

Литература: Ра ме (Муравьев, Гельфандер, Аппельман, Маркеев - новая версия)

## Равновесие механических систем



Система мех-са в равновесии в бездействии т.е. не перемещается  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \vec{r} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 = \text{const}$$

Анализ дуги рассматривается стационарные системы

(у-я связи не зависят от времени)  $\Rightarrow$   $\exists$  возможность

ввести стационарную параметризацию, и  $\vec{r} = \vec{r}(q)$  после введ-я обобщ. коор-т.



$\gamma$  не ст.м. система тоже может быть полн. равновес. -  
м. кривизны (кривая эволюционирует со временем)

$$(\mathcal{L}_{,i})' - \mathcal{L}_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$\Uparrow$  - т.е. разрешимость систем ст.м. произв.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = F(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = X(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

## Теорема

Положения равновесия мех-са во вз. однознач. соотв. с точками бифу

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\square (\Leftarrow) \text{ Пусть } x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = \text{const}$$

$$\square (\Rightarrow) \vec{r} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \equiv \vec{0}(1), \text{ откуда обобщ. коор-ты } q \text{ близки к } q_0, \text{ т.е.}$$

$$\vec{r}_{,k} \delta q^k \equiv 0 \quad \forall \delta q: \delta q^1 + \dots + \delta q^n \neq 0.$$

$$\text{Таким образом } (1) \Rightarrow \dot{q} = 0$$



## Критерий полн. равновесия ст.м. системы

$$\text{Ст.м. мех-са в полн. равновесии} \Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0.$$

$$\square \quad (T_{,i})' - T_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$T_{,i} = a_{ki} \dot{q}^k \quad \text{т.к. } a_{ij} \text{ - симметричная матрица!}$$

$$(T_{,i})' = a_{ki} \ddot{q}^k + a_{kij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$T_{,k} = \frac{1}{2} a_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow a_{ki} \ddot{q}^k + (a_{kij} - \frac{1}{2} a_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

Для поком. равновес.  $q = q_0, \dot{q} = 0 \Rightarrow$

$$0 = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

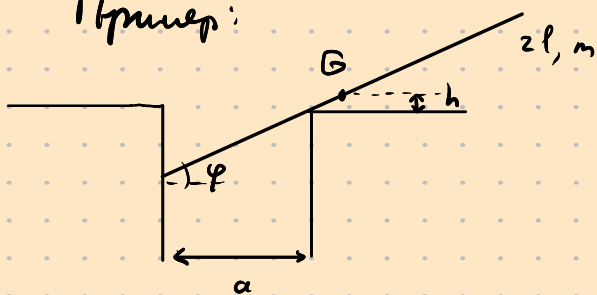
(грубо с одной стороны, если  $Q(q_0, 0, t) = 0$ , то (2) имеет решение  $q = q_0, \dot{q} = 0$  - но т.к. комм. оно имеет и единственно.  $\square$

Однако если сила имеет буг, не удовл. т.к. комм. ( $Q(\dots)$  не удовл. усл. Либмана), то критерий в обратную сторону не работает - может быть  $> 1$  рел. (см. Маркелова).

### Задача

Если  $Q = -\nabla \Pi(q, t)$ , то поком. равновес. соотв. стан. т.к. потен. энергии:  $\nabla \Pi(q, t) = 0$ .

Пример:



т.  $G$  - центр масс (теперь всегда так будет).

$$\Pi = mgh = mg(l \sin \varphi - a \tan \varphi)$$

$$\Pi_{,\varphi} : l \cos \varphi - \frac{a}{\cos^2 \varphi} = 0$$

$$\cos \varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \quad \text{-- поком. равновес.}$$

### Теорема - принцип виртуальных перемещений

Поком.  $\vec{r} = \vec{r}_0$  мех. сис. -мн. ст. - в поком. равновес.  $\Leftrightarrow \forall$  вирт. перемещ.

$$\delta \vec{r} \text{ из этого поком. } \delta A = \int \vec{f} \delta \vec{r} dm = 0$$

□ (за слай. выраз)

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_{,k} \delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec{r}_{,k} \cdot \vec{F} dm \cdot \delta q^k = Q_k \delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0 -$$

- критерий поком. равновес.



## Замечание 1 (функциональное)

Важно, эта теорема Лагранжа - она требует и что система сил, в одну сторону док-во элементарно, но в другую на порядок сложнее.

$$\square \Leftrightarrow \int (\vec{w} - \vec{F}) \delta \vec{r} dm = 0 \quad \text{— осн. ур-е динамики}$$

$$\vec{w} = 0 \text{ в поком. равн.} \Rightarrow \int \vec{F} \delta \vec{r} dm = 0$$

В обратную сторону — см. Маркеев.

## Замечание 2 (применение)

Важно обратить внимание, что ун. теор-мы должны выполняться

$\forall \delta \vec{r}$  из поком. равновес.

## Пример

### Условие равновесия твёрдого тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{p}$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{R} + \delta \vec{p} = \delta \vec{R} + \delta \vec{q} \times \vec{p}, \quad \delta \vec{q} \text{ — в.р. поворота}$$

$$\delta A = \int \vec{F} dm \cdot \delta \vec{R} + \int \vec{F} \cdot (\delta \vec{q} \times \vec{p}) \cdot dm =$$

$$= \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \delta \vec{q} \cdot \underbrace{\int \vec{p} \times \vec{F} dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \vec{M}_0 \cdot \delta \vec{q} = 0 \quad \forall \delta \vec{R}, \delta \vec{q} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \text{ и } \vec{M}_0 = \vec{0}$$

$\vec{F}$  — главный вектор сил,  $\vec{M}_0$  — главный момент.

(полезно вспомнить гундан. кин.)

# Основы Теории устойчивости

Рассматривается система второго вида в нормальной форме Коши:

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (3) \quad \text{Здесь и далее: } x(t) = x(x_0, t)$$

Решение  $x = q = \text{const}$  наз-ся постоянным решением сист-мы (3).

Полное решение  $x = a$  всегда можно сместить в начало коор-т, в т.ч.  $x = 0$ :  
 $x \rightarrow x - a$ .

Далее будем считать, что  $a = 0$  без ограничения общности.

$x$  можно трактовать как отклонение от полн. решения.

## Определение

Решение  $x = x(x_0, t)$ , где  $x_0 = x(t_0)$ , наз-ся локально продолжимым вправо, если оно  $\exists \forall t \in [t_0, \infty)$ .

Пример:  $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



## Определение (уст. по Ляпунову)

Полное решение  $x=0$  сист-мы (3) наз-ся уст. по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0; +\infty) \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{x^2(t)}$$

## Заключение

1. Опр. уст.  $\Leftrightarrow$  равномерная непрерывность по нач. уст.
2. Из опр. уст.  $\Rightarrow$  реш-е  $x(t)$  локально продолжимо вправо

## Определение (асимптот. уст.)

Полож. равновес.  $x=0$  уст. (3) - асимптотически устойчиво, если

\* 1.  $x=0$  - уст. по Ляпунову.

2.  $\exists \Delta: \forall x_0, \|x_0\| < \Delta \rightarrow x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$U_\Delta(0)$  - область притяжения.

Если задано при (1):



## Определение (неуст.)

Полож. равновес.  $x=0$  неуст. (3) неуст., если  $\exists \varepsilon: \forall \delta \rightarrow \exists x_0:$

$\|x_0\| < \delta \exists t^*: \|x(t^*)\| > \varepsilon$ , либо рел.  $x(x_0, t)$  не оста. со врем. вправо.

## Классические определения

### ① Устойчивое

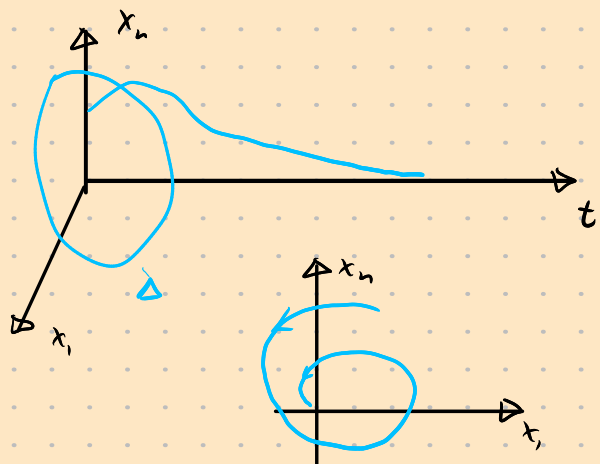


$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0$ : траектория, начинающаяся в  $\delta$ -окрестности, остаётся внутри  $\varepsilon$ -окр-ти

### ② Неуст.



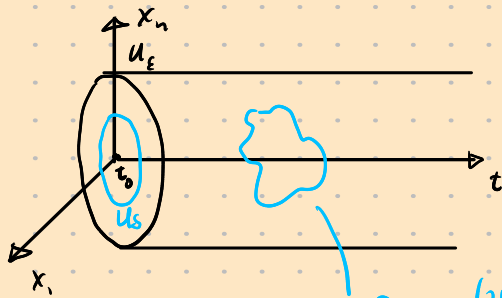
### ③ Асимптот.



## Корректность понятия устойчивости

Если н.р. (положение равновесия)  $x=0$  устойчиво по бр.  $t_0$ , то оно уст.  $\forall t_1 > t_0$ .

$$\square \quad x=0 \text{ - уст.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0; \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$



Результат теор.:  $G$  - м-во рел-ии  
задом к-мн при заданном м-ве  
нер, уст.

$$G = x(u_\delta(0), t_1)$$

$x(x_0, t)$  - непрерывн. и непр. (и. к-мн)  $\Rightarrow \rho(\partial G, 0) > 0$  (рас-ле от  $x=0$  до  $\partial G$ )

Возьдем  $\delta_1 = \rho$ ,  $t_0 \mapsto t_1$ ,  $\delta \mapsto \delta_1$  (замен)  $\square$

## Устойчивость преобразий

$$\dot{x} = X(x, t) \quad \psi - \text{замен. решение (преобразование)}$$

$$\dot{\psi} = X(\psi, t)$$

Рассмотрим решение  $x = \psi + y$  ( $y$  - отклонение от преобразия)

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\psi}}_{X(\psi, t)} + \dot{y} = X(\psi + y, t) \Rightarrow \dot{y} = X(\psi + y, t) - X(\psi, t) \quad (1)$$

$y=0$  - н.р. сис-мы (1)

Таким образом, если  $y=0$  - устойчивое н.р., то тр-ия  $\psi$  наз-ся **устойчивой**.

Если  $\forall$  тр-ия сис-мы устойчива, то сис-ма наз-ся устойчивой.



Все преобразия, сис-мы на  $\delta$  от  $\psi$  в пол. уст.,  
отклонения  $< \varepsilon$  от  $\psi$ .

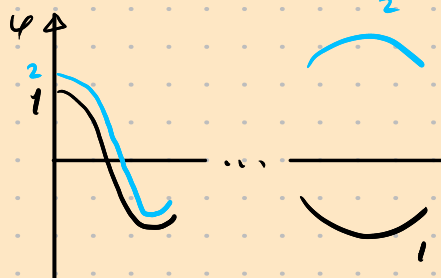
Если  $y=0$  - неуст.  $\Rightarrow$  тр-ия неуст.,  $y=0$  - асимпт. уст.  $\Rightarrow$  тр-ия асимптот. уст.

## Замечание

Устойчивость траектории обозначает близость возмущенных траекторий в те же моменты времени.

## Пример

Рас-им колеб. с конечной амплитудой



- расхождение (т.к. амплитуды разные  $\Rightarrow$  разные периоды).

Траектории, кроме функции  $\propto \varphi=0$ , неустойчивы.

## 0. Выбор переменных в задачах нест-о устойчивости

Переменные не должны иметь ограничений в вар-ии п.р.

## Пример



$\forall \theta_0 \ll 1 \quad \exists$  рет. вида  $\varphi = \varphi_0 t + \varphi_0 \rightarrow \infty$

П.р. на самом деле уст-во,  $\dot{\varphi} \rightarrow \infty$  - следствие выростания с.к.

## Пример

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \quad x = x_0 + \frac{t}{2}$$

$$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \forall \text{ времени, уст.}$$

$$\text{Замени } y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + t/2)^2$$

$$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + t/2)^2 = (x_0 + t/2)^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \rightarrow \infty$$



## Определение (А3П)

Занесена  $x = x(y, t)$ ,  $x(0, t) = 0$  наз-ся **горизонтальной**, если

1.  $\det(x, y) \neq 0$  в нек-рой окр-ти некоем  $y$ -м. (т.е. гиперпл. разрешимая)
2. Занесена  $x = x(y, t)$  и обратная ей  $y = y(x, t)$  непрерывна в 0 равномерно по  $t$ . (таковы из 2 примеров)

Допустимые занесены не изменяют хар-ра горизонтальности.

## Устойчивость линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad A(t) \text{ — матрица, которая не зависит от } t$$

$\exists \psi(t)$  — матрица,  $x = \psi + y$  — возмущённая тр-ца,

$$\dot{y} + \dot{\psi} = Ay + A\psi + F \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  если  $e$  — век. тогда матрица  $\dot{\psi}$  и  $e$  — нуль, т.е.  $y=0$

однородная с-ма  $\dot{y} = Ay$ . (2)

## Теорема

П.р.  $y=0$  — уст.  $\Leftrightarrow \forall$  пер-я с-ма (2) устойчива.

$$\square \quad \Leftrightarrow \quad \exists \psi - \text{неогр. рен.}, \text{ рас-ст } y = \frac{\delta}{2} \frac{\psi(t)}{\|\psi(t_0)\|}$$
$$\|y(t_0)\| < \delta, \quad y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow y=0 - \text{уст.}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Если } \forall \text{ пер. окр.} \Rightarrow \text{окр. } \Phi(t, t_0) - \text{матрица, зависящая от } t, t_0, \\ \forall \text{ пер. (2) имеет вид } y = \Phi(t, t_0) y(t_0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$$

□

Замечание: норма матрицы:  $\|\Phi\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$  — "максимальное растяжение"

С евклидовой нормой норма матрицы — max собственное число матрицы (собств. число матрицы  $\Phi\Phi^T$ )



## Устойчивость систем с постоянной структурой

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \text{const} \quad (3)$$

Каждый интерес представляет асимпт. устойчивость н.р.  $y=0$ .

Можно рассмотреть, как-то, как-то управление, зависимость от  $y$  и перем.

Отмечается именно так.

Решения (3):  $y = h e^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - корни

## Теорема

Н.р.  $y=0$  асимпт. устойчив.  $\Leftrightarrow \text{Re } \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

□  $y(t) \sim P_{\sigma_k}(t) e^{\lambda_k t}$  Если  $\exists \lambda_k: \text{Re } \lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$  неуст.

Если  $\text{Re } \lambda_k < 0 \Rightarrow \forall$  пер. орг.  $\Rightarrow$  н.р.  $y=0$  уст. по пред. теор.

$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow$  н.р.  $y=0$  - ас. уст.



( $\sigma_k$  - кратность корня  $\lambda_k$ )

## Определение

Устойчивость  $P(\lambda)$  наз-а уст. если  $\text{Re } \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

(уст. означает асимпт. устойчив. уст. н.р. в ин-ле с const коэф.)

## Теорема (крат. уст.-е уст. полинома)

Если  $P(\lambda)$  уст., то знаки его коэф-ов должны быть одинаковы.

□  $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_j > 0 \quad \bar{\lambda}_j$  - сопр. корни

$\lambda_n = -\gamma_n, \quad \gamma_n > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod [(\lambda + \alpha_j - i\beta_j)(\lambda + \alpha_j + i\beta_j)]^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k} =$$
$$= a_n \prod (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod (\lambda + \gamma_k)^{\sigma_k}$$

Различные корни дают коэф-ты одного знака.



## Замечание

Условия для уст. группировки в виде:  $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$ . Это эквивалентно предл. приведение многочлена к виду  $a_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$ .

Критерии уст. рас-на без дек-в (см. Муравьева или Демидовича)

## Критерий Рауса - Гурвица

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

Сформируйте матрицу Гурвица

$$\Gamma =_{n \times n} \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

По диагоналям коэф-ты  $a_1, a_2, \dots$   
слева коэф-ты по возраст., справа - по убыванию.

$$P_\lambda \text{ - уст.} \Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

! Если результат группировки записи  $\Gamma$ !

## Замечание об уст. $a_0 > 0$

### Пример

$$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 \quad \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1} \Rightarrow \text{нужна уст.} \Leftrightarrow \text{sign } a_0 = \text{sign } a_1$$

$$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0 - ?? \quad \text{нужно уст.} ??$$

"Парадокс" берем отсюда, что  $P(\lambda)$  не приводится к виду  $a_0 > 0$ .

Приведение к виду  $a_0 > 0$ :

$$P(\lambda) \rightarrow \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1, \quad 1 \text{ задано } > 0$$

(если  $a_0 = 0$  то  $P(\lambda)$  сразу неуст.: есть корень  $\lambda = 0$ )

$$\Gamma = \left( \frac{a_1}{a_0} \right) \text{ - теперь всё верно.}$$

