Неявные ф-ии

$y^2 = x^2$

а) Сколько ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? Бесконечно много:

$X \subset \mathbb{R}$: $f(x) = x$, $x \in X$

$f(x) = -x$, $x \notin X$

б) Сколько непрерывных ф-ий $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 4:

x, $-x$, $|x|$, $-|x|$

в) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 2:

x, $-x$

г) Ск. непр. ф-ий $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ задаёт ур-е? 1:

x

Теорема о неявной ф-ии

Пусть $F(x,y)$ непр. диф. в (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, Тогда

$\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b\}$ в к-ром $F(x,y) = 0 \iff f(x) = y$.

При этом $f(x)$ непр. диф. на $(x_0 - a, x_0 + a)$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$F(x, f(x)) = 0$

$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow$ формула - не док-во!

Должна быть $\neq 0$ производ. той переменной, которая зависима (равна ф-ии).

№1

$u^3 - xu + y = 0$, $u = u(x,y)$

Найти u'_x, u'_y и du в т. $(3,-2,2)$ и $(3,-2,-1)$ - надо задать и! иначе непонятно по какой точке

$x = 3$, $y = -2$, $u = ?$

$u^3 - 3u - 2 = 0$ | $u = 2$ - рет.

$(u-2)(u^2+2u+1)=0$

$(u-2)(u+1)^2=0 \qquad (u=-1)$

$u^3-3u-2 \;\big|\; u-2$

$u^3-2u^2 \;\big|\; u^2+2u+1$

$2u^2-3u$

$2u^2-4u$

$-u-2$

$u-2$

0

$3u^2u'_x - xu'_x - u = 0$

$u_x = \dfrac{u}{3u^2-x}$

$3u^2u'_y - xu'_y + 1 = 0$

$u'_y = -\dfrac{1}{3u^2-x}$

$u'_x(A) = \dfrac{2}{9} \qquad u'_y(A) = -\dfrac{1}{9}$

$du(3,-2,2) = \dfrac{2}{9}dx - \dfrac{1}{9}dy$

! Лучше сразу брать дифференциал, не считая производные

$3u^2du - xdu - udx + dy = 0$

$du = \dfrac{udx - dy}{3u^2-x}$

№2

$F(x-y,\ y-z,\ z-x) = 0 \Rightarrow z = z(x,y)$ - найти dz

$F(u, v, w)$

$F'_u(x-y,\ y-z,\ z-x)(dx-dy) + F'_v(x-y,\ y-z,\ z-x)(dy-dz) + F'_w(x-y,\ y-z,\ z-x) \cdot (dz-dx) = 0$

$dz = \dfrac{F'_u dx - F'_u dy + F'_v dy - F'_w dx}{F'_v - F'_w}$

№3

$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 & u = u(x,y) \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x & v = v(x,y) \end{cases}$

$u(1,2) = v(1,2) = 0$ (подходит)

Найти $u'_x,\ u'_y,\ v'_x,\ v'_y$ при $x=1, y=2, u=v=0$

! При попытке найти u, v - трансц. ур-е. А производные в т. - линейное

№4

$u^3 + 2yu + xy = 0 \quad u(1,-1) = -1$ (проверим: ОК)

Найти $d^2u\,(1,-1,-1)$

$3u^2du + 2udy + 2ydu + dx\,y + dy\,x = 0$

$du = -\dfrac{2udy + dxy + dyx}{3u^2 + 2y} \qquad du = dx + dy$

$6udu^2 + 3u^2d^2u + 2dudy + 2yd^2u + 2dudy + dxdy + dxdy = 0$

$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 \cdot 6u + 4dudy + 2dxdy = 0$

$d^2u - 6(dx+dy)^2 + 4dxdy + 4dy^2 + 2dxdy = 0$

$d^2u = 6dx^2 + 12dxdy + 6dy^2 - 4dxdy - 4dy^2 - 2dxdy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dxdy$

№ Ту

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

Выразить r'_x, r'_y, φ'_x, φ'_y через r, φ

$$\begin{cases} 1 = r'_y \sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_y \\ 0 = r'_y\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_y \end{cases}$$

$\Delta = -r$

$\Delta_r = -r\sin\varphi$

$\Delta_\varphi = -\cos\varphi$

$r'_y = \sin\varphi \qquad \varphi'_y = \dfrac{\cos\varphi}{r}$

$$\begin{cases} 1 = r'_x\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'_x \\ 0 = r'_x\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'_x \end{cases}$$

$\Delta = r$

$\Delta_r = r\cos\varphi$

$\Delta_\varphi = -\sin\varphi$

$r'_x = \cos\varphi \qquad \varphi'_x = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$

№ почему всё это было?

$u = u(x,y)$

Решить ур-е $xu'_y - yu'_x = 0$

Полярная замена: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad u = (r,\varphi)$

u'_y, u'_x выразить через u'_r, u'_φ

$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi\,\varphi'_x$

$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y$

$u'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$ $\quad u'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$

ур-е:

$r\cos\varphi \cdot \left(u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}\right) - r\sin\varphi \cdot \left(u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}\right) = u'_\varphi$

$u'_\varphi = 0$

ур-е $u = F(r)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Отв.: $u = F(x^2+y^2)$

№5

$(y-z)z'_x + (y+z)z'_y = 0$ $\quad z = z(x,y)$

Замена: новые незав. переменные $u = y-z$, $v = y+z$

новая ф-ия $x = x(u,v)$

$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x(x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$

$dx = x'_u du + x'_v dv$ $\quad + z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$

$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y)dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1)dz = 0$

dy, dz - произвольные $\Rightarrow$ коэф-ты при них $= 0$.

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'_x = \frac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Подставляем:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v\left(\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u}\right) = 0 \qquad \frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

№ Т3

$f: R^2 \to R^2$, $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

1) Д-ть, что $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$, но f не явл-ся биективным

2) Найти $f(R^2)$ - мн-во значений f.

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Не яв-ся биективной в силу периодичности: $u(r,\varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$

$v(r,\varphi) = v(r, \varphi + 2\pi)$

2) $u = \mathrm{Re}\ e^{x+iy}$

$v = \mathrm{Im}\ e^{x+iy}$ $\quad e^z$ прин. все знач. кроме 0

Экстремумы ф-ий нескольких переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Необх. усл-е: Если в точке лок. экстремума F дифф., то $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ (стац. т.)

Дост. усл-е: Если $F(x_1, \dots, x_n)$ - дважды дифф. в $U_\delta(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0$ - стац. т., то рас-им квадратичную форму от $(dx_1, \dots, dx_n)$:

$$d^2F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_i}(\bar{x}_0)\,dx_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0)\,dx_i dx_j$$

1. кв. ф. полож. опр. $\Rightarrow \bar{x}_0$ - лок. min
2. отриц. опред. $\Rightarrow$ лок. max
3. неопр. $\Rightarrow \bar{x}_0$ - не лок. экстр.
4. полуопред. $\Rightarrow$? (алгоритм приращений)

Исследование кв. формы

1. Приведение к каноническому виду $k(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этот вид однозначен с точностью до перестановок ε_i

p = кол-во $\varepsilon_i = +1$ - полож. индекс инерции

q = кол-во $\varepsilon_i = -1$ - отриц. индекс инерции

$r = p + q$ - ранг

Полож. опред. $\Leftrightarrow$ все $\varepsilon_i = +1$	$p = n,\ q = 0$
Отриц. опред $\Leftrightarrow$ все $\varepsilon_i = -1$	$p = 0,\ q = n$
Неопред. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_i = 1$ и $\exists \varepsilon_j = -1$	$1 \le q,\ p \le n-1$
Полож. полуопред. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \ge 0,\ \exists \varepsilon_j = 0$	$p \le n-1,\ q = 0$
Отриц. опред. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \to \varepsilon_i \le 0,\ \exists \varepsilon_j = 0$	$p = 0,\ q \le n-1$

2. Критерий Сильвестра

$B = (b_{ij})$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow \operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$

Полож. опред. $\Leftrightarrow$ все $\Delta_i > 0$

3. Частный случай $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

Полож. опред. $\Leftrightarrow A>0,\ AC-B^2>0 \ (\Rightarrow C>0)$

Отриц. опред. $\Leftrightarrow A<0,\ AC-B^2>0 \ (\Rightarrow C<0)$

Неопр $\Leftrightarrow AC-B^2<0$

№1

$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$u'_x = 6xy - 12$

$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$

$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \pm 1 \\ y = \pm 1, \pm 2 \end{cases}$

$u''_{xx} = 6y \qquad u''_{xy} = 6x$

$u''_{yy} = 6y$

$d^2F = 6y\,dx^2 + 6y\,dy^2 + 12x\,dx\,dy$

$\frac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0$ — неопред.

$\frac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dx\,dy$ — неопред.

$\frac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0$ — полож. опред. — min

$\frac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dx\,dy$ — отриц. опред. — max

№2

$u = xyz(16 - x - y - 2z), \quad x, y, z > 0$

$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$

$u'_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \qquad u'_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$

$u'_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$

$$\begin{cases} yz(16 - 2x - y - 2z) = 0 \\ xz(16 - x - 2y - 2z) = 0 \\ xy(16 - x - y - 4z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 2z = 16 \\ x + 2y + 2z = 16 \\ x + y + 4z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$u''_{xx} = -2yz = -16 \qquad u''_{yy} = -2xz = -16 \qquad u''_{zz} = -4xy = -64$

$u''_{xy} = z(16 - 2x - y - 2z) - yz = -8 \qquad u''_{xz} = y(16 - 2x - y - 2z) - 2yz = -16$

$u''_{yz} = x(16 - x - 2y - 2z) - 2xz = -16$

$d^2u(4,4,2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdz - 32dydz$

$$\frac{d^2u(4,4,2)}{16} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 > 0 \qquad \Delta_2 > 0 \qquad \Delta_3 > 0$

Полож. опред. $\Rightarrow$ d^2u отриц. опред. $\Rightarrow$ лок. max

№3

$u = x^4 + y^4 - 2x^2$

$u'_x = 4x^3 - 4x \qquad u'_y = 4y^3$

$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad u''_{yy} = 12y^2 \qquad u''_{xy} = 0$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy$

$d^2u(0,0) = -4dx^2$ – отриц. полуопред. – ?

$u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 = 0$: $\Delta x = 0 \quad \Delta y \neq 0$ (+)

$0 < \Delta x < \sqrt{2} \quad \Delta y = 0$ (−)

Экстремума нет.

$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2$ – полож. полуопр.

$u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x)^4 + \Delta y^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$

$= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x \pm 2)^2 + \Delta y^4 > 0$ – min

№ 75

В стац. т. кв. форма d^2f полож. полуопред.

а) Может ли это быть min? Да.

б) Может ли быть max? Нет (всегда есть такие dx и dy, что приращение > 0 - вид d^2f)

в) Не быть экстремума? Да

№ 4

$x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0$ - неявно задано ф-ию, зад. ур-ем.

$2x\,dx + 2y\,dy + 2u\,du + 2dx - 2dy + 2du = 0$

$(u+2)\,du + (x+1)\,dx + (y-1)\,dy = 0$

$$du = -\frac{(x+1)\,dx + (y-1)\,dy}{u+2}$$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad - \quad du = 0$

$u^2 + 4u - 5 = 0 \qquad u = 1, -5 \;;\quad (-1, 1, 1),\ (-1, 1, -5)$

$(u+2)\,d^2u + du^2 + dx^2 + dy^2 = 0$ ($du = 0$)

$$d^2u = \frac{-dx^2 - dy^2}{u+2}$$

$d^2u(-1, 1, 1) = -dx^2 - dy^2$ - отриц. опред. (max)

$d^2u(-1, 1, -5) = \frac{dx^2}{3} + \frac{dy^2}{3}$ - полож. опред. (min)

Условный экстремум

$u = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \qquad (\bar{x} \in \mathbb{R}^n)$

Условия связи: $\varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_m(\bar{x}) = 0 \quad (*) \qquad n > m$

Точка $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ наз-ся условным экстремумом $f(\bar{x})$ при усл. $(*)$ $\Leftrightarrow$

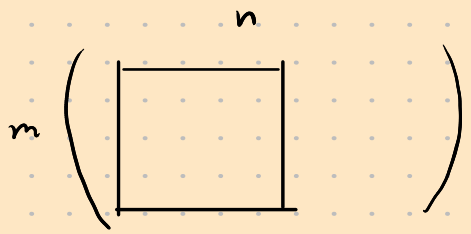
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ при вып. ур-ий $(*) \to f(\bar{x}) > f(\bar{x}^0)$

ф-ия Лагранжа $L(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$ далее $x \equiv \bar{x}$, $x^0 \equiv \bar{x}^0$

$L(x)\big|_* = f(x)\big|_* \quad \forall \lambda_i$

Необх. усл. Пусть $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ непр-дифф. в $U_\delta(x^0)$, тогда

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} = m$$



Пусть среди $x_1, \dots, x_m$ выражаем через $x_{m+1}, \dots, x_n$ (неявно)

Пусть x^0 – т. усл. экстр. $f(x)$ при вып. $(*)$

Тогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 – стац. т. ф-ии Лагранжа

Сис-ма $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв. $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

Пример

$n=2, \quad m=1$

$u = \ln xy, \qquad x^3 + xy + y^3 = 0$

$L = \ln xy + \lambda(x^3 + xy + y^3)$

$$\begin{cases} L'_x = \frac{1}{x} + \lambda(3x^2 + y) = 0 \\ L'_y = \frac{1}{y} + \lambda(3y^2 + x) = 0 \\ x^3 + xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = -\lambda(3x^2 + y) \\ \frac{1}{y} = -\lambda(3y^2 + x) \end{cases} \qquad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3x^2}{y} - \lambda \\ \frac{1}{xy} = -\lambda \frac{3y^2}{x} - \lambda \end{cases}$$

$\frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow y = x$

$2x^3 + x^2 = 0$

$x_1 = 0$ – не подх. $\qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

$x = y = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = 8$ – возможно усл. экстр.!

Достаточное усл-е: $(**)$ – продиффер. усл-я связи

$dx_1, \dots, dx_m$ выразим через $dx_{m+1}, \dots, dx_n$

Пусть F, φ_i – дважды непр. диффер. в $U_\delta(x^0)$, x^0, λ_i – реш. сис-мы

$n+m$ ур-ий с $n+m$ перем.

$d^2 L(x^0)\big|_{(**)}$ - квадр. форма от $n-m$ перем. диф-ов

По ней окончательно опр-ся характер усл. экстремума и его сущ-е.

! Если $d^2 L(x^0)$ до подстановки полож. или отриц. опред. - подстановку можно не делать, и так всё ясно. Иначе нужна подстановка. Если после подстановки форма полуопред. - нужно доп. исследование.

Пример (всё тот же)

$L''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \lambda \cdot 6x = -4 + 8 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -28$

$L''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda \cdot 6y = -28$

$L''_{xy} = \lambda = 8$

$d^2 L = -28\,dx^2 - 28 dy^2 + 16 dx\,dy$

$\frac{d^2 L}{4} = -7dx^2 - 7dy^2 + 4dx\,dy \qquad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$ - отриц. опред.

Понятно, что $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ - условный максимум.

Пример 2

$u = 1 - 4x - 8y \qquad x^2 - 8y^2 = 8$

$L = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$

$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -4y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ y = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mp 4 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = \mp \frac{1}{2} \end{cases}$

$L''_{xx} = 2\lambda = \mp 1 \qquad L''_{yy} = -16\lambda = \pm 8 \qquad L''_{xy} = 0$

$d^2 L = 2\lambda(dx^2 - 8dy^2) \qquad d^2 L\big|_{**} = \pm 4 dy^2$

$(**) \quad 2x\,dx - 16y\,dy = 0 \qquad \oplus\ (-4, 1)$ - полож. опред. $\Rightarrow$ усл. min

$dx = 8y \frac{dy}{x} = -2dy \qquad \ominus\ (4, -1)$ - отриц. опред. $\Rightarrow$ усл. max

Пример 3

$u = xy, \quad x^2+y^2=1$

$L = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}$

$2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$

$2y^2 - 1 = 0$

Подходят: $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\lambda = -\frac12 \qquad -\frac12 \qquad \frac12 \qquad \frac12$

$L''_{xx} = 2\lambda \qquad L''_{yy} = 2\lambda \qquad L''_{xy} = 1$

$d^2L = 2\lambda\,dx^2 + 2\lambda\,dy^2 + 2\,dx\,dy$

$\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = 2\lambda$, $\Delta_2 = 4\lambda^2 - 1$ – знакопер. форма

$(**)\ 2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$dy = -\frac{2x\,dx}{2y} = \begin{cases} -dx, & x=y, \ \lambda=-\frac12 \\ +dx, & x=-y, \ \lambda=\frac12 \end{cases}$

$d^2L\big|_{**} = \pm dx^2 \pm dy^2 + 2\,dx\,dy = \begin{cases} -4\,dx^2, & \lambda=-\frac12 \\ 4\,dx^2, & \lambda=\frac12 \end{cases}$ – отриц. форма – усл. min; – полож. форма – усл. max

Ответ: $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. min}}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)}_{\text{усл. max}}$

Пример 4

$u = 2x^2 + 12xy + y^2 \qquad x^2 + 4y^2 = 25$

$L = 2x^2 + 12xy + \lambda(x^2+4y^2-25)$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 12x + 2y + 8y\lambda = 0 \\ x^2+4y^2-25=0 \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} x(2+\lambda) + 6y = 0 \\ 6x + y(1+4\lambda) = 0 \end{cases}$$ – $(0,0)$ не подходит под усл-я связи

Чтобы у (1) были реш-я кроме $(0,0)$: $\begin{vmatrix} 2+\lambda & 6 \\ 6 & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-34 + 9\lambda + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -\frac{17}{4} \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Далее ничего интересного, мне лень.

Ответ: при $\lambda = 2$: два усл. min, при $\lambda = -\frac{17}{4}$: два усл. max