

Неявные ф-ии

$$y^2 = x^2$$

а) Сколько ф-ий $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт гр-е? Бесконечно много:

$$X \subset \mathbb{R}: F(x) = x, x \in X$$

$$F(x) = -x, x \notin X$$

б) Сколько непрерывных ф-ий $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт гр-е? 4:

$$x, -x, |x|, -|x|$$

в) Ск- непрер- ф-ий $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт гр-е? 2:

$$x, -x$$

г) Ск- непрер- ф-ий $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт гр-е? 1:

$$x$$

Теорема о неявной ф-ии

Пусть $F(x, y)$ непрерывна в (x_0, y_0) , $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$ в к-ром $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$.

При этом $f(x)$ непрерывна на $(x_0 - a, x_0 + a)$

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \text{формула} - \text{не доказано!}$$

Далее $f'(x) \neq 0$ произв. той переменной, которая задана (равна ф-ии).

№1

$$u^3 - xu + y = 0, \quad u = u(x, y)$$

Найти u'_x, u'_y и du в $\pi(3, -2, 2)$ и $(3, -2, -1)$ - надо задать u ! иначе неопределено что за точка

$$x=3, y=-2, u=?$$

$$u^3 - 3u - 2 = 0 \mid u=2 - \text{реш.}$$

$$(u-2)(u^2+2u+1)=0$$

$$(u-2)(u+1)^2=0 \quad (u=-1)$$

$$3u^2 u'_x - x u'_x - u = 0$$

$$u_x = \frac{u}{3u^2 - x}$$

$$3u^2 u'_y - x u'_y + 1 = 0$$

$$u'_y = -\frac{1}{3u^2 - x}$$

$$u'_x(A) = \frac{2}{9} \quad u'_y(A) = -\frac{1}{9}$$

$$du(3, -2, 2) = \frac{2}{9} dx - \frac{1}{9} dy$$

! Выше сразу найти интегрирующую, не нужно начинать

$$3u^2 du - x du - u dx + dy = 0$$

$$du = \frac{u dx - dy}{3u^2 - x}$$

№2

$$F(x-y, y-z, z-x) = 0 \Rightarrow z = z(x, y) \quad - \text{найти } dz$$

$$f(u, v, w)$$

$$f'_u(x-y, y-z, z-x)(dx-dy) + f'_v(x-y, y-z, z-x)(dy-dz) + f'_w(x-y, y-z, z-x) \cdot (dz-dx) = 0$$

$$dz = \frac{f'_u dx - f'_u dy + f'_v dy - f'_v dx}{f'_v - f'_w}$$

№3

$$\begin{cases} x e^{u+v} + 2uv = 1 & u = u(x, y) & u(1, 2) = v(1, 2) = 0 \quad (\text{логарифм}) \\ y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x & v = v(x, y) & \text{Найти } u'_x, u'_y, v'_x, v'_y \text{ при } x=1, y=2, u=v=0 \end{cases}$$

! При поиске найти u, v - проще. гр-е. А пров. б.т. - сложнее

$$\begin{array}{r|l} u^3 - 3u - 2 & u-2 \\ \hline u^3 - 2u^2 & \\ \hline -2u^2 - 3u & \\ -2u^2 - 4u & \\ \hline -u - 2 & \\ -u - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

№4

$$u^3 + 2yu + xy = 0 \quad u(1, -1) = -1 \quad (\text{проверка: OK})$$

$$\text{Найти } d^2u(1, -1)$$

$$3u^2 du + 2u dy + 2y du + dx y + dy x = 0$$

$$du = -\frac{2u dy + dx y + dy x}{3u^2 + 2y} \quad du = dx + dy$$

$$6u du^2 + 3u^2 d^2u + 2du dy + 2y d^2u + 2du dy + dx dy + dx dy = 0$$

$$d^2u(3u^2 + 2y) + du^2 - 6u + 4du dy + 2dx dy = 0$$

$$d^2u - 6(dx + dy)^2 + 4dx dy + 4dy^2 + 2dx dy = 0$$

$$d^2u = 6dx^2 + 12dx dy + 6dy^2 - 4dx dy - 4dy^2 - 2dx dy = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dx dy$$

№ T4

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Выразить $r'_x, r'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ через r, φ

$$\begin{cases} 1 = r'_y \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_y \\ 0 = r'_y \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_y \end{cases}$$

$$\Delta = -r$$

$$\Delta_r = -r \sin \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\cos \varphi$$

$$r'_y = \sin \varphi \quad \varphi'_y = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi'_x \\ 0 = r'_x \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi'_x \end{cases}$$

$$\Delta = r$$

$$\Delta_r = r \cos \varphi$$

$$\Delta_\varphi = -\sin \varphi$$

$$r'_x = \cos \varphi \quad \varphi'_x = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

№ поменяв всё это место?

$$u = u(x, y)$$

$$\text{Решить ур-е } xu'_y - yu'_x = 0$$

$$\text{Полная замена: } x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad u = (r, \varphi)$$

$$u'_y, u'_x \text{ выразить через } u'_r, u'_\varphi$$

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi \varphi'_x$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \varphi'_y$$

$$u'_x = u'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \quad u'_y = u'_r \cdot \sin \varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$$

u_{p-e} :

$$r \cos \varphi \cdot (u'_r \cdot \sin \varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}) - r \sin \varphi \cdot (u'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r}) = u'_\varphi$$

$$u'_\varphi = 0$$

$$u_{p-e} \quad u = f(r)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Отб.: } u = F(x^2 + y^2)$$

no 5

$$(y-z)z'_x + (y+z)z'_y = 0 \quad z = z(x, y)$$

$$\text{Заменим: } u = y-z, \quad v = y+z$$

$$\text{тогда } x = x(u, v).$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_x (x'_u du + x'_v dv) + z'_y dy = z'_x x'_u (dy - dz) +$$

$$dx = x'_u du + x'_v dv + z'_x x'_v (dy + dz) + z'_y dy$$

$$(z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y) dy + (-z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1) dz = 0$$

$$dy, dz - \text{независимые} \Rightarrow \begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_x x'_v + z'_y = 0 \\ -z'_x x'_u + z'_x x'_v - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \frac{1}{x'_v - x'_u} \\ z'_y = -\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \end{cases}$$

Интегрируем:

$$\frac{u}{x'_v - x'_u} - v \left(\frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u} \right) = 0$$

$$\frac{u}{v} = x'_u + x'_v$$

no T3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

$$1) \text{ D-из, то } J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то } f \text{ не является функцией}$$

$$2) \text{ Найти } f(\mathbb{R}^2) - \text{найти значения } f.$$

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Аб-а функционі і нгу періодичні: $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$
 $v(r, \varphi) = v(r, \varphi + 2\pi)$

2) $u = \operatorname{Re} e^{x+iy}$
 $v = \operatorname{Im} e^{x+iy}$ e^z прим. не змат. кране 0

Экстремумы ф-ий нескольких переменных

$u = F(x_1, \dots, x_n)$

Необх. усл-е: Если в точке лока. экстремума F стационар., то $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ (станд. т.)

Дост. усл-е: Если $F(x_1, \dots, x_n)$ - дватри густр. в $U_0(\bar{x}_0)$, \bar{x}_0 - станд. т., то рас-им квадратичную форму $\sigma(dx_1, \dots, dx_n)$:

$$d^2 F(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(\bar{x}_0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n F''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. кв. ф- полож. опре. $\Rightarrow \bar{x}_0$ - лока. min
2. отриц. опре. \Rightarrow лока. max
3. неопр. $\Rightarrow \bar{x}_0$ - не лока. экстр.
4. неопр. $\Rightarrow ?$ (аналитич. приращение)

Исследование кв. форм

1. Приведение в канонический вид $k(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

Этой форм. обозначен с формализм го преобразование ε_i :

p = кол-во $\varepsilon_i = +1$ - положит. индекс инерции

q = кол-во $\varepsilon_i = -1$ - отриц. индекс инерции

$r = p + q$ - ранг

Положит. опре. \Leftrightarrow все $\varepsilon_i = +1$

$p = n, q = 0$

Отриц. опре. \Leftrightarrow все $\varepsilon_i = -1$

$p = 0, q = n$

Неопр. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_i = +1$ и $\exists \varepsilon_j = -1$

$1 \leq q, p \leq n-1$

Полож. полуопр. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \geq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$p \leq n-1, q = 0$

Отриц. опре. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i \leq 0, \exists \varepsilon_j = 0$

$p = 0, q \leq n-1$

2. Критерий Сильвестра

$$B = (b_{ij})$$

$$\left(\begin{array}{c} \sqsubset \\ \sqsubset \\ \sqsubset \end{array} \right) \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

$$\text{Остр. опре.} \Leftrightarrow \text{sign } \Delta_i = (-1)^i$$

$$\text{Полож. опре.} \Leftrightarrow \forall \Delta_i > 0$$

3. Частный случай $n=2$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ Полож. опре.} \Leftrightarrow A > 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C > 0)$$

$$\text{Остр. опре.} \Leftrightarrow A < 0, AC - B^2 > 0 \quad (\Rightarrow C < 0)$$

$$\text{Неопр} \Leftrightarrow AC - B^2 < 0$$

№1

$$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$$

$$u'_x = 6xy - 12$$

$$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \pm 1 \\ y = \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = 6y \quad u''_{xy} = 6x$$

$$u''_{yy} = 6y$$

$$d^2F = 6y dx^2 + 6y dy^2 + 12x dx dy$$

$$\frac{d^2F(2,1)}{6} = dx^2 + dy^2 + 4dx dy \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0 - \text{неопре.}$$

$$\frac{d^2F(-2,-1)}{6} = -dx^2 - dy^2 - 4dx dy - \text{неопре.}$$

$$\frac{d^2F(1,2)}{6} = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dx dy \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 - \text{неосм. опре.} - \text{min}$$

$$\frac{d^2F(-1,-2)}{6} = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dx dy - \text{Остр. опре.} - \text{max}$$

№ 2

$$u = xyz(16 - x - y - 2z), \quad x, y, z \geq 0$$

$$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$$

$$u'_x = 16yz - 2xyz - y^2z - 2yz^2 \quad u'_y = 16xz - x^2z - 2xyz - 2xz^2$$

$$u'_z = 16xy - x^2y - xy^2 - 4xyz$$

$$\begin{cases} yz(16 - 2x - y - 2z) = 0 \\ xz(16 - x - 2y - 2z) = 0 \\ xy(16 - x - y - 4z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z = 16 \\ x + 2y + 2z = 16 \\ x + y + 4z = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$u''_{xx} = -2yz = -16 \quad u''_{yy} = -2xz = -16 \quad u''_{zz} = -4xy = -64$$

$$u''_{xy} = z(16 - 2x - y - 2z) - yz = -8 \quad u''_{xz} = y(16 - 2x - y - 2z) - 2yz = -16$$

$$u''_{yz} = x(16 - x - 2y - 2z) - 2xz = -16$$

$$d^2u(4, 4, 2) = -16dx^2 - 16dy^2 - 64dz^2 - 16dxdy - 32dxdz - 32dydz$$

$$\frac{d^2u(4, 4, 2)}{16} : \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 > 0$$

Полож. опре. $\Rightarrow d^2u$ отриц. опре. \Rightarrow не макс

№ 3

$$u = x^4 + y^4 - 2x^2$$

$$u'_x = 4x^3 - 4x \quad u'_y = 4y^3$$

$$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \quad u''_{yy} = 12y^2 \quad u''_{xy} = 0$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy^2$$

$$d^2u(0, 0) = -4dx^2 - \text{отриц. невып.} - ?$$

$$u(\Delta x, \Delta y) - u(0, 0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 = 0 : \quad \begin{matrix} \Delta x = 0 & \Delta y \neq 0 & \textcircled{+} \\ 0 < \Delta x < \sqrt{2} & \Delta y = 0 & \textcircled{-} \end{matrix}$$

Изменяется не!

$$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2 - \text{полож. невып.}$$

$$\begin{aligned} u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) &= (\pm 1 + \Delta x)^4 + \Delta y^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 = \\ &= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x - 2)^2 + \Delta y^4 > 0 \quad - \text{min} \end{aligned}$$

№ 5

В числ. т. кл. группа д'т наим. наимень.

а) Может ли быть min? Да.

б) Может ли быть max? Нет (бесконечность и др. др., но ограничение > 0 - бонус d'f)

в) Не будет экстремума? Да

№ 4

$$x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0 \quad - \text{уравн. поверхности в } \mathbb{R}^3, \text{ замкн. кривая}$$

$$2x dx + 2y dy + 2u du + 2dx - 2dy + 4du = 0$$

$$(u+2) du + (x+1) dx + (y-1) dy = 0$$

$$du = - \frac{(x+1) dx + (y-1) dy}{u+2}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad - \quad du = 0$$

$$u^2 + 4u - 5 = 0 \quad u = 1, -5; \quad (-1, 1, 1), (-1, 1, -5)$$

$$(u+2) d^2 u + du^2 + dx^2 + dy^2 = 0$$

$$d^2 u = \frac{-dx^2 - dy^2}{u+2}$$

$$d^2 u(-1, 1, 1) = -dx^2 - dy^2 \quad - \text{определ. отриц. (max)}$$

$$d^2 u(-1, 1, -5) = \frac{dx^2}{3} + \frac{dy^2}{3} \quad - \text{определ. полож. (min)}$$

Условный экстремум

$$u = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (\bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

$$\text{Условия связи: } \varphi_1(\bar{x}) = 0, \dots, \varphi_m(\bar{x}) = 0 \quad (*) \quad n > m$$

Тогда $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ наз-ся условным экстремумом $f(\bar{x})$ при усл. (*) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \exists \delta > 0: \forall \bar{x} \in U_\delta(x^0) \text{ при ввн. усл. } (*) \rightarrow f(\bar{x}) > f(\bar{x}^0)$$

$$\text{Ф-ция Лагранжа } L(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$$

$$\text{где } x \equiv \bar{x} \\ x^0 \equiv \bar{x}^0$$

$$L(x) \Big|_* = f(x) \Big|_* \quad \forall \lambda_i$$

Критерий: Пусть $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ непрерывны в $U_\delta(x^0)$, тогда

$$\text{rg} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}} = m$$

$$m \left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \end{array} \right)$$

Путь эйлер x_1, \dots, x_m берем. через x_{m+1}, \dots, x_n (независим)

Пусть x^0 - т. где задан $f(x)$ и m б.в. (*)

Тогда $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: x^0 - ст. экстр. т. оп-им функции

Ск-м $n+m$ гр-м $n+m$ незав. $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{cases}$$

Пример

$$n=2, \quad m=1$$

$$u = \ln xy, \quad x^3 + xy + y^3 = 0$$

$$L = \ln xy + \lambda (x^3 + xy + y^3)$$

$$\begin{cases} L'_x = \frac{1}{x} + \lambda(3x^2 + y) = 0 \\ L'_y = \frac{1}{y} + \lambda(3y^2 + x) = 0 \\ x^3 + xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = -\lambda(3x^2 + y) \\ \frac{1}{y} = -\lambda(3y^2 + x) \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3x^2}{y} - \lambda \\ \frac{1}{xy} = -\lambda \cdot \frac{3y^2}{x} - \lambda \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow y = x$$

$$2x^3 + x^2 = 0$$

$$x_1 = 0 - \text{не рассм.} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x = y = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = 8 - \text{возможное экстр.}$$

Дополнительное условие:

(*) - прогнорировать - а. б.в.

dx_1, \dots, dx_m берем. через dx_{m+1}, \dots, dx_n

Пусть f, φ_i - гладкие непр. функц. в $U_\delta(x^0)$, x^0, λ_i - п.в. ск-м

$n+m$ гр-ин $\in n+m$ нелб.

$d^2 L(x^0)|_{(x^0)}$ - квад-форма от $n+m$ незав-гр-ов

По ней экстремально оп-ся характер уел. экстремума и его ун-е.

! Если $d^2 L(x^0)$ го отрицательн. полем. или отриц. опред. - отрицательн. миним не глится, и так бѣе ясно. Условие нулея отрицательн. Если полем. отрицательн. форма невырожд. - миним гою. невыгоден.

Пример (бѣе расме)

$$L'_x = -\frac{1}{x^2} + \lambda \cdot 6x = -4 + 8 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -28$$

$$L''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda \cdot 6y = -28$$

$$L''_{xy} = \lambda = 8$$

$$d^2 L = -28 dx^2 - 28 dy^2 + 16 dx dy$$

$$\frac{d^2 L}{4} = -7 dx^2 - 7 dy^2 + 4 dx dy \quad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix} \quad - \text{отриц. опред.}$$

Поэтому, что $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ - условный максимум.

Пример 2

$$u = 1 - 4x - 8y \quad x^2 - 8y^2 = 8$$

$$L = 1 - 4x - 8y + \lambda (x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ \lambda = \frac{2}{x} \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \mp 4 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = \mp \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$L''_{xx} = 2\lambda = \mp 1 \quad L''_{yy} = -16\lambda = \pm 8 \quad L''_{xy} = 0$$

$$d^2 L = 2\lambda (dx^2 - 8dy^2) \quad d^2 L|_{x^0} = \pm 4 dy^2$$

$$(*) \quad 2x dx - 16y dy = 0 \quad \oplus (-4, 1) - \text{полож. опред.} \Rightarrow \text{уел. мин}$$

$$dx = 8y \frac{dy}{x} = -2dy \quad \ominus (4, -1) - \text{отриц. опред.} \Rightarrow \text{уел. макс}$$

Пример 3

$$u = xy, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}$$

$$2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

$$2y^2 - 1 = 0$$

$$\text{Найдем: } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}$$

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{yy} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 1 \quad \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 2\lambda, \quad \Delta_2 = 4\lambda^2 - 1$$

- невыпукл. форма

$$d^2 L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2dx dy$$

$$(*) 2x dx + 2y dy = 0$$

$$dy = -\frac{2x dx}{2y} = \begin{cases} -dx, & x=y, \lambda = -\frac{1}{2} \\ +dx, & x=-y, \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d^2 L|_{**} = \pm dx^2 \pm dy^2 + 2dx dy = \begin{cases} 4dx^2, & \lambda = -\frac{1}{2} \quad - \text{выпукл. форма} \quad - \text{ген. min} \\ 4dy^2, & \lambda = \frac{1}{2} \quad - \text{выпукл. форма} \quad - \text{ген. max} \end{cases}$$

Ответ: $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{ген. min}}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{ген. max}}$

Пример 4

$$u = 2x^2 + 12xy + y^2$$

$$x^2 + 4y^2 = 25$$

$$L = 2x^2 + 12xy + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2\lambda = 0 \\ L'_y = 12x + 2y + 8\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x(2 + \lambda) + 6y = 0 \\ 6x + y(1 + 4\lambda) = 0 \end{cases}$$

- (0, 0) не подходит по условию

$$\text{Учтем, что } (*) \text{ имеет решение } (0, 0): \begin{vmatrix} 2 + \lambda & 6 \\ 6 & 1 + 4\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-34 + 9\lambda + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{17}{4} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Далее нужно интерпретировать. мне лень.

Ответ: при $\lambda = 2$: глоб. ген. min, при $\lambda = -\frac{17}{4}$: глоб. ген. max

