

# Решебов Убак Вадимович

## Биография



- Все ящики не линейные
- Пол-ящиком такое описание и стационарное

Линейность:  $\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Стационарность:  $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t+\Delta t) \rightarrow y(t+\Delta t)$

Черный ящик описывается:

- сконструирован
- набором параметров  $H$

Модель син-на, состоящая из RLC, где есть линейная и стационарная.

## Технические задачи

Верб - учащийся 3-го курса, ведет к-рого проектирует один из них на Л. Модель содержит из  $\geq 1$  независимых двухполюсников.

Узел - место соединения ветвей

Каскадами  $\rightarrow 2$  ветви      Четвертными - 2 ветви

Контур - модуль замкнутой цепи, проход. по всем-им ветвям цепи.

Хар-кическ. изображение однога, который ведет / узел проходит 1 раз

Одна. или можно заменить:

Компонентные ур-я - схемы цепи, опред. ее коммутацион.

Технические ур-я - схемы цепи, опред. только ее параметры

## Правило Курикоффа

- Закон сохр-я заряда
- Продел не накапливает заряд (заряда)

## I Закон Курикоффа

Алг. сумма измененных зарядов всех батарей, находящихся в контуре из узлов в моделях имеет временн., равна 0.

$$\sum i_k = 0.$$

- Потенциалность з.н.
- Консервативность з.н.
- Полное значение  $\vec{B}$  во времени в сечении не изменяется (не меняет смысла з.н.)

## II Закон Курикоффа

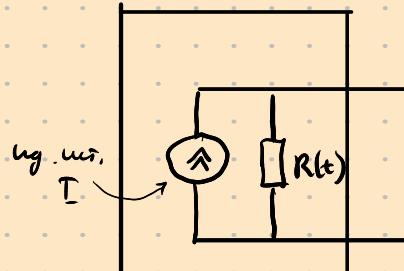
Алг. сумма измененных зарядов напряжения всех батарей, находящихся в моделях контура подвергнуты изменениям, равны 0.

## Теорема об эквивалентном генераторе

Так производимых батарей имеющих з.н. всем не изменяется, если изменение генераторов, и к-рые находятся за пределами, заменив эквивалентным генератором источником энергии, к-рой имеет один преобразователь называемый (Telenaut) или генератором (Нертон) с теми же изменениями. При этом ЭДС генератора неизменна напряжение работы генератора ходят автономного генератора, так генератор неизменяется тока работы току КЗ автономного генератора, а внутреннее сопротивление и проводимость з.н. несущих токов неизменяется. Концепция входит в состав и генератором автономного генератора.



Нортон - Нертон



Паренс - Теленут



$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} ; U_{xx} = - I R_2 = - \frac{E R_2}{R_1 + R_2}$$

Зависимость тока в цепи от ЭДС нелинейна, т.к. она не линейна на разрыве цепи, однако сопротивление очень малое, поэтому значение тока приблизительно.

Это подходит только к неизвестному источнику. Для зависимостей приведены зависимости для ин. ур-ий (различие с этим)

### Частотный анализ характеристики цепей

$$I \cos(\omega t) \rightarrow \boxed{\text{линейное звено}} \rightarrow K(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$



$$K(\omega) = A_{UX}$$



$$\varphi(\omega) = \varphi_{UX}$$

Cause нормальное описание цепи!

Типичные признаки - переходы в комплексной



$$z = |z| \cos \arg z + i |z| \sin \arg z \quad (\varphi = \arg z)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos \omega t + i \sin \omega t \rightarrow \boxed{\text{ЛНВ}} \rightarrow K(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (...) i \sin(...)$$



$$I = \frac{U}{R} \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$$



$$I = C \frac{dU}{dt}$$

$$\tilde{I} = C \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\frac{1}{j\omega C}}$$

unegative



$$U = L \frac{dI}{dt} \quad \tilde{U} = j\omega L \tilde{I}, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{j\omega L}$$

Численное значение ( $Z$ )  $j = i$  в радиоэлектронике

Комплексная проводимость -  $Y$

### Линейные цепи с нагрузкой

#### 1. Частотные характеристики RC-цепи

$$\tilde{U}_{in} = \frac{\tilde{U}_{out}}{1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\tilde{U}_{out}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Что будет, если на вход подать  $\cos \omega t$ ?

$$U_{out} = \text{Re}(\tilde{U}_{out}) = (\cos \omega t + \sin \omega t \cdot j\omega RC) \cdot (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1}$$

Амплитудно-фазовая зависимость:  $\cos \omega t + i \sin \omega t$

$$K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{out}}{\tilde{U}_{in}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

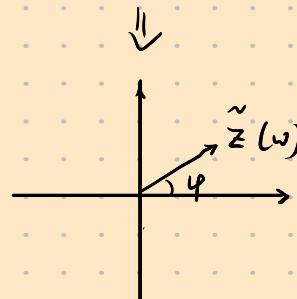
$$\frac{\tilde{U}_{out}}{\tilde{U}_{in}} = \frac{A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0} \cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0} e^{j\varphi}$$

Нормированная  $Z$  - сдвиг фаз - аргумент, модулирование амплитуды

Чтобы найти  $U_{out}$ , нужно из  $K(\omega)$  выделить фазовую составляющую и модуль комплексного числа  $A_0 e^{j\varphi}$ .

$$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1/2}$$

$$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$



Численно



$$\arg K = \varphi = -\arctg \omega RC$$



## линейной стабилизации



- $u_1, u_2$  - относительно земли
- Не насыщает зажиг
- По боковым зажимам зажиг неоднократно
- Видят неоднократное (из 2) зажигание  
о чистом синусоиде (видим максимум в двух первых проекциях) - модуль  $\approx \text{НК } u_1, u_2, i_1, i_2$ .

## Синхрония параллельных (из дегенерации (типа R) зажиганий)

Синхрония из 2 независимых зажиганий, определяющих зажигания друг друга. Каждое зажигание  $F_1$  и  $F_2$ .

$$\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, u_2) \\ i_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

Т.е. зажигания зажигают  
друг друга при  $F_1$  и  $F_2$ .



Причём  $f_1$  и  $f_2$  они

- Нелинейны
- Пронз.  $\neq 0$

Т.е. им можно воспользоваться для синхронизации.

$$di_1 = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right) du_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right) du_2 \quad di_2 = \left( \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right) du_1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right) du_2$$

$= \text{const}$  при  $u_1$  и  $u_2$

При  $u_1 = \text{const}$ ,  $u_2 = \text{const}$  мы имеем 4 константы, характеризующие зажигания.

Приз. симпл производных:

1.  $\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$  - прямая проводимость
2.  $\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$  - обратная производная проводимость
3.  $\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$  - прямая производная проводимости
4.  $\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$  - прямая производная проводимости

### Амплитудный сигнал (безразмерн. $h \in C$ - неизменн.)

Вещественный сигнал - залежання нек-ої АК  $h$  від часу. При преобр-нн  $g$  у  $h$  одержано певну синусоїдну структ (чи синусоїдн. ф-ю). Ось зображення її комплексного компонента, який має зміс  $= 0$ .

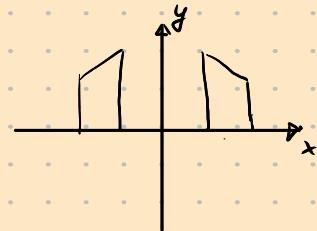
Це незадовільно - производна підходить з коеф.  $\sin \omega t \cos \omega t$ .

Додавши до цьому комплексну фазу - імпульс,

також (правий) зміс структура буде однією.

Виведемо амплитудний сигнал. Позначимо  $g$  за промежутком  $t$  з генер. звуком,  $g(t)$  - з часом. Нехай  $g$  ампл. сигнал,  $h$  - норм. пох. від  $g$ . Тоді  $h$  - комплексна функція.

Сигнал буде виглядати так як він складається з двох складових: звукової та гармонічної.



$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \pi] \\ -1 & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\tilde{x}(t) = A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \quad - \text{амплитудний сигнал}. \quad |e^{j\omega t}| = 1$$

$A_0(\omega), \varphi(\omega)$ .  $A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$  - комплексна амплітуда

$e^{j\omega t}$  - комплексна вращаючася експонента.

### Y-матриця (комплексна)

$$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12} \tilde{U}_2 \quad \tilde{I}_2 = Y_{21} \tilde{U}_1 + Y_{22} \tilde{U}_2$$

При пошуку  $Y_{11}, Y_{21}$   $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$  замінено (захоплюють вимог), аналогично  $Y_{22}$ .

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = Y \times \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{pmatrix}$$

Если бы в  $I_1$  и  $I_2$  как неизб., наименование то же:

$$dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial U_1}{\partial I_2} dI_2$$

$$dU_2 = \frac{\partial U_2}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial U_2}{\partial I_2} dI_2$$

- зглоба композиции сопротивлений

Следов. находим. currents:

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Чтож: } Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|} \quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}$$

$$Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|} \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{|Y|}$$

### H-параметры

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases}$$

- называю гэе динамическими транзистором

для



Коммюн

$U_2$

- аналогичные динам. транзисторы схема

пример

$h_{21}$  - неподв. но наизменч. токи (свр.)  $h_{11}$  - бкжное сопротивление

$h_{12}$  -

(свр.)  $h_{22}$  - бкжная проводимость (свр.)

(свр.) - индуктивность

$$\text{Чтож: } h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}} \quad h_{12} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

$$h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$$

## Комплексный коэф-т передачи



Амплитуда - из ТФ КП

Комплексная звук в реальном не поддается  
 $|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$  - комплексный коэф-т передачи

$$K(j\omega) = \frac{B_{lm}}{B_{ls}} = \frac{B(\omega) e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t}}{A_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)}$$

Надо анализировать сдвиги. Сложно помнить формулы на Бюро и  $K(j\omega)$  тоже дает

$$\Leftrightarrow \frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + A_0} = \frac{B_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot \dots \cdot (\omega - b_n)}{A_0 \cdot (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot \dots \cdot (\omega - a_m)}$$

сдвиги нулевых полюсов

сдвиги ненулевых полюсов

(одна сложная задача разбивается)

Частоты:

- Когда  $\omega = b_k$ ,  $|K| = 0$
- Когда  $\omega = a_k$ , возникает особенность.

$$\Leftrightarrow \frac{B_0}{A_0} \cdot \frac{|(\omega - b_1)| \cdot e^{j\arg(\omega - b_1)} \cdots |(\omega - b_n)| \cdot e^{j\arg(\omega - b_n)}}{|(\omega - a_1)| \cdot e^{j\arg(\omega - a_1)} \cdots |(\omega - a_m)| \cdot e^{j\arg(\omega - a_m)}} = \frac{B_0}{A_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^n |(\omega - b_k)|}{\prod_{p=1}^m |(\omega - a_p)|} \cdot e^{j \sum_{k=1}^n \arg(\omega - b_k) - j \sum_{p=1}^m \arg(\omega - a_p)}$$

"Нули" - корни числителя ( $b_i$ )

"Полюсы" - корни знаменателя ( $a_i$ )

$\omega$  гармоник для комплексной ( $\rho$ ), where от комплексной оп-ки приводят передачу к вещественному

$$\Im p = j\omega, \Re p = 0$$



$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \varphi_0)} = \frac{B_n \cdot \rho^n + B_{n-1} \cdot \rho^{n-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot \rho^n + A_{n-1} \cdot \rho^{n-1} + \dots + A_0} = \dots$$

Но на самом деле, нужно в  $\frac{B_0}{A_0}$  помнить ненулевые вещественные

$\rho = j\omega + 0^\circ$  - это же комплексная частота,  $0^\circ = 0$ .

Учите, что комплексные частоты неодинаково работают

$$K(j\omega) = \frac{|j\omega - b_1|}{|j\omega - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega - b_1) - \arg(j\omega - a_1))}$$

$|K(j\omega)| = \sqrt{a_1^2 + \omega^2}$  - модуль зум балансов из нуля в из полюса

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} - A(X) \quad \arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A - \Phi(X)$$

Пример  $a_1 = -b_1$ .



### Инерционная RC-система

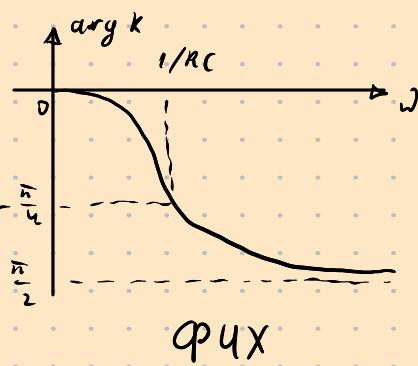
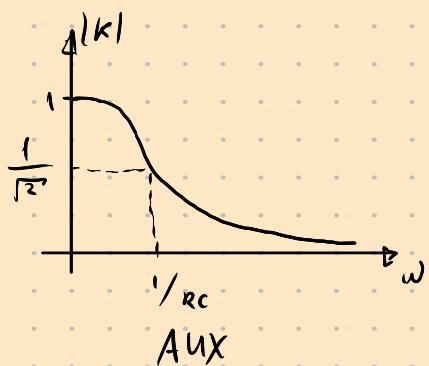


$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{out}}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \tilde{U}_{in}} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC(j\omega + \frac{1}{RC})}$$

Tak repayem  
(nem repay kongenatsiy)

$$= \frac{1}{RC(p + \frac{1}{RC})} \quad a_1 = -\frac{1}{RC} \quad \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

$$|K| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{RC^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad -A_{UX}$$



### Дискретизированная RC-система



$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - \omega_0}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



AUX

OPUX

Не вещественное нулю / ненулевое бугоры симметричны относительно оси. Re > 0, если конд 1 - вещественный

## Однократные характеристики систем



$$C_n \frac{df^{(n)}}{dt} + C_{n-1} \frac{df^{(n-1)}}{dt} + \dots = \dots$$

Заменим  $f^{(n)}$  на  $p^n$ ,  $f^{(n-1)}$  на  $p^{n-1}$ , ...

Получаем характеристическое уравнение.

Корни полученного уравнения дают решения дифр. ур-я.

$$\frac{df^{(n)}}{dt^{(n)}} \rightarrow p^n$$

- оно же, с помощью к-поса можно решить задачку

$$\int f(t) dt \rightarrow \frac{1}{p}$$

Непрерывная форма  $x(t)$  и ее спектр (преобразование Фурье):

$$F(\omega) = C \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- сходимость интеграла второго вида



- спектр этого низкочастотного импульса не сходит

(Ф-ия Хейвайса)

Можно придумать ее пологовалистическую сп-ю, к-рая сходит к сп-ю Хейвайса, и называется, когда сходит пологовалистический импульс.

Всегда менее затратное преобр-е, более универсальный метод: умножим  $f(t)$  на  $e^{-\sigma t}$ .

Также ее сп-ю можно оправдать этой причиной. Новое преобр-е:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt; \text{ обозначим } p = j\omega + \sigma - \text{ преобр-е Лапласа (прене)}$$

"это энту. он дает заслуженное".

При этом всегда справедливо, что для  $t=0$   $f(t)=0$ , наше выражение сущ. сп-ю

(также импульс не разбивается на сумму заслуженных  $e^{-\sigma t}$ ).  $F(p)$ - лампас - отраж

## Числовые признаки засечки интеграла

1. Не более чем конечное число разрывов 1-го рода на каждом конечном отрезке  $\forall t \rightarrow \exists A, \alpha \leq 1, h_0 : |f(t+h) - f(t)| \leq A|h|$  - оп. способом поиска на конечном отрезке (дискретизируя засечку?)
2.  $\forall t < 0 \rightarrow f(t) = 0$
3.  $\exists M > 0, s_0 > 0 : \forall t \rightarrow |f(t)| < M e^{s_0 t}$  - оп. способом поиска на междуречии засечки

$$f(t) \stackrel{def}{=} F(p) - f(t) \text{ - есть } \lim_{p \rightarrow t} F(p)$$

Однозначное представление вида  $\frac{1}{p-t}$ .

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \frac{1}{p} e^{pt} dp$$

В ТФКП не применяется правило интегрирования.

Однозначный вид: теорема Коши о барьерах.

$$\int_C q(p) dp = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{res} q(p) \quad (\text{существо барьеров})$$

(выбираем контур)

$\operatorname{res} q(p)$  - барьеры оп-ии  $q(p)$



Если в оп-ии есть осадковое, пренебрегаем не в рег. Тейлора, а вот в засечке рег?

$$f(p) = \dots + \underbrace{\frac{1}{p^2} C_{-2}}_{\text{барьер оп-ии}} + \underbrace{\left( C_{-1} \frac{1}{p} + C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots \right)}_{\text{правильные засечки}}$$

нужные засечки

- рег. засечки

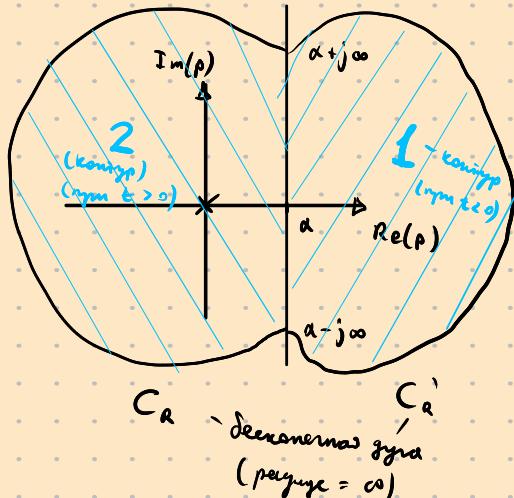
$C_{-1}$  - это засечка, надо в знаменателе

Понятие засечки интеграла базируется на правилах

$\rightarrow \infty$  при смещении оп-ии  $p \rightarrow 0$  на  $\infty$  симметрично  $0$ .  
(лемма Моргуана)

При  $t < 0$  по засечке Моргуана  $\int_{C_R'} \dots = 0$

$$\int_{\text{засечка!}} \dots = \int_L \dots - \int_{C_R'} \dots = 0 - 0 = 0 \quad f(t) = 0$$



При  $\alpha > 0$  контур 1 не содержит осадков (один из них:  $\frac{1}{p} - 8$  раз),  $\Rightarrow \int_1 \dots = 0$

При  $t \geq 0$

Барьер засечки, забав он 1 ( $ym \rightarrow 0, e^{pt} \rightarrow 1 \Rightarrow$  засечка осадков:  $\frac{1}{p} \rightarrow C_{-1} - 1$ )

$$\int_2 \dots = 2\pi i \quad \int_1 \dots = \int_2 \dots - \int_{C_R} \dots = 2\pi i$$

$$F(t) = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1 \quad - \text{q-p-u2 Xebucanya!}$$

T.e.  $F(p) = \frac{1}{p}$  ges q-p-u2 Xebucanya.

Прегледуем мысъл q-p-u2 във вид на симметрични съмволи, която е2 има предпазителни за ламбади.  $e^{-pt}$  - избраният q-p-u2 Xebucanya може предпази -2



$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt} \left\{ \sum f(\tau_x) e^{-p\tau_x} \Delta' \tau_x \right\} dp$$

$$\Delta' \tau_x = \frac{-e^{-p\Delta \tau_x}}{p} = \Delta \tau_x - \frac{(\Delta \tau_x)^2}{2!} + \dots - \text{първи корен}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt} \left\{ \int_0^t f(t') e^{-p t'} dt' \right\} dp \quad - \text{одното предпази е ламбада}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt} F(p) dp$$

$f(t)$  - q-p-u2 Xebucanya.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{p_0 t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = -\frac{1}{p-p_0} e^{-(p-p_0)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-p_0}$$

Приглушаване, тъй като

$$i(t) = \frac{1}{p} \quad e^{p_0 t} \cdot i(t) = \frac{1}{p-p_0}$$

Може предпази -2 да изгаряващият генератор на  $i(t)$ , е2 не мини.

## Свойства предпази -2 ламбада

### 1° линейност

$$\int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-pt} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt$$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \stackrel{def}{=} \alpha F(p) + \beta G(p)$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

и съществуващите натриални:

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$\operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

## 2° Таблица номинал

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(t) e^{-p\frac{t}{\alpha}} dt = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

## 3° Дифференцирование ортранс

$$f'(t) \doteq F(p)$$

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty \underbrace{f'(t)}_{u'} \underbrace{e^{-pt} dt}_{v} = f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) (-p) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$$

## 4° Дифференцирование изотранс

$$F(p) \doteq f(t) \quad (\text{изотранс преобр-е})$$

$$F'(p) = \left( \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt$$

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$$

$$t^n \doteq (-1)^n \left( \frac{1}{p} \right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$t^n e^{pt} \doteq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

## 5° Интегрирование ортранс

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt \quad g(t) \doteq G(p)$$

$$F(t) = g'(t) \doteq F(p) = pG(p)$$

$$G(p) = p^{-1} F(p)$$

## 6<sup>0</sup> Интегрирование изображения

$$F(p) \doteq f(t)$$

$$\int_p^{\infty} F(p) dp - \text{изображение}$$

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \int_p^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right\} dp = \int_0^{\infty} f(t) dt \int_p^{\infty} e^{-pt} dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt$$

$\uparrow$  изложение неправильное интегрирование

$$\int_p^{\infty} F(p) dp \doteq \frac{f(t)}{t}$$

$$e^{pt} - e^{at} \doteq \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-a}$$

$$\frac{e^{pt} - e^{at}}{t} \doteq \int_p^{\infty} \left( \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-a} \right) dp = \ln \frac{p-a}{p-a}$$

## 7<sup>0</sup> Теорема замены изображения

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$f(t-t) \doteq \int_t^{\infty} f(t-t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-(t_1+t)} dt_1 = e^{-pt} F(p)$$

$t_1 = t-t$



$$f(t) = A(1(t) + 1(t-t) + 1(t-2t) + \dots)$$

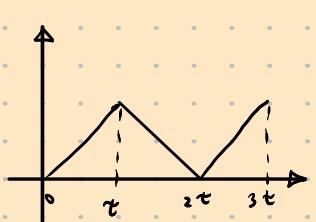
$$F(p) = A \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-2pt} + \dots \right) = \frac{1}{p} \frac{1}{1-e^{-pt}}$$



$$f(t) = A(1(t) - 2 \cdot 1(t-t) + 2 \cdot 1(t-2t) - \dots)$$

$$F(p) = \frac{A}{p} \left( 1 - 2 \frac{e^{-pt}}{1-e^{-pt}} \right)$$

Меняется



$$F(p) = \frac{A}{p^2} \left( 1 - 2 \frac{e^{-pt}}{1-e^{-pt}} \right)$$

### 8º Teorema convolutionis

$$F(p) \doteq f(t)$$

$$F(p-p_0) \doteq ?$$

$$F(p-p_0) = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = \int_0^\infty (f(t) e^{p_0 t}) e^{-pt} dt$$

$$e^{-pt} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-pt} t^n \doteq \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$$

### 9º Teorema умножения - *бесконечное произведение*

$$f(t) \doteq F(p) \quad g(t) \doteq G(p)$$

$$F(p) \cdot G(p) \doteq ?$$

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(t) g(t-t) dt = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt =$$

$$= F(p) \cdot G(p)$$

$$\int_0^t f(t) g(t-t) dt - \text{интеграл свёртки}$$

Есан оңайындың түзүлүштөрінің жарандыруларынан, дәржі - барынан бергеніндең, бергеніндең бергеніндең дүйсөн жаңы свёртка - киң тәржемеліндең алғылар

$$p F(p) G(p) = f(0) G(p) + \{ p F(p) - f(0) \} G(p) \doteq f(0) g(t) + \int_0^t g(t) \cdot f'(t-t) dt =$$

### Интеграл Дюамеля

$$= g(0) f(t) + \int_0^t f(\tau) g'(t-\tau) d\tau$$

### 10º Обратная теорема умножения

$$f(t) g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(q) G(p-q) dq - \text{неге жағады}$$

$$f(t) g(t) \doteq \int_0^\infty f(t) g(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(q) e^{qt} dq \right\} g(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left\{ F(q) \int_0^\infty g(t) e^{-(p-q)t} dt \right\} dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(q) G(p-q) dq$$

Дан интеграл енис свёртка нозараламен.

# Числоское характеристики

Особенности функциональных из-внешн. функционалов, заданные на пространстве основных функций. Число, соотвтвующее основной функции  $\varphi$  функционалу  $f$  называется  $(f, \varphi)$  и наз-ся единичной обобщенной ф-ией  $f$ . на пространство ф-ий  $\varphi$ .

$$(f, \varphi) = A$$

1° Минимум функционала

$$f(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$$

2° Непрерывность

$$\forall \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} 0 \rightarrow (f, \varphi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (K - \text{нр-то сущ-ва})$$

Всеобщая основная ф-я для линейного гиперфункционала.

У каждого основной ф-и есть "конечно-норма":  $\|\varphi(x)\|_a = \max_{|x|=a} |\varphi(x)|$   
(второе сл-то - это прерывнос.)



Пример:  $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a \\ \exp\left(-\frac{x^2}{a^2-x^2}\right), & \text{если } x < |a| \end{cases}$

В т.  $x \rightarrow a$  функция, эко  $\varphi(x) \rightarrow 0$  и  $\varphi'(x) \rightarrow 0$  - ф-я нр-но непрерывна и гл-ко нр-но константа  $\varphi(x) = 0$ .



Эти ф-и можно умножить на любые линейные гиперфункции ф-и. И результат будет приводить к линейным гиперфункциям!

Произведение таких ф-и есть нр-но основных ф-и K.

$$(g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx - \text{первоначальная обобщенная функция}$$

Самый простой пример - ф-я Хэвисайда:

$$1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{небходимо, так как определит } \delta(1, 0); \text{ всеядно можно умножать})$$

$$(1, \varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

$(\delta, \varphi(x)) = \varphi(0) - \delta - \text{ошибка}$



$h(t)$  - импульсная реакция, реакция системы на "момент дозы"

$$g(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x(t) \delta_{\Delta}(t-t) dt$$

Математика сводится к такому выражению:

интеграл Римана в огнице  $t$ , величина 0.



Неправильное выражение:

$$g(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x(t) \delta_{\Delta}(t-t) dt = x(0) = (\delta, x(t))$$

Обобщенное производное обобщенного оператора

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \varphi(t) dt = \left. \delta(t) \varphi(t) \right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi'(t) dt = -\varphi'(0)$$

равдели на  
функции



$$q = \int_{V \rightarrow 0} \rho dv - \text{масса}$$

$$q = \int q \delta(x) dx, \delta(x) - \text{масса точечного заряда}$$

$q$



Как отнести массу точечного заряда?

$$\frac{l}{l} \rho \delta(x + \frac{l}{2}) - \frac{l}{l} \rho \delta(x - \frac{l}{2}) - \text{если } l \neq 0;$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\rho \delta(x + \frac{l}{2}) - \rho \delta(x - \frac{l}{2})}{l} = \rho \delta'(x)$$



$$\begin{array}{c} \delta(t) \xrightarrow{\lambda} h(t) \\ \downarrow \quad \uparrow \\ 1 \xrightarrow{} K(p) \end{array}$$

## Синоди описание лин. и не-л.

### ① АЧХ, фур



### ② Частотное описание



захватлен нач-ое кор-то  
значение в момент времени

### ③ Переходное характеристики



Все описание захватлено

## Описание не-л. частотной характеристики



$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{i(t) - i(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \frac{1}{\Delta t} dt = 1$$

(если не брать  $\lim$  за  $\int$ , получим 0!)

Когда мы находим, что  $\delta(t) = i'(t)$ , то  $i(t)$  не uniquely определена — это означает, что не одна. Однако если сказать что однозначно определено, то она unique!

Всегда имеется единство:

$$h_n(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t-\Delta t)}{\Delta t}$$



пример для интегрирующей цепи  
(единственное не-л. описание)



пример для дифференцирующей цепи  
(единственное не-л. описание)

Однако  $h(t)$  всегда unique и unique! Поэтому

$$h_n(t) = h'(t)$$

Для синоди описания с производной в видим  $h_n(t)$ :

1. Пайдит  $h(t)$  на все равно: либо 1. производная и больше
2. Переим к одному ф-нию: там единственный

## Наша сінукса на $x(t)$



Аналог  $x(t)$  можна представити сумою скаже.

Всі цікі змінні в уявленнім синус:

$$y(t) = c_0 h(t) + c_1 h(t - \Delta t) + c_2 h(t - 2\Delta t)$$

Усередині  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$y(t) = \int_0^t h(t - \theta) d[x(\theta)] = \int_0^t x'(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

- перває диференціальна функція

Но! Якщо  $x(t)$  підібний? Тоді не  $x'(t)$ . Можна непевно & однак. що - не, то спочатку видаємо незалежністю:

$$y(t) = x(\theta) h(t - \theta) \Big|_0^t + \int_0^t x(\theta) h'(t - \theta) d\theta = x(t) h(0) + \int_0^t x(\theta) h'(t - \theta) d\theta$$

- більш диференціальна функція

Підібні  $h(t)$  підібні та не, якщо в них наявні  $h_n(t)$  - параліпіпедами зважом у відповідніх місцях. І. підібні по структурі.

В одній з цих:

$$y(t) = \int_0^t x(\theta) h_n(t - \theta) d\theta$$

## Свого з преодоленнями

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[x(t)] \cdot \mathcal{L}[h_n(t)] = H(p) \cdot \mathcal{L}[x(t)]$$

Припустимо компактність  $h_n$  - негатив -  $H(p) = \mathcal{L}[h_n(t)]$ !

