

Тригонометрические ряды Фурье

$f(x) \in L_2(-l, l)$ и им. нечетн. 2l

L_2 -адм. интегр., т.е. $\int_{-l}^l f(x) dx$ адм. сх.

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad - \text{коэф-ты гармоник}$$

Numerical Fourier

$f(x) \in L_2(I) \Rightarrow \int_I f(t) \cos t x dt \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$

I - ограничен.

$$\int_I f(t) \sin t x dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Следствие: $f(x) \in L_2(-l; l) \Rightarrow a_n, b_n \rightarrow 0$

$$\text{Фурье-ряд } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right] - \text{ряд Фурье } f(x)$$

Односторонние

1. Если $f(x)$ нечетно, то $a_n = 0$

Если $f(x)$ четно, то $b_n = 0$

2. $f(x)$ - нечетн. \Rightarrow члены чётных дробей не входят в ряд Фурье

Дискретное усечение разномимичия в п. Фурье

(следует из оп. левого края)

1. $f(x) \in L_2(-l; l)$, им. нечетн. 2l

В т. x_0 имеет конечное одностороннее производ. $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Тогда ряд Ф. $f(x)$ в т. x_0 сходится к $f(x_0)$.

2. Ряде $f(x) \in L_2(-l; l)$, им. нечетн. 2l

x_0 - т. разрыва 1 рода, \exists конечное "одностороннее" одностороннее производное;

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

Тогда ряд Фурье в т. x_0 сходится к оп. асимпт. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$



Yrašo $f(x)$, kai $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

3agora 1

Palyginkime b p. Palyse $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$

Isp. cymam pagrindinės spalvos.



Q-nd neriei. $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin \frac{\pi n t}{\pi} dt = \text{-ger neriei, qd-mi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sign} t \sin nt dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt dt = \frac{2}{\pi n} (-\cos nt) \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin nx, \quad -\pi < x < \pi$$

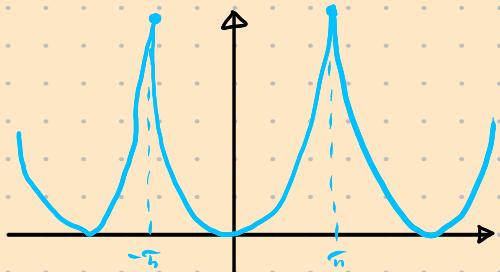
Reik ne išb-čia pabnevezmo ex. nėt būt nenuki, t.e. gausa eis palygintu
(p/lx ex. reik iš nenuki qd-mi un. nenuki gausy).

3agora 2

$$f(x) = x^2 \text{ na } -\pi < x < \pi$$

Cx-a b V_i, no t negelbino

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx, \quad b_n = 0$$



$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Doci. že je p/m ex. p. typu

$f(x) \in L_2 [-1; 1]$, nепр. 2г, и яконо - непр. на $[-1; 1]$.

($f(x)$ непр. на $[-1; 1]$, $f'(x)$ яконо - непр. на $[-1; 1]$, т.е. един единичное
т. разрывка 2 рода). Тогда p -типе $f(x)$ ex. p/m на всем множестве определ.

Учебно: если $f'(x)$ опр. близко на отрезке, то и нее не может быть разрывок
2 рода. Поэтому в теореме о пам. ex. p.-типе в т. разрывка $f'(x)$ не опр.

Реш. 4. x^2 ex. p/m на $(-\infty; +\infty)$.

Чтв. 22-110

Решение: непр. 2г (для отрезка $[-\pi, \pi]$)

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (1) ex. p/m на $(-\infty; +\infty)$. Тогда ее сумма
 $f(x)$ - непр. 2г - непр. 2г-иц, и (1) - p -типе для суммы.

□ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - p/m ex. $\Rightarrow f(x)$ непр.

Сумма p/m ex. разб. из непр. 2г-иц - непр. 2г-иц.

Имеет разрыв 2г-иц.

P/m ex. разб. из непр. 2г-иц на конечное количество конечных непр.
разрывов.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt \right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

Если p/m ex. разб. можно на сим-сим-иц, он является p/m ex.

$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$, m конс.,
- ex. p/m.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt \right) = 0 \text{ если } m \neq n$$

$$= \theta_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \ dt$$

Операторните съществуващи $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ броят на
които са неизвестни на отр. $[-\pi; \pi]$ са взаимно прости. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$$

Sagara 22-111

Что же входит в программу Python?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ - rgy cx. p/m na R \Rightarrow rgy pypol ci chen yewnd
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ - karp-ryu $\rightarrow 0$ \Rightarrow ne p. pypol

Zagora 4

$$f(x) = x \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{- merkbar}, \quad a_n = 0$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos t \cdot \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot (\sin(n+1)t + \sin(nt)) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{t \cos(n+1)t}{n+1} - \frac{t \cos(nt)}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t}{n+1} dt \stackrel{0}{=} 0 + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n-1} dt \right] = \\
 &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2-1} - b_n \text{ for } n \geq 2
 \end{aligned}$$

$$N_{pm} \quad n=1 \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt =$$



Reg ex. ne p/m

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2-1}} 2^n \sin nx$$

$$ka \left(-\bar{n}; \bar{n} \right)$$

Pazometne no cos u no sin

$$f(x) \in L_n(0; 1)$$

Esim. ēlē pāzometne no zēniem $\rightarrow f(x) \in L_n(-1; 1)$

Tā ēlē pāzītē - pāzometne $f(t)$ no $(-1; 1)$ no cos

Esim. no nerēšamai, tāto no sin.

Zagara 1

$$P(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{no sin}$$



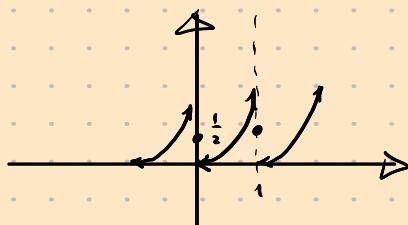
Pāzītē ca. nepālvērpos (pāzītē) na $(-\infty; +\infty)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \sin nt dt$$

Zagara 2

Pāzometne līdz pāzītē $P(x) = x^2$ na $(0; 1)$ c nepārogas!



$$2t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \cos 2\pi n t dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \sin 2\pi n t dt$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x) \quad \text{na } 0 < x < 1$$

Pāzītē ca. nepālvērpos na $(-\infty; +\infty)$ s.u. cīņas pāzītē

Pāzometne no sin un cos zēniem kā nerēšamai spārniem gzs

$$\textcircled{1} \quad P(x) \in L_n(0; \frac{1}{2})$$



$$P(x) = f(-x), \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{- simetrija attiecībā } x = \frac{1}{2}$$

Daudz no nerēšamai, garei cīņas pāzītē

B spārni cīņas $a_n = b_n = 0$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{l}$ - polynomne no sin nerēķur kārtas gys

(2) $f(x) \in L_n(0; \frac{l}{2})$

$$f(x) = -f(l-x), \quad 0 < x < \frac{l}{2} \text{ - ceturknes sim. i. } (\frac{l}{2}; 0)$$



$$a_n = 0, \quad b_{2n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{2\pi n t}{l} dt$$

Polynomne no sin ierēķur ap. gys
(polynomne no sin c nevienam l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2\pi n x}{l}$$

(3) $f(x) = -f(l-x) \quad \text{na } 0 < x < \frac{l}{2} \text{ - ceturknes sim. i. } (\frac{l}{2}; 0)$

Danee no ierēķuriem, garec c nevienam $\pm l$

$$b_n = 0 \quad a_{2n} = 0$$

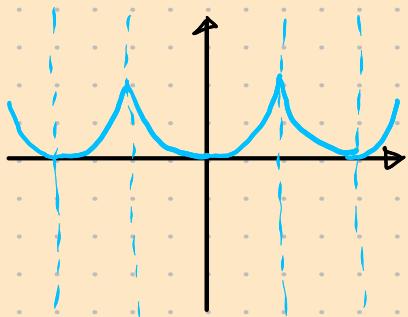
$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{\pi(2n+1)t}{l} dt$$

Polynomne no cos nerēķur ap. gys

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}$$

(4) $f(x) = f(l-x) \quad 0 < x < \frac{l}{2} \quad \text{- ceturknes sim. } x = \frac{l}{2}$

Danee no ierēķuriem, garec c nevienam $\pm l$



$$f_n = 0 \quad a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{\pi \cdot 2n t}{l} dt$$

Polynomne no cos ierēķur ap. gys

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{\pi \cdot 2n x}{l}$$

(gatīš. polynomne no cos c nevienam l)

Zadacha 1

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Рассмотрим на \sin на $[0, 2]$ $\{z_2\}$



Функция симм. осн. $x=1$

$$F(x) = f(2-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Рассмотрим на \sin нечетных кр. гус.

$$f_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 t \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2} dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 (2n+1)^2} \sin n \left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

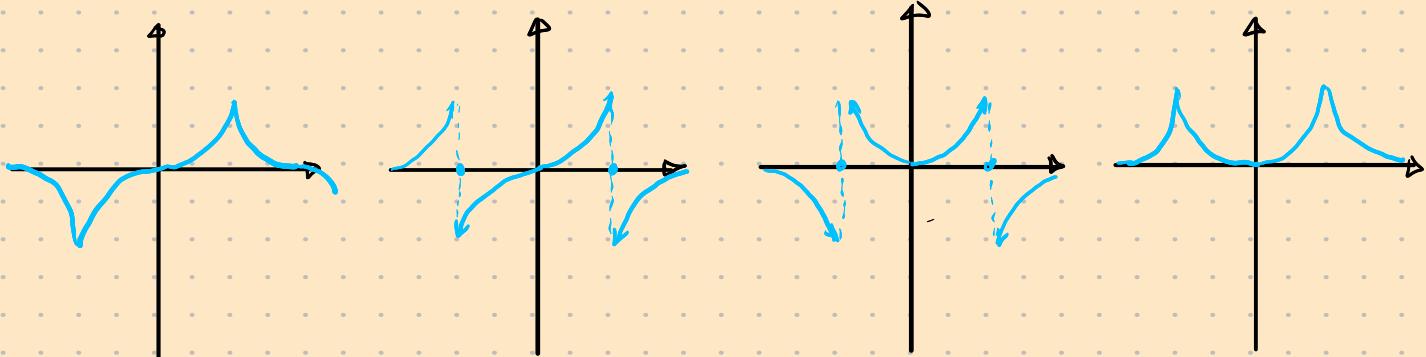
Рассмотрим \cos -ы п/и на $(-\infty, +\infty)$ т.к. $f(x)$ имеет непр. в узловых точках на $[-n, n]$

Zadacha 2

Построим кр. гусиной головы. Рассмотрим \cos и \sin нечет. в нечет. узловых точках.

Сколько у них п/и?

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



одноточечные неч. кр. гус.

одн. п/и т.к. мин.

непр. в узловых точках на $[-\pi, \pi]$

одноточечные неч. кр. гус.

одн. не п/и т.к.

периодика

четырехточечные неч. кр. гус.

одн. не п/и

четырехточечные неч. кр. гус.

одн. п/и

$$f(x) = \sin x + 1$$



симметрическое
с.н. ф/н

симметрическое
с.н. ф/н

косимметрическое
с.н. ф/н

косимметрическое
с.н. ф/н

Несимметрическое группогенерирование рядов Фурье

1) $f(x)$ непр. в Ω и кус. непр. на $[-l; l]$, тогда:

1. Ряд Ф. с.н. ф/н на $(-\infty, +\infty)$

2. Ряд Ф. имеет несимметрическое групп.

$$\text{Если } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right]$$

то ряд Ф. $f'(x)$ (к-пак кус. непр. на $[-l; l]$) имеет групповое групп. ряда Фурье f :

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + b_n \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) - \text{не однозначенность!}$$

нечетный ряд Фурье

Пример

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{симметрический ряд } 2x \text{ на } (-\pi; \pi) \text{ по}$$

x . + н.п. доказано



$$-\pi < x < \pi$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

Равенство Парсеваля

$L_R^2(\mathbb{I})$ - инт. кв. оп-ии, адс. инт. на \mathbb{I} бывшее с $f(x)^2$.

Для некоторо $\mathbb{I} \subset L_R^2(\mathbb{I}) \subset L_R(\mathbb{I})$

Бес. квад. инт. - из $L_R^2(a; b)$

Если $f(x) \in L_R^2(-l; l)$ и инт. неог $\neq l$, то

$$\frac{d_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(x))^2 dx$$

В равном пг. схва. ср.

Пример

$$f(x) = x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(x) = x^2;$$

$$\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Королевство Руркенера

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq C \int_a^b f'(x)^2 dx$$

Задача 2

$f(x)$ ну. в. на $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$

$$\text{тогда } \int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'(x)^2 dx$$

□ Расс-ии $\varphi(x) = f(x+a)$, $\varphi(a) = f(a) = 0$

$$\varphi(b-a) = f(b) = 0$$

Пример. на нечётном, зерено нечетом $z \cdot (b-a)$ ($l = b-a$)

Так она кре-зя., p - фурье ся, p/n

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{b-a}$$



$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b-a} b_n \cos \frac{\pi n x}{b-a}$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^{b-a} \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(b-a)^2} b_n^2$$



Интегрирование рядов

Ряд $f(x)$ квадр. -непр. на $[-l, l]$, не.неп. 2л

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$$

un. p.
действ

$$\text{Тогда } F(x) = \int_{-l}^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} - \text{квадр. н. на } [-l, l], \quad F(-l) = F(l)$$

$$F(x) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n\pi} d_n \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{b_n}{n\pi} b_n \cos \frac{n\pi x}{l} \right) - \text{сумма п/м сх. п. действ}$$

$$c = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(t) dt$$

Если $\frac{a_0 x}{2}$ не симметрич., то comes n не симметрич. п/м.

Равномерное сжатие Ряда

Если $f(x)$ квадр. н. на $[-l, l]$ и не.неп. 2л, то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$F(x)$ - квадр. непр. дифер. на $\{a, b\}$, если $F'(x)$ квадр. близк., кроме конечного числа точек, где f' не разрывна I погр.

Конкр. в Ряде такие погр. $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $|a_n|, |b_n| \leq C \frac{1}{n}$

$f(x)$ квадр. н., если она непрерывна в квадр. непр. точках.

Например, $\text{sign } x$ - квадр. непр., но не квадр. н.

Осаджение

Часть A. Если $f(x)$ не.неп. 2л и $f^{(k-1)}(x)$ квадр. н. на $[-l, l]$, то квадр. погр. $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Часть B. Если $f(x)$ не.неп. 2л, $f^{(k-1)}(x)$ непр. на $[-l, l]$, $f^{(k-1)}(x)$ квадр. непр., то $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Задача: оценка сжатия гомоморф. Ряда.

Пример

$$f(x) = x^2 \text{ на } [-\pi; \pi], \text{ с непр. } 2\pi$$

A) $k_{-1} = 0, k=1 \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), b_n = 0$

$k_{-2} = 0, k_{-1} = 1, k=2 \quad a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ - условие применим

$$f(x) = x^3$$

A) нечетенное (одд симметрия в квадрате)

B) $k_{-1} = 0, k=1 \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right), a_n = 0$

$$f(x) = (\pi^2 - x^2)^2 \quad [-\pi; \pi] \text{ с непр. } 2\pi$$

Несколько граничных точек непр. в т. π и $-\pi$ (на концах много доказать непр.)

$$f(\pi) = f(-\pi) = 0 \quad - \text{непр.}$$

$$f'(x) = 2(\pi^2 - x^2) \cdot (-2x)$$

$$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$$

$$f''(\pi) = f''(-\pi) \quad - \text{квад. непр.}$$

$$f'''(\pi) \neq f'''(-\pi) \quad - \text{квад. непр.}$$

A) $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad b_n = 0$

B) $a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad - \text{на практике лучше брать B!}$

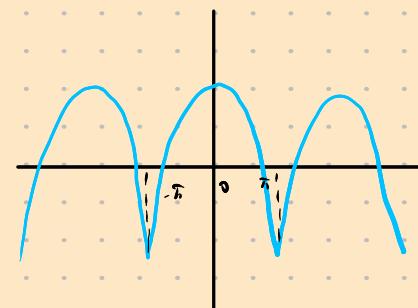
Задача 1

$$f(x) = \pi^3 x - x^3, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{парн. к p.} \quad \text{Рассмотрим sin.}$$

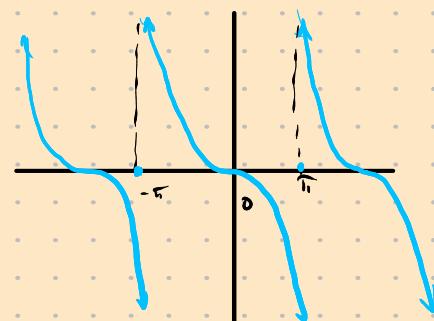
Форма кривой симметрична относительно оси ординат.



Фиг



Фиг'



Фиг''

Генуябенне ряб мөнеген ғергес анықтауда

Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = a$

Однакше нөктесі, $(-1)^n$ - тоx., ср. анықт. $\rightarrow 0$.

Ряб $1+2-3+1+2-3+\dots$ пәннегінде (однакше нөктесі $\rightarrow 0$)

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=3k \\ 1, & n=3k+1 \\ 3, & n=3k+2 \end{cases}$$

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} - мөнегіндеғінде (мөнегіндең ср. анықт.)$$

$$\sigma_n = \begin{cases} \frac{4}{3}, & n=3k \\ \frac{4k+1}{3k+1}, & n=3k+1 \\ \frac{4k+4}{3k+2}, & n=3k+2 \end{cases} \quad \sigma_{3k} = \frac{4}{3} \quad \sigma_{3k+1} \rightarrow \frac{4}{3} \quad \sigma_{3k+2} \rightarrow \frac{4}{3} \quad \sigma_n \rightarrow \frac{4}{3}$$

Задача 1

$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots$ - ряб орнайтын $\Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

А бар мөнегіндеғінде: $S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx$ - компоненттеріндең Дұрунда

$$S_n = \frac{2 \sum_{k=1}^n \sin kx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^n \cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} =$$

$x \neq 2\pi k$

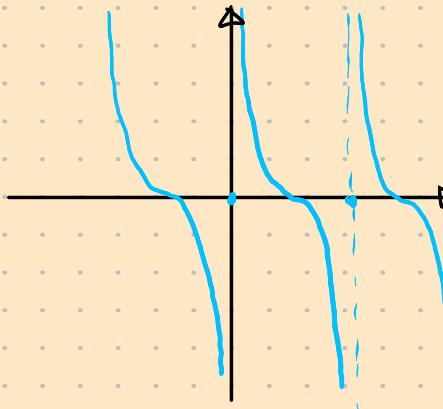
$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n} - компоненттеріндең ғелип$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{2 \sum_{k=1}^n \cos(k+\frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2}}{n \cdot 4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\sum_{k=1}^n (\sin((k+1)x) - \sin kx)}{n \cdot 4 \sin^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\sin((n+1)x) - \sin x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim \sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, & x \neq 2\pi k \\ 0, & x = 2\pi k \end{cases}$$



Симметризация p-Пурье на конечном Римане

Пусть $f(x) \in L_p(-l, l)$, α_n нечетные $2l$ и неяв. в \mathbb{R} . т. x_0 . Тогда при p -Пурье $f(x)$ симметризация $T_{\alpha_n} x_0 \times f(x_0)$ неяв. Римана

Равномерное неяв. симметризование

Пусть $f(x)$ неяв. нечетные $2l$ и неяв. на $[-l, l]$. Тогда p -Пурье F равномерно симметризация $\times f(x)$ неяв. Римана на $(-\infty, +\infty)$ ($\sigma_n(F, x) \xrightarrow[R]{} f(x)$)

Усл

Пусть $f(x) \in L_p(-l, l)$ и неяв. в x_0 , кроме p -Пурье в. в. x_0 .
Тогда он в. в. неяв. $\times f(x_0)$.

Теорема Бейерштейна-Гришневича (сходимость в. в.)

Пусть $f(x)$ неяв. на $[-l, l]$, $f(-l) = f(l)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists$ гладкая монотонная $T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos \frac{\pi k x}{l} + \beta_k \sin \frac{\pi k x}{l})$, кроме $\forall x \in [-l, l] \rightarrow |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Нормированное пространство

Норм.пр.-бо L наз-ся нормированным (НП), если в нем обеяне норма.

$\forall x \in L$ смыс. $\|x\| \in \mathbb{R}$, такое, что

$$1. \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$2. \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$3. \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Для Евклидова пр.-бо $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

НП \Rightarrow метрика, если $d(x, y) = \|x-y\|$

Нес-ко $x_n \rightarrow x$ в НП L , если $\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$(\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 \rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon)$$

Нес-ко x_n в НП \Rightarrow сходимость, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n, m > n_0 \rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Нес-ко сходимости x_n сходимости. Однозначно (единственность).

НП называется нормой (функцией), если в нем норма определена и однозначна.

Пример: \mathbb{R}^n ($\|x\| = |x|$).

Важное свойство НП не содержит! (исключение из общего правила не буд.)

Будет, модуль непрерывной пр.-бо с модулем непр. нормы.

① $C[a, b]$ - пр.-бо сп-ми, непр. на $[a, b]$, $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$.

$f_n \rightarrow f$ в $C[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 \rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$

$$\left(\max_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

По пр. Каждое о-правиле пр.-ми, $C[a, b]$ нормал.

② $C'[a, b]$ - пр.-бо сп-ми, непр. диф. на $[a, b]$, $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)| + \max_{[a, b]} |f'(x)|$

$C'[a, b]$ - нормал.

□ Пусть $f_n \subset C[a, b]$ и $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n, m > n_0 \rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ и } |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon, \Rightarrow$$

Teorema \exists $f_n(x) \in C^1[a, b]$, $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0)$ cx.,

$f'_n(x) \Rightarrow \psi(x)$ na $[a, b]$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f_n(x) = f(x)$ na $[a, b]$,

$f(x) \in C^1[a, b]$, $f'(x) = \psi(x)$.

\Rightarrow No sp. Kumm p-w cx-sm, $f_n(x) \text{ u } f'_n(x)$ p/w cx. na $[a, b]$.

$f_n(x) \Rightarrow f(x)$, $f'_n(x) \Rightarrow \psi(x) = f'(x)$

$f(x) \in C^1[a, b]$, $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $|f'_n(x) - f'(x)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ & $C^1[a, b]$, i.e. $C^1[a, b]$ normo.

③ Пример ненормо np-fa

Mn-ho nesp. qm-va na $[a, b]$ c normoi $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$,

Bogomil $f(x) = |x|$ na $[-\bar{x}; \bar{x}]$, gurec c nemogen zit - kymas - mayas u $[-\bar{x}; \bar{x}]$ u nesp. \Rightarrow p. Pysse cx-a pribljenje: $S_n(f, x) \underset{[-\bar{x}, \bar{x}]}{\Rightarrow} f(x)$

T.e. ona qmymenjivana (nem-va nesp. qm-va), no npege ne zit u nesp. qm-va. \Rightarrow normo ne slb-a vaygencia l' ninen np-be.

Znanni ona neneval.

Dymne norme l' np-be nesp. qm-va

$$L^2_c[a, b] \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$$

- neneval

$$L^1_c[a, b] \quad \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

$(C[a, b])$ $f_n \rightarrow f$, $\exists \lim \|f_n - f\|_c \rightarrow 0$ - pribljenje l' cx-iz

$L^2_c[a, b]$ $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$: $\int_a^b |f_n - f|^2 dx \rightarrow 0$ - cx-iz l' qmymenjivman

$L^1_c[a, b]$ $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$: $\int_a^b |f_n - f| dx \rightarrow 0$ - cx-iz l' qmymenjivman



Bere q-un neng.

p/n cx-iz - cined curva.

\Rightarrow n̄l̄ w̄l̄ c̄ḡȳl̄ cx-iz b̄ q̄.ab.;

$$\|f_n - f\|_c \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2 &\rightarrow 0 : \int_a^b (f_n - f)^2 dx \leq \\ &\leq \|f_n - f\|_c^2 \cdot \int_a^b 1 dx = (b-a) \|f_n - f\|_c^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Anwendung, p/n cx. \rightarrow cx. q.p.

\Rightarrow cx. & sp. ab. \rightarrow cx. q.p.:

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n - f| dx \leq \sqrt{\int_a^b (f_n - f)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1 dx} = \sqrt{b-a} \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

B ebungskern np-be L^2

$$\left| \langle f, g \rangle \right| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$$

nepavienība Korn - Sjvansobrāzno

Pac-nam $f_n(x)$:



Kāda da n̄l̄ da n̄l̄ b̄ḡȳl̄, n̄l̄reinheits cx-iz - $\kappa \neq 0$.

$$\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \leq 0$$

- p/n cx-iz $\Leftrightarrow h_n \rightarrow 0$: $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = h_n$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n - f| dx = \frac{h_n}{2n}$$

- $Cx-iz$ & sp. abg., $\text{cum } h_n = O(n)$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 (f_n - f)^2 dx} = \sqrt{2} \int_0^{1/n} (kx)^2 dx = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h_n^3}{n^3} = \frac{h_n^3}{3n} \\ &= 2 \cdot 4 \cdot h_n^2 \int_0^{1/n} x^2 dx = 8n^3 \cdot h_n^2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 8n^3} = \frac{h_n^2}{3n} \end{aligned}$$

- $Cx-iz$ & sp. abg., $\text{cum } h_n = O(\sqrt{n})$

Esm $h_n = 1$: esie & sp. abg., net reibnepnas.

Esm $h_n = \sqrt{n}$: esie & sp. abg., net & sp. abg.

Esm $h_n = n$: esis n̄l̄reinheits, net s̄l̄vāmās l̄ngob

③ No ver. crenaru

$1, x, x^2, \dots, x^{2^n+1}, \dots$ - námae u dne-nd B $C[0; 2]$? Dac!

$f(x) \in C[0; 2]$

$g(x) = f(x) - f(0)$, náezem. no ver., zájvem c rep. 2^n

No r. Blízepnizace:

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists T(x)$ - fázmon. unorov. $\forall x \in [-\bar{n}; \bar{n}] \rightarrow |g(x) - T(x)| < \varepsilon$

$T(x)$ - výzaa pěniza $\Rightarrow T(x)$ - náezmav., $g(x)$ - náezmav.

Požadu ex-in p. Maxopeva $+\infty$, nech ex. p/m no V kon. náezm. \Rightarrow na $[-\bar{n}; \bar{n}]$

B požad. fázov. náezmav. crenaru $\Rightarrow \exists P(x)$ - ver. unorov. $\forall x \in [-\bar{n}; \bar{n}]$

$|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2 \Rightarrow \forall x \in [0; 2] \rightarrow |g(x) - P(x)| < \varepsilon$

Takže $|f(x) - (f(0) + P(x))| = |g(x) - P(x)| < \varepsilon$

$f(0) + P(x)$ - na ver. crenaru $1, x, x^2, \dots$

④ No ver. crenaru

$1, x^2, x^4, \dots, x^{2^n}$ & $C[0; 10]$ - námae!

Náezmav. no crenaru na $[-10; 10]$, gáve c rep. 20 ($l=10$)

No r. Blízepnizace $\rightarrow \exists$ r. fázmon. unorov. (t. u. výzaa pěniza)

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos \frac{\pi k x}{10} + \beta_k \sin \frac{\pi k x}{10})$$

$\forall x \in [-10; 10] \rightarrow |f(x) - T(x)| < \varepsilon$

Dále výzaa. zájvem výzaa p. Maxopeva, $P(x)$ - náezmav. an. uno-
zorov.

$\forall x \in [-10; 10] \rightarrow |T(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

⑤ Tu ne cren. B $C[-1; 10]$

Nes! Příklad. náezmav. zájvem náezmav.

⑥ $1, x^6, x^{12}, x^{18}, \dots$ & $C[0; 10]$

Zájvem zájvem $x^3 = t$, anezma: $1, t^2, t^3, \dots$ & $C[0; 10^3]$.

Analogomu n. 4 ziaa ase-ma norma.

$f(x) \in C[0; 10]$, Paa-um $\varphi(t) = f(\sqrt[3]{t}) \in C[0; 10^3]$ no i. o nemy. vannen
cp-um, $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists P(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$, $\forall t \in [0; 10^3] \rightarrow |\varphi(t) - P(t)| < \varepsilon$.
 $t = x^3 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists P^*(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^{3k} : \forall x \in [0; 10] \rightarrow |\varphi(x^3) - P^*(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow |f(x) - P^*(x)| < \varepsilon$.

u/a

Теорема б про спрощеність L^2

Корені e_1, e_2, \dots, e_n норма є $L^2_{\mu} [a, b]$ (норма $L^2_c [a, b]$, норма $L^2_{\mu} [a, b]$, норма $L^2_c [a, b]$), тоді $\forall f \in \dots \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists d_1, \dots, d_n : \|f - \sum_{k=1}^n d_k e_k\|_2 < \varepsilon$.

Задача

Если каждое непр. на $[a, b]$ есть норма в $C[a, b]$, то она норма в $L^2_{\mu} [a, b]$ (и в одног. нп-дак)

□ Доказ.: нп-бо $C[a, b]$ норма в $L^2_{\mu} [a, b]$, т.е.

$$\forall f \in L^2_{\mu} [a, b] \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists g - \text{непр. на } [a, b] : \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

$$f \in L^2_{\mu} [a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists g - \text{непр. на } [a, b] : \|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Для g $\exists P(x)$ -аналогично для корней e_1, \dots, e_n :

$$\|g - P\|_2 \leq \sqrt{b - a} \|g - P\|_c$$

$$\text{т.е. если каждая норма в } C, \|g - P\|_c < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}} \Rightarrow \|f - P\|_2 < \varepsilon$$

■

Зад. - комп., если каждая норма в нп-бл, та же f -непр. на $[a, b]$, $f(a) = f(b)$.

① $1, x, x^2, \dots$

норма в $L^2_{\mu} [a, b]$, т.к. норма в $C[a, b]$

② $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$

в $L^2_{\mu} [-\pi, \pi]$ - норма тає. норма в нп-бл $C[-\pi, \pi]$, іншою чином, $f(\pi) = f(-\pi)$.

Форема

Если $f \in L^2_{\mu} (-l, l)$, то є нп-бл $T(x)$ $\propto f(x)$ в симетричн. вбаг.

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists T(x) - \text{симетрична п-бл} : \|f - T\|_2 < \varepsilon$$

Typ. un-va: $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{\pi n x}{l}, \sin \frac{\pi n x}{l}, \dots$
 norma b $L^2_R(-l; l)$.

③ $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$

b $L^2_R(0; \pi)$ (b C nemava i.e. banya $f(x) = 0$)

Dikq.: norma, programma no neriemora, garee c neg. 2π
 $f \in L^2_R(-\pi; \pi)$

$S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ b ||...||₂ (b sp. ob.)

$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists T(x) -$ neriemorin sym. uniorien: $\|f - T\|_2 < \varepsilon$
 'zur. cyane
 p-objekt'

④ $\cos x, \cos 3x, \dots, \cos (2n+1)x, \dots$ b $L^2_R(0; \frac{\pi}{2})$

Norma! Programma $f(-x) = -f(x), 0 < x < \frac{\pi}{2}$, garee no rie, garee c neg. 2π .

$S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ b sp. ob. - am-va norma anavor 3. (b C nemava).

⑤ $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ b $L^2_R(-\pi; \pi)$.

Xib oporendava
 Esen' un-va e_1, e_2, \dots, e_n uz negelburs x. ob norma b Ebungsham n-ble
 L, so un-va vobr. negelbura (ne vobr. c e_1, e_2, \dots, e_n) $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots,$
 e_{n+2} ne bytet norma.

□ Die norma un-va e_1, e_2, \dots, e_n b denenornespan. Ebungsham n-ble
 bin. p-ko Порееван:

$$\forall x \rightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_i)^2$$

x - norma so xk-i vek. un-va, ne simeyti. negelbura. Esen' negelbura. norma,
 so bin. p-ko Порееван:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_{n_k})^2 \quad \text{prinzipielle.}$$



Obes' net, bez amireva $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ norma \Rightarrow
 \Rightarrow negelbura norma.

$1, x, x^2, \dots, x^n$ nenu b $L^2_{\mu} [1, 2]$

x, x^3, \dots, x^{2n+1} nenu b $L^2_{\mu} [1, 2]$

- b ūen gno?

Cvetna neaptonoma.

Рэй Фурье в комплексной форме

$f(x) \in L_2(-\ell, \ell)$, үзүүлгүүр 2)

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-\frac{inx}{\ell}} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$C_n = \frac{a_n - b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$C_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad -n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{inx}{\ell}} \quad (\Rightarrow \text{то } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n)$$

Пример

e^x 8 р. Фурье на $(-\pi, \pi)$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{sh\pi}{\pi}$$

$n \neq 0$)

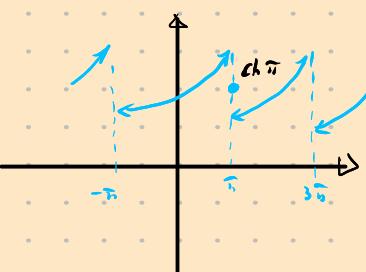
$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-int)} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\pi i} - e^{-\pi i}}{1-in} \cdot (-1)^n$$

$$\left. \begin{aligned} e^{-inx} &= \cos nx - i \sin nx \\ e^{inx} &= \cos nx + i \sin nx \end{aligned} \right\} = (-1)^n$$

$$\text{Рэй: } \frac{sh\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx} =$$

$$= \frac{sh\pi}{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} e^{-inx} \right) =$$

$$= \frac{sh\pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right)$$



Рэй сх. не р/н

