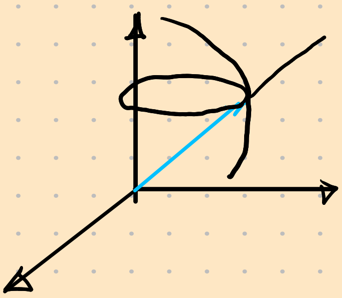
Кинематика материальной точки

Сферическая сис-ма



$$\vec{q} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ – ОНБ

$\vec{v} = \dot{q}^i \cdot \vec{q}_i = \sum H_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$

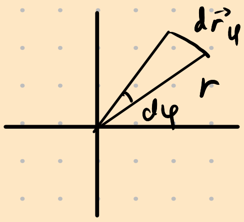
$H_k = |\vec{r}_{,k}|$

$$\vec{r}_{,r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow H_r = 1 \qquad H_\lambda = r\cos\varphi \qquad H_\varphi = r$$

Геометр. способ расчета Ламе

$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \simeq \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a} \cdot dq^a$



$|d\vec{r}_\varphi| \simeq \underbrace{r}_{H_\varphi} d\varphi$

$$(2): \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$w_k = \vec{w} \cdot \vec{e}_k$

$(v^2/2)_{,\dot{r}} = \dot{r}$; $\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{r}} = \ddot{r}$

$(v^2/2)_{,r} = r(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2) \overset{(4)}{\Rightarrow} w_r = \ddot{r} - r(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2)$

2-й закон Ньютона в ковариантной форме

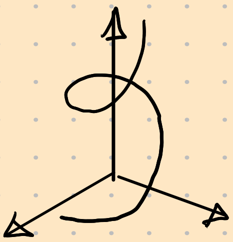
$m\vec{w} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_a$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,\dot{a}} - \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,a} = \vec{F} \cdot g_a = Q_a$$

$\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a} = Q_a$ – в любой криволин. сис-ме координат!

$$\frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a}\right] = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Движение по винтовой линии



$$\begin{cases} x^1 = a\cos\omega t \\ x^2 = a\sin\omega t \\ x^3 = bt \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

$$\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

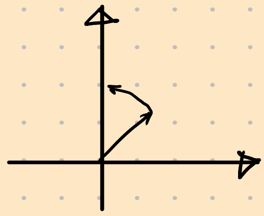
$$\vec{w}_\tau = 0$$

$$\vec{w}_n = a\omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$$

Задача

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \qquad a,\ b = \text{const}$$



$r(\varphi)$ – ? $\qquad w_r(r), \quad w_\varphi(r)$

$r(0) = r_0$

$\varphi(0) = \varphi_0$

$V_r = \dot{r}$

$V_\varphi = r\dot{\varphi}$

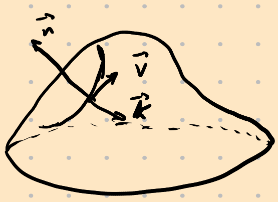
$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{br}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \qquad \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^5$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\underbrace{r^2\dot{\varphi}}_{b}) = 0 \qquad \dot{\varphi} = b/r^2$$

№ 1.40



$$\vec{k} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad \text{(вектор кривизны)}$$

$q^1 = \text{const}$

$V = \text{const}$

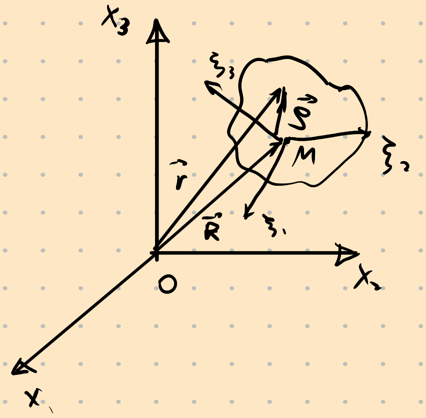
$\vec{r}_{,1}$ – нормаль

$\vec{r}_{,2}, \ \vec{r}_{,3}$ – касательные

$$\begin{cases} \vec{w}\cdot\vec{r}_{,2} = 0 \\ \vec{w}\cdot\vec{r}_{,3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

условие движения по геодезической

Кинематика твёрдого тела



$\vec r = \vec R + \vec\rho$

$\vec\rho = A(t)\vec\rho_0$

$\vec R(t)$, $A(t)$ – зад. $\Rightarrow$ движ. т. задано.

$A^T A = E$

$\det A = 1$ ортог. матрицы обр-ют группу

Рас-им $A(t)$: $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt}\Big|\ A^T A = E \Rightarrow \dot A^T(0)\underbrace{A(0)}_{E} + \underbrace{A(0)}_{E}\dot A^T = 0$$

$$\dot A(0) = \hat\omega : \quad \hat\omega^T = -\hat\omega$$

$$dt \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat\omega\, dt$$

$$\vec v = \dot{\vec r} = \underbrace{\dot{\vec R}}_{\vec v_0} + \dot{\vec\rho}, \quad \rho = A\rho_0$$

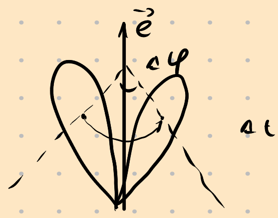
$$\rho(dt) \approx (E + \hat\omega\, dt)\vec\rho_0 \Rightarrow \dot\rho\big|_{t=0} = \hat\omega\rho\big|_{t=0}$$

$$\dot{\vec\rho} = \hat\omega\vec\rho$$

$$\vec V = \vec V_0 + \hat\omega\vec\rho$$

В R^3: $\hat\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat\omega\vec\rho = \vec\omega\times\vec\rho$, где $\vec\omega = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix}$ – угловая скорость

$\vec V = \vec V_0 + \vec\omega\times\vec\rho$ – **ф-ла Эйлера**



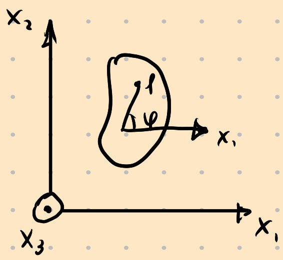
$$\vec\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec e\,\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$\vec e\,\Delta\varphi = \Delta\vec\varphi$ – вектор Эйлера

$$\vec W = \dot{\vec V} = \vec W_0 + \vec\varepsilon\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$$

Формула Ривальса, $\vec\varepsilon = \dot{\vec\omega}$ – угл. ускорение

Плоское движение



$$\vec\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\omega \end{bmatrix}$$

$$\omega = \dot\varphi$$

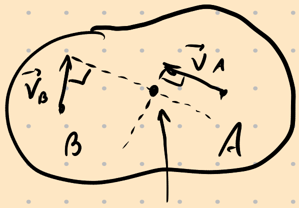
$$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) = \vec\omega\,\overset{0}{\cancel{(\vec\omega\vec\rho)}} - \omega^2\vec\rho$$

$\vec W = \vec W_0 + \vec\varepsilon\times\vec\rho - \omega^2\vec\rho$ – **2D Ривальс**

Мгновенные центры скоростей и ускорений

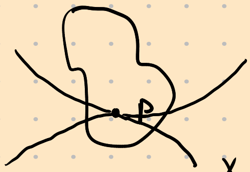
Центр скоростей: $P:\ \vec V_P = 0 = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec\rho_P$

$$\vec\omega \times \vec V_0 - \omega^2 \vec\rho_P = 0 \Rightarrow \rho_P = \frac{\vec\omega \times \vec V_0}{\omega^2}$$ — всегда есть



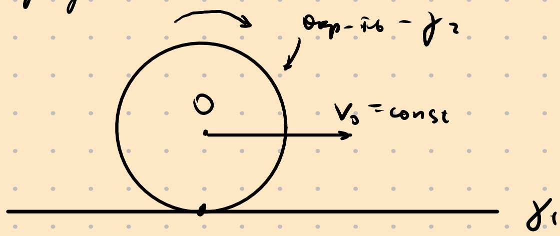
центр скоростей

Но! P движется как в пр-ве, так и в теле — по центроидам



γ_2 — подв. центроида

γ_1 — неподв. центроида



Качение без проскальзывания

(в т. касания V тел равны)

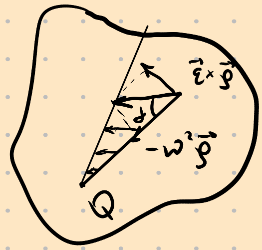
Центр ускорений Q

$$\vec W_Q = 0 = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\rho_Q$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q = 0$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^4 \vec\rho_Q + \omega^2 \vec W_0 = 0$$

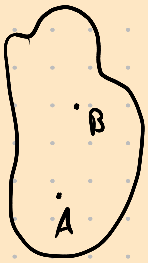
$$\vec\rho_Q = \frac{\vec\varepsilon \times \vec W_0 + \omega^2 \vec W_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



$$tg\,\gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Полезный факт (можно в 3D и в 2D)

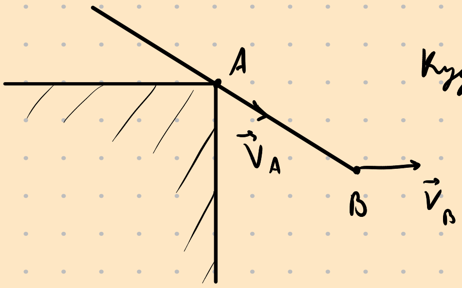
1.



$$\vec V_B = \vec V_A + \vec\omega \times \vec{AB} \quad \Big|\ \vec e_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec V_B \cdot \vec e_{AB} = \vec V_A \cdot \vec e_{AB}$$

2.



Куда направлена $\vec V_A$, если палка скользит по углу?

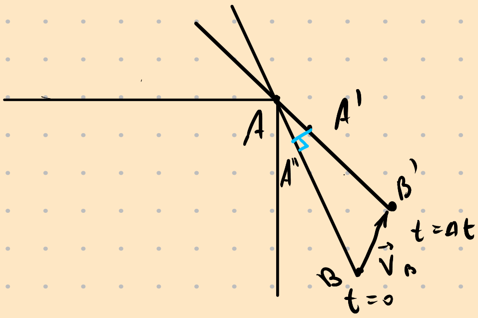
Ответ: вдоль AB:

$$\vec{AA'} = \vec{AA''} + \vec{A''A'}$$

$$\vec{A''A'} \simeq AA''\Delta\varphi$$

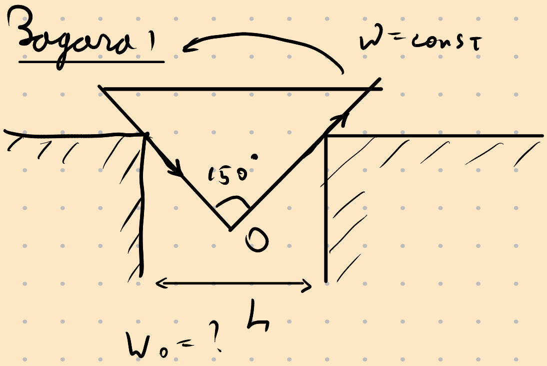
$$\vec V_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \Bigg(\underbrace{\frac{\vec{AA''}}{\Delta t}}_{\text{коллинеарно стержню} - \vec V_A} + \overset{0}{\frac{\vec{AA''}\Delta\varphi}{\Delta t}} \Bigg) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA''}}{\Delta t} = \vec V_A$$

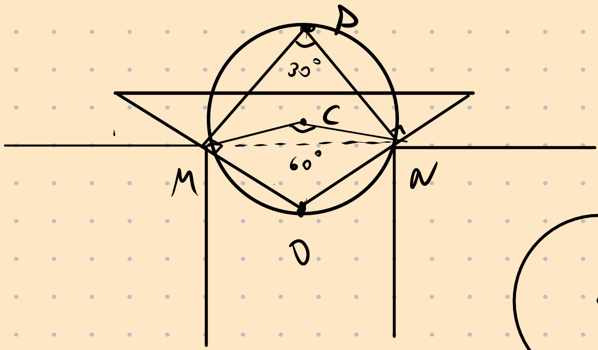
$\vec V_A$

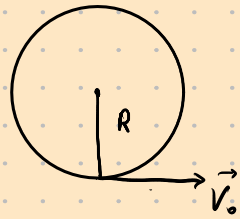


ЧТД

Задача 1





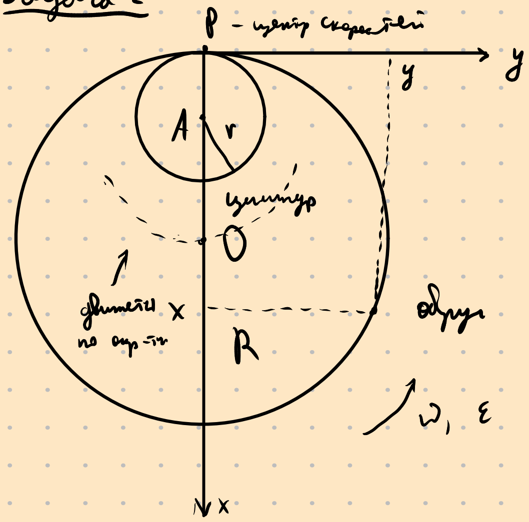


$$MN = L = 2R\sin 30^\circ = R$$

$$PO = 2L \qquad V_0 = 2\omega L$$

$$W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$

Задача 2



Без проскальзывания

ω, ε заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

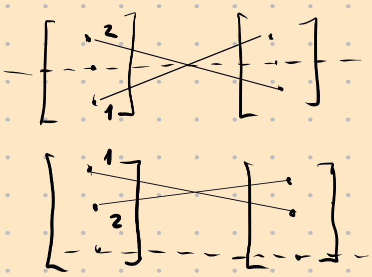
$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} - \omega^2\vec{\rho}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

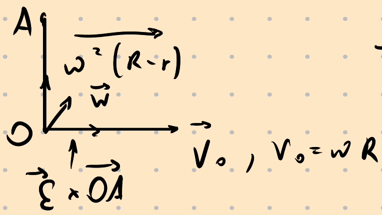
Траектория O – окр-ть с ц. A $\qquad \vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y-R \\ 0 \end{bmatrix}$

Полезная штука: (векторное умножение)

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix}$$



Отрезок AO – новое тело!



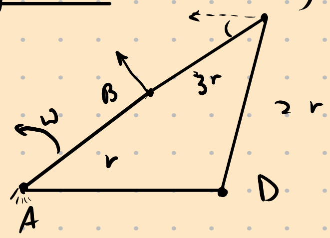
Ω – угл. скор. AO

$$V_0 = \omega R = \Omega(R-r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R-r}\,\omega$$

$$\mathcal{E} = \frac{R}{R-r}\,\varepsilon$$

Задача 2 (3.24 ~)



V_c - ?

W_c - ?

$\vec{V}_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec{V}_c \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_c = 0$

$\omega = const$

(палка крутится в т-ти месте и тянет цепь)