

# Глава I

## Аналитические методы решения ДУ

### § 1. Основные понятия

Опр-е (одномерные ДУ)

ОДУ - это соотношение:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

$$x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x).$$

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2) \text{ - ур-е, разрешённое относительно старшего порядка произв.}$$

$n$  - порядок ДУ

$y = \varphi(x)$  - решение ДУ, если:

1. Она  $n$  раз дифференцируема

2. После её подстановки в (1) или (2) identity по  $x$ :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

$$\varphi^{(n)} \equiv F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

Связь  $F$  (или  $f$ ) должна быть установлена!  $F(F'(x)) = 0$  - не ДУ

Пример: модель хищника - жертва:  $x(t)$  - жертва,  $y(t)$  - хищник

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha xy + \beta x \\ \dot{y} = \alpha xy - \beta y \end{cases} \quad \text{- модель Лотки - Вольтерра}$$

В курсе рассматриваются также системы ур-ий:

$$\begin{cases} \dot{x}' = f_1(t, x', \dots, x^n) \\ \dots \\ \dot{x}'' = f_n(t, x', \dots, x^n) \end{cases} \quad (3) \text{ - нормальная система ДУ (слева - только 1-й порядок)}$$

### Разрешённое ур-е

Приведём ур-е  $n$ -го порядка к системе ур-ий 1-го порядка:

$$x^{(n)} = f(t, \dots, x^{(n)}, \dots, x^{(1)})$$

$$x(t) = v^1, \quad x'(t) = v^2, \dots, \quad x^{(n-1)}(t) = v^n \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{v}^1 = v^2 \\ \dot{v}^2 = v^3 \\ \dots \\ \dot{v}^{n-1} = v^n \\ \dot{v}^n = f(t, v^1, \dots, v^n) \end{cases} \quad (5)$$

## Теорема

(4) и (5) эквивалентны.

D-бо

$\Rightarrow$  Пусть  $x(t)$  - решение ур-я (4).

$$x(t) = v^1, \quad v^2 = \frac{dx}{dt}, \dots, \quad v^n = x^{(n-1)} \Rightarrow x(t) \text{ - р-е (5).}$$

$\Leftarrow$  Пусть  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$  - р-е (5).

$$x(t) = v^1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dv^1}{dt} = v^2, \dots, \quad x^{(n)}(t) = \frac{dv^n}{dt} = f(t, v^1, \dots, v^n) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

ИТА

## Не обыкновенные ДУ

$$\Phi(x^1, \dots, x^n, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}) = 0 \quad (6)$$

$$u = u(x^1, \dots, x^n)$$

- ур-е в частных производных.

Пример:  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,  $u = u(t, x)$  - волновое ур-е

Реш-е:  $u = f(x - ct)$  - любая непр. ф-ия вместо константы!

## §2. ДУ в частных производных. ДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (1) \quad - \text{ДУ 1-го порядка, разрыв. относ. старшей произв.}$$

Задача Коши - найти р-е (1) такое, что  $y(x_0) = y_0$ .

$F(x, y)$  - ф-ия 2-х переменных. Пусть  $F(x, y)$  в  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  непрерывна, т.е.

$F(x, y) \in C_\Omega$ . Если  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , то  $\exists$  р-е задачи Коши, которое не определено.

$\Omega$  - область определения ур-я (1).

Пример:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  на  $[-1, 1]$ , р-е:  $y = Cx$ ,  $x \neq 0$

Если  $\varphi(x)$  - р-е (1), то  $\varphi(x)$  - непр. дифф. ф-ия, т.е.  $\varphi(x) \in C^1_\Omega$ .

$$\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x)) \in C_\Omega$$



$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$$

Если в каждой т.  $\Omega$  провести такие малые отрезки, то  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ , и  $\operatorname{tg} \alpha(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ , то получим поле направлений ур-я (1).

Греницы р-на  $\varphi(x)$  наз-ся интегральные кривые.

В каждой точке интегральные кривые касаются полю направлений.

Такой метод р-на наз-ся методом изоклин.

Т.к.  $f(x, y)$  - непрерывна, то поле направлений не имеет вертикальных прямых. Тогда

$dx \neq 0$ , т.е.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Leftrightarrow dy - f(x, y) dx = 0$$

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad \text{— ур-е в полном дифференциале}$$

$$P(x, y), Q(x, y) \in C$$

Здесь  $x$  и  $y$  равноправны, и  $dx$  может быть  $\neq 0$  (сильно вертикальные ур-я)

