

# ОДΥ - обыкновенные дифференциальные уравнения

## ОДΥ в одн. члене

$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$  - обыкновенные - производные по одной переменной (x)

Расс-умим расс-умим:

$$\begin{cases} F_1(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

## Ур-я 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

- Еще расс-умим: ур-я 1-го порядка, разделимые о-е. произ-:

$$\left. \begin{aligned} y' &= F(x, y); & dy &= dF(x, y) dx \\ P(x, y) dy + Q(x, y) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ур-я в групп. форме}$$

- Упрощенный вариант: ур-я с разделимыми переменными

$$F(x) dx + g(y) dy = 0; \text{ решение:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx \quad G(y) = \int g(y) dy$$

$$dF(x) + dG(y) = 0$$

$$d(F(x) + G(y)) = 0$$

$$F(x) + G(y) = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \int f(x) dx + \int g(y) dy = 0$$

С2 №4

$$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{y(1+y)} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\ln \left| \frac{y}{(1+y) \cos x} \right| = C_3$$

$$\frac{y}{(1+y) \cos x} = \pm e^{C_3} \quad C \in \mathbb{R} \quad (C=0 - \text{ тоже решение!})$$

$$\frac{y}{(1+y) \cos x} = C \quad \text{или} \quad y = -1 \quad (\text{решение тривиальное, когда мы делили!})$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{(1+y) - y}{y(1+y)} dy = \int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} \right) dy = \ln \left| \frac{y}{1+y} \right| + C_1$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C_2$$

$$y = \frac{C \cos x}{1 - C \cos x}$$

Ф № 67 \*

$$3y^2 y' + 16x = 2xy^3 \quad \text{Найти } y(x) - \text{оп. в } U(+\infty)$$

$$3y^2 y' = 2x(y^3 - 8)$$

$$\int \frac{3y^2 dy}{y^3 - 8} = \int 2x dx \quad - \text{положим } y^3 = 8$$

$$\ln |y^3 - 8| = x^2 + C,$$

$$y^3 - 8 = \pm e^{C_1} e^{x^2}$$

$$C \in \mathbb{R} (8 + \dots, 0! \quad y^3 = 8 \text{ тоже реш.)}$$

$$y^3 - 8 = C e^{x^2}$$

$$y(x) - \text{оп. при } C = 0.$$

## Ортогональные траектории

Расс-им 2 ортогональные прямые:



$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$k_2 = \tan \varphi_2 = \tan(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -\cot \varphi_1 = -\frac{1}{\tan \varphi_1} = -\frac{1}{k_1}$$

$$k_1 k_2 = -1 \quad y \perp \text{прямая.}$$

Пусть им. гр-е:

$$y' = F(x, y)$$

Ортогональные траектории:

$$y' = -\frac{1}{F(x, y)}$$



- интегральные кривые гр-е  
(основные траектории)

Пример

$y = Cx^2$  - семейство кривых. Найти ортгон. траектории.

$$C = \frac{y}{x^2}$$

$$0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}$$

$$y'x^2 = 2xy$$

$$y' = 2 \frac{y}{x}$$

Дал опр-е. уравн:  $y' = -\frac{x}{2y}$

$$2y dy + x dx = 0$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C \quad - \text{гип-е эллипс}$$



## Однородные уравнения

Сводится к гп-ю с разделимыми переменными

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Замена:  $y = x z(x)$

$$y' = z + x z'$$

$$x z' + z = f(z)$$

$$z' + z - f(z) = 0 \quad \left( \frac{dz}{z - f(z)} + dx = 0 \right)$$

## гп-е, сводящееся к однородному

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Замена:  $x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0$

$= 0$  (в нуль выдвинуто  $x_0, y_0$ )

$$\eta' = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta + \overbrace{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}^{=0}}{a_2 \xi + b_2 \eta + \overbrace{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}^{=0}}\right)$$

Получим однородное гп-е

Ф. № 117

$$(y+2) dx = 2x+y-4 dy$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \quad - x_0, y_0$$

$$x = \xi + 3 \quad y = \eta - 2$$

$$\eta d\xi = (2\xi + \eta) d\eta$$

$$\frac{\eta}{\xi} = z$$

$$z \xi d\xi = (2\xi + z\xi)(z d\xi + \xi dz)$$

$$(z\xi - z(2\xi + z\xi)) d\xi = \xi \cdot (2\xi + z\xi) dz$$

$$z\xi(1-2-z)d\xi = \xi^2(2+z)dz \quad | \quad \xi=0 \text{ - не переносим}$$

$$-z(1+z)d\xi = \xi(2+z)dz$$

$$-\frac{d\xi}{\xi} = \frac{z+z}{z(z+1)} dz$$

$$-\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \left( \frac{2}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$\frac{z^2}{z+1} \cdot \xi = C$$

$$\frac{y^2}{y+z} = C \Rightarrow \frac{(y+z)^2}{y+x-1} = C \Rightarrow \int_{x+y=1} (y+z)^2 = C(y+x-1) \quad (\text{не переносим } x+y=1)$$

### Линейное ур-е I порядка

$$y' + a(x)y = b(x) \quad - \text{ неоднородное}$$

Решим линейное однородное ур-е:

$$y' + a(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + a(x)dx = 0$$

$$\ln|y| + \int a(x)dx = 0$$

$$y = C_0 e^{-\int a(x)dx} \quad \leftarrow \text{общее решение}$$

$$y = C_0 \varphi(x) \quad - \text{структура решения однородного ур-я; } \varphi(x) - \text{частичное решение}$$

### Метод вариации постоянной: (C\_0 меняется на ф-ию)

Занема  $y = C(x) \cdot \varphi(x)$  в неоднородном ур-ии:

$$C' \varphi + C \varphi' + a C \varphi = b$$

$$C' \varphi + C \underbrace{(\varphi' + a \varphi)}_{=0 \text{ (}\varphi\text{-реш-е однород. ур-я)}} = b$$

$$C'(x) \varphi(x) = b(x) \quad - \text{ ур-е с разд. переменными}$$

C3.37

$$x^2 y' = 5xy + 6, \quad y(1) = 1$$

$$\text{Решим однородное: } x^2 y' = 5xy$$

$$\frac{dy}{y} = 5 \frac{dx}{x}$$

$$y = x^5 C_0 \quad | \quad y(x) = C_0(x) x^5$$

$$x^2 (C' x^5 + C 5 x^4) = 5 x C x^5 + 6$$

$$C' = \frac{6}{x^7} ; \quad C = -\frac{1}{x^6} + D$$

$$y = \left(-\frac{1}{x^6} + D\right) x^5 \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + D x^5 \text{ - pem-e}$$

$$y(1) = 1 ; \quad 1 = -1 + D \Rightarrow D = 2$$

$$y = -\frac{1}{x} + 2x^5$$

Nº 1

$$xy' - 2y = 2x^4$$

$$\text{OY: } xy' - 2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + C$$

$$y = C x^2$$

$$\text{BN: } y = C(x) x^2$$

$$x [C' x^2 + 2C x] - 2C x^2 = 2x^4$$

$$C' x^3 = 2x^4$$

$$C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C$$

$$y = (x^2 + C) x^2 = x^4 + x^2 C$$

Nº 2

$$\text{Bez BN: } xy' - 2y = 2x^4 \quad | \cdot x$$

$$x^2 y' - 2xy = 2x^5$$

$$\frac{x^2 y' - 2xy}{x^4} = 2x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C \Rightarrow y = x^4 + C x^2$$

- Отличные могут давать так: переобозначим всё так, чтобы получилось каноническое уравнение. (См. БП)

- Можно переобозначить  $y$  и  $x$  в групповом уравнении:

$$(1+y^2) dx + (2xy - 1) dy = 0$$

$$(1+y^2) \frac{dx}{dy} = 1 - 2xy \quad \text{— ум. гр-е}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

$$\text{ОУ: } \frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$$

$$x = \frac{C}{1+y^2}$$

$$\text{БП: } x = \frac{C(y)}{1+y^2} \quad \text{Ответ: } C(y) = y + C, \quad x = \frac{y+C}{1+y^2}$$

## Уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad \text{— приводится к линейному!}$$

$$n=0 \rightarrow \text{ЛН}$$

$$n > 0 \Rightarrow y=0 \text{ — реш.}$$

$$n=1 \rightarrow \text{ОЛН}$$

$$n < 0 \Rightarrow y=0 \text{ — не реш.}$$

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$$

$$\text{Замена: } z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n)y^{-n} y' = (1-n) \frac{y'}{y^n}$$

$$\text{Получим } (1-n)z' + a(x)z = b(x) \quad \text{— ЛН}$$

№ 4

$$y' - y + 2xy^3 = 0 \quad | \quad y=0 \text{ — реш.}$$

$$2x = \frac{z'}{z} + z$$

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$$

$$z = \frac{1}{y^2} \quad z' = -\frac{2}{y^3} y'$$

$$\text{ОУ: } \frac{dz}{dx} + 2z = 0$$

$$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow z = C e^{-2x}$$

$$\text{БП: } z = C(x) e^{-2x}$$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x$$

$$C'(x) = 4xe^{2x}$$

$$C(x) = \int 4xe^{2x} dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$$

$$\frac{1}{y'} = (2xe^{2x} - e^{2x} + C) \cdot e^{-2x}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y' = ((2x-1) + Ce^{-2x})^{-1} \\ y = 0 \end{cases}$$

## Уравнение Рундкату

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$$

Пусть  $y_0$  - решение

$y = z + y_0$   $z$  - новая неизв. ф-ция  $\Rightarrow$  ур-е Бернулли

№5

$$x^2 y' - 5xy + x^2 y^2 + 8 = 0$$

$$y_0 = \frac{k}{x}$$

$$- \frac{x^2 k}{x^2} - \frac{5xk}{x} + x^2 \frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$$

$$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$$

$$k=2, k=4$$

Сделаем замену  $y = z + \frac{2}{x}$ :

$$x^2 \cdot (z' - \frac{2}{x^2}) - 5x(z + \frac{2}{x}) + x^2(z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2}) + 8 = 0$$

$$x^2 z' - z x + x^2 z^2 = 0 \quad | : x$$

$$x z' - z + x z^2 = 0$$

$$\frac{z' x - z}{z^2} = -x \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)' = x$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow \frac{x^2}{xy-2} = \frac{x^2}{2} + C; y = \frac{2}{x}$$

## Уравнение в полных дифференциалах

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad - P \text{ и } Q \text{ непр.}$$

$$\text{Пусть } P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y) \quad - F \text{ непр. групп. в } G \subset \mathbb{R}^2$$

$$\exists F: P = \frac{\partial F}{\partial x}, Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\text{Реш-е: } F(x,y) = C \quad (\text{т.е. } F - \text{потенциал})$$

Пусть  $F$  - глобальн. непр. групп. в  $G$ :

$$\text{Если } \exists P = \frac{\partial F}{\partial x}, Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

- должны быть равны!

- необходимо, чтобы была потенциальная

Условие эквивалентно, если область  $G$  односвязна.



№6

$$(1 + 3x^2 \ln y) dx + (3y^2 + \frac{x^3}{y}) dy = 0$$

$G = [y > 0]$  - односвязна

$$\exists F: \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

Можно угадать, но если нет:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 3x^2 \ln y \end{cases} \xrightarrow[\text{по } x]{\text{интегрируем}} F = x + x^3 \ln y + C(y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \frac{x^3}{y} \end{cases} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C$$

$$F = x + x^3 \ln y + y^3$$

## Интегрирование по частям

Если потенциальности сразу нет:

$$\mu P = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad - \text{надо решить их друг другу - конечно, так никак не получится.}$$

№7

$$(y - 3x^2 y^3) dx - (x + x^3 y^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 9x^2 y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 3x^2 y^2 \quad - \text{не равны}$$

$$y dx - x dy - 3x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy = 0 \quad | y=0 - \text{реш}, x=0 - \text{реш}$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = 3x^2 y dx - x^3 dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x^3 y) \Rightarrow \frac{x}{y} = x^3 y + C; \quad y=0; \quad x=0.$$



## Уравнения высшего порядка

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  - надо понизить порядок! может при  $y^{(n)} \neq 0$  придем!

### Методы понижения порядка

① Нет явного  $y$ :  $y' = z$ ,  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \rightarrow F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$

$$x y'' + x y'^2 + y' = 0, \quad y' = z; \quad y = \text{const} - \text{реш.е}$$

$$x z' + x z + z = 0 \quad | : x \neq 0 \text{ где упрощаю}$$

$$x \frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0, \quad \frac{1}{z} = u$$

$$- x u' + x + u = 0 \quad | : x^2$$

$$\frac{u - x u'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = \ln x + C, \quad \frac{1}{zx} = \ln x + C$$

$$z = y' = \frac{1}{x(\ln x + C)}$$

$$y = \int \frac{dx}{x(\ln x + C)} = \ln |\ln x + C| + C_1$$

$$\begin{cases} y = \ln |\ln x + C| + C_1 \\ y = \text{const} \end{cases}$$

②  $y_p$  - есть явное  $x$

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0; \quad y - \text{новая независ. переменная}$$

$$y' = z(y) - \text{новая ф-ца}$$

$$y'' = (y'_x)' = (y'_x)'_y \cdot y'_x = z \cdot z'_y$$

$$y''' = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})'_y \cdot y'_x = (z \cdot z'_y)'_y \cdot y'_x = (z'^2_y + z \cdot z''_{yy}) z = z \cdot z'^2_y + z^2 z''_{yy}$$

