Решение линейного уравнения 2 порядка

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$, $\quad x \in I \quad$ все ф. непр., $a_0(x) \neq 0$

Предположим, мы угадали y_1 – решение однородного ур-я

Ищем в виде $e^{\alpha x}$, x^k, $ax+b$ и т.д.

Найдем ОРОУ:

y_1 - найдено

y - произв. реш-е однородного ур-я

Ф-ла Лиувилля – Остроградского: $W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt} = C\varphi(x)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\varphi(x) \qquad \frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2}dx + C_1$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ОРНУ: вариация постоянной: $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \frac{b(x)}{a_0}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$$

$$C_1'(x) = \dots \qquad C_2'(x) = \dots$$

Задача 1

$$2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, \quad x > 0$$

ЧРОУ: $y_1 = e^{-x}$

y - произв., y_1 - угаданное

$$W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{4x+1}{2x}dx} = Ce^{-(2x+\frac{1}{2}\ln x)} = Ce^{-2x}x^{-1/2}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x}dx = 2x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{x}dx = 2x + \frac{1}{2}\ln x + C_1$$

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y'e^{-x} + ye^{-x}$$

Делим на e^{-2x}:

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-1/2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' \qquad \frac{y}{e^{-x}} = C x^{1/2} + C_1$$

ОРОУ $\quad y = C_1 e^{-x} + C e^{-x} \sqrt{x}$

ОРНУ $\quad y = C_1(x) e^{-x} + C(x) e^{-x} \sqrt{x}$

$$+\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x} \sqrt{x} + C_2'(x) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad C_1'(x) = -1$$

$$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \qquad C_1(x) = -x + C_1$$

Ответ: $y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x} \sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \sqrt{x} + x e^{-x}$

Задача 2

$$x^2(\ln x - 1) y'' - x y' + y = x(\ln x - 1)^2, \quad x > e$$

ЧРОУ: $\quad y_1 = x$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C(\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2} \qquad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C \frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

ОРНУ: $\quad y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \end{cases} \quad | \cdot x$$

$$- \begin{cases} C_1'(x)\, x + C_2'(x) \ln x = 0 \\ C_1'(x)\, x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$C_2'(x) = -1$ $\qquad$ $C_1'(x) = \frac{\ln x}{x}$

$C_2(x) = -x + C_2$ $\qquad$ $C_1(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1$

Ответ: $y = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1\right) x + (C_2 - x) \ln x$

$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2} - x \ln x$

Задача 3

$(2x+3)\, y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}\, y = 3(2x+3)^2$

Ищем ЧРОУ в виде x^k:

$k(k-1) \cdot (2x+3)\, x^{k-2} - 2k x^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$

$(2x+3)\, k(k-1) - 2kx - 6 = 0$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$k = 2 \Rightarrow y_1 = x^2$

$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{2}{2x+3} dx} = C(2x+3)$

$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + C_1$

ОРОУ $y = C_1 x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

ОРНУ: ВП: $y = C_1(x) x^2 + C_2(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, x^2 + C_2'(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 & | \cdot 2 \\ C_1'(x)\, 2x - C_2'(x) \frac{1}{x^2} = 6x + 9 & | \cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 2C_1' x^2 + 2C_2'\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ 2C_1' x^2 - C_2' \frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$3C_2' \frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$

$C_2' = -3x^2 \qquad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$

$C_2 = -x^3 + C_2 \qquad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$

Ответ: $y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)(\frac{1}{x} + 1)$

$y = C_1x^2 + C_2(\frac{1}{x} + 1) + 3x^2\ln x + 2x^3 - x^2$

$y = C_1x^2 + C_2(\frac{1}{x} + 1) + 2x^3 + 3x^2\ln x$

Уравнение Бесселя

$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad \nu = const$

Д-ть, что ур-е не может иметь 2х лин. незав. реш-ий, огр. в окр-ти 0 вместе с производными.

$\square$ Предположим y_1 и y_2 - 2 таких реш-я.

$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}$, $C \neq 0$ т.к. y_1 и y_2 лин. незав.

$y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{C}{x}$

↳ огр. в окр-ти 0 ↳ явно неогр. $\blacksquare$

Приведение лин. ур-ий $2^{го}$ порядка к виду, не сод. y'

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

$\downarrow$ - преобр-е Лиувилля (замена неизв. ф-ии)

$z'' + Q(x)z = 0$

$y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)$

В ур-ии Бесселя: $y = zx^{-1/2}$

$y' = z'x^{-1/2} - \frac{1}{2}zx^{-3/2}$

$y'' = z''x^{-1/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} + \frac{3}{4}zx^{-5/2}$

Получаем $z''x^{3/2} - \cancel{z'x^{1/2}} + \frac{3}{4}zx^{-1/2} + \cancel{z'x^{1/2}} - \frac{1}{2}zx^{-1/2} + (x^2 - \nu^2)zx^{-1/2} = 0$

$z''x^{3/2} + \frac{1}{4}zx^{-1/2} + zx^{3/2} - \nu^2 zx^{-1/2} = 0 \quad \Big| : x^{3/2}$

$z'' + \frac{1}{4}x^{-2} + z - \nu^2 zx^{-2} = 0$

$$z'' + z\left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) = 0$$

При $\nu = \pm\frac{1}{2}$ это простое ур-е $z'' + z = 0 \Rightarrow z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

При ост. ν реш-я не яв-ся элем. ф-ями.

Задача Коши для лин. ур-я n-го порядка

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

$x_0 \in I$

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Реш-е з. Коши $\exists!$ на <u>всём</u> промежутке I

В отл. от т. об общем ур-ии, где оно $\exists!$ в окр-ти x_0.

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \;\mapsto\; z'' + Q(x)z = 0$$

$$y = z\, e^{-\frac{1}{2}\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$ – преобр-е Лиувилля

Ур-е Бесселя: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0$

$$y = z x^{-1/2}$$

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) z = 0$$

Замечание: при такой замене кол-во нулей реш-я ур-я не меняется.

Утв Любое нетрив. реш-е ур-я Бесселя им. ∞ много нулей на $[a;+\infty)$, $a>0$

□ $Q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2} \Big|\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

$\exists C:\ \forall x \geq C \to Q(x) \geq \frac{1}{2}$; на отрезке $[a; C]$ конечное число нулей.

Если коэф-т в данном ур-ии им. полож. коэф-т, то по т. Штурма ЧТД ■

С 10.6

Д-ть, что $\forall$ нетрив. реш-е $y'' + x^2 y' + (x+4)y = 0$ им. ≤ 5 нулей на $(-\infty;+\infty)$

Замена Лиувилля: ...

Получим $z'' + z\left(4 - \frac{x^4}{4}\right) = 0$

Если $Q(x) < 0$, то на промежутке ≤ 1 нуля:

$4 - \frac{x^4}{4} \leq 0 \quad x^4 \geq 16 \quad |x| \geq 2 \Rightarrow$ на $[2;+\infty)$ и на $(-\infty;-2]$ не более 1 нуля

Осталось показать, что на $[-2;2]$ не более 3х нулей.

$$Q(x) = 4 - \frac{x^4}{4}$$

$z'' + z\left(4 - \frac{x^4}{4}\right) = 0 \quad (1)$ $\qquad N_1$ – число нулей нетрив. реш. (1)

$u'' + 4u = 0 \quad (2)$ $\qquad N_2$ – число нулей нетрив. реш. (2) $\quad$ – Оцениваем

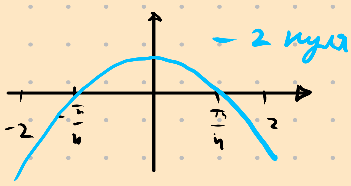
$N_1 \leq N_2 + 1$

Д-ть, что $N_1 \leq 3 \Rightarrow N_2 \leq 2$, причем коэф. в (2) больше коэф. Q в (1) $\left(4 > \frac{x^4}{4}\right.$ на $\left.(-2;2)\right)$

Нужно найти хотя бы 1 реш-е (2) такое, что $N_2 \leq 2$

(2): $u = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

$u = \cos 2x$ — одно из реш-ий (2)



А если взять синус, будет $N_2 = 3$

$\frac{3\pi}{4} > 2$

Итого: ≤ 5 нулей ■

Типовая

Д-ть, что $\forall$ нетрив. реш. ур-я $y'' + (2+\cos 3x)y = 0$ (2) на отр. $[-1; 6]$ $\exists$ точка ξ, где $y'(\xi) = 0$. (достат. показ-ть, что есть ≥ 2 нулей, и по т. Ролля будет ч.т.д.)

$2 + \cos 3x \ge 1$ N_2 - кол-во нулей нетрив. реш. (2), N_1 - оно же для (1)

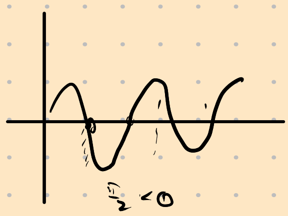
Сравниваем с ур. $z'' + z = 0$ (1)

$N_1 \le N_2 + 1 \Rightarrow N_2 \ge N_1 - 1$, надо $N_2 \ge 3$ — нужно найти нетрив. реш. (1), у к-рого ≥ 3 нулей на $[-1; 6]$.

$z = C_1\cos x + C_2\sin x$

$z = \cos x$ на $[-1; 6]$

Всего выходит $N_1 = 2$ — мало



Ищем реш-е в форме $z = \sin(x - y)$

Ф.723

Д-ть, что если $q(x) \le 0$, то все реш-я ур-я $y'' + q(x)y = 0$ с полож. нач. усл. $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ остаются полож. $\forall x \ge x_0$. $q(x)$ непр. на $[x_0; +\infty)$

□ От противного: пусть $\exists x_1: y(x_1) \le 0$. Если это так, $\exists \xi \in (x_0, x_1)$: $y(\xi) = 0$. $y'(x_0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{y(x_0+t) - y(x_0)}{t}$

$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0; x_0+\delta) \to y(x) > y(x_0)$

Считаем, что ξ – наимен. из т., где $y(x)=0$.

Мн-во нулей нетрив. реш. на конечном отр. конечно $\Rightarrow$ не может иметь конечных предельных т. $\Rightarrow$ inf таких x, что $y(x)=0$, совп. с min.
$\Rightarrow$ $y(x)$ положит. на $(x_0; \xi)$.

$y'' + q(x)y = 0$

$q(x) \leq 0$ $\quad y > 0 \Rightarrow y'' \geq 0$ на $(x_0; \xi)$. $\Rightarrow y' \uparrow$ на $(x_0, \xi) \Rightarrow$
$\Rightarrow y'(x) \geq y'(x_0) > 0 \Rightarrow y(x) \uparrow$ на $[x_0; \xi) \Rightarrow y(x) \geq y(x_0) > 0$. Т.к.
ф-ия непр-на на $[x_0; \xi)$ $\quad y(x) \geq y(x_0) > 0 \Rightarrow$ не может обр. в 0 в ξ.

Противоречие.

Фазовые траектории автономных систем

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Автономная линейная однородная система: $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x})$ (автономность — в независимости от t)

З. Коши: $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x})$, $t \geq t_0$

$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

Реш-е з. Коши $\exists!$ на $[t_0; +\infty)$ если $A(x)$ непр. вектор ф-ия.

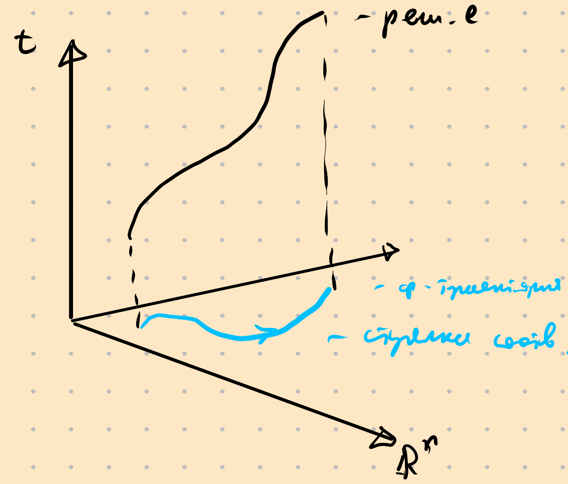
Реш-е есть кривая в $(n+1)$-мерном пр-ве.

n-мерное пр-во — **фазовое пр-во**.

Проекция решения из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ — **фазовая траектория**.

Она задаётся теми же ур-ями, но как параметрич. заданная кривая в $\mathbb{R}^n$.

Свойства



1) Если $x(t)$ - реш-е, то $x(t+C)$ - реш-е с той же траекторией.

2) 2 разных траектории не имеют общих точек.

3) Const реш-я сис-мы $x = x_0$ имеет траекторию-точку (положение равновесия)

Как их искать $(n=2)$

1) $\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x,y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x,y) \end{cases}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$

Запишем реш-я этого диффур. ур-я в виде $F(x,y) = C$.

Ф-ия $F(x,y)$, пост. на кривых реш. сис-мы $\Leftrightarrow$ пост. на любой траектории наз-ся **первым интегралом системы**

Траектории — линии уровня первого интеграла.

② просто решить сис-му

Пример

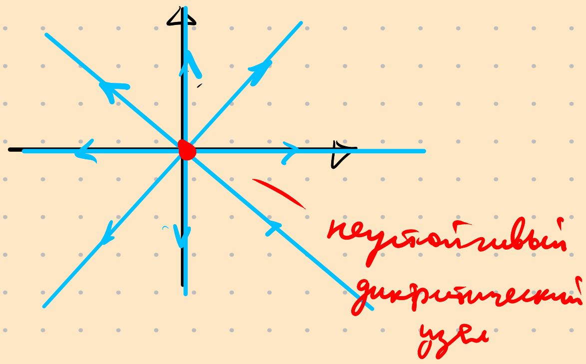
① $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$ П. р. (0, 0)

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$x\,dy - y\,dx = 0$

$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = C$ — первый интеграл $F(x,y) = \frac{y}{x}$.

Линии уровня первого интеграла — прямые. Но траектории — лучи, исходящие из 0 (п.р.)!



Нужно найти линии уровня первого инт. и из общих сообр. разбить их на траектории.

② $x = C_1 e^t$
$y = C_2 e^t$ при $t \uparrow$ $x, y \to \infty$

Траектории: 1. Положение равновес.
2. Лучи, выходящие из полож. равновес.

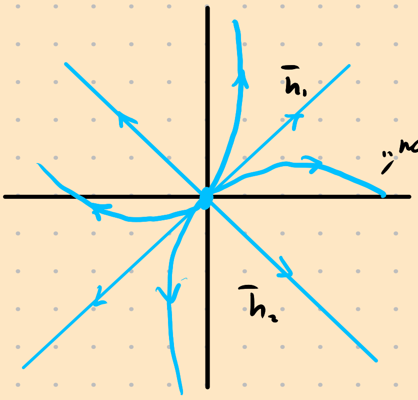
Классификация положений равновесия для линейных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ — п.р.

Других п.р. нет $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ или $\lambda = 0$ не яв-ся собств. знач. матрицы.

① $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $\quad \lambda_1 \to \bar{h}_1, \quad \lambda_2 \to \bar{h}_2$ **Неустойчивый узел**



„парабола"

Траектории:

1. П.р.
2. 4 луча, лежащих на $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$
3. аффинно-искаж. кривые вида $x = y^{\alpha}$, $\alpha > 0$ с осью $\bar{h}_1$, касается $\bar{h}_2$

Стрелки от п.р.

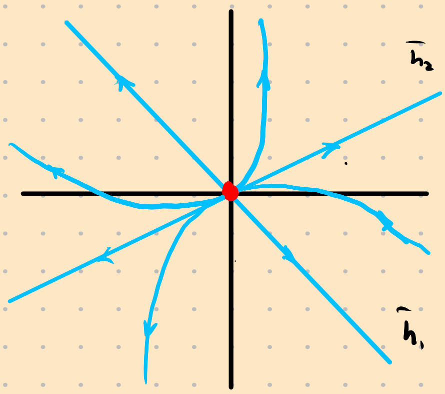
<u>Пример</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 4) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

$\lambda = 5 \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{h}_1$

$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

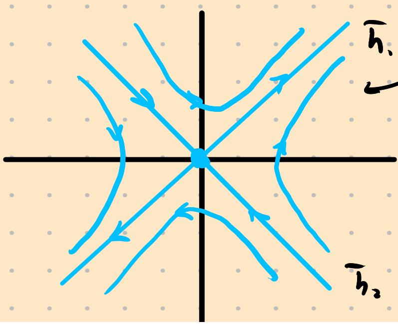


Траектории не пересекаются!!

② $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\quad \lambda_1 \to \bar{h}_1, \quad \lambda_2 \to \bar{h}_2$ **Устойчивый узел**

То же самое, но стрелки к п.р.

③ $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\quad \lambda_1 \to \bar{h}_1, \quad \lambda_2 \to \bar{h}_2$ **Седло** (неустойчивое)



← гипербола

Траектории

1. П.р.
2. 4 луча, леж. на $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ ($\bar{h}_1$ - наружу, $\bar{h}_2$ - вовнутрь)

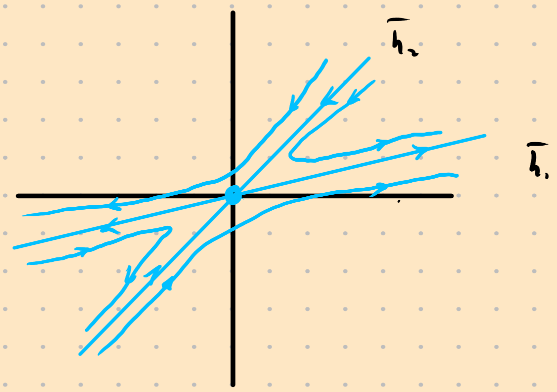
3. Асимптото-секант. кривые вида $x = y^{\alpha}$, $\alpha < 0$. Стрелки соотв. углам

Когда $\lambda_i > 0$, то стрелки траекторий вдоль $\bar{h}_i$ – наружу

Когда $\lambda_i < 0$ – внутрь

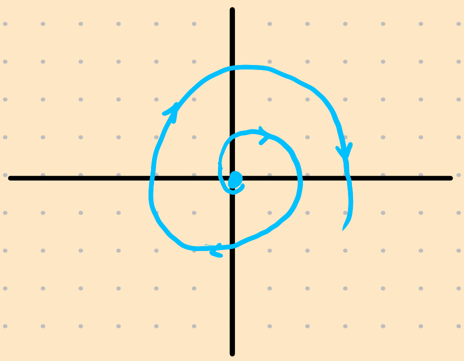
<u>Пример</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \qquad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1 \qquad \bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Кривые приближаются к асимптотам!

④ $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, $\alpha > 0$ **Неустойчивый фокус**

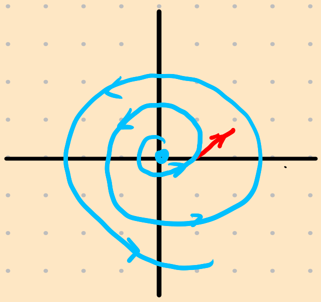


Траектории

1. П.р.
2. Спирали, к-рые раскручиваются от п.р. Направление раскручивания – по или против ч.с. – нужно рассмотреть вектор фазовой скорости $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ в нек. т. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Он направлен по касат. к траектории в сторону $t \uparrow$.

<u>Пример</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases} \qquad \lambda = 1 \pm 2i$$



Возьмём $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

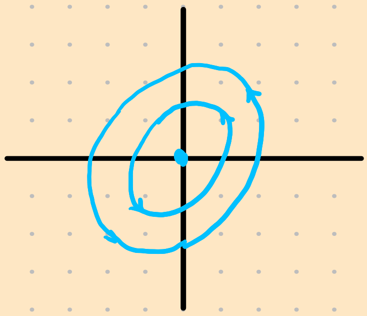
– против ч.с.

5. $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$ — **Устойчивый фокус**

То же самое, но стрелки – к н.р.

Направление – по вектору фазовой скорости.

6. $\lambda = \pm \beta i$, $\beta \neq 0$ — **Центр**



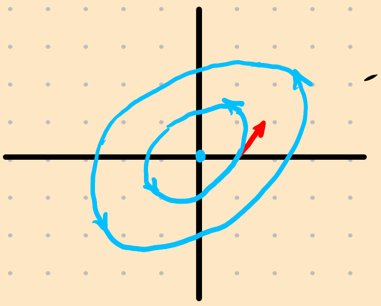
Траектории

1. Н.р.
2. Эллипсы с центром в н.р.

Напр. обхода – по $\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}$

__Пример__

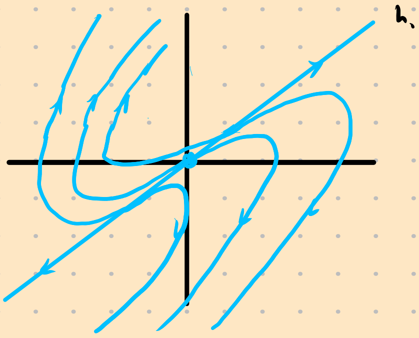
$$\begin{cases}\dot x = x - y\\ \dot y = 2x - y\end{cases} \qquad \lambda = \pm i \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$



– против ч.с.

7. $\underset{\text{кр.2}}{\lambda_1 = \lambda_2 > 0}$ $\quad \dim E_\lambda = 1$ — **Неустойчивый вырожденный узел**

Жорданова цепочка: $\bar h_1$, $\bar h_2$, $\bar h_1$ – собств.



Траектории

1. П.р.
2. 2 луча, натянутые на $\bar{h}_1$ (паруму)
3. Алг.-шкал. кривые вида $x = y \ln y$, кас. прямой, нат. на $\bar{h}_1$

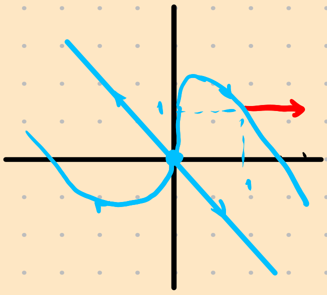
Для уточнения положения нужно найти $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ в т., лежащей близко к $\perp$ к $\bar{h}_1$, выход. из т. $(0,0)$.

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

$\lambda = 2$ кр. 2

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

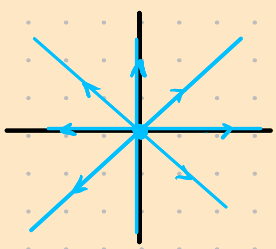
8) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ $\dim E_\lambda = 1$ **Устойчивый вырожденный узел**

То же самое, стрелки вовнутрь

9) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\dim E_\lambda = 2$ **Неустойчивый дикритический узел**

$\dot{x} = \lambda x$

$\dot{y} = \lambda y$



10) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, $\dim E_\lambda = 2$ **Устойчивый дикритический узел**

То же самое, но стрелки вовнутрь

Рас-им более общую сис-му:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{cases} \qquad (x_0, y_0) \text{ — п.р.}$$

$$f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$$

Можно разложить по Тейлору:

$$f_1(x,y) = \underbrace{f_1(x_0, y_0)}_{=0} + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + o(\rho)$$

$$f_2(x,y) = \underbrace{f_2(x_0, y_0)}_{=0} + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + o(\rho)$$

(при $x \to x_0$, $y \to y_0$)

$x - x_0 \mapsto u$, $\quad y - y_0 \mapsto v$

$$\dot{u} = A_1 u + B_1 v + o(\rho) \qquad\qquad A_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, y_0), \quad B_1 = \dots$$

$$\dot{v} = A_2 u + B_2 v + o(\rho) \qquad u, v \to 0 \qquad A_2 = \dots \quad B_2 = \dots$$

Линеаризованная система

$$\begin{cases} \dot{u} = A_1 u + B_1 v \\ \dot{v} = A_2 u + B_2 v \end{cases}$$

$(0,0)$ — п.р. линеаризованной системы

Грубое положение равновесия — первые 5 типов

Если немного пошевелить λ — будет ± то же самое

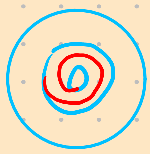
Напр., если $\lambda = \pm\beta i$, то чуть-чуть пошевелить — и λ сильно поменяется

(будет $\lambda = \alpha \pm \beta i$, и неясно, $\alpha > 0$ или $\alpha < 0$)

Утверждение

Если $(0,0)$ — грубое п.р. линеариз. сис-мы, то при определённых условиях гладкости на f_1 и f_2 траектории исх. сис-мы в окр-ти (x_0, y_0) существенно совпадают с траекториями линеариз. сис-мы.

Если у линеариз. сис-мы центр, то это уже неверно. (может быть всё что угодно, напр. предельные циклы).



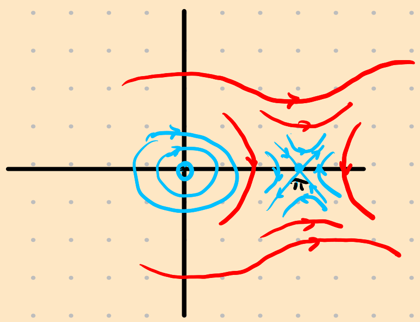
Фазовый портрет ур-я $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ $\equiv$ фазовый портрет сис-мы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$

$\ddot{x} = -\sin x$ $\equiv$ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ – п.р. $(\pi k, 0)$. Смотрим на $(0, 0)$:

Линеариз. сис-ма: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ $\lambda = \pm i$ – центр у исх. сис-мы – ?

Смотрим на $(\pi, 0)$:

$u = x - \pi$
$v = y$ лин. сис-ма: $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = u \end{cases}$ $\lambda = \pm 1$ – седло у исх. сис-мы – тоже



Если предположить, что в $(0,0)$ – центр, в целом получаем