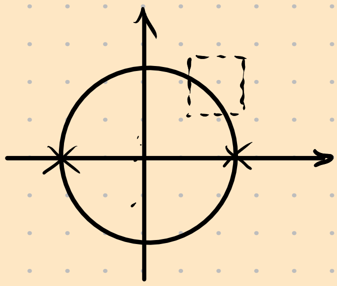
Глава XVIII

Неявные ф-ии и экстремумы ф-ий многих переменных

§1. Теорема о неявной ф-ии

$F(x,y)=0$

$x^2+y^2=1$ – не задаёт явной ф-ии



Теорема

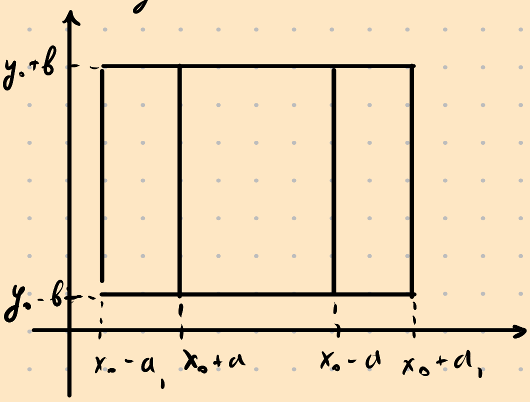
Пусть ф-ия 2-х переменных дифф. в $U(x,y)$. $F(x_0,y_0)$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тогда $\exists\, \Pi=\{x_0-a<x<x_0+a,\ y_0-b<y<y_0+b\}$ в к-ром ур-е $F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=f(x)$.

· $f(x)$ непр. дифф. на $(x_0-a,\ x_0+a)$ и $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ на $(x_0-a,\ x_0+a)$

Д-во

① Не наруш. общ., $F'_y(x_0,y_0)>0$.

По лемме о сохр. знака, $\exists$ окр-ть (x_0,y_0) (в виде прямоуг. $\tilde{\Pi}=\{x_0-a_1\le x\le x_0+a_1,\ y_0-b\le y\le y_0+b\}$), причём такая, что $F'_y>0$ в $\tilde{\Pi}$.



$\varphi(y)=F(x_0,y)$

$\varphi(y_0)=0,\quad \varphi'_y=F'_y(x_0,y)>0,\ y\in[y_0-b,\ y_0+b]$

$\varphi(y)\uparrow$ строго

$\varphi(y_0+b)>0,\quad \varphi(y_0-b)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x_0,y_0+b)>0$

$F(x_0,y_0-b)<0$

По лемме о сохр. знака (для F) $\exists A:\ \forall x\in(x_0-a,\ x_0+a)\ \begin{cases}F(x,y_0-b)<0\\ F(x,y_0+b)>0\end{cases}$

Зафикс. $x^*\in[x_0-a,\ x_0+a]$

$\psi(y)=F(x^*,y)$

$\psi(y_0+b)>0,\quad \psi(y_0-b)<0$

По т. Б-К, $\exists\, y^*\in[y_0-b,\ y_0+b]:\ \psi(y^*)=0$

$\psi'(y)=F'_y(x^*,y)>0 \Rightarrow \psi(y)\uparrow$ строго $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Тогда: $\psi(y^*) = 0$ - единств.

$\forall x^* \in [x_0 - a, x_0 + a] \ \exists! \ y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$

$F(x^*, y^*) = 0$

$y^* = f(x^*)$ Первая т. доказана

② Пусть $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, $y = f(x)$.

$F(x, y) = 0$

Δx – прираще. x, Δy – соотв. прираще. y.

$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$

По т. Лагранжа для ф-ии неск. пер-ых,

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y) \cdot \Delta x + F'_y(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y) \Delta y,$$

$\xi = \xi(\Delta x, \Delta y)$

$0 < \xi < 1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y)}{F'_y(x + \xi \Delta x, y + \xi \Delta y)}$$

$\Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, \ y_0 - b < y < y_0 + b\}$

$\bar{\Pi} = \{x_0 - a \le x \le x_0 + a, \ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$

$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$ на $\bar{\Pi}$.

$\bar{\Pi}$ – компакт, т.е. $|F'_x| \le \alpha$ – огр.

$F'_y \ge \beta > 0$ – достиг. inf.

$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \le \frac{\alpha}{\beta} = M$

$|\Delta y| \le M |\Delta x|$

$y = f(x)$ огр. на $[x_0 - a, x_0 + a]$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0)$

Тогда f – равномерно непр. на $(x_0 - a, x_0 + a)$.

По т. о суперпозиции непр. ф-ий

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ – непр. ЧТД

Теорема (общая)

① Пусть ф-ия $n+1$ переменной $F(x_1, \dots, x_n, y)$ непр. дифф. в нек-рой окр-ти т. $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, причём $F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$, $F'(x_1^0, \dots, x_n^0, y) \neq 0$. Тогда $\exists$ параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a,\ i = 1, \dots, n,\ \ y^0 - b < y < y^0 + b\}$,

в к-ром $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \dots, x_n)$.

② f непр. дифф. в $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a,\ i = 1, \dots, n\}$, причём в Π'

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f)}{F'_y(x_1, \dots, x_n, f)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Д-во:

① Док. также, только $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

② Отличается:

По т. Лагранжа для ф-ии многих пер.,

$0 = F(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) - F(x_1, \dots, x_n, y) =$

$= F'_{x_1}(x_1 + \xi\Delta x_1, \dots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y)\Delta x_1 + \dots +$

$F'_{x_n}(x_1 + \xi\Delta x_1, \dots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y)\Delta x_n +$

$F'_y(x_1 + \xi\Delta x_1, \dots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y)\Delta y$

$$\Delta y = -\frac{F'_{x_1}\Delta x_1 + \dots + F'_{x_n}\Delta x_n}{F'_y} \leq \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\beta} = M\rho \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i,\ |F'_y| \geq \beta)$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ равном. непр. на $\bar{\Pi}'$

$\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \Delta y = 0$

Пусть $\Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \xi\Delta x_1, x_2, \dots, x_n, y + \xi\Delta y)}{F'_y(x_1 + \xi\Delta x_1, x_2, \dots, y + \xi\Delta y)}, \text{ т.е.}$$

$\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \dots = -\frac{df}{dx_1}$, аналог. для $x_2, \dots, x_n$.

ЧТД.

§ 2. Теорема о сис-ме неявных ф-ий

Отобр. $u = u(x)$, $u \in R^m$, $x \in R^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{– дифф. ф-ии}$$

Матрица Якоби – $D_u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$

Если она квадратная, то сущ-ет определитель – Якобиан.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

<u>Теорема</u> (о системе)

Пусть $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ непр-дифф. ф-ии в окр-ти $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in R^{n+m}$

$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Тогда $\exists \Pi = \{ x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \ y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b \} \subset R^{n+m}$

в к-ром $\begin{cases} F_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \iff \bar{y} = f(\bar{x})$, причём ф-ии

$y_i = f_i(\bar{x})$, $i = 1 \dots m$ – непр-дифф. на

$\Pi' = \{ x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i \}$

§ 3. Теорема об обратном отображении.

$\varphi : R^n \to R^m$, дифф.

$\bar{u} = \varphi(\bar{x})$

Было доказано: если $\varphi : R^n \to R^m$, $F : R^m \to R^p$, тогда

$D_{F \circ \varphi} = D_F \cdot D_\varphi$.

Если есть $\bar{x} \in R^n$, $\bar{y} \in R^m$, $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$, то

$D_{F\varphi}|_{\bar x} = D_F|_{\bar y} \cdot D\varphi|_{\bar x}$

Пусть $n=m=p$, тогда

$J_{F\varphi}|_{\bar x} = J_F|_{\bar y} \cdot J_\varphi|_{\bar x}$

Обратное отобр.:

$\Phi : G \to D \qquad G\, D \subset \mathbb{R}^n$

$\Phi^{-1} : D \to D$

$\Phi\Phi^{-1} = \Phi^{-1}\Phi$ – тождественное отобр.

$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1}$ – если оба дифф.!

Если отобр. биективно и дифф., то обратное не обязано быть дифф.!

$n=1$:

$y=x^3$ – биект., дифф.

обратное недифф. в т. 0.

Биективность отобр. $\not\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$ $J \neq 0$

Опред

Отобр. Φ – локально обратимо в обл-ти G, если $\forall\, \bar x_0 \in G \to \exists\, \delta>0$: Φ обратимо в $U_\delta(\bar x_0)$.

Теорема об обратном отобр-ии

Пусть $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$ непр. дифф. и $J_\Phi \neq 0$ в G $(G \subset \mathbb{R}^n)$. Тогда Φ локально обратимо:

$\forall\, x_0 \in G \to \exists\, \Phi^{-1}$ – непр. дифф. обр. отобр. в $y_0 = \Phi(x_0)$.

Д-во:

Рас-им $F_j(y,x) = \Phi_j(x_1,\dots,x_n) - y_j$, $j=1\dots n$

$(y,x) \in \mathbb{R}^{2n}$

Оно непр. дифф. $\forall (y,x) \in \mathbb{R}^{2n}$ такой, что $x \in G$, $y \in \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1 \dots n$

$\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \frac{D(\Phi_1,\dots,\Phi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} \neq 0 \quad \forall\, (y_0, x_0)$

По т. о сис-ме неявных ф-ий $\exists\, \Pi = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i,\ x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

в к-рой

$y_j = \Phi_j(x_1, \ldots, x_n) \iff F_j(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff x_j = f_j(y_1, \ldots, y_n)$

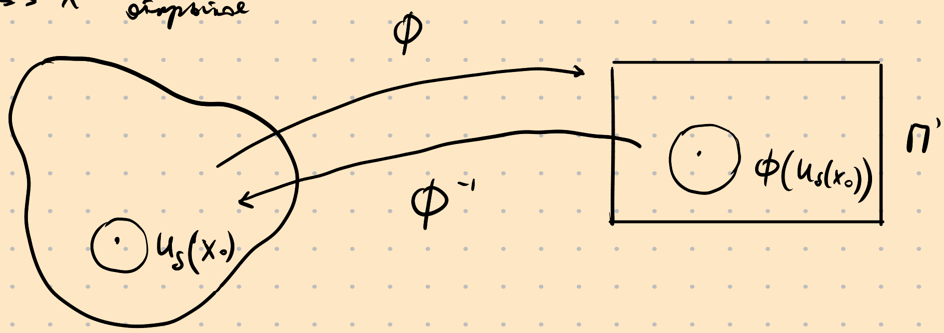
F_i непр. дифф. на $\Pi' = \{ y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i \} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ биективно отображает нек-е мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ на Π'.

$X = \Phi^{-1}(\Pi')$

Π' - откр. мн-во, полный прообраз откр. мн-ва при непр. отобр. есть откр. мн-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow X$ - открытое



$X = \Phi^{-1}(\Pi')$

$\forall x_0 \in X \to \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \in X$

$\forall x_0 \in X \to \exists U_\delta(x_0)$ в к-рой отобр. яв-ся обратимым. ЧТД

§ 4. Экстремумы ф-ий нескольких переменных

Опр-е

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ наз-ся точкой макс. локального экстремума ф-ии $y = f(x_1, \ldots, x_n) \iff$

$\iff \exists \delta > 0 : f(x)$ опред. в $U_\delta(x^0)$ и $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0)$.

Аналогично для мин. лок. экстр.

Необходимое ус. локального экстремума

Если $f(x)$ дифф. в x^0 и x^0 яв-ся т. лок. экстр., то $df(x^0) = 0 \iff$

$\iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$ (стационарные точки)

Д-во:

Рас-им ф-ию $\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Ясно, что x_1^0 - лок. экстремум того же типа. Тогда

$\frac{d\varphi}{dx_1}(x_1^0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 0$ Аналогично дальше

ЧТД

$$K(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Положит. опред.: $\forall x\neq 0 \to K(x)>0$

Отриц. опред.: $\forall x\neq 0 \to K(x)<0$

Неопред.: $\exists x_1, x_2: K(x_1)>0, K(x_2)<0$

Положит. полуопред.: $\forall x \to K(x)\geq 0$, $\exists x\neq 0: K(x)=0$

Отриц. полуопред.: $\forall x \to K(x)\leq 0$, $\exists x\neq 0: K(x)=0$

Если $K(x)\equiv 0$, то она положит. и отриц. полуопред., больше пересечений типов нет.

Пусть f дважды непр. дифф. в $G\in R^n$, т.е. имеет все непр. частные произв. второго порядка, при этом ч.п. в разном порядке совп. ($f''_{yx}=f''_{xy}$)

$$d^2 f(x^0)=\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_i}(x^0)\,dx_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} f''_{x_i x_j}(x^0)\,dx_i dx_j$$ — кв. форма от вектора $(dx_1,\dots,dx_n)$

Достаточное усл-е локального экстремума

Пусть $f(x)$ дважды непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$ и x^0 — стац. точка. Тогда $K(x)=d^2f(x^0)$ — кв. форма. Тогда:

1. если $K(x)$ положит. определена, то x^0 — т. строгого лок. максимума
2. если $K(x)$ отриц. опред., то x^0 — т. строгого лок. минимума
3. если $K(x)$ неопред., то x^0 не яв-ся т. лок. экстремума.
4. если $K(x)$ полуопред., то нужно доп. исследование.

Лемма

Пусть $K(x)$ в R^n положит. опред., тогда $\exists C>0: \forall x\in R^n \to K(x)\geq C|x|^2$

Если отриц. опред., то $\exists C>0: \forall x\in R^n \to K(x)\leq -C|x|^2$

Д-во 1 пункта:

Заметим, что $K(x)$ можно определить в точечном R^n, т.е. $K(x)$ — значение на векторе с такими же координатами.

$K(x_1,\dots,x_n)$ — непр. на R^n.

$S=\{x_1^2+\dots+x_n^2=1\}$ — огр. и замкнутое. — компакт

Тогда ф-ия, непр. на компакте, достигает inf на S.

$K(x) > 0$ на $S \Rightarrow \inf\limits_{S} K = C > 0$.

$\forall x \in S \to K(x) \geq C$.

Пусть $x \neq 0 \in R^n$. Рас-им $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$

$K(x) \geq C|x|^2$ ЧТД

Д-во теоремы

1. $f(x)$ дважды непр. дифф. в $U_\delta(x^\circ) \Rightarrow$ применим ф-лу Тейлора (Пеано):

$\forall x \in U_\delta(x^\circ) \to f(x) = f(x^\circ) + df(x^\circ) + \frac{1}{2} d^2 f(x^\circ) + o(\rho^2)$, $\rho^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 = |dx|^2$

$df \equiv 0$ – т. стац.

$d^2 f$ – полож. опред.

Т.е. $f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2} C |dx|^2 + o(|dx|^2) =$ | $dx \to (0, \ldots, 0)$ $\lim\limits_{dx \to (0,\ldots,0)} \varepsilon(dx) = 0$

$= f(x^\circ) + \frac{C}{2} |dx|^2 + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 =$

$= f(x^\circ) + |dx|^2 \cdot \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx)\right)$

$\frac{C}{2} + \varepsilon(dx) > 0$ в $U_\delta(x^\circ) \Rightarrow f(x) \geq f(x^\circ)$ $\forall x \in U_\delta(x^\circ)$.

Т.е. x° – т. строгого лок. минимума.

2. Аналогично

3. $d^2 f(x^\circ)$ – неопр. кв. форма.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$.

Рас-им векторы приращения $dx = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ (приращ. $\parallel z$).

$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} |z|^2$

$\beta > 0$

$f(x) = f(x^\circ) + df(x^\circ) + \frac{1}{2} d^2 f(x^\circ) + \varepsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^\circ) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$

$= f(x^\circ) + \frac{1}{2}\beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2$

$\frac{1}{2}\beta + \varepsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0$ при дост. малых $\varepsilon(dx)$

Т.е. $f(x) > f(x^\circ)$ на $x \parallel z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Аналогично если $dx = \lambda z'$, то при достаточно малых $\varepsilon(dx)$ $f(x) < f(x^\circ)$.

x° – не т. лок. экстремума.

Пример: $z = x^4 + y^4$, $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$, стац. т. $(0,0)$, $z''_{x} = 12x^2$, $z''_y = 12y^2$, $z''_{xy} = 0$, $d^2 z(0,0) = 0$.

Надо смотреть $\Delta z(0,0)$: $z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) > 0$ если $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$ – лок. мин.

§ 5. Условный (относительный) экстремум

$z = xy$ (седло)

$z'_x = y$, $z'_y = x$ (ст. т. $(0,0)$)

$z''_{xx} = z''_{yy} = 0$, $z''_{xy} = 1$

$d^2 z$ – неопр. кв. ф. – нелок. экстр.

При усл. $x+y=1$: $z = x(1-x)$, лок. макс. в $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Опр

Т. x^0 наз-ют т. строгого условного минимума ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_n)$ при выполнении условий связи $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_m(x) = 0$, если $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x^0)$ при вып. усл. связи $\to f(x) > f(x^0)$

Если из усл. связи можно явно выразить одни переменные через другие, то возникнет задача на обычный экстремум ф-ии меньшего числа переменных.

А если нет, то применяется ф-ия Лагранжа.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^m$, тогда ф-ия Лагранжа $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x)$

При вып. усл-я связи $\mathcal{L} = f$, $\forall \lambda_i$ – усл. экстр. f и $\mathcal{L}$ совпадают.

Необходимые усл-ия относ. экстремума

Пусть $f(x)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 1 \dots n)$ непр. дифф. в $U_\delta(x^0)$. Пусть x^0 – т. относ. экстремума $f(x)$ при $\varphi_i(x) = 0$, причём $rg\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} = m$ (градиенты ф-ий φ_i линейно независимы).

Тогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 – т. обычного экстремума $\mathcal{L}(x)$.

Необх. решить сис-му $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$ – сис-ма $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв. $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Д-во:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad rg\,\Phi = m, \quad x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

$\exists$ минор порядка $n \neq 0$. Для опр-ти 1-й минор:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ в т. } x^0 \Rightarrow \text{ в } U_\delta(x^0) \text{ в силу непр.}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

По т. о неявной ф-ии $\exists$ окр-ть x^0, в к-рой сис-ма эквивалентна усл. связи:

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_m) \end{cases}$$

$x_{m+1}, \dots, x_n$ – незав. ф-ии

$x_1, \dots, x_m$ – зависимые

Ф-ия g_i непр. дифф. в окр-ти $\tilde{x}^0 = (x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$. Продифф. усл. связи:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n \\ \dots \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n \end{cases}$$

$dx_1, \dots, dx_m$ – зав. дифф-лы

$dx_{m+1}, \dots, dx_n$ – незав. дифф-лы

При выполнении усл-ий связи для $f(x)$:

$$f(x)\big|_* = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = f_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)\big|_* = \mathcal{L}(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathcal{L}_0(\tilde{x})$$

$$\mathcal{L}(x)\big|_* = f(x)\big|_* \ \forall \lambda_i$$

$$\mathcal{L}_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}) \ \forall \lambda_i$$

$d\mathcal{L}(\tilde{x}^0) = df_0(\tilde{x}^0) = 0$ (т.к. это точка относ. экстремума) $\forall \lambda_i$

В силу инвариантности дифф-ла относ. замены переменной:

$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d(\mathcal{L}(x)\big|_*) = d\mathcal{L}(x)\big|_{**}$ – дифф-ал ф-ии n переменных

инвариантность формы

(дифф-ал ф-ии $n-m$ пер-ых)

$$d\mathcal{L}(x)\big|_{**} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} dx_m}_{\text{зависим.}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} dx_n}_{\text{независ.}}$$

До сих пор λ_i – произв. Подберём λ_i так, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}(x^0) = 0$.

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^0) = 0 \end{cases}$$

– сис-ма лин. ур-ий, её опред.:

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\bigg|_{x^0} \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ реш-е}$$

λ_i найдены.

При наиб. λ_i:

$$d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x_1}(x^0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m}(x^0)dx_m}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}}(x^0)dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(x^0)dx_n$$

Но $d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = 0$, $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ - произв. $\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{m+1}}(x^0) = \ldots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(x^0) = 0 \Rightarrow$ при наиб. λ_i x^0 - стац. т. ф-ии Лагранжа.

ЧТД

Для проверки необх. усл-я относ. экстремума нужно решить сис-му:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \ldots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

$n+m$ ур-ий, $n+m$ неизв.

Достаточное условие относительного экстремума

Пусть $f(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1,\ldots,m<n$ - дважды непр. дифф. ф-ия в окр-ти x^0, причём ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i=1..m,\ j=1..n}$ равен m в т. x^0.

Пусть коор-ты x^0 и λ_i, $i=1\ldots n$ удовл. сис-ме (I). Тогда в т. x^0 рассм-ивается квадр. форма $d^2\mathcal{L}(x^0)\Big|_{**}$ - кв. форма от $n-m$ незав. дифф. (обозначение те же, что и в док-ве пред. теоремы).

Тогда если эта форма положит. опред., то x^0 - т. строгого усл. минимума f при вып. (*)

отриц. опред., то x^0 - т. строгого усл. максимума f

неопред., то x^0 - не яв-ся т. относ. экстремума.

Примечание Если $d^2\mathcal{L}(x^0)$ - полож. или отриц. опред. форма n диф-ов (до подстановки), то после подстановки (**) она такой останется.

Иначе нужно делать подстановку (**).

Если после подстановки (**) форма полуопред., нужно доп. исследование.

Пример: $f = xy$ при усл. $x+y=1$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(x+y-1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2},\ x = y = \frac{1}{2}$$

$L''_x = 0, \quad L''_y = 0 \qquad d^2 L = 2dxdy$ – неопр. кв. форма от dx, dy

Продифф. ур. связи: $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$

$d^2 L|_{x*} = -2dx^2$ – отриц. опред. кв. форма от одного dx

Значит $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – усл. минимума.

Справка $d^2 f$ не обл-ет инв. формой относ. замены переменных:

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ – дважды непр. дифф.

$$d^2 f = d(df) = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^{n} dx_k\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k + \sum_{k=1}^{n} dx_k \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\right) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k$$

Если $x_1, \dots, x_n$ – незав. переменные, то $d^2 x_k = 0$

$$d^2 f = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} dx_k + 2\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Эта запись имеет место также в том случае, если $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ в нек-ой т.

(в стац. т.) – квазиинвариантность формы $d^2 f$ относ. замены пер-ых в стац. точке

Д-во

Сохраняем все выводы и обозн-я пред. теоремы.

Докажем, что
$$\begin{matrix} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{matrix}$$
– дважды непр. дифф. в окр-ти $\tilde{x}^0$

$$\varphi_i(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \qquad (i = 1 \dots m)$$

Продифф. рав-во по x_j:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial g_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \qquad i = 1 \dots m$$

При фикс. j, $m+1 \le j \le n$ – это сис-ма m лин. ур-ий с m незав. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \ne 0 \text{ в окр-ти } \tilde{x}^0$$

Выраж. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ через $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$, знамен. $\ne 0$

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ непр. дифф. $\Rightarrow$ $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ непр. дифф. $\Rightarrow$ g_i – дважды непр. дифф. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно писать d^2 с соотв. ур-ями

В силу квазиинв-ти формы $d^2 L(x^0)$ (все $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^0) = 0$)

$$d^2 \mathcal{L}(x^0) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$ (незав. от того, яв-ся $dx_j dx_k$ дифф-лами незав. перемен-ных или дифф-лами ф-ий).

$$\mathcal{L}(x)\Big|_{*} = \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0)$$

в силу инвариант.

$$d^2 \mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d^2\left(\mathcal{L}(x^0)\Big|_{*}\right) = d^2 \mathcal{L}(x^0)\Big|_{**}$$

второй дифф. ф-ии n-m пер-ых ← второй диф. ф-ии n перем-ых

$$\|$$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}_0(\tilde{x}^0) = d\mathcal{L}(x^0)\Big|_{**} = 0$$ (в силу сис-мы I) $\Rightarrow \tilde{x}^0$ - стац. т. $f_0(\tilde{x}^0)$

Характер экстремума в этой т. опред. кв. формой

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 \mathcal{L}(x^0)\Big|_{**}$$

Характер экстремума опред. знакоопр. этой формы.

ЧТД

Глава XIX

Кратные интегралы

§1. Определение. Критерий интегрируемости Дарбу.

Пусть G - измеримое мн-во, $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \varnothing$.

R - разбиение G на произв. изм. мн-ва G_i: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_i$

$\forall i \neq j \to \mu(G_i \cap G_j) = 0$

Мелкость разбиения $|R| = \max\limits_{i=1\dots N} \operatorname{diam} G_i$

Считаем, что $f(x)$ опр. на G. Рас-им $M_i = \sup\limits_{G_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{G_i} f(x)$

Опр-е

Верхняя и нижняя суммы Дарбу:

$$S_R^* = \sum_{i=1}^{N} M_i \mu G_i \qquad S_{*R} = \sum_{i=1}^{R} m_i \mu G_i$$

Сумма Римана

$\forall i = 1 \dots N \to \xi_i \in G_i$

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \mu G_i$$

Для фикс. R_N: $S_{*R} \leq \sigma_R \leq S^*_R$

Колебания ф-ии

$$\omega_R = S^*_R - S_{*R} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu G_i, \quad \omega_i = M_i - m_i$$

Разбиение R_2 следует за R_1 $(R_2 \geqslant R_1) \iff$

R_1: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N_1} G_i$ $\qquad \forall G_i$ - объединение нескольких из G_j

R_2: $G = \bigcup\limits_{j=1}^{N_2} G_j$

Утв

Если $R_2 \geqslant R_1$, то

$$S^*_{R_2} \leq S^*_{R_1}, \quad S_{*R_2} \geqslant S_{*R_1}, \quad \omega_{R_2} \leq \omega_{R_1}.$$

Д-во: (как в 1D)

Достаточно рас-ть случай, когда одно из мн-в R_1 разбивается надвое:

$G_i = G_i' \cup G_i''$, $\mu(G_i' \cap G_i'') = 0$

Любой другой случай получается повторным применением этого.

$M_i' = \sup\limits_{G_i'} f(x) \qquad M_i'' = \sup\limits_{G_i''} f(x) \qquad M_i = \sup\limits_{G_i} f(x)$

$M_i \mu G_i = M_i \mu G_i' + M_i \mu G_i'' \geq M_i' \mu G_i' + M_i'' \mu G_i''$

Все ост. слагаемые в $S^*_{R_1}$ и $S^*_{R_2}$ совпадают $\Rightarrow S^*_{R_1} \geq S^*_{R_2}$

Аналогично для нижних сумм.

$\omega_{R_2} = S^*_{R_2} - S_{*R_2} \leq S^*_{R_1} - S_{*R_1} = \omega_{R_1}$ ЧТД

Введём понятие $\max(R_1, R_2)$ – получается из всевозм. $G_i \cap \tilde{G}_j$

$\max(R_1, R_2) \geq R_1, \quad \max(R_1, R_2) \geq R_2$

Лемма

$\forall R_1, R_2 \rightarrow S^*_{R_1} \geq S_{*R_2}$

Д-во:

$R = \max(R_1, R_2) \Rightarrow R \geq R_1, R_2$

$S^*_{R_1} \geq S^*_R \geq S_{*R} \geq S_{*R_2}$ ЧТД

Определение

Пусть $f(x)$ - огр. на измеримом мн-ве $G \subset \mathbb{R}^n$. Рас-им $I^* = \inf\limits_R S^*_R$, $I_* = \sup\limits_R S_{*R}$ (инф. и суп. по всем разбиениям). Это – верхний и нижний интегралы Дарбу.

Если $I^* = I_* = I$, то $f(x)$ наз-ся интегрируемой на G, а I - кратный интеграл Римана $f(x)$ по G: $I = \int\limits_G f(x)dx$

Очевидно: $-\infty \overset{(1)}{<} I_* \overset{(2)}{\leq} I^* \overset{(3)}{<} +\infty$

(2) следует из пред. леммы: $S^*_{R_1} \geq S_{*R_2} \Rightarrow \inf\limits_{R_1} S^*_{R_1} \geq \sup\limits_{R_2} S_{*R_2}$

(3) следует из того, что $I^* \leq S^*_R$ для нек-го R, аналогично (1)

Критерий Дарбу интегрируемости

Пусть $f(x)$ огр. на изм. $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда равносильны:

1. $f(x)$ интегрируема на G.

2. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists$ разбиение R мн-ва G: $\omega_R < \varepsilon$

3. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: $\forall$ разбиения R, $|R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$

Д-во:

$(3) \Rightarrow (2)$ – очевидно
как раньше

$(2) \Rightarrow (1)$ $\forall \varepsilon > 0 \to \exists R: \omega_R < \varepsilon$
как раньше

$\forall$ разб. $R \to S_{*R} \le I_* \le I^* \le S^*_R$.

$0 \le I^* - I_* \le S^*_R - S_{*R} = \omega_R$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R: \omega_R < \varepsilon \Rightarrow I^* - I_* < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ – любое $\Rightarrow I^* = I_* \Rightarrow f(x)$ инт

$(1) \Rightarrow (2)$ Пусть $f(x)$ – инт. на G.
как раньше

$I^* = \inf\limits_R S^*_R = I_* = \sup\limits_R S_{*R} = I$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R_1: S^*_{R_1} < I + \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall \varepsilon > 0 \to \exists R_2: S_{*R_2} > I - \frac{\varepsilon}{2}$

$R = \max(R_1, R_2)$

$S^*_R \le S^*_{R_1} < I + \frac{\varepsilon}{2}$ $S_{*R} \le S_{*R_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\omega_R = S^*_R - S_{*R} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists R: \omega_R < \varepsilon$

$(2) \Rightarrow (3)$: Предварительно докажем 4 леммы.

Определение

Пусть X, Y – два непустых мн-ва в $\mathbb{R}^n$.

$\rho(X, Y) = \inf\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y)$ – расстояние между мн-вами.

Если $X \cap Y \ne \varnothing$, то $\rho(X, Y) = 0$. Обратно неверно.

Лемма 1

Пусть F_1, F_2 – 2 компакта в $\mathbb{R}_n$, $\rho(F_1, F_2) = 0$. Тогда $F_1 \cap F_2 \ne \varnothing$.

Следствие: если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\rho(F_1, F_2) > 0$

Д-во:

Пусть $\rho(F_1, F_2) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists\, x \in F_1,\ y \in F_2:\ \rho(x,y) < \varepsilon$

$\forall n = 1,2,\dots \to \exists\, x_n \in F_1,\ y_n \in F_2:\ \rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

Т.к. F_1 - огр. (компакт в $\mathbb{R}^n$), то x_n - огр. пос-ть, по т. Больцано-Вейерштрасса

$\exists\, x_{n_k}:\ x_{n_k} \to x_0$ (сходится), причём F_1 - замкнуто $\Rightarrow x_0 \in F_1$.

$$\rho(y_{n_k}, x_0) \le \underbrace{\rho(y_{n_k}, x_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \to 0} + \underbrace{\rho(x_{n_k}, x_0)}_{\to 0 \text{ при } k \to \infty} \Rightarrow y_{n_k} \to x_0.$$

F_2 - замкнуто $\Rightarrow x_0 \in F_2$. $x_0 \in F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. ЧТД

Замечание использовалась ограниченность только F_1. F_2 всего лишь замкнуто.

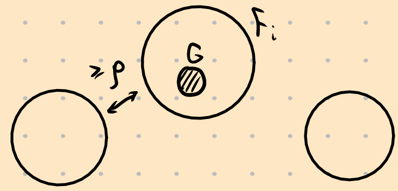
Если оба замкнуты, но не огр., лемма может не выполняться.

Лемма 2

Пусть $F_1, \dots, F_n, G \subset \mathbb{R}^n$, $\forall\, i,j = 1 \dots N,\ i \neq j \to \rho(F_i, F_j) = \rho_{ij} \ge \rho > 0$

$\operatorname{diam} G < \rho$

Тогда если $G \subset \bigcup_{i=1}^{N} F_i$, то $\exists\, j: G \in F_j$.



Док-во

Пусть $\exists\, x_0 \in G,\ x_0 \in F_i$
$\exists\, y_0 \in G,\ x_0 \in F_j$, $i \neq j$

$x_0, y_0 \in G \Rightarrow \rho(x_0, y_0) < \rho$

$x_0 \in F_i,\ y_0 \in F_j \Rightarrow \rho(x_0, y_0) \ge \rho(F_i, F_j) \ge \rho$

Противоречие. ЧТД

Лемма 3

Пусть G - огр. мн-во в $\mathbb{R}_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \to \exists\, S \supset G$, S - клеточное и открытое:

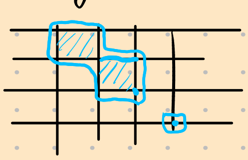
$mS < \mu^* G + \varepsilon$

Д-во

Сущ-е клеточного S следует из опр-я клеточной меры:

$\mu^* G = \inf mS$, S-клет., $S \supset G$

Почему S можно выбрать открытым? $\exists$ клеточ. S_1: $mS_1 < \mu^* G + \frac{\varepsilon}{2}$



Тогда $\exists\, S$ - клет. и откр. очень близкого ранга: $mS < mS_1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

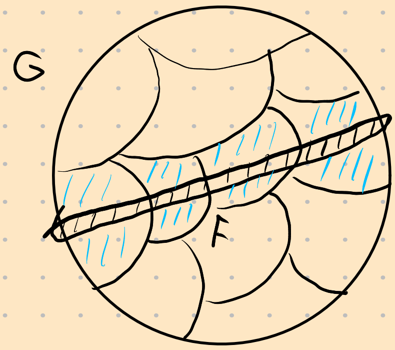
$\Rightarrow mS < \mu^* G + \varepsilon$ ЧТД

Лемма 4

Пусть G, F – изм. мн-ва в $\mathbb{R}^n$, $\mu F < \varepsilon$.

Тогда $\exists \delta > 0: \ \forall$ разб. R мн-ва G, $|R| < \delta \to$

$$\to \sum_{G_i \cap F \neq \varnothing} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \cdot \varepsilon$$



Д-во

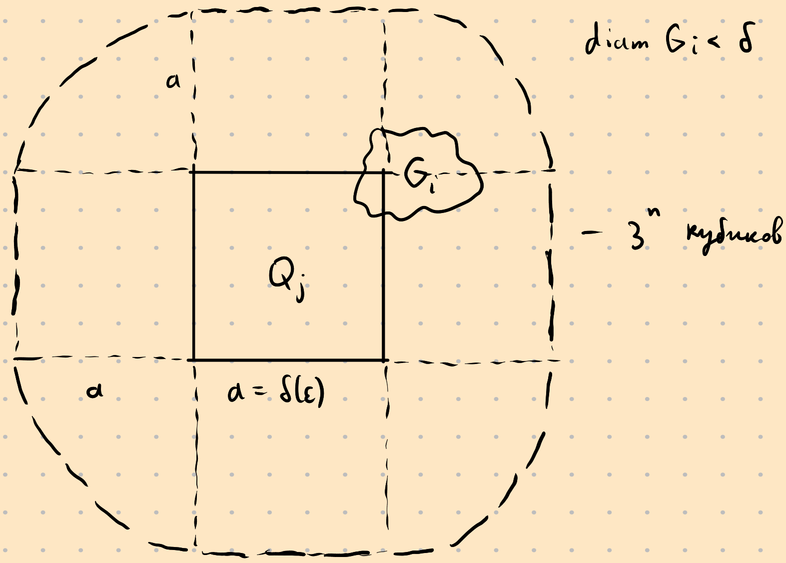
По лемме 3 $\exists S \supset F$ – клет. откр.: $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$

Причём S состоит из клеток ранга $K = K(\varepsilon)$.

$\overline{S} = \bigcup\limits_{j=1}^{N_1} \overline{Q}_j$, Q_j – куб с ребром $a = a(\varepsilon)$ $\quad \left(a = \frac{1}{2^k}\right)$

$\delta(\varepsilon) = a$.

Рас-им разбиение G, $|R| < \delta$.



$$\sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \varnothing} \mu G_i \leq 3^n \mu \overline{Q}_j$$

$$\sum_{G_i \cap F \neq \varnothing} \mu G_i \leq \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i \leq \overbrace{\sum_{j=1}^{N_1}}^{\text{по всем } Q_j} \sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \varnothing} \mu G_i \ \circledS$$

Одни и те же G_i могут пересекаться с разными Q_j.

$$\circledS \ 3^n \sum_{j=1}^{N_1} m\overline{Q}_j = 3^n \cdot mS < 3^n \cdot 2\varepsilon$$

ЧТД

(2) => (3) $\quad \forall \varepsilon > 0 \to \exists R_0: \omega_{R_0} < \varepsilon$

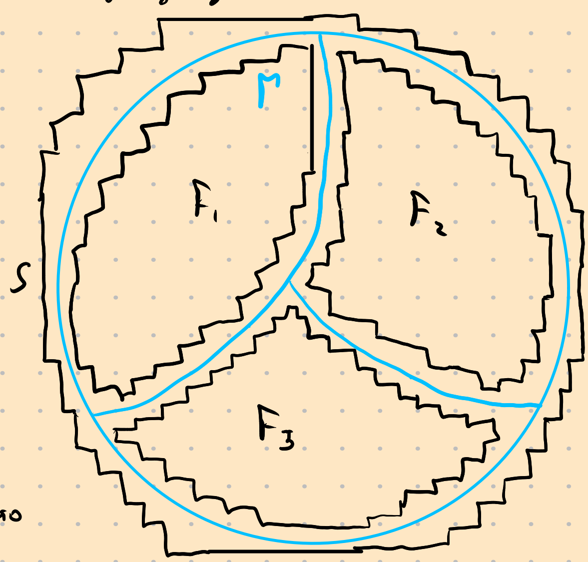
$R_0: G = \bigcup\limits_{j=1}^{N_0} G_j^0$, $\quad \omega_{R_0} = \sum\limits_{j=1}^{N_0} \omega_j^0 \cdot \mu \cdot G_j^0$, $\quad \mu(G_i^0 \cap G_j^0) = 0$, $i \neq j$

Не умаляя общности, $G_i^0 \cap G_j^0 = \varnothing$, $i \neq j$

Если есть какие-то мн-ва нулевой меры, отнесём к одному из мн-в.

$\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{N_0} \partial G_j^0$

По лемме 3, $\exists$ откр. клет. $S \supset \Gamma$: $mS < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n}$



$\mu\Gamma = 0$ по крит. измеримости и в силу конечной аддитивности меры Жордана.

$M = \sup\limits_G |f(x)|$

Т.к. $\Gamma \subset S$, то $\forall j \to \partial G_j^0 \subset S$

Рас-им $F_j = G_j^0 \setminus S = \underset{\text{замкнуто}}{\overline{G}_j^0} \setminus \underset{\text{открыто}}{S} \Rightarrow F_j$ – замкнуто

$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j^\circ \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$; Среди F_j могут быть пустые.

(т.к. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B)$)

Будем считать, что непустые есть, в сумме оставим только их.

Тогда рас-им $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$ (т.к. F_i, F_j - непересек. компакты)

Рас-им $\rho = \min\limits_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$.

По лемме 4 т.к. $mS < \frac{\varepsilon}{8M3^n}$, то $\exists \delta_1 : \forall$ разб. R, $|R| < \delta_1 \to \sum\limits_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i < \frac{\varepsilon}{8M3^n} \cdot 2 \cdot 3^n = \frac{\varepsilon}{4M}$

$\delta = \min(\delta_1, \rho)$.

Рас-им любое разбиение R мн-ва G такое, что $|R| < \delta$.

Рас-им дизъ. мн-во разбиения $G_i \subset G \setminus S$ (i.e. $G_i \cap S = \varnothing$)

$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$; $\operatorname{diam} G_i \leq |R| < \delta \leq \rho$

$\forall i \neq j$ $\rho_{ij} \geq \rho$, тогда по лемме 2 $\exists j : G_i \subset F_j \subset G_j^\circ$

$R_1 = \max(R, R_0)$

$\sum\limits_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i \leq \omega_{R_1} \leq \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad \sum\limits_{G_i \cap S \neq \varnothing} \omega_i \mu G_i \leq 2M \sum\limits_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i = 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$

Оконч.: $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 : \forall R, |R| < \delta \to \omega_R = \sum\limits_{G_i \cap S \neq \varnothing} \omega_i \mu G_i + \sum\limits_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i < \varepsilon$

Если все F_j пусты, то $G \subset S$ и вторая сумма отсутствует.

ЧТД

Определение

Суммы Римана: Пусть f опр. на изм. мн-ве G, $\exists R : G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$,

G_i - изм., $\mu(G_i \cap G_j)_{i \neq j} = 0$

Возьмём $\xi_i \in G_i$, $\sigma_R = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i) \mu G_i$

Критерий Римана

f интегр. на изм. мн-ве G <=> f огр. на G и $\forall$ посл-ти разбиений R_k, $|R_k| \to 0$,

при любом выборе $\xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)}$

$\lim\limits_{k \to \infty} \sigma_{R_k}(f) = I$ $\qquad \left(I = \int\limits_G f(x)dx\right)$

NB на отрезке ограниченность f следует из усл-ий критерия, с произв. G - нет

Например, $n=1$, $\mu G = 0$, все $\sigma_{R_k} = 0$, но если ф-ия неогр. - то она не интегр.

Д-во

(⇒) Если f - инт., то по п.3 крит. Дарбу

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 : \forall R, \ |R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon \quad (1) \ (\delta = \delta(\varepsilon))$

Но $S^*_R \ge \sigma_R \ge S_{*R}$ при любом выборе промеж. точек $(m_i \le f(\xi_i) \le M_i)$

$S^*_R \ge I \ge S_{*R} \Rightarrow \sigma_R - I \le S^*_R - S_{*R} < \varepsilon$

R_k - посл-ть разбиений, $|R_k| \to 0$

$\forall \delta > 0 \to \exists K_0 : \forall K \ge K_0 \to |R_k| < \delta \quad (K_0 = K_0(\delta)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \to \exists K_0 : \forall K \ge K_0 \to \omega_{R_k} < \varepsilon \Rightarrow |\sigma_{R_k} - I| \le \omega_{R_k} < \varepsilon$

(подставляем R_k в (1))

$\lim\limits_{k \to \infty} \sigma_{R_k} = I$

(⇐) $\forall R_k, \ |R_k| \to 0, \ \forall \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)} \to \lim\limits_{k \to \infty} \sigma_{R_k} = I$, f огр.

докажем, что f инт. и $\int\limits_G f(x)dx = I$

Пусть это не так; По п.3 крит. Дарбу:

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \to \exists R, \ |R| < \delta : S^*_R - S_{*R} \ge \varepsilon$

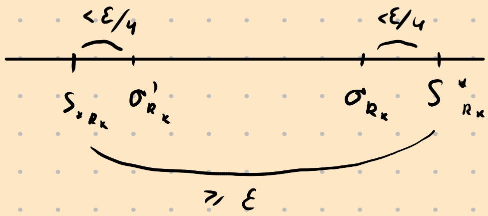
$\delta = \frac{1}{k}, \ k = 1, 2 \ldots$, не нарушая общ-ти, $\mu G > 0$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall k \to \exists R_k, |R_k| < \frac{1}{k} : S^*_{R_k} - S_{*R_k} \ge \varepsilon \quad (|R_k| \to 0)$

$M_i^{(k)} = \sup\limits_{G_i^{(k)}} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \xi_i^{(k)} \in G_i^{(k)} : M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{4}$

$S^*_{R_k} - \sigma_{R_k} = \sum\limits_{i=1}^{N_k} (M_i^{(k)} - f(\xi_i^{(k)})) \mu G_i^{(k)} < \frac{\varepsilon}{4\mu G} \cdot \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{N_k} \mu G_i^{(k)}}_{= \mu G} = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

Аналогично, $\exists \eta_i^{(k)} \in G_i^{(k)} : \sigma'_{R_k} - S_{*R} < \frac{\varepsilon}{4}$



$\Rightarrow \sigma'_{R_k} - \sigma_{R_k} \ge \frac{\varepsilon}{2}$, но $\lim\limits_{k \to \infty} \sigma_{R_k} = \lim\limits_{k \to \infty} \sigma'_{R_k} = I \Rightarrow \sigma_{R_k} - \sigma'_{R_k} \to 0$

Противоречие. ЧТД

Свойства интегрируемых ф-ий

1. На $G : \mu G = 0$ любая огр. ф-ия интегрируема и $\int\limits_G f(x)dx = 0$.

Очевидно: все $\mu G_i = 0 \Rightarrow S^*_R = \sigma_R = S_{*R} = 0$

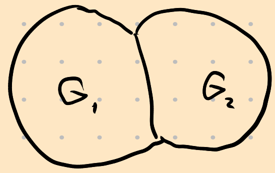
2. Аддитивность интеграла по мн-ву

Пусть $G = G_1 \cup G_2$, $\mu(G_1 \cap G_2) = 0$

Если f инт. на G_1 и G_2, то f инт. на G и $\int\limits_G f(x)dx = \int\limits_{G_1} f(x)dx + \int\limits_{G_2} f(x)dx$

Д-во: по п. 2 крит. Дарбу

$\exists R_1$ – разб. G_1: $\omega_{R_1} < \frac{\varepsilon}{2}$



$\exists R_2$ – разб. G_2: $\omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$

R_1' – разб. $G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$, к-рое получается из R_1 выкидыванием общих т. с $G_1 \cap G_2$.

Все отброшенные мн-ва имм. нулевую меру $\Rightarrow$ $\omega_{R_1'} = \omega_R < \frac{\varepsilon}{2}$

R_2' – то же самое, $\omega_{R_2'} = \omega_{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Рас-им R – разб. $R_1 \cup R_2$, включ. все мн-ва R_1', R_2' и $G_1 \cap G_2$.

$\omega_R = \omega_{R_1'} + \omega_{R_2'} + \omega_i \cdot \mu(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$

По п. 2 крит. Дарбу f инт. на $G = G_1 \cup G_2$.

$\sigma_R = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2} + f(\xi_i) \cdot \mu(G_1 \cap G_2)$

f – инт. на G $\Rightarrow$ по любой пос-ти Римановских сумм σ_{R_k}, $|R_k| \to 0$:

$\lim\limits_{k \to \infty} \sigma_{R_k} = I = \int\limits_G f(x)dx$

Если взять соотв. σ'_{R_k} для G_1, то они отлич. от Римановских сумм для $G_1 \setminus (G_1 \cap G_2)$ на нулевое слагаемое, то

$\lim\limits_{k \to \infty} \sigma'_{R_k} = I_1 = \int\limits_{G_1} f(x)dx$

Аналогично R_2: $\lim\limits_{k \to \infty} \sigma''_{R_k} = I_2 = \int\limits_{G_2} f(x)dx$

σ_{R_k} отлич. от $\sigma'_{R_k} + \sigma''_{R_k}$ на нулевое слагаемое $\Rightarrow$ $I = I_1 + I_2$ ЧТД

3 Пусть f – инт. на $G \subset \mathbb{R}^n$, $G_0 \subset G$ – изм. подмн-во, тогда f инт. на G_0.

Д-во: по п. 3 крит. Дарбу

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$: $\forall R$ – разб. G, $|R| < \delta \to \omega_R < \varepsilon$.

Рас-им любое разб. R_0 мн-ва G_0, $|R_0| < \delta$. Тогда его можно продолжить до разб. R мн-ва G: $|R| < \delta$. $\omega_{R_0} \le \omega_R < \varepsilon$,

по п. 3 крит. Дарбу f инт. на G_0. ЧТД

4 Линейность интеграла

Пусть f и g инт. на мн-ве $G \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда

$\alpha f+\beta g$ – инт. на G, и $\int\limits_G f+g = \alpha\int\limits_G f+\beta\int\limits_G g$

Д-во: Рассм. R_k – разб. G, $|R_k|\to 0$

$\sigma_{R_k}(f)\to I_1=\int\limits_G f$, $\sigma_{R_k}(g)\to I_2=\int\limits_G g$, очевидно, что

$\sigma_{R_k}(\alpha f+\beta g)=\alpha\,\sigma_{R_k}(f)+\beta\,\sigma_{R_k}(g)\to\alpha I_1+\beta I_2$

Т.к. R_k – любое, $|R_k|\to 0$, $\xi_i^{(k)}\in G_i^{(k)}$ – любое $\Rightarrow \alpha f+\beta g$ – инт.,

$\int\limits_G \alpha f+\beta g=\alpha\int\limits_G f+\beta\int g$ ЧТД

⑤ Пусть f, g – инт. на G. Тогда fg – инт.

Д-во: $|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')| = |f(x'')(g(x'')-g(x'))+(f(x'')-f(x'))g(x')|\leq$

$\leq M(|g(x'')-g(x')|+|f(x'')+f(x')|)$ ⊛ (т.к. $|f|, |g|\leq M$ – огр.)

$x'', x'\in G\Rightarrow |g(x'')-g(x')|\leq\omega_i(g)$

$|f(x'')-f(x')|\leq\omega_i(f)$

⊛ $M(\omega_i(f)+\omega_i(g))$; переходя к sup: $\omega_i(fg)\leq M(\omega_i(f)+\omega_i(g))$

$\omega_R(fg)=\sum\limits_{i=1}^N\omega_i(fg)\,\mu G_i\leq\sum\limits_{i=1}^N M(\omega_i(f)+\omega_i(g))\cdot\mu G_i\leq$

$\leq M(\omega_R(f)+\omega_R(g))$

По п. 2 кр. Дарбу $\forall\varepsilon>0\to\exists R:\omega_R(f)<\frac{\varepsilon}{2M}$, $\omega_R(g)<\frac{\varepsilon}{2M}\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega_R<\varepsilon\Rightarrow fg$ – инт. на G ЧТД

⑥ f – инт. на $G\Rightarrow |f|$ инт. на G

Д-во: аналогично, т.к. $||x''|-|x'||\leq|x''-x'|\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega_i(|f|)\leq\omega_i(f)\Rightarrow\omega_R(|f|)\leq\omega_i(f)$ ЧТД

⑦ Если $f(x)=\mathrm{const}$ на изм. $G\Rightarrow f$ – инт. на G, $\int\limits_G f(x)\,dx=C\cdot\mu G$.

Д-во: M_i, $m_i=\mathrm{const}\Rightarrow S^*_R=S_{*R}=\sum\limits_{i=1}^N C\cdot\mu G_i=C\mu G_i$ ЧТД

⑧ Интегрирование неравенств

Пусть f и g – инт. на G, $f(x)\geq g(x)$.

Тогда $\int\limits_G f(x)\,dx\geq\int\limits_G g(x)\,dx$

Д-во: очевидно из того, что $\forall R\to\sigma_R(f)\geq\sigma_R(g)$, далее перейти к пределу.

ЧТД

Следствия

ⓐ Если $f(x)\geq 0$ и инт. на $G\Rightarrow\int\limits_G f(x)dx\geq 0$

⑤ Если $f(x)$ инт. на G, то $\left|\int\limits_G f(x)dx\right| \le \int\limits_G |f(x)|dx$

Д-во: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

Т.к. f и $|f|$ - инт., то

$$-\int\limits_G |f| \le \int\limits_G f \le \int\limits_G |f| \Rightarrow \left|\int\limits_G f\right| \le \int\limits_G |f|$$ ЧТД

⑧ f, g инт. на G, $|f| \le M \Rightarrow \left|\int\limits_G fg\right| \le M\int\limits_G g$

Д-во: $-M \le f(x) \le M \Rightarrow -M|g| \le fg \le M|g|$ - интегрируем, ЧТД.

⑨ Интегрирование строгих неравенств

$f(x) \ge g(x)$ на изм. мн-ве G, они обе непр. во внутр. т. $x_0 \in G$, $f(x_0) > g(x_0)$. Тогда $\int\limits_G f > \int\limits_G g$ - основная лемма вариационного исчисления.

Д-во: $\varphi(x) = f(x) - g(x) \ge 0$. $\varphi(x)$ непр. в x_0, $\varphi(x_0) > 0$.

Рас-им $G = U_\delta(x_0) \cup (G \setminus U_\delta(x_0))$

$U_\delta(x_0) \subset G$, $\varphi(x) > \frac{\varphi(x_0)}{2}$ в $U_\delta(x_0)$ (усил. лемма о сохр. знака).

$$\int\limits_G \varphi(x)dx = \int\limits_{U_\delta(x_0)} \varphi(x)dx + \int\limits_{G\setminus U_\delta(x_0)} \varphi(x)dx \ge \frac{\varphi(x_0)}{2}\underbrace{\mu U_\delta(x_0)}_{>0 \text{ (т.к. } x_0 \text{ - внутр. т.)}} > 0$$

ЧТД

⑩ Непрерывность интеграла по множеству

$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots \subset G$ - возраст. пос-ть мн-в, все изм.

$\mu G_k \to \mu G$, $k \to \infty$. $f(x)$ огр. на G и инт. на всех G_k. Тогда она инт. на G и $\int\limits_G f(x)dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(x)dx$

Д-во: $G = G_k + \underbrace{(G \setminus G_k)}_{\text{измеримо}}$.

$\mu(G \setminus G_k) = \mu G - \mu G_k \to 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists k : \mu(G - G_k) < \frac{\varepsilon}{4M}$, $M = \sup\limits_G |f(x)|$

Т.к. f инт. на G_k, то по п. 2 кр. Дарбу

$\exists R'$ - разб. G_k: $\omega_{R'} < \frac{\varepsilon}{2}$

Построим R - разб. G: все мн-ва R' и еще $G \setminus G_k$

$\omega_R = \omega_{R'} + \omega_0 \cdot \mu(G \setminus G_k) <$ (ω_0 - колеб. f на $(G \setminus G_k)$, $\omega_0 \le 2M$)

$< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$, по п. 2 кр. Дарбу f инт.

$$\int\limits_G = \int\limits_{G_k} + \int\limits_{G\setminus G_k} \Rightarrow \int\limits_{G\setminus G_k} = \int\limits_G - \int\limits_{G_k}$$

$$\left|\int_G - \int_{G_k}\right| = \left|\int_{G\setminus G_k}\right| \le M\cdot\mu(G\setminus G_k) \to 0 \Rightarrow \int_{G_k} \to \int_G$$ ЧТД

11 Теорема о среднем

f и g - инт. на G, $g(x)$ сохр. знак. Тогда

$$\int_G fg = \mu\int_G g, \quad \text{где } \mu \in [m, M], \quad m = \inf_G f, \quad M = \sup_G f$$

Если G - связный компакт и f - непр. на G, то $\mu = f(\xi)$, $\xi \in G$.

Д-во: для опр. $g \ge 0$.

$m \le f(x) \le M$

$m\, g(x) \le fg \le M\, g(x)$

$m\int_G g \le \int_G fg \le M\int_G g$ - если $\int_G g = 0$, то т. верна $\forall \mu$. Иначе

$m \le \dfrac{\int fg}{\int g} \le M \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int fg = \mu\int g$

Если G - компакт, то f достигает на нём m и M, а т.к. мн-во связно, то приним. все знач. между m и M, т.е. $\exists \xi \in G: \mu = f(\xi)$ ЧТД