

Решение линейного уравнения 2 порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad x \in I \quad \text{все } a_i \text{ непрерывны, } a_0(x) \neq 0$$

Предположим, мы знаем y_1 - решение однородного ур-я

Ищем в виде $e^{\lambda x}$, x^k , $a_1x + b$ и т.д.

Методы ОРОУ:

y_1 - однородное

y - произв. реш-е однородного ур-я

Ф-ла Лувье - Абеля: $W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = C\varphi(x)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\varphi(x) \quad \frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2} dx + C_1$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ОРНУ: Выводим произвольное: $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \frac{b(x)}{a_0}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$$

$$C_1'(x) = \dots \quad C_2'(x) = \dots$$

Задача 1

$$2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, \quad x > 0$$

ОРОУ: $y_1 = e^{-x}$

y - произв., y_1 - известное

$$W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx} = Ce^{-(2x + \frac{1}{2} \ln x)} = Ce^{-2x} x^{-1/2}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{4x+1}{2x} dx = 2x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx = 2x + \frac{1}{2} \ln x + C_1$$

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y'e^{-x} + ye^{-x}$$

Далее на e^{-2x} :

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-1/2}$$

$$\parallel$$
$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' = \frac{y}{e^{-x}} = C x^{-1/2} + C_1$$

ОПОР $y = C_1 e^{-x} + C e^{-x} \sqrt{x}$

ОПНУ $y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-x} \sqrt{x}$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} + C_2'(x) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad C_1'(x) = -1$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \quad C_1(x) = -x + C_1$$

Итого: $y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x} \sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x} + x e^{-x}$

Задача 2

$$x^2 (\ln x - 1) y'' - x y' + y = x (\ln x - 1)^2, \quad x > e$$

ОПОР: $y_1 = x$

$$\left| \frac{y_1}{y_1'} \right| = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C (\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_1 y_1' - y_1' y}{y_1^2} = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2} \quad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\parallel$$
$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C (\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C \frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

ОПНУ: $y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x) x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \quad | \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x) x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$$C_2'(x) = -1 \quad C_1'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$C_2(x) = -x + C_2 \quad C_1(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1$$

Orbit: $y = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \right) x + (C_2 - x) \ln x$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$$

Задача 3

$$(2x+3) y'' - 2y' - \frac{6}{x^2} y = 3(2x+3)^2$$

Ищем ЧРД в виде x^k :

$$k(k-1)(2x+3)x^{k-2} - 2kx^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$$

$$(2x+3)k(k-1) - 2kx - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow y_1 = x^2$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_1' & y_1'' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{2}{2x+3} dx} = C(2x+3)$$

$$\left(\frac{y}{y_1} \right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = C \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + C_1$$

ОПДЧ $y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$

ОПЧЧ: БЧ: $y = C_1(x) x^2 + C_2(x) \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$

$$\begin{cases} C_1'(x) x^2 + C_2'(x) \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 0 \quad | \cdot 2 \\ C_1'(x) 2x - C_2'(x) \frac{1}{x^2} = 6x + 9 \quad | \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C_1' x^2 + 2C_2' \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 0 \\ 2C_1' x^2 - C_2' \frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$$3C_2' \frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$$

$$C_2' = -3x^2 \quad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$$

$$C_2 = -x^3 + C_2 \quad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$$

Ответ:

$$y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2 \ln x + 2x^3 - x^2$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2 \ln x$$

Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

Д-но, это ур-е не имеет корней z^2 или незав. реш-ий, а в окр-ти 0 бесконечно много.

□ Предполагая y_1 и y_2 — 2 независ. реш-я.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0 \text{ и т.д. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ незав.}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{C}{x}$$

в окр-ти 0 — только неоп.



Приведение или ур-ий 2-го порядка к виду, не соед. y'

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\downarrow \quad \text{— преобр-е Бесселя (замена незав. с-ем)}$$

$$z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right)$$

$$\text{В ур-ии Бесселя: } y = z x^{-1/2}$$

$$y' = z' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z x^{-3/2}$$

$$y'' = z'' x^{-1/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} - \frac{1}{2} z' x^{-3/2} + \frac{3}{4} z x^{-5/2}$$

$$\text{Подставим: } z'' x^{3/2} - \cancel{z' x^{1/2}} + \frac{3}{4} z x^{-1/2} + \cancel{z' x^{1/2}} - \frac{1}{2} z x^{-1/2} + (x^2 - \nu^2) z x^{-1/2} = 0$$

$$z'' x^{3/2} + \frac{1}{4} z x^{-1/2} + z x^{3/2} - \nu^2 z x^{-1/2} = 0 \quad | : x^{3/2}$$

$$z'' + \frac{1}{4} x^{-2} z + (x - \nu^2 x^{-2}) z = 0$$

$$z'' + z \left(1 + \frac{1}{4} - \nu^2 \right) = 0$$

$$\text{Пpm } \nu = \pm \frac{1}{2} \text{ это особое yp-e} \quad z'' + z = 0 \Rightarrow z' = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Пpm др. ν пем-я не яв-ся элем. ф-цям.

Задача Коши для лн. yp-я n -го порядка

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Рем-е y , к-му $\exists!$ на всём промежутке \mathbb{R}

В окр-ти τ , об-джен yp-ям, где ана $\exists!$ в окр-ти x_0 .

