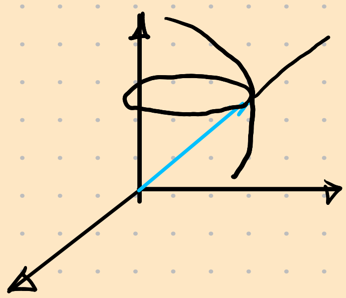
Кинематика материальной точки

Сферическая сис-ма



$$\vec{q} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ – ОНБ

$\vec{V} = \dot{q}^i \cdot \vec{q}_i = \sum H_i \cdot \dot{q}^i \vec{e}_i$

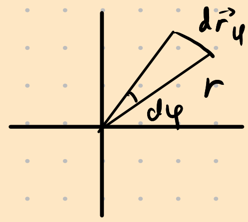
$H_k = |\vec{r}_{,k}|$

$$\vec{r}_{,r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow H_r = 1 \qquad H_\lambda = r\cos\varphi \qquad H_\varphi = r$$

Геометр. способ расчета Ламе

$dq^a \Rightarrow d\vec{r}_a \simeq \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a} \cdot dq^a$



$|d\vec{r}_\varphi| \simeq \underbrace{r}_{H_\varphi} d\varphi$

$$(2):\ \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$w_k = \vec{w} \cdot \vec{e}_k$

$(v^2/2)_{,\dot{r}} = \dot{r}\ ; \quad \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{r}} = \ddot{r}$

$(v^2/2)_{,r} = r(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2) \overset{(4)}{\Rightarrow} w_r = \ddot{r} - r(\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2)$

2-й закон Ньютона в ковариантной форме

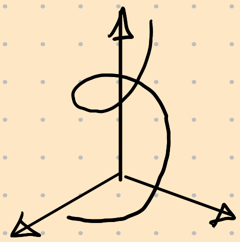
$m\vec{w} = \vec{F}\ \Big|\cdot \vec{g}_a$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,\dot{a}} - \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{,a} = \vec{F}\cdot g_a = Q_a$$

$\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a} = Q_a$ – в любой кривол. сис-ме координат!

$$\frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt} T_{,\dot{a}} - T_{,a}\right] = \vec{F}\cdot\vec{e}_a$$

Движение по винтовой линии



$$\begin{cases} x^1 = a\cos\omega t \\ x^2 = a\sin\omega t \\ x^3 = bt \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

$$\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

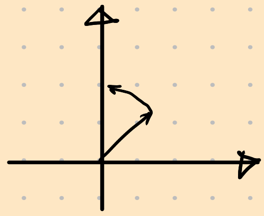
$$\vec{w}_\tau = 0$$

$$\vec{w}_n = a\omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$$

Задача

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \qquad a,\ b = \text{const}$$



$r(\varphi)$ – ? $\qquad w_r(r),\quad w_\varphi(r)$

$r(0) = r_0$

$\varphi(0) = \varphi_0$

$$V_r = \dot{r}$$

$$V_\varphi = r\dot{\varphi}$$

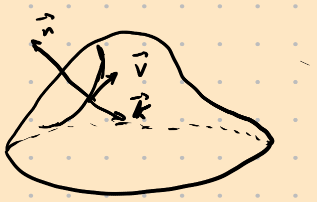
$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{br}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \qquad \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^5$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\big(\underbrace{r^2\dot{\varphi}}_{b}\big) = 0 \qquad \dot{\varphi} = b/r^2$$

№ 1.40



$$\vec{k} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad \text{(вектор кривизны)}$$

$q^1 = \text{const}$

$V = \text{const}$

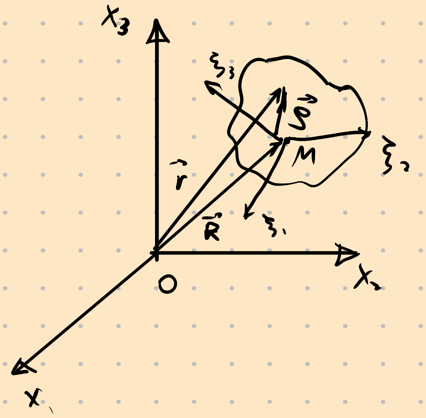
$\vec{r}_{,1}$ – нормаль

$\vec{r}_{,2},\ \vec{r}_{,3}$ – касательные

$$\begin{cases} \vec{w}\cdot\vec{r}_{,2} = 0 \\ \vec{w}\cdot\vec{r}_{,3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

условие движения по геодезической

Кинематика твёрдого тела



$\vec r = \vec R + \vec\rho$

$\vec\rho = A(t)\vec\rho_0$

$\vec R(t)$, $A(t)$ – зад. $\Rightarrow$ движ. т. задано.

$A^T A = E$

$\det A = 1$ — ортог. матрицы обр-ют группу

Рас-им $A(t)$: $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt}\Big|\, A^T A = E \Rightarrow \dot A^T(0)\underbrace{A(0)}_{E} + \underbrace{A(0)}_{E}\dot A^T = 0$$

$$\dot A(0) = \hat\omega \ : \quad \hat\omega^T = -\hat\omega$$

$$dt \ll 1 \Rightarrow A(dt) \simeq E + \hat\omega\, dt$$

$$\vec v = \dot{\vec r} = \underbrace{\dot{\vec R}}_{\vec v_0} + \dot{\vec\rho}, \quad \rho = A\rho_0$$

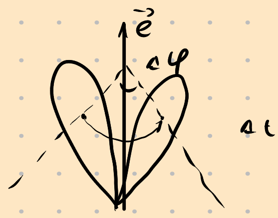
$$\rho(dt) \simeq (E + \hat\omega\, dt)\vec\rho_0 \quad \Rightarrow \quad \dot\rho\big|_{t=0} = \hat\omega\,\rho\big|_{t=0}$$

$$\dot{\vec\rho} = \hat\omega\vec\rho$$

$$\vec V = \vec V_0 + \hat\omega\vec\rho$$

В $\mathbb{R}^3$: $\hat\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat\omega\vec\rho = \vec\omega\times\vec\rho$, где $\vec\omega = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix}$ – угловая скорость

$\vec V = \vec V_0 + \vec\omega\times\vec\rho$ – **ф-ла Эйлера**



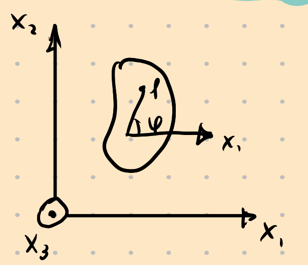
$$\vec\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec e\,\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$\vec e\,\Delta\varphi = \Delta\vec\varphi$ – вектор Эйлера

$$\vec W = \dot{\vec V} = \vec W_0 + \vec\varepsilon\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$$

Формула Ривальса, $\vec\varepsilon = \dot{\vec\omega}$ – угл. ускорение

Плоское движение



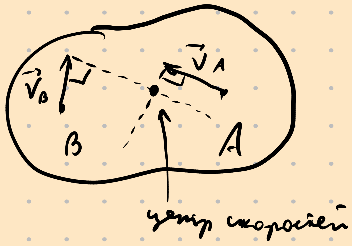
$\vec\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$, $\vec\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\omega \end{bmatrix}$

$\omega = \dot\varphi$

$$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) = \vec\omega\,(\underbrace{\cancel{\vec\omega\vec\rho}}_{0}) - \omega^2\vec\rho$$

$\vec W = \vec W_0 + \vec\varepsilon\times\vec\rho - \omega^2\vec\rho$ – **2D Ривальс**

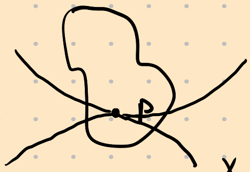
Мгновенные центры скоростей и ускорений



Центр скоростей: P: $\vec V_P = 0 = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec\rho_P$

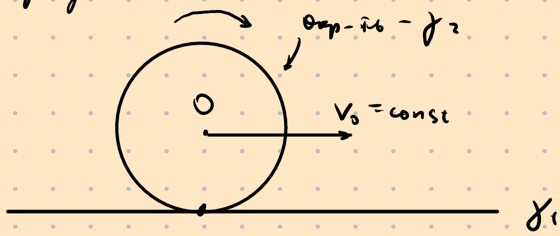
$\vec\omega \times \vec V_0 - \omega^2 \vec\rho_P = 0 \Rightarrow \rho_P = \dfrac{\vec\omega \times \vec V_0}{\omega^2}$ — всегда есть

Но! P движется как в пр-ве, так и в теле — по центроидам



γ_2 — подв. центроида

γ_1 — неподв. центроида



Качение без проскальзывания

(в т. касания V тел равны)

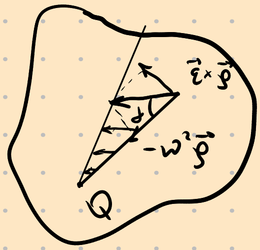
Центр ускорений Q

$\vec W_Q = 0 = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\rho_Q$

$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q = 0$

$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^4 \vec\rho_Q + \omega^2 \vec W_0 = 0$

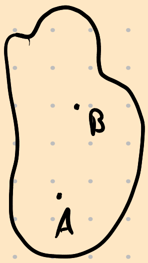
$\vec\rho_Q = \dfrac{\vec\varepsilon \times \vec W_0 + \omega^2 \vec W_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}$



$tg\, \gamma = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$

Полезный факт (можно в 3D и в 2D)

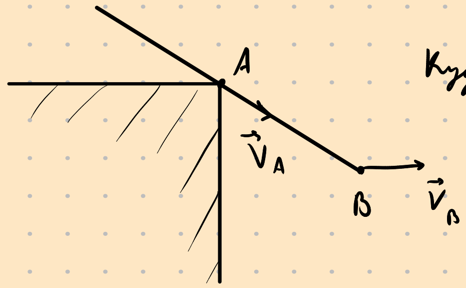
1.



$\vec V_B = \vec V_A + \vec\omega \times \vec{AB} \quad \Big| \; \vec e_{AB} \parallel \vec{AB}$

$\vec V_B \cdot \vec e_{AB} = \vec V_A \cdot \vec e_{AB}$

2.



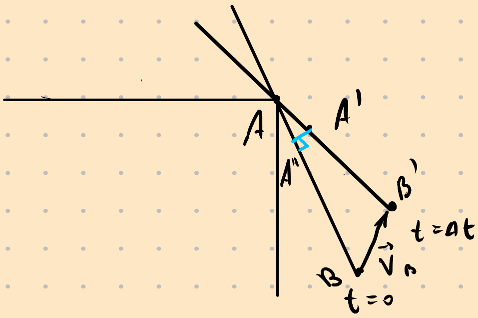
Куда направлена $\vec V_A$, если палка скользит по углу?

Ответ: вдоль AB:

$\vec{AA'} = \vec{AA''} + \vec{A''A'}$

$\vec{A''A'} \simeq AA''\Delta\varphi$

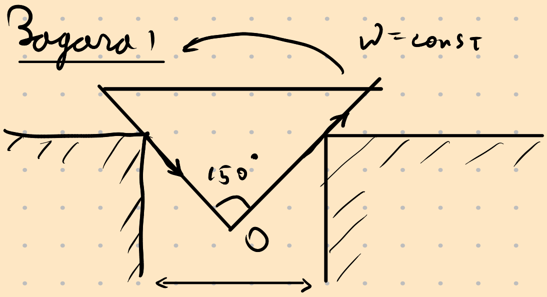
$\vec V_A = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Bigg(\underbrace{\dfrac{\vec{AA''}}{\Delta t}}_{\text{коллинеарно стержню} - \vec V_A} + \underbrace{\dfrac{\vec{AA''}\Delta\varphi}{\Delta t}}_{\to 0} \Bigg) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{AA''}}{\Delta t} = \vec V_A$



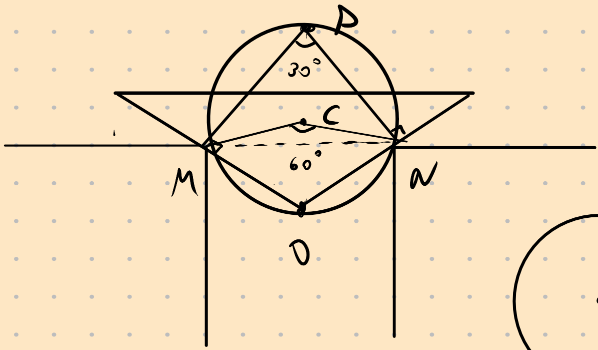
ЧТД

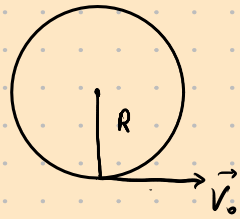
Задача 1

$\omega = const$



$W_0 = ?$



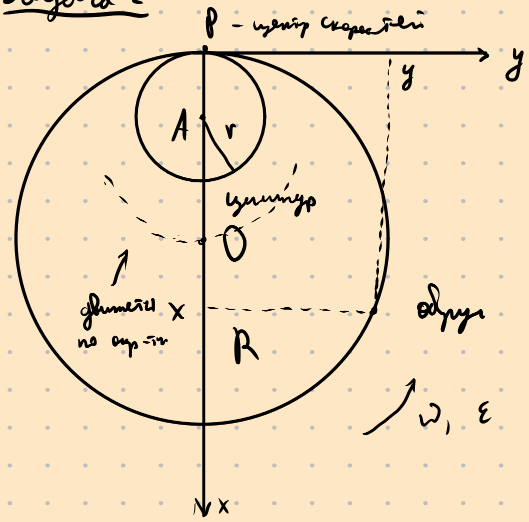


$MN = L = 2R\sin 30° = R$

$PO = 2L \qquad V_0 = 2\omega L$

$$W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$

Задача 2



Без проскальзывания

ω, ε заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$

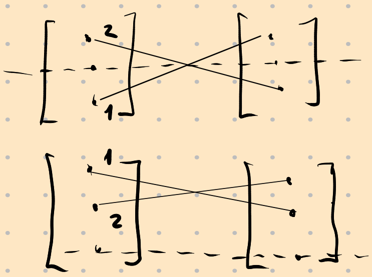
Траектория O – окр-ть с ц. A

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

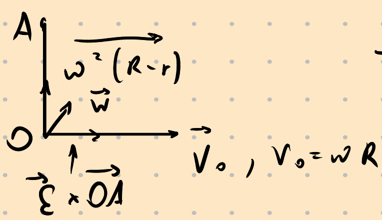
$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y - R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Полезная штука: (векторное умножение)

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix}$$



Отрезок AO – новое тело!



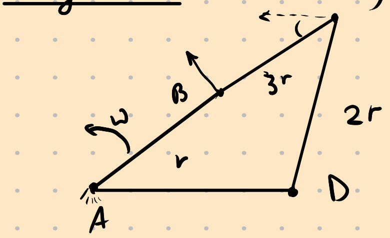
Ω – угл. скор. AO

$$V_0 = \omega R = \Omega (R - r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R - r}\,\omega$$

$$\mathcal{E} = \frac{R}{R - r}\,\varepsilon$$

Задача 2 (3.24 ~)



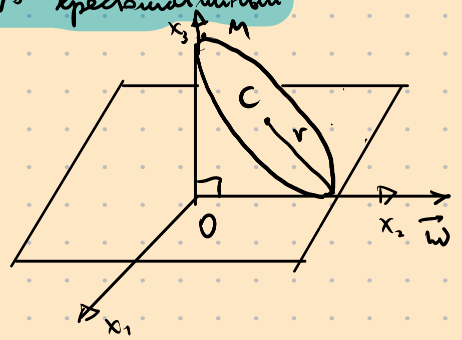
V_c - ? $\quad \vec V_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec V_c \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_c = 0$

W_c - ?

$\omega = const$

(палка крутится в m-ти месте и имеет цель)

№ хрестоматийный



$r, \omega = const$, движение без проскальзывания

$\vec V_M,\ \vec W_M,\ \rho_M,\ \vec\omega,\ \vec\varepsilon$ - ?

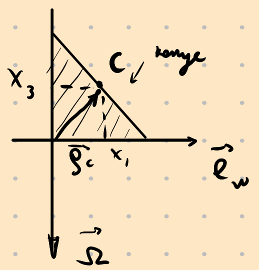
$\vec V = \underbrace{\vec V_0}_{=0} + \vec\omega\times\vec\rho = \vec\omega\times\vec\rho$ — т.к. образующая конуса, касающаяся пов-ти, имеет в каждой т. $\vec V = 0$, то $\vec\omega \parallel$ с этой обр-ей

$$\vec\omega = \begin{bmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{bmatrix},\quad \vec V_M = \vec\omega\times\vec\rho_M = \begin{bmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \sqrt2 r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt2\,\omega r\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\vec\omega = \omega\vec e_\omega,\quad \vec e_\omega = \frac{\vec\omega}{\omega}$

$\vec\varepsilon = \dot\omega\vec e_\omega + \omega\dot{\vec e}_\omega$

Введём фиктивное ТТ:



$\vec e_\omega$ вращается со скоростью $\vec\omega$

Получим, что

$\vec\varepsilon = \omega\vec\Omega\times\vec e_\omega$ (здесь $\vec e_\omega$ это как бы $\vec\rho$, $\vec\Omega$ это её $\vec\omega$)

$\vec V_c = \vec\omega\times\vec\rho_c = \vec\Omega\times\vec\rho_c$

x_1: $\omega\frac{r}{\sqrt2} = \Omega\frac{r}{\sqrt2} \Rightarrow \Omega = \omega$

$$\vec\Omega = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\omega\end{bmatrix} \Rightarrow \vec\varepsilon = \omega^2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega^2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\vec W_M = \underbrace{\vec\varepsilon\times\vec\rho_M}_{\perp\vec\tau} + \vec\omega\times(\underbrace{\vec\omega\times\vec\rho_M}_{\vec V_M \text{ (как правило)},\ \perp\vec\tau})$$

$\vec W_M = W_M^\tau\vec\tau + \frac{V_M^2}{\rho_M}\vec n$

$\vec V_M \parallel \vec x_1 \Rightarrow \vec\tau = \vec x_1$

Таким образом $\vec W_M = \frac{V_M^2}{\rho_M}\vec n \Rightarrow \rho_M = \frac{V_M^2}{W_M}$

! При качении без проскальзывания, скорость в каждой т. линии касания $= 0$.

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}\, e_\omega + \vec{\omega}\, \dot{e}_\omega$$

Ортог. матрицы

$$A\vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1$$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(a_2^3 - a_3^2\right) \qquad e_2 = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(a_3^1 - a_1^3\right) \qquad e_3 = \frac{1}{2\sin\varphi}\left(a_1^2 - a_2^1\right)$$

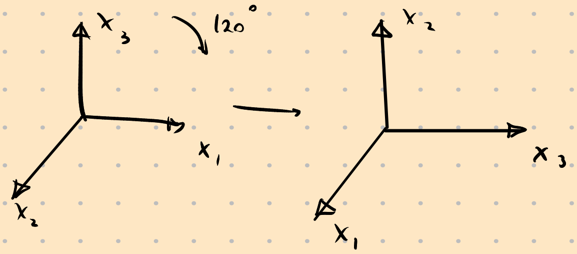
$$A = E\cos\varphi + \hat{e}\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\,\vec{e}^{\,T}\vec{e}$$

$$\operatorname{tr} A = 3\cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}, \quad \varphi - ?$$



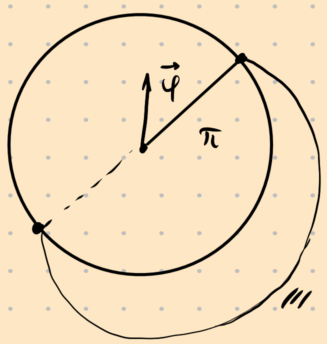
$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Крутые штуки

Группа поворотов $SO(3)$ отождествляется с шаром:



(противоп. т. отождествлены)

Многообразие - плоскость без разрывов и (обычно) гладкая

Сложение поворотов

Повороты:
- активные — вращаются пр-во и элементы при фикс. базисе
- пассивные — вращается базис, а эл-ты фикс.

Активный: $\vec r' = A \vec r$

Пассивный: $\vec e_{i'} = a^{i}_{i'} \vec e_i$

! Обозначение: $\vec r^{(1)}$ - вектор $\vec r$ не трогаем, изменили базис

$$\vec r^{(1)} = r^{i'} e_{i'} = r^{i'} a^{i}_{i'} e_i = r^i \vec e_i$$

$$r^i = a^{i}_{i'} r^{i'} \iff \vec r = A \vec r^{(1)}$$

$$\vec r^{(1)} = A^T \vec r$$ – обратное к A преобр-е

1. Сложение активных поворотов

$$\vec r' = A_1 \vec r, \quad \vec r'' = A_2 \vec r'$$

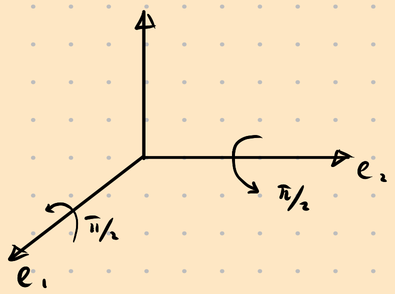
$$\vec r'' = A_2 A_1 \vec r \Rightarrow A = A_n \cdot \ldots \cdot A_1$$

2. Сложение пассивных поворотов

$$\vec r^{(1)} = A_1^T \vec r \qquad \vec r^{(11)} = A_2^T r^{(1)}$$

$$\vec r^{(11)} = A_2^T A_1^T \vec r = (A_1 A_2)^T \vec r \Rightarrow A = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$$

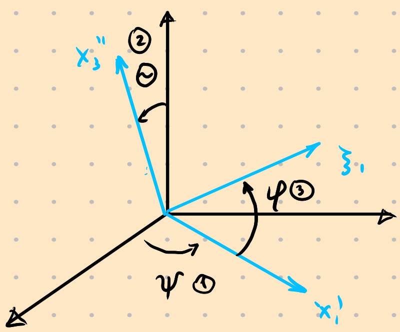
Пример 1



Считаем повороты активными (базис фиксирован)

$$A = A_2 A_1$$

Пример 2 (углы Эйлера в матрицу)



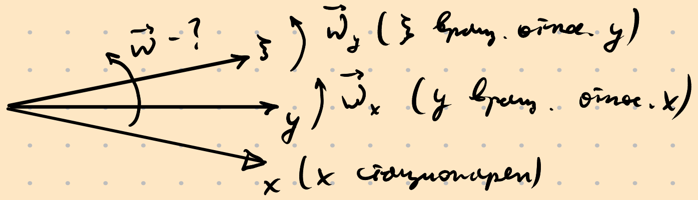
Поворот пассивный – так повороты будут вокруг базиса

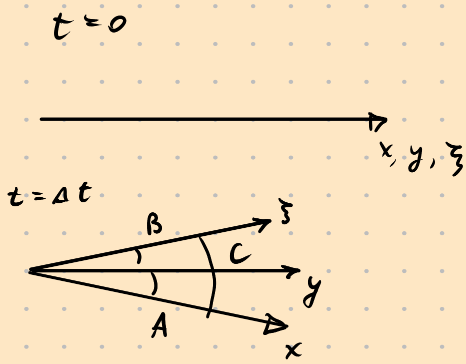
$$A = A_\psi A_\Theta A_\varphi$$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \qquad A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сложение угловых скоростей



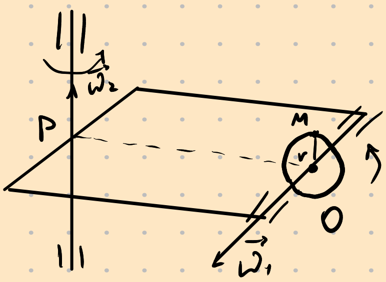


$$A \simeq E + \hat{\omega}_x \Delta t$$

$$B \simeq E + \omega_y \Delta t$$

$$C = AB \simeq E + \underbrace{(\hat{\omega}_x + \hat{\omega}_y)}_{\hat{\omega}} \Delta t$$

Пример



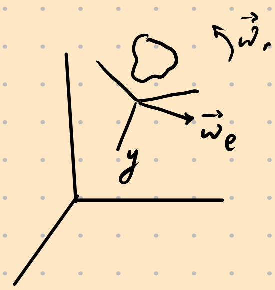
Рамка крутится + колесо крутится на рамке

$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ -? $\qquad \omega_1, \omega_2 = const$

$\vec{V}_M, \vec{W}_M$ -?

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

Вращение т.т. во вращающемся базисе



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r^i \vec{y}_i$$

$$\vec{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_e}_{\vec{\varepsilon}_e} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_r^i \vec{y}_i}_{\vec{\varepsilon}_r} + \underbrace{\omega_r^i \vec{\omega}_e \times \vec{y}_i}_{\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$

В задаче: $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$

$$\vec{V}_M = \underbrace{\vec{V}_O}_{\vec{\omega}_2 \times \vec{PO}} + \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

$$\vec{W}_M = \underbrace{\vec{W}_O}_{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{PO}) = -\omega_2^2 \vec{PO}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM})$$