

Ниже приведены: для me (Мурабиб, Фандахер, Амеликян, Маркел - новые версии)

Равновесные механические системы



Система называется равновесной в физическом смысле тогда и только тогда, когда

$$\Leftrightarrow \nabla \vec{r} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 = \text{const}$$

Где \vec{r}_0 - радиус-вектор центра масс системы

(уп-т. сила не зависит от времени) \Rightarrow Эквивалентность

блеска стационарного параметрического, и $\vec{r} = \vec{r}(q)$ тоже \Rightarrow однознач. коор-т.



Или система имеет одинаковую форму в различных координатах. -
и. кинематика (координаты эквивалентны в времени)

$$(L_{,i})^i - L_{,k} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

\Updownarrow \Rightarrow разрешимость сист. стационарных уравн.

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = F(q, u, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = x(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix}$$

Теорема

Причины равновесия мех-т в бз. однознач. коорд. с Торкуном будут

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\square \Leftarrow Пусть $x = x_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q_0) = \vec{r}_0 = \text{const}$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0, \dot{q}^k \equiv 0$, однознач. коорд-т. значит $\dot{q} = 0$.

$$\vec{r}_0 \cdot \delta q^k \not\equiv 0 \quad \forall \delta q: \delta q^1 + \dots + \delta q^n \neq 0.$$

Таким образом (1) $\Rightarrow \dot{q} = 0$



Критерий новом. равновесия для дин. систем

Дин. система называется новом. равновесием $\Leftrightarrow Q(q_0, 0, t) = 0$.

$$\square (T_{ik})' - T_{ik} = Q_k(q, \dot{q}, t)$$

$$T = \frac{1}{2} q_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$T_{ik} = a_{kj} \dot{q}^j$ — т.к. a_{ij} — симметрическая матрица!

$$(T_{ik})' = a_{kj} \ddot{q}^j + a_{kji} \cdot \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$T_{ik} = \frac{1}{2} a_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow a_{kj} \dot{q}^j + (a_{kji} - \frac{1}{2} a_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

Для нач. полож. $q = q_0, \dot{q} = 0 \Rightarrow$

$$0 = Q_k(q_0, \dot{q}_0, t)$$

(где q_0 — нач. полож., $\dot{q}_0 = 0$, т.к. (2) имеет решение $q = q_0, \dot{q} = 0$ — н.о. т. Комн. одно изу. в. в. в. еднозначно.)

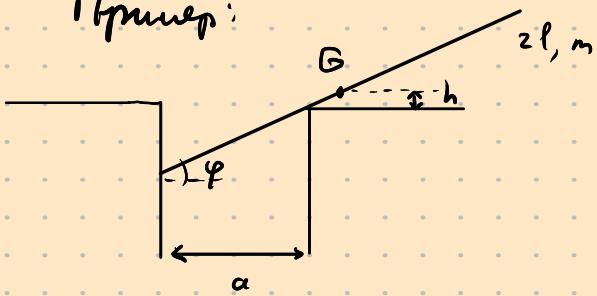


Однако если имеется буг, не убирая т. Комн. ($Q(\dots)$ не убирая), то кинетич. & однозначн. строго не гарантированы для $n > 1$ (см. Марковича).

Следствие

Если $Q = -\nabla \Pi(q, t)$, то нач. полож. состояния т. назыв. энерг. $\nabla \Pi(q, t) = 0$.

Пример:



т. G — центр масс (также скажем так баланс).

$$\Pi = mg h = mg (l \sin \varphi - a \cos \varphi)$$

$$\Pi_{,q}: l \cos \varphi - \frac{a}{\cos^2 \varphi} = 0$$

$$\cos \varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \quad - \text{н.о. полож.}$$

Теорема — принцип виртуальных перемещений

Нач. $\vec{r} = \vec{r}_0$ — нач. конф. — в. нач. полож. \Leftrightarrow \forall бир. перемены.

$$\delta \vec{r} \text{ из } \exists \text{ нач. } \delta A = \int f \delta \vec{r} dm = 0$$

(из симметрии)

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_{ik} \delta q^k \Rightarrow \delta A = \int \vec{F}_{ik} \cdot \vec{F} dm \cdot \delta q^k = Q_k \delta q^k = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Leftrightarrow Q = 0 -$$

- кинетич. момент. равновес.



Занятие 1 (динамическое)

Вывод, что центр масс движется и подчиняется закону Ньютона, т.к. в этом случае есть одна-единственная сила, действующая на центр масс.

$\Rightarrow \int (\vec{w} - \vec{F}) \delta \vec{r} dm = 0$ - акц. уп-е гравитации

$$\vec{w} = 0 \text{ в нач. полож.} \Rightarrow \int \vec{F} \delta \vec{r} dm = 0 \quad \blacksquare$$

В отрасли машины - ин. Маркеев.

Занятие 2 (динамическое)

Вывод обобщенное уравнение, т.к. уп-е гравитации включено в общее.

$\forall \delta \vec{r}$ в нач. полож. равновес.

Пример

Численное представление твердого тела



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{g}$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{R} + \delta \vec{g} = \delta \vec{R} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{g}, \delta \vec{\varphi} - в-р. момента количества$$

$$\delta A = \int \vec{F} dm \cdot \delta \vec{R} + \int \vec{F} \cdot (\delta \vec{\varphi} \times \vec{g}) dm =$$

$$= \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \delta \vec{\varphi} \cdot \underbrace{\int \vec{g} \times \vec{F} dm}_{\vec{M}_0} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_0$$

$$\Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{R} + \vec{M}_0 \cdot \delta \vec{\varphi} = 0 \quad \forall \delta \vec{R}, \delta \vec{\varphi} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \text{ и } \vec{M}_0 = \vec{0}$$

\vec{F} - инерционная сила, \vec{M}_0 - инерционный момент,

(нужно демонстрировать, как)

Основы Теории Устойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Камка:

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (3) \quad \text{Здесь и далее: } x(t) = x(x_0, t)$$

При $x = q = \text{const}$ на \rightarrow независимое производство нет - это (3).

Норм. производ. $x = a$ берется потому что если в ней $x = a$, то $\dot{x} = 0$:
 $x \rightarrow x - a$.

Далее будем считать, что $a = 0$ для определенности обозначения.

x можно рассматривать как отображение от норм. производ.

Определение

При $x = x(t_0, t)$, где $x_0 = x(t_0)$, наз. \rightarrow локально притягивающим
бифурк., если для $\exists \forall t \in [t_0, \infty)$.

Пример: $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 - x^2 t^2}$



Определение (уст. н. л. бифурк.)

Норм. производ. $x = 0$ из-за (3) наз. \rightarrow уст. н. л. бифурк., если

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta: \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$

$$\|x(t)\| = \sqrt{x^1 x^1}$$

Задачи

1. Уст. н. л. \Rightarrow производная непрерывна по нач. ус.

2. Уст. н. л. \Rightarrow при $x(t)$ локально притяг. бифурк.

Определение (асимпт. ст.)

Поном. правилое. $x=0$ сис. (3) - асимптотически устойчиво, если

* 1. $x=0$ - ст. но динам.

2. $\exists \Delta: \forall x_0, \|x_0\| < \Delta \rightarrow x(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$

$U_\Delta(0)$ - обласі притяження.

Если задана нрс (1):



Определение (нест.)

Поном. правилое. $x=0$ не-уст. (3) нест., если $\exists \varepsilon: \forall \delta > 0 \exists x_0:$

$\|x_0\| < \delta \quad \exists t^*: \|x(t)\| > \varepsilon$, т.е. при $x(x_0, t)$ не вер. со нрс. правило.

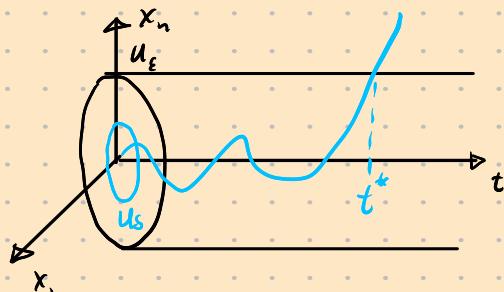
Картиныные определения

① Устойчивое



$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0$: бдлко, начиная с δ -окрестости, оставаясь в ε -окрестости

② Нест.



③ Асимпт.



Kooperativnost' novykh chislivikov

Esim n.p. (nachalnoe polnenie) $x=0$ yekvibratsiya gde bsp. t_0 , to ono yek. $\forall t_1 > t_0$.

$$\square \quad x = 0 - yek. \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0; \forall x_0 = x(t_0), \|x_0\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$



$$G = x(u_s(0), t_0)$$

Розглянутий випадок: G - ум. функція

загалом x_0 нічим залежить від початкових умов, та.

$x(x_0, t)$ - будь-який експр. в непр. (i. korm) $\Rightarrow \rho(\delta G, 0) > 0$ (последнє означає $x=0$ як δG)

Введемо $\delta_1 = \rho$, $t_0 \mapsto t_1$, $\delta \mapsto \delta_1$ (занурюємо)



Умови стабільності функції

$$\dot{x} = X(x, t) \quad \psi - \text{закон руху (трасекторія)}$$

$$\dot{\psi} = X(\psi, t)$$

Розширення руху $x = \psi + y$ (y -відхилення від трасекторії)

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\psi}}_{X(\psi, t)} + \dot{y} = X(\psi + y, t) \Rightarrow \dot{y} = X(\psi + y, t) - X(\psi, t) \quad (1)$$

$y=0$ - n.p. вик. вид (1)

Припустимо, що $y=0$ - умови стабільності n.p., та іп-ні y мають y як ω yekvibratsiyai.

Если \forall іп-ні y мають y як ω yekvibratsiyai, то вик. вид y як ω yekvibratsiyai.



Все трасекторії, окрім, на δ від ψ , б. нічим, отримують $\omega < \varepsilon$ від ψ .

Если $y=0$ - нест., \Rightarrow іп-ні нест., $y=0$ - дисперсія, та \Rightarrow іп-ні дисперсія, та.

Задачи

Численные геометрические задачи возникающие
при движении в реальном времени.

Пример

Рас-ши-рение с конечной амплитудой



- патологич. (т.к. амплитуда
период \Rightarrow нечетный период).

Графиком, кроме функции $\kappa \neq 0$, не будет.

0 Быть непрерывных & загорах \Rightarrow уравнения

Переменные не должны иметь особенности в точках n.p.

Пример



$$\forall \theta_0 < 1 \exists \text{ нач. угла } \varphi = \varphi_0 t + \varphi_0 \rightarrow \infty$$

Н.п. на конечной величине, $\varphi \rightarrow \infty$ - неизвестное
с.к.

Пример

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \quad x = x_0 + \frac{t}{2}$$

$$x + \delta x = x_0 + \delta x_0 + \frac{1}{2} \Rightarrow |\delta x| = |\delta x_0| \Rightarrow \text{Непр. выс.}$$

$$\text{Задана } y = x^2 \Rightarrow y = (x_0 + \frac{t}{2})^2$$

$$y + \delta y = (x_0 + \delta x_0 + \frac{t}{2})^2 = (x_0 + \frac{t}{2})^2 + t(x_0 + \delta x_0) + \delta x_0^2 \Rightarrow \delta y \rightarrow \infty$$



Дополнение (A3П)

Задана $x = x(y, t)$, $x(0, t) = 0$ наз-ся **дополнением**, если

1. $\det(X_{y,y}) \neq 0$ в нек-рой окр-тии ненулев. (тогда система разрешима)
2. Задана $x = x(y, t)$ и одноврем. $y = y(x, t)$ непрек. в 0
однозначно по t . (тогда из 2-го вытекает)

Дополнение задано не uniquely оп-ра уединением.

Уединение линейных систем

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $A(t)$ бесконечн. разобр. непрек.

$\exists \psi(t)$ - реш-е сущ., $x = \psi + y$ - безуединенное реш-

$$\dot{\psi} + \dot{y} = Ay + A\psi + f \Rightarrow$$

\Rightarrow нек-е реш. задачи Коши для нек-го y , т.п. $y = 0$

однозначн. сущ. $y = Ay$. (2)

Теорема

П.п. $y=0$ - реш. \Leftrightarrow \forall нек-е сущ. (2) однозначн.

$\square \quad \Rightarrow$ \exists ψ - неодн. реш., так-что $y = \frac{\psi}{2} \frac{\nu(t)}{\|\nu(t)\|}$
 $\|\psi(t_0)\| < \delta$, $\psi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \Rightarrow y=0$ - неодн.

\Leftarrow Ещё \forall нек. оп. \Rightarrow оп. $\Phi(t, t_0)$ - однозначн. сущ-во,

\forall нек. (2) нек-е быт. $y = \Phi(t, t_0)y(t_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Phi(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|y(t_0)\| \leq M \cdot \|y(t_0)\|$$

□

Замечание: норма матрицы: $\|\Phi\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi x\|$ - "максимальное расстояние"

С единичной нормой норма матрицы - max. синг. эл-ов
матрицы (одн. макс. синг. $\Phi \Phi^T$)

Устойчивость решения с несогласованной матрицей

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \text{const} \quad (3)$$

Следовательно уравнение имеет решение вида $y(t) = e^{At}y_0$. Для $y(t) \rightarrow 0$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения A были отрицательными.

Многие физические процессы, связанные с теплообменом, стационарны и устойчивы.

Однако это не всегда так.

Рассмотрим (3): $y = h e^{\lambda t} \Rightarrow P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни

Лемма

Пусть $P(y) = 0$ имеет (3) действительные корни. Тогда $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

□ $y(t) \sim P_{\alpha_{n-1}}(t) e^{\lambda_{n-1} t}$ Если $\exists \lambda_k: \operatorname{Re} \lambda_k > 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$ неустойчивое.

Если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \Rightarrow$ для каждого k имеется $\alpha_k > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k + \alpha_k < 0$ для всех k .

$|y(t)| \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow$ н.п. $y=0$ — аттрактор.

□

(α_k — коэффициенты корней λ_k)

Продолжение

Если $P(\lambda) = 0$ имеет действительные корни λ_k , то $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

(действительные собственные значения н.п. вида $e^{\lambda t} + c \cos \omega t + d \sin \omega t$)

Лемма (наст. уст. — лекция 10)

Если $P(\lambda) = 0$, то знаки его корней определяются следующим образом.

□ $\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_j > 0 \quad \bar{\lambda}_j$ — комплексное сопряженное

$\lambda_n = -\gamma_x, \quad \gamma_x > 0$

$$P(\lambda) = a_n \prod [(1 + \alpha_j - i\beta_j)(1 + \alpha_j + i\beta_j)]^{\alpha_j} \prod (1 + \gamma_x)^{\alpha_x} = \\ = a_n \prod (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\alpha_j} \prod (\lambda + \gamma_x)^{\alpha_x}$$

Последние члены дают корни с положительными реальными частями.

□

Задернел

Иногда это ум. доказательство в бухг.: $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$. Это подразумевает пред. утверждение именем $\alpha_n > 0 \Leftrightarrow a_0 > 0$.

Критерий ус. пас-ма для дес. пол-а (ав. Мурабиба ии Денизбекова)

Критерий Раяса - Гурвица

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad a_0 > 0$$

Симметрическая матрица Гурвица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & & a_n \end{pmatrix}^{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n}$$

По диагонали каск-ри a_1, a_2, \dots
себя каск-ри по бокам, симметрическое условие.

$$P_\lambda - \text{ус.} \Leftrightarrow \Delta_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

! Есть реальное значение замен Γ !

Задернел ож. $a_0 > 0$

Пример

$$P(\lambda) = a_1 \lambda + a_0. \quad \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1} \Rightarrow \text{наимен. ус.} \Leftrightarrow \text{sign } a_0 = \text{sign } a_1$$

$$\Gamma = (a_1) \Rightarrow a_1 > 0 - ?? \quad \text{запрос ус.} ??$$

"Ненулевое" значение от zero, т.к. $P(\lambda)$ не приведен к виду $a_0 > 0$.

Приведение к виду $a_0 > 0$:

$$P(\lambda) \rightarrow \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1, \quad 1 \text{ забегено} \Rightarrow$$

(если $a_0 = 0$ то $P(\lambda)$ прозу неис.: есть корень $\lambda = 0$)

$$\Gamma = \left(\frac{a_1}{a_0} \right) - \text{теперь всё верно.}$$

Вторые критерии - Минара

$$P(\lambda) - \text{ус.} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array} \right] \quad (\text{недо/недо})$$

Пример

$$P(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0, \quad \alpha_0 > 0$$

1. $\alpha_2 > 0, \alpha_1 > 0$

$$2. P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \alpha_1 > 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) - \text{pos.} \Leftrightarrow \alpha_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n}$$

Устойчивое линейное уравнение

Первое линейное уравнение \Leftrightarrow уст-ся по линейному приближению

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

X -линейн. зависим. ф. $x=0$, а X_{ijk}^i - в уп-и ф. лин-ой оп-ии н.п. $x=0$ (1)

Тогда:

$$X = Ax + f(x), \quad A = [X_{ij}^i(0)] ; \quad \|f(x)\| \leq a\|x\|^2, \quad a = \text{const}$$

Линейное приближение: $\dot{x} = Ax$

Теорема Ляпунова - "запас стабильности"

1. Рассмотрим лин. ур-е $\dot{x} = X(x)$ лин. уст. (1), тогда для н.п. линейного приближения $\dot{x} = Ax$ - ас. уст. \Rightarrow н.п. $x=0$ ас-ни $\dot{x} = X(x)$ - ас. уст.

2. Есть $\exists \lambda_i$ - корень $\det(\lambda E - A) = 0 : \operatorname{Re} \lambda_i > 0 \Rightarrow$ н.п. $x=0$ неуст. в одних направлениях.

Lemma Frobenius

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(t) f(t) dt, \quad u, f, C > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u(t) \leq C \exp \left[\int_0^t f(t) dt \right]$$

$\square \frac{u(t) f(t)}{C + \int_0^t u(t) f(t) dt} \leq f(t)$ - unbeschränkt: (unr. = unreg. gema.)

$$\ln \left[C + \int_0^t u(t) f(t) dt \right] - \ln C \leq \int_0^t f(t) dt$$

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(t) f(t) dt \leq C \exp \left[\int_0^t f(t) dt \right]$$

\square (1. Weynabe): $x = e^{-ht} y(t), \quad z_h = \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|$ - dann

$$e^{-ht} \dot{y} - h e^{-ht} y = A y e^{-ht} + f(y e^{-ht})$$

$$\dot{y} = \underbrace{(A + hE)}_B y + e^{ht} f(y e^{-ht}) \quad (2)$$

$$\dot{y} = B y - \text{ac. ges.}$$

$$\dot{x} = Ax - \text{ac. ges.} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

$$\dot{x} = (A + hE)x \Rightarrow \tilde{\lambda}_i = \lambda_i + h \Rightarrow \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_i < 0 \quad \left(h = \frac{\min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|}{2} \right)$$

$$(2) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{(Bt-t)} e^{ht} f[y(t) e^{-ht}] dt$$

$$(\text{uz. grundsatz: } \dot{y} = By + f(t) \Leftrightarrow y = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-t)} f(t) dt)$$

Rekurrenz gruppierungsweise

$$\|y(t)\| \leq \|e^{Bt}\| \cdot \|y_0\| + \int_0^t \|e^{(Bt-t)}\| \cdot e^{ht} \|f(y e^{-ht})\| dt$$

$$\|f(x)\| \leq a \|x\|^2 \Rightarrow \|f(y e^{-ht})\| \leq a \|e^{-2ht}\| \cdot \|y\|^2$$

$$\|y(t)\| \leq M \|y_0\| + \int_0^t M a e^{-ht} \|y(t)\|^2 dt$$

Even $\|y_0\| \ll 1$, so $\exists t: \forall t \in [0, t] \rightarrow \|y(t)\| \leq 1$ (für alle $t \geq t$)

Also $\|y(t)\| \leq \|y(t)\| \quad \forall t \in [0, t] \Rightarrow$ nur endlich viele Schritte!

$\|y(t)\| \leq M \|y_0\| + \int_0^t M a e^{-ht} \|y(t)\| dt$ - für diesen Begriff wurde Frobenius

Also $\|y(t)\| \leq M \|y_0\| \exp \left[\int_0^t M a e^{-ht} dt \right] \leq K \|y_0\| \Rightarrow$

stet. unreg. ex-ct, i.e.
polen const. für $t \rightarrow \infty$, i.e.
normale asympt. const.

→ asympt. unreg. ex-ct
polar normalisieren

$\Rightarrow y(t)$ - ортогональна. Данное означает что в окрестности $|y(t)|$ симметрия, и вблизи $\forall t \in [0; \infty)$ (окрестность точки, неподалеку, гипотеза оценки, это то же самое) $x = e^{-kt} \underbrace{y(t)}_{\text{орт.}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow$ н.п. $x = 0$ - ас. уст.

Также неподалеку аналогично.

Задача Т. линейная неподалеку, есть $\exists \lambda_j = \pm i\omega$ или $\lambda_j = 0$

неподалеку
треугольник симметрический или

Также неподалеку. Треугольник подобен с тем узким условием что линейным годавием.

Возможные виды линейных

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0.$$

Возможны 3 типа линейных: $V(x)$, $V(0) = 0$, $V(x) \in \mathbb{R}$ - несп. гипер.

Прямоугольник в окрестности нулевой точки: $\dot{V}_x = V_{,i} \cdot X^i = \nabla V \cdot X$

Знакопостоянство при $V(x) > 0$ - несп. ортогон. $\Leftrightarrow V(x) > 0$ в окрестности $U_\epsilon(0)$.

(если $x=0$ одна точка 0), где окрестность содержит аналогично.

Как видно изображение и симметрия, несп.

Например: есть в $U_\epsilon(0)$ $\exists V(x)$: $V(x) > 0$ и $\dot{V}_x \leq 0$ (в окрестности нулевой)

точке) \Rightarrow н.п. $x=0$ - устойчиво.

\square Рассмотрим $U_\epsilon(0)$. $V(x)$ -несп. $\Rightarrow \exists V^* = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x)$, $V(0) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists \delta > 0: V(x) < V^*$ при $\|x\| < \delta$

Таким образом при x_0 : $\|x_0\| < \delta \quad V[x(x_0, t)] < V^*$, т.к. $V[x(x_0, t)]$ - не возрастает (бесконечное количество точек на окрестности $V(x)$) и это неизг., и это устойчиво, т.к. $\dot{V}_x(x) \leq 0 \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \epsilon$



Следствие. Т. Лагранжа - Дарси

Если $\Pi(q)$ квадр. мес. ф-ия имеет строгий мин в н.п., то н.п.

устойчива

$$\square V = E = T + \Pi = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} + \Pi(q) \geq 0 \quad (\Pi(0) = 0)$$

$\geq 0 \quad \geq 0$

$$\dot{V}_2 = 0 \quad (\text{такж. в инт. уравнений Лагранжа}) \quad \blacksquare$$

Проверка условия $\Pi(q) \rightarrow \min$

$$\Pi \approx \Pi(0) + \Pi_{,i}(0) q^i + \frac{1}{2} \Pi_{,ij}(0) q^i q^j \quad \begin{array}{l} \text{--- лин. прибл.} \\ \text{--- квадр. н.п.} \end{array}$$

- разложение $\Pi(q)$ по q

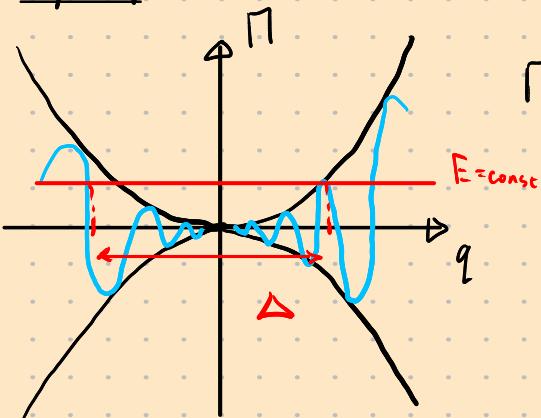
$$\Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q, \quad C - \text{матрица нор. энергии}$$

$$\text{Если } \Pi_2(q) > 0 \Rightarrow \Pi \text{ имеет стр. мин (и } U_e(0)).$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = C^T \quad \Pi_2(q) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta_i > 0 \\ i = 1, n \end{array} \right.$$

Замечание Т. Лагранжа - Дарси не является достаточным условием.

Пример



$$\Pi = \begin{cases} q^2 \sin \frac{1}{q}, & q \neq 0 \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$

$$E = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \Pi(q)$$

$$\Delta \Big|_{E=0} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{n.п. уст., но неустойчива нер.}$$

Теорема Абрамова 1

Если $\exists q' : \Pi_2(q') < 0 \Rightarrow$ н. п. $q=0$ неустойчива.

\square Расс-ан симметричности н.п.:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \approx \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{A(0)}_{A=\text{const}} q$$

$$\Pi = \Pi_2 = \frac{1}{2} q^T C q$$

$$\text{Ур-е Лагранжа: } A\ddot{q} + Cq = 0$$

Задача: $q \mapsto U\Theta$ (U -матрица, Θ - квадр)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T U^T A U \dot{\Theta}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \Theta^T U^T C U \Theta$$

T. Оптимальное решение: $\exists U: U^T A U = E$
 $U^T C U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\ddot{\Theta}_i + \lambda_i \Theta_i = 0 \quad - \text{рабочие ур-е Лагранжа}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ кол. для } \lambda_k < 0 \Rightarrow \Theta_k \sim e^{\sqrt{|\lambda_k|} t} \Rightarrow \text{но } \uparrow \text{. Капитала } \circ$$

Несовместимо с.н. $q=0$ - неуст.



Теорема Ляпунова 2

Если н.р.н.н. рабоч. пограничные решения $\Pi(q) = \Pi_m(q)$, ... устанавливается
 что Π имеет $\max \Rightarrow$ н.р. $q=0$ - неуст.

Теорема Барбасина - Красовского (60-е!)

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0)=0 \quad (1)$$

Если $\exists U_\varepsilon(0) \exists V(x)$:

$$1. \dot{V}_x \leq 0$$

2. $M\{x \mid \dot{V}_x(x)=0\}$ - не содержит членов траекторий решения (1),

т.к. $\nabla_x \cdot X=0$, тогда

a. Если $V(x) > 0 \Rightarrow x=0$ - ас. гр.уст.

б. Если $V(x)$ не имеет мин., б.к. нестрогий \Rightarrow н.р. $x=0$ - неуст.

□ доказательство по т. Ляпунова, н.р. $x=0$ - устойчив. Докажем ас. гр.

Пусть $x_0 = x(t_0) : \|x_0\| < \varepsilon$. Тогда

$V[x(x_0, t)]$ - нонегативн. и оп. конечн. \Rightarrow

$$\Rightarrow \exists V^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V[x(x_0, t)]$$

Если $V^* = 0 \Rightarrow x=0$ - ас. гр.

Domyzum spainibene; pacem. nare-in $\{x(x_0, t_i)\}$ - esp.

(b alyg yeronimberdu n.p. $x=0$) \Rightarrow no 1. Fozionas - Vienepurpresa.

\exists exognas negn. $\{x_k\} = \{x(x_0, t_{ik})\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \quad V^* = V(x^*)$$

Pac-un pemenne (1) $x(x^*, t)$ c nor. yu. $x(x^*, 0) = x^*$. Fozya, t.k.

$x^* \neq 0$ (i.e. $V^* \neq 0$, $aV^* = 0$ b $x=0$) u $\dot{V}_x < 0$ na gennai sprekisipmu \Rightarrow

$\Rightarrow \exists t : V[x(x^*, t)] < V^*$ - protivbereme.

Cayrae δ



$$G = \{x \mid V(x) < 0\}$$

Berdelen $x_0 \in U_r(0) \cap G$.

Domyzum, zso $x = x(x_0, t)$ - yu. \Rightarrow

\Rightarrow nabzopee yamobus neg. pacymg. negyru, zso $\exists \{x_k\} = \{x(x_0, t_k)\} :$

$$V^* = \lim_{k \rightarrow \infty} V[x_k] = V(x^*)$$

Pac-un pem. $x(x^*, t)$ c nor. yu. $x(0) = x^* \Rightarrow \exists t : V[x(x^*, t)] < V^* \Rightarrow$

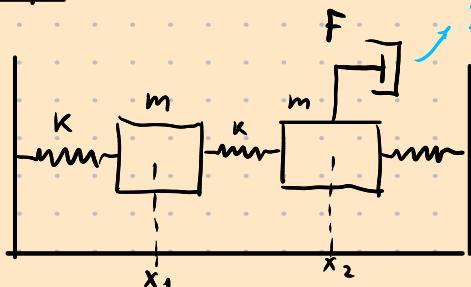
\Rightarrow protivbereme.



Zauverdune

β alyrae δ bun. yu. i u 2 gecidornu spredobais ramek b odelen G .

Primer



spec gecidornas area F

$$F = -\beta \dot{x}_2$$

Ucayrygen n.p. na yu.:

$$V = E > 0, \quad \dot{V}_2 = -\beta \dot{x}_2^2$$

$M\{\dot{x}_2 = 0\}$ - ne cayrym uchuk sprekisipmu,

keine n.p. (mouzi uchuk sprekisipmu, qe bropai yuzz tam, a neplui nec?

Ke momei) \Rightarrow no 1. F.-K. n.p. ac. yu.

Следствия из теоремы Бардемана - Красовского

① Теорема Чепурова о) стационар. уст.

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

Если $\forall U_\varepsilon(0) \exists V(x) > 0 : \dot{V}_x < 0$ (т.е. $\dot{U}_\varepsilon(0)$), то $x=0$ - ас.уст.

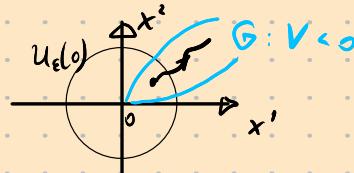
□ $M\{x=0\}$ + Б.К. ■■■

② Теорема Чебаева

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0$$

Если $\forall U_\varepsilon(0) \exists V(x) \in \mathbb{R}$ одн. $G\{x | V(x) < 0\}$, $\dot{V}_x < 0$ при $x \in G \Rightarrow$
 \Rightarrow н.п. $x=0$ - неуст.

□ $M\{x=0\}$ + Б.К. ■■■

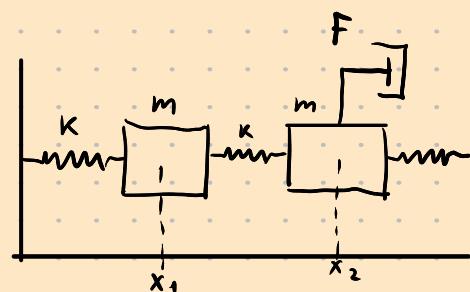


③ Осторожность т. Арганова - Рубинштейна

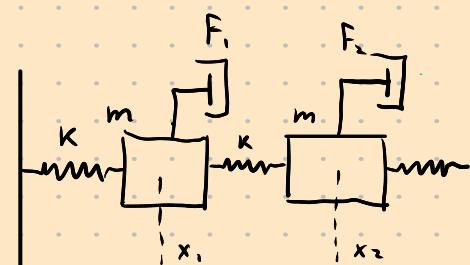
1. Если бал. уст. т. А.-Р. и генерирующие генерируют устойчив. или неуст. сим., то н.п. стабильна устойчивым.
2. Если бал. уст. т. А.-Р. и генерирующие генерируют неуст. сим. с разной амплитудой: $N = Q_i \dot{q}_i < 0$ (причем $\dot{q}_i = 0$), то н.п. стабильна ас.уст.

□ $M\{\dot{q}=0\}$ - паког. по условию - однозначно сим. с н.п. \Rightarrow
 \Rightarrow н.п. стабильны в M неуст. (причем $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) \Rightarrow Б.К. ■■■

Замечание



- застывшая неустойчивость
 $N = -\beta \dot{x}_2^2 \leq 0$
 (как сл. график от \dot{x}_1 и \dot{x}_2 ,
 она одноз. неустойч.)



- движущая неустойчивость
 $N = -\beta \dot{x}_1^2 - \beta \dot{x}_2^2 < 0$ ($\forall \dot{x}_1, \dot{x}_2$
 кроме случая $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$)

Основы теории дискурса

