Решение линейного уравнения 2 порядка

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$, $\quad x \in I \quad$ все ф. непр., $a_0(x) \neq 0$

Предположим, мы угадали y_1 - решение однородного ур-я

Ищем в виде $e^{\alpha x}$, x^k, $ax+b$ и т.д.

Найдем ОРОУ:

y_1 - найдено

y - произв. реш-е однородного ур-я

Ф-ла Лиувилля - Остроградского: $W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = C\varphi(x)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\varphi(x) \qquad \frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2} dx + C_1$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ОРНУ: вариация постоянной: $y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$$

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \frac{b(x)}{a_0}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$$

$$C_1'(x) = \ldots \qquad C_2'(x) = \ldots$$

Задача 1

$$2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, \quad x > 0$$

ЧРОУ: $y_1 = e^{-x}$

y - произв., y_1 - угаданное

$$W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x} dx} = Ce^{-(2x + \frac{1}{2}\ln x)} = Ce^{-2x} x^{-1/2}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x} dx = 2x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} dx = 2x + \frac{1}{2}\ln x + C_1$$

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y'e^{-x} + ye^{-x}$$

Ділим на e^{-2x}:

$$\frac{y'e^{-x}+ye^{-x}}{e^{-2x}} = Cx^{-1/2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' \qquad \frac{y}{e^{-x}} = Cx^{1/2}+C_1$$

ЗРОУ $y = C_1e^{-x} + Ce^{-x}\sqrt{x}$

ОРНУ $y = C_1(x)e^{-x} + C(x)e^{-x}\sqrt{x}$

$$+\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-x}\sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - C_2'(x)e^{-x}\sqrt{x} + C_2'(x)\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $C_1'(x) = -1$

$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2$ $\qquad$ $C_1(x) = -x + C_1$

Відповідь: $y = (-x+C_1)e^{-x} + (2\sqrt{x}+C_2)e^{-x}\sqrt{x} = C_1e^{-x} + C_2e^{-x}\sqrt{x} + xe^{-x}$

Задача 2

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = x(\ln x - 1)^2, \quad x > e$$

ЧРОУ: $y_1 = x$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{\int\frac{dx}{x(\ln x-1)}} = C(\ln x - 1)$$

$$\int\frac{dx}{x(\ln x-1)} = \int\frac{d(\ln x-1)}{\ln x-1} = \ln(\ln x-1) + C$$

$$\frac{y_1y' - y_1'y}{y_1^2} = \frac{C(\ln x-1)}{x^2} \qquad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C(\ln x-1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C\frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1x + C_2\ln x$$

ОРНУ: $y = C_1(x)x + C_2(x)\ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)\frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \quad \Big| \cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{cases} C_1'(x)\,x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x)\,x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$C_2'(x) = -1$ $\qquad$ $C_1'(x) = \frac{\ln x}{x}$

$C_2(x) = -x + C_2$ $\qquad$ $C_1(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1$

Ответ: $y = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1\right) x + (C_2 - x)\ln x$

$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$

Задача 3

$(2x+3)\,y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}\,y = 3(2x+3)^2$

Ищем ЧРОУ в виде x^k:

$k(k-1)\cdot(2x+3)\,x^{k-2} - 2k\,x^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$

$(2x+3)\,k(k-1) - 2kx - 6 = 0$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$k = 2 \Rightarrow y_1 = x^2$

$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{2}{2x+3}dx} = C(2x+3)$

$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + C_1$

ОРОУ $y = C_1 x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

ОРНУ: ВП: $y = C_1(x)\,x^2 + C_2(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x^2 + C_2'(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \quad \Big| \cdot 2 \\ C_1'(x)\,2x - C_2'(x)\frac{1}{x^2} = 6x + 9 \quad \Big| \cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 2C_1' x^2 + 2C_2'\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ 2C_1' x^2 - C_2'\frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$3C_2'\frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$

$C_2' = -3x^2 \qquad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$

$C_2 = -x^3 + C_2 \qquad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$

Ответ: $y = (3x + 3\ln x + C_1)\,x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$y = C_1x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2\ln x + 2x^3 - x^2$

$y = C_1x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2\ln x$

Уравнение Бесселя

$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0, \qquad \nu = const$

Д-ть, что ур-е не может иметь 2х лин. незав. реш-ий, огр. в окр-ти 0 вместе с производными.

□ Предположим y_1 и y_2 – 2 такие реш-я.

$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}$, $C \neq 0$ т.к. y_1 и y_2 лин. незав.

$y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{C}{x}$

↳ огр. в окр-ти 0 ↳ явно неогр. ∎