

## Равновесие



$\vec{r} = \vec{r}_0 = \text{const}$  - для всех  $t$ .  $\Rightarrow$  система в равновесии в данной с.к.

$\vec{r} = \vec{r}(q)$  для стерж. см-н (длина стержней постоянна)

Полож. равновес. (н.р.) сдв. координ  $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}$

Если  $q_0$  - н.р., в стерж. см-не  $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$

Если  $Q = -\nabla \Pi$ , то в н.р.  $\nabla \Pi = 0$ .

## Принцип вирт. перемещ.

$\vec{r} = \vec{r}_0$  (надоб. координ) экв-н н.р.  $\Leftrightarrow \forall \delta \vec{r}$  из н.р.  $\rightarrow \delta A = \int \vec{F} \cdot \delta \vec{r} dm = 0$ .

## Условие $Q = 0$

### Пример

$$\ddot{x} = \alpha x^\beta, \quad \beta \in (0, 1)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

(«как»  $m \alpha x^\beta$  равна 0 в  $t=0$ ?)  
(экв-н в  $t=0$  полож. равновес.?)

1.  $x=0$  - реш-е.

2. Решен.  $x = at^b \neq 0$

$$\alpha b(b-1)t^{b-2} = \alpha a^\beta t^{\beta b}$$

$$b-2 = \beta b \Rightarrow b = \frac{2}{1-\beta} > 0 \Rightarrow x(0) = 0, \text{ при } \dot{x}(0) = 0 \text{ тоже.}$$

$$\frac{2(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = \alpha a^{\beta-1} \Rightarrow a = \left[ \frac{2(1+\beta)}{\alpha(1-\beta)^2} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Как быть? 2 реш-я для нач. укл.  $x=0, \dot{x}=0$ .

А почему это  $\alpha x^\beta$  не удовл. укл. Либмана! Из-за этого  $\tau$ . Колеб. не происходит.

## Задача 1



$$\Pi = 2lF \cos \varphi + mgl \sin \varphi$$

$$\Pi_{,\varphi} = mgl \cos \varphi - 2lF \sin \varphi = 0$$

$$F = \frac{mg}{2} \cotg \varphi$$

Чем сильнее груз, тем меньше вынужденная сила.

### Задача 2



$$\delta A = n P \delta x - F \delta x = 0$$

$$F = n P$$

### Задача 3



Миграция в брань, сужде.

Т. масса m гравитация равна с б равновесием, умножить формула рав-на для равновесия.

В брань, умножить сужде:

$$\vec{F} = -\nabla \Pi \quad \Pi = n g z - \frac{n \omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

$$\delta A = -\nabla \Pi \delta \vec{r} = 0 = -d\Pi \Rightarrow \Pi = \text{const} \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C$$

### Задача 4



Нечетно, миграция.

Д-то, что гравитация миграция равновесия

$$\begin{cases} \delta A = P_1 S_1 dl_1 + P_2 S_2 dl_2 = 0 \\ S_1 dl_1 + S_2 dl_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dl_2 = -\frac{S_1}{S_2} dl_1 \Rightarrow \delta A = (P_1 - P_2) dl_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

### Задача 5

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- част. с. геометрия по кривой в поле силы

Нечетно равновесия



1. Из принципа вирт. перемен. - т. А и В, т.к.  $\delta \vec{r} \perp m \vec{g}$

Формальное решение:

- Если связь задана в виде  $F(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$ , то  $\vec{f}_i, \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}^* = 0$



! Это важно!

$$\begin{cases} 2x \delta x + 2y \delta y + 2z \delta z = 0 \\ \delta x + \delta y + \delta z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Из принципа вирт. перемен.  $\delta A = mg \delta z \Rightarrow \delta z = 0$

$$\begin{cases} x \delta x + y \delta y = 0 \\ \delta x + \delta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta y = -\delta x, \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ z = 1 - 2x \end{cases}$$

$$2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

2. Поиск условий экстремума рассматриваемой энергии при усл. фикс. связей

### Задача 6



$$F = \text{const}$$

Найти н.р.

$$\begin{cases} Q_\alpha = -\Pi_{,\alpha}^g + Q_\alpha^F = 0 \\ Q_\beta = -\Pi_{,\beta}^g + Q_\beta^F = 0 \end{cases}$$

$$\Pi = -\frac{3}{2} mgl \cos \alpha - \frac{1}{2} mgl \cos \beta$$

$$Q_\beta^F = Fl \quad Q_\alpha^F = Fl \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} mgl \sin \alpha + Fl \cos(\alpha - \beta) = 0 \\ \frac{1}{2} mgl \sin \beta + Fl = 0 \end{cases}$$

$$\sin \beta = \frac{2F}{mg} \quad - \text{еще 3 случая: } 1. F > mg/2 - \text{нет р.}$$

$$2. F = mg/2 - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$3. F < mg/2 - \beta_1 = \arcsin \frac{2F}{mg}, \quad \beta_2 = \pi - \beta_1$$

$$-\frac{3}{2} mgl \sin \alpha + F (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 0$$

$$F \cos \beta + (F \sin \beta - \frac{3}{2} mg) \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F \cos \beta}{\frac{3}{2} mg - F \sin \beta} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} f(\beta_1)$$

$$\alpha_2 = \pi + \alpha_1$$

$$\alpha_3 = -\alpha_1$$

$$\alpha_4 = \pi - \alpha_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right\} - \beta_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \right\} - \pi - \beta_1$$



## Устойчивость л.и. матрицы

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \text{const}$$

$$x = h e^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n - \text{корни}$$

$$x \rightarrow 0 - \text{ас. уст.} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$\text{необх. уст.} \quad \operatorname{sign} a_n = \dots = \operatorname{sign} a_0$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad a_0 > 0 \text{ в } P(\lambda)$$

Матрица Гурвица

$$P(\lambda) \text{ уст.} \Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

## Критерий Рауса-Гурвица в форме Лейбнера и Миттаг-Леффлера

1. Если уст. -  $a_i > 0$ , то можно привести к виду  $a_0 > 0$ .

$$2. \begin{cases} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{cases} \quad (\text{мод.}, \text{мод.}) \quad - \text{проверяется то, что угодно}$$

3.  $P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ . Проверим, что необх. уст. уст. совпадает с критерием:

$$P(\lambda) \mapsto \frac{a_2}{a_0} \lambda^2 + \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_0} & 1 \\ 0 & \frac{a_2}{a_0} \end{pmatrix} \quad 1. \quad P. \text{ Г.} \quad \begin{aligned} &\frac{a_1}{a_0} > 0 \\ &\frac{a_1 a_2}{a_0^2} > 0 \end{aligned} \Rightarrow \operatorname{sign} a_2 = \operatorname{sign} a_1 = \operatorname{sign} a_0$$

2. Р. Г. в форме Л.-М.

Р. м. с. м. л.

Линеаризуем ур-ни движения мех. сис-м ради приближения к ур-ям Вигера:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$$

из кин. энергии      из потен. и гравит. сил      из принципов консервации энергии

Нормальная форма Коши: 
$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = -A^{-1}Cq - A^{-1}Bu \end{cases} \quad (1) \quad \longleftrightarrow \quad \dot{x} = D_x$$

Как искать решения? Как построить  $P(\lambda)$ ?

Покажем, что для ур-на (1) имеет след. образ:

$$q = h e^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix} \quad \det(\lambda E - D) = \begin{vmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda E - D) = 0 \Leftrightarrow \det(F(\lambda E - D)) = 0 \quad \forall F, \det F \neq 0$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} \sim$$

$$\lambda=0 \sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ \lambda C & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix}$$

- не пер. е

$$\det \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \quad \text{и т.д.}$$

### Пример

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} - x + y = 0 \end{cases} \quad - \text{уравнения движения н.р.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -1 & \lambda^2 + \beta \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + \beta \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 + \beta \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \beta \lambda + 1 - \alpha = 0$$

$$\lambda^4 + (\beta + 1)\lambda^3 + (\beta + 2)\lambda^2 + (\beta + 1)\lambda + (1 - \alpha) = 0$$

т.к.  $a_4 = 1 > 0$  то все кор. гармонич.  $\Delta_1 > 0$  по теор. ур.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  приведем элемент не надо, умножим кр.  $\beta - \Gamma$  в гармон.  $\Delta_1 - \Delta_3$ .  
 Из теор. ур.  $\beta > -1$ ,  $\alpha < 1$ .

$$P = \begin{pmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ \beta+1 & \beta+2 & \beta+1 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & \beta+1 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \beta+1 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & \beta+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta+1)^2 (\alpha+\beta) > 0 \Rightarrow \beta > -\alpha$$



$G$  - область устойчивости

Поведем корень на  $\partial G$ :

$$1. \alpha = 1$$

$$P(\lambda) = \lambda [\lambda^3 + \dots + \beta+1]$$

усл. параметр  
(можно подобрать)

Первый корень  $\lambda_k = 0$



$$2. \beta = -\alpha$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + 1 + \beta$$

$\pm i$  - корни (можно подобрать)



## Первый метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$ ,  $X(0) = 0$  - автономная СДУ (нелинейная)

$X(x)$  - непрерывна в т.  $x=0$ , а  $X_{i,j} - J$  и определены в окр-ти н.р.

Тогда эту систему можно линеаризовать:  $\dot{x} = Ax + f(x)$

$$A = X'_{i,j}(0) \quad \|f\| \leq \alpha \|x\|^2 \quad (\text{разр. в окр-ти нуля})$$

## Теорема Ляпунова об устойчивости по линейным приближениям.

Если в сис.-ме  $\dot{x} = Ax$   $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$ ,  $\lambda_i$  — корни  $P(\lambda)$  (хар. уравнен), то н.р.  $x=0$  — ас. уст. и в линейном приближении, и в нелинейном сис.-ме.

Если  $\exists \lambda_i: \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , то н.р. неуст. в обеих сис.-ме.

### Пример



$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta l \dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

Ускоряется н.р.  $\varphi=0$  на устойчивость

линейное приближ.:  $ml^2 \ddot{\varphi} + \beta l \dot{\varphi} + mgl \varphi = 0$

$$\underbrace{ml^2}_{0} \lambda^2 + \underbrace{\beta l}_{0} \lambda + \underbrace{mgl}_{0} = 0 \quad \text{— на ноль}$$

$\Rightarrow$  устойчивость  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  н.р.  $\varphi=0$  — ас. уст. по т. Ляпунова.



$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta l \dot{\varphi} - mgl \sin \varphi = 0$$

$\downarrow$  мн.

$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta l \dot{\varphi} - mgl \varphi = 0$$

$\varphi=0$  — неуст. по т. Ляпунова.

## Второй (прямой) метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$ ,  $X(0) = 0$  — автоном. СД,  $Y$

$V(x)$ ,  $V(0) = 0$  — ф-ция Ляпунова (скалярная).  $V(x)$  пер. групп.

Производная в сис. сис.-ме:  $\dot{V}_x = \nabla V \cdot X = V_i \dot{X}^i$ .

## Теорема Ляпунова

Если в сис.-ме н.р.  $U_\varepsilon(0) \exists V(x): V(x)$  имеет в  $x=0$

строгой min, а  $\dot{V}_x \leq 0$  в  $U_\varepsilon(0) \Rightarrow$  н.р.  $x=0$  — устойчиво.



Круга със същите корни хор. интервала, то в мин. си-неcarb-  
 лавица перпен. рел-а с  $\sin$  и  $\cos \Rightarrow$  в интервал (с точкой разбав-  
 кой) они могут быть как yes, так и noyes. Итог: решает проблему.



$$V = C = \text{const}$$



## Теорема Лагранжа - Дирхле

Если  $\Pi(q) \rightarrow q=0$  - строгий min  $\Rightarrow q=0$  - уст. н.р. ( $V=E$ )

Это достаточное, но не необходимое:

$$\Pi = \begin{cases} q^2 \sin \frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$



Из уст., что  $T + \Pi = \text{const}$ ,

$$V = E = T + \Pi$$

следует, что н.р.  $q=0$  уст. (если оно неуст., то  $\Pi$  уходит далеко от н.р.  $\Rightarrow$  неуст.  $E$ , а это мало при  $q \rightarrow 0$ ), а уст.  $\lambda: -D$  не брн.

Но: если  $\Pi$  - квадратичная ф-ция, то условие -го т. достаточное. (доказано в до-х).

## Уменьшение уст. $\Pi \rightarrow \min$

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \underbrace{\Pi_{,i}(0)}_{=0(q=0 - \text{н.р.})} q^i + \frac{1}{2} \underbrace{\Pi_{,ij}(0)}_{C_{ij}} q^i q^j$$

$$\Pi \approx \frac{1}{2} q^T C q = \Pi_2(q) \quad | \quad \Pi_2(q) > 0 \Rightarrow \Pi \rightarrow \min$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{in} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \Delta_i > 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

## Теорема Лагранжа - 1

Если  $\exists q': \Pi_2(q') < 0$ , то н.р.  $q=0$  неустойчиво.

## Теорема Лагранжа - 2

Если по малым численным порядкам разложения  $\Pi(q) = \Pi_m(q) + \dots$  установлено, что  $\Pi(q) \rightarrow \max$  в  $q=0 \Rightarrow q=0$  - уст. высш. порядок  $i \geq m$

## Пример



Найдем полн. энерг. равновес. и уст. их уст.-н.

$$\begin{aligned} \Pi &= mgr(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi \sim \\ &\sim \frac{g}{\omega^2 r} (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \end{aligned}$$



### Пример 3



Найти н. п., ун.-ис.

$$\Pi = mgz(x, y) \sim z(x, y)$$

$$\begin{cases} z_{,x} = \alpha x + \beta y = 0 \\ z_{,y} = \beta x + \gamma y = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2} (\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) = \frac{1}{2} q^T C q, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$\det C \neq 0 \Rightarrow$  н.п.  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  - единств.

$\det C = 0$  (но  $C \neq 0$ )  $\Rightarrow \alpha x + \beta y = 0$  - одна произвольная переменная  
или  $x=0$ , или  $y=0$ , ...

Условие:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{н.п. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ун. по т. 1. - Д.}$$

Если эта матрица неогр. и квадратичная форма имеет мин. то н.п. ун. по т. 1. - Д.

Случаи  $\det C = 0$ :  $\Pi \sim \frac{1}{2} (\gamma x + \beta y)^2 \geq 0$



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}(x, y))$$

$$z|_{x,y \in l} = 0 \Rightarrow \exists \text{ перем. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{e}(t+t_0) - \text{глобальная брэн метода (ун. н.п.)}$$

### Задача 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - x^5 y \\ \dot{y} = x - y^5 + xy^6 \end{cases}$$

н.п.  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  - ун. н.п. ун.

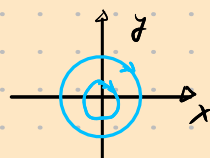
линейная сист.-ма:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

- гармонический!!!

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$



$|\lambda E - A| = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$  — 1-й шаг леммы Ляпунова доказан

$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  — кв.-ф. удобно подобрать

$\dot{V}_x = x(-y - x^3 - x^5 y) + y(x - y^5 + xy^5) \Rightarrow V$  — первый интеграл линейной сис-мы

(т.к.  $\dot{V}$  в сис-ме линейной сис-мы  $\equiv 0$ ),

$\dot{V}_x = -x^4 - x^6 y - y^6 + xy^7 = -x^4(1 + x^2 y) - y^6(1 - xy)$  ↑ здесь на фоне 1 в сис-ме (0)  $\sim -x^4 - y^6 < 0$

— устойчивость (даже асимптотическая по т. Ляпунова к-рые еще не прошли).

