ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения

ОДУ в общ. случае

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{n}(x)) = 0$$ — обыкновенные — произв. только по одной переменной (x)

Рас-им сис-му:

$$\begin{cases} F_1(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Ур-я 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

- Ещё проще: ур-я 1-го порядка, разрешённые относ. произв.:

$y' = F(x,y)$; $\quad \left.\begin{matrix} dy = dF(x,y)\,dx \\ P(x,y)\,dy + Q(x,y)\,dx = 0 \end{matrix}\right\}$ ур-я в дифер. форме

- Частный случай: ур-я с разделяющимися переменными

$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$; **решение:**

$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad G(x) = \int g(x)\,dx$

$dF(x) + dG(y) = 0$

$d(F(x) + G(x)) = 0$

$F(x) + G(x) = \text{const}$

$\iff \int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = 0$

C2 №4

$y' \cos x + y(1+y)\sin x = 0$

$\frac{dy}{y(1+y)} + \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = 0$

$\int \frac{dy}{y(1+y)} + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = 0$

$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{(1+y) - y}{y(1+y)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \ln\left|\frac{y}{1+y}\right| + C_1$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C_2$

$\ln\left|\frac{y}{(1+y)\cos x}\right| = C_3$

$\frac{y}{(1+y)\cos x} = \pm e^{C_3}$ $\quad C \in \mathbb{R}$ ($C = 0$ — тоже решение!)

$\frac{y}{(1+y)\cos x} = C$ или $y = -1$ (решения теряются когда мы делим!)

$$y = \frac{C\cos x}{1 - C\cos x}$$

Ф № 67*

$3y^2 y' + 16x = 2xy^3$ Найти $y(x)$ – огр. в $U(+\infty)$

$3y^2 y' = 2x(y^3 - 8)$

$\int \frac{3y^2\,dy}{y^3-8} = \int 2x\,dx$ – потеряли $y^3 = 8$

$\ln|y^3 - 8| = x^2 + C_1$

$y^3 - 8 = \pm e^{C_1} e^{x^2}$

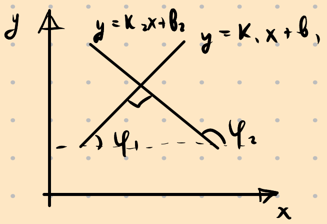
$C \in \mathbb{R}$ (в т.ч. 0! $y^3 = 8$ тоже реш.)

$y^3 - 8 = Ce^{x^2}$

$y(x)$ – огр. при $C = 0$.

Ортогональные траектории

Рас-им 2 ортогональные прямые:



$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$

$k_2 = tg\,\varphi_2 = tg\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\,\varphi_1 = -\frac{1}{tg\,\varphi_1} = -\frac{1}{k_1}$

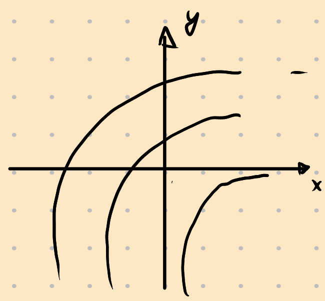
$k_1 k_2 = -1$ у $\perp$ прямых.

Пусть им. ур-е:

$y' = f(x, y)$

Ортогональные траектории:

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$



– интегральные кривые ур-я (основные траектории)

Пример

$y = Cx^2$ – семейство кривых. Найти ортогон. траектории

$C = \frac{y}{x^2}$

$0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}$

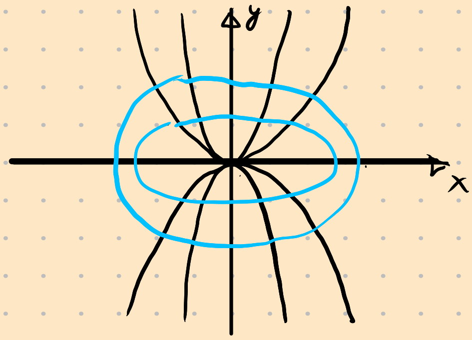
$y'x^2 = 2xy$

$y' = 2\frac{y}{x}$

Для ортог. кривых: $y' = -\frac{x}{2y}$

$2y\,dy + x\,dx = 0$

$y^2 + \frac{x^2}{2} = C$ – ур-е эллипсов



Однородные уравнения

Сводятся к ур-ю с разделяемыми переменными

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Замена: $y = x\,z(x)$

$y' = z + xz'$

$xz' + z = f(z)$

$z' + z - f(z) = 0 \quad \left(\frac{dz}{z - f(z)} + dx = 0\right)$

Ур-е, сводящееся к однородному

$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$

Замена: $x = \xi + x_0$, $y = \eta + y_0$

$$\eta' = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + \overbrace{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}^{=0\ (\text{в силу выбора } x_0, y_0)}}{a_2\xi + b_2\eta + \underbrace{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}_{=0}}\right)$$

Получим однородное ур-е

Ф № 117

$(y+2)\,dx = 2x + y - 4\,dy$

$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ – x_0, y_0

$x = \xi + 3 \qquad y = \eta - 2$

$\eta\,d\xi = (2\xi + \eta)\,d\eta$

$\frac{\eta}{\xi} = z$

$z\xi\,d\xi = (2\xi + z\xi)(z\,d\xi + \xi\,dz)$

$(z\xi - z(2\xi + z\xi))\,d\xi = \xi\cdot(2\xi + z\xi)\,dz$

$z\xi(1-2-z)\,d\xi = \xi^2(2+z)\,dz \quad \big|\ \xi = 0$ - не реш-е

$-z(1+z)\,d\xi = \xi(2+z)\,dz$

$-\frac{d\xi}{\xi} = \frac{2+z}{z(z+1)}\,dz$

$-\int\frac{d\xi}{\xi} = \int\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz$

$\frac{z^2}{z+1}\cdot\xi = C$

$\frac{\eta^2}{\eta+\xi} = C \Rightarrow \frac{(y+2)^2}{y+x-1} = C \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(y+2)^2 = C(y+x-1)\\ x+y=1\end{array}\right.$ (не теряем $x+y=1$)

Линейные ур-я I порядка

$y' + a(x)y = b(x)$ - неоднородное

Рас-им линейное однородное ур-е:

$y' + a(x)y = 0$

$\frac{dy}{y} + a(x)dx = 0$

$\ln|y| + \int a(x)dx = 0$

$y = C_0 e^{\int a(x)dx}$ ← одна первообр.

$y = C_0\cdot\varphi(x)$ - структура решения однородного ур-я; $\varphi(x)$ - частное решение

Метод вариации постоянной: (C_0 меняем на ф-ию)

Замена $y = C(x)\cdot\varphi(x)$ в неоднородном ур-ии:

$C'\varphi + C\varphi' + aC\varphi = b$

$C'\varphi + C\underbrace{(\varphi' + a\varphi)}_{=0\ (\varphi\text{-реш-е однор. ур-я})} = b$

$C'(x)\varphi(x) = b(x)$ - ур-е с разд. переменными

С 3.37

$x^2y' = 5xy + 6, \quad y(1) = 1$

Рас-им однородное: $x^2y' = 5xy$

$$\frac{dy}{y} = 5\frac{dx}{x}$$

$y = x^5 C_0$ $\quad \Big| \; y(x) = C_0(x)\, x^5$

$$x^2\left(C' x^5 + C\, 5x^4\right) = 5x\, C x^5 + 6$$

$C' = \dfrac{6}{x^7}$; $\quad C = -\dfrac{1}{x^6} + D$

$y = \left(-\dfrac{1}{x^6} + D\right)x^5 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{x} + Dx^5$ - реш-е

$y(1) = 1: \quad 1 = -1 + D \Rightarrow D = 2$

$$y = -\frac{1}{x} + 2x^5$$

№1

$xy' - 2y = 2x^4$

ОУ: $xy' - 2y = 0$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C$$

$$y = Cx^2$$

ВП: $y = C(x)\, x^2$

$$x\left[C' x^2 + 2Cx\right] - 2Cx^2 = 2x^4$$

$$C' x^3 = 2x^4$$

$$C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C$$

$$y = (x^2 + C)\,x^2 = x^4 + x^2 C$$

№2

Без ВП: $\quad xy' - 2y = 2x^4 \;\Big|\cdot x$

$$x^2y' - 2xy = 2x^5$$

$$\frac{x^2y' - 2xy}{x^4} = 2x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C \Rightarrow y = x^4 + Cx^2$$

- Опытные люди делают так: переставляют всё так, чтобы получилась какая-то произв. (без ВП)

- Можно переставлять y и x в дифф. форме:

$$(1+y^2)\,dx + (2xy-1)\,dy = 0$$

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = 1-2xy \quad \text{– лин. ур-е}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

ОУ: $\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$

$$x = \frac{C}{1+y^2}$$

ВП: $x = \frac{C(y)}{1+y^2}$ Ответ: $C(y) = y+C$, $x = \frac{y+C}{1+y^2}$

Уравнение Бернулли

$y' + a(x)y = b(x)y^n$, $n \in \mathbb{R}$ – приводится к линейному!

$n=0 \to$ ЛУ $\qquad n>0 \Rightarrow y=0$ – реш.

$n=1 \to$ ОЛУ $\qquad n<0 \Rightarrow y=0$ – не реш.

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$$

Замена: $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$$

Получим $(1-n)^{-1}z' + a(x)z = b(x)$ – ЛУ

№4

$y' - y + 2xy^3 = 0 \quad | \quad y=0$ – реш.

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$$

$z = \frac{1}{y^2} \qquad z' = -\frac{2}{y^3}y'$

$$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$$

$$2x = \frac{z'}{2} + z$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$$

ОУ: $\frac{dz}{dx} + 2z = 0$

$$\frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

ВП: $z = C(x)e^{-2x}$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x$$

$$C'(x) = 4xe^{2x}$$

$$C(x) = \int 4xe^{2x}dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$$

$$\frac{1}{y^2} = (2xe^{2x} - e^{2x} + C)\cdot e^{-2x}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y^2 = \left((2x-1) + Ce^{-2x}\right)^{-1} \\ y = 0 \end{array}\right.$

Уравнение Риккатти

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$$

Пусть y_0 - решение

$y = z + y_0$ z - новая неизв. ф-ия $\Rightarrow$ ур-е Бернулли

№5

$$x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0$$

$$y_0 = \frac{k}{x}$$

$$-\frac{x^2k}{x^2} - \frac{5xk}{x} + x^2\frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$$

$$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$$

$k = 2$, $k = 4$

Сделаем замену $y = z + \frac{2}{x}$:

$$x^2\cdot\left(z' - \frac{2}{x^2}\right) - 5x\left(z + \frac{2}{x}\right) + x^2\cdot\left(z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2}\right) + 8 = 0$$

$$x^2z' - zx + x^2z^2 = 0 \quad \Big| : x$$

$$xz' - z + xz^2 = 0$$

$$\frac{z'x - z}{z^2} = -x \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)' = x$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow \frac{x^2}{xy - 2} = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \frac{2}{x}$$

Уравнение в полных дифференциалах

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ - P и Q непр.

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y)$ - F непр. дифф. в $G \subset \mathbb{R}^2$

$\exists F$: $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

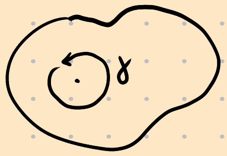
Реш-е: $F(x,y) = C$ (т.е. F - потенциал)

Пусть F - дважды непр. дифф в G:

Если $\exists P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{cases}$$ — должны быть равны! — необходимое усл-е наличия потенциала

Условие яв-ся достаточным, если обл. G односвязна.



G нет дырок!

№6

$$(1 + 3x^2 \ln y)\,dx + \left(3y^2 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0$$

$G = [y > 0]$ - односвязна

$\exists F: \dfrac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$

Можно угадать, но если нет:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 3x^2 \ln y \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \dfrac{x^3}{y} \end{cases} \xrightarrow[\text{по } x]{\text{интегрируем}} \quad F = x + x^3 \ln y + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C$$

$$F = x + x^3 \ln y + y^3$$

Интегрирующий множитель

Если потенциальности сразу нет:

$\mu P = \dfrac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ — надо решить сис-му - конечно, так никто не делает.

№7

$$(y - 3x^2y^3)\,dx - (x + x^3y^2)\,dy = 0$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - 9x^2y^2 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 3x^2y^2$ — не равны

$y\,dx - x\,dy - 3x^2y^3\,dx - x^3y^2\,dy = 0 \quad | \; y = 0$ - реш, $x = 0$ - реш

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 3x^2y\,dx - x^3\,dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x^3y) \Rightarrow \frac{x}{y} = x^3y + C; \quad y = 0; \quad x = 0.$$

Уравнения высшего порядка

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ – надо понизить порядок! коэф-т при $y^{(n)} \neq 0$ при реш!

Методы понижения порядка

1. Нет явного y! $y' = z$, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \to F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$

$xy'' + xy'^2 + y' = 0$, $y' = z$; $y = const$ – реш-е

$xz' + xz^2 + z = 0 \quad | x \neq 0$ для удобства

$x\frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0$, $\frac{1}{z} = u$

$-xu' + x + u = 0 \quad | : x^2$

$\frac{u - xu'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = \ln x + C$, $\frac{1}{zx} = \ln x + C$

$z = y' = \frac{1}{x(\ln x + C)}$ $\quad y = \int \frac{dx}{x(\ln x + C)} = \ln|\ln x + C| + C_1$ $\quad \left[\begin{array}{l} y = \ln|\ln x + C| + C_1 \\ y = const \end{array}\right.$

2. Ур-е без явного x

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$; y – новая незав. переменная

$y' = z(y)$ – новая ф-ия

$y'' = (y'_x)'_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x = z \cdot z'_y$

$y''' = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})'_y \, y'_x = (z \cdot z'_y)'_y \cdot y'_x = (z'^2_y + z \cdot z''_{yy}) z = z \cdot z'^2_y + z^2 z''_{yy}$

Пример

$yy'' = 2y'^2 - 4y^2y'^3$ $\quad y' = z(y)$ $\quad y'' = zz'$

$yzz' = 2z^2 - 4y^2z^3 \quad | : z$

$z = 0$ – реш-е

$y = C$

$yz' = 2z - 4y^2z^2 \quad | : z^2$

$\frac{y}{z^2}z' = \frac{2}{z} - 4y^2$ $\quad \frac{1}{z} = u$ $\quad u' = -\frac{1}{z^2}z'$

$-yu' = 2u - 4y^2$

ОУ: $2u + yu' = 0$ $\quad \ln|u| = -2\ln|y| + C$

$2u = -\frac{du}{dy}y$ $\quad u = \frac{C}{y^2}$

$\frac{du}{u} = -2\frac{dy}{y}$

ВП: $u = \frac{C(y)}{y^2}$

$$\frac{-C'(y)y^2 + \cancel{2yC(y)}}{y^3} = \cancel{2\frac{C(y)}{y^2}} - 4y^2$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + C \Rightarrow u = \frac{y^4+C}{y^2} \Rightarrow z = \frac{y^2}{y^4+C}$$

$$y' = \frac{y^2}{y^4+C}$$

$$\left(y^2 + \frac{C}{y^2}\right)dy = dx$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{C}{y} = x + C_1$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \frac{y^3}{3} + \frac{C}{y} = x + C_1 \\ y = C \end{array}\right.$

Задача Коши для ур-я n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

2 способа решения

1. Найти общее реш-е с $C_1 \dots C_n$, подставить в нач. усл-я, получить сис-му из n ур-ий с n неизв.
2. Находить константы постепенно, после каждого понижения порядка

Пример

$yy'' - y'^2 = y^4$ $\qquad y(1) = 2,\quad y'(1) = -4$

$yzz' - z^2 = y^4$ $\qquad y' = z(y)$

$y \cdot \frac{u'}{2} - u = y^4$ $\qquad u = z^2,\quad u' = 2zz'$

ОУ: $y\frac{du}{dy} = 2u$ $\qquad$ ВП: $u = C(y) \cdot y^2$

$\frac{du}{u} = \frac{2dy}{y}$ $\qquad \frac{y}{2} \cdot \left(C'(y) \cdot y^2 + \cancel{2yC(y)}\right) - \cancel{C(y)y^2} = y^4$

$u = y^2 C$ $\qquad C'(y) = 2y$

$C(y) = y^2 + C$

$u = y^4 + Cy^2$

$z(2) = -4$

$16 = 16 + C4 \Rightarrow C = 0$

$z^2 = y^4$

$y' = \pm y^2$

$y' < 0$ в т. $x = 1$

$y' = -y^2$

$\frac{dy}{y^2} = -dx$

$\frac{1}{y} = x + C_1$

$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$

Отв.: $\frac{1}{y} = x - \frac{1}{2}$

3 Ур-е, однородное относ. $y, y', \dots, y^{(n)}$

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ - однородный многочлен относ. $y, y', \dots, y^{(n)}$ с коэф-тами $f_i(x)$

$y = 0$ - всегда реш-е!

Пример 1

$$(\sin x + 1) y^2 y' y''^3 - \sqrt{1-x^2}\, y^4 y''^2 + \operatorname{arctg} x\, y y' y'' y'''^3 = 0 \quad \Big| \quad y = 0 \text{ - реш-е}$$

$\frac{y'}{y} = z \qquad y' = zy \qquad y'' = y(z' + y'z) = y(z^2 + z')$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

После подстановки в ур-е - сокр-е на y

Пример 2

$yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0 \qquad y = 0$ реш-е

$z = \frac{y'}{y} \qquad y' = zy \qquad y'' = y(z^2 + z')$

$y^2(z^2 + z') - z^2 y^2 + y^2 \sin x = 0$

$z^2 + z' - z^2 + \sin x = 0$

$\frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow z = \cos x + C = \frac{y'}{y}$

$\ln|y| = \sin x + Cx + C_1$

$y = C_1 e^{\sin x + Cx}$

Задача Коши

$$2x\,y^2 y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2 \qquad y(1) = y'(1) = -1$$

$y = 0$ – реш-е, но не реш-е задачи Коши

$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z')$

$2x\,y^3 \cdot (z^2 + z') - 2xy^3z^2 + 2xy^3z^3 = y^3 z$ – должен сократиться y!

$2xz^2 + 2xz' - 2xz^2 + 2xz^3 = z$ – должно что-то уйти!

$2xz' + 2xz^3 = z$ $\Big|$ $z = 0$ – не реш-е Коши: $z(1) = 1$; $: z^3$

$$2x\frac{z'}{z^3} + 2x z = \frac{1}{z^2} \qquad u = \frac{1}{z^2} \quad u' = -2\frac{z'}{z^3}$$

$-xu' + 2x = u$

$(u + xu') = 2x$

$(xu)' = 2x$

$xu = x^2 + C \qquad u(1) = 1$

$1 - 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

$u = x$

$z^2 = \frac{1}{x}$

$z = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = 2\sqrt{x} + C$$

$0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$

$\ln|y| = 2\sqrt{x} - 2$

$|y| = e^{2\sqrt{x} - 2}$

$y = -e^{2\sqrt{x} - 2}, \qquad y(1) = -1 \Rightarrow y < 0$

4 Обобщённая однородность

Пусть $\exists k \in \mathbb{R}$: при замене x на λx, y на $\lambda^k y$, y' на $\lambda^{k-1} y'$, …, $y^{(n)}$ на $\lambda^{k-n} y^{(n)}$, то всё связанное с λ сокращается (ур-е не изменится)

Введём новую незав. пер. t и ф-ию $z(t)$:

$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0, \\ -e^t, & x < 0 \end{cases} \qquad y = z e^{kt} \quad (z x^k)$$

Тогда ур-е не будет содержать явно t. (п.2)

Пример (7.65 а, б)

$$x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0 \qquad y(1) = -1 \qquad y'(1) = 1$$

$$x \to \lambda x \quad y \to \lambda^k y \quad y' \to \lambda^{k-1} y' \quad y'' \to \lambda^{k-2} y''$$

$$\lambda^2 x^2 \lambda^{k-2} y'' + 2\lambda^2 x^2 \lambda^{2k-1} yy' + 2\lambda x \lambda^{2k} y - 2\lambda^k y = 0$$

$$2 + k - 2 = 2 + 2k - 1 = 1 + 2k = k$$

$$k = 2k + 1 = 2k + 1 = k$$

$$k = -1$$

$$x = e^t, \quad y = ze^{-t}$$

y, y'_x, y''_{xx} выр. через z, z'_t, z''_{tt}

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'e^{-t} - ze^{-t}}{e^t} = e^{-2t}(z' - z)$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(z'' - z')e^{-2t} - 2(z' - z)e^{-2t}}{e^t} = e^{-3t} \cdot (z'' - z' - 2z' + 2z) = e^{-3t}(z'' - 3z' + 2z)$$

$$\cancel{e^{2t} \cdot e^{-3t}} \cdot (z'' - 3z' + 2z) + 2\cancel{e^{2t}} \cdot z \cdot \cancel{e^{-t}} \cdot \cancel{e^{-2t}}(z' - z) + 2\cancel{e^t} \cdot z^2 \cdot \cancel{e^{-2t}} - 2z\cancel{e^{-t}} = 0$$

$$z'' - 3z' + 2z + 2zz' - 2z^2 + 2z^2 - 2z = 0$$

$$z'' + z'(2z - 3) = 0 \qquad x = 1, \; y = -1, \; y' = 1 \Rightarrow t = 0, \; z = -1, \; z' = 0$$

$z = -1$ – реш-е задачи Коши! И по т. о задаче Коши оно единственно.

Теорема о существовании и единственности реш-я задачи Коши

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

f непр. дифф. в окр-ти $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Тогда реш-е з. Коши $(*)$ + усл-я $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

сущ-ет и единственно на нек-ом $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$