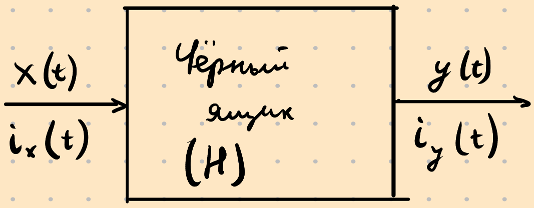
Филатов Иван Васильевич

Введение



- Все ящики не описать
- Рас-иваем только линейные и стационарные

Линейность: $\left.\begin{array}{l} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Стационарность: $x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t+\Delta t) \to y(t+\Delta t)$

Чёрный ящик описывается:

- схемой
- набором параметров H

Любая сис-ма, составленная из RLC, яв-ся линейной и стационарной.

Топологические эл-ты

Ветвь - участок эл. цепи, вдоль к-рого протекает один и тот же I. Может состоять из ≥ 1 идеализированных двухполюсника.

Узел - место соединения ветвей

Неустранимый - > 2 ветвей   Устранимый - 2 ветви

Контур - любой замкнутый путь, проход. по неск-им ветвям цепи. Характериз. направлением обхода, каждая ветвь/узел проход. 1 раз

Относ. них можно записать:

Компонентные ур-я - свойства цепи, опред. её компонентами

Топологические ур-я - свойства цепи, опред. только её топологией

Правило Кирхгофа

- Закон сохр-я заряда
- Провода не накапливают заряд (узлы)

I закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных знач-ий токов всех ветвей, подключ. к каждому из узлов в любой момент времени, равна 0.

$\sum_k i_k = 0$.

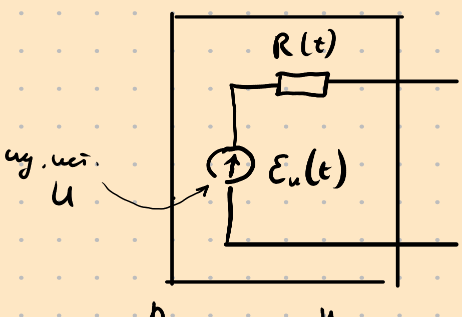
- Потенциальность эл. поля
- Консервативность эл. сил
- Потоки вектора $\vec{B}$ во времени в схеме не изменяются (не считая особых эл-ов)

II закон Кирхгофа

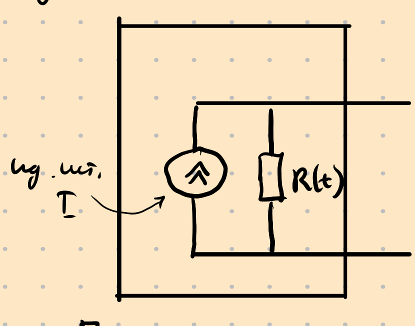
Алг. сумма мгновенных знач-ий напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, равна 0.

Теорема об эквивалентном генераторе

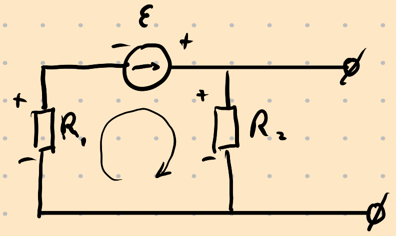
Ток произвольной ветви линейной эл. цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к к-му подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линеаризированным источником энергии, к-рый может быть представлен последовательной (Тевенин) или параллельной (Нортон) схемой замещения. При этом ЭДС идеального источника напряжения равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника, ток идеального источника тока равен току КЗ автономного двухполюсника, а внутреннее сопротивление и проводимость экв. источника равны соотв. комплексным входным сопрот. и проводимости автономного двухполюсника.



Парал. - Нортон



Послед. - Тевенин



$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}; \quad U_{xx} = -I R_2 = -\frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2}$$

U_{xx} — холостого хода

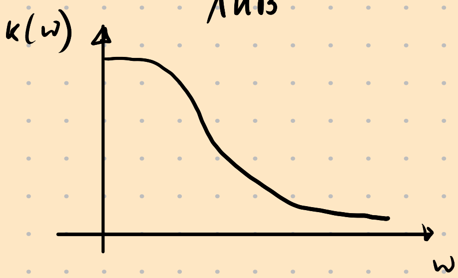
Заменяем идеализированный ист. ЭДС на перемычку или идеализированный ист. тока на разрыв цепи, считаем сопротивление схемы, получаем выходное сопротивление генератора.

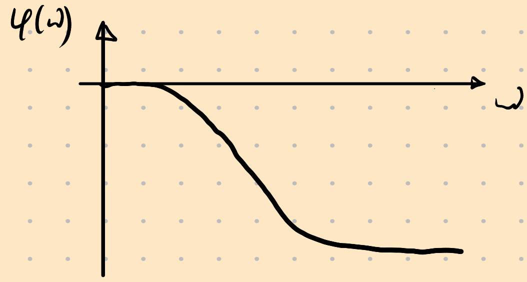
Это работает только с Независимыми источника. Для зависимых придётся составлять сис-му лин. ур-ий (разберись с этим)

Частотный анализ характеристик цепей

$I\cos(\omega t) \to$ $\boxed{\text{линейный четырёхполюсник}}$ $\to k(\omega)\cdot\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

ЛИВ



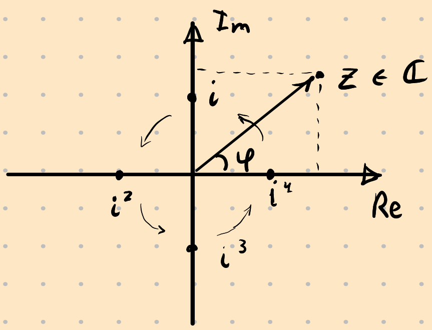


$k(\omega)$ - АЧХ

$\varphi(\omega)$ - ФЧХ

Самое полное описание схемы!

Тригонометрия неудобна - переходим к комплексным



$$z = |z|\cos\arg z + i|z|\sin\arg z \quad (\varphi = \arg z)$$

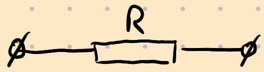
$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

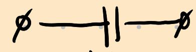
$$z = |z|e^{i\arg z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$\cos\omega t + i\sin\omega t \to$ $\boxed{\text{ЛИВ}}$ $\to k(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (\dots)i\sin(\dots)$

① 

$I = \frac{U}{R}$ $\quad \tilde I = \frac{\tilde U}{R}$

② 

$I = C\frac{dU}{dt}$ $\quad \tilde I = C\frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C\tilde U = \frac{\tilde U}{\frac{1}{j\omega C}}$ импеданс

③ 

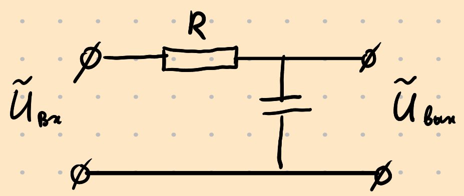
$U = L\frac{dI}{dt}$ $\quad \tilde U = j\omega L\tilde I$, $\tilde I = \frac{\tilde U}{j\omega L}$

Импеданс – комплексное сопротивление (Z) $j = i$ в радиотехнике

Комплексная проводимость – Y

Линейные цепи 1 порядка

① Интегрирующая RC – цепь

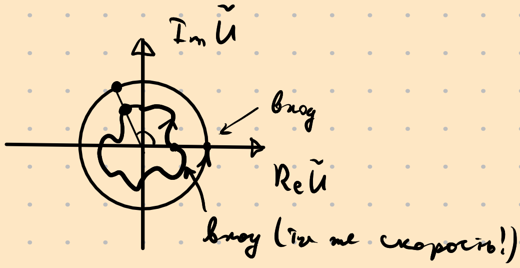


$$\tilde I = \frac{\tilde U_{вх}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \qquad \tilde U_{вых} = \tilde I \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde U_{вх}}{j\omega RC + 1}$$

$$\tilde U_{вых} = \frac{\tilde U_{вх}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Что будет, если на вход подать $\cos\omega t$?

$$U_{вых} = Re(\tilde U_{вых}) = (\cos\omega t + \sin\omega t\cdot\omega RC)\cdot(1 + \omega^2R^2C^2)^{-1}$$

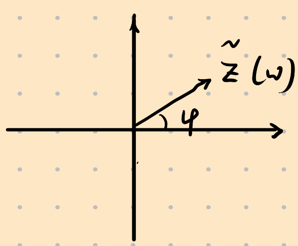


Аналитический сигнал: $\cos\omega t + i\sin\omega t$

$$K(\omega) = \frac{\tilde U_{вых}}{\tilde U_{вх}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2R^2C^2}$$

$$\frac{\tilde U_{вых}}{\tilde U_{вх}} = \frac{A_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0}\cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0}e^{j\varphi}$$

$\Downarrow$

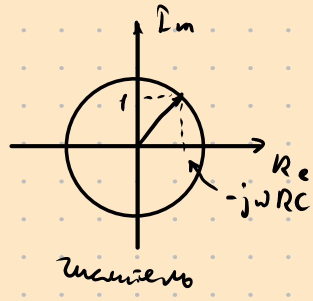


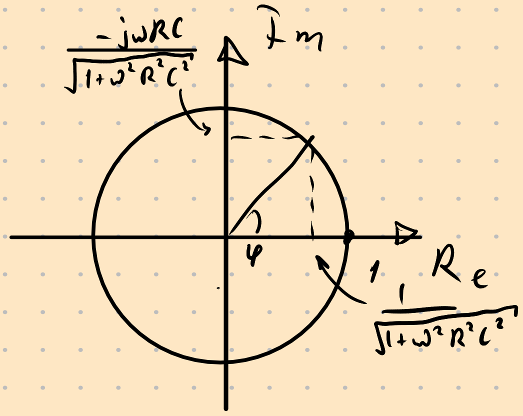
Получаем точку Z – сдвиг фаз – аргумент, модуль – соотношение амплитуд

Чтобы найти их, нужно из $K(\omega)$ выделить всю действ. часть и всю комплексную; комплексная часть должна иметь модуль 1 (это $e^{j\varphi}$).

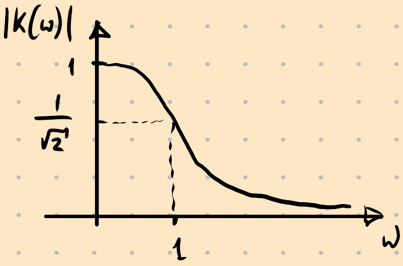
$$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2R^2C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}}}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2R^2C^2)^{-1/2}$$

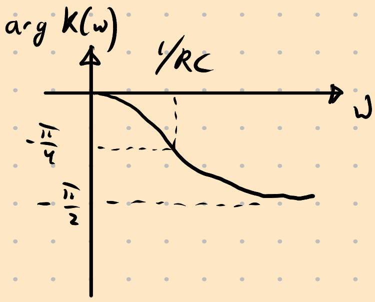
$$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}$$



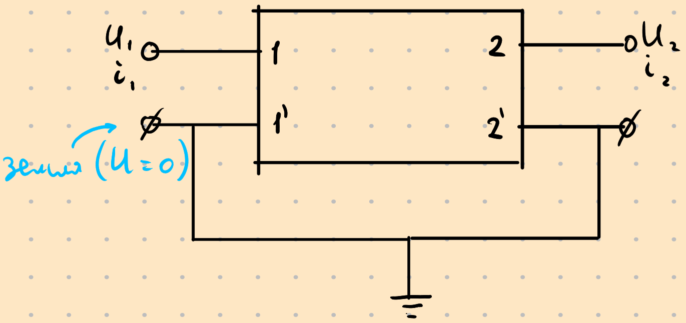


$$\arg K = \varphi = -\operatorname{arctg} \omega RC$$





Линейный четырёхполюсник

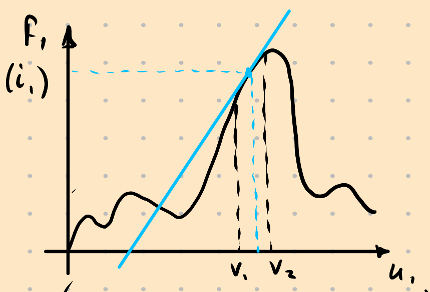


- U_1, U_2 - относительно земли
- Не накапливает заряд
- По выходам земли течёт неизвестно какой ток
- Выбрать незав. переменные (их 2) можно ∞ числом способов (выбор плоскости в 4х мерном пространстве) - любые 2 ЛК U_1, U_2, i_1 и i_2.

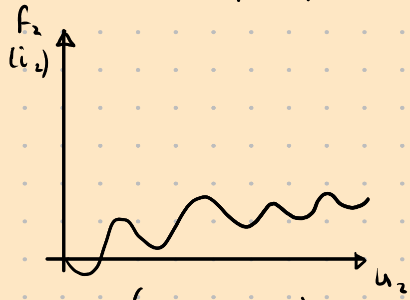
Система g параметров (для безинерционных (только R) цепей!)

Система из 2 линейных ур-ий, описывающих четырёхполюсник, например:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, u_2) \\ i_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$



(при нек-ом $u_2 = const$)



($u_1 = const$)

Т.е. четырёхполюсник задаётся двумя ландшафтами f_1 и f_2.

Причём для f_1 и f_2 они

- Непрерывны
- Произв. $\neq \infty$

Т.е. их можно линеаризовать в окрестности рабочей точки.

$$di_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 \qquad di_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2$$

= const при фикс. u_1 и u_2

При $u_1 = const$, $u_2 = const$ получаем 4 константы, характ. четырёхполюсник.

Физ. смысл производных:

1. $\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$ – входная проводимость

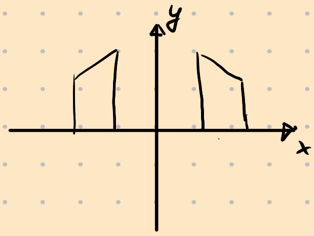
3. $\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$ – прямая проходная проводимость

2. $\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$ – обратная проходная проводимость

4. $\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$ – выходная проводимость

Аналитический сигнал (включаем L и C – инерционность)

Вещественный сигнал – зависимость нек-ой ЛК U и i от времени. При преобр-ии Фурье обязательно получится симметричный спектр (он симметричен отн. Oy с точностью до комплексного сопряжения, а мнимая часть $= 0$).

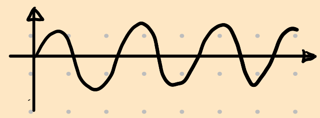


Это неудобно – приходится работать с кучей sin и cos.

Добавим к сигналу комплексную добавку – такую, что левая (правая) часть спектра сигнала обнулится.

Выйдет аналитический сигнал. Получается два провода – один с действ. частью сигнала, другой – с мнимой. Используя аналит. сигнал, можно рас-ивать инерционные цепи.

Сигнал будет подан как бы бесконечно давно и длится бесконечно долго.

$x(t) =$ 

$\tilde{x}(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$ – аналитический сигнал. $|e^{j\omega t}| = 1$

$A_0(\omega)$, $\varphi(\omega)$. $A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ – комплексная амплитуда

$e^{j\omega t}$ – комплексная вращающаяся экспонента.

Y-параметры (комплексные)

$$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12} \tilde{U}_2 \qquad \tilde{I}_2 = Y_{21} \tilde{U}_1 + Y_{22} \tilde{U}_2$$

При поиске Y_{1x} $\tilde{U}_2$ зануляют (закорачивают выход), аналогично для Y_{2x}.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Если взять I_1 и I_2 как незав., математика та же:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_2$$

– здесь коэф-ты это сопротивления

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2$$

Смотря на аналит. сигнал:

$$u_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$u_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

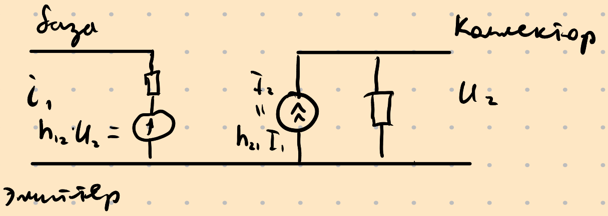
Связь: $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$ $\quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}$

$Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|}$ $\quad Z_{22} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$

H - параметры

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases}$$

– полезно для биполярных транзисторов



– аналогичная биполярному транзистору схема

h_{21} – передача по постоянному току (спр.)

h_{11} – входное сопротивление

h_{12} – (спр.)

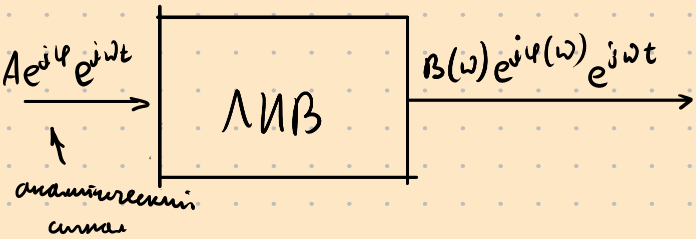
h_{22} – выходная проводимость (спр.)

(спр.) – справочная величина

Связь: $h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$ $\quad h_{12} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$

$h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ $\quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$

Комплексный коэф-т передачи



Аналитический - из ТФКП

Комплексная часть в реальности не наблюдается

$|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$ - комплексный коэф-т передачи

$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{B(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t}}{A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega)-\varphi_0)} =$$

Любой аналит. сигнал с однот. спектром можно подать на вход и $K(j\omega)$ тоже будет

$$= \underbrace{\frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \ldots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \ldots + A_0}}_{\text{самый идиотский вид}} = \underbrace{\frac{b_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot \ldots \cdot (\omega - b_n)}{a_0 (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot \ldots \cdot (\omega - a_m)}}_{\text{самый ценный вид}} =$$

Самая сложная задача радиотехники

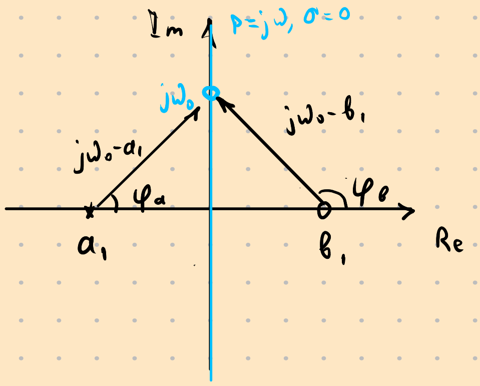
Свойства:

- Когда $\omega = b_k$, $|K| = 0$
- Когда $\omega = a_k$, выходит особенность.

$$= \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{|\omega - b_1| \cdot e^{j\arg(\omega - b_1)} \cdot \ldots \cdot |\omega - b_n| \cdot e^{j\arg(\omega - b_n)}}{|\omega - a_1| \cdot e^{j\arg(\omega - a_1)} \cdot \ldots \cdot |\omega - a_n| \cdot e^{j\arg(\omega - a_m)}} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n} |\omega - b_k|}{\prod_{p=1}^{m} |\omega - a_p|} \cdot e^{j\sum_{k=1}^{n} \arg(\omega - b_k) - j\sum_{p=1}^{m} \arg(\omega - a_p)}$$

„Нули" - корни числителя (b_i) „Полюса" - корни знаменателя (a_i)

ω должна быть комплексной (p), иначе от комплексной ф-ии произойдет переход к вещ-ой.



$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega)-\varphi_0)} = \frac{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + B_0}{A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + A_0} = \ldots$$

По полюсам, нулям и $\frac{b_0}{a_0}$ можно полностью восстановить ф-ию.

$p = j\omega + \sigma$ - при рас-ии конкретной частоты, $\sigma = 0$.

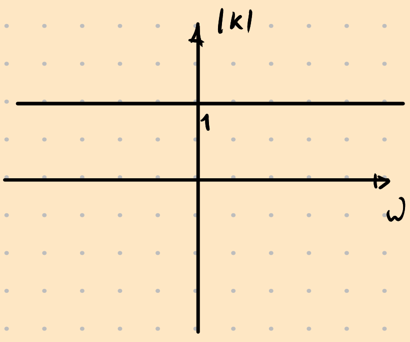
Иначе получится какая-то непонятная хар-ка сис-мы.

$$K(j\omega) = \frac{|j\omega_0 - b_1|}{|j\omega_0 - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega_0 - b_1) - \arg(j\omega_0 - a_1))}$$

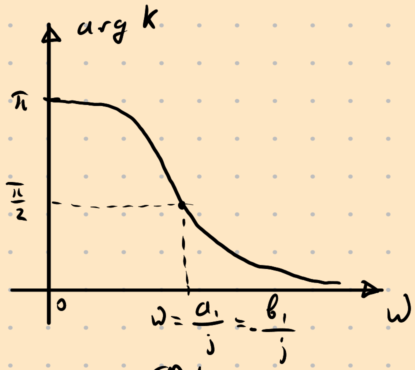
$|K(j\omega)|$ = отношение длин векторов из нуля и из полюса

$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} \text{ - АЧХ} \qquad \arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A \text{ - ФЧХ}$$

Пример $a_1 = -b_1$

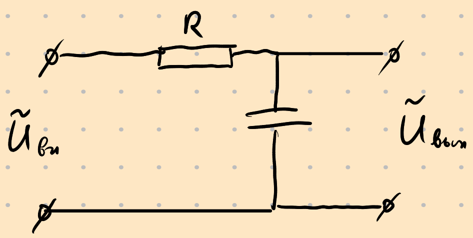


АЧХ



ФЧХ

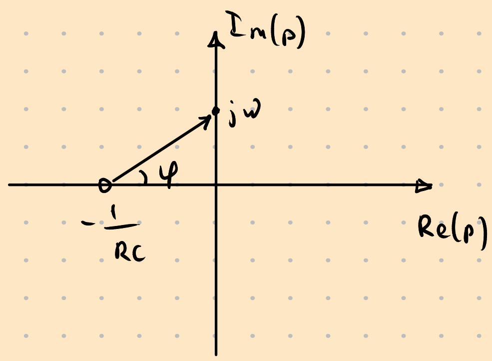
Интегрирующая RC-цепь



$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{вх}}{\left(R + 1/j\omega C\right) \cdot j\omega C\,\tilde{U}_{вх}} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)} =$$

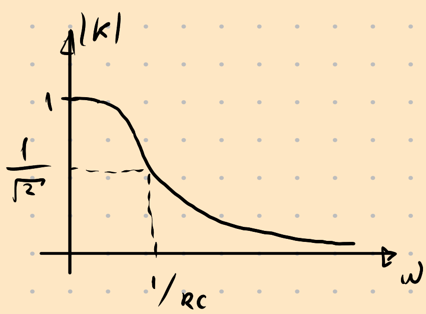
Ток через цепь (течёт через конденсатор)

$$= \frac{1}{RC\left(p + \frac{1}{RC}\right)} \qquad a_1 = -\frac{1}{RC} \qquad \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

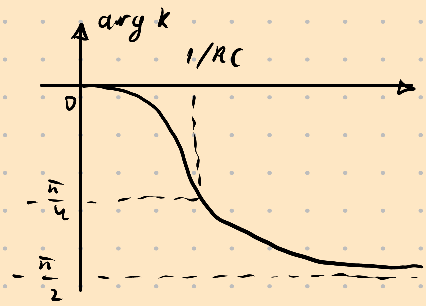


$$|K| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{R^2C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \text{— АЧХ}$$

$$\arg K = -\operatorname{arctg}(\omega RC) \quad \text{— ФЧХ}$$

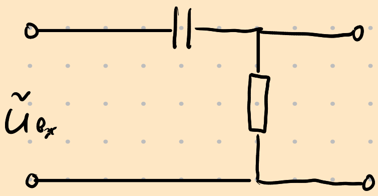


АЧХ

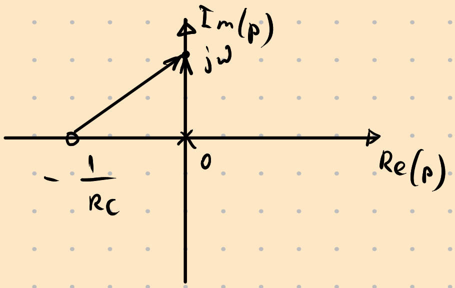


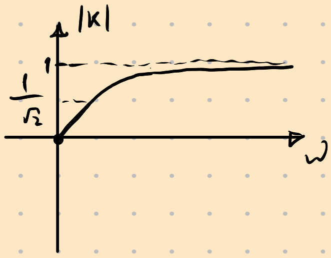
ФЧХ

Дифференцирующая RC-цепочка

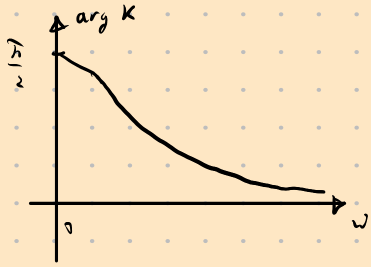


$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - 0}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$





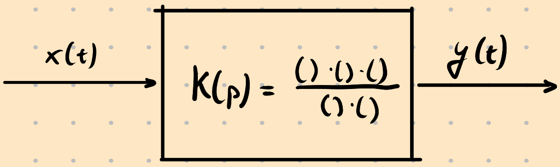
АЧХ



ФЧХ

Не вещественные полюса/нули всегда симметричны относ. Re оси, если канал 1 - вещественный

Отклик инерционной системы



$$C_n \frac{df^{(n)}}{dt} + C_{n-1} \frac{df^{(n-1)}}{dt} + \ldots = \ldots$$

Заменяем $f^{(n)}$ на p^n, $f^{(n-1)}$ на p^{n-1}, ...

Получаем характеристическое уравнение.

Корни полученного уравнения дадут решения дифф. ур-я.

$$\frac{df^{(n)}}{dt^{(n)}} \to p^n$$

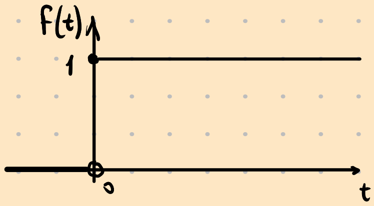
$$\int f(t)\,dt \to \frac{1}{p}$$

— фокус, с помощью к-рого можно решать задачки

Переходим от сигнала $x(t)$ к его спектру (преобразование Фурье):

$$F(\omega) = C\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$ — сходимость интеграла весьма хрупкая.

↖ комплексная!



— спектр этой штуки не найти — интеграл не сходится

(ф-ия Хевисайда)

Можно приблизить её последовательностью ф-ий, к-рые сходятся к ф-ии Хевисайда, и посмотреть, куда сходится последовательность интегралов.

Вводим менее хрупкое преобр-е, вводя универсальную добавку: умножим $f(t)$ на $e^{-\sigma t}$.

Почти все ф-ии можно ограничить этой экспонентой. Новое преобр-е:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt;$$ обозначим $p = j\omega + \sigma$ — **преобр-е Лапласа** (прямое)

„это ёмк. он будет здесь жить"

При этом следует считать, что до $t=0$ $f(t)=0$, после начинается сама ф-ия (чтобы интеграл не разваливался от отриц. части $e^{-\sigma t}$). $F(p)$ - Лаплас-образ

Условия сходимости этого интеграла

1. Не более чем конечное число разрывов 1-го рода на каждом конечном интервале.

   $\forall t \to \exists A,\ \alpha \leq 1,\ h_0 : |f(t+h) - f(t)| \leq A|h|$ - огр. скорости роста на локальном масштабе (дифференцируемость?)

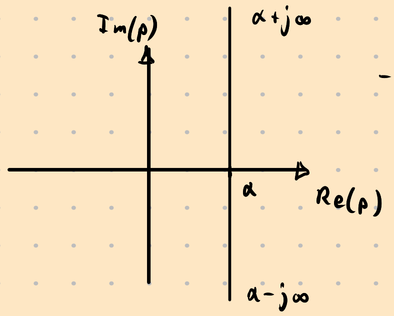
2. $\forall t < 0 \to f(t) = 0$

3. $\exists M > 0,\ s_0 \geq 0 : \forall t \to |f(t)| < M e^{s_0 t}$ - огр. скорости роста на глобальном масштабе

$f(t) \risingdotseq F(p)$ – $f(t)$ соотв-ет образ $F(p)$

Обратное преобр-е сущ-ет.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \frac{1}{p} e^{pt}\, dp$$

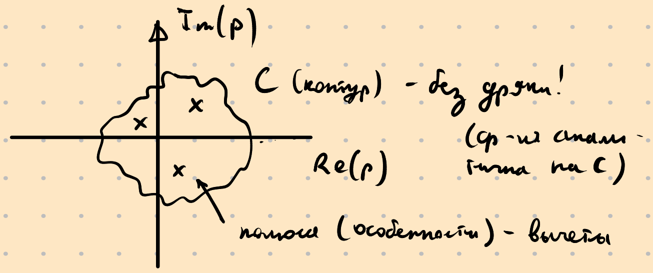


- по этой прямой и берём интеграл.

В ТФКП не принято брать интегралы.

Обходной путь: теорема Коши о вычетах.

$$\oint_C q(p)\, dp = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{res} q(p)$$ (сумма вычетов внутри контура)

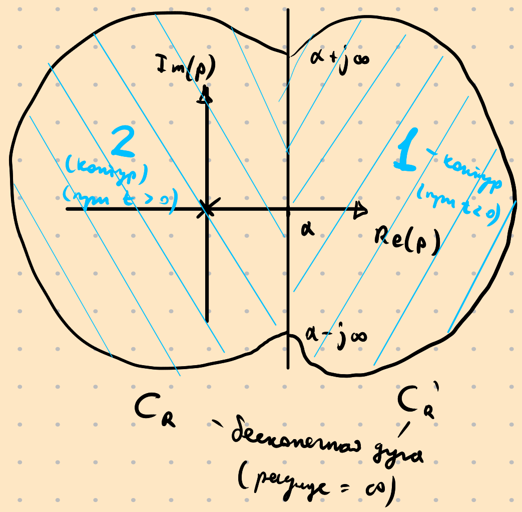


$\operatorname{res} q(p)$ – вычеты ф-ии $q(p)$

Если в ф-ии есть особенности, раскладываем не в ряд Тейлора, а вот в такой ряд:

$$F(p) = \underbrace{\ldots + \frac{1}{p^2} C_{-2} + \underset{\text{вычет ф-ии}}{C_{-1}} \frac{1}{p}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \ldots}_{\text{правильная часть}}$$ – ряд Лорана

C_{-1} – это полюс, ноль в знаменателе



Последовательность интегралов вдоль дуг с радиусом $\to \infty$ при стремлении ф-ии к 0 на ∞ стремится к 0. (лемма Жордана)

При $t < 0$ по лемме Жордана $\int_{C'_R} \ldots = 0$

$$\int_{\text{искомый!}} \ldots = \int_1 \ldots - \int_{C_R} \ldots = 0 - 0 = 0 \qquad f(t) = 0$$

При $\alpha > 0$ контур 1 не содержит особенностей (она одна: $\frac{1}{p}$ – в нуле) => $\int_1 \ldots = 0$
а если не одна, можно взять α побольше

Пусть $t \geq 0$

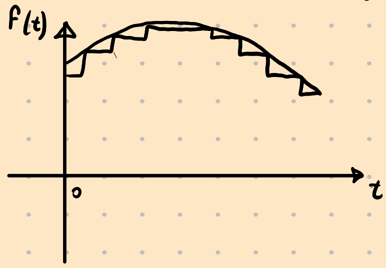
Вычет один, равен он 1 (при $\to 0$ $e^{pt} \to 1$ => одна особенность: $\frac{1}{p}$ => $C_{-1} = 1$)

$$\int_2 \ldots = 2\pi i \qquad \int \ldots = \int_2 \ldots - \int_{C_R} \ldots = 2\pi i$$

$$\boxed{F(t) = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1}$$ — ф-ия Хевисайда!

Т.е. $F(p) = \frac{1}{p}$ для ф-ии Хевисайда.

Представляем любую ф-ию в виде набора единичных скачков, тогда её можно преобразовать по Лапласу. e^{-tp} — сдвинутая ф-ия Хевисайда после преобр-я



$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{pt} \left\{ \sum f(t_k) e^{-p t_k} \Delta' t_k \right\} dp$$

$$\Delta' t_k = \frac{-e^{-p\Delta t_k}}{p} = \Delta t_k - \frac{(\Delta t_k)^2}{2!} + \dots$$ — ряд Тейлора

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{pt} \left\{ \int_0^t f(\tau) e^{-p\tau} d\tau' \right\} dp$$ — обратное преобр-е Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{pt} F(p)\, dp$$

$1(t)$ — ф-ия Хевисайда.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{p_0 t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = -\frac{1}{p-p_0} e^{-(p-p_0)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-p_0}$$

Получили, что

$$1(t) \doteqdot \frac{1}{p} \qquad e^{p_0 t} \cdot 1(t) \doteqdot \frac{1}{p-p_0}$$

Любое изобр-е по умолчанию считается умноженным на $1(t)$, её не пишут.

Свойства преобр-я Лапласа

1° Линейность

$$\int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-pt} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt$$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \qquad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

из св-в линейности получаем:

$$\sin \omega t \doteqdot \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\cos \omega t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$\operatorname{ch} \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

2° Теорема подобия

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

$$f(\alpha t) \doteqdot \int_0^\infty f(\alpha t)\, e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(t)\, e^{-p\frac{t}{\alpha}} dt = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

3° Дифференцирование оригинала

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty \underbrace{f'(t)}_{u'} \underbrace{e^{-pt}}_{v} dt = f(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-p)\, e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p)$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}(0)$$

4° Дифференцирование изображения

$$F(p) \doteqdot f(t) \qquad \text{(обратное преобр-е)}$$

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt\right)'_p = -\int_0^\infty t f(t)\, e^{-pt} dt$$

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t)$$

$$t^n \doteqdot (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$t^n e^{p_0 t} \doteqdot \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

5° Интегрирование оригинала

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

$$g(t) = \int_0^t f(t)\, dt \qquad g(t) \doteqdot G(p)$$

$$f(t) = g'(t) \doteqdot F(p) = pG(p)$$

$$G(p) = p^{-1} F(p)$$

6° Интегрирование изображения

$$F(p) \doteqdot f(t)$$

$\int_p^\infty F(p)\,dp$ – сходится

$$\int_p^\infty F(p)\,dp = \int_p^\infty \left\{ \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right\} dp = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_p^\infty e^{-pt} dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt$$

изменение порядка интегрирования

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \doteqdot \frac{f(t)}{t}$$

$$e^{\beta t} - e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p-\alpha}$$

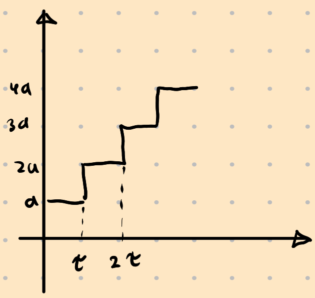
$$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t} \doteqdot \int_p^\infty \left(\frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p-\alpha} \right) dp = \ln \frac{p-\alpha}{p-\beta}$$

7° Теорема запаздывания

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

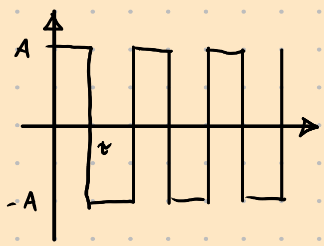
$$f(t-\tau) \doteqdot \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t_1) e^{-(t_1+\tau)p} dt_1 = e^{-p\tau} F(p)$$

$$t_1 = t - \tau$$



$$f(t) = A\left(1(t) + 1(t-\tau) + 1(t-2\tau) + \ldots\right)$$

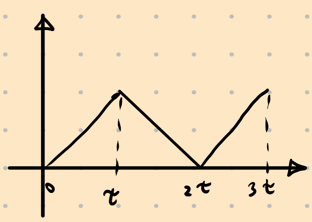
$$F(p) = A\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \ldots\right) = \frac{1}{p} \frac{1}{1-e^{-p\tau}}$$



$$f(t) = A\left(1(t) - 2\,1(t-\tau) + 2\cdot 1(t-2\tau) - \ldots\right)$$

$$F(p) = \frac{A}{p}\left(1 - 2\frac{e^{-p\tau}}{1-e^{-p\tau}}\right)$$

Меандры



$$F(p) = \frac{A}{p^2}\left(1 - 2\frac{e^{-p\tau}}{1-e^{-p\tau}}\right)$$

8° Теорема смещения

$$F(p) \doteqdot f(t)$$

$$F(p-p_0) \doteqdot - ?$$

$$F(p-p_0) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-(p-p_0)t}\, dt = \int_0^{\infty} \left(f(t)\, e^{p_0 t}\right) e^{-pt}\, dt$$

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-\lambda t}\, t^n \doteqdot \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$$

9° Теорема умножения – центральный момент курса

$$f(t) \doteqdot F(p) \qquad g(t) \doteqdot G(p)$$

$$F(p) \cdot G(p) \doteqdot ?$$

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \doteqdot \int_0^{\infty} e^{-pt}\, dt \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \underset{t_1 = t-\tau}{=} \int_0^{\infty} f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau \int_0^{\infty} g(t_1)\, e^{-pt_1}\, dt_1 =$$

$$= F(p) \cdot G(p)$$

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$ – **интеграл свёртки**

Если считать одну из ф-ий импульсной характеристикой, другой – входным воздействием, выходным воздействием будет их свёртка – или перемножение образов

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + \{pF(p) - f(0)\}G(p) \doteqdot f(0)\, g(t) + \int_0^t g(\tau) \cdot f'(t-\tau)\, d\tau =$$

Интеграл Дюамеля

$$= g(0)\, f(t) + \int_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\, d\tau$$

10° Обратная теорема умножения

$$f(t)\, g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(q)\, G(p-q)\, dq$$ – надо доказать

$$f(t)\, g(t) \doteqdot \int_0^{\infty} f(t) g(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(q)\, e^{qt}\, dq \right\} g(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \left\{ F(q) \int_0^{\infty} g(t)\, e^{-(p-q)t}\, dt \right\} dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(q)\, G(p-q)\, dq$$

Этот интеграл есть свёртка изображений.

Импульсные характеристики

Обобщёнными функциями называются лин. непр. функционалы, заданные на пространстве основных функций. Число, сопоставляемое основной функции φ функционалом f обозначается (f, φ) и наз-ся действием обобщённой ф-ии f на пробную ф-ию φ.

$$(f, \varphi) = A$$

1° Линейность функционала

$$f(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$$

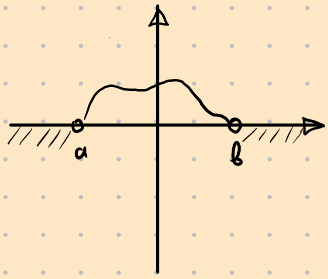
2° Непрерывность

$$\forall\ \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{K} 0 \ \to\ (f, \varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (K - \text{пр-во осн. ф-ий})$$

Всякая основная ф-ия бесконечно дифференцируема.

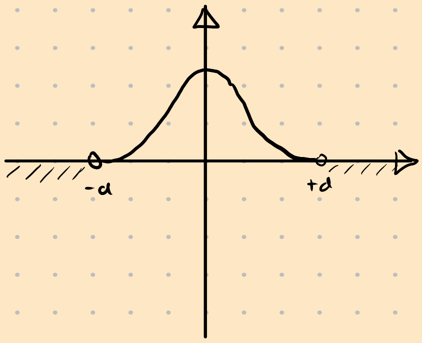
У каждой основной ф-ии есть „конечный носитель": $\varphi(x) = 0 \Big|_{a<x<b}$

(второе св-во – это финитность)



Пример: $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a \\ \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2-x^2}\right), & \text{при } x < |a| \end{cases}$

В т. $x \to a$ выходит, что $\varphi(x) \to 0$ и $\varphi'(x) \to 0$ – ф-ия горизонтальна и яв-ся продолжением константы $\varphi(x) = 0$.



Эту ф-ию можно умножить на любую бесконечно дифф. ф-ию. И результат будет финитной и бесконечно дифф.!

Пространство таких ф-ий есть пр-во основных ф-ий K.

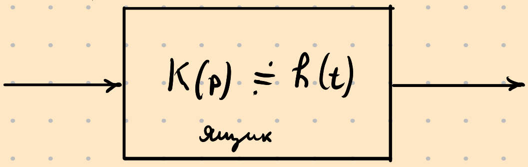
$$(g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx$$ – регулярная обобщённая функция

Самый простой пример – ф-ия Хэвисайда:

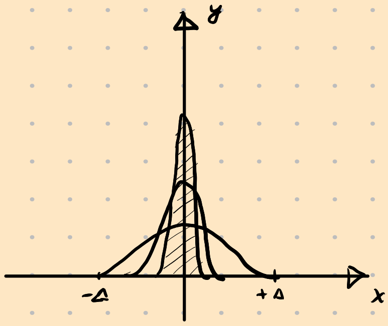
$$1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$ (неважно, как определить в т. 0: всё равно потом интеграл)

$$(1, \varphi) = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

$(\delta, \varphi(x)) = \varphi(0)$ – δ – ф-ия Дирака



$h(t)$ – импульсная реакция, реакция системы на „пинок бочки"



$$g(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{\Delta \to 0} x(t)\, \delta_\Delta (t - t)\, dt$$

Математика ломается в таком пределе:

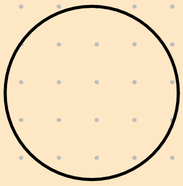
интеграл Римана в одной т. всегда 0.

Исправляем ситуацию:

$$g(t) = \lim_{\Delta \to 0} \int_0^{+\infty} x(t)\, \delta_\Delta (t - t)\, dt = x(0) = (\delta, x(t))$$

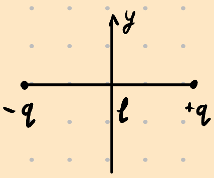
Определение производной обобщённой ф-ии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \varphi(t)\, dt = \underbrace{\delta(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{пропадает на бесконечности}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi'(t)\, dt = -\varphi'(0)$$



$$q = \int_{V \to 0} \rho\, dV$$ – много

$q = \int q\, \delta(x)\, dx$, $\delta(x)$ – плотность точечного заряда



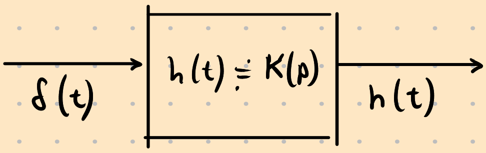
ql – дипольный момент

$l \to 0$

Как описать плотность заряда точечного заряда?

$\frac{1}{l}\rho\, \delta(x + \frac{l}{2})$ и $-\frac{1}{l}\rho\, \delta(x - l/2)$ – стремим l к 0:

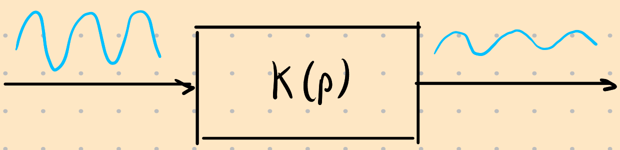
$$\lim_{l \to 0} \frac{\rho\, \delta(x + \frac{l}{2}) - \rho\, \delta(x - \frac{l}{2})}{l} = \rho\, \delta'(x)$$



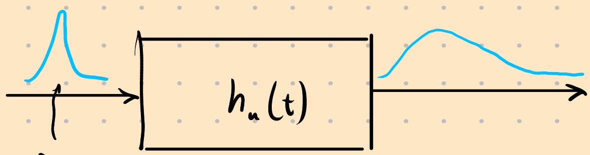
$$\begin{tikzcd} \delta(t) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\mathcal{L}"'] & h(t) \\ 1 \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\mathcal{L}^{-1}"'] & K(p) \end{tikzcd}$$

Способы описания лин. инв. сис-м

① АЧХ, ФЧХ



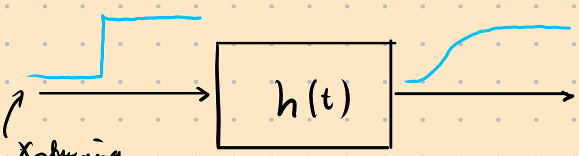
② Импульсная реакция



δ-ф-ия

Закачиваем нек-рое кол-во энергии в 1 момент времени

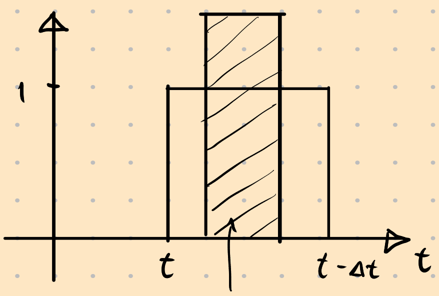
③ Переходные характеристики



Хэвисайд

Все описания эквивалентны

Описание сис-мы импульсной хар-ой



площадь сохраняется, а Δt уменьшается

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1(t) - 1(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

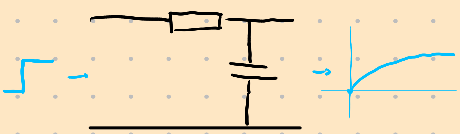
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt := \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \frac{1}{\Delta t}\,dt = 1$$

(если не вынести lim за ∫, получим 0!)

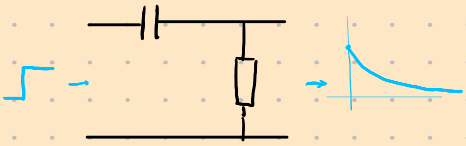
Как бы получается, что $\delta(t) = 1'(t)$, но $1(t)$ не дифференцируема — поэтому это не так. Однако если сделать их обобщёнными ф-иями, то они дифф.!

В силу линейности системы:

$$h_и(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t) - h(t-\Delta t)}{\Delta t}$$



пример для интегрирующей цепи (отклик непр. и дифф.)



пример для дифференцирующей цепи (отклик разрывен в 0)

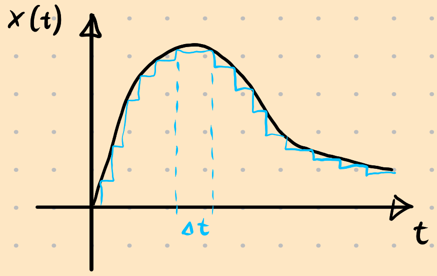
Отклик $h(t)$ часто гладкий и дифф.! Получаем

$$h_и(t) = h'(t)$$

Два способа справиться с разрывом и найти $h_и(t)$:

1. Разбить $h(t)$ на две части: левее т. разрыва и правее
2. Перейти к обобщ. ф-иям: там отклик всегда дифференцируем

Поиск отклика на $x(t)$



Любое $x(t)$ можно представить суммой скачков.

В силу линейности и инвариантности сис-мы:

$$y(t) = c_0 h(t) + c_1 h(t-\Delta t) + c_2 h(t-2\Delta t)$$

Устремим $\Delta t \to 0$:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\theta)\, d[x(\theta)] = \int_0^t x'(\theta)\, h(t-\theta)\, d\theta$$ – первая форма интеграла Дюамеля

Но! Вдруг $x(t)$ разрывен? Тогда нет $x'(t)$. Можно перейти к обобщ. ф-циям, но проще взять интеграл по частям:

$$y(t) = x(\theta)\, h(t-\theta)\Big|_0^t + \int_0^t x(\theta)\, h'(t-\theta)\, d\theta = x(t)\, h(0) + \int_0^t x(\theta)\, h'(t-\theta)\, d\theta$$ –

– вторая форма инт. Дюамеля

Разрывы $h(t)$ решаются так же, как и при поиске $h_и(t)$ – рассмотрением левой части и правой части отн. т. разрыва по отдельности.

В обобщ. ф-циях:

$$y(t) = \int_0^t x(\theta)\, h_и(t-\theta)\, d\theta$$

Связь с преобр-ем Лапласа

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[x(t)] \cdot \mathcal{L}[h_и(t)] = H(p) \cdot \mathcal{L}[x(t)]$$

Получаем комплексный коэф-т передачи – $H(p) = \mathcal{L}[h_и(t)]$!