Фомичёв Александр Владимирович

Литература

Чёрный список: лекции Фомичёва, интернет

Белый список: Журавлёв; Маркеев; Гантмахер (~ конец сема); Болотенко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома $\mathbb{R}^3$ – все объекты – в Евклидовом пр-ве $\mathbb{R}^3$.
2. $\exists$ движение: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ (в $\mathbb{R}$ – время)
3. $\exists$ мат. точка: $(m, \vec{r})$, $m = const > 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4. $\exists$ взаимодействие: $\forall\ (m_1, \vec{r}_1), (m_2, r_2) \to \exists\ \vec{F}$ – сила: $F \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

   $\vec{F}$ $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ $-\vec{F}$

   $(m_1, \vec{r}_1)$ $(m_2, \vec{r}_2)$
5. $\exists$ сис-мы координат и способ параметризации времени, такие что

   $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

   Такие сис-мы наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.:
$$\begin{cases} F_i\left(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}\right) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

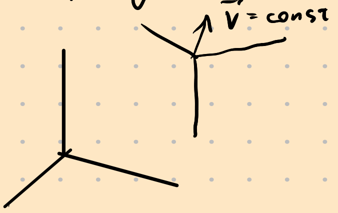
$$t = t(t', q'), \quad q = q(t', q')$$

$$F_i\left(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}\right) = 0 \text{ – те же ф-ии!}$$

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правила составления ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относ. преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{V} t + A t, & A \text{ – ортог. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

← преобр. (группа) Галилея

$\vec{r}_0, \vec{V}, A, \tau = const$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longmapsto m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}$$

Индексные обозначения

① $\vec{r} \to r^i, \quad i = 1 \ldots 3$

② $A \to a_{ij}$

a_j

a^{ij}

немой индекс

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{3} a^i b^i \equiv a^i b^i$ (правило Эйнштейна)

$A\vec{r} = a_{ij}\, r^j$

бегущий индекс

④ $a, \ldots, h$ – фиксирующие индексы

$x^a b^a$ – эл-т с номером a; без суммирования!

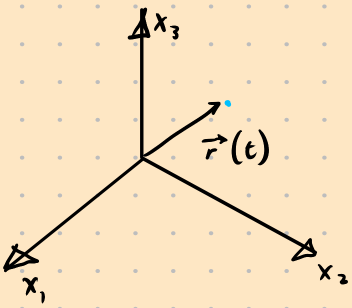
⑤ $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \qquad \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$

Пр. $\quad df = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k}\, dx^k$

Кинематика точки

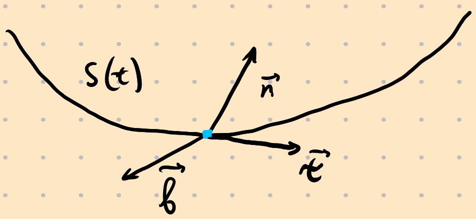
Декартовы координаты



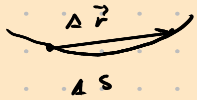
$$\vec r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} \qquad V = \dot{\vec r} = \begin{bmatrix} \dot r^1 \\ \dot r^2 \\ \dot r^3 \end{bmatrix} \text{ — скорость}$$

$$\vec w = \ddot{\vec r} = \dot{\vec V} = \begin{bmatrix} \ddot r^1 \\ \ddot r^2 \\ \ddot r^3 \end{bmatrix} \text{ — ускорение}$$

Сопровождающий трёхгранник Френе

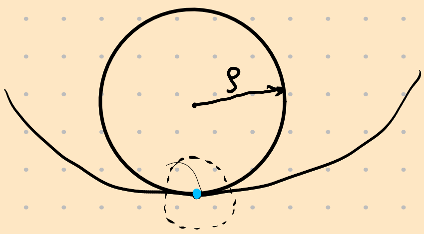


$$\vec r = \vec r(s(t))$$



$$\vec V = \underbrace{\vec r_{,s}}_{\vec\tau}\, \dot s = \vec\tau V$$

$$\vec w = \vec\tau_{,s} V^2 + \vec\tau \dot V$$

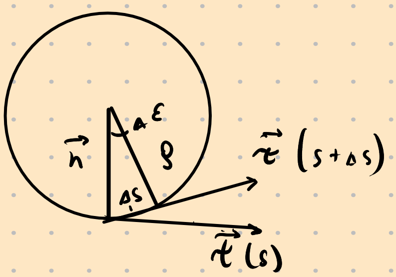


$$\Delta s \simeq \rho \Delta\varepsilon$$

$$\Delta\vec\tau \simeq \Delta\varepsilon \vec n = \frac{\Delta s}{\rho}\vec n$$

$$\vec\tau_{,s} = \frac{\vec n}{\rho} \Rightarrow \vec w = \underbrace{\dot V \vec\tau}_{w_\tau} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho}\vec n}_{w_n}$$

w_τ танген. $\quad$ w_n нормальное

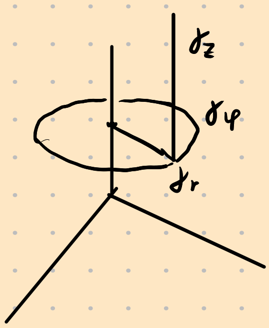


Криволинейные координаты

$$\vec r = \vec r(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} \text{ — криволинейные (обобщённые) координаты}$$

$\det[r^i_{,j}] \neq 0!$ Взаимно-однознач. соотв.

$$\vec r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} \text{ — цилиндрические координаты}$$



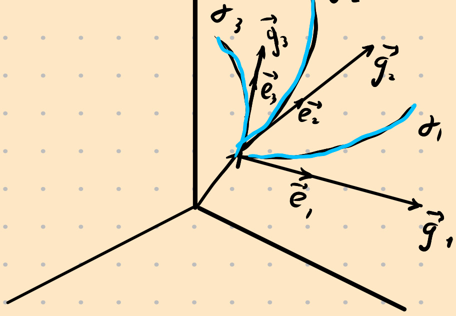
$$\begin{cases} q^i \text{ - var} \\ q^{j\neq i} \text{ - fix} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{— } \gamma_i \text{ — координатные линии}$$

$H_k = |\vec{g}_k|$ – к-т Ламе

$H_k = \sqrt{(r^1_{,k})^2 + (r^2_{,k})^2 + (r^3_{,k})^2}$

$\vec{e}_\alpha = \dfrac{\vec{g}_\alpha}{H_\alpha}$ – Орты (норм. векторы) лок. базиса

$|\vec{e}_\alpha| = 1$



Скорость в кривол. коорд.

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}\dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^k}_{\text{составляющая}}\vec{g}_k$

① $\vec{v} = \sum \underbrace{H_k\,\dot{q}^k}_{\text{составляющая}}\,\vec{e}_k$

$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik}\text{ - метрич. тензор}} \cdot \dot{q}^i \cdot \dot{q}^k = g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k$

② $v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$

Если $\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$:

$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot{q}^i)^2$

Ускорение в кривол. сис-ме

$\vec{w} \cdot \vec{g}_k = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k})^{\cdot} - \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k}$

Произв. по q_k ↔ точки:

$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec{r}_{,ki}\,\dot{q}^i$ $\quad \dfrac{\partial}{\partial q^k}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,i}\,\dot{q}^i \qquad \dot{\vec{r}}_{,k} = \vec{r}_{,ki}\,\dot{q}^i$

! $\;{}^{\cdot} = \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}$

$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \left(\dfrac{v^2}{2}\right)_{,k} \qquad (\text{т.к. } v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec{r}}_{,\dot{k}}}_{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}^k}} = \vec{r}_{,k}$

$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,\dot{k}} = (v^2/2)_{,\dot{k}}$

(3) $\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,a}$

(4) $\vec{w}\cdot\vec{e}_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - (v^2/2)_{,a}\right]$

Оператор Эйлера – Лагранжа $\quad \xi_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$

$\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right)$

Геометрический смысл H_k и их вычисление

$q^a \to q^a + dq^a$ – только одна комп.

$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a}\cdot dq^a$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad |\cdot\vec{g}_k$ $\qquad T = \frac{mv^2}{2}$ – кин. энергия

$m\,\xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{g}_k = Q_k$ – обобщённая сила

$\xi_k(T) = Q_k$

(6) $\frac{d}{dt}T_{,\dot{k}} - T_{,k} = Q_k$

Для базиса $\vec{e}_k$: $\quad \frac{1}{H_a}\,\xi_a(T) = \vec{F}\vec{e}_a$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ – зависимость $\qquad q(q')$ – замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot{q}^i = \underbrace{q^i_{,i'}}_{\text{матрица Якоби}}\dot{q}^{i'}$ – контравариантный вектор (набор чисел, к-рый при смене базиса ведёт себя вот так) (тензор I ранга)

$\dot{q} = J\dot{q}'$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ – скал. ф-ия

$f(q(q'))$ $\qquad f_{,i'} = f_{,i}\cdot q^i_{,i'}$ – градиент меняется уже не так! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор – тензор I ранга)

$\underbrace{\nabla' f}_{\text{строка}} = \nabla f J$ $\qquad$ $\nabla' f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже столбец!}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$

Разница (между ко- и контра-) теряется, если преобр-е ортогонально $\left((J^T)^{-1} = J\right)$

Метрический тензор

$\vec{g}_k = \vec{r}_{,k}$ $\qquad$ $\vec{r}(q(q'))$ – замена

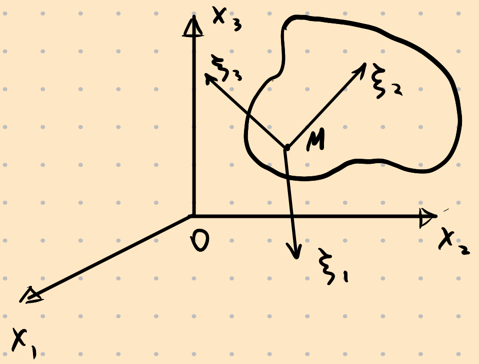
$g_{k'} = \vec{r}_{,k} \cdot q^k_{,k'} = \vec{g}_k \, q^k_{,k'}$ – получается, $\vec{g}_k$ – ковариантный вектор

Метрический тензор: $\vec{v} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow v^2 = \underbrace{g_i g_k}\, \dot{q}^i \dot{q}^k$, $g_{ik} = g_i g_k$ – метрич. тензор!

$g_{i'k'} = q^i_{,i'} \, q^k_{,k'} \, g_{ik}$ – ковариантный тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Кинематика твёрдого тела

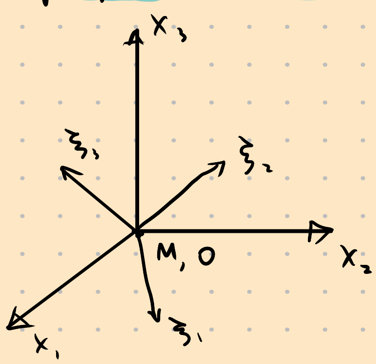
Твёрдое тело – совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



$M \in$ телу – полюс ТТ (твёрдого тела)

Движение твёрдого тела – это движение полюса и движение ТТ относ. полюса (вращение).

Вращение. Углы конечного вращения



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

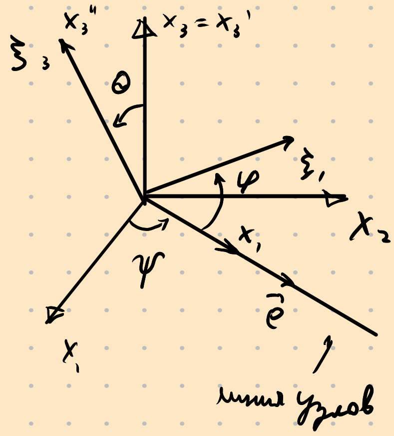
- Углы Эйлера

$\exists$ (пусть) $\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем сис-му координат Ox:

$$X \xrightarrow[3\,(\text{относ. } x^3)]{\psi} X' \xrightarrow[1']{\theta} X'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



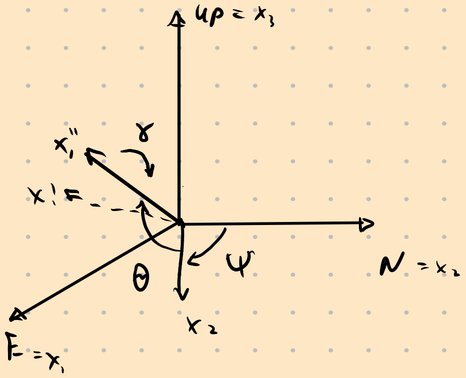
ψ – угол прецессии

θ – угол нутации

φ – угол собственного вращения

Параметры ψ, θ и φ наход. во вз.-одн. соот. с положением твёрдого тела везде кроме полож. $\theta = \{0, \pi\}$

- Самолётные (корабельные) углы



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ – курс

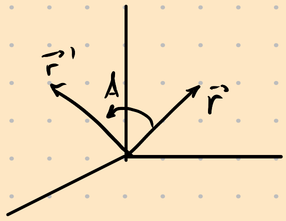
θ – тангаж

γ – крен

Вырождение при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

Любая сис-ма углов конечного вращения будет иметь вырождение.

Ортогональная матрица



$$\vec r' = A\vec r$$

$$|\vec r'|^2 = |\vec r|^2 \quad \forall \vec r$$

$$|\vec r'|^2 = \vec r'^T \vec r' = \vec r^T A^T A \vec r = |\vec r|^2 = \vec r^T \cdot \vec r \quad \forall \vec r \Rightarrow A^T A = 1 \text{ —}$$

Определение ортог. матрицы

Св-ва

1. Теорема Бине-Коши: $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

$+$ поворот

$-$ зеркальный поворот

2. $A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

3. $\forall A, B$ - ортог. $\rightarrow C = AB$ - ортогональная

$$C^T C = B^T \cdot A^T \cdot AB = E$$

4. Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

① $\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

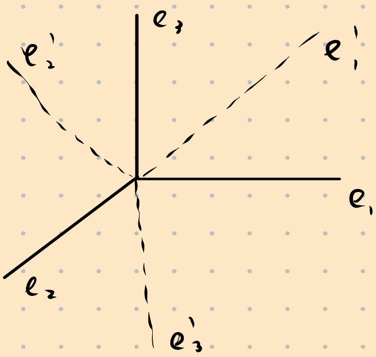
③ $\exists E \in G: \forall A \in G \rightarrow AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \rightarrow \exists A^{-1} \in G: A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пусть $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = E$

$SO(3)$ - спец. орт. группа; $\forall A \in SO(3) \rightarrow |A| = 1$ (группа поворотов)

5. $SO(3)$ - основная мат. модель твёрдого тела с неподвижной точкой.



$$\vec e_{i'} = a^i_{i'} \vec e_i$$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{1'} & \\ a^2_{1'} & \dots \\ a^3_{1'} & \end{pmatrix} = [\,[\vec e_{i'}]\,]_e$$

$[e_{1'}]_e$

$$\vec e_{i'} \cdot \vec e_j = a^i_{i'} \vec e_i \vec e_j = a^j_{i'} \overset{j \to i}{\Rightarrow} a^i_{i'} = \cos(\widehat{e_i, e_{i'}})$$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однознач. соответствие между положением твёрдого тела и $A \in SO(3)$.

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ $\quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$ => 6 независимых формул =>

=> матрицы из $SO(3)$ – трёхмерное многообразие в 9-мерном пр-ве матриц

⑥ $a^i_{i'} = \Delta^i_{i'}$ $\quad A^{-1} = \dfrac{[\Delta^i_{i'}]^T}{\underbrace{|A|}_{=1}} = A^T$ => ЧТД

эл-т A $\quad$ ал. дополнение

Собственные векторы и собственные числа ортогональных матриц

$A\vec{r} = \lambda \vec{r}$ => $|\lambda E - A| = 0$

$\operatorname{tr} A = a^i_i$

$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$ => $\exists \vec{r}_1 : A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$ – инвариантный вектор

Докажем, что $|\lambda_a| = 1$

комплексное сопр-е

$A\vec{r}_a = \lambda_a \vec{r}_a \,\Big|\cdot$ (сопр-е)$^+$ $\quad A^+ = \overline{A^T}$ – эрмитово сопряжение

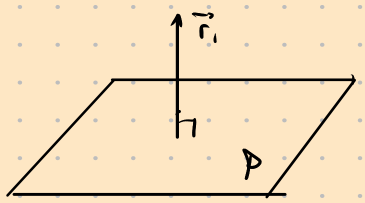
$\vec{r}^{\,+}_a \underbrace{A^+ A}_{E} \vec{r}_a = \underbrace{\lambda^+_a \lambda_a}_{|\lambda_a|^2} \cdot \vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a$ $\qquad$ Если $\vec{r}_a = \vec{p} + i\vec{a}$, то $\vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a = \vec{p}^{\,T} p + \vec{a}^{\,T} a = |\vec{r}_a|^2 > 0$

$|\vec{r}_a|^2 = |\lambda_a|^2 \cdot |\vec{r}_a|^2$ => $|\lambda_a| = 1$

$\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi = \dfrac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \pm i\sqrt{1 - \dfrac{(\operatorname{tr} A - 1)^2}{4}}$

$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i\vec{q}$ $\qquad \{\vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q}\}$ – правый ОНБ

Инвар. подпр-во A:



$P \perp \vec{r}_1$, $\;P$ – инвар. подпр-во A.

$\exists\, \vec{r} \in P$ $\qquad A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$ => $A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$

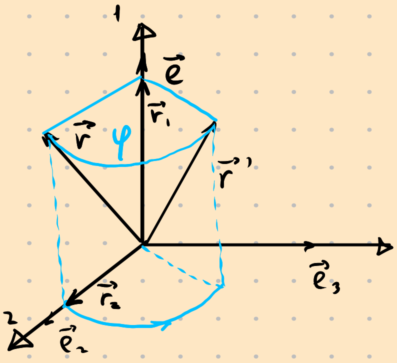
$\underbrace{(A\vec{r})^T \vec{r}_1 = \vec{r}^{\,T} \underbrace{A^T \vec{r}_1}_{\vec{r}_1}}_{0}$ => $A\vec{r} \in P$

ЧТД

Теорема Эйлера о конечных поворотах

$\forall$ e^* положения тв. тела с неподв. точкой $\exists\, \vec{e}$ и угол φ конечн. поворота, совмещ. положение тела (в силу существования $\vec{r}_1$)

Связь ортогональной матрицы и пар-ов Эйлерова поворота



Выберем $\vec e$ как ось поворота, $\vec e_2 \perp \vec e$ лежит в плоскости с $\vec r$ и $\vec e$.

$\vec r$ поворачивается на φ относ. $\vec e$ в $\vec r\,'$.

$\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$, где $\vec r_1 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$\vec r_2 = \vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$$\vec e_2 = \frac{\vec r_2}{|\vec r_2|}$$

$$\vec e_3 = \vec e_1 \times \vec e_2 = \frac{\vec e \times \vec r}{|\vec r_2|}$$

$$\vec r\,' = \vec r_1 + r_2 \cos\varphi\, \vec e_2 + r_2 \sin\varphi\, \vec e_3 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \cdot \vec e + (\vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e)\cos\varphi + \vec e \times \vec r \sin\varphi =$$

$$= (E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^{T})\vec r$$

$\hat e \vec r = \vec e \times \vec r$; $\hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^2 \\ -e^2 & e^2 & 0 \end{bmatrix}$ (1) $\quad \vec e \vec e^{T} = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1 e^2 & e^1 e^3 \\ e^2 e^1 & \dots & \\ & & \end{bmatrix}$

Получим $\boxed{A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^{T}}$ (2) — причём инв. относ. базиса!

$\vec e \times (\vec e \times \vec r) = \langle \vec e\, \vec r \rangle \vec e - \vec r$

$\hat e^2 \vec r = (ee^T - E)\vec r$

$$\boxed{A = E + \hat e \sin\varphi + \hat e^2 (1-\cos\varphi)}$$

Пусть $\vec \varphi = \vec e \varphi$ — вектор Эйлера (условный вектор — сложение не работает)

* $\vec\varphi \mapsto \hat\varphi$ — соотв. оператор вида (1).

Тогда можно пок-ть, что $A = e^{\hat\varphi}$ (ряд Тейлора)

Выражение парам. Эйл. поворота через эл-ты $A \in SO(3)$

Из (2) $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\, A = \underbrace{3\cos\varphi}_{E\cos\varphi} + \underbrace{1-\cos\varphi}_{(1-\cos\varphi)\vec e \vec e^{T}}$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{tr}\, A - 1}{2}$$

$A = [a^i_j]$

$a^3_2 - a^2_3 = 2e^1 \sin\varphi \Rightarrow e^1 = \dfrac{a^3_2 - a^2_3}{2\sin\varphi} \quad e^2 = \dfrac{a^1_3 - a^3_1}{2\sin\varphi} \quad e^3 = \dfrac{a^2_1 - a^1_2}{2\sin\varphi}$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$; полагаем, что $\varphi \in [0;\pi]$! Это делает $\vec e$ таким, что полож. поворот — это против часовой стрелки. Поворот в обр. сторону — берётся $-\vec e$.

Оператор малого поворота. Угловая скорость твёрдого тела

Если $\varphi \ll 1$, то

$$A \simeq E + \hat{\varphi}$$ – оператор малого поворота

Это верно и для $A \in SO(n)$:

$$A(t) \in SO(n); \quad A(0) = E$$

$$A^T A = E \;\Big|\; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$\dot{A}^T \underbrace{A}_{E} + \underbrace{A^T}_{E} \dot{A} \Big|_{t=0} = 0$$

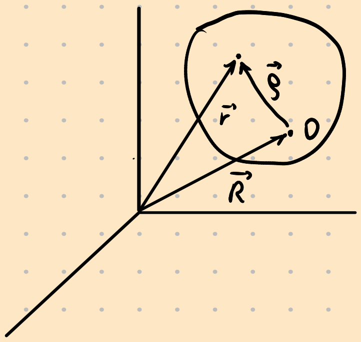
$$\dot{A}^T(0) = -\underbrace{\dot{A}(0)}_{\hat{\omega}} \Rightarrow \dot{A}(0) \text{ – кососимметрическая} \Rightarrow A \simeq E + \Delta t\, \hat{\omega}$$

Угловая скорость

$$\exists\, \Delta\vec{\varphi} = \vec{e}\, \Delta\varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$ – угловая скорость

Распределение скоростей и ускорений в твёрдом теле



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\vec{V}_0} + \dot{\vec{\rho}}$$

$$\rho(t + \Delta t) \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\vec{\rho}(t)$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t} \vec{\rho} = \hat{\omega}\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

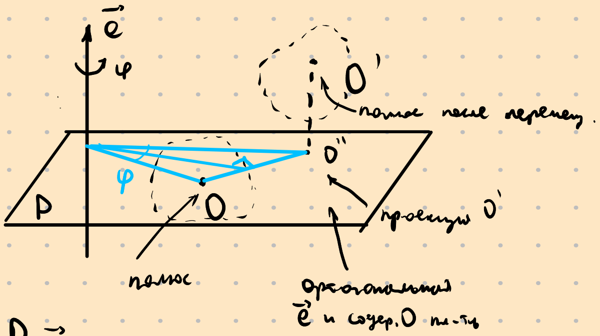
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$ – ф-ла Эйлера

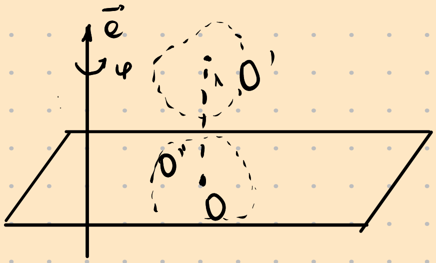
$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$ – ф-ла Ривальса

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Кинематический винт твёрдого тела

Пользуемся эйлеровыми поворотами





Винтовое движение

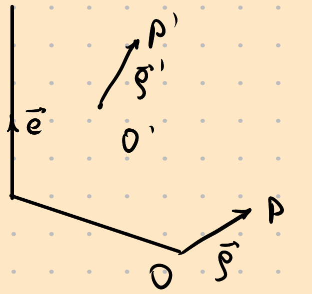
$P \perp \vec e$

Любое движение тела эквивалентно винтовому перемещению.

Перемещ-ем тело на рас-е $\Delta l = \vec{OO'} \cdot \vec e$ и повернуть на φ.

Теорема Шаля: $\forall$ перемещ-е тв. тела эквивалентно винтовому перемещению.

Линейная часть перемещ. не зависит от выбора полюса:



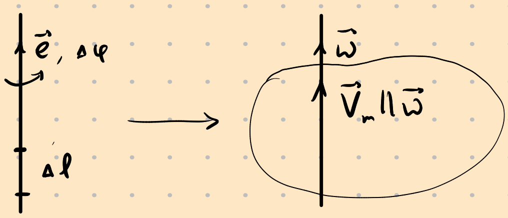
$$\vec\rho\,' = A\vec\rho$$

$$\vec\rho\,' \cdot \vec e = \vec\rho\,'^{T}\vec e = (A\vec\rho)^T \vec e = \vec\rho^{\,T} \underbrace{A^T \vec e}_{\vec e} = \vec\rho^{\,T} \vec e$$

Проекция $\vec\rho$ на $\vec e$ не меняется.

Если $\vec\rho = \vec{OO'}$ – не важно, как выбрать O, $\vec{OO'} \cdot \vec e = const$.

Рассм. движ-е тела за время Δt



$$\vec V_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec\varphi}{\Delta t}$$

Тело совершает мгновенное винтовое перемещение.

Ось кинематического винта

ГМТ: $\vec V = \vec V_0 + \omega \times \rho = \lambda \vec\omega$

$\underbrace{\vec\omega \cdot \vec V}_{\text{не зав. от полюса}} = \vec\omega \cdot \vec V_0 = \lambda \omega^2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\vec V_0 \cdot \vec\omega}{\omega^2}$ – кинемат. инвариант

Раскроем покомпонентно:

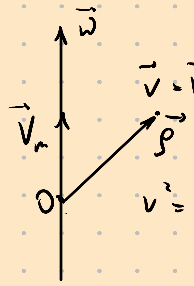
$$\begin{cases} V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{0y} + \ldots = \lambda \omega_y \\ V_{0z} + \ldots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{V_{0y} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{0z} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}}$$ – выражение оси кинемат. винта

Найти кинемат. винт $\Leftrightarrow$ найти ω, уравнение оси, V_m.

$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Причём V_m – мин. скорость в тв. теле.

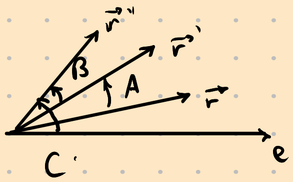


$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$v^2 = v_m^2 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2$$

Сложение поворотов

1. Активные повороты



$$\vec{r}' = A\vec{r} \qquad \vec{r}'' = B\vec{r}' = BA\vec{r}$$

$$C = BA$$

n поворотов: $C = A_n A_{n-1} \ldots A_1$

2. Пассивные повороты