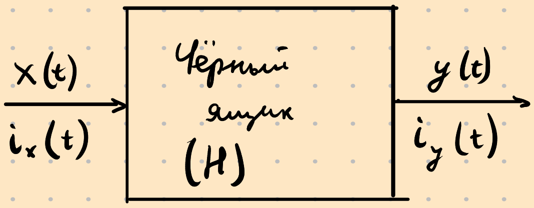
Филатов Иван Васильевич

Введение



- Все ящики не описать
- Рас-иваем только линейные и стационарные

Линейность: $\left.\begin{array}{l} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Стационарность: $x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t+\Delta t) \to y(t+\Delta t)$

Чёрный ящик описывается:

- схемой
- набором параметров H

Любая сис-ма, составленная из RLC, яв-ся линейной и стационарной.

Топологические эл-ты

Ветвь - участок эл. цепи, вдоль к-рого протекает один и тот же I. Может состоять из ≥ 1 идеализированных двухполюсника.

Узел - место соединения ветвей

Неустранимый - > 2 ветвей   Устранимый - 2 ветви

Контур - любой замкнутый путь, проход. по неск-им ветвям цепи.
Характериз. направлением обхода, каждая ветвь/узел проход. 1 раз

Относ. них можно записать:

Компонентные ур-я - свойства цепи, опред. её компонентами

Топологические ур-я - свойства цепи, опред. только её топологией

Правило Кирхгофа

- Закон сохр-я заряда
- Провода не накапливают заряд (узлы)

I закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных знач-ий токов всех ветвей, подключ. к каждому из узлов в любой момент времени, равна 0.

$\sum_k i_k = 0.$

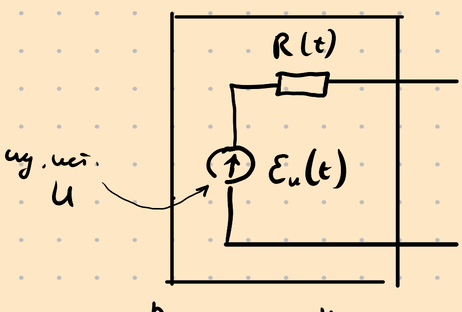
- Потенциальность эл. поля
- Консервативность эл. сил
- Поток вектора $\vec{B}$ во времени в схеме не изменяется (не считая особых эл-ов)

II закон Кирхгофа

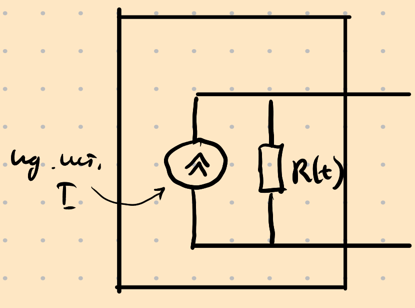
Алг. сумма мгновенных знач-ий напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, равна 0.

Теорема об эквивалентном генераторе

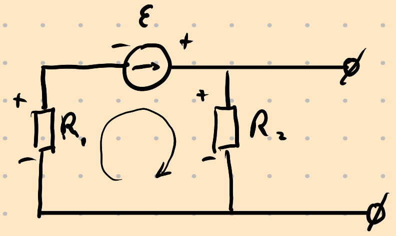
Ток произвольной ветви линейной эл. цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к к-му подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линеаризированным источником энергии, к-рый может быть представлен последовательной (Тевенин) или параллельной (Нортон) схемой замещения. При этом ЭДС идеального источника напряжения равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника, ток идеального источника тока равен току КЗ автономного двухполюсника, а внутреннее сопротивление и проводимость экв. источника равны соотв. комплексным входным сопрот. и проводимости автономного двухполюсника.



Парал. - Нортон



Послед. - Тевенин



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2}; \quad \underset{\text{холостого хода}}{U_{xx}} = -IR_2 = -\frac{\mathcal{E}R_2}{R_1+R_2}$$

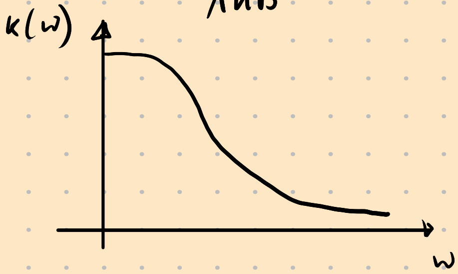
Заменяем идеализированный ист. ЭДС на перемычку или идеализированный ист. тока на разрыв цепи, считаем сопротивление схемы, получаем выходное сопротивление генератора.

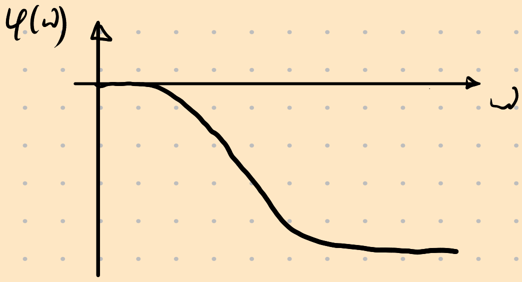
Это работает только с независимыми источника. Для зависимых придётся составлять сис-му ин-ур-ий (разберись с этим)

Частотный анализ характеристик цепей

$I\cos(\omega t) \to$ $\boxed{\text{линейный четырёхполюсник}}$ $\to k(\omega)\cdot\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

ЛИВ

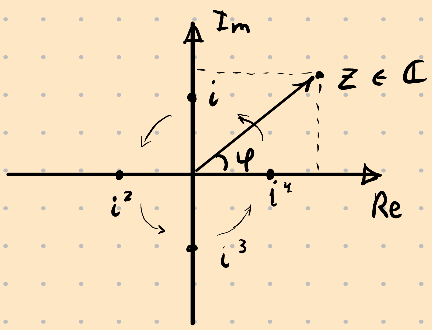




$k(\omega)$ - АЧХ $\qquad \varphi(\omega)$ - ФЧХ

Самое полное описание схемы!

Тригонометрия неудобна - переходим к комплексным



$$z = |z|\cos\arg z + i|z|\sin\arg z \quad (\varphi = \arg z)$$

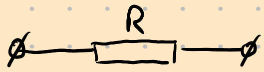
$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

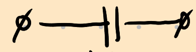
$$z = |z|e^{i\arg z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$\cos\omega t + i\sin\omega t \to$ $\boxed{\text{ЛИВ}}$ $\to k(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (\dots)i\sin(\dots)$

1 

$$I = \frac{U}{R} \qquad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$$

2 

$$I = C\frac{dU}{dt} \qquad \tilde{I} = C\frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C\tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{\text{импеданс}}}$$

3 

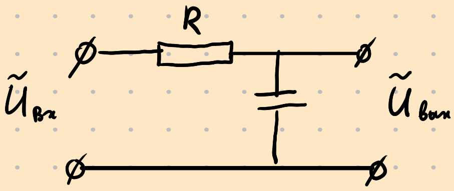
$$U = L\frac{dI}{dt} \qquad \tilde{U} = j\omega L\tilde{I}, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{j\omega L}$$

Импеданс – комплексное сопротивление (Z) $\qquad$ $j = i$ в радиотехнике

Комплексная проводимость – Y

Линейные цепи 1 порядка

1 Интегрирующая RC – цепь



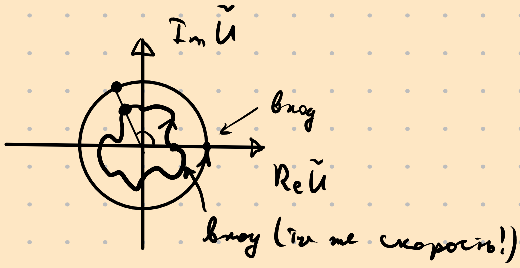
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \qquad \tilde{U}_{вых} = \tilde{I}\cdot\frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{j\omega RC + 1}$$

$$\tilde{U}_{вых} = \frac{\tilde{U}_{вх}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2R^2C^2}$$

Что будет, если на вход подать $\cos\omega t$?

$$U_{вых} = Re(\tilde{U}_{вых}) = (\cos\omega t + \sin\omega t\cdot\omega RC)\cdot(1+\omega^2R^2C^2)^{-1}$$

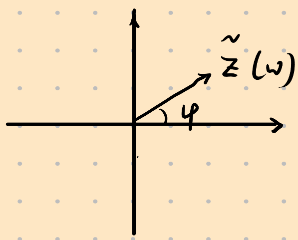
Аналитический сигнал: $\cos\omega t + i\sin\omega t$



$$K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2R^2C^2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{A_0\cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0\cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0}\cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0}e^{j\varphi}$$



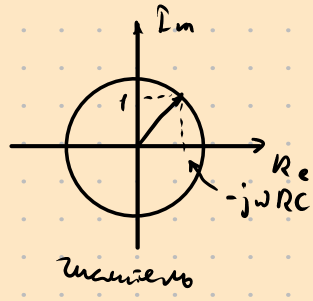
Получаем точку Z – сдвиг фаз – аргумент, модуль – соотношение амплитуд

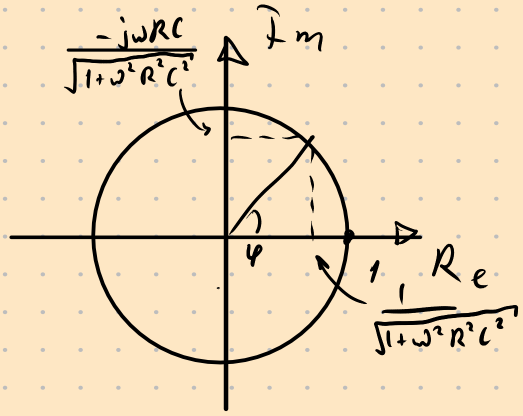
Чтобы найти их, нужно из $K(\omega)$ выделить вещ. действ. часть и вещ. комплексную

комплексная причем должна иметь модуль 1 (это $e^{j\varphi}$).

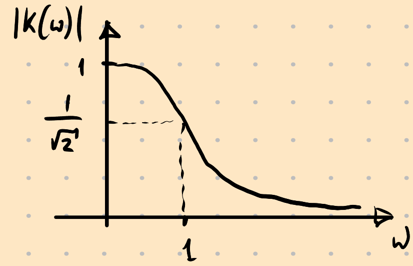
$$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2R^2C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2R^2C^2)^{-1/2}$$

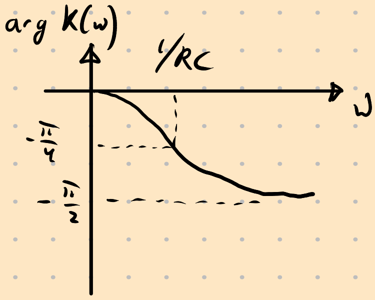
$$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}$$



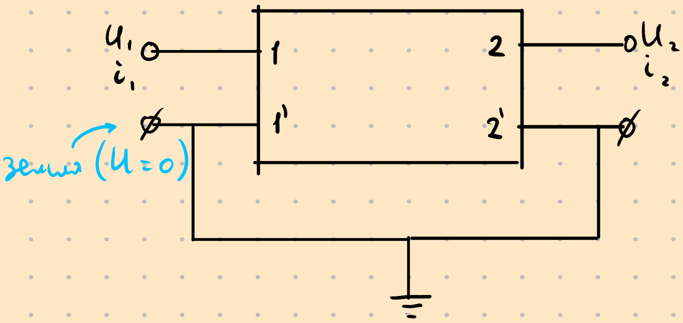


$\arg K = \varphi = -\operatorname{arctg} \omega RC$





Линейный четырёхполюсник

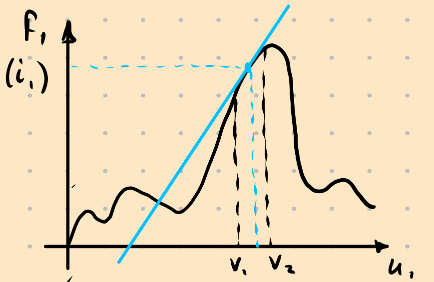


- U_1, U_2 — относительно земли
- Не накапливает заряд
- По выходам земли течёт неясно какой ток
- Выбрать незав. переменные (их 2) можно ∞ числом способов (выбор плоскости в 4х мерном пространстве) — любые 2 ЛК U_1, U_2, i_1 и i_2.

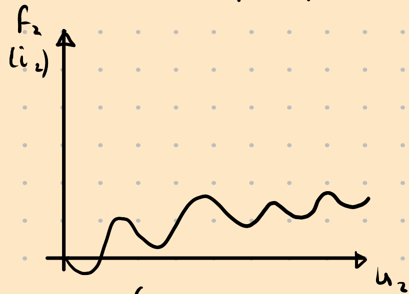
Система g параметров (для безинерционных (только R) цепей!)

Система из 2 нелинейных ур-ий, описывающих четырёхполюсник, например:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, u_2) \\ i_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$



(при нек-ом $u_2 = const$)



($u_1 = const$)

Т.е. четырёхполюсник задаётся двумя ландшафтами f_1 и f_2.

Причём для f_1 и f_2 они

- Непрерывны
- Произв. $\neq \infty$

Т.е. их можно линеаризовать в окрестности рабочей точки.

$$di_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 \qquad di_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2$$

= const при фикс. u_1 и u_2

При $u_1 = const$, $u_2 = const$ получаем 4 константы, характ. четырёхполюсник.

Физ. смысл производных:

1. $\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$ - входная проводимость

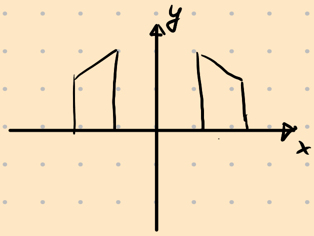
3. $\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$ – прямая проходная проводимость

2. $\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$ - обратная проходная проводимость

4. $\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$ - выходная проводимость

Аналитический сигнал (включает L и C – инерционность)

Вещественный сигнал - зависимость нек-ой ЛК U и i от времени. При преобр-ии Фурье обязательно получится симметричный спектр (он симметричен отн. Oy с точностью до комплексного сопряжения, а мнимая часть $= 0$).

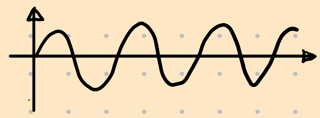


Это неудобно – приходится работать с кучей sin и cos.

Добавим к сигналу комплексную добавку - такую, что левая (правая) часть спектра сигнала обнулится.

Выйдет аналитический сигнал. Получается два провода - один с действ. частью сигнала, другой - с мнимой. Используя аналит. сигнал, можно рас-ивать инерционные цепи.

Сигнал будет подан как бы бесконечно давно и длится бесконечно долго.

$x(t) =$ 

$\tilde{x}(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$ - аналитический сигнал. $|e^{j\omega t}| = 1$

$A_0(\omega)$, $\varphi(\omega)$. $A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ – комплексная амплитуда

$e^{j\omega t}$ – комплексная вращающаяся экспонента.

Y - параметры (комплексные)

$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12} \tilde{U}_2$ $\quad\quad$ $\tilde{I}_2 = Y_{21} \tilde{U}_1 + Y_{22} \tilde{U}_2$

При поиске Y_{1x} $\tilde{U}_2$ зануляют (закорачивают выход), аналогично для Y_{2x}.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Если взять I_1 и I_2 как незав., математика та же:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_2$$

— здесь коэф-ты это сопротивления

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2$$

Смотря на анал. сигнал:

$$u_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$u_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

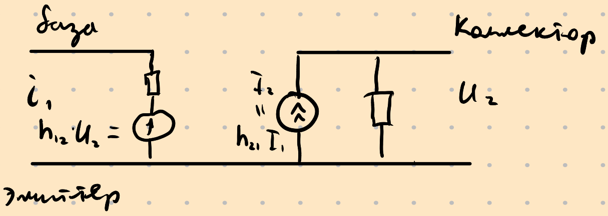
Связь: $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$ $\quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}$

$Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|}$ $\quad Z_{22} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$

H - параметры

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases}$$

- полезно для биполярных транзисторов



— аналогичная биполяр. транзистору схема

h_{21} — передача по постоянному току (спр.) $\quad$ h_{11} - входное сопротивление

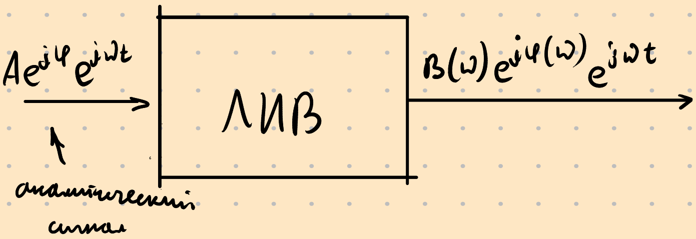
h_{12} — (спр.) $\quad$ h_{22} - выходная проводимость (спр.)

(спр.) — справочная величина

Связь: $h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$ $\quad h_{12} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$

$h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ $\quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$

Комплексный коэф-т передачи



Аналитический - из ТФКП

Комплексная часть в реальности не наблюдается

$|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$ - комплексный коэф-т передачи

$$K(j\omega) = \frac{\tilde U_{вых}}{\tilde U_{вх}} = \frac{B(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}\, e^{j\omega t}}{A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega)-\varphi_0)} =$$

Любой аналит. сигнал с огранич. спектром можно подать на вход и $K(j\omega)$ тоже будет

$$= \underbrace{\frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \ldots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \ldots + A_0}}_{\text{самый идиотский вид}} = \underbrace{\frac{b_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot \ldots \cdot (\omega - b_n)}{a_0 (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot \ldots \cdot (\omega - a_m)}}_{\text{самый ценный вид}} =$$

Самая сложная задача радиотехники

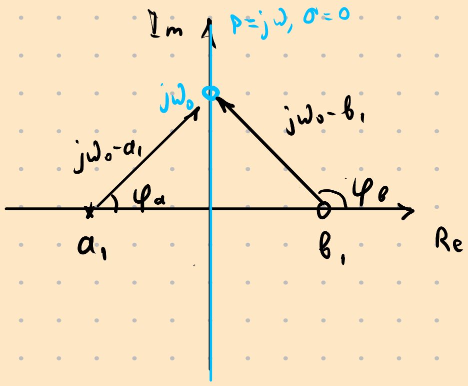
Свойства:

- Когда $\omega = b_k$, $|K| = 0$
- Когда $\omega = a_k$, выходит особенность.

$$= \frac{b_0}{d_0} \cdot \frac{|\omega - b_1| \cdot e^{j\arg(\omega - b_1)} \cdot \ldots \cdot |\omega - b_n| \cdot e^{j\arg(\omega - b_n)}}{|\omega - a_1| \cdot e^{j\arg(\omega - a_1)} \cdot \ldots \cdot |\omega - a_m| \cdot e^{j\arg(\omega - a_m)}} = \frac{b_0}{d_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n} |\omega - b_k|}{\prod_{p=1}^{m} |\omega - a_p|} \cdot e^{j\sum_{k=1}^{n} \arg(\omega - b_k) - j\sum_{p=1}^{m} \arg(\omega - a_p)}$$

„Нули" - корни числителя (b_i) „Полюса" - корни знаменателя (a_i)

ω должна быть комплексной (p), иначе от комплексной ф-ии произойдет переход к вещ-ой.



$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega)-\varphi_0)} = \frac{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + B_0}{A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + A_0} = \ldots$$

По полюсам, нулям и $\frac{b_0}{d_0}$ можно полностью восстановить ф-ию.

$p = j\omega + \sigma$ - при рас-ии конкретной частоты, $\sigma = 0$.

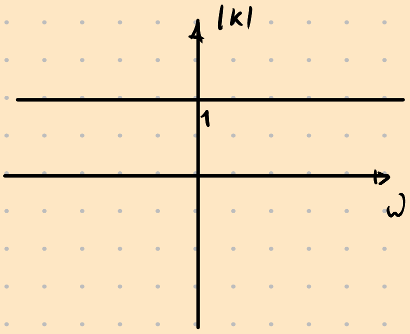
Иначе получится какая-то непонятная хар-ка сис-мы.

$$K(j\omega) = \frac{|j\omega_0 - b_1|}{|j\omega_0 - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega_0 - b_1) - \arg(j\omega_0 - a_1))}$$

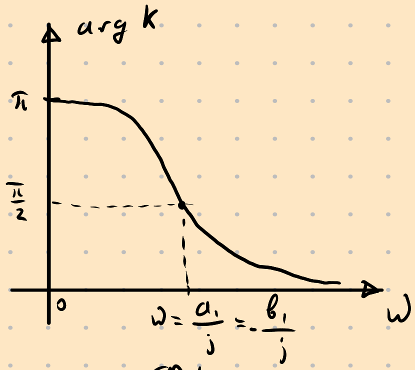
$|K(j\omega)|$ = отношение длин векторов из нуля и из полюса

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} \text{ - АЧХ} \qquad \arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A \text{ - ФЧХ}$$

Пример $a_1 = -b_1$

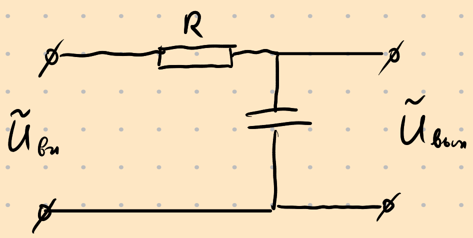


АЧХ



ФЧХ

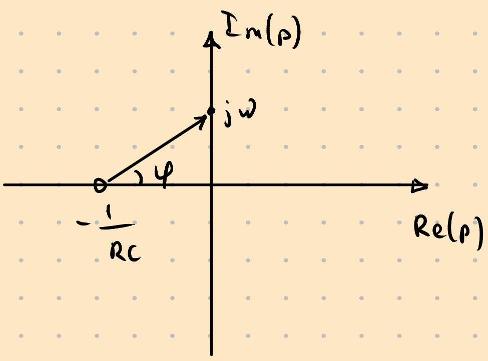
Интегрирующая RC-цепь



$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{вх}}{\left(R + 1/j\omega C\right) \cdot j\omega C\, \tilde{U}_{вх}} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)} =$$

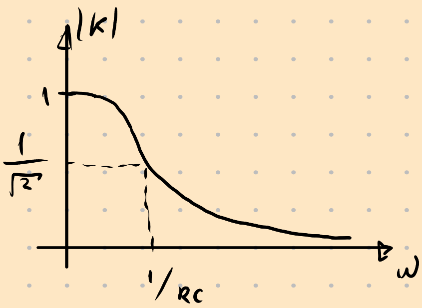
Ток через цепь
(течёт через конденсатор)

$$= \frac{1}{RC\left(p + \frac{1}{RC}\right)} \qquad a_1 = -\frac{1}{RC} \qquad \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

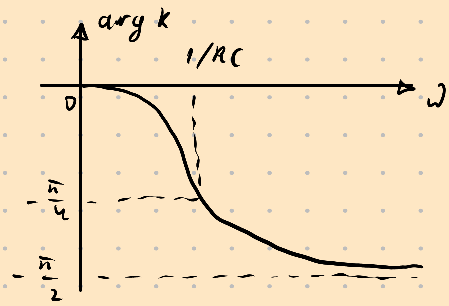


$$|K| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{R^2C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \text{— АЧХ}$$

$$\arg K = -\operatorname{arctg}(\omega RC) \quad \text{— ФЧХ}$$

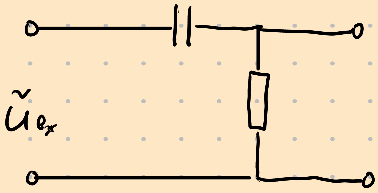


АЧХ

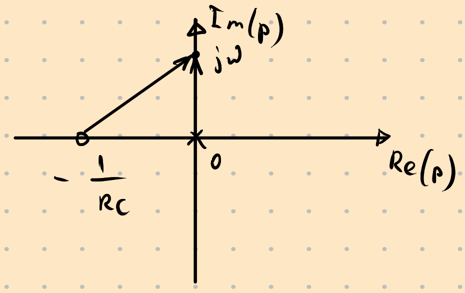


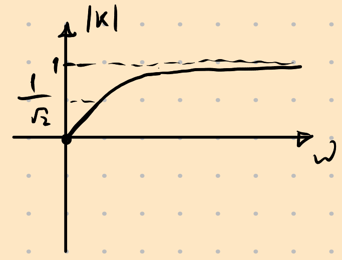
ФЧХ

Дифференцирующая RC-цепочка

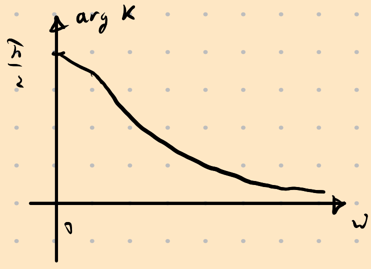


$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - 0}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$





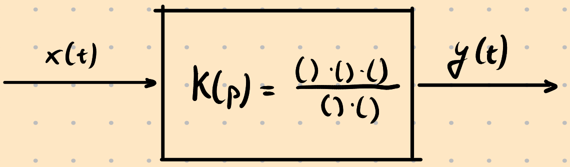
АЧХ



ФЧХ

Не вещественные полюса/нули всегда симметричны относ. Re оси, если канал 1 - вещественный

Отклик инерциальной системы



$$C_n \frac{df^{(n)}}{dt} + C_{n-1} \frac{df^{(n-1)}}{dt} + \dots = \dots$$

Заменяем $f^{(n)}$ на p^n, $f^{(n-1)}$ на p^{n-1}, ...

Получаем характеристическое уравнение.

Корни полученного уравнения дадут решения дифф. ур-я.

$$\frac{df^{(n)}}{dt^{(n)}} \to p^n$$

$$\int f(t)\,dt \to \frac{1}{p}$$

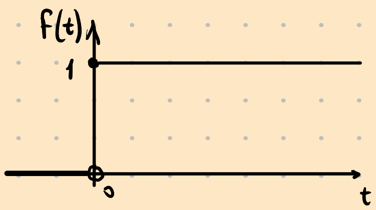
— фокус, с помощью к-рого можно решать задачки

Переходим от сигнала x(t) к его спектру (преобразование Фурье):

$$F(\omega) = C\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

— сходимость интеграла весьма хрупкая.

комплексная!



— спектр этой штуки не найти - интеграл не сходится (ф-ия Хевисайда)

Можно приблизить её последовательностью ф-ий, к-рые сходятся к ф-ии Хевисайда, и посмотреть, куда сходится последовательность интегралов.

Вводим менее хрупкое преобр-е, вводя универсальную добавку: умножим $f(t)$ на $e^{-\sigma t}$.

Почти все ф-ии можно ограничить этой экспонентой. Новое преобр-е:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt} dt$$; обозначим $p = j\omega + \sigma$ — **преобр-е Лапласа** (прямое)

„это ёжик. он будет здесь жить."

При этом следует считать, что до $t=0$ $f(t)=0$, после начинается сама ф-ия (чтобы интеграл не развалился от отриц. части $e^{-\sigma t}$). $F(p)$ - Лаплас - образ

Условия сходимости этого интеграла

1. Не более чем конечное число разрывов 1-го рода на каждом конечном интервале.

   $\forall t \to \exists A,\ \alpha \le 1,\ h_0:\ |f(t+h) - f(t)| \le A|h|$ - огр. скорости роста на локальном масштабе (дифференцируемость ?)

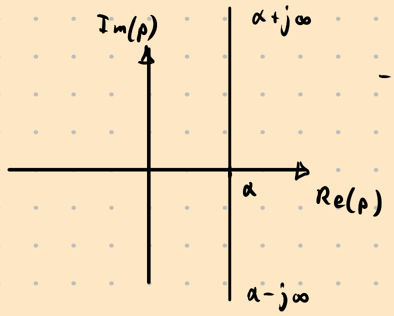
2. $\forall t < 0 \to f(t) = 0$

3. $\exists M > 0,\ s_0 \ge 0:\ \forall t \to |f(t)| < M e^{s_0 t}$ - огр. скорости роста на глобальном масштабе

$f(t) \doteqdot F(p)$ – $f(t)$ соотв-ет образ $F(p)$

Обратное преобр-е сущ-ет.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \frac{1}{p} e^{pt}\, dp$$

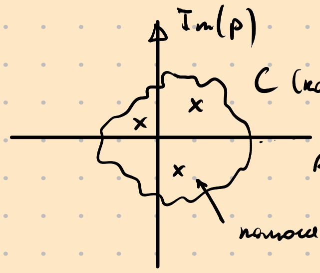


- по этой прямой и берём интеграл.

В ТФКП не принято брать интегралы.

Обходной путь: теорема Коши о вычетах.

$$\oint_C q(p)\, dp = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{res} q(p)$$ (сумма вычетов внутри контура)



C (контур) - без дыры! (ф-ия аналитична на C)

полюса (особенности) - вычеты

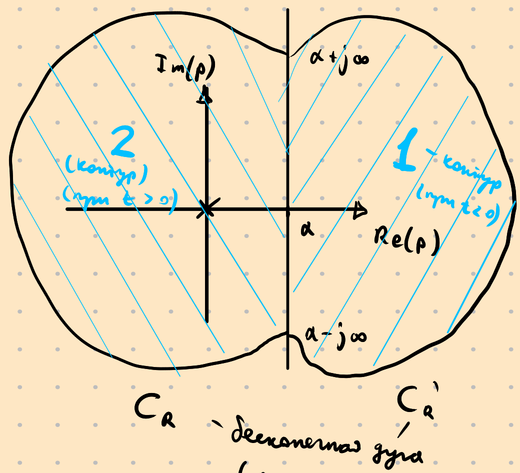
$\operatorname{res} q(p)$ – вычеты ф-ии $q(p)$

Если в ф-ии есть особенности, раскладываем не в ряд Тейлора, а вот в такой ряд:

$$f(p) = \underbrace{\ldots + \frac{1}{p^2} C_{-2} + C_{-1} \frac{1}{p}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \ldots}_{\text{правильная часть}}$$ – ряд Лорана

C_{-1} – вычет ф-ии

C_{-1} - это полюс, ноль в знаменателе



C_R, C'_R - бесконечная дуга (радиус = ∞)

Последовательность интегралов вдоль дуг с радиусом $\to \infty$ при стремлении ф-ии к 0 на ∞ стремится к 0. (лемма Жордана)

При $t < 0$ по лемме Жордана $\int_{C'_R} \ldots = 0$

$$\underset{\text{искомый!}}{\int \ldots} = \int_1 \ldots - \int_{C'_R} \ldots = 0 - 0 = 0 \qquad f(t) = 0$$

При $\alpha > 0$ контур 1 не содержит особенностей (она одна: $\frac{1}{p}$ - в нуле) $\Rightarrow \int_1 \ldots = 0$

а если не одна, можно взять α побольше

Пусть $t \ge 0$

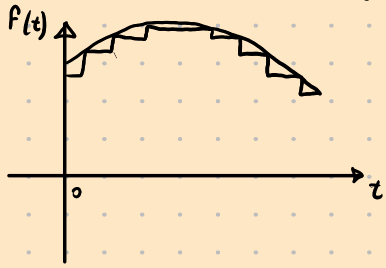
Вычет один, равен он 1 (при $\to 0$ $e^{pt} \to 1 \Rightarrow$ одна особенность: $\frac{1}{p} \Rightarrow C_{-1} = 1$)

$$\int_2 \ldots = 2\pi i \qquad \int \ldots = \int_2 \ldots - \int_{C_R} \ldots = 2\pi i$$

$$\boxed{f(t)=\frac{2\pi i}{2\pi i}=1}$$ — ф-ия Хевисайда!

Т.е. $F(p)=\frac{1}{p}$ для ф-ии Хевисайда.

Представим любую ф-ию в виде набора единичных скачков, тогда её можно преобразовать по Лапласу. e^{-tp} — сдвинутая ф-ия Хевисайда после преобр-я



$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{pt}\left\{\sum f(t_k)\, e^{-pt_k}\Delta' t_k\right\}dp$$

$$\Delta' t_k=\frac{-e^{-p\Delta t_k}}{p}=\Delta t_k-\frac{(\Delta t_k)^2}{2!}+\dots$$ — ряд Тейлора

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{pt}\left\{\int_0^{t} f(t)\,e^{-pt}\,dt'\right\}dp$$ — обратное преобр-е Лапласа

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{pt}F(p)\,dp$$

$1(t)$ — ф-ия Хевисайда.

$$F(p)=\int_0^{+\infty}1(t)\,e^{-pt}\,dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}$$

$$G(p)=\int_0^{\infty}e^{p_0t}e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{-(p-p_0)t}dt=-\frac{1}{p-p_0}e^{-(p-p_0)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p-p_0}$$

Получили, что

$$1(t)\doteqdot\frac{1}{p}\qquad e^{p_0t}\cdot 1(t)\doteqdot\frac{1}{p-p_0}$$

Любое изобр-е по умолчанию считается умноженным на $1(t)$, её не пишут.

Свойства преобр-я Лапласа

1° Линейность

$$\int_0^{\infty}(\alpha f(t)+\beta g(t))\,e^{-pt}dt=\alpha\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-pt}dt+\beta\int_0^{\infty}g(t)e^{-pt}dt$$

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\doteqdot\alpha F(p)+\beta G(p)$$

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j},\qquad \cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

из св-в линейности получаем:

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$\operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

2° Теорема подобия

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(t) e^{-p\frac{t}{\alpha}} dt = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

3° Дифференцирование оригинала

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty \underbrace{f'(t)}_{u'} \underbrace{e^{-pt}}_{v} dt = f(t) e^{-pt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-p) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$$

4° Дифференцирование изображения

$$F(p) \doteq f(t) \qquad (\text{обратное преобр-е})$$

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt\right)'_p = -\int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt$$

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$$

$$t^n \doteq (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

5° Интегрирование оригинала

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt \qquad g(t) \doteq G(p)$$

$$f(t) = g'(t) \doteq F(p) = pG(p)$$

$$G(p) = p^{-1} F(p)$$

6° Интегрирование изображения

$$F(p) \doteqdot f(t)$$

$\int_p^\infty F(p)\,dp$ — сходится

$$\int_p^\infty F(p)\,dp = \int_p^\infty \left\{ \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right\} dp = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_p^\infty e^{-pt} dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt$$

изменение порядка интегрирования

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \doteqdot \frac{f(t)}{t}$$

$$e^{\beta t} - e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p-\alpha}$$

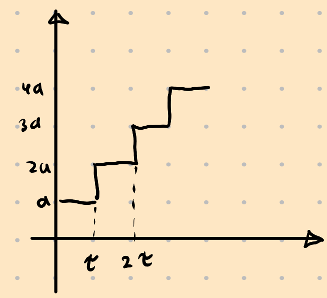
$$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t} \doteqdot \int_p^\infty \left(\frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p-\alpha} \right) dp = \ln \frac{p-\alpha}{p-\beta}$$

7° Теорема запаздывания

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

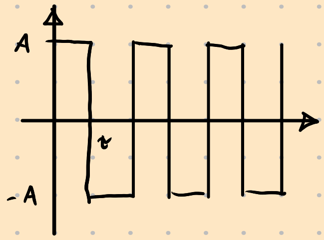
$$f(t-\tau) \doteqdot \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t_1) e^{-(t_1+\tau)p} dt_1 = e^{-p\tau} F(p)$$

$$t_1 = t - \tau$$



$$f(t) = A\left(1(t) + 1(t-\tau) + 1(t-2\tau) + \dots\right)$$

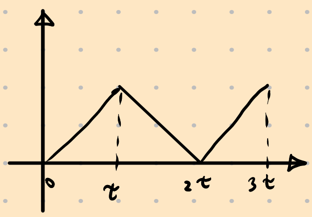
$$F(p) = A\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots\right) = \frac{1}{p} \frac{1}{1-e^{-p\tau}}$$



$$f(t) = A\left(1(t) - 2\,1(t-\tau) + 2\cdot 1(t-2\tau) - \dots\right)$$

$$F(p) = \frac{A}{p}\left(1 - 2\frac{e^{-p\tau}}{1-e^{-p\tau}}\right)$$

Меандры



$$F(p) = \frac{A}{p^2}\left(1 - 2\frac{e^{-p\tau}}{1-e^{-p\tau}}\right)$$

8° Теорема смещения

$$F(p) \doteqdot f(t)$$

$$F(p-p_0) \doteqdot -?$$

$$F(p-p_0) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(p-p_0)t}\, dt = \int_0^\infty \left(f(t)\, e^{p_0 t}\right) e^{-pt}\, dt$$

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$

$$e^{-\lambda t}\, t^n \doteqdot \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$$

9° Теорема умножения – центральный момент курса

$$f(t) \doteqdot F(p) \qquad g(t) \doteqdot G(p)$$

$$F(p)\cdot G(p) \doteqdot ?$$

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \underset{t_1 = t-\tau}{=} \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau \int_0^\infty g(t_1)\, e^{-pt_1}\, dt_1 =$$

$$= F(p)\cdot G(p)$$

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$ – интеграл свёртки

Если считать одну из ф-ий импульсной характеристикой, другой – входным воздействием, выходным воздействием будет их свёртка – или перемножение образов

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + \{pF(p) - f(0)\}G(p) \doteqdot f(0)\, g(t) + \int_0^t g(\tau)\cdot f'(t-\tau)\, d\tau =$$

Интеграл Дюамеля

$$= g(0)\, f(t) + \int_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\, d\tau$$

10° Обратная теорема умножения

$$f(t)\, g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(q)\, G(p-q)\, dq$$ – надо доказать

$$f(t)\, g(t) \doteqdot \int_0^\infty f(t)\, g(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(q)\, e^{qt}\, dq \right\} g(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \left\{ F(q) \int_0^\infty g(t)\, e^{-(p-q)t}\, dt \right\} dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(q)\, G(p-q)\, dq$$

Этот интеграл есть свёртка изображений.

Импульсные характеристики

Обобщёнными функциями называются лин. непр. функционалы, заданные на пространстве основных функций. Число, сопоставляемое основной функции φ функционалом f обозначается (f, φ) и наз-ся действием обобщённой ф-ии f на пробную ф-ию φ.

$$(f, \varphi) = A$$

1° Линейность функционала

$$f(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$$

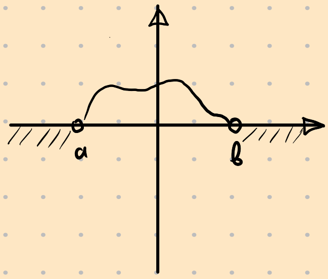
2° Непрерывность

$$\forall\ \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{K} 0 \rightarrow (f, \varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (K - \text{пр-во осн. ф-ий})$$

Всякая основная ф-ия бесконечно дифференцируема.

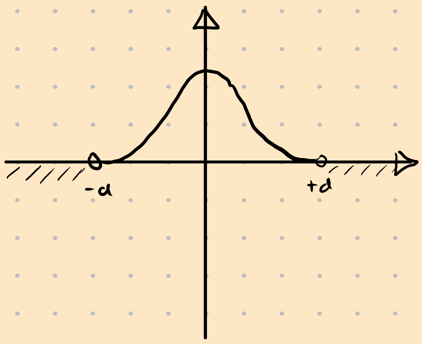
У каждой основной ф-ии есть „конечный носитель": $\varphi(x) = 0 \Big|_{a<x<b}$

(второе св-во – это финитность)



Пример: $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a \\ \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - x^2}\right), & \text{при } x < |a| \end{cases}$

В т. $x \to a$ выходит, что $\varphi(x) \to 0$ и $\varphi'(x) \to 0$ – ф-ия горизонтальна и яв-ся продолжением константы $\varphi(x) = 0$.



Эту ф-ию можно умножить на любую бесконечно дифф. ф-ию. И результат будет финитной и бесконечно дифф.!

Пространство таких ф-ий есть пр-во основных ф-ий K.

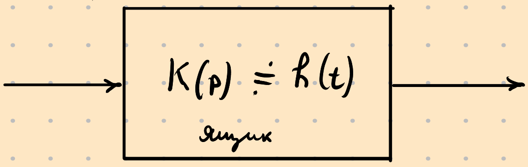
$$(g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx$$ – регулярная обобщённая функция

Самый простой пример – ф-ия Хэвисайда:

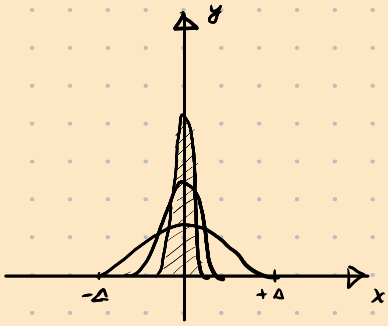
$$1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$ (неважно, как определить в т. 0: всё равно потом интеграл)

$$(1, \varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

$(\delta, \varphi(x)) = \varphi(0)$ – δ – ф-ия Дирака



$h(t)$ – импульсная реакция, реакция системы на „пинок бочки"



$$g(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{\Delta\to 0} x(t)\,\delta_\Delta(t-t)\,dt$$

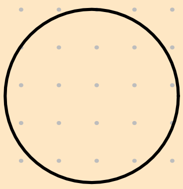
Математика ломается в таком пределе: интеграл Римана в одной т. всегда 0.

Исправлем ситуацию:

$$g(t) = \lim_{\Delta\to 0}\int_0^{+\infty} x(t)\,\delta_\Delta(t-t)\,dt = x(0) = (\delta, x(t))$$

Определение производной обобщённой ф-ии

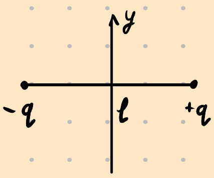
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\varphi(t)\,dt = \underbrace{\delta(t)\,\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{пропадает на бесконечности}} - \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\varphi'(0)$$



q

$q = \int_{V\to 0}\rho\,dv$ – много

$q = \int q\,\delta(x)\,dx$, $\delta(x)$ – плотность точечного заряда



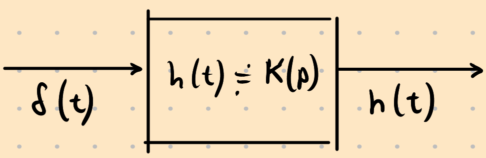
ql – дипольный момент

$l \to 0$

Как описать плотность заряда точечного заряда?

$\frac{1}{l}\rho\,\delta(x+\frac{l}{2})$ и $-\frac{1}{l}\rho\,\delta(x-l/2)$ – стремим l к 0:

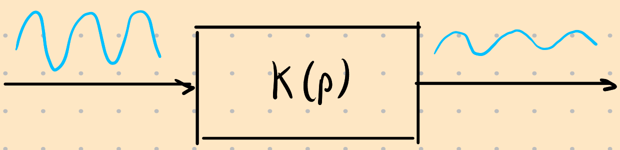
$$\lim_{l\to 0}\frac{\rho\,\delta(x+\frac{l}{2}) - \rho\,\delta(x-\frac{l}{2})}{l} = \rho\,\delta'(x)$$



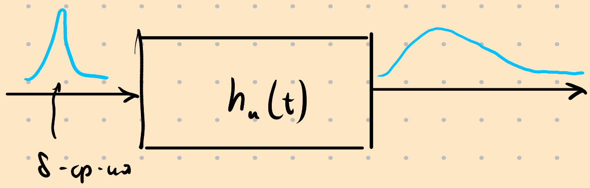
$$\begin{tikzcd} \delta(t) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\mathcal{L}"'] & h(t) \\ 1 \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\mathcal{L}^{-1}"'] & K(p) \end{tikzcd}$$

Способы описания лин. инв. сис-м

① АЧХ, ФЧХ

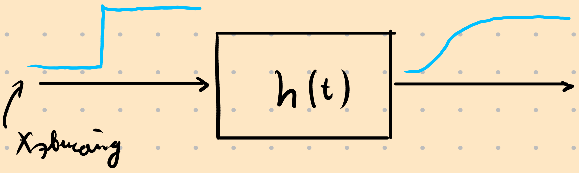


② Импульсная реакция



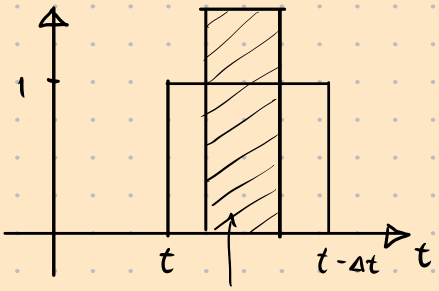
Закачиваем нек-рое кол-во энергии в 1 момент времени

③ Переходные характеристики



Все описания эквивалентны

Описание сис-мы импульсной хар-ой



площадь сохраняется, а Δt уменьшается

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1(t) - 1(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

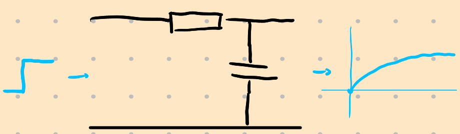
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt := \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \frac{1}{\Delta t}\,dt = 1$$

(если не вынести lim за $\int$, получим 0!)

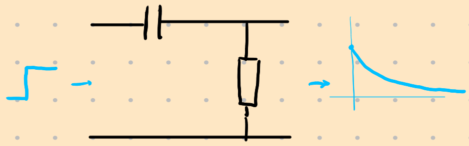
Как бы получается, что $\delta(t) = 1'(t)$, но $1(t)$ не дифференцируема — поэтому это не так. Однако если сделать их обобщёнными ф-иями, то они дифф.!

В силу линейности системы:

$$h_и(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t) - h(t-\Delta t)}{\Delta t}$$



пример для интегрирующей цепи (отклик непр. и дифф.)



пример для дифференцирующей цепи (отклик разрывен в 0)

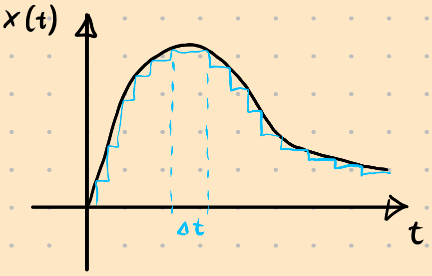
Отклик $h(t)$ часто гладкий и дифф.! Получаем

$$h_и(t) = h'(t)$$

Два способа справиться с разрывом и найти $h_и(t)$:

1. Разбить $h(t)$ на две части: левее т. разрыва и правее
2. Перейти к обобщ. ф-иям: там отклик всегда дифференцируем

Поиск отклика на $x(t)$



Любое $x(t)$ можно представить суммой скачков.

В силу линейности и инвариантности сис-мы:

$$y(t) = c_0 h(t) + c_1 h(t-\Delta t) + c_2 h(t-2\Delta t)$$

Устремим $\Delta t \to 0$:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\theta)\, d[x(\theta)] = \int_0^t x'(\theta)\, h(t-\theta)\, d\theta$$ — первая форма интеграла Дюамеля

Но! Вдруг $x(t)$ разрывен? Тогда нет $x'(t)$. Можно перейти к обобщ. ф-циям, но проще взять интеграл по частям:

$$y(t) = x(\theta)\, h(t-\theta)\Big|_0^t + \int_0^t x(\theta)\, h'(t-\theta)\, d\theta = x(t)\, h(0) + \int_0^t x(\theta)\, h'(t-\theta)\, d\theta$$ — вторая форма инт. Дюамеля

Разрывы $h(t)$ решаются так же, как и при поиске $h_u(t)$ — рассмотрением левой части и правой части отн. т. разрыва по отдельности.

В обобщ. ф-циях:

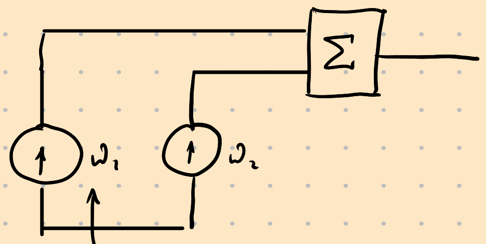
$$y(t) = \int_0^t x(\theta)\, h_u(t-\theta)\, d\theta$$

Связь с преобр-ем Лапласа

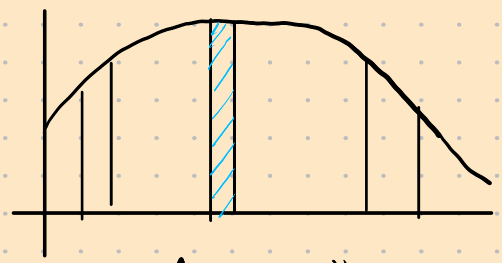
$$L[y(t)] = L[x(t)] \cdot L[h_u(t)] = H(p) \cdot L[x(t)]$$

Получаем комплексный коэф-т передачи — $H(p) = L[h_u(t)]$!

Выделение нужного сигнала из набора



1 МГц, ширина полосы 50 Гц



АЧХ приёмника

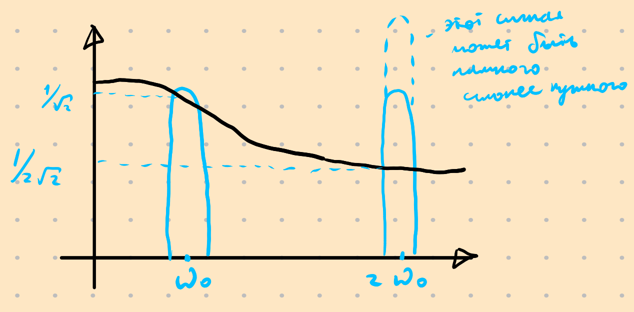
1. Частотное разделение
   - Передатчик и приёмник ничего друг о друге не знают

2. Разделение по времени
   - Требуют точной синхронизации часов (между передатчиками)

3. Разделение по фазе
   - Требуют точной синхронизации часов (между передатчиками) (5 нс для задержки между каналами 1 мкс)

Частотное разделение

Деление на декады неудобно (слишком по-разному сигналы передаются через среду). Берут октаву или меньше (октава – от ω_0 до $2\omega_0$)



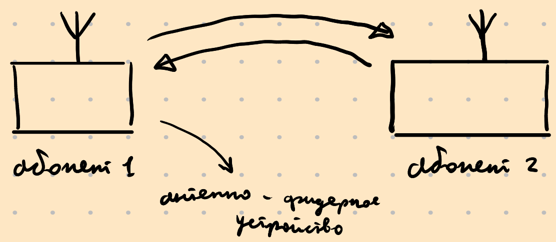
Интегр. RC-цепь (АЧХ).
Селекция в 6 Дб (мало!)

Первая проблема

- FM диапазон: 90 – 110 МГц

  Шаг между станциями: 400 кГц
- Изменили частоту на 5%, должны получить 60 Дб селекции – RC-цепочка совсем не подходит...

Вторая проблема



- Используя по одной антене, 2 абонента общаются в обе стороны
- Нужно ~10% разницы (напр. 1,0 и 1,1 МГц для передачи и для приёма)

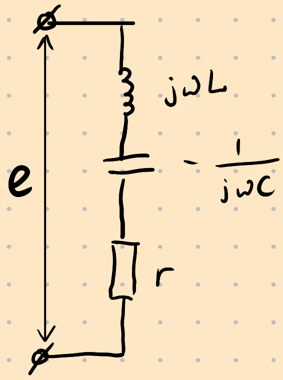
• Здесь проблема: передатчик и приёмник – буквально в одной точке. Мощность полезного сигнала огромна (в 1-й проблеме передатчики нах-ся на разном рас-ии от приёмника, но не меньше ~1 км – всё проще).

Решение 1: идеальный П-образный фильтр.

Мешает соотношение неопределённости (если сигнал короткий, его спектр бесконечен) – берётся из преобр-я Фурье.

Как такое сделать в реальности?

Решение 2: резонансные структуры



• Соединение двух эл-ов с против. по знаку импедансами

• Но! Идеальной колеб. схемы не бывает – есть потери (r)

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i\,dt + ri = e$$ – если законом Ома

Можно ещё комплексными амплитудами:

$$I = \frac{E}{Z_{вх}} = \frac{E}{j\omega L + r - \frac{1}{\omega C}} = \frac{E}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Единственный полюс при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$Z_{вх}$ делят на две части:

1. $r_{вх} = r$ – активная составляющая (const)
2. $X_{вх} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивная составляющая (0 при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, зависит от ω)

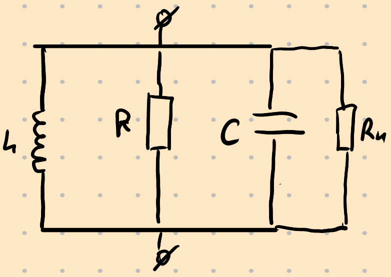
Резонанс при $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (при нём $Z_L = Z_C$), при нём:

$$Z_L = Z_C = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ – характеристическое сопротивление колебательного контура

Добротность $Q = \frac{W_{кк}}{P\cdot\sqrt{LC}} =$ ($W_{кк}$ – энергия, запасённая в колеб. контуре, P – средняя энергия потерь за 1 радиан, $\sqrt{LC}$ – 1 радиан)

$$= \frac{LI^2}{2P\sqrt{LC}} = \frac{LI^2}{2\underbrace{\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\text{эффективное значение синусоид. тока}} R\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{r}$$

Эффект. знач.: мощность переменного тока с амплитудой I равна мощности пост. тока $I_{эфф}$, для синуса $I_{эфф} = I/\sqrt{2}$



$$Q = \frac{W_{кк}}{P\sqrt{LC}} = \frac{CU^2R}{2\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{LC}} = \frac{R}{\sqrt{L/C}} = \frac{R}{\rho}$$ – для параллельного

Затухание $d = 1/Q$

При подключении нагрузки $\frac{1}{Q'} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_н}$ (т.к. $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_н}$)

$$d' = d + d_н$$

Никто не работает с контурами низкой добротности (1–10)

Обычно $Q \in [10;\ 10000]$.

- Получается, вдали от ω_0 делать нечего, а эту сис-му в районе ω_0 можно упростить.

$$X_{вх} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\underset{\overset{\shortparallel}{\omega_0^{-2}}}{\omega\omega_0 LC}}\right) = \omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \rho\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

– реактивное к активному

$$\xi = \frac{X_{вх}}{r} = \frac{\rho}{r}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$ – обобщённая расстройка (нормирована на Q и на ω_0)

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\Delta\omega$ – абсолютная расстройка (между передатчиками)

$$X_{вх} = \omega_0 L\left(\frac{\omega_0+\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0+\Delta\omega}\right) = \omega_0 L\frac{(\omega_0+\Delta\omega)^2 - \omega_0^2}{\omega_0(\omega_0+\Delta\omega)} \simeq \omega_0 L\frac{2\omega_0\Delta\omega + \cancel{\Delta\omega^2}}{\omega_0^2} = L2\Delta\omega =$$

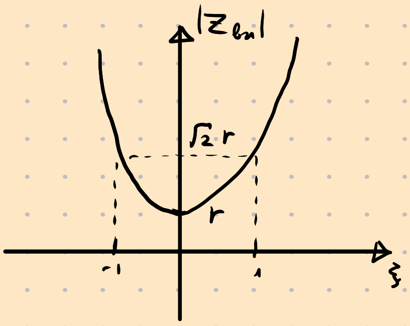
мала отн. $\Delta\omega$

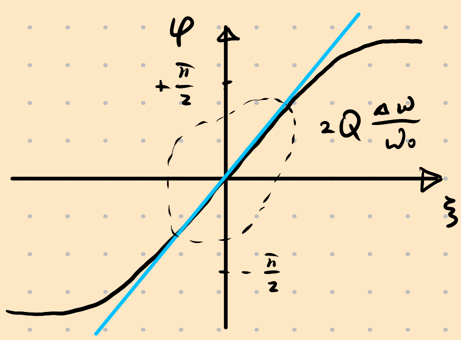
$$= \frac{2\rho}{\omega_0}\Delta\omega$$

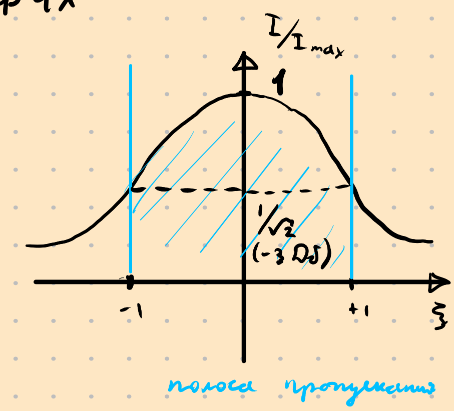
$$\xi = 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

$$|Z_{вх}| = r\cdot\sqrt{1+\xi^2} \qquad (\text{т.к. } Z_{вх} = r\cdot(1+j\xi))$$

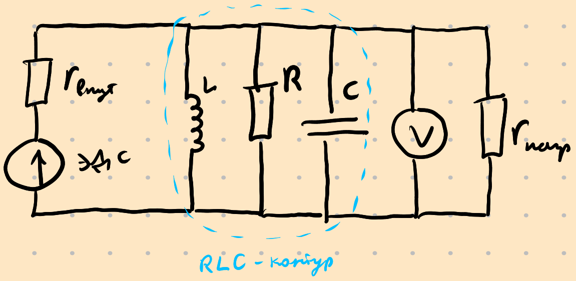
$\arg Z_{вх} = \operatorname{arctg}\xi \simeq 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ – чем больше Q, тем круче ФЧХ







Добротность и сопротивление



$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot Q =$$

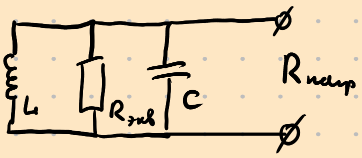
- Если надо $Q = 10$, то в целом нормально
- Но если надо $Q = 100$, то R слишком большое, и мощности сигнала не хватает

А вдруг надо $Q = 5000$?

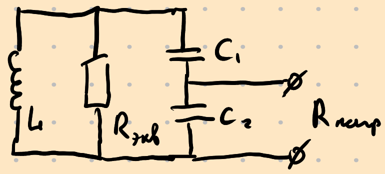
Можно поставить маленькое L и большое C

Но меньше нГн поставить не выйдет — у проводников в схеме такая индуктивность.

Частичное включение

1. 

$$Q = \frac{R_{экв}}{\sqrt{L/C}} \qquad Q^* = \frac{R_{экв} R_{нагр}}{(R_{экв} + R_{нагр})\sqrt{L/C}}$$

2. 

U - напр. в контуре

Поделим ёмкость на две части. Q^* - ?

$$U_{нагр} = \frac{U}{j\omega C_2 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}\right)} = \frac{C_1}{C_2 + C_1} U$$ - коэф-т включения

$$P_{нагр} = \frac{U_{нагр}^2}{R_{нагр}} = \text{const}$$ (не хотим, чтобы менялась добротность)

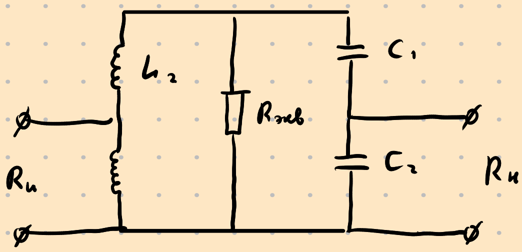
(мощность потерь)

- В 2 раза уменьшив $U_{нагр}$ (выходной сигнал), но в 4 раза возрастёт Q. (если $C_1 = C_2$)

Выигрыш!

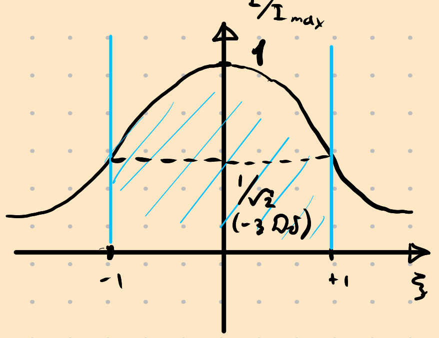
Коэффициент включения: $\frac{C_1}{C_2 + C_1}$

От $R_{экв}$ никуда не деться, т.е. выигрыш не бесконечный.

3. 

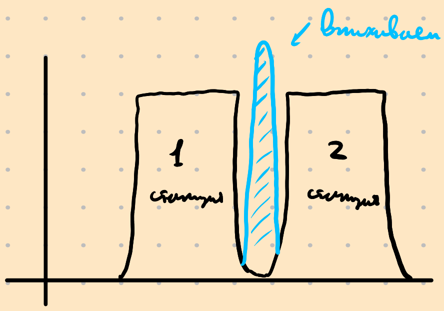
$$R_{экв} > R_н^* \qquad R_{экв} > R_н^*$$

- Схема включения, $R_н$ и $R_н$ — инструменты для выбора добротности.



АЧХ у контура всегда такая! Максимум, можно сделать её поуже / пошире и настроить резонансную частоту.

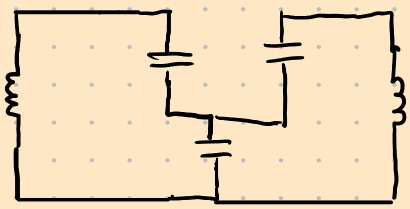
- Сигналы очень близко (в соседних каналах) не разделить таким фильтром. Получится, если станции на 10 полос отстоят друг от друга (40 дБ селекции). Но это очень неэффективно.



спектр радиостанций

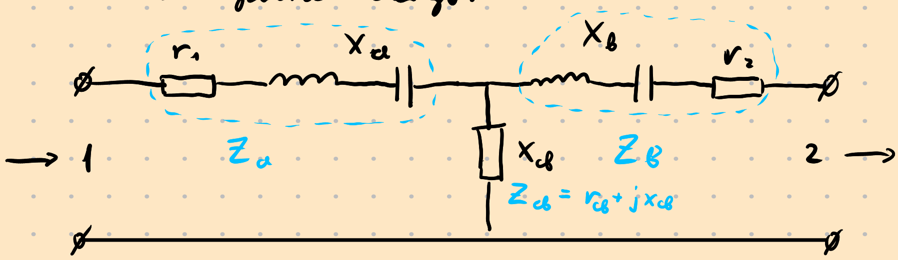
- Как втиснуть левый сигнал так, чтобы 2 станции его не заметили? Каким образом устроены эти станции?
- Можно идеальным полосовым фильтром — но его нет.
- Можно несколькими колеб. контурами.

Связанные колеб. контура



Каким бы образом ни организована связь между контурами, формулы одни и те же.

Самая простая связь:



($x_{\text{св}}$, хоть и нарисована как резистор, не активное сопротивление)

- Если 2 разомкнут, он никак не влияет на 1.
- Иначе в контуре 1 появляется некий доп. импеданс.

2 – разомкнут: $Z_1 = Z_a + Z_{\text{св}}$ 1 – разомкнут: $Z_2 = Z_{\text{в}} + Z_{\text{св}}$

2 – КЗ: $Z_{\text{вх}} = Z_a + Z_{\text{св}} \parallel Z_{\text{в}} = Z_a + \dfrac{Z_{\text{св}} Z_{\text{в}}}{Z_{\text{св}} + Z_{\text{в}}}$

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 - Z_{\text{св}} + \frac{(Z_2 - Z_{\text{св}})Z_{\text{св}}}{Z_2 - Z_{\text{св}} + Z_{\text{св}}} = Z_1 - \frac{Z_{\text{св}}^2}{Z_2}$$

Подключение 2-го колеб. к-ра эквивалентно внесению в контур 1 $Z_{внос}$:

$$Z_{внос} = -\frac{Z_{св}^2}{Z_2}$$

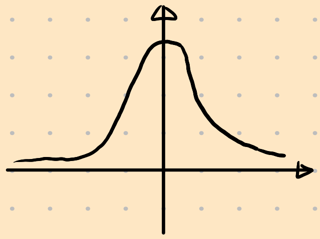
Пусть $Z_{св} = jx_{св}$ $(Z_1 = r_1 + jx_1,\ x_1 = x_a + x_{св}$, аналогично $Z_2)$ – т.к. надо перекачать энергию, а не руки греть

$$Z_{вн} = -\frac{-x_{св}^2}{r_2 + jx_2} = \underbrace{\frac{x_{св}^2}{r_2^2 + x_2^2} r_2}_{r_{вн}} - j\underbrace{\frac{x_{св}^2}{r_2^2 + x_2^2} x_2}_{x_{вн}}$$

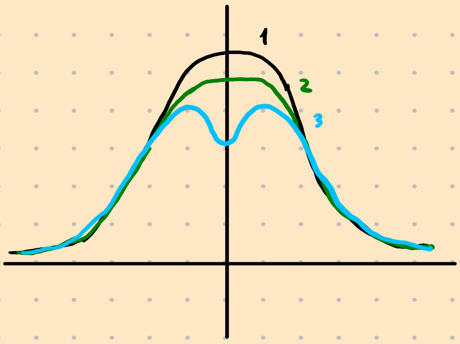
$$r_{вн} = \frac{x_{св}^2}{r_2^2\left(1 + \frac{x_2^2}{r_2^2}\right)} = \frac{x_{св}^2}{r_2^2(1+\xi^2)} \approx \frac{x_{св}^2}{r_2\left(1 + 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}$$

– изъятие энергии из колеб. сис-мы (в АЧХ появится провальчик на какой-то частоте)

$$x_{вн} = -\frac{x_{св}^2\ x_2/r_2}{r_2\left(1 + \frac{x_2^2}{r_2^2}\right)} = -\frac{x_{св}^2\ \xi}{r_2(1+\xi^2)}$$



– вносим такую штуку



– Чем больше $x_{вн}$, тем сильнее это разделение резонансных пиков

Что получается с АЧХ, когда вносим $r_{вн}$
($1 - r_{вн} = 0$, $2 - r_{вн}$ мало, $3 - r_{вн}$ большое)

Итого у сис-мы 3 пар-ра: ω_{01} – резонанс 1-го к-ра, ω_{02} – резонанс 2-го, $x_{св}$.

1-й частный резонанс: резонанс на 1-м, но не на 2-м

2-й частный резонанс: аналогично

полный резонанс : $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$

1-й сложный резонанс : в режиме 1-го частного рез. выбираем $x_{св}$ так, чтобы ток во 2-м был max

2-й сложный резонанс : аналогично

полный резонанс : $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$, $x_{св}$ оптимальна (макс. ток)

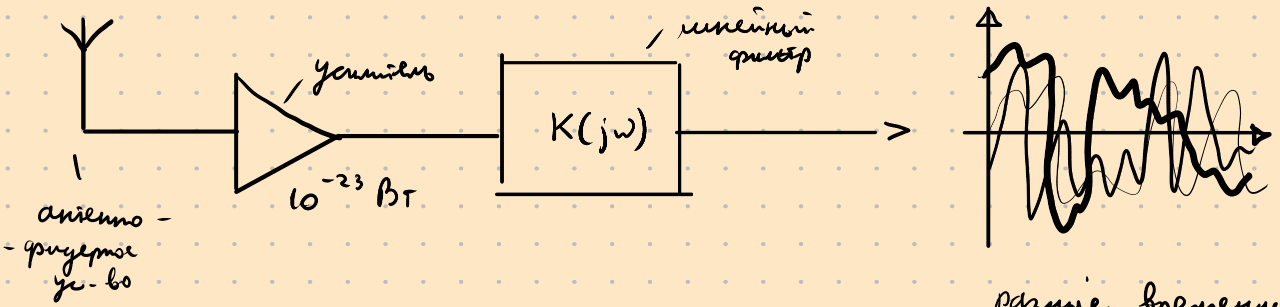
Шум

- Рас-ие ограничено отношением мощности сигнала к мощности шума.
- Если взять супер-мощный передатчик и супер-чувствительный приёмник, это соотношение ограничится сверху

$$\frac{10^{9}}{10^{-20}} = 320 \text{ дБ}$$

(10^{9} — мощный передатчик; 10^{-20} — чувствит. приёмник)

Шумы ограничены температурой. Что если приёмник заморозить?



разные временные формы на осциллографе

Сигнал на выходе меняется плавно (ограничен в резкости) и огр. в амплитуде.

Т.е. шумы можно как-то разложить на спектр.

Будем рас-ивать не $U(t)$, а нек-рое усреднённое её знач-е — корреляцию:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_1(u)\, u_2(u-t)\, du$$

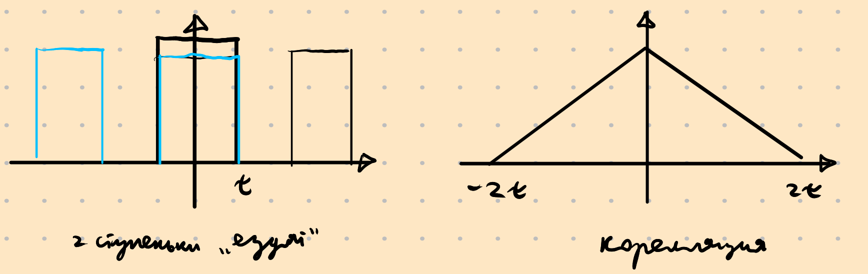
(если процессы эргодичны)

(похоже на свёртку)

„усреднение по ансамблю"

Нужна машина времени, чтобы такое посчитать. Но говорят, что шум. процессы **эргодичны** — для них усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по времени.

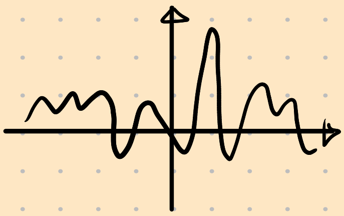
Пар-р t при изменении показывает, насколько быстро меняется процесс:



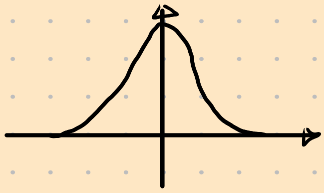
Треугольник сужается при сужении ступенек.

Чем дальше по t в корреляции наблюдаются какие-то значения, тем менее высокочастотен процесс! И наоборот

На каком-то значит. расс-ии автокорреляция - 0. До неё будет какая-то ф-ия:



случ. процесс

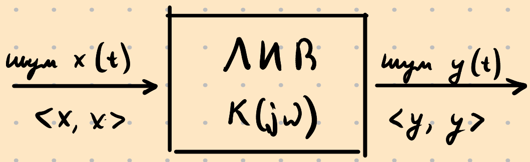


корелляция

Ширина корелляции - частотность процесса

Высота корелляции - мощность процесса

Фильтрация шума



$$y(t) = \int x(u)\, h_u(t-u)\, du = x * h_u$$

Но x мы не знаем, знаем только $\langle x, x\rangle$.

$$\langle y, y\rangle = \langle (x * h_u), (x * h_u)\rangle$$

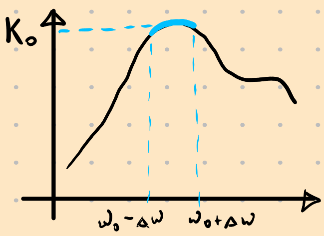
Оказывается! Свёртка корелляции равна корелляции свёртки.

$$\langle y, y\rangle = (\langle x, x\rangle * \langle h_u, h_u\rangle) \leftrightarrow \mathcal{L}[\langle y, y\rangle] = \mathcal{L}[\langle x, x\rangle] \cdot \mathcal{L}[\langle h_u, h_u\rangle]$$

Корелляция - почти свёртка, для неё применима „почти теорема о свёртке":

$\mathcal{L}[\langle x, x\rangle] = \mathcal{L}[x] \cdot \mathcal{L}[x]^* =$ (комплексно сопряжённые) $= |\mathcal{L}[x]|^2$

Пусть $x(f) = \mathcal{L}[x]$: $\mathcal{L}[\langle y, y\rangle] = |x(f)|^2 \cdot |K(jf)|^2$



Мощность выходного сигнала есть мощность входного на $|K(jf)|^2$

Т.е. на малом участке $[\omega_0-\Delta\omega; \omega_0+\Delta\omega]$ получаем

$$|y(f)|^2 = |K_0|^2 \cdot |x(f)|^2$$

№3 В военной технике волновое сопротивление везде $R = 50$ Ом (это прям стандарты!)

В телевизионной везде $R = 75$ Ом

Поэтому в целом можно считать $P = \frac{U^2}{R} = const \cdot U^2$

$|x(f)|^2$ - спектральная плотность мощности (площадь под ней - мощность).

Её показывает анализатор спектра.

Обычно шум - AWGN (additive white Gauss noise)

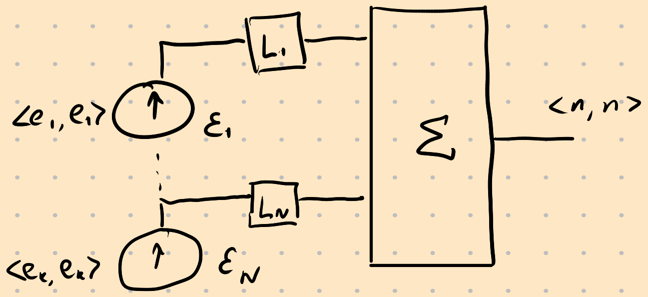
То есть если смотреть на шум в осциллографе, получаем, что диапазон сигнала на картинке есть $[-3\sigma; +3\sigma]$, т.е. 6σ. Отсюда можно „на глаз" получить $|X(f)|^2$.

Полоса пропускания

Шумовая полоса – площадь под графиком $K(j\omega)$. Фильтр можно задать его + центральной частотой.

$$\Delta\Omega = \int_0^\infty \left| \frac{K(j\omega)}{K_0} \right|^2 d\omega$$ – шумовая полоса

Суммирование шумов



$$\langle n, n\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} (e_i * h_i), \sum_{k=1}^{N} (e_k * h_k) \right\rangle (t) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{N} \langle (e_i * h_i), (e_k * h_k) \rangle (t) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{N} (\langle e_i, e_k\rangle * \langle h_i, h_k\rangle)(t)$$

Но т.к. e_i и e_k при $i \neq k$ – шумы из физически разных источников, то они некоррелированы: $\langle e_i, e_k\rangle = 0 \big|_{i \neq k}$, тогда получаем

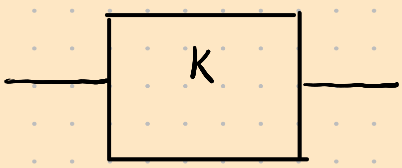
$$\langle n, n\rangle = \sum_{i=1}^{N} (\langle e_i, e_i\rangle * \langle h_i, h_i\rangle)(t)$$

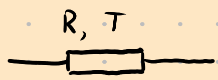
В частотной области:

$$n^2 = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 \cdot |K(j\omega)|^2$$

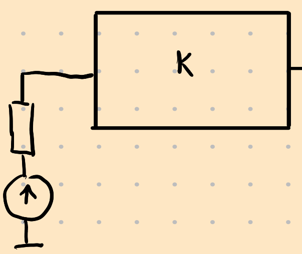
- Когда сигналы скоррелированы, то складываться будут амплитуды (считаем шум просто сигналом)
- Если они некоррелированы, то складываться будут мощности.

Шумящий фильтр





плотность мощности теплового шума:
$e^2 = 4kT$



$|K^2| \cdot e^2 \cdot \underbrace{1{,}1}_{}$ сколько-то (коэф-т шума)

Считаем мощность шума резистора на входе как бы единичной.

Введём **коэффициент шума** $K_ш = 20 \lg \left(\frac{e_{вых}}{|K|^2 e_{вх}} \right)$

$K_ш < 3$ дБ – малошумящие системы, $K_ш > 10$ дБ – обычные

Как уменьшить шумы в системе

1. Уменьшить температуру (раз в 10)
2. Уменьшить число шумящих резисторов

Причина шума – наличие канала преобразования электрической энергии в тепловую (и назад). Закон Джоуля – Ленца

Все чисто реактивные эл-ты не обладают тепловым шумом.