

# Рамиев Александер Владимирович

Минимум

Члены совета: Акимов Рамиев, Чистяков

Бывшие члены: Журабек; Мархел; Гармашев (~ коньсена); Бондаренко

## Аксиоматика классической механики

1. Аксиома  $\mathbb{R}^3$  - все объекты - в Евклидовомпр-де  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $\exists$  движение:  $R \rightarrow \mathbb{R}^3$  (в  $\mathbb{R}$ -время)
3.  $\exists$  мат. форма:  $(m, \vec{r})$ ,  $m = \text{const} > 0$ ,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4.  $\exists$  взаимодействие:  $\forall (m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2) \rightarrow \exists \vec{F}$ -акт:  $\vec{F} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\begin{array}{c} \vec{F} \\ \longrightarrow \\ (m_1, \vec{r}_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} -\vec{F} \\ \longleftarrow \\ (m_2, \vec{r}_2) \end{array}$$

5.  $\exists$  час-ые координаты и час-ое параллелизм временем, такие что

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие час-ые наз-ся ИСО

## Инвариантность и ковариантность ур-ий

Учб.:  $\begin{cases} F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

$$t = t(t', q'), q = q(t', q')$$

$$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0 - \text{же не } q\text{-ун!}$$

Тогда  $F_i$  учб.

Ковариантность: инвариантность правил соединения ур-ий.

Пример: ур-я №9 Несущая ковариантна относ. предп-ии Гамильт.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{v} t + A t, \quad A - \text{опис. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{предп. (группа) Гамильт.}}$$

$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = \text{const}$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longleftrightarrow m \ddot{\vec{r}'} = \vec{F}$$

## Універсальне обозначення

$$\textcircled{1} \quad \vec{r} \rightarrow r^i, \quad i = 1 \dots 3$$

$$\textcircled{2} \quad A \rightarrow a_{ij}$$

$$a_j^i \quad \begin{matrix} a_{ij} \\ a^i \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{нені} \\ \text{універ} \end{matrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i = a^i b^i \quad (\text{правило дужини})$$

$$A\vec{r} = \underbrace{a_{ij}}_{\text{діагональ універ}} \vec{r}^i$$

$$\textcircled{4} \quad a, \dots, h - \text{циклическое універса}$$

$x^a b^a - \exists i \in \mathbb{N} \text{ с номером } a; \text{ без суммирования!}$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$$

$$\text{Нпр.} \quad df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k} dx^k$$

## Координаты Торка

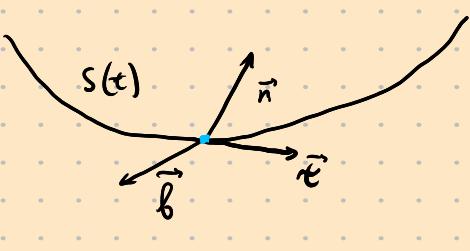
### Декартовы координаты

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

$$v = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}^1 \\ \dot{r}^2 \\ \dot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{скорость}$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}^1 \\ \ddot{r}^2 \\ \ddot{r}^3 \end{bmatrix} - \text{ускорение}$$

### Сопровождающие трёхвекторы Торка



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \vec{r}_{,s} \quad \dot{s} = \vec{t} v$$

$$\vec{w} = \vec{t}_{,s} v^2 + \vec{v} \vec{v}$$



$$\Delta \vec{s} \approx g \Delta \epsilon$$

$$\Delta \vec{t} \approx \Delta \vec{e}_n = \frac{4s}{g} \vec{n}$$

$$\vec{t}_{,s} = \frac{\vec{n}}{g} \Rightarrow \vec{w} = \underbrace{\vec{v} t}_{w_t} + \underbrace{\frac{v^2}{g} \vec{n}}_{w_n}$$

Tangential.      Normal



### Криволинейные координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(q); \quad q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} - \text{криволинейные (однозначные) координаты}$$

$\det [r_{ij}] \neq 0!$  Взаимно-однознач. соотв.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} - \text{цилиндрические координаты}$$

$$\begin{cases} q^i - \text{var} & i=1, 2, 3 \\ q^{j+i} - \text{fix} \end{cases} - \gamma_i - \text{координатные линии}$$



$$H_x = |\vec{g}_x| - \kappa r \text{ кривизна}$$

$$H_x = \sqrt{(r_{1x})^2 + (r_{2x})^2 + (r_{3x})^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{g}_a}{H_a} - \text{Оригинальный единичный вектор}$$

$$|\vec{e}_a| = 1$$



### Скорость в кривой коорд.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\dot{q}^k}_{\text{координаты}} \vec{g}_k$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{v} = \sum \underbrace{H_k}_{\text{координаты}} \dot{q}^k \vec{e}_k$$

$$v^2 = \underbrace{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k}_{g_{ik} \text{- метрик. тензор}} \cdot \dot{q}^i \cdot \dot{q}^k = g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\textcircled{2} \quad v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \rangle \dot{q}^i \dot{q}^k$$

$$\text{Если } \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}:$$

$$v^2 = \sum H_i \cdot (\dot{q}^i)^2$$

### Ускорение в кривой коорд.

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_x = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k}) \dot{r} + \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}_{,k}$$

Равнл. по  $q_k \Leftrightarrow$  вектор:

$$\vec{r}_{,k} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i \quad \vec{r}_{,ki} = \vec{r}_{,ki} \cdot \dot{q}^i \quad \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k} \quad (\vec{r}_{,k}, \quad v^2 = \vec{r} \cdot \vec{r})$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{,kk}(q) \cdot \dot{q}^k \Rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{q}^k}}_{\frac{d\ddot{\vec{r}}}{d\dot{q}^k}} = \vec{r}_{,k}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k} = \vec{r} \cdot \vec{r}_{,k} = \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k}$$

$$! \quad \dot{r} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$③ \vec{w} \cdot \vec{g}_a = \frac{d}{dt} \left( v^2/2 \right)_{,a} - \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,a}$$

$$④ \vec{w} \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{M_a} \left[ \frac{d}{dt} \left( v^2/2 \right)_{,a} - \left( v^2/2 \right)_{,a} \right]$$

Оператор Эйнштейна - дифференциал

$$\xi_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{g}_a = \xi_k \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

Кинематический закон Ньютона в виде вращения

$$q^a \rightarrow q^a + dq^a - \text{расположение центра}$$

$$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a} dq^a$$

$$|d\vec{r}_a| \approx \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{M_a} \cdot dq^a$$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \vec{g}_k$$

$$m \xi_k \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{F} \vec{g}_k \quad Q_k - \text{относительная работа}$$

$$T = \frac{mv^2}{2} - \text{кин. энергия}$$

$$\xi_k(T) = Q_k$$

$$(6) \frac{d}{dt} T_{,k} - T_{,k} = Q_k$$

$$\text{Другой вид: } \frac{1}{M_a} \xi_a(T) = \vec{F} \vec{e}_a$$

Понятие о тензорах

$$\vec{r}(q) - \text{зависимость} \quad q(q') - \text{замена переменной}$$

Как изменится скорость?

$$q^i = \underbrace{q^i}_{\text{координата}} \cdot \underbrace{q^{i'}}_{\text{координата}} - \text{координатный вектор (коорд. вектор, к-ром описано движение)} \\ (\text{тензор 2-го рода}) \quad \text{координата} \quad (\text{тензор 2-го рода}) \quad \text{координата}$$

$$\dot{q} = J q'$$

Что связь с уравнением?

$$f(q) - \text{коор. оп-в}$$

$$f(q(q')) \quad f_{,i} = F_{,i} \cdot q^{i'} - \text{уравнение не то! Это ковариантный вектор} \\ (\text{ковариантный вектор - тензор 2-го рода})$$

$$\underbrace{\nabla' f}_{\text{second}} = \nabla f J \quad \nabla f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{yine cok dus}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$$

Rasuya (memy ko - u kenige-) teoretič, eam ypred-e ogranichens ( $(J^T)^{-1} = J$ )

### Metrikasni Tensor

$$\vec{g}_x = \vec{r}_{,x} \quad \vec{r}(q(q)) - \text{zmena}$$

$$g_{xx} = \vec{r}_{,x} \cdot \vec{q}_{,x}^* = \vec{g}_x \cdot \vec{q}_{,x}^* \quad \text{- neyadit}, \quad \vec{g}_x = \text{koordinatniy vektor}$$

$$\text{Metrikasni Tensor: } \hat{V} = q^i \vec{g}_i \Rightarrow V^2 = \underbrace{g_{ii}}_{g_{ik}=g_i g_k} q^i \vec{q}^i \quad g_{ik} = g_i g_k - \text{metrik Tensor!}$$

$$g_{i,k} = q^i_{,k} \vec{q}^k \quad g_{ik} = \text{koordinatniy Tensor} \approx 20 \text{ perna funk } (0,2)$$

## Күрнәмәләндә төбәгесең тәс

Төбәгесең тәс - сабакыннан мат. борк, рас-аси менен к-рләре не извеснедет.



$M \in \text{тәс}$  - нараси ТТ (төбәгесең тәс)

Движение төбәгесең тәс - это гомотетия нараси и  
гомоморфия оның, нараси (бронзение).

## Бронзение. Числ. координаты бронзения

Собакындан нараси координаты и рас-асында бронзение.

- Числ. бронз.

$$\boxed{\text{указ.} \vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Небогатырьбын сис-ми координаты  $Ox$ :

$$x \xrightarrow[3(\text{ориг. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\Theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



Инш. узлов

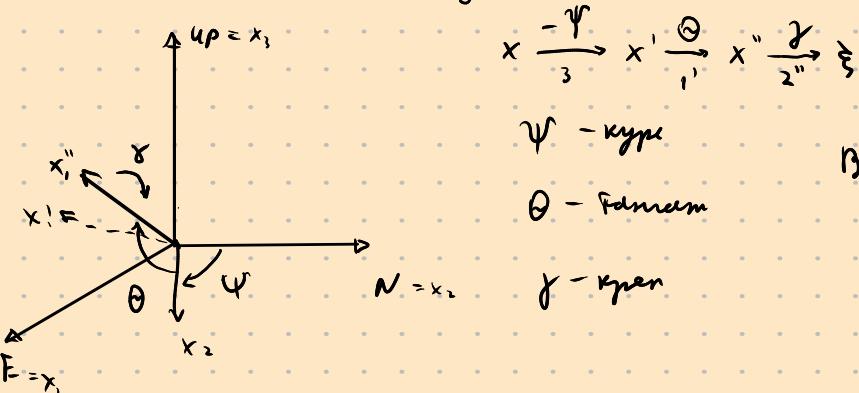
$\psi$  - узел прецессии

$\Theta$  - узел нутации

$\varphi$  - узел собственного бронзения

Параллельлы  $\psi$ ,  $\Theta$  и  $\varphi$  нараси. Был. оғын көб. с позициямен төбәгесең тәс  
бенде крате нараси.  $\Theta = \{0, \pi\}$

- Гомотетическое (карибетное) узел



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\Theta} x'' \xrightarrow[2'']{\varphi} \xi$$

$\psi$  - күре

$\Theta$  - Фаджам

$N = x_2$        $\gamma$  - күрен

Бронзение нын  $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Мадаң сис-ми узлов көрсеткесең бронзениң дүрт иштес бронзение.

## Ортогональные матрицы



$$\vec{r}' = A \vec{r}$$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 A^T A$$

$$|\vec{r}'|^2 = \vec{r}'^T \vec{r}' = \vec{r}^T A^T A \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \vec{r}^T \vec{r} \quad \forall \vec{r} \Rightarrow A^T A = I -$$

Определение орт. матрицы

### Часть 1

① Теорема Фурье - Крамера:  $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A^T A| = |\mathbb{E}| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

небольшой  
значительный небольшой

②  $A^T A = \mathbb{E} \Rightarrow A^{-1} = A^T$

③  $\forall A, B$  - орт.  $\rightarrow C = AB$  - ортогональная

$$C^T C = B^T A^T \cdot AB = \mathbb{E}$$

④ Ортогональные матрицы образуют группу.

$G$  - группа

①  $\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G$

②  $A(BC) = (AB)C$

③  $\exists E \in G: \forall A \in G \rightarrow AE = EA = A$

④  $\forall A \in G \rightarrow \exists A^{-1} \in G: A^{-1} A = AA^{-1} = E$

Линия  $O(3)$  - группа ортогональных матриц:  $A^T A = \mathbb{E}$

$SO(3)$  - симм. орт. группы;  $\forall A \in SO(3) \rightarrow |A| = 1$  (группа поворотов)

⑤  $SO(3)$  - основная ми. инв. матрица 3-го ранга с неотрицательной формой.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' \\ a_{21}' \\ a_{31}' \end{pmatrix} = [\vec{e}_{1'}]_e$$

$$\vec{e}_{1'} \cdot \vec{e}_j = a_{1j}' \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_{ij}' \stackrel{j \rightarrow i}{\Rightarrow} a_{ii}' = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{1'})$$

$A$  - матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однозначн. координатные между параллельн. плоскостями  $\pi$  и  $\pi'$  для  $A \in SO(3)$ .

$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$   $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} \Rightarrow$  6 независимых строк  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  матрица из  $SO(3)$  — трехмерное многообразие в 9-мерном нр-ве матриц

$$\textcircled{6} \quad a_{ii}^i = \Delta_{ii}^i \quad A^{-1} = \frac{[\Delta_{ii}^i]^T}{|A|_{\infty}} = A^T \Rightarrow UTA$$

↑  
3x-1 A  
an. назначение

Собственные векторы и собственные значения ортогональных матриц

$$A \vec{r} = \lambda \vec{r} \Rightarrow |\lambda E - A| = 0 \quad \text{tr } A = a_{ii}^i$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr } A + \lambda \text{tr } A - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec{r}_1 : A \vec{r}_1 = \vec{r}_1$  — собственный вектор

Докажем, что  $|\lambda_0| = 1$

$$A \vec{r}_0 = \lambda_0 \vec{r}_0 \mid \cdot (\text{imp.-e})^+ \quad A^+ = \overline{A^T} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{коэффициент комп-а} \\ - \text{правило сопряжения} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_0^T A^+ A \vec{r}_0 = \lambda_0^+ \lambda_0 \cdot \vec{r}_0^T \vec{r}_0 \quad \text{Если } \vec{r}_0 = \vec{p} + i \vec{q}, \text{ то } \vec{r}_0^T \vec{r}_0 = \vec{p}^T \vec{p} + \vec{q}^T \vec{q} = |\vec{r}_0|^2 > 0$$

"F"                  "i  $|\lambda_0|^2$ "

$$|\vec{r}_0|^2 = |\lambda_0| \cdot |\vec{r}_0|^2 \Rightarrow |\lambda_0| = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = \frac{\text{tr } A - 1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{(\text{tr } A - 1)^2}{4}}$$

$$\vec{r}_{2,3} = \vec{p} \mp i \vec{q} \quad \{ \vec{r}_1, \vec{p}, \vec{q} \} - \text{набор ОКБ}$$

Умнож. нр-ва  $A$ :



$P \perp \vec{r}_1$ ,  $P$ -унмнож. нр-ва  $A$ .

$$\exists \vec{r} \in P \quad A \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow A^T \vec{r}_1 = \vec{r}_1$$

$$(A \vec{r})^T \vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}^T A^T}_{\vec{r}_1} \vec{r}_1 \Rightarrow A \vec{r} \in P$$

УД



Теорема Фризера о конечных наборах

$A$  — набор из 3. реда с неотр. ядрами  $\exists \vec{r}$  в ядре  $A$  конечн. набора,

однозн. набор из 3. реда ( $\vec{r}$  — any суперсв-ваш  $\vec{r}_1$ )

## Через ортогональную матрицу и нап-об Эйнштейна поверота



Видим  $\vec{e}$  как ось поворота,  $\vec{r}$  - лежащая в плоскости с  $\vec{e}$  и  $\vec{r}$ .

$\vec{r}$  подразумевается на  $\varphi$  омоз.  $\vec{e}$  &  $\vec{r}$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \text{ где } \vec{r}_1 = \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3 = \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e} + (\vec{r} - \langle \vec{r} \cdot \vec{e} \rangle \vec{e}) \cos \varphi + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi = \\ &= (\vec{e} \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top) \vec{r} \end{aligned}$$

$$\hat{\vec{e}} \vec{r} = \vec{e} \times \vec{r}, \quad \hat{\vec{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad \vec{e} \vec{e}^\top = \begin{bmatrix} (e')^2 & e' e^2 & e' e^3 \\ e' e^2 & \dots & \dots \\ e' e^3 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Получим  $A = E \cos \varphi + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top$  (2) - правило куб. омоз. доказан!

$$\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) = \langle \vec{e} \cdot \vec{r} \rangle \vec{e} - \vec{r}$$

$$\hat{\vec{e}}^2 \vec{r} = (e \vec{e}^\top - E) \vec{r}$$

$$(A = E + \hat{\vec{e}} \sin \varphi + \hat{\vec{e}}^2 (1 - \cos \varphi))$$

Пусть  $\vec{\varphi} = \vec{e} \varphi$  - вектор Эйнштейна (где  $\vec{e}$  единичный вектор - изменение не подходит)

\*  $\vec{\varphi} \hookrightarrow \hat{\vec{e}} - \cos \varphi$  - ортогон. ортогон. вектор (1).

Тогда можно нап-ти, что  $A = e \vec{\varphi}$  (пог. линия)

## Выражение нап-об. Эйнштейна. поверота через матрицы $A \in SO(3)$

$$2\vec{y}_3 (2) \Rightarrow \operatorname{tr} A = 3 \underbrace{\cos \varphi}_{E \cos \varphi} + 1 \underbrace{- \cos \varphi}_{(1 - \cos \varphi) \vec{e} \vec{e}^\top}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$$A = [a_{ij}^i]$$

$$a_2^3 - a_3^2 = 2 e^1 \sin \varphi \Rightarrow e^1 = \frac{a_2^3 - a_3^2}{2 \sin \varphi} \quad e^2 = \frac{a_3^1 - a_1^3}{2 \sin \varphi} \quad e^3 = \frac{a_1^2 - a_2^1}{2 \sin \varphi}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}; \text{ поэтому, что } \varphi \in [0; \pi]! \text{ т.к. } \vec{e} \text{ единичный вектор, что}$$

нап-об. поверота - это просто зеркальное отображение. Поверот в одн. плоскости - дает вектор  $-\vec{e}$ .

Оператор наименьшего квадрата. Угловая скорость Тейлора Тесс

Если  $\dot{\varphi} \ll 1$ , то

$A \approx E + \hat{\varphi}$  - оператор наименьшего квадрата

То близко к гр  $A \in SO(n)$ :

$A(t) \in SO(n); A(0) = E$

$$A^T A = E \quad | \frac{d}{dt}|_{t=0}$$

$$\overset{\cdot}{A}^T A + A^T \overset{\cdot}{A} \underset{\overset{\cdot}{E}}{|}_{t=0} = 0$$

$$\overset{\cdot}{A}^T (0) = -\overset{\cdot}{A}(0) \underset{\overset{\cdot}{\omega}}{|} \Rightarrow \overset{\cdot}{A}(0) - \text{кососимметрическое} \Rightarrow A \approx E + I + \hat{\omega}$$

Угловая скорость



$$\exists \Delta \vec{\varphi} = \vec{e}_A \Delta \varphi$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \quad - \text{угловая скорость}$$

Распределение скоростей и ускорений в Тейлоре Тесс



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{g}}$$

$$g(t + \Delta t) \approx (E + \Delta \hat{\varphi}) \vec{g}(t)$$

$$\dot{\vec{g}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \vec{g} = \hat{\omega} \vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{g} \quad - \text{сп-ва Эйнштейна}$$

$$\vec{W} = \vec{V} = \vec{W}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) \quad - \text{сп-ва Равновесия}$$

$$\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

## Кинематический закон второго рода

Приложен движением изображение



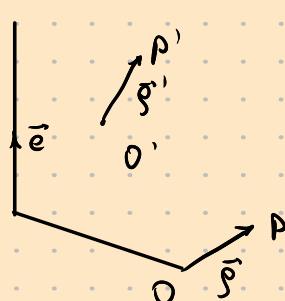
Бесшарое движение

Модель движения тела изображением бесшарового перемещения.

Перемещение тела на расстояние  $\Delta l = \overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e}$  и повернуть на  $\varphi$ .

**Теорема Макса:** А) перемещение тела изображением бесшарового перемещения.

Б) движение тела не является бесшаровым.



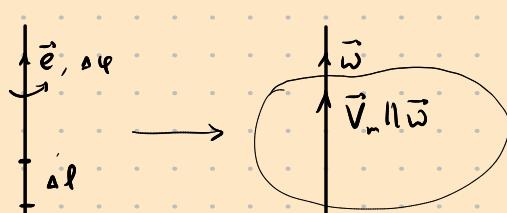
$$\vec{p}' = A \vec{p}$$

$$\vec{p}' \cdot \vec{e} = \vec{p}'^T \vec{e} = (A \vec{p})^T \vec{e} = \vec{p}^T \underline{A^T \vec{e}} = \vec{p}^T \vec{e}$$

Преобразование  $\vec{p}'$  в  $\vec{e}$  не меняется.

Если  $\vec{p} = \overrightarrow{O O'}$  — не равно, как будто  $O, \overrightarrow{O O'} \cdot \vec{e} = \text{const.}$

Равн. движение тела за время  $\Delta t$



$$\vec{V}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Тело совершает ускоренное бесшарое движение.

## Общ кинематического баланса

$$ГМТ: \vec{V} = \vec{V}_0 + \omega \times \vec{p} = \lambda \vec{\omega}$$

$$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}}_{\text{не заб. ор. н.в.в.}} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_0 = \lambda \omega^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} - \text{крутиз. извращ.}$$

не заб. ор.  
н.в.в.

Рассмотрим вращение:

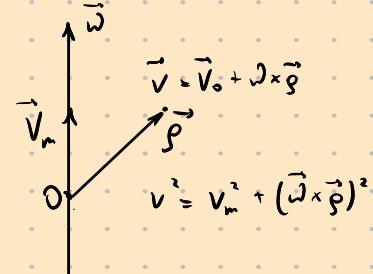
$$\begin{cases} V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda \omega_x \\ V_{oy} + \dots = \lambda \omega_y \\ V_{oz} + \dots = \lambda \omega_z \end{cases}$$

$$\left| \frac{V_{ox} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{V_{oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z} \right| - \text{равенство очевидно. Быстро}$$

Несколько кинематических формул  $\Leftrightarrow$  находим  $\omega$ , уравнение очевидно,  $V_m$ .

$$\vec{V}_m = \vec{V} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

Примем  $V_m$  — минимум, скроется в т.ч. реш.



## Сложение вращений

### 1. Аксиоматическое вращение



$$\vec{r}' = A\vec{r} \quad \vec{r}'' = B\vec{r}' = BA\vec{r}$$

$$C = BA$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

### 2. Пассивное вращение



$$\vec{r}^{(1)} = \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i \quad \vec{e}_i^{(1)} = A \vec{e}_i$$

(координаты в новой базисной системе)

$$\vec{r} = \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i \quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_i \text{ (старые)} \\ \vec{e}_i^{(1)} \text{ (новые)} \end{array} \right. = \sum_i r_i^{(1)} A \vec{e}_i$$

$B$  дает  $\vec{e}_i$ :

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_i r_i^{(1)} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

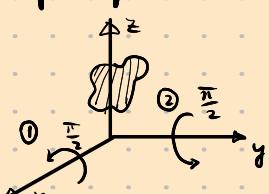
$$\vec{r} = A \vec{r}^{(1)} \Rightarrow \vec{r}^{(1)} = A^T \vec{r}$$

$$\vec{r}^{(1)} = B^T \vec{r}^{(1)} = B^T A^T \vec{r} = (AB)^T \vec{r}$$

$$C = AB$$

$$n \text{ вращений: } C = A_n A_{n-1} \dots A_1$$

## Пример 1



$$C - ? \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Две, это одна общая вращение, т.е.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- координатные базисы одинаковы

$$C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Пример 2



$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

1. Вокруг  $z$  на  $\psi$
2. Вокруг  $x'$  на  $\theta$  - углов динамики
3. Вокруг  $z''$  на  $\varphi$

Однобугорное, наименее т. зрения

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- привод координат новому базису в шагах

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Кинематические уп-2 Пуассона для ортогональных матриц



$A$  - общее положение базиса тела с ненул. базисом  $x$

$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta \hat{\varphi}_x) A(t) & - \text{авт. т. зп.} \\ A(t) (E + \Delta \hat{\varphi}_y) & - \text{нас. т. зп.} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{array}{c} \Delta \vec{\varphi} \leftrightarrow \Delta \hat{\varphi} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \vec{\omega} \leftrightarrow \hat{\omega} \end{array}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{A} = \hat{\omega}_x A \\ \dot{A} = A \hat{\omega}_y \end{bmatrix} \quad (1) - \text{Кинем. уп-2 Пуассона.}$$

Если есть  $A(t_i)$  и  $\hat{\omega}_x(t)$  ибо  $\hat{\omega}_y(t)$  то используя эти уп-2, можно находит текущую ориентацию.

Матрица авт. и нас. векторов оговаривает: что это же, что оговаривает в  $X$  и в  $\hat{\omega}$ ? т.е. это симб. блоков предп-9.

Уп-2 не универсального назначения, но не ограничено.

Используются наимен. т. зрения (для них лучше строить на копии).

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$$

$$\dot{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2,3 - 9 \text{ уравнений!}$$

Момент инерции можно записать в виде

Базис - вектор  $\vec{\omega}_x$ , т.е. вектор вращения  $A$  вокруг оси  $x$

$$\vec{A} = \hat{\omega}_x A \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_k = \vec{\omega}_x \times \vec{a}_k, k=1,2 \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \end{cases} \quad - \text{базис}$$

$\vec{a}_k \cdot \vec{a}_m = \delta_{km}$  - проверка правильности инцидентирования в процессе

Легкое из (1):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_x = \vec{A} \vec{A}^T \\ \hat{\omega}_z = \vec{A}^T \vec{A} \end{cases} \quad - \text{значит } A(t), \text{ можно выразить } \omega_x(t) \text{ и } \omega_z(t)$$

### Горизонтальное вращение Твёрдого тела



$\vec{\omega}^e, \vec{\epsilon}^e$  - горизонтальное вращение в окн. нейл. базиса  
 $\vec{\omega}^r, \vec{\epsilon}^r$  - окн. в. в окн. зем. орт. нейл. базиса  
 Итак:  $\vec{\omega}, \vec{\epsilon}$  - общ. окн. в. в окн.

### 1. Угловая скорость

Связан с вектором углового базиса приведенное выражение, т.к. не определяется с неподвижным базисом.



$$\dot{\theta} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad \theta \approx \int \dot{\theta} dt$$

$$C = AB \approx E + \underbrace{\Delta\hat{\phi}^e}_{\text{надеялся}} + \underbrace{\Delta\hat{\phi}^r}_{\text{нашёл}}$$

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r$$

$\hat{\omega}^e$  - неподвижная гр. в.

$\hat{\omega}^r$  - движущаяся гр. в.

$\hat{\omega}$  - общая гр. в.

## 2. Скорость винора в ненормированной форме



$$\vec{a} = \sum a_i \vec{e}_i - \text{прямой винор}$$

$$\dot{\vec{a}} = \sum \dot{a}_i \vec{e}_i + a_i \dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

акселерация/изменение прямого винора

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i \quad (\text{из к-ва Эйнера})$$

## 3. Чистое ускорение

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\omega}^e + \sum \omega^i \vec{e}_i$$

$$(\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^r = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^r + \vec{\omega}^e \times \vec{\omega}^r)$$

## 4. Осадочный винор

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{ч. винор вращения фигуры - осад. прям.} = \text{осад. прям.}$$

## Кинематические уравнения Эйнера

У кватернионов есть наименее избыточные (нанесены в заголовок).

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda} - \text{complement},$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}$$

Нормированное кватернион:  $\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}; \quad |\vec{e}| = 1$

Действие — погружение ортогональной, и у кватернионов есть!

$R' = Ad R = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$  — приведенное представление

### Свойства $Ad R$

$$] R = r_0 + \vec{r}$$

$$1. \quad r'_0 = r_0$$

$$\left. \begin{aligned} R' &= r'_0 + \vec{r}' = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \\ \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \tilde{\vec{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \Rightarrow \text{rect } \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r'_0 = r_0$$

$$2. \quad \vec{r}' = A \vec{r}, \quad A \in O(3)$$

$$\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \sim \text{пр. предп} \Rightarrow \exists A: \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = A \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\|\vec{r}'\| = \|\Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| \Rightarrow \|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\| \Rightarrow A \in O(3) \quad \text{Итд,}$$

Задача:  $\] \Lambda(t) \in \mathbb{H}, \quad \|\Lambda\| = 1, \quad \Lambda(0) = 1.$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Lambda \circ \tilde{\Lambda} &= 1 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) + \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R} \\ (\text{i.e. } \dot{\tilde{\Lambda}}(0) = \dot{\Lambda}(0)) \end{aligned} \right.$$

Кватернион вида  $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$  & механизм действия соподчиняется с вектором

### Теорема

Предположим  $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}$ , где  $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}$  задает движение погружения  
вокруг  $\vec{e}$  на угол  $\varphi$ .

D-бо

$$\Lambda \circ \vec{r} - \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} \stackrel{\text{континуатор?}}{=} 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}$$

$$\Lambda \circ \vec{r} = \vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{r}' = (\vec{r} \circ 1 + 2 \vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + 2(\vec{\lambda} \times \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = \vec{r} + 2 \lambda_0 \vec{\lambda} \times \vec{r} + 2 \vec{\lambda} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}) = (E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2) \vec{r} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = E + 2 \lambda_0 \hat{\lambda} + 2 \hat{\lambda}^2$  — общий представитель наименее избыточного кватерниона

$$A = E + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \hat{e} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \hat{e}^2 = R + \sin \varphi \hat{e} + (1 - \cos \varphi) \hat{e}^2 -$$

Вопросение  $A \in SO(3)$  через неп-ые дин. параметры. УТА

## Исполнение поворотов в кватернионах

1. Аксиоматич. зп.



$$\vec{r}' = \Lambda_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}_1, \quad \vec{r}'' = \Lambda_2 \circ \vec{r}' \circ \tilde{\Lambda}_2 \quad \vec{r}''' = \Lambda_n \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}_n$$

$$\vec{r}''' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}_2 \circ \tilde{\Lambda}_1 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1,$$

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \dots \circ \Lambda_1$$

Поворот в огнен. w зам не даётся

2. Пасибнаст. зп.



$$\vec{e}'_x = \Lambda_1 \circ \vec{e}_x \circ \tilde{\Lambda}_1,$$

$$\vec{r} = r'_x \vec{e}'_x = \Lambda_1 r'_x \vec{e}_x \circ \tilde{\Lambda}_1,$$

$$\text{В дауне } e_1 \quad r = \vec{r}_e \Rightarrow \vec{r}_e = \Lambda_1 \circ \vec{r}_{e_x} \circ \tilde{\Lambda}_1,$$

$$\text{Тогда } \vec{r}_{e_x} = \tilde{\Lambda}_1 \circ \vec{r}_e \circ \Lambda_1,$$

$$\vec{r}_{e_x} = \tilde{\Lambda}_2 \circ \vec{r}_{e_x} \circ \Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2 \circ \Lambda_1 \circ \vec{r}_e \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n$$

Задача: коор-ии кватерниона в  $\Lambda$  огнаны в даунах  $\{e_i\} \cup \{e_n\}$ , т.к.

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi - \text{сфир., коор-ии } \vec{e} \text{ огнаны в } \{e_i\} \cup \{e_n\}.$$

Коор-ии кватерниона в заданных даунах наз-ют параметрами Родрига - Раммельмана.  
(заданный = даун, в-вии кватернион поворачиваются)

## Уравнение Гиацинда в кватернионах



$\Lambda(t)$  - поворот  $\Leftrightarrow$  орн.  $X$

$$\Lambda(t+\Delta t) = \begin{cases} \Lambda_x(\Delta t) \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Lambda_z(\Delta t) \end{cases}$$

$$\Lambda_x(\Delta t) = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \vec{e}_x \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 1 + \vec{e}_x \frac{\Delta \varphi}{2} - \text{раб. видоизменение}$$

$$v = \{x, z\}$$

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \vec{\omega}_x \circ \Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \circ \vec{\omega}_z$$

Ур-е Гиацинда имеет разнозерн. в-вии, вращение описывается. Одно означ. пев-е нет.

Они называются: а) нач.  $\Lambda(t)$  по  $\vec{\omega}_z(t)$  и  $\Lambda(0)$  б) нач.  $\vec{\omega}_z$  по  $\Lambda(t)$

$$\vec{\omega}_x = 2\vec{i} \cdot \vec{\lambda}, \quad \vec{\omega}_y = 2\vec{j} \cdot \vec{\lambda}$$

Замечание: нормированные кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами твердого тела, т.к.  $\lambda$  и  $-\lambda$  дают один и тот же поворот.

$$\|\lambda\| = 1 \Leftrightarrow \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad - S^3 \subset \mathbb{R}^4 \text{ - сфера}$$



один и тот же поворот

# Основные понятия и законов динамики

1° Объем континуума (часть из общей массы с раб. состоянием  $\vec{p}$ )



2° Центральная масса  $\vec{I} = \int f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dm = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{m_i = \text{const}} f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \Delta m_i$   
Масса - это мера!

$$m = \int dm - \text{масса}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm - \text{центр масс}$$

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm - \text{импульс}$$

$$\vec{I} = \int f dm \Rightarrow \vec{p} = \frac{d}{dt} \int \vec{r} dm \Rightarrow \vec{p} = m \vec{V}_c$$

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm - \text{кин. энергия}$$

$$\vec{K}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{v} dm - \text{внешн. импульс}$$

Перенос и навесн. массы

$$\vec{K}_{o'} = \int (\vec{r} - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_o + \vec{r}_o - \vec{r}_{o'}) \times \vec{v} dm = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{K}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{o'o} \times \vec{p}$$

$$\vec{R}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{p} \times \vec{o'o} \quad \vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{o'o} \quad - \text{qp-ун. аналогии} \\ (\text{без об-ва подразумевают } \vec{K}_o)$$

Теорема Кинуна



$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

$$T = \frac{1}{2} \int (V_c^2 + 2 \vec{V}_c \cdot \vec{V}_r + V_r^2) dm$$

$$\int \vec{V}_r dm = \frac{d}{dt} \int \vec{p} dm = m \dot{\vec{p}}_c = 0 \quad (т.к. \vec{p}_c = 0)$$

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int V_r^2 dm$$

## Задача изложения генер. момента

$m \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{F}}$  - аксиома Ньютона



$$dm \Rightarrow d\vec{F} = \vec{f} dm, \quad \vec{f} - \text{момент силы}$$

$$\vec{f} = \vec{f}^e + \vec{f}^i$$

инер. баланс

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$



$$\dot{\vec{P}} = \int \dot{\vec{V}} dm = \int (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = \int \vec{f}^e dm = -d\vec{F}^i dm,$$

$$= \vec{R}^e$$

•  $\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e$ ,  $\vec{R}^e$  - заданный вектор баланса сил

$$\dot{\vec{P}} = m \ddot{\vec{V}}_c \Rightarrow m \ddot{\vec{V}}_c = \vec{R}^e$$

•  $m \ddot{\vec{r}}_c = \vec{R}^e$  - теорема о геометрии центра масс

$$\dot{\vec{K}}_o = \frac{\int (\vec{V} - \vec{V}_o) \times \vec{V} dm}{m \vec{V}_o \times \vec{V}_c} + \frac{\int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm}{M_o^e}$$

•  $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^e - m \vec{V}_o \times \vec{V}_c$  - Теорема об изменении кинетического момента

$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm \Rightarrow \dot{T} = \int \vec{V} \cdot \dot{\vec{V}} dm = \int \vec{V} \cdot (\vec{f}^e + \vec{f}^i) dm = N^e + N^i$$

•  $\dot{T} = N^e + N^i$

## Обобщение теоремы генерации в нелинейн. случае

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{W}} = \ddot{\vec{W}}^r + \ddot{\vec{W}}^e + \ddot{\vec{W}}^c = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i$$

$$\ddot{\vec{W}}^r = \ddot{\vec{f}}^e + \ddot{\vec{f}}^i - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^e}_{\vec{j}^e} - \underbrace{\ddot{\vec{W}}^c}_{\vec{j}^c} \quad \vec{j}^e, \vec{j}^c - \text{моменты инерции и кинематика сил}$$

$$\vec{j}^e = -\vec{w}_o - \vec{\epsilon} \times \vec{g} - \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{g})$$

$$\vec{j}^c = -2\vec{w} \times \vec{V}^r$$

$$\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{ex} + \vec{R}^e + \vec{R}^c$$

$$\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o^{ex} + \vec{M}_o^e + \vec{M}_o^c - m \vec{V}_o^r \times \vec{V}_c^r$$

$$\dot{T} = N^{ex} + N^e + N^i$$

$$\vec{j}^c = -2\vec{w} \times \vec{V}^r \quad n = \vec{V}^r \cdot \vec{j}^c = 0 \quad \text{- момент кинематики сил}$$



$\vec{g}$

### Замечание

При решении задач не всегда удобно  
использовать гравитацию в форме приведенное и  
иметь гибкую систему координат.



$$\vec{R}^e = - \int \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{g}) dm = - m \vec{\omega} \times (\vec{r}_c \times \vec{g}_c)$$



$$\vec{M}_o^e \neq \frac{1}{2} \vec{R}^e l_{\text{rod}}$$

Но это не всегда удобно, а не упрощает  $\vec{R}^e$  в конечном итоге.

### Одномерные системы, движущиеся на плоскости



$$\vec{M}_o = \int (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{f} dm \quad (\text{здесь } \vec{f}^i \text{ и } \vec{f}^e)$$

$$\vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{O}'O \times \vec{R}, \quad \vec{R} = \int \vec{f} dm$$

$$\begin{cases} \vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{R} \times \vec{O}' \\ \vec{V}_o = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{O}' \end{cases} \quad - \text{стационарные и неподвижные}$$

Несколько моделей центра масс, примененных к движению Тела, obtained в зависимости от того какого центра мы хотим выбрать.



Если  $\vec{M}_o = 0$ , то все же есть способы подавить движение.

### Квазинеоднородные тела

$$d\vec{r} \neq \vec{F} \quad \delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} - движение под действием$$

$$N \approx \vec{F} \cdot \vec{v}$$

① Если  $N = \vec{F} \cdot \vec{v} \leq 0$ , то  $\vec{F}$  - движущее. Если  $N > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0$ , то  $\vec{F}$  - сопротивление.

Пример:  $\vec{F} = -\beta \vec{V}$

② Есле  $N = 0$ , то  $F$  - гиростатический

Пример:  $\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$ ,  $\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}$

③  $F$  наз.-а потенциальным, есле  $\exists \Pi(\vec{r}, t)$ :  $\vec{F} = -\nabla \Pi$

Критерий потенциальности

$\vec{F}(\vec{r}, t)$  - потенциальная  $\Leftrightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} \Big|_{t=\text{const}} = 0$

D-бз

Есле  $\vec{F} = -\nabla \Pi$ ,  $\Rightarrow \oint \nabla \Pi d\vec{r} = 0$

Есле  $\oint = 0$ ,  $\Rightarrow A(r, t) = \int_0^r \vec{F} d\vec{r}$

$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \epsilon \vec{e}_i$ ,  $t \in [0, \Delta h]$   
Логарифмически

$\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\dots, r_0 + \epsilon, \dots) d\epsilon \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\underset{\text{послед}}{\approx}} F_i(\dots, r_0 + \theta, \dots) \Delta h$

$F_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \Rightarrow \Pi = -A$   $\nabla \Pi$



Есле  $F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$  (1)

В  $\mathbb{R}^3$  условие (1)  $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ .

Однако гамма диктует иное, оно входит в левую часть.

Есле  $\vec{F} = -\nabla \Pi(\vec{r})$  (потенциал сингулярный), то

$dT = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla \Pi d\vec{r} = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$

Движение Торн в центральном поле



$$\vec{K}_0 = \text{const} \quad (\vec{M}_0 = \vec{0})$$

$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{const} \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{V}$  бетта сенди б. оғын мөнкеси

$$\begin{cases} m(r - r\dot{\varphi}^2) = F = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{r} & -\text{закон Ньютона} \\ \frac{1}{r} (r^2 \dot{\varphi}^2) = 0 & \text{уравнение орбиты} \end{cases}$$



$$r^2 \dot{\varphi}^2 = \text{const}$$



$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const} - \text{diskopasalas ekspresis}$$

Biçerin žeron Kenepa

## Рензор инерции т. тела в его центре



$$\vec{K}_o = \int \vec{p} \times \vec{v} dm = \int \vec{p} \times (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{p}) dm = \int \underbrace{\vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) dm}_{\hat{p}^\top \hat{p} dm \vec{\omega}} + m \vec{p}_o \times \vec{v}_o \quad (1)$$

$J_o$  - рензор инерции тела в т. О



$$p^2 = (\vec{p} \times \vec{e}) \cdot (\vec{p} \times \vec{e}) = (\hat{p} \times \vec{e})^\top \hat{p} \vec{e} = \vec{e}^\top \hat{p}^\top \hat{p} \vec{e}$$

$j(\vec{p}) = \hat{p}^\top \hat{p}$  - рензор квадратов расстояний

$$p^2 = \vec{e}^\top j(\vec{p}) \vec{e}$$

$$\vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) = p^2 \vec{\omega} - \langle \vec{p} \cdot \vec{\omega} \rangle \vec{p} = (p^2 E - \vec{p} \vec{p}^\top) \vec{\omega}$$

$$\hat{p}^\top \hat{p} = p^2 E - \vec{p} \vec{p}^\top$$

$$J_o = \int (p^2 E - \vec{p} \vec{p}^\top) dm \Rightarrow J_o = \begin{pmatrix} \int (p_1^2 + p_2^2) dm & - \int p_1 p_2 dm & - \int p_1 p_3 dm \\ - \int p_2 p_1 dm & \int (p_2^2 + p_3^2) dm & - \int p_2 p_3 dm \\ - \int p_3 p_1 dm & - \int p_3 p_2 dm & \int (p_1^2 + p_2^2) dm \end{pmatrix}$$

$J_{o,ii}$  - осевые моменты инерции

$J_{o,i+j}$  - кин. момент инерции

## Момент инерции относ. оси



$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \underset{\vec{\omega} = \omega \vec{e}}{=} \frac{\omega^2}{2} \vec{e}^\top J_o \vec{e}$$

$$J_e = \vec{e}^\top J_o \vec{e}$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^\top J_o \vec{\omega} = \frac{J_e \omega^2}{2}$$

$J_e$  - момент инерции относ. оси

## Балансировка грузов и Т кин. момента тела

$$\vec{K}_o = \underbrace{\vec{K}_c}_{(1) \Rightarrow \vec{J}_c \vec{\omega}} + \vec{C}_O \times \underbrace{\vec{P}}_{m \vec{V}_c} = \vec{J}_c \vec{\omega} + \vec{C}_O \times m \vec{V}_c$$

O - вся машина (момент доворота земли)

$$T = m \frac{\vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{p})^2 dm \Rightarrow T = \frac{m \vec{V}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \vec{\omega}^\top \vec{J}_c \vec{\omega}$$

## Чисівка $J_0$ при репозиції в новій осі



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

$$J_0 = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm = \int \hat{\rho}'^\top \hat{\rho} dm + \hat{a}^\top \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + \int \hat{\rho}' dm \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a} = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a} + m \hat{\rho}' \cdot \hat{a} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

$$\Rightarrow J_0 = J_{0'} + m \hat{a}^\top \hat{a}$$

Рекуррентна формула Фокінса - Міннера

$$\Rightarrow J_{0e} = \vec{e}^\top J_e \vec{e} + m \vec{e}^\top j(\vec{a}) \vec{e} = J_{e\vec{e}} + m \vec{g}_e^\top$$

Побудовімо залогу.

$$\begin{aligned} & \text{Для } e' \quad J_{0e'} = \rho_e^2 F - \vec{\rho}_e \vec{\rho}_e^\top \quad \vec{\rho}_e = \rho_{e'} \quad \text{т.е. } S \in SO(3) \\ & \text{Для } e \quad \vec{\rho}_e = S^\top \vec{\rho}_{e'} \Rightarrow \vec{\rho}_0 = S \vec{\rho}_{e'} \\ & J_{0e'} = \vec{\rho}_{e'}^\top - S \vec{\rho}_{e'} \cdot \vec{\rho}_{e'}^\top S^\top = S (\rho_{e'}^2 F - \rho_{e'} \cdot \rho_{e'}^\top) S^\top \end{aligned}$$

Таким образом,

$J_{0e'} = S^\top J_0 S$  - с т.з.п. ум. андро  $J_0$  преобразуется в квадратичне дроби  
до - правильності закону преобразування тензора

У нас мається вибір, що  $\exists S$ :

$$S^\top J_0 S = \text{diag}[A, B, C], \quad A, B, C > 0$$

Квадратичне ум. наз - в неділені осі  $B + D$ . Евен  $D \geq 0$ , то осі наз - в  
найділені незалежними

$A, B, C$  - найділені (найділені незалежні) моменти інерції

## Експоненція інерції

$$\text{Оськільки } \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{J_e}} \vec{e} \quad \vec{r}^\top J_0 \vec{r} = \frac{1}{J_e} J_0 = 1$$

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^\top J_0 \vec{r} - 1 = 0$$

В найділені осі:  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$ ,  $x, y, z$  - координати  $\vec{r}$



Формула в ум. побудови коніку зда

## Неконформне мабұнан оғын шартынан

1<sup>0</sup> Оданың анықтасы - нет гомеоморфиясының



$$\text{B н. оғын: } J_0 \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$

$$\lambda_i = \{A, B, C\}, \vec{x}_i - оғын деңгезе$$

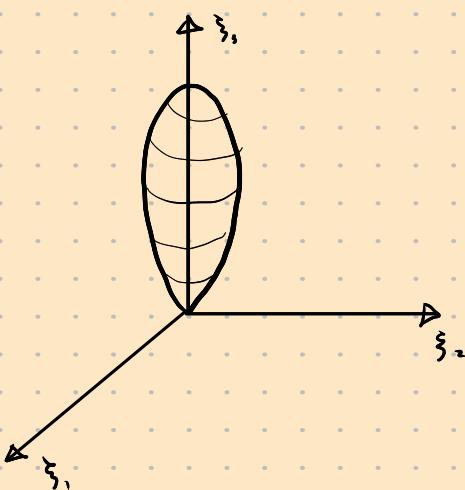
Деректердегі мабұнан оғын ныңыз ресми жағынан  
неконформ мабұнан оғын ныңыз ресми жағынан

$$(J_0 - \lambda E) h = 0$$

$$\det(\lambda E - J_0) = 0 \Rightarrow \lambda_i \rightarrow \{A, B, C\}$$

$$\lambda_i \rightarrow h_i - \text{жеке көркемдік} \xrightarrow{\text{жеке көркемдік}} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \}$$

2<sup>0</sup> Ненесозабарне сипаттыру

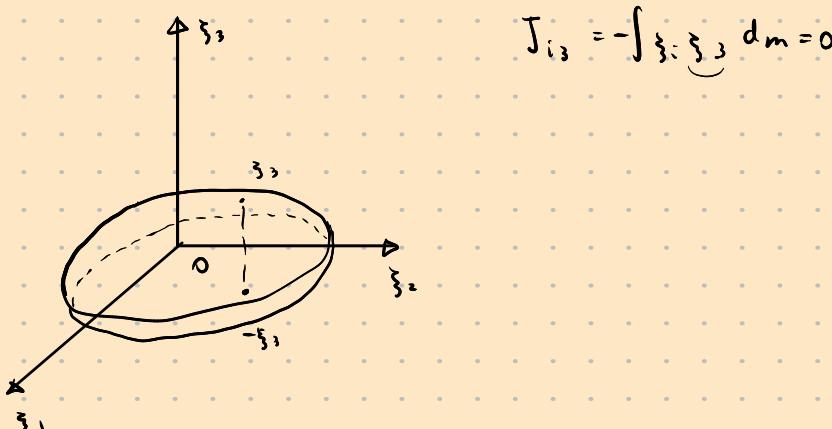


$\xi_3$  - Ота гендер. сипаттыру  $\Rightarrow$  н. оғын

$$J_{i3} = - \int \xi_i \xi_3 dm$$

$$\forall \xi_i \rightarrow \exists - \xi_i \Rightarrow J_{i3} = 0 \quad \forall i + 3$$

3<sup>0</sup> Негінен макросы сипаттыру



$$J_{i3} = - \int \xi_i \xi_3 dm = 0$$

## Проделанній виг T u K<sub>o</sub>

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{J}_c \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) ; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_o = \mathbf{J}_c \vec{\omega} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} + \vec{\Omega} \vec{C} \times m \vec{V}_c$$

# Определение гибкости тела с неограниченной формой



Задача определяется в общем виде

$\vec{\omega}(t)$ . Которую называют угловое ускорение

Если  $O$  - неогр. т., то

$$\vec{K} = \int \vec{g} \times (\vec{\omega} \times \vec{g}) dm = J \vec{\omega}, \quad \vec{k}_0 = \vec{K}, \quad J_0 = J$$

$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{g})^2 dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega},$$

Данные выражения применимы приложению к телу, имеющему форму т. о.

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} A_p \\ B_q \\ C_r \end{bmatrix}, \quad J = \text{diag}[A, B, C]$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2} (A_p^2 + B_q^2 + C_r^2)$$

## Динамическое уравнение движения

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M} \Rightarrow B \text{ называется инерцией оси:}$$

$$\dot{\vec{K}} = \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Покажем:  $\dot{\vec{K}} = K_i \ddot{\xi}_i$

$$\dot{\vec{K}} = \underbrace{\frac{d\vec{K}}{dt}}_{\vec{d}\vec{K}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{K}}_{\vec{\omega} \times \vec{K}} \quad \dot{\xi}_i = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_i$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A\ddot{p} + (C-B)\dot{q}r = M_1 \\ B\ddot{q} + (A-C)\dot{r}p = M_2 \\ C\ddot{r} + (B-A)p\dot{q} = M_3 \end{cases} \quad - \text{Система динам. ур-ий движения (1)}$$

$\vec{M}_s = \vec{M}_s(\vec{\Theta}, \vec{\omega})(2)$ , где  $\vec{\Theta}$  - радиальный вектор определен (аналогично  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ )

$\vec{\Theta}$  - единичный вектор  $SO(3)$ , кватернион, имеет конформное представление, ...

В общем случае система (1) для  $\vec{M}_s$  из (2) независима.

Для ее замыкания требуется задавать уравнения для радиального определения:

$\vec{\Theta} = f_0(\vec{\theta}, \vec{\omega})$  (3)-күнеш үр-ж в көз-жан бүгі (үр-ж Ридонд, көзменең)  
үр-ж динамика, ...)

- Көз мене  $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$  - заманыңас в мөнде жағынан тұрақтырулады.

(заманыңас зертте ≈ жалғыз көз-ж үр-ж көз-ж негенен)

- Көз мене  $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$  не тұрақтырыледі в квадратика, в жаңа глобуме тб. Тебе с  
көздей. Төмөн в оғындында наше көзмене не тұрақт. в квадратика.



Сүйз-ет 3 сурал инер-сияң зертте Анар. жа-ни -  
ауран динамика, Ларсанна и Кобалевский.

### ① Сүйз-ет динамика



### ② Сүйз-ет Ларсанна



Көзмене жиғаш. инер-сияң:

$$A = B \neq C$$

$$u.g. \in \mathbb{R}$$

### ③ Сүйз-ет Кобалевский



- жиғашынан  
инер-сияң

$$A = B = C$$

T. С көзмен на экваториалной плоскости инер-сияң  
инер-сияң.

Гравитация инер-сияңас сүйз-ет көз-жадаңынан.

А инер-сияңас барлық көз-жадаңынан жиғашынан жиғаш.

Егер бүгі ауран, инер-сияңас при опреj. жа-ни-да.

# Лекция № 1

1) Тривое уравнение кин. явл-я вибрации

$$\begin{cases} A\ddot{p} + (C - B)\dot{q}\dot{r} = 0 & A \geq B \geq C, \quad A > C \\ B\ddot{q} + (A - C)\dot{p}\dot{r} = 0 & (A = B = C - \text{имп. колебание: } \vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \text{const}) \\ C\ddot{r} + (B - A)\dot{p}\dot{q} = 0 & \text{если } \vec{\omega} \text{ и } \vec{\xi} - \text{const, то и } \vec{x} \text{ const,} \\ & \text{тогда } \vec{\xi} - \text{нест., } \vec{x} - \text{линейн. диспл.} \end{cases} \quad (4)$$

Упрощенное уравнение кин. (4):

$$A\ddot{p}^2 + B\ddot{q}^2 + C\ddot{r}^2 = 2T = \text{const} \quad (5)$$

$$\vec{K}_x = \text{const} \Rightarrow K_3^2 = \text{const} \Leftrightarrow A^2\ddot{p}^2 + B^2\ddot{q}^2 + C^2\ddot{r}^2 = \text{const} \quad (6)$$

Вопр-я (5) и (6) - нелинейные упрощенные кин-кин. (4)

- Задача: если  $\dot{x} = F(x, t)$  - кин. явл-я, то  $G(t, x)$  - нелинейное упрощение  $\Leftrightarrow$ 

$$\Leftrightarrow G(t, \underbrace{x(x_0, t_0, t)}_{\text{Реш-е з. задачи}}) = \text{const} = G_0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Критерий н.к.и.

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + F_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{правильное в кин. смысла.}$$

$$2A\ddot{p}\dot{p} + 2B\ddot{q}\dot{q} + 2C\ddot{r}\dot{r} = 2(B-C)\dot{p}\dot{q}\dot{r} + 2(C-A)\dot{p}\dot{q}\dot{r} + 2(A-B)\dot{p}\dot{q}\dot{r} = 0$$

Если  $A > C$ , из (5) и (6)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} p &= \pm \sqrt{a - Bq^2} \quad (7) \quad a, b, c, d - \text{какие - то const} \\ r &= \pm \sqrt{c - dq^2} \end{aligned}$$

Подставим в 2-e ур-е (4):

$$B\ddot{q} \pm (A - C)\sqrt{a - Bq^2} \sqrt{c - dq^2} = 0$$

$$\pm \int \frac{dq}{\sqrt{a - Bq^2} \cdot \sqrt{c - dq^2}} = \frac{C - A}{B} t + \text{const} \Rightarrow q(t) \quad (8) - \text{затухающие колебания} \\ (\text{бесконечный ряд из квадратич. оп-ий})$$

Найдем (8) и (7), находим  $p(t)$ ,  $r(t)$ .



Въгълът между двете  $x$  оси, когато  $\vec{K} \parallel \vec{x}_3$  и една

директива  $\psi, \theta, \varphi$ .

$$\vec{K}_3 = \begin{bmatrix} A p(t) \\ B q(t) \\ C r(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$K = |\vec{K}_3| = \text{const} \quad \dot{\varphi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (\text{из кинемат.})$$

↓

$$\cos \theta(t) = \frac{C r(t)}{K}$$

$$\tan \psi(t) = \frac{A p(t)}{B q(t)}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f_\varphi(t) dt$$

## Геометрически интерпретации Мах-Курда

Резултант  $K$  в единици  $\vec{K}_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 = \text{const} - \text{сърца} \\ \frac{K_1^2}{A} + \frac{K_2^2}{B} + \frac{K_3^2}{C} = 2T - \text{закон на Мах-Курда} \end{array} \right.$$

$$\vec{K}_3 = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{K}_3$  приема различни траектории на пересечени сърца и геометрията Мах-Курда.



$$K^2 = 2BT - \text{yp-e сърдечник}$$

$$\left(1 - \frac{B}{A}\right) K_1^2 + \left(1 - \frac{B}{C}\right) K_3^2 = 0$$

$\lambda^2$

$-m^2$

$$(\lambda K_1 - m K_2)(\lambda K_1 + m K_2) > 0$$

A - канава даващо движение  
еса по  $\vec{x}_1$  - канава гравитация

Симул - сърдечник,  
Зелено - кривите даващи  $K_3$



Линия Диновиденова обяснява механизма  
(въвеждането гравит.) движението във времето сърдечника -  
точка - покоящата сърдечника (какът ѝ настъпва  
във времето преди всичко покоящото) - и времето  
переходят чрез него

Недостаток на интерпретациите: Трябва да се използва  $\vec{K}$ .

## Интерпретация Пуассона

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^T J \vec{F} - 1 = 0 \quad - \text{значение инерции}$$

$$\vec{r} = \lambda \vec{\omega} \quad \lambda^2 \underbrace{\vec{\omega}^T J \vec{\omega}}_{2T} - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

$$\nabla f = 2J\vec{r} \quad (\text{проверка наклоненности})$$

$$\nabla f = \frac{2}{\sqrt{2T}} J \vec{\omega} = \frac{2\vec{K}}{\sqrt{2T}} = \text{const}, \quad \text{нормаль } \vec{n} \parallel \nabla f \parallel \vec{K}$$

Ноенъ  $\nabla f \parallel \vec{n}$ ?

$$f(\vec{r}) = 0 - S$$



$$\vec{r} \in S \Rightarrow f(\vec{r}) = 0 \\ \vec{r} + d\vec{r} \in S \Rightarrow f(\vec{r} + d\vec{r}) = 0$$

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) \approx f(\vec{r}) + \underbrace{\nabla f \cdot d\vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \nabla f \perp T_{\vec{r}} S \quad (\text{однородное прост-во})$$

$$\vec{g} = \vec{r} \cdot \underbrace{\frac{\vec{k}}{K}}_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{k}}{K} = \frac{\sqrt{2T}}{K} = \text{const}$$

Происходит касание эллипса инерции со нормалью  $\perp \vec{K}$   
без прескользывания.



Помощь - трекировка т. касания со эллипсом (затягивает)

Регион - трекировка т. касания со м-м касания (бреги затачиваются)

В случае эллипса - углы ( $A=B=C$ ) все одинаковы.

## Симметрия Пуассона для $A=B$

Помощь и регион - углы, симметрия, сдвиги и ортогональные преобразования.

Движение предполагает одинаковую симметрию преобразования. (сдвиги)



$$\Theta = \text{const}$$

$$\omega_1 = \text{const}$$

$$C_r + (\beta - A) \dot{\varphi}^0 = 0 \Rightarrow C_r = H = \text{const}$$

$$C_r = K_{zz} = k \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{C_r}{k} = \text{const}$$

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + (C-A) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{K}}{A} + \frac{A-C}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{Cr}{K} \quad \dot{r} = \frac{\vec{K}}{A} \quad \dot{\varphi} = \frac{A-C}{A} r$$



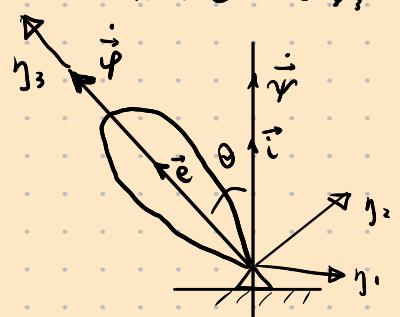
Параллельное вращение приводит к тому же самому результату.

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{A-C}{A} r \frac{A}{K} = \frac{A-C}{C} \cdot \frac{Cr}{K} \cos \theta$$

$$C\dot{\varphi} + (C-A)\dot{r} \cos \theta = 0 \quad -\text{однозначно связана!}$$

**Возможность параллельного вращения не аргумент!** Не арг. Эксперимент! Не арг. Аксиома!

$A = B \neq C$  ( $z_3$  - ось гориз. симметрии! Всегда!) Которое наше условие не ось гориз. симметрии



Какой наше преимущество при этом гипотезе? Параллельное вращение

такое вращение? (вращение вокруг горизонтальной оси)

$$\dot{\varphi} = \text{const}, \quad \dot{r} = \text{const}, \quad \theta = \text{const}$$

$\eta$  - неизб. связь

$$\eta_1, \eta_3 \text{ cosy. } \dot{\varphi}, \dot{\psi}$$

$$K_z = \begin{bmatrix} A\dot{r} \sin \theta \\ 0 \\ C(\dot{\varphi} + \dot{r} \cos \theta) \end{bmatrix} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{e} = \alpha \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = A\dot{r}, \quad \beta = C(\dot{\varphi} + \dot{r} \cos \theta) - A\dot{r} \cos \theta = C\dot{\varphi} + (C-A)\dot{r} \cos \theta$$

$$\vec{K} = \vec{M} \quad (\theta \text{ одновременно np-be})$$

$$\vec{K} = \dot{\vec{r}} \times \vec{K} = \langle \dot{\vec{r}} \parallel \vec{i} \rangle = \beta \dot{\vec{r}} \times \vec{e} = \langle \dot{\varphi} \vec{e} = \vec{\varphi} \rangle = \left[ C + (C-A) \frac{\dot{r}}{l} \cos \theta \right] \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{\varphi}}$$

$$\vec{M} = \left[ C + (C-A) \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \cos \theta \right] \dot{\vec{\varphi}} \times \dot{\vec{\varphi}}$$

"одинаковая по-ва инерция"

$$\text{Если } |\dot{\varphi}| \gg |\dot{\psi}| \text{ и } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{M} = C \dot{\vec{\varphi}} \times \dot{\vec{\varphi}}$$

## Лагранг Аугенвальда



$$A = B \neq C$$

$$T + \Pi = \text{const}$$

$$C_r + (B - A) \rho q = 0 \Rightarrow C_r = H = \text{const}$$

$$\vec{K} = \vec{M}, \text{ носит. на } \vec{x}_3; \vec{K} \cdot \vec{x}_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{K} \cdot \vec{x}_3) = 0 \Rightarrow \vec{K} \cdot \vec{x}_3 = K = \text{const}$$

$$\frac{1}{2} A (\rho^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2 + mg l \cos \theta = \tilde{E} = \text{const}$$

$$\frac{1}{2} A (\rho^2 + q^2) + mg l \cos \theta = E = \tilde{E} - \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2}{C} = \text{const}$$



$$\frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mg l \sin \theta = E \quad (1)$$

(изменение кинетической энергии при вращении вокруг горизонтальной оси)

$$C(\dot{\varphi} + \dot{\theta} \cos \theta) = H \quad (2)$$

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} A \dot{\theta} \\ A \dot{q} \\ C \dot{r} \end{bmatrix} = A \vec{j}_2 + H \vec{\xi}_3$$

$$K = \vec{K} \cdot \vec{x}_3 = A \underbrace{\dot{\theta} \vec{x}_3}_{\dot{\varphi} \sin \theta} + H \underbrace{\vec{\xi}_3 \cdot \vec{x}_3}_{\cos \theta} = A \dot{\varphi} \sin^2 \theta + H \cos \theta \quad (3)$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \dot{\varphi} = \frac{K - H \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\vec{j}_2 = \dot{\theta} + \dot{\varphi} \cdot \sin \theta$$

$(\dot{\theta} \perp \vec{x}_3)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} A \dot{\theta} + \frac{1}{2} A \frac{(K - H \cos \theta)^2 \sin^2 \theta}{A^2 \sin^4 \theta} + mg l \cos \theta = E$$

$V(\theta)$

$$\int \frac{\sqrt{A} d\theta}{2(E - V(\theta))} = t + \text{const} \Rightarrow \theta(t) = \text{функция времени}$$

"неподвижная по-ва (т.к. гибкость в неизмененном состоянии)"

Несколько интересных случаев:

$$\dot{\varphi} = \frac{K - H \cos \theta(t)}{A \sin^2 \theta(t)} \Rightarrow \dot{\varphi} = \int f_{\varphi}(t) dt + \text{const}$$

или неподвижна, но имеет неподвижную цепь  
(минимум тяжести + константа)

$$\dot{\varphi} = \frac{u}{c} - \dot{\varphi}(t) \cos \theta(t) = f_{\varphi}(t) \Rightarrow \dot{\varphi} = \int f_{\varphi}(t) dt + \text{const}$$

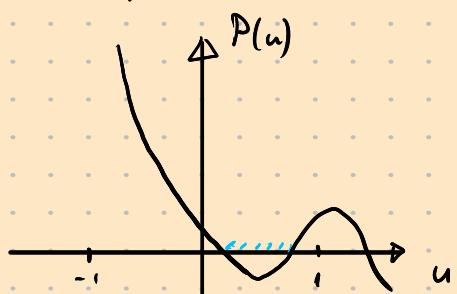
↓ minimum energy + conservation

$$m_3(3): \ddot{\Theta} + \frac{(K - Hu)^2 \sin^2 \Theta}{A^2 \sin^4 \Theta} + \frac{2(mgl \cos \Theta - E)}{A} \cdot \sin^2 \Theta$$

$$\dot{\Theta} \sin \Theta = -( \cos \Theta )' \quad \text{where } u = \cos \Theta$$

$$\dot{u}^2 + \frac{(K - Hu)^2}{A^2} + \frac{2(mgl u - E)}{A} (1 - u^2) = 0$$

Однозначное решение:  $P(u) = \text{однозначное}$



$P(u) \leq 0$  - однозначное движение

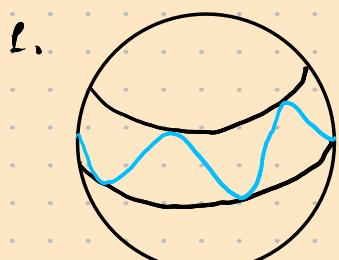
Следует проверить:



Частные случаи:



I. Однозначное решение:



$$\operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\min}} = \operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\max}}$$



$$\dot{\varphi}|_{\theta_{\max}} = 0$$



$$\operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\min}} \neq \operatorname{sign} \dot{\varphi}|_{\theta_{\max}}$$

У бесконечной прыжки ( $H \rightarrow \infty$ ) зона глупости очень узка:



$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow 0 \\ T &\rightarrow 0 \\ (\text{no more forces}) \end{aligned}$$

Период вращения при этом  $\rightarrow \infty$ .

## II. Частные случаи

### 1. Водоворотное движение



Если  $\dot{\theta}(0) \neq 0$ , то движение никогда не может остановиться.

2.



$$T \rightarrow \infty$$

Асимметрическое движение к точке верхнего скрещивания Пуассона (всп. наложение)

### 3. "Консисти" барок



Барок брандлиса ворота всп. с наименшей градиентом спиральности.

## Резонансное движение в системе Альянта



$$\left[ C + (C-A) \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \cos \theta \right] \dot{\varphi} \times \dot{\varphi} = \vec{M} ; \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\vec{M} = mgl \vec{i} \times \vec{e} = \frac{mgl}{\dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi}} \dot{\varphi} \times \dot{\varphi}$$

$$C \dot{\varphi} \dot{\varphi} + (C-A) \dot{\varphi}^2 \cos \theta = mgl$$

$$C(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = H = \text{const}$$

$$C\dot{\varphi} = H - C\dot{\varphi} \cos \theta$$

$$H\dot{\varphi} - A\dot{\varphi}^2 \cos \theta = mgl$$

$$A\dot{\varphi}^2 \cos \theta - H\dot{\varphi} + mgl = 0$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4A m g l \cos \theta}}{2A \cos \theta} \quad (1)$$

Ein  $H \rightarrow \infty$  (durchstoßendes Pendeln)

$$\dot{\varphi}_1 \rightarrow \frac{H}{A \cos \theta} \rightarrow \infty \quad - \text{Schnelles Pendeln}$$

$$\sqrt{H^2 - 4A m g l \cos \theta} \simeq H \left( 1 - \frac{2A m g l \cos \theta}{H^2} \right) \quad - \text{gleiches Pendeln, zulässig oder nicht}$$

$$\dot{\varphi}_2 \rightarrow \frac{mgl}{H} \rightarrow 0 \quad - \text{Langsam pendeln}$$

Um (1)  $\Rightarrow$  gilt für schnelles Pendeln die Bedingung  $H$ :

$$H^2 \geq 4A m g l \cos \theta.$$

$$H^2 \geq 4A m g l \quad - \text{unzulässiges Pendeln (geradeaus schwingen verboten).}$$

# Уравнения Лагранжа 2-го рода

Примеры



взаимо-однозначное  
соответствие



$$= T^2$$

глобальное



$$= S^2$$



$$\sim R^3$$



$$\sim R^3 \times SO(3)$$

локально



$\sim$



- М,  $\dim M = n$

Конфигурационное многообразие

Многообразия си-му можно представить взаимо-однознач. соответствие с конфигурационными многообразиями.

$q$  - параметризующий конфигурационное многообразие  $M$  (аддитивные коор-тры)

$$1. q = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} \quad 2. q = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} \quad 3. q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad 4. q =$$

размерность  $n!$

Она имеет вид.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi \end{bmatrix}$$

① Гладкий (пример 3 - крив. Bezier)

② Поклонный (пример 2 - имеет однозначн. в. решения)

Многое в многообр. подавленных коор-т дает не имеет (сверх)



Ноце въглене  $q$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(q, t)$$

- Кооп-тн гамни узбе.

Чисбеси небирименесин:

$$\vec{r}_{ii} \delta q^i \neq 0 \quad \forall \delta q \neq 0 \text{ - дүрдепенеси нын гамни биренин}$$

$$\left( \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q^i \right)$$

Т.е. менене  $b$   $q$  одоғасынан берилсе откын  $\delta \vec{r}$ .

Приимер



$$q = \varphi \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(t) \sin \varphi \\ -l(t) \cos \varphi \end{bmatrix}$$

### Бирнадынан негенеме

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_{ii} \delta q^i - \text{башы!}$$



Бозномалын негенеме:

$$d\vec{r} = \delta \vec{r} + \vec{r}_{it} dt - \text{нүрге не мен.}$$

$T_q M$  - көзат. нп-бо  $\times M$  б  $\tau \cdot q$

$\delta q$  - берилген  $b$  масалынан нәцихәмнәл (мөнде)

$\delta q^i$  - берилген кооп-т, мөнди  
дайын орнады.

### Механикалық сязын иш көсиптікендүүлүк

1.



$$x^2 + y^2 = l^2(t) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(q, t) = 0 \\ i = 1, m \end{array} \right.$$

реконструкция  
(нашомын)  
сязы

2.



$$x^2 + y^2 - l^2(t) \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(q, t) \leq 0 \\ i = 1, s \end{array} \right.$$

күйдеп түндөсүү  
сязы

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ij}(q, t) \dot{q}^j + b_i(q, t) = 0 \\ i = 1, n \end{array} \right.$$

кинематикалык  
связь

кинематикалык  
(дүрдепенеси)  
связь

пистоттерүүлүк

### a. Консервативные

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \text{const} \Leftrightarrow \text{цилиндрический сектор}$$

### b. Неизотермические

"конек Чаморина":

(коэффициент непр. по  
составу - конвекция)



$$\dot{y} - \dot{x} \operatorname{tg} \varphi = 0$$

Доказем неизотермичность:

$$\mu \operatorname{tg} \varphi dx - \mu dy + \sigma d\varphi = dF(x, y, \varphi)$$

$\uparrow$  непр. неизотерм.  
 $f_{,x}$                $f_{,y}$                $f_{,\varphi}$

$$f_{,x\varphi} = f_{,\varphi,x} \Rightarrow \frac{\mu}{\cos^2 \varphi} = 0 \Rightarrow \mu = 0 - \text{нет непр. неизотерм.} \Rightarrow \text{члены неуст.}$$

Если в уп-е члены (1-3) збно бываю фикс., то они наз-ся **реактивными** (нечастотными), иначе - **спонтанными** (частотными)

**Задачи:** 1. найти параметры вин-ма Торро с цилиндрическим сектором.

2. Для вин-ма, коэф. из н. магн. T, уп-е члены мин. для:

$$R = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 1) F(R, t) = 0 - \text{реактивные} \\ 2) F(R, t) < 0 - \text{негерхардитонные} \\ 3) C\dot{R} + f = 0 - \text{спонтан. члены} \end{array}$$

**Выражение переменных при наимин. члене**

$$1. f_{ij} \delta q^j = 0 - \text{нест. чл.}$$

$$\nabla_R F(R, t) \cdot \delta R = 0$$

$$2. f_{ij} \delta q^j \Big|_f \leq 0 \quad q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(где R аналитич.)

$$f = x \leq 0 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$3. C_{ij} \delta q^j = 0$$

(где R аналитич.)

Число степеней свободы  $m - r$  (разн. констр.)  
имеет означение минимума ко-бо кинемат. степеней.

Для гомономных  $m - r = \dim M$ .

N3! Ограничительные кооп-ии при описание гомономых систем делят вспомогательные  
с гибким уп-ием: уп-и члены делят вспомогательные кооп-ии.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(q, t) = 0 \\ i=1, m \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q' = f^+(q^{m+1}, \dots, q^n, t) \\ q^m = f^m(q^{m+1}, \dots, q^n, t) \end{array} \right. - q^{m+1}, \dots, q^n - \text{незав. кооп-ии}$$

Повторное оп-ие:

$$f(R, t) = 0 \rightarrow R(q, t) \rightarrow f_i(R(q, t), t) \equiv 0.$$

### Фундаменталные уравнения



$\delta \vec{r}$  - б. касар., нр-бл & раб-бл.

$$\delta A = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} \equiv 0.$$

$\vec{N}$  - един. перпендикуляр



$$\delta A = 0.$$



$$\delta A = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} - N \delta \vec{r} = 0$$

Фундаменталные уравнения:

$$\vec{r} = \vec{t} + \vec{n}$$

yg. един. перпендикуляр  
расстояние  
един. (управл. n)

$(\delta A_n = \int \vec{n} \cdot \delta \vec{r} dm = 0)$  - един. р-ии изгиб. не совершили разн. угл. кривизн.

## Основное уравнение динамики

$$\int (\ddot{\vec{r}} - \vec{f}) \delta \vec{r} dm = 0$$

## Базовый уп-е Лагранжа 2<sup>го</sup> рода

$$\int \vec{f} \delta \vec{r} = \underbrace{\int \vec{f} \cdot \vec{r}_{,k} dm \delta q^k}_{Q_k - \text{однородные члены}} = Q_k \delta q^k \quad \begin{array}{l} (\text{однородные члены!}) \\ (\text{однородные члены базы}) \end{array}$$

Замечание: можно выделить наружные однородные члены в  $q^i$ :

Тогда:  $\delta q^i = q_{,ii}^i \delta q^i \Rightarrow \delta q^i - \text{контравариантный вектор}$

$$Q_i \delta q^i = Q_{,i} q_{,ii}^i \delta q^i = Q_{,i} \delta q^i$$

$Q_{,i} = q_{,ii}^i \quad Q_i \Rightarrow Q_i - \text{ковариантный вектор}$

$$\int \ddot{\vec{r}} \cdot S \vec{r} dm = \int \vec{r} \cdot \vec{F}_{,k} dm \delta q^k = \int [(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}_{,k})^i - \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k}] dm \delta q^k \quad \textcircled{1}$$

$(v^2/2)_{,k}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_{,k} \dot{q}^k + \vec{r}_{,t} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{,k} = \vec{r}_{,k}$$

$\frac{d\dot{\vec{r}}}{d\dot{q}^k}$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_{,k} = (v^2/2)_{,k}$$

$$\textcircled{1} \quad \int \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k} - \left( \frac{v^2}{2} \right)_{,k} \right] dm \delta q^k = [(\dot{T}_{,k})^i - \dot{T}_{,k}] \delta q^k = Q_k \delta q^k \Rightarrow$$

$$\int \frac{v^2}{2} dm = T$$

$$\Rightarrow [(\dot{T}_{,k})^i - \dot{T}_{,k} - Q_k] \delta q^k = 0$$

Верно для  $\delta q^k$ ;  $\delta q^k$  - незав. и прямой  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\dot{T}_{,k})^i - \dot{T}_{,k} = Q_k \quad \text{- уп-е Лагранжа 2<sup>го</sup> рода}$$

Если  $Q_k = -\Pi_{,k}$ ;  $\Pi = \Pi(q, t)$ , то такие однородные члены называются консервативными.

Тогда базисная  $L = T - \Pi$  - кв-е уп-е Лагранжа (Лагранжиан). След:

$$(\dot{L}_{,k})^i - \dot{L}_{,k} = 0 \iff \mathcal{E}_k L = 0 \quad \left( \mathcal{E}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k} \right)$$

**Закончили** even разы что не называемый ( $Q_i = -\Pi_{ij} + \underbrace{Q_i^*}_{\text{неравн.член}}$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  следовательно  $L = T - \Pi$ , поэтому  $E_k L = Q_k^*$

## Обобщённые потенциалы

$V(q, \dot{q}, t)$ :  $Q_k = E_k V$  — где называемый член называется  $\Pi$

$$E_k V = (V_{,k}) - V_{,k} \ddot{q}^m + \underbrace{\dots}_{\text{нет } \ddot{q}} = Q(q, \dot{q}, t)$$

$\Rightarrow V_{,km} = 0 \Rightarrow V$  — нелинейно по  $\dot{q}$

Таким образом,  $V = \dot{q}^\top Y(q, t) + \Pi(q, t)$  ( $Y(q, t)$  — бессроп. — члены)

Пример: циркуляционные члены

$$Q = \Gamma \dot{q}, \quad \Gamma^\top = -\Gamma$$

Член Кирхгофа:  $F = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = \Gamma \ddot{r}, \quad \Gamma = -2m\hat{\omega}$

Член Дарси:  $e\vec{v} \times \vec{h}; \quad \Pi = -e\hat{h}$

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^\top \Gamma q = \frac{1}{2} \delta_{ij} \dot{q}^i q^j$$

