

Рамиев Александер Владимирович

Минимум

Члены совета: Акимов Рамиев, Чистяков

Бывшие члены: Журабек; Мархел; Гармашев (~ коньсена); Бондаренко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома \mathbb{R}^3 - все объекты - в Евклидовомпр-де \mathbb{R}^3 .
2. \exists движение: $R \rightarrow \mathbb{R}^3$ (в \mathbb{R} -время)
3. \exists мат. форма: (m, \vec{r}) , $m = \text{const} > 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4. \exists взаимодействие: $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2) \rightarrow \exists \vec{F}$ -акт: $\vec{F} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\begin{array}{c} \vec{F} \\ \longrightarrow \\ (m_1, \vec{r}_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} -\vec{F} \\ \longleftarrow \\ (m_2, \vec{r}_2) \end{array}$$

5. \exists час-ые координаты и час-ое параллелизм временем, такие что

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие час-ые наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Учб.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

$$t = t(t', q'), q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0 - \text{же не } q\text{-ун!}$$

Тогда F_i учб.

Ковариантность: инвариантность правил соединения ур-ий.

Пример: ур-я №9 Несущая ковариантна относ. предп-ии Гамильт.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{v} t + A t, \quad A - \text{опис. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{предп. (группа) Гамильт.}}$$

$$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = \text{const}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longleftrightarrow m \ddot{\vec{r}'} = \vec{F}$$

Універсальне обозначення

$$\textcircled{1} \quad \vec{r} \rightarrow r^i, \quad i = 1 \dots 3$$

$$\textcircled{2} \quad A \rightarrow a_{ij}$$

$$a_j^i \quad \begin{matrix} a_{ij} \\ a^i \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{нені} \\ \text{універ} \end{matrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^i b^i \quad (\text{правило дужини})$$

$$A\vec{r} = \underbrace{a_{ij}}_{\text{діагональ універ}} \vec{r}^i$$

$$\textcircled{4} \quad a, \dots, h - \text{циклическое універса}$$

$x^a b^a - \exists i \in \mathbb{N} \text{ с номером } a; \text{ без суммирования!}$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$$

$$\text{Нпр.} \quad df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$$

Координаты Торка

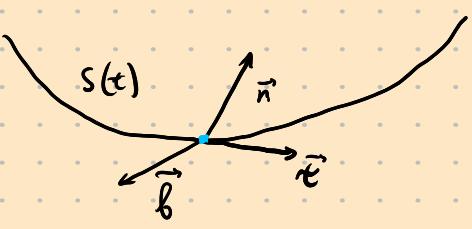
Декартовы координаты

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

$$v = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{r}^2 \\ \dot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{скорость}$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}^1 \\ \ddot{r}^2 \\ \ddot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{ускорение}$$

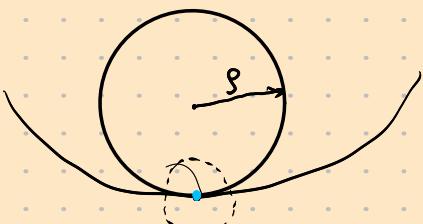
Сопровождающие трёхвекторы Торка



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \vec{r}_{,s}, \quad \dot{s} = \vec{t} v$$

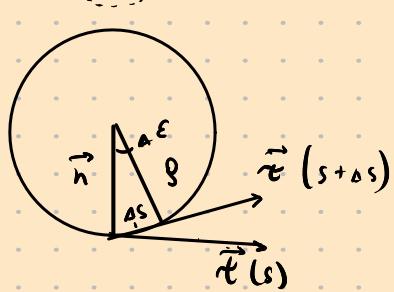
$$\vec{w} = \vec{t}_{,s} v^2 + \vec{v} \vec{v}$$



$$\Delta \vec{s} \approx \rho \Delta \theta$$

$$\Delta \vec{t} \approx \Delta \rho \vec{n} = \frac{4s}{\rho} \vec{n}$$

$$\vec{t}_{,s} = \frac{\vec{n}}{\rho} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} \vec{t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho} \vec{n}}_{w_c \text{ Танген.}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho} \vec{n}}_{w_n \text{ нормаль}}$$



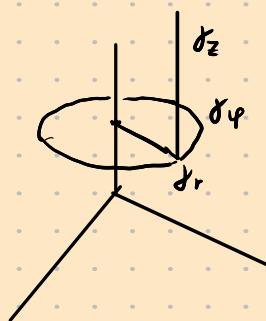
Криволинейные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} - \text{криволинейные (однозначные) координаты}$$

$\det [r_{ij}] \neq 0!$ Взаимно-однознач. соотв.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} - \text{цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i - \text{var} & i=1, 2, 3 \\ q^{j+i} - \text{fix} \end{cases} - \gamma_i - \text{координатные линии}$$



$$H_x = |\vec{g}_x| - \kappa r \text{ крив}$$

$$H_x = \sqrt{(r'_x)^2 + (r''_x)^2 + (r'''_x)^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{g}_a}{H_a} - \text{Ориг (норм. вектор) на единица}$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$



Скорость в кривой коорд.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,x} \dot{q}^x \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^x}_{\text{координаты}} \vec{g}_x$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{v} = \sum \underbrace{H_x}_{\text{координаты}} \dot{q}^x \vec{e}_x \quad \text{координаты}$$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_x \cdot \vec{g}_x}_{g_{xx} \text{- метрик. тензор}} \cdot \dot{q}^x \cdot \dot{q}^x = g_{xx} \dot{q}^x \dot{q}^x$$

$$\textcircled{2} \quad v^2 = \sum H_i^2 \cdot \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_x \rangle \dot{q}^i \dot{q}^i$$

$$\text{Если } \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}:$$

$$v^2 = \sum H_i^2 \cdot (\dot{q}^i)^2$$

Ускорение в кривой коорд.

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_x = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x}) \dot{q}^x - \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}_{,x}$$

Равнл. по $q_x \Leftrightarrow$ вектор:

$$\vec{r}_{,x} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{r}_{,xi} \cdot \dot{q}^i \quad \vec{r}_{,xi} = \vec{r}_{,ki} \cdot q^i \quad \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x} = \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,x} \quad \left(\vec{r}_{,x}, \quad v^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \right)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{,x}(q) \cdot \dot{q}^x \Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{q}^x}}_{\frac{d\ddot{\vec{r}}}{dq^x}} = \vec{r}_{,x}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x} = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,x} = \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,x}$$

$$! \quad \dot{q}^i = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$③ \vec{w} \cdot \vec{g}_a = \frac{d}{dt} \left(v^2/2 \right)_{,a} - \left(\frac{v^2}{2} \right)_{,a}$$

$$④ \vec{w} \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{M_a} \left[\frac{d}{dt} \left(v^2/2 \right)_{,a} - \left(v^2/2 \right)_{,a} \right]$$

Оператор Эйнштейна - дифференциал

$$\xi_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_a = \xi_k \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Кинематический закон Ньютона в виде вспомогательного

$$q^a \rightarrow q^a + dq^a - \text{расположение центра}$$

$$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{M_a} \cdot dq^a$$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \mid \vec{g}_k$$

$$T = \frac{mv^2}{2} - \text{кин. энергия}$$

$$m \xi_k \left(\frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \vec{g}_k \quad Q_k - \text{отдаляемая энергия}$$

$$\xi_k(T) = Q_k$$

$$(6) \frac{d}{dt} T_{,k} - T_{,k} = Q_k$$

$$\text{Другой вид: } \frac{1}{M_a} \xi_a(T) = \vec{F} \vec{e}_a$$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ - зависимость $q(q')$ - замена переменной

Как изменится скорость?

$q^i = \underbrace{q^i}_{\text{координата}} \cdot \underbrace{q^{i'}}_{\text{координата}} - \text{координатный вектор (коорд. вектор, к-ром описано движение вибратора)} \quad (\text{тензор 2-го рода}) \quad \text{безразмер. вектор}$

$$\dot{q} = J q'$$

Что связь с уравнением?

$f(q)$ - час. оп-в

$f(q(q')) \quad f_{,i} = F_{,i} \cdot q^{i'} - \text{уравнение не то! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор - тензор 2-го рода)}$

$$\underbrace{\nabla' f}_{\text{second}} = \nabla f J \quad \nabla f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{yine cok dus}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$$

Paydaya (nemgy ko - u kenige-) teoreti, ean yedap-e oprimonuus $((J^T)^{-1} = J)$

Međurečni Tenzor

$$\vec{g}_x = \vec{r}_{,x} \quad \vec{r}(q(q)) - \text{zavera}$$

$$g_{xx} = \vec{r}_{,x} \cdot \vec{q}_{,x}^* = \vec{g}_x \cdot \vec{q}_{,x}^* \quad \text{- nepravil}, \vec{g}_x = \text{nevarjanim tenzor}$$

$$\text{Međurečni Tenzor: } \hat{V} = q^i \vec{g}_i \Rightarrow V^2 = \underbrace{g_{ii}}_{g_{ik}=g_i g_k} q^i q^k, \quad g_{ik} = g_i g_k - \text{međur. Tenzor!}$$

$$g_{i^1 k^1} = q_{,i^1}^i q_{,k^1}^k g_{ik} - \text{kozajudnim tenzor} \approx 20 \text{ parna sume } (0,2)$$

Күрнәмәләндә төбәгесең тәс

Төбәгесең тәс - сабакыннан мат. борк, рас-аси менен к-рләре не извеснедет.



$M \in \text{тәс}$ - нараси ТТ (төбәгесең тәс)

Движение төбәгесең тәс - это гомотетия нараси и
гомометрия оның, нараси (вращение).

Вращение. Числ. координаты вращения

Собакындан нараси координаты и рас-асында вращение.

- Числ. формула

$$\boxed{\text{уравнение}} \quad \vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3 \\ \vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Неберегидағы си-ми координаты Ох:

$$x \xrightarrow[3 \text{ (ориг. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\Theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



Числ. уравн

ψ - уран превращен

Θ - уран нуткашын

φ - уран садағеннанда вращен

Паралеллары ψ , Θ и φ нараси бз.-оғын жөн. с позициян төбәгесең тәс
бенде крате нараси. $\Theta = \{0, \pi\}$

- Симметрия (караданование) уран



ψ - күре

Θ - тәндерем

φ - күрен

Вращение при $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Мадаң си-ми ураның көлемненда вращение.

Ортогональные матрицы



$$\vec{r}' = A \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 A^T A$$

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T A^T A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = I -$$

Определение орт. матрицы

Часть 1

① Теорема Фурье - Крамера: $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |\mathbb{E}| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

небольшой
значительный небольшой

② $A^T A = \mathbb{E} \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③ $\forall A, B$ - орт. $\rightarrow C = AB$ - ортогональная

$$C^T C = B^T A^T \cdot AB = \mathbb{E}$$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

① $\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

③ $\exists E \in G: \forall A \in G \rightarrow AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \rightarrow \exists A^{-1} \in G: A^{-1} A = AA^{-1} = E$

Линия $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = \mathbb{E}$

$SO(3)$ - симм. орт. группы; $\forall A \in SO(3) \rightarrow |A| = 1$ (группа поворотов)

⑤ $SO(3)$ - основная ми. инв. матрица 3-го ранга с неотрицательной формой.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' & \dots \\ a_{21}' & \dots \\ a_{31}' & \dots \end{pmatrix} = [\vec{e}_i]_e$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}^1 \stackrel{j \rightarrow i}{\Rightarrow} a_{ii}^1 = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{ii})$$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаим. однознач. соответствие между параметрами 3-го ранга $A \in SO(3)$.

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} \Rightarrow$ 6 независимых строк \Rightarrow \Rightarrow матрица из $SO(3)$ — трехмерное многообразие в 9-мерном нр-ве матриц

$$\textcircled{6} \quad a_{ii}^i = \Delta_{ii}^i \quad A^{-1} = \frac{[\Delta_{ii}^i]^T}{|A|_{\infty}} = A^T \Rightarrow UTA$$

↑
3x-1 A
an. назначение

Собственные векторы и собственные значения ортогональных матриц

$$A \vec{r} = \lambda \vec{r} \Rightarrow |\lambda E - A| = 0 \quad \text{tr } A = a_{ii}^i$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr } A + \lambda \text{tr } A - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec{r}_1 : A \vec{r}_1 = \vec{r}_1$ — собственный вектор

Докажем, что $|\lambda_0| = 1$

$$A \vec{r}_0 = \lambda_0 \vec{r}_0 \mid \cdot (\text{imp.-e})^+ \quad A^+ = \overline{A^T} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{коэффициент комп-а} \\ - \text{правило сопряжения} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_0^T A^+ A \vec{r}_0 = \lambda_0^+ \lambda_0 \cdot \vec{r}_0^T \vec{r}_0 \quad \text{Если } \vec{r}_0 = \vec{p} + i \vec{q}, \text{ то } \vec{r}_0^T \vec{r}_0 = \vec{p}^T \vec{p} + \vec{q}^T \vec{q} = |\vec{r}_0|^2 > 0$$

"F" "i $|\lambda_0|^2$ "

$$|\vec{r}_0|^2 = |\lambda_0| \cdot |\vec{r}_0|^2 \Rightarrow |\lambda_0| = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = \frac{\text{tr } A - 1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{(\text{tr } A - 1)^2}{4}}$$

$$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i \vec{q} \quad \{ \vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q} \} - \text{набор ОКБ}$$

Умнож. нр-ва A :



$P \perp \vec{r}_1$, P -унмнож. нр-ва A .

$$\exists \vec{r} \in P \quad A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$$

$$(A \vec{r})^T \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}^T A^T}_{\vec{r}_1} \vec{r}_1 \Rightarrow A \vec{r} \in P$$

УД



Теорема Фригера о конечных наборах

A — $n \times n$ матрица с ненул. строкой $\exists \vec{r}$ в ядре A конечн. набора,

однозн. назначение \vec{r} (всегда существует \vec{r})

Через ортогональную матрицу и нап-об Эйнштейна поверота



Видим \vec{e} как ось поворота, \vec{r} - лежащая в плоскости с \vec{e} и \vec{r} .

\vec{r} подразумевается на φ омоз. \vec{e} & \vec{r} .

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \text{ где } \vec{r}_1 = \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3 = \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e} + (\vec{r} - \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e}) \cos \varphi + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi = \\ &= (\vec{e} \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top) \vec{r} \end{aligned}$$

$$\hat{\vec{e}} \vec{r} = \vec{e} \times \vec{r}, \quad \hat{\vec{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad \vec{e} \vec{e}^\top = \begin{bmatrix} (e')^2 & e' e^2 & e' e^3 \\ e' e^2 & \dots & \dots \\ e' e^3 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Получим $A = E \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top$ (2) - правило куб. омоз. доказан!

$$\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) = \langle \vec{e} \cdot \vec{r} \rangle \vec{e} - \vec{r}$$

$$\hat{\vec{e}}^2 \vec{r} = (e e^\top - E) \vec{r}$$

$$(A = E + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + \hat{\vec{e}}^2 (1 - \cos \varphi))$$

Пусть $\vec{\varphi} = \vec{e} \varphi$ - вектор Эйнштейна (где \vec{e} единичный вектор - изменение не подходит)

* $\vec{\varphi} \hookrightarrow \hat{\vec{e}} - \cos \varphi$ - ортогон. ортогон. вектор (1).

Тогда можно нап-ти, что $A = e \vec{\varphi}$ (пог. тензор)

Выражение нап-об. Эйнштейна. поверота через мат-во $A \in SO(3)$

$$2\vec{y}_3 (2) \Rightarrow \operatorname{tr} A = 3 \underbrace{\cos \varphi}_{E \cos \varphi} + 1 \underbrace{- \cos \varphi}_{(1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$$A = [a_{ij}^i]$$

$$a_2^3 - a_3^2 = 2 e^1 \sin \varphi \Rightarrow e^1 = \frac{a_2^3 - a_3^2}{2 \sin \varphi} \quad e^2 = \frac{a_3^1 - a_1^3}{2 \sin \varphi} \quad e^3 = \frac{a_1^2 - a_2^1}{2 \sin \varphi}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}; \text{ поэтому, что } \varphi \in [0; \pi]! \text{ т.к. } \vec{e} \text{ единичный вектор, что}$$

нап-об. поверота - это просто засов в циркуль. Поверот в одн. плоскости - дает вектор $-\vec{e}$.

Оператор наименований. Чистые скорости Тейлора Тесс

Если $\dot{\varphi} \ll 1$, то

$A \approx E + \hat{\varphi}$ - оператор наименований

То близко к тому что $A \in SO(n)$:

$$A(t) \in SO(n); A(0) = E$$

$$A^T A = E \quad | \frac{d}{dt}|_{t=0}$$

$$\overset{\cdot}{A}^T A + A^T \overset{\cdot}{A} \underset{\overset{\cdot}{E}}{=} 0 \quad |_{t=0}$$

$$\overset{\cdot}{A}^T(0) = -\overset{\cdot}{A}(0) \underset{\overset{\cdot}{\omega}}{=} \Rightarrow \overset{\cdot}{A}(0) - \text{кососимметрическое} \Rightarrow A \approx E + I + \hat{\omega}$$

Чистые скорости



$$\exists \Delta \vec{\varphi} = \vec{e} \Delta \varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \quad - \text{чистая скорость}$$

Распределение скоростей и ускорений в Тейлоре Тесс



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{p}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{p}}$$

$$g(t + \Delta t) \approx (E + \Delta \hat{\varphi}) \vec{p}(t)$$

$$\dot{\vec{p}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \vec{p} = \hat{\omega} \vec{p} = \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{p} \quad - \text{сп-ва Эйнштейна}$$

$$\vec{W} = \vec{V} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{p} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) \quad - \text{сп-ва Равновесия}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Кинематический закон второго рода

Приложен движением изображение



Бесшарое движение

Модель движения тела изображением бесшарового перемещения.

Перемещение тела на расстояние $\Delta l = \overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e}$ и повернуть на φ .

Теорема Макса: А) перемещение тела изображением бесшарового перемещения.

Б) движение тела не зависит от выбора начальной.



$$\vec{g}' = A \vec{g}$$

$$\vec{g}' \cdot \vec{e} = \vec{g}'^T \vec{e} = (A \vec{g})^T \vec{e} = \vec{g}^T \underline{A^T \vec{e}} = \vec{g}^T \vec{e}$$

Предыдущий \vec{g} не \vec{e} не имеет.

Если $\vec{g} = \overrightarrow{O O'}$ - не важно, как будем O , $\overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e} = \text{const.}$

Рассмотрим движение тела за время Δt



$$\vec{V}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Тело совершает ускоренное бесшарое перемещение.

Ось кинематического баланса

$$ГМТ: \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \lambda \vec{\omega}$$

$$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}}_{\text{не заб. ор. н.в.о.}} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_0 = \lambda \vec{\omega}^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{\vec{\omega}^2} - \text{крутиз. ускорение}$$

не заб. ор.
н.в.о.

Рассмотрим вращение:

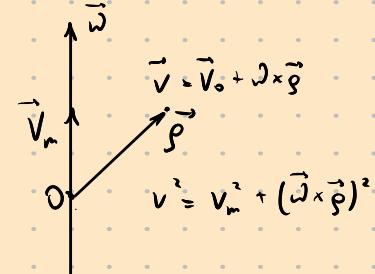
$$\begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{oy} + \dots = \lambda \omega_y \\ V_{oz} + \dots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\left| \frac{V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z} \right| - \text{равенство осн. кинемат. уравн.}$$

Несколько кинемат. уравн. \Leftrightarrow наим. ω , уравнение осн., V_m .

$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Причём V_m — мин. скорость в тб. точке.



Сложение вращений

1. Аксиомные вращения

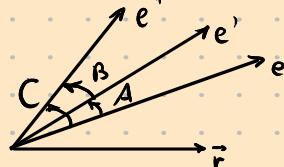


$$\vec{r}' = A \vec{r} \quad \vec{r}'' = B \vec{r}' = BA \vec{r}$$

$$C = BA$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

2. Пассивное вращение



$$\vec{r}^{(1)} = \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i \quad \vec{e}_i = A \vec{e}_i$$

(один и т. же вектор, но в новой системе координат)

$$\vec{r} = \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i' \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_i' \text{ (в новой системе)} \\ \vec{e}_i \text{ (в старой системе)} \end{array} \right. = \sum r_i^{(1)} A \vec{e}_i$$

B дает e' :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = A \vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}' = A^T \vec{r}$$

$$\vec{r}^{(1)} = B^T \vec{r}' = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$$

$$C = AB$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

Пример 1



$$C - ? \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Дно, это означает в. зеркальн., т.е.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- коорд. в. зеркальн. лежат в плоск.

$$C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример 2



$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

1. Вокруг z на ψ
2. Вокруг x' на θ - углов тангла
3. Вокруг z'' на φ

Однобугорное, наименее т. зрения

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- привод координат новому базису в шагах

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Кинематические уп-2 Пуассона для определения углов



A - общее угл. движение тела с началь. базисом x

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta \hat{\varphi}_x) A(t) & - \text{авт. т. зп.} \\ A(t) (E + \Delta \hat{\varphi}_y) & - \text{нас. т. зп.} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{array}{c} \Delta \vec{\varphi} \leftrightarrow \Delta \hat{\varphi} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \vec{\omega} \leftrightarrow \hat{\omega} \end{array}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A \hat{\omega}_y \end{cases} \quad (1) - \text{Кинем. уп-2 Пуассона.}$$

Если есть $A(t_i)$ и $\hat{\omega}_x(t)$ ибо $\hat{\omega}_y(t)$ то используя эти уп-2, можно находит текущую ориентацию.

Могутся авт. и нас. каскады огниваний: один за другим, или одновременно в X и в $\hat{\omega}$ т.е. это симб. блоков предп-9.

Уп-2 не универсальное выражение, но не ограничено.

Используются наимен. т. зрения (затем лучше спроецировать на корючие).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2,3 - 9 \text{ уравнений!}$$

Можно записать это в векторной форме

Причем - правило ОНБ, т.е. спин вращения A вращ. через первое вращ.

$$\vec{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2 \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \end{cases} \text{ - 6 вр.-вн}$$

$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = \delta_{km}$ - проверка правильности инцидентирования в процессе

Легкое из (1):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_x = \vec{A} \vec{A}^T \\ \hat{\omega}_z = \vec{A}^T \vec{A} \end{cases} \quad \text{- знать } A(t), \text{ можно вычислить } \omega_x(t) \text{ и } \omega_z(t)$$

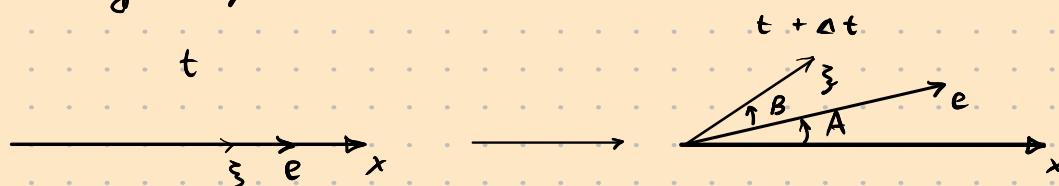
Горизонтальное вращение Тейлора Теда



$\vec{\omega}^e, \vec{\epsilon}^e$ - горизонтальное вращение в кр. ненагл. базисе
 $\vec{\omega}^r, \vec{\epsilon}^r$ - гориз. вк. в кр. кин. оси в ненагл. базисе
 Итак: $\vec{\omega}, \vec{\epsilon}$ - общ. гориз. вк. в кр.

1. Угловая скорость

Связан с вектором в ненагл. базисе приведенное вращение, синхрон. со вращением с ненагл. базисом.



$$A \approx E + \Delta \hat{\varphi}^e, \quad B \approx E + \Delta \hat{\varphi}^r$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{\Delta \hat{\varphi}^e + \Delta \hat{\varphi}^r}_{\text{(нашёл 1 неправ.)}}$$

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r$$

$\hat{\omega}^e$ - неподвижн. гр. вк.

$\hat{\omega}^r$ - синхроничн. гр. вк.

$\hat{\omega}$ - общ. вращ. гр. вк.

2. Скорость винора в ненормированной форме



$$\vec{a} = \sum a_i \vec{e}_i - \text{прямой винор}$$

$$\dot{\vec{a}} = \sum \dot{a}_i \vec{e}_i + a_i \dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

↑ акселер/омни. прям.

↑ ненормир. прямознач

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i \quad (\text{из к-ва Эйнера})$$

3. Чистое ускорение

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\omega}^e + \sum \omega^i \vec{e}_i$$

$$(\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^r + \vec{\omega}^e \times \vec{\omega}^r)$$

4. Осадочный винор

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{ч. винор вращения движущ. - осад. прям.} = \text{осад. прям.}$$

Кинематические уравнения Эйнера

У кватернионов есть наименее избыточные (нанесены в заголовок).

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda} - \text{complement},$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}$$

Нормированное кватернион: $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}; \quad |\vec{e}| = 1$

Действие — погружение ортогональной, и у кватернионов есть!

$R' = Ad R = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$ — приведенное представление

Свойства $Ad R$

$$] R = r_0 + \vec{r}$$

$$1. \quad r'_0 = r_0$$

$$\left. \begin{aligned} R' &= r'_0 + \vec{r}' = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \\ \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \tilde{\vec{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \Rightarrow \text{rect } \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r'_0 = r_0$$

$$2. \quad \vec{r}' = A \vec{r}, \quad A \in O(3)$$

$$\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \sim \text{пр. предп} \Rightarrow \exists A: \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = A \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\|\vec{r}'\| = \|\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| \Rightarrow \|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\| \Rightarrow A \in O(3) \quad \text{Итд,}$$

Задача: $\] \Lambda(t) \in \mathbb{H}, \quad \|\Lambda\| = 1, \quad \Lambda(0) = 1.$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Lambda \circ \tilde{\Lambda} &= 1 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) + \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R} \\ (\text{i.e. } \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = \dot{\Lambda}(0)) \end{aligned} \right.$$

Кватернион вида $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ & механизм действия сопоставляется с вектором

Теорема

Предположим $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$, где $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}$ задает движение погружения
вокруг \vec{e} на угол φ .

D-бо

$$\Lambda \circ \vec{r} - \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \stackrel{\text{континуатор?}}{=} 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}$$

$$\Lambda \circ \vec{r} = \vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = (\vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + 2(\vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = \vec{r} + 2 \lambda_0 \vec{\lambda} \times \vec{r} + 2 \vec{\lambda} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}) = (E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2) \vec{r} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2$ — общий представитель наименее избыточного кватерниона

$$A = E + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \hat{e} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \hat{e}^2 = R + \sin \varphi \hat{e} + (1 - \cos \varphi) \hat{e}^2 -$$

Берілгенде $A \in SO(3)$ резеке негізгі динамикада.

УТА

Симметрия поворотов в кватернионах

1. Аксиоматика 1. зп.



$$\vec{r}' = \Lambda_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}_1, \quad \vec{r}'' = \Lambda_2 \circ \vec{r}' \circ \tilde{\Lambda}_2 \quad \vec{r}'' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\vec{r}'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}_2 \circ \tilde{\Lambda}_1 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$$

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \dots \circ \Lambda_1$$

Поворот б ынанда Λ симметриялы

2. Пасибнана 1. зп.



$$\vec{r}'_e = \Lambda_1 \circ \vec{e}' \circ \tilde{\Lambda}_1$$

$$\vec{r} = r'_e \vec{e}' = \Lambda_1 r'_e \vec{e}' \circ \tilde{\Lambda}_1$$

$$B \text{ даңғы } e: \quad r = \vec{r}_e \Rightarrow \vec{r}_e = \Lambda_1 \circ \vec{r}'_e \circ \tilde{\Lambda}_1$$

$$\text{Тогда } \vec{r}'_e = \tilde{\Lambda}_1 \circ \vec{r}_e \circ \Lambda_1$$

$$\vec{r}'_e = \tilde{\Lambda}_2 \circ \vec{r}'_e \circ \Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2 \circ \Lambda_2 \circ \vec{r}_e \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n$$

Задача: коор-ттын кватерниона б Λ орнанды б ыннаш $\{e_i\} \cup \{e_n\}$, т.к.

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi - \сәуле, \quad \text{коор-ттын } \vec{e} \text{ орнанды б } \{e_i\} \cup \{e_n\}.$$

Коор-ттын кватерниона б ыннандағы даңғылдар негізгі параметрлер Родрига - Раменского.
(одинаковы = даңғы, а-рәтті кватернион повертинашы)

Чаржесінің Гироскопия в кватернионах



$\Lambda(t)$ - поверто ζ орн. X

$$\Lambda(t+\Delta t) = \begin{cases} \Lambda_x(\Delta t) \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Lambda_z(\Delta t) \end{cases}$$

$$\Lambda_x(\Delta t) = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \vec{e}_x \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 1 + \vec{e}_x \frac{\Delta \varphi}{2} - \text{кб. малыңа поверто}$$

$$\varphi = \{x, z\}$$

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \vec{\omega}_x \circ \Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \circ \vec{\omega}_x$$

Чаржесі Гироскопияның разделиміліктерін, шешімдерін, берілгенде орындашыбыз. Орындаудаң, пеш-2 мес.

Они называются: а) наим $\Lambda(t)$ по $\vec{\omega}_x(t)$ и $\Lambda(0)$ б) наим $\vec{\omega}_x$ по $\Lambda(t)$

$$\vec{\omega}_x = 2\vec{i} \cdot \tilde{\vec{r}}, \quad \vec{\omega}_y = 2\tilde{\vec{r}} \cdot \vec{i}$$

Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами твердого тела, т.к. $\vec{1}$ и $-\vec{1}$ дают один и тот же поворот.

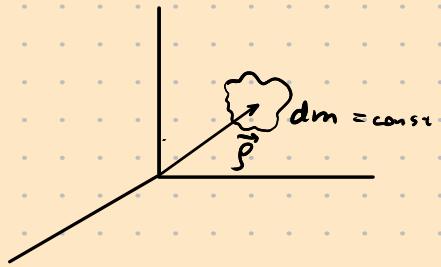
$$\|\vec{1}\| = 1 \Leftrightarrow \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad - S^3 \subset \mathbb{R}^4 \text{ - сфера}$$



один и тот же поворот

Основные понятия и законов динамики

1° Объем консервативный (состоит из 2н-об. частиц с раз. вектором \vec{p})



2° Центральное наимен. $\vec{I} = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dm = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{m_i = \text{const}} f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \Delta m_i$
Масса - это нера!

$$3^{\circ} m = \int dm \text{ - масса}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm \text{ - центр масс}$$

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm \text{ - импульс}$$

$$\vec{I} = \int f dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt} \int \underbrace{\vec{F} dm}_{m \vec{F}_c} \Rightarrow \vec{p} = m \vec{V}_c$$

