Фомичёв Александр Владимирович

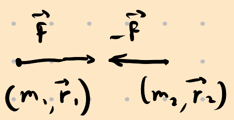
Литература

Чёрный список: лекции Фомичёва, интернет

Белый список: Журавлёв; Маркеев; Гантмахер (~ конец сема); Болотенко

Аксиоматика классической механики

1. Аксиома $\mathbb{R}^3$ - все объекты - в Евклидовом пр-ве $\mathbb{R}^3$.
2. $\exists$ движение: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (в $\mathbb{R}$ - время)
3. $\exists$ мат. точка: $(m, \vec{r})$, $m = const > 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
4. $\exists$ взаимодействие: $\forall\, (m_1, \vec{r}_1), (m_2, r_2) \to \exists\, \vec{F}$ - сила: $F \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$



5. $\exists$ сис-ма координат и способ параметризации времени, такие что

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие сис-мы наз-ся ИСО

Инвариантность и ковариантность ур-ий

Инв.: $\begin{cases} F_i(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0 \\ q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{bmatrix} \end{cases}$

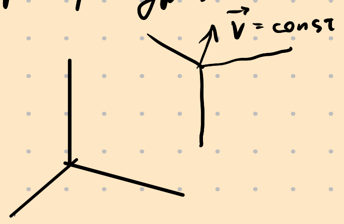
$$t = t(t', q'), \quad q = q(t', q')$$

$F_i(t', q', \dot{q}', \dots, q'^{(n)}) = 0$ - те же ф-ии!

Тогда F_i инв.

Ковариантность: инвариантность правила составления ур-ий.

Пример: ур-я Ньютона ковариантны относ. преобр-ий Галилея.



$$\begin{cases} r' = \vec{r}_0 + \vec{v}t + At, & A \text{ - ортог. матрица} \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

← преобр. (группа) Галилея.

$\vec{r}_0, \vec{v}, A, \tau = const$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \longmapsto m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}$$

Индексные обозначения

① $\vec{r} \to r^i$, $i = 1 \dots 3$

② $A \to a_{ij}$

a^i_j

a^{ij}

немой индекс

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{3} a^i b^i \equiv a^i b^i$ (правило Эйнштейна)

$A\vec{r} = a_{ij} r^j$

бегущий индекс

④ $a, \dots, h$ – фиксирующие индексы

$x^a b^a$ – эл-т с номером a; без суммирования!

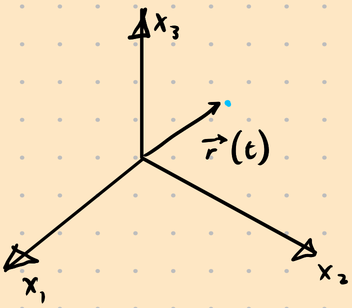
⑤ $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k}$ $\qquad \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} = f_{k,j}$

$\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = a_{ij,k}$

Напр. $df = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f_{,k}\, dx^k$

Кинематика точки

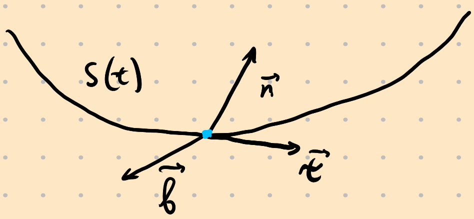
Декартовы координаты

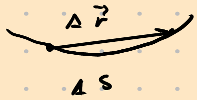


$$\vec r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} \qquad V = \dot{\vec r} = \begin{bmatrix} \dot r^1 \\ \dot r^2 \\ \dot r^3 \end{bmatrix} \text{ — скорость}$$

$$\vec w = \ddot{\vec r} = \dot{\vec v} = \begin{bmatrix} \ddot r^1 \\ \ddot r^2 \\ \ddot r^3 \end{bmatrix} \text{ — ускорение}$$

Сопровождающий трёхгранник Френе

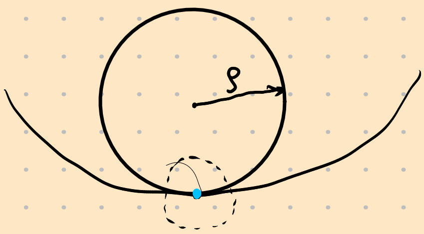




$$\vec r = \vec r(s(t))$$

$$\vec v = \underbrace{\vec r_{,s}}_{\vec \tau} \dot s = \vec \tau v$$

$$\vec w = \vec \tau_{,s} v^2 + \vec \tau \dot v$$

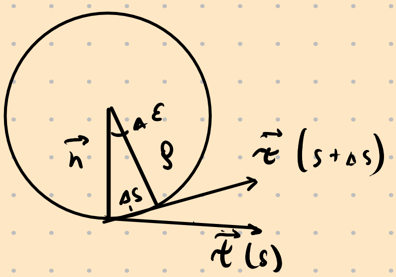


$$\Delta s \simeq \rho \Delta \varepsilon$$

$$\Delta \vec t \simeq \Delta \varepsilon \vec n = \frac{\Delta s}{\rho} \vec n$$

$$\vec \tau_{,s} = \frac{\vec n}{\rho} \Rightarrow \vec w = \underbrace{\dot V \vec t}_{w_t} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho} \vec n}_{w_n}$$

Тангенц. нормальное

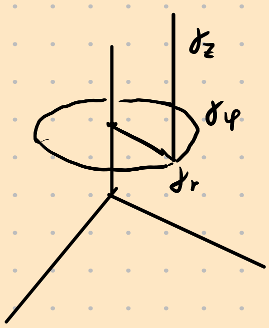


Криволинейные координаты

$\vec r = \vec r(q)$; $q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}$ — криволинейные (обобщённые) координаты

$\det [r^i_{,j}] \neq 0$! Взаимно-однознач. соотв.

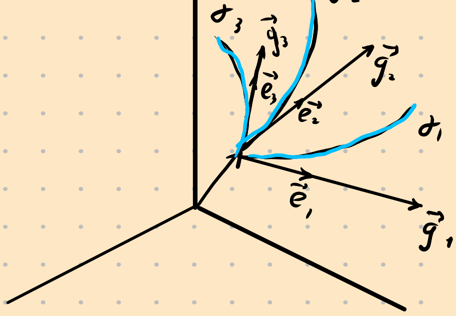
$\vec r = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$ — цилиндрические координаты



$\begin{cases} q^i \text{ - var} \\ q^{j \neq i} \text{ - fix} \end{cases}$ $i = 1, 2, 3$ — γ_i — координатные линии

$H_k = |\vec g_k|$ — к-т Ламе

$H_k = \sqrt{(r^1_{,k})^2 + (r^2_{,k})^2 + (r^3_{,k})^2}$



$\vec e_\alpha = \dfrac{\vec g_\alpha}{H_\alpha}$ — Орты (норм. векторы) лок. базиса

$|\vec e_\alpha| = 1$

Скорость в кривол. коорд.

$\vec v = \dot{\vec r} = \vec r_{,k}\,\dot q^k \Rightarrow \vec v = \underbrace{\dot q^k}_{\text{составляющая}}\,\vec g_k$

① $\vec v = \sum \underbrace{H_k\,\dot q^k}_{\text{составляющая}}\,\vec e_k$

$v^2 = \underbrace{\vec g_i\cdot\vec g_k}_{g_{ik}\text{ - метрич. тензор}}\,\dot q^i\cdot\dot q^k = g_{ik}\,\dot q^i\dot q^k$

② $v^2 = \sum H_i H_k \langle \vec e_i\cdot\vec e_k\rangle\,\dot q^i\,\dot q^k$

Если $\langle\vec e_i\cdot\vec e_j\rangle = \delta_{ij}$:

$v^2 = \sum H_i^2\,(\dot q^i)^2$

Ускорение в кривол. сис-ме

$\vec w\cdot\vec g_k = \ddot{\vec r}\cdot\vec r_{,k} = (\dot{\vec r}\cdot\vec r_{,k})^\cdot - \dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}_{,k}$

! $\dot{\ } = \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot q^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}$

Произв. по q_k ↔ точка:

$\vec r_{,k} \xrightarrow{d/dt} \vec r_{,ki}\,\dot q^i$

$\dot{\vec r} = \vec r_{,i}\,\dot q^i \qquad \dot{\vec r}_{,k} = \vec r_{,ki}\,\dot q^i \qquad \dfrac{\partial}{\partial q^k}\dfrac{d\vec r}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\vec r}{\partial q^k}$

$\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}_{,k} = \left(\dfrac{v^2}{2}\right)_{,k} \qquad$ (т.к. $v^2 = \dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}$)

$\dot{\vec r} = \vec r_{,k}(q)\cdot\dot q^k \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec r}_{,\dot k}}_{\frac{\partial\dot{\vec r}}{\partial\dot q^k}} = \vec r_{,k}$

$\dot{\vec r}\cdot\vec r_{,k} = \dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}_{,\dot k} = (v^2/2)_{,\dot k}$

(3) $\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot a} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,a}$

(4) $\vec{w}\cdot\vec{e}_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot a} - (v^2/2)_{,a}\right]$

Оператор Эйлера – Лагранжа

$$\mathcal{E}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{g}_a = \mathcal{E}_k\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Геометрический смысл H_k и их вычисление

$q^a \to q^a + dq^a$ — только одна комп.

$d\vec{r}_a = \vec{r}_{,a}\, dq^a$

$|d\vec{r}_a| \simeq \underbrace{|\vec{r}_{,a}|}_{H_a}\cdot dq^a$

2-й закон Ньютона в криволинейных координатах

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \Big| \cdot \vec{g}_k$ $\qquad T = \frac{mv^2}{2}$ — кин. энергия

$m\,\mathcal{E}_k\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{g}_k = Q_k$ — обобщённая сила

$\mathcal{E}_k(T) = Q_k$

(6) $\frac{d}{dt}T_{,\dot k} - T_{,k} = Q_k$

Для базиса $\vec{e}_k$: $\quad \frac{1}{H_a}\mathcal{E}_a(T) = \vec{F}\vec{e}_a$

Понятие о тензорах

$\vec{r}(q)$ — зависимость $\qquad q(q')$ — замена переменных

Как изменится скорость?

$\dot q^i = \underbrace{q^i_{,i'}}_{\text{матрица Якоби}}\dot q^{i'}$ — контравариантный вектор (набор чисел, к-рый при смене базиса ведёт себя вот так) (тензор I ранга)

$\dot q = J\dot q'$

Что будет с градиентом?

$f(q)$ — скал. ф-ия

$f(q(q'))$ $\qquad f_{,i'} = f_{,i}\cdot q^i_{,i'}$ — градиент меняется уже не так! Это ковариантный вектор (ковариантный вектор – тензор I ранга)

$\underbrace{\nabla' f}_{\text{строка}} = \nabla f J$ $\qquad$ $\nabla' f^T = J^T \nabla f^T \Rightarrow \underbrace{\nabla f^T}_{\text{уже столбец!}} = (J^T)^{-1} \nabla' f^T$

Разница (между ко- и контра-) теряется, если преобр-е ортогонально $\left((J^T)^{-1} = J\right)$

Метрический тензор

$\vec{g}_k = \vec{r}_{,k}$ $\qquad$ $\vec{r}(q(q'))$ – замена

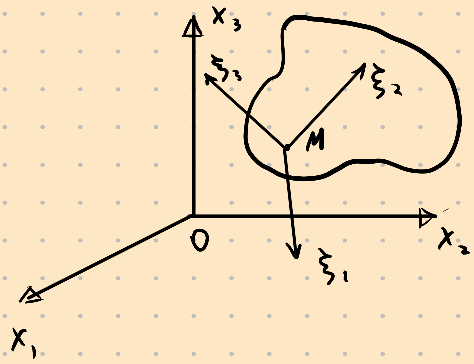
$g_{k'} = \vec{r}_{,k} \cdot q^k_{,k'} = \vec{g}_k \, q^k_{,k'}$ – получается, $\vec{g}_k$ – ковариантный вектор

Метрический тензор: $\vec{v} = \dot{q}^i \vec{g}_i \Rightarrow v^2 = \underbrace{g_i g_k} \dot{q}^i \dot{q}^k$, $g_{ik} = g_i g_k$ – метрич. тензор!

$g_{i'k'} = q^i_{,i'} \, q^k_{,k'} \, g_{ik}$ – ковариантный тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Кинематика твёрдого тела

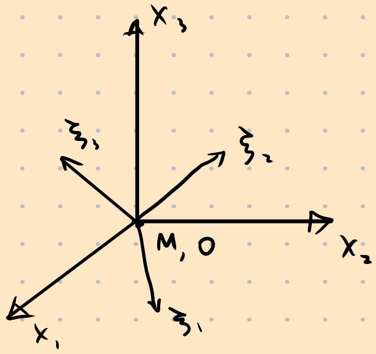
Твёрдое тело — совокупность мат. точек, рас-ие между к-рыми не изменяется.



M ∈ телу — полюс ТТ (твёрдого тела)

Движение твёрдого тела — это движение полюса и движение ТТ относ. полюса (вращение).

Вращение. Углы конечного вращения



Совмещаем начала координат и рас-иваем вращение.

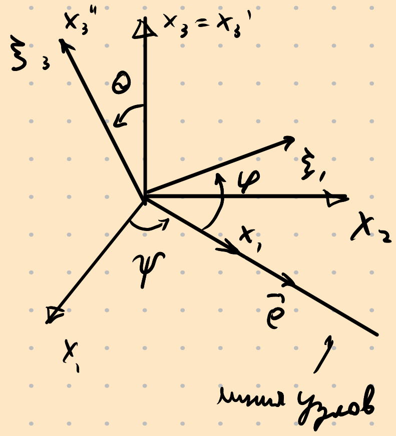
- Углы Эйлера

∃ (пусть) $\vec{x}_3 \parallel \vec{\xi}_3$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3}{|\vec{x}_3 \times \vec{\xi}_3|}$$

Поворачиваем сис-му координат Ox:

$$x \xrightarrow[3\,(\text{относ. } x^3)]{\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$



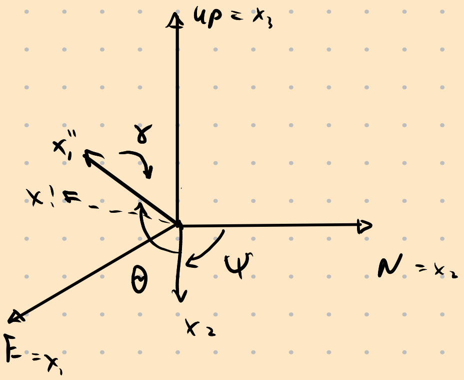
ψ — угол прецессии

θ — угол нутации

φ — угол собственного вращения

Параметры ψ, θ и φ наход. во вз.-одн. соотв. с положением твёрдого тела везде кроме полож. $\theta = \{0, \pi\}$

- Самолётные (корабельные) углы



$$x \xrightarrow[3]{-\psi} x' \xrightarrow[1']{\theta} x'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ — курс

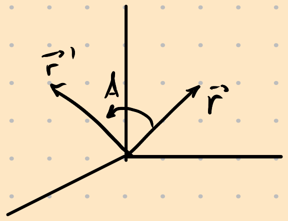
θ — тангаж

γ — крен

Вырождение при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

Любая сис-ма углов конечного вращения будет иметь вырождение.

Ортогональная матрица



$$\vec r' = A\vec r$$

$$|\vec r'|^2 = |\vec r|^2 \quad \forall \vec r$$

$$|\vec r'|^2 = \vec r'^T \vec r' = \vec r^T A^T A \vec r = |\vec r|^2 = \vec r^T \cdot \vec r \quad \forall \vec r \Rightarrow A^T A = 1$$ — Определение ортог. матрицы

Св-ва

1. Теорема Бине-Коши: $|AB| = |A|\cdot|B|$

$$|A^T A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

$+$ → поворот; $-$ → зеркальный поворот

2. $A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

3. $\forall A, B$ - ортог. $\to C = AB$ - ортогональная

$$C^T C = B^T \cdot A^T \cdot AB = E$$

4. Ортогональные матрицы образуют группу.

G - группа

① $\forall A, B \in G \to C = AB \in G$

② $A(BC) = (AB)C$

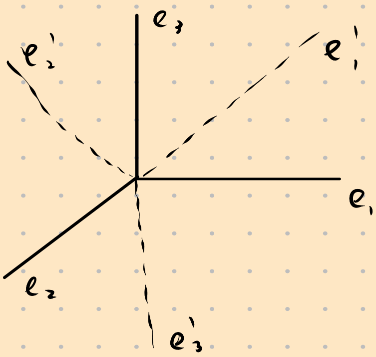
③ $\exists E \in G: \ \forall A \in G \to AE = EA = A$

④ $\forall A \in G \to \exists A^{-1} \in G: A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пусть $O(3)$ - группа ортогональных матриц: $A^T A = E$

$SO(3)$ - спец. орт. группа; $\forall A \in SO(3) \to |A| = 1$ (группа поворотов)

5. $SO(3)$ - основная мат. модель твёрдого тела с неподвижной точкой.



$$\vec e_{i'} = a^i_{i'} \vec e_i$$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{1'} & \\ a^2_{1'} & \dots \\ a^3_{1'} & \end{pmatrix} = [\,[\vec e_{i'}]\,]_e$$

$[e_{1'}]_e$

$$\vec e_{i'} \cdot \vec e_j = a^i_{i'} \vec e_i \vec e_j = a^j_{i'} \overset{j \to i}{\Rightarrow} a^i_{i'} = \cos(\widehat{e_i, e_{i'}})$$

A - матрица направляющих косинусов

Установлено взаимн. однознач. соответствие между положением твёрдого тела и $A \in SO(3)$.

$A = [\vec a_1, \vec a_2, \vec a_3]$ $\vec a_i \cdot \vec a_j = \delta_{ij}$ => 6 независимых формул =>

=> матрицы из $SO(3)$ – трёхмерное многообразие в 9-мерном пр-ве матриц

6   $a^i_{i'} = \Delta^i_{i'}$ $A^{-1} = \frac{[\Delta^i_{i'}]^T}{|A|_{=1}} = A^T$ => ЧТД

эл-т A ал. дополнение

Собственные векторы и собственные числа ортогональных матриц

$A\vec r = \lambda \vec r \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$ $\mathrm{tr}\, A = a^i_i$

$\lambda^3 - \lambda^2\, \mathrm{tr}\, A + \lambda\, \mathrm{tr}\, A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \exists \vec r_1 : A\vec r_1 = \vec r_1$ – инвариантный вектор

Докажем, что $|\lambda_a| = 1$

комплексное сопр-е

$A\vec r_a = \lambda_a \vec r_a \,\Big|\cdot (\text{ур-е})^+$ $A^+ = \overline{A^T}$ – эрмитово сопряжение

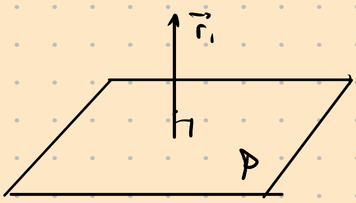
$\vec r_a^{\,+} \underbrace{A^+ A}_{E} \vec r_a = \underbrace{\lambda_a^+ \lambda_a}_{|\lambda_a|^2} \cdot \vec r_a^{\,+} \vec r_a$ Если $\vec r_a = \vec p + i\vec q$, то $\vec r_a^{\,+} \vec r_a = \vec p^{\,T} p + \vec q^{\,T} q = |\vec r_a|^2 > 0$

$|\vec r_a|^2 = |\lambda_a|^2 \cdot |\vec r_a|^2 \Rightarrow |\lambda_a| = 1$

$\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = \frac{\mathrm{tr}\, A - 1}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{(\mathrm{tr}\, A - 1)^2}{4}}$

$\vec r_{2,3} = \vec p \mp i\vec q$ $\{\vec r_1, \vec p, \vec q\}$ – правый ОНБ

Инвар. подпр-во A:



$P \perp \vec r_1$, P – инвар. подпр-во A.

$\exists \vec r \in P$ $A\vec r_1 = \vec r_1 \Rightarrow A^T \vec r_1 = \vec r_1$

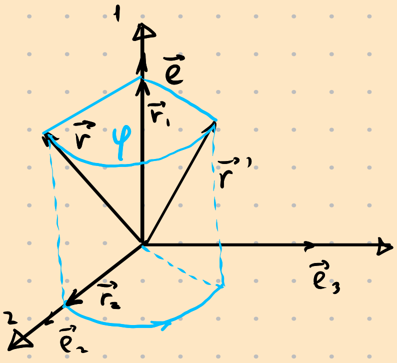
$(A\vec r)^T \vec r_1 = \underbrace{\vec r^{\,T} \underbrace{A^T \vec r_1}_{\vec r_1}}_{0} \Rightarrow A\vec r \in P$

ЧТД

Теорема Эйлера о конечных поворотах

$\forall$ 2-х положении тв. тела с неподв. точкой $\exists\, \vec e$ и угол φ конечн. поворота, совмещ. положение тела (в силу существования $\vec r_1$)

Связь ортогональной матрицы и пар-ов Эйлерова поворота



Выберем $\vec e$ как ось поворота, $\vec e_2 \perp \vec e$ лежит в плоскости с $\vec r$ и $\vec e$.

$\vec r$ поворачивается на φ относ. $\vec e$ в $\vec r\,'$.

$\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$, где $\vec r_1 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$\vec r_2 = \vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e$

$$\vec e_2 = \frac{\vec r_2}{|\vec r_2|}$$

$$\vec e_3 = \vec e_1 \times \vec e_2 = \frac{\vec e \times \vec r}{|\vec r_2|}$$

$$\vec r\,' = \vec r_1 + r_2 \cos\varphi\, \vec e_2 + r_2 \sin\varphi\, \vec e_3 = \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \cdot \vec e + (\vec r - \langle \vec r \cdot \vec e \rangle \vec e)\cos\varphi + \vec e \times \vec r \sin\varphi =$$
$$= (E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e\,\vec e^{\,T})\,\vec r$$

$\hat e \vec r = \vec e \times \vec r$; $\hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^2 \\ -e^2 & e^2 & 0 \end{bmatrix}$ (1) $\quad \vec e\,\vec e^{\,T} = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1e^2 & e^1e^3 \\ e^2e^1 & \dots & \\ & & \end{bmatrix}$

Получим $\boxed{A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\vec e\,\vec e^{\,T}}$ (2) – причем инв. относ. базиса!

$$\vec e \times (\vec e \times \vec r) = \langle \vec e\, \vec r \rangle \vec e - \vec r$$
$$\overset{\shortparallel}{\hat e^2 \vec r} = (ee^T - E)\vec r$$

$$\boxed{A = E + \hat e \sin\varphi + \hat e^2 (1-\cos\varphi)}$$

Пусть $\vec\varphi = \vec e \varphi$ – вектор Эйлера (условный вектор – сложение не работает)

* $\vec\varphi \mapsto \hat\varphi$ – соотв. оператор вида (1).

Тогда можно пок-ть, что $A = e^{\hat\varphi}$ (ряд Тейлора)

Выражение парам. Эйл. поворота через эл-ты $A \in SO(3)$

Из (2) $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,A = \underbrace{3\cos\varphi}_{E\cos\varphi} + \underbrace{1-\cos\varphi}_{(1-\cos\varphi)\vec e\,\vec e^{\,T}}$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{tr}\,A - 1}{2}$$

$A = [a^i_j]$

$a^3_2 - a^2_3 = 2e^1 \sin\varphi \Rightarrow e^1 = \dfrac{a^3_2 - a^2_3}{2\sin\varphi} \quad e^2 = \dfrac{a^1_3 - a^3_1}{2\sin\varphi} \quad e^3 = \dfrac{a^2_1 - a^1_2}{2\sin\varphi}$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$; полагаем, что $\varphi \in [0;\pi]$! Это делает $\vec e$ таким, что полож. поворот – это против часовой стрелки. Поворот в обр. сторону – берётся $-\vec e$.

Оператор малого поворота. Угловая скорость твёрдого тела

Если $\varphi \ll 1$, то

$A \simeq E + \hat{\varphi}$ – оператор малого поворота

Это верно и для $A \in SO(n)$:

$A(t) \in SO(n); \quad A(0) = E$

$A^T A = E \;\Big|\; d/dt\big|_{t=0}$

$\dot{A}^T \underbrace{A}_{E} + \underbrace{A^T}_{E} \dot{A}\Big|_{t=0} = 0$

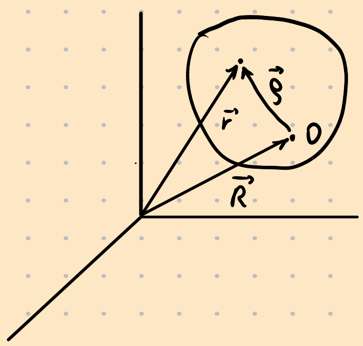
$\dot{A}^T(0) = -\underbrace{\dot{A}(0)}_{\hat{\omega}} \Rightarrow \dot{A}(0)$ – кососимметрическая $\Rightarrow A \simeq E + \Delta t\,\hat{\omega}$

Угловая скорость

$\exists\, \Delta\vec{\varphi} = \vec{e}\,\Delta\varphi$

$\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$ – угловая скорость

Распределение скоростей и ускорений в твёрдом теле



$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\vec{v}_0} + \dot{\vec{\rho}}$

$\rho(t + \Delta t) \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\vec{\rho}(t)$

$\dot{\vec{\rho}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}\vec{\rho} = \hat{\omega}\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ – ф-ла Эйлера

$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ – ф-ла Ривальса

$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$