Sistemas de ecuaciones lineales

Discusión, resolución e interpretación geométrica

PID_00293765

Ángel Alejandro Juan Pérez
Cristina Steegmann Pascual
Bernat Anton
Adrià Casamitjana Díaz

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 5 horas

Universitat Oberta de Catalunya

Ángel Alejandro Juan Pérez

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Valencia, máster en Tecnologías de la Información por la UOC y doctor en Ingeniería Industrial por la UNED. Ha cursado posgrados en las universidades de Harvard, Alicante y Valencia. Ha sido profesor y director académico en una high school de Boston, profesor asociado en la Universidad de Alicante y profesor coordinador en la UOC. Desde el año 2003, es profesor asociado de Estadística aplicada en la Universidad Politécnica de Cataluña y profesor de Informática en CFGS.

Cristina Steegmann Pascual

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (1993). Actualmente trabaja en su tesis doctoral en el campo del e-learning dentro del programa de doctorado sobre la Sociedad de la Información y el Conocimiento de la UOC. Desde 1993, es funcionaria de carrera del cuerpo de profesores de enseñanza secundaria, en la especialidad de Matemáticas, labor que compagina con la de profesora consultora de la UOC. Asimismo, ha publicado diversos artículos sobre enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Bernat Anton

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2007), máster de Matemática Avanzada (2008) y de Bioinformática para las Ciencias de la Salud (2013). Ha sido profesor asociado de la Universitat de Barcelona, de la Universitat Pompeu Fabra y del Tecnocampus de Mataró, además de personal de apoyo en el Parc de Recerca Biomèdica de Barcelona. Actualmente trabaja como profesor de secundaria por la Generalidad de Catalunya.

Adrià Casamitjana Díaz

Licenciado en Ingeniería de Telecomunicaciones por la UPC (2015), y doctor en Teoría de la Señal y Comunicaciones (2019) por la UPC. Tiene experiencia investigadora y docente en universidades de Suecia (KTH) y del Reino Unido (UCL). Desde el año 2021 es col·laborador de la UOC. Actualmente está afiliado a la Universidad de Barcelona como investigador post-doctoral, centrado en el estudio del cerebro mediante el procesamiento avanzado de imágenes médicas.

La revisión de este recurso de aprendizaje UOC ha sido coordinada por la profesora: Cristina Cano Bastidas

Sexta edición: septiembre 2022

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Autoría: Ángel Alejandro Juan Pérez, Cristina Steegmann Pascual, Bernat Anton, Adrià Casamitjana Díaz
Producción: FUOC

Índice

Introducción

En este módulo se revisan los conceptos básicos asociados a los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), su expresión matricial, su discusión (es decir, el estudio de si el SEL tiene o no, solución) y los métodos de resolución de Gauss y de Cramer. El módulo también incluye una aproximación a la interpretación geométrica de los SEL de tres incógnitas (es decir, en el espacio tridimensional).

Muchos de los fenómenos económicos, físicos y tecnológicos se pueden modelar, de forma exacta o aproximada, mediante sistemas de ecuaciones lineales. Así, por ejemplo, los modelos de Leontief, o tablas *input/ouput*, hacen uso de SEL para describir las relaciones existentes entre la oferta y la demanda de los distintos sectores que forman parte de una economía nacional. Otras de las múltiples aplicaciones de los SEL tratan ámbitos tan distintos como el balanceado de ecuaciones químicas, el estudio del flujo en redes o la programación lineal.

Objetivos

El objetivo general de este módulo es dotar al estudiantado de los fundamentos matemáticos asociados a la discusión, resolución e interpretación de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL).

En particular, los objetivos docentes que se pretenden lograr con este módulo son los siguientes:

1) Entender los conceptos asociados a un sistema de ecuaciones lineal y saber expresar un SEL de forma matricial.

2) Ser capaz de determinar el rango de una matriz y aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius a la discusión de SEL.

3) Conocer las peculiaridades de los SEL homogéneos.

4) Aprender a resolver SEL mediante los métodos de Gauss y de Cramer.

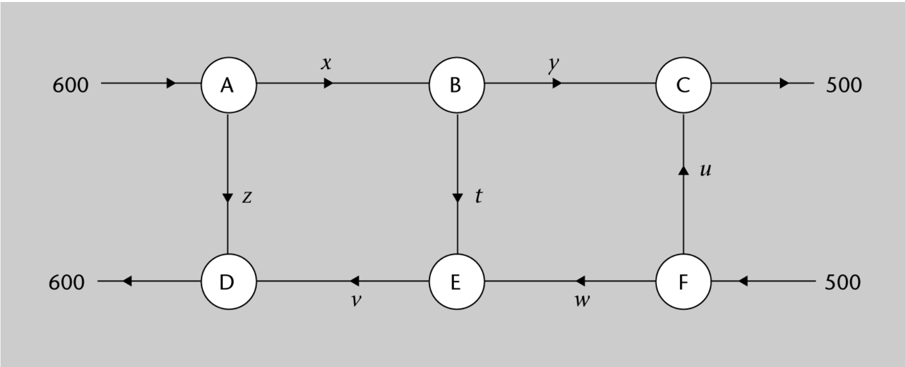
5) Saber interpretar los SEL desde un punto de vista geométrico.

6) Descubrir como el software matemático en general puede ser de utilidad para: (a) experimentar con los conceptos principales de este tema, y (b) automatizar la discusión y resolución de los SEL.

1. Ejemplo introductorio

El esquema siguiente (figura 1) muestra el flujo de datos (en MB por hora) entre seis *routers* (A-F) que forman parte de una red de área extensa (WAN):

Figura 1.



Se conoce el flujo total de datos que entra en esta subred, 1100 MB por hora (entrando por *routers* A y F), el cual coincidirá con el flujo total de datos que sale de la misma (por *routers* C y D).

Se supondrá, además, que el flujo de datos que entra en cada *router* será igual al flujo de datos que sale de ese mismo *router*.

Ejemplo inicial

En tales circunstancias, se desea:

- Calcular el flujo de datos entre cada par de *routers* directamente enlazados, es decir, se desea hallar el valor de las incógnitas x,y,z,t,u,v,w.
- Sabiendo que $u = 300$ y que $v = 100$, calcular el flujo de datos entre cada par de *routers* enlazados.

Las preguntas de este ejemplo se razonan y responden en el solucionario del final del módulo.

2. Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (SEL)** es un conjunto de relaciones de la forma::

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right., \tag{1}$$

donde:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,\cdots,m, \forall j = 1,2,\cdots,n$ son los llamados **coeficientes** del sistema.
- $x_j \in \mathbb{R}, \forall j = 1,2,\cdots,n$ son las llamadas **incógnitas** del sistema.
- $b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,\cdots,m$ son los llamados **términos independientes** del sistema.

Con frecuencia, resultará posible modelizar problemas reales mediante sistemas de ecuaciones lineales. En tales casos, los a_{ij} y los b_i serán valores conocidos, y el objetivo a lograr será descubrir los valores de las incógnitas x_j que verifican todas las ecuaciones del sistema de forma simultánea. El conjunto de dichos valores se llama **solución** del sistema, y el proceso por el cual se obtiene dicha solución (cuando esta exista) se llama **resolución** del sistema. Además, se dice que dos sistemas de ecuaciones son **sistemas equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Aunque pueden tener distinto número de ecuaciones, dos sistemas equivalentes tendrán siempre el mismo número de incógnitas.

Ejemplo 1. Distintos sistemas de ecuaciones con su solución

a) El sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas siguiente:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z = 2000 \\ y+z = 1500 \\ x+y+\frac{3}{4}z = 1800 \end{array}\right.$$

tiene por solución: $\{x = 500, y = 700, z = 800\}$.

OBS

En un SEL de 3 incógnitas, normalmente se utilizan las letras x,y,z para denotar las incógnitas.

b) El sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 2000 \\ y + z = 1500 \\ 4x + 4y + 3z = 7200 \end{cases}$$

tiene la misma solución que el anterior, dado que son sistemas equivalentes(las ecuaciones de ambos son equivalentes).

c) El sistema (no lineal) de dos ecuaciones polinómicas con dos incógnitas:

$$\begin{cases} y = 5(x - 1) \\ y = x^3 - x^2 \end{cases}$$

tiene tres soluciones, que son: $\{x = 1, y = 0\}$, $\{x = \sqrt{5}, y = 5\sqrt{5} - 5\}$ y $\{x = -\sqrt{5}, y = -5\sqrt{5} - 5\}$

d) El sistema de dos ecuaciones exponenciales (no lineales) y dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 1 \\ 2^x - 2^{y+2} = 0 \end{cases}$$

tiene por solución: $\{x = 1, y = -1\}$.

e) El sistema de dos ecuaciones lineales (SEL):

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

es incompatible, es decir, no tiene solución, porque dos números no pueden sumar a la vez 1 y 2.

OBS

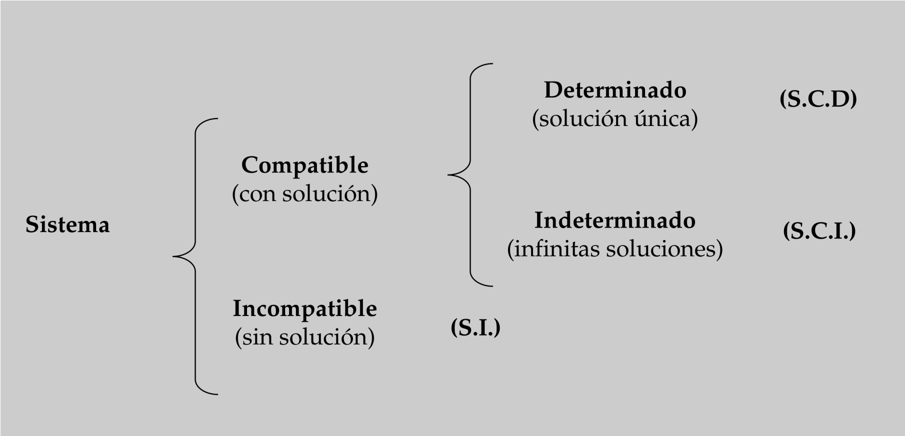
Los ejemplos ***c*** y ***d*** no son SEL, porque en ellos intervienen ecuaciones no lineales.

Los sistemas de ecuaciones (de cualquier tipo, lineales o no lineales) pueden tener solución, en cuyo caso se habla de **sistema compatible**, o no tenerla, en cuyo caso se habla de **sistema incompatible**. Además, en el caso de sistemas de ecuaciones lineales, si el sistema es compatible, la solución puede ser única, en cuyo caso se habla de **sistemas compatibles determinados**, o por el contrario, puede que el sistema tenga infinitas soluciones, en cuyo caso se habla de **sistemas compatibles indeterminados** (figura 2).

Es importante observar ...

... que si un SEL tiene más de una solución, entonces necesariamente tendrá infinitas soluciones. Este hecho se comprenderá mejor tras leer el apartado "Interpretación geométrica de los SEL".

Figura 2. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales (SEL)



3. Expresión matricial de un SEL

Usando las propiedades del producto de matrices, es posible expresar el sistema de ecuaciones lineales (1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

o, equivalentemente:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \tag{3}$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\text{x}n}$ es la **matriz de coeficientes**, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de incógnitas y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de términos independientes.

Como se verá más adelante, otra matriz importante es la **matriz de coeficientes ampliada**:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1)\text{x}n}$$

Ejemplo 2. Notación matricial de un SEL

La representación matricial del siguiente sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} x - 3y + 6z - 8t = 5 \\ \qquad\qquad y + z = 15 \\ \quad x + y - 3z + t = 8 \end{cases}$$

es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

OBS

Si desarrolláis este producto de matrices, veréis que las dos expresiones son equivalentes.

La matriz de coeficientes del sistema (**A**) y la matriz de coeficientes ampliada (**M**) son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

4. Discusión de SEL

Antes de proceder a buscar las soluciones de un sistema de ecuaciones, puede resultar conveniente estudiar el sistema para saber si este será o no compatible. Este proceso de determinar el tipo de sistema al que nos enfrentamos se llama **discusión del sistema**. En sistemas de ecuaciones lineales, el siguiente teorema, el cual hace uso de la notación introducida en los apartados anteriores, resulta ser una herramienta de gran ayuda:

Teorema de Rouché-Fröbenius Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, se cumple lo siguiente:

- Si $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\text{M}) = n$, el sistema es un **SCD**,
- Si $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\text{M}) = r < n$, el sistema es un **SCI**. En esta situación se dice que el sistema tiene $(n - r)$ **grados de libertad**,
- Si $\text{rg}(\mathbf{A}) < \text{rg}(\text{M})$, el sistema es un **SI**,

donde $\text{rg}(\cdot)$ se refiere al al rango d'una matriz.

Observar que, en el contexto en que estamos, siempre ocurrirá que $\text{rg}(\mathbf{A}) \leq \text{rg}(\text{M}) \leq n$ por lo que en el teorema se están considerando todos los casos posibles.

Podéis consultar la definición de *rango de una matriz* y cómo calcularlo en el apartado 4 del módulo "Elementos de álgebra y geometría lineal".

Ejemplo 3. Discusión de sistemas mediante Rouché-Fröbenius

Estudiemos la compatibilidad del siguiente SEL:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \quad x + y = 0 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}.$$

(a) En primer lugar, se determina la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

(b) Después calculamos el rg(**A**). Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, y ya que a partir de **A** no se pueden formar menores de mayor orden, observamos que rg(**A**) = 2.

(c) Finalmente, calculamos el rg(**M**). En este caso, en la matriz **M** sí que es posible encontrar un menor de orden 3 el cual, además, es no nulo. Por tanto, observamos que rg(**M**) = 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6 + 0 - 3) - (2 + 4 + 0) = -3 \neq 0.$$

(d) En conclusión: rg(**A**) < rg(**M**), con lo que, según el teorema de Rouché-Fröbenius, estamos ante un sistema incompatible (SI).

Ejemplo 4. Discusión de sistemas mediante Rouché-Fröbenius.

Queremos discutir la compatibilidad del siguiente SEL:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + z = 4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

(a) Primeramente, escribimos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

(b) Seguidamente, calculamos el rg(**A**) = 2. Observamos que $|\mathbf{A}| = 0$ y que el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

(c) Asimismo, rg(**M**) = 2, ya que la última fila es la suma de las dos primeras (y, por tanto, cualquier menor de orden 3 será nulo).

(d) En conclusión: rg(**A**) = rg(**M**) = 2 < n = 3, por lo cual el sistema es compatible indeterminado (SCI) y tiene un grado de libertad.

En este caso, además, es fácil determinar todas las soluciones del sistema, ya que la última ecuación es la suma de las dos primeras. Suprimiendo dicha ecuación, queda el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + z = 4 \end{cases} \quad \text{i.e.,} \quad \begin{cases} x + z = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

La solución del mismo se obtiene expresando todas las variables en función de una de ellas. Por ejemplo, si despejamos las variables x e y en función de z, se obtiene:

$$\begin{cases} x = 4 - z \\ y = -4 + 2z \\ z = z \end{cases} \quad \text{o, parametrizando} \quad z = \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -4 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5. Discusión de sistemas con parámetros.

Vamos a estudiar el siguiente SEL en función de los valores que tome el parámetro k ($k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ky + kz = 2 \\ kx + ky + z = 1 \end{cases}$$

Las matrices asociadas son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k & 2 \\ k & k & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Puesto que es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, el rango de ambas matrices será menor o igual a 3. Para que este sistema sea compatible determinado, se tiene que cumplir que el determinante de la matriz de coeficientes sea diferente de cero. Veamos para qué valores del parámetro k el determinante de $\mathbf{A}$ es cero:

$$|\mathbf{A}| = (k + k^2 + 0) - (k^2 + k^2 + 0) = k - k^2 = k(1 - k)$$

Así, $|\mathbf{A}| = 0 \iff k = 0$ o $k = 1$. De este resultado podemos concluir que: para todos los valores del parámetro k diferentes de 0 y de 1 se cumple que $|\mathbf{A}| \neq 0$ y, por consiguiente, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = n = 3$. En otras palabras, el sistema será compatible determinado para todos los valores reales del parámetro k distintos a 0 y 1.

Ahora vamos a clasificar el sistema para los casos $k = 0$ y $k = 1$:

- Caso $k = 0$: las matrices del sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ya sabemos que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) < 3$ porque $|\mathbf{A}| = 0$. Por otra parte, $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 3$, ya que es posible encontrar un menor no nulo de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 2) = -2 \neq 0.$$

Puesto que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) < \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 3$ concluimos que para $k = 0$ el sistema es incompatible.

- Caso $k = 1$: las matrices del sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ya sabemos que $\text{rg}(\mathbf{A}) < 3$ porque $|\mathbf{A}| = 0$. Si encontramos un menor no nulo de $\mathbf{A}$ de orden 2 podremos decir que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$. Elegimos el menor que resulta de seleccionar las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0,$$

Por tanto, concluimos que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$. Necesitamos calcular el rango de la matriz ampliada. Ya sabemos que $\text{rg}(\mathbf{M}) \geq \text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ por eso pasaremos directamente a calcular los menores de orden 3 de la matriz ampliada orlando el menor no nulo con la columna de los términos independientes. Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 2) - (1 + 0 + 2) = 0.$$

Por consiguiente, $\text{rg}(\mathbf{M}) = \text{rg}(\mathbf{A}) = 2$. Ahora podemos concluir que para $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad $((n - \text{rg}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1))$.

En resumen,

- Si $k \neq 0,1$, el sistema es un SCD.
- Si $k = 0$, el sistema es un SI.
- Si $k = 1$ el sistema es un SCI con un grado de libertad.

5. Sistemas lineales homogéneos

Se dice que un SEL es **homogéneo** si todos sus términos independientes son cero, es decir, el SEL es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots & + a_{mn}x_n & = 0 \end{array}\right. . \quad (4)$$

Matricialmente se expresa así:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

donde **A** es la matriz de coeficientes, **X** el vector de incógnitas y

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Observación: Observación: En todo SEL homogéneo la matriz ampliada, **M**, se forma añadiendo una columna de ceros a la matriz de coeficientes, **A**, por lo que siempre se tendrá que: rg(**M**) = rg(**A**). Por tanto, según Rouché-Fröbenius, se puede afirmar que **los SEL homogéneos siempre son compatibles**. En concreto, los SEL homogéneos siempre aceptan, como mínimo, la llamada **solución trivial**: $\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Para saber si un SEL homogéneo tiene solo una única solución (la trivial) o infinitas, será necesario averiguar si rg(**A**) = n. En caso afirmativo, se tratará de un SCD –cuya única solución será la trivial. En caso negativo, habrá infinitas soluciones –entre ellas la trivial.

Ejemplo 6. Discusión de un SEL homogéneo

Se desea discutir el SEL homogéneo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \cdot \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Observar que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |\mathbf{A}| = (-1 - 1 + 2) - (1 + 2 + 1) = -4 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3 = n$, *i.e.* la única solución del SEL es la trivial.

Se demuestra que todas las soluciones de un sistema homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, con n incógnitas forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

6. Resolución de SEL por Gauss

El **método de Gauss** consiste en ir aplicando operaciones especiales sobre las filas y columnas de la matriz de coeficientes ampliada, $\mathbf{M}$, de manera que esta se transforme en una nueva matriz, $\mathbf{E}$, con las siguientes características:

1. Las matrices $\mathbf{E}$ y $\mathbf{M}$ representan sistemas de ecuaciones equivalentes.
2. La matriz $\mathbf{E}$ está escalonada inferiormente, es decir, es de la forma:

$$\mathbf{E} = \left(\begin{array}{cccccc|c} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} & \cdots & e_{1n} & d_1 \\ 0 & e_{22} & \cdots & e_{2m} & \cdots & e_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e_{mm} & \cdots & e_{mn} & d_m \end{array}\right). \tag{6}$$

En otras palabras, $e_{ij} = 0, \forall i > j$

Las operaciones especiales que se pueden emplear para lograr matrices equivalentes son, básicamente, las siguientes:

- Transponer dos filas.
- Transponer dos columnas (en cuyo caso se debe tener presente que también se altera el orden de las variables en el SEL).
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar (por extensión, sumar a una fila una combinación lineal de las otras).
- Eliminar una fila de ceros.

Una vez obtenida la matriz $\mathbf{E}$, se considerará el nuevo SEL asociado (habrá que prestar especial atención a posibles cambios en el orden de las variables debidos a transposiciones de columnas). A partir de la última ecuación no trivial, se tratará de despejar una de las incógnitas en función de las restantes. A continuación, se tomará la ecuación inmediatamente superior, se sustituirá la incógnita ya despejada por su valor, y se despejará otra de las incógnitas en función de las restantes. Este proceso seguirá en orden ascendente (cada vez tomando la ecuación inmediatamente superior a la última tratada) hasta llegar a la primera de las ecuaciones.

Ejemplo 7. Resolución de sistemas mediante Gauss

Se desea resolver por Gauss el SEL siguiente:

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = -1 \\ 2x + 6y + z + t = -12 \\ 3x - y + z - t = 7 \\ 2x + y + z + t = -2 \end{cases}$$

Se parte de la matriz de coeficientes ampliada (**M**), la cual se irá transformando hasta convertirla en una escalonada inferior (**E**):

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & -12 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)]{}$$

$$\xrightarrow[(2)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)]{}$$

$$\xrightarrow[(4)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[(5)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[(6)]{}$$

$$\xrightarrow[(6)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(7)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

Se explican a continuación los detalles, para lo cual se hará uso de la notación:

F_i = fila i-ésima $\qquad$ C_j = columna j-ésima

1) Se toma como “elemento pivote.el $m_{11} = 1 \neq 0$ Se reducen a 0 los elementos de la C_1 que se encuentran debajo del pivote, lo cual se consigue haciendo:
- $F_2 = F_2 - 2 \cdot F_1$
- $F_3 = F_3 - 3 \cdot F_1$
- $F_4 = F_4 - 2 \cdot F_1$

2) Como $m_{22} = 0$, se transponen las filas F_2 y F_4.

3) Se cambia el signo de la fila F_2 multiplicando esta por (-1).

4) Se toma como nuevo pivote el elemento $m_{22} = 5 \neq 0$. Se reducen a cero los elementos situados por debajo de este, para lo cual se hace:
- $F_3 = F_3 + 2 \cdot F_2$.

5) Se cambia el signo de la F_3 multiplicando esta por (-1).

6) Se toma como nuevo pivote el elemento $m_{33} = 1 \neq 0$. Se reduce a cero los elementos que están por debajo de este, del siguiente modo:

- $F_4 = F_4 - F_3$.

7) Se elimina F_4, esto es, la última ecuación.

La matriz resultante tiene una fila menos que el número de incógnitas. Ello significa que se tendrá un grado de libertad, es decir: la t podrá tomar cualquier valor.

Sustituyendo hacia atrás en las otras ecuaciones se obtiene la solución general del sistema, la cual depende de un parámetro arbitrario λ. La solución general es la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= -3y + 2\lambda - 1 = 2\lambda + 5 \\ y &= \frac{1}{5}(5\lambda + z) = \frac{1}{5}(5\lambda - 10 - 5\lambda) = -2 \\ z &= -10 - 5\lambda \\ t &= \lambda \end{aligned}$$

El método de Gauss también proporciona el rango de una matriz (número de filas linealmente independientes), ya que este coincidirá con el número de filas no nulas de la matriz escalonada inferior $\mathbf{E}$. En el ejemplo anterior $\text{rg}(\mathbf{M}) = 3$ ya que la matriz escalonada resultante tiene rango 3.

Ejemplo 8. Resolución de sistemas mediante Gauss

Se desea resolver por Gauss el sistema siguiente, expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada del sistema es: $\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$ Transformamos la matriz $\mathbf{M}$ en una matriz triangular mediante transformaciones por filas. Recordemos que el método de Gauss consiste, básicamente, en transformar el sistema dado en otro equivalente en el que la matriz de coeficientes sea triangular superior.

A continuación se indican las transformaciones realizadas sobre $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A partir de la última matriz, podemos deducir lo siguiente:

a) La última fila es toda de ceros y, por tanto, la podemos eliminar.

b) De la segunda fila, tenemos que $z + t = \frac{1}{4}$, es decir: $z = \frac{1}{4} - t$.

c) Finalmente, de la primera ecuación tenemos: $x + 2y + \left(\frac{1}{4} - t\right) + 2t = 0$, de donde: $x = -t - 2y - \frac{1}{4}$.

En conclusión: el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad (hay dos parámetros en la solución). La solución es:

$$\begin{cases} x = -t - 2y - \frac{1}{4} \\ y = y \\ z = \frac{1}{4} - t \\ t = t \end{cases}$$

7. Sistemas de Cramer. Resolución de SEL por Cramer

El **método de Cramer** hace uso de determinantes para resolver SEL cuya matriz de coeficientes, $\mathbf{A}$, sea cuadrada y tenga inversa (es decir, el sistema deberá tener el mismo número de incógnitas que de ecuaciones y, además, el determinante de $\mathbf{A}$ deberá ser no nulo).

Cuando la matriz de coeficientes, $\mathbf{A}$, es cuadrada y su determinante es no nulo, el sistema asociado, llamado **sistema de Cramer** verifica que:

a) Es compatible determinado.
b) Su solución viene dada por las expresiones siguientes:

$$\forall i = 1,2,\cdots,n \qquad x_i = \frac{det(\mathbf{C}_1,\cdots,\mathbf{C}_{i-1},\mathbf{B},\mathbf{C}_{i+1},\cdots,\mathbf{C}_n)}{det(\mathbf{A})}. \tag{7}$$

En la expresión anterior, $det(\mathbf{A})$ representa el determinante de la matriz de coeficientes y $det(\mathbf{C}_1,\cdots,\mathbf{C}_{i-1},\mathbf{B},\mathbf{C}_{i+1},\cdots,\mathbf{C}_n)$ representa el determinante de la matriz que resulta tras sustituir la columna i-ésima de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}_i$, por la columna de términos independientes, $\mathbf{B}$.

Ejemplo 9. Resolución de SEL por Cramer

Se desea resolver el SEL siguiente (observar que el número de incógnitas es igual que el número de ecuaciones):

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 4z = 21 \\ 2x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

Para saber si se puede aplicar Cramer, falta comprobar que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 8 + 8 - 12 - 12 - 8 = 2 \neq 0.$$

Aplicando la regla de Cramer se obtendrán las soluciones del SCD:

Términos independientes del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 21 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{60 + 36 + 42 - 54 - 40 - 42}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{126 + 80 + 72 - 84 - 108 - 80}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 4 & 3 & 21 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{2} = \frac{81 + 42 + 40 - 60 - 63 - 36}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

De este modo, la solución del sistema es:

$$x = 1 \qquad y = 3 \qquad z = 2.$$

Observación

Si el sistema es compatible indeterminado de rango r menor que el número de incógnitas n (tiene $n - r$grados de libertad), fijamos un menor de orden r no nulo. Las ecuaciones correspondientes a las filas no afectadas por el menor pueden ser eliminadas. Las incógnitas correspondientes a las columnas no afectadas por el menor de orden r no nulo fijado se consideran como parámetros. Entonces, para valores cualesquiera de estos parámetros el sistema es de Cramer y tiene una única solución.

Ejemplo 10. Resolución de SEL por Cramer

Dado el SEL

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 3 \\ 3x + y + z &= 6 \end{aligned}\right\}, \quad \text{la matriz ampliada tiene determinante} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

y por tanto su rango es menor que 4 y alguna de sus ecuaciones es combinación lineal de la otras. Por otro lado el menor de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

y por tanto el rango de la matriz asociada y el de la ampliada es 3. En este caso el sistema es compatible determinado. Podemos prescindir de la última ecuación (que es combinación lineal del resto) y por tanto queda un sistema de Cramer.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=3 \end{array}\right\} \text{ que ahora podemos resolver por Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = -1.$$

Ejemplo 11. Resolución de SEL por Cramer

Para resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y-z+t=3 \end{array}\right\}, \text{ como que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

tenemos que el rango de la matriz asociada es 3 y por tanto el de la matriz ampliada también es 3. Pero tenemos 4 incógnitas, así el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad. Podemos considerar la incógnita t como un parámetro (corresponde a la columna no afectada del menor de orden 3 no nulo) y queda un sistema de Cramer para cada valor de t:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1-t \\ x-y+z=2-t\cdot \\ x+y-z=3-t \end{array}\right\}$$

Se puede resolver por Gauss y por Cramer

1) Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 1 & 2-t \\ 1 & 1 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y obtenemos } \quad x = \frac{5-2t}{2}, y = \frac{-1}{2}, z = -1, t = t$$

2) Método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 2-t & -1 & 1 \\ 3-t & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{5-2t}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 3-t & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2-t \\ 1 & 1 & 3-t \end{vmatrix}}{4} = -1, \quad t = t$$

8. Interpretación geométrica de los SEL

Antes de centrarnos en el espacio tridimensional (SEL con tres incógnitas), conviene revisar brevemente lo que ocurre en el plano (SEL con dos incógnitas): en un sistema de m ecuaciones lineales con 2 incógnitas (x e y), cada ecuación representa una recta en el plano, por lo que:

- Si el sistema es compatible determinado, existe un único valor (x_0,y_0) que es solución del mismo, i.e.: (x_0,y_0) pertenece, simultáneamente, a las m rectas; en otras palabras, las m rectas se cortan en dicho punto.
- Si el sistema es compatible indeterminado, todas las rectas tienen infinitos puntos en común, por lo que han de ser coincidentes (se trata de la misma recta expresada de distintas formas).
- Si el sistema es incompatible, ocurrirá que no hay ningún punto en común. Si $m = 2$ se tratará de dos rectas paralelas no coincidentes.

En el espacio, un plano π viene determinado por una ecuación lineal de tres incógnitas (x,y,z). Es decir, es de la forma:

$$\pi : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d \qquad (8)$$

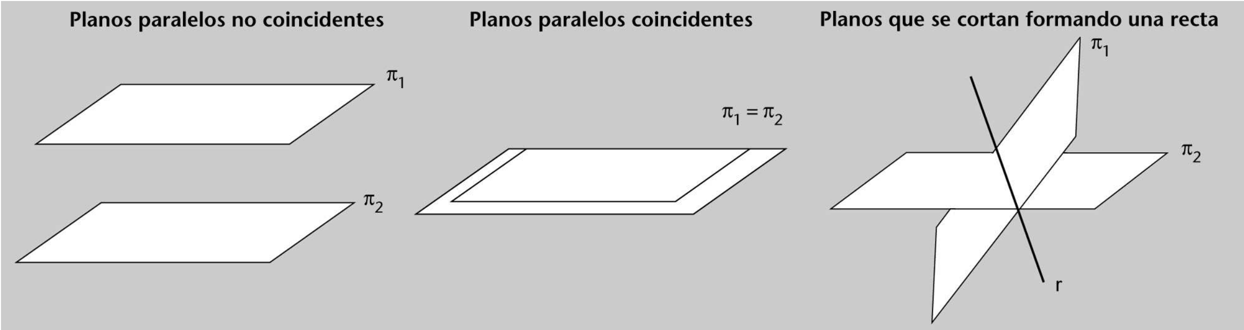
Esto significa que cuando se tiene un SEL formado por m ecuaciones y 3 incógnitas, este se puede interpretar como un conjunto de m planos en el espacio. En tales condiciones, el teorema de Rouché-Fröbenius es una herramienta clave para estudiar la posición relativa de los planos (es decir, si estos se cortan en algún punto o recta, si son paralelos, etc.).

Si el SEL es compatible determinado, entonces existirá una única solución, (x_0,y_0,z_0), que verifique –de forma simultánea– las m ecuaciones. En otras palabras, (x_0,y_0,z_0) es el único punto del espacio que verifica las ecuaciones de los m planos y, por tanto, el único punto de intersección de los m planos.

Ejemplo 12. Intersección de dos planos

Observar que si $m = 2$ (es decir, solo tenemos dos planos), no puede ocurrir que estos se corten en un único punto. Como se observa en la figura 3, o bien serán paralelos no coincidentes (con lo cual no se cortarán), o bien serán paralelos coincidentes (es decir, tendrán infinitos puntos en común puesto que son el mismo plano), o bien se cortarán en los infinitos puntos que constituyen una recta r.

Figura 3. Posibles posiciones relativas de dos planos en el espacio.



Ejemplo 13. Intersección de tres planos en un punto

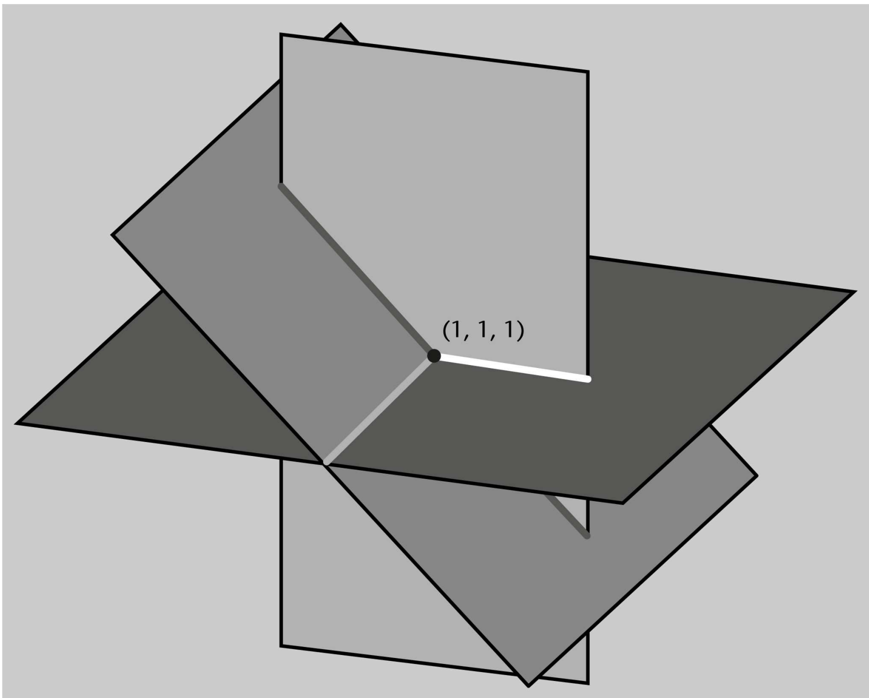
Consideramos este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Es fácil ver que el sistema es compatible determinado, ya que ($\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 3$). El único punto solución del sistema es $(x,y,z) = (1,1,1)$

La figura 4 muestra que este punto se puede ver como la intersección de los tres planos definidos por las tres ecuaciones lineales del sistema.

Figura 4. Intersección de tres planos en un punto.



Ejemplo 14. Intersección de dos planos en una recta

Consideramos este sistema de ecuaciones lineales:

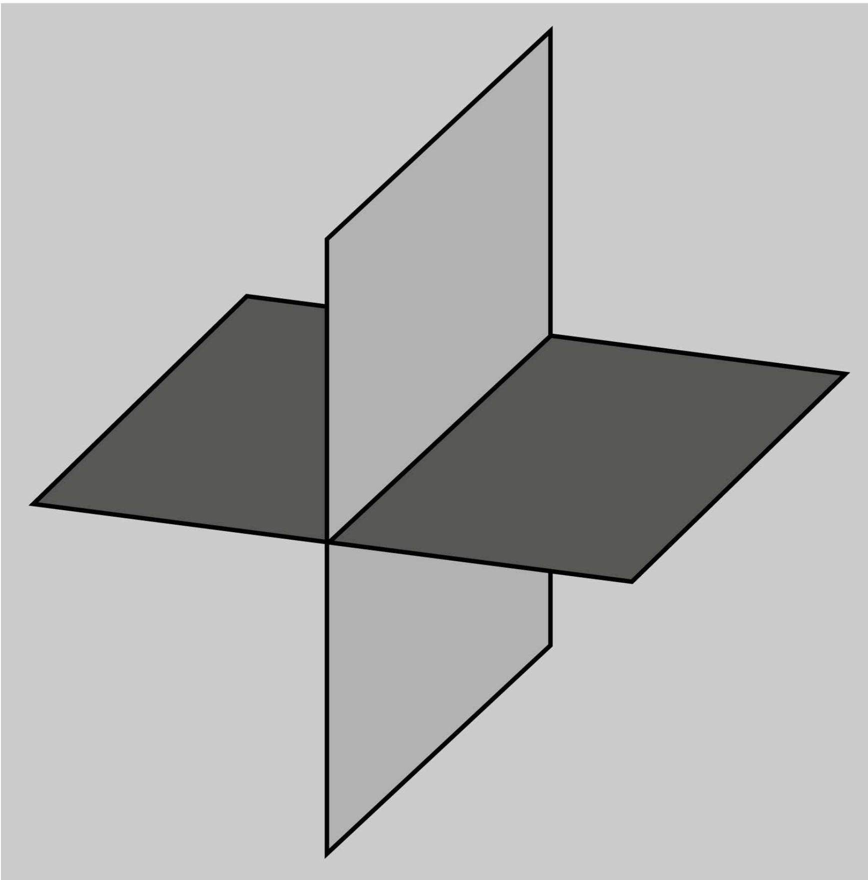
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

En este caso solo tenemos dos ecuaciones linealmente independientes, pero hay tres incógnitas. Se cumple $\text{rg}(\mathbf{M}) = \text{rg}(\mathbf{A}) = 2 < 3$, por tanto, tenemos un sistema compatible indeterminado.

La figura 5 muestra el plano solución de cada una de las dos ecuaciones y que la intersección de ambas (es decir, la solución de las dos ecuaciones simultáneamente) es una recta.

La solución parametrizada de este sistema es $(x,y,z) = (1,z + 1,z)$.

Figura 5. Intersección de dos planos en una recta.



Ejemplo 15. Intersección de tres planos en una recta

Consideramos este sistema de ecuaciones lineales:

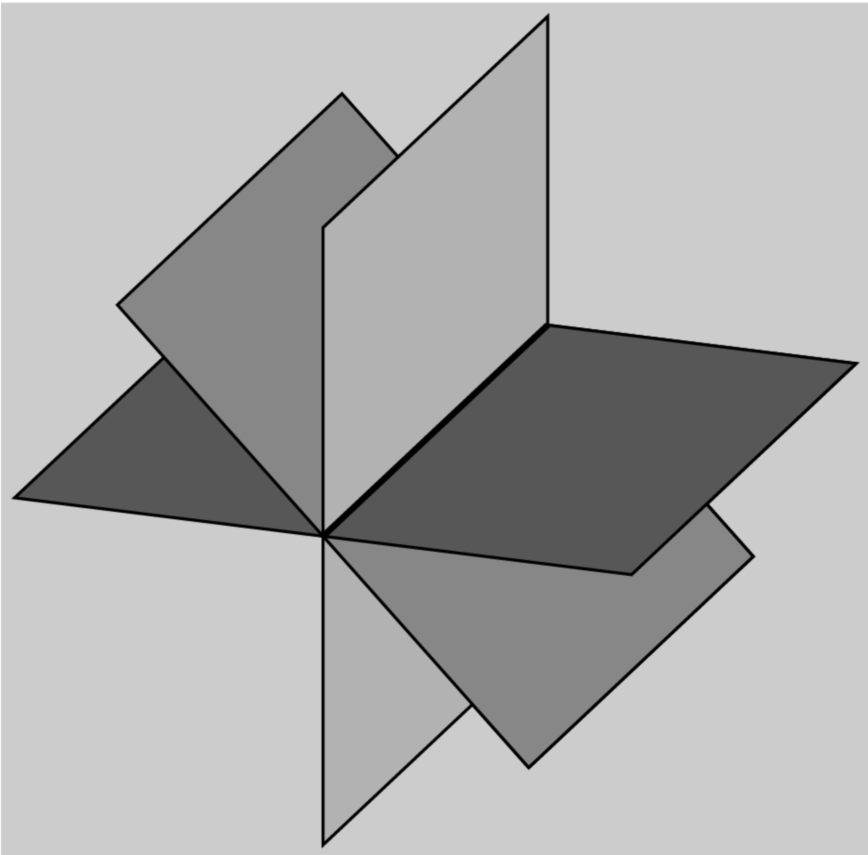
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

Fijémonos en que las dos primeras ecuaciones son las mismas que las del ejemplo anterior, mientras que la tercera es la suma de la primera y la segunda ecuación. Por lo tanto, resulta obvio que vuelva a cumplirse $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2 < 3$; por lo tanto, volvemos a tener un sistema compatible indeterminado.

La figura 6 muestra la misma intersección de planos del ejemplo anterior, que representa las dos primeras ecuaciones, y un tercer plano que se interseca también en la misma recta.

La solución parametrizada de este sistema aún es $(x,y,z) = (1,z + 1,z)$.

Figura 6. Intersección de tres planos en una recta.



Ejemplo 16. Dos planos paralelos y no coincidentes

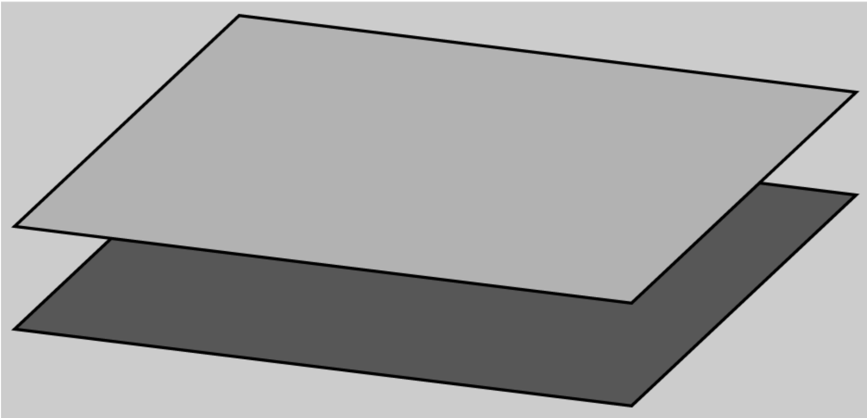
Consideramos este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible, ya que no puede ser que simultáneamente $x - y + z$ valga 0 y 1 a la vez. Efectivamente, al hacer el cálculo vemos $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 1$ y $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 2$.

Geométricamente, la falta de solución del sistema significa que los dos planos que representan las dos ecuaciones lineales no se cortan. En otras palabras, los dos planos son paralelos, como se muestra en la figura siguiente.

Figura 7. Dos planos paralelos.



Ejemplo 17. Tres planos que no intersecan

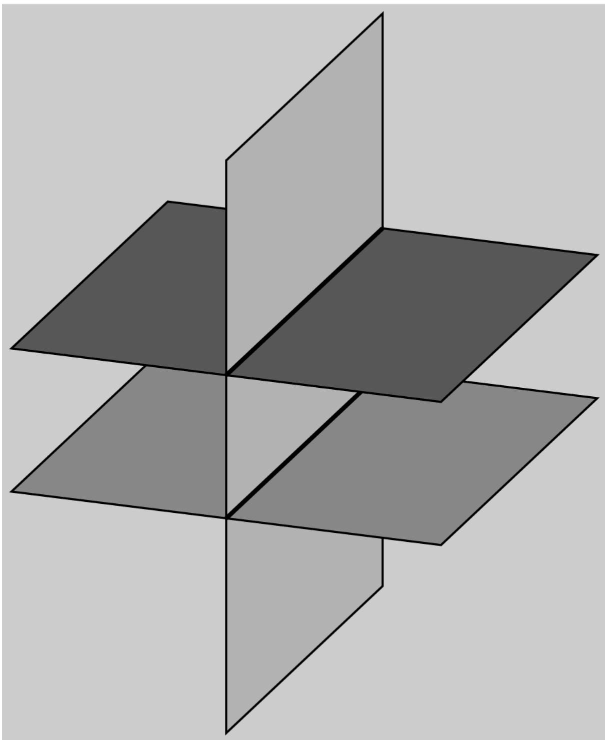
Consideramos este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones, al igual que la primera y la tercera, forman sistemas compatibles indeterminados, representados por dos planos que se cortan en una recta. Sin embargo, los planos que representan la segunda y la tercera ecuación son paralelos, por lo que el sistema que forman estas dos ecuaciones es incompatible. Así pues, si no hay solución que satisfaga a la vez la segunda y la tercera ecuación, añadir la primera ecuación no cambiaría esta situación, con lo que el sistema será incompatible.

Efectivamente, si calculamos el rango, tenemos que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2 < \text{rg}(\mathbf{M}) = 3$. En la figura 8 se puede ver la representación explicada anteriormente.

Figura 8. Tres planos sin ningún punto en común.

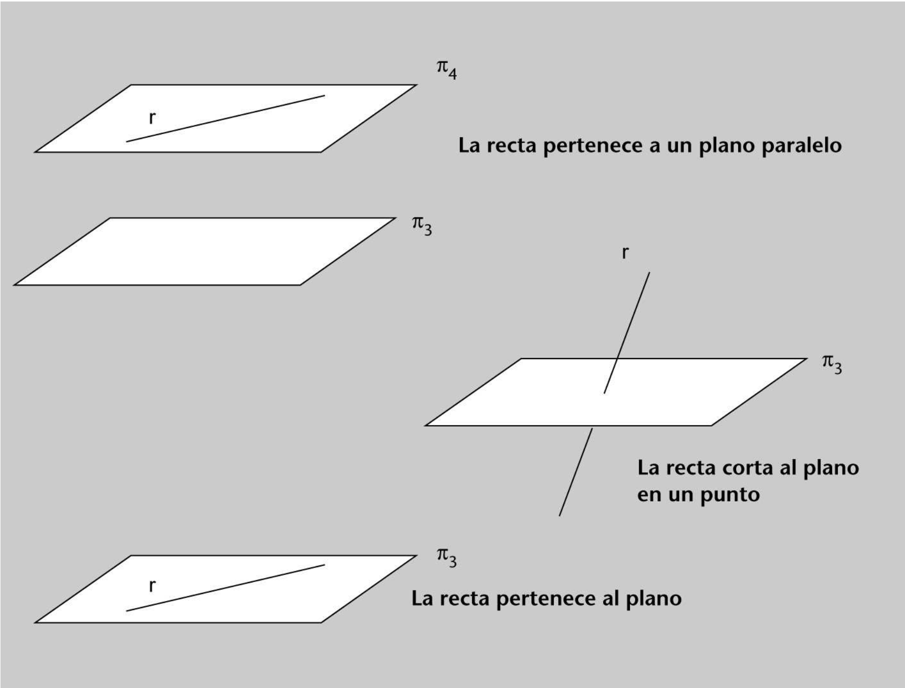


En algunos de los ejemplos anteriores se ha podido comprobar cómo la intersección de dos planos no coincidentes, π_1 y π_2 da lugar a una recta *r*. Por dicho motivo, es frecuente ver expresada la ecuación de una recta como un sistema compatible indeterminado formado por 2 ecuaciones con 3 incógnitas, i. e.

$$r : \begin{cases} \pi_1 : & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 : & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \tag{9}$$

De esta forma, es posible estudiar la posición relativa entre una recta *r* (dada por las ecuaciones de π_1 y π_2) y un plano π_3 a partir de la discusión del consiguiente sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Cuando el sistema resultante sea incompatible (recta y plano no tienen ningún punto en común), la recta *r* estará situada en un plano π_4 paralelo (no coincidente) a π_3 (figura 9). Cuando el sistema resultante sea compatible determinado (recta y plano tienen un único punto en común), *r* cortará π_3 en un único punto. Finalmente, cuando el sistema resultante sea compatible indeterminado (recta y plano tienen infinitos puntos en común), *r* estará incluida en π_3

Figura 9. Posibles posiciones relativas de recta y plano en el espacio.



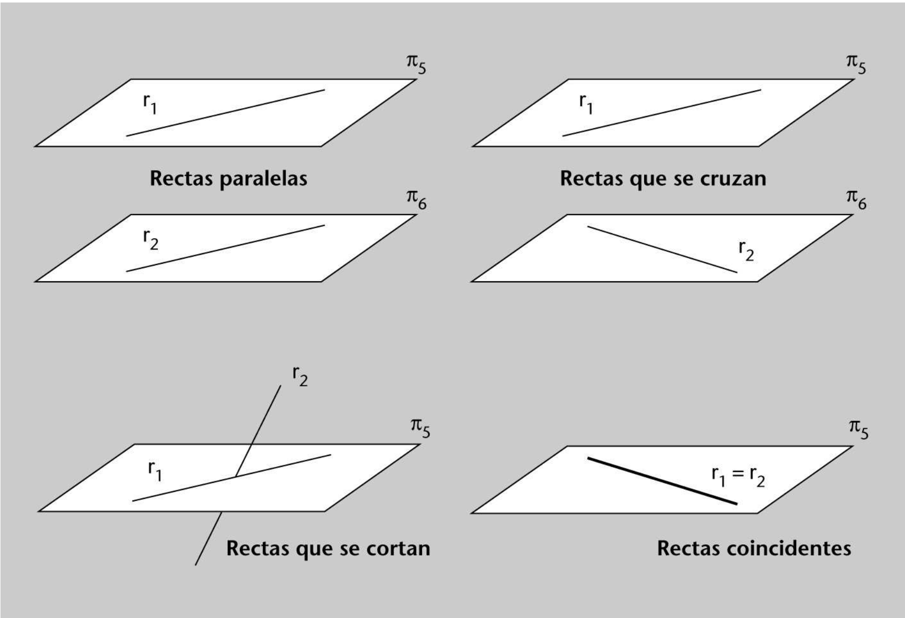
De forma análoga, también es posible estudiar la posición relativa entre dos rectas, r_1 y r_2, en el espacio: cada una de las rectas vendrá definida por la intersección de dos planos, es decir, cada recta vendrá dada por un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que el sistema resultante será un sistema compuesto por 4 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$r_1 : \begin{cases} \pi_1 : & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 : & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} \pi_3 : & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ \pi_4 : & a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases} \tag{10}$$

Cuando el sistema anterior sea incompatible (ambas rectas no tienen ningún punto en común), r_1 y r_2 serán paralelas (no coincidentes) o secantes (en ambos casos pertenecen a sendos planos, π_5 y π_6, paralelos entre sí) (figura 10). Cuando el sistema resultante sea compatible determinado (las rectas tienen un único punto en común), r_1 cortará r_2 en un único punto. Finalmente, cuando el sistema resultante sea compatible indeterminado (ambas rectas tienen infinitos puntos en común), r_1 y r_2 serán la misma recta (rectas paralelas y coincidentes).

Figura 10. Posibles posiciones relativas de dos rectas en el espacio.



Resumen

En este módulo se han presentado las principales ideas y resultados asociados a los sistemas de ecuaciones lineales. Los conceptos clave del mismo son los siguientes:

- Sistema de ecuaciones lineales (SEL), coeficientes, incógnitas y términos independientes. Sistemas equivalentes.
- Sistemas compatibles (determinados e indeterminados) y sistemas incompatibles.
- Expresión matricial de un SEL, matriz de coeficientes y matriz de coeficientes ampliada.
- Discusión de sistemas. Teorema de Rouché-Fröbenius.
- SEL homogéneos. Solución trivial.
- Método de resolución de Gauss.
- Sistema de Cramer. Método de resolución de Cramer.
- Interpretación geométrica de SEL con 2 y 3 incógnitas (paralelismo de rectas y planos, intersección de rectas y planos, etc.).

El módulo se ha completado con ejemplos y actividades resueltas (con y sin ayuda de software) en las que también se han introducido algunas aplicaciones de la teoría expuesta a diferentes ámbitos temáticos.

Ejercicios de autoevaluación

1. Calcular el rango de la siguiente matriz en función de los valores del parámetro s:

Para realizar con o sin ayuda de software

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+3 & 1 & 2 & -s \\ s & s-1 & 1 & 2s \\ 3s+3 & s & s+3 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $s = 0$, dar las soluciones del sistema:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

3. Hallar los valores de a y b para que el sistema homogéneo siguiente admita soluciones distintas a la trivial:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y - 8z = 0 \\ ax + by + 3z = 0 \\ ax + y + bz = 0 \end{cases}$$

4. Una empresa fabrica 3 tipos de productos: A, B y C. La siguiente tabla refleja las unidades vendidas de cada producto en los 3 últimos años y los beneficios totales (en euros) de cada año por la venta de los 3 productos:

Año	Unidades vendidas de A	Unidades vendidas de B	Unidades vendidas de C	Beneficios totales
1	100	500	200	39700
2	300	400	300	45600
3	200	800	500	73300

Observación

Se supone que el beneficio por unidad vendida de cada producto no varía en los 3 años contemplados.

Plantear un sistema de ecuaciones y resolverlo por el método de Gauss para hallar qué beneficio obtiene la empresa por cada unidad vendida de A, B y C, respectivamente.

5. Discutir el siguiente sistema en función de los parámetros a y b. Resolverlo en aquellos casos en los que sea compatible.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

6. Determinar para qué valores del parámetro a es compatible el sistema siguiente y hallar las soluciones cuando estas existan:

$$\begin{cases} x - 2y + az = 1 - a \\ x + 4y + a^2 z = 6 \\ x - 8y + a^2 z = -6 \end{cases}$$

7. Determinar la posición relativa de los dos planos siguientes:

$$\pi_1 : 2x + 3y - z + 8 = 0 \qquad \pi_2 = -4x - 6y + 2z - 16 = 0$$

Para realizar con o sin ayuda de software

8. Determinar el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{2} \qquad \pi : 4x + my + z - 2 = 0$$

Para realizar con o sin ayuda de software

9. Determinar el valor del parámetro a para que las rectas r y r' se corten:

$$r : \frac{x-2}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2} \qquad r' : \frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{3}$$

Para realizar con o sin ayuda de software

10. Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones lineal siguiente:

Para realizar con o sin ayuda de software

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y + 2z - 4t = 4 \\ -3x + 6y + z - 2t = -10 \end{cases}$$

11.

a) Discutir el siguiente sistema según el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + 2y + 8z = k \\ x + y + 7z = 1 \\ 2x + y + kz = 2 \end{cases}$$

b) En el caso (o en los casos) en que sea compatible, determinar su solución mediante el método de Gauss.

c) Considerar las rectas r y s del espacio $\mathbb{R}^3$:

$$r : \begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + 2y + 8z = k \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x + y + 7z = 1 \\ 2x + y + kz = 2 \end{cases}$$

Utilizad el apartado **(a)** para determinar para qué valores del parámetro k las rectas r y s se cortan

12. Discutir el sistema siguiente según los valores de los parámetros a y b, y resolverlo

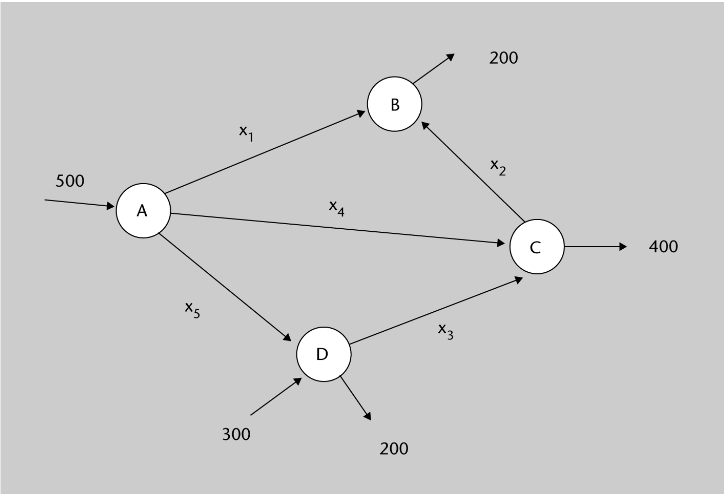
–utilizando el método de Cramer– en los casos de compatibilidad:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

¿Qué podéis decir de la posición relativa de los tres planos, según los valores de los parámetros (a,b)?

13. El esquema de la figura 11 representa una red de repetidores en la que los datos se transmiten según la dirección y sentido marcados. Tras analizar un histórico de datos, se ha logrado obtener información sobre la cantidad media, en MB por hora, de datos que son recibidos o enviados desde cada nodo:

Figura 11.



Suponiendo una condición de equilibrio en el flujo de datos que atraviesa cada nodo (es decir, que el flujo total de datos que entra en cada nodo coincide con el flujo total de datos que sale de cada nodo), se pide plantear, discutir y resolver (si ello es posible) el correspondiente sistema de ecuaciones..

Con ayuda de software

14. En numerosas ramas de la Ciencia, la distribución de recursos es un problema importante: tanto al hacer inventario de los recursos disponibles como al decidir cómo distribuirlos de manera óptima. Los recursos, a la vez, pueden ser tanto materiales como humanos (por ejemplo, la entrenadora de un equipo de voleibol ha de plantearse en qué posición alinear a sus jugadoras de modo que el rendimiento del equipo sea óptimo). En este tipo de problemas, el cálculo matricial facilita su resolución.

Supongamos que la persona encargada del sistema informático supervisa el ensamblaje de 4 tipos de redes para informatizar una empresa. La tabla siguiente proporciona las cantidades necesarias de cada recurso para completar cada uno de los servicios que se desea informatizar:

	Recursos			
Tipo servicio	**Impresoras**	**Scanners**	**Ordenadores**	***Pen-drives***
A	1	2	2	0
B	10	1	1	1
C	0	4	1	0
D	10	0	1	1

Si se dispone de 152 impresoras, 550 scanners, 4 *pen-drives* y 309 ordenadores, ¿cuántos servicios de cada tipo se podrán abastecer?

Note

Plantead un sistema de ecuaciones y resolvedlo mediante el método de Gauss.

15. Una persona toma fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0.2 MB de memoria y que cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad a de MB, que no recuerda. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9.2 MB de memoria.

Se pide:

a) Plantear un sistema de ecuaciones (en función de a) en que las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que dicha persona ha tomado, estudiar su compatibilidad y resolverlo –mediante el **método de Cramer**– en el caso de compatibilidad.
b) ¿Hay alguna cantidad de MB que sea imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?
c) Hallar la cantidad de MB que debe ocupar una fotografía de calidad óptima para que el número de fotos de ambas calidades sea el mismo.

16. La persona encargada de administrar una LAN tiene por objetivo maximizar, bajo unas determinadas condiciones restrictivas, la cantidad de espacio de disco duro que sus servidores ofrecen a las personas usuarias de la red. Para ello, puede adquirir dos tipos de discos duros SCSI, cada uno de los cuales tiene unos requerimientos en cuanto a precio, cantidad de trabajo (en horas semanales) para su mantenimiento, y electricidad necesaria para su funcionamiento durante las 24h del día, todos los días del año. La capacidad de cada disco duro de tipo A es de 300 GB, mientras que un disco duro de tipo B puede almacenar hasta 200 GB.

Por lo que se refiere al precio, cada disco de tipo A cuesta 200 euros, mientras que cada disco de tipo B cuesta 100 euros. Nuestro presupuesto no puede superar los 1500 euros.

Por lo que se refiere a las horas de dedicación semanal de la persona administradora, cada disco de tipo A requiere de 1 hora, mientras que cada disco de tipo B requiere de 2 horas. El número de horas que la persona administradora tiene disponibles para esta tarea no puede exceder de 27.

Finalmente, por lo que se refiere a la energía eléctrica necesaria, cada disco de tipo A consume 15 unidades diarias, mientras que cada disco de tipo B consume sólo 3. La cantidad total de unidades diarias consumidas no puede exceder de 100.

¿Cuántos discos de cada tipo se han de comprar para lograr el objetivo? (plantear el problema usando ecuaciones e inecuaciones lineales).

Resolverlo con ayuda de algún software matemático.

17. Se consideran las matrices siguientes:

$$\mathbf{A}(k) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12k-15 & -12k+3 & 15 & 12k-3 & 0 & -9 \\ 2k-13 & 2k-5 & 2k+9 & -1 & 4k+3 & 0 & -13 \\ 30 & 12k-18 & -12k+18 & 18 & 12k-18 & 0 & 6 \\ 2k-16 & -4k+16 & 8k & -16 & -2k+12 & 0 & -4 \\ 22k-5 & -14k+11 & 16k-3 & 6k-5 & -16k+3 & 6k+12 & -5 \\ 0 & -6k+6 & 6k-6 & 0 & -6k+6 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el determinante de la matriz **A**.
b) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz **A** no tiene rango máximo?
c) Determinar, en función del valor del parámetro k el rango de **A**.
d) Discutir, según los valores del parámetro k, el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ siendo **X** el vector columna que tiene por elementos las variables $x_1, x_2, \cdots, x_7$.

18. Considerar los planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + z = 2 \qquad \pi_2 : 2x + 3y + z = 3 \qquad \pi_3 : kx + 10y + 4z = 11$$

a) Determinar el valor del parámetro k tal que su intersección sea una recta. Para este valor de k, resolver el SEL resultante mediante el método de Gauss (comprobar con algún software matemático los resultados que habéis obtenido).
b) Determinar el valor del parámetro k tal que su intersección sea un punto. Para $k = 10$, determinar las coordenadas del punto mediante el método de Cramer (comprobar con algún software matemático los resultados que habéis obtenido).

19. Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 3x + ky + kz = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

a) Discutirlo para los diferentes valores del parámetro k.
b) Para el valor $k = 1$, resolver el sistema por el método de Gauss.

20. Dado el sistema de ecuaciones siguiente (tres planos en $\mathbb{R}^3$):

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Intentar resolverlo utilizando el método de Cramer.
b) ¿Qué se puede decir de la posición relativa de los tres planos? (intersecan en una recta, intersecan en un punto, son paralelos, ...).

Solucionario

Ejemplo introductorio inicial

1.

a) Imponiendo la condición de que el flujo entrante en cada *router* o nodo de la red ha de ser igual al flujo saliente, nos queda el siguiente SEL:

$$\begin{cases} 600 = x + z \\ x = y + t \\ y + u = 500 \\ z + v = 600 \\ t + w = v \\ 500 = w + u \end{cases} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \begin{cases} x + z = 600 \\ x - y - t = 0 \\ y + u = 500 \\ v + z = 600 \\ t - v + w = 0 \\ u + w = 500 \end{cases}.$$

Estudiando los rangos, llegamos a la conclusión de que se trata de un sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad. Tiene, por tanto, infinitas soluciones. Utilizando cualquier software matemático se puede encontrar que estas soluciones tienen esta forma

$$(x,y,z,t,u,v,w) = (600 - z,y,z,600 - y - z,500 - y,600 - z,y).$$

b) Ahora, el nuevo sistema será:

$$\begin{cases} x + z = 600 \\ x - y - t = 0 \\ y = 200 \\ z = 500 \\ t + w = 100 \\ w = 200 \end{cases},$$

Se puede comprobar que el sistema es compatible determinado estudiando el rango. La solución del sistema será

$$(x,y,z,t,w) = (100,200,500,-100,200).$$

Observar que, según la solución obtenida, $t = -100$. Esto significa que, en realidad, el flujo de datos no va desde el *router* B al E (como aparecía en el esquema), sino a la inversa.

Ejercicios de autoevaluación

1. Para calcular el rango de la matriz **A**, primero calculamos el valor del determinante generado a partir de las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} s+3 & 1 & 2 \\ s & s-1 & 1 \\ 3s+3 & s & s+3 \end{vmatrix} = (s+3)^2(s-1) + (3s+3) + 2s^2 - 6(s+1)(s-1) - 2s^2 - 6s$$

$$= (s-1)\left[(s+3)^2 - 3 - 6(s+1)\right] = s^2(s-1)$$

Por tanto, si el parámetro s es diferente de 0 o de 1, el determinante será diferente de cero y, en consecuencia, el rango de la matriz será 3. Para los valores $s = 0,1$ pueden haber otros menores de orden 3 no nulos, estudiémoslo (para ello podemos hacer uso de Gauss):

- Si s=0: observamos que el rango es 3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) a la tercera fila le hemos restado la primera ($F_3 = F_3 - F_1$).
(2) a la tercera fila le hemos restado la segunda ($F_3 = F_3 - F_2$).

- Si s=1: observamos que el rango es 2.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) hemos permutado la primera y la segunda fila.
(2) a la segunda fila le hemos restado 4 veces la primera y a la tercera, 6 veces la primera: ($F_2 = F_2 - 4F_1$ y $F_3 = F_3 - 6F_1$).
(3) a la tercera fila le hemos restado la segunda ($F_3 = F_3 - F_2$).

En conclusión, el $\text{rg}(\mathbf{A}) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad s \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad s = 1 \end{cases}$

Tomando $s = 0$, resolvemos ahora el sistema: $\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Como para $s = 0$ el rango de $\mathbf{A}$ es 3, ya sabemos que el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad. Para calcular las soluciones, aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

(1) a la tercera fila le hemos restado primera ($F_3 = F_3 - F_1$).
(2) a la tercera fila le hemos restado la segunda ($F_3 = F_3 - F_2$).

Deducimos de la tercera fila que $t = 0$ y de las dos primeras que $x = 1 - z$ y $y = z - 1$, siendo $z = z$.

2. En primer lugar determinamos la matriz del sistema (matriz de coeficientes y ampliada):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right)$$

Estamos estudiando un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, por eso el rango de la matriz del sistema es menor o igual que 3. Para que este sistema sea compatible determinado se tiene que cumplir que el determinante de la matriz del sistema sea diferente de cero.

Veamos para qué valores del parámetro k el determinante es cero. El determinante de $\mathbf{A}$ es:

$$|\mathbf{A}| = (k^3 + 1 + 1) - (k + k + k) = k^3 - 3k + 2 = (k - 1)^2(k + 2)$$

Así, $|\mathbf{A}| = 0 \iff k \in \{1, -2\}$. Entonces podemos concluir que para todos los valores del parámetro k diferentes de 1 y de –2 se cumple que $|\mathbf{A}| \neq 0$ y, por consiguiente, $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = n = 3$. Es decir, el sistema será compatible determinado para todos los valores reales del parámetro k diferentes de $k = -2$ y $k = 1$.

Ahora vamos a estudiar el sistema para ambos casos:

- Caso $k = -2$: Las matrices son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Ya sabemos que, en este caso, $\text{rg}(\mathbf{A}) < 3$ porque $|\mathbf{A}| = 0$. Veamos si $\text{rg}(\mathbf{M}) = 3$. Para eso vamos a elegir menores de orden 3 para ver si alguno es diferente de cero. En efecto, el menor formado por las tres últimas columnas es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2-8-2)-(-2+4+4) = -18 \neq 0$$

De ahí que $\text{rg}(\mathbf{M}) = 3 > \text{rg}(\mathbf{A})$ y concluimos que, para $k = -2$, el sistema es incompatible.

- Caso $k = 1$: En este caso tenemos:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El rango de estas matrices no es cero porque tienen elementos (menores de orden 1) diferentes de cero. Además, como en ambas matrices las tres filas son iguales, obtenemos que $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 1$. Ahora podemos concluir que, para $k = 1$, el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad ($n - \text{rg}(\mathbf{M}) = 3 - 1 = 2$).

$$\text{En conclusión, el sistema es: } \begin{cases} \text{compatible determinado} & \text{si } k \neq 1, -2 \\ \text{compatible indeterminado} & \text{si } k = 1 \\ \text{incompatible} & \text{si } k = -2 \end{cases}$$

3. La matriz de coeficientes del sistema es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & b & 3 \\ a & 1 & b \end{pmatrix}$$

El sistema es homogéneo, por eso siempre admite la solución trivial $(x,y,z) = (0,0,0)$. Como buscamos soluciones distintas de la trivial, necesitamos determinar los valores de (a,b) tales que $\text{rg}(\mathbf{A}) < 3$. En otras palabras, necesitamos determinar los valores de (a,b) tales que todos los menores de orden 3 sean cero. Como que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango 2 está garantizado.

Orlando este menor e igualando a cero, obtenemos el sistema siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & b & 3 \end{vmatrix} = (15 - 6b - 16a) - (-15a + 12 - 8b) = -a + 2b + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & 1 & b \end{vmatrix} = (5b - 6 - 16a) - (-15a + 4b - 8) = -a + b + 2 = 0$$

$$\begin{cases} -a + 2b & = -3 \\ -a + b & = -2 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $b = -1, a = 1$

Así pues, concluimos que las soluciones no triviales del SEL inicial se obtienen para los valores $b = -1$ y $a = 1$.

4. Llamamos::

x: beneficio que obtiene la empresa por cada unidad vendida de A.
y: beneficio que obtiene la empresa por cada unidad vendida de B.
z: beneficio que obtiene la empresa por cada unidad vendida de C.

Utilizando esta nomenclatura, lo que nos pide el ejercicio es hallar los valores de (x,y,z). Para ello, planteamos el sistema:

$$\begin{cases} 100x + 500y + 200z & = 39700 \\ 300x + 400y + 300z & = 45600 \\ 200x + 800y + 500z & = 73300 \end{cases}$$

Y lo resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 500 & 200 & 39700 \\ 300 & 400 & 300 & 45600 \\ 200 & 800 & 500 & 73300 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 397 \\ 3 & 4 & 3 & 456 \\ 2 & 8 & 5 & 733 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 397 \\ 0 & -11 & -3 & -735 \\ 0 & -2 & 1 & -61 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 397 \\ 0 & -11 & -3 & -735 \\ 0 & 0 & 17 & 799 \end{array}\right)$$

(1) dividimos cada fila por 100
(2) $F_2 = F_2 - 3F_1$ y $F_3 = F_3 - 2F_1$
(3) $F_3 = 11F_3 - 2F_2$

Resolvemos el sistema que nos ha quedado:

$$\begin{cases} x + 5y + 2z & = 397 \\ -11y - 3z & = -735 \\ 17z & = 799 \end{cases} \Rightarrow z = 799/17 = 47$$

$$-11y - 3 \cdot 47 = -735 \Rightarrow y = \frac{-735 + 3 \cdot 47}{-11} = 54$$

$$x + 5 \cdot 54 + 2 \cdot 47 = 397 \Rightarrow x = 397 - 5 \cdot 54 - 2 \cdot 47 = 33$$

Por tanto, el beneficio que la empresa obtiene por cada unidad vendida es:

x = 33 euros por cada unidad vendida de A.
y = 54 euros por cada unidad vendida de B.
z = 47 euros por cada unidad vendida de C.

5. La matriz de coeficientes y la matriz ampliada correspondientes a este sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a & -2 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de **A** en función del parámetro a (notar que el parámetro b se encuentra en el término independiente):

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13a - 13. \qquad |\mathbf{A}| = 0 \iff a = 1$$

- Si $a \neq 1$. Tenemos que $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 3 = n$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

Para hallar la solución podemos utilizar, por ejemplo, el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 4 & 1 \\ -2 & -5 & a \end{vmatrix}}{13a - 13} = \frac{4a - 10b + ab + 23}{13a - 13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix}}{13a - 13} = \frac{-a - 4b + 3ab + 4}{13a - 13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{13a - 13} = \frac{13b - 39}{13a - 13}$$

- Si $a = 1$. En este caso la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema resultan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de **A**, sabiendo que es menor de 3:

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{A}| = 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{rg}(\mathbf{A}) = 2$$

Seguidamente, estudiamos el rango de **M** (para ello ampliamos el menor de orden 2 anterior con la última columna y la última fila de **M**):

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13b - 39. \qquad |\mathbf{M}| = 0 \iff b = 3$$

Vemos que:

(i) Si $a = 1, b \neq 3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rg}(\mathbf{A}) = 2 \\ \text{rg}(\mathbf{M}) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el sistema es incompatible (no tiene solución).}$$

(ii) Si $a = 1, b = 3$. En este caso, $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 2 < n \rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).
Para hallar las soluciones podemos hacer $z = \lambda$ y obtener las soluciones. Por ejemplo, usando nuevamente Cramer:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - y = 1 - 2\lambda \\ x + 4y = 3 - \lambda \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-2\lambda & -1 \\ 3-\lambda & 4 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-9\lambda+7}{13} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2\lambda \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}}{13} = \frac{-\lambda+8}{13} \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

6. La matriz de coeficientes del sistema es: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \\ 1 & -8 & a^2 \end{pmatrix}$, y su determinante resulta ser $|\mathbf{A}| = 12a^2 - 12a = 12a(a-1)$. Observamos 3 casos distintos:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$. El rango de la matriz $\mathbf{A}$ es igual al de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas ($n = 3$). Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Podemos hallar la solución usando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-a & -2 & a \\ 6 & 4 & a^2 \\ -6 & -8 & a^2 \end{vmatrix}}{12a^2 - 12a} = \frac{36a^2 - 12a^3 - 24a}{12a^2 - 12a} = \frac{12a(3a - a^2 - 2)}{12a(a-1)} = \frac{12a(a-1)(2-a)}{12a(a-1)} = 2 - a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-a & a \\ 1 & 6 & a^2 \\ 1 & -6 & a^2 \end{vmatrix}}{12a^2 - 12a} = \frac{12a^2 - 12a}{12a^2 - 12a} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1-a \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -8 & -6 \end{vmatrix}}{12a^2 - 12a} = \frac{-12 + 12a}{12a^2 - 12a} = \frac{12(a-1)}{12a(a-1)} = \frac{1}{a}$$

- Si $a = 0$. La matriz ampliada es: $\mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & -8 & 0 & -6 \end{array}\right)$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es 2. En cambio, el rango de la matriz ampliada es 3, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -8 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Y, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a = 1$. La matriz ampliada es $\mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right)$. Fijémonos, por un lado, que la primera y la tercera columnas son iguales y por otro, que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$. Por lo tanto: $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$. Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada. Se puede hacer de dos maneras distintas. Por un lado viendo que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -8 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

y, de otra, aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $F_2 = F_2 - F_1$ y $F_3 = F_3 - F_1$
(2) $F_3 = F_3 + F_2$

En ambos casos, observamos que $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 2$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, como $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2 < 3 = n$, el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad. Mirando la última matriz que hemos hallado al hacer el método de Gauss vemos que:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x - 2y + z & = 0 \\ 6y & = 6 \rightarrow y = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y + z & = 0 \rightarrow x = 2 - z \\ y & = 1 \end{array} \right.$$

Y, substituyendo, obtenemos la solución para este caso: $(x,y,z) = (2 - \lambda, 1, \lambda)$.

7. Al ser dos planos, o bien serán paralelos no coincidentes, paralelos coincidentes o bien se cortarán en una recta. Discutamos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x + 3y - z & = -8 \\ -4x - 6y + 2z & = 16 \end{array} \right.$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son, respectivamente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -8 \\ -4 & -6 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Todos los menores de segundo orden que se pueden extraer de la matriz $\mathbf{A}$ son nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

Por tanto, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 1$. Por otro lado,, la 4a. columna de $\mathbf{M}$ es múltiple de las de $\mathbf{A}$ y, por lo tanto, $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 1$. Entonces, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible e indeterminado con dos grados de libertad, i.e.: los dos planos son coincidentes.

8. La recta r será paralela a π si el sistema de ecuaciones es incompatible (por tanto, por el teorema de Rouché-Fröbenius, se tiene que cumplir que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) < \mathrm{rg}(\mathbf{M})$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes y $\mathbf{M}$ la ampliada). Dicho sistema es:

$$\begin{cases} 4x-4=2y+10 \\ 2x-2=2z-6 \\ 4x+my+z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x-2y=14 \\ 2x-2z=-4 \\ 4x+my+z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y=7 \\ x-z=-2 \\ 4x+my+z=2 \end{cases}$$

Para que el sistema sea incompatible, el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo, es decir $|\mathbf{A}| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4+2m+1=0 \quad \Rightarrow \quad m=-\frac{5}{2}$$

En conclusión, para este valor de m, $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ y $\text{rg}(\mathbf{M}) = 3$, ya que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4+7+28+4 = 35 \neq 0$$

Por tanto, para $m = -\frac{5}{2}$, π y r son paralelos.

9. Construyamos el sistema de ecuaciones lineales resultante:

$$\begin{cases} 6x-12=5y \\ 2y=6z+6 \\ 3x-3a=2y+2 \\ 3y+3=3z-6 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x-5y=12 \\ 2y-6z=6 \\ 3x-2y=2+3a \\ 3y-3z=-9 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x-5y=12 \\ y-3z=3 \\ 3x-2y=2+3a \\ y-z=-3 \end{cases}$$

Que las dos rectas se corten implica que el sistema debe ser compatible determinado (debe tener una única solución, que corresponderá con el punto en que se cortan ambas rectas) y, por tanto, se debe cumplir que $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 3 = n$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes y $\mathbf{M}$ su ampliada. Se puede extraer un menor no nulo de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 45-36 = 9 \neq 0$$

Por tanto, $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$. Para que las rectas se corten, el determinante de la matriz ampliada tendrá que ser nulo (con lo que nos aseguraremos que $\text{rg}(\mathbf{M}) = 3$), es decir, $|\mathbf{M}| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2+3a \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6a-8 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 6a-8 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-18a+24-3+6a-8-9) = 0 \Rightarrow 3\cdot(4-12a) = 0 \Rightarrow a = 1/3$$

Para $a = 1/3$, tenemos que $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 3 = n$ y, por el teorema de Rouché-Fröbenius, es un sistema compatible determinado. En consecuencia, r y r' se cortan.

10. En forma matricial, el sistema se escribe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

Resolveremos el ejercicio mediante dos métodos distintos:

Solución por el método de Gauss: Vamos a transformar la matriz $\mathbf{M}$ en una matriz triangular mediante transformaciones por filas. Usaremos la notación siguiente: denotamos por F_1, F_2 y F_3 a las filas 1, 2 y 3 de $\mathbf{M}$.

- Para poner un cero en el 2 (de la fila 2, columna 1) a la fila 2 le restamos 2 veces la fila 1. Esto lo escribiremos: $F_2 = F_2 - 2F_1$. Análogamente, para poner un cero al –3 (de la fila 3, columna 1) a la fila 3 le sumamos tres veces la fila 1. Es decir, $F_3 = F_3 - 3F_1$. Nos queda:

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

- No sólo nos han quedado ceros en la primera columna, sino que también nos han quedado ceros en la segunda columna. Esto significa que el siguiente pivote que tomaremos será de la tercera columna. Para operar siempre es más sencillo tomar como pivote un 1 (si hay). En este caso, tenemos un 1 en la fila 3, columna 3. Permutamos, pues, las filas 2 y 3. Y nos queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

- Ahora ponemos un cero al 2 (de la columna 3, fila 3). Para esto, a la fila 3 le restamos dos veces la fila 2. Es decir, $F_3 = F_3 - 2F_2$. Y nos queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Finalmente, observamos que el sistema se ha transformado en:

$$\begin{cases} x - 2y & = 3 \\ z - 2t & = -1 \end{cases}$$

La solución es: $x = 3 + 2y, y = y, z = -1 + 2t, t = t$. O sea, no podemos decir nada sobre las incógnitas y, t. Es decir, se trata de un sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Solución por el método de Cramer: Para empezar vamos a calcular el rango de la matriz $\mathbf{A}$ orlando.

- El coeficiente de la primera fila y primera columna es 1, no nulo. Por tanto, la matriz **A** tiene un menor de orden 1 con determinante no nulo. Esto quiere decir que el rango de **A** es como mínimo 1.
- Consideremos los menores de orden 2 que contienen este menor de orden 1. El primero es el formado por las columnas 1, 2 y las filas 1, 2. Su determinante es: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$. Como el determinante es cero, tenemos que hallar otro menor. Consideremos el menor formado por las columnas 1, 3 y las filas 1, 2. Su determinante es: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Como que el determinante es no nulo, podemos asegurar que el rango de la matriz **A** es, por lo menos, 2.
- Para ver si **A** tiene rango 3 es necesario hallar un menor de orden 3 que contenga este menor de orden 2 y que tenga determinante no nulo. Sólo hay dos. El primer menor es el formado por las columnas 1, 2, 3 y las filas 1, 2, 3. Su determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 12 + 4 - 12 = 0.$$

  El segundo menor es el formado por las columnas 1, 3, 4 y las filas 1, 2, 3. Su determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0.$$

  Como todos los menores que contienen el menor de orden 2 anterior tienen determinante nulo, podemos asegurar que el rango de **A** es 2.

Consideremos ahora la matriz ampliada del sistema:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Como las cuatro primeras columnas de **M** son justamente las de **A**, el rango de **M** como mínimo es 2 (el menor de orden 2 con determinante no nulo que hemos hallado, recordemos, es el formato para las columnas 1, 3 y las filas 1, 2). La única manera que el rango de **M** podría ser más grande que el de **A** sería que al añadir la quinta columna a este menor de orden 2, el determinante saliera no nulo. Pero el determinante del menor formado por las columnas 1, 3, 5 y filas 1, 2, 3 es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -20 + 6 + 18 - 4 = 0.$$

Por tanto, el rango de **M** también es 2. Esto quiere decir que el rg(**M**) = rg(**A**) = 2. Por tanto, el sistema es compatible (es decir, tiene solución). Como el número de incógnitas es 4 y el rango del sistema es 2, los grados de libertad son 2. El menor de orden 2 que marca el rango es el formado por las columnas 1 y 3. Esto quiere decir que las incógnitas 1 y 3 (es decir, la x y la z) se pueden poner en función de las incógnitas y y t. Además, como que el menor de orden 2 que marca el rango es el formado por las filas 1 y 2, esto significa que la tercera fila se puede suprimir. Es decir, el sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 2x + 2z = 4 + 4y + 4t \end{cases}$$

Esto es, es un sistema de Cramer con determinante del sistema: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$. Las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3+2y & 0 \\ 4+4y+4t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6+4y}{2} = 3+2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+2y \\ 2 & 4+4y+4t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4+4y+4t-6-4y}{2} = \frac{-2+4t}{2} = -1+2t$$

En definitiva: el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad. Las soluciones son de la forma:

$$\begin{aligned} x &= 3+2y \\ y &= y \\ z &= -1+2t \\ t &= t \end{aligned}$$

11.

a) Para discutir el sistema utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius. Necesitamos calcular los rangos de la matriz de coeficientes del sistema (**A**) y de la matriz ampliada (**M**). Así pues, tenemos:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7-k,$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 13-k.$$

Si calculamos determinantes, vemos que el primer se anula cuando $k = 7$ y el segundo cuando $k = 13$, por tanto, los dos no pueden valer 0 a la vez. Como siempre hay un menor de orden 3 con determinante no nulo, rg(**A**) = 3.

Por otra parte,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 8 & k \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & k & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |\mathbf{M}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 8 & k \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & k & 2 \end{vmatrix} = -k^2+8k-7.$$

las soluciones son $k = 1$ y $k = 7$. Para estos valores, pues, el rg(**M**) = 3 mientras que para cualquier otro k, el rg(**M**) = 4.

Concluimos, pues:

- Para $k = \{1,7\}$ el sistema es compatible determinado.
- Para $k \neq \{1,7\}$, el sistema es incompatible.

b) Reducimos la matriz por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 8 & k \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 8-k & k-1 \\ 0 & 0 & 7-k & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 8-k & k-1 \\ 0 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 7-k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 8-k & k-1 \\ 0 & 0 & 8-2k & k-1 \\ 0 & 0 & 7-k & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $F_2 = F_2 - F_1$, $F_3 = F_3 - F_1$ y $F_4 = F_4 - 2F_1$
(2) Permutamos F_3 y F_4
(3) $F_3 = F_3 + F_2$

- En el caso $k = 1$, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos:

$$z = 0, \qquad y = -7z = 0 \qquad x = 1 - y - z = 1$$

- En el caso $k = 7$, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con lo cual tenemos:

$$z = -1, \qquad y = 6 - z = 7 \qquad x = 1 - y - 7z = 1$$

c) En el sistema del apartado **a)** las dos primeras ecuaciones corresponden a la recta r, y las otras dos a la recta s. Con la discusión de **a)** obtenemos::

- Para $k = 1$ o $k = 7$ el sistema es compatible determinado y las rectas se cortan en un punto, que es el punto encontrado anteriormente en el apartado **b)** (el punto $(x,y,z) = (1,0,0)$ para $k = 1$ y el punto $(x,y,z) = (1,7,-1)$ para $k = 7$).
- Para $k \neq 1,7$ el sistema es incompatible y las rectas no se cortan.

12. Comparemos los rangos de la matriz de coeficientes, **A**, y de la ampliada,, **M**, siguiendo el teorema de Rouché-Fröbenius, empezando por la matriz de coeficientes, **A**. Estudiamos el rango por determinantes, analizando qué valores de los parámetros permiten que el rango sea máximo:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)^2(a+2).$$

Los valores de los parámetros que anulan este determinante son $b = 0, a = \{1, -2\}$. Se presentan, por tanto, las siguientes disyunciones:

i) Supongamos que $b \neq 0$ y $a \neq 1, -2$. En este caso $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$ y el máximo rango de la matriz ampliada y no puede ser menor que 3, ya que **M** contiene una matriz de rango 3, que es la propia **A**. Por tanto: $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 3$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, este sistema es compatible determinado. Utilizaremos la regla de Cramer para calcular la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{b(a-b)(a-1)}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{b(a-b)(a-1)}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$$

Por tanto, la solución del sistema, en función de los parámetros a,b, es:

$$(x,y,z) = \left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$$

ii) Supongamos que $b = 0$. En este caso las matrices del sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$$

Observemos que el rango de **A** depende del valor de a. Está claro que el rango no será 3 porque $b = 0$ es uno de los valores que anulan el determinante de **A**. Busquemos, entonces, menores de orden 2. Así, $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$, por lo que tenemos de nuevo dos casos dentro del caso $b = 0$.

- Si $a \neq 1$, entonces rg(**A**) = 2. Por otro lado tenemos que rg(**M**) = 3,por ser no nulo el menor siguiente para $a \neq 1$.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1) \neq 0$$

Por teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible en este caso.

- Si $a = 1$, las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

De donde se observa que rg(**A**) = 1 y, sin embargo, rg(**M**) = 2. Por tanto, el sistema es incompatible.

iii) Supongamos que $a = 1$. En este caso las matrices del sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Observemos que el rg($\mathbf{A}$) = 1 independientemente del valor de b, mientras que el rango de la ampliada sí depende del valor de este parámetro, ya que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1$. Se tiene, pues, la disyuntiva dentro del caso $a = 1$.

- Si $b \neq 1$, entonces rg($\mathbf{M}$) = 2. El sistema es, por tanto, incompatible.
- Si $b = 1$, las matrices del sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

ambas de rango 1. El sistema resultante es $x + y + z = 1$, que es del tipo compatible indeterminado, con dos grados de libertad. Considerando como parámetros y,z para resolver este sistema, la solución general es:

$$(x,y,z) = (1 - y - z, y, z) \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}$$

iv) Supongamos que $a = -2$. En este caso las matrices del sistema son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array}\right).$$

por lo que rg($\mathbf{A}$) = 2 ya que, como mínimo, tenemos un menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$, y el rg($\mathbf{M}$) depende del valor del parámetro b, ya que:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 3b.$$

Y tenemos una nueva disyunción de casos:

- Si $b \neq -2$, entonces rg($\mathbf{M}$) = 3. El sistema es, por tanto, incompatible.
- Si $b = -2$, entonces rg($\mathbf{M}$) = 2 y el sistema es, por tanto, compatible indeterminado con un grado de libertad. Para resolverlo por el método de Cramer, tomamos las dos ecuaciones del sistema inicial cuyos menores son diferentes de cero. Tomando z como parámetro, el sistema queda así:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 4y = -2 - z \\ x - 2y = 1 + 2z \end{array} \right.$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - z \\ 1 + 2z \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & 4 \\ 1+2z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6z}{-6} = z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2-z \\ 1 & 1+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1+2z+2+z}{-6} = \frac{3z+3}{-6} = \frac{z+1}{-2},$$

la solución de este sistema es: $(x,y,z) = (z,\frac{-1-z}{2},z)$ para cualquier valor de $z \in \mathbb{R}$.

En resumen, la posición relativa de los tres planos es:

- Si $b \neq 0$ y $a \neq \{1,-2\}$, el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un único punto. Este punto es la solución del sistema: $\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$.
- Si $b = 0$ y $a \neq 1$, el sistema es incompatible y los tres planos no intersecan
- Si $b = 0$ y $a = 1$, el sistema es incompatible y los tres planos no intersecan
- Si $a = 1$ y $b \neq 1$, el sistema es incompatible y los tres planos no intersecan
- Si $a = 1$ y $b = 1$, el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad, cuya solución es: $(1-y-z,y,z)$ para cualesquiera valores $y,z \in \mathbb{R}$. Los tres planos se cortan en un plano; de hecho, los tres planos son el mismo plano.
- Si $a = -2$ y $b \neq -2$, el sistema es incompatible y los tres planos no intersecan
- Si $a = -2$ y $b = -2$, el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, cuya solución es: $(z,\frac{-1-z}{2},z)$ para cualquier valor $z \in \mathbb{R}$. Los tres planos se cortan en una recta.

13. Al imponer la condición de equilibrio del flujo sobre cada nodo (flujo entrante=flujo saliente), obtenemos el siguiente SEL:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 500 \\ x_1 + x_2 = 200 \\ x_4 + x_3 - x_2 = 400 \\ x_3 - x_5 = 100 \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes, **A**, y de coeficientes ampliada, **M**, son, respectivamente,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \end{array}\right).$$

El SEL es compatible indeterminado, ya que $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 3$ (el número de incógnitas es 5, superior al rango de las matrices, con lo que habrá dos grados de libertad).

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (500 - x_4 - x_5, x_4 + x_5 - 300, 100 + x_5, x_4, x_5)$$

Así, por ejemplo, tomando $x_4 = 100$ y $x_5 = 200$, se obtendría la solución particular:

$$\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 300 \\ x_4 = 100 \\ x_5 = 200 \end{cases}.$$

14. Sean:

A = número total de servicios del tipo A
B = número total de servicios del tipo B
C = número total de servicios del tipo C
D = número total de servicios del tipo D

Y tenemos las siguientes expresiones:

$$\left\{\begin{array}{l} A + 10B + 0C + 10D = 152 \\ 2A + B + 4C + 0D = 550 \\ 2A + B + C + D = 309 \\ 0A + B + 0C + D = 4 \end{array}\right. ,$$

que forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que resolvemos mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 550 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 309 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 550 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 309 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -19 & 4 & -20 & 246 \\ 0 & -19 & 1 & -19 & 5 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\longrightarrow}$$

$$\underset{(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 322 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 81 \end{pmatrix} \underset{(4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 322 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Trasladamos F_4 a F_2 y movemos F_3 y F_4 abajo.
(2) $F_3 = F_3 - 2F_1$ y $F_4 = F_4 - 2F_1$
(3) $F_3 = F_3 + 19F_2$ y $F_4 = F_4 + 19F_2$.
(4) $F_4 = 4F_4 - F_3$

Con lo cual obtenemos que $A = 112, B = 2, C = 81, D = 2$

15.

a) Sea x el número de fotos de calidad normal e y el número de fotos de calidad óptima. A partir de aquí, planteamos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 24 \\ 0.2x + ay = 9.2 \end{array}\right. .$$

A continuación estudiamos su compatibilidad. Para ello tenemos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada para comparar los rangos y aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \quad |\mathbf{A}| = a - 0.2,$$

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0.2 & a & 9.2 \end{array}\right) \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0.2 & 9.2 \end{vmatrix} = 4.4 \neq 0.$$

Observamos una disyuntiva:

- Si $a = 0.2$. El sistema es incompatible, ya que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 1$ y $\text{rg}(\mathbf{M}) = 2$. Observar que tenemos un menor de orden 2 en la matriz ampliada.
- Si $a \neq 0.2$. El sistema es compatible determinado, ya que $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 2 = n$, donde n

es el número de incógnitas. Utilizamos el método de Cramer para hallar la solución del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 1 \\ 9.2 & a \end{vmatrix}}{a-0.2} = \frac{24a-9.2}{a-0.2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0.2 & 9.2 \end{vmatrix}}{a-0.2} = \frac{4.4}{a-0.2},$$

Por tanto:

- El número de fotos de calidad normal es: $x = \frac{24a-9.2}{a-0.2}$
- El número de fotos de calidad óptima es: $y = \frac{4.4}{a-0.2}$

b) Sí; siguiendo los resultados del apartado **a)**, si a = 0.2 MB es imposible hallar el número de fotos de calidad óptima ya que el denominador de la fracción $\frac{4.4}{a-0.2}$ es 0.

c) Hay que hallar el valor de a para que x sea igual a y. Del resultado del apartado **a)**, igualamos:

$$x = y \rightarrow \frac{24a-9.2}{a-0.2} = \frac{4.4}{a-0.2} \rightarrow 24a - 9.2 = 4.4 \rightarrow 24a = 13.6 \rightarrow a = 0.56\text{MB}$$

16. Si denotamos por x y y, respectivamente, el número de unidades que vamos a adquirir de discos de tipo A y B, el problema anterior se puede formular como un problema de optimización, buscando maximizar la capacidad de almacenamiento, i.e.,

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar } f(x,y) = 300x + 200y & \\ \text{s.t } 200x + 100y \leq 1500 & \text{restricción de precio} \\ x + 2y \leq 27 & \text{restricción de horas} \\ 15x + 3y \leq 100 & \text{restricción energética} \\ x \geq 0 & \text{cantidad de discos A no puede ser negativa} \\ y \geq 0 & \text{cantidad de discos B no puede ser negativa.} \end{array}$$

Este tipo de problemas pertenece a un área de conocimiento de las matemáticas llamada *programación lineal*. Para su resolución se utilizan complejos algoritmos de cálculo (como el Simplex). Afortunadamente, la mayoría de programas matemáticos actuales incorporan funciones que automatizan los cálculos.

Utilizando alguno de estos programas podemos encontrar que la solución del problema de optimización dado es $x = 1$, $y = 13$.

Así pues, la cantidad máxima de espacio, bajo las condiciones establecidas, se obtiene al comprar 1 unidad de tipo A y 13 de tipo B. Con ello conseguiremos un total de $f(x,y) = 300x + 200y = 300 \cdot 1 + 200 \cdot 13 = 2900$ MB.

17.

a) El determinante de **A** es:

$$\det(\mathbf{A}) = -3359232k^3 - 16796160k^2 - 26873856k - 13436928$$

b) El rg(**A**) no será máximo para aquellos valores del parámetro k que hagan nulo el determinante, es decir, para los valores $k = -1$ y $k = -2$.

c) A partir de los resultados anteriores, observamos que si $k \neq \{-1, -2\}$ el rg(**A**) = 7. Con la ayuda de un software, es inmediato comprobar que si $k = -1$ entonces rg(**A**) = 6 mientras que si $k = -2$ entonces rg(**A**) = 5.

d) La matriz ampliada del sistema es:

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{A}(k)|\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12k-15 & -12k+3 & 15 & 12k-3 & 0 & -9 & 0 \\ 2k-13 & 2k-5 & 2k+9 & -1 & 4k+3 & 0 & -13 & 0 \\ 30 & 12k-18 & -12k+18 & 18 & 12k-18 & 0 & 6 & 0 \\ 2k-16 & -4k+16 & 8k & -16 & -2k+12 & 0 & -4 & 0 \\ 22k-5 & -14k+11 & 16k-3 & 6k-5 & -16k+3 & 6k+12 & -5 & -4 \\ 0 & -6k+6 & 6k-6 & 0 & -6k+6 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right).$$

Para $k \neq \{-1, -2\}$ la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rango máximo. La relación entre los rangos de ambas matrices para los casos $k = -1, -2$, es:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{rg}(\mathbf{A}(k=-1)) = 6, & \mathrm{rg}(\mathbf{A}(k=-2)) = 5 \\ \mathrm{rg}(\mathbf{M}(k=-1)) = 6, & \mathrm{rg}(\mathbf{M}(k=-2)) = 6 \end{array}$$

Es decir, que:

- Si $k \neq \{-1, -2\}$, entonces el sistema es compatible determinado, ya que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 7 = n$
- Si $k = -1$, entonces el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, ya que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 6 < n$
- Si $k = -2$, entonces el sistema es incompatible, ya que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 5$ y $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 6$

18.

a) Las matrices asociadas al SEL son:

$$\mathbf{A}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}(k) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{array}\right),$$

donde (k) simplemente indica que la matriz depende del parámetro k.
Para que la intersección de los tres planos sea una recta, es necesario que

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A}(k)) = \mathrm{rg}(\mathbf{M}(k)) = 2 = n-1 \xrightarrow[\text{lo cual se satisface si}]{} k = 7,$$

es decir, que sea un SCI con un grado de libertad. Si resolvemos el sistema para $k = 7$ usando servir Gauss, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $F_2 = F_2 - 2F_1$ y $F_3 = F_3 - 7F_1$
(2) $F_3 = F_3 - 3F_2$.

Los sistemas de ecuaciones son equivalentes. Es decir:

$$z = z; \qquad y = -1 + z; \qquad x = 3 - 2z \quad .$$

b) Para que la intersección sea un punto, es necesario que el sistema sea SCD, es decir, que $rg(\mathbf{A}(k)) = rg(\mathbf{M}(k)) = 3$. Esta condición se cumple para $k \neq 7$.

Para $k = 10$, podemos aplicar Cramer y obtenemos las coordenadas del punto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 10 & 4 \end{vmatrix}} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 10 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 10 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 10 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}.$$

19.

a) Las matrices del sistema son las siguientes:

$$\mathbf{A}(k) = \begin{pmatrix} 3 & k & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}(k) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & k & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como el sistema es homogéneo (todos los elementos de la última columna de la matriz ampliada son ceros), es claro que $rg(\mathbf{A}(k)) = rg(\mathbf{M}(k))$ y, por tanto, el sistema siempre ser compatible.

Es necesario notar que $rg(\mathbf{A}(k)) \geq 2$, ya que: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, y, como que $|\mathbf{A}(k)| = -2k + 3k = k$, el sistema es:

- Para $k \neq 0$, el sistema es SCD, ya que $rg(\mathbf{A}(k)) = rg(\mathbf{M}(k)) = 3 = n$
- Para $k = 0$, el sistema es SCI con un grado de libertad, ya que $rg(\mathbf{A}(0)) = rg(\mathbf{M}(0)) = 2 < n$

b) Para $k = 1$, solucionamos el sistema mediante Gauss:

$$\mathbf{M}(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Permutamos F_1 y F_2
(2) $F_2 = F_2 - 3F_1$ y $F_3 = F_3 - 3F_1$.

De la última ecuación se tiene que $y = 0$; substituyendo en la primera, se tiene que $x = y = 0$; finalmente, substituyendo en la segunda se tiene $z = 0$. Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = y = z = 0$$

Observación: también se puede razonar en este apartado que el SCD tiene por solución la trivial ($x = y = z = 0$), dado que se trata de un sistema homogéneo.

20.

a) Las matrices del sistema son, respectivamente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Observar que: $|\mathbf{A}| = 6 - 3 - 6 - 12 + 1 + 9 = -5$. Por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1}{5}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = 0.$$

b) Según se ha visto en el apartado anterior, el sistema es compatible determinado; es decir, los tres planos se cortan en un único punto, el punto $(x,y,z) = (3/5,1/5,0)$.

Glosario

Cramer, regla de *f* Fórmulas cerradas, en forma de cociente de determinantes, que dan el valor de las incógnitas en un sistema de n ecuaciones y n incógnitas compatible y determinado.

Gauss, método de *m* Método de eliminación de incógnitas que permite reducir un sistema lineal de forma escalonada.

matriz ampliada de un sistema *f* Matriz de un sistema de ecuaciones lineales formada mediante la ampliación de la matriz del sistema con la columna de los términos independientes.

matriz de coeficientes de un sistema *f* Matriz formada por los coeficientes de las variables $x_1, \ldots, x_n$ en cada una de las ecuaciones del sistema. Cada fila de la matriz corresponde a una ecuación.

pivote *m* Elemento diferente de cero que se elige para reducir a cero los restantes coeficientes en una etapa dada del método de Gauss.

Rouché-Fröbenius, teorema de *m* Teorema que permite saber si un sistema lineal es compatible o no lo es. En el caso de que sea compatible, permite saber si es determinado o indeterminado, y en el último caso, cuántos grados de libertad tiene la solución general.

sistema compatible *m* Sistema de ecuaciones que tiene alguna solución. Si no tiene ninguna, decimos que es incompatible.

sistema determinado *m* Sistema que tiene una única solución. Si tiene más de una, decimos que es indeterminado.

sistema homogéneo *m* Sistema de ecuaciones con términos independientes nulos.

sistema lineal *m* Conjunto de ecuaciones de primer grado en n variables.

Bibliografía

García Cabello, Julia. *Álgebra Lineal. Sus Aplicaciones en Economía, Ingenierías y otras Ciencias* (2006). Delta Publicaciones universitarias. Universitat de Granada

Gutiérrez González, Eduardo; Ochoa García, Sandra. *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (2014). Larousse - Grupo Editorial

Farin, Gerald; Hansford, Dianne. *Practical Linear Algebra* (2013). A K Peters/CRC Press.

Lay, David C.; McDonald, Judi J.; Lay, Steven R. *Linear algebra and its applications* (2011). Pearson Education Limited.

Liesen, Jörg *Linear algebra*. (2008). Springer.

Martín Ordóñez, Pablo; García Garrosa, Amelia; Getiono Fernández, Juan. *Álgebra lineal para ingenieros* (2012). Delta Publicaciones.

Strang, Gilbert *Introduction to linear algebra* (2016). Cambridge Press.