

# Глава XVII

Несколько приложений к экстремумам функций нескольких переменных

## §1. Теорема о несуществовании

$$F(x, y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$  — не является гладкой ф-и



### Теорема

Пусть ф-я 2-х переменных гладк. в  $U(x, y)$ .  $F(x_0, y_0)$ ,

$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists \Pi = \{x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - b < y < y_0 + b\}$

так что  $y = f(x)$  —  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ .

•  $F(x)$  непр-я на  $(x_0 - a, x_0 + a)$  и  $F'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$  на  $(x_0 - a, x_0 + a)$

### Доказательство

① Не наруж. одн.,  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ .

По лемме о сопр. знака,  $\exists$  отр-е  $(x_0, y_0)$  (в б-же прмнн).

$\tilde{\Pi} = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ , т.к.  $F'_y > 0$  в  $\tilde{\Pi}$ .



$$\varphi(y) = F(x_0, y)$$

$$\varphi(y_0) = 0, \quad \varphi'_y = F'_y(x_0, y) > 0, \quad y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

$\varphi(y) \uparrow$  справа

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 + b) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - b) < 0$$

По лемме о сопр. знака (зк  $F$ )  $\exists A: \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \left\{ \begin{array}{l} F(x, y_0 - b) < 0 \\ F(x, y_0 + b) > 0 \end{array} \right.$

Значит  $x^* \in (x_0 - a, x_0 + a)$

$$\varphi(y) = F(x^*, y)$$

$$\varphi(y_0 + b) > 0, \quad \varphi(y_0 - b) < 0$$

но т.  $b - k$ ,  $\exists y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]: \varphi(y^*) = 0$

$$\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0 \Rightarrow \varphi(y) \uparrow$$
 справа  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Foga:  $f(y^*) = 0$  - egensid.

$\forall x^* \in [x_0-a, x_0+a] \exists! y^* \in [y_0-b, y_0+b]$

$$f(x^*, y^*) = 0$$

$$y^* = f(x^*) \quad \text{Replace 2. givværdi}$$

② Hvis  $x \in [x_0-a, x_0+a]$ ,  $y = f(x)$ .

$$f(x, y) = 0$$

$\Delta x$  - udværdi af  $x$ ,  $\Delta y$  - udværdi af  $y$ .

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$

No 1. læren om der er en vektor mellem  $(x, y)$  og  $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ .

$$0 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_x(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta y,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y)}{f'_y(x+\frac{1}{2}\Delta x, y+\frac{1}{2}\Delta y)}$$

$$\Pi = \{x_0-a < x \leq x_0+a, y_0-b < y \leq y_0+b\}$$

$$\bar{\Pi} = \{x_0-a \leq x \leq x_0+a, y_0-b \leq y \leq y_0+b\}$$

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \text{ på } \bar{\Pi}.$$

$\bar{\Pi}$  - konvex, t.e.  $|f'_x| \leq \alpha$  - v.p.

$$f'_y \geq \beta > 0 - \text{genn. inf.}$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq \frac{\alpha}{\beta} = M$$

$$|\Delta y| \leq M |\Delta x|$$

$y = f(x)$  v.p. på  $[x_0-a, x_0+a]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (\forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta = \frac{\epsilon}{M} > 0)$$

Foga  $f$  - påknapet v.p. på  $(x_0-a, x_0+a)$ .

No 3. o. sammenhæng mellem op-værdi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x, f(x))}{f'_y(x, f(x))} - \text{v.p.} \quad \text{UTD}$$

## Теорема (однознач.)

- ① Рассмотрим  $n+1$  неизвестных  $F(x_1, \dots, x_n, y)$  непр. гладкое. Имеется точка  $\bar{x} = (x_1^*, \dots, x_n^*, y^*)$ , при этом  $F(\bar{x}) = 0$ ,  $F'(x_1^*, \dots, x_n^*, y^*) \neq 0$ . Тогда существует однозначное  $y$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ :
- $$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n, y^* - \beta < y < y^* + \beta\},$$
- и к-точка  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x_1, \dots, x_n)$ .
- ②  $F$  непр. гладкое. Имеется  $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_i^* - \alpha < x_i < x_i^* + \alpha, i=1, \dots, n\}$ , при этом в  $\Pi'$
- $$f'_i = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, F)}{F'_{y}(x_1, \dots, x_n, F)}, \quad i=1, \dots, n.$$

Д-бо:

① Док. сущест., Тогда  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

② Оценим:

Пусть  $\gamma$ . Аддитивна для  $q$ -умножения непр..

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1 + \alpha x_1, \dots, x_n + \alpha x_n, y + \alpha y) - F(x_1, \dots, x_n, y) = \\ &= F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{3}\alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{3}\alpha x_n, y + \frac{\gamma}{3}\alpha y) \alpha x_1 + \dots + \\ &\quad F'_{x_n}(x_1 + \frac{\gamma}{3}\alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{3}\alpha x_n, y + \frac{\gamma}{3}\alpha y) \alpha x_n + \\ &\quad F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{3}\alpha x_1, \dots, x_n + \frac{\gamma}{3}\alpha x_n, y + \frac{\gamma}{3}\alpha y) \alpha y \\ \alpha y &= -\frac{F'_{x_1} \alpha x_1 + \dots + F'_{x_n} \alpha x_n}{F'_{y}} \leq \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\beta} = M_p \quad (|F'_{x_i}| \leq \alpha_i, |F'_{y}| \geq \beta) \end{aligned}$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$  падает непр. на  $\Pi'$

$$\lim_{\alpha x_i \rightarrow 0} \alpha y = 0$$

Рассмотрим  $\alpha x_1 = \dots = \alpha x_n = 0$

$$\frac{\alpha y}{\alpha x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \frac{\gamma}{3}\alpha x_1, x_2, \dots, x_n, y + \frac{\gamma}{3}\alpha y)}{F'_{y}(x_1 + \frac{\gamma}{3}\alpha x_1, x_2, \dots, y + \frac{\gamma}{3}\alpha y)}, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{\alpha x_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{\alpha x_1} = \dots = -\frac{df}{dx_1}, \text{ аналогично } x_2, \dots, x_n.$$

Чт.

## § 2 Teorema o one-me neblivim p-ii

Dnach.  $u = u(x)$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad - \text{gugup - q-p-ii}$$

Marginalna deriva -  $D_u = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

Esim. ona kladymas, kai cyp - et apiegiavimas - deriva.

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

### Teorema (o mese)

Prym.  $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  neyp-gugup-q-p-ii & aps-ii  
 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$F_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)} \neq 0.$$

Torga  $\exists \Pi = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\text{Ie } \left. \begin{cases} F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \bar{y} = f(\bar{x}), \text{ apriein q-p-ii}$$

$y_i = F_i(\bar{x})$ ,  $i=1 \dots m$  - neyp-gugup. na

$$\Pi' = \{x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i\}$$

## § 3. Teorema apie svaranu apibraneniu.

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gugup.

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x})$$

Biamo gurejano: eim  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , Torga

$$D_{F \circ \Phi} = D_F \cdot D_\Phi.$$

Esim. eim  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$ , to

$$D_{F\Phi}|_{\bar{x}} = D_F|_{\bar{y}} \cdot D\Phi|_{\bar{x}}$$

Пусть  $n=m=p$ , тогда

$$J_{F\Phi}|_{\bar{x}} = J_F|_{\bar{y}} \cdot J_\Phi|_{\bar{x}}$$

Однозначні симбр.:

$$\Phi: G \rightarrow D \quad D \subset R^n$$

$$\Phi^{-1}: D \rightarrow G$$

$$\Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \Phi - \text{бінарній симбр.}$$

$$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1} - \text{если оно дифер.!}$$

Если симбр. динамічне та дифер., то однозначні не однозначні дифер.!

$n=1$ :

$$y=x^3 - \text{динам.}, \text{дифер.}$$

однозначні непарні. & т. д.

Бінарній симбр.

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$

$$\boxed{J \neq 0}$$

Опрац.

Симбр.  $\Phi$  - однозначні однозначні в одн. від  $G$ , якщо  $\forall \bar{x}_0 \in G \rightarrow \exists \delta > 0$ ;  $\Phi$  однозначні в  $U_\delta(\bar{x}_0)$ .

Теорема щодо однозначності симбр.:

Пусть  $\Phi: G \rightarrow R^n$  непр. дифер. та  $J_\Phi \neq 0$  в  $G$  ( $G \subset R^n$ ). Тогда  $\Phi$  однозначні однозначні:

$\forall x_0 \in G \rightarrow \exists \Phi^{-1}$  - непр. дифер. симбр. та  $y_0 = \Phi(x_0)$ .

Д-бо:

$$\text{Роз-вм } F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) - y_j, \quad j=1 \dots n$$

$$(y, x) \in R^{2n}$$

Оно непр. дифер.  $\forall (y, x) \in R^{2n}$  також, що  $x \in G$ ,  $y \in R^n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}, \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall (y, x_0)$$

Із т. є ок-ве нервніх кр-вні  $\exists \Pi = \{(y, x) \in R^{2n} : y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i\}$

б к-пом

$$y_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F_j(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$$

$F_i$  непр. функц. на  $\Pi' = \{y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i\} \subset R^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$  динамично отображает нен-е мн-ло  $X \subset R^n$  на  $\Pi'$ .

$$x = \Phi^{-1}(\Pi')$$

$\Pi'$ - отр. мн-ло, наимн. праобраз отр. мн-ла или непр. отр. един. отр. мн-ло  $\Rightarrow$

$\Rightarrow X$ - отображение



$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset X$$

$$\forall x_0 \in X \rightarrow \exists U_\delta(x_0) \text{ б к-пом отр. гл-о отображения.} \quad \text{УГД}$$

## § 4. Экстремумы ф-ии нескольких переменных

Опт-е

$x^* \in R^n$  наз-ся локальн. макс. локального экстремума ф-ии  $y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x^*) \geq f(x) \text{ для } \forall x \in U_\delta(x^*) \text{ и } \forall x \in U_\delta(x^*) \rightarrow f(x) > f(x^*)$

Аналогично для мин. лок. экстр.

Несобственное ум. локального экстремума

Если  $f(x)$  непр. в  $x^*$  и  $x^*$  гл-о т. лок. экстр., то  $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \quad (\text{стационарное условие})$$

П-ло:

Рассмотрим ф-ию  $\varphi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Тако, что  $x_i^*$  - лок. экстремум токо по одн.  $x_i$ . Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{Аналогичные выражения}$$

УГД

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j$$

Норм. опр.:  $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) > 0$

Опим. опр.:  $\forall x \neq 0 \rightarrow K(x) < 0$

Ненорм., опр.:  $\exists x_1, x_2 : K(x_1) > 0, K(x_2) < 0$

Ненорм. наизнеч.:  $\forall x \rightarrow K(x) \geq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Опим. наизнеч.:  $\forall x \rightarrow K(x) \leq 0, \exists x \neq 0 : K(x) = 0$

Если  $K(x) \equiv 0$ , то она назнеч. и опим. наизнеч., также ненорм. сущ не.

Рассл f. гланж. неп. групп. в  $G \in R^n$ , т.е. unless bee неп. различне групп. більшо  
негад, але якщо  $\tau, \tau$  відповідає груп. (  $F_{yx}'' = F_{xy}''$  )

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n F''_{x_i x_i}(x^0) dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n F''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j - \text{вл. груп. ст. більшо } (dx_1, \dots, dx_n)$$

### Диференц. ю-е нормал. заспособ

Рассл f(x) гланж. неп. групп. в  $U_s(x^0)$  в  $x^0$ -см. норм. Тогда

$$K(x) = d^2 f(x^0) - \text{вл. груп. Тогда:}$$

1. есл  $K(x)$  норм. опререна, та  $x^0 - \tau$ . симетрич. відносно
2. есл  $K(x)$  опим. опр., та  $x^0 - \tau$ . симетрич. відносно
3. есл  $K(x)$  ненорм., та  $x^0$  не єб-сі  $\tau$ . відносно
4. есл  $K(x)$  наизнеч., та  $x^0$  єн не єб-сі  $\tau$ .

### Лемма

Рассл  $K(x)$  в  $R^n$  назнеч. опр., та  $\exists C > 0 : \forall x \in R^n \rightarrow K(x) \geq C|x|^2$

Есл опим. опр., та  $\exists C > 0 : \forall x \in R^n \rightarrow K(x) \leq -C|x|^2$

Д-бо 1 розм:

Згенерум, та  $K(x)$  норм. опререна в окрестні  $R^n$ , т.е.  $K(x)$  - зовнє від більшо  
точка в окрестні не єкспансив.

$$K(x_1, \dots, x_n) - \text{неп. від } R^n$$

$$S = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} - \text{оп. в замкн. - кінцівк.}$$

Тогда єп-н, неп. на нормал. гостині  $\inf \text{ на } S$ .

$K(x) \geq 0$  na  $S \Rightarrow \inf_s K = C > 0$ .

$\forall x \in S \rightarrow K(x) \geq C$ .

При  $x \neq 0 \in R^n$ . Рад-ун  $z = \frac{x}{|x|} \equiv 1 \Rightarrow K(z) \geq C$

$$K\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{|x|^2} K(x) \geq C$$

$$K(x) \geq C |x|^2 \quad \text{УТА}$$

D-бо тапсару

1.  $f(x)$  ғанаңын непр. грөзүп  $\mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow$  ынанымалык жиындар (Редно):

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0) \rightarrow f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(|g|^2), \quad g^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = |dx|^2$$
$$df \equiv 0 \rightarrow \text{с. сипат.}$$

$d^2 f$  - нарам. орын.

Т.е.  $f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} (|dx|^2) + o(|dx|^2) =$

$= f(x^0) + \frac{\epsilon}{2}  dx ^2 + \epsilon(dx) \cdot  dx ^2 =$	$\left  \begin{array}{l} dx \rightarrow (0, \dots, 0) \\ \lim_{dx \rightarrow (0, \dots, 0)} \epsilon(dx) = 0 \end{array} \right.$
$= f(x^0) +  dx ^2 \cdot \left( \frac{\epsilon}{2} + \epsilon(dx) \right)$	

$$\frac{\epsilon}{2} + \epsilon(dx) > 0 \quad \& \quad \mathcal{U}_\delta(x^0) \Rightarrow f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x^0).$$

Т.е.  $x^0$  - с. сипат. нокт. минимум.

2. Анализмас

3.  $d^2 f(x^0)$  - неон. кеб. сипат.

$\exists z \neq 0 : K(z) > 0$ .

Рад-ун бекіспен нұтқаралғанда  $dx = \lambda z$ ,  $\lambda \neq 0$  (нұтқарыл. //  $z$ )

$$d^2 f = K(dx) = \lambda^2 K(z) = \underbrace{\left( \lambda^2 \frac{K(z)}{|z|^2} \right)}_{\beta > 0} |z|^2$$

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + \epsilon(dx) \cdot |dx|^2 = f(x^0) + \frac{1}{2} \beta |z|^2 + \epsilon(dx) \lambda^2 z^2 =$$
$$= f(x^0) + \frac{1}{2} \beta + \epsilon(dx) \lambda^2 z^2$$

$$\frac{1}{2} \beta + \epsilon(dx) \lambda^2 z^2 > 0 \quad \text{нан жеңи. макш. } \epsilon(dx)$$

Т.е.  $f(x) > f(x^0)$  ма  $x // z$

$\exists z' \neq 0 : K(z') < 0$

Анализмас енде  $dx = \lambda z'$ , то нұтқаралғанда макш.  $\epsilon(dx)$   $f(x) < f(x^0)$ .

$x^0$  - не с. сипат.

Пример:  $z = x^4 + y^4$ ,  $z'_x = 4x^3$ ,  $z'_y = 4y^3$ , сипат. 1.  $(0, 0)$ ,  $z''_x = 12x^2$ ,  $z''_y = 12y^2$ ,  $z''_{xy} = 0$ ,  $d^2 z(0, 0) = 0$ .

Наго сунгыра  $\Delta z(0,0)$ :  $z(x,y) - z(0,0) \geq 0$  енди  $x^2 + y^2 > 0$  - тақ. нын.

### § 5. Үндемсіл (оганауданын) экстремум.

$$z = xy \text{ (сеге)}$$

$$z'_x = y, z'_y = x \quad (\text{сағ. } (0,0))$$

$$z''_{xx} = z''_{yy} = 0, \quad z''_{xy} = 1$$

$d^2z$  - неодн. ал. ғп. - неодн. экстр.

Нын үшін  $x+y=1$ :  $z = x(1-x)$ , әрек. мак. б.  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Оң

Т.  $x^\circ$  мак-тас  $T$ . сипарыс үндемсіл минимумында ғ-ан  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  нын бірнешеңін үндемсіл өзіні  $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0$ , енди  $\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x^\circ)$  нын бірн. үшін өзіні  $\rightarrow f(x) > f(x^\circ)$

Енди из. үшін өзінін көмк. алғынан өзін түрлендірең жағынан, то ғарненесін зияра да оданын экстремум ғ-ан меншіккінде түрлендірең.

А енди нет, то үндемсіл ғ-ан түрлендірмей.

Нында  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , Тогда ғ-ан түрлендірмей  $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x)$

Нын бірн. үшін - 2 өзіні  $L = f, \forall \lambda_i$  - ғарн. түрл.  $f$  үн  $L$  түрлендірең.

### Многодимен. үш-нұс. сипарыс. экстремумы

Нында  $f(x), \varphi_i(x)$  ( $i=1 \dots n$ ) неодн. ғарн. ғ-ан  $U_\delta(x^\circ)$ . Нында  $x^\circ$  - 1. оң. сипарыс. экстремумы  $f(x)$  нын  $\varphi_i(x) = 0$ , үзүндең  $\operatorname{rg} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \\ i=1 \dots n \\ j=1 \dots n \end{array} \right) = m$  (түрлендірілген ғ-ан  $\varphi_i$  мак. меншіккіндең негабилеміліктеріндең).

Тогда  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m: x^\circ$  - 1. оң. сипарыс. экстремумы  $L(x)$ .

Мног. ғарн. сипарыс.  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0 \end{array} \right.$  - сипарыс.  $n+m$  ғ-аның  $\infty^{n+m}$  неодн.  $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

D-бо:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{m \times n}, \quad \operatorname{rg} \Phi = m, \quad x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$$

Если все неправильные  $\lambda_i \neq 0$ . Для каждого  $i$ -го ненулевого:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \frac{\partial (\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ в т. } x^* \Rightarrow \text{в } \varphi_i(x^*) \text{ в нем ненулевое}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{т.о. т. о. ненулевой в т. } x^*, \text{ в } x - \text{ном} \\ \text{св-ва локальной вып. ф-ии} \end{array}$$

$$* \begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_{m+1}, \dots, x_n - \text{независимые ф-ии} \\ x_1, \dots, x_m - \text{зависимые} \end{array}$$

Ф-ии  $g_i$  выпуклые, в окрестности  $\tilde{x}^* = (x_{m+1}^*, \dots, x_n^*)$ . Продолжим далее:

$$** \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n \\ dx_m = \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n \end{cases} \quad \begin{array}{l} dx_1, \dots, dx_m - \text{заб. выпуклые ф-ии} \\ dx_{m+1}, \dots, dx_n - \text{независимые выпуклые ф-ии} \end{array}$$

При заменении зв-ми членов за  $f(x)$ :

$$f(x)|_* = f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = F_*(\tilde{x})$$

$$L(x)|_* = L(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = L_*(\tilde{x})$$

$$L(x)|_x = f(x)|_* \quad \forall \lambda;$$

$$L_*(\tilde{x}) = F_*(\tilde{x}) \quad \forall \lambda;$$

$$dL(\tilde{x}^*) = dF_*(\tilde{x}^*) = 0 \quad (\text{т.к. это локальная вып. ф-ия}) \quad \forall \lambda;$$

Всегда ненулевые выпуклые ф-ии не являются неподвижными:

$$dL_*(\tilde{x}^*) = d(L(x)|_*) = dL(x)|_{**} \quad \begin{array}{l} \text{- выпуклые ф-ии не подвижны} \\ \text{иначе выпуклые ф-ии} \end{array}$$

$$dL(x)|_{**} = \frac{\partial L}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n} dx_n \quad \begin{array}{l} \text{заб. ф-ии} \\ \text{независимые ф-ии} \end{array}$$

Для каждого  $\lambda_i$ -го ненулевого. Рассмотрим  $\lambda_i$ : т.к., что  $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0$ .

$$L = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(x^*) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^*) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^*) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- лин-я нулевы, если выпуклые!} \\ \Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}|_{x^*} \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ п-р} \end{array}$$

$\lambda_i$  ненулевое.

Рынок равн. 2:1

$$dL_0(\tilde{x}^*) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*) dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^*) dx_m}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) dx_n}_{=0}$$

Но  $dL_0(\tilde{x}^*) = 0$   $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^*) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*) = 0 \Rightarrow$  рыноч. равн. 2:1  $x^*$  - стаб. точка.  
 $dx_{m+1}, \dots, dx_n$  - ненул.

УДА

Две проверки неодн. ус-я  $\Rightarrow$  однос. экстремуму можно пользоваться:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \psi_1 = \dots = \psi_m = 0 \end{array} \right. \quad \text{n+m уп-ий, n+m ненул.}$$

### Дискриминантное критерий

Функции  $f(x)$ ,  $\psi_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m < n$  - гладкие непр. функц. с нулевыми производными по  $x_i$  в точке  $\tilde{x}$ .  
При этом матрица Гессеана  $\left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$  падает в Т.Х.

При этом  $\tilde{x}^*$  и  $\lambda_i$ ,  $i=1 \dots n$  являются решением (I). Тогда в Т.Х. получаем квадратичную форму  $d^2L(\tilde{x}^*) \Big|_{**}$  - квадратичная форма  $n \times n$  непр. функц. (обозначение  $\lambda$  не то же, что и в квадратичной форме).

Тогда если эта форма положит. опред., то  $\tilde{x}^*$  - л.ст. максимума функции  $L$  (если  $\lambda$  отрицательные, то  $\tilde{x}^*$  - л.ст. минимума), если отрицат., то  $\tilde{x}^*$  - л.ст. максимума  $L$ .

**Пример:** Если  $d^2L(\tilde{x}^*)$  - неотриц. опред. квадратичная форма в непр. об (то негативна), то есть негативна ( $**$ ) она также отрицат.

Иначе функция имеет негативный ( $**$ ).

Если же негативна ( $**$ ) квадратичная форма в непр. об (то положительна).

**Пример:**

$$f = xy \text{ при ус-и } x+y=1$$

$$L = xy + \lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = y = \frac{1}{2}$$

$$d^2 \lambda = 2dx dy - \text{неоптим. кб. огранка от } dx, dy$$

Прогресс. ум. образ:  $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$

$$d^2 \lambda|_{x,y} = -2dx^2 - \text{сигн. оптим. кб. огранка от } dy = 0$$

Значит  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  - ум. минимум.

### Справка

$d^2 f$  не одн. ил. огранка син. замены независим.

$f = f(x_1, \dots, x_n)$  - гладкая непр. функ.

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d(dx_k) + \sum_{k=1}^n dx_k d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k + \sum_{k=1}^n dx_k \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \right) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k \end{aligned}$$

Если  $x_1, \dots, x_n$  - незав. независимые, то  $d^2 x_k = 0$

$$d^2 f = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

Также можно видеть в том случае, если  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$  в некоторой т.

(б) синг. т.) - квадрикунвариантное ограничение  $d^2 f$  син. замены незав. в синг. форме

### D-B

Соответствует багажу и алгебре непр. зависим.

Доказательство:  $x_i = g_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$  - гладкая непр. функ. в окр-тии  $\tilde{x}^0$

$$x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$\varphi_i(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1 \dots m)$$

Прогресс. поб-бо по  $x_j$ :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i=1 \dots m$$

При  $g_m(x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$  имеем в окр-тии  $\tilde{x}^0$  незав.  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ .

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{m+1}, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ в окр-тии } \tilde{x}^0$$

Берем  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$  разделяя  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ , значение  $\neq 0$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \text{ непр. зависим.} \Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \text{ непр. зависим.} \Rightarrow g_i - \text{гладкая непр. зависим.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  имеем минимум  $d^2$  в коорд.  $y_p$ -коорд.

В общем случае ограничение  $d^2 \lambda(x^0)$  (бес  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}(x^0) = 0$ )

$$d^2 L(x^0) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(x^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k \quad (\text{незав. от } x^0, \text{ т.е. } dx_j dx_k \text{ гипер-плоск. незав. непен-} \\ \text{норм. к ним гипер-плоск. оп-мин}).$$

$$L(x)|_x = L_0(\tilde{x}^0) \quad \text{б. аргумент.}$$

$$d^2 L_0(\tilde{x}^0) = d^2(L(x^0)|_x) \stackrel{\text{д}}{=} d^2 L(x^0)|_{**} \\ \text{!! б. арг. гипер-плоск. оп-мин н-н непен-бл.} \quad \text{б. арг. гипер-плоск. оп-мин н непен-бл.}$$

$$d^2 f(\tilde{x}^0)$$

$$df_0(\tilde{x}^0) = dL_0(\tilde{x}^0) = dL(x^0)|_{**} = 0 \quad (\text{б. арг. асе-мин I}) \Rightarrow \tilde{x}^0 - \text{стаци. т. } f_0(\tilde{x}^0)$$

Характер экстремума в точке т. оптим. гл. условий

$$d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 L(x^0)|_{**}$$

Характер экстремума оптим. условиям. точек оптим.

УТД

# Глава XIX

## Кратные интегралы

§ L Определение. Критерий интегрируемости Дордь.

Прим.  $G$  - измеримое мн-во,  $G \subset R^n$ ,  $G \neq \emptyset$ .

$R$  - разбиение  $G$  на изм. изм. мн-ва  $G_i$ :  $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ .

$$\forall i \neq j \rightarrow \mu(G_i \cap G_j) = 0$$

Максим. разбиение  $|R| = \max_{i=1 \dots N} \operatorname{diam} G_i$

Границы, т.е.  $f(x)$  опр. на  $G$ . Равн.-мн.  $M_i = \sup_{G_i} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{G_i} f(x)$

Оп-е

Верхнее и нижнее суммы Дордь:

$$S_a^* = \sum_{i=1}^N M_i \mu G_i, \quad S_{+R} = \sum_{i=1}^N m_i \mu G_i$$

Сумма Римана

$$\forall i=1 \dots N \rightarrow \xi_i \in G_i$$

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu G_i$$

Две гранич.  $R$ :  $S_{+R} \leq \sigma_R \leq S_a^*$ .

Коэффициент оп-мн

$$w_R = S_a^* - S_{+R} = \sum_{i=1}^N w_i \mu G_i, \quad w_i = M_i - m_i$$

Разбиение  $R_2$  включает за  $R$ . ( $R_2 \supseteq R_1$ )  $\Leftrightarrow$

$R_1: G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ ;  $\forall G_i$  - однозначное пакетование из  $G$ ;

$R_2: G = \bigcup_{j=1}^{n'} G_j$

Упр

Если  $R_2 \supseteq R_1$ , то

$$S_{+R_2}^* \leq S_{+R_1}^*, \quad S_{+R_2} \geq S_{+R_1}, \quad w_{R_2} \leq w_{R_1}$$

D-ко: (как в 1D)

Доказываем пар-тию изм., когда оно из мн-в  $R$  разбивается maybe:

$$G_i = G_i^1 \cup G_i^2, \quad \mu(G_i^1 \cap G_i^2) = 0$$

Надані граничні значення наведено позначенням  $\exists$  то є.

$$M_i^* = \sup_{G_i} f(x) \quad M_i'' = \sup_{G_i''} f(x) \quad M_i = \sup_{G_i} f(x)$$

$$M_i \mu G_i = M_i \mu G_i + M_i'' \mu G_i'' \geq M_i^* \mu G_i + M_i'' \mu G_i''$$

Все однакове  $\& S_{R_1}^* \cup S_{R_2}^*$  симетричні  $\Rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^*$ .

Аналогично для непарних сум.

$$\omega_{R_2} = S_{R_2}^* - S_{\pi R_2} \leq S_{R_1}^* - S_{\pi R_1} = \omega_{R_1} \quad \text{УДА}$$

Вважаємо  $\max(R_1, R_2)$  - найбільше з  $R_1, R_2$ .  $G_i \cap \tilde{G}_j$

$$\max(R_1, R_2) \geq R_1, \quad \max(R_1, R_2) \geq R_2.$$

### Лемма

$$\forall R_1, R_2 \rightarrow S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^*$$

Д-бо:

$$R = \max(R_1, R_2) \Rightarrow R \geq R_1, R_2$$

$$S_{R_1}^* \geq S_{R_2}^* \geq S_{\pi R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \quad \text{УДА}$$

### Операції

Пусть  $f(x)$  - функція на відрізку  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ . Розглянемо  $I^* = \inf_R S_R^*$ ,  $I_* = \sup_R S_{\pi R}^*$  (нап. в цьому випадку розглядаємо всі відкриті інтервали  $D$  додатково).

Если  $I^* = I_* = I$ , тоді  $f(x)$  наз.  $\omega$ -непреривною на  $G$ , а  $I$  -  $\omega$ -крайнім непреривним функцією  $f(x)$  на  $G$ :  $I = \int_G f(x) dx$

Оскільки  $-\infty < I_* \stackrel{(1)}{\leq} I^* \stackrel{(2)}{\leq} +\infty$

(1) відходить від операції лемми:  $S_{R_1}^* \geq S_{\pi R_2}^* \Rightarrow \inf_{R_1} S_{R_1}^* \geq \sup_{R_2} S_{\pi R_2}^*$

(2) відходить від  $\exists$  то  $I^* = S_{R_1}^*$  є  $\omega$ -непреривною на  $R_1$ , аналогично (1)

### Критерій Дордьї непреривності

Пусть  $f(x)$  оп. на відкритому  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Що ж підказує:

1.  $f(x)$  непреривна на  $G$ .

2.  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$  раздение  $R$  на-ба  $G$ :  $\omega_R < \varepsilon$

3.  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall$  раздение  $R$ ,  $|R| < \delta \rightarrow \omega_R < \varepsilon$

D-б:

(3)  $\Rightarrow$  (2) - оребуно  
как паше

(2)  $\Rightarrow$  (1)  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

как паше  $\forall$  разд.  $R \rightarrow S_{x_R} \leq \bar{I}_x \leq I^* \leq S_x^*$ .

$$0 \leq I^* - \bar{I}_x \leq S_x^* - S_{x_R} = \omega_R$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon \Rightarrow |I^* - \bar{I}_x| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ -модел  $\Rightarrow I^* = \bar{I}_x \Rightarrow f(x)$  ннт

(1)  $\Rightarrow$  (2) Пусть  $f(x)$ -ннт. на  $G$ .  
как паше

$$I^* = \inf_n S_n^* = \underline{I}_x = \sup_n S_{x_n} = \bar{I}$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_1: S_{x_{R_1}}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_2: S_{x_{R_2}} > \bar{I} - \frac{\varepsilon}{2}$

$$R = \max(R_1, R_2)$$

$$S_n^* \leq S_{x_n}^* < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} \quad S_{x_n} \leq S_{x_{R_2}} < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } \omega_R = S_n - S_{x_n} < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R: \omega_R < \varepsilon$

(2)  $\Rightarrow$  (3): Преведение гомом и лемма.

### Определение

Пусть  $X, Y$ - два ннты на-ба в  $\mathbb{R}^n$ .

$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} d(x, y)$  - расстояние между на-бами.

Если  $X \cap Y \neq \emptyset$ , то  $\rho(X, Y) = 0$ . Остальное не верно.

### лемма 1

Пусть  $F_1, F_2$ - 2 на-бами в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\rho(F_1, F_2) = 0$ . Тогда  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ .

Доказательство: если  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , то  $\rho(F_1, F_2) > 0$

D-б:

Пусть  $\rho(F_1, F_2) = 0$ ,

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists x \in F_1, y \in F_2 : g(x, y) < \varepsilon$

$\forall n = 1, 2, \dots \rightarrow \exists x_n \in F_1, y_n \in F_2 : g(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

T.k.  $F_1$  - ovp. (какими л.  $R^n$ ), то  $x_n$  - ovp. нос-ти, то т. Банахов - Венгерская

$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x_0$  (сходим), значит  $F_1$ -замкнут  $\Rightarrow x_0 \in F_1$ .

$$g(y_{n_k}, x_0) \leq \underbrace{g(y_{n_k}, x_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \rightarrow 0} + \underbrace{g(x_{n_k}, x_0)}_{\text{при } k \rightarrow \infty} \Rightarrow y_{n_k} \rightarrow x_0.$$

$F_2$ -замкнут  $\Rightarrow x_0 \in F_2$ .  $x_0 \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

**Замечание** меняться определение  $F_i$ .  $F_i$  может не замкнут.

Если эта замкнут, но не овр., значит может не баниахов.

### лемма 2

Пусть  $F_1, \dots, F_n, G \subset R^n$ ,  $\forall i, j = 1 \dots N \rightarrow g(F_i, F_j) = p_{ij} > 0$

$\text{diam } G < p$

Тогда для  $G \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$ ,  $\exists j : G \in F_j$ .



Док-во

Пусть  $\exists x_0 \in G, x_0 \in F_i$   
 $\exists y_0 \in G, x_0 \in F_j, i \neq j$

$x_0, y_0 \in G \Rightarrow p(x_0, y_0) < p$

$x_0 \in F_i, y_0 \in F_j \Rightarrow g(x_0, y_0) \geq g(F_i, F_j) \geq p$

Противоречие.  $\square$

### лемма 3

Пусть  $G$  - овр. мн-во в  $R^n$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists S \supseteq G$ ,  $S$ -мерное и симмр.

$$mS < \mu^*G + \varepsilon$$

Д-во

Сыз-е мерное  $S$  имеет из овр-а мерное изерн:

$$\mu^*G = \inf mS, S\text{-мерн}, S \supseteq G$$

Но мож  $S$  можно бдлрно открыто?  $\exists$  мерн.  $S_1 : mS_1 < \mu^*G + \frac{\varepsilon}{2}$



Тогда  $\exists S$  - мерн. и симмр. оврн бдлрно панд:  $mS < mS_1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow mS < \mu^*G + \varepsilon \quad \square$$

## лемма 4

Пусть  $G, F$  - изм. мн-ва в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu F < \varepsilon$ .

Тогда  $\exists \delta > 0$ :  $\forall$  изм. мн-ва  $G$ ,  $|R| < \delta \rightarrow$

$$\sum_{G_i \cap F \neq \emptyset} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \cdot \varepsilon$$

D-то

По условию  $\exists S > F$  - квад. орт.:  $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$

Пусть  $S$  состоит из квадратов радиуса  $R = R(\varepsilon)$ .

$$S = \bigcup_{j=1}^N Q_j, \quad Q_j - квадрат радиуса r = r(\varepsilon) \quad (r = \frac{1}{2} \cdot \delta)$$

$$\delta(\varepsilon) = a.$$

Пусть изм. мн-во  $G$ ,  $|R| < \delta$ .

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq 3^n \mu \bar{Q}_j$$

$$\sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{G_i \cap S \neq \emptyset} \mu G_i \leq \sum_{j=1}^N \sum_{G_i \cap Q_j \neq \emptyset} \mu G_i \quad (\text{если } Q_j \text{ содержит } G_i)$$

Однако все изм. мн-ва  $G_i$  можно расположить в квадрате  $Q_j$ .

$$\Leftrightarrow 3^n \sum_{j=1}^N m \bar{Q}_j = 3^n \cdot mS < 3^n \cdot 2\varepsilon \quad \text{УДА}$$



(2)  $\Rightarrow$  (3)  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists R_0: \omega_{R_0} < \varepsilon$

$$R_0; G = \bigcup_{j=1}^N G_j^\circ, \quad \omega_{R_0} = \sum_{j=1}^N w_j^\circ \cdot \mu \cdot G_j^\circ, \quad \mu(G_i^\circ \cap G_j^\circ) = 0, \quad i \neq j$$

Но известно свойство,  $G_i^\circ \cap G_j^\circ = \emptyset, \quad i \neq j$

Если это не так - то мн-во нуль-мерное, а иначе - оно имеет изм. мн-во.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \partial G_j^\circ$$

По условию,  $\exists$  изм. мн-во  $S > \Gamma$ :  $mS < \frac{\varepsilon}{\rho M \cdot 3^n}$

$\mu \Gamma = 0$  по свойству измеримости в  $\mathbb{R}^n$

Конечно измеримое изм. мн-во Моргана.

$$M = \sup_G \|f(x)\|$$

T.k.  $\Gamma \subset S$ ,  $\Rightarrow \forall j \rightarrow \partial G_j^\circ \subset S$

Последовательность  $F_j = G_j^\circ \setminus S = \overline{G_j^\circ} \setminus S \Rightarrow F_j$  - замкнутое измеримое изм. мн-во



$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n G_j \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \quad (\text{преди } F_j \text{ много дали нынче.})$$

$$(i.e. (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B))$$

Түгем орнамен, шо көмүккөнен ессең, Р күннен осталбаш тарабынан.

Төзүлүштөрдөн  $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$  (i.e.  $F_i, F_j$  - ненесек жаңалас)

Пар-нан  $\rho = \min_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$ .

$$\text{Но алдан үй Т.к. } mS < \frac{\epsilon}{8M_3^n}, \text{ то } \exists \delta: \forall \text{ подж. } R, |R| < \delta \rightarrow \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \mu G_i < \frac{\epsilon}{8M_3^n} \cdot 2^{-3} = \frac{\epsilon}{4M}$$

$$\delta = \min(\delta_1, \rho).$$

Пар-нан подж. подж.  $R$  ин-да  $G$  санды, шо  $|R| < \delta$ .

Пар-нан гана. ин-да подж.  $G_i \subset G \setminus S$  (i.e.  $G_i \cap S = \emptyset$ )

$$G \setminus S = \bigcup_{j=1}^n F_j; \quad \text{diam } G_i \leq |R| < \delta \leq \rho$$

$\forall i \neq j \quad \rho_{ij} \geq \rho$ , төзүлүштөрдөн  $\exists j: G_i \subset F_j \subset G_j$

$$R_i = \max(R, R_0)$$

$$\sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i \leq \omega_{R_i} \leq \omega_{R_0} < \frac{\epsilon}{2} \quad \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i \leq 2M \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \mu G_i = 2M \cdot \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Охам.: } \forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall R, |R| < \delta \rightarrow \omega_\epsilon = \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i + \sum_{G_i \in S \setminus \emptyset} \omega_i \mu G_i < \epsilon$$

Ессең бе  $F_j$  нынан, то  $G \setminus S$  н үшінде сұмма отызыңбыз.

ЧТД,

