

# ОДУ - однородное дифференциальное уравнение

ОДУ & одн. уравн.

$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$  - однородное - право-сторона оговаривает  $y^{(n)}(x)$

Рассмотрим:

$$\begin{cases} F_1(x, y^1, \dots, y^{(n)}, z, z^1, \dots, z^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y^1, \dots, y^{(n)}, z, z^1, \dots, z^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Уп-2 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

- Если реш.:  $y_{p-2}$  1-го порядка, произведение всех право-сторон.:

$$\begin{aligned} y' &= F(x, y); \quad dy = df(x, y) dx \\ P(x, y) dy + Q(x, y) dx &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Уп-2 в дифр. форме} \\ \text{Уп-2 в дифр. форме} \end{array} \right\}$$

- Чтобы упрост.:  $y_{p-2}$  с различными переменными

$$f(x) dx + g(y) dy = 0; \quad \text{решение:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx \quad G(x) = \int g(x) dx$$

$$df(x) + dg(y) = 0$$

$$d(F(x) + G(x)) = 0$$

$$F(x) + G(x) = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \int f(x) dx + \int g(y) dy = 0$$

С2 №4

$$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{y(1+y)} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{(1+y)-y}{y(1+y)} dy = \int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} \right) dy = \ln \left| \frac{y}{1+y} \right| + C_1$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C_2$$

$$\ln \left| \frac{y}{(1+y) \cos x} \right| = C_3$$

$$\frac{y}{(1+y) \cos x} = \pm e^{C_3} \quad C \in \mathbb{R} \quad (C=0 - \text{точка решения!})$$

$$\frac{y}{(1+y) \cos x} = C \quad \text{или} \quad y = -1 \quad (\text{решение решения когда она есть!})$$

$$y = \frac{C \cos x}{1 - C \cos x}$$

№ 67 \*

$$3y^2 y' + 16x = 2xy^3 \quad \text{Найдите } y(x) - \text{одн. л. } U(+\infty)$$

$$3y^2 y' = 2x(y^3 - 8)$$

$$\int \frac{3y^2 dy}{y^3 - 8} = \int 2x dx \quad - \text{неравенство } y^3 \neq 8$$

$$\ln |y^3 - 8| = x^2 + C,$$

$$y^3 - 8 = \pm (e^{x^2+C}) e^{x^2}$$

$C \in \mathbb{R}$  ( $\delta + i\pi, 0!$   $y^3 = 8$  - same rem.)

$$y^3 - 8 = Ce^{x^2}$$

$$y(x) - \text{одн. лин. } C=0.$$

## Ортогональные траектории

Рассмотрим 2 ортогональные прямые:



$$y_2 = y_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = -\frac{1}{k_1}$$

$k_1 k_2 = -1$   $y \perp$  прямик.

Пусть ум.  $y_p = e^x$ :

$$y' = f(x, y)$$

Ортогональные траектории:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$



- ортогональные кривые  $y_p = e^x$  (основные траектории)

Пример

$y = Cx^2$  - симметрические кривые. Найдите основные траектории.

$$C = \frac{y}{x^2}$$

$$0 = \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}$$

$$y'x^2 = 2xy$$

$$y' = 2 \frac{y}{x}$$

$$\text{Другой вариант: } y' = -\frac{x}{2y}$$

$$2y dy + x dx = 0$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C \quad - \text{ип-е эллипс}$$



## Однородные уравнения

Согласно ип-е с разделяющимися переменными

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Замена:  $y = x z(x)$

$$y' = z + x z'$$

$$x z' + z = f(z)$$

$$z' + z - f(z) = 0 \quad \left( \frac{dz}{z - f(z)} + dx = 0 \right)$$

## Ип-е, связанные с однородным

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Замена:  $x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0$

$$= 0 \quad (\text{Вида } x_0, y_0)$$

$$y' = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta + \underbrace{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}_{= 0}}{a_2 \xi + b_2 \eta + \underbrace{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}_{= 0}}\right)$$

Получим однородное ип-е

Ф № 117

$$(y+2) dx = 2x+y-4 dy$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \quad -x_0, y_0$$

$$x = \xi + 3 \quad y = \eta - 2$$

$$\eta d\xi = (2\xi + \eta) d\eta$$

$$\frac{\eta}{\xi} = z$$

$$z \xi dz = (2\xi + z\xi)(z d\xi + \xi dz)$$

$$(z\xi - z(2\xi + z\xi))d\xi = \xi \cdot (2\xi + z\xi)dz$$

$$z\xi(1-z-z)d\xi = \xi^2(2+z)dz \quad | \quad \xi=0 \text{ - не реш-е}$$

$$-z(1+z)d\xi = \xi(2+z)dz$$

$$-\frac{d\xi}{\xi} = \frac{2+z}{z(z+1)} dz$$

$$-\int \frac{d\xi}{\xi} = \left( \frac{2}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$\frac{z^2}{z+1} \cdot \xi = C$$

$$\frac{y^2}{y+\xi} = C \Rightarrow \frac{(y+z)^2}{y+x-1} = C \Rightarrow \begin{cases} (y+z)^2 = C(y+x-1) \\ x+y = 1 \end{cases} \quad (\text{не теряем } x+y=1)$$

### линейное ур-е I порядка

$$y' + a(x)y = b(x) \quad - \text{неоднородное}$$

Рас-шее линейное однородное ур-е:

$$y' + a(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + a(x)dx = 0$$

$$\ln|y| + \int a(x)dx = 0$$

$$y = C_0 e^{\int a(x)dx} \leftarrow \text{одна независим.}$$

$y = C_0 \varphi(x)$  - общее решение однородного ур-а;  $\varphi(x)$ - частное решение

### Метод вариации параметров: ((о членах на ур-е))

Задана  $y = C(x) \cdot \varphi(x)$  в неоднородном ур-е:

$$C' \varphi + C \varphi' + aC \varphi = b$$

$$C' \varphi + \underbrace{C(\varphi' + a\varphi)}_{=0 \text{ (у-е реш-е однор. ур-а)}} = b$$

$$C'(x)\varphi(x) = b(x) \quad - \text{ур-е с разг. переменными}$$

C 3.37

$$x^2 y' = 5xy + 6, \quad y(1)=1$$

Рас-шее однор. ур-е:  $x^2 y' = 5xy$

$$\frac{dy}{y} = 5 \frac{dx}{x}$$

$$y = x^5 C_0 \quad | \quad y(x) = C_0(x) x^5$$

$$x^2(C'x^5 + C_0x^4) = 5x(Cx^5 + 6)$$

$$C' = \frac{6}{x^2} ; \quad C = -\frac{1}{x^6} + D$$

$$y = \left(-\frac{1}{x^6} + D\right)x^5 \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + Dx^5 - \text{perm-e}$$

$$y(1) = 1 ; \quad 1 = -1 + D \Rightarrow D = 2$$

$$y = -\frac{1}{x} + 2x^5$$

Nº 1

$$xy' - 2y = 2x^4$$

$$\text{Dy: } xy' - 2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

$$y = Cx^2$$

$$\text{Bn: } y = C(x) x^2$$

$$x[C'x^2 + 2Cx] - 2Cx^2 = 2x^4$$

$$C'x^3 = 2x^4$$

$$C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C$$

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + x^2 C$$

Nº 2

$$\text{bez Bn: } xy' - 2y = 2x^4 | \cdot x$$

$$x^2y' - 2xy = 2x^5$$

$$\frac{x^2y' - 2xy}{x^4} = 2x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C \Rightarrow y = x^4 + Cx^2$$

- Однородные уравнения т.е.: неизвестная входит в линейной форме в правл. (см. БП)

- Метод неизвестных  $y$  и  $x$  & способа:

$$(1+y^2) dx + (2xy - 1) dy = 0$$

$$(1+y^2) \frac{dx}{dy} = 1-2xy \quad -\text{линейное}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

$$\text{ОУ: } \frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$$

$$x = \frac{C}{1+y^2}$$

$$\text{БП: } x = \frac{C(y)}{1+y^2} \quad \text{Ответ: } C(y) = y + C, \quad x = \frac{y+C}{1+y^2}$$

## Уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad - \text{приводится к линейному!}$$

$$n=0 \rightarrow \text{ЛУ} \quad n \geq 0 \Rightarrow y=0 - \text{реш.}$$

$$n=1 \rightarrow \text{ЛУ} \quad n < 0 \Rightarrow y=0 - \text{не реш.}$$

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$$

$$\text{Замена: } z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$$

$$\text{Получим } (1-n)z' + a(x)z = b(x) \quad - \text{ЛУ}$$

№4

$$y' - y + 2xy^3 = 0 \quad | \quad y=0 - \text{реш.}$$

$$2x = \frac{z'}{z} + z$$

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$$

$$z = \frac{1}{y^2}, \quad z' = -\frac{2}{y^3}y'$$

$$\text{ОУ: } \frac{dz}{dx} + 2z = 0$$

$$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$$

$$\frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

$$\text{БП: } z = C(x) e^{-2x}$$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x$$

$$C'(x) = 4x e^{2x}$$

$$C(x) = \int 4x e^{2x} dx = 2x e^{2x} - e^{2x} + C$$

$$\frac{1}{y} = (2x e^{2x} - e^{2x} + C) \cdot e^{-2x}$$

Orter:

$$\begin{cases} y^2 = ((2x-1) + Ce^{-2x})^{-1} \\ y = 0 \end{cases}$$

## Уравнение Риккатти

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$$

Пусть  $y_0$  - решение

$$y = z + y_0 \quad z - новая неизв. оп-ия \Rightarrow y_0 - е. Бернгуар$$

№5

$$x^2 y' - 5xy + x^2 y^2 + 8 = 0$$

$$y_0 = \frac{k}{x}$$

$$-\frac{x^2 k}{x^2} - \frac{5xk}{x} + x^2 \frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$$

$$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$$

$$k=2, \quad k=y$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow \frac{x^2}{xy-2} = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \frac{2}{x}$$

Сделаем замену  $y = z + \frac{2}{x}$ :

$$x^2 \left( z' - \frac{2}{x^2} \right) - 5x \left( z + \frac{2}{x} \right) + x^2 \left( z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2} \right) + 8 = 0$$

$$x^2 z' - zx + x^2 z^2 = 0 \quad | : x$$

$$xz' - z + xz^2 = 0$$

$$\frac{z'x - z}{z^2} = -x \Rightarrow \left( \frac{x}{z} \right)' = x$$

## Уравнение 8 порядка гиперперенормированное

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad - P \text{ и } Q \text{ неяв.}$$

Пусть  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y)$  -  $F$  неяв. гипер. 8 Г С  $\mathbb{R}^2$

$$\exists F: \quad P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Реш. е:  $F(x,y) = C$  (т.е.  $F$  - неявные)

Пусть  $F$  - гипер. неяв. гипер. 8 Г:

$$\text{Если } \exists P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{array} \right. - \text{ должны быть равны!} \quad - \text{ необходимо учесть неявные переменные}$$

Условие 2б-го гласит о том, если одн.  $G$  односвязна.



№6

$$(1+3x^2 \ln y) dx + (3y^2 + \frac{x^3}{y}) dy = 0$$

$G = \{y > 0\}$  - односвязна

$$\exists F: \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

Можно угадать, но есть нет:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 1+3x^2 \ln y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \frac{x^3}{y} \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{no } x]{\text{интегрируем}} \\ \xrightarrow{\text{no } y} \end{array} \begin{array}{l} F = x + x^3 \ln y + C(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + C \\ F = x + x^3 \ln y + y^3 \end{array}$$

### Интегрируемый множитель

Если поделим на  $y$  сразу нет:

$$\mu P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y} \quad - \text{ надо решить систему - конечно, так никто не решает.}$$

№7

$$(y - 3x^2 y^3) dx - (x + x^3 y^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 9x^2 y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 - 3x^2 y^2 \quad - \text{ не равны}$$

$$y dx - x dy - 3x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy = 0 \quad |y=0 \text{ - pem, } x=0 \text{ - pem}$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = 3x^2 y dx - x^3 dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x^3 y) \Rightarrow \frac{x}{y} = x^3 y + C; \quad y=0, \quad x=0.$$

## Уравнения высшего порядка

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  - надо поменять порядок! каскад при  $y^{(n)} \neq 0$  примен!

### Методы понижения порядка

① Использование  $y$ :  $y' = z$ ,  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \rightarrow F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$

$$xy'' + xy''' + y' = 0, \quad y' = z; \quad y = \text{const} - \text{решение}$$

$$xz' + xz + z = 0 \quad | \times x \Rightarrow \text{условие}$$

$$x \frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0, \quad \frac{1}{z} = u$$

$$-xu' + x + u = 0 \quad | : x^2$$

$$\frac{u - xu'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{u}{x} = \ln x + C, \quad \frac{1}{zx} = \ln x + C$$

$$z = y' = \frac{1}{x(\ln x + C)} \quad y = \int \frac{dx}{x(\ln x + C)} = \ln |\ln x + C| + C_1 \quad \begin{cases} y = \ln |\ln x + C| + C_1 \\ y = \text{const} \end{cases}$$

② Уп-е для  $z$  в  $y$

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ;  $y$ -некая неизв. переменная

$y' = z(y)$  - некая пр-ва

$$y'' = (y'_x)'_x = (y'_x)_y \cdot y'_x = z \cdot z'_y$$

$$y''' = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})_y \cdot y'_x = (z \cdot z'_y)'_y \cdot y'_x = (z'^2 + z \cdot z''_{yy}) z = z \cdot z'^2 + z^2 z''_{yy}$$

### Пример

$$yy'' = 2y'^2 - 4y^2y'^3 \quad y' = z(y) \quad y'' = zz'$$

$$yzz' = 2z^2 - 4y^2z^3 \quad | : z$$

$$z = 0 - \text{решение}$$

$$y = C$$

$$yz' = 2z - 4y^2z^2 \quad | : z^2$$

$$\frac{y}{z^2} z' = \frac{2}{z} - 4y^2 \quad \frac{1}{z} = u \quad u' = -\frac{1}{z^2} z'$$

$$-yu' = 2u - 4y^2$$

$$\text{DIV: } 2u + yu' = 0 \quad \ln|u| = -2 \ln|y| + C$$

$$2u = -\frac{du}{dy} y \quad u = \frac{C}{y^2}$$

$$\frac{dy}{u} = -2 \frac{dy}{y}$$

$$B\cap: u = \frac{c(y)}{y^2}$$

$$\frac{-c'(y)y^2 + 2yC(y)}{y^3} = 2\frac{c(y)}{y^2} - 4y^2$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + C \Rightarrow u = \frac{y^3 + C}{y^2} \Rightarrow z = \frac{y^2}{y^4 + C}$$

$$y' = \frac{y^2}{y^4 + C}$$

$$\left( y^2 + \frac{C}{y^2} \right) dy = dx$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{C}{y} = x + C_1 \quad \text{Oder: } \begin{cases} \frac{y^3}{3} + \frac{C}{y} = x + C, \\ y = C \end{cases}$$

Задача Коши для ур-я n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

2 способа решения

1. Найти однор. ур-е  $C_1 \dots C_n$ , неравн. к ним, наимен. не-однор. ур-я  $n$  ур-ий с  $n$  нач. ул.
2. Аналогич. константн. нач. ул., но с заменой нач. ул. наимен. порядка

Пример

$$yy'' - y'^2 = y^4 \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -4$$

$$y \cdot z' - z^2 = y^4 \quad y' = z(y)$$

$$y \cdot \frac{u'}{2} - u = y^4 \quad u = z^2, \quad u' = 2zz'$$

$$Dy: y \frac{du}{dy} = 2u$$

$$B\cap: u = C(y) \cdot y^2$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2dy}{y}$$

$$u = y^2 C$$

$$\frac{y}{2} \cdot (C'(y) \cdot y^2 + 2yC(y)) - C(y) \cdot y^2 = y^4$$

$$C'(y) = 2y$$

$$C(y) = y^2 + C$$

$$u = y^4 + C y^2$$

$$z(2) = -4$$

$y' < 0$  &  $x=1$

$$16 = 16 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$y' = -y^2$$

$$z^2 = y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = -dx$$

$$y' = \pm y^2$$

$$\frac{1}{y} = x + C_1$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Def.: } \frac{1}{y} = x - \frac{1}{2}$$

③

yp-e, ognopognoe otne.  $y, y', \dots, y^{(n)}$

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  - ognopognomu uwaroveni otne.  $y, y', \dots, y^{(n)}$   
c kosp.-ramu  $f_i(x)$

$y=0$  - bceaga pem-e!

Пример 1

$$(sin x + 1)y^2 y' y''' - \sqrt{1-x^2} y^4 y''^2 + arctg x y y' y'' y''' = 0 \quad | \quad y=0 \text{ - pem-e}$$

$$\frac{y'}{y} = z \quad y' = zy \quad y'' = y(z' + y'z) = y(z^2 + z')$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

Plane negizatkolen  $\delta$  y-p-e - vosp-e na y

Пример 2

$$yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0 \quad y=0 \text{ - pem-e}$$

$$z = \frac{y'}{y} \quad y' = zy \quad y'' = y(z^2 + z')$$

$$y^2(z^2 + z') - z^2 y^2 + y^2 \sin x = 0$$

$$z^2 + z' - z^2 + \sin x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow z = \cos x + C = \frac{y'}{y}$$

$$\ln|y'| = \sin x + C_x + C_1$$

$$y = C_1 e^{\sin x + C_x}$$

Zagara kumm

$$2x y^2 y'' - 2xyy' + 2xy'^3 = y'y'' \quad y'(1) = y''(1) = -1$$

$y=0$  - psm-e, no ne psm-e Zagara kumm

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z')$$

$$2x y^3 (z^2 + z') - 2xy^3 z^2 + 2xy^3 z^3 = y^3 z - \text{gammal korpusmässig } y!$$

$$2x z^2 + 2xz' - 2xz^2 + 2xz^3 = z - \text{gammal korpusmässig } y!$$

$$2xz' + 2xz^3 = z \quad \left| \begin{array}{l} z=0 - \text{ne psm-e kumm: } z(1)=1 \\ :z^3 \end{array} \right.$$

$$2x \frac{z'}{z^3} + 2xz = \frac{1}{z^2} \quad u = \frac{1}{z^2} \quad u' = -2 \frac{z'}{z^3}$$

$$-xu' + 2x = u$$

$$(u + xu') = 2x$$

$$(xu)' = 2x$$

$$xu = x^2 + C \quad u(1) = 1$$

$$1 - 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u = x$$

$$z^2 = \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln |y| = 2\sqrt{x} + C$$

$$0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\ln |y| = 2\sqrt{x} - 2$$

$$|y| = e^{2\sqrt{x}-2}$$

$$y = -e^{2\sqrt{x}-2}, \quad y(1) = -1 \Rightarrow y < 0$$

#### ④ Однородная однородность

Пусть  $\exists k \in \mathbb{R}$ : при замене  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $k^n y$ ,  $y'$  на  $k^{n-1} y'$ , ...,  $y^{(n)}$  на  $k^{n-n} y^{(n)}$ , то бкд образное с  $y$  корпсмässig (yp-e ne izmenitsya)

Bvejem nobyno nezab. nep. t u op-mu  $z(t)$ :

$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0, \\ -e^t, & x < 0, \end{cases} \quad y = z e^{-xt} \quad (z \neq 0)$$

Togu yp-e ne byhet cogepmässig abvo t. (n.z.)

Пример (7.65 а, д)

$$x^2 y'' + 2x^2 y' + 2xy - 2y = 0 \quad y(1) = -1 \quad y'(1) = 1$$

$$x \rightarrow \lambda x \quad y \rightarrow \lambda^k y \quad y' \rightarrow \lambda^{k-1} y' \quad y'' \rightarrow \lambda^{k-2} y''$$

$$\lambda^2 x^2 \lambda^{k-2} y'' + 2\lambda^2 x^2 \lambda^{k-1} y' + 2\lambda x \lambda^k y - 2\lambda^k y = 0$$

$$2+k-2 = 2+2k-1 = 1+2k = k$$

$$k = 2k+1 = 2k+1 = k$$

$$k = -1$$

$$x = e^t, \quad y = z e^{-t}$$

$$y, \quad y_x = \frac{y'}{x_t} = \frac{\text{lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x)}{x} - \frac{y(x_0)}{x_0}}{e^t - e^{t_0}} = e^{-2t} (z' - z)$$

$$y'' = \frac{(y_x)'_t}{x_t} = \frac{(z'' - z') e^{-2t} - 2(z' - z) e^{-2t}}{e^t} = e^{-3t} \cdot (z'' - z' - 2z' + 2z) = e^{-3t} (z'' - 3z' + 2z)$$

$$e^{2t} \cdot e^{-3t} \cdot (z'' - 3z' + 2z) + 2e^{2t} \cdot z \cdot e^{-t} \cdot e^{-2t} (z' - z) + 2e^{2t} \cdot z^2 \cdot e^{-2t} - 2ze^{-t} = 0$$

$$z'' - 3z' + 2z + 2z^2 - 2z^2 + 2z^2 - 2z = 0$$

$$z'' + z' (2z - 3) = 0 \quad x=1, \quad y=-1, \quad y'=1 \Rightarrow t=0, \quad z=-1, \quad z'=0$$

$z = -1$  — рим-е загорн. Коин! У ню т. о загорн. Коин оно егунсиверно.

Теорема о сунгесівованні «егунсиверном» рим-е загорн. Коин

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

$f$  непр. дифгрп. в окр-ини  $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Тогда рим-е з. Коин  $(*)$  + уе- $\rightarrow$   $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

сунг-ел в егунсиверно на кен-ам  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$n=1$ . Теор. сунг-ел в ег-сан:

3. Коин  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ . Еан қп-ас  $f(x, y)$  дифгрп. в  $G > (x_0, y_0)$ , то

$\exists \delta > 0$ : на  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  рим-е з. Коин сунг-ел в ег.



## Примеры

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

$F(x, y) = y$  непр. зависим. в  $\mathbb{R}^2$

$$y = Ce^x, \quad y(0) = 1, \quad C = 1$$

$$y = e^x + C$$

Безже есть реш-е

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

$y=0$  - реш-е, но  $y^{2/3}$  - неяв-е непр. зависим. ( $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$  не определено)

Казалось, это реш-е единственное, но нет.

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \quad y^{1/3} = x + C \quad y = (x + C)^3 \quad y(0) = 0 \Rightarrow y = x^3 - \text{реш-е}$$

Для  $f \in C_G^1$  т. о. каск. неяв. не подходит

## Особые решения



Реш-е вида  $y = x^3$ , оп. на всей прямой, и это

Реш-е  $y \mapsto F(x, y, y') = 0$  наз. особым, если реш-е касается в точке прохождения кривой, расположенной в зоне замкнутой кривой и не содержит ни одной очевидной доп-и точки.

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad y(0) = 0$$

Если  $y_0 \neq 0$ , то реш-е  $y = x^3$  единственно в зоне доп-и т., но не гл-е eq., если это точка. Но если не-т.

## Краевые упр-я

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

$$y(-4) = -1, \quad y(2) = 1$$

$$y = (x + C)^3 : \quad y = (-x + 3)^3 \text{ при } y(-4) = -1$$

$$y = (x + 1)^3 \text{ при } y(2) = 1$$

$$y = \begin{cases} (x-1)^3, & x \geq 1 \\ 0, & x \in (-3, 1) \\ (x+3)^3, & x \leq -3 \end{cases}$$

$y_p \rightarrow$  1 порядка, не зависим. относ.  $y'$

$y = f(x, y')$  - зависим. относ.  $y$

Метод свободного параметра:  $y' = p$

$y = f(x, p)$

$$dy = f'_x dx + f'_p dp; \quad dy = pdx$$

$$f'_p dp = (p - f'_x) dx$$

$$\frac{dp}{dx} = F(x, p) \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dp} = G(x, p) \quad - \text{для } 1 \text{ независим. относ. групп.}$$

1. Нашему реш-ю б. виге  $x = x(p, C)$

$$y = f(x, p) = y(p, C)$$

Генер. реш-ю, забв. от  $C$  б. непр. виге.

2. Нашему реш-ю б. виге  $p = p(x, C)$

$$y = f(x, p) = y(x, C)$$

Генер. реш-ю, забв. от  $C$  б. збнн виге

Пример 1

$$y = 2xy' - 4y'^3 \quad - \text{не зависим. относ. } y'$$

$$p = y'$$

$$y = 2xp - 4p^3$$

$$dy = 2p dx + 2x dp - 12p^2 dp = pdx$$

$$p dx = (12p^2 - 2x) dp$$

$$p \frac{dx}{dp} = 12p^2 - 2x \quad - \text{для}$$

$$p=0 \Rightarrow y=0 - \text{реш-ю}$$

Умнож.  $x = x(p)$ ,  $p = \text{const} - \text{не н.з.к.}$

$$\text{Одн.}: \quad p \frac{dx}{dp} = -2x$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p}$$

$$\text{Буд.} \quad x = \frac{C(p)}{p^2}$$

$$\ln|x| = -2 \ln|p| + C$$

$$p \frac{\frac{C'(p)p^2 - 2pC(p)}{p^4}}{p^4} = 12p^2 - 2 \frac{C(p)}{p^2}$$

$$x = \frac{C}{p^2}$$

$$\frac{C'(p)}{p} = 12p^2 \Rightarrow C(p) = 3p^4 + C$$

$$x = \frac{3p^4 + C}{p^2} = 3p^2 + \frac{C}{p^2}$$

$$y = 6p^3 + 2\frac{C}{p} - 4p^3 = 2p^3 + 2\frac{C}{p} \quad \text{Dabei: } x = 3p^2 + \frac{C}{p^2}, \quad y = 2p^3 + 2\frac{C}{p} \text{ und } y = 0.$$

Пример 2

$$u(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2 \quad y' = p$$

$$u(xp - 2y) = 4x^2 - p^2$$

$$y = \frac{xp}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{8}$$

$$dy = \frac{pdx}{2} + \frac{xdp}{2} - xdx + \frac{pdp}{y} = pdx$$

$$\frac{p+2x}{2} dx = \frac{2x+p}{4} dp$$

$$1. \quad p = -2x \Rightarrow y = -x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = -x^2$$

$$2. \quad 2dx = dp$$

$$p = 2x + C$$

$$y = \frac{2x^2 + Cx}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{(2x+C)^2}{8}$$

$$y = \frac{x^2 + Cx}{2} + \frac{4x^2 + 4xC + C^2}{8}$$

$$\text{Dabei: } \begin{cases} y = x^2 + Cx + \frac{C^2}{8} \\ y = -x^2 \end{cases}$$

3. А теперь мы сделали так (здесь в группе):

$$p = p(x, C)$$

$$y' = p(x, C) - \text{некоторое}$$

$$\text{В примере } p = -2x \Rightarrow y = -x^2 + C$$

Если некоторое \$b\$ \$y'\$-е, например: \$C=0\$. Где для \$x=0\$ это не то

так просто, потому, что \$b\$ является константой \$p = p(x, C)\$ - некоторое нек. \$y'\$,

т. е. производительное \$p(x, C)\$ нужно некоторое \$b\$ \$y'\$-е и выбрать \$p(x, C)

Но: Так будем \$b\$ можно. Такое некоторое.

Испр. группе.

$$x^2 + Cx + \frac{C^2}{8} = -x^2 \Rightarrow \left(x + \frac{C}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow 2 \text{ различных корней } 0 \text{ и } x = -\frac{C}{4}$$

\$C\$-модель \$\Rightarrow x\_{\text{какие}}\$ - модели \$\Rightarrow y = -x^2\$ - однозначная.



Проверить на  $\rho$ -группа однородных решений?

$$F(x, y, y') = 0, \quad F - \text{непр. группа.}$$

$\exists \rho$  - гомогенизирующая кривая:

$$\begin{cases} F(x, y, \rho) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \rho}(x, y, \rho) = 0 \end{cases} \text{ иначе } \rho \Rightarrow \Phi(x, y) = 0$$

Если решение  $y$  для  $F(x, y, y')$  является однородным, то оно будет на  $\rho$ -груп. кривой.

Несовпадение на  $\rho$ -груп. кривой - неодн. реш. есть однородное реш.

Две равные  $\rho$ -группы:

$$\begin{cases} 4(x\rho - 2y) = 4x^2 - \rho^2 \\ 4x = -2\rho \end{cases}$$

$$-8x^2 - 8y = 4x^2 - 4x^2$$

$y = -x^2$  -  $\rho$ -груп. кривая с однородными решениями  $\Rightarrow$  группа однородных решений нет.

Всіх диференційовані кривій зб-ся рівнення, що не є однією:

$$y' = y^2 \quad \text{g. кр. } y=0 - \text{ рівн., що не є однією}$$

Всіх г. кр. не зб-ся рівн-єм:

$$(1+y)^2 = y'(y-x)^2 \quad \text{g. кр.:} \quad \begin{cases} (1+p)^2 = p(y-x)^2 \\ 2(1+p) = (y-x)^2 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} p=-1 \Rightarrow y=x - \text{не рівн.} \\ p=1 \Rightarrow y-x = \pm 2 - \text{рівн.} \end{array}$$
$$\begin{cases} p=1 \\ p=-1 \end{cases}$$

## Теоретичні задачі

Teorema cyuz. u eквівалентності рівн. з. Kожна згл. ф-їв  $n$ -їхн неперевд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Exist F непр. функц. в кр.  $G \subset R^{n+1}$ ,  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$

$\exists \delta > 0$ : рівн. з. Kожна cyuz. u ек. na  $[x_0-\delta; x_0+\delta]$

No OP-230

Монотонні згл-ї з-за рівн. з. відповідає в кр.  $(x_0, y_0)$ :

a)  $y' = x + y^2$

Нер.  $\Rightarrow$  рівн. з. відповідає в кр.  $y(x_0) = y_0$ .

b)  $y'' = x + y^2$

Нер.  $\Rightarrow$  рівн. з. відповідає в кр.  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ .

c)  $y''' = x + y^2$

Да. Монотонні відповідає в кр.  $y''(x_0)$

No OP-231

Ex. cyuz. рівн-ї  $y^{(n)} = x + y^2$ , якому єн.  $y(0) = 1, y'(0) = 2, n=1, 2, 3$

$$n=1: \quad y' = x + y^2 - 0 \text{ пем-ин } (2 \neq 0+1)$$

$$n=2: \quad y'' = x + y^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2 - 1 \text{ пем-е (пем-е з. Кашн)}$$

$$n=3: \quad y''' = x + y^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2 - \infty \text{ ишо (маде жар. } y''(0) \text{ жет пем-е сбою з. Кашн)}$$

№ 9P-233

При хашн  $n$  yp-e  $y^{(n)} = f(x, y)$ , ( $f, f'$  непр.) yp-e күн-сегиң сабак пем.  $y_1 = x, y_2 = x+x^2$

$$\text{з. Кашн } y^{(n)} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

Мынан  $n$ , нын  $x$ -дән  $y_1^{(n)}(0)$  и  $y_2^{(n)}(0)$  сиңуелес - пәннен пем. з. Кашн

$$y_1' = 1, \quad y_2' = 1+4x^3$$

$$y_1'' = 0, \quad y_2'' = 12x^2 \quad y_1'''(0) = 0, \quad y_2'''(0) = 0$$

$1 \leq n \leq 4 \Rightarrow 2$  пәннен пем. Оғаның з. Кашн  
(кебезжыныш)

$$y_1'''(0) = 0, \quad y_2''' = 24x \quad y_1''''(0) = 0, \quad y_2''''(0) = 0$$

$n=5$  - оғе 9P-ин 2б-са пем. yp-e  $y^{(5)} = 0$   
(Булдағы 8 үшін ж. Кашн 2 пем. оғаның з. Кашн?)

$$y_1^{(4)} = 0, \quad y_2^{(4)} = 24 \quad y_1^{(4)}(0) \neq y_2^{(4)}(0)$$

Мис. оғындындык yp-e  $n=20$  пәннен с мән. көзөр.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n = 0 \quad a_i \in \mathbb{R} \quad - монең моннаның пәннен, т.к. неі аларда  $x$ ,  $a$  монең күнде:$$

Харашылыштырылған yp-e:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda' + a_n = 0$$

Мис. пем-ини yp-e өзг. ин. нын-бо пәннен  $n$ :

$y_1(x), \dots, y_n(x)$  - деңгээ (9CPD -тың ж. мәннен пем-ин)

$$\text{ОДДY} \quad y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Как наимен 9CP?

① Беe  $\lambda_i$  генеb-и пәннен

$$\text{9CPD: } e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

$$\text{Пример: } y'' - 6y' + 8y = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

② 1-й генер. реш. для ур. характеристики

Если корни к реш. л. QCP

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \text{ реш.}$$

Пример 1.  $y''' - y'' - y' + y = 0$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ кратн. 2}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

Пример 2.  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda - 2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ кратн. 3}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$$

③ Част. кратн. корень  $\lambda = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$

$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  - сопряженный корень

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

Возьмем гипотезу для  $\theta$  в этом случае непротиворечивую:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ - генер. реш. 2к реш.}$$

Пример 1: Упр. - задача  $y'' + \omega^2 y = 0, \omega > 0$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \quad \lambda = \pm \omega i, \quad \alpha = 0, \beta = \omega$$

$$\text{QCP: } e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}$$

В генер. решении:  $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$  - гипотеза верна!

Пример 2:  $\lambda = \alpha + \beta i$  - корень кр. к.

В QCP 2к решений:  $e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$

$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

$$\text{Пример 3: } y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$$

$$\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$$

$$(\lambda^2 + 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 x \sin 3x$$

**Внимание** Камеруба консисти пабно наредку употребени!!! (Увере о за засоры)

$$\text{Group 4: } y'' + 6y' + 10y = 0$$

$$x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 - i, \quad x_2 = -3 + i$$

$$y = C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x$$

Бесчинное неизвестное  $y_0^2$  с нос. козырьком

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

$\text{ОРИУ} = \text{ОРОУ} + \text{ЧРИУ}$

Pythagoras f(x) =  $P_m(x) e^{mx}$  - kategorienorientiert  $P_m$  - unbestimmtes co. m

## Как можно заинтегрировать?

① М не заб-ся корнем харки. уп-я

УРНУ можна бути  $Q_m(x) e^{mx}$ ,  $Q_m(x)$  - невідома ст.м с клоп. коєф.

Пример 2:  $y'' - 4y' + 4y = 32x e^{-2x}$        $m=1$ ,     $m=-2$  — не корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ kp. 2}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - 0.01 y$$

$$1^{\text{P NY}}: \quad y = (Ax + B)e^{-2x}$$

$$y''' = -A e^{-2x} = 2 A e^{-2x} + y(Ax + B) e^{-2x} = e^{-2x}(4Ax - 4A + 4B)$$

$$\text{Row } \hat{c} = \text{Row } b_1: (4A_x - 4A + 4\beta) = (-8A_x + 4A - 8\beta) + (4A_x + 4\beta) = 33x$$

$$16A = 33 - 3 \quad A = 2 \quad \therefore 16 + 16B = 33 - 3 \quad \therefore B = 1$$

$$\text{ЧРНУ: } y = (2x+1)e^{-2x} \quad \text{ОРИНУ: } y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + (2x+1)e^{-2x}$$

② Есесін  $P_m(x) e^{dx} \cos px$

есесін  $P_m(x) e^{dx} \sin px$

есесін деңгээлдең көрсеткіші.

$m = dx + pi$  не ғал - да көрсеткіш тәртіп. үр.

ҮРНҮ:  $y = Q_m^{(1)}(x) e^{dx} \cos px + Q_m^{(2)}(x) e^{dx} \sin px$

$Q_1^{(1)}, Q_2^{(2)}$  - моногендерінің  $\leq m$

Пример 1:  $y'' - y' - 2y = (2x+1) \cos 3x \quad m=1, \mu=3i$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \text{ДПОҮ} \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

ҮРНҮ:  $y = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$

$$y' = A \cos 3x - 3(Ax + B) \sin 3x + C \sin 3x + 3(Cx + D) \cos 3x = \\ = (3(Cx + D) + A) \cos 3x + (-3Ax - 3B + C) \sin 3x$$

$$y'' = 3(C \cos 3x - 3(Cx + D) \sin 3x) - 3(-3Ax - 3B + C) \sin 3x + 3(-3Ax - 3B + C) \cos 3x = \\ = (-9Ax - 9B + 6C) \cos 3x + (-9Cx - 9D - 6A) \sin 3x \\ (-9Ax - 9B + 6C) \cos 3x + (-9Cx - 9D - 6A) \sin 3x - (3Cx + 3D + A) \cos 3x + \\ + (3Ax - 3B + C) \sin 3x - 2(Ax + B) \cos 3x - 2(Cx + D) \sin 3x = (2x+1) \cos 3x$$

③  $m$ -жоған жоғары. үр-дә негизгілік

(рекурентті негизгілік)

ҮРНҮ:  $y = x^k Q_m(x) e^{mx}$

$m+1$  жоғары.

Моногендерінің  $m+k$

Деңгээлдең моноген. жоғары:  $m+k+1$  үр-дә

Негизгілік, тиң салынған  $K$  жоғар. абсолюттіккін отындауда 0.

Бүгінде негизгілік  $m+1$  үр-дә с  $m+1$  моноген. - деңгээлдең оғындарына.

Пример

$y'' - y' - 2y = -9x e^{-x} \quad m=-1$  - жоған моноген. үр-дә  $m+1$   $m=1$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

ДПОҮ:  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

ҮРНҮ:  $y = x(Ax + B) e^{-x} = (Ax^2 + Bx) e^{-x}$

$$y' = e^{-x}(-Ax^2 - Bx + 2Ax + B)$$

$$\begin{aligned} y'' &= -e^{-x}(-Ax^2 + (2A-B)x + B) + e^{-x}(-2Ax + 2A - B) = \\ &= e^{-x}(Ax^2 + (B-4A)x + 2A - 2B) \end{aligned}$$

$$Ax^2 + (B-4A)x + 2A - 2B$$

*Старший коэффициент ненулевой*

$$Ax^2 + (B-2A)x - B = -9x$$

$$-2Ax^2 - 2Bx$$

$$-6Ax + 2A - 3B = -9x$$

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = 1$$

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)e^{-x}$$

Общий:  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)e^{-x}$

(4) Если в правой части есть ходуиморонена:  $P_{m_1}(x)e^{m_1 x} + P_{m_2}(x)e^{m_2 x}$ , то  
также наимен УРНЧ есть комбинация правых частей в общем виде.

Пример

$$y^{(4)} + y''' - 2y'' = 3e^x + 16e^{2x}, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 0, \quad m_4 = 0$$

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, 1, \quad \lambda = 0 \text{ кратн. 2}$$

ОПОРЫ:  $y = C_1 \cdot 1 + C_2 x \cdot 1 + C_3 e^x + C_4 e^{2x}$

Решаем для  $3e^x$ :  $m = 1, k = 1$

$$y = x \cdot A \cdot e^x \quad y' = e^x(Ax + A) \quad y'' = e^x(Ax + 2A) \quad y''' = Ae^x(x + 3) \quad y^{(4)} = Ae^x(x + 4)$$

$$Ae^x(x + 4 + x + 3 - 2x - 4) = 3e^x \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y = xe^x$$

Решаем для  $16e^{2x}$ :  $m = 2, k = 0$

$$y = B e^{2x} \quad y' = 4Be^{2x} \quad y'' = 8Be^{2x} \quad y^{(4)} = 16Be^{2x}$$

$$16B + 8B - 2 \cdot 4B = 16 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow y = e^{2x}$$

Общий:  $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-2x} + xe^x + e^{2x}$

(5) Если правая часть имеет вид  $P_n(x)e^{ax} \cos bx$  или  $P_n(x)e^{ax} \sin bx$ , то имеется  
комбинация из двух выражений, имеющим  $\mu = a + bi$  - корень ур-я кратн.  $k$ , то  
УРНЧ  $y = x^k (Q_m^{(1)}(x)e^{ax} \cos bx + Q_m^{(2)}(x)e^{ax} \sin bx)$

$$y''' - 16y' = 48x^2 + 2 \cos^2 2x$$

$$\lambda^3 - 16\lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = -4$$

$$\text{OPOY: } y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-4x}$$

График разб.  $\underbrace{48x^2 + 1}_{m=0} + \underbrace{\cos 4x}_{m=\pm 4i}$

Нр. разб.:  $48x^2 + 1$ ;  $m=0$ ,  $m=2$ ,  $K=1$

$$\text{УРНУ: } y = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad y'' = 6Ax + 2B \quad y''' = 6A$$

$$6A - 48Ax^2 - 32Bx - 16C = 48x^2 + 1$$

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{7}{16}$$

$$y = x\left(-x^2 - \frac{7}{16}\right)$$

Нр. разб.:  $\cos 4x$ ;  $m=\pm 4i$   $K=0$   $m=0$

$$\text{УРНУ: } y = A \cos 4x + B \sin 4x$$

Нр. 2. зінан, правд. Тому нерівнос кореня  $\Rightarrow$  УРНУ може містити 8 буде нерівнос кореня. Тоді УРНУ є вигляду  $y = B \sin 4x$

$$y' = 4B \cos 4x \quad y'' = -16B \cos 4x$$

$$-128B \cos 4x = \cos 4x \quad B = -\frac{1}{128}$$

$$\text{Общ: } y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-4x} - x^3 - \frac{7}{16}x - \frac{\sin 4x}{128}$$

№ 43 г/з - замість умов виїсла!

$$y'' - ay' + 2y = e^x \cos x$$

$$\text{Характ. ур-к: } \lambda^2 - a\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

$$\text{Если } |a| > 2: \quad \lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

$$\text{OPOY } y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\text{Если } |a| = 2: \quad \lambda = \frac{a}{2} \text{ кр. 2}$$

$$\text{OPOY } y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$

$$\text{Если } |a| < 2: \quad \lambda_{1,2} = \frac{a \pm i\sqrt{4-a^2}}{2}$$

$$\text{OPOY } y = e^{\lambda_1 x} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x \right)$$

Нр. разб.  $e^x \cos x$   $m = 1 \pm i$

$$\mu - \text{кореню квад. ур-к: } (1+i)^2 - a(1+i) + 2 = 0$$

$$a=2$$

Если  $a \neq 2$ , то решением не будет  $K=0, m=0$

УРНУ  $y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$

Если  $a=2$ , есть решение  $K=1, m=0$

УРНУ  $y = x(Ae^x \cos x + Be^x \sin x)$

- Две решения 3-го порядка называются однократными, затем они-же  $C_1, \dots C_n$

Пример:

$$y'' + 4y = \sin 2x \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

$$\text{ОПОY} \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$\text{Нп. -раствор } \sin 2x \quad \mu = \pm 2i \quad K=1 \quad m=0$$

$$\text{УРНУ} \quad y = x(A \sin x + B \cos x)$$

Нп. -раствор не решает, поэтому нужно искать коррекцию  $\Rightarrow$  УРНУ имеет вид вида  $y = x \cdot \text{оп-раств}$

$$y = xB \cos 2x \quad y'' = -4B (\sin 2x + x \cos 2x)$$

$$y' = B \cos 2x + 2Bx \sin 2x$$

$$\text{ОПОY: } y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$$

А теперь загадаю Кому:

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 2C_2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{8}$$

$$\text{Ответ: } y = \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$$

## Продолжительная правильная часть

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$a_i(x), f(x)$  непр. на некотором промежутке

- Мн-ло реш-ия ОY:

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n, \quad y_1, \dots, y_n - \text{PCP}$$

• Менов барынчын наименование:

$$\text{OPHY} \text{ ишкемдік бүлge } y = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x)$$

$C_i'(x)$  күнгизесіндең аны-ми

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \text{определение Вронского} \quad \text{PCP} \quad \Delta \neq 0$$

Пример 2

$$y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\text{OPDY: } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$\text{OPHY: } y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{2(e^x + e^{-x})} \quad C_2'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2(e^x + e^{-x})}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} dx = \left. \frac{1}{2} \int e^{-x} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \right|_{e^x=t} = \frac{1}{2} \int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \frac{t}{2} - \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{t}{2} - \arctg t + C_1 = \frac{e^{-x}}{2} - \arctg e^{-x} + C_1$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + e^{-x}} dx = -\frac{1}{2} \int e^x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} dt = \dots = -\frac{e^x}{2} + \arctg e^x + C_2$$

$$\text{Отбет: } y = \left( \frac{e^{-x}}{2} - \arctg e^{-x} + C_1 \right) e^x + \left( -\frac{e^x}{2} + \arctg e^x + C_2 \right) e^{-x} = \\ = e^{-x} \arctg e^x - e^x \arctg e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

## Уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = 0$$

(на  $(0, +\infty)$  нем на  $(-\infty, 0)$ )

• Рекомендуется квад. замена незав. неравенством:

$$x = e^t \quad (x > 0) \quad \text{нем} \quad x = -e^t \quad (x < 0)$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t} y'_t \quad y''_{xx} = \frac{(y'_{xt})'}{x'_t} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

Реше нее  $y_p$ -е производное  $\propto$   $y_p$ -и с ненулевым коэффициентом.

• Дана диф. уравнение  $(ax+b)^n$ . функция  $x^n$  - заменим ее:  $ax+b = e^t$

### Пример 1

$$x^2 y'' - 2y = -2x^3 \quad (x > 0, x \text{ или } t \text{ можно менять ввиду нелинейности})$$

$$x = e^t \quad y'' = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

$$y'' - y'_t - 2y = -2e^{3t}$$

$$X.y.: \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

$$\text{ОПОY: } y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

$$\text{Реш. общ: } -2e^{3t} \quad m=3 \quad k=0 \quad n=0$$

$$\text{УРНУ: } y = A e^{3t}$$

$$3A - 3A - 2A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} e^{3t}$$

$$\text{ОПНУ: } y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2} e^{3t} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{2} x^3$$

### Пример 2

$$x^2 y'' + xy' + y = \cos(\ln x)$$

$$x = e^t \quad y'_x = e^{-t} y'_t \quad y''_{xx} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

$$y'' - y'_t + y'_t + y = \cos t$$

$$y'' + y = \cos t$$

$$X.y.: \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\text{ОПОY: } y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$\text{Реш. общ: } \cos t \quad m = \pm i \quad k = L \quad n = 0$$

$$\text{УРНУ: } y = t (A \cos t + B \sin t)$$

$$y = B t \sin t \quad y' = B + B \cos t + B t \sin t \quad y'' = 2B \cos t - B t \sin t$$

$$y'' + y = 2B \cos t = \cos t \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\text{ОПНУ: } y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + \frac{\ln x}{2} \sin \ln x$$

## Пример 1 (вариант)

Составим ЛОУ (нас. касир. с нач. прогресс.), используя правило ред-2:

$$\textcircled{1} \quad y_1 = x^2 e^x$$

$$\lambda = 1 \text{ кр. 3}$$

$$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$\textcircled{2} \quad y_1 = x e^x, \quad y_2 = e^{-x}$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = -1 \\ \text{кр. 2} & \text{кр. 2} \end{array}$$

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = \lambda^2 - 1$$

$$y'' - y''' - y' + y = 0$$

$$\textcircled{3} \quad y_1 = x, \quad y_2 = \sin x$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & \lambda_{2,3} = \pm i \\ \text{кр. 2} & \end{array}$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 1) = \lambda^4 + \lambda^2$$

$$y^{(4)} + y'' = 0$$

## Линейные однородные системы с постоянными коэф.

Несколько оп-ий  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , прям. однород. формул

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad \dot{\bar{x}} = Ax$$

Реш-я однородн. ур-й

$$\bar{x} = C_1 \bar{x}^{(1)}(t) + C_2 \bar{x}^{(2)}(t) + \dots + C_n \bar{x}^{(n)}(t)$$

$$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)}(t) - \text{вс-е}$$

Когда несм. вспом. знац.  $A \Rightarrow$  характерист. ур-е:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

- Если  $\lambda \in \mathbb{R}$  - корень характерист. ур-я, то

$$\bar{x} = e^{\lambda t} \bar{h}, \quad \bar{h} - \text{вспом. вектор, част. генер. } \lambda.$$

значение

Если все  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  и различны  $\Rightarrow$  однор. реш-

$$\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{h}_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \bar{h}_n \quad (*)$$

- Пусть  $\lambda$  - корень  $x_i y_i, \lambda \in \mathbb{R}$

$$E_\lambda - \text{вспом. подпространство, } E_\lambda = \{ \bar{x} : A\bar{x} = \lambda \bar{x} \}$$

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq \text{к-т корней } \lambda$$

Преобр-е  $A$  наз.-ся диагонализируемым, если  $\exists$  базис, в к-м  $A$  им. диагональной формы:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n - \text{вспом. базис}$$

Диагональные ур-я: если все корни характерист. ур-я  $\in \mathbb{R}$  и различны,

то преобр-е диагонализируемо.

Необходимое и достаточное условие: все корни характерист. ур-я делятся на

$$\forall \lambda_i \rightarrow \dim E_{\lambda_i} = \text{к-т } \lambda_i \quad (\text{аналогична кратность -?})$$

Если A диагонализируемо, то (\*) имеет одинаковую характеристическую

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z \\ \dot{y} = 2x + y + 2z \\ \dot{z} = 2x + 2y + z \end{cases}$$

Состав. знач.:  $\lambda_1 = -1$  кр. 2,  $\lambda_2 = 5$  кр. 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$ :

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad rg = 1 \Rightarrow \dim E_{-1} = 2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2$$

$\lambda = 5$ :

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{h}_3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- В общем случае матрица приводится к Хордановой форме.

Хорданова матрица  $K \times K$ :  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_p & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix}$

При  $n=3$ :  $K=1$ :  $(\lambda)$      $K=2$ :  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$      $K=3$ :  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Хорданова форма:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_p \end{pmatrix}$$

В результирующей строке могут быть равны 0, могут быть одинаковы 0.

На конечных строках присутствуют ненулевые коэффициенты b-p, соотв. генерируя 0.

Размерность  $E_{\lambda}$  - количество линейно независимых векторов, соотв. генерируя 0.

Крайнее кратное 0 - сумма размерностей линейно независимых векторов, соотв. генерируя 0.

Диагонализуемость  $\Leftrightarrow$  все кратные кн. равны 1.

Кратные кн. генерируют линейно независимые векторы.

Несколько  $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k$  - линейно независимые векторы, в которых каждая из них является линейной комбинацией остальных.

$$A\bar{h}_1 = \lambda_1 \bar{h}_1 \quad (A - \lambda_1 E)\bar{h}_1 = 0$$

$$A\bar{h}_2 = \bar{h}_1 + \lambda_2 \bar{h}_2 \quad (A - \lambda_2 E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A\bar{h}_k = \bar{h}_{k-1} + \lambda_k \bar{h}_k \quad (A - \lambda_k E)\bar{h}_k = \bar{h}_{k-1}$$

И так можно выразить все ненулевые векторы в виде линейных комбинаций.

$\bar{h}_1$  - собственное вектора,  $\bar{h}_2, \dots, \bar{h}_k$  - приводимые.

\*органическая химия

Линейная комбинация вида химическая формула генерирует линейно независимые векторы.

$$e^{\lambda_1 t} \bar{h}_1, \quad e^{\lambda_2 t} (\bar{h}_2 + t \bar{h}_1), \quad e^{\lambda_3 t} (\bar{h}_3 + t \bar{h}_2 + \frac{t^2}{2!} \bar{h}_1), \dots, \quad e^{\lambda_k t} (\bar{h}_k + t \bar{h}_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \bar{h}_1)$$

• Все линейные комбинации при  $t=0$ :

I)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  - различные

$$\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{h}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \bar{h}_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \bar{h}_3 \quad (*)$$

II)  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

a)  $\dim E_{\lambda_1} = 2$

Comp. (\*)

5) Воспользуемся органической химикой

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$$

$$(A - \lambda_1 E)\bar{h}_1 = 0$$

$$(A - \lambda_1 E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$$

$$(A - \lambda_1 E)\bar{h}_3 = 0$$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{h}_1 + C_2 e^{\lambda_1 t} (\bar{h}_2 + t \bar{h}_1) + C_3 e^{\lambda_3 t} \bar{h}_3$$

### Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2z \\ \dot{y} = 3x + 5y + 3z \\ \dot{z} = -x - 2y - z \end{cases} \quad \lambda_1 = 1 \text{ кр. 2} \\ \lambda_2 = 2 \text{ кр. 1}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dim E_1 = 1 \Rightarrow \text{для } \bar{h}_1 \text{ имеем базис}$$

$$(A - \lambda_1 E) \bar{h}_1 = \bar{h}_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & | & 2 \\ 3 & 4 & 3 & | & -3 \\ -1 & -2 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Когда } x_3 = 0 \text{ получаем } x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2}. \\ \text{Возьмем } x_3 = -1 \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

При соответствующем базисе — реш. неоднородной сист. Это делает метод на пропорциональности!

$\lambda = 2$ :

$$(A - 2E) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \bar{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

III

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

a)  $\dim E_2 = 3 \quad \bar{x} = e^{\lambda t} (C_1 \bar{h}_1 + C_2 \bar{h}_2 + C_3 \bar{h}_3) = e^{\lambda t} \bar{C}$

d)  $\dim E_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \bar{x} = C_1 e^{\lambda t} \bar{h}_1 + C_2 e^{\lambda t} (\bar{h}_2 + t \bar{h}_3) + C_3 e^{\lambda t} \bar{h}_3$$

Когда приходим к  $\bar{h}_1$ ? Не к произвольному!

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z \end{cases} \quad \lambda_1 = -3 \text{ кратн.}$$

$$(A + 3E) = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$

$$rg = 1 \Rightarrow \dim E_1 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 6x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{matrix} \quad f_1, f_2 - \text{состр.} \\ \text{но нет общего, к линейн} \\ \text{применимого } \bar{h}_1.$$

$\bar{h}_1 = \alpha \bar{f}_1 + \beta \bar{f}_2$  - некий вектор, к которому применим

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 6\alpha - 3\beta \end{pmatrix} \quad (A + 3E) \bar{h}_1 = \bar{h}_1 \quad \text{- это задача симметрии для вектора}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & -2 & \alpha \\ 18 & -9 & -3 & \beta \\ 18 & -9 & -3 & 6\alpha - 3\beta \end{array} \right) \quad \begin{cases} \beta = 6\alpha - 3\beta \\ 2\beta = 3\alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow 2\beta = 3\alpha$$

$$rg \text{ подпространства} = rg \text{ основания} = 1, \quad \text{Можно выбрать } \beta = 3, \alpha = 2 \\ (\text{имеется единственное})$$

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \dim E_3 = 2, \text{ но нет общего вектора } \bar{h}_1, \text{ к которому} \\ \text{применим приведенный вектор, однозначно.}$$

$$\bar{h}_2 \text{ ищется из } (A + 3E) \bar{h}_2 = \bar{h}_1,$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & -2 & 2 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \end{array} \right) \quad \text{Найдено } 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ \text{Базисом } \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Второй вектор  $\bar{h}_3$  можно брать модифицированный вектор, имеющий ненулев. с  $\bar{h}_1$ , напр.  $\bar{f}_1$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$Q) \dim E_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \end{matrix}$$

$$\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{h}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} (\bar{h}_2 + t \bar{h}_1) + C_3 e^{\lambda_3 t} (\bar{h}_3 + \bar{h}_2 t + \bar{h}_1 \frac{t^2}{2})$$

$$(A - \lambda E) \bar{h}_1 = 0$$

$$(A - \lambda E) \bar{h}_2 = \bar{h}_1$$

$$(A - \lambda E) \bar{h}_3 = \bar{h}_2$$

IV

## Комплексное корни

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0$$

$\bar{h}_1, \quad \bar{h}_2, \bar{h}_3$  - комплексные!  $\bar{h}_2 = \overline{h}_2$  (conjugate)

$$e^{\lambda_1 t} \bar{h}_1, \quad e^{\lambda_2 t} \bar{h}_2, \quad e^{\lambda_3 t} \overline{\bar{h}_2}$$

$$\frac{e^{\lambda_2 t} \bar{h}_2 + e^{\bar{\lambda}_2 t} \overline{\bar{h}_2}}{2} = \operatorname{Re} e^{\lambda_2 t} \bar{h}_2 \quad \frac{e^{\lambda_3 t} \bar{h}_2 - e^{\bar{\lambda}_3 t} \overline{\bar{h}_2}}{2} = \operatorname{Im} e^{\lambda_3 t} \bar{h}_2$$

Реш. реал. -  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$   $e^{\lambda_2 t} \bar{h}_2$

## Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2z \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z \\ \dot{z} = -2x - 4y - z \end{cases} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1:$$

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 + i$$

$$A + (-2-i)E = \begin{pmatrix} 5-i & -1 & 2 \\ 2 & -3-i & 2 \\ -2 & -4 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{i-1}{2} \\ 0 & -2-i & 3-i \\ 0 & -11+2i & 4-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{i-1}{2} \\ 0 & 7+i & -3+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\text{Проверка} \quad \det \begin{pmatrix} -2-i & 3-i \\ -11+2i & 4-3i \end{pmatrix} : \quad (-7-i)(4-3i) + (11-2i)(3-i) = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} = 2, \dim = 1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i+3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{i-2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3-i}{10} x_3 \\ x_2 &= \frac{2-i}{5} x_3 \end{aligned}$$

$$\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} -3-i \\ 4-2i \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{h}_3 = \begin{pmatrix} -3+i \\ 4+2i \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = x_3$$

$$\bar{h}_3 \text{ неэто нечего!}$$

Pyng. pem.:

$$e^{(-2+i)t} \begin{pmatrix} -3-i \\ 4-2i \\ 10 \end{pmatrix} = e^{-2t} \left( \cos t + i \sin t \right) \begin{pmatrix} -3-i \\ 4-2i \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cos t + \sin t \\ 4 \cos t + 2 \sin t \\ 10 \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos t - 3 \sin t \\ -2 \cos t + 4 \sin t \\ 10 \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \cos t + \sin t \\ 4 \cos t + 2 \sin t \\ 10 \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -\cos t - 3 \sin t \\ -2 \cos t + 4 \sin t \\ 10 \sin t \end{pmatrix}$$

Линейные неоднородные системы с мат. коэф-ами

и правой частью - вектором-функцией

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} + \bar{P}_m(t) e^{\mu t} \quad (\text{как сумма таких лин-ий})$$

$$\text{OPHC} = \text{OPOC} + \text{UPHC}$$

1.  $\mu$ -не кратен хар. ур-ю

$$\text{UPHC} \quad \bar{x} = \bar{Q}_m(t) e^{\mu t}$$

$\bar{P}_m(t)$  - искомый вектор, нач. сущно коэффициент  $= m$

2. Есть  $\bar{P}_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t$  или  $\bar{P}_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t$ ,

$\mu = \alpha + \beta i$  не гл-о кратен хар. ур-ю

$$\text{UPHC} \quad \bar{x} = \bar{Q}_m^{(1)}(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + \bar{Q}_m^{(2)}(t) e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$\bar{Q}_m(t)$  - с неопр. коэф-ами, нач-о оговариваю

3. Есть  $\mu$  гл-о кратен хар. ур-ю  $k$

УПНС:  $\bar{x} = \bar{Q}_{m+k}(t) e^{\mu t}$  - неизб. доказуем, что ур-ю, УП нач-о неограничено

( $b$  син. орт огнов ур-ю, т.е.  $t^k Q_m(t)$ )

$\mu = \alpha + \beta i = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} i$  т.е., т.к.  $i^k$

$$\bar{Q}_{m+k}^{(1)}(t) \text{ и } \bar{Q}_{m+k}^{(2)}(t)$$

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t} \end{cases}$$

1. Огнор. ур-е:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda = 3 \text{ кр-о}$$

$$(A - 3E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{h}_1 = (1)$$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  - Хорданова матрица

$$A \bar{h}_1 = 3 \bar{h}_1$$

$$A \bar{h}_2 = \bar{h}_1 + 3 \bar{h}_2$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \overline{h}_2 = (1)$$

$$\text{OPOC: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$2. \text{ R\acute{e}sp. r\acute{a}mire: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \quad m=3 \quad K=2 \quad m=0 \quad m+k=2$$

$$\text{UPNC: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A t^2 + B t + C \\ D t^2 + E t + F \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (2At + B)e^{3t} + 3e^{3t}(At^2 + Bt + C) = (3At^2 + (2A + 3B)t + (B + 3C))e^{3t} \\ \dot{y} = (3Dt^2 + (2D + 3E)t + (E + 3F))e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3At^2 + (2A + 3B)t + B + 3C = 4At^2 + 4Bt + 4C - Dt^2 - Et - F \\ 3Dt^2 + (2D + 3E)t + E + 3F = At^2 + Bt + C + 2Dt^2 + 2Et + 2F + 2 \end{cases}$$

$$\text{R\acute{e}sp. t}^2: \quad 3A = 4A - D \quad (1) \quad 3D = A + 2D \quad (4)$$

$$t: \quad 2A + 3B = 4B - E \quad (2) \quad 2D + 3E = B + 2E \quad (5)$$

$$1: \quad B + 3C = 4C - B \quad (3) \quad E + 3F = C + 2F + 2 \quad (6)$$

$$(1) \text{ i } (4) - \text{ oghn } n \text{ zo } xe \quad (A=D)$$

$$(\text{grz\acute{e}m } A=D \quad (2) \text{ i } (5) - \text{ oghn } n \text{ zo } xe \quad (2A=2D=B-E)$$

$$\text{Ug } (3) \text{ i } (6) \Rightarrow A = -1, \quad D = -1$$

A i D n\acute{a}mejno s\acute{e}ognznamo, g\acute{e}j \acute{a}ciemnosz - 2 \acute{y}p-2:

$$\begin{cases} E = C - F + 2 \\ B = E - 2 \end{cases}$$

Niektóre m\acute{a}ry z\acute{e}maz \acute{e} F = E = 0, \text{ z\acute{e}rza } B = -2 \quad C = -2.

Odpier:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - e^{3t} \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

## Линейное неоднородное уравнение с нал. коэф.

### Базисное представление

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} + \bar{F}(t)$$

$$OPOC \quad \bar{x} = C_1 \bar{x}^{(1)}(t) + \dots + C_n \bar{x}^{(n)}(t)$$

$$OPHC \quad \bar{x} = C_1(t) \bar{x}^{(1)}(t) + \dots + C_n(t) \bar{x}^{(n)}(t) \quad - \text{неравн. базисное представление}$$

$\downarrow$  независим в сущ-ии - находим ур-ия для  $C_1, C_2$

$$\text{Общ. замкнутое л-е реш.: } \bar{x} = C_1 \cdot f_1(t) + C_2 \cdot f_2(t) + \dots + C_n f_n(t) + F(t)$$

## Exponentials of matrices

$A_{n \times n} = (a_{ij}), i, j = 1..n$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

Как вычислить окончательный результат? Рассмотрим.

$$\forall i, j = 1..n \rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^m \frac{(A^k)_{ij}}{k!} \right)$$

- оказывается, он существует

## Свойства

$$1. e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad - \text{также есть } AB = BA$$

$$2. e^0 = E$$

$$3. \det e^A = e^{\operatorname{tr} A} \quad (\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii})$$

$$4. \text{Матрица } e^A \text{ неиспортина, } (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

$$5. a_{ij} \in \mathbb{R}$$

## Применение

Рассмотрим  $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$  - лин. - диф. с нач. условиями.

$$\text{Одн. реш. } \bar{x}(t) = e^{At} \bar{C} \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad - \bar{C} \text{ надо находит отдельно!}$$

$$\text{Реш. 3. Комн. } \dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 : \quad \bar{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \bar{x}_0$$

Но практиче.льн. задачи решают неявно - ищут так, как делают память.

## Реш. с помощью $e^A$

① Все корни характерист. ур-я генер. в матрицах реш.

$A$  - матрица & все ее собст. векторы единичны

$A'$  - реш. матрица (& собст. векторы единичны)

$A' = S^{-1}AS$ ,  $S$  - матр. перехода от единичных к собст. векторам

$$A = SA'S^{-1}, \quad A^2 = SA'S^{-1}SA'S^{-1} = SA'^2S^{-1}, \dots \forall k \rightarrow A^k = SA'^kS^{-1}$$

$$B \text{ решает } e^A = S e^{A'} S^{-1}$$

$$\text{Если } A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ то } A'^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_n^t \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \\ e^{A'} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Для матриц с одинаковыми собственными значениями, если матрица  $A$  диагональная и матрица  $A'$ , то ортогональное преобразование  $A$  в  $A'$  с тем же матрицей неизменяется:

$$e^{At} = S e^{A t} S^{-1}$$

### Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \quad \text{При решении } e^A \text{ находим одн. знач. и перм. } z. \text{ Ключ: } x(0) = y(0) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{OPOC: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{здесь надо доказать}$$

Но это  $e^A$  все равно получится!

$$S = (\bar{h}_1, \bar{h}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\Delta = ad - bc)$$

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Однако получим: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C_1(e^{3t} + e^{-t}) + C_2(e^{3t} - e^{-t}) \\ C_1(e^{3t} - e^{-t}) + C_2(e^{3t} + e^{-t}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{C_1 + C_2}{2} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C_1 - C_2}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Punkt-e 3. Kolum: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

## II) Lösung komplexer Koeffizienten

To xl case - Lösung c komplexe Zahlen

### Beispiel 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -5x + 3y \end{cases} \quad \text{Dsp. Max-Value } e^{At}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$A - (1+i)E = \begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (2+i)x_1 = x_2 \Rightarrow \tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A - (1+i)E) = 1 \Rightarrow \dim = 1$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} \quad \det S = -2i$$

$$S^{-1} = -\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix} \right) \textcircled{S}$$

Bemerkung:  $e^{At}$  - generell reelles Maßnahm!!  $(2+i)(2-i) = 5$

$$\begin{aligned} \textcircled{S} & - \frac{e^t}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix} \right) = - \frac{e^t}{2i} \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ (2+i)e^{it} & (2-i)e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -2-i & 1 \end{pmatrix} = \\ & z_i(2\sin t - \cos t) \quad \begin{pmatrix} -e^{it} + e^{-it} & 2i\sin t \\ -(2+i)e^{it} + (2-i)e^{-it} & 2i(-2\sin t - \cos t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t \quad (2+i)e^{-it} = \frac{(2-i)e^{it}}{(2-i)e^{it}} \quad (2-i)e^{it} = (2-i)(\cos t + i \sin t)$$

$$z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z \quad \operatorname{Im} z = 2\sin t - \cos t$$

$$e^{At} = -e^t \begin{pmatrix} 2\sin t - \cos t & -\sin t \\ 5\sin t & -2\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

$$\text{Oderer Punkt-e: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{Punkt-e 3. Kolum: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Дана  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  — характеристика матрица;

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & \dots & e^{\lambda_1} \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & \dots & \frac{e^{\lambda_1}}{(n-1)!} \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & \dots & e^{\lambda_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & \dots & e^{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$A$  банди, көніг  $A^{At} = \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix}$ , то

$$A^{At} = \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} = A + B$$

$$e^{At} = e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{\lambda_1 t} \cdot E \cdot (E + B + B^2/2! + \dots + B^n/(n-1)!)$$

мене  $B^n \neq 0$

Пример 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 4 & 1 \\ & & & & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^{3/2} & & \\ & e^3 & e^3 & & \\ & & e^3 & & \\ & & & e^3 & \\ & & & & e^3 & \\ & & & & & e^3 & \\ & & & & & & e^3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = C_1 e^{3t} h_1 + C_2 e^{3t} (\bar{h}_2 + t \bar{h}_1) + C_3 e^{3t} (\bar{h}_3 + t \bar{h}_2 + \frac{t^2}{2} \bar{h}_1) + \\ + C_4 e^{4t} \bar{h}_4 + C_5 e^{4t} (\bar{h}_5 + t \bar{h}_4) + C_6 e^{4t} \bar{h}_6$$

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases} \quad \text{Наша оды. реш. в рен. з. комм. } x(0) = y(0) = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \text{Комм: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \kappa_p \cdot 2$$

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 4E) \bar{h}_2 = h_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \quad -x_1 + x_2 = 1 \quad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad e^{At} = S e^{A't} S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A't = \begin{pmatrix} 4t & t \\ 0 & 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B^2=0}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot e^B ; \quad e^B = E + B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \quad \text{Tогда } e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Операторский метод

$f(t)$  опр. и непр. на  $[0, +\infty)$  (возможно конечное или  $\mathbb{R}$  разреша 1<sup>го</sup> рода)

$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ ,  $p \in \mathbb{R}$  (тогда  $p$  имеет смысл в комплексном)

Универс. свойства (аддитивн.), если  $|f(t)| \leq M e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$

$f(t) \doteq F(p)$  - преобразование Лапласа  
Оригинал изображение

## Таблица оригиналов и изображений

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$1$	$\frac{1}{p}$	$\begin{cases} t^n \cos \omega t \\ t^n \sin \omega t \end{cases}$	$\frac{k!}{(p^2 + \omega^2)^{k+1}} \begin{Bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{Bmatrix} (p + i\omega)^{k+1}$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p + \lambda}$ , $\lambda, p > 0$		
$t^k$ , $k \in \mathbb{N}$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-\lambda t} t$	$\frac{k!}{(p + \lambda)^{k+1}}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$		

Знак изображение, первое для прямого:

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$f'(t) \doteq \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

$$\begin{aligned} u &= e^{-pt} & dv &= f'(t) dt \\ du &= -pe^{-pt} dt & v &= f(t) \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Оригинал лин. неизв. однородн. (г-ко методом ТФКП)

Пример 1

$$y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \text{реш. 3. касм}$$

$$y(t) \doteq Y(p) \quad y'' \doteq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1$$

$$p^2 Y(p) - 1 + 4Y(p) = \frac{8}{p^2+4} + \frac{4p}{p^2+4}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+4} + \frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{4p}{(p^2+4)^2} = \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{p^2+12}{(p^2+4)^2} = \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{2}{p^2+4} - \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} \doteq$$

$$p^2+12 = A(p^2+4) + B(p^2-4)$$

$$A=2, \quad B=-1$$

$$\doteq \sin 2t + t \sin 2t - t \cos 2t$$

Это - один из удобных методов на практике.

(На KP неизвестно, что можно, но иногда очень просто)

Две характеристики решения, & корни нари. ун. дифф. уравн.  $C_1$  и  $C_2$

Пример 2

$$\begin{cases} x = -x - 2y + 2e^{-t} \\ y = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = -1$$

$$x(t) \doteq X(p) \quad y(t) \doteq Y(p)$$

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p) + 1 \quad \dot{y}(t) \doteq pY(p) + 1$$

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = -X(p) - 2Y(p) + \frac{2}{p+1} \\ pY(p) + 1 = 3X(p) + 4Y(p) + \frac{1}{p+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p+1)X + 2Y = \frac{2}{p+1} - 1 = \frac{1-p}{p+1} \\ -3X + (p-4)Y = \frac{1}{p+1} - 1 = -\frac{p}{p+1} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & 2 \\ -3 & p-4 \end{vmatrix} = \dots = (p-1)(p-2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1-p}{p+1} & 2 \\ -\frac{p}{p+1} & p-4 \end{vmatrix} = \dots = \frac{-p^2+7p-4}{p+1}$$

$$\Delta_y = \dots = \frac{-p^2-4p+3}{p+1}$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-p^2+7p-4}{(p-1)(p-2)(p+1)}$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-p^2-4p+3}{(p-1)(p-2)(p+1)}$$

$$X(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+1}$$

$$A(p-2)(p+1) + B(p-1)(p+1) + C(p-1)(p-2) = -p^2 + 7p - 4$$

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = -2$$

— Числами определяемые можно генерировать вручную. Осуществляется это для решения «коммутативных» уравнений.

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+1}$$

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 1$$

$$x(t) = -e^{-t} + 2e^{2t} - 2e^{-t}$$

$$y(t) = e^{-t} - 3e^{2t} + e^{-t}$$

