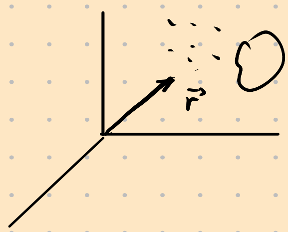
Равновесие



$\vec r = \vec r_0 = const$ — для всех т. $\Rightarrow$ система в равновесии в данной с.к.

$\vec r = \vec r(q)$ для стац. сис-м (связи стационарны)

Полож. равновес. (п.р.) обоб. точки $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(x = \begin{pmatrix} q \\ \dot q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} \right)$

Если q_0 — п.р., в стац. сис-ме $\Leftrightarrow$ $Q(q_0, 0, t) = 0$

Если $Q = -\nabla \Pi$, то в п.р. $\nabla \Pi = 0$.

Принцип вирт. перемещ.

$\vec r = \vec r_0$ (набор точек) яв-ся п.р. $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{\forall}}\, \delta \vec r$ из п.р. $\to$ $\delta A = \int \vec F \cdot \delta \vec r \, dm = 0$.

Об условии $Q = 0$

Пример

$\ddot x = \alpha x^\beta$, $\beta \in (0;1)$ („Сила" $m\alpha x^\beta$ равна 0 в т. 0 яв-ся ли т. 0 полож. равновес.?)

$x(0) = 0$, $\dot x(0) = 0$

1. $x = 0$ — реш-е.
2. Рассм. $x = at^b \not\equiv 0$

$$ab(b-1)t^{b-2} = \alpha a^\beta t^{\beta b}$$

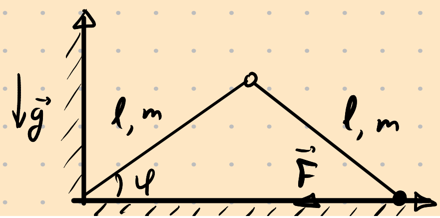
$b - 2 = \beta b \Rightarrow b = \frac{2}{1-\beta} > 0 \Rightarrow x(0) = 0$, причём $\dot x(0) = 0$ тоже.

$$\frac{2(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = \alpha a^{\beta-1} \Rightarrow a = \left[\frac{2(1+\beta)}{\alpha(1-\beta)^2} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Как так? 2 реш-я для нач. усл. $x = 0$, $\dot x = 0$.

А потому что αx^β не удовл. усл. Липшица! Из-за этого т. Коши не работает.

Задача 1



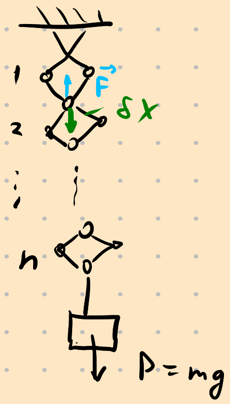
$$\Pi = 2lF\cos\varphi + mgl\sin\varphi$$

$$\Pi_{,\varphi} = mgl\cos\varphi - 2lF\sin\varphi = 0$$

$$F = \frac{mg}{2}\,\mathrm{ctg}\,\varphi$$

Чем острее угол, тем меньше нужна сила.

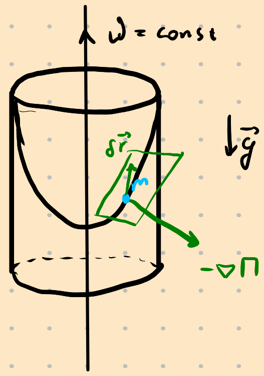
Задача 2



$$\delta A = nP\delta x - F\delta x = 0$$

$$F = nP$$

Задача 3



Жидкость во вращ. сосуде.

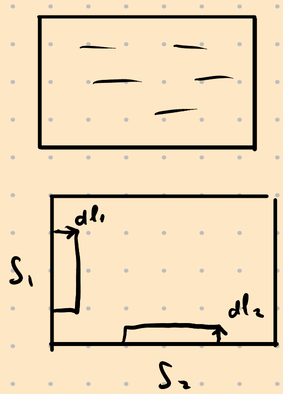
Т. массой m должна нах-ся в равновесии, иначе форма пов-ти будет меняться.

Во вращ. сис-ме отсчёта:

$$\vec F = -\nabla\Pi \qquad \Pi = mgz - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$$\delta A = -\nabla\Pi\,\delta\vec r = 0 = -d\Pi \Rightarrow \Pi = const \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + C$$

Задача 4



Несжим. жидкость.

Д-ть, что давл. жидк-ти равномерно

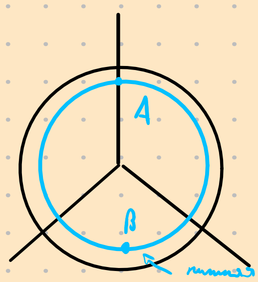
$$\begin{cases} \delta A = P_1 S_1 dl_1 + P_2 S_2 dl_2 = 0 \\ S_1 dl_1 + S_2 dl_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dl_2 = -\frac{S_1}{S_2} dl_1 \Rightarrow \delta A = (P_1 - P_2)\, dl_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

Задача 5

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

– мат. т. движется по кривой в поле тяжести



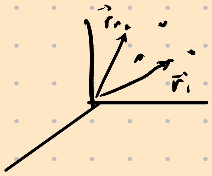
Найти полож. равновесия

1. Из принципа вирт. перемещ. – т. A и B, т.к. $\delta\vec r \perp m\vec g$

Формальное решение:

- Если связь задана в виде $F(\vec r_1, \dots, \vec r_n, t) = 0$, то $f_{i,\vec r_k} \cdot \delta \vec r^{\,k} = 0$

! Это градиент!



$$\begin{cases} 2x\,\delta x + 2y\,\delta y + 2z\,\delta z = 0 \\ \delta x + \delta y + \delta z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Из принципа вирт. перемещ. $\delta A = mg\,\delta z \Rightarrow \delta z = 0$

$$\begin{cases} x\,\delta x + y\,\delta y = 0 \\ \delta x + \delta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta y = -\delta x, \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

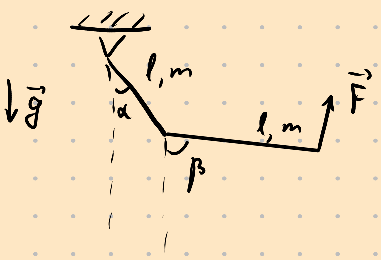
$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ z = 1 - 2x \end{cases}$$

$$2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

2. Поиск условного экстремума потенциальной энергии при усл. этих связей

Задача 6



$F = \text{const}$

Найти п.р.

$$\begin{cases} Q_\alpha = -\Pi^g_{,\alpha} + Q^F_\alpha = 0 \\ Q_\beta = -\Pi^g_{,\beta} + Q^F_\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Pi = -\frac{3}{2} mgl\cos\alpha - \frac{1}{2} mgl\cos\beta$$

$$Q^F_\beta = Fl \qquad Q^F_\alpha = Fl\cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} mgl\sin\alpha + Fl\cos(\alpha-\beta) = 0 \\ \frac{1}{2} mgl\sin\beta + Fl = 0 \end{cases}$$

$\sin\beta = \frac{2F}{mg}$ – есть 3 случая: 1. $F > mg/2$ – нет п.р.

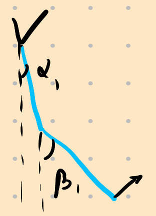
2. $F = mg/2$ – $\beta = \frac{\pi}{2}$

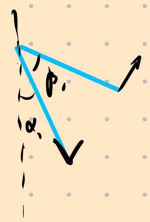
3. $F < mg/2$ – $\beta_1 = \arcsin\frac{2F}{mg}$, $\beta_2 = \pi - \beta_1$

$$-\frac{3}{2} mg\sin\alpha + F(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 0$$

$$F\cos\beta + \left(F\sin\beta - \frac{3}{2}mg\right)\operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \underbrace{\frac{F\cos\beta}{\frac{3}{2}mg - F\sin\beta}}_{f(\beta)} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_1 = \operatorname{arctg} f(\beta_1) \\ \alpha_2 = \pi + \alpha_1 \end{matrix}\right\} - \beta_1 \quad \left.\begin{matrix} \alpha_3 = -\alpha_1 \\ \alpha_4 = \pi - \alpha_1 \end{matrix}\right\} - \pi - \beta_1$$





Устойчивость пост. матриц

$\dot{x} = Ax$, A = const,

$x = he^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни

$x = 0$ — ас. уст. $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\, \lambda_i < 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$

Необх. усл. $\operatorname{sign} a_n = \dots = \operatorname{sign} a_0$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & \dots & & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad a_0 > 0 \text{ в } P(\lambda)$$

Матрица Гурвица

$P(\lambda)$ уст. $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$

Критерий Рауса – Гурвица в форме Льенара и Шипара

1. Вып. усл-е $a_i > 0$, помним приведён к виду $a_0 > 0$.
2. $\left[\begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array} \right.$ (либо, либо) — проверяется то, что удобнее

$\exists\ P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$. Проверим, что необх. усл. уст. совпадает с критерием:

$P(\lambda) \mapsto \frac{a_2}{a_0} \lambda^2 + \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_0} & 1 \\ 0 & \frac{a_2}{a_0} \end{pmatrix}$$

1. Р.-Г.:

$\frac{a_1}{a_0} > 0$

$\frac{a_1 a_2}{a_0^2} > 0$ $\Rightarrow \operatorname{sign} a_2 = \operatorname{sign} a_1 = \operatorname{sign} a_0$

2. Р.Г. в форме Л.-Ш.:

То же самое

Линеаризация ур-ий движения мех. сис-м часто приводят к ур-ям вида:

$$\underbrace{A\ddot{q}}_{\text{из кин. энергии}} + \underbrace{B\dot{q}}_{\text{гироскоп., и диссипат. силы}} + \underbrace{Cq}_{\text{линеаризация консервативных сил}} = 0$$

Нормальная форма Коши: $\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = -A^{-1}Cq - A^{-1}Bu \end{cases}$ (1) $\longleftrightarrow$ $\dot{x} = Dx$

Как искать решения? Как получить $P(\lambda)$?

Покажем, что хар. мн-н сис-мы (1) ищется след. образом:

$$q = he^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda E - D) = \begin{vmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda E - D) = 0 \iff \det\left(F\,(\lambda E - D)\right) = 0 \quad \forall F,\ \det F \neq 0$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} \sim$$

$\lambda = 0$ - не реш. е

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ \lambda C & \lambda^2 A + \lambda B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix} = 0 \iff \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \quad \text{ЧТД}$$

__Пример__

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} - x + y = 0 \end{cases}$$

- исследовать устойчивость п.р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -1 & \lambda^2 + \beta\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \beta\lambda + 1 - \alpha = 0$$

$$\lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + (1-\alpha) = 0$$

Т.к. $a_4 = 1 > 0$ то все коэф. должны быть > 0 по необх. усл. $\Rightarrow$

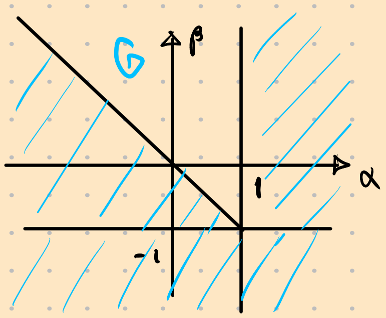
$\Rightarrow$ приведение делать не надо, используем кр. Р.-Г. в форме Л.-Ш.

Из необх. усл. $\beta > -1$, $\alpha < 1$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ \beta+1 & \beta+2 & \beta+1 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & \beta+1 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \beta+1 > 0 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & \beta+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta+1)^2(\alpha+\beta) > 0 \Rightarrow \beta > -\alpha$$



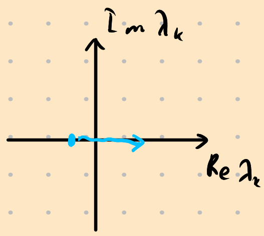
G – область устойчивости

Поведение корней на ∂G:

1. $\alpha = 1$

$$P(\lambda) = \lambda\,[\underbrace{\lambda^3 + \ldots + \beta+1}_{\text{уст. полином (можно показать)}}]$$

Появился корень $\lambda_k = 0$

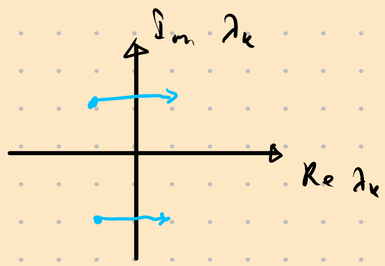


„жёсткая потеря уст."

2. $\beta = -\alpha$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + 1+\beta$$

$\pm i$ – корень (можно показать)



„мягкая потеря уст."

Первый метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$ – автономная СДУ (нелинейная)

$X(x)$ – непр. дифф. в т. $x=0$, а $X_{,ij}$ – $\exists$ и огр. в окр-ти н.р.

Тогда эту си-му можно линеаризовать: $\dot{x} = Ax + f(x)$

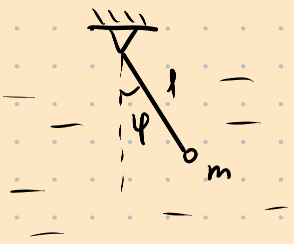
$A = X^i_{,j}(0)$ $\quad \|f\| \le a\|x\|^2$ (разл. в ряд Тейлора)

Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Если в сис-ме $\dot{x} = Ax$ $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ $\forall i = \overline{1,n}$, λ_i – корни $P(\lambda)$ (хар. многочлен), то п.р. $x = 0$ – ас. уст. и в линеаризованной, и в исходной сис-ах.

Если $\exists \lambda_i$: $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$, то п.р. неуст. в обеих сис-ах.

<u>Пример</u>



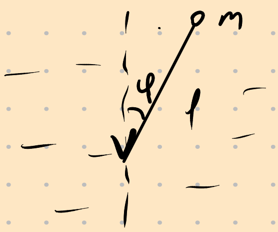
$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

Исследовать п.р. $\varphi = 0$ на устойчивость

Линейное прибл.: $ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0$

$$\underset{0}{\underset{\vee}{ml^2}}\lambda^2 + \underset{0}{\underset{\vee}{\beta l}}\lambda + \underset{0}{\underset{\vee}{mgl}} = 0 \quad \text{– полином} \quad \Rightarrow \text{устойчив} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ п.р. $\varphi = 0$ – ас. уст. по т. Ляпунова.



$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi = 0$$

$$\downarrow \text{лин.}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} - mgl\varphi = 0$$

$\varphi = 0$ – неуст. по т. Ляпунова.

Второй (прямой) метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$ – автоном. СДУ

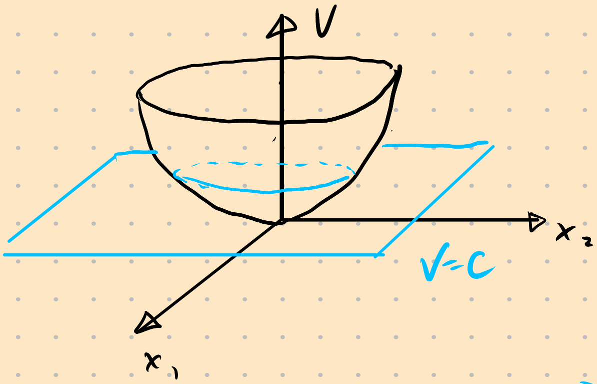
$V(x)$, $V(0) = 0$ – ф-ия Ляпунова (скалярная). $V(x)$ непр. дифф.

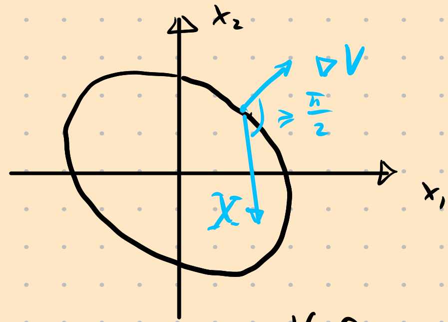
Производная в силу сис-мы: $\dot{V}_X = \nabla V \cdot X = V_{,i} X^i$.

Теорема Ляпунова

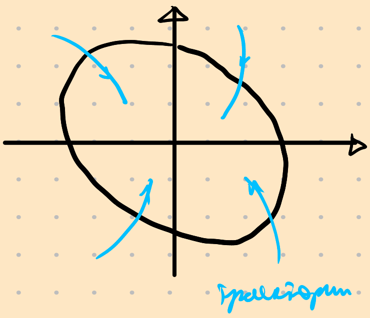
Если в окр-ти п.р. $U_\varepsilon(0)$ $\exists V(x)$: $V(x)$ имеет в $x = 0$ строгий min, а $\dot{V}_X \le 0$ в $U_\varepsilon(0)$ $\Rightarrow$ п.р. $x = 0$ – устойчиво.

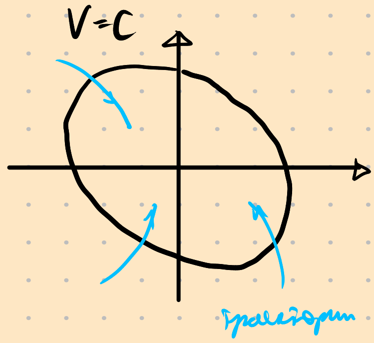
Когда есть мнимые корни хар. многочлена, то в лин. сис-ме появляются период. реш-я с sin и cos $\Rightarrow$ в исходной (с тонкой добавкой) они могут стать как уст., так и неуст. Эта т. решает проблему.





$V = C = \text{const}$



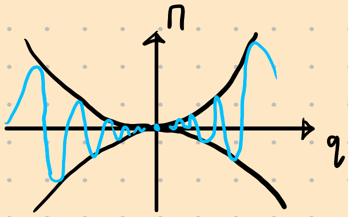


Теорема Лагранжа – Дирихле

Если $\Pi(q) \to$ $q=0$ – строгий min $\Rightarrow$ $q=0$ – уст. п.р. $(V=E)$

Это достаточное, но не необх. усл-е:

$$\Pi = \begin{cases} q^2 \sin \frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q=0 \end{cases}$$



Из усл-я, что $T+\Pi=const$, $\qquad V=E=T+\Pi$

следует, что п.р. $q=0$ уст. (если оно неуст., то т. уходит далеко от п.р. $\Rightarrow$ надо много E, а её мало при $q\to 0$), а усл. Л.-Д. не вып.

Но: если Π – аналитическая ф-ия, то вообще-то т. обратима (доказано в 80-х).

Исследование усл-я $\Pi \to \min$

$$\Pi(q) = \cancel{\Pi(0)}^{\,0} + \underbrace{\Pi_{,i}(0)}_{=0\,(q=0\text{ - п.р.})} q^i + \frac{1}{2}\underbrace{\Pi_{,ij}(0)}_{C_{ij}} q^i q^j$$

$$\Pi \approx \frac{1}{2} q^T C q = \Pi_2(q) \quad \Big| \quad \Pi_2(q) > 0 \Rightarrow \Pi \to \min$$

$$\begin{array}{ccc} & \Delta_1 & \Delta_n \\ C = & \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} & \end{array} \qquad \begin{cases} \Delta_i > 0 \\ i=\overline{1,n} \end{cases}$$

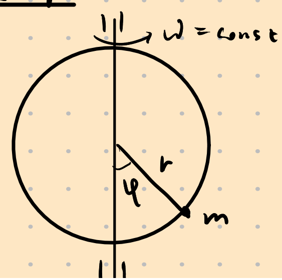
Теорема Ляпунова-1

Если $\exists\, q'$: $\Pi_2(q') < 0$, то п.р. $q=0$ неустойчиво.

Теорема Ляпунова-2

Если по членам наинизшего порядка разложения $\Pi(q) = \underbrace{\Pi_m(q)}_{\text{однор. многочлен ст. } m} + \dots$ установлено, что $\Pi(q) \to \max$ в $q=0$ $\Rightarrow$ $q=0$ – неуст.

<u>Пример</u>



Найти полож. относ. равновесия и иссл. их уст-ть.

$$\Pi = mgr(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2\varphi \sim$$

$$\sim \frac{g}{\omega^2 r}(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2}\sin^2\varphi$$

П.р. $\Pi_{,\varphi}=0 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2 r}\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi = 0 = \frac{g}{\omega^2 r}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

1: $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi_1 = 0\\ \varphi_2 = \pi\end{array}\right.$

2: $\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 r} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega < \sqrt{\frac{g}{r}} \text{ — нет реш-ий}\\ \varphi_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right),\ \omega \geq \sqrt{\frac{g}{r}}\end{array}\right.$

Исследуем устойчивость п.р.:

Пусть φ_* — любое из п.р., $\delta\varphi$ — отклонение от него, тогда

$\Pi \simeq \frac{1}{2}\Pi_{,\varphi\varphi}(\varphi_*)\,\delta\varphi^2$

$\Pi_{,\varphi\varphi} = \frac{g}{\omega^2 r}\cos\varphi - \cos 2\varphi$

$\Pi_{,\varphi\varphi}(0) = \frac{g}{\omega^2 r} - 1 \left\{\begin{array}{l} >0,\ \omega < \sqrt{g/r} \text{ — устойчиво по т. Л.-Д.}\\ =0,\ \omega = \sqrt{g/r} \text{ — ?}\\ <0,\ \omega > \sqrt{g/r} \text{ — неуст. по т. Л.-1 (или 2)}\end{array}\right.$ — $\varphi_{1,2}$

$\Pi_{,\varphi\varphi}(\pi) = -\frac{g}{\omega^2 r} - 1 < 0 \Rightarrow$ неуст. по т. Л.-1 (или 2)

$\Pi_{,\varphi\varphi} = \frac{g}{\omega^2 r}\cos\varphi - 2\cos^2\varphi + 1$

$\Pi_{,\varphi\varphi}(\varphi_{3,4}) = -\frac{g^2}{\omega^4 r^2} + 1 \left\{\begin{array}{l} >0,\ \omega > \sqrt{g/r} \text{ — уст. по т. Л.-Д.}\\ =0,\ \omega = \sqrt{g/r} \text{ — ?}\\ <0,\ \omega < \sqrt{g/r} \text{ — нет п.р. (не реализуемо)}\end{array}\right.$

Рас-им отдельно $\omega = \sqrt{g/r}$

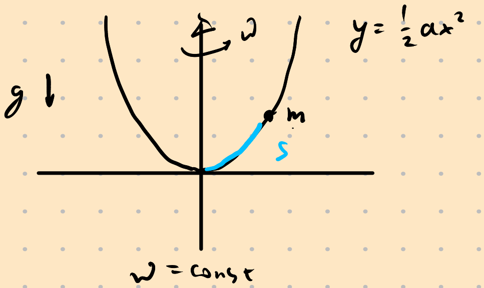
$\Pi \sim 1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi \approx 1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\varphi - \varphi^3/6\right)^2 =$

$= \underbrace{\varphi^4\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right)}_{>0}$ — удерживаем члены наименьшего (по степени) порядка

$\Rightarrow \min \Rightarrow \varphi = 0$ — уст. по т. Л.-Д.

Пример 2

Допустим, вращается парабола:



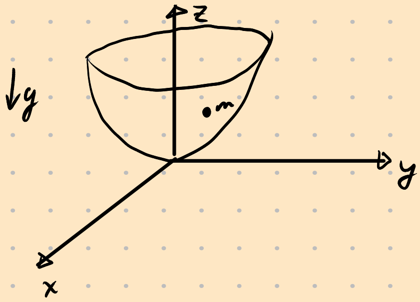
$\Pi = \frac{1}{2}amg x^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ (коор-та x — обобщ.)

$\omega = \sqrt{ag} \Rightarrow \Pi \equiv 0.$

1. Любая т. параболы — п.р.
2. Устойчивость: выберем $q = s$, тогда

$T = \frac{m\dot{s}^2}{2} \Rightarrow \ddot{s} = 0 \Rightarrow s = s_0 + \dot{s}_0 t \,\Big|_{t\to\infty} \to \infty \Rightarrow$ любое п.р. неуст. по опр-ю.

Пример 3



Найти п. р., уст-ть

$$\Pi = mgz(x,y) \sim z(x,y)$$

$$\begin{cases} z_{,x} = \alpha x + \beta y = 0 \\ z_{,y} = \beta x + \gamma y = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) = \frac{1}{2} q^T C q, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$\det C \neq 0 \Rightarrow$ п.р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ – единств.

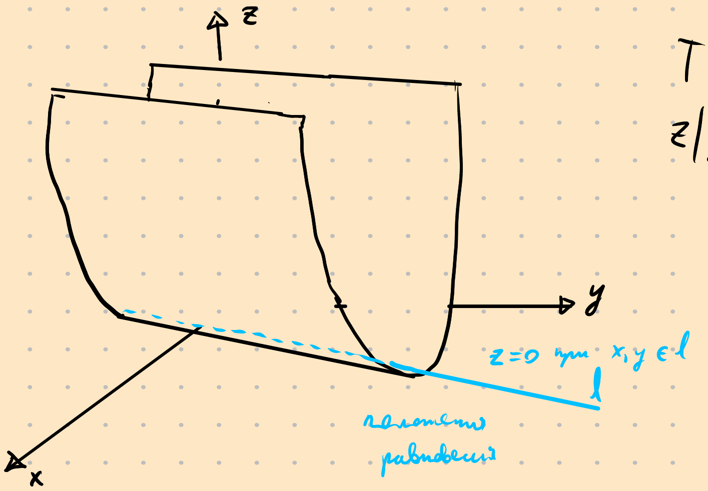
$\det C = 0$ (но $C \neq 0$) $\Rightarrow$ $\alpha x + \beta y = 0$ – целая прямая решений
или $x = 0$, или $y = 0$, ...

Устойчивость:

$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ п.р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ уст. по т. Л.-Д.

Если эта матрица невыр. и знаконеопределена или им. max, то п.р. неуст. по т. Л-1.

Случай $\det C = 0$: $\quad \Pi \sim \frac{1}{2}(\eta x + \mu y)^2 \geq 0$



$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}(x,y))$$

$z|_{x,y \in l} = 0 \Rightarrow \exists$ реш-е $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{e}(t + t_0)$ –
– движение вдоль жёлоба
(неуст. п.р.)

Задача 1

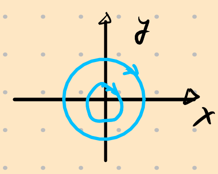
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - x^5 y \\ \dot{y} = x - y^5 + x y^6 \end{cases}$$

П.р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ – неас. не уст.

Линеаризᴎ. сис-ма: $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ – осциллятор!!!

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$



$|\lambda E - A| = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ — 1-й метод Ляпунова бесполезен

$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ — с кв.-ф. удобно работать

$\dot{V}_x = x(-y - x^3 - x^5 y) + y(x - y^5 + xy^6) \Rightarrow V$ — первый интеграл линейной сис-мы

(т.к. $\dot{V}$ в силу линейной сис-мы $\equiv 0$).

малость на фоне 1 в окр-ти $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{V}_x = -x^4 - x^6 y - y^6 + xy^7 = -x^4(1 + x^2 y) - y^6(1 - xy) \sim -x^4 - y^6 < 0$ —

— устойчивость (даже асимптотическая по т. Ляпунова к-рую ещё не прошли).