Решение линейного уравнения 2 порядка

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$, $x \in I$ все ф. непр., $a_0(x) \neq 0$

Предположим, мы угадали y_1 — решение однородного ур-я

Ищем в виде $e^{\alpha x}$, x^k, $ax+b$ и т.д.

Найдем ОРОУ:

y_1 — найдено

y — произв. реш-е однородного ур-я

Ф-ла Лиувилля – Остроградского: $W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt} = C\varphi(x)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\varphi(x) \qquad \frac{y_1 y' - y y_1'}{y_1^2} = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C\varphi(x)}{y_1^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C_2 \int \frac{\varphi(x)}{y_1^2}dx + C_1$$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ОРНУ: вариация постоянной: $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \frac{b(x)}{a_0}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \neq 0$$

$C_1'(x) = \dots \quad C_2'(x) = \dots$

Задача 1

$$2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, \quad x > 0$$

ЧРОУ: $y_1 = e^{-x}$

y — произв., y_1 — угаданное

$$W(y_1, y) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x}dx} = Ce^{-(2x + \frac{1}{2}\ln x)} = Ce^{-2x}x^{-1/2}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{4x+1}{2x}dx = 2x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}dx = 2x + \frac{1}{2}\ln x + C_1$$

$$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = y'e^{-x} + ye^{-x}$$

Делим на e^{-2x}:

$$\frac{y' e^{-x} + y e^{-x}}{e^{-2x}} = C x^{-1/2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{e^{-x}}\right)' \qquad \frac{y}{e^{-x}} = C x^{1/2} + C_1$$

ОРОУ $\quad y = C_1 e^{-x} + C e^{-x}\sqrt{x}$

ОРНУ $\quad y = C_1(x) e^{-x} + C(x) e^{-x}\sqrt{x}$

$$+\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-x}\sqrt{x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-x}\sqrt{x} + C_2'(x)\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad C_1'(x) = -1$

$C_2(x) = 2\sqrt{x} + C_2 \qquad C_1(x) = -x + C_1$

Ответ: $y = (-x + C_1) e^{-x} + (2\sqrt{x} + C_2) e^{-x}\sqrt{x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}\sqrt{x} + x e^{-x}$

Задача 2

$$x^2(\ln x - 1) y'' - x y' + y = x(\ln x - 1)^2, \quad x > e$$

ЧРОУ: $\quad y_1 = x$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}} = C(\ln x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2} \qquad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C(\ln x - 1)}{x^2}$$

$$\frac{y}{y_1} = C\,\frac{\ln x}{x} + C_1$$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

ОРНУ: $\quad y = C_1(x) x + C_2(x) \ln x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)\frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x} \quad \Big| \cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{cases} C_1'(x)\,x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x)\,x + C_2'(x) = \ln x - 1 \end{cases}$$

$C_2'(x) = -1$ $\qquad$ $C_1'(x) = \frac{\ln x}{x}$

$C_2(x) = -x + C_2$ $\qquad$ $C_1(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1$

Ответ: $y = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1\right) x + (C_2 - x)\ln x$

$y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x\ln^2 x}{2} - x\ln x$

Задача 3

$(2x+3)\,y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}\,y = 3(2x+3)^2$

Ищем ЧРОУ в виде x^k:

$k(k-1)\cdot(2x+3)\,x^{k-2} - 2k\,x^{k-1} - 6x^{k-2} = 0$

$(2x+3)\,k(k-1) - 2kx - 6 = 0$

$$\begin{cases} 2k(k-1) - 2k = 0 \\ 3k(k-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

$k = 2 \Rightarrow y_1 = x^2$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{\int \frac{2}{2x+3}dx} = C(2x+3)$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{2C}{x^3} + \frac{3C}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + C_1$$

ОРОУ $y = C_1 x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

ОРНУ: ВП: $y = C_1(x)\,x^2 + C_2(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x^2 + C_2'(x)\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \quad \Big| \cdot 2 \\ C_1'(x)\,2x - C_2'(x)\frac{1}{x^2} = 6x + 9 \quad \Big| \cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 2C_1' x^2 + 2C_2'\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 \\ 2C_1' x^2 - C_2'\frac{1}{x} = 6x^2 + 9x \end{cases}$$

$3C_2'\frac{1}{x} + 2C_2' = -6x^2 - 9x$

$C_2' = -3x^2 \qquad C_1' = 3 + \frac{3}{x}$

$C_2 = -x^3 + C_2 \qquad C_1 = 3x + 3\ln x + C_1$

Ответ: $y = (3x + 3\ln x + C_1)x^2 + (-x^3 + C_2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

$y = C_1x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 3x^2\ln x + 2x^3 - x^2$

$y = C_1x^2 + C_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) + 2x^3 + 3x^2\ln x$

Уравнение Бесселя

$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$

Д-ть, что ур-е не может иметь 2х лин. незав. реш-ий, огр. в окр-ти 0 вмес-те с производными.

$\square$ Предположим y_1 и y_2 – 2 такие реш-я.

$W(y_1, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}$, $C \neq 0$ т.к. y_1 и y_2 лин. незав.

$y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{C}{x}$

огр. в окр-ти 0   явно неогр.

$\blacksquare$

Приведение лин. ур-ий 2го порядка к виду, не сод. y'

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

$\downarrow$ – преобр-е Лиувилля (замена неизв. ф-ии)

$z'' + Q(x)z = 0$

$y = z\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt\right)$

В ур-ии Бесселя: $y = zx^{-1/2}$

$y' = z'x^{-1/2} - \frac{1}{2}zx^{-3/2}$

$y'' = z''x^{-1/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} - \frac{1}{2}z'x^{-3/2} + \frac{3}{4}zx^{-5/2}$

Получаем $z''x^{3/2} - \cancel{z'x^{1/2}} + \frac{3}{4}zx^{-1/2} + \cancel{z'x^{1/2}} - \frac{1}{2}zx^{-1/2} + (x^2 - \nu^2)zx^{-1/2} = 0$

$z''x^{3/2} + \frac{1}{4}zx^{-1/2} + zx^{3/2} - \nu^2zx^{-1/2} = 0 \quad \Big| : x^{3/2}$

$z'' + \frac{1}{4}x^{-2} + z - \nu^2zx^{-2} = 0$

$$z'' + z\left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) = 0$$

При $\nu = \pm\frac{1}{2}$ это простое ур-е $z'' + z = 0 \Rightarrow z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

При ост. ν реш-я не яв-ся элем. ф-циями.

Задача Коши для лин. ур-я n-го порядка

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

$x_0 \in I$

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Реш-е з. Коши $\exists!$ на <u>всём</u> промежутке I

В отл. от т. об общем ур-ии, где оно $\exists!$ в окр-ти x_0.