Бишаев Александр Михайлович

Глава I

Аналитические методы решения ДУ

§1. Основные понятия

Опр-е (обыкновенные ДУ)

ОДУ – это соотношение:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

$x,\ y(x),\ y'(x), \dots, y^{(n)}(x).$

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (2) – ур-е, разрешённое относ. старшего порядка произв.

n – порядок ДУ

$y = \varphi(x)$ – решение ДУ, если:

1. Она n раз дифф-ема
2. После её подстановки в (1) или (2) имеем тождество по x:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

$$\varphi^{(n)} \equiv f(x, \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

Связь F (или f) должна быть установлена! $f(f'(x)) = 0$ – не ДУ

Пример: модель хищник - жертва: $x(t)$ – жертва, $y(t)$ – хищник

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x y + \beta x \\ \dot{y} = \alpha x y - \beta y \end{cases}$$ – модель Лотка - Вольтерра

В курсе рас-иваются также сис-мы ур-ий:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$ (3) – нормальная сис-ма ДУ (слева – только 1-й порядок)

Разрешённое ур-е

Приведём ур-е n-го порядка к сис-ме ур-ий 1-го порядка:

$$x^{(n)} = f(t, \dots, x^{(k)}, \dots, x^{(n-1)})$$

$$x(t) = v^1,\ x'(t) = v^2, \dots,\ x^{(n-1)}(t) = v^n \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot v^1 = v^2 \\ \dot v^2 = v^3 \\ \dots \\ \dot v^{n-1} = v^n \\ \dot v^n = f(t, v^1, \dots, v^n) \end{cases} \qquad (5)$$

Теорема

(4) и (5) эквивалентны.

Д-во

$\Rightarrow$ Пусть $x(t)$ - решение ур-я (4).

$x(t) = v^1,\ v^2 = \frac{dx}{dt}, \dots,\ v^n = x^{(n-1)} \Rightarrow x(t)$ - реш-е (5).

$\Leftarrow$ Пусть $\vec v(t) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ - реш-е (5).

$x(t) = v^1,\ \frac{dx}{dt} = \frac{dv^1}{dt} = v^2, \dots,\ x^n(t) = \frac{dv^n}{dt} = f(t, v^1, \dots, v^n) = f(t, x, x', \dots, x^{(n)})$.

ЧТД

Не обыкновенные ДУ

$\Phi(x^1, \dots, x^n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \quad (6)$

$u = u(x^1, \dots, x^n)$ — ур-е в частных производных.

Пример: $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u = u(t, x)$ - Волновое ур-е

Реш-е: $u = f(x - Ct)$ - целая неопр. ф-ия вместо константы!

§2. ДУ в полных дифференциалах. ДУ с разделяющимися переменными

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1) - ДУ 1 порядка, разреш. относ. старшей произв.

Задача Коши — найти реш-е (1) такое, что $y(x_0) = y_0$.

$f(x,y)$ - ф-ия 2-х переменных. Причём $f(x,y)$ в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ непрерывна, т.е.

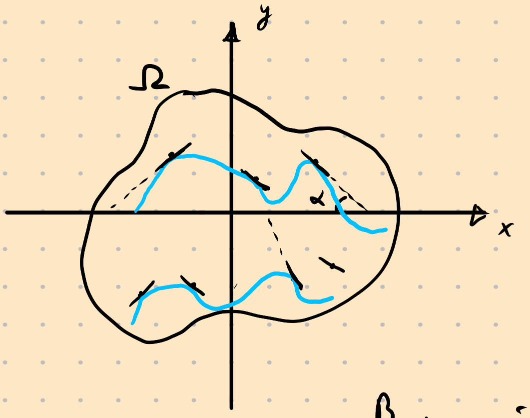
$f(x,y) \in C_\Omega$. Если $(x_0, y_0) \in \Omega$, то $\exists$ реш-е задачи Коши, иначе - не обязательно.

Ω - область определения ур-я (1).

Пример: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ на $[-1, 1]$, реш-е: $y = Cx$, $x \neq 0$

Если $\varphi(x)$ - реш-е (1), то $\varphi(x)$ - непр. дифф. ф-ия, т.е. $\varphi(x) \in C^1_\Omega$.

$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \in C_\Omega$



$tg\,\alpha = f(x,y)$

Если в каждой т. Ω построить такие маленькие отрезки, что $tg\,\alpha = f(x,y)$, и $tg\,\alpha\,(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$, то получится поле направлений ур-я (1).

График реш-я $\varphi(x)$ наз-ся интегральные кривые.

В каждой точке интегральные кривые касательны полю направлений.

Такой метод реш-я наз-ся метод изоклин.

Т.к. $f(x,y)$ – непр., то поле направлений не им. вертикальных прямых. Тогда $dx \neq 0$, т.е.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \iff dy - f(x,y)\,dx = 0$$

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ – ур-е в полных дифф-лах

$P(x,y),\ Q(x,y) \in C$

Здесь x и y равноправны, и dx может быть = 0 (есть вертикальные ур-я)