\alpha + \beta x) xy^2 \quad \alpha = \beta, \rho = a \Rightarrow \dot{V}_x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  н.р. Асимптота н.р.-прямого.

Замечание

Линии симметрии можно н.р., а не только

$$\begin{pmatrix} x_* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ y_* \end{pmatrix} \forall x_*, y_*$$



## Теорема Бирдамана-Красовского

$$\dot{x} = X(x) \quad X(0) = 0$$

Если в  $U_\varepsilon(0)$   $\exists V(x)$  ( $V(0)=0$ ):

$$\text{1. } \dot{V}_x < 0$$

2.  $M\{x \mid \dot{V}_x(x) = 0\}$  - не содержит нулевую траекторию или. (1),  
кроме н.р.  $x=0$ . Тогда

a) Если  $V(x) > 0 \Rightarrow x=0$  - ас. уст.

б) Если  $V(x)$  не мин. или. крит.  $\Rightarrow x=0$  - неуст.

Замечание про уст.  $\delta$



$$\exists G = \{x \mid V(x) < 0\}$$

Возможные уст. 1 и 2 являются пределами  
точек в  $G$ .

### Пример 1



- гравитация  
(если гравитация сильна)

$$F_n = -\beta \dot{x}_n$$

Система устойчива! Но оно временно асимптотично. Рассмотрим

$$V = E = T + U > 0 \quad (\text{но оно симметрично в начальном положении})$$

$$\dot{V}_x = -\beta \dot{x}_n^2 \leq 0 \quad M\{\dot{x}_n = 0\}$$

Если  $\dot{x}_n = 0$ , то по 3-му критерию, система не равновесна,  $\dot{x} = 0$ .

Но массы в симметрии: из упр-ий глупо

$\left. \begin{array}{l} M \text{ не симметрична} \\ \text{из-за пружин,} \\ \text{имеющих} \\ \text{направление} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  не т. б. - к., н.п. ас-ти.

### Пример 2



Если пружина в М лежит

$$x = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \varphi \right) - \text{т.б.к.}$$

имеет. форма.

(1-я и 3-я координаты, 2-я своб.)

Будет, н.п. гармоника.

### Задача

Из т. б. к.  $\Rightarrow$  одномерное т. А.-Д.: если гравит.Yes.

т. А.-Д. и грав. гравитации одна с наименьшей, то н.п. становится ас-ти.

Намечено: максимум  $N = Q_i$ :  $Q_i < 0$

### Пример 3

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + (1+x^2) x = 0 \quad \text{н.п. } x=0 \text{ не ст.}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y^3 - (1+y^2)x \end{cases} \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \Rightarrow \dot{W}_x = xy - y \cdot (y^3 + (1+y^2)x) = xy - y^4 - xy - xy^3$$

знаконепр.

$V = W - \frac{1}{4} y^6$  - зададена на знакоепр. не биват

$$\dot{V}_x = -y^6 - xy^3 + y^3(y^3 + x + xy^2) = -y^6 + y^6 + xy^5 = -y^6(1 - y^2 - xy) \sim -y^6 \leq 0$$

По т. Б.-К.:  $M\{y=0\}$

Решаване  $y=0$  в (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ 0 = 0 - 1 \cdot x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{нет н.п.} \in M \Rightarrow \text{n.p. ac. yis.} \\ \text{н.п. n.p.} \end{cases}$$

### Теорема Четаева о нест.

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) \neq 0$$

Есът  $\forall U_\varepsilon(0) \exists V(x)$  и същ.  $G = \{x | V(x) < 0\}$  и  $\dot{V}_x < 0$  при  $x \in U_\varepsilon(0) \cap G$ , то  
н.п. нест.



### Пример 1



некои траектории

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)\dot{q}r = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)\dot{p}r = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

- равнотенденции

репелентният бранданс

репелентният бранданс



$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ q_0 + g \\ z \end{pmatrix} \quad - \text{ориентация на н.п.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Домени н.п.: н.п.  $\begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $q_0 > 0$ ;

$$\begin{cases} A\dot{x} + (C-B)(q_0 + y)z = 0 \\ B\dot{y} + (A-C)xz = 0 \\ C\dot{z} + (B-A)x(q_0 + y) = 0 \end{cases}$$

$$A > B > C$$

$$V = -xz$$

$$\dot{V}_x = \frac{C-B}{A}(q_0 + y)z^2 + \frac{B-A}{C}(q_0 + y)x^2 \sim \frac{C-B}{A}q_0 z^2 + \frac{B-A}{C}q_0 x^2 < 0$$

$$V \text{ б одн. } G < 0, \Rightarrow$$

$$\dot{V}_x \text{ б одн. } G < 0$$

$\Rightarrow$  н. р. неуст. на т. пересеч.



Пример (пунктум т. б. күрс не омнады)



$$\Pi = \frac{1}{2} K(x^2 + y^2) \quad - \text{известный параметр}$$

демонстрирует гравитационные взаимодействия

(гравитация не земли)

$$\begin{cases} m\ddot{z} + [2n\omega]\dot{y} + (K - m\omega^2)z = 0 \\ m\ddot{y} - [2n\omega]\dot{z} + (K - m\omega^2)y = 0 \end{cases}$$

также упрощение уравнений

Приложение к м-ни з, y, бирга орн.  $\Rightarrow$  н. р. yrs.

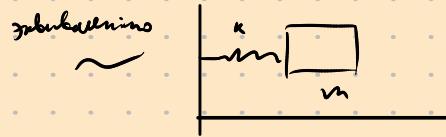
Енди даң не Картесиан, бір да жалғас білсе

## Симплекс в колебаниях

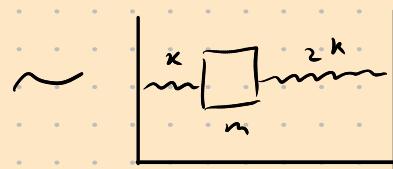
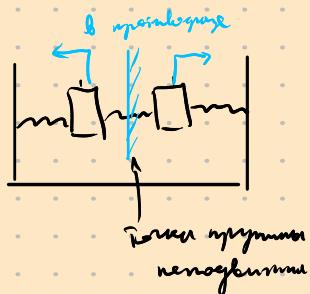


$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

одинаковый блок



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{не сим-ст!}$$

(на симплексе не генер. си., а он генер. неоднор. вектор)

$$A = mE - \text{норм. кин. энергия}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} kx_3^2 = \frac{1}{2} (2k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2kx_1x_2 - 2kx_2x_3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$$

Всегда симплекс неподъем никак  $u$  в форме  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$

$u^T A u = 0$  - ??? оптимальна?

$$(C - \omega^2 A) u = \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

"бесконечна"

$$\begin{cases} 2k - m\omega^2 - k\alpha = 0 \\ -2k + \alpha(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2k + k\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_{2,3} = \pm \sqrt{2} \\ 2k - m\omega_{2,3}^2 \mp \sqrt{2}k = 0 \Rightarrow \omega_{2,3} = \sqrt{(2 \mp \sqrt{2}) \frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$u_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

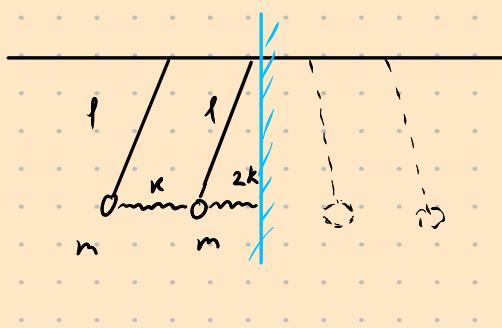
## Симметрическое колесо



непарные моды: все симметрические

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

антиподы:



Две несимметрические - это ортогональны

Две пары - синхронные

$\Rightarrow$  максимальная  $\omega_{2,3}$  в асимм. случае

$$u_{2,3} = \begin{pmatrix} \alpha_{2,3} \\ \beta_{2,3} \\ -\beta_{2,3} \\ -\alpha_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$u_i^T A u_i = 0, \quad i=2,3 \quad \text{- ортогональны}$$

Несимметрический характер  $\omega_{2,3}$  из-за симметрии блоков: ортогональны:

$$\begin{cases} u_i^T A u_i = 0 \\ i=1\dots 3 \end{cases} \Rightarrow u_4 \quad (\text{с конечной же нормой})$$

Частоты  $\omega_4$  зависят от  $(C - \omega_4^2 A) u_4 = 0 \Rightarrow \omega_4^2$  зависит от моды  $u_4$

Не моды генерируются:

$$\omega_4^2 = \frac{u_4^T C u_4}{u_4^T A u_4}$$

Если  $C \geq 0$ , то  $U^T C U = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2, 0, \dots, 0)$

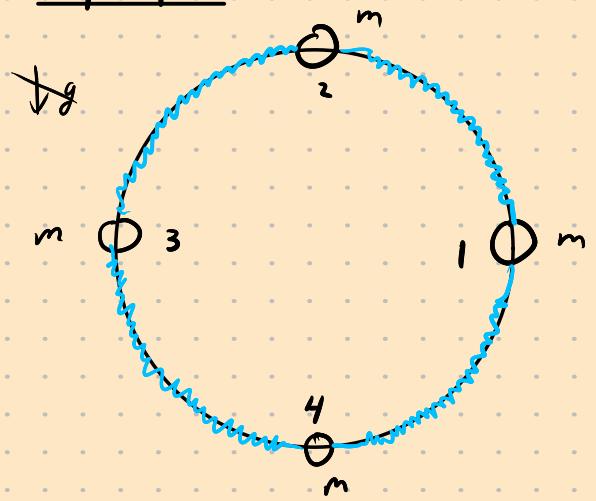
Моды генерируются линейно:

$$\begin{cases} \theta_i = 0 \\ i > n \end{cases} \Rightarrow \theta_i = A_i t + B_i$$

Бюджет  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^2$   
 $\Pi_1 = \frac{1}{2} q^2 \Rightarrow \Pi_2 = 0 \Rightarrow \dot{q} = 0 \Rightarrow q = At + B$  - нест. пост. при  
 ус-ии & 0 -  
 промежуточные

Бюджет носит зерн.  $m\ddot{x} = 0$  - бесср.

### Пример 3



Начало глоб-е сис-мы

Начало кепл-а - оно же бимасса:  
 $\omega_1 = 0 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Если это промежуточное состояние, то начало кепл-а  
 где нулевые нач. угловые глоб-ы

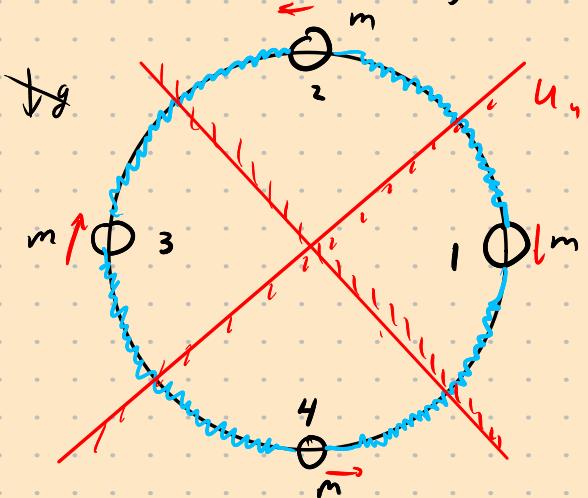
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (\text{наиболее лев. зерн})$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

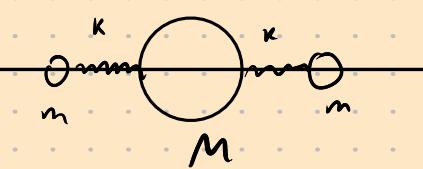
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_4 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$



### Пример 4



U - ? (нест. зерн-ми)

$$\omega_1 = 0, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & M \\ M & m \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad u_3^\top A u_3 = 0$$

$$\begin{cases} mx + My + mz = 0 \\ mx - mz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x = z = 1 \\ y = -\frac{2m}{M} \end{aligned} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \frac{m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} k \left[ (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right] = \frac{k}{2} (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2)$$

$$C = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$(C - \omega_3^2 A) u_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} k - m\omega_3^2 & -k & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \frac{m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k - m\omega_3^2 + \frac{2m}{M} = 0 \Rightarrow \omega_3^2 = \text{negligible}$$

## Вибунужденное колебание

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = p \cos \omega t \quad - \text{сущест. (1)}$$

Однозначно решаем, если зная значение (коэффициенты): (а)

$$A\ddot{\hat{q}} + B\dot{\hat{q}} + C\hat{q} = pe^{i\omega t} \quad - \text{комплексифицируем}$$

$$\hat{q}(t) \Rightarrow q(t) = Re \hat{q}$$

$$\hat{q} = h e^{i\omega t} \Rightarrow \underbrace{(-\omega^2 A + i\omega B + C)h}_{{D(\omega)}} = p$$

Если (1) ac. yes. (но ненулев. в (а)), то  $\det D(\omega) \neq 0$

$$h = D^{-1}(\omega) p = W(\omega) p$$

$D^{-1} = \frac{D^*}{\det D}$  - обратное правило Крамера в случае симм. матриц

$$D^* = (\Delta_{ij})^T \quad - \text{имеет симм. матрица}$$

$$\hat{q}_k = \sum W_{kj}(\omega) h_j e^{i\omega t} = \sum R_{kj}(\omega) \cdot e^{i(\omega t + \varphi_{kj}(\omega))}$$

$R_{kj}(\omega) \cdot e^{i\varphi_{kj}(\omega)}$

$$W_{kj}(\omega) = AqjX \quad \varphi_{kj} = \arg W_{kj}$$

$$R_{kj}(\omega) = AYX$$

$$\varphi_{kj}(\omega) = \arg YX$$

$$q_k = \sum R_{kj}(\omega) \cdot h_j \cdot \cos(\omega t + \varphi_{kj}(\omega))$$

### Пример 1

$$F = p \cos \omega t$$



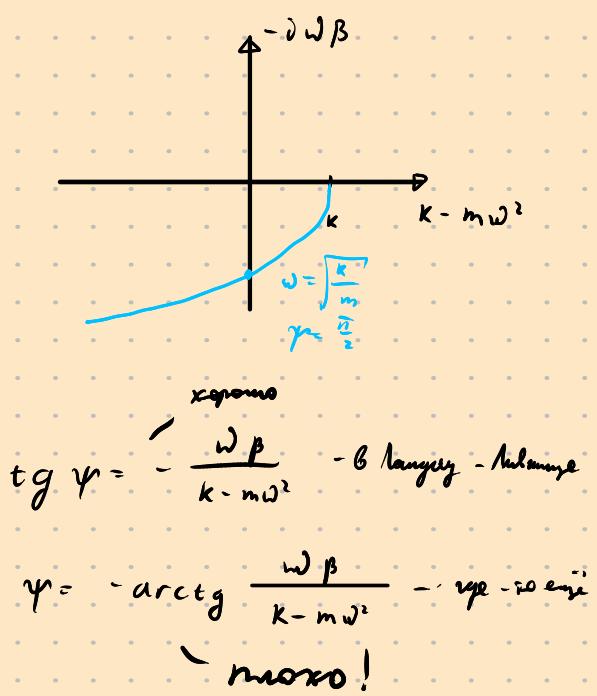
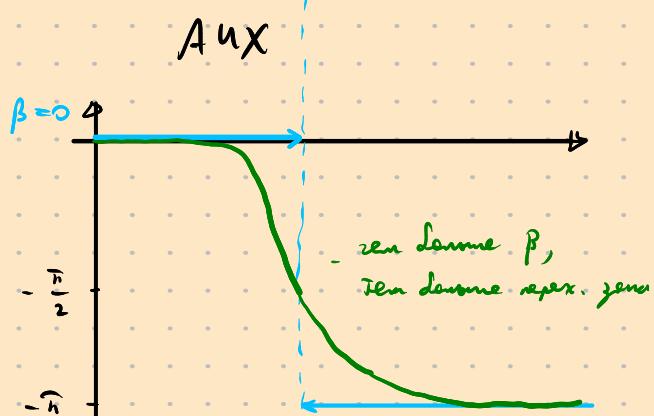
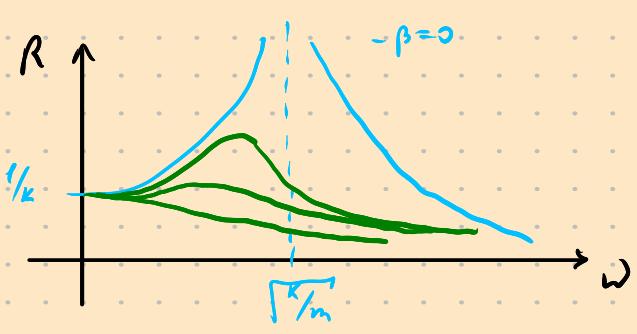
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = p \cos \omega t$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + k\dot{x} = p e^{i\omega t}$$

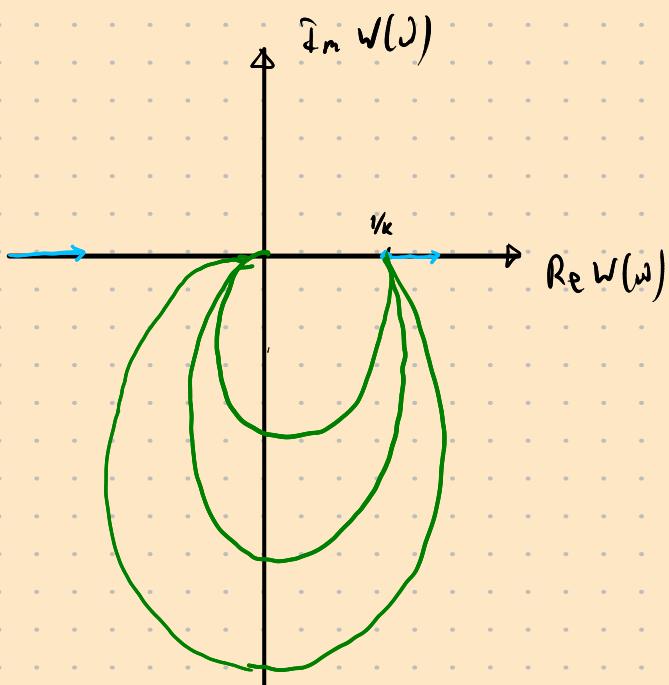
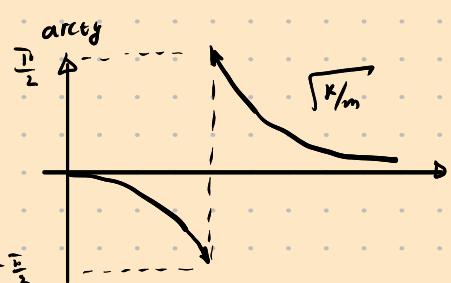
$$W(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega\beta}$$

$$R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2}}$$

$$W(\omega) = \frac{k - m\omega^2 - i\omega\beta}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = \arg(k - m\omega^2 - i\omega\beta)$$



Primer co zvadom.  
 během vzniku!



Resonance

$$\ddot{x} + x = \cos \omega t$$

$$x = d + s \sin t$$

$$\dot{x} = d \sin t + d t \cos t$$

$$\ddot{x} = 2\alpha \cos \omega_0 t - \alpha t \sin t$$

$$2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{t}{2} \sin t$$

