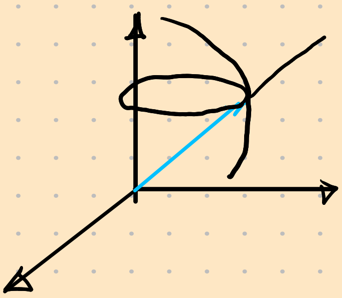
Кинематика материальной точки

Сферическая сис-ма



$$\vec{q} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ – ОНБ

$$\vec{v} = \dot{q}^i \cdot \vec{q}_i = \sum H_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$$

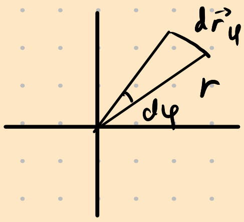
$$H_k = |\vec{r}_{,k}|$$

$$\vec{r}_{,r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow H_r = 1 \qquad H_\lambda = r\cos\varphi \qquad H_\varphi = r$$

Геометр. способ расчёта Ламе

$$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \simeq \vec{r}_{,a}\, dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a} \cdot dq^a$$



$$|d\vec{r}_\varphi| \simeq \underbrace{r}_{H_\varphi} d\varphi$$

$$(2):\ \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$$w_k = \vec{w} \cdot \vec{e}_k$$

$$\left(v^2/2\right)_{,\dot{r}} = \dot{r}\ ; \quad \frac{d}{dt}\left(v^2/2\right)_{,\dot{r}} = \ddot{r}$$

$$\left(v^2/2\right)_{,r} = r\left(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2\right) \overset{(4)}{\Rightarrow} w_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2\right)$$

2-й закон Ньютона в ковариантной форме

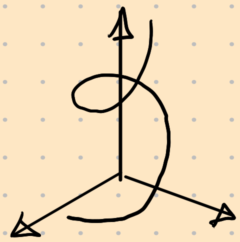
$$m\vec{w} = \vec{F} \quad \Big| \cdot \vec{g}_a$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,\dot{a}} - \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,a} = \vec{F} \cdot g_a = Q_a$$

$\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a} = Q_a$ – в любой криволин. сис-ме координат!

$$\frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a}\right] = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Движение по винтовой линии



$$\begin{cases} x^1 = a\cos\omega t \\ x^2 = a\sin\omega t \\ x^3 = bt \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

$$\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

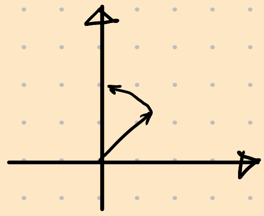
$$\vec{w}_\tau = 0$$

$$\vec{w}_n = a\omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$$

Задача

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \qquad a,\ b = const$$



$r(\varphi) - ?$ $\qquad w_r(r), \quad w_\varphi(r)$

$r(0) = r_0$

$\varphi(0) = \varphi_0$

$V_r = \dot{r}$

$V_\varphi = r\dot{\varphi}$

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{br}$$

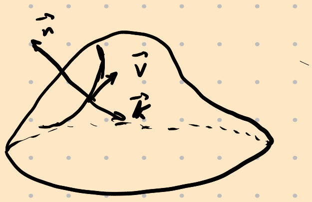
$$r - r_0 = \frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \leftarrow \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^5$$

$$\dot{\varphi} = b/r^2$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\underbrace{r^2\dot{\varphi}}_{b}) = 0$$

№ 1.40



$q^1 = const$

$V = const$

$$\vec{k} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad \text{(вектор кривизны)}$$

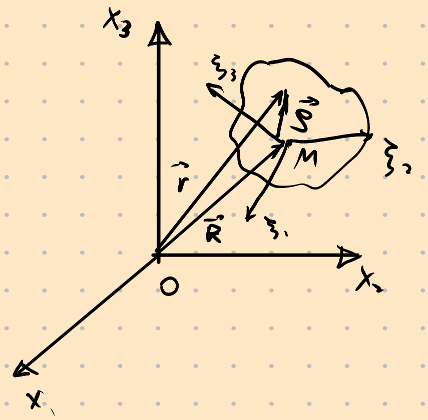
$\vec{r}_{,1}$ — нормаль

$\vec{r}_{,2}, \ \vec{r}_{,3}$ — касательные

$$\begin{cases} \vec{w}\cdot\vec{r}_{,2} = 0 \\ \vec{w}\cdot\vec{r}_{,3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

условие движения по геодезической

Кинематика твёрдого тела



$\vec r = \vec R + \vec\rho$

$\vec\rho = A(t)\vec\rho_0$

$\vec R(t)$, $A(t)$ - зад. => движ. т. задано.

$A^T A = E$

$\det A = 1$ — ортог. матрицы обр-ют группу

Рас-им $A(t)$: $A(0) = E$

$\frac{d}{dt}\Big|\, A^T A = E \Rightarrow \dot A^T(0)\underbrace{A(0)}_{E} + \underbrace{A(0)}_{E}\dot A^T = 0$

$\dot A(0) = \hat\omega$: $\hat\omega^T = -\hat\omega$

$dt \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat\omega\, dt$

$\vec v = \dot{\vec r} = \underbrace{\dot{\vec R}}_{\vec v_0} + \dot{\vec\rho}$, $\rho = A\rho_0$

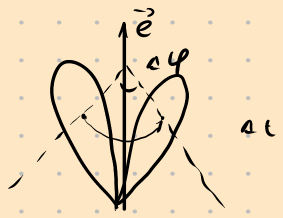
$\rho(dt) \approx (E + \hat\omega\, dt)\vec\rho_0 \Rightarrow \dot\rho|_{t=0} = \hat\omega\,\rho|_{t=0}$

$\dot{\vec\rho} = \hat\omega\vec\rho$

$\vec V = \vec V_0 + \hat\omega\vec\rho$

В R^3: $\hat\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat\omega\vec\rho = \vec\omega\times\vec\rho$, где $\vec\omega = \begin{bmatrix}\omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3\end{bmatrix}$ - угловая скорость

$\vec V = \vec V_0 + \vec\omega\times\vec\rho$ — ф-ла Эйлера



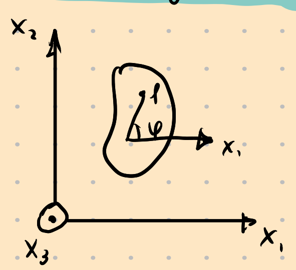
$\vec\omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec e\,\Delta\varphi}{\Delta t}$

$\vec e\,\Delta\varphi = \Delta\vec\varphi$ - вектор Эйлера

$\vec W = \dot{\vec V} = \vec W_0 + \vec\varepsilon\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$

Формула Ривальса, $\vec\varepsilon = \dot{\vec\omega}$ - угл. ускорение

Плоское движение



$\vec\omega = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}$, $\vec\varepsilon = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot\omega\end{bmatrix}$

$\omega = \dot\varphi$

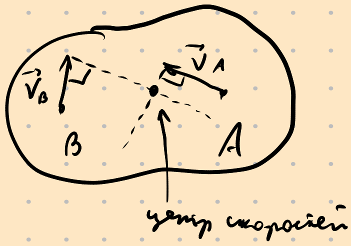
$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) = \vec\omega\,\cancel{(\vec\omega\vec\rho)}^{\,0} - \omega^2\vec\rho$

$\vec W = \vec W_0 + \vec\varepsilon\times\vec\rho - \omega^2\vec\rho$ — 2D Ривальс

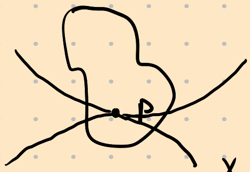
Мгновенные центры скоростей и ускорений

Центр скоростей: $P:\ \vec V_P = 0 = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec\rho_P$

$$\vec\omega \times \vec V_0 - \omega^2 \vec\rho_P = 0 \Rightarrow \rho_P = \frac{\vec\omega \times \vec V_0}{\omega^2}$$ — всегда есть

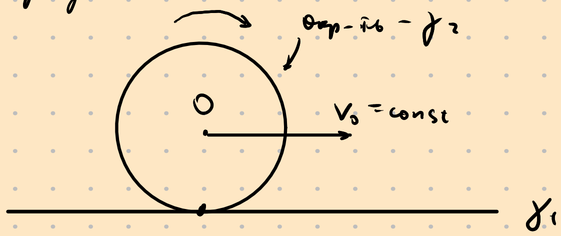


Но! P движется как в пр-ве, так и в теле — по центроидам



γ_2 — подв. центроида

γ_1 — неподв. центроида



Качение без проскальзывания

(в т. касания V тел равны)

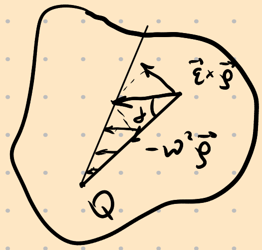
Центр ускорений Q

$$\vec W_Q = 0 = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\rho_Q$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q = 0$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^4 \vec\rho_Q + \omega^2 \vec W_0 = 0$$

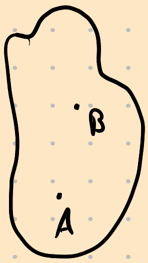
$$\vec\rho_Q = \frac{\vec\varepsilon \times \vec W_0 + \omega^2 \vec W_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Полезный факт (верно в 3D и в 2D)

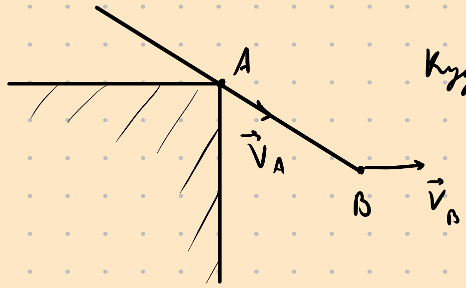
1.



$$\vec V_B = \vec V_A + \vec\omega \times \vec{AB} \quad \Big|\ \vec e_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec V_B \cdot \vec e_{AB} = \vec V_A \cdot \vec e_{AB}$$

2.



Куда направлена $\vec V_A$, если палка скользит по углу?

Ответ: вдоль AB:

$$\vec{AA'} = \vec{AA''} + \vec{A''A'}$$

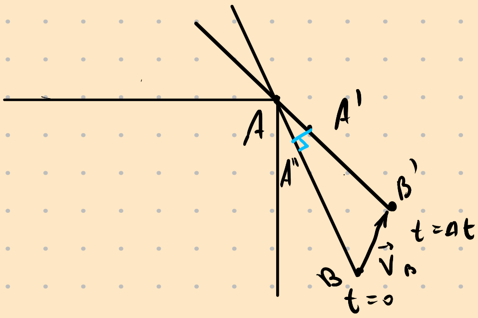
$$\vec{A''A'} \simeq AA''\Delta\varphi$$

$$\vec V_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\underbrace{\frac{\vec{AA''}}{\Delta t}}_{\text{коллинеарно стержню}} + \frac{\vec{AA''}\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA''}}{\Delta t} = \vec V_A$$

коллинеарно стержню — $\vec V_A$

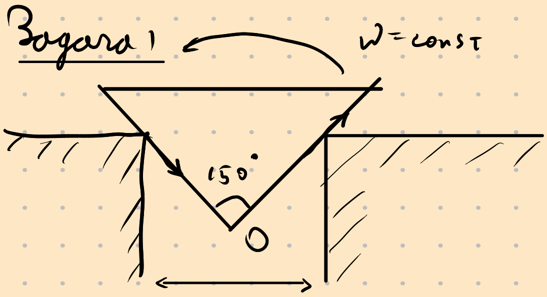
$\vec V_A$

0

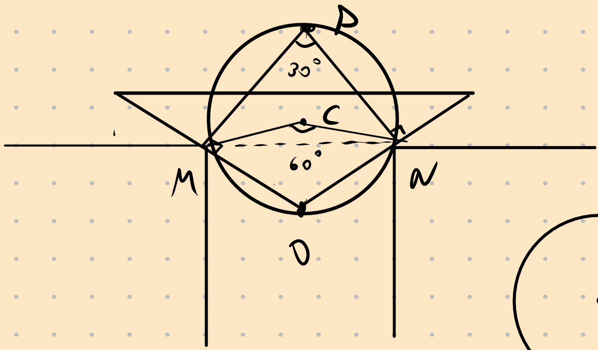


ЧТД

Задача 1

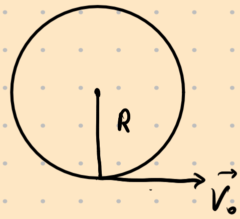


$W_0 = ?$



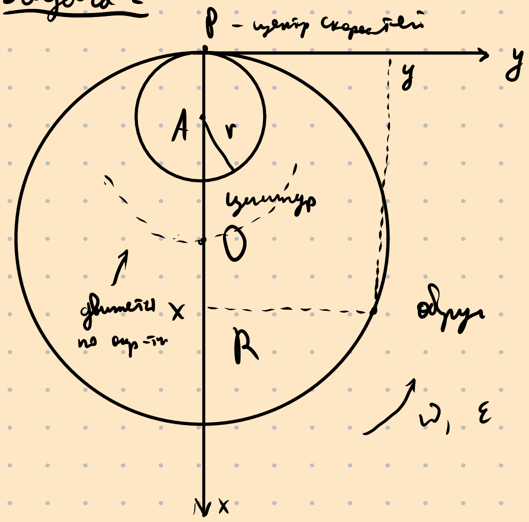
$MN = L = 2R\sin 30° = R$

$PO = 2L \qquad V_0 = 2\omega L$



$$W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$

Задача 2



Без проскальзывания

ω, ε заданы

$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

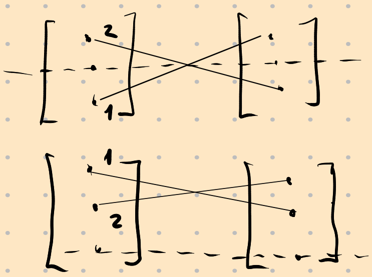
$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho}$

$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

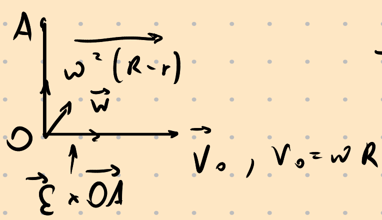
Траектория O – окр-ть с ц. A $\qquad \vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y-R \\ 0 \end{bmatrix}$

Полезная штука: (векторное умножение)

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix}$$



Отрезок AO – новое тело!



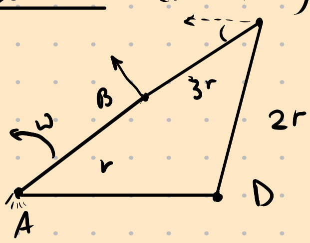
Ω – угл. скор. AO

$V_0 = \omega R = \Omega(R-r)$

$$\Omega = \frac{R}{R-r}\,\omega$$

$$E = \frac{R}{R-r}\,\varepsilon$$

Задача 2 (3.24 ~)



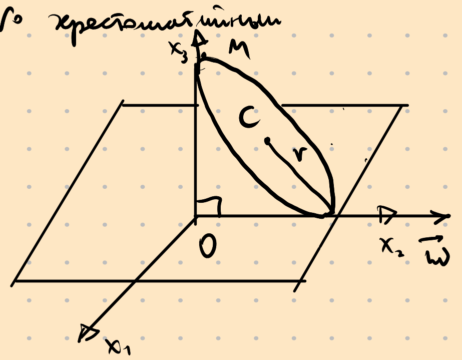
V_c - ? $\quad \vec{V}_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec{V}_c \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_c = 0$

W_c - ?

$\omega = const$

(палка крутится в т-м месте и имеет цель)

№ хрестоматийный



$r, \omega = const$, движение без проскальзывания

$\vec{V}_m, \vec{W}_m, \rho_m, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ - ?

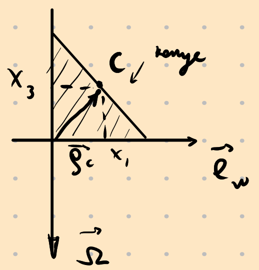
$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}_0}_{0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ — т.к. образующая конуса, касающаяся пов-ти, имеет в каждой т. $\vec{V} = 0$, то

$\vec{\omega} \parallel$ с этой обр-ей

$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{V}_m = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\,\omega r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega$, $\vec{e}_\omega = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega} \vec{e}_\omega + \omega \dot{\vec{e}}_\omega$



$\vec{e}_\omega$ вращается со скоростью $\vec{\omega}$

Введём фиктивное ТТ:

Получим, что

$\vec{\varepsilon} = \omega \vec{\Omega} \times \vec{e}_\omega$ (здесь $\vec{e}_\omega$ это как бы $\vec{\rho}$, $\vec{\Omega}$ это её $\vec{\omega}$)

$\vec{V}_c = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_c = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}_c$

x_1: $\omega \frac{r}{\sqrt{2}} = \Omega \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Omega = \omega$

$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{W}_m = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_m}_{\perp \vec{\tau}} + \vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_m)}_{\vec{V}_m \text{ (как правило)}, \perp \vec{\tau}}$

$\vec{W}_m = \vec{W}_m^\tau \vec{\tau} + \frac{V_m^2}{\rho_m} \vec{n}$

$\vec{V}_m \parallel \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{x}_1$

Таким образом $\vec{W}_m = \frac{\vec{V}_m^2}{\vec{\rho}_m} \vec{n} \Rightarrow \rho_m = \frac{V_m^2}{W_m}$

! При качении без проск-ния, скорость в каждой т. линии касания = 0.

$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}\vec{e}_\omega + \vec{\omega}\, e_\omega$

Ортог. матрицы

$A\vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_2^3 - a_3^2) \qquad e_2 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_3^1 - a_1^3) \qquad e_3 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_1^2 - a_2^1)$$

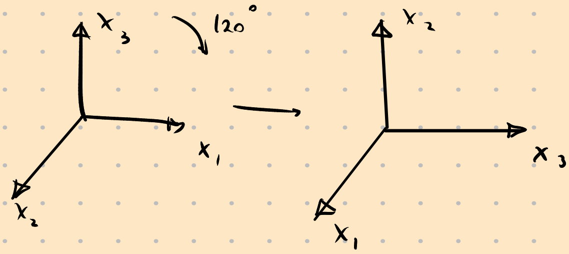
$$A = E\cos\varphi + \hat{e}\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec{e}^{\,T}\vec{e}$$

$$\operatorname{tr} A = 3\cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}, \quad \varphi - ?$$



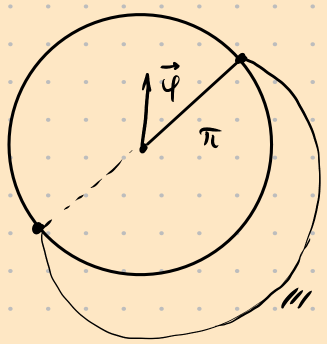
$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Крутые штуки

Группа поворотов $SO(3)$ отождествляется с шаром:



(противоп. т. отождествлены)

Многообразие - плоскость без разрывов и (обычно) гладкая

Сложение поворотов

Повороты → активные – вращаются пр-во и элементы при фикс. базисе

Повороты → пассивные – вращается базис, а эл-ты фикс.

Активный: $\vec{r}\,' = A\vec{r}$

Пассивный: $\vec{e}_{i'} = a^{i}_{i'}\vec{e}_i$

! Обозначение: $\vec{r}^{\,(1)}$ – вектор $\vec{r}$ не трогаем, изменили базис

$\vec{r}^{\,(1)} = r^{i'}e_{i'} = r^{i'}a^{i}_{i'}e_i = r^i\vec{e}_i$

$r^i = a^i_{i'}r^{i'} \Leftrightarrow \vec{r} = A\vec{r}^{\,(1)}$

$\vec{r}^{\,(1)} = A^T\vec{r}$ – обратное к A преобр-е

1. Сложение активных поворотов

$\vec{r}\,' = A_1\vec{r}$, $\vec{r}\,'' = A_2\vec{r}\,'$

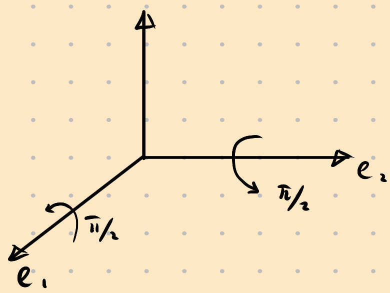
$\vec{r}\,'' = A_2A_1\vec{r} \Rightarrow A = A_n\cdot\ldots\cdot A_1$

2. Сложение пассивных поворотов

$\vec{r}^{\,(1)} = A_1^T\vec{r}$ $\quad \vec{r}^{\,(2)} = A_2^T r^{(1)}$

$\vec{r}^{\,(2)} = A_2^TA_1^T\vec{r} = (A_1A_2)^T\vec{r} \Rightarrow A = A_1\cdot\ldots\cdot A_n$

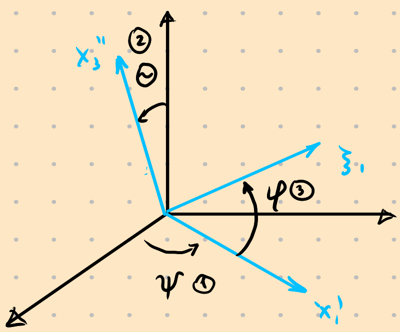
Пример 1



Считаем повороты активными (базис фиксирован)

$A = A_2A_1$

Пример 2 (углы Эйлера в матрицу)



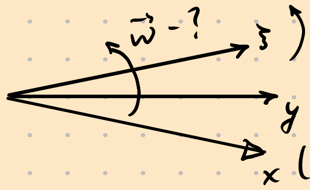
Поворот пассивный – так повороты будут вокруг базиса

$A = A_\psi A_\Theta A_\varphi$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сложение угловых скоростей

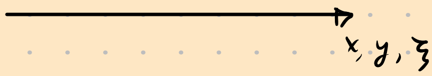


$\vec{\omega}_y$ (ξ вращ. относ. y)

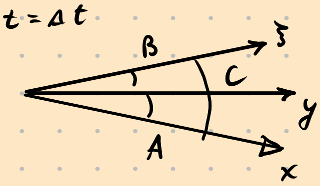
$\vec{\omega}_x$ (y вращ. относ. x)

(x стационарен)

$t = 0$



$t = \Delta t$

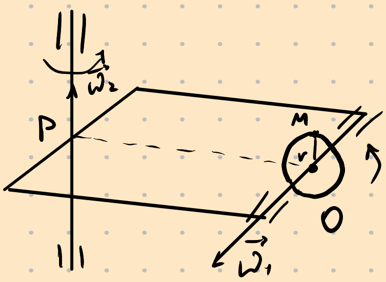


$$A \simeq E + \hat{\omega}_x \Delta t$$

$$B \simeq E + \omega_y \Delta t$$

$$C = AB \simeq E + \underbrace{(\hat{\omega}_x + \hat{\omega}_y)}_{\hat{\omega}} \Delta t$$

Пример



Рамка крутится + колесо крутится на рамке

$\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ - ? $\qquad \omega_1, \omega_2 = const$

$\vec{V}_M$, $\vec{W}_M$ - ?

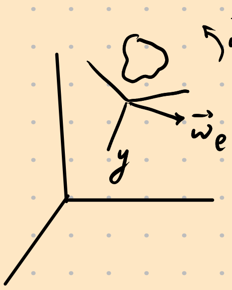
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

Вращение т.т. во вращающемся базисе

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \omega_r^i \vec{y}_i$$

$$\vec{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_e}_{\vec{\varepsilon}_e} + \underbrace{\dot{\omega}_r^i \vec{y}_i}_{\vec{\varepsilon}_r} + \underbrace{\omega_r^i \vec{\omega}_e \times \vec{y}_i}_{\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$



В задаче: $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$

$$\vec{V}_M = \underbrace{\vec{V}_0}_{\vec{\omega}_2 \times \vec{PO}} + \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

$$\vec{W}_M = \underbrace{\vec{W}_0}_{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{PO}) = -\omega_2^2 \vec{PO}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM})$$