

# I. Электростатика

## §1. Электрический заряд

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}$$

Есть меньшие заряды у кварков:  $\frac{1}{3}e$  или  $\frac{2}{3}e$ , но они всегда связаны

Закон сохранения заряда - полный заряд замкнутой системы сохраняется.

$q = Ne$  - заряд дискретен

Заряду релятивистски инвариантен

Дискретность заряда - опыт Милликена (капля масла в конденсаторе)

1786 г. - закон Кулона (Кавендиш - 1771 г.)

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad \text{— точечные заряды (абстракция!)}$$

В СИ: спец. единица заряда - 1 Кл (основная)

$$\text{Из-за этого возникает } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н м}^2}{\text{Кл}^2}$$

В СГСЭ: заряд - произв. единица

$$\text{Из-за этого } k=1, \quad [q] = \sqrt{\text{дин} \cdot \text{см}^2} = 1 \text{ ед. СГСЭ}$$

!  $1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГСЭ}$  (Кулон - производная единица!)

## Эл. поле



$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$$



## Электрический диполь



Дипольный момент  $\vec{p} = q \vec{l}$

Ищем поле по принципу суперпозиции

$|\vec{l}| \ll |\vec{r}_A|$  - точечный диполь,  $r_1 = |\vec{r}|$ ,  $r_2 = |\vec{r}| + |\vec{l}|$

$$E_A = q \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = q \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2 r_2^2} \approx \frac{2ql}{r^3} = \frac{2\vec{p}}{r^3}$$



$$E_{+(-)} = \frac{q}{r^2}$$

$$E_A = 2 E_+ \sin \alpha = 2 E_+ \frac{l/2}{r} = \frac{ql}{r^2} = \frac{p}{r^2}$$

$$\vec{E}_A = - \frac{\vec{p}}{r^2}$$



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

$$E_A = \frac{1}{r^3} (2\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \frac{1}{r^3} (3\vec{p}_1 - \vec{p})$$

$$|\vec{p}_1| = p_1 = p \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{(\vec{p} \vec{r})}{p r} \Rightarrow p_1 = \frac{(\vec{p} \vec{r})}{r}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{(\vec{p} \vec{r})}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{E}_A = \frac{3(\vec{p} \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

№ 2.23



непроводящая сфера

Каким образом распределиться заряд по сфере, чтобы поле было однородным?

$$\sigma(\theta) = \frac{3\epsilon_0}{4\pi} \cos \theta$$

$$\vec{p} = -\vec{E}_0 R^3$$

Видим от сферы она - диполь

Внутри однородного поля нейтральные шары / сферы создадут токаны!



Внутри шара возникает дипольный момент!

$$\vec{p} = \vec{E}_0 R^3$$

## Диполь во внешнем поле



"Мертвый" диполь - заряды закреплены на концах палки (однородный) В среде - поведённый диполь

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Если диполь свободный, он повернется так, что  $\vec{p} \parallel \vec{E}$

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}_2] = q [\vec{r} \vec{E}] = [\vec{p} \vec{E}]$$

$$|\vec{M}| = p E \sin \alpha$$

Работа по повороту диполя на  $\alpha$ :

$$\delta A = -M d\alpha = dW$$

$$W_{\alpha} = -p E \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha = p E (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = -p E \cos \alpha$$

$$! W_{\alpha} = -(\vec{p} \vec{E})$$

$$W_{\min} = -p E$$

$$W_{\max} = p E$$



## Неоднородное поле

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$$

$$\vec{F} = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = q d\vec{E}$$

$$d\vec{E} = l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

$$! \vec{F} = (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{E}$$

$$p_x \neq 0; \quad p_y = p_z = 0; \quad ! \vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$$

## Поток вектора



$$\Phi = 0 = vS$$



$$\Phi = 0$$

$$\Phi = (\vec{v} \vec{S})$$

$\vec{v}$  - векторное поле

(для элементарной площади)

Поле  $\vec{E} \rightarrow \Phi = (\vec{E} \vec{S})$

Плоский угол



2D

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

$$\alpha_{\max} = 2\pi$$



3D

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Поверхность сфер. сегмента



$$r = R \sin \theta$$

$$S = \int_0^\alpha 2\pi R \sin \theta R d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$$

Бесконечно малый плоский угол



$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{(\vec{r} \cdot d\vec{S})}{r^3}$$

Теорема Гаусса



$$d\Phi = (\vec{E} d\vec{S})$$

$$\Phi = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S q \frac{(\vec{r} d\vec{S})}{r^3} =$$

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

$$= \int q d\Omega = 4\pi q$$

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi \sum q_i \\ 0 \end{cases}$$

$$\Phi_E = \oint (\vec{E} d\vec{S}) = \begin{cases} 4\pi \sum q_i \\ 0 \end{cases} = 4\pi \iiint_V \rho(x,y,z) dV \quad \text{— интерпретация формулы}$$

$\frac{dxdydz}{dx dy dz}$

# Примеры использования Гаусса



Горизонт. компонент  $y$   $E$  не имеет сумм для точек!

$$\Phi = 2ES = 4\pi\sigma S$$

!  $E = 2\pi\sigma$

При переносе заряда  $Q$  в вакуум поле не меняется:  $\Delta E = 4\pi\sigma$



$$\Phi = ES = 4\pi\sigma S$$

$$E = 4\pi\sigma$$

Заряд - не пов-ти!



$$x < \frac{H}{2}: \Phi = E(x)S = 4\pi\epsilon\sigma x S$$

$$E(x) = 4\pi\epsilon\sigma x, \quad x < \frac{H}{2}$$

$$x = \frac{H}{2} \quad ES = 4\pi\epsilon\sigma \frac{H}{2} S$$

$$E = 2\pi\epsilon\sigma H = 2\pi\epsilon\sigma$$



$$\Phi = E(r) \cdot 2\pi r l = 4\pi \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$E(r) = \frac{4}{3} \pi \rho r^2 \quad (r \leq R)$$

$$E(r) = \frac{4}{3} \rho \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{r^2} \quad \text{— как точечный заряд!}$$

$E$  радиально симметрично



$$\Phi_E|_{r \geq a} = E(r) \cdot 2\pi r l = 4\pi \rho l$$

( $\rho$  — плотность заряда  $[\frac{\text{э.л.}}{\text{см}^3}]$ )

$$E(r)|_{r \geq a} = \frac{2\rho}{r}$$

## Теорема Урнису



Сис-мы статически неподвижны



Всякая система уравновешенных зарядов нейтральна.



Если возникает  $\vec{F}$ , то  $\Phi < 0$ , но в рав-тии нет зарядов, и  $\Phi = 0$ , т.е. сис-ма нейтр.

Из т. Урнису  $\Rightarrow$  заряды в атоме (как минимум) движутся.

В неанкетной модели  $e$  движется с ускорением  $\Rightarrow$  излучает  $\Rightarrow$  неустойчива - решается квантовой механикой.

! Внутри проводника всегда  $E = 0$  (незав. от внешнего  $E$ ).

## Теорема Гаусса в дифференциальной форме



$\rho(x, y, z)$  - какое-то распр-е зарядов

$$dV = dx dy dz$$

Поток  $E$  через грани  $\perp O_x$

$$\text{Поток} = \left[ E_x(x+dx) y dz - E_x(x) y dz \right]$$

передняя грань                      задняя грань

$$\left[ E_x(x+dx) y dz - E_x(x) y dz \right] \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

$$d\Phi = \underbrace{\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{E}} dx dy dz = 4\pi \rho dx dy dz$$

!  $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$        $\text{div } \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$

Рез. сферич.:  $\text{div } \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{S}}{V}$

Сферическая симм. сферич.

$$\text{div } \vec{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \quad (\text{г-во: сферич., заряд в } \delta^3)$$

## Электростатический потенциал



После разделения переменных, зависит только от координат, т.е. потенциально.

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \int_1^2 \frac{qQ}{r^3} (\vec{r} \cdot d\vec{l}) = qQ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^3} \vec{r}; \quad \vec{F} = q\vec{E} \quad \Leftrightarrow q \left( \frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$



$$(\vec{r} \cdot d\vec{l}) = r dl \cdot \cos \hat{r} d\vec{l} = r dr$$

!  $\varphi = \frac{Q}{r} + \text{const}$

const - нулевой уровень (или  $\infty$ )

Потенциал  $\varphi$  - работа по переносу заряда на бесконечность.

В СИ  $[\varphi] = \beta = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{10^9 \text{ эВ}}{3 \cdot 10^9 \text{ ед. зар.}} = \frac{1}{300} \text{ ед. СИ}$

## Связь $\varphi$ и $E$



$$\delta A_{12} = E_x dx = \varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$$

элементарно  
противо заряду

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = -\vec{\nabla} \varphi = -\text{grad } \varphi$$

!  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

## Потенциал пары диполя



$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad l \ll r$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{l}|} - \frac{q}{|\vec{r}|}$$

$$|\vec{r} - \vec{l}| = r - l \cos \alpha = r - \frac{(\vec{l} \cdot \vec{r})}{r} = r \left( 1 - \frac{(\vec{l} \cdot \vec{r})}{r^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{q}{r \left( 1 - \frac{(\vec{l} \cdot \vec{r})}{r^2} \right)} - \frac{q}{r} = \frac{q}{r} \left( 1 + \frac{(\vec{l} \cdot \vec{r})}{r^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{q(\vec{l} \cdot \vec{r})}{r^3} = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -(\vec{\nabla}, -\vec{\nabla}\varphi) = 4\pi\rho$$

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\varphi) = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = \Delta \varphi = -4\pi\rho \quad \text{— уравнение Пуассона}$$

↑  
потенциал

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Если найти  $\varphi(x, y, z)$  из Пуассона, то оно unique и единственное.

Нужно 2 граничных условия.

## Метод изображений



„Метаморфозы“ эквипот. пов-ти. Взаимодействие зарядов слева и с зарядом справа  $\equiv$  взаимодействие зарядов слева с пов-тью.





