

## Интегрирование по Фурье

$f(x) \in L_R(-1, 1)$  и ум. непрерывна

$L_R$ -адв. интегр., т.е.  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  адв. сч.

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \cos \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(t) \sin \frac{\pi n t}{1} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad - \text{коэф-ты Фурье}$$

## Лемма Римана

$f(x) \in L_R(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos tx dt \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$   
 $I$  - проме.

$$\int_I f(t) \sin tx dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие:  $f(x) \in L_R(-1; 1) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

Форм. разг.  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{\pi n x}{1} + b_n \sin \frac{\pi n x}{1} \right]$  - разг. Фурье  $f(x)$

## Обсужда

1. Если  $f(x)$  нечётна, то  $a_n = 0$

Если  $f(x)$  чётна, то  $b_n = 0$

2.  $f(x)$  - непрерывна  $\Rightarrow$  универсальная норма. Фрэнк по модулю непрерывна

## Дополнительное условие разностности в п. Фурье (Следствие из пр. Лебесга)

1.  $f(x) \in L_R(-1; 1)$ , ум. непрерывна

В т.  $x_0$  имеет конечные односторонние производ.  $f'_+(x_0)$  и  $f'_-(x_0)$ .

Тогда разг. Ф.  $f(x)$  в т.  $x_0$  сходится к  $f(x_0)$ .

2. Пусть  $f(x) \in L_R(-1; 1)$ , ум. непрерывна

$x_0$  - т. разрыва 1 рода,  $\exists$  конечные "обобщённые" односторонние

производные:

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда разг. Фурье в т.  $x_0$  сходится к ср. арифм.  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



Число  $l = \pi$ , тогда  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$ ,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

### Задача 1

Рассмотрим в п. 4-м  $f(x) = \operatorname{sign} x$ ,  $-\pi < x < \pi$

гр. симметрична относительно оси.



Ф-ия нечетная  $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \, dt \quad \text{— четная, } \varphi\text{-ин.}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign} t \sin nt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

Ряд не св-ся равномерно с.х. на всей прямой, т.е. сумма его разбегается

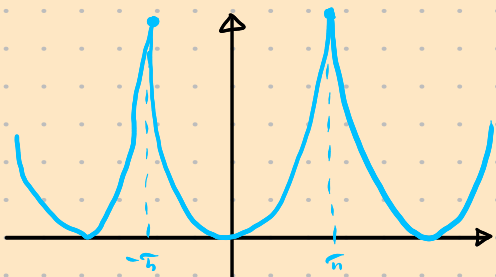
(р/н с.х. ряд из пер. гр-ми ил. пер. сумм).

### Задача 2

$f(x) = x^2$  на  $-\pi < x < \pi$

с.х-ца в  $\forall \pi$ , но не равномерно

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Досл. як р/н cx. р. Фур'є

$f(x) \in L_R[-1; 1]$ , непер. зл, у якого - непер. на  $[-1; 1]$ .

( $f(x)$  непер. на  $[-1; 1]$ ,  $f'(x)$  екстрем. - непер. на  $[-1; 1]$ , т.е. єдине коневне місце - розрива і погуг). Того р-Фур'є  $f(x)$  cx. р/н на всій числовій прямій.

Узглянемо: якщо  $f'(x)$  непер. вогуг на проміжку, то у нїї не може ітї розрива і погуг. Потїм у в розрива о павн. cx. р-Фур'є б о. розрива  $f'(x)$  не непер.

Ругу ф.  $x^2$  cx. р/н на  $(-\infty; +\infty)$ .

Удл. 22-110

Ругу ф. ругу (гуз проміжк  $[-\pi; \pi]$ )

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  (1) cx. р/н на  $(-\infty; +\infty)$ . Того єо гуна

$f(x)$  - непер. зл - непер. ф-ції, у (1) - р. Фур'є єої гуна.

$\square$   $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  - р/н cx.

$\Rightarrow f(x)$  непер.

Гуна р/н cx. ругу у непер. ф-ції - непер. ф-ції.

Унеї непер. зл - єої.

Р/н cx. ругу у непер. ф-ції на коневній відрізок можна поменно інтер-  
претувати.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Єо р/н cx. ругу гуна на відр-ф-ції, єо єої р/н cx.

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx), \quad m \text{ гуна,}$$

- cx. р/н.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right) =$$

$\stackrel{0}{=} \text{єо } n \neq m \stackrel{0}{=}$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt$$

Ортогональные функции  $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$  в пространстве функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$  со скалярным произведением  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

■

Задача 22-111

Дать в явном виде?

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  — ряд сч. п/н на  $\mathbb{R} \Rightarrow$  ряд Фурье с членом  $n=0$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  — расходится  $\nrightarrow 0 \Rightarrow$  не р. Фурье

Задача 4

$f(x) = x \cos x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  — нечетная,  $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot (\sin(n+1)t + \sin(n-1)t) \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \left( -\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(n-1)t}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \, dt + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \, dt \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} \quad \text{— } b_n \text{ при } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{При } n=1 \quad b_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} \, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}$$



Ряд сч. не п/н

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{n^2-1} \sin nx$$

на  $(-\pi; \pi)$

## Рационале no cos u no sin

$$f(x) \in L_n(0; 1)$$

Ем еэ програмуно на зэмаин  $\rightarrow f(x) \in L_n(-1; 1)$

То еэ пры прыме - раэіонеме  $P(t)$  на  $(-1; 1)$  no cos

Ем no неіэмаин, ро no sin

### Задача 1

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{no sin}$$



Пры с.х. непаўнамерна (разрыва) на  $(-\infty; +\infty)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin nt \, dt$$

### Задача 2

Рационале в пры прыме  $f(x) = x^2$  на  $(0; 1)$  с непугоем 1



$$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t^2 \cos 2\pi n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t^2 \sin 2\pi n t \, dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{на } 0 < x < 1$$

Пры с.х. непаўнамерна на  $(-\infty; +\infty)$  т.к. узровень разрыва

## Рационале no sin или cos зэтных или неіэтных крайных дзг

$$\textcircled{1} f(x) \in L_n(0; \frac{1}{2})$$



$$f(x) = f(1-x), \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{— симетрыя адносна } x = \frac{1}{2}$$

Далее no неіэмаин, галее с непугоем 2l

$$\text{В зям узровень } a_n = b_n = 0$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{l} \quad - \text{розкладемо по син невідомих кривих як}$$

②  $f(x) \in L_2(0; \frac{l}{2})$

$$f(x) = -f(l-x), \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad - \text{симетрія стос. і. } (\frac{l}{2}; 0)$$



$$a_n = 0, \quad b_{n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{l} dt$$

Розкладемо по син відомих кр. як.  
(розкладемо по син з невідомим l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2\pi n x}{l}$$

③  $f(x) = -f(l-x)$  на  $0 < x < \frac{l}{2}$  - сим. стос. і.  $(\frac{l}{2}; 0)$



Далі по відомим, далі з невідомим 2l

$$b_n = 0 \quad a_{2n} = 0$$

$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt$$

Розкладемо по cos невідомих кр. як

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

④  $f(x) = f(l-x)$   $0 < x < \frac{l}{2}$  - сим. стос.  $x = \frac{l}{2}$

Далі по відомим, далі з невідомим 2l



$$b_n = 0 \quad a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(t) \cos \frac{\pi \cdot 2n t}{l} dt$$

Розкладемо по cos відомих кр. як

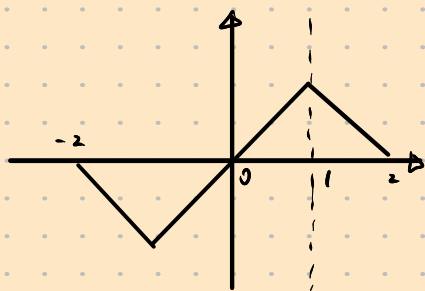
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{\pi \cdot 2n x}{l}$$

(далі по cos з невідомим l)

## Задача 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Разложить по  $\sin$  на  $[0; 2]$   $l=2!$



Продолжить симм. осн.  $x=1$

$$f(x) = f(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Разложить по  $\sin$  четных кр. гуд

$$b_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) x$$

Ряд сходимости по  $\sin$  на  $(-\infty; +\infty)$  т.к.  $f(x)$  имеет период 4 и экстремумы на  $[-4; 4]$

## Задача 2

Построить гр. функции рядов Фурье по  $\cos$  и  $\sin$  итер. и четн. кр. гуд.

Сходится ли они по  $\sin$ ?

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



Синусы чет. кр. гуд  
сх. по  $\sin$  т.к. им.  
первог. итер. и четн.  
максимум на  $[-\pi; \pi]$

Синусы итер. кр. гуд  
сх. по  $\sin$  т.к.  
регулярны

Косинусы чет. кр. гуд  
сх. по  $\sin$

Косинусы итер. кр. гуд  
сх. по  $\sin$

$$f(x) = \sin x + 1$$



суммы пер. кр.  
сх. не  $p/n$



суммы лев. кр. гл.  
сх. не  $p/n$



суммы прав. кр. гл.  
сх. не  $p/n$



суммы лев. кр. гл.  
сх.  $p/n$

## Полное равномерное приближение по Фурье

1.  $f(x)$  ун. непрерывна на  $[-l; l]$ , период.

2. Функция  $f(x)$  не имеет точек разрыва на  $(-\infty; +\infty)$

3. Функция  $f(x)$  имеет конечное число точек разрыва на  $[-l; l]$

$$\text{Если } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right]$$

То ряд Ф.  $f'(x)$  (х-ой кр. пер. на  $[-l; l]$ ) имеет конечное число точек разрыва.

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \cdot \frac{\pi n}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} \right) - \text{не сходится!}$$

линейная Ф. Фурье

## Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{сумма ряда равна } 2x \text{ на } (-\pi; \pi) \text{ по$$

сх. 1 пр. Лебегу



$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$



## Равенство Парсеваля

$L^2_R(I)$  - м.б.о. ф-ция, аде. унт. на  $I$  высеет  $f(x)^2$ .

Для конечного  $I$   $L^2_R(I) \subset L_R(I)$

Все конеч. унт. - из  $L^2_R(a; b)$

Если  $f(x) \in L^2_R(-1; 1)$  и унт. нормог  $21$ , то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx$$

В разном раз. себя сч.

## Пример

$f(x) = x$ ;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$f(x) = x^2$ ;

$$\frac{2}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

## Неравенство Бундземана

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq C \int_a^b f'(x)^2 dx$$

## Задача 2

$f(x)$  унт. н. на  $[a, b]$ ,  $f(a) = f(b) = 0$

$$\text{Тоже } \int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'(x)^2 dx$$

□ Рас-ум  $\varphi(x) = f(x+a)$ ,  $\varphi(a) = f(a) = 0$

$$\varphi(b-a) = f(b) = 0$$

Продолж. по периоду, задан периодом  $2 \cdot (b-a)$  ( $l = b-a$ )

Т.к она кривая,  $p$  - произв  $c_n$ ,  $p/n$



$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{b-a} \quad \text{нет cos т.к. нечетная}$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b-a} b_n \cos \frac{\pi n x}{b-a}$$

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(b-a)^2} b_n^2$$

~~12~~

## Усреднение рядов

Пусть  $f(x)$  кр. - пер. на  $[-l; l]$ , и н. пер.  $\mathbb{R}$

$$f(x) \sim \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{ср. п. Фурье}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

Тогда  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} -$  кр. и. на  $[-l; l]$ ,  $F(-l) = F(l)$

$$F(x) = \frac{C}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l}{\pi n} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} - \frac{l}{\pi n} b_n \cos \frac{\pi n x}{l} \right) - \text{сумма р. с. п. Фурье}$$

$$C = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt$$

Если  $\frac{a_0 x}{2}$  не симметрич., то номер  $n$  не выбирается р.м.

## Порядок убывания коэф-ов Фурье

Если  $f(x)$  кр. и. на  $[-l; l]$  и н. пер.  $\mathbb{R}$ , то  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(x)$  - кр. пер. глуп. на  $[a, b]$ , если  $f'(x)$  сум. везом, кроме конечного мн.  $\tau$ , где  $\gamma$  не разрывн. и рода.

Котр-н Фурье такой гр-н,  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$   $|a_n|, |b_n| \leq C \frac{1}{n}$

$f(x)$  кр.-н., если она непрерывна и кр. пер. глуп.

Например,  $\sin x$  - кр. пер. глуп., но не кр. и.

## Обобщение

Заб. А. Если  $f(x)$  н. пер.  $\mathbb{R}$  и  $f^{(k-1)}(x)$  кр. и. на  $[-l; l]$ , то котр. Фурье  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Заб. Б. Если  $f(x)$  н. пер.  $\mathbb{R}$ ,  $f^{(k-2)}(x)$  пер. на  $[-l; l]$ ,  $f^{(k-1)}(x)$  кр. пер. глуп., то  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Здесь важно: порядок убывания коэф-ов Фурье.

## Пример

$$f(x) = x^2 \quad \text{на } [-\pi; \pi], \quad \text{с пер. } 2\pi$$

$$A) \quad k-1=0, \quad k=1 \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = 0$$

$$k-2=0, \quad k-1=1, \quad k=2 \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad - \text{удобнее применение}$$

$$f(x) = x^3$$

A) непрерывно (and same не кр. и.)

$$B) \quad k-1=0, \quad k=1 \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n = 0$$

$$f(x) = (\pi^2 - x^2)^2 \quad [-\pi; \pi] \quad \text{с пер. } 2\pi$$

Нужно графиками или проверить в  $\pi$ ,  $\pi$  и  $-\pi$  (на концах интервала)

$$f(\pi) = f(-\pi) = 0 \quad - \text{непр.}$$

$$f'(x) = 2(\pi^2 - x^2) \cdot (-2x)$$

$$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$$

$$f''(\pi) = f''(-\pi) \quad - \text{кр. и.}$$

$$f'''(\pi) \neq f'''(-\pi) \quad - \text{кр. неп. групп.}$$

$$A) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad b_n = 0$$

$$B) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad - \text{на практике сделать можно B!}$$

## Задача 1

$$f(x) = \pi^3 x - x^4, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{раскл. в р. Фурье по } \sin.$$

Функция не имеет периодич. и гранич. периодич. разг.



разг



разг'



разг''

## Сформулировать рядов неограниченных асимптотических

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 0$$

Однако неверно,  $(-1)^n$  - ряд, с. асимпт.  $\rightarrow 0$ .

Ряд  $1 + 3 - 3 + 1 + 3 - 3 + \dots$  расходящийся (одна из рядов  $\rightarrow 0$ )

$$S_n = \begin{cases} K & n = 3k \\ K+1 & n = 3k+1 \\ K+4 & n = 3k+2 \end{cases}$$

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$$

