Фомичёв Александр Владимирович

Литература

Чёрный список: лекции Фомичёва, интернет

Белый список: Журавлёв; Маркеев; Гантмахер (~ конец сем.); Болотенко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома $\mathbb{R}^3$ – все объекты – в Евклидовом пр-ве $\mathbb{R}^3$.
2. $\exists$ движение: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ (в $\mathbb{R}$ – время)
3. $\exists$ мат. точка: $(m, \vec{r})$, $m = const > 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4. $\exists$ взаимодействие: $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, r_2) \to \exists \vec{F}$ – сила: $F \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\underset{(m_1, \vec{r}_1)}{\bullet} \xrightarrow{\vec{F}} \quad \xleftarrow{-\vec{F}} \underset{(m_2, \vec{r}_2)}{\bullet}$$

5. $\exists$ сис-мы координат и способ параметризации времени, такие что

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие сис-мы наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \end{cases}$

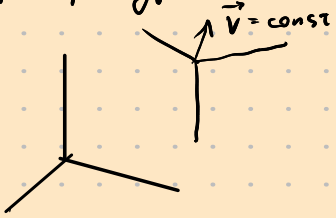
$t = t(t', q')$, $q = q(t', q')$

$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0$ – те же ф-ии!

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правила составления ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относ. преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{v}t + At, & A \text{ – ортог. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

преобр. (группа) Галилея.

$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = const$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longmapsto m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}$$

Индексные обозначения

① $\vec{r} \to r^i, \quad i = 1 \dots 3$

② $A \to a_{ij}$

a_j

a^{ij}

немой индекс

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i \equiv a^i b^i$ (правило Эйнштейна)

$A\vec{r} = a_{ij} r^j$

бегущий индекс

④ $a, \dots, h$ – фиксирующие индексы

$x^a b^a$ – эл-т с номером a; без суммирования!

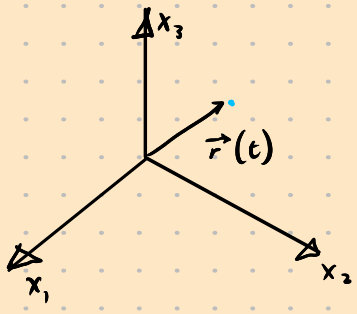
⑤ $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$

Нпр. $df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k}\, dx^k$

Кинематика точки

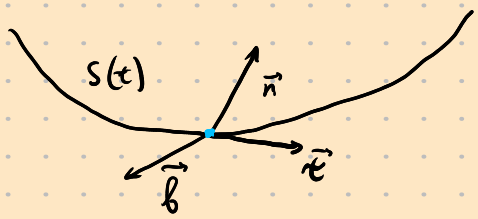
Декартовы координаты



$$\vec r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} \qquad v = \dot{\vec r} = \begin{bmatrix} \dot r^1 \\ \dot r^2 \\ \dot r^3 \end{bmatrix}$$ – скорость

$$\vec w = \ddot{\vec r} = \dot{\vec v} = \begin{bmatrix} \ddot r^1 \\ \ddot r^2 \\ \ddot r^3 \end{bmatrix}$$ – ускорение

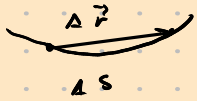
Сопровождающий трёхгранник Френе

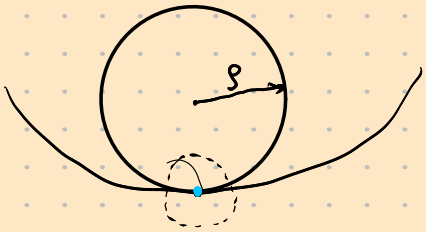


$$\vec r = \vec r(s(t))$$

$$\vec v = \underbrace{\vec r_{,s}}_{\vec t}\, \dot s = \vec t\, v$$

$$\vec w = \vec t_{,s} v^2 + \vec t \dot v$$

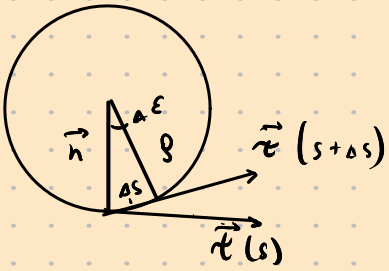




$$\Delta \vec s \simeq \rho \Delta \varepsilon$$

$$\Delta \vec t \simeq \Delta \varepsilon \vec n = \frac{\Delta s}{\rho} \vec n$$

$$\vec t_{,s} = \frac{\vec n}{\rho} \Rightarrow \vec w = \underbrace{\dot v \vec t}_{w_t \text{ тангенц.}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho} \vec n}_{w_n \text{ нормальное}}$$

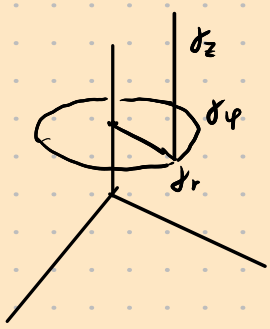


Криволинейные координаты

$\vec r = \vec r(q)$; $q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}$ – криволинейные (обобщённые) координаты

$\det\left[r^i_{,j} \right] \neq 0$! Взаимно-однозн. соотв.

$\vec r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$ – цилиндрические координаты



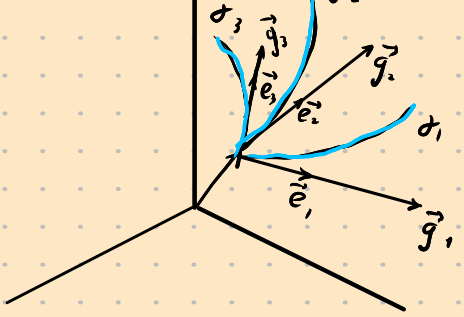
$$\begin{cases} q^i - \text{var} \\ q^{j \neq i} - \text{fix} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$ – γ_i – координатные линии

$H_k = |\vec{g}_k|$ — к-т Ламе

$$H_k = \sqrt{(r^1_{,k})^2 + (r^2_{,k})^2 + (r^3_{,k})^2}$$

$\vec{e}_a = \dfrac{\vec{g}_a}{H_a}$ - Орты (норм. векторы) лок. базиса

$|\vec{e}_a| = 1$



Скорость в кривол. коорд.

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}\dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^k}_{\text{составляющая}}\vec{g}_k$

① $\vec{v} = \sum \underbrace{H_k \dot{q}^k}_{\text{составляющая}} \vec{e}_k$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik}\text{ - метрич. тензор}} \dot{q}^i \cdot \dot{q}^k = g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k$$

② $v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$

Если $\langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$:

$$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot{q}^i)^2$$

Ускорение в кривол. сис-ме

$\vec{w} \cdot \vec{g}_k = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k})^{\cdot} - \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k}$

! $\dot{} = \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$

Продиф. по q_k ⟺ точка:

$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i$ $\qquad \dfrac{\partial}{\partial q^k}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,i}\dot{q}^i \qquad \dot{\vec{r}}_{,k} = \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i$

$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = \left(\dfrac{v^2}{2}\right)_{,k}$ $\qquad$ (т.к. $v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$)

$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec{r}}_{,k}}_{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}^k}} = \vec{r}_{,k}$

$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = (v^2/2)_{,k}$

③ $\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,a}$

④ $\vec{w}\cdot\vec{e}_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot{a}} - (v^2/2)_{,a}\right]$

Оператор Эйлера – Лагранжа

$$\xi_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Геометрический смысл H_k и их вычисление

$q^a \to q^a + dq^a$ – только одна комп.

$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a}\cdot dq^a$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_k$ $\qquad T = \frac{mv^2}{2}$ – кин. энергия

$m\,\xi_k\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{g}_k$ $\quad$ Q_k – обобщенная сила

$\xi_k(T) = Q_k$

(6) $\frac{d}{dt}T_{,\dot{k}} - T_{,k} = Q_k$

Для базиса $\vec{e}_k$: $\quad \frac{1}{H_a}\xi_a(T) = \vec{F}\vec{e}_a$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ – зависимость $\qquad q(q')$ – замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot{q}^i = \underbrace{q^i_{,i'}}_{\text{матрица Якоби}}\dot{q}^{i'}$ – контравариантный вектор (набор чисел, к-рый при смене базиса ведёт себя вот так) (тензор 1 ранга)

$\dot{q} = J\dot{q}'$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ – скал. ф-ю

$f(q(q'))$ $\qquad f_{,i'} = f_{,i}\cdot q^i_{,i'}$ – градиент меняется уже не так! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор – тензор 1 ранга)

$\underbrace{\nabla' f}_{\text{строка}} = \nabla f J$ $\qquad \nabla' f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже столбец!}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$

Разница (между ко- и контра-) теряется, если преобр-е ортогонально $((J^T)^{-1} = J)$

Метрический тензор

$\vec{g}_k = \vec{r}_{,k}$ $\qquad \vec{r}(q(q'))$ – замена

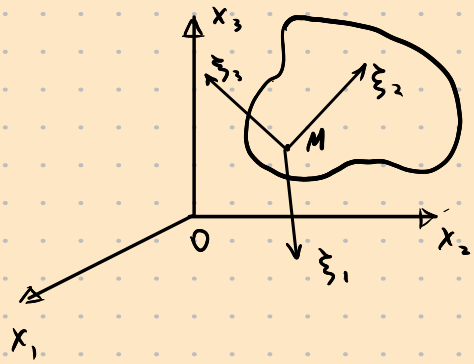
$g_{k'} = \vec{r}_{,k} \cdot q^k_{,k'} = \vec{g}_k q^k_{,k'}$ – получается, $\vec{g}_k$ – ковариантный вектор

Метрический тензор: $\vec{v} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow v^2 = \underbrace{g_i g_k}\, \dot{q}^i \dot{q}^k$, $g_{ik} = g_i g_k$ – метрич. тензор!

$g_{i'k'} = q^i_{,i'} q^k_{,k'} g_{ik}$ – ковариантный тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Кинематика твёрдого тела

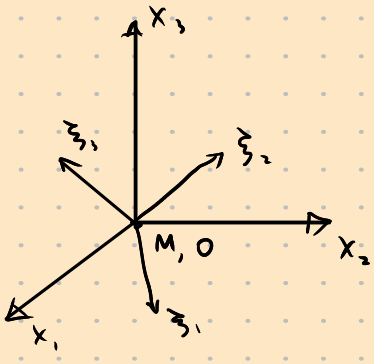
Твёрдое тело – совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



$M \in$ тему – полюс ТТ (твёрдого тела)

Движение твёрдого тела – это движение полюса и движение ТТ относ. полюса (вращение).

Вращение. Углы конечного вращения



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

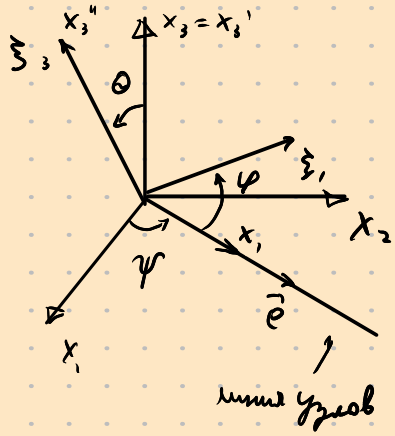
- Углы Эйлера

] (пусть) $\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем сис-му координат Ox:

$$x \xrightarrow[3\,(\text{относ. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



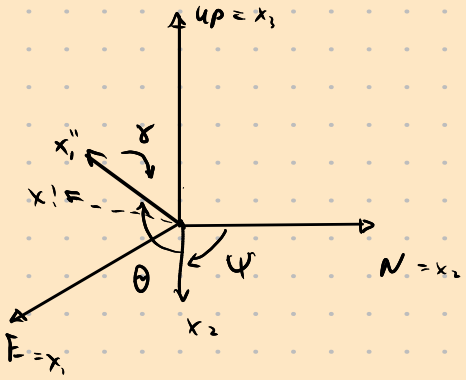
ψ – угол прецессии

θ – угол нутации

φ – угол собственного вращения

Параметры ψ, θ и φ наход. во вз.-одн. соотв. с положением твёрдого тела везде кроме полюс. $\theta = \{0, \pi\}$

- Самолётные (корабельные) углы



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ – курс

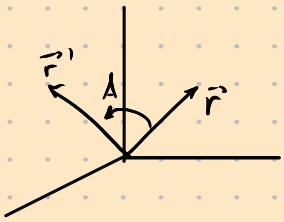
θ – тангаж

γ – крен

Вырождение при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

Любая сис-ма углов конечного вращения будет иметь вырождение.

Ортогональная матрица



$\vec{r}' = A\vec{r}$

$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 \quad \forall \vec{r}$

$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T\vec{r}' = \vec{r}' A'A\,\vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T\cdot\vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^TA = 1$ –

Определение ортог. матрицы

Св-ва

① Теорема Бине – Коши: $|AB| = |A|\cdot|B|$

$|A^TA| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$ поворот / зеркальный поворот

② $A^TA = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③ $\forall A, B$ – ортог. $\to C = AB$ – ортогональная

$C^TC = B^T\cdot A^T\cdot AB = E$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

G – группа

① $\forall A, B \in G \to C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

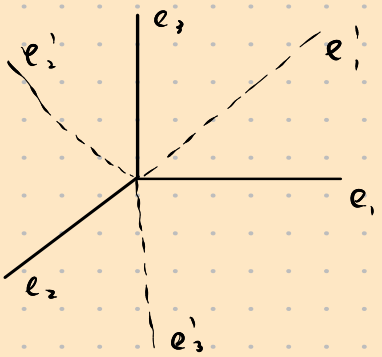
③ $\exists E \in G: \forall A \in G \to AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \to \exists A^{-1} \in G: A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пусть $O(3)$ – группа ортогональных матриц: $A^TA = E$

$SO(3)$ – спец. орт. группа; $\forall A \in SO(3) \to |A| = 1$ (группа поворотов)

⑤ $SO(3)$ – основная мат. модель твёрдого тела с неподвижной точкой.



$\vec{e}_{i'} = a^i_{i'}\vec{e}_i$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{i'} \\ a^2_{i'} \\ a^3_{i'} \end{pmatrix} = [[\vec{e}_{i'}]]_e$$

$[e_{i'}]_e$

$\vec{e}_{i'}\cdot\vec{e}_j = a^i_{i'}\vec{e}_i\vec{e}_j = a^j_{i'} \overset{j\to i}{\Rightarrow} a^i_{i'} = \cos(\widehat{e_i, e_{i'}})$

A – матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однознач. соответствие между положением твёрдого тела и $A \in SO(3)$.

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ $\quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$ => 6 независимых формул =>

=> матрицы из $SO(3)$ – трёхмерное многообразие в 9-мерном пр-ве матриц

⑥ $a^i_{i'} = \Delta^i_{i'}$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{[\Delta^i_{i'}]^T}{|A|_{=1}} = A^T$ => ЧТД

эл-т A $\quad$ ал. дополнение

Собственные векторы и собственные числа ортогональных матриц

$A\vec{r} = \lambda\vec{r}$ => $|\lambda E - A| = 0$

$\operatorname{tr} A = a^i_i$

$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$ => $\exists \vec{r}_1 : A\vec{r}_1 = \vec{r}_1$ – инвариантный вектор

Докажем, что $|\lambda_a| = 1$

$A\vec{r}_a = \lambda_a \vec{r}_a \;\Big|\cdot (\text{вып-е})^+$ $\qquad A^+ = \overline{A^T}$ – эрмитово сопряжение

комплексное сопр-е

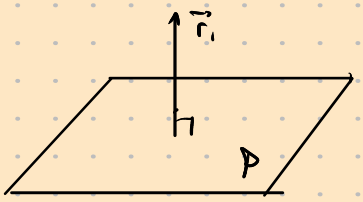
$\vec{r}^{\,+}_a \underbrace{A^+ A}_{=E} \vec{r}_a = \underbrace{\lambda^+_a \lambda_a}_{=|\lambda_a|^2} \cdot \vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a$ $\qquad$ Если $\vec{r}_a = \vec{p} + i\vec{q}$, то $\vec{r}^{\,+}_a \vec{r}_a = \vec{p}^T p + \vec{q}^T q = |\vec{r}_a|^2 > 0$

$|\vec{r}_a|^2 = |\lambda_a|^2 \cdot |\vec{r}_a|^2$ => $|\lambda_a| = 1$

$\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \pm i\sqrt{1 - \dfrac{(\operatorname{tr} A - 1)^2}{4}}$

$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i\vec{q}$ $\qquad \{\vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q}\}$ – правый ОНБ

Инвар. подпр-во A:



$P \perp \vec{r}_1$, $\quad P$ – инвар. подпр-во A.

$\exists \vec{r} \in P$ $\qquad A\vec{r} = \vec{r}_1$ => $A^T\vec{r}_1 = \vec{r}$

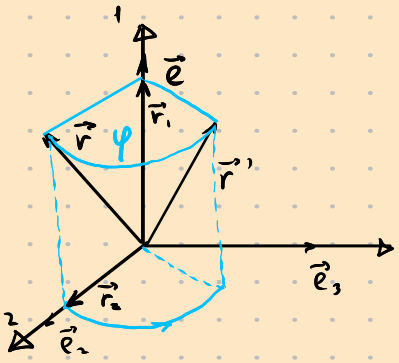
$(A\vec{r})^T \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}^{\,T} \underbrace{A^T \vec{r}_1}_{\vec{r}}}_{0}$ => $A\vec{r} \in P$

ЧТД

Теорема Эйлера о конечных поворотах

$\forall$ e^* положения тв. тела с неподв. точкой $\exists \vec{e}$ и угол φ конечн. поворота, совмещ. положение тела (в силу существования $\vec{r}_1$)

Связь ортогональной матрицы и пар-ов Эйлерова поворота



Выберем $\vec e$ как ось поворота, $\vec e_2 \perp \vec e$ лежит в плоскости с $\vec r$ и $\vec e$.

$\vec r$ поворачивается на φ относ. $\vec e$ в $\vec r'$.

$\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$, где $\vec r_1 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$\vec r_2 = \vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$$\vec e_2 = \frac{\vec r_2}{|\vec r_2|}$$

$$\vec e_3 = \vec e_1 \times \vec e_2 = \frac{\vec e \times \vec r}{|\vec r_2|}$$

$$\vec r' = \vec r_1 + r_2 \cos\varphi\, \vec e_2 + r_2 \sin\varphi\, \vec e_3 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \cdot \vec e + (\vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e)\cos\varphi + \vec e \times \vec r \sin\varphi =$$

$$= (E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^T)\vec r$$

$$\hat e \vec r = \vec e \times \vec r; \quad \hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} (1) \qquad \vec e \vec e^T = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1 e^2 & e^1 e^3 \\ e^2 e^1 & \dots & \\ & & \end{bmatrix}$$

Получим $\boxed{A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e \vec e^T}$ (2) – прямой инв. относ. базиса!

$$\vec e \times (\vec e \times \vec r) = \langle \vec e\, \vec r \rangle \vec e - \vec r$$

$$\hat e^2 \vec r = (e e^T - E)\vec r$$

$$\boxed{A = E + \hat e \sin\varphi + \hat e^2 (1-\cos\varphi)}$$

Пусть $\vec\varphi = \vec e \varphi$ – вектор Эйлера (условный вектор – сложение не работает)

* $\vec\varphi \hookrightarrow \hat\varphi$ – соотв. оператор вида (1).

Тогда можно пок-ть, что $A = e^{\hat\varphi}$ (ряд Тейлора)

Выражение парам. Эйл. поворота через эл-ты $A \in SO(3)$

Из (2) $\Rightarrow$ $\operatorname{tr} A = \underbrace{3\cos\varphi}_{E\cos\varphi} + \underbrace{1-\cos\varphi}_{(1-\cos\varphi)\vec e \vec e^T}$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$A = [a^i_j]$

$$a^3_2 - a^2_3 = 2e^1 \sin\varphi \Rightarrow e^1 = \frac{a^3_2 - a^2_3}{2\sin\varphi} \qquad e^2 = \frac{a^1_3 - a^3_1}{2\sin\varphi} \qquad e^3 = \frac{a^2_1 - a^1_2}{2\sin\varphi}$$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$; полагают, что $\varphi \in [0;\pi]$! это делает $\vec e$ таким, что полож. поворот – это против часовой стрелки. Поворот в обр. сторону – берём $-\vec e$.

Оператор малого поворота. Угловая скорость твёрдого тела

Если $\varphi \ll 1$, то

$A \simeq E + \hat{\varphi}$ – оператор малого поворота

Это верно и для $A \in SO(n)$:

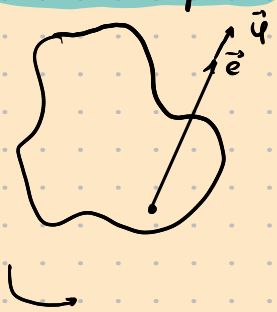
$A(t) \in SO(n); \quad A(0) = E$

$A^T A = E \;\Big|\; d/dt\big|_{t=0}$

$\dot{A}^T \underset{\overset{\shortparallel}{E}}{A} + \underset{\overset{\shortparallel}{E}}{A^T} \dot{A} \Big|_{t=0} = 0$

$\dot{A}^T(0) = -\underset{\overset{\shortparallel}{\hat{\omega}}}{\dot{A}(0)} \Rightarrow \dot{A}(0)$ – кососимметрическая $\Rightarrow A \simeq E + \Delta t\, \hat{\omega}$

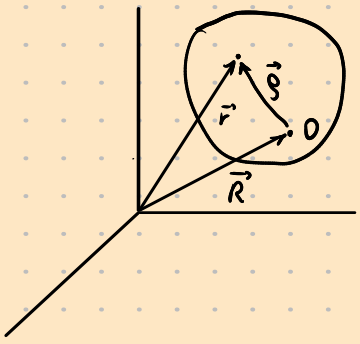
Угловая скорость



$\exists\, \Delta\vec{\varphi} = \vec{e}\,\Delta\varphi$

$\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$ – угловая скорость

Распределение скоростей и ускорений в твёрдом теле



$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\vec{V}_0} + \dot{\vec{\rho}}$

$\rho(t + \Delta t) \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\vec{\rho}(t)$

$\dot{\vec{\rho}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}\vec{\rho} = \hat{\omega}\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

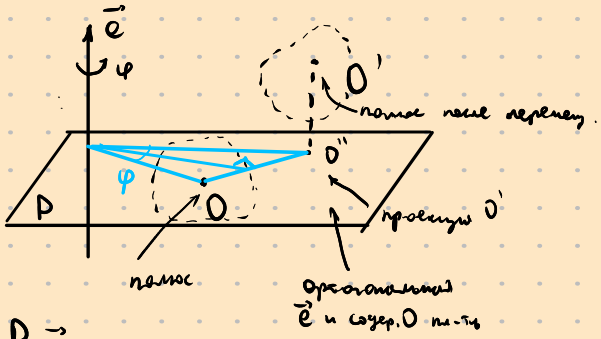
$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ – ф-ла Эйлера

$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ – ф-ла Ривальса

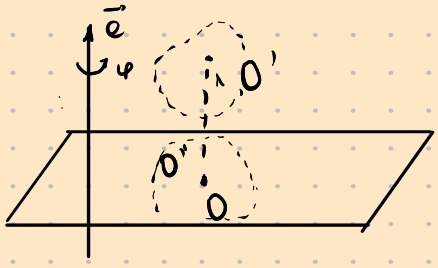
$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$

Кинематический винт твёрдого тела

Пользуемся эйлеровыми поворотами



$P_{\perp \vec{e}}$



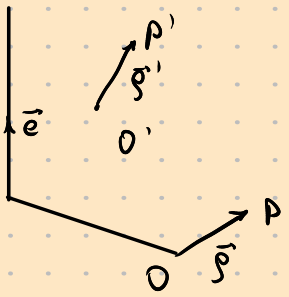
Винтовое движение

Любое движение тела эквивалентно винтовому перемещению.

Перемещ-ем тело на рас-е $\Delta l = \vec{OO'} \cdot \vec{e}$ и повернуть на φ.

Теорема Шаля: $\forall$ перемещ-е тв. тела эквивалентно винтовому перемещению.

Линейная часть перемещ. не зависит от выбора полюса:



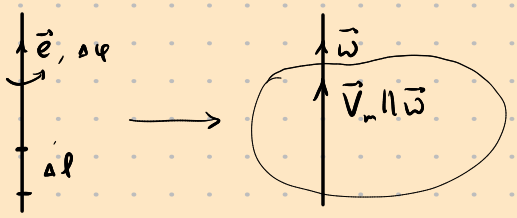
$$\vec{\rho}' = A\vec{\rho}$$

$$\vec{\rho}' \cdot \vec{e} = \vec{\rho}'^{\,T}\vec{e} = (A\vec{\rho})^T\vec{e} = \vec{\rho}^{\,T}\underbrace{A^T\vec{e}}_{\vec{e}} = \vec{\rho}^{\,T}\vec{e}$$

Проекция $\vec{\rho}$ на $\vec{e}$ не меняется.

Если $\vec{\rho} = \vec{OO'}$ – не важно, как выбрать O, $\vec{OO'} \cdot \vec{e} = const$.

Рассм. движ-е тела за время Δt



$$\vec{V}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Тело совершает мгновенное винтовое перемещение.

Ось кинематического винта

ГМТ: $\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega \times \rho = \lambda \vec{\omega}$

$$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}}_{\text{не зав. от полюса}} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_0 = \lambda \omega^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2}$$ – кинемат. инвариант

Распишем покомпонентно:

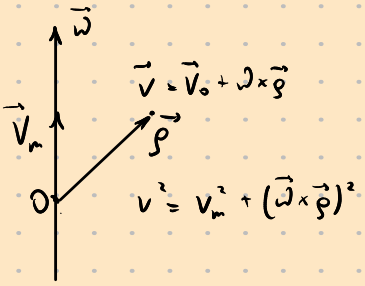
$$\begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{oy} + \dots = \lambda \omega_y \\ V_{oz} + \dots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}}$$ – выражение оси кинемат. винта

Найти кинемат. винт <=> найти ω, уравнение оси, V_m.

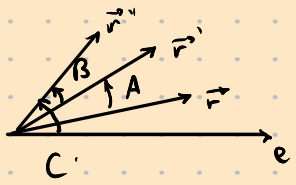
$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

Причём V_m – мин. скорость в тв. теле.



Сложение поворотов

1. Активные повороты

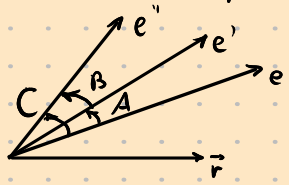


$\vec{r}' = A\vec{r}$ $\quad$ $\vec{r}'' = B\vec{r}' = BA\vec{r}$

$C = BA$

n поворотов: $C = A_n A_{n-1} \dots A_1$

2. Пассивные повороты



$\vec{r}^{(1)} = \sum r_i^{(1)} e_i'$ $\quad$ $\vec{e}_i' = A\vec{e}_i$

сходит т.к. вектор тот же, базис другой

$\vec{r} = \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i' \Big|_e = \sum r_i^{(1)} A\vec{e}_i$

(в базисе e)

В базисе e:

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$

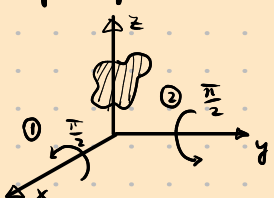
$\vec{r} = A\vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}' = A^T\vec{r}$

$\vec{r}^{(11)} = B^T\vec{r}^{(1)} = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$

$C = AB$

n поворотов: $C = A_1 A_2 \dots A_n$

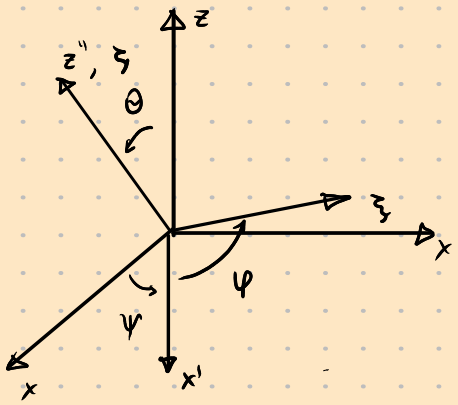
Пример 1



C - ? $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – коор-ты повёрнутого базиса в исх.

Ясно, что активная т. зрения, т.е. $C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Пример 2



1. Вокруг z на ψ
2. Вокруг x' на θ — углы Эйлера
3. Вокруг z'' на φ

Очевидно, пассивная т. зрения

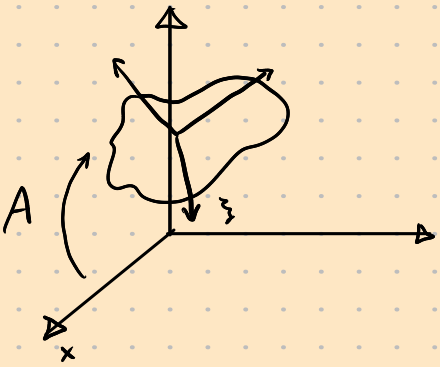
$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ — проекции координаты нового базиса в старом

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

Кинематические ур-я Пуассона для ортогональных матриц



A — связь подв. базиса тела с неподв. базисом x

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta\hat{\varphi}_x)A(t) & \text{— акт. т. зр.} \\ A(t)(E + \Delta\hat{\varphi}_\xi) & \text{— пас. т. зр.} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta\vec{\varphi} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot"'] & \Delta\hat{\varphi} \arrow[d, "\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot"] \\ \vec{\omega} \arrow[r, leftrightarrow] & \hat{\omega} \end{tikzcd}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A\hat{\omega}_\xi \end{array}\right. \quad (1) \text{ — Кинемат. ур-я Пуассона.}$$

Если есть $A(t_1)$ и $\hat{\omega}_x(t)$ либо $\hat{\omega}_\xi(t)$ то интегрируя эти ур-я, можно получить текущую ориентацию.

Матрица акт. и пас. поворота одинаковы: угол тот же, орт один и тот же в x и в ξ т.е. это собств. вектор преобр-я.

Ур-я интегрируются численно, но не аналитически.

Чаще пользуются пассивной т. зрения (датчики угловой скорости на корпусе).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \iff \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, \ k = 1, 2, 3 \text{ — 9 уравнений!}$$

Можно сократить число ур-ий, подлежащих интегрированию:

Базис - правый ОНБ, т.е. третий столбец A выраж. через первые два

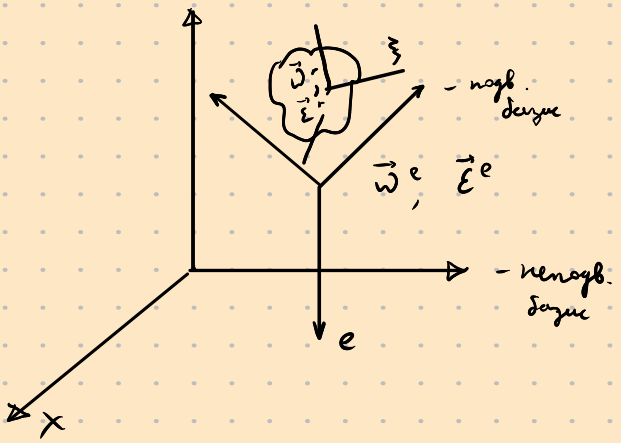
$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \iff \begin{cases} \vec{a}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, \quad k=1,2 \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{- 6 ур-ий}$$

$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = \delta_{km}$ - проверка численного интегрирования в процессе

Следствие из (1):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_x = \dot{A} A^T \\ \hat{\omega}_\xi = A^T \dot{A} \end{cases}$$ - зная $A(t)$, можно вычислить $\omega_x(t)$ и $\omega_\xi(t)$

Сложное движение твёрдого тела



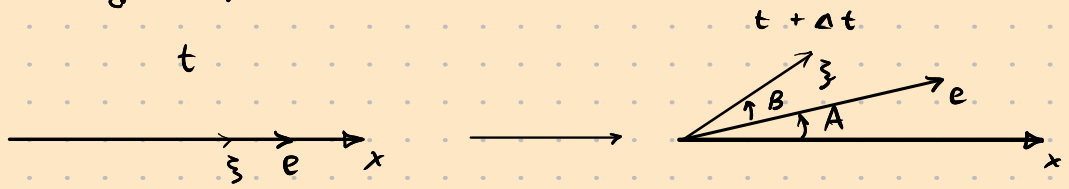
$\vec{\omega}^e$, $\vec{\varepsilon}^e$ - угловые скорость и уск. подв. базиса

$\vec{\omega}^r$, $\vec{\varepsilon}^r$ - угл. ск. и уск. тела отн. подв. базиса

Найти: $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ - абс. угл. ск. и уск.

1. Угловая скорость

Свяжем с телом и подв. базисом промежуточные базисы, совп. по ориентации с неподв. базисом.



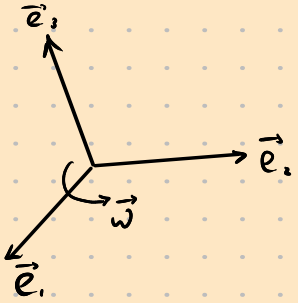
$$A \simeq E + \Delta\hat{\varphi}^e, \quad B \simeq E + \Delta\hat{\varphi}^r$$

$$C = AB \simeq E + \underbrace{\Delta\hat{\varphi}^e + \Delta\hat{\varphi}^r}_{\Delta\varphi} \quad \text{(малые 1 порядка)}$$

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r$$

$\hat{\omega}^e$ - переносная уг. ск. $\quad$ $\hat{\omega}^r$ - относительная уг. ск. $\quad$ $\hat{\omega}$ - абсолютная уг. ск.

2. Скорость вектора в подвижном базисе



$$\vec{a} = \sum a_k \vec{e}_k \quad \text{– произв. вектор}$$

$$\dot{\vec{a}} = \sum \dot{a}_k \vec{e}_k + a_k \dot{\vec{e}}_k = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

локальная / относит. произв. переносная производная

$$\frac{d'\vec{a}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

$\dot{\vec{e}}_k = \omega \times \vec{e}_k$ (из ф-лы Эйлера)

3. Угловое ускорение

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\omega}^e + \sum \omega^r \vec{e}_k$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}^e + \dot{\vec{\omega}}^r = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^r + \vec{\omega}^e \times \vec{\omega}^r$$

4. Особый вектор

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$ – уг. скорость вращения базиса – абс. произв. = относ. произв.

Кинематические уравнения Эйлера

• У кватернионов есть матричная интерпретация (поможет в задачах).

$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$, $\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$ – сопряжение,

$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda}\cdot\vec{\mu} + \lambda_0\vec{\mu} + \mu_0\vec{\lambda} + \vec{\lambda}\times\vec{\mu}$

Нормированные кватернионы: $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{e}\sin\frac{\varphi}{2}$; $|\vec{e}| = 1$

Деление – редкая операция, и у кватернионов есть!

$R' = AdR = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$ – присоединённое отображение

Свойства AdR

$\exists\, R = r_0 + \vec{r}$

1. $r_0' = r_0$

$$\left.\begin{aligned} R' &= r_0' + \vec{r}' = \Lambda\circ(r_0 + \vec{r})\circ\tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda} \\ \widetilde{\Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda}} &= \Lambda\circ\tilde{\vec{r}}\circ\tilde{\Lambda} = -\Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda} \Rightarrow \operatorname{vect}\Lambda\circ\vec{r}\tilde{\Lambda} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_0' = r_0$$

2. $\vec{r}' = A\vec{r}$, $A \in O(3)$

$\Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda}$ – лин. преобр $\Rightarrow \exists A: \Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda} = A\vec{r} = \vec{r}'$

$\|\vec{r}'\| = \|\Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda}\| = \underbrace{\|\Lambda\|}_{1}\cdot\|\vec{r}\|\cdot\underbrace{\|\tilde{\Lambda}\|}_{1} \Rightarrow \|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\| \Rightarrow A \in O(3)$ ЧТД

Замечание $\exists\, \Lambda(t) \in \mathbb{H}$, $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(0) = 1$.

$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Lambda\circ\tilde{\Lambda} = 1 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) + \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}$

(т.к. $\dot{\tilde{\Lambda}}(0) = \dot{\Lambda}(0)$)

Кватернионы вида $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix}$ в механике обычно отождествляют с векторами

Теорема

Преобр-е $\vec{r}' = \Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda}$, где $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ задаёт Эйлеров поворот вокруг $\vec{e}$ на угол φ.

Д-во

$\Lambda\circ\vec{r} - \vec{r}\circ\Lambda = 2\vec{\lambda}\times\vec{r}$ коммутатор?

$\Lambda\circ\vec{r} = \vec{r}\circ\Lambda + 2\vec{\lambda}\times\vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = (\vec{r}\circ\Lambda + 2\vec{\lambda}\times\vec{r})\circ\tilde{\Lambda}$

$\vec{r}' = \vec{r} + 2(\vec{\lambda}\times\vec{r})\circ\tilde{\Lambda} = \vec{r} + 2\lambda_0\vec{\lambda}\times\vec{r} + 2\vec{\lambda}\times(\vec{\lambda}\times\vec{r}) = (E + 2\lambda_0\hat{\lambda} + 2\hat{\lambda}^2)\vec{r} \Rightarrow$

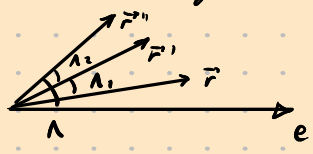
$\Rightarrow \boxed{A = E + 2\lambda_0\hat{\lambda} + 2\hat{\lambda}^2}$ – связь ортогональной матрицы и нормированного кватерниона

$A = E + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\hat{e} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\hat{e}^2 = E + \sin\varphi\,\hat{e} + (1-\cos\varphi)\,\hat{e}^2$ –

Выражение $A \in SO(3)$ через пар-ры Эйл. поворота. ЧТД

Сложение поворотов в кватернионах

1. Активная т. зр.

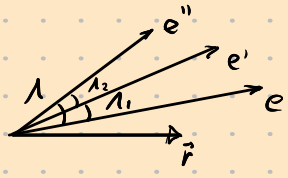


$\vec r' = \Lambda_1 \circ \vec r \circ \tilde\Lambda_1 \qquad \vec r'' = \Lambda_2 \circ \vec r' \circ \tilde\Lambda_2 \qquad \vec r'' = \Lambda \circ \vec r \circ \tilde\Lambda$

$\vec r'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \vec r \circ \widetilde{\Lambda_2 \circ \Lambda_1} \Rightarrow \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$

$\Lambda = \Lambda_n \circ \ldots \circ \Lambda_1$ Повороты в одном и том же базисе

2. Пассивная т. зр.



$\vec e'_k = \Lambda_1 \circ \vec e_k \circ \tilde\Lambda_1$

$\vec r = r'_k \vec e'_k = \Lambda_1 r'_k \vec e_k \circ \tilde\Lambda_1$

В базисе e: $r = \vec r_e \Rightarrow \vec r_e = \Lambda_1 \circ \vec r_{e'} \circ \tilde\Lambda_1$

Тогда $\vec r_{e'} = \tilde\Lambda_1 \circ \vec r_e \circ \Lambda_1$

$\vec r_{e''} = \tilde\Lambda_2 \circ \vec r_{e'} \circ \Lambda_2 = \widetilde{\Lambda_1 \circ \Lambda_2} \circ \vec r_e \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$

$\Lambda = \Lambda_1 \circ \ldots \circ \Lambda_n$

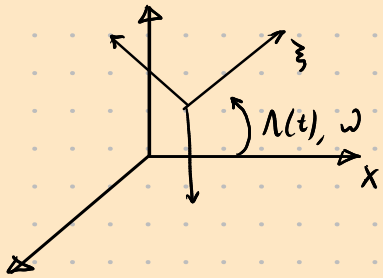
Замечание: коор-ты кватерниона в Λ одинаковы в базисах $\{e_i\}$ и $\{e_n\}$, т.к.

$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec e \sin\frac{\varphi}{2}$, φ – скаляр, коор-ты $\vec e$ одинаковы в $\{e_i\}$ и $\{e_n\}$.

Коор-ты кватерниона в собственных базисах наз-ют параметрами Родрига – Гамильтона.

(собственный = базис, к-рый кватернион поворачивает)

Уравнения Пуассона в кватернионах



$\Lambda(t)$ – поворот ξ отн. x

$$\Lambda(t+\Delta t) = \left[\begin{array}{l} \Lambda_x(\Delta t) \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Lambda_\xi(\Delta t) \end{array}\right.$$

$\Lambda_*(\Delta t) = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \vec e_* \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \simeq 1 + \vec e_* \frac{\Delta\varphi}{2}$ – кв. малого поворота

$* = \{x, \xi\}$

$$\dot\Lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec\omega_x \circ \Lambda = \frac{1}{2}\Lambda \circ \vec\omega_\xi$$

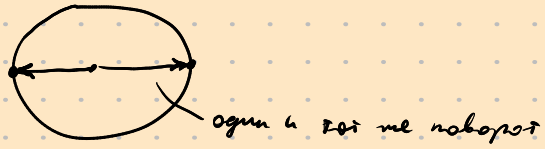
Ур-я Пуассона имеют размерность 4, линейны, вырождение отсутствует. Общего аналит. реш-я нет.

Они позволяют: а) найти $\Lambda(t)$ по $\vec\omega_*(t)$ и $\Lambda(0)$ б) найти $\vec\omega_*$ по $\Lambda(t)$

$\vec{\omega}_x = 2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}, \quad \vec{\omega}_z = 2\tilde{\Lambda} \circ \dot{\Lambda}$

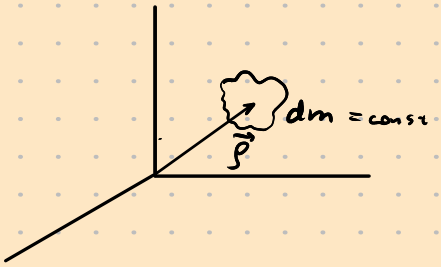
Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями твердого тела, т.к. Λ и $-\Lambda$ задают один и тот же поворот.

$\|\Lambda\| = 1 \iff \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ — $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ — сфера



Основные понятия и законы динамики

1° Объекты континуальны (состоят из эл-ов массой dm с рад. вектором $\vec{\rho}$)



2° Интеграл по массе $I = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\,dm = \lim\limits_{\substack{\Delta m_i \to 0 \\ \Delta m_i = const}} \sum f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)\,\Delta m_i$

Масса - это мера!

3° $m = \int dm$ - масса

$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm$ - центр масс

$\vec{p} = \int \vec{v}\,dm$ - импульс

$\dot{I} = \int \dot{f}\,dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt}\int \underbrace{\vec{r}\,dm}_{m\vec{r}_c} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{V}_c$

$T = \frac{1}{2}\int V^2\,dm$ - кин. энергия

$\vec{K}_0 = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}\,dm$ - момент импульса

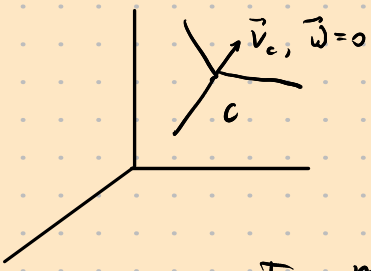
Переход к новому кин. полюсу

$\vec{K}_{0'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\,dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_0 + \vec{r}_0 - \vec{r}_{0'}) \times \vec{v}\,dm = \vec{K}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{p}$

$\vec{K}_{0'} = \vec{K}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{p}$

$\vec{K}_{0'} = \vec{K}_0 + \vec{p} \times \overrightarrow{OO'}$ $\qquad$ $\vec{V}_{0'} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'}$ - ф-лы аналогичны (все св-ва работают и для $\vec{K}_0$)

Теорема Кёнига



$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_c + \vec{V}_r$

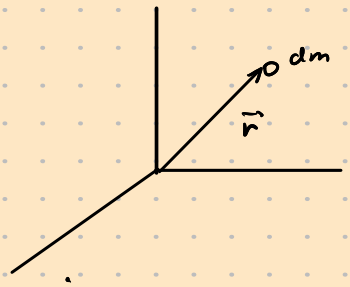
$T = \frac{1}{2}\int (V_c^2 + 2\vec{V}_c\vec{V}_r + V_r^2)\,dm$

$\int \vec{V}_r\,dm = \frac{d}{dt}\int \vec{\rho}\,dm = m\dot{\vec{\rho}}_c = 0$ (т.к. $\vec{\rho}_c \equiv 0$)

$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\int V_r^2\,dm$

Законы изменения динам. величин

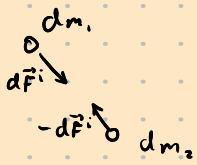
$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ – аксиома Ньютона



$dm \Rightarrow d\vec{F} = \vec{f}\,dm$, $\vec{f}$ – плотность силы

$\vec{f} = \underbrace{\vec{f}^{\,e}}_{\text{внешние}} + \underbrace{\vec{f}^{\,i}}_{\text{внутренние}}$

$\ddot{\vec{r}} = \vec{f}^{\,e} + \vec{f}^{\,i}$



$\dot{\vec{P}} = \int \dot{\vec{V}}\,dm = \int (\vec{f}^{\,e} + \vec{f}^{\,i})\,dm = \int \vec{f}^{\,e}\,dm = \vec{R}^e$

- $\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e$, $\vec{R}^e$ – главный вектор внешних сил

$\vec{P} = m\vec{V}_c \Rightarrow m\dot{\vec{V}}_c = \vec{R}^e$

- $m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{R}^e$ – теорема о движении центра масс

$$\dot{\vec{K}}_o = \underbrace{\int (\vec{V} - \vec{V}_o)\times\vec{V}\,dm}_{-m\vec{V}_o\times\vec{V}_c} + \underbrace{\int (\vec{r} - \vec{r}_o)\times(\vec{f}^{\,e} + \vec{f}^{\,i})\,dm}_{\vec{M}_o^e}$$

- $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^e - m\vec{V}_o\times\vec{V}_c$ – теорема об изменении кинетического момента

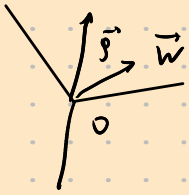
$T = \frac{1}{2}\int V^2\,dm \Rightarrow \dot{T} = \int \vec{V}\cdot\dot{\vec{V}}\,dm = \int \vec{V}\cdot(\vec{f}^{\,e} + \vec{f}^{\,i})\,dm = N^e + N^i$

- $\dot{T} = N^e + N^i$

Основные теоремы динамики в неинерц. сис-ах отсчёта

$\ddot{\vec{r}} = \vec{W} = \vec{W}^r + \vec{W}^e + \vec{W}^c = \vec{f}^{\,e} + \vec{f}^{\,i}$

$\vec{W}^r = \vec{f}^{\,e} + \vec{f}^{\,i} - \underbrace{\vec{W}^e}_{\vec{j}^{\,e}} - \underbrace{\vec{W}^c}_{\vec{j}^{\,c}}$ $\quad$ $\vec{j}^{\,e}$, $\vec{j}^{\,c}$ – плотности переносных и кориолисовых сил

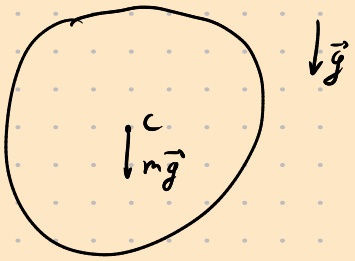


$\vec{j}^{\,e} = -\vec{W}_o - \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$

$\vec{j}^{\,c} = -2\vec{\omega}\times\vec{V}^r$

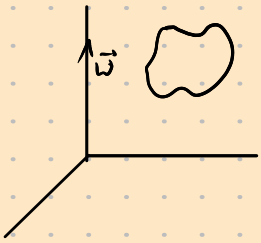
- $\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{ex} + \vec{R}^e + \vec{R}^c$
- $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^{ex} + \vec{M}_o^e + \vec{M}_o^c - m\vec{V}_o^r\times\vec{V}_c^r$
- $\dot{T} = N^{ex} + N^e + N^i$

$\vec{j}^{\,c} = -2\omega\times\vec{V}^r$ $\quad$ $n = \vec{V}^r\cdot\vec{j}^{\,c} = 0$ – мощность кориолисовых сил

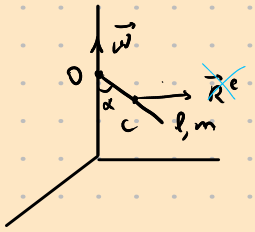


Замечание

При решении задач **не следует** делать необоснованных допущений о точках приложения и линиях действия сил инерции



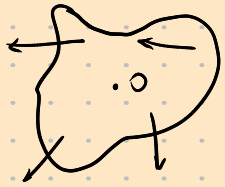
$$\vec{R}^e = -\int \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\,dm = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_c)$$



$$\vec{M}^e_o \neq \frac{1}{2}\vec{R}^e l \sin\alpha$$

Надо честно взять интеграл, а не прикладать $\vec{R}^e$ к центру масс.

Отношение сил, действующих на тв. тело

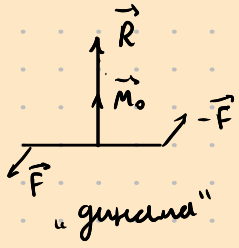


$$\vec{M}_o = \int(\vec{r}-\vec{r}_o)\times\vec{f}\,dm \quad (\text{неважно } \vec{f}^i \text{ или } \vec{f}^e)$$

$$\vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + \vec{O'O}\times\vec{R}, \quad \vec{R} = \int\vec{f}\,dm$$

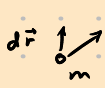
$$\begin{cases}\vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + \vec{R}\times\vec{OO'}\\ \vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{\omega}\times\vec{OO'}\end{cases}$$ — статико-кинематическая аналогия

Следствие: любая система сил, приложенных к твёрдому телу, сводится к динамическому винту или к его частным случаям.



Если $\vec{M}_o = 0$, то сис-ма сил сводится к равнодействующей.

Классификация сил



$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ — элементарная работа

$N = \vec{F}\cdot\vec{V}$

① Если $N = \vec{F}\cdot\vec{V} \le 0$, то $\vec{F}$ — диссипативная. Если $N < 0$ $\forall \vec{V} \neq 0$, то $\vec{F}$ — строго дисс.

Пример: $\vec{F} = -\beta \vec{V}$

② Если $N \equiv 0$, то F – гироскопическая

Пример: $\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$, $\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}$

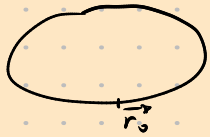
③ F наз-ся потенциальной, если $\exists \Pi(\vec{r}, t)$: $\vec{F} = -\nabla \Pi$

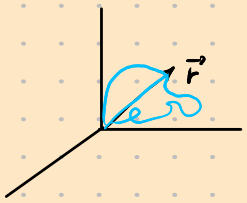
Критерий потенциальности

$\vec{F}(\vec{r}, t)$ – потенциальна $\Leftrightarrow$ $\oint \vec{F} d\vec{r} \Big|_{t=const} = 0$

Д-во

Если $\vec{F} = -\nabla \Pi$, то $\oint \nabla \Pi \, d\vec{r} = 0$





Если $\oint = 0$, то $A(r, t) = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{r} \to \vec{r} + \tau \vec{e}_i$, $\tau \in [0; \Delta h)$
базисный орт

$$\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\ldots, r_i + \tau, \ldots) \, d\tau \underset{\text{средн}}{\overset{\text{т.о}}{=}} F_i(\ldots, r_i + \theta, \ldots) \Delta h$$

$F_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \Pi = -A$ ИТД

Если $F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$ (1)

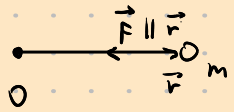
В $\mathbb{R}^3$ условие (1) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$.

Область должна быть хорошей, односвязной и без особенностей.

Если $\vec{F} = -\nabla \Pi(\vec{r})$ (потенциал стационарен), то

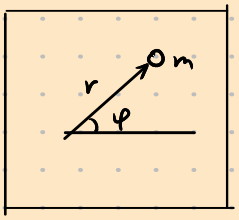
$\delta T = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla \Pi d\vec{r} = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = const$

Движение точки в центральном поле



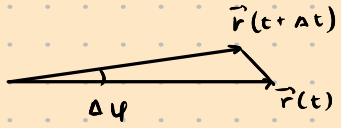
$\vec{K}_0 = const$ ($\vec{M}_0^e = \vec{0}$)

$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{V} = const \Rightarrow \vec{r}$ и $\vec{V}$ всегда лежат в одной плоскости



$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{r} & \text{– закон Ньютона} \\ \frac{1}{r}(r^2 \dot{\varphi})^{\cdot} = 0 & \text{уметь писать к экзамену} \end{cases}$$

$r^2 \dot{\varphi} = const$

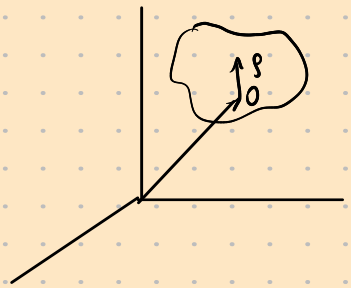


$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$ – секториальная скорость

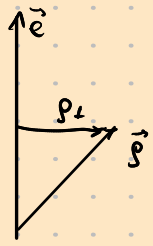
Второй закон Кеплера

Тензор инерции тв. тела и его свойства



$$\vec{K}_o = \int \vec{\rho} \times \vec{v}\, dm = \int \vec{\rho} \times (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = \underbrace{\int \vec{\rho} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{\rho})}_{-\hat{\rho}\omega} dm}_{\hat{\rho}^T \hat{\rho}\, dm\, \vec{\omega}} + m\vec{\rho}_c \times \vec{V}_o \quad (1)$$

J_o – тензор инерции твёрдого тела в т. O



$$\rho_\perp^2 = (\vec{\rho} \times \vec{e}) \cdot (\vec{\rho} \times \vec{e}) = (\hat{\rho} \times \vec{e})^T \hat{\rho}\vec{e} = \vec{e}^T \hat{\rho}^T \hat{\rho} \vec{e}$$

$j(\vec{\rho}) = \hat{\rho}^T \hat{\rho}$ – тензор квадратов расстояний

$$\rho_\perp^2 = \vec{e}^T j(\vec{\rho}) \vec{e}$$

$$\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \rho^2 \vec{\omega} - \langle \vec{\rho} \cdot \vec{\omega} \rangle \vec{\rho} = (\rho^2 E - \vec{\rho}\vec{\rho}^T)\vec{\omega}$$

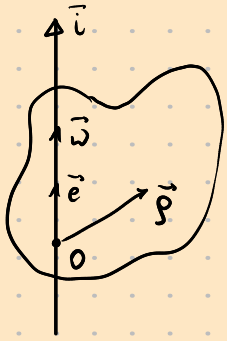
$$\hat{\rho}^T \hat{\rho} = \rho^2 E - \rho\rho^T$$

$$J_o = \int (\rho^2 E - \rho\rho^T)\, dm \Rightarrow \quad J_o = \begin{pmatrix} \int(\rho_2^2+\rho_3^2)dm & -\int \rho_1\rho_2 dm & -\int \rho_1\rho_3 dm \\ & \int(\rho_1^2+\rho_3^2)dm & -\int \rho_2\rho_3 dm \\ & & \int(\rho_1^2+\rho_2^2)dm \end{pmatrix}$$

J_{oii} – осевые моменты инерции

J_{oij} – центр. момент инерции

Момент инерции отн. оси



$$T = \frac{1}{2}\int (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2 dm \underset{\vec{\omega} = \omega\vec{e}}{=} \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\vec{e}^T J_o \vec{e}}$$

J_e – момент инерции отн. оси

$$J_e = \vec{e}^T J_o \vec{e}$$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J_o \vec{\omega} = \frac{J_e \omega^2}{2}$$

Выражения для K_o и T твёрдого тела

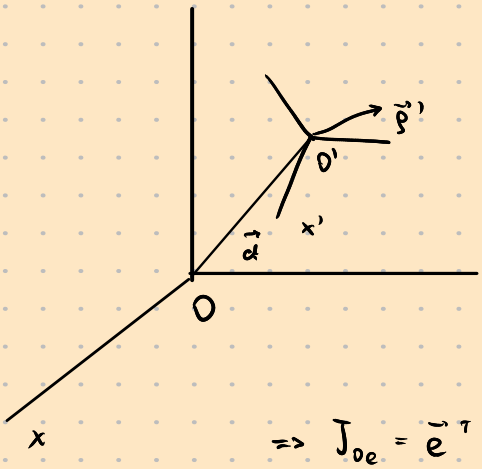
$$\vec{K}_o = \underbrace{\vec{K}_c}_{(1) \Rightarrow J_c\vec{\omega}} + \vec{CO} \times \underbrace{\vec{P}}_{m\vec{V}_c} = J_c\vec{\omega} + \vec{CO} \times m\vec{V}_c$$

O – ∀ полюса (может быть вне тела)

$$T = m\frac{V_c^2}{2} + \frac{1}{2}\int (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2 dm \Rightarrow \boxed{T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J_c \vec{\omega}}$$

(отн. c)

Свойства J_0 при переносе и повороте осей



$$\vec\rho = \vec\rho\,' + \vec a$$

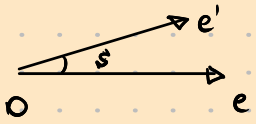
$$J_0 = \int \hat\rho^T \hat\rho\, dm = \int \hat\rho\,'^T \hat\rho\, dm + \hat a^T \int \hat\rho\,' dm + \int \hat\rho^T dm\, \hat a + m\hat a^T \hat a = J_{0'} + m\hat a \hat\rho\,'_c + m\hat\rho\,'_c \hat a + m\hat a^T \hat a$$

$$\Rightarrow \boxed{J_0 = J_c + m\hat a^T \hat a}$$

Расширенная теорема Гюйгенса – Штейнера

$$\Rightarrow J_{0e} = \vec e^T J_c \vec e + m\vec e^T j(\vec a)\vec e = J_{ce} + m\rho_\perp^2$$

Поворот сист. коорд.



$$J_0^e = \rho_e^2 E - \vec\rho_e \vec\rho_e^T \qquad \rho_e^2 = \rho_{e'}^2 \text{ т.к. } S \in SO(3)$$

$$\vec\rho_{e'} = S^T \vec\rho_e \Rightarrow \vec\rho_0 = S\vec\rho_{e'}$$

$$J_0^{e'} = \rho_{e'}^2 - S\vec\rho_{e'}\vec\rho_{e'}^T S^T = S(\rho_{e'}^2 E - \rho_{e'}\rho_{e'}^T)S^T$$

Таким образом,

$J_0^{e'} = S^T J_0^e S$ – с т. зр. мат. алгебры J_0 преобразуется как квадратичная форма

Это – разновидность закона преобразования тензора

Из линала известно, что $\exists S$:

$$S^T J_0 S = \mathrm{diag}[A, B, C], \quad A, B, C > 0$$

Соответствующие оси наз-ся главными осями в т. O. Если $O \equiv C$, то оси наз-ся главными центральными

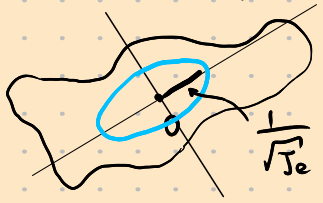
A, B, C – главные (главные центральные) моменты инерции

Эллипсоид инерции

Отложим $\vec r = \frac{1}{\sqrt{J_e}}\vec e$ $\qquad \vec r^T J_0 \vec r = \frac{1}{J_e} J_e = 1$

$$f(\vec r) = \vec r^T J_0 \vec r - 1 = 0$$

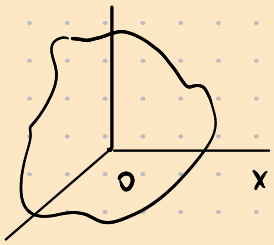
В главных осях: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$, x, y, z – компоненты $\vec r$



Эллипсоид в целом повторяет контуры тела

Нахождение главных осей инерции

1° Общий случай – нет динамической симметрии



В гл. осях: $J_0 \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$

$\lambda_i = \{A, B, C\}$, $\vec{x}_i$ – орты базиса

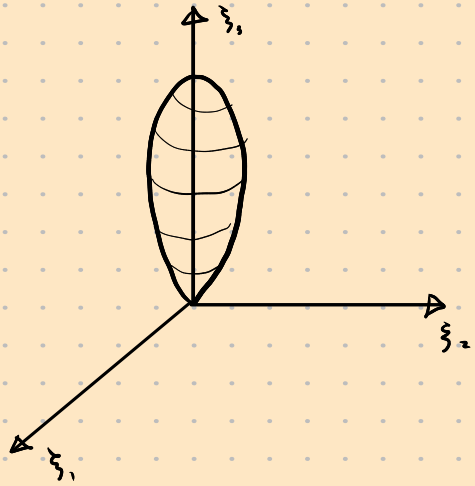
Для нахождения главных осей нужно решить задачу нах-я собств. знач.:

$(J_0 - \lambda E) h = 0$

$\det(\lambda E - J_0) = 0 \Rightarrow \lambda_i \to \{A, B, C\}$

$\lambda_i \to h_i$ – собств. вектора $\xrightarrow[x_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}]{} \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

2° Использование симметрий

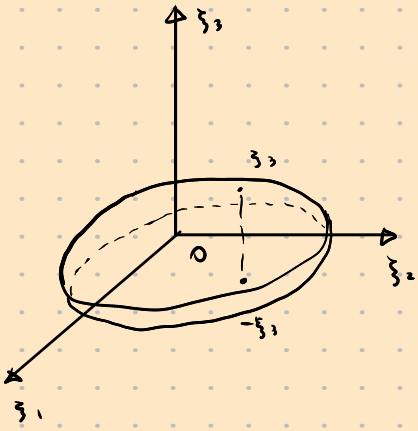


ξ_3 – ось динам. симметрии $\Rightarrow$ гл. ось

$J_{i3} = -\int \xi_i \xi_3 \, dm$

$\forall \xi_i \to \exists -\xi_i \Rightarrow J_{i3} = 0 \quad \forall i \neq 3$

3° Перпенд. плоскость симметрии



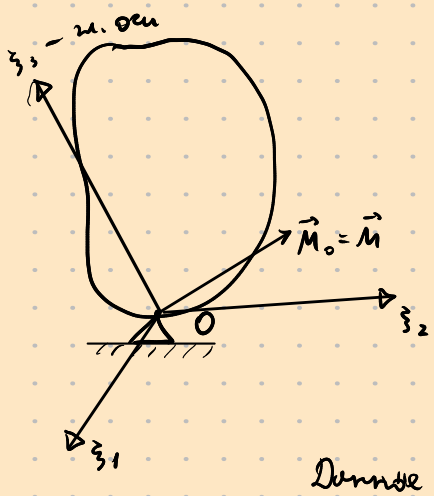
$J_{i3} = -\int \xi_i \underbrace{\xi_3} \, dm = 0$

Простейший вид T и $\vec{K}_0$

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_c \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right) \quad ; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_0 = J_0 \vec{\omega} + \vec{OC} \times m\vec{V}_c = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} + \vec{OC} \times m\vec{V}_c$$

Основы динамики твёрдого тела с неподвижной точкой



Задана ориентация ξ относ. x

$\vec{\omega}(0)$. Найти текущее угловое положение

Если O – неподв. т., то

$$\vec{K} = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm = J\vec{\omega}, \quad \vec{K}_0 = \vec{K}, \; J_0 = J$$

$$T = \frac{1}{2}\int (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2 dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J \vec{\omega},$$

Данные выражения принимают простейший вид в главных осях для т. O:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix}, \quad J = \mathrm{diag}\,[A, B, C]$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

Динамические уравнения Эйлера

$\dot{\vec{K}} = \vec{M}$ => В базисе главных осей:

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d'\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Пояснение: $\vec{K} = K_i \vec{\xi}_i$

$$\dot{\vec{K}} = \underbrace{\dot{K}_i \vec{\xi}_i}_{\frac{d'\vec{K}}{dt}} + \underbrace{K_i \dot{\vec{\xi}}_i}_{\vec{\omega} \times \vec{K}} \qquad \dot{\vec{\xi}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_i$$

$$\frac{d'\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = M_1 \\ B\dot{q} + (A-C)rp = M_2 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = M_3 \end{cases}$$ – Система динам. ур-ий Эйлера (1)

$\vec{M}_\xi = \vec{M}_\xi(\vec{\Theta}, \vec{\omega})$ (2), где $\vec{\Theta}$ – набор $\forall$ пар-ов ориентации (аналогия $\vec{F} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$)

$\vec{\Theta}$ – матрицы из $SO(3)$, кватернионы, углы конечного вращения, ...

В общем случае сис-ма (1) для $\vec{M}_\xi$ из (2) незамкнута.

Для её замыкания следует добавить уравнение для пар-ов ориентации:

$\dot{\vec{\theta}} = f_0(\vec{\theta}, \vec{\omega})$ (3) - кинем. ур-я в нек-ом виде (ур-я Пуассона, кинемат. ур-я Эйлера, ...)

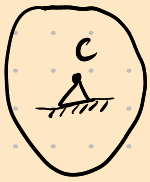
- Сис-ма $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ - замкнутая и может быть проинтегрирована.

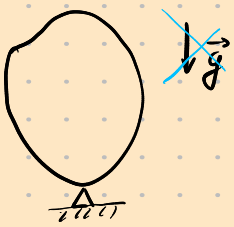
(Замкнутость здесь ≃ равенство кол-ва ур-ий кол-ву переменных)

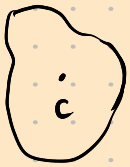
- Сис-ма $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ не интегрируется в квадратурах, и даже движение тв. тела с неподв. точкой в однородном поле тяжести не интегр. в квадратурах.

Сущ-ет 3 случая интегр-сти этой задачи ∀ нач. усл-ий - случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

① Случай Эйлера

1.


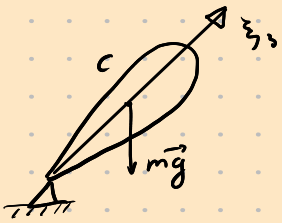
2.


3.


$\vec{g}$ - движ-е сфер. изотропа масс в одн. поле $\vec{g}$.

$\vec{M} = 0!$

② Случай Лагранжа

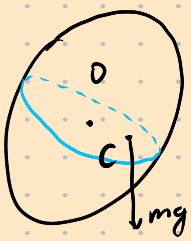


Наличие динам. симметрии:

$A = B \neq C$

из. м. ∈ ξ_3

③ Случай Ковалевской



- эллипсоиду инерции

$A = B = 2C$

т. C лежит на экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Траектории интегрируемых систем как правило просты.

А неинтегрируемые вообще могут проявлять динам. хаос.

Есть еще случаи, интегрируемые при опред. нач. усл-ях.

Случай Эйлера

① Точное интегрирование сист. ур-ий движения

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)pr = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 \end{cases} \qquad A \geq B \geq C, \quad A > C \qquad (4)$$

($A = B = C$ – трив. случай: $\vec{\omega}_\xi = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = const$

если $\vec{\omega}$ в ξ – const, то и в базисе x она const,

где ξ – подв., x – неподв. базис).

Интегралы движения сист. (4):

$$Ap^2 + Bq^2 + Cq^2 = 2T = const \qquad (5)$$

$$\vec{K}_x = const \Rightarrow K_\xi^2 = const \Leftrightarrow A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = const \qquad (6)$$

Выр-я (5) и (6) – первые интегралы сис-мы (4)

- Замечание: если $\dot{x} = F(x,t)$ – сист. д.у., то $G(t,x)$ – первый интеграл $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow G(t, \underbrace{x(x_0, t_0, t)}_{\text{Реш-е з. Коши } \begin{cases} \dot{x} = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}}) = const = G_0$$

Критерий п.и.:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + F_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$$ – производная в силу системы.

$$2Ap\dot{p} + 2Bq\dot{q} + 2Cr\dot{r} = 2(B-C)pqr + 2(C-A)pqr + 2(A-B)pqr = 0$$

Если $A > C$, из (5) и (6) $\Rightarrow$

$$p = \pm\sqrt{a - bq^2}, \quad r = \pm\sqrt{c - dq^2} \qquad (7)$$

a, b, c, d – какие-то const

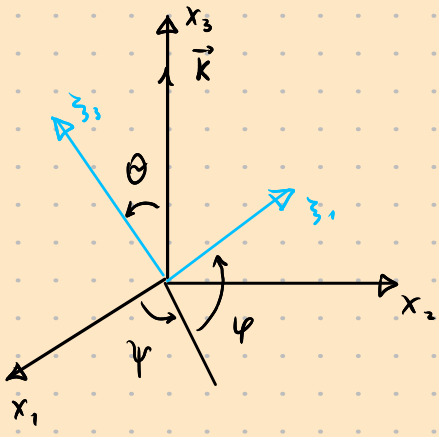
Подставим во 2-е ур-е (4):

$$B\dot{q} \pm (A-C)\sqrt{a-bq^2}\sqrt{c-dq^2} = 0$$

$$\pm\int \frac{dq}{\sqrt{a-bq^2}\cdot\sqrt{c-dq^2}} = \frac{C-A}{B}t + const \Rightarrow q(t) \quad (8)$$

– эллиптический интеграл (выражается через эллипт. ф-ии)

Подставляя (8) в (7), получим $p(t)$, $r(t)$.



Введём неподв. базис x так, что $\vec{K} \parallel \vec{x}_3$ и углы Эйлера ψ, θ, φ.

$$\vec{K}_\xi = \begin{bmatrix} Ap(t) \\ Bq(t) \\ Cr(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$K = |\vec{K}_\xi| = const$ $\qquad \dot{\psi} = \dfrac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta}$ (из кинемат. ур-ий Эйлера)

$$\Downarrow$$

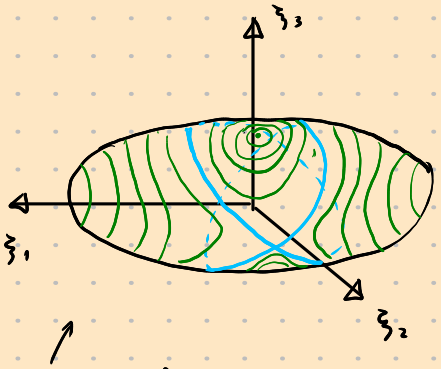
$$\cos\theta(t) = \frac{Cr(t)}{K} \qquad tg\,\varphi(t) = \frac{Ap(t)}{Bq(t)} \qquad \psi(t) = \psi_0 + \int_0^t f_\psi(t)\,dt$$

Геометрическая интерпретация Мак-Кулага

Перейдём к вектору $\vec{K}_\xi$:

$$\begin{cases} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = const & \text{- сфера} \\ \dfrac{K_1^2}{A} + \dfrac{K_2^2}{B} + \dfrac{K_3^2}{C} = 2T & \text{- эллипсоид Мак-Кулага} \end{cases} \qquad \vec{K}_\xi = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{K}_\xi$ может лежать только на пересечении сферы и эллипсоида Мак-Кулага.



A - самый большой момент => ось по ξ_1 - самая длинная

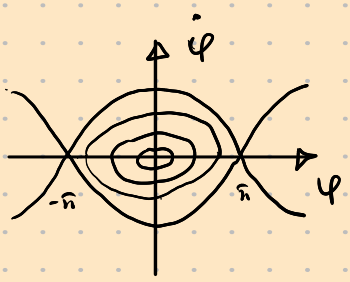
Синим - сепаратрисы, зелёным - кривые движения $\vec{K}_\xi$

$K^2 = 2BT$ - ур-е сепаратрис

$$\underbrace{\left(1 - \frac{B}{A}\right)}_{>0,\ \lambda^2} K_1^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{B}{C}\right)}_{<0,\ -\mu^2} K_3^2 = 0$$

$$(\lambda K_1 - \mu K_2)(\lambda K_1 + \mu K_2) > 0$$

Гайка Джанибекова объясняется медленным (~бесконечно долгим) движением вблизи сепаратрис - положений равновесия (как у маятника вблизи перевёрнутого положения) - и резким переходом через него



Недостаток интерпретации: теряется вращ-е вокруг $\vec{K}$.

Интерпретация Пуансо

$f(\vec{r}) = \vec{r}^T J \vec{r} - 1 = 0$ - эллипсоид инерции

$\vec{r} = \lambda \vec{\omega}$ $\qquad \lambda^2 \underbrace{\vec{\omega}^T J \vec{\omega}}_{2T} - 1 = 0$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = const$$

$\nabla f = 2 J \vec{r}$ (проверяется покомпонентно)

$\nabla f = \frac{2}{\sqrt{2T}} J \vec{\omega}$ $\qquad \frac{2\vec{K}}{\sqrt{2T}} = const$