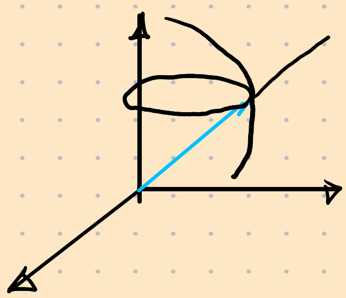
Кинематика материальной точки

Сферическая сис-ма



$$\vec q = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\langle \vec e_i \cdot \vec e_j \rangle = \delta_{ij}$ - ОНБ

$\vec V = \dot q^i \cdot \vec q_i = \sum H_i \cdot \dot q^i \vec e_i$

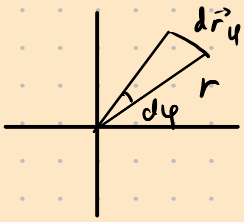
$H_k = |\vec r_{,k}|$

$\vec r_{,r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow H_r = 1 \qquad H_\lambda = r\cos\varphi \qquad H_\varphi = r$

Геометр. способ расчета Ламе

$dq^a \Rightarrow d\vec r_a \simeq \vec r_{,a}\, dq^a$

$|d\vec r_a| \simeq \underbrace{|\vec r_{,a}|}_{H_a} \cdot dq^a$



$|d\vec r_\varphi| \simeq \underbrace{r}_{H_\varphi} d\varphi$

(2): $\frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\dot r^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot\lambda^2 + r^2\dot\varphi^2\right]$

$w_k = \vec w \cdot \vec e_k$

$(V^2/2)_{,\dot r} = \dot r$; $\frac{d}{dt}(V^2/2)_{,\dot r} = \ddot r$

$(V^2/2)_{,r} = r(\dot\lambda^2\cos^2\varphi + \dot\varphi^2) \overset{(4)}{\Rightarrow} w_r = \ddot r - r(\dot\lambda^2\cos^2\varphi + \dot\varphi^2)$

2-й закон Ньютона в ковариантной форме

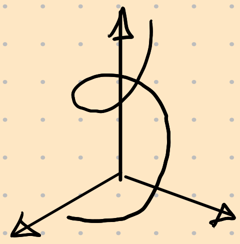
$m\vec w = \vec F \quad | \cdot \vec g_a$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right)_{,\dot a} - \left(\frac{mV^2}{2}\right)_{,a} = \vec F \cdot g_a = Q_a$

$\frac{d}{dt} T_{,\dot a} - T_{,a} = Q_a$ - в любой криволин. сис-ме координат!

$\frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt} T_{,\dot a} - T_{,a}\right] = \vec F \cdot \vec e_a$

Движение по винтовой линии



$$\begin{cases} x^1 = a\cos\omega t \\ x^2 = a\sin\omega t \\ x^3 = b t \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

$$\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

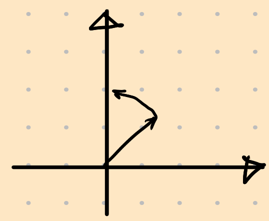
$$\vec{w}_\tau = 0$$

$$\vec{w}_n = a\omega^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$$

Задача

$$V_r = \frac{a}{r^2}, \quad V_\varphi = \frac{b}{r} \qquad a,\ b = \text{const}$$



$r(\varphi)$ — ? $\qquad w_r(r),\ \ w_\varphi(r)$

$r(0) = r_0$

$\varphi(0) = \varphi_0$

$V_r = \dot{r}$

$V_\varphi = r\dot{\varphi}$

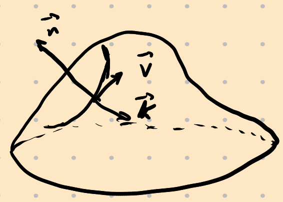
$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{br}$$

$$r - r_0 = \frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0)$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \longleftarrow \ddot{r} = -2a\dot{r}/r^3 = -2a^2/r^5$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\underbrace{r^2\dot{\varphi}}_{b}) = 0 \qquad \dot{\varphi} = b/r^2$$

№ 1.40



$$\vec{k} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad \text{(вектор кривизны)}$$

$q^1 = \text{const}$

$V = \text{const}$

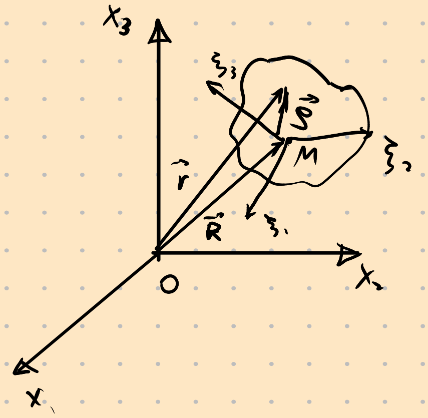
$\vec{r}_{,1}$ — нормаль

$\vec{r}_{,2},\ \vec{r}_{,3}$ — касательные

$$\begin{cases} \vec{w}\cdot\vec{r}_{,2} = 0 \\ \vec{w}\cdot\vec{r}_{,3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

условие движения по геодезической

Кинематика твёрдого тела



$\vec r = \vec R + \vec\rho$

$\vec\rho = A(t)\vec\rho_0$

$\vec R(t)$, $A(t)$ — зад. => движ. т. задано.

$A^T A = E$

$\det A = 1$ — ортог. матрицы обр-ют группы

Рас-им $A(t)$: $A(0) = E$

$$\frac{d}{dt}\Big|\ A^T A = E \Rightarrow \dot A^T(0)\underbrace{A(0)}_{E} + \underbrace{A(0)}_{E}\dot A^T = 0$$

$$\dot A(0) = \hat\omega: \quad \hat\omega^T = -\hat\omega$$

$$dt \ll 1 \Rightarrow A(dt) \approx E + \hat\omega\, dt$$

$$\vec v = \dot{\vec r} = \underbrace{\dot{\vec R}}_{\vec v_0} + \dot{\vec\rho}, \quad \rho = A\rho_0$$

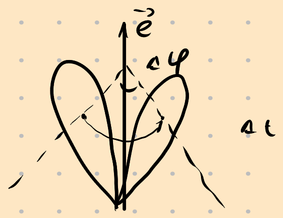
$$\rho(dt) \approx (E + \hat\omega\, dt)\vec\rho_0 \Rightarrow \dot\rho|_{t=0} = \hat\omega\rho|_{t=0}$$

$$\dot{\vec\rho} = \hat\omega\vec\rho$$

$$\vec V = \vec V_0 + \hat\omega\vec\rho$$

В R^3: $\hat\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat\omega\vec\rho = \vec\omega \times \vec\rho$, где $\vec\omega = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix}$ — угловая скорость

$\vec V = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec\rho$ — **ф-ла Эйлера**



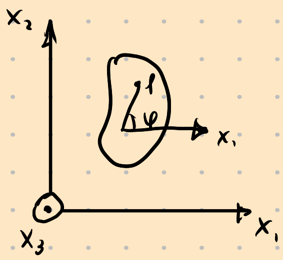
$$\vec\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec e\,\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$\vec e\,\Delta\varphi = \Delta\vec\varphi$ — вектор Эйлера

$$\vec W = \dot{\vec V} = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\rho)$$

Формула Ривальса, $\vec\varepsilon = \dot{\vec\omega}$ — угл. ускорение

Плоское движение



$$\vec\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\omega \end{bmatrix}$$

$$\omega = \dot\varphi$$

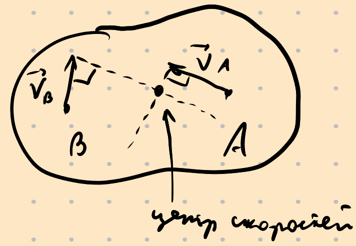
$$\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\rho) = \vec\omega\,\cancel{(\vec\omega\,\vec\rho)}^{0} - \omega^2\vec\rho$$

$\vec W = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho - \omega^2\vec\rho$ — **2D Ривальс**

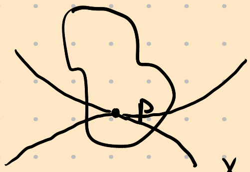
Мгновенные центры скоростей и ускорений

Центр скоростей: $P: \vec V_P = 0 = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec\rho_P$

$$\vec\omega \times V_0 - \omega^2 \vec\rho_P = 0 \Rightarrow \rho_P = \frac{\vec\omega \times \vec V_0}{\omega^2}$$ — всегда есть

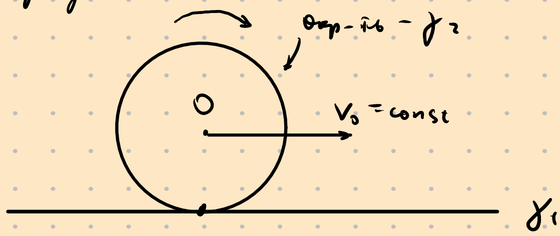


Но! P движется как в пр-ве, так и в теле — по центроидам



γ_2 — подв. центроида

γ_1 — неподв. центроида



Качение без проскальзывания

(в т. касания V тел равны)

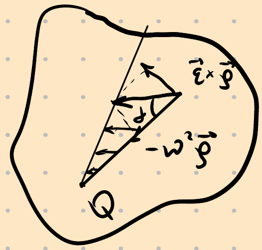
Центр ускорений Q

$$\vec W_Q = 0 = \vec W_0 + \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\rho_Q$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^2 \vec\varepsilon \times \vec\rho_Q = 0$$

$$\vec\varepsilon \times \vec W_0 - \varepsilon^2 \vec\rho_Q - \omega^4 \vec\rho_Q + \omega^2 \vec W_0 = 0$$

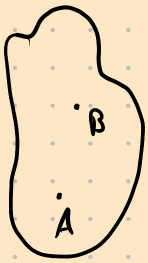
$$\vec\rho_Q = \frac{\vec\varepsilon \times \vec W_0 + \omega^2 \vec W_0}{\varepsilon^2 + W^4}$$



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Полезный факт (верно в 3D и в 2D)

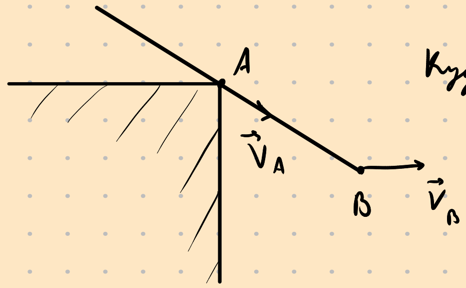
1.



$$\vec V_B = \vec V_A + \vec\omega \times \vec{AB} \quad \Big| \; \vec e_{AB} \parallel \vec{AB}$$

$$\vec V_B \cdot \vec e_{AB} = \vec V_A \cdot \vec e_{AB}$$

2.



Куда направлена $\vec V_A$, если палка скользит по углу?

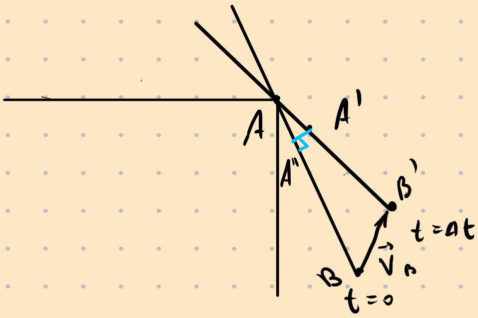
Ответ: вдоль AB:

$$\vec{AA'} = \vec{AA''} + \vec{A''A'}$$

$$\vec{A''A'} \simeq AA'' \Delta\varphi$$

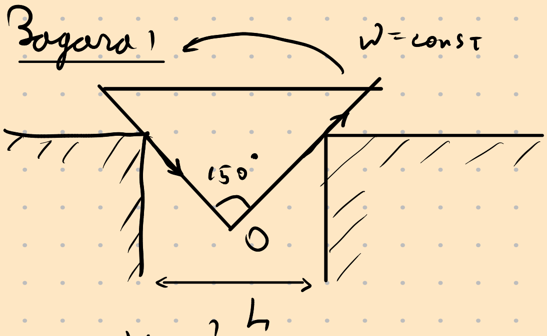
$$\vec V_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\underbrace{\frac{\vec{AA''}}{\Delta t}}_{\text{коллинеарно стержню} \; -\vec V_A} + \frac{\vec{AA''} \Delta\varphi}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{AA''}}{\Delta t} = \vec V_A$$

$\vec V_A$ 0

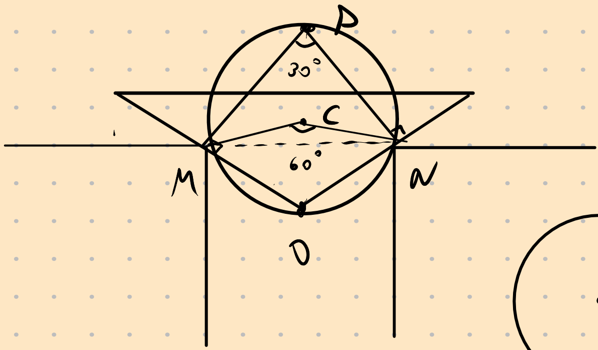


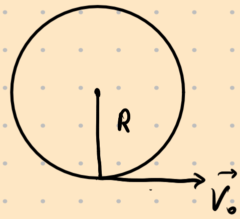
ЧТД

Задача 1



$W_0 = ?$



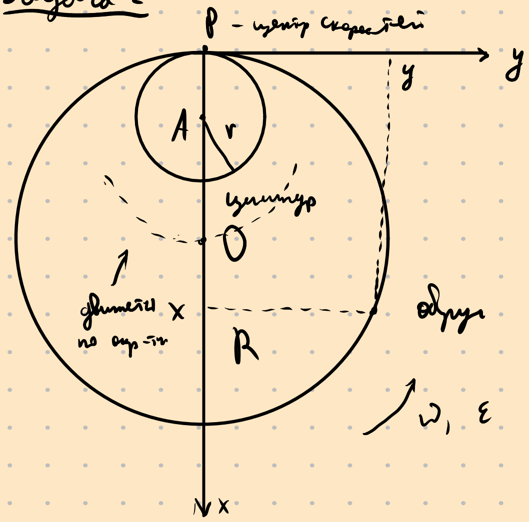


$MN = L = 2R\sin 30^\circ = R$

$PO = 2L \qquad V_0 = 2\omega L$

$$W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$

Задача 2



Без проскальзывания

ω, ε заданы

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

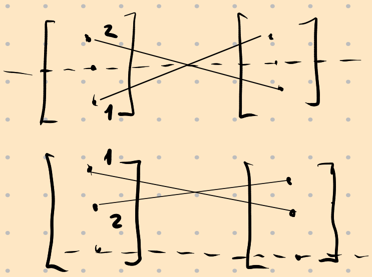
$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} - \omega^2\vec{\rho}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

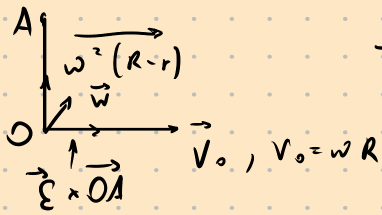
Траектория O — окр-ть с ц. A $\qquad \vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y-R \\ 0 \end{bmatrix}$

Полезная штука: (векторное умножение)

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2b^3 - a^3b^2 \\ a^3b^1 - a^1b^3 \\ a^1b^2 - a^2b^1 \end{bmatrix}$$



Отрезок AO — новое тело!



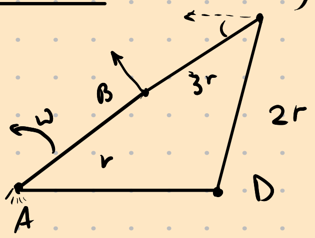
Ω — угл. скор. AO

$$V_0 = \omega R = \Omega(R-r)$$

$$\Omega = \frac{R}{R-r}\,\omega$$

$$\mathcal{E} = \frac{R}{R-r}\,\varepsilon$$

Задача 2 (3.24 ~)



V_c - ?

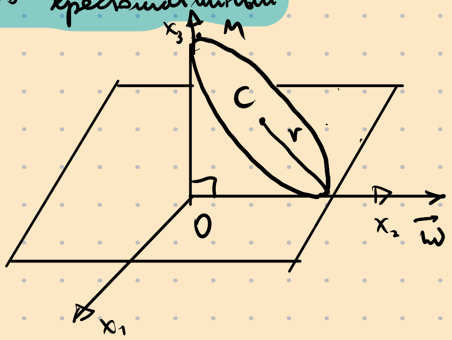
V_c - ?

$\vec V_B \cdot \vec{BC} = 0 = \vec V_c \cdot \vec{BC} \Rightarrow V_c = 0$

$\omega = const$

(палка крутится в м-то месте и тянет цепь)

№ хрестоматийный



$r, \omega = const$, движение без проскальзывания

$\vec V_M, \vec W_M, \rho_M, \vec\omega, \vec\varepsilon$ - ?

$\vec V = \underbrace{\vec V_0}_{0} + \vec\omega \times \vec\rho = \vec\omega \times \vec\rho$ — т.к. образующая конуса, касающаяся пов-ти, имеет в каждой т. $\vec V = 0$, то

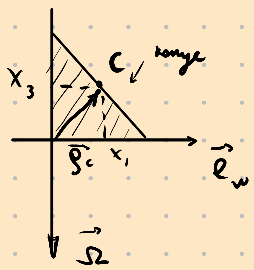
$\vec\omega \parallel$ с этой обр-ей

$\vec\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec V_M = \vec\omega \times \vec\rho_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt2 \omega r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec\omega = \omega \vec e_\omega$, $\vec e_\omega = \frac{\vec\omega}{\omega}$

$\dot{\vec\varepsilon} = \dot\omega \vec e_\omega + \omega \dot{\vec e}_\omega$

Введём фиктивное ТТ:



$\vec e_\omega$ вращается со скоростью $\vec\omega$

Получим, что

$\vec\varepsilon = \omega \vec\Omega \times \vec e_\omega$ (здесь $\vec e_\omega$ это как бы $\vec\rho$, $\vec\Omega$ это её $\vec\omega$)

$\vec V_c = \vec\omega \times \vec\rho_c = \vec\Omega \times \vec\rho_c$

x_1: $\omega \frac{r}{\sqrt2} = \Omega \frac{r}{\sqrt2} \Rightarrow \Omega = \omega$

$\vec\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \Rightarrow \vec\varepsilon = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec W_M = \underbrace{\vec\varepsilon \times \vec\rho_M}_{\perp \vec\tau} + \vec\omega \times (\underbrace{\vec\omega \times \vec\rho_M}_{\vec V_M \text{ (как правило)}})$, $\perp \vec\tau$

$\vec W_M = \vec W_M^\tau \vec\tau + \frac{V_M^2}{\rho_M} \vec n$

$\vec V_M \parallel \vec x_1 \Rightarrow \vec\tau = \vec x_1$

Таким образом $\vec W_M = \frac{\vec V_M^2}{\vec\rho_M} \vec n \Rightarrow \rho_M = \frac{V_M^2}{W_M}$

! При качении без проск-ния, скорость в каждой т. линии касания = 0.

$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} e_\omega + \vec{\omega} \dot{e}_\omega$

Ортог. матрицы

$A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_2^3 - a_3^2) \quad e_2 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_3^1 - a_1^3) \quad e_3 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_1^2 - a_2^1)$$

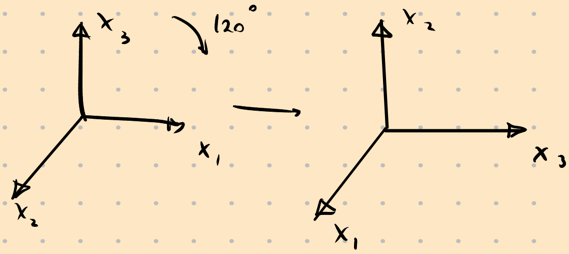
$$A = E\cos\varphi + \hat{e}\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec{e}^{\,T}\vec{e}$$

$$\operatorname{tr} A = 3\cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}, \ \varphi - ?$$



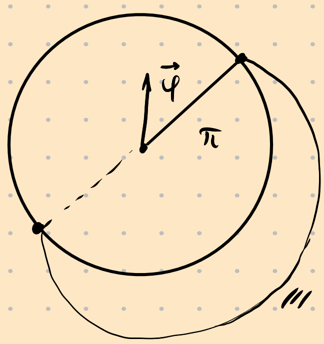
$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Крутые штуки

Группа поворотов $SO(3)$ отождествляется с шаром:



(противоп. т. отождествлены)

Многообразие - плоскость без разрывов и (обычно) гладкая

Сложение поворотов

Повороты:
- активные — вращаются пр-во и элементы при фикс. базисе
- пассивные — вращается базис, а эл-ты фикс.

Активный: $\vec r\,' = A\vec r$

Пассивный: $\vec e_{i'} = a^{i}_{i'}\,\vec e_i$ **!** Обозначение: $\vec r^{(1)}$ - вектор $\vec r$ не трогаем, изменили базис

$$\vec r^{(1)} = r^{i'} e_{i'} = r^{i'} a^{i}_{i'}\, e_i = r^{i}\vec e_i$$

$$r^{i} = a^{i}_{i'} r^{i'} \iff \vec r = A\vec r^{(1)}$$

$\vec r^{(1)} = A^{T}\vec r$ - обратное к A преобр-е

① Сложение активных поворотов

$\vec r\,' = A_1\vec r$, $\vec r\,'' = A_2\vec r\,'$

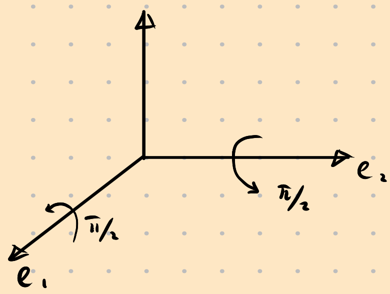
$\vec r\,'' = A_2A_1\vec r \Rightarrow A = A_n\cdot\ldots\cdot A_1$

② Сложение пассивных поворотов

$\vec r^{(1)} = A_1^{T}\vec r$ $\vec r^{(2)} = A_2^{T} r^{(1)}$

$\vec r^{(2)} = A_2^{T}A_1^{T}\vec r = (A_1A_2)^{T}\vec r \Rightarrow A = A_1\cdot\ldots\cdot A_n$

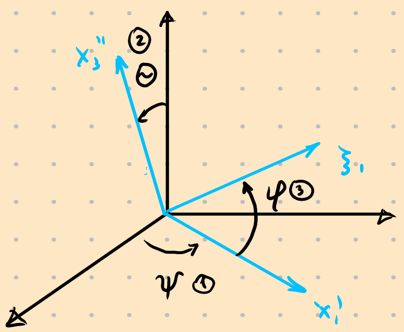
Пример 1



Считаем повороты активными (базис фиксирован)

$A = A_2A_1$

Пример 2 (углы Эйлера в матрицу)



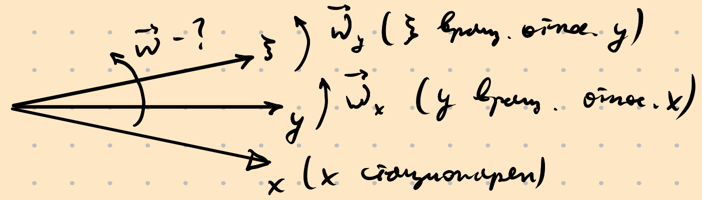
Поворот пассивный - так повороты будут вокруг базиса

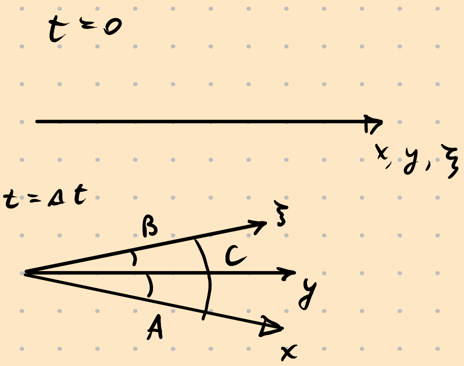
$A = A_\psi A_\Theta A_\varphi$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сложение угловых скоростей



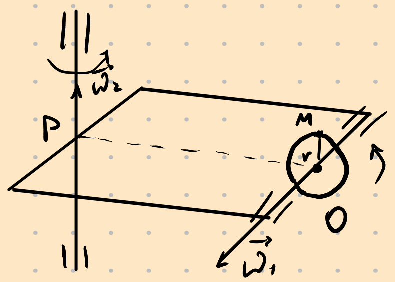


$$A \simeq E + \hat{\omega}_x \Delta t$$

$$B \simeq E + \omega_y \Delta t$$

$$C = AB \simeq E + \underbrace{(\hat{\omega}_x + \hat{\omega}_y)}_{\hat{\omega}} \Delta t$$

Пример



Рамка крутится + колесо крутится на рамке

$\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ - ? $\qquad \omega_1, \omega_2 = const$

$\vec{V}_M$, $\vec{W}_M$ - ?

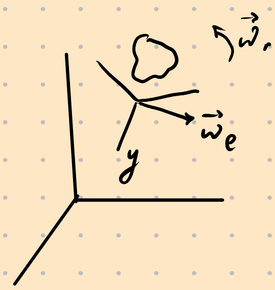
$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

Вращение т.т. во вращающемся базисе

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \omega_r^i \vec{y}_i$$

$$\vec{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_e}_{\vec{\varepsilon}_e} + \underbrace{\dot{\omega}_r^i \vec{y}_i}_{\vec{\varepsilon}_r} + \underbrace{\omega_r^i \vec{\omega}_e \times \vec{y}_i}_{\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$



В задаче: $\quad \vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$

$$\vec{V}_M = \underbrace{\vec{V}_0}_{\vec{\omega}_2 \times \vec{PO}} + \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

$$\vec{W}_M = \underbrace{\vec{W}_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM})$$

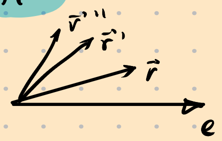
$$\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{PO}) = -\omega_2^2 \vec{PO}$$

Кватернионы

$R' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$ $\quad \|\Lambda\| = 1$ $\quad \Lambda = \cos\varphi/2 + \vec{e}\sin\varphi/2$ $\quad |\vec{e}| = 1$

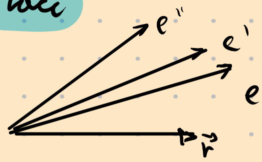
$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix} \simeq \vec{r} \Rightarrow \vec{r}\,' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$ — поворот относ. $\vec{e}$ на φ.

Акт



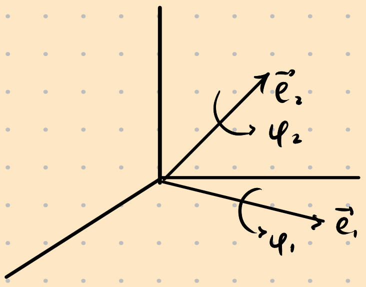
$$\vec{r}\,'' = \underbrace{\Lambda_2 \circ \Lambda_1}_{\Lambda} \circ \vec{r} \circ \widetilde{\Lambda_2 \circ \Lambda_1}$$

Пасс



$$\vec{r}_{e''} = \widetilde{\Lambda_1 \circ \Lambda_2} \circ \vec{r} \circ \underbrace{\Lambda_1 \circ \Lambda_2}_{\Lambda}$$

Пример 1



$$\Lambda_1 = \cos\varphi_1/2 + \vec{e}_1 \sin\varphi_1/2$$

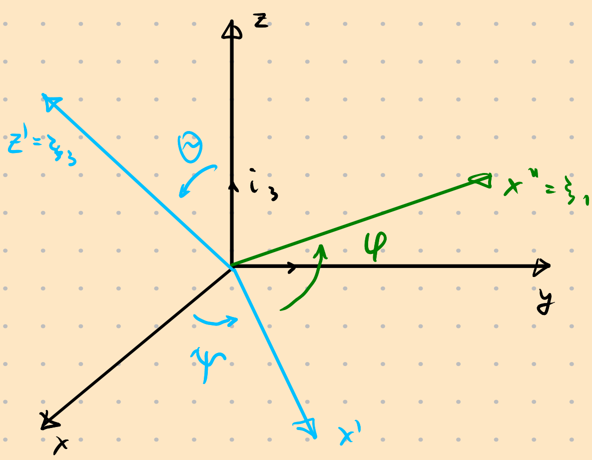
$$\Lambda_2 = \cos\varphi_2/2 + \vec{e}_2 \sin\varphi_2/2$$

$$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \underbrace{\cos\varphi_1/2 \cos\varphi_2/2 - \vec{e}_1 \vec{e}_2 \sin\varphi_1/2 \sin\varphi_2/2}_{\cos\varphi/2} +$$

$$+ \underbrace{\sin\varphi_1/2 \cos\varphi_2/2\, \vec{e}_1 + \sin\varphi_2/2 \cos\varphi_1/2\, \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin\varphi_1/2 \sin\varphi_2/2}_{e \sin\varphi/2}$$

причина некоммутативности поворотов — малое второго порядка

Пример 2



$$\Lambda_\psi = \cos\psi/2 + i_3 \sin\psi/2$$

$$\Lambda_\Theta = \cos\Theta/2 + i_1 \sin\Theta/2$$

$$\Lambda_\varphi = \cos\varphi/2 + i_3 \sin\varphi/2$$

$\Lambda = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\Theta \circ \Lambda_\varphi$ — формальная операция, чисто алгебр. перемножение (см. заметку про базис)

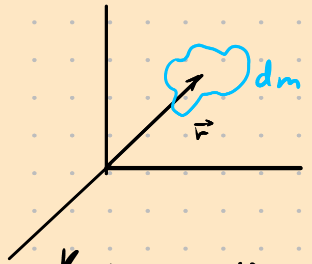
Несмотря на то, что повороты все в разных базисах, коор-ты кватернионов мы не пересчитываем — можно их все записать в первом или в последнем, взяв их координаты из собственных базисов (формально).

А если считать с физ. т. зр. — нужно действительно ставить настоящие, повёрнутые орты в кватернион.

Уравнения Пуассона

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}_x \circ \Lambda \qquad \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\,\Lambda \circ \vec{\omega}_\xi$$

Основы динамики



Континуальная система!

$m=\int dm$ — масса

$I=\int \vec F(\vec r,\dot{\vec r},t)\,dm$ — интеграл по массе

$\vec r_c = \frac{1}{m}\int \vec r\,dm$ — центр масс

$P=\int \vec v\,dm = m\vec V_c$ — импульс

$\vec K_0=\int(\vec r-\vec r_0)\times\vec V\,dm$ — момент импульса (кинетический момент)

$\vec K_{0'} = \int(\vec r-\vec r_{0'})\times \vec v\,dm = \int(\vec r-\vec r_0+\vec r_0-\vec r_{0'})\times\vec v\,dm = K_0 + \vec{O'O}\times\vec P$ — ф-ла переноса полюса

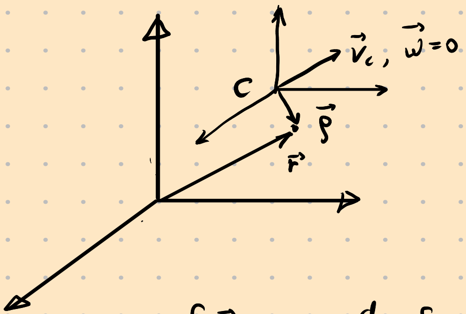
↑ момент импульса — возможно, поэтому $\vec K_0$ тоже и наз-ся

$\vec V_{0'} = \vec V_0 + \vec\omega\times\vec{OO'}$ — похожая ф-ла из кинематики!

тв. тело

$T=\frac{1}{2}\int v^2\,dm$ — кинетическая энергия

Теорема Кёнига



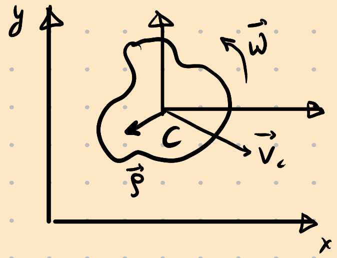
— кёнигова С.О.

$\vec V=\vec V_c+\vec V_r$

$T=\frac{1}{2}\int(V_c^2+2\vec V_c\vec V_r+V_r^2)\,dm$

$\int \vec V_r\,dm = \frac{d}{dt}\underbrace{\int\vec\rho\,dm}_{m\vec\rho_c=0}=0$ $\Rightarrow T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}\int V_r^2\,dm$

Случай плоских тел



$\vec V_r=\vec\omega\times\vec\rho$

$V_r^2=\omega^2\rho^2$, $\vec\omega\perp\vec\rho$

момент инерции (отн. оси, прох. через C и ⊥ пл-ти)

$\frac{1}{2}\int Vr^2\,dm=\frac{\omega^2}{2}\int\rho^2\,dm=\frac{J_c\omega^2}{2} \Rightarrow T=\frac{mV_c^2}{2}+\frac{J_c\omega^2}{2}$

Момент инерции в 3D становится тензором инерции.

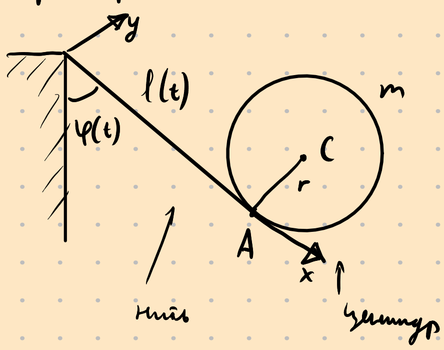
$\vec K_0=\vec K_c+\vec{OC}\times\vec P$

$\vec K_c=\int(\vec r-\vec r_c)\times\vec V\,dm = \int\vec\rho\times(\vec V_c+\vec\omega\times\vec\rho)\,dm = \int\vec\rho\times(\vec\omega\times\vec\rho)\,dm=\vec\omega\int\rho^2\,dm=J_c\vec\omega$

в сист. ц.м. $\vec V_c=0$

$\vec K_0=\underbrace{J_c\vec\omega}_{K_c}+\vec{OC}\times\underbrace{\vec P}_{m\vec V_c}$

Пример 1



Обратите внимание на расчёт кин. энергии!

$\vec{P}$, $\vec{K}_A$, T - ?

$\vec{P} = m\vec{V}_c$

$$\vec{V}_c = \underbrace{\vec{V}_c^{\,e}}_{\text{переносная}} + \underbrace{\vec{V}_c^{\,r}}_{\text{относительная}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot l - r\dot\varphi \\ l\dot\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{P} = m\vec{V}_c = \dots$

Надо найти $\vec\omega$ (абсолютную)

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{mr^2}{4}\omega^2$$

$$\vec\omega = \vec\omega^{\,e} + \vec\omega^{\,r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot l/r \end{bmatrix} \Rightarrow \omega^2 = (\dot\varphi - \dot l/r)^2 \qquad \Rightarrow T = \dots$$

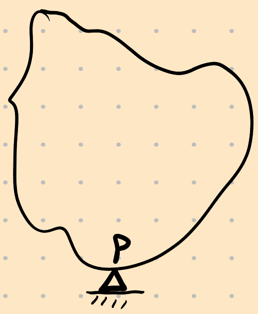
Если точка A неподвижной в абс. сис-ме, $\vec{K}_A = J_A\vec\omega$

Иначе (здесь - она подвижна): $\vec{K}_A = J_c\vec\omega + \vec{AC}\times m\vec{V}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mr^2}{2}(\dot\varphi - \dot l/r) \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot l - r\dot\varphi \\ l\dot\varphi \\ 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}mr^2(\dot\varphi - \dot l/r) \end{bmatrix}$$

Неправильное решение дало бы правильный ответ - ой...

Неподвижная точка

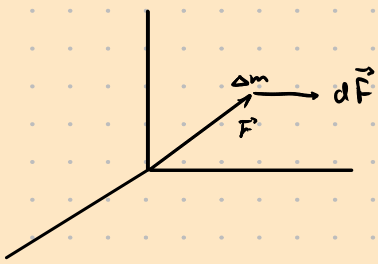


$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int \omega^2 \rho^2 dm = \frac{J_P\omega^2}{2}$$

$$\vec{K}_P = \int \vec\rho \times (\vec\omega \times \vec\rho)\, dm = J_P\vec\omega$$ - а тут так можно!

Законы изменения

(общий случай! не только 2D)



$$\Delta m\,\ddot{\vec r} = \Delta\vec F$$

$$\vec F = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec F}{\Delta m}$$ - удельная сила

$$\ddot{\vec r} = \vec F = \vec F^{\,e} + \vec F^{\,i}$$ (внешняя и внутренняя)

1. Импульс: $\vec{P} = \int \dot{\vec{v}}\,dm = \int (\vec{F}^e + \vec{F}^i)\,dm \overset{=0}{} = \vec{R}^e$ – главный вектор внешних сил.

$\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e$; $\quad m\dot{\vec{V}}_c = \vec{R}^e$ – ур-е движ-я центра масс

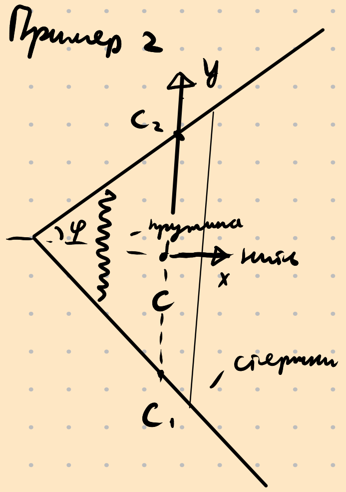
2. Кин. момент: $\vec{K}_0 = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}\,dm \Rightarrow \dot{\vec{K}}_0 = \underbrace{\int (\vec{v} - \vec{v}_0) \times \vec{v}\,dm}_{-m\vec{V}_0 \times \vec{V}_c = -\vec{V}_0 \times \vec{P}} + \underbrace{\int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{F}^e + \vec{F}^i)\,dm}_{\vec{M}_0^e}$

$\dot{\vec{K}}_0 = \vec{M}_0^e - m\vec{V}_0 \times \vec{V}_c$ ($\vec{M}_0^e$ – момент внешних сил относ. полюса O)

3. Кин. энергия: $\dot{T} = \int \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}\,dm = \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{F}^e\,dm}_{N^e} + \underbrace{\int \vec{v} \cdot \vec{F}^i\,dm}_{N^i} = N^e + N^i$

N^i – нельзя выкинуть! (пот. энергия → кин. энергия)

Пример 2



1. Траектория концов стержней?

2. $\dot{\varphi}(\varphi)$ – ?

Центр масс неподвижен

$x = \frac{l}{2}\cos\varphi$

$y = l\sin\varphi$

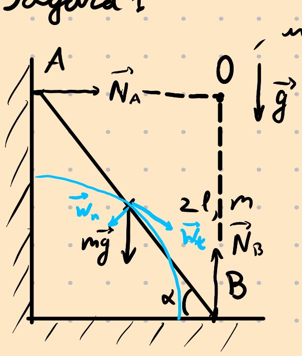
$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$ – концы движутся по эллипсу

$2T = \text{const}$, где T – один стержень

$y_c = \frac{l}{2}\sin\varphi \Rightarrow V_c = \frac{l\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi$

$T = \frac{m}{8} l^2 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \frac{ml^2}{24}\dot{\varphi}^2 = \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi)$

Задача 1



$\alpha(0) = \alpha_0$

$\dot{\alpha}(0) = 0$

Оторвётся ли стержень при движении?

Отрыв происходит <=> N_A или N_B обращаются в 0.

$\underbrace{m\ddot{\vec{r}}_c}_{m\vec{w}_c} = m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B$

$\vec{F} = -\nabla\Pi(\vec{r}) \Rightarrow T + \Pi = \text{const} = E$

Силы реакции работы не совершают

$$E = \frac{m l^2 \dot\alpha^2}{2} + \frac{4 m l^2 \dot\alpha^2}{24} + mgl\sin\alpha = mgl\sin\alpha_0$$

$(mV_c^2/2)$

$$\frac{2}{3}\dot\alpha^2 = \frac{g}{l}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$$

$$\dot\alpha^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$$

$$\vec W_n = l\dot\alpha^2$$

Чтобы достать $\ddot\alpha$, надо работать с кин. моментом.

$$\dot{\vec K}_0 = \vec M_0^e - m\vec V_0 \times \vec V_c$$

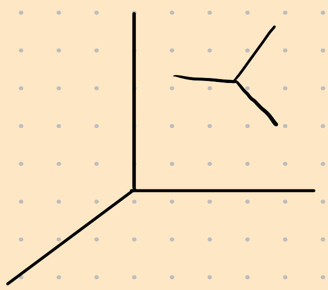
$$\dot{\vec K}_p = J_p \dot{\vec\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} m l^2 \ddot\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgl\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\ddot\alpha = -\frac{3}{4}\cdot\frac{g}{l}\cos\alpha$$

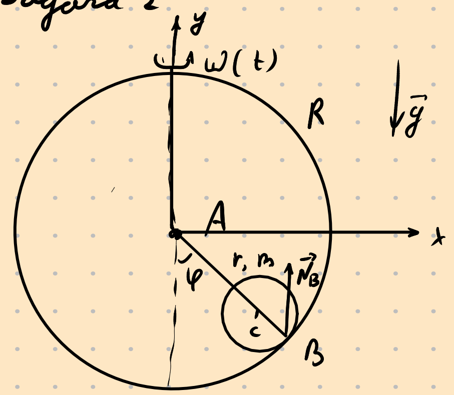
$$\vec W_{cx} = \underbrace{\frac{3}{4} g \cos\alpha_* \sin\alpha_*}_{|W_\tau|\cdot\sin\alpha} - \frac{3}{2} g(\sin\alpha_0 - \sin\alpha_*)\cos\alpha_* = 0$$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha_* = 0 \ \text{ — не подходит согласно нач. усл.} \\ \sin\alpha_* = \frac{2}{3}\sin\alpha_0 \ \text{ — реш. всегда сущ-ет} \Rightarrow \text{всегда произойдёт отрыв} \end{array}\right.$

$$\vec W = \vec F^e + \vec F^i \qquad \vec W = \vec W^r + \vec W^e + \vec W^c \Rightarrow \vec W^r = \vec F^{er} + \vec F^i - \vec j^e - \vec j^i$$



Задача 2



1. Составить ур-е отн. движ.

2. $\vec N_B$ - ?

Чего-то без скольжения катится по чему-то $\Rightarrow$ берём $\dot{\vec K}_0$ отн. касания

Перейдём в подвижную сис-му отсчёта

$\vec{K}_B = \vec{M}_B^{ex} + \vec{M}_B^{e} + \vec{M}_B^{c}$

Если полюс B - центр скоростей, то $\vec{K}_B = J\omega$

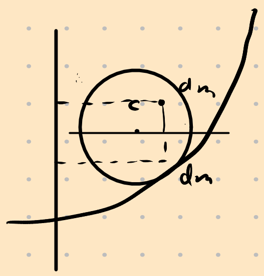
$\vec{V}_c = \vec{\dot\varphi} \times \vec{AC} = \vec{\omega} \times \vec{BC}$

$\omega = \frac{R-r}{r}\dot\varphi$

$$\dot{\vec{K}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} m r^2 \frac{R-r}{r}\ddot\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgr\sin\varphi \end{bmatrix} + \dots +$$

$\vec{K}_B$ $\quad\vec{M}_B^{ex}$ $\quad\vec{M}_B^{e}$

Кориолисова сила напр. от нас и ⊥ плоскости, значит момент лежит в плоскости и нам она не интересна



$-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dm - \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,dm}_{\text{нам не интересно}}$ $\quad\rho$ - рас-ие до оси вращения

$= \omega^2 \rho\, dm$

Из сообр. симметрии $\vec{M}_c^e = 0$

$$\vec{M}_B^e = \vec{M}_c^e + \vec{BC}\times\vec{R}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\omega^2 (R-r) r\cos\varphi\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\vec{R}^e = -\int \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dm = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_c) =$

$R^e = m\omega^2(R-r)\sin\varphi$

$$-\frac{3}{2} m r (R-r)\ddot\varphi = mgr\sin\varphi - m\omega^2 r(R-r)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\ddot\varphi + \frac{2}{3}\frac{3}{R-r}\sin\varphi - \frac{2}{3}\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$ - ур-е движения

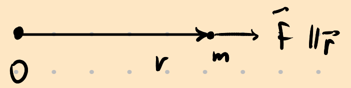
$m\ddot{\vec{r}}_c = m\vec{g} + \vec{N}_B + \vec{R}^e$

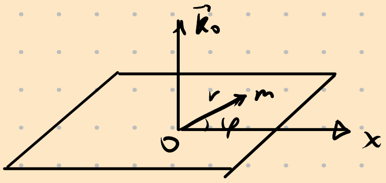
$W_n = (R-r)\dot\varphi^2$

$\ddot\varphi\dot\varphi = (\dot\varphi$

$\frac{1}{2}\dot\varphi^2 - \frac{2}{3}\omega^2\cos$

Центральное поле.





$\vec K_0 = \overrightarrow{const}$

$r^2\dot\varphi = C$

$\frac{1}{2}\dot\varphi r^2 = const$ – секториальная скорость

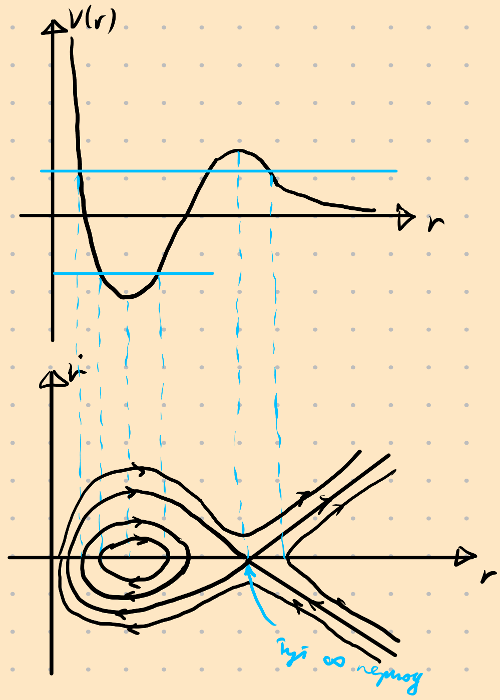
$$\begin{cases} (m\ddot r - r\dot\varphi^2) = F \\ \frac{m}{r}\left(r^2\dot\varphi\right)^{\cdot} = 0 \end{cases}$$

$$\delta A = F dr + 0 d\varphi = -\Pi_{,r} dr - \Pi_{,\varphi} d\varphi$$

$$\Pi = \Pi(r) = -\int F(r) dr$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi\right) + \Pi(r) = E = const$$

$$\dot r^2 + \underbrace{\frac{C^2}{r^2} + \Pi(r)}_{V(r)} = h = \frac{2E}{m} = const$$



Ситуация общего положения – наиболее типичная ситуация? (разложение вокруг max/min даёт вторую степень с ненулевым коэфф.)

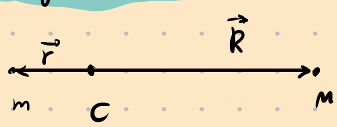
Ур-я Бине

$u = \frac{1}{r}$, $t \mapsto \varphi$ ($r^2\dot\varphi = C$, $\varphi(t)$ монотонна $\Rightarrow$ биективная)

$$m\left(\ddot r + r\dot\varphi^2\right) = F$$

$$\Rightarrow u'' + u = -\frac{F}{mC^2u^2}$$

Задача 2 тел



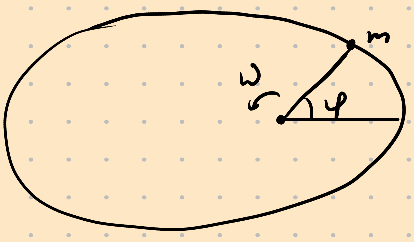
$\vec F = -\frac{mk\vec r}{r^3}$, $k = \frac{\gamma M}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}$

$F = -mku^2 \Rightarrow u'' + u = \frac{k}{C^2} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ (в поле отталкивания всегда $e > 1$)

$p = \frac{C^2}{k}$

$$e = \sqrt{1 + h\frac{C^2}{k^2}}$$

Задача 8.8



$p, e - ?$

$$\lambda = \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} - ?$$

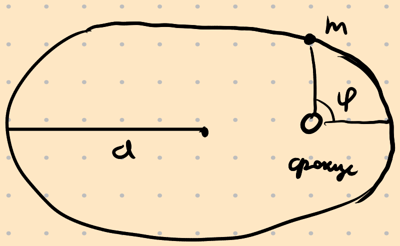
$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\lambda = \frac{\dot{\varphi}_{max}}{\dot{\varphi}_{min}} \qquad r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$$

$$\dot{\varphi}_{max} = \frac{C}{r^2_{min}} \qquad \dot{\varphi}_{min} = \frac{C}{r^2_{max}}$$

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} \qquad r_{max} = \frac{p}{1-e} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$$

Задача 2



$E - ?$

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} \qquad r_{max} = \frac{p}{1-e}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{p^{=\frac{C^2}{k}}}{1-1-h\frac{C^2}{k^2}} = -\frac{k}{h}$$

$$h = -\frac{k}{a} \Rightarrow E = \frac{m}{2}h = -\frac{mk}{2a}$$

Задача 3

$$F = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^3}$$ найти траекторию

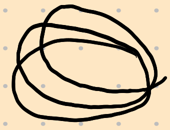
$$u'' + u = -\frac{F}{mC^2u^2} = \frac{\alpha}{mC^2} + \frac{\beta u}{mC^2}$$

$$u'' + \left(1 - \frac{\beta}{mC^2}\right)u = \frac{\alpha}{mC^2}$$

$$\omega^2 > 0 \Rightarrow r = \frac{1}{u} = \frac{p}{1 + e\cos(\omega\varphi)}$$

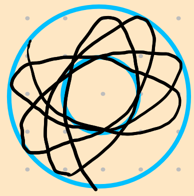
$$\exists\ \omega^2 = 1 - \underbrace{\frac{\beta}{mC^2}}_{\ll 1} > 0$$ и траектория финитна

Получается прецессирующий эллипс:



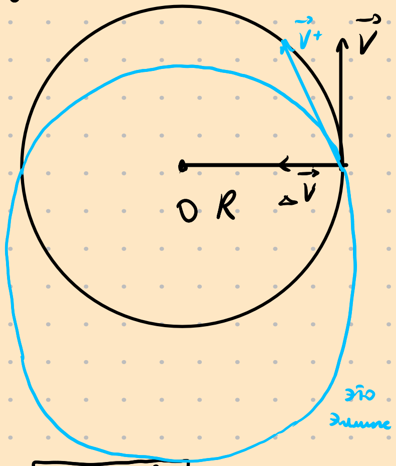
$\omega = \pi \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ => траектория замкнута

$\omega \neq \pi \frac{m}{n}$ => траектория всюду плотна в кольце



Прецессия орбиты Меркурия - подтверждение СТО

Задача 4



Найти пар-р новой орбиты

$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)}$ - не знаем где будет перигей орбиты => => вводим φ_0

$R = \frac{p^-}{1 + 0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}$ => $p^- = R$ (- - до + - после)

$p^+ = \frac{c^2}{k}$ => $p^+ = p^- = R$

$r^2 \dot{\varphi} = rV_\varphi = C$ => $C = rV$ - ΔV не изм. V_φ

$e = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{k^2}}$ $\quad e^- = 0 \quad h^- = V^2 - \frac{2k}{R}$

$h = \underbrace{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}_{\vec{V}^2} - \frac{2k}{r}$ $\quad e^+ = \sqrt{\Delta V^2 \frac{c^2}{k^2}} = \Delta V \frac{c}{k}$ $\quad h^+ = V^2 + \Delta V^2 - \frac{2k}{R}$

$\frac{V^2}{R} = \frac{k}{R^2}$

уд. центробежная сила

уд. сила Ньютонова притяжения

$e^+ = \Delta V \frac{RV}{RV^2} = \frac{\Delta V}{V}$

$R = \frac{R}{1 + \frac{\Delta V}{V}\cos\varphi_0}$ => $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$

$\dot{r} = \frac{Re^+ \sin\varphi_0 \dot{\varphi}_0}{(1 + e^+\cos\varphi_0)^2} = -\Delta V$ => $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$

$E = -\frac{mk}{2a}$ => т.к. E ув-ся, то a ув-ся

Движение твердого тела

$$J_O = \begin{pmatrix} \int \xi_2^2+\xi_3^2\,dm & -\int \xi_1\xi_2\,dm & -\int \xi_1\xi_3\,dm \\ & \int \xi_1^2+\xi_3^2\,dm & -\int \xi_2\xi_3\,dm \\ & & \int \xi_1^2+\xi_2^2\,dm \end{pmatrix}$$

$J_O^T = J_O$

$J_{aa} + J_{bb} \geq J_{cc}$

($=$ для плоских фигур, $cc \perp$ пл-ти симметрии)

$J_O = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$ – не может быть (наруш. Δ-ка)

$J_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – не может быть (нет симметрии)

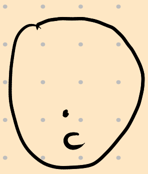
$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ тензор кв. рас-ий $j(\vec{a}) = \begin{bmatrix} a_2^2+a_3^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ & a_1^2+a_3^2 & -a_2a_3 \\ & & a_1^2+a_2^2 \end{bmatrix}$

Расширенная т. Гюйгенса – Штейнера: $J_O = J_C + m j(\vec{a})$

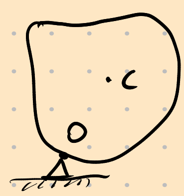
$J' = S^T J S \Rightarrow \exists$ базис гл. осей, где $J' = \mathrm{diag}[A, B, C]$

$\vec{r}^T J \vec{r} - 1 = 0$ – эллипсоид инерции

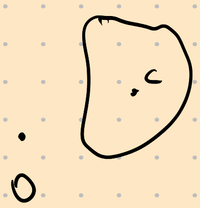
(в гл. осях: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$)



$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_c \vec{\omega}$

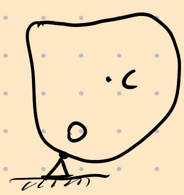


$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J_O \vec{\omega}$



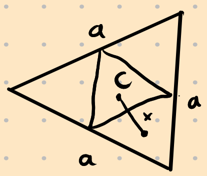
$K_O = \vec{K}_c + \vec{OC} \times \vec{P} =$

$= J_c \vec{\omega} + \vec{OC} \times m\vec{V}_c$



$\vec{K}_O = J_O \vec{\omega}$

Пример 1



J_c – ?

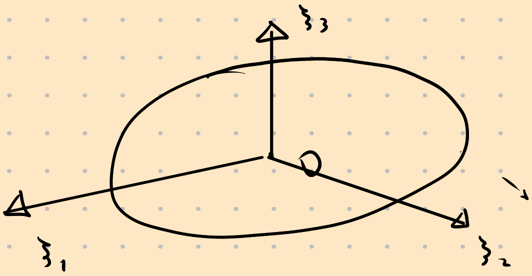
$x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

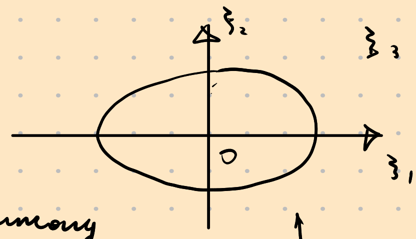
J – отн. оси, $\perp$ пл-ти Δ-ка, проход. через C

Момент инерции половинки Δ-ов − $\frac{J}{16}$ т.к. $J \sim mr^2 \sim r^4$

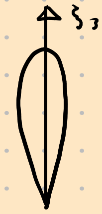
$$J = \frac{J}{16}\cdot 4 + 3\frac{m}{4}x^2$$

$$\frac{3J}{4} = \frac{3m}{4}\cdot\frac{a^2\cdot 3}{36} \Rightarrow J = \frac{ma^2}{12}$$



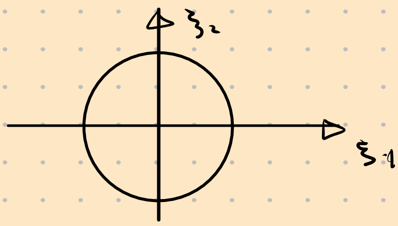


всего 4 вар-а выбрать ξ_1, ξ_2



ξ_3 всегда ось динам. симметрии!

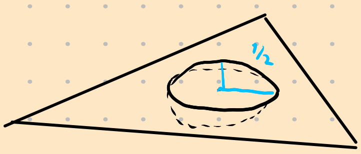
Но в треугольнике:



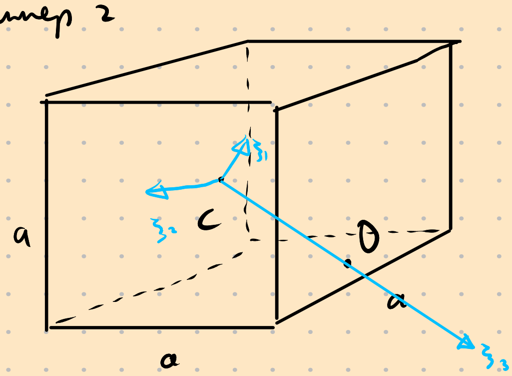
∞ кол-во способов! Любые оси подойдут (окружность т.к. 3 оси симметрии)

$$J = J_1 + J_2;\quad J_1 = J_2 \Rightarrow J_1 = J_2 = \frac{ma^2}{24}$$

(по пер-ду Δ-ка в пл.-ти)



Пример 2



Найти гл. оси и изобр. эллипсоид инерции в т. O

В т. C − все оси главные

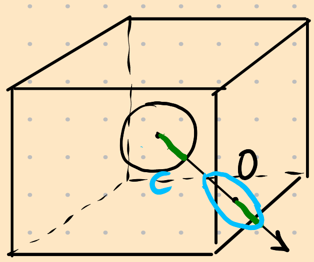
Проведем ξ_3 через O

$$J_O = J_C + m\,j(CO)$$

$$j(a) = \begin{bmatrix} a_2^2+a_3^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ & a_1^2+a_3^2 & -a_2a_3 \\ & & a_1^2+a_2^2 \end{bmatrix}$$

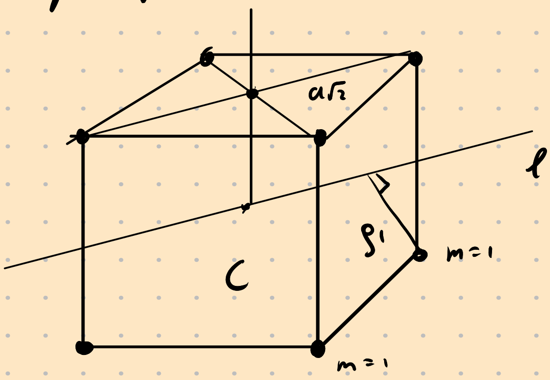
Центробежных компонент не будет, к гл. добавится a_3^2

$$J_1' = \frac{ma^2}{6} + m(CO)^2 = J_2' \qquad J_3 = J_3'$$



Эллипс вдоль оси сократился, а поперёк сохранился

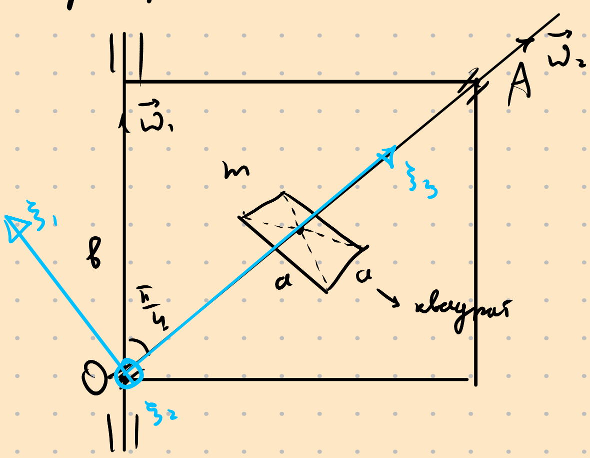
Пример 3



$$S = \sum_{i=1}^{8} \rho_i^2 = ?$$

$$S = J_l = 4a^2$$

Пример 4



$\vec{OA}$ т. массивна, рама невесома,

$\vec{OA}$ проходит квадрат в центре.

O – неподв. т. уже не 2D случай!

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J_0 \vec{\omega} \\ \vec{K}_0 &= J_0 \vec{\omega} \end{aligned}\right\}$$ Только для неподв. точки!

тензор!

ξ_3 – ось динам. симметрии!

$$J_0 = J_c + mj(\vec{OC}) = \mathrm{diag}\left[\frac{ma^2}{12}, \frac{ma^2}{12}, \frac{ma^2}{6}\right] + \left[\frac{mb^2}{2}, \frac{mb^2}{2}, 0\right]$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \vec{\omega}_1/\sqrt{2} + \vec{\omega}_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_0 \parallel \vec{\omega} \iff J_0 = \lambda E$$

Пример 4

$$J = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & D \\ 0 & D & C \end{bmatrix}$$

Найти главные оси инерции

Способ 1: Найти собств. знач-я

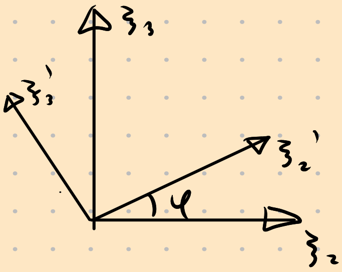
$$Jh = \lambda h \Rightarrow \det(\lambda E - J) = 0$$

$$(\lambda - A)\begin{vmatrix} \lambda - B & -D \\ -D & \lambda - C \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = B', \quad \lambda_2 = C'$$

h_1, h_2 - напр-я базисных осей.

Способ 2:

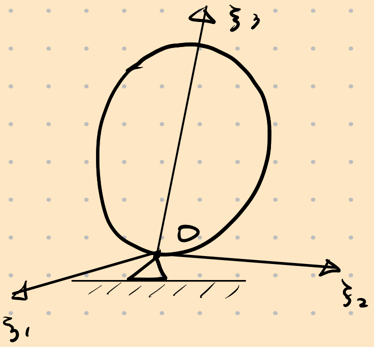


$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$S^T J S = \operatorname{diag}[A, B', C'] \Rightarrow \varphi$$

Динамика твёрдого тела

Случай Эйлера



$A \neq B \neq C \qquad A > C \qquad M = 0$

ξ – базис главных осей в т. O (неподв.)

$$\dot{\vec{K}}_x = \vec{M}_x \iff \frac{d\vec{K}_\xi}{dt} + \vec{\omega}_\xi \times \vec{K}_\xi = \vec{M}_\xi$$

$$K_\xi = J\vec{\omega} = \begin{bmatrix} Aq \\ Bp \\ Cr \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)\,qr = M_1 \\ B\dot{q} + (A-C)\,rp = M_2 \\ C\dot{r} + (B-A)\,pq = M_3 \end{cases}$$

— динам. ур-я Эйлера

незамкнута в общ. сл.

В случ. Эйлера $\vec{M} = 0$ (сис-ма замкнута)

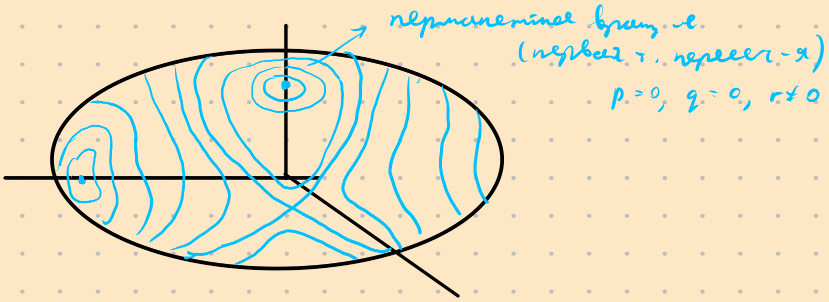
Интегралы движения: $\vec{K}_x = \overrightarrow{const} \iff |K_\xi|^2 = const$

$$\begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = const \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = const \end{cases}$$

Интерпретация Мак-Куллага

$$\begin{cases} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = const \quad (\text{в базисе } \xi) \\ \dfrac{K_1^2}{A} + \dfrac{K_2^2}{B} + \dfrac{K_3^2}{C} = 2T = const \end{cases}$$

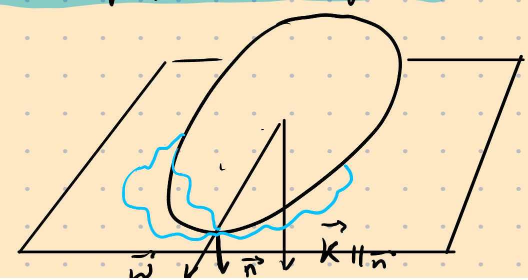
– пересеч. 2-х поверхностей (сфера и эллипсоид)



Семинары Ефимова

Движение вблизи сепаратрисы

Интерпретация Пуансо

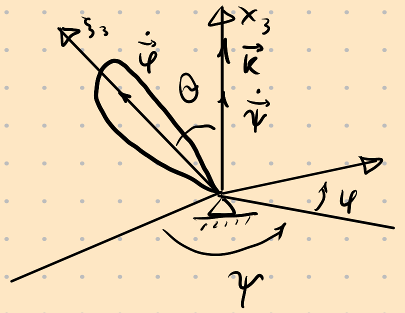


— пл-ть касания в т. пересеч. $\vec{\omega}$ и эллипсоида инерции

Случай Эйлера при $A = B$ $\quad (\vec M = \vec 0)$

φ – собств. вращ.
ψ – прецессия
θ – нутация (её нет)

$$C\dot r = const \qquad \left(C\dot r + \cancel{(B-A)}^{\,0}\, pq = 0 \right)$$



$$Cr = K\cos\theta$$

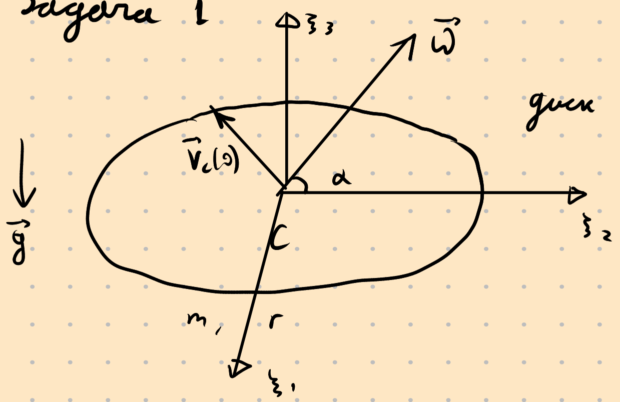
$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} = const$$

$$\vec K = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} = A\vec\omega + (C-A)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec\omega = \underbrace{\frac{\vec K}{A}}_{\dot{\vec\psi} \parallel \vec K} + \underbrace{\frac{A-C}{A}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}}_{\dot{\vec\varphi} \parallel \vec\xi_3}$$

$$\dot\psi = \frac{K}{A}, \qquad \dot\varphi = \frac{A-C}{A}\, r$$

Задача 1



Движение твёрдого тела в поле тяготения сводится к случаю Эйлера в Кёниговой сис-ме координат.

$m\ddot{\vec r}_c = m\vec g$ – теорема о движ. ц.м.

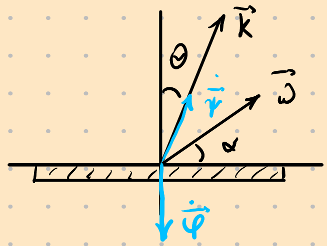
$$\vec r_c = \frac{\vec g t^2}{2} + \vec V(0)t + \vec V_0$$

В Кёниговой с.о.: ур. дв. описывается случ. Эйлера при $A = B$.

$$A = B = \frac{mr^2}{4} \qquad C = \frac{mr^2}{2}$$

$$\vec\omega(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \vec K(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ m\omega r^2\cos\alpha/4 \\ m\omega r^2 \sin\alpha/2 \end{bmatrix}$$

Как $\vec K$ ориентирован относ. $\vec\omega$?



„Сверху" и в той же пл-ти

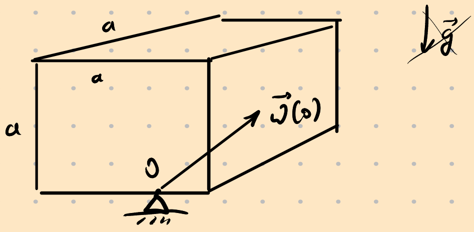
$A = B \Rightarrow$ рег. прецессия

$$\cos\theta = \frac{m\omega r^2\sin\alpha/2}{\sqrt{\frac{m^2\omega^2r^4}{16}\cos^2\alpha + \frac{m^2\omega^2r^4}{4}\sin^2\alpha}} = \frac{Cr}{K}$$

$$\dot\psi = \frac{K}{A} = \dots$$

$$\dot\varphi = -r = -\omega\sin\alpha$$

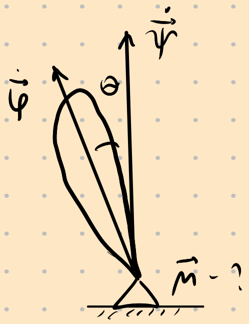
Задача 2



Закреп. в произв. т.

Получаем эллипсоид инерции симметричен, $A = B$ => рег. прецессия.

Вынужденная регулярная прецессия

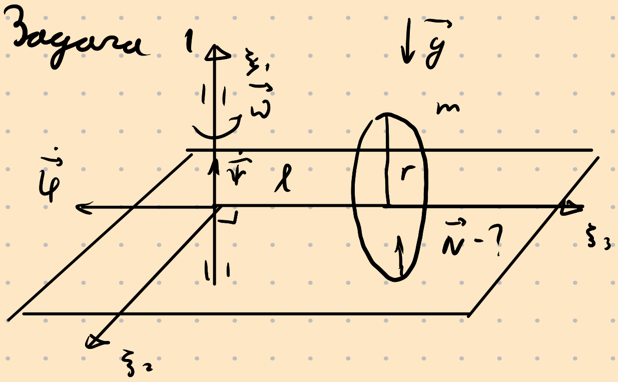


$\theta = const,\quad A = B \neq C$

$\dot{\psi} = const,\quad \dot{\varphi} = const$

$$\vec{M} = \left[C + (C - A)\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right]\dot{\vec{\psi}} \times \dot{\vec{\varphi}}$$

Задача 1



Симметричное тело совершает вынужденную прецессию.

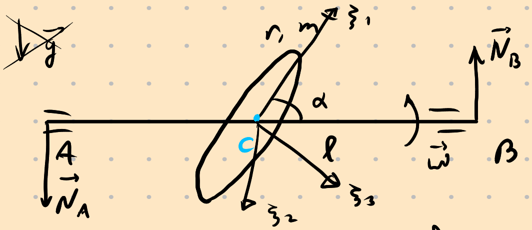
$C = \frac{mr^2}{2}$

$\dot{\psi} = \omega \qquad \dot{\varphi} = -\omega\frac{l}{r}$

Проекция на ось ξ_2: $\frac{mr^2}{2}\frac{l}{r}\omega^2 = Nl - mgl$

$N = mg + \frac{mr\omega^2}{2}$ – так работают жерновые мельницы

Задача 2



N_A, N_B – ? (динамические силы реакции)

C неподв. => $\vec{N}_A + \vec{N}_B = 0$ $(m\ddot{\vec{r}}_c = 0 = \vec{N}_A + \vec{N}_B)$ =>

$\dot{\vec{K}} = \vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{N}_A + \vec{r}_B \times \vec{N}_B$ => $\vec{N}_B = -\vec{N}_A = \vec{N}$

Можно вообще без всяких прецессий обойтись ↗

$$\vec{\omega}_\xi = \begin{bmatrix} \omega\cos\alpha \\ 0 \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix} ; \quad \vec{K} = \frac{\omega m r^2}{4} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ 2\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{K}} = \vec{\omega} \times \vec{K} = \frac{m\omega^2 r^2}{4} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m\omega^2 r^2}{4}\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2Nl \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(локальная произв. 0)

(компонента $\vec{k}$, к-рая $\parallel \vec{\omega}$, просто уйдёт)

$$\Rightarrow N = -\frac{m\omega^2 r^2}{8l}\sin\alpha\cos\alpha$$ — т.е. $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ на картинке не так направлены

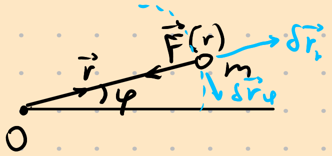
Уравнения Лагранжа

$$(T_{,\dot{k}})^{\cdot} - T_{,k} = Q_k \iff \mathcal{E}_k T = Q_k$$

$$Q_{,k} = -\Pi_{,k} \Rightarrow \mathcal{L} = T - \Pi \Rightarrow \mathcal{E}_k \mathcal{L} = 0$$

V - обобщ. потенц.: $Q_k = \mathcal{E}_k V$, $\mathcal{L} = T - V$

Пример: поле тяготения



Вводим $q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$

M (конфигур. многообр.) — плоскость

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$\Pi = \int F(r)\,dr \qquad \delta A = Q_i\,\delta q^i$ - вирт. работа

$$\delta A_a = Q_a\,\delta q^a \Rightarrow Q_a = \frac{\delta A_a}{\delta q^a} \Rightarrow Q_r = -F = -\Pi_{,r}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \int F(r)\,dr$$

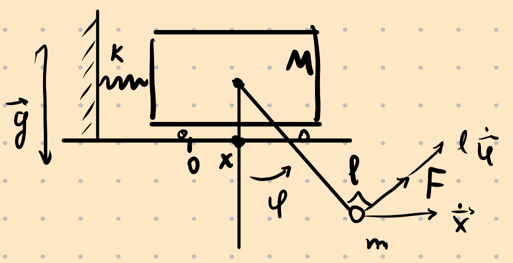
$\mathcal{L}_{,r} = m r \dot{\varphi}^2 - F(r) \qquad \mathcal{L}_{,\varphi} = 0$

$\mathcal{L}_{,\dot{r}} = m\dot{r}, \quad (\mathcal{L}_{,\dot{r}})^{\cdot} = m\ddot{r} \qquad (\mathcal{L}_{,\dot{\varphi}})^{\cdot} = 0$

$m\ddot{r} - m r\dot{\varphi}^2 + F(r) = 0 \quad (1) \qquad m r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (2)$

(1) и (2) - ур-я движения

Пример 2



$$\mathcal{L} = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right) + mgl\cos\varphi - \frac{kx^2}{2}$$

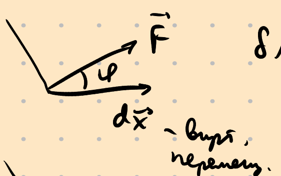
$g \to \Pi = mgl(1-\cos\varphi) \sim -mgl\cos\varphi$

Все пот. силы лучше сразу - в Лагранжиан

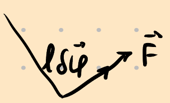
$K \to \Pi_k = \frac{kx^2}{2}$

Смотрим, какую работу будет совершать сила F при вирт. перемещ. по x и по φ:

$$Q_a = \frac{\delta A_a}{\delta q^a}$$



$$\delta A_x = \underbrace{F\cos\varphi}_{Q_x}\,dx$$



$$\delta A_\varphi = \underbrace{F\,l}_{Q_\varphi}\,\delta\varphi$$

$(\mathcal{L}_{,\dot{k}})^{\cdot} - \mathcal{L}_{,k} = Q_k$ – подставляем, получаем

Сост. ур-ий Лагранжа в неинерц. сис-ах отсчёта

$$\int(\underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{\vec{w}\text{ - абс. ускорение}} - \vec{f})\,\delta\vec{r}\,dm = 0$$

$$\int \vec{w}\,\delta\vec{r}\,dm = \int \vec{f}\,\delta\vec{r}\,dm$$ – в инерц. с-ах отсчёта

$$\mathcal{E}_k T\,\delta q^k = Q_k\,\delta q^k$$

Неинерц. с. о.:

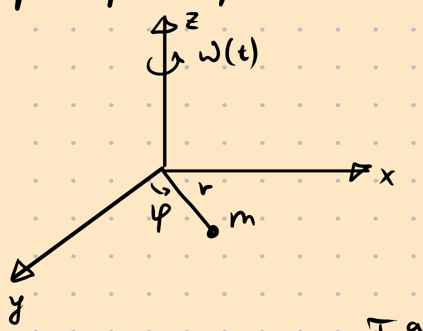
$$\vec{w} = \vec{w}^{\,r} + \vec{w}^{\,e} + \vec{w}^{\,c}$$

$$\int \vec{w}^{\,r}\,\delta\vec{r}\,dm = \int(\vec{f} - \vec{w}^{\,e} - \vec{w}^{\,c})\,\delta\vec{r}\,dm$$

$$\mathcal{E}_k \underbrace{T^r}_{\text{относ. в неинерц. С.О.}} \qquad Q_k + Q_k^{J^e} + Q_k^{J^c}$$

$$\mathcal{E}_k T^r = Q_k + Q_k^{J^e} + Q_k^{J^c}$$

Пример: грузик в не ИСО



Точка движ. в пл-ти xy

Коор-ты полярные

1-й способ – вычисление абс. пар-ов движ-я

$$T^a = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi} + \omega(t))^2\right] = \mathcal{L}^a$$

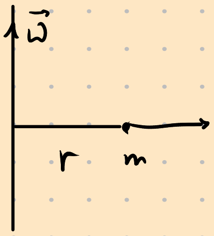
$$\begin{cases} \ddot{r} - r(\dot{\varphi} + \omega(t))^2 = 0 & (1) \\ m\left(r^2(\dot{\varphi} + \omega(t))\right)^{\cdot} = 0 & (2) \end{cases}$$

Вся неинерц. сидит в T^a

2-й способ

$$T^r = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\vec{J}^{\,e} = \underbrace{\vec{J}^{\,1}}_{\text{центробежная}} + \underbrace{\vec{J}^{\,2}}_{\text{ускорение вращ.-е}}$$

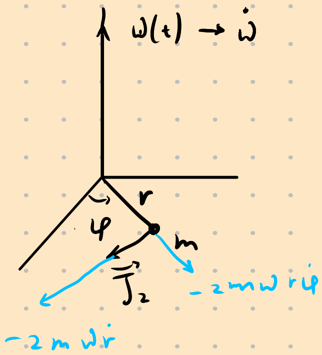


$J_1 = m\omega^2 r \Rightarrow \Pi = -\dfrac{m\omega^2 r^2}{2}$ *

центробежная ф-ия

$$L^r = T^r + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Остальные силы так не вписать



$\vec J_2 = -m\vec\varepsilon \times \vec r$

$\vec J^c = -2m\vec\omega \times \vec V^r$ – раздиваем на $\dot r$ и $\dot\varphi$

$Q_r = 2mr\dot\varphi$ – т.к. δr и J_r сонапр.

$Q_\varphi = -\ell(2m\omega\dot r + m\dot\omega r)$ – т.к. δr и J_φ противонапр.

Замечание 1-й способ предпочтительнее.

Первые интегралы Лагранжевых систем

1. q^k – не входит в L – циклическая координата

$\mathcal{E}_i\, L = 0 \Rightarrow (L_{,\dot k})^{\cdot} = 0 \quad (L_{,k} = 0)$

$L_{,\dot k} = const$ (обобщённый импульс)

2. $L_{,t} = 0$ и $N = \underbrace{Q_i^*}_{\text{не вх. в } L}\dot q^i = 0$ (обобщ. силы не сов. работы)

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$$

$$T = \frac{1}{2}\int \big(\underbrace{\vec r_{,k}\dot q^k + \vec r_{,t}}_{\vec v}\big)^2 dm = T_2 + T_1 + T_0$$

$T_2 = \frac{1}{2}\int \vec r_{,k}\cdot\vec r_{,j}\cdot\dot q^k\dot q^j$ – квадратичная форма по обобщ. скоростям

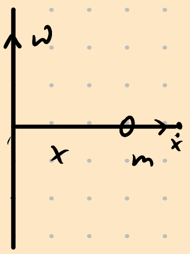
T_1 – линейная форма по обобщ. скоростям

T_0 – не зависит от обобщ. скоростей

Тогда сохр. **интеграл Пенлеве-Якоби** (обобщ. пол. энергии);

$\mathcal{E} = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}$

Пример Пенлеве-Якоби



$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \mathcal{L} = T_2 + T_0$

$T_2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \qquad T_0 = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$

$\mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \text{const}$