

# Кинематика материальной точки

Сферическая система



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} - \text{OKB}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{q}}^i \cdot \vec{q}_i = \sum K_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$$

$$K_a = |\vec{r}_a|$$

$$\vec{r}_a = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow K_r = 1 \quad K_\lambda = r \cos \varphi \quad K_\varphi = r$$

Кинематика материальной точки

$$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \approx \vec{r}_{a0} dq^a$$

$$|\vec{d}\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{a0}|}_{K_a} \cdot dq^a$$



$$(2) \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} [r^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2]$$

$$w_a = \vec{w} \cdot \vec{e}_a$$

$$(v^2/2)_r = \dot{r}; \quad \frac{d}{dt} (v^2/2)_r = \ddot{r}$$

$$(v^2/2)_{,r} = r (\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) \stackrel{(4)}{=} w_r = \ddot{r} - r(\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2)$$

2-й закон Ньютона & количественная формула

$$m\vec{w} = \vec{F} \cdot \vec{l} \cdot \vec{g}_a$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} - \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{,a} = \vec{F} \cdot \vec{g}_a = Q_a$$

$$\frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} = Q_a - \text{бесц. сила, не соизгрунт!}$$

$$\frac{1}{K_a} \left[ \frac{d}{dt} T_{,a} - T_{,a} \right] = \vec{F} \cdot \vec{e}_a$$

Drehmenne no binebenow rymen



$$\begin{cases} x^1 = a \cos \omega t \\ x^2 = a \sin \omega t \\ x^3 = b t \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2}$$

$$\vec{w} = v \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}$$

$$\vec{w}_e = 0$$

$$\hat{\omega}_n = \omega \hat{z}$$

$$\rho = \frac{v}{\omega} = \frac{a^2 \omega^2 + b^2}{a \omega^2}$$

Zagora

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \quad a, b = \text{const}$$

$$r(\varphi) - ? \quad w_r(r), \quad w_\varphi(r)$$

$$r(0) = r_0$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$



$$V_r = \dot{r}$$

$$V_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{b r}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b} (\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \quad \leftarrow \quad \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^3$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( \underbrace{r^2 \dot{\varphi}}_B \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = b/r^2$$

Nº 1.40

$$q^1 = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$



$$\vec{k} = \frac{\vec{n}}{g} \quad (\text{benachb. symmetrisch})$$

$\vec{r}_{11}$  - normal

$\vec{r}_{12}, \vec{r}_{13}$  - kardinale

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{r}_{12} = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{r}_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

zusätzl. glemenne no regezurückn

## Кинематика твёрдого тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\vec{g} = A(t) \vec{g}_0$$

$\vec{R}(t)$ ,  $A(t)$  - зал.  $\Rightarrow$  глоб. Т. заланс.

$$A^T A = E$$

$\det A = 1$  оптим. критерий отр-я оси

Пред-ум  $A(0)$ :  $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt} | A^T A = E \Rightarrow \dot{A}^T(0) A(0) + A(0) \dot{A} = 0$$

$$\dot{A}(0) = \hat{\omega} : \quad \hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$$

$$\text{дл } t \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat{\omega} dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{g}}, \quad \vec{g} = A \vec{g}_0$$

$$\vec{g}(dt) = (E + \hat{\omega} dt) \vec{g}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{g}}|_{t=0} = \hat{\omega} \vec{g}|_{t=0}$$

$$\dot{\vec{g}} = \hat{\omega} \vec{g}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \hat{\omega} \vec{g}$$

$$\text{В } \mathbb{R}^3: \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\omega} \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}, \text{ где } \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} - \text{глобальная угловая скорость}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{g} - \text{qp-ое движение}$$



$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{e} \Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\vec{e} \Delta \varphi = \Delta \varphi - \text{базисное движение}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{V}} = \vec{V}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g})$$

Дополн. формула,  $\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}} - \text{ям. угловое}$

## Простое глобальное



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} / \vec{g}) - \omega^2 \vec{g}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{g} - \omega^2 \vec{g} - \text{2D Родона}$$

## Многовимірна геометрія векторів та усередині

Числові вектори:  $\rho: \vec{V}_p = 0 = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{g}_p$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_0 - \vec{\omega} \vec{g}_p = 0 \Rightarrow \vec{g}_p = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_0}{\omega^2} - \text{безгравітація}$$

Но!  $\rho$  збирається як в р-бі, тає у б-рел - то юніверсальні



Кореневі дії нерівнозначності  
( $\gamma_1$  є коренню  $V$  та підно)

## Числові вектори Q

$$\vec{W}_Q = 0 = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{g}_Q - \vec{\omega} \vec{g}_Q$$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_0 - \vec{\varepsilon} \vec{g}_Q - \vec{\omega} \vec{\varepsilon} \times \vec{g}_Q = 0$$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_0 - \vec{\varepsilon} \vec{g}_Q - \vec{\omega} \vec{g}_Q + \vec{\omega} \vec{\omega}_0 = 0$$

$$\vec{g}_Q = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}_0 + \vec{\omega} \vec{\omega}_0}{\vec{\varepsilon}^2 + \vec{\omega}^2}$$



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega}$$

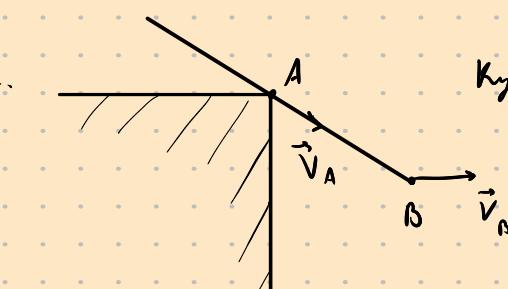
## Поняття проїх (коюни в 3D та в 2D)



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad | \vec{e}_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{V}_A \cdot \vec{e}_{AB}$$

2.



Куда направлено  $\vec{V}_A$ , що має сенс з точки зору?

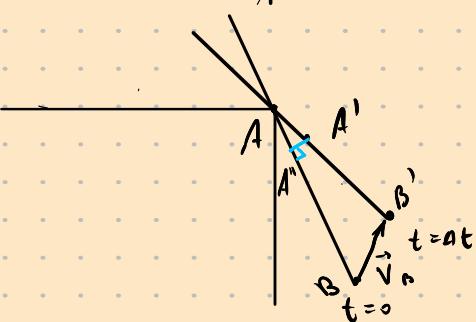
Обері: логар  $AB$ :

$$\vec{AA}' = \vec{AA}'' + \vec{A}''A'$$

$$\vec{A}''A' \approx AA''04$$

$$\vec{V}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{AA}''}{\Delta t} + \frac{\vec{AA}''04}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{AA}''}{\Delta t} = \vec{V}_A$$

коюнічно  
чиєтво  $-V_A$



УКА



$$V_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$



$$MN = L = 2R \sin 30^\circ = R$$

$$PD = 2L \quad V_0 = 2\omega L$$

Zagora 2



Без пренебрежений

$\omega, \epsilon$  заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{p} - \omega^2 \vec{p}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

Приближенный О - эксп-рт с узл. А

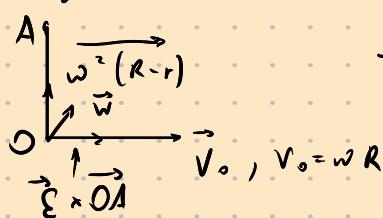
$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y - R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} -a^1 & -b_1 \\ a^2 & b_2 \\ a^3 & b_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Полезная мысль:

(бесконечное  
уничтожение)

Очень хороший тест!



$\Omega$  - угл. скр. АО

$$V_0 = \omega R = \Omega (R-r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R-r} \omega$$

$$\epsilon = \frac{R}{R-r} \epsilon$$

## Zadacha 2 (3.24 ~)



$$V_c - ?$$

$$V_c - ?$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec{V}_c \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_c = 0$$

$$\omega = \text{const}$$

(надене кривина б. м-ти несе в иницијалном)

No хвостоматичкога



$r, \omega = \text{const}$ , глувене дег пространствене

$$\vec{V}_m, \vec{W}_m, g_m, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon} - ?$$

$\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}$  — т.к. одразујући конус, која се вртити, несе в. вектор  $\vec{\omega}$ .  $\vec{V} = 0$ , т.о.

$\vec{\omega} \parallel$  са њим одређен

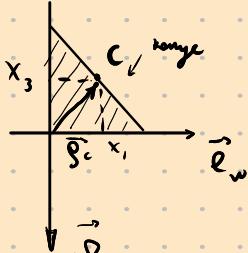
$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{V}_m = \vec{\omega} \times \vec{g}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega, \vec{e}_\omega = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega} \vec{e}_\omega + \omega \vec{e}_\omega$$

Већима гравитације  $T\Gamma$ :

Пријати, то



$\vec{e}_\omega$  спајајући вектор  $\vec{\omega}$

$$\vec{\varepsilon} = \omega \vec{\Omega} \times \vec{e}_\omega \quad (\text{због } \vec{e}_\omega \text{ остаје да је } \vec{g}, \vec{\Omega} \text{ не је } \vec{\omega})$$

$$\vec{V}_c = \vec{\omega} \times \vec{g}_c = \vec{\Omega} \times \vec{g}_c$$

$$x_1: \omega \frac{r}{\sqrt{2}} = \Omega \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Omega = \omega$$

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{W}_m = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{g}_m}_{\perp \vec{e}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}_m) \quad \vec{V}_m \text{ (не употребљава), } \perp \vec{e}$$

$$\vec{W}_m = \vec{W}_m^\top \vec{e} + \frac{V_m^2}{g_m} \vec{n}$$

$$\vec{V}_m \parallel \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{e} = \vec{x}_1$$

$$\text{Такоје одражам } \vec{W}_m = \frac{V_m^2}{g_m} \vec{n} \Rightarrow g_m = \frac{V_m^2}{w_m}$$

! При вращении дж. мом. нул., векторы в. компон. т. миним. величина = 0,

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_w + \vec{\omega}_e$$

### Ориг. векторов

$$A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1$$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^1 \\ e^3 & 0 & -e^2 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_2^3 - a_3^2)$$

$$e_2 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_3^1 - a_1^3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2\sin\varphi} (a_1^2 - a_2^1)$$

$$A = E \cos\varphi + \hat{e} \sin\varphi + (1 - \cos\varphi) \hat{e}^\top \hat{e}$$

$$\operatorname{tr} A = 3 \cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}, \quad \varphi - ?$$



$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

### Круговые штукан

Группа поворотов  $SO(3)$  связана с циклами:



Многосторонне - множества дж. разрывов и (однако) связные

## Линейные изоморфии

Повероты

центрическое — вращаются нр-бо и сдвигают центр греч.  $\sigma_{\text{цент}}$

нацентрическое — вращаются дальше, а не-ц. греч.

Аксионометрия:  $\vec{r}' = A \vec{r}$

Плоскостное:  $\vec{r}_{ii} = d_i^i \vec{e}_i$

$$\vec{r}^{(1)} = r^{(1)} e_{1,1} = r^{(1)} d_1^1 \vec{e}_i = r^{(1)} \vec{e}_i$$

$$r^i = d_i^i r^{(1)} \Leftrightarrow \vec{r} = A \vec{r}^{(1)}$$

$$\vec{r}^{(1)} = A^T \vec{r} - \text{относич к } A \text{ нр-бо}$$

① Изоморфия центрическим поворотам

$$\vec{r}' = A_1 \vec{r}, \quad \vec{r}'' = A_2 \vec{r}'$$

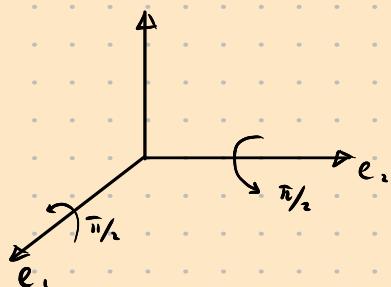
$$\vec{r}''' = A_3 A_1 \vec{r} \Rightarrow A = A_n \cdot \dots \cdot A_1$$

② Изоморфия нацентрическим поворотам

$$\vec{r}^{(1)} = A_1^T \vec{r} \quad \vec{r}^{(2)} = A_2^T \vec{r}^{(1)}$$

$$\vec{r}^{(n)} = A_n^T A_1^T \vec{r} = (A_1 A_2)^T \vec{r} \Rightarrow A = A_1 \cdot \dots \cdot A_n$$

Пример 1



Линейный изоморфизм центрическим (две оси фиксированы)

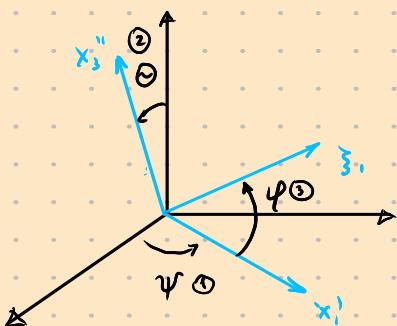
$$A = A_2 A_1$$

Пример 2 (один пример в окружности)

Поверот нацентрический — так повернуты фигуры вокруг центра

$$A = A_\Psi A_\Theta A_\Phi$$

$$A_\Psi = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Суммирование угловых скоростей



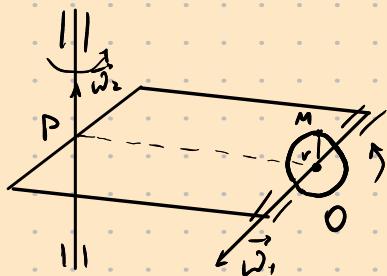
$$A \approx E + \hat{\omega}_x \Delta t$$

$$B \approx E + \hat{\omega}_y \Delta t$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{(\hat{\omega}_x + \hat{\omega}_y)}_{\hat{\omega}} \Delta t$$



### Пример



Равномерное + вращение кругового движения на плоскости

$$\vec{\omega}, \vec{\xi} - ? \quad \omega_1, \omega_2 = \text{const}$$

$$\vec{v}_m, \vec{w}_m - ?$$

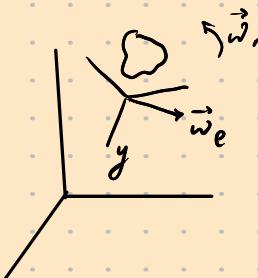
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

### Вращение Т.Т. во вращающемся пространстве

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \vec{y}_i$$

$$\vec{\xi} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_e}_{\vec{\xi}_e} + \underbrace{\vec{\omega}_r^i \vec{y}_i}_{\vec{\xi}_r} + \underbrace{\vec{\omega}_e \vec{\omega}_e \times \vec{y}_i}_{\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r}$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_e + \vec{\xi}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$



$$\beta \text{ зеркало: } \vec{\xi} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \quad \vec{W}_m = \underbrace{\vec{\omega}_0}_{\vec{\omega}_2 \times \vec{P}O} + \vec{\xi} \times \vec{O}M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}M)$$

$$\vec{V}_m = \underbrace{\vec{V}_0}_{\vec{\omega}_2 \times \vec{P}O} + \vec{\omega} \times \vec{O}M$$

$$\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{P}O) = -\omega_2^2 \vec{P}O$$

# Кватернионы

$$R' = \lambda \circ \vec{r} \circ \lambda \quad \| \lambda \| = 1 \quad \lambda = \cos \varphi/2 + \vec{e} \sin \varphi/2 \quad |\vec{e}| = 1$$

$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix} \approx \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = \lambda \circ \vec{r} \circ \lambda \quad - \text{некоторое орт. } \vec{e} \text{ на } \varphi.$

Акси



$$\vec{r}'' = \underbrace{\lambda_2 \circ \lambda_1}_{\lambda} \circ \vec{r} \circ \underbrace{\lambda_2 \circ \lambda_1}_{\lambda}$$

План



$$\vec{r}_{e''} = \underbrace{\lambda_1 \circ \lambda_2}_{\lambda} \circ \vec{r} \circ \underbrace{\lambda_1 \circ \lambda_2}_{\lambda}$$

Пример 1



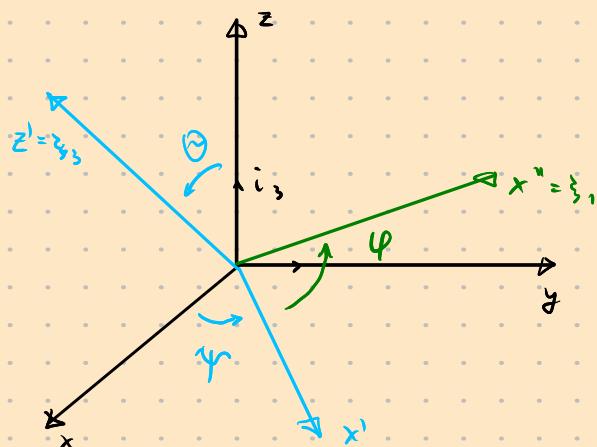
$$\lambda_1 = \cos \varphi_{1/2} + \vec{e}_1 \sin \varphi_{1/2}$$

$$\lambda_2 = \cos \varphi_{2/2} + \vec{e}_2 \sin \varphi_{2/2}$$

$$\lambda = \lambda_2 \circ \lambda_1 = \underbrace{\cos \varphi_{1/2} \cos \varphi_{2/2} - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \sin \varphi_{1/2} \sin \varphi_{2/2}}_{\cos \varphi/2} + \underbrace{\sin \varphi_{1/2} \cos \varphi_{2/2} \vec{e}_1 + \sin \varphi_{2/2} \cos \varphi_{1/2} \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin \varphi_{1/2} \sin \varphi_{2/2}}_{\vec{e} \sin \varphi/2}$$

$\vec{e} \sin \varphi/2$  - направление некомпланарного некоторого вектора - наше биорынг направо

Пример 2



$$\lambda_\varphi = \cos \varphi/2 + i_3 \sin \varphi/2$$

$$\lambda_\theta = \cos \theta/2 + i_1 \sin \theta/2$$

$$\lambda_\psi = \cos \psi/2 + i_2 \sin \psi/2$$

$\lambda = \lambda_\psi \circ \lambda_\theta \circ \lambda_\varphi$  - формальное описание, не имеет физического смысла (аналогично вращению в кватернионах)

Несмотря на то, что некоторое вращение выражено кватернионом, не имеющим единичной нормы - можно ли его записать в виде вектора в трехмерном пространстве?

А если считать с акс. 1, 3.р. - нужно генерировать векторное представление, не имеющее опыта в кватернионах.

## Уравнение Ньютона

$$\ddot{\lambda} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_x \times \lambda \quad \ddot{\lambda} = \frac{1}{2} \lambda \times \vec{\omega}_y$$

## Основы гидравики



Кинематика  
материала!

$$m = \int dm \quad - \text{масса}$$

$$\vec{L} = \int \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dm \quad - \text{импульс}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm \quad - \text{重心 масс}$$

$$\vec{P} = \int \vec{v} dm = m \vec{V}_c \quad - \text{импульс}$$

$$\vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm \quad - \text{материальная кинетическая энергия}$$

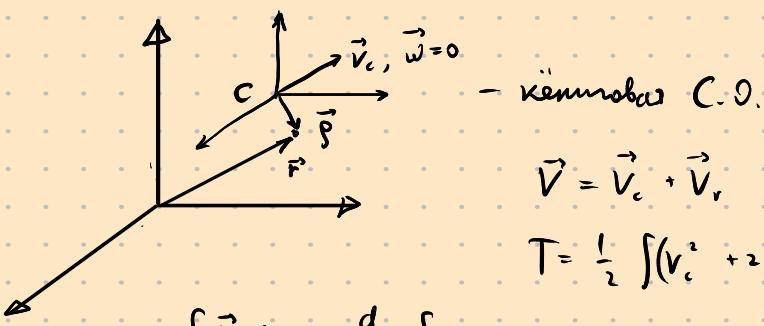
$$\vec{K}_{o'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_o + \vec{r}_o - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = K_o + \vec{O}'\vec{O} \times \vec{P} \quad - \text{материальная кинетическая энергия - вогненно,}$$

но это же  $K_o$  так и наз-ся

$$\vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{O}' \quad - \text{материальная кинетическая энергия!}$$

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad - \text{кинетическая энергия}$$

## Теория Кинетики



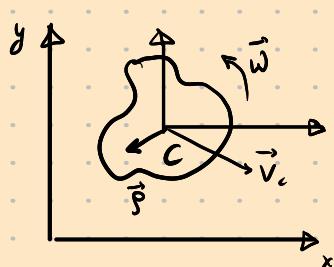
- кинематика С.О.

$$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

$$T = \frac{1}{2} \int (V_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot \vec{V}_r + V_r^2) dm$$

$$\int \vec{V}_r dm = \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{p} dm}_{m \vec{p}_c = 0} = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \int V_r^2 dm$$

## Гибридная модель Тей



$$\vec{V}_r = \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$V_r^2 = \vec{\omega}^2 \vec{p}^2, \quad \vec{\omega} \perp \vec{p}$$

$$\frac{1}{2} \int V_r^2 dm = \frac{\vec{\omega}^2}{2} \int \vec{p}^2 dm = \frac{J_c \vec{\omega}^2}{2} \Rightarrow T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{J_c \vec{\omega}^2}{2}$$

Момент инерции в 3D становится тензором инерции.

$$\vec{K}_o = \vec{K}_c + \vec{O}C \times \vec{P}$$

$$\vec{K}_c = \int (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{v} dm = \int \vec{p} \times (\vec{V}_c + \vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \int \vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \vec{\omega} \int p^2 dm = J_c \vec{\omega}$$

$$\vec{K}_o = \underbrace{J_c \vec{\omega}}_{K_c} + \underbrace{\vec{O}C \times \vec{P}}_{m \vec{V}_c}$$

Без-массы.

$\vec{V}_c = 0$

### Пример 1



Определите винчестер на путь кин. энергии!

$$\vec{P}, \vec{K}_A, T - ?$$

$$\vec{P} = m \vec{V}_c$$

$$\vec{V}_c = \vec{V}_c^e + \vec{V}_c^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{l} \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{l} - r \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P} = m \vec{V}_c = \dots$$

Найдите винчестер  $\vec{\omega}$  (однозначно)

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{m r^2}{4} \omega^2$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi}/r \end{bmatrix} \Rightarrow \omega^2 = (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}/r)^2 \Rightarrow T = \dots$$

Если точка A неподвижна в декартовом,  $\vec{K}_A = J_A \vec{\omega}$

$$\text{Чаще (затраченная работа): } \vec{K}_A = J_c \vec{\omega} + \vec{AC} \times m \vec{V}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m r^2}{2} (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}/r) \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{l} - r \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} m r^2 (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}/r) \end{bmatrix}$$

Неподвижное тело не делает работу на подвижном твердом

### Неподвижное тело



$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm = \frac{1}{2} \int w^2 p^2 dm = \frac{J_p w^2}{2}$$

$$\vec{K}_p = \int \vec{p} \times (\vec{J} \times \vec{p}) dm = J_p \vec{w} \quad - \text{это закон момента!}$$

### Закон извнешней (внешней) силы! Не забудьте!



$$dm \ddot{r} = d\vec{F}$$

$$\vec{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \vec{F}}{dm} \quad - \text{известные силы}$$

$$\ddot{r} = \vec{F} = \vec{F}^e + \vec{F}^i \quad (\text{бесконечн. извнешн.})$$

$$1. \text{Число: } \vec{P} = \int \vec{v} dm = \int (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = \vec{R}^e - \text{затраты борьбы времени сопротивл.}$$

$$\vec{P} = \vec{R}^e; \quad m\vec{V}_c = \vec{R}^e - \text{затраты времени на массу}$$

$$2. \text{Кин. момент: } \vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm \Rightarrow \vec{K}_o = \underbrace{\int (\vec{v} - \vec{v}_o) \times \vec{v} dm}_{-m\vec{V}_o \times \vec{V}_c} + \underbrace{\int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm}_{\vec{M}^e}$$

$$\vec{K}_o = \vec{M}^e - m\vec{V}_o \times \vec{V}_c \quad (\vec{M}^e - \text{момент времени сопротивления сопротивления})$$

$$3. \text{Кин. энергия: } T = \int \vec{v} \cdot \vec{v} dm = \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{f}^e dm}_{N^e} + \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{f}^i dm}_{N^i} = N^e + N^i$$

$N^i$  - расход времени!  
(нед. энергия  $\rightarrow$  кин. энергия)

## Пример 2



1. Принцип конечных разностей?

2.  $\dot{\varphi}(\varphi) = ?$

Через массу можно выразить

$$x = \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$y = \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{(l/2)^2} = 1 \quad \text{- конус гипотенузы по радиусу}$$

2.  $T = \text{const}$ , где  $T$  - огнищо кривизны

$$y_c = \frac{l}{2} \sin \varphi \Rightarrow V_c = \frac{l \dot{\varphi}}{2} \cos \varphi$$

$$T = \frac{m}{8} l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{ml^2}{2u} \dot{\varphi}^2 = \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi)$$

## Задача 1



изменение массы касательно

$$\alpha(0) = \alpha_0$$

$$\dot{\alpha}(0) = 0$$

Определить ли кривизна при движении?

Определить уравнения  $\Leftrightarrow N_A$  и  $N_B$  одновременно в 0.

$$\underbrace{m\ddot{r}_c}_{m\vec{w}_c} = \underbrace{m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B}_{\vec{F}}$$

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \Rightarrow T + \Pi = \text{const} = E$$

Ciunca peanum paderon ne cobepenaros

$$F = \frac{m l^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{4 m l^2 \dot{\alpha}^2}{24} + m g l \sin \alpha = m g l \sin \alpha.$$

$(m V_c^2 / 2)$

$$\frac{2}{3} \dot{\alpha}^2 = \frac{g}{l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

$$\ddot{\alpha}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

$$\vec{W}_n = l \ddot{\alpha}^2$$

Uroba gociaje  $\ddot{\alpha}$ , nago paderans c kurv. momeniam.

$$\vec{K}_o = \vec{M}_o - m \vec{V}_o \times \vec{V}_c$$

$$\vec{K}_p = J_p \dot{\vec{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} m l^2 \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m g l \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{g}{l} \cos \alpha$$

$$\vec{W}_{cx} = \underbrace{\frac{3}{4} g \cos \alpha_0 \sin \alpha_*}_{|W_t| \cdot \sin \alpha} - \frac{3}{2} g (\sin \alpha_0 - \sin \alpha) \cos \alpha_* = 0$$

$\cos \alpha_* = 0$  - ne negausi coradne kurv. yca.

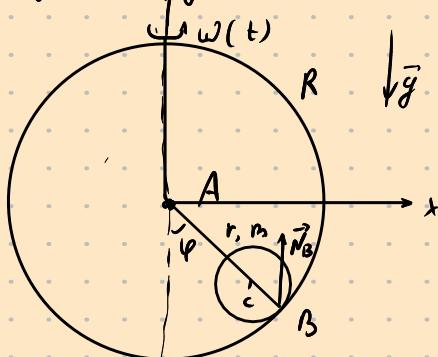
$\sin \alpha_* = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$  - pem. biengu cys-er  $\Rightarrow$  biengu nspozonzei oiprib

$$\vec{W} = \vec{f}^e + \vec{f}^i$$

$$\vec{W} = \vec{W}^r + \vec{W}^e + \vec{W}^i \Rightarrow \vec{W}^r = \vec{f}^{er} + \vec{f}^{ii} - \vec{j}^e - \vec{j}^i$$



Zagara 2



1. Gociabnis  $y_p$ -e oin. gbum.

$$\vec{N}_B = ?$$

Uroba dey kremens kainic no reng-to  $\Rightarrow$  depein  $\vec{K}_o$  oin. kainus

Reperijs b naykumys cnu-my osriens

$$\vec{K}_B = \vec{M}_{B_B}^{ex} + \vec{M}_{B_B}^e + \vec{M}_{B_B}^c$$

Если момент  $B$ -координаты скрещен, то  $\dot{\vec{K}}_B = \vec{T}\omega$

$$\vec{V}_c = \dot{\vec{q}} \times \vec{AC} = \vec{\omega} \times \vec{BC}$$

$$\omega = \frac{R-r}{r} \dot{\varphi}$$

$$\dot{\vec{K}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}mr^2 \frac{R-r}{r} \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgr \sin \varphi \end{bmatrix} + \dots + \begin{matrix} \vec{M}_{B_B}^{ex} & \vec{M}_{B_B}^e \end{matrix}$$

Кинематика симметрична относительно оси  $I$  наклонена, зерни момент суммируется в наклоне и не является



$$-\vec{J} \times (\vec{J} \times \vec{r}) dm - \underbrace{\vec{\epsilon} \times \vec{r} dm}_{\text{нормально касательно}} = \omega^2 r dm \quad \varphi - \text{угол между осью вращения}$$

$$\text{Уг. вращ. равновесия } \vec{M}_c^e = 0$$

$$\vec{M}_{B_B}^e = \vec{M}_c^{e'} + \vec{BC} \times \vec{R}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\omega^2 (R-r) r \cos \varphi \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}^e = - \int \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = -m\vec{\omega} \times (\vec{J} \times \vec{r}_c) =$$

$$R^e = m\omega^2 (R-r) \sin \varphi$$

$$-\frac{3}{2}mr(R-r)\ddot{\varphi} = mgr \sin \varphi - m\omega^2 r(R-r) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{3}{R-r} \sin \varphi - \frac{2}{3} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad - \text{уравнение}$$

$$mr_c'' = mg + \vec{N}_B + \vec{R}^e$$

$$W_n = (R-r)\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = (\ddot{\varphi})$$

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{2}{3} \omega^2 \sin \varphi$$

## Центральное поле.



$$r^2 \dot{\varphi} = C$$

$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 r^2 = \text{const}$  - центральная кинетика

$$\begin{cases} (mr - r\dot{\varphi}^2) = F \\ \frac{m}{r} (r^2 \dot{\varphi})' = 0 \end{cases}$$

$$\delta A = F dr + \partial \varphi = -\Pi_r dr - \Pi_\varphi d\varphi$$

$$\Pi = \Pi(r) = - \int F(r) dr$$

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \Pi(r) = E = \text{const}$$

$$\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{C^2}{r^2}}_{V(r)} + \Pi(r) = h = \frac{2E}{m} = \text{const}$$

Коэффициенты собственных чисел  
также называются (разрешимые состояния  
макс/мин скорости вспомогательных  
коэффиц.)



## Уп-я Банка

$$u = \frac{1}{r}, \quad t \mapsto \varphi \quad (r^2 \dot{\varphi} = C, \quad \varphi(t) \text{ однозначна} \Rightarrow \text{Гильберт})$$

$$m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2) = F$$

$$\Rightarrow u'' + u = -\frac{F}{mC^2u^2}$$

## Задача 2

$$\vec{r} \quad \vec{R} \quad \vec{F} = -\frac{m \kappa \vec{r}}{r^3}, \quad \kappa = \frac{\partial M}{(1+\frac{m}{M})^2}$$

$$F = -m \kappa u^2 \Rightarrow u'' + u = \frac{\kappa}{c^2} \Rightarrow r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} \quad (\text{б) на орбитальной скорости } e > 1)$$

$$P = \frac{c^2}{\kappa}$$

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}}$$

Задача 1.



$p, e - ?$

$$\lambda = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} - ?$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\lambda = \frac{\dot{\varphi}_{\max}}{\dot{\varphi}_{\min}}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

$$\dot{\varphi}_{\max} = \frac{C}{r_{\min}^2}$$

$$\dot{\varphi}_{\min} = \frac{C}{r_{\max}^2}$$

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

$$\Rightarrow \lambda = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2$$

Задача 2



$E - ?$

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{p = \frac{C}{k}}{1-1-h \frac{C^2}{k^2}} = - \frac{k}{h}$$

$$h = - \frac{k}{a} \Rightarrow E = \frac{m}{2} h = - \frac{mk}{2a}$$

Задача 3

$$F = - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^3} \quad \text{радиальный приводущий}$$

$$u'' + u = - \frac{F}{mc^2 u^2} = \frac{\alpha}{mc^2} + \frac{\beta u}{mc^2}$$

$$u'' + \left( 1 - \frac{\beta}{mc^2} \right) u = \frac{\alpha}{mc^2}$$

$$\omega^2 > 0 \Rightarrow r = \frac{1}{u} = \frac{p}{1+e \cos(\omega \varphi)}$$

$$\boxed{\omega^2 = 1 - \frac{\beta}{mc^2} > 0 \quad \text{и движение замкнуто}}$$

$\ll 1$

Наряду с приведенным выше:



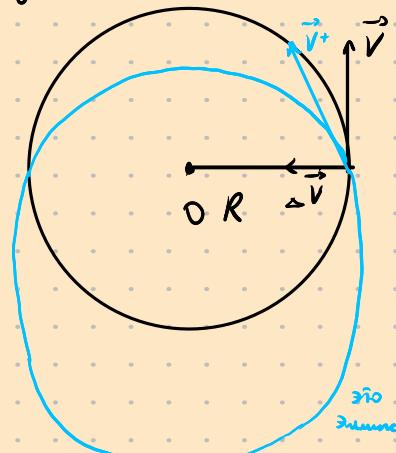
$\omega = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  Траектиориа замкнута

$\omega \neq \frac{m}{n} \Rightarrow$  Траектиориа буде норма в кільце



Прямоліній орбіти Меркурія - неповернутий CTO

Задача 4



Найти нап-рів наклон орбіти

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \varphi_0)} \quad \begin{aligned} &\text{- не залежить від початкової орбіти} \\ &\Rightarrow \text{блакитний } \varphi_0 \end{aligned}$$

$$R = \frac{p}{1 + 0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \Rightarrow p^- = R \quad (-\text{до} + \text{- відніє})$$

$$p^+ = \frac{c^2}{k} \Rightarrow p^+ = p^- = R$$

$$r^2 \dot{\varphi} = rV_\varphi = C \Rightarrow C = rV - \alpha r \text{ не зал. } V_\varphi$$

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}}, \quad e^- = 0$$

$$h^- = V^2 - \frac{2k}{R}$$

$$h = \underbrace{r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}_{\vec{v}^2} - \frac{2k}{r} \quad e^+ = \sqrt{\Delta V^2 \frac{c^2}{k^2}} = \Delta V \frac{c}{k} \quad h^+ = V^2 + \Delta V^2 - \frac{2k}{R}$$

$$\frac{V^2}{R} = \frac{k}{R^2}$$

yg. квадратична закономірність

yg. узагальнення квадратичність

$$e^+ = \Delta V \frac{R V}{R V^2} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$R = \frac{R}{1 + \frac{\Delta V}{V} \cos \varphi_0} \Rightarrow \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{R e^+ \sin \varphi_0 \dot{\varphi}_0}{(1 + e^+ \cos \varphi_0)^2} = -\Delta V \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$E = -\frac{mk}{2a} \Rightarrow \text{т.к. } E \text{ є б-с, т.о. } a \text{ є б-с}$$

