

Решение линейного уравнения 2 порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in I \quad \text{бес. кр. вып., } a_0(x) \neq 0$$

Примечание, что \$y_1\$ - решение однородного \$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0\$

Член \$b\$ буде \$e^{ax}\$, \$x^k\$, \$ax+b\$ и т.д.

Найдем ОПОY;

\$y_2\$ - находим

\$y\$ - общ. реш. однородного \$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0\$

Ф-на линейной - Определителью: \$W(y_1, y) = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = C \varphi(x)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} = C \varphi(x) \quad \frac{y \cdot y' - y_1 y'_1}{y^2} = \frac{C \varphi(x)}{y}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C \varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2} dx + C_1$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ОПНУ: базисные решения: \$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\$

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \frac{b(x)}{a_0}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$$

$$C_1'(x) = \dots \quad C_2'(x) = \dots$$

Задача 1

$$2x y'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, \quad x > 0$$

ОПОY: \$y_1 = e^{-x}\$

\$y\$ - общ. \$y_1\$ - решение

$$W(y_1, y) = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx} = C e^{-(2x + \frac{1}{2} \ln x)} = C e^{-2x} x^{-1/2}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx = 2x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx = 2x + \frac{1}{2} \ln x + C,$$

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y' e^{-x} + y e^{-x}$$

Darum na e^{-2x} :

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-\frac{1}{2}}$$

"

$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' \quad \frac{y'}{e^{-x}} = C x^{-\frac{1}{2}} + C_1$$

$$\text{DPOY} \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x}$$

$$\text{OPHY} \quad y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-x} \sqrt{x}$$

$$+ \begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} + C_2'(x) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad C_1'(x) = -1$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \quad C_1(x) = -x + C_1$$

$$\text{Orts: } y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x} \sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x} + x e^{-x}$$

3. ayana 2

$$x^2 (\ln x - 1) y'' - x y' + y = x (\ln x - 1)^2, \quad x > 0$$

$$\text{HPOY: } y_1 = x$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y_1'' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C (\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_1 y_1' - y_1' y_1}{y_1^2} = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2} \quad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C \frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

$$\text{OPHY: } y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \end{cases} \quad | \cdot x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x)x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= -1 & C_1'(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ C_2(x) &= -x + C_2 & C_1(x) &= \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Darfer:

$$y = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \right) x + (\ln x - 1) \ln x$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$$

3.ogara 3

$$(2x+3)y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}y = 3(2x+3)^2$$

Unseren UPDY & lange x^k :

$$k(k-1)(2x+3)x^{k-2} - 2kx^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$$

$$(2x+3)k(k-1) - 2kx - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow y_1 = x^2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{pmatrix} = C e^{\int \frac{2}{2x+3} dx} = C(2x+3)$$

$$\left(\frac{y}{y_1} \right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = C \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + C_1$$

$$\text{OPDY } y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\text{OPDY: BN: } y = C_1(x)x^2 + C_2(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ C_1'(x)2x - C_2'(x)\frac{1}{x^2} = 6x + 9 \end{cases} \quad | \cdot x$$

$$\begin{cases} 2C_1'x^2 + 2C_2'\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ 2C_1'x^2 - C_2'\frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$$3C_2'\frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$$

$$C_2' = -3x^3 \quad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$$

$$C_2 = -x^3 + C_2 \quad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$$

Общее: $y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2 \ln x + 2x^3 - x^2$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2 \ln x$$

Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

Д-рн, это ур-е не имеет чисто x^2 члн. незав. поч-иц, ач-я сим-и 0 бнес-
ре с промежутком.

□ Предположим y_1 и y_2 — 2 реш. поч-и.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0 \text{ тк. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ члн. незав.}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{C}{x}$$

↑ \hookrightarrow поч-я сим-и 0 ↓ \hookrightarrow члн. незав. □

Применение члн. поч-и 2^{го} порядка к бесс., не ссы-я!

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\downarrow \quad -\text{метод е интегрирования (занесено вспом-и)}$$

$$z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right)$$

В поч-и Бесселя: $y = z x^{-1/2}$

$$y' = z' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z x^{-3/2}$$

$$y'' = z'' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} - \frac{1}{2} z x^{-5/2} + \frac{3}{4} z x^{-7/2}$$

Найдем $z'' x^{3/2} - z' x^{1/2} + \frac{3}{4} z x^{-1/2} + z' x^{1/2} - \frac{1}{2} z x^{-1/2} + (x^2 - \nu^2) z x^{-1/2} = 0$

$$z'' x^{3/2} + \frac{1}{4} z x^{-1/2} + z x^{1/2} - \nu^2 z x^{-1/2} = 0 \quad | : x^{3/2}$$

$$z'' + \frac{1}{4} x^{-2} + z - \nu^2 z x^{-2} = 0$$

$$z'' + z \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - v^2}{x^2} \right) = 0$$

При $v = \pm \frac{1}{2}$ для некоей $y_1(x)$ $z'' + z = 0 \Rightarrow z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

При $v \neq \pm \frac{1}{2}$ не хд-и в зоне оп-ции.

Задача Коши для ун-ой к-ии $n=2$ решена

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Решение задачи Коши $\exists!$ на бесконечном промежутке \mathbb{R}

В общем виде задача Коши для $n=2$ имеет вид $\exists!$ в окрестности x_0 .

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \rightarrow z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z e^{-\frac{1}{2} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

- neodsp-e Lyubans

yp-e: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2) y = 0$

$$y = z x^{-1/2}$$

$$z'' + \left(1 + \frac{1-v^2}{x^2}\right) z = 0$$

Zusammenfassung: wenn rächen Zahlen kon-ko rückr. pum-2 yp-2 ne unendlich.

Thm Ist die reell. pum. pum. yp-2 konvergent für $x \rightarrow \infty$ und ist rückr. auf $(a; +\infty)$,

$$a > 0$$

$$\square \quad Q(x) = 1 + \frac{1-v^2}{x^2} \quad |_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

$\exists C: \forall x > C \rightarrow Q(x) \geq \frac{1}{2}$; da obige $\{a, C\}$ konvex muss rückr.

Erst körp-t b rächen yp-an un. rückr. rächen, so no 7. Mängma UT



C 10.6

D-16, zw. A reell. pum. pum. $y'' + x^2 y' + (x+4)y = 0$ un. ≤ 5 rückr. na $(-\infty; +\infty)$

Zahlen rückr.: ...

Rückr. $z'' + z \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = 0$

Eben $Q(x) < 0$, zw. na rückr. ≤ 1 rückr.

$4 - \frac{x^2}{4} \leq 0 \quad x^2 \geq 16 \quad |x| \geq 4 \Rightarrow$ na $[4; +\infty)$ un na $(-\infty; -4]$ ne dene 1 rückr.

Dene 3 rückr. zw. $[-4, 4]$ ne dene 3³ rückr.

$$Q(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$$

$$z'' + z \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = 0 \quad (1)$$

N. - rückr. rückr. reell. pum. (1)

$$u'' + 4u = 0 \quad (2)$$

N. - rückr. rückr. reell. pum. (2)

- Organisator

$$N_1 \leq N_2 + 1$$

D-16, zw. $N_1 \leq 3 \Rightarrow N_2 \leq 2$, rückr. körp. (2) dene 3 rückr. d. b. (1) ($4 > \frac{x^2}{4}$)

Rückr. max. rückr. d. b. 1 pum. (2) rückr., zw. $N_2 \leq 2$

$$(-2; 2)$$

$$(2): u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$u = \cos 2x \quad -\text{gyakorlás a parabola}$$



A ezen körülbelül, gyakorlás $N_2 = 3$

Üzemi: ≤ 5 nyeri



Térkezelés

Darab zárt V-hezped, nem gr. $y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$ a sz. I[-1; 0] \exists szemelj.,
sz. $y'(0) = 0$. (gyorsan. meghib, zárt ezt 3 nyeri, amit. Rövid gyakorlás $U(4)$)

$$2 + \cos 3x \geq 1 \quad N_2 = \text{működési terület. nem. (2)}, N_1 = \text{szemelj. gr. (1)}$$

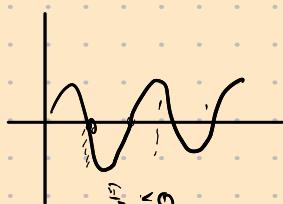
$$\text{Gyakorlásban c. gr. } z'' + z = 0 \quad (1)$$

$N_1 \leq N_2 + 1 \Rightarrow N_2 > N_1$, mely $N_2 \geq 3$ - megfelelő működési terület. nem. (1),
k-páros ≥ 3 nyeri ater [-1; 0].

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$z = \cos x \quad \text{nem } [-1; 0]$$

Báró területi $N_1 = 2$ -nél



Működési terület a grafikon $z = \sin(x-y)$

9.223

Darab, zárt ezen $\hat{q}(x) \leq 0$, az összehangolt gr. $y'' + q(x)y = 0$ c. nem. nem. gr.
 $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ mindenhol nem. $\forall x > x_0$. $q(x)$ nem. na $[x_0; +\infty)$

\square Az nyílhetetlen: működés $\exists x_1$: $y(x_1) \leq 0$. Ezen zárt rövid, $\exists \xi \in (x_0, x_1)$:
 $y(\xi) = 0$. $y'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(x_0+t) - y(x_0)}{t}$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \rightarrow y(x) > y(x_0)$$

Справа, это \exists -выражение, т.е. $y(b) \neq 0$.

Мн.ко можно предпол. что в окрестности b , $y(x)$ не имеет экстремумов. Т.е. $\inf_{(x_0, \delta)} y(x) > 0$, т.к. \exists минимум в (x_0, δ) .

$$y'' + q(x)y = 0$$

$y'' \leq 0$ и $y > 0 \Rightarrow y'' \geq 0$ на (x_0, δ) . $\Rightarrow y' \uparrow$ на (x_0, δ) \Rightarrow
 $\Rightarrow y'(x) \geq y'(x_0) > 0 \Rightarrow y(x) \uparrow$ на $(x_0, \delta) \Rightarrow y(x) = y(x_0) > 0$, т.к.

оп-ие непр. на (x_0, δ) $y(x) \geq y(x_0) > 0 \Rightarrow$ не имеет одн. л. в δ .

Продолжение.

Рядовые Тривиальные решения систем

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Несложные решения называются **стационарными**: $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x})$ (абсолютно - в независимости от t)

3-е. Касн.: $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x}), t \geq t_0$
 $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

Реш. 3-е. Касн. $\exists!$ на $[t_0; +\infty)$ для $A(\bar{x})$ непр. вдоль гр-цы.

Реш. есть глобал в $(n+1)$ -мерн.пр-бе.

n -мерн. пр-бо - **стационарная пр-бо**.

Применяя решения из \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n - **стационарные траектории**.

Она задается реш. не пр-зы, но как независим. залежит от глобал в \mathbb{R}^n .

Частичные



- ① Для $x(t)$ -стационар., то $x(t+C)$ - стационар. с тем же траекториями.
- ② 2 различных траектории не могут однажды совм.
- ③ Конст. стационар. реш. $\bar{x} = \bar{x}_0$ имеет траекторию - кону (наименее плавную)

Как их искать ($n=2$)

① $\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y) \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}$

Задаем $y \rightarrow$ const. $y \rightarrow$ k-ая $F(x, y) = C$.

q - из $F(x, y)$, надо находим y -ю. \Leftrightarrow реш. нет задачи

требующей независимого интегрирования

Гомогичні - лінійні залежності між змінними.

② звичайний метод.

Приклад

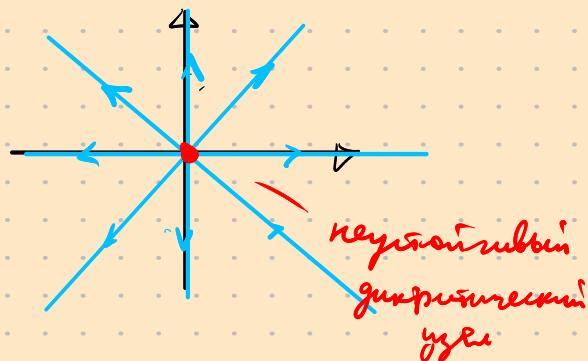
① $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$ в р. (0,0)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$xdy - ydx = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = C \quad - \text{нестандартна форма } F(x,y) = \frac{y}{x}.$$

Лінійні залежності неповного порядку - спрощені. Но залежність - лінія, що проходить крізь 0 (н.п.)!



Приклад на - це лінійні залежності неповного порядку у вигляді однієї кривої, яка проходить крізь початок.

② $x = C_1 e^t$
 $y = C_2 e^t$ при $t \uparrow \quad x, y \rightarrow \infty$

Примір: 1. Порівняння підстановок.

2. Норм., використовуючи норм. підстановки.

Координатні підстановки підставляють змінніх змінам

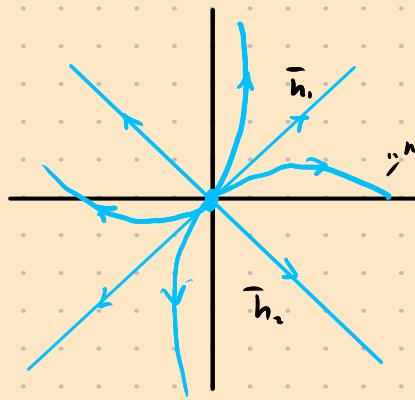
$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(0,0)-н.п.

Діагональний н.п. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ та $\lambda = 0$ не є б-чі коріннями.

① $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 \rightarrow \bar{h}_1, \lambda_2 \rightarrow \bar{h}_2$

Часто встречающийся вид



Продолжим:

1. П.п.

2. 4 типа, зависящие от \bar{h}_1 и \bar{h}_2

3. асимптотика - линии. Красная линия $x=y^d$, $d>0$ с осью \bar{h}_1 , касающаяся \bar{h}_2

Система с n.п.

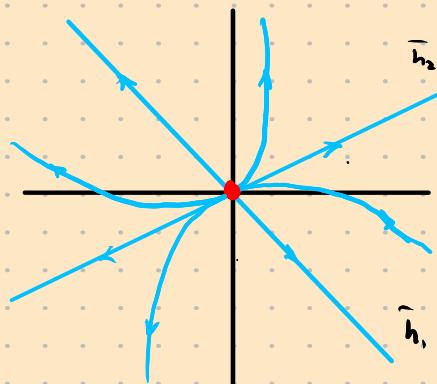
Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-4) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$$

$$\lambda=5 \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{h}_{11}$$

$$\lambda=2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Продолжим не пересекающиеся!!

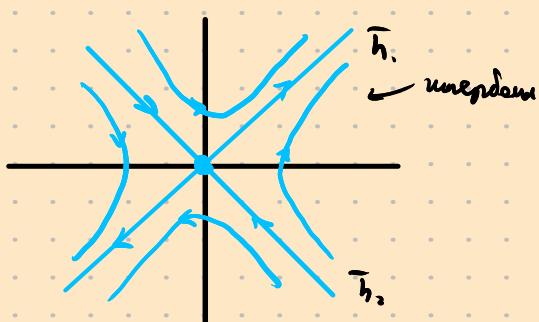
② $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 \rightarrow \bar{h}_1, \lambda_2 \rightarrow \bar{h}_2$

Часто встречающийся вид

То же самое, но симметрия к n.п.

③ $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\lambda_1 \rightarrow \bar{h}_1, \lambda_2 \rightarrow \bar{h}_2$

Следует (нестабильный)



Продолжим

1. П.п.

2. 4 типа, зависящие от \bar{h}_1 и \bar{h}_2 (\bar{h}_1 - притягивающий, \bar{h}_2 - отталкивающий)

3. Асерпомо - кесім. күбесе бүгүн $x = y^\alpha$, $\alpha < 0$. Сипекен соңк. сұран

Көнде $\lambda_1 > 0$, то сипекен тұрақтандырылған үзен \tilde{h}_1 - науыншы

Көнде $\lambda_1 < 0$ - балықшы

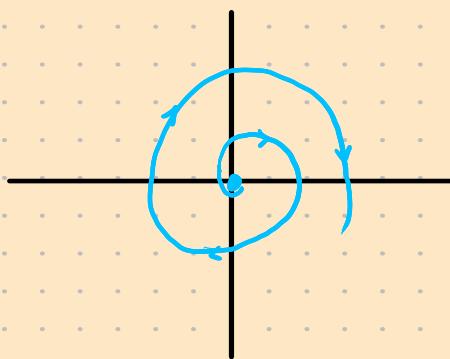
Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1 \\ \tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



Күбесе тұрақтандырылған жағдай!

④ $\lambda = \alpha \pm \beta i, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha > 0$



Негізгіліктер

Тұрақтандырылған

1. Н.р.

2. Симметрия, x-шары распределен орт. п. Капицелле распределение - то нән ынтал 2.с. - ынтал распределен орт. п. симметрия симметрия $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ б. не. и. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Оның науыншы жағдай. Тұрақтандырылған 8 сипекен т.т.

Асерпомо бесінші орнамен $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ б. не. и. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Оның науыншы жағдай. Тұрақтандырылған 8 сипекен т.т.

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases} \quad \lambda = 1 \pm 2i$$



Бозасын $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- нүсөндөзүүлүк.

⑤ $\lambda = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha < 0, \quad \beta \neq 0$

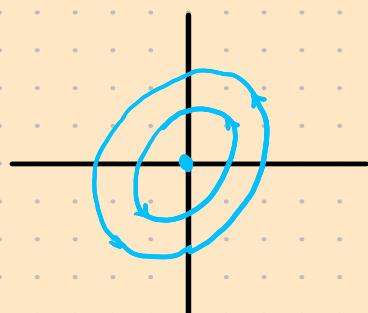
Четверткесин салынуу

То же самое, но спираль - к.п.р.

Направление - по вектору спиралей салынан.

⑥ $\lambda = \pm \beta i, \quad \beta \neq 0$

Четверт



Траекториям

1. К.п.р.

2. Траектории с центром в к.п.р.

Напр. обрата - по $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



- нүсөндөзүүлүк.

⑦ $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\dim E_\lambda = 1$
к.п.р.

Кейдеңүүлүк барынчалык узед

Монголдук узенеси: $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ - салынб.



Тривалдемн

1. П.р.

2. 2 сыра, касающиеся оси t . (нагрому)

3. Асп.-жекам. кривые линии $x = y \ln y$,
кес. ординат, кас. на t ,

диагональные линии $y = e^x$ в т. , элементарные дуги $x = 1 + e^{-t}$,
близк. к $(0,0)$.

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases} \quad \lambda_1 = 2 \text{ кр. 2} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ $\dim E_2 = 1$ Частичный вырожденный узел
то же самое, симметрически

9) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\dim E_2 = 2$

$$\dot{x} = \lambda x$$

$$\dot{y} = \lambda y$$



Комплексный дипольный узел

10) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, $\dim E_2 = 2$

то же самое, но симметрически

Частичный дипольный узел

При - им даете оценки на - мы:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (x_0, y_0) - \text{n.p.}$$

$$f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$$

Можно разложить по Тейлору:

$$f_1(x, y) = f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(g)$$

$$f_2(x, y) = f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(g)$$

(при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$)

$$x - x_0 \mapsto u, \quad y - y_0 \mapsto v$$

$$\dot{u} = A_1 u + B_1 v + o(g)$$

$$\dot{v} = A_2 u + B_2 v + o(g) \quad u, v \rightarrow 0$$

$$A_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B_1 = \dots$$

$$A_2 = \dots \quad B_2 = \dots$$

Линейизованная система

$$\begin{cases} \dot{u} = A_1 u + B_1 v \\ \dot{v} = A_2 u + B_2 v \end{cases}$$

$(0, 0)$ - н.п. линейизованной системы

Фазовое пространство - решетка 5 точек

Если ненулевые корни λ - действительные и не коллинеарны

Конкр., если $\lambda = \pm \beta i$, то это - это корни - и в этом решении
(действ. $\lambda = \alpha \pm \beta i$, иначе, $\alpha > 0$ или $\alpha < 0$)

Часто встречающиеся

Если $(0, 0)$ - фазовое н.п. линейн. ун-тии, то они определяются

зародихъ знакою на F_1 и F_2 . Траектории вк. нач. в сим. в окр. (x_0, y_0) симметрично симметричны и симметричны. нач. в.

Если γ нелинейн. нач. вк., то это же нелинейн. (также для лин. это ясно, напр. предельные циклы).



Разделение непрер. $\dot{x} = f(x, \dot{x})$ \equiv разделение непрер. нач. вк. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$

$\dot{x} = -\sin x \equiv \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ - н.п. $(\pi k, 0)$. Нач. вк. на $(0, 0)$:

линейн. нач. вк.: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ $\lambda = \pm i$ - центр в кв. I нач. вк. - ?

Нач. вк. на $(\pi, 0)$:

$u = x - \pi$ ищ. нач. вк.: $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = u \end{cases}$ $\lambda = \pm i$ - центр в кв. III нач. вк. - ?



Если преобразовать, то в $(0, 0)$ -некр. в центр

