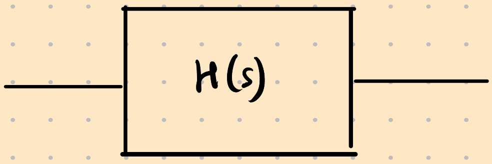
Григорьев Александр Алексеевич

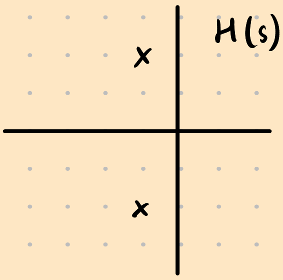
Проблема фильтрации



$s = \frac{p}{\omega_0}$ — характер. частота

$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ полином/полином — рациональная ф-ия

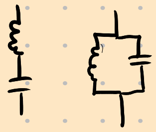
1. Синтез $H(s)$ — как её выбрать? Синтез по АЧХ
2. Реализация — как сделать четырёхполюсник? Центр внимания



сопряжённые пары полюсов

Они не реализуемы RL и RC цепями.

Нужны RLC

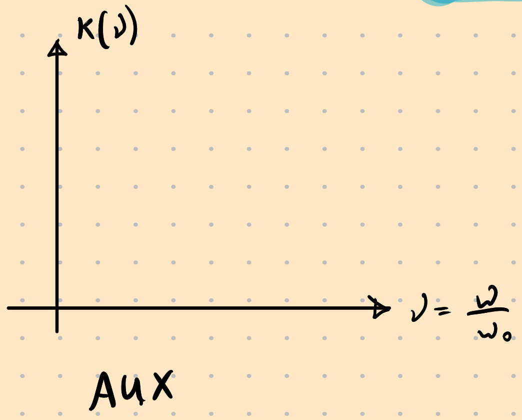


— резонаторы дают сопр. полюса

Однако индуктивности исп. не хочется. Их можно заменить усилителями!

RC —▷— (K) — активные RC-цепи / фильтры

Синтез по АЧХ



$$H(s) = \underbrace{|H(s)|}_{\text{АЧХ}}\, e^{j\,\underbrace{\arg H(s)}_{\text{ФЧХ}}}$$

$|H(s)|^2 = H(s)\cdot H^*(s)$ — к этому предъяв. требования

Нас интересует только $H(s)\cdot H^*(s)\big|_{s=j\nu}$

- Причём т.к. полиномы N и D веществ., то $H^*(s) = H(s^*)$, т.е. рассматриваем $H(s)\cdot H(s^*)\big|_{s=j\nu}$

- Подменим задачу: при $s=j\nu$, $H(s^*) = H(-s)$, и так удобнее работать:

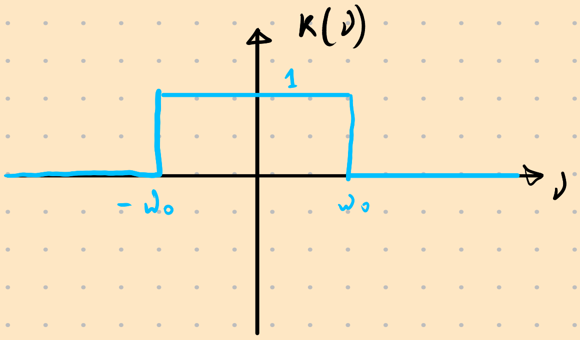
$$H(s)\cdot H(s^*)\big|_{s=j\nu} = H(s)\cdot H(-s)\big|_{s=j\nu}$$

$$H(s)\cdot H(-s) = |K(\nu)|^2$$

АЧХ^2 — у этой ф-ии есть набор нулей и полюсов

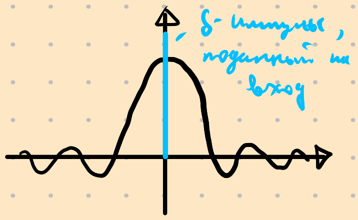
Созвездие нулей и полюсов АЧХ^2 всегда будет симметрично (отн. относ. замены $s \to -s$), и половину их возьмём в $H(s)$, половину — $H(-s)$.

Прямоуг. фильтр нижних частот



$$h(t) = \int_{-1}^{+1} h(f)\, e^{2\pi j f t}\, df = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

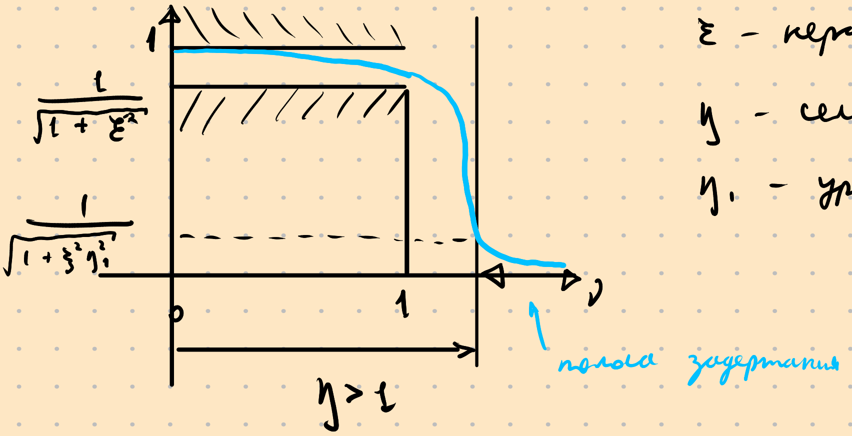
Импульс Найквиста



— не удовл. принципу причинности (реакция раньше воздействия)

Т.е. такой фильтр не реализуем.

Допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания:



ε – неравномерность в ПП

η – селективность

η_1 – уровень на границе ПЗ

К успеху приводит:
$$H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$$
n – порядок фильтра

$$|F_n(\nu)| = \begin{cases} \leq 1, & \nu \in (-1;1) \\ \geq \eta_1, & \geq \eta \end{cases}$$

Варианты выбора:

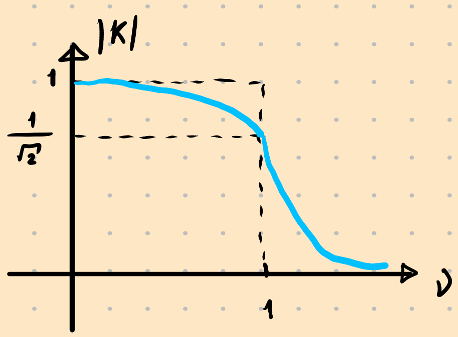
1. $F_n(\nu) = \nu^n$ – фильтр Баттерворта
2. $F_n(\nu) = P_n(\nu)$ – фильтр Чебышева, где $P_n(\nu)$ – полином Чебышева
3. $F_n(\nu) = R_n(\nu)$ – эллиптический фильтр, $R_n(\nu)$ – рационал. эллиптич. ф-ция

Баттерворт

$$H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\nu^{2n}}$$

$\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}$ – изменение ε эквивалентно изменению ω_0, т.е. ε не нужен – он всегда 1

$$K(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^{2n}}}$$



При $n \to \infty$ эта АЧХ неогр. стремится к идеальной прямоугольной.

Всегда даёт затухание –3 дБ

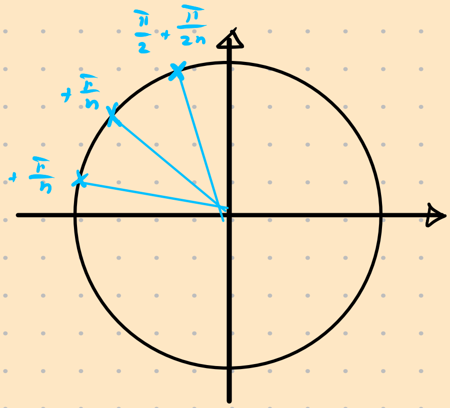
$$H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\nu^{2n}} \quad \Rightarrow \quad H(s)\,H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Ищем полюса: $\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} + 1 = 0$

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = e^{j\pi}\cdot e^{j\cdot 2\pi k}, \quad k\in\mathbb{Z} \qquad -1 = e^{j\pi}$$

$$\frac{s}{j} = e^{j\frac{\pi}{2n}}\cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot\frac{k}{2n}} \qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

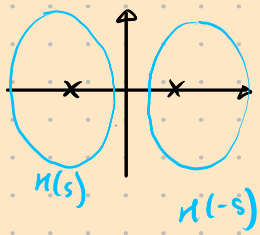
$$s_k = e^{j\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}k\right]}$$ – полюса произв. ф-ий $H(s)\cdot H(-s)$



– полюса с шагом $\frac{\pi}{n}$, картинка симметрична относ. мнимой оси!

Примеры

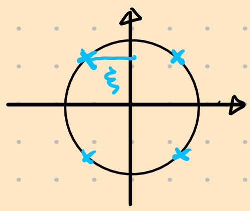
$n=1$: $\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^2} = \frac{1}{1-s^2}$ $\quad s=\pm 1$ – полюса



$$H(s) = \frac{1}{1+s}$$

Интегрирующая цепь!

$n=2$:



Сопряжённая пара на ед. круге характеризуется затуханием ξ

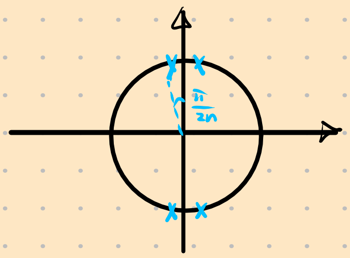
Полином $s^2+2\xi s+1$

Корни $-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

- У фильтров Баттерворта слишком медленный спад.

Если делать большой порядок, получаются очень близкие к мнимой оси полюса (угол $\frac{\pi}{2n}$) - высокая добротность



$$\xi = \sin\frac{\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Фильтры с максимально плоской частотной хар-ой.

Чебышев

$$|K(\nu)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2 P_n^2(\nu)}$$

$-1 \le \nu \le +1$; $|P_n(\nu)| \le 1$ - осциллирует в обл-ти пропускания

$P_n(\nu) = \cos(n \arccos \nu)$ - многочлен Чебышева (1)

$\cos[(n+1)\alpha] + \cos[(n-1)\alpha] = 2\cos n\alpha \cdot \cos\alpha$ - по ф-ле cos суммы

$\alpha = \arccos x$

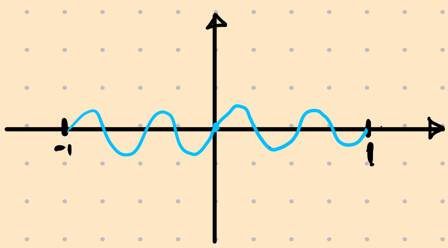
Получаем $P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2P_n(x)\cdot x$

$P_{n+1} = 2xP_n - P_{n-1}$ - рекуррентная ф-ла

$P_0(x) = 1$ $\qquad$ $P_2(x) = 2x^2 - 1$

$P_1(x) = x$ $\qquad$ $P_3(x) = 4x^3 - 3x$

По ф-ле (1) получается, что $P_n(x)$ определён только на $[-1; +1]$ из-за арккосинуса. Поговорим о нём



$n \arccos x$ меняется от 0 до $n\pi$

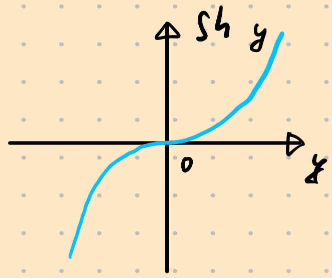
Значит, в $[-1; 1]$ происходит целое число полупериодов осцилляции. Если n - чётное, то в 0 - 0

Почему полиномы определены на всей оси? arccos надо рас-вать как ф-ию от комплексного аргумента.

$$\cos(z) = \cos(x+jy) = \cos x \cdot \overbrace{\cos jy}^{ch\, y} - \sin x \cdot \overbrace{\sin jy}^{j\, sh\, y}$$

$$\cos jy = \frac{e^{j\cdot jy} + e^{-j\cdot jy}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = ch\, y$$

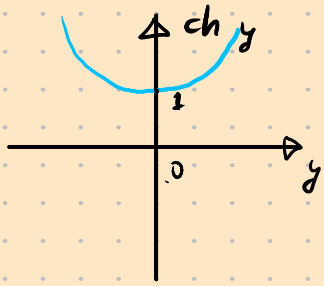
$$\sin jy = j\, sh\, y$$

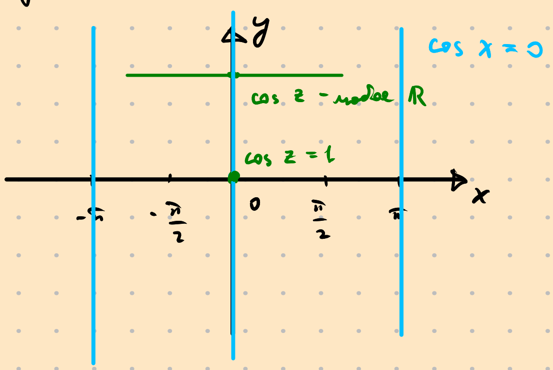


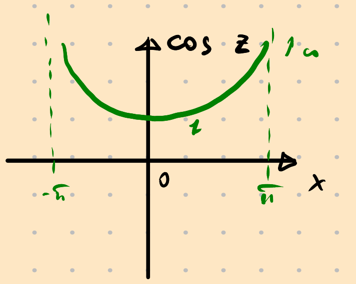
- Получим $\cos z = \cos x \; ch\, y - j \sin x \; sh\, y$

Если $y = 0$, то $\cos z = \cos x$.

- Комплексная добавка в cos обращается в 0, когда $\sin x = 0$.





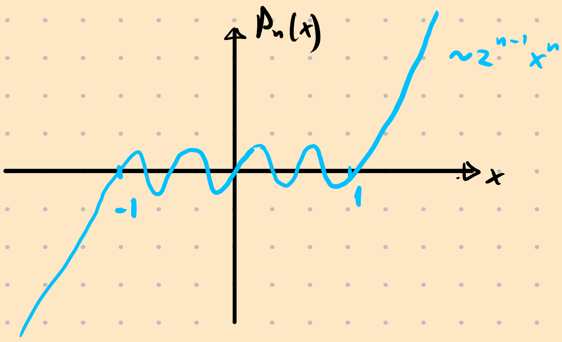


(cos z при $y > 0$)

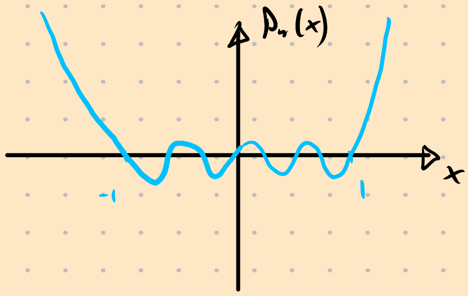
То есть аргумент arccos - любое $x \in R$, иногда arccos x мнимый, но $\cos(n \arccos x)$ остается вещественным.

- $P_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots$ - старший коэф-т

При $x > 1$ он быстро растёт.



$P_n(x)$, n - нечётное



P_n, n - чётное

У Чебышева выигрыш по селективности отн. Баттерворта.

Поиск полюсов:

$$H(s)\,H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 P_n^2\left(\frac{s}{j}\right)} = 0$$

$$P_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\cos\Big(n \underbrace{\arccos\left(\frac{s}{j}\right)}_{u-jv}\Big) = \pm\frac{j}{\varepsilon}$$

$$\begin{cases} \cos\big(n(u-jv)\big) = \pm\frac{j}{\varepsilon} \\ \frac{s}{j} = \cos(u-jv) \end{cases}$$

$$\underbrace{\cos nu\cdot \operatorname{ch} nv}_{=0 \;\Rightarrow\; \cos nu = 0} + j\overbrace{\sin nu}^{=(-1)^k}\cdot \operatorname{sh} nv = \pm\frac{j}{\varepsilon}$$

$$nu = \frac{\pi}{2} + \pi k \;\Rightarrow\; u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k$$ — похоже на Баттерворта

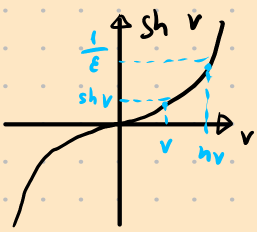
$$\operatorname{sh} nv = \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{s}{j} = \cos(u-jv) = \cos u\cdot \operatorname{ch} u + j\sin v\cdot \operatorname{sh} v$$

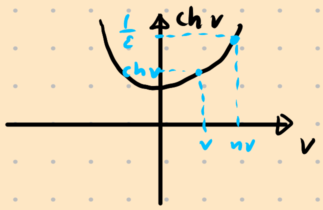
$$s_k = j\left[\operatorname{ch} v\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{k}n\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}k\right)\operatorname{sh} v\right]$$

$$s_k = -\operatorname{sh} v\,\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}k\right) + j\operatorname{ch} v\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}k\right)$$

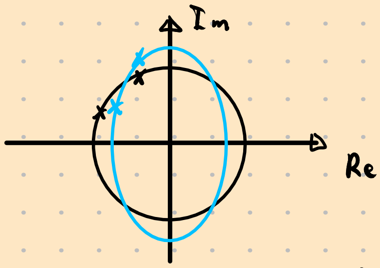
Отн. Баттерворта просто коор-ты умножили на sh v и ch v.



sh v уменьшает (<1)



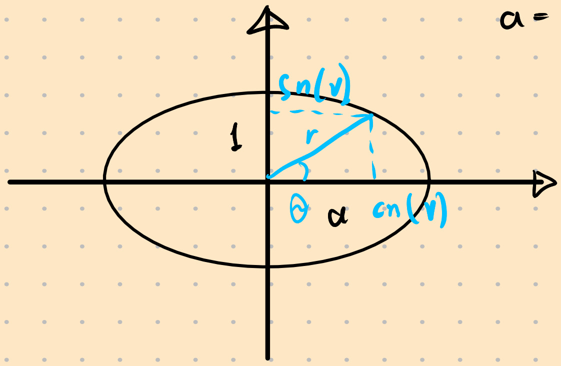
ch v увеличивает (>1)



полюса ф-ра Чебышева

Базис $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, ортогонализованный в пр-ве Гильберта, есть многочлены Чебышева.

Эллиптические фильтры



$a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ $\quad k \in [0; 1)$

$$v = \int_0^\theta r(\theta)\,d\theta$$

$dn(v) = r \qquad cd = \frac{cn}{dn}$

При $k=0$ — вырождение в окружность, sin и cos

$\int_0^{\pi/2} r(\theta)\,d\theta$ — эллиптический интеграл

Подобно тому, как $\cos(n \arccos x)$ — многочлен, можно также штуки сделать и в эллипт. тригоном. — т.н. рациональные эллиптические функции.

$P_n(x) = \cos nw$, где $x = \cos(w)$

$\varphi_n(x) = cd(K, nw)$, где $x = cd(K_1, w)$, $K, K_1 \in (0; 1)$

K ↓ пар-р эксцентриситета; w ↓ $[0; 1]$

Получается, что $\varphi_n(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ — рац. ф-ия. (есть нули и полюса)

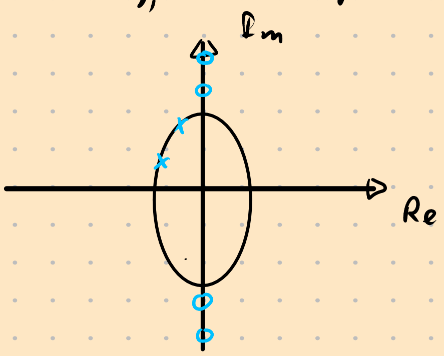
Поиск нулей и полюсов:

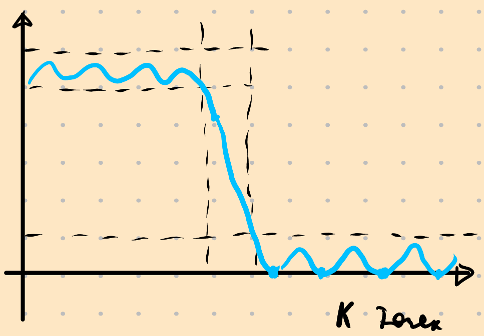
$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\varphi_n^2(v)} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\frac{D^2}{N^2}} = \frac{N^2}{N^2-\varepsilon^2 D^2}$$

$N^2 = 0$ — нули

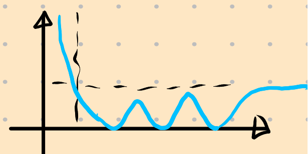
$N^2-\varepsilon^2 D^2 = 0$ — полюса

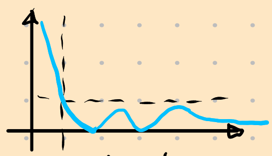
По полюсам очень похоже на ф-ры Чебышева (они тоже на эллипсе), все нули — на мнимой оси.





K точек, где затухание — 0!





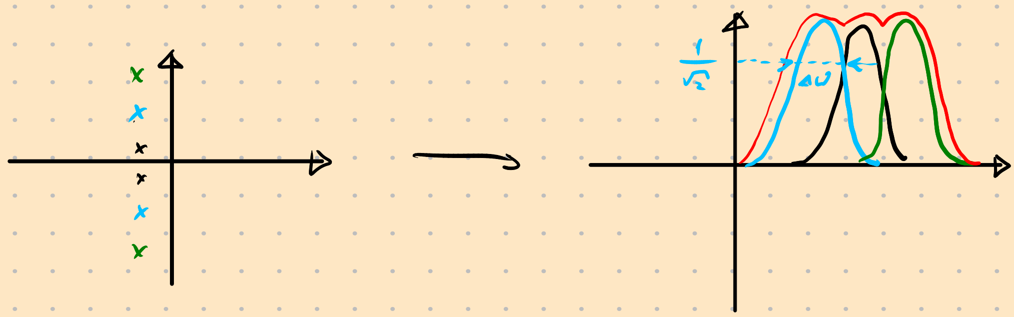
Нулей n штук.

$n = 2k$ — нули парные $\qquad n = 2k+1$ — один нуль на ∞

Пар-ры синтеза

1. Баттерворт – задаётся только порядок n
2. Чебышев – задаётся n и ε (тогда $\gamma_1 = \gamma_1(\gamma)$ – определена)
3. Эллиптические – задаётся (n, ε, γ) или $(n, \varepsilon, \gamma_1)$ или $(\varepsilon, \gamma, \gamma_1)$
   (в посл. случае n можно примерно посчитать)

В прошлом семе связанные колеб. контуры делали так:



$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Широкая ПП с крутыми скатами

Но! Если их расп. линейкой, в ПП АЧХ неравномерна.

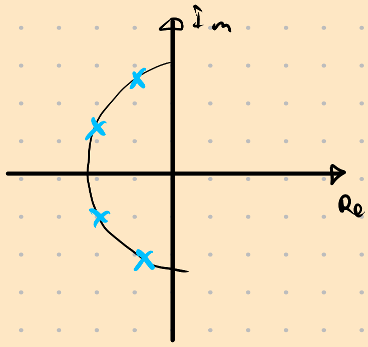
Лучше по кругу или эллипсу! Как и получили.

Лестничные фильтры

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$|H(s)|^2_{s=j\nu} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$$

$$F_n(\nu) = \nu^n; \quad P_n(\nu); \quad \varphi_n(\nu)$$

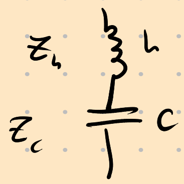


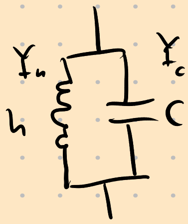
В классах RC и RL цепей сопряжённые полюса (= колебательные процессы) нереализуемы.

$$|K(s)| = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \text{рас-е до нулей}}{\prod_{n=1}^{\infty} \text{рас-е до полюсов}}$$ => только вещественными полюсами хороший срез в прямоугольнике не сделать. Хороший срез создаётся высокодобротными полюсами.

RLC - класс

RLC - класс; можно образовывать резонаторы;



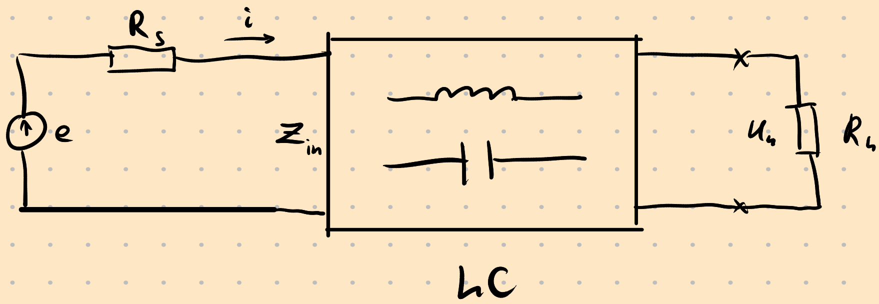


— получаются друг из друга заменой импеданса на адмиттанс

$Z_{резонанс} = 0$ $\qquad$ $Y_{резонанс} = 0$

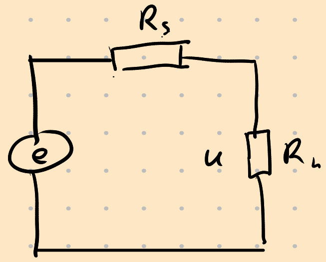
Бездиссипативные лестничные фильтры

Резисторов (и потерь) в фильтре нет!



$$P_L = \mathrm{Re}\left[\frac{u \cdot i^*}{2}\right]$$ — мощность на нагрузке

Переходим к мощностям.



Какова мощность источника?

Она max когда $R_s = R_н$.

$$u = \frac{e}{R_s + R_н} R_н = \frac{e}{2}$$

$$P = \frac{u^2}{R} \text{ (пост. напр.)} \qquad P = \frac{|u|^2}{2R} \text{ (пер. напр.)}$$

здесь u – амплитуда

$$P_s = \frac{e^2}{4R_s} \text{ (пост. напр.)} \qquad P_s = \frac{|e|^2}{8R_s} \text{ (гармонич. напр.)}$$ – мощность источника

Источник можно характеризовать P_s и R_s.

Коэф-т передачи мощности $G = \frac{P_н}{P_s}$ (gain)

$$G = \frac{\frac{|u_н|^2}{2R_н}}{\frac{|e|^2}{8R_s}} = \frac{4R_s}{R_н}\frac{|u|^2}{|e|^2} = \frac{4R_s}{R_н}|K|^2$$ → коэф-т передачи напряжения

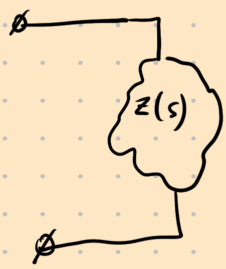
$|K|$ – в лучшем случае $\frac{1}{2}$ (половина на R_s, половина на $R_н$) =>

=> G – в лучшем случае 1 (лучший случай: $R_s = R_н$)

$$G(\nu) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$$ – требования к фильтру предъявляем по коэф-ту передачи мощности

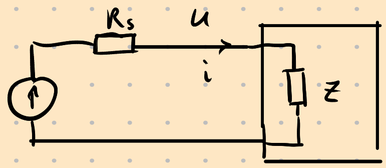
Т.к. нет диссипации внутри фильтра, то $G = \frac{P_{in}}{P_s}$ – это зависит только от входного импеданса Z_{in}

$$u_{in} = \frac{e Z_{in}}{R_s + Z_{in}} \qquad P_{in} = \frac{|u_{in}|^2}{2 Z_{in}^*}$$



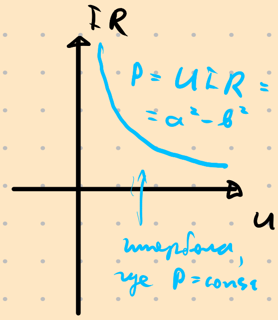
Задача: имея $Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, реализовать двухполюсник с этим импедансом. (развитая техника в теории цепей)

Для перехода от P_{in} к Z_{in}, можно перейти от u и i к волновым параметрам (в них проще работать с мощностями)



$$a = \frac{u_{in} + iR_s}{2} \qquad b = \frac{u_{in} - iR_s}{2}$$

$$u_{in} = a + b \qquad i = \frac{a-b}{R_s}$$



$$P^+ = \frac{u i^*}{2} = \frac{(a+b)(a^*-b^*)}{2R_s} = \frac{\underbrace{|a|^2 - |b|^2}_{P} \underbrace{+ba^* - b^*a}_{Q}}{2R_s}$$

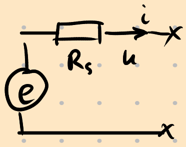
$$ba^* - b^*a = ba^* - (ba^*)^* = Im[ba^*]$$

$$P_{in} = \frac{|a|^2 - |b|^2}{2R_s}$$ Введём коэф-т отражения $\rho = \frac{b}{a}$:

$$P_{in} = \frac{|a|^2}{2R_s}(1 - |\rho|^2)$$

Посмотрим на ρ: $\frac{b}{a} = \frac{u_{in} - iR_s}{u_{in} + iR_s} = \frac{Z_{in} - R_s}{Z_{in} + R_s}$

Посмотрим на $|a|$:



$$u = e - iR_s$$

$$a + b = e - \frac{a-b}{R_s} R_s$$

$$a + b = e - a + b \Rightarrow a = \frac{e}{2}$$

Итого $P_{in} = \underbrace{\frac{e^2}{8R_s}}_{P_s}(1 - |\rho|^2)$

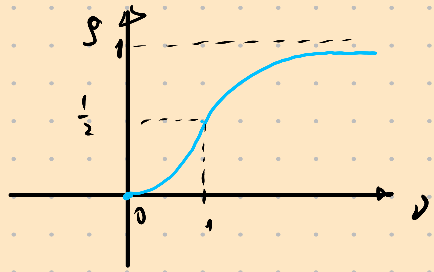
$$P_н = P_{in} = P_s(1 - |\rho|^2)$$

$G = \frac{P_н}{P_s} = 1 - |\rho|^2$ - требования к G = требования к $|\rho|^2$

$$G = 1 - |\rho|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\nu)}$$

Баттерворт:

$$|\rho|^2 = \frac{\nu^{2n}}{1 + \nu^{2n}}$$



В полосе пропускания $|\rho| \to 0$,

в полосе задерживания $|\rho| \to 1$

Поставим требования на Z_{in}:

$$\pm\rho = \frac{Z_{in}-R_s}{Z_{in}+R_s}$$

причём для нас $\pm\rho$ – одно и то же (в силу того что требования для $|\rho|^2$)

Выбор знака связан к переходу от сопротивлений к проводимостям:

$$\rho = \frac{Y_{in}^{-1}-R_s}{Y_{in}^{-1}+R_s} = \frac{\gamma_s - Y_{in}}{\gamma_s + Y_{in}} = -\frac{Y_{in}-\gamma_s}{Y_{in}+\gamma_s}, \quad \gamma_s = \frac{1}{R_s}$$

Будем мерить все сопротивления в долях от R_s, тогда

$$\pm\rho = \frac{Z_{in}-1}{Z_{in}+1} = -\frac{Y_{in}-1}{Y_{in}+1}$$

Проблемы реализации

Если ввести эталонные частоту и сопротивление ω_0 и R_0, то все единицы станут безразмерными.

$$\frac{X_L}{R_0} = \frac{\omega L}{R_0} = x = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}L}{\frac{R_0}{\omega_0}} \Rightarrow L_0 = \frac{1}{\frac{R_0}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{R_0}$$ – эталонная индуктивность

(на частоте ω_0 имеет сопротивление R_0)

Также для ёмкости:

$$C_0 = \frac{1}{\omega_0 R_0}$$

$Z = qs$

qL_0

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{j\omega q L_0 \omega_0}{R_0\omega_0} = qs\underbrace{\frac{\omega_0 L_0}{R_0}}_{1} = qs$$

$Y = qs$

qC_0

$$YR_0 = \frac{j\omega \cdot qC_0 \cdot R_0\omega_0}{\omega_0} = qs\underbrace{\omega_0 C_0 R_0}_{1} = qs$$

$$|\rho(s)|^2 = \frac{\nu^{2n}}{1+\nu^{2n}}$$

$$\rho(s) = \frac{s^n}{D_n(s)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{s^{2n}}{D_n^2(s)}\right|_{s=j\nu} = \frac{\nu^{2n}}{1+\nu^{2n}}$$

Сопряжение эквивалентно замене знака

$$\left.\frac{s^n(-s)^n}{D_n(s)D_n(-s)}\right|_{s=j\nu} = \frac{\nu^{2n}}{1+\nu^{2n}}$$

$$\left.s^n(-s)^n\right|_{s=j\nu} = \nu^{2n}$$

$$D_n(s)\cdot D_n(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Оказывается всё то же самое, как для $H(s)$ и ф. Баттерворта.

$D_1(s) = s+1$

$D_2(s) = s^2 + \sqrt{2}\, s + 1$

$D_3(s) = (s+1)(s^2+s+1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$

Теперь импеданс $Z(s)$:

$$\rho = \frac{Z-1}{Z+1}$$

$$Z(s) = \frac{1+\rho}{1-\rho} \qquad Y(s) = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

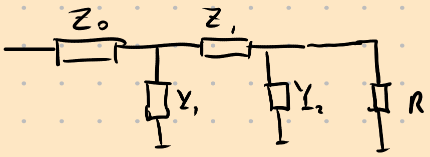
$$Z(s) = \frac{D_n(s) + s^n}{D_n(s) - s^n}$$

$n=1$: $D_n(s) = s+1$ $\qquad Z(s) = 2s+1$

2: $D_n(s) = s^2+\sqrt{2}\, s+1$ $\qquad Z(s) = \dfrac{2s^2+\sqrt{2}\, s+1}{\sqrt{2}\, s+1}$

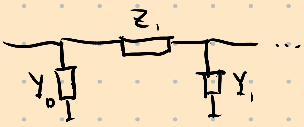
3: $D_n(s) = s^3+2s^2+2s+1$ $\qquad Z(s) = \dfrac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1}$

Де-Кауэрова лестничная структура



— реализация импеданса

$$Z = Z_0 + \cfrac{1}{Y_1 + \cfrac{1}{Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_2 + R}}}}$$ — цепная дробь



— реализация адмитанса

$z(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ nominator, denominator — надо преобразовать в цепную дробь:

$N(s) = \underbrace{Q(s)}_{\text{quotient}} D(s) + \underbrace{R(s)}_{\text{remainder}}$

$Z(s) = Q(s) + \dfrac{R(s)}{D(s)} = Q(s) + \cfrac{1}{\cfrac{D(s)}{R(s)}}$ — первый этап разложения

Делаем то же самое для $\dfrac{D(s)}{R(s)}$, и т.д. — конечная процедура!