

## Проблема фильтрации



$$s = \frac{p}{\omega_0} - \text{характер. частота}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \begin{array}{l} \text{числитель} \\ \text{— рациональная ф-ца} \end{array}$$

1. Синтез  $H(s)$  — как её выбрать? Синтез по АЧХ
2. Реализация — как сделать реализуемость? Усилит. функции



Сопрежённые пары полюсов

Они не реализуемы RL и RC цепями.

Нужны RLC



— резонаторы дают сопр. полюса

Однако индуктивности исп. не хочется. Их можно заменить усилителями!



RC — активные RC-цепи / фильтры

## Синтез по АЧХ



$$H(s) = \underbrace{|H(s)|}_{\text{АЧХ}} e^{\underbrace{j \arg H(s)}_{\text{ФЧХ}}}$$

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H^*(s) \quad - \text{к этому предельно требованию}$$

$$\text{Нам интересен только } H(s) \cdot H^*(s) \big|_{s=j\omega}$$

- Придем т.к. нам дана  $N$  и  $D$  без корней, то  $H^*(s) = H(s^*)$ , т.е. рассматриваем  $H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\omega}$

- Поменяем переменную: при  $s=j\omega$ ,  $H(s^*) = H(-s)$ , и так удобнее работать:  $H(s) \cdot H(s^*) \big|_{s=j\omega} = H(s) \cdot H(-s) \big|_{s=j\omega}$

$$H(s) \cdot H(-s) = |K(\omega)|^2$$

АЧХ<sup>2</sup> — у нас ФЧХ еще надо найти и поделить

Создадим нули и полюсы АЧХ<sup>2</sup> всегда будет симметрично (имеет смысл заменить  $s \rightarrow -s$ ), и полюсы мы возведем в  $H(s)$ , нулюсы — в  $H(-s)$ .

## Пример. фильтр нижних частот



$$h(t) = \int_{-i}^{+i} h(f) e^{2\pi j f t} df = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

Импульс Хартмана



не удобо. импульсы приращены (реализуются лучше без задержек)

Т.е. такой фильтр не реализуем.

Допустим неравномерность АЧХ в полосе пропускания:



$\xi$  - неравномерность в ПП

$\eta$  - селективность

$\eta_1$  - уровень на границе ПЗ

К усилку приводим:  $K(s) \cdot K(-s) \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_n^2(\omega)}$   $n$  - порядок фильтра

$$|F_n(\omega)| = \begin{cases} \leq 1, & \omega \in (-1; 1) \\ \geq \eta_1, & \omega \geq 1 \end{cases}$$

Варианты выбора:

1.  $F_n(\omega) = \omega^n$  - фильтр **Баттерворта**
2.  $F_n(\omega) = P_n(\omega)$  - фильтр **Чебышева**, где  $P_n(\omega)$  - полином Чебышева
3.  $F_n(\omega) = R_n(\omega)$  - **эллиптический** фильтр,  $R_n(\omega)$  - рационал. эллипич. ф-ция

**Баттерпорт**

$$K(s) \cdot K(-s) \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^{2n}}$$

$\epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}$  - изменение  $\epsilon$  эквивалентно изменению  $\omega_0$ , т.е.  $\epsilon$  не нужен - он всегда 1

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$



При  $n \rightarrow \infty$  эта АЧХ теор. стремится к идеальной прямоугольной.  
Всегда дает задержку -3 дБ

$$H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \Rightarrow H(s) H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Ищем корни:  $\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} + 1 = 0$

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = e^{j\pi} = e^{j \cdot 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad -1 = e^{j\pi}$$

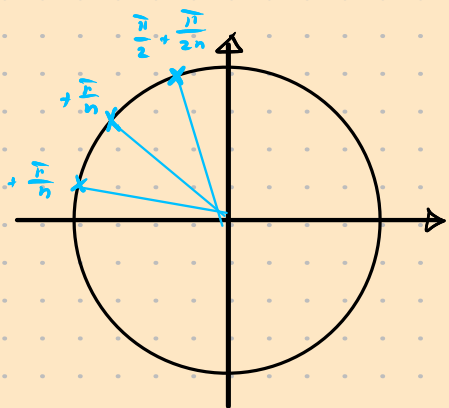
$$\frac{s}{j} = e^{j\frac{\pi}{2n}} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{2n}}$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$s_k = e^{j\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}k\right]}$$

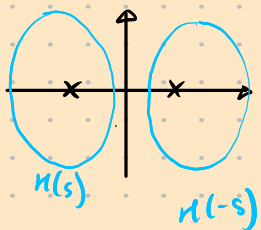
- корни произв.  $q$ -м  $H(s) \cdot H(-s)$

- корни  $\in$  кругу  $\frac{\pi}{n}$ , корнями симметричны относительно мнимой оси!



Примеры

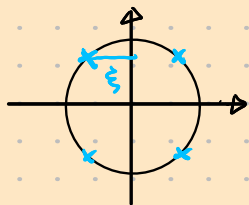
$n=1$ :  $\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^2} = \frac{1}{1 - s^2} \quad s = \pm 1$  - корни



$$H(s) = \frac{1}{1 + s}$$

Устойчивость нет!

$n=2$ :



Согласенная пара на еж. круге характерист.

Здесь задан параметр  $\xi$

$$\text{Получим } s^2 + 2\xi s + 1$$

$$\text{Корни } -\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

