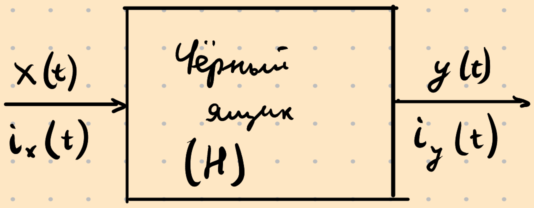
Филатов Иван Васильевич

Введение



- Все ящики не описать
- Рас-иваем только линейные и стационарные

Линейность:

$$\left.\begin{matrix} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Стационарность: $x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t+\Delta t) \to y(t+\Delta t)$

Чёрный ящик описывается:

- схемой
- набором параметров H

Любая сис-ма, составленная из RLC, яв-ся линейной и стационарной.

Топологические эл-ты

Ветвь - участок эл. цепи, вдоль к-рого протекает один и тот же I. Может состоять из ≥ 1 идеализированных двухполюсника.

Узел - место соединения ветвей

Неустранимый - >2 ветвей   Устранимый - 2 ветви

Контур - любой замкнутый путь, проход. по неск-им ветвям цепи.

Характериз. направлением обхода, каждая ветвь/узел проход. 1 раз

Относ. них можно записать:

Компонентные ур-я - свойства цепи, опред. её компонентами

Топологические ур-я - свойства цепи, опред. только её топологией

Правило Кирхгофа

- Закон сохр-я заряда
- Провода не накапливают заряд (узлы)

I закон Кирхгофа

Алг. сумма мгновенных знач-ий токов всех ветвей, подключ. к каждому из узлов в любой момент времени, равна 0.

$\sum_k i_k = 0.$

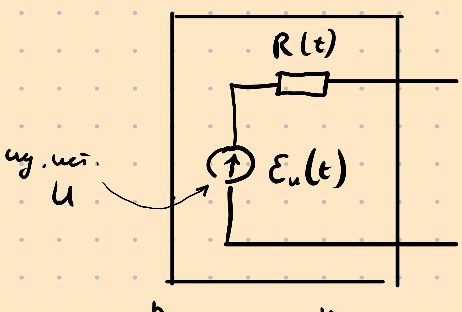
- Потенциальность эл. поля
- Консервативность эл. сил
- Потоки вектора $\vec{B}$ во времени в схеме не изменяются (не считая особых эл-ов)

II закон Кирхгофа

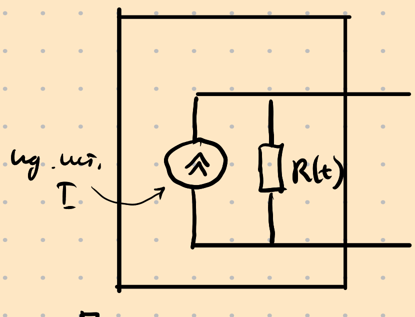
Алг. сумма мгновенных знач-ий напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, равна 0.

Теорема об эквивалентном генераторе

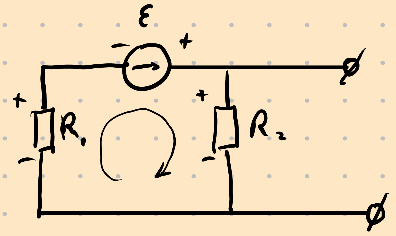
Ток произвольной ветви линейной эл. цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к к-му подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линеаризированным источником энергии, к-рый может быть представлен последовательной (Тевенин) или параллельной (Нортон) схемой замещения. При этом ЭДС идеального источника напряжения равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника, ток идеального источника тока равен току КЗ автономного двухполюсника, а внутреннее сопротивление и проводимость экв. источника равны соотв. комплексным входным сопрот. и проводимости автономного двухполюсника.



Парал. - Нортон



Послед. - Тевенин



$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2}$; $\underset{\text{холостого хода}}{U_{xx}} = -I R_2 = -\frac{\mathcal{E}R_2}{R_1+R_2}$

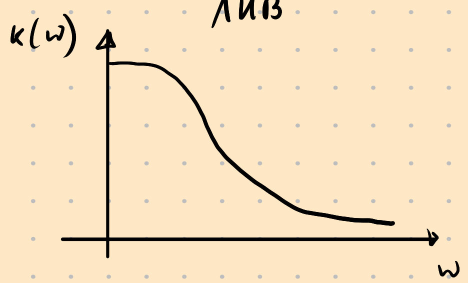
Заменяем идеализированный ист. ЭДС на перемычку или идеализированный ист. тока на разрыв цепи, считаем сопротивление схемы, получаем выходное сопротивление генератора.

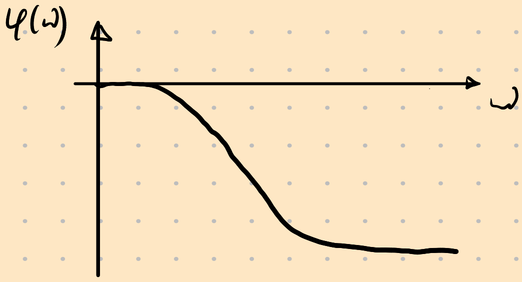
Это работает только с независимыми источника. Для зависимых придётся составлять сис-му лин. ур-ий (разберись с этим)

Частотный анализ характеристик цепей

$\cos(\omega t) \to$ | линейный четырёхполюсник | $\to K(\omega)\cdot\cos(\omega t + \varphi(\omega))$

ЛИВ



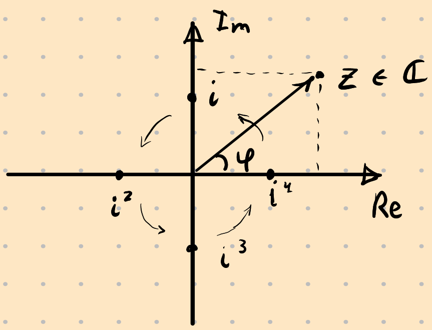


$K(\omega)$ – АЧХ

$\varphi(\omega)$ – ФЧХ

Самое полное описание схемы!

Тригонометрия неудобна – переходим к комплексным



$z = |z|\cos\arg z + i|z|\sin\arg z$ $(\varphi = \arg z)$

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

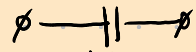
$z = |z|e^{i\arg z}$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\cos\omega t + i\sin\omega t \to$ | ЛИВ | $\to K(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)) + (\ldots)i\sin(\ldots)$

① 

$I = \frac{U}{R}$ $\quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$

② 

$I = C\frac{dU}{dt}$ $\quad \tilde{I} = C\frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C\tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\frac{1}{j\omega C}}$

импеданс

③ 

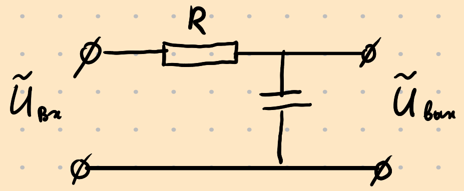
$U = L\frac{dI}{dt}$ $\quad \tilde{U} = j\omega L\tilde{I}$, $\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{j\omega L}$

Импеданс – комплексное сопротивление (Z) $\quad j = i$ в радиотехнике

Комплексная проводимость – Y

Линейные цепи 1 порядка

① Интегрирующая RC – цепь



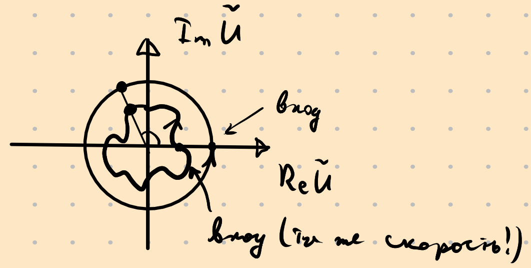
$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$ $\quad \tilde{U}_{вых} = \tilde{I}\cdot\frac{1}{j\omega C} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{j\omega RC + 1}$

$\tilde{U}_{вых} = \frac{\tilde{U}_{вх}(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2R^2C^2}$

Что будет, если на вход подать $\cos\omega t$?

$U_{вых} = Re(\tilde{U}_{вых}) = (\cos\omega t + \sin\omega t\cdot\omega RC)\cdot(1 + \omega^2R^2C^2)^{-1}$

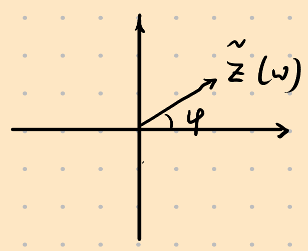
Аналитический сигнал: $\cos\omega t + i\sin\omega t$



$K(\omega) = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2R^2C^2}$

⇓

$\frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{A_0\cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{B_0\cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_0}{B_0}\cdot e^{j(\omega t + \varphi - \omega t)} = \frac{A_0}{B_0}e^{j\varphi}$

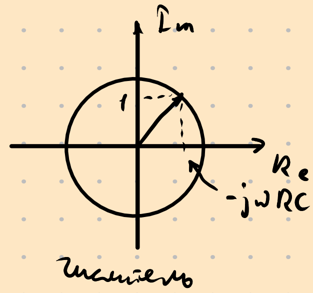


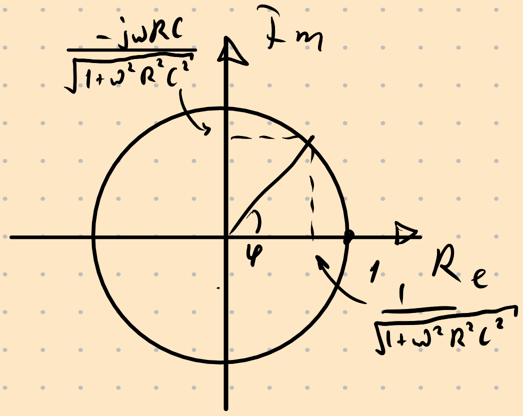
Получаем точку Z – сдвиг фаз – аргумент, модуль – соотношение амплитуд

Чтобы найти их, нужно из $K(\omega)$ выделить всю действ. часть и всю комплексную, комплексная причём должна иметь модуль 1 (это $e^{j\varphi}$).

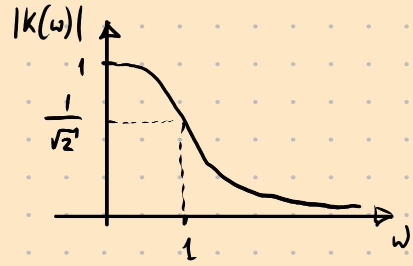
$K(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2R^2C^2} = \frac{\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}}}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}} \Rightarrow |K(\omega)| = (1 + \omega^2R^2C^2)^{-1/2}$

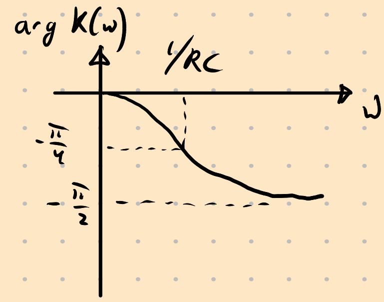
$|1 - j\omega RC| = \sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}$



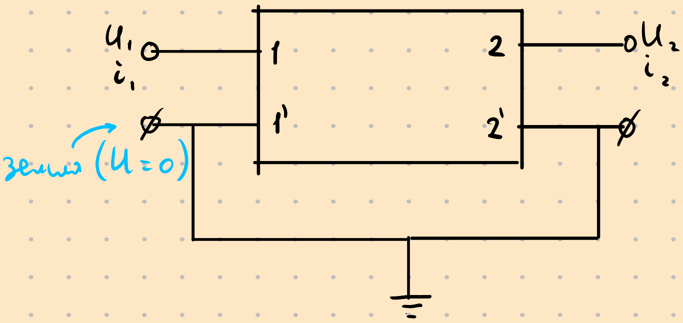


$\arg K = \varphi = -\operatorname{arctg} \omega RC$





Линейный четырёхполюсник

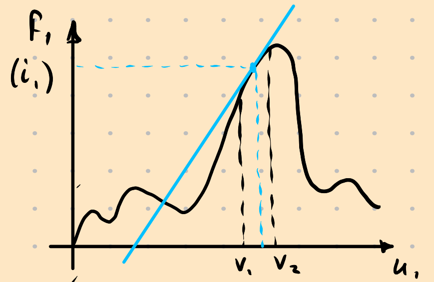


- U_1, U_2 – относительно земли
- Не накапливает заряд
- По выходам земли течёт неясно какой ток
- Выбрать незав. переменные (их 2) можно ∞ числом способов (выбор плоскости в 4-х мерном пространстве) – любые 2 ЛК U_1, U_2, i_1 и i_2.

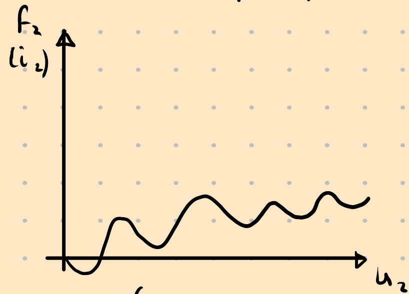
Система g параметров (для безинерционных (только R) цепей!)

Система из 2 линейных ур-ий, описывающих четырёхполюсник, например:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, u_2) \\ i_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$



(при нек-ом u_2=const)



(u_1 = const)

Т.е. четырёхполюсник задаётся двумя ландшафтами f_1 и f_2.

Причём для f_1 и f_2 они

- Непрерывны
- Произв. $\neq \infty$

Т.е. их можно линеаризовать в окрестности рабочей точки.

$$di_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2 \qquad di_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2$$

= const при фикс. u_1 и u_2

При u_1 = const, u_2 = const получаем 4 константы, характ. четырёхполюсник.

Физ. смысл производных:

1. $\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}$ - входная проводимость

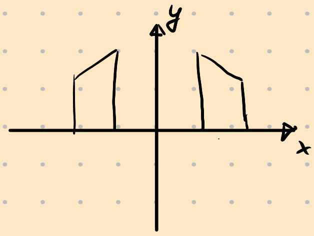
3. $\frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}$ — прямая проходная проводимость

2. $\frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}$ - обратная проходная проводимость

4. $\frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}$ - выходная проводимость

Аналитический сигнал (включает L и C — инерционность)

Вещественный сигнал - зависимость нек-ой ЛК U и i от времени. При преобр-ии Фурье обязательно получится симметричный спектр (он симметричен относ. Oy с точностью до комплексного сопряжения, а мнимая часть $= 0$).

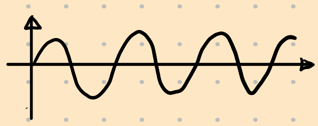


Это неудобно - приходится работать с кучей sin и cos.

Добавим к сигналу комплексную добавку - такую, что левая (правая) часть спектра сигнала обнулится.

Выйдет аналитический сигнал. Получается два провода - один с действ. частью сигнала, другой - с мнимой. Используя аналит. сигнал, можно рас-вать инерционные цепи.

Сигнал будет подан как бы бесконечно давно и длится бесконечно долго.

$x(t) =$ 

$\tilde{x}(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$ - аналитический сигнал. $|e^{j\omega t}| = 1$

$A_0(\omega)$, $\varphi(\omega)$. $A_0(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ - комплексная амплитуда

$e^{j\omega t}$ - комплексная вращающаяся экспонента.

Y - параметры (комплексные)

$\tilde{I}_1 = Y_{11} \cdot \tilde{U}_1 + Y_{12} \tilde{U}_2$ $\quad$ $\tilde{I}_2 = Y_{21} \tilde{U}_1 + Y_{22} \tilde{U}_2$

При поиске Y_{1x} $\tilde{U}_2$ зануляют (закорачивают выход), аналогично для Y_{2x}.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Y \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Если взять I_1 и I_2 как незав., математика та же:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_1} di_2$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} di_2$$

— здесь коэф-ты это сопротивления

Смотря на аналит. сигнал:

$$u_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$u_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

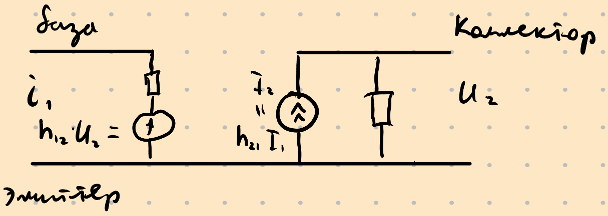
Связь: $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$ $\quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}$

$Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|}$ $\quad Z_{22} = \frac{Y_{22}}{|Y|}$

H - параметры

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{cases}$$

— полезно для биполярных транзисторов



— аналогичная биполяр. транзистору схема

h_{21} — передача по постоянному току (спр.) $\quad$ h_{11} - входное сопротивление

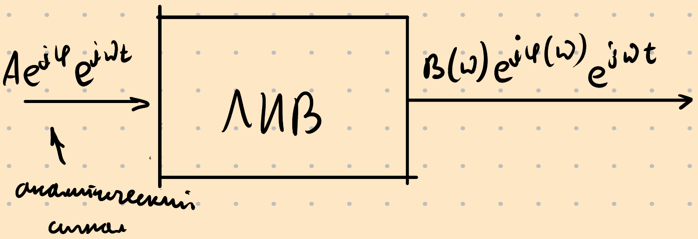
h_{12} — (спр.) $\quad$ h_{22} - выходная проводимость (спр.)

(спр.) — справочная величина

Связь: $h_{11} = \frac{|Z|}{Z_{22}}$ $\quad h_{12} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$

$h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ $\quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$

Комплексный коэф-т передачи



Аналитический - из ТФКП

Комплексная часть в реальности не наблюдается

$|e^{j\omega t}| = 1$

$K(j\omega)$ - комплексный коэф-т передачи

$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{вых}}{\tilde{U}_{вх}} = \frac{B(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}\, e^{j\omega t}}{A_0 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega)-\varphi_0)} =$$

Любой аналит. сигнал с огранич. спектром можно подать на вход и $K(j\omega)$ тоже будет

$$= \underbrace{\frac{B_n \cdot \omega^n + B_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \ldots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \ldots + A_0}}_{\text{самый идиотский вид}} = \underbrace{\frac{b_0 \cdot (\omega - b_1) \cdot (\omega - b_2) \cdot \ldots \cdot (\omega - b_n)}{a_0 (\omega - a_1) \cdot (\omega - a_2) \cdot \ldots \cdot (\omega - a_m)}}_{\text{самый ценный вид}} =$$

Самая сложная задача радиотехники

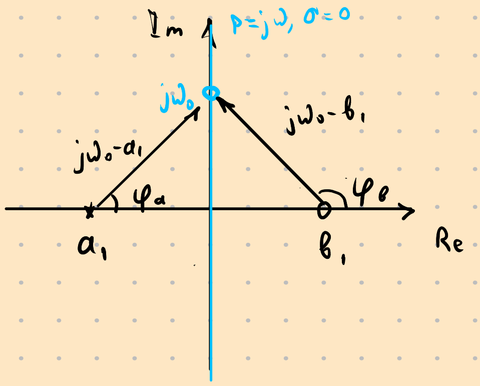
Свойства:

- Когда $\omega = b_k$, $|K| = 0$
- Когда $\omega = a_k$, выходит особенность.

$$= \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{|\omega - b_1| \cdot e^{j\arg(\omega - b_1)} \cdot \ldots \cdot |\omega - b_n| \cdot e^{j\arg(\omega - b_n)}}{|\omega - a_1| \cdot e^{j\arg(\omega - a_1)} \cdot \ldots \cdot |\omega - a_m| \cdot e^{j\arg(\omega - a_m)}} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n} |\omega - b_k|}{\prod_{p=1}^{m} |\omega - a_p|} \cdot e^{j\sum_{k=1}^{n} \arg(\omega - b_k) - j\sum_{p=1}^{m} \arg(\omega - a_p)}$$

„Нули" - корни числителя (b_i) „Полюса" - корни знаменателя (a_i)

ω должна быть комплексной (p), иначе от комплексной ф-ии произойдет переход к веществ-ой.



$$\frac{B(\omega)}{A_0} \cdot e^{j(\varphi(\omega)-\varphi_0)} = \frac{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + B_0}{A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + A_0} = \ldots$$

По полюсам, нулям и $\frac{b_0}{a_0}$ можно полностью восстановить ф-ию.

$p = j\omega + \sigma$ - при рас-ии конкретной частоты, $\sigma = 0$.

Иначе получится какая-то непонятная хар-ка сис-мы.

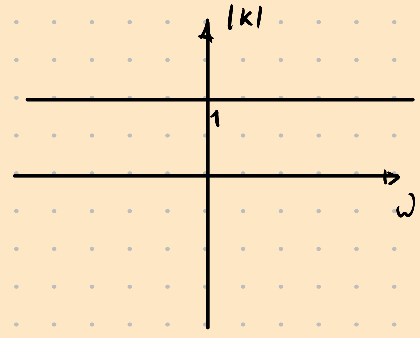
$$K(j\omega) = \frac{|j\omega_0 - b_1|}{|j\omega_0 - a_1|} \cdot e^{j(\arg(j\omega_0 - b_1) - \arg(j\omega_0 - a_1))}$$

$|K(j\omega)|$ = отношение длин векторов из нуля и из полюса

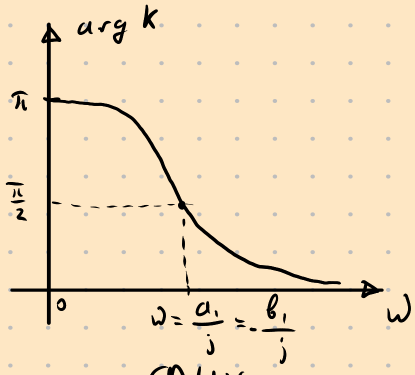
$$|K(j\omega)| = \frac{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}{\sqrt{a_1^2 + \omega^2}} \quad - \text{ АЧХ}$$

$$\arg K(j\omega) = \varphi_B - \varphi_A \quad - \text{ ФЧХ}$$

Пример $a_1 = -b_1$

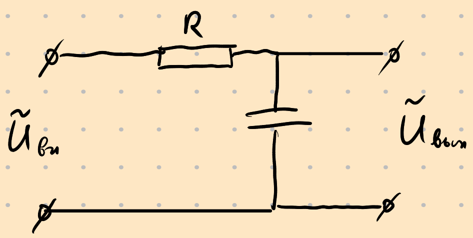


АЧХ



ФЧХ

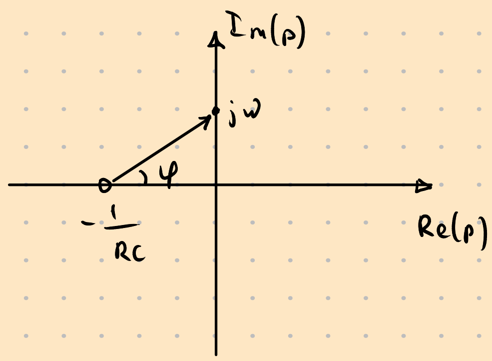
Интегрирующая RC - цепь



$$K(j\omega) = \frac{\tilde{U}_{вх}}{\left(R + 1/j\omega C\right) \cdot j\omega C \tilde{U}_{вх}} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)} =$$

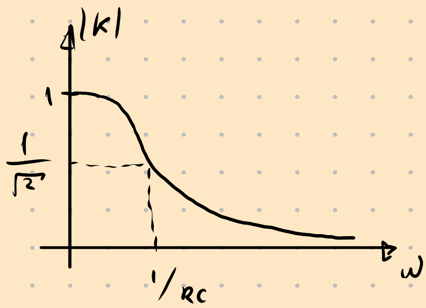
Ток через цепь (течёт через конденсатор)

$$= \frac{1}{RC\left(p + \frac{1}{RC}\right)} \qquad a_1 = -\frac{1}{RC} \qquad \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{RC}$$

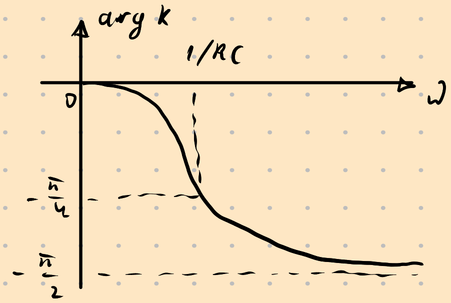


$$|K| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{R^2C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad - \text{АЧХ}$$

$$\arg K = -\operatorname{arctg}(\omega RC) \quad - \text{ФЧХ}$$

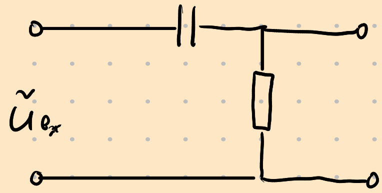


АЧХ

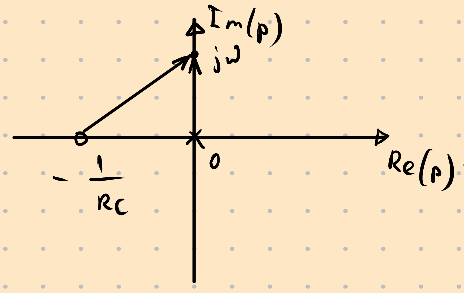


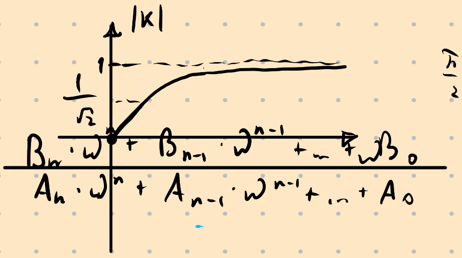
ФЧХ

Дифференцирующая RC - цепочка



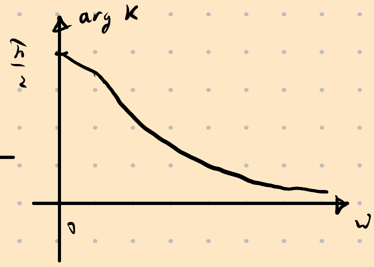
$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega - 0}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$





$$\frac{B_m \cdot \omega^m + B_{m-1} \cdot \omega^{m-1} + \dots + B_0}{A_n \cdot \omega^n + A_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + \dots + A_0}$$

АЧХ



ФЧХ

Не вещественные полюса/нули всегда симметричны относ. Re оси, если каждый 1 - вещественный