

ОДΥ - обыкновенные дифференциальные уравнения

ОДΥ в одн. члене

$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ - обыкновенные - производные по одной переменной (x)

Расс-умим см-ммы:

$$\begin{cases} F_1(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Ур-я 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

- Еще раз: ур-я 1-го порядка, переменные отс-е. произ-е:

$$\left. \begin{aligned} y' &= F(x, y); & dy &= dF(x, y) dx \\ P(x, y) dy + Q(x, y) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ур-я в групп. форме}$$

- Условие выр-я: ур-я с раздельными переменными

$$F(x) dx + g(y) dy = 0; \text{ решение:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx \quad G(y) = \int g(y) dy$$

$$dF(x) + dG(y) = 0$$

$$d(F(x) + G(y)) = 0$$

$$F(x) + G(y) = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \int f(x) dx + \int g(y) dy = 0$$

С2 №4

$$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{y(1+y)} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\ln \left| \frac{y}{(1+y) \cos x} \right| = C_3$$

$$\frac{y}{(1+y) \cos x} = \pm e^{C_3} \quad C \in \mathbb{R} \quad (C=0 - \text{ тоже решение!})$$

$$\frac{y}{(1+y) \cos x} = C \quad \text{или} \quad y = -1 \quad (\text{решение тривиальное, когда мы делим!})$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{(1+y) - y}{y(1+y)} dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} \right) dy = \ln \left| \frac{y}{1+y} \right| + C_1$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C_2$$

$$y = \frac{C \cos x}{1 - C \cos x}$$

Ф № 67 *

$$3y^2 y' + 16x = 2xy^3 \quad \text{Найти } y(x) - \text{оп. в } U(+\infty)$$

$$3y^2 y' = 2x(y^3 - 8)$$

$$\int \frac{3y^2 dy}{y^3 - 8} = \int 2x dx \quad - \text{положим } y^3 = 8$$

$$\ln |y^3 - 8| = x^2 + C,$$

$$y^3 - 8 = \pm e^{C_1} e^{x^2}$$

$C \in \mathbb{R}$ (в т.ч. 0! $y^3 = 8$ тоже реш.)

$$y^3 - 8 = C e^{x^2}$$

$y(x)$ - оп. при $C = 0$.

Ортогональные траектории

Расс-им 2 ортогональные прямые:



$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$k_2 = \tan \varphi_2 = \tan(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -\cot \varphi_1 = -\frac{1}{\tan \varphi_1} = -\frac{1}{k_1}$$

$$k_1 k_2 = -1 \quad y \perp \text{прямая.}$$

Пусть им. гр-е:

$$y' = F(x, y)$$

Ортогональные траектории:

$$y' = -\frac{1}{F(x, y)}$$



- взаимно ортогональные кривые гр-е (основные траектории)

Пример

$y = Cx^2$ - семейство кривых. Найти ортотр. траектории.

$$C = \frac{y}{x^2}$$

$$0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}$$

$$y'x^2 = 2xy$$

$$y' = 2 \frac{y}{x}$$

Далее опр-е. уравн: $y' = -\frac{x}{2y}$

$$2y dy + x dx = 0$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C \quad - \text{гип-е эллипсов}$$



Однородные уравнения

Сводится к гп-ю с разделимыми переменными

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Замена: $y = x z(x)$

$$y' = z + x z'$$

$$x z' + z = f(z)$$

$$z' + z - f(z) = 0 \quad \left(\frac{dz}{z - f(z)} + dx = 0 \right)$$

гп-е, сводящееся к однородному

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Замена: $x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0$

$$= 0 \quad (\text{в нуль выдвигая } x_0, y_0)$$

$$\eta' = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta + \overbrace{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}^{=0}}{a_2 \xi + b_2 \eta + \overbrace{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}^{=0}}\right)$$

Получим однородное гп-е

Ф. № 117

$$(y+2) dx = 2x+y-4 dy$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \quad - x_0, y_0$$

$$x = \xi + 3 \quad y = \eta - 2$$

$$\eta d\xi = (2\xi + \eta) d\eta$$

$$\frac{\eta}{\xi} = z$$

$$z \xi d\xi = (2\xi + z\xi)(z d\xi + \xi dz)$$

$$(z\xi - z(2\xi + z\xi)) d\xi = \xi \cdot (2\xi + z\xi) dz$$

$$z\xi(1-2-z)d\xi = \xi^2(2+z)dz \quad | \quad \xi=0 \text{ - не переносим}$$

$$-z(1+z)d\xi = \xi(2+z)dz$$

$$-\frac{d\xi}{\xi} = \frac{z+z}{z(z+1)} dz$$

$$-\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$\frac{z^2}{z+1} \cdot \xi = C$$

$$\frac{y^2}{y+z} = C \Rightarrow \frac{(y+z)^2}{y+x-1} = C \Rightarrow \int_{x+y=1} (y+z)^2 = C(y+x-1) \quad (\text{не переносим } x+y=1)$$

Линейное ур-е I порядка

$$y' + a(x)y = b(x) \quad - \text{ неоднородное}$$

Решим линейное однородное ур-е:

$$y' + a(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + a(x)dx = 0$$

$$\ln|y| + \int a(x)dx = 0$$

$$y = C_0 e^{-\int a(x)dx} \quad \leftarrow \text{общее решение}$$

$$y = C_0 \varphi(x) \quad - \text{свободное решение однородного ур-я; } \varphi(x) - \text{частичное решение}$$

Метод вариации постоянной: (C - ищем на q-ном)

Занема $y = C(x) \cdot \varphi(x)$ в неоднородном ур-ии:

$$C' \varphi + C \varphi' + a C \varphi = b$$

$$C' \varphi + C \underbrace{(\varphi' + a \varphi)}_{=0 \text{ (}\varphi\text{-реш-е однород. ур-я)}} = b$$

$$C'(x) \varphi(x) = b(x) \quad - \text{ур-е с разд. переменными}$$

C 3.37

$$x^2 y' = 5xy + 6, \quad y(1) = 1$$

$$\text{Решим однородное: } x^2 y' = 5xy$$

$$\frac{dy}{y} = 5 \frac{dx}{x}$$

$$y = x^5 C_0 \quad | \quad y(x) = C_0(x) x^5$$

$$x^2 (C' x^5 + C 5 x^4) = 5 x C x^5 + 6$$

$$C' = \frac{6}{x^7} ; \quad C = -\frac{1}{x^6} + D$$

$$y = \left(-\frac{1}{x^6} + D\right) x^5 \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + D x^5 \text{ - pem-e}$$

$$y(1) = 1 ; \quad 1 = -1 + D \Rightarrow D = 2$$

$$y = -\frac{1}{x} + 2x^5$$

Nº 1

$$xy' - 2y = 2x^4$$

$$\text{OY: } xy' - 2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + C$$

$$y = C x^2$$

$$\text{BN: } y = C(x) x^2$$

$$x [C' x^2 + 2C x] - 2C x^2 = 2x^4$$

$$C' x^3 = 2x^4$$

$$C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C$$

$$y = (x^2 + C) x^2 = x^4 + x^2 C$$

Nº 2

$$\text{Bez BN: } xy' - 2y = 2x^4 \quad | \cdot x$$

$$x^2 y' - 2xy = 2x^5$$

$$\frac{x^2 y' - 2xy}{x^4} = 2x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C \Rightarrow y = x^4 + C x^2$$

- Отличные могут давать так: переобозначим всё так, чтобы получилось каноническое уравнение. (См. БП)

- Можно переобозначить y и x в групповом уравнении:

$$(1+y^2) dx + (2xy - 1) dy = 0$$

$$(1+y^2) \frac{dx}{dy} = 1 - 2xy \quad \text{— ум. гр-е}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

$$OY: \frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$$

$$x = \frac{C}{1+y^2}$$

$$BП: x = \frac{C(y)}{1+y^2}$$

$$\text{Ответ: } C(y) = y + C, \quad x = \frac{y+C}{1+y^2}$$

Уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad \text{— приводится к линейному!}$$

$$n=0 \rightarrow ЛУ$$

$$n > 0 \Rightarrow y=0 \text{ — реш.}$$

$$n=1 \rightarrow ОЛУ$$

$$n < 0 \Rightarrow y=0 \text{ — не реш.}$$

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$$

$$\text{Замена: } z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n)y^{-n} y' = (1-n) \frac{y'}{y^n}$$

$$\text{Получим } (1-n)z' + a(x)z = b(x) \quad \text{— ЛУ}$$

№ 4

$$y' - y + 2xy^3 = 0 \quad | \quad y=0 \text{ — реш.}$$

$$2x = \frac{z'}{z} + z$$

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$$

$$z = \frac{1}{y^2} \quad z' = -\frac{2}{y^3} y'$$

$$OY: \frac{dz}{dx} + 2z = 0$$

$$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow z = C e^{-2x}$$

$$BП: z = C(x) e^{-2x}$$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x$$

$$C'(x) = 4xe^{2x}$$

$$C(x) = \int 4xe^{2x} dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$$

$$\frac{1}{y'} = (2xe^{2x} - e^{2x} + C) \cdot e^{-2x}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y' = ((2x-1) + Ce^{-2x})^{-1} \\ y = 0 \end{cases}$$

Уравнение Рундкату

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$$

Пусть y_0 - решение

$y = z + y_0$ z - новая неизв. ф-ия \Rightarrow ур-е Бернулли

№5

$$x^2 y' - 5xy + x^2 y^2 + 8 = 0$$

$$y_0 = \frac{k}{x}$$

$$- \frac{x^2 k}{x^2} - \frac{5xk}{x} + x^2 \frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$$

$$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$$

$$k=2, k=4$$

Сделаем замену $y = z + \frac{2}{x}$:

$$x^2 \cdot (z' - \frac{2}{x^2}) - 5x(z + \frac{2}{x}) + x^2(z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2}) + 8 = 0$$

$$x^2 z' - z x + x^2 z^2 = 0 \quad | : x$$

$$x z' - z + x z^2 = 0$$

$$\frac{z' x - z}{z^2} = -x \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)' = x$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow \frac{x^2}{xy-2} = \frac{x^2}{2} + C; y = \frac{2}{x}$$

Уравнение в полных дифференциалах

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad - P \text{ и } Q \text{ непр.}$$

$$\text{Пусть } P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y) \quad - F \text{ непр. групп. в } G \subset \mathbb{R}^2$$

$$\exists F: P = \frac{\partial F}{\partial x}, Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\text{Реш-е: } F(x,y) = C \quad (\text{т.е. } F - \text{потенциал})$$

Пусть F - глобальн. непр. групп. в G :

$$\text{Если } \exists P = \frac{\partial F}{\partial x}, Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

- должны быть равны!

- необходимо, чтобы была потенциальная

Условие эквивалентно, если область G односвязна.



№6

$$(1 + 3x^2 \ln y) dx + (3y^2 + \frac{x^3}{y}) dy = 0$$

$G = [y > 0]$ - односвязна

$$\exists F: \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

Можно угадать, но если нет:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 3x^2 \ln y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \frac{x^3}{y} \end{cases} \xrightarrow[\text{по } x]{\text{интегрируем}} \begin{aligned} F &= x + x^3 \ln y + C(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C \\ F &= x + x^3 \ln y + y^3 \end{aligned}$$

Интегрирование по частям

Если потенциальности сразу нет:

$$\mu P = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad - \text{надо решить их друг по другу - конечно, так никак не получится.}$$

№7

$$(y - 3x^2 y^3) dx - (x + x^3 y^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 9x^2 y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 3x^2 y^2 \quad - \text{не равны}$$

$$y dx - x dy - 3x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy = 0 \quad | y=0 - \text{реш}, x=0 - \text{реш}$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = 3x^2 y dx - x^3 dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x^3 y) \Rightarrow \frac{x}{y} = x^3 y + C; \quad y=0; \quad x=0.$$

Уравнения высшего порядка

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ - надо понизить порядок! возможно при $y^{(n)} \neq 0$ нет реш!

Методы понижения порядка

① Нет явного y : $y' = z$, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \rightarrow F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$

$$xy'' + xy'^2 + y' = 0, \quad y' = z; \quad y = \text{const} - \text{реш.е}$$

$$xz' + xz + z = 0 \quad | : x \neq 0 \text{ где упрощаю}$$

$$x \frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0, \quad \frac{1}{z} = u$$

$$-xu' + x + u = 0 \quad | : x^2$$

$$\frac{u - xu'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = \ln x + C, \quad \frac{1}{zx} = \ln x + C$$

$$z = y' = \frac{1}{x(\ln x + C)}$$

$$y = \int \frac{dx}{x(\ln x + C)} = \ln |\ln x + C| + C_1$$

$$\begin{cases} y = \ln |\ln x + C| + C_1 \\ y = \text{const} \end{cases}$$

② y'' - е без явного x

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0; \quad y - \text{новая независ. переменная}$$

$$y' = z(y) - \text{новая ф-ца}$$

$$y'' = (y'_x)' = (y'_y)' \cdot y'_x = z \cdot z'_y$$

$$y''' = (y''_{xx})' = (y''_{xy})'_y \cdot y'_x = (z \cdot z'_y)'_y \cdot y'_x = (z'^2_y + z \cdot z''_{yy}) z = z \cdot z'^2_y + z^2 z''_{yy}$$

Пример

$$yy'' = zy'^2 - 4y^2y'^3 \quad y' = z(y) \quad y'' = zz'$$

$$yzz' = 2z^2 - 4y^2z^3 \quad | : z$$

$$z = 0 - \text{реш.е}$$

$$y = C$$

$$yz' = 2z - 4y^2z^3 \quad | : z^2$$

$$\frac{y}{z^2} z' = \frac{2}{z} - 4y^2 \quad \frac{1}{z} = u \quad u' = -\frac{1}{z^2} z'$$

$$-yu' = 2u - 4y^2$$

$$\text{ОУ: } 2u + yu' = 0$$

$$\ln |u| = -2 \ln |y| + C$$

$$2u = -\frac{du}{dy} y$$

$$u = \frac{C}{y^2}$$

$$\frac{dy}{u} = -2 \frac{dy}{y}$$

$$\text{ВП: } u = \frac{C(y)}{y^2}$$

$$\frac{-C'(y)y^2 + 2yC(y)}{y^3} = 2\frac{C(y)}{y^2} - 4y^2$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + C \Rightarrow u = \frac{y^4 + C}{y^2} \Rightarrow z = \frac{y^2}{y^4 + C}$$

$$y' = \frac{y^2}{y^4 + C}$$

$$\left(y^2 + \frac{C}{y^2}\right) dy = dx$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{C}{y} = x + C_1$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} \frac{y^3}{3} + \frac{C}{y} = x + C_1 \\ y = C \end{cases}$$

Задача Коши для ур-я n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

2 способа решения

1. Найти общее решение $\in C_1 \dots C_n$, подставить в нач. ур-я, получить систему из n ур-ий $\in n$ неизв.

2. Подставить константы постепенно, после каждого понижения порядка

Пример

$$yy'' - y'^2 = y^4$$

$$yzz' - z^2 = y^4$$

$$y \cdot \frac{u'}{2} - u = y^4$$

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = -4$$

$$y' = z(y)$$

$$u = z^2, \quad u' = 2zz'$$

$$\text{ДУ: } y \frac{du}{dy} = zu$$

$$\text{ВП: } u = C(y) \cdot y^2$$

$$\frac{du}{u} = \frac{zdy}{y}$$

$$u = y^2 C$$

$$\frac{y}{2} \cdot (C'(y) \cdot y^2 + 2yC(y)) - C(y)y^2 = y^4$$

$$C'(y) = 2y$$

$$C(y) = y^2 + C$$

$$u = y^2 + Cy^2$$

$$z(2) = -4$$

$$y' < 0 \text{ в т. } x=1$$

$$16 = 16 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y' = -y^2$$

$$z^2 = y'$$

$$\frac{dy}{y^2} = -dx$$

$$y' = \pm y^2$$

$$\frac{1}{y} = x + C_1$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Отв.: } \frac{1}{y} = x - \frac{1}{2}$$

③ y - е, однородное урав. $y, y', \dots, y^{(n)}$

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ - однородный интеграл урав. $y, y', \dots, y^{(n)}$
с коэф-тами $F_i(x)$

$y = 0$ - всегда реш-е!

Пример 1

$$(\sin x + 1)y^2 y' y''^3 - \sqrt{1-x^2} y^4 y''^2 + \arctg x y y' y'' y'''^3 = 0 \quad | \quad y = 0 - \text{реш-е}$$

$$\frac{y'}{y} = z \quad y' = zy \quad y'' = y(z' + y'z) = y(z' + z^2)$$

$$y''' = y'(z' + z^2) + y(2zz' + z'') = yz(z' + z^2) + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

После подстановки в урав-е - свод-е на y

Пример 2

$$yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0 \quad y = 0 \text{ реш-е}$$

$$z = \frac{y'}{y} \quad y' = zy \quad y'' = y(z' + z^2)$$

$$y^2(z' + z^2) - z^2 y^2 + y^2 \sin x = 0$$

$$z' + z^2 - z^2 + \sin x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow z = \cos x + C = \frac{y'}{y}$$

$$\ln |y| = \sin x + Cx + C_1$$

$$y = C_1 e^{\sin x + Cx}$$

Задача Коши

$$2xy^2y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y' \quad y(1) = y'(1) = -1$$

$y=0$ - не пем-е, но не пем-е задача Коши

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z')$$

$$2xy^3(z^2 + z') - 2xy^3z^2 + 2xy^3z^3 = y^3z - \text{гаснемо коефіцієнти } y!$$

$$2xz^2 + 2xz' - 2xz^2 + 2xz^3 = z \quad - \text{гаснемо } z^2 \text{ - то } z'!$$

$$2xz' + 2xz^3 = z \quad \left| \begin{array}{l} z=0 - \text{не пем-е Коши} \\ z^3 \end{array} \right. \quad z(1) = 1$$

$$2x \frac{z'}{z^3} + 2xz = \frac{1}{z^2} \quad u = \frac{1}{z^2} \quad u' = -2 \frac{z'}{z^3}$$

$$-xu' + 2x = u$$

$$(u + xu') = 2x$$

$$(xu)' = 2x$$

$$xu = x^2 + C \quad u(1) = 1$$

$$1 - 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u = x$$

$$z^2 = \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln |y| = 2\sqrt{x} + C$$

$$0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\ln |y| = 2\sqrt{x} - 2$$

$$|y| = e^{2\sqrt{x} - 2}$$

$$y = -e^{2\sqrt{x} - 2}, \quad y(1) = -1 \Rightarrow y < 0$$

④ Однорідна однорідність

Питання $\exists k \in \mathbb{R}$: при заміні x на λx , y на $\lambda^k y$, y' на $\lambda^{k-1} y'$, ..., $y^{(n)}$ на $\lambda^{k-n} y^{(n)}$, то всі коефіцієнти c λ скорочуються (якщо не узгодяться)

Вже тоді потрібно визначити пер. t та оп-цію $z(t)$:

$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0, \\ -e^t, & x < 0, \end{cases} \quad y = z e^{kt} \quad (z x^k)$$

Тоді y - не буде містити явно t . (n.2)

Пример (7.65 a, d)

$$x^2 y'' + 2x^2 y y' + 2x y^2 - 2y = 0 \quad y(1) = -1 \quad y'(1) = 1$$

$$x \rightarrow \lambda x \quad y \rightarrow \lambda^k y \quad y' \rightarrow \lambda^{k-1} y' \quad y'' \rightarrow \lambda^{k-2} y''$$

$$\lambda^2 x^2 \lambda^{k-2} y'' + 2 \lambda^2 x^2 \lambda^{2k-1} y y' + 2 \lambda x \lambda^{2k} y - 2 \lambda^k y = 0$$

$$2+k-2 = 2+2k-1 = 1+2k = k$$

$$k = 2k+1 = 2k+1 = k$$

$$k = -1$$

$$x = e^t, \quad y = z e^{-t}$$

$$y, \quad y_x, \quad y_{xx} \quad \text{выр. через } z, \quad z', \quad z''$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z' e^{-t} - z e^{-t}}{e^t} = e^{-2t} (z' - z)$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(z'' - z') e^{-2t} - 2(z' - z) e^{-2t}}{e^t} = e^{-3t} (z'' - z' - 2z' + 2z) = e^{-3t} (z'' - 3z' + 2z)$$

$$e^{2t} \cdot e^{-3t} (z'' - 3z' + 2z) + 2e^{2t} \cdot z \cdot e^{-t} \cdot e^{-2t} (z' - z) + 2e^t \cdot z^2 \cdot e^{-2t} - 2z e^{-t} = 0$$

$$z'' - 3z' + 2z + 2z z' - 2z^2 + 2z^2 - 2z = 0$$

$$z'' + z' (2z - 3) = 0$$

$$x=1, \quad y=-1, \quad y'=1 \Rightarrow t=0, \quad z=-1, \quad z'=0$$

$z = -1$ — решение задачи Коши! И по т. о задаче Коши оно единственно.

Теорема о существовании и единственности р-н-а задачи Коши

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

f непрерывна в окр-ти $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Тогда р-н-е з. Коши $(*)$ + усл-я $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

сущ-ет и единственно на не-ом $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

