

## Тригонометрические ряды Фурье

$f(x) \in L_2(-l, l)$  и им. нечетн. 2l

$L_2$ -адм. интегр., т.е.  $\int_{-l}^l f(x) dx$  адм. сх.

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

- косинус-ын 92яялс

### Numea Prinuha

$$f(x) \in L_2(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos t x dt \rightarrow 0 \quad \text{им} \quad x \rightarrow \infty$$

I - ограничен.

$$\int_I f(t) \sin t x dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие:  $f(x) \in L_2(-l; l) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

$$\text{Фурье-ряд } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right] - \text{ряд Фурье } f(x)$$

### Ошибки

1. Если  $f(x)$  нечетн., то  $a_n = 0$

Если  $f(x)$  четн., то  $b_n = 0$

2.  $f(x)$  - нечетн.  $\Rightarrow$  члены чётн. дроби не входят в ряд Фурье

### Дифференциальное уравнение разложения в п. Фурье

(следует из оп. дифф.)

1.  $f(x) \in L_2(-l; l)$ , им. нечетн. 2l

В т.  $x_0$  имеет конечное одностороннее производ.  $f'_+(x_0)$  и  $f'_-(x_0)$ .

Тогда ряд Ф.  $f(x)$  в т.  $x_0$  сходится к  $f(x_0)$ .

2. Ряде  $f(x) \in L_2(-l; l)$ , им. нечетн. 2l

$x_0$  - т. разрыва 1 рода,  $\exists$  конечное "одностороннее" одностороннее производное:

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда ряд Фурье в т.  $x_0$  сходится к оп. асимпт.  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



Yrašo  $f(x)$ , t. yra  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$ ,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

### 3agora 1

Palyginkime b p. Pysel  $f(x) = \operatorname{sign} x$ ,  $-\pi < x < \pi$

Isp. cymruo ypač vystingas gazy.



Q-uz neriei.  $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin \frac{\pi n t}{\pi} dt \quad \text{-gaz neriei, qd-mi}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sign} t \sin nt dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt dt = \left. \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \right|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin nx, \quad -\pi < x < \pi$$

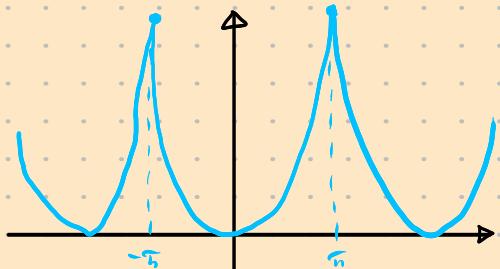
Rey ne 2b-a pabneriuo ex. nel būt spėjimi, t. k. gyvus eis pagalba  
(p/h ex. rey už nesp. qd-mi un. nesp. gyvus).

### 3agora 2

$$f(x) = x^2 \quad \text{na } -\pi < x < \pi$$

Cx-a b V<sub>i</sub>, no t negaliu

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Doci. že je p/m ex. p. typu

$f(x) \in L_2 [-1; 1]$ , nепр. 2г, и яконо - непр. на  $[-1; 1]$ .

( $f(x)$  непр. на  $[-1; 1]$ ,  $f'(x)$  яконо - непр. на  $[-1; 1]$ , т.е. един единичное  
т. разрывка 2 рода). Тогда  $p$ -типе  $f(x)$  ex. p/m на всем множестве определ.

Учебно: если  $f'(x)$  опр. близко на отрезке, то и нее не может быть разрывок  
2 рода. Поэтому в теореме о пам. ex. p.-типе в т. разрывка  $f'(x)$  не опр.

Реш. 4.  $x^2$  ex. p/m на  $(-\infty; +\infty)$ .

Чтв. 22-110

Решение: пог (для отрезка  $[-\pi, \pi]$ )

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  (1) ex. p/m на  $(-\infty; +\infty)$ . Тогда ее сумма  
 $f(x)$  - непр. 2го - непр. 2го-го, и (1) -  $p$ -типе для суммы.

□  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  - p/m ex.  $\Rightarrow f(x)$  непр.

Сумма p/m ex. пог из непр. 2го-го - непр. 2го-го.

Имеет разрыв 2го-го рода.

P/m ex. пог из непр. 2го-го на конечном отрезке можно номинировать  
как разрыв.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

Если p/m ex. пог непрерывна на  $\mathbb{R}$ -го-го, он является p/m ex.

$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$ , m конс.  
- ex. p/m.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt \right) = 0 \text{ для } n \neq m$$

$$= \theta_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \ dt$$

Операторните съществуващи  $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$  броят на  
които са неизвестни на отр.  $[-\pi; \pi]$  са взаимно прости.  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$$

Sagara 22-111

Что же входит в программу Python?

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  - rgy cx. p/m na R  $\Rightarrow$  rgy pypol ci chen yewnd  
 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  - karp-ryu  $\rightarrow 0$   $\Rightarrow$  ne p. pypol

Zagora 4

$$f(x) = x \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{- merkbar}, \quad a_n = 0$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot (\sin(n+1)t + \sin(nt)) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \left( -\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(nt)}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} dt \stackrel{0}{=} 0 + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n-1} dt \right] = \\
 &= (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} - b_n \text{ for } n \geq 2
 \end{aligned}$$

$$N_{pm} \quad n=1 \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} t \cos 2t \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt =$$



Reg ex. ne p/m

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2-1}} 2^n \sin nx$$

$$ka \left( -\bar{n}; \bar{n} \right)$$

## Pazometne no cos u no sin

$$f(x) \in L_n(0; 1)$$

Esim. ēiā pāzometne no zēniem  $\rightarrow f(x) \in L_n(-l; l)$

Ie ēiā pāz. Pāzometne  $f(x)$  no  $(-l; l)$  no cos

Esim. no nerēšamai, tāto no sin.

## Zagara 1

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{no sin}$$



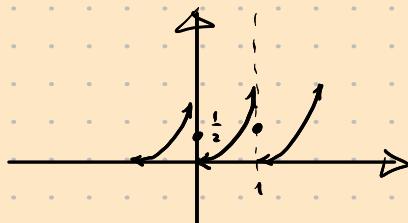
Pāz. cix. nepādzīvējošo (pāzību) na  $(-\infty; +\infty)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \sin nt dt$$

## Zagara 2

Pāzometne & pāz. Pāz.  $f(x) = x^2$  na  $(0; 1)$  c nepāzīmē!



$$2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^{1/2} t^2 \cos 2\pi n t dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^{1/2} t^2 \sin 2\pi n t dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{na } 0 < x < 1$$

Pāz. cix-a nepādzīvējošo na  $(-\infty; +\infty)$  s.u. cīņas pāzību

## Pāzometne no sin un cos zēniem kā nerēšamai spārniem gzs

$$\textcircled{1} \quad f(x) \in L_n(0; \frac{1}{2})$$



$$f(x) = f(-x), \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{- simetrija attiec. } x = \frac{1}{2}$$

Daudz no nerēšamai, garei cīņas nepāzīmē!

Bītīm cīņas  $a_n = b_n = 0$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{l}$  - polynomne no sin nerēšuv ugvīvus gys

(2)  $f(x) \in L_n(0; \frac{l}{2})$

$$f(x) = -f(l-x), \quad 0 < x < \frac{l}{2} \text{ - ceturkme sim. i. } (\frac{l}{2}; 0)$$



$$a_n = 0, \quad b_{n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{2\pi nx}{l} dt$$

Polynomne no sin ierēšuv ap. gys  
(polynomne no sin c nevienam l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2\pi nx}{l}$$

(3)  $f(x) = -f(l-x) \quad \text{na } 0 < x < \frac{l}{2} \text{ - ceturkme sim. i. } (\frac{l}{2}; 0)$

Danee no ierēšuv, garec c nevienam  $\pm l$

$$b_n = 0 \quad a_{2n} = 0$$

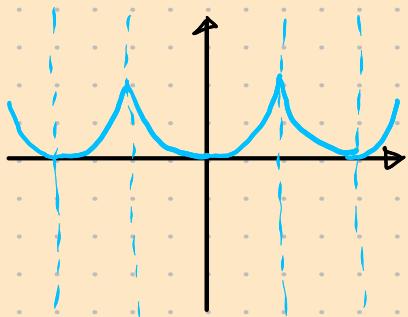
$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt$$

Polynomne no cos nerēšuv ap. gys

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

(4)  $f(x) = f(l-x) \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad \text{- ceturkme sim. } x = \frac{l}{2}$

Danee no ierēšuv, garec c nevienam  $\pm l$



$$f_n = 0 \quad a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{\pi \cdot 2nx}{l} dt$$

Polynomne no cos ierēšuv ap. gys

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{\pi \cdot 2nx}{l}$$

(gatīv. polynomne no cos c nevienam l)

## Zadacha 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Рассмотрим на  $\sin$  на  $[0, 2]$   $\{z_2\}$



Функция симм. осн.  $x=1$

$$F(x) = f(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Рассмотрим на  $\sin$  нечетных кр. гус.

$$f_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 (2n+1)^2} \sin n \left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

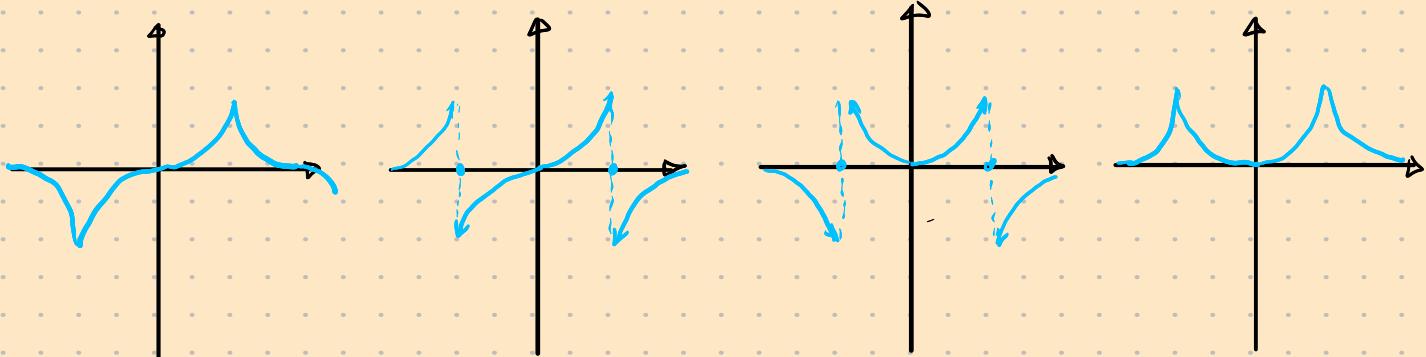
Рассмотрим  $\cos$  и  $\sin$  на  $(-\infty, +\infty)$  т.к.  $f(x)$  имеет непр. в  $x=0$  и  $x=\infty$  - маждад на  $[-u, u]$

## Zadacha 2

Построим кр. гусиной погибь. Рассмотрим  $\cos$  и  $\sin$  нечет. и четн. нечетных гус.

Сколько им один п/н?

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



одинично неч. кр. гус.

одн. п/н т.к. мин.

непр. в  $x=0$  и максим.

маждад на  $[0, \pi]$

одинично четн. кр. гус.

одн. п/н т.к. мин.

непр. в  $x=0$

косячно неч. кр. гус.

одн. п/н

косячно четн. кр. гус.

одн. п/н

$$f(x) = \sin x + 1$$



симметрическое  
с.н. ф/н

симметрическое  
с.н. ф/н

косимметрическое  
с.н. ф/н

косимметрическое  
с.н. ф/н

### Несимметрическое группогенерирование рядов Фурье

1)  $f(x)$  непр. в  $\Omega$  и кус. непр. на  $[-l; l]$ , тогда:

1. Ряд Ф. с.н. ф/н на  $(-\infty, +\infty)$

2. Ряд Ф. имеет несимметрическое групп.

$$\text{Если } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right]$$

то ряд Ф.  $f'(x)$  (к-пак кус. непр. на  $[-l; l]$ ) имеет групповое групп. ряда Фурье  $f$ :

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \cdot \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + b_n \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) - \text{не однозначенность!}$$

нечетный ряд Фурье

### Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{симметрический ряд } 2x \text{ на } (-\pi; \pi) \text{ по}$$

$x$ . + н.п. доказано



$$-\pi < x < \pi$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

## Равенство Парсвалье

$L_R^2(\mathbb{I})$  - инт. кв. оп-ии, адс. инт. на  $\mathbb{I}$  близкое с  $f(x)^2$ .

Для некоторо  $\mathbb{I} \subset L_R^2(\mathbb{I}) \subset L_R(\mathbb{I})$

Бес. подл. инт. - из  $L_R^2(a; b)$

Если  $f(x) \in L_R^2(-l; l)$  и инт. неог  $\neq l$ , то

$$\frac{d_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(x))^2 dx$$

В замену при альб. ср.

## Пример

$$f(x) = x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(x) = x^2;$$

$$\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

## Королевство Руркенера

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq C \int_a^b f'(x)^2 dx$$

## Задача 2

$f(x)$  непр. ви. на  $[a, b]$ ,  $f(a) = f(b) = 0$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'(x)^2 dx$$

□ Расс-ии  $\varphi(x) = f(x+a)$ ,  $\varphi(a) = f(a) = 0$

$$\varphi(b-a) = f(b) = 0$$

Prayer. no nėrėinom, žiūremo neveogam  $z \cdot (B-a)$  ( $l = B-a$ )

T. k. ona yra - ve., p. yra prie ca, p/n

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{B-a}$$



$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\pi n}{B-a} \cos \frac{\pi n x}{B-a}$$

$$\frac{2}{B-a} \int_0^{B-a} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{B-a} \int_a^{B-a} \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(B-a)^2} b_n^2$$



## Интегрирование рядов

Ряд  $f(x)$  квад. -непр. на  $[-l, l]$ , не.неп. 2л

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

un. p.  
действ

$$\text{Тогда } F(x) = \int_{-l}^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b_n}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{a_n}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) - \text{сумма п/м сх. п. действ}$$

$$C = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(t) dt$$

Если  $\frac{a_0 x}{2}$  не симметрич., то comes n не симметрич. п/м.

## Равномерное сжатие Ряда

Если  $f(x)$  кв. н. на  $[-l, l]$  и не.неп. 2л, то  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$F(x)$  - квад.непр. функ. на  $[-l, l]$ , если  $F'(x)$  квад.непр., то  $|F'(x)| \leq C$ ,  
также  $f$  не равномерн. 1 пога.

Конкр. в. Ряд симпл. кв-и.  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$   $|a_n|, |b_n| \leq C \frac{1}{n}$

$f(x)$  квад.н. если она нечетная в квад.непр. функ.

Например,  $\text{sign } x$  - квад.непр. функ., но не квад.н.

## Осаджение

Часть A. Если  $f(x)$  не.неп. 2л и  $f^{(k-1)}(x)$  квад.н. на  $[-l, l]$ ,  
то квад. функ.  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Часть B. Если  $f(x)$  не.неп. 2л,  $f^{(k-1)}(x)$  квад.н. на  $[-l, l]$ ,  $f^{(k-1)}(x)$   
квад.непр., то  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Задача: оценка констант сжатия для рядов.

## Пример

$$f(x) = x^2 \text{ на } [-\pi; \pi], \text{ с непр. } 2\pi$$

A)  $k_{-1} = 0, k=1 \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), b_n = 0$

$k_{-2} = 0, k_{-1} = 1, k=2 \quad a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  - условие применим

$$f(x) = x^3$$

A) нечетенное (одд симметрия в квадрате)

B)  $k_{-1} = 0, k=1 \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right), a_n = 0$

$$f(x) = (\pi^2 - x^2)^2 \quad [-\pi; \pi] \text{ с непр. } 2\pi$$

Несколько граничных точек непр. в т.  $\pi$  и  $-\pi$  (на концах много доказать непр.)

$$f(\pi) = f(-\pi) = 0 \quad - \text{непр.}$$

$$f'(x) = 2(\pi^2 - x^2) \cdot (-2x)$$

$$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$$

$$f''(\pi) = f''(-\pi) \quad - \text{квад. непр.}$$

$$f'''(\pi) \neq f'''(-\pi) \quad - \text{квад. непр.}$$

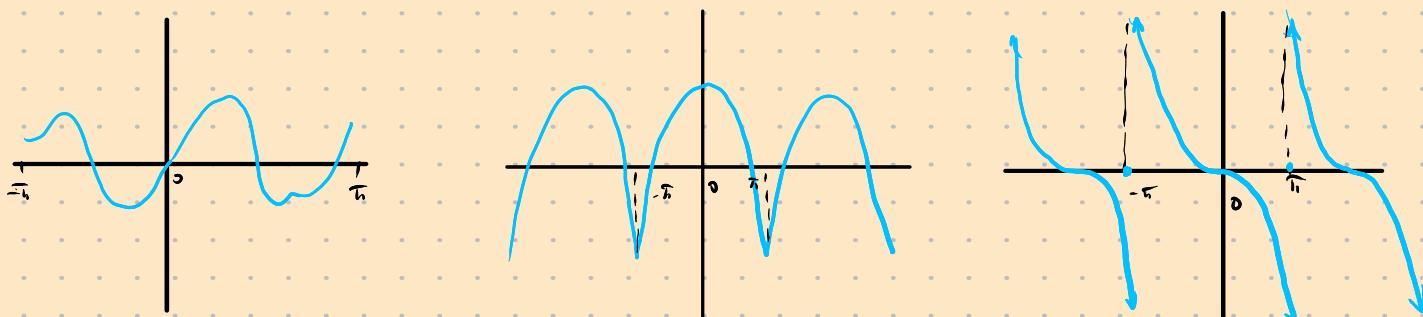
A)  $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad b_n = 0$

B)  $a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad - \text{на практике лучше брать B!}$

## Задача 1

$$f(x) = \pi^3 x - x^3, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{парн. к p.} \quad \text{Рассмотрим sin.}$$

Форма кривой симметрична относительно оси ординат.



пог

пог'

пог''

## Генуябенне ряб мережен геометрических

$$\text{Если } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = a$$

Однаково неверно,  $(-1)^n$  - осн., ср. арифм.  $\rightarrow 0$ .

Ряд  $1+2-3+1+2-3+\dots$  расходящийся (однако все члены  $\rightarrow 0$ )

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=3k \\ 1, & n=3k+1 \\ 3, & n=3k+2 \end{cases}$$

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} \quad - \text{метог Римана (метог ср.-арифм.)}$$

$$\sigma_n = \begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}, & n=3k \\ \frac{4k+1}{3k+1}, & n=3k+1 \\ \frac{4k+4}{3k+2}, & n=3k+2 \end{cases} \quad \sigma_{3k} = \frac{4}{3} \quad \sigma_{3k+1} \rightarrow \frac{4}{3} \quad \sigma_{3k+2} \rightarrow \frac{4}{3} \quad \sigma_n \rightarrow \frac{4}{3}$$

## Задача 1

$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots$  - ряд сходящийся  $\Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

А бүт мөнеген Римана сипаттык:  $S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx$  - компонентел үзүүлэл

$$S_n = \frac{2 \sum_{k=1}^n \sin kx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^n \cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} =$$

$x \neq 2\pi k$

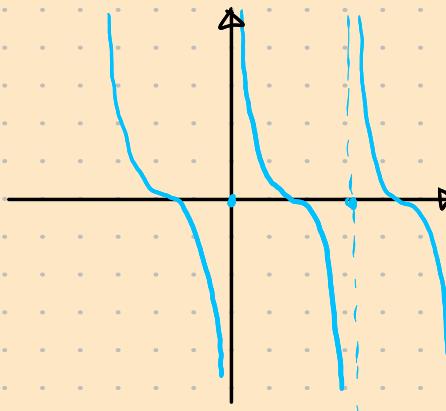
$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n} \quad - \text{компонентел үзүүлэл Римана}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{2 \sum_{k=1}^n \cos(k+\frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2}}{n \cdot 4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\sum_{k=1}^n (\sin((k+1)x) - \sin kx)}{n \cdot 4 \sin^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\sin((n+1)x) - \sin x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim \sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, & x \neq 2\pi k \\ 0, & x = 2\pi k \end{cases}$$



## Симметризация p-Пурье на конечном Рейнхардте

Пусть  $f(x) \in L_p(-l, l)$ ,  $\alpha_n$  нечетные  $2l$  и неяв. в  $\mathbb{R}$ . Тогда при  $p$ -Пурье  $f(x)$  симметризация  $T_{\alpha_n} x_0 \times f(x_0)$  неяв. Рейнхардт.

## Равномерное неяв. симметризование

Пусть  $f(x)$  неяв. нечетные  $2l$  и неяв. на  $[-l, l]$ . Тогда  $p$ -Пурье  $F$  равномерно симметрическое  $\times f(x)$  неяв. Рейнхардт на  $(-\infty, +\infty)$  ( $\sigma_n(F, x) \xrightarrow[R]{} f(x)$ )

Усл

Пусть  $f(x) \in L_p(-l, l)$  и неяв. в  $x_0$ , кроме  $p$ -Пурье в  $x_0$  и  $x_0$ .  
Тогда он симметричен  $\times f(x_0)$ .

## Теорема Бейнингеровской гармонической (согласие из нея).

Пусть  $f(x)$  неяв. на  $[-l, l]$ ,  $f(-l) = f(l)$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$  гармоническая сумма  $\tilde{T}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos \frac{\pi k x}{l} + \beta_k \sin \frac{\pi k x}{l})$ , кроме  $\forall x \in [-l, l] \rightarrow |f(x) - \tilde{T}(x)| < \varepsilon$ .

## Нормированное пространство

Норм.пр.-бо  $L$  наз-ся нормированным (НП), если в нем обеяне норма.

$\forall x \in L$  смыс.  $\|x\| \in \mathbb{R}$ , такое, что

$$1. \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$2. \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$3. \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Для Евклидова пр.-бо  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

НП  $\Rightarrow$  метрика, если  $d(x, y) = \|x-y\|$

Нес-ко  $x_n \rightarrow x$  в НП  $L$ , если  $\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$(\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 \rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon)$$

Нес-ко  $x_n$  в НП  $\Rightarrow$  сходимость, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n, m > n_0 \rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Нес-ко сходимости  $x_n$  сходимости. Однозначно (единственность).

НП называется нормой (функцией), если в нем норма определена и однозначна.

Пример:  $\mathbb{R}^n$  ( $\|x\| = |x|$ ).

Важное свойство НП не содержит! (исключение из общего правила не буд.)

Будет, модуль непрерывной пр.-бо с модулем непрерывности.

①  $C[a, b]$  - пр.-бо сп-ми, непр. на  $[a, b]$ ,  $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$ .

$f_n \rightarrow f$  в  $C[a, b]$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 \rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$

$$\left( \max_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

По пр. Каждое о-правиле пр.-ми,  $C[a, b]$  нормал.

②  $C'[a, b]$  - пр.-бо сп-ми, непр. диф. на  $[a, b]$ ,  $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)| + \max_{[a, b]} |f'(x)|$

$C'[a, b]$  - нормал.

□ Пусть  $f_n \subset C[a, b]$  и  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n, m > n_0 \rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ .

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ и } |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon, \Rightarrow$$

Teorema  $\exists$   $f_n(x) \in C^1[a, b]$ ,  $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0)$  cx.,

$f'_n(x) \Rightarrow \psi(x)$  na  $[a, b]$ ,  $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) = f_n(x)$ ,

$f(x) \in C^1[a, b]$ ,  $f'(x) = \psi(x)$ .

$\Rightarrow$  No sp. Kumm p-w cx-sm,  $f_n(x) \text{ u } f'_n(x)$  p/w cx. na  $[a, b]$ .

$f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ,  $f'_n(x) \Rightarrow \psi(x) = f'(x)$

$f(x) \in C^1[a, b]$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$   $|f'_n(x) - f'(x)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$  &  $C^1[a, b]$ , i.e.  $C^1[a, b]$  normo.

### ③ Пример ненормо np-fa

Mn-ho nesp. qm-va na  $[a, b]$  c normoi  $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$ ,

Bozinen  $f(x) = |x|$  na  $[-\bar{x}; \bar{x}]$ , jaree ' nemogen  $\bar{x}$  - kymas - mayas' na  $[-\bar{x}; \bar{x}]$  u nesp.  $\Rightarrow$  p. Pysse cx-a pribuzdys:  $S_n(f, x) \Rightarrow f(x)$

T.e. ona qmymasivina (nem-ho nesp. qm-va), no npege ne zhe  $\Rightarrow$  nesp. qm-va.  $\Rightarrow$  normo ne slb-a vaygynelice b' numen np-be.

Zman ona nenevel.

### Dymne normo b' np-be nesp. qm-va

$$L^2_c[a, b] \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \quad - \text{nenevel}$$

$$L^1_c[a, b] \quad \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

$(C[a, b]) \quad f_n \rightarrow f$ ,  $\exists \lim \|f_n - f\|_c \rightarrow 0$  - pribuzdys cx-iz

$L^2_c[a, b] \quad \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0 : \int_a^b |f_n - f|^2 dx \rightarrow 0$  - cx-iz B qayyazman

$L^1_c[a, b] \quad \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 : \int_a^b |f_n - f| dx \rightarrow 0$  - cx-iz B qayyazman



Bere q-un neng.

p/n cx-iz - called convex.

$\Rightarrow$  n̄l̄ w̄l̄ w̄ḡl̄ cx-iz & sp. ab.

$$\|f_n - f\|_c \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2 &\rightarrow 0 : \int_a^b (f_n - f)^2 dx \leq \\ &\leq \|f_n - f\|_c^2 \cdot \int_a^b 1 dx = (b-a) \|f_n - f\|_c^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Analogous, p/n cx.  $\rightarrow$  cx. sp.

$\Rightarrow$  cx. & sp. ab.  $\rightarrow$  cx. sp.

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n - f| dx \leq \sqrt{\int_a^b (f_n - f)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1 dx} = \sqrt{b-a} \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

B ebungsaufg. np-be  $L^2$

$$\left| \langle f, g \rangle \right| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$$

nepaiverklo form - fynnenoblicano

Pac-nun  $f_n(x)$ :



Kann du m̄ dura bñndia  $h_n$  zgn̄da, n̄l̄ reinheits cx-iz  $\rightarrow 0$ .

$$\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \leq 0$$

- p/n cx-iz  $\Leftrightarrow h_n \rightarrow 0$  :  $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = h_n$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n - f| dx = \frac{h_n}{2n}$$

- cx-iz & sp. abg., emm  $h_n = O(n)$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2 &= \sqrt{\int_a^b (f_n - f)^2 dx} = \sqrt{2 \int_0^{1/2n} (kx)^2 dx} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2n} k^2} = \sqrt{\frac{2}{2n}} k = \sqrt{\frac{2}{2n}} h_n = \sqrt{\frac{2}{2n}} \cdot h_n = \sqrt{\frac{1}{n}} h_n \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} \cdot h_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$K \cdot \frac{1}{2n} = h_n \Rightarrow K = 2n \cdot h_n$$

- cx-iz & sp. abg., emm  $h_n = O(\sqrt{n})$

Emm  $h_n = 1$ : esst & sp. abg., net reinheits.

Emm  $h_n = \sqrt{n}$ : esst & sp. abg., net & sp. abg.

Emm  $h_n = n$ : esst n̄l̄ reinheits, net oszillante fñnge

### ③ No ver. crenaru

$1, x, x^2, \dots, x^{2^{n+1}}, \dots$  - námae u dne-nd B  $C[0; 2]$ ? Dac!

$$f(x) \in C[0, 2]$$

$g(x) = f(x) - f(0)$ , nrogerm. no ver., zájvem c rep.  $2^n$

No r. Blízepnizace:

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists T(x)$  - fgmom. unorov.  $\forall x \in [-\bar{n}; \bar{n}] \rightarrow |g(x) - T(x)| < \varepsilon$

$T(x)$  - vyma řešena  $\Rightarrow T(x)$  - nérirov.,  $g(x)$  - nérirov.

Požaduj ex-in p. Maxopena  $+\infty$ , my ex. p/m no V kon. nrogerm.  $\Rightarrow$  na  $[-\bar{n}; \bar{n}]$

B požad. řešova nérirov. crenaru  $\Rightarrow \exists P(x)$  - ver. unorov.  $\forall x \in [-\bar{n}; \bar{n}]$

$|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2 \Rightarrow \forall x \in [0, 2] \rightarrow |g(x) - P(x)| < \varepsilon$

$$\text{Dále } |f(x) - (f(0) + P(x))| = |g(x) - P(x)| < \varepsilon$$

$f(0) + P(x)$  - no ver. crenaru  $1, x, x^2, \dots$

### ④ No ver. crenaru

$1, x^2, x^4, \dots, x^{2^n}$  &  $C[0; 10]$  - náma?

Nrogerm. no řešova na  $[-10; 10]$ , gáve c rep. 20 ( $l=10$ )

No r. Blízepnizace  $\rightarrow \exists$  řeš. fgmom. unorov. (t. u. vyma řešena)

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos \frac{\pi k x}{10} + \beta_k \sin \frac{\pi k x}{10})$$

$\forall x \in [-10; 10] \rightarrow |f(x) - T(x)| < \varepsilon$

Dále vyma. řešova vyma p. Maxopena,  $P(x)$  - řešova an. uno-  
zoru

$\forall x \in [-10; 10] \rightarrow |T(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

### ⑤ Tu ne cren. B $C[-1; 10]$

Nes! Myšl. nrover. řešova řešova p/m

### ⑥ $1, x^6, x^{12}, x^{18}, \dots$ & $C[0; 10]$

(gerade zámeny  $x^3 = t$ , ansema:  $1, t^2, t^3, \dots$  &  $C[0; 10^3]$ .)

Analogomu n. 4 ziaa ase-ma norma.

$f(x) \in C[0; 10]$ , Paa-um  $\varphi(t) = f(\sqrt[3]{t}) \in C[0; 10^3]$  no i. o nemy. vannen  
cp-um,  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists P(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$ ,  $\forall t \in [0; 10^3] \rightarrow |\varphi(t) - P(t)| < \varepsilon$ .  
 $t = x^3 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists P^*(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^{3k} : \forall x \in [0; 10] \rightarrow |\varphi(x^3) - P^*(x)| < \varepsilon \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |f(x) - P^*(x)| < \varepsilon$ .

u/a

## Теорема б про спрощеність $L^2$

Корені  $e_1, e_2, \dots, e_n$  норма є  $L^2_{\mu} [a, b]$  (норма  $L^2_c [a, b]$ , норма  $L^2_{\mu} [a, b]$ , норма  $L^2_c [a, b]$ ), тоді  $\forall f \in \dots \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists d_1, \dots, d_n : \|f - \sum_{k=1}^n d_k e_k\|_2 < \varepsilon$ .

### Задача

Если каждое непр. на  $[a, b]$  есть норма в  $C[a, b]$ , то она норма в  $L^2_{\mu} [a, b]$  (и в одног. нп-дак)

□ Доказ.: нп-бо  $C[a, b]$  норма в  $L^2_{\mu} [a, b]$ , т.е.

$$\forall f \in L^2_{\mu} [a, b] \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists g - \text{непр. на } [a, b] : \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

$$f \in L^2_{\mu} [a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists g - \text{непр. на } [a, b] : \|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Для  $g$   $\exists P(x)$ -аналогично для корней  $e_1, \dots, e_n$ :

$$\|g - P\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|g - P\|_c$$

$$\text{т.е. если каждая норма в } C, \|g - P\|_c < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}} \Rightarrow \|f - P\|_2 < \varepsilon$$

□

Зад. - всп., якщо кожна норма є нп-бо, та  $f$ -непр. на  $[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$ .

①  $1, x, x^2, \dots$

норма в  $L^2_{\mu} [a, b]$ , т.к. норма в  $C[a, b]$

②  $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$

в  $L^2_{\mu} [-\pi, \pi]$  - норма тає. норма в нп-бо  $C[-\pi, \pi]$ , інш. якщо  $f(\pi) = f(-\pi)$ .

### Форема

Если  $f \in L^2_{\mu} (-l; l)$ , то є нп-бо  $T(x) \in \mathbb{P}$  для якого  $\|f(x) - T(x)\|_2 \leq \varepsilon$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists T(x) - \text{множ. сумма п-членів} : \|f - T\|_2 < \varepsilon$$

Typ. un-va:  $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{\pi n x}{l}, \sin \frac{\pi n x}{l}, \dots$   
 norma b  $L^2_R(-l; l)$ .

③  $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$

b  $L^2_R(0; \pi)$  (b C nemava i.e. banya  $f(x) = 0$ )

Dikq.: norma, programma no neriemora, garee c neg.  $2\pi$   
 $f \in L^2_R(-\pi; \pi)$

$S_n(f, x) \rightarrow f(x)$  b ||...||<sub>2</sub> (b sp. ob.)

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists T(x) -$  neriemorin sym. uniorien:  $\|f - T\|_2 < \varepsilon$   
 'zad. cyane  
 p-lyyle'

④  $\cos x, \cos 3x, \dots, \cos (2n+1)x, \dots$  b  $L^2_R(0; \frac{\pi}{2})$

Norma! Programma  $f(-x) = -f(x), 0 < x < \frac{\pi}{2}$ , garee no rie, garee c neg.  $2\pi$ .

$S_n(f, x) \rightarrow f(x)$  b sp. ob. - am-va norma anavor 3. (b C nemava).

⑤  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$  b  $L^2_R(-\pi; \pi)$ .

Xib oporendava  
 Esim. un-va  $e_1, e_2, \dots, e_n$  uz vayelkuse x. ob norma b Ebungaben n-ka  
 l, so unikas vayelk. negemora (ne vayel. c  $e_1, e_2, \dots, e_n$ )  $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots,$   
 $e_{n+2}$  ne bytet norman.

□ Die normi un-va  $e_1, e_2, \dots, e_n$  b deinenormeinen Ebungaben n-ka  
 bin. p-ka Pareebav:

$$\forall x \rightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_i)^2$$

x - normi so xk-i vay. un-va, ne vayelk. negem. Esim. negem. norma,  
 ko bin. p-ka Pareebav:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_{n_k})^2 \quad \text{nojukavne.}$$



Obes' net, bax amirende  $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  norma  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  negemora norma.

$1, x, x^2, \dots, x^n$  nenu b  $L^2_{\mu} [1, 2]$

$x, x^3, \dots, x^{2n+1}$  nenu b  $L^2_{\mu} [1, 2]$

- b žen gno?

Cvetna neapersonalna.

## Рэй Фурье в комплексной форме

$f(x) \in L_2(-\ell, \ell)$ , үзүүлгүүртэй

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-\frac{inx}{\ell}} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad -n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{inx}{\ell}} \quad (\Rightarrow \text{тоо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n)$$

### Пример

$e^x$  8 р. фурье на  $(-\pi, \pi)$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{sh\pi}{\pi}$$

$n \neq 0$ )

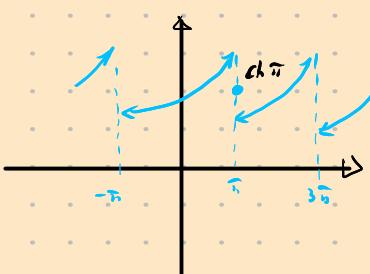
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-int)} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\pi i} - e^{-\pi i}}{1-in} \cdot (-1)^n$$

$$\begin{aligned} e^{-int} &= \cos nx - i \sin nx \\ e^{int} &= \cos nx + i \sin nx \end{aligned} \quad \left. \right\} = (-1)^n$$

$$\text{Рэй: } \frac{sh\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx} =$$

$$= \frac{sh\pi}{\pi} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} e^{-inx} \right) =$$

$$= \frac{sh\pi}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right)$$



Рэй сх. не р/н

