

Глава XVII

Несколько приложений к экстремумам функций нескольких переменных

§1. Теорема о несуществовании

$$F(x, y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$ — не является гладкой ф-и



Теорема

Пусть ф-я 2-х переменных гладк. в $U(x_0, y_0)$. $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$

б-к-ром ур-е $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

• $F(x)$ непр-гладк. на $(x_0 - a, x_0 + a)$ и $f'(x) = -\frac{F'_x(x, F(x))}{F'_y(x, F(x))}$ на $(x_0 - a, x_0 + a)$

Д-бо

① Не наружн. одн., $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

По лемме о сопр. знака, \exists отр-е (x_0, y_0) (б-к-е прямой).

$\tilde{\Pi} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, можно сказать, что

$F'_y > 0$ в $\tilde{\Pi}$.



$$\varphi(y) = F(x_0, y)$$

$$\varphi(y_0) = 0, \quad \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0, \quad y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

$\varphi(y) \uparrow$ справа

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$

По лемме о сопр. знака (зак F) $\exists A: \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \begin{cases} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{cases}$

Значит $x^* \in (x_0 - a, x_0 + a)$

$$\varphi(y) = F(x^*, y)$$

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0$$

но т. б-к, $\exists y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]: \varphi(y^*) = 0$

$$\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \varphi(y) \uparrow$$
 справа \Rightarrow

\Rightarrow Foga: $f(y^*) = 0$ - egensid.

$\forall x^* \in [x_0-a, x_0+a] \exists! y^* \in [y_0-b, y_0+b]$

$$f(x^*, y^*) = 0$$

$$y^* = f(x^*) \quad \text{Replace } z \text{-variable}$$

② Nekras $x \in [x_0-a, x_0+a]$, $y = f(x)$.

$$f(x, y) = 0$$

Δx - naryanq. x , Δy - kord. naryanq. y .

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$

No 1. laryanma qed q-p-uu necr. nep-wx,

$$0 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_x(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y) \Delta y,$$

$$\frac{1}{3} = \xi(\Delta x, \Delta y)$$

$$0 < \xi < 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y)}{f'_y(x+\frac{1}{3}\Delta x, y+\frac{2}{3}\Delta y)}$$

$$\Pi = \{x_0-a < x \leq x_0+a, y_0-b < y \leq y_0+b\}$$

$$\bar{\Pi} = \{x_0-a \leq x \leq x_0+a, y_0-b \leq y \leq y_0+b\}$$

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \text{ na } \bar{\Pi}.$$

$\bar{\Pi}$ - komant, t.e. $|f'_x| \leq \alpha$ - oys.

$$f'_y \geq \beta > 0 - \text{golum. inf.}$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq \frac{\alpha}{\beta} = M$$

$$|\Delta y| \leq M |\Delta x|$$

$y = f(x)$ oys. na $[x_0-a, x_0+a]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0)$$

Foga f - paknenepti nep. na (x_0-a, x_0+a) .

No 3. o cypelnojennym nep. op-uu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x, f(x))}{f'_y(x, f(x))} - \text{nep.} \quad \text{UTA}$$

Teorema (адызы)

- ① Рассмотрим $n+1$ неизвестных $F(x_1, \dots, x_n, y)$ непр. гладкое. Имеем $\partial F/\partial x_i(x^*, \dots, x_n^*, y^*) = 0$, $F'(x^*, \dots, x_n^*, y^*) \neq 0$. Тогда \exists нахождение y в \mathbb{R}^{n+1} :
- $$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n, y^* - \beta < y < y^* + \beta\},$$
- и имеем $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \dots, x_n)$.
- ② F непр. гладкое. Имеем $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n\}$, имеем в Π'
- $$f'_i = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_{y}(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i=1, \dots, n.$$

Доказательство:

① Док. равене, Тогда $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

② Докажем:

Пусть γ . Аддитивна грд g в \mathbb{R}^{n+1} .

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1 + \alpha x_1, \dots, x_n + \alpha x_n, y + \alpha y) - F(x_1, \dots, x_n, y) = \\ &= F'_{x_1}(x_1 + \frac{\alpha}{3} \Delta x_1, \dots, x_n + \frac{\alpha}{3} \Delta x_n, y + \frac{\alpha}{3} \Delta y) \Delta x_1 + \dots + \\ &\quad F'_{x_n}(x_1 + \frac{\alpha}{3} \Delta x_1, \dots, x_n + \frac{\alpha}{3} \Delta x_n, y + \frac{\alpha}{3} \Delta y) \Delta x_n + \\ &\quad F'_{y}(x_1 + \frac{\alpha}{3} \Delta x_1, \dots, x_n + \frac{\alpha}{3} \Delta x_n, y + \frac{\alpha}{3} \Delta y) \Delta y \\ \Delta y &= -\frac{F'_{x_1} \Delta x_1 + \dots + F'_{x_n} \Delta x_n}{F'_{y}} \leq \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\beta} = M_g \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i, |F'_{y}| \geq \beta) \end{aligned}$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ паджн. непр. на Π'

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Рассмотрим $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \frac{\alpha}{3} \Delta x_1, x_2, \dots, x_n, y + \frac{\alpha}{3} \Delta y)}{F'_{y}(x_1 + \frac{\alpha}{3} \Delta x_1, x_2, \dots, y + \frac{\alpha}{3} \Delta y)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \dots = -\frac{df}{dx_1}, \quad \text{аналогично для } x_2, \dots, x_n.$$

Чтож.

§ 2 Teorema o one-me neblivim p-ii

Dnach. $u = u(x)$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad - \text{gugup - q-p-ii}$$

Marginalna deriva - $D_u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

Esim. ona kladymas, kai cyp - et apiegiavimas - deriva.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

Teorema (o mese)

Prym. $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ neyp-gugup-q-p-ii & aps-ii
 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Torga $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{cases} F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{y} = f(\bar{x}), \text{ apriein q-p-ii}$$

$y_i = F_i(\bar{x})$, $i=1 \dots m$ - neyp-gugup. na

$$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$$

§ 3. Teorema apie svaranam apibraneniu.

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, gugup.

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x})$$

Biamo gurejano: eim $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, Torga

$$D_{F \circ \Phi} = D_F \cdot D_\Phi.$$

Esim. eim $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$, to

$$D_{F\Phi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\Phi|_{\bar{x}}$$

Пусть $n=m=p$, тогда

$$J_{F\Phi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\Phi|_{\bar{x}}$$

Однозначні симбр.:

$$\Phi: G \rightarrow D \quad D \subset R^n$$

$$\Phi^{-1}: D \rightarrow G$$

$$\Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \Phi - \text{бінарній симбр.}$$

$$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1} - \text{если оно дифер.!}$$

Если симбр. диференційовна в груп., то однозначні симбр. не одержані для груп.!

$n=1$:

$$y=x^3 - \text{дискр., дифер.}$$

однозначні непарні. & т. д.

Бінарній симбр.

$$\begin{matrix} \cancel{x} \\ \cancel{x} \end{matrix}$$

$$\boxed{J \neq 0}$$

Опрац.

Симбр. Φ - існує однозначні симбр. в окні G , якщо $\forall \bar{x}_0 \in G \rightarrow \exists \delta > 0$; Φ однозначні в $U_\delta(\bar{x}_0)$.

Теорема щодо однозначності симбр.-ів

Пусть $\Phi: G \rightarrow R^n$ непр. дифер. в $J_\Phi \neq 0 \& G \subset R^n$. Тогда Φ існує однозначні симбр.

$\forall x_0 \in G \rightarrow \exists \Phi^{-1}$ - непр. дифер. симбр. в $y_0 = \Phi(x_0)$.

Д-бо:

$$\text{Роз-вм } F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j, \quad j=1 \dots n$$

$$(y, x) \in R^{2n}$$

Оно непр. дифер. $\forall (y, x) \in R^{2n}$ також, що $x \in G$, $y \in R^n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y, x_0)$$

Із т. є окні непр. дифер. $\exists \Pi = \{(y, x) \in R^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

б к-пом

$$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$$

F_i непр. функц. на $\Pi' = \{y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i\} \subset R^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ динамично отображает нен-е мн-ло $X \subset R^n$ на Π' .

$$x = \Phi^{-1}(\Pi')$$

Π' - отр. мн-ло, наимн. праобраз отр. мн-ла или непр. отр. един. отр. мн-ло \Rightarrow

$\Rightarrow X$ - отображение



$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset X$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists U_\delta(x_0) \text{ б к-пом отр. гл-о отображения.} \quad \text{УГД}$$

§ 4. Экстремумы ф-ии нескольких переменных

Опт-е

$x^* \in R^n$ наз-ся локальн. макс. локального экстремума ф-ии $y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x^*) \geq f(x) \forall x \in U_\delta(x^*) \text{ и } \forall x \in U_\delta(x^*) \rightarrow f(x) > f(x^*)$

Аналогично для мин. лок. экстр.

Несобственное ум. локального экстремума

Если $f(x)$ непр. в x^* и x^* гл-о лок. экстр., то $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \quad (\text{стационарное условие})$$

П-ло:

Рассмотрим ф-ию $\varphi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Тако, что x_i^* - лок. экстремум токо по одн. x_i . Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{Аналогичные выражения}$$

УГД

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j$$

Норм. опр.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) > 0$

Опим. опр.: $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) < 0$

Ненорм.: $\exists x_1, x_2: K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Ненорм. насыщ.: $\forall x \rightarrow K(x) \geq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Опим. насыщ.: $\forall x \rightarrow K(x) \leq 0, \exists x \neq 0: K(x) = 0$

Если $K(x) \equiv 0$, то она назн. и опим. насыщ., также ненорм. сущ. нет.

Рассл. f глобаль непр. гладк. в $G \in \mathbb{R}^n$, т.е. unless все непр. гладкие
ненегат., опт. для τ .н. в парном насыщем сим. ($F''_{yx} = F''_{xy}$)

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(x^0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n F''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j - \text{кв. форма от. касательных } (dx_1, \dots, dx_n)$$

Дифференциалы и критерии экстремумов

Рассл. $f(x)$ глобаль непр. гладк. в $U_s(x^0)$ в x^0 -связ. форма. Тогда

$$K(x) = d^2 f(x^0) - \text{кв. форма. Тогда:}$$

1. если $K(x)$ норм. определяема, то x^0 - т. касательных не экстремум
2. если $K(x)$ опим. опред., то x^0 - т. касательных не экстремум
3. если $K(x)$ ненорм., то x^0 не тб-ся т. к. не экстремум
4. если $K(x)$ насыщ., то нынеш. точка неэкстремум

Лемма

Рассл. $K(x)$ в \mathbb{R}^n ненорм. опр., тогда $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \geq C|x|^2$

Если опим. опр., то $\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow K(x) \leq -C|x|^2$

Д-бо 1 доказ:

Задача, что $K(x)$ норм. определяется в окрестности R' , т.е. $K(x)$ - зонанс на бес-
конечн. симметрии не экстремумом.

$$K(x_1, \dots, x_n) - \text{непр. на } \mathbb{R}^n$$

$$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} - \text{опт. в замкнутой - ограниченной}$$

Тогда опт-на, непр. на замкнутой, огранич. инт на S .

$K(x) \geq 0$ na $S \Rightarrow \inf_s K = C > 0$.

$\forall x \in S \rightarrow K(x) \geq C$.

При $x \neq 0 \in R^n$. Рад-ун $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$$

$$K(x) \geq C |x|^2 \quad \text{УТА}$$

D-бо тапсару

1. $f(x)$ ғанаңын непр. грөзүп $\mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow$ ынанымалык жиындар (Редно):

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0) \rightarrow f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(|g|^2), \quad g^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$$
$$df \equiv 0 \rightarrow \text{сигеу.}$$

$d^2 f$ - нарам. орын.

Т.е. $f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} (|dx|^2 + o(|dx|^2)) =$

$$= f(x^0) + \frac{C}{2} |dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$$
$$= f(x^0) + |dx|^2 \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) \right)$$

$$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0 \quad \& \quad \mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0).$$

Т.е. x^0 - с. орындың ишкемдүүлүгү.

2. Анализмалык

3. $d^2 f(x^0)$ - неңб. кеб. сипатта.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$.

Рад-ун бекіспен нытандыру $dx = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ (нытандыру $\parallel z$)

$$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\left(\lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} \right)}_{\beta > 0} |z|^2$$

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$$
$$= f(x^0) + \frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2$$

$$\frac{1}{2} \beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0 \quad \text{нын жеңи маанин } \varepsilon(dx)$$

Т.е. $f(x) > f(x^0)$ на $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Анализмалык да $dx = \lambda z'$, то нын сипатта маанин $\varepsilon(dx)$ $f(x) < f(x^0)$.

x^0 - не с. ишкемдүүлүгү.

Пример: $z = x^4 + y^4$, $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$, сиңг. 1. $(0,0)$, $z''_x = 12x^2$, $z''_y = 12y^2$, $z''_{xy} = 0$, $d^2 z(0,0) = 0$.

Mayo conjecture $\Delta z(0,0)$: $z(\alpha x, \alpha y) - z(0,0) > 0$ then $\alpha x^2 + \alpha y^2 > 0$ - max. min.

§ 5. Установки (ориентации) экспрессии.

$$z = xy \quad (\text{csgos})$$

$$z_x' = y, \quad z_y' = x \quad (\text{gr. 1.} (0,0))$$

$$z_{xx}^1 = z_{yy}^1 = 0, \quad z_{xy}^{''} = 1$$

$d^2 z = \text{neur. ab. q.} - \text{neur. exp.}$

Given $y = x + z$, $x = z(1-z)$, so mod. is $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Onp

T. x^* nazywamy T. węzłem zgodnym opisanym $u = f(x_1, \dots, x_n)$ gdy dla każdego i mamy $\varphi_i(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0$,存在着 $\exists \delta > 0$: $\forall x \in U_\delta(x^*)$ mamy $f(x) > f(x^*)$

A eum nei, zo symmetrisch op- en terugdraaien.

Ngars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, Tonga qip-wa Marpanmaa $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 u_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_n u_n(x)$

Then both φ - λ change $L = f, \forall \lambda_i$. - you equip f in L cobragars.

Модификация ул-иэ since. экспрессия

Причес $f(x)$, $\varphi_i(x)$ ($i = 1 \dots n$) наз. генер. в $U_\delta(x^*)$. Причес x^* — р. оим. скрепы

$f(x)$ якщо $\varphi_i(x) = 0$, інакше $rg\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) = m$ (зображення φ_i умовно независимі).
 $i=1\dots m$
 $j=1\dots n$

Tогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: $x^* - r.$ одновременно экстремумы $L(x)$.

$$\text{Methode der} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases} \quad - \text{und } n+m \text{ Gleichungen } \Leftrightarrow n+m \text{ Werte,}$$

D - 69:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad \operatorname{rg} \Phi = m, \quad x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

Er muss nun genau $n = 0$. Das ergibt in 1-n nun:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{array} \right| \neq 0 \quad \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \neq 0 \text{ bei } x^* \Rightarrow \varphi \text{ ist } x^* \text{ eindeutig lösbar.}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ \psi_m(x_1, \dots, x_m, X_{m+1}, \dots, X_n) = 0 \end{cases} \quad \text{No T. Onechnai p-cm } \exists \text{ ovp-to } x^*, \text{ b k-poin} \\ \text{are na nekubasenina yek. sluzhi}.$$

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{matrix} x_{m+1}, \dots, x_n - \text{незав. ф-м} \\ x_1, \dots, x_m - \text{зависимые} \end{matrix}$$

9-и г. квадратичн. б. опр-ии $\tilde{x}^o = (x_{1+o}, \dots, x_n^o)$. Продолж. же. вез:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n & dx_1, \dots, dx_m - \text{zab. Gruppen - var} \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n & dx_{m+1}, \dots, dx_n - \text{negab. Gruppen - var} \end{cases}$$

При каком x значение $f(x)$ будет наибольшим?

$$f(x) \Big|_* = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = F_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_* = \mathcal{L}(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathcal{L}_*(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)|_*=f(x)|_*$$

$$L_\phi(\tilde{x}) = F_\phi(\tilde{x}) \quad \forall x;$$

$$d\mathcal{L}(\tilde{x}^*) = df_*(\tilde{x}^*) = 0 \quad (\text{T.R. zero norm outer gradient}) \quad \forall i$$

В any unbarmehnem gup - ic относ. замена переменной

$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^*) = d(\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}) = d\mathcal{L}(x)|_{\tilde{x}^*}$ - греческое обозначение
 (греческое обозначение введенное в определение)

$$d \mathcal{L}(x) \Big|_{x_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} dx_n$$

\swarrow \searrow

zaberechnen negativ

До сих пор λ_i -множ. Покажем λ_i так, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*) = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}(x^*) = 0$.

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \int \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i}(x^*) = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m}(x^*) = 0 \right.$$

- Cine-nă sun. zp-ni, ei arpej,!

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Bigg|_{x^0} \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ perm-e}$$

2: nāngenu.

Рынок равн. 2:1

$$dL_0(\tilde{x}^*) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) dx_m}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) dx_n}_{=0}$$

Но $dL_0(\tilde{x}^*) = 0$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0 \Rightarrow$ рыноч. равн. 2:1 x^* - стаб. точка.
 dx_{m+1}, \dots, dx_n - ненул.

УДА

Две проверки неодн. ус-я \Rightarrow однос. экстремуму можно пользоваться:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \psi_1 = \dots = \psi_m = 0 \end{array} \right. \quad \text{n+m уп-ий, n+m ненул.}$$

Дискриминантное критерий

Функции $f(x)$, $\psi_i(x)$, $i=1, \dots, m < n$ - гладкие непр. функц. с нулевыми производными по x_i , а также производные $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$, $i=1 \dots m$, $j=1 \dots n$ плавны в Т. x^* .

Функция $L(x)$ в x^* и λ_i , $i=1 \dots n$ удовл. ис-я (I). Тогда в Т. x^* плавные вблизи x^* производные $\left. \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x^*}$ - квадратичные вблизи x^* непр. функц. (однозначно ли это, это и бывает не очевидно).

Тогда если для определения локальных экстремумов функции f нужно вычислить $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x^*}$, то x^* - локальный экстремум f (если $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x^*}$ положительна), если же $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x^*}$ отрицательна - локальный минимум f .

Пример: Если $\left. \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x^*}$ - неотрицательна (квадратичная форма), то x^* - локальный минимум L .

Иначе функция L имеет локальный максимум $(**)$.

Если же $\left. \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x^*}$ квадратичная отрицательна, то x^* - локальный максимум L .

Пример:

$$f = xy \text{ при ус-и } x+y=1$$

$$L = xy + \lambda(x+y-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x=y=\frac{1}{2}$$

$$L_x'' = 0, \quad L_y'' = 0 \quad \text{d}^2 L = 2dx dy - \text{neomp. xb. gruppiert at dx, dy}$$

$$\text{Продиференцируем обе части: } dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$$

$d^2 L |_{x=0} = -2 dx^2$ - означ. отпълн. кв. квадрат от отриц. dx

Знайдіть $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ -тис. умову.

Copybara

d^2f не одн. и неб. определен в окне. Задача решимою;

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ - għamixx nemp. għixx.

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^n dx_k d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2x_k + \sum_{k=1}^n dx_k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \right) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2x_k \end{aligned}$$

Eine x_1, \dots, x_n - negat. reellenreelle, Tz $d^2 x_k = 0$

$$d^2f = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} dx_k + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Der zentrale Wert eines Extremes von χ^2 kann $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ für $k = 1, \dots, n$ gelten.

(b circu. 1.) - Квадрупедам носио спорни д'ф сине. Занеси исп-ти
b circu. Torne

P-B2

Соревнования по баскетболу и волейболу прошли в Краснодаре.

Dokumenten, z.B. $x_i = g_1(x_{n+1}, \dots, x_n)$
 \vdots
 $x_m = g_m(x_{n+1}, \dots, x_n)$ - gleichzeitig resp. grup. B o. exp.-fam \tilde{x}^0

$$\varphi_i(g_1(x_m, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

Программ. prob - бс no x-1

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial g_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \Psi_i}{\partial g_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i=1 \dots m$$

Наше существо j , $m+1 \leq j \leq n$ - это как-то связано с m . $y_j = y_m$ в m незав. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \text{Bsp: } -\pi \in \tilde{x}^\circ$$

Bspwam. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ resp $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$, zusammen $\neq 0$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} \text{ hemps - grupp.} \Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \text{ hemps - grupp.} \Rightarrow g_i - \text{gruppen} \text{ hemps - grupp.} \Rightarrow$$

\Rightarrow moment of inertia $d^2 c \cos^2 \theta p - 2m$

Всички изрази на производни $d^2 L(x^*)$ (без $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2}(x^*) = 0$)

$$d^2 L(x^0) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k \quad (\text{незав. от } x^0, \text{ т.е. } dx_j dx_k \text{ гипер-плоск. незав. непен-} \\ \text{норм. к ним гипер-плоск. оп-мин}).$$

$$L(x)|_x = L_0(\tilde{x}^0) \quad \text{б. аргумент.}$$

$$d^2 L_0(\tilde{x}^0) = d^2(L(x^0)|_x) \stackrel{\text{д}}{=} d^2 L(x^0)|_{**} \\ \text{!! б. арг. гипер-плоск. оп-мин н-н непен-бл.} \quad \text{б. арг. гипер-плоск. оп-мин н непен-бл.}$$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = dL_0(\tilde{x}^0) = dL(x^0)|_{**} = 0 \quad (\text{б. арг. асе-мин I}) \Rightarrow \tilde{x}^0 - \text{стаци. т. } f_0(\tilde{x}^0)$$

Характер экстремума в точке т. оптим. гл. условий

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 L(x^0)|_{**}$$

Характер экстремума оптим. условиям. точек оптим.

УТД

Глава XIX

Кратные интегралы

§ L Определение. Критерий интегрируемости Дордь.

Прим. G - измеримое мн-во, $G \subset R^n$, $G \neq \emptyset$.

R - разбиение G на конечн. изм. мн-ва G_i : $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$.

$$\forall i \neq j \rightarrow \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

Максим. разбиение $|R| = \max_{i=1 \dots N} \operatorname{diam} G_i$

График, т.е. $f(x)$ опр. на G . Расс-ии $M_i = \sup_{G_i} f(x)$, $m_i = \inf_{G_i} f(x)$

Оп-е

Верхнее и нижнее суммы Дордь:

$$S_a^* = \sum_{i=1}^N M_i \mu G_i, \quad S_{*a} = \sum_{i=1}^N m_i \mu G_i$$

Сумма Римана

$$\forall i=1 \dots N \rightarrow \xi_i \in G_i$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu G_i$$

Две гранич. R_a : $S_{*a} \leq \sigma_a \leq S_a^*$.

Коэффициент оп-ии

$$\omega_a = S_a^* - S_{*a} = \sum_{i=1}^N \omega_i \mu G_i, \quad \omega_i = M_i - m_i$$

Равнение R_2 сильнее за R_1 . ($R_2 \geq R_1$) \Leftrightarrow

$R_1: G = \bigcup_{i=1}^n G_i, \quad \forall G_i$ - однозначное пакетание из G ;

$R_2: G = \bigcup_{j=1}^{n'} G_j$

Упр

Если $R_2 \geq R_1$, то

$$S_{R_2}^* \leq S_{R_1}^*, \quad S_{*R_2} \geq S_{*R_1}, \quad \omega_{R_2} \leq \omega_{R_1}$$

