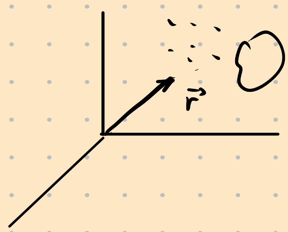
Равновесие



$\vec r = \vec r_0 = const$ — для всех т. => система в равновесии в данной с.к.

$\vec r = \vec r(q)$ для стац. сис-м (связи стационарны)

Полож. равновес. (п.р.) обоб. точки $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(x = \begin{pmatrix} q \\ \dot q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} \right)$

Если q_0 - п.р., в стац. сис-ме $\Leftrightarrow$ $Q(q_0, 0, t) = 0$

Если $Q = -\nabla П$, то в п.р. $\nabla П = 0$.

Принцип вирт. перемещ.

$\vec r = \vec r_0$ (набор точек) яв-ся п.р. $\Leftrightarrow$ $\underline{\forall}\, \delta \vec r$ из п.р. $\to$ $\delta A = \int \vec F \cdot \delta \vec r \, dm = 0$.

Об условии $Q = 0$

Пример

$\ddot x = \alpha x^\beta$, $\beta \in (0;1)$ („Сила" $m\alpha x^\beta$ равна 0 в т. 0. яв-ся ли т. 0 полож. равновес?)

$x(0) = 0$, $\dot x(0) = 0$

1. $x = 0$ — реш-е.
2. Рассм. $x = at^b \not\equiv 0$

$ab(b-1)t^{b-2} = \alpha a^\beta t^{\beta b}$

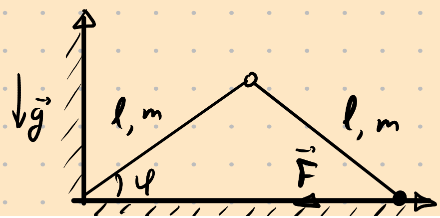
$b - 2 = \beta b \Rightarrow b = \frac{2}{1-\beta} > 0 \Rightarrow x(0) = 0$, причём $\dot x(0) = 0$ тоже.

$\frac{2(1+\beta)}{(1-\beta)^2} = \alpha a^{\beta - 1} \Rightarrow a = \left[\frac{2(1+\beta)}{\alpha(1-\beta)^2} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$

Как так? 2 реш-я для нач. усл. $x = 0$, $\dot x = 0$.

А потому что αx^β не удовл. усл. Липшица! Из-за этого т. Коши не работает.

Задача 1



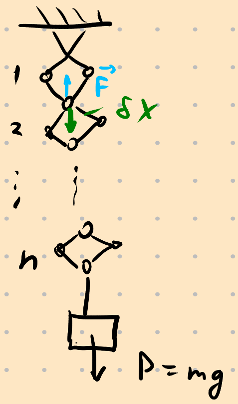
$П = 2lF\cos\varphi + mgl\sin\varphi$

$П_{,\varphi} = mgl\cos\varphi - 2lF\sin\varphi = 0$

$F = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\varphi$

Чем острее угол, тем меньше нужна сила.

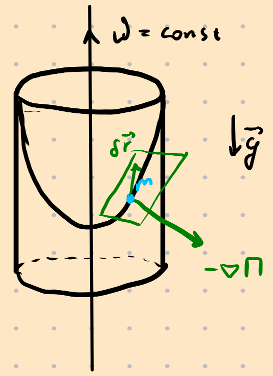
Задача 2



$$\delta A = nP\delta x - F\delta x = 0$$

$$F = nP$$

Задача 3



Жидкость во вращ. сосуде.

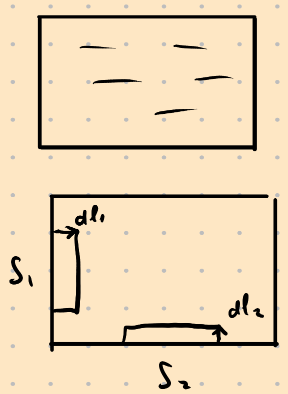
Т. массой m должна нах-ся в равновесии, иначе форма пов-ти будет меняться.

Во вращ. сис-ме отсчёта:

$$\vec{F} = -\nabla\Pi \qquad \Pi = mgz - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$$\delta A = -\nabla\Pi\,\delta\vec{r} = 0 = -d\Pi \Rightarrow \Pi = const \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + C$$

Задача 4



Несжим. жидкость.

Д-ть, что давл. жидк-ти равномерно

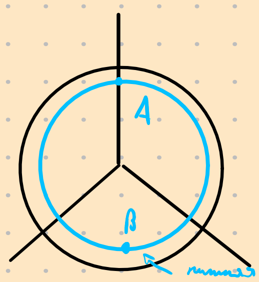
$$\begin{cases} \delta A = P_1 S_1 dl_1 + P_2 S_2 dl_2 = 0 \\ S_1 dl_1 + S_2 dl_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dl_2 = -\frac{S_1}{S_2} dl_1 \Rightarrow \delta A = (P_1 - P_2)\,dl_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

Задача 5

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

– мат. т. движется по кривой в поле тяжести



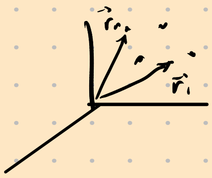
Найти полож. равновесия

1. Из принципа вирт. перемещ. — т. A и B, т.к. $\delta\vec{r} \perp m\vec{g}$

Формальное решение:

- Если связь задана в виде $F(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$, то $\underbrace{f_{i,\vec{r}_k}}\cdot\delta\vec{r}^{\,k} = 0$

! Это градиент!



$$\begin{cases} 2x\,\delta x + 2y\,\delta y + 2z\,\delta z = 0 \\ \delta x + \delta y + \delta z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Из принципа вирт. перемещ. $\delta A = mg\,\delta z \Rightarrow \delta z = 0$

$$\begin{cases} x\,\delta x + y\,\delta y = 0 \\ \delta x + \delta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta y = -\delta x, \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

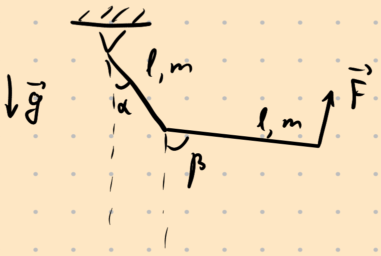
$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ z = 1 - 2x \end{cases}$$

$$2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

2. Поиск условного экстремума потенциальной энергии при усл. этих связей

Задача 6



$F = \text{const}$

Найти п.р.

$$\begin{cases} Q_\alpha = -\Pi^g_{,\alpha} + Q^F_\alpha = 0 \\ Q_\beta = -\Pi^g_{,\beta} + Q^F_\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Pi = -\frac{3}{2} mgl\cos\alpha - \frac{1}{2} mgl\cos\beta$$

$$Q^F_\beta = Fl \qquad Q^F_\alpha = Fl\cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} mgl\sin\alpha + Fl\cos(\alpha-\beta) = 0 \\ \frac{1}{2} mgl\sin\beta + Fl = 0 \end{cases}$$

$\sin\beta = \dfrac{2F}{mg}$ – есть 3 случая: 1. $F > mg/2$ – нет п.р.

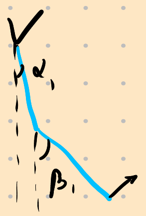
2. $F = mg/2$ – $\beta = \frac{\pi}{2}$

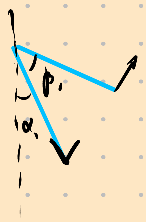
3. $F < mg/2$ – $\beta_1 = \arcsin\dfrac{2F}{mg}$, $\beta_2 = \pi - \beta_1$

$$-\frac{3}{2} mg\sin\alpha + F(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 0$$

$$F\cos\beta + \left(F\sin\beta - \frac{3}{2} mg\right)\operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \underbrace{\frac{F\cos\beta}{\frac{3}{2}mg - F\sin\beta}}_{f(\beta)} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \operatorname{arctg} f(\beta_1) \\ \alpha_2 = \pi + \alpha_1 \end{matrix} \Big\} - \beta_1 \quad \begin{matrix} \alpha_3 = -\alpha_1 \\ \alpha_4 = \pi - \alpha_1 \end{matrix} \Big\} - \pi - \beta_1$$





Устойчивость пол. матриц

$\dot{x} = Ax$, $\quad A = \text{const}$

$x = he^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни

$x = 0$ – ас. уст. $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$

$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$

Необх. усл. $\operatorname{sign} a_n = \dots = \operatorname{sign} a_0$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad a_0 > 0 \text{ в } P(\lambda)$$

Матрица Гурвица

$P(\lambda)$ уст. $\Leftrightarrow \Delta_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$

Критерий Рауса – Гурвица в форме Льенара и Шипара

1. Вып. усл-е $a_i > 0$, полином приведён к виду $a_0 > 0$.
2. $\left[\begin{array}{l} \Delta_{2k} > 0 \\ \Delta_{2k+1} > 0 \end{array}\right.$ (либо, либо) – проверяется то, что удобнее

$\exists$ $P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$. Проверим, что необх. усл. уст. совпадает с критерием:

$P(\lambda) \mapsto \frac{a_2}{a_0} \lambda^2 + \frac{a_1}{a_0} \lambda + 1$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_0} & 1 \\ 0 & \frac{a_2}{a_0} \end{pmatrix}$$

1. Р.-Г.:

$\frac{a_1}{a_0} > 0$

$\frac{a_1 a_2}{a_0^2} > 0$ $\quad \Rightarrow \operatorname{sign} a_2 = \operatorname{sign} a_1 = \operatorname{sign} a_0$

2. Р.Г. в форме Л.-Ш.:

То же самое

Линеаризация ур-ий движения мех. сис-м часто приводят к ур-ям вида:

$$\underbrace{A\ddot{q}}_{\text{из кин. энергии}} + \underbrace{B\dot{q}}_{\text{гироскоп., и диссипат. силы}} + \underbrace{Cq}_{\text{линеаризация консервативных сил}} = 0$$

Нормальная форма Коши: $\begin{cases} \dot{q} = u \\ \dot{u} = -A^{-1}Cq - A^{-1}Bu \end{cases}$ (1) $\longleftrightarrow \dot{x} = Dx$

Как искать решения? Как получить $P(\lambda)$?

Покажем, что хар. ур-е сис-мы (1) выглядит след. образом:

$$q = he^{\lambda t} \Rightarrow \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda E - D) = \begin{vmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda E - D) = 0 \iff \det\left(F(\lambda E - D)\right) = 0 \quad \forall F,\ \det F \neq 0$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ A^{-1}C & \lambda E + A^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda E & -E \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ C & \lambda A + B \end{pmatrix} \sim$$

$\lambda = 0$ - не реш. $\sim$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ \lambda C & \lambda^2 A + \lambda B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda C & -C \\ 0 & \lambda^2 A + \lambda B + C \end{pmatrix} = 0 \iff \det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \quad \text{ЧТД}$$

<u>Пример</u>

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} - x + y = 0 \end{cases}$$ — исследовать устойчивость п.р. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -1 & \lambda^2 + \beta\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \beta\lambda + 1 - \alpha = 0$$

$$\lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + (1-\alpha) = 0$$

Т.к. $a_4 = 1 > 0$ то все коэф. должны быть > 0 по необх. усл. $\Rightarrow$

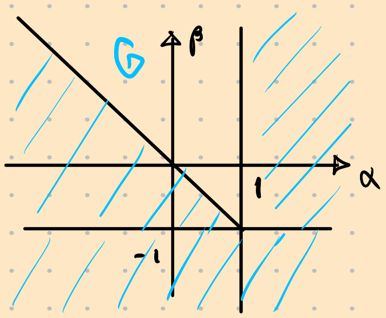
$\Rightarrow$ приведение делать не надо, используем кр. Р.-Г. в форме Л.-Ш.

Из необх. усл. $\beta > -1$, $\alpha < 1$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ \beta+1 & \beta+2 & \beta+1 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & \beta+1 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = \beta+1 > 0$ $\qquad$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta+1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & \beta+1 \end{vmatrix} =$

$= (\beta+1)^2(\alpha+\beta) > 0 \Rightarrow \beta > -\alpha$



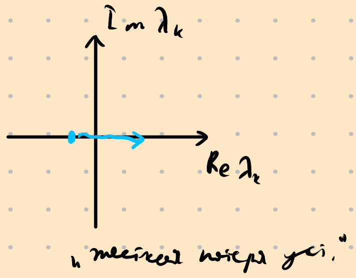
G – область устойчивости

Поведение корней на ∂G:

1. $\alpha = 1$

$$P(\lambda) = \lambda\,[\underbrace{\lambda^3 + \ldots + \beta + 1}_{\text{уст. полином (можно показать)}}]$$

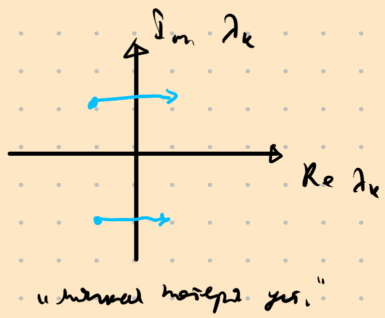
Появился корень $\lambda_k = 0$



2. $\beta = -\alpha$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (\beta+1)\lambda^3 + (\beta+2)\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + 1 + \beta$$

$\pm i$ – корень (можно показать)



Первый метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$ – автономная СДУ (нелинейная)

$X(x)$ – непр. функ. в т. $x = 0$, а $X^i_{,j}$ – $\exists$ и огр. в окр-ти н.р.

Тогда эту сис-му можно линеаризовать: $\dot{x} = Ax + f(x)$

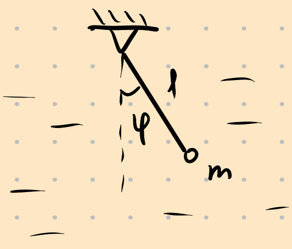
$A = X^i_{,j}(0)$ $\qquad$ $\|f\| \leq a\|x\|^2$ (разл. в ряд Тейлора)

Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Если в сис-ме $\dot{x} = Ax$ $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ $\forall i = \overline{1,n}$, λ_i – корни $P(\lambda)$ (хар. многочлен), то п.р. $x = 0$ – ас. уст. и в линеаризованной, и в исходной сис-ах.

Если $\exists \lambda_i$: $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$, то п.р. неуст. в обеих сис-ах.

<u>Пример</u>



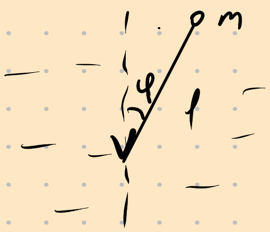
$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

Исследовать п.р. $\varphi = 0$ на устойчивость

Линейное прибл.: $ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0$

$$\underset{0}{\underset{\vee}{ml^2}}\lambda^2 + \underset{0}{\underset{\vee}{\beta l}}\lambda + \underset{0}{\underset{\vee}{mgl}} = 0 \text{ – полином} \Rightarrow \text{устойчив} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ п.р. $\varphi = 0$ – ас. уст. по т. Ляпунова.



$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi = 0$$
$$\downarrow \text{лин.}$$
$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta l\dot{\varphi} - mgl\varphi = 0$$

$\varphi = 0$ – неуст. по т. Ляпунова.

Второй (прямой) метод Ляпунова

$\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$ – автоном. СДУ

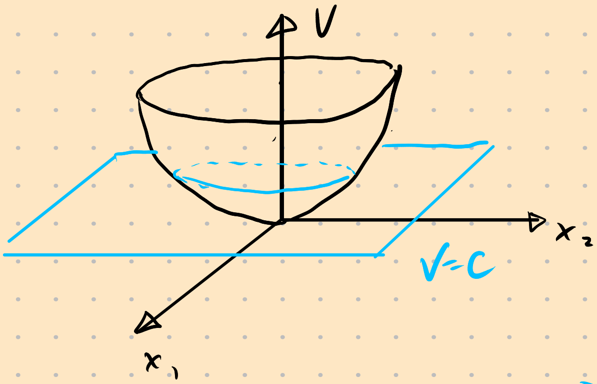
$V(x)$, $V(0) = 0$ – ф-ия Ляпунова (скалярная). $V(x)$ непр. дифф.

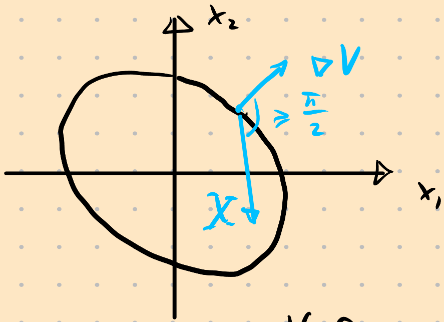
Производная в силу сис-мы: $\dot{V}_X = \nabla V \cdot X = V_{,i} X^i$.

Теорема Ляпунова

Если в окр-ти п.р. $U_\varepsilon(0)$ $\exists V(x)$: $V(x)$ имеет в $x = 0$ строгий min, а $\dot{V}_X \le 0$ в $U_\varepsilon(0)$ $\Rightarrow$ п.р. $x = 0$ – устойчиво.

Когда есть мнимые корни хар. многочлена, то в лин. сис-ме появляются периодич. реш-я с sin и cos => в исходной (с тонкой добавкой) они могут стать как уст., так и неуст. Эта т. решает проблему.





$V = C = \text{const}$