Elementos de álgebra lineal y geometría

Espacios vectoriales, matrices, determinantes, espacio afín y euclídeo

PID_00293818

Ángel Alejandro Juan Pérez
Gerard Fortuny Anguera
Bernat Anton Martos
Adrià Casamitjana Díaz

Universitat
Oberta
de Catalunya

Ángel Alejandro Juan Pérez

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Valencia, máster en Tecnologías de la Información por la UOC y doctor en Ingeniería Industrial por la UNED. Ha cursado posgrados en las universidades de Harvard, Alicante y Valencia. Ha sido profesor y director académico en una *high school* de Boston, profesor asociado en la Universidad de Alicante y profesor coordinador en la UOC. Desde el año 2003, es profesor asociado de Estadística Aplicada en la Universidad Politécnica de Cataluña y profesor de Informática en CFGS.

Gerard Fortuny Anguera

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Barcelona en 1998, ha cursado estudios de tercer ciclo en la Universidad Politécnica de Cataluña. Entre 2000 y 2003, ha sido miembro del cuerpo de profesores de enseñanza secundaria y colaborador de la UOC. Desde el año 2003, es profesor titular de escuela universitaria en la Universidad Rovira y Virgili.

Bernat Anton Martos

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2007), máster de Matemática Avanzada (2008) y de Bioinformática para las Ciencias de la Salud (2013). Ha sido profesor asociado de la Universitat de Barcelona, de la Universitat Pompeu Fabra y del Tecnocampus de Mataró, además de personal de apoyo en el Parc de Recerca Biomèdica de Barcelona. Actualmente trabaja como profesor de secundaria por la Generalidad de Catalunya.

Adrià Casamitjana Díaz

Licenciado en Ingeniería de Telecomunicaciones por la UPC (2015), y doctor en Teoría de la Señal y Comunicaciones (2019) por la UPC. Tiene experiencia investigadora y docente en universidades de Suecia (KTH) y del Reino Unido (UCL). Desde el año 2021 es colaborador de la UOC. Actualmente está afiliado a la Universidad de Barcelona como investigador posdoctoral, centrado en el estudio del cerebro mediante el procesamiento avanzado de imágenes médicas.

La revisión de este recurso de aprendizaje UOC ha sido coordinada por la profesora: Cristina Cano Bastidas

Sexta edición: septiembre 2023

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Autoría: Ángel Alejandro Juan Pérez, Gerard Fortuny Anguera, Bernat Anton Martos, Adrià Casamitjana Díaz
Producción: FUOC

Índice

Introducción

Este módulo está dedicado a la revisión de conceptos y métodos fundamentales de álgebra lineal y geometría, conceptos y métodos que serán necesarios en el estudio y comprensión de otros módulos posteriores.

Entre los fundamentos conceptuales que se revisan en el presente módulo están los de espacio y subespacio vectorial, combinación lineal, independencia lineal, dimensión, matrices, determinantes, y ecuaciones de rectas y planos en el espacio y algunos conceptos básicos de la geometría métrica (producto escalar, ortonormalidad, ángulos y distancias).

Los conceptos anteriores se aplican en ámbitos diferentes: en programación, por ejemplo, se usa la terminología de *arrays* unidimensionales para denotar a los vectores y de *arrays* bidimensionales para referirse a las matrices; las ecuaciones de rectas y planos en 2D y 3D, así como las propias matrices, juegan un papel relevante en el ámbito de la informática gráfica; en el ámbito de las redes de telecomunicaciones, la teoría de matrices sirve como fundamento a la teoría de detección y corrección de errores (control de paridad, códigos lineales, etc.); también se utilizan matrices en teoría de grafos, criptografía, etc.

El módulo se presenta desde un enfoque netamente práctico, por lo que se incluyen ejemplos que ilustran los conceptos introducidos, así como *outputs* de diferentes programas matemáticos que se pueden utilizar a la hora de agilizar o revisar los cálculos.

Objetivos

El objetivo general de este módulo es revisar los conceptos y métodos básicos del álgebra lineal y de la geometría. En particular, los objetivos docentes que se pretenden lograr son los siguientes:

1. Revisar los conceptos asociados al de espacio vectorial: independencia lineal, sistema generador, base, dimensión, etc.

2. Revisar la teoría básica sobre matrices y determinantes (operaciones con matrices, cálculo de la matriz inversa, rango de una matriz, cálculo y propiedades de los determinantes, etc.).

3. Revisar las ecuaciones de las rectas en 2D y 3D, así como las ecuaciones de los planos en 3D.

4. Revisar y ampliar los conceptos de producto escalar y ortogonalidad de vectores en $\mathbb{R}^n$.

5. Descubrir cómo el software matemático en general puede ser de utilidad para: (a) experimentar con los conceptos principales de este tema, y (b) automatizar los cálculos y operaciones.

6. Explorar algunas de las múltiples aplicaciones que tiene la teoría de matrices en ámbitos como el informático y el de las telecomunicaciones.

1. Ejemplo introductorio

Consideremos una red de área local (LAN) compuesta por varios ordenadores servidores y varias decenas de ordenadores cliente. En cada jornada, el estado de la LAN (en función del estado de los servidores) puede ser cualquiera de los siguientes:

- Estado $A \rightarrow$ la LAN funciona correctamente ya que ningún servidor está caído.
- Estado $B \rightarrow$ la LAN funciona con algún problema, ya que algún servidor ha caído (el resto de servidores suplen su función).
- Estado $C \rightarrow$ la LAN no funciona, ya que todos los servidores han caído.

A partir del histórico de observaciones de los últimos seis meses, se ha obtenido la siguiente tabla o matriz. En ella se muestran las probabilidades de que la red pase de un estado X a otro Y de un día para otro (se supone que las condiciones de administración, uso y mantenimiento de la LAN permanecen constantes durante ese periodo y seguirán así durante, como mínimo, otros seis meses):

Tabla 1. Probabilidades de que una red LAN pase del estado X al estado Y

	Hoy (día n)		
Mañana (día $n+1$)	**Estado *A***	**Estado *B***	**Estado *C***
Estado *A*	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Estado *B*	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Estado *C*	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

En otras palabras: si hoy la LAN se encuentra en estado A, la probabilidad de que mañana pase a estar en estado C es de $1/8$; si hoy está en estado C, la probabilidad de que mañana pase a estar en estado B es de $1/2$, etc.

La persona encargada de administrar la LAN nos adelanta que el estado actual de la misma puede ser el B o el C con igual probabilidad. Es decir: $P(A) = 0$, $P(B) = P(C) = 1/2$.

Ejemplo introductorio

Se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que la LAN esté funcionando correctamente mañana?
- ¿Y dentro de dos días?
- ¿Y dentro de una semana?

Las preguntas de este ejemplo se razonan y responden en el solucionario del final del módulo.

2. Espacios vectoriales

El concepto de vector aparece usualmente en diversos contextos matemáticos, físicos, de la economía o de la ingeniería. En los apartados siguientes se presenta una definición genérica de vector y de espacio vectorial real pero antes vamos a revisar las descripciones geométricas de los espacios de vectores de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Vectores en el espacio $\mathbb{R}^n$

Vectores de $\mathbb{R}^2$

Dado un sistema de coordenadas rectangulares en el plano sabemos que un punto P está determinado por un par ordenado $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, podemos considerar $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de puntos del plano.

Recordatorio

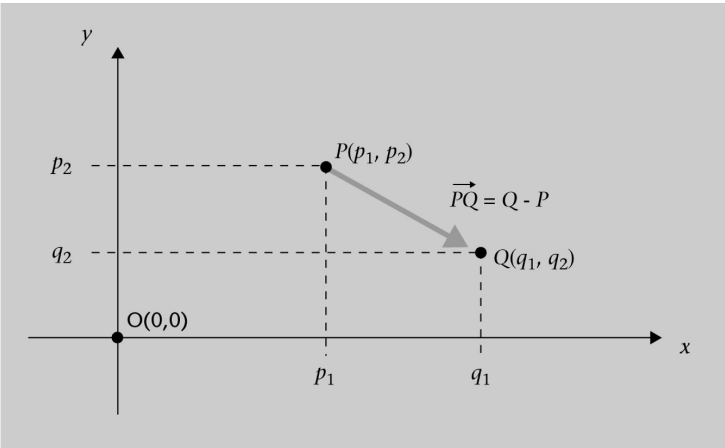
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales:
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots^{(n)} \ldots \times \mathbb{R}$

Dados dos puntos P: (p_1, p_2) y Q: (q_1, q_2) a $\mathbb{R}^2$ se define el **vector** $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ como el segmento orientado que tiene origen en P y fin en Q. El vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ tiene por componentes o coordenadas $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. Véase la figura 1.

Vectores iguales

Consideraremos que dos vectores son iguales si tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido, esto es, las mismas coordenadas. En este caso,hablamos de **vectores libres**. Un vector libre viene determinado únicamente por las coordenadas y para representarlo en el plano será suficiente elegir el punto origen o el punto fin.

Figura 1. Representación del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ en $\mathbb{R}^2$



Ejemplo 1

Dados los puntos P: $(5, 5)$ y Q: $(7, 2)$ el vector $\overrightarrow{PQ}$ es el vector de origen en P y extremo en Q, *i. e.*, $\overrightarrow{PQ} = (7, 2) - (5, 5) = (2, -3)$.

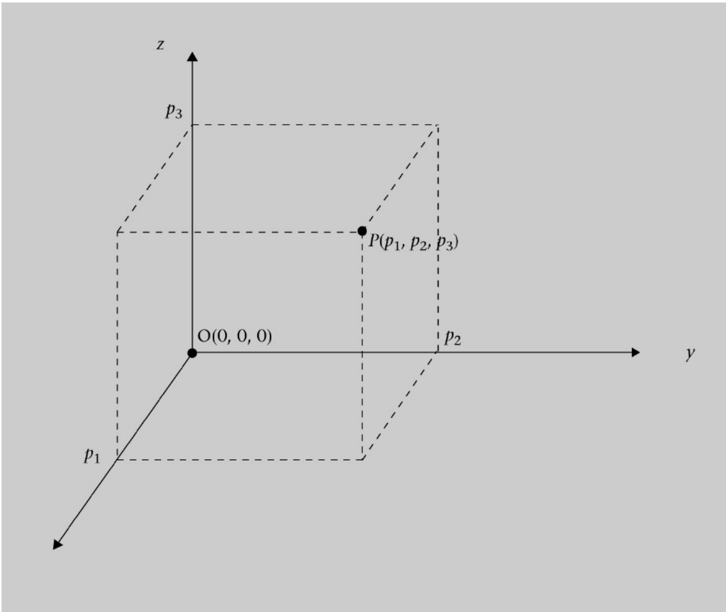
Por otra parte, el vector $\overrightarrow{QP}$ tiene origen en Q y extremo en P, *i. e.*, $\overrightarrow{QP} = (5,5) - (7,2) = (-2,3) = -(2,3) = -\overrightarrow{PQ}$.

Su representación nos muestra que ambos vectores tienen la misma longitud y dirección, pero son de sentido opuesto.

Vectores de $\mathbb{R}^3$

Generalizando lo anterior a $\mathbb{R}^3$, consideramos a este como el conjunto de todos los puntos del espacio representados en un sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura 2. Los vectores de $\mathbb{R}^3$ son triplas $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ donde un vector viene dado por sus tres coordenadas y se representa como un segmento orientado con origen en un punto P: $(p_1, p_2, p_3))$ de $\mathbb{R}^3$ y extremo en otro punto Q: (q_1, q_2, q_3), de manera que $v_1 = q_1 - p_1$, $v_2 = q_2 - p_2$ y $v_3 = q_3 - p_3$.

Figura 2. Representación del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ en $\mathbb{R}^3$



Ejemplo 2

Dados los puntos P: $(-2,-3,1)$ y Q: $(3,1,0)$ el vector $\overrightarrow{PQ}$ es el vector de origen en P y extremo en Q, *i. e.*, $\overrightarrow{PQ} = (3,1,0) - (-2,-3,1) = (5,4,-1)$.

El vector $\overrightarrow{QP}$ es:

$$\overrightarrow{QP} = (-2,-3,1) - (3,1,0) = (-5,-4,1) = -(5,4,-1) = -\overrightarrow{PQ}$$

Generalizando las descripciones geométricas de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ definimos los vectores de $\mathbb{R}^n$.

Dados dos puntos en $\mathbb{R}^n$, P: $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y Q: $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, se define el **vector** $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ como el segmento orientado que tiene origen en P y fin en Q. El vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene por componentes o coordenadas: $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (q_1, q_2, \ldots, q_n) - (p_1, p_2, \ldots, p_n) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$.

Dados dos vectores en $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, y un número $k \in \mathbb{R}$, se definen las siguientes operaciones:

Suma de vectores: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.

Observar que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n$.

Producto de un vector por un escalar: $k \cdot \mathbf{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, \ldots, k \cdot u_n)$.

Observar que $(k \cdot \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3

a) Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, -1)$ y $\mathbf{u} = (3, -1)$, su suma da como resultado: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (1 + 3, -1 - 1) = (4, -2)$.
b) Dado el vector $\mathbf{v} = (2, -3)$ y el número real $k = 3$, el producto da como resultado: $3 \cdot \mathbf{v} = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-3)) = (6, -9)$.

Ejemplo 4

a) Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ y $\mathbf{u} = (3, -1, 1)$, su suma da como resultado: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (1 + 3, -1 - 1, 0 + 1) = (4, -2, 1)$.
b) Dado el vector $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$ y el número real $k = 3$, el producto da como resultado: $3 \cdot \mathbf{v} = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-3), 3 \cdot 1) = (6, -9, 3)$.

2.2. Definición de espacio vectorial real

En el apartado anterior hemos considerado el conjunto de vectores $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ y se han definido sobre él dos operaciones: la suma de vectores $(+)$ y el producto de un vector por un escalar $(\cdot)$. Dichas operaciones cumplen determinadas propiedades (asociatividad, conmutatividad, existencia de elemento neutro, etc.), y dotan al conjunto $\mathbb{R}^n$ de una estructura especial que se denomina **espacio vectorial**. En este apartado, generalizaremos dicho concepto:

Notación matemática

- $\mathbf{u} \in V$ se lee: «$\mathbf{u}$ pertenece al conjunto V».
- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ significa: «para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ que pertenecen a V».
- $\forall k, h, w \in \mathbb{R}$ significa: «para todo k, h, w que pertenecen a $\mathbb{R}$».
- $\exists 0 \in V$ se lee: «existe 0 que pertenece a V».

Dado un conjunto V y dos operaciones definidas en él, la suma de elementos de V $(+)$ y el producto de un elemento de V por un número real $(\cdot)$, la combinación $(V, +, \cdot)$ se llama **espacio vectorial real** si se verifican las siguientes propiedades $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\forall k, h \in \mathbb{R}$:

Suma

- Asociativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
- Conmutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
- Existencia del elemento neutro: $\exists 0 \in V$ tal que $\mathbf{u} + 0 = 0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.
- Existencia del elemento opuesto: $\forall \mathbf{u} \in V, \exists \mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u} = 0$.

Producto

- Distributiva I: $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k \cdot \mathbf{u} + k \cdot \mathbf{v}$
- Distributiva II: $(k + h) \cdot \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{u} + h \cdot \mathbf{u}$
- Asociativa: $k \cdot (h \cdot \mathbf{u}) = (k \cdot h) \cdot \mathbf{u}$
- Existencia del elemento neutro: $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

A los elementos de un espacio vectorial se les suele llamar **vectores**.

Ejemplo 5. De espacios vectoriales reales

a) Dado $n \geq 1$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real. En particular, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es el espacio de los vectores del plano y $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ es el espacio de los vectores del espacio.
b) Dado $n \geq 1$, $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$ es un espacio vectorial real, siendo $\mathbb{R}_n[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n, $(+)$ la suma de polinomios y $(\cdot)$ el producto de un polinomio por un número real.
c) Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $(C_I(x), +, \cdot)$ es un espacio vectorial real, siendo $C_I(x)$ el conjunto de funciones reales continuas definidas en I, $(+)$ la suma de funciones y $(\cdot)$ el producto de una función por un número real.

Proposición: sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real, $\forall \mathbf{u} \in V$ y $\forall k \in \mathbb{R}$ se cumple:

a) $0 \cdot \mathbf{u} = 0$
b) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$
c) $k \cdot 0 = 0$
d) $k \cdot \mathbf{u} = 0 \Longleftrightarrow [k = 0 \text{ o } \mathbf{u} = 0]$

Subespacio vectorial

Considérese el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ y el subconjunto no vacío $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ (es decir, W es el plano xy de $\mathbb{R}^3$). Pues bien, la estructura $(W, +, \cdot)$ verifica que tanto la suma de dos elementos de W, como el producto de un escalar por un elemento de W dan como resultado un nuevo elemento de W. Se dice entonces que $(W, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Más generalmente:

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real, se dice que $(W, +, \cdot)$ es un **subespacio vectorial** de $(V, +, \cdot)$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1) $\emptyset \neq W \subseteq V$
2) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in W, \mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$
3) $\forall \mathbf{u} \in W, \forall k \in \mathbb{R}, k \cdot \mathbf{u} \in W$

En tal caso, se suele usar la notación $W \leq V$.

Otro ejemplo de subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ lo encontramos en el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ y su representación geométrica es también un plano de $\mathbb{R}^3$ (sin embargo, un plano de $\mathbb{R}^3$ que no pasase por el origen no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, ya que no contendría el vector $(0, 0, 0)$).

2.3. Combinación lineal. Subespacio generado

En este apartado veremos una de las formas más comunes de obtener subespacios vectoriales.

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real, se dice que el vector $\mathbf{v} \in V$ es una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n \in V$ si existen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ números reales tales que:

$$\mathbf{v} = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots + k_n \cdot \mathbf{u}_n$$

Ejemplo 6

a) En $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, el vector $(1, -3)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ dado que:

$$(1, -3) = 1 \cdot (1, 0) + (-3) \cdot (0, 1).$$

b) En $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, el vector $(2, -3, 1)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 1)$ y $(0, 0, 1)$, dado que:

$$(2, -3, 1) = 2 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 3, 1) + 2 \cdot (0, 0, 1).$$

Se demuestra que, dado un conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, el conjunto formado por todas sus posibles combinaciones lineales es un subespacio vectorial.

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ un conjunto de vectores de V. Se llama **espacio vectorial generado** por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, al subespacio vectorial de V formado por todas las combinaciones lineales que se pueden formar con los vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, *i. e.*,

$$< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n >= \{k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots + k_n \cdot \mathbf{u}_n \mid k_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

El conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ constituye un **sistema generador** del espacio vectorial $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n >$.

Ejemplo 7

Dados los vectores $(1, -1, 3)$ y $(2, -5, 6)$ de $\mathbb{R}^3$, el espacio vectorial que generan es:

$$\begin{aligned} < (1, -1, 3), (2, -5, 6) > &= \{k \cdot (1, -1, 3) + h \cdot (2, -5, 6) |\, k, h \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(k + 2h, -k - 5h, 3k + 6h) |\, k, h \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 8

El conjunto de vectores $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ constituye un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, ya que dado cualquier $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que:

$$\mathbf{u} = u_1 \cdot (1, 0, 0) + u_2 \cdot (0, 1, 0) + u_3 \cdot (0, 0, 1)$$

Por tanto, $< (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0) >= \mathbb{R}^3$.

Observar que también se cumple: $< (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) >= \mathbb{R}^3$.

2.4. Dependencia e independencia lineal. Base y dimensión de un espacio vectorial

Dado un espacio vectorial y un conjunto de vectores, se dice que estos son linealmente dependientes si uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los restantes. En caso contrario, los vectores son linealmente independientes. Más formalmente:

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ un conjunto de vectores de V. Los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ son **linealmente dependientes** si existe algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\mathbf{u}_i$ se puede expresar como combinación lineal del resto de vectores:

$$\mathbf{u}_i = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + k_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} + k_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} + \ldots + k_n \cdot \mathbf{u}_n$$

i. e., la ecuación $k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots k_n \cdot \mathbf{u}_n = 0$ tiene una solución no trivial.

Por el contrario, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ son **linealmente independientes** si no se cumple la condición anterior, *i. e.,* si dada la ecuación $k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots k_n \cdot \mathbf{u}_n = 0$ tiene solo la solución trivial $k_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 9

Los vectores $(3, 3, 2), (1, 1, -1), (2, 2, 3)$ son linealmente dependientes, ya que el vector $(3, 3, 2)$ se puede escribir como combinación lineal de los otros dos. En efecto, observar que tomando $k = h = 1$ es cierta la ecuación:

$$(3, 3, 2) = k \cdot (1, 1, -1) + h \cdot (2, 2, 3) = (k + 2h, k + 2h, -k + 3h)$$

Ejemplo 10

Los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son linealmente independientes. En efecto, si consideramos la ecuación:

$$k \cdot (1, 0) + h \cdot (0, 1) = (0, 0)$$

se tiene que $(k, 0) + (0, h) = (k, h) = (0, 0)$, de donde $k = h = 0$.

Se define el **rango de un conjunto de vectores** como el número máximo de vectores de dicho conjunto que son linealmente independientes.

Ejemplo 11

a) El conjunto de vectores $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ tiene rango 3, ya que los tres vectores son linealmente independientes.

b) El conjunto de vectores $\{(1, 2, 3), (0, 2, 2), (1, 4, 5)\}$ tiene rango 2, ya que solo hay dos vectores linealmente independientes (el tercer vector es la suma de los dos primeros).

c) El conjunto de vectores $\{(1, 0, 2), (2, 0, 4), (3, 0, 6)\}$ tiene rango 1, ya que solo hay un vector linealmente independiente (los vectores segundo y tercero son múltiplos del primero).

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real y$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ un conjunto de vectores de V tal que:

1) B es sistema generador de V.
2) B está formado por vectores linealmente independientes.

En tal caso, se dice que B es una **base** de V, y que la **dimensión** de V es n ($\mathbf{dim}(V) = n$).

Ejemplo 12

El conjunto $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es sistema generador de $\mathbb{R}^3$ y, además, los vectores de B son linealmente independientes. Por tanto, B es una base de $\mathbb{R}^3$ y la dimensión de este espacio vectorial es 3.

Otra de las muchas bases de $\mathbb{R}^3$ sería, por ejemplo, $B' = \{(1,1,0),(0,2,0),(1,0,4)\}$.

Nota

Esta definición tiene sentido porque se puede demostrar que todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

En $\mathbb{R}^n$, el conjunto de n vectores:

$$B = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$$

es una base especial llamada **base canónica**.

También se suele usar la notación: $\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,1)$.

Proposición. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial real de dimensión n.

1) Todo sistema generador de V estará compuesto por un mínimo de n vectores.
2) Todo conjunto linealmente independiente V estará compuesto por un máximo de n vectores.
3) n vectores linealmente independientes constituyen una base.
4) Un sistema generador de V formado por n vectores es una base.

Ejemplo 13

En $\mathbb{R}^3$, el conjunto de vectores $\{(1,0,-1),(2,3,1)\}$ no puede ser un sistema generador de todo $\mathbb{R}^3$, ya que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3 y, por tanto, cualquier sistema generador de dicho espacio deberá estar compuesto por 3 o más vectores.

Por otra parte, los vectores $\{(1,0,-1),(2,3,1),(0,1,1),(0,1,-3)\}$ no pueden ser linealmente independientes, ya que, al ser la dimensión del espacio 3, ningún conjunto con más de 3 vectores cumplirá la condición de independencia lineal.

Ejemplo 14

En $\mathbb{R}^3$, el conjunto de vectores $\{(1,0,-1),(0,3,1),(1,1,0)\}$ constituyen una base, ya que son 3 vectores linealmente independientes.

Por otra parte, el conjunto de vectores$\{(1,0,0),(0,0,1),(1,1,0)\}$ constituye una base, ya que es un sistema generador de todo $\mathbb{R}^3$ compuesto por 3 vectores.

Coordenadas de un vector en una base

El concepto de base de un espacio vectorial V permite definir un «sistema de coordenadas» de V. La clave para poder definirlo es el siguiente teorema de representación única de un vector en una base:

Teorema. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base del espacio vectorial real V. Se demuestra que para cada vector $\mathbf{v} \in V$ existe un único conjunto de números reales $c_1, \ldots, c_n$ tales que:

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{u}_n,$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ se llaman **coordenadas de v en la base** B.

Nota

El sistema de coordenadas nos permite pensar cualquier espacio vectorial de dimensión n como si fuera $\mathbb{R}^n$, ya que un vector, dada una base, viene determinado por n números.

Ejemplo 15

Dada la base $B = \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ las coordenadas del vector $(-2,3)$ la base B son $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(-2,3) = c_1 \cdot (1,0) + c_2 \cdot (2,1) = (c_1 + 2c_2, c_2)$. Por tanto $c_1 = -8$ y $c_2 = 3$. Es decir, las coordenadas de $(-2,3)$ en la base B son -8 y 3.

Obsérvese que las coordenadas de $(-2,3)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son precisamente -2 y 3.

Dimensión de un subespacio

La definición de base de un espacio vectorial se generaliza a subespacios:

Sea W un subespacio de un espacio vectorial V. Un conjunto de vectores de W, $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, es una base del subespacio W si y solo si:

1) B es un sistema generador de W.
2) B es un conjunto linealmente independiente.

Se llama **dimensión del subespacio** W $(\mathbf{dim}(W))$ al número de vectores de una base.

3. Matrices

3.1. Concepto de matriz

En la resolución de muchos problemas usamos sistemas de ecuaciones lineales como, por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+4y-z & = & 4 \\ -x+3y+2z & = & 4 \\ 2x+2y & = & 4 \end{array}\right.$$

Un sistema de ecuaciones lineales como el anterior puede representarse de una manera más cómoda, sin que ello suponga pérdida de información alguna, mediante una tabla o matriz formada por los coeficientes de las incógnitas y por los términos independientes de cada ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Esta tabla o matriz podría representar también otro tipo de información como, por ejemplo, un conjunto de 4 vectores en $\mathbb{R}^3$ escritos por columnas:

$$\mathbf{v}_1=(1,-1,2), \mathbf{v}_2=(4,3,2), \mathbf{v}_3=(-1,2,0), \mathbf{v}_4=(4,4,4).$$

Observar que, en todo caso, la tabla o matriz anterior está compuesta por 12 elementos distribuidos en 3 filas (horizontales) y 4 columnas (verticales).

En general, una **matriz A** es una tabla compuesta por $m \times n$ elementos distribuidos en m filas (horizontales) y n columnas (verticales):

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{fila } 1 \\ \longleftarrow \text{fila } 2 \\ \\ \longleftarrow \text{fila } m \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{columna } 1 & \text{columna } 2 & & \text{columna } n \end{array} &
\end{array}$$

La matriz **A** también se suele representar por (a_{ij}), donde a_{ij} hace referencia al elemento que ocupa la fila i $(1 \leq i \leq m)$ y la columna j $(1 \leq j \leq n)$.

Una forma usual de decir que la matriz **A** tiene m filas y n columnas es decir que la **dimensión o tamaño** de **A** es $m \times n$.

Ejemplo 16

La matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ es de dimensión 2×3, *i. e.,* está compuesta por 2 filas y 3 columnas. Se cumple, además, que: $a_{23} = -5$ y $a_{12} = -1$.

Dadas dos matrices **A** y **B**, se dice que son **iguales** si, y solo si, tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

Ejemplo 17

Les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & b & c \\ a & 1 & 8 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} d & 7 & 4 \\ 2 & e & g \end{pmatrix}$ son iguales si, y solo si, se cumple que: $a = 2, b = 7, c = 4, d = 3, e = 1, g = 8$.

Dadas una matriz $\mathbf{A}$, se llama **matriz traspuesta** de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\top$, a aquella matriz que se obtiene al permutar en $\mathbf{A}$ las filas por las columnas (es decir, la primera fila de A pasará a ser la primera columna de $\mathbf{A}^\top$, la segunda fila de $\mathbf{A}$ pasará a ser la segunda columna de $\mathbf{A}^\top$, etc.).

Ejemplo 18

Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Observar que:

a) $\left(\mathbf{A}^\top\right)^\top = \mathbf{A}$.
b) $\mathbf{A}$ tiene dimensión 2×3 mientras que $\mathbf{A}^\top$ tiene dimensión 3×2.

3.2. Tipos de matrices

Dada una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $m \times n$, se dice que:

- $\mathbf{A}$ es una **matriz fila** si tiene una única fila (es decir, $m = 1$).
- $\mathbf{A}$ es una **matriz columna** si tiene una única columna (es decir, $n = 1$).
- $\mathbf{A}$ es una **matriz nula** si todos sus elementos son 0.
- $\mathbf{A}$ es una **matriz cuadrada de orden** n si tiene el mismo número de filas que de columnas (es decir, $m = n$). En tal caso, se llama **diagonal principal** de $\mathbf{A}$ al conjunto formado por todos los elementos de la forma a_{ii}:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

diagonal principal

- $\mathbf{A}$ es una **matriz cuadrada simétrica** si $A = A^\top$ (es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall 1 \leq i, j \leq n$).
- $\mathbf{A}$ es una **matriz cuadrada diagonal** si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son 0 (es decir, $a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$).
- $\mathbf{A}$ es una **matriz identidad de orden** n si es una matriz diagonal siendo todos los elementos de su diagonal principal iguales a 1 (es decir, $a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$ y $a_{ii} = 1$ $\forall 1 \leq i \leq n$).

- **A** es una **matriz triangular superior** si todos sus elementos situados por debajo de la diagonal principal son 0 (es decir, $a_{ij} = 0\ \forall i > j$).
- **A** es una **matriz triangular inferior** si todos sus elementos situados por encima de la diagonal principal son 0 (es decir, $a_{ij} = 0\ \forall i < j$).

Ejemplo 19

a) Matrices fila: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) Matrices columna: $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Matrices nulas: $\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Matrices cuadradas: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) Matrices cuadradas simétricas: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

f) Matrices cuadradas diagonales: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

g) Matrices identidad: $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

h) Matrices de tipo triangular superior: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) Matrices de tipo triangular inferior: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3.3. Operaciones con matrices. Matriz inversa

Suma de matrices

Para sumar (o, alternativamente, restar) dos matrices, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$, es necesario que ambas tengan la misma dimensión, en cuyo caso se suman término a término, *i. e.*,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij}) \qquad \text{siendo } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$$

Ejemplo 20

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ d+4 & e+5 & f+6 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices verifica las siguientes propiedades:

1) Es **asociativa**: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.
2) Es **conmutativa**: $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$.
3) Existe el **elemento neutro**: $\mathbf{A}+0 = 0+\mathbf{A} = \mathbf{A}$.
4) Existe **elemento opuesto**: $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A})+\mathbf{A} = 0$, donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$.

Producto de un número por una matriz

Para multiplicar un número $k \in \mathbb{R}$ por una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, se multiplica el número por cada uno de los elementos de la matriz, *i. e.*:

$$k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} = (c_{ij}) \qquad \text{siendo } c_{ij} = k \cdot a_{ij}, \forall i, j$$

Ejemplo 21

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot 1 & k \cdot 0 \\ k \cdot 3 & k \cdot 1 \\ k \cdot (-1) & k \cdot 2 \end{pmatrix}$$

El producto de un número (escalar) por una matriz verifica las siguientes propiedades:

1) $k \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k \cdot \mathbf{A} + k \cdot \mathbf{B}$.
2) $(k+h) \cdot \mathbf{A} = k \cdot \mathbf{A} + h \cdot \mathbf{A}$.
3) $k \cdot (h \cdot \mathbf{A}) = (k \cdot h) \cdot \mathbf{A}$.
4) Elemento **identidad**: $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 1 = \mathbf{A}$.

Para cualquier $k, h \in \mathbb{R}$.

Producto de dos matrices

Para multiplicar una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ por otra $\mathbf{B} = (b_{ij})$, es necesario que el número de columnas de **A** coincida con el número de filas de **B**, en cuyo caso se obtiene una nueva matriz, $\mathbf{C} = (c_{ij})$, con tantas filas como **A** y tantas columnas como **B**, y cuyos elementos vienen dados por la expresión:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Ejemplo 22

Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, se puede calcular el producto de **A** por **B**, ya que el número de columnas de **A** coincide con el número de filas de **B**. El resultado será una matriz de dimensión 2×3:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 3 + c \cdot 3 & a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot (-3) & a \cdot (-1) + b \cdot 2 + c \cdot 1 \\ d \cdot 0 + e \cdot 3 + f \cdot 3 & d \cdot 1 + e \cdot (-2) + f \cdot (-3) & d \cdot (-1) + e \cdot 2 + f \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Observar, sin embargo, que no es posible calcular el producto de **B** por **A**, ya que el número de columnas de **B** no coincide con el número de filas de **A**.

El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

1) Es **asociativo**: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

2) **No es conmutativo**: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

3) Si **A** es una matriz cuadrada de orden n, se cumple que: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ donde $\mathbf{I}_n$ es la **matriz identidad** de orden n.

4) Si **A** es una matriz cuadrada de orden n, **no siempre** existe otra matriz **B** tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Cuando exista dicha **B**, esta se llamará **matriz inversa** de **A** y se denotará $\mathbf{A}^{-1}$. Una matriz que no tenga inversa se llama **matriz singular**.

5) Es **distributivo** respeto a la suma: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, y $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

4. Determinantes

En este capítulo presentamos el concepto de determinante, diferentes técnicas para su cálculo e importantes aplicaciones al estudio de las matrices y de los espacios vectoriales.

4.1. Determinante asociado a una matriz cuadrada de orden 2 o 3

Toda matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden $n \geq 1$ tiene asociado un número concreto, al cual llamaremos **determinante** de $\mathbf{A}$, y que se suele denotar por $\det(\mathbf{A})$ o bien por $|\mathbf{A}|$.

- Cuando $n = 1$, $\mathbf{A} = (a_{11})$ y $|\mathbf{A}| = |a_{11}| = a_{11}$.
- Cuando $n = 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, y $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
- Cuando $n = 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{12}$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Nota

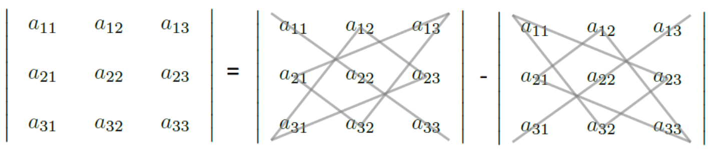
No se debe confundir una matriz (que es una tabla de números) con su determinante asociado, el cual es un simple número.

Observación

Mientras que los elementos de una matriz se encierran entre dos corchetes o paréntesis, los de un determinante se encierran entre dos líneas verticales.

La conocida regla de Sarrus es un buen recurso nemotécnico para el cálculo de determinantes de orden 3, que recordamos en la siguiente figura:

Figura 3. Regla de Sarrus para el cálculo del determinante de una matriz de orden 3



Para $n > 3$ el cálculo de determinantes no es tan inmediato y se han de utilizar algunos conceptos adicionales que se explicarán más adelante.

Ejemplo 23

a) Matrices de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23$$

b) Matrices de orden 3:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ & \quad -0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = 10 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-3) \\ & \quad -4 \cdot (-2) \cdot (-3) - 5 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= 10 + 9 + 16 - (24 - 1 + 60) \\ &= 15 - 83 \;=\; -68 \end{aligned}$$

4.2. Determinante asociado a una matriz cuadrada de orden 4 o superior

Cuando se pretenda hallar el determinante asociado a una matriz cuadrada de orden $n > 3$, será necesario recurrir al concepto de adjunto de un elemento:

Dada la matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

llamaremos **adjunto** de un elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, al número siguiente:

a) El determinante que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz $\mathbf{A}$.

b) Un signo que precederá al determinante y que será:

$$\begin{cases} + & \text{si } i + j \text{ es par} \\ - & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

En otras palabras, el signo será $(-1)^{i+j}$.

Observar, por tanto, que el signo asociado a cada adjunto dependerá de la posición inicial del elemento a_{ij} según el esquema siguiente:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Ejemplo 24

Dada una matriz cuadrada de orden $n = 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, el adjunto asociado al elemento a_{21} se obtendrá de la siguiente manera:

1) Se considera el determinante resultante tras eliminar la fila 2 y la columna 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2) Se tiene en cuenta el signo según la posición: en este caso $2 + 1 = 3$ es impar, por lo que el signo será negativo.

En definitiva:

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 25

Dada una matriz cuadrada de orden $n = 4$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \; ...$$

Proposición. Es posible calcular el determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, de orden n, a partir de los adjuntos de una fila o de una columna.

En efecto, utilizando los adjuntos de los elementos de la fila i:

$$|\mathbf{A}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in},$$

o también utilizando los adjuntos de los elementos de la columna j:

$$|\mathbf{A}| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Ejemplo 26

Calculemos, usando adjuntos, el determinante de la matriz de orden 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por adjuntos de la fila 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1) - 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (2) = 10.$$

alternativamente, desarrollando por adjuntos de la columna 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1) + 2 \cdot (4) + 0 \cdot (7) = 10.$$

Ejemplo 27

Calculemos el determinante de la matriz de orden 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollamos por adjuntos de la fila 2 (siempre es conveniente elegir la fila o columna con más ceros, ya que así se simplifican los cálculos):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} - 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} = -A_{23}$$

donde

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3.$$

4.3. Propiedades de los determinantes

Las siguientes propiedades pueden resultar de suma utilidad a la hora de calcular determinantes de cualquier orden:

1) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

Ejemplo 28

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

2) Si se parte de un determinante inicial y se intercambian de posición dos líneas (dos filas o dos columnas), el valor del nuevo determinante no cambia en valor absoluto, pero sí en signo.

Ejemplo 29

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En efecto: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$.

3) Si un determinante tiene dos líneas (filas o columnas) iguales o proporcionales, su valor es 0.

Nota

F1 significa *fila 1*.
C1 significa *columna 1*.

Ejemplo 30

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que la F1 y la F2 son iguales.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que la C1 y la C2 son proporcionales.}$$

4) Si un determinante tiene una línea (fila o columna) toda de ceros, su valor es 0.

Ejemplo 31

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (todos los elementos de la F2 son ceros).}$$

5) Multiplicar un determinante por un número es equivalente a multiplicar cualquier línea (fila o columna) por dicho número.

Ejemplo 32

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2\cdot 3 \\ 0 & 0 & 2\cdot 1 \\ 1 & 0 & 2\cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6) Si todos los elementos de una línea (fila o columna) están formados por dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer como suma de dos determinantes.

Ejemplo 33

$$\begin{vmatrix} 2 & 4+5 & 3 \\ 0 & 3+3 & 2 \\ 0 & 1+2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

7) Si los elementos de una línea (fila o columna) son combinación lineal de las otras, entonces el determinante vale 0.

Ejemplo 34

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+2\cdot 1 & 3 \\ 2 & 0+2\cdot 2 & 0 \\ 3 & 1+2\cdot 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ (la C2 es combinación lineal de la C1 y la C3).}$$

8) Si a los elementos de una línea (fila o columna) se le suman los elementos de otra línea previamente multiplicados por un número, el valor del determinante no varía. Análogamente, por extensión, si a una línea se le suma una combinación lineal de las otras.

Ejemplo 35

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5+2\cdot 1 & 3 \\ 2 & 3+2\cdot 2 & 0 \\ 3 & 4+2\cdot 3 & 1 \end{vmatrix}$$

9) El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de ellas, es decir, $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$

Ejemplo 36

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $|A| = 2$, $|B| = -1$, $|A\cdot B| = -2$, efectivamente $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

4.4. Cálculo de la matriz inversa

Al estudiar las propiedades del producto de matrices, se comentó lo siguiente:

a) Dada una matriz cuadrada de orden n, $\mathbf{A}$, **no siempre** existirá otra matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (siendo $\mathbf{I}_n$ la matriz identidad de orden n).

b) Cuando exista dicha $\mathbf{B}$, ésta se llamará **matriz inversa** de $\mathbf{A}$ y se denotará $\mathbf{A}^{-1}$.

c) Una matriz que no tenga inversa se llama **matriz singular**.

Proposición. Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es no singular (*i. e.,* $\mathbf{A}$ tiene inversa) si, y solo si, su determinante es no nulo ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$). En tal caso, se cumple que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{(\mathbf{adj}(\mathbf{A}))^\top}{\det(\mathbf{A})},$$

donde $\mathbf{adj}(\mathbf{A})$ es la matriz que se obtiene tras sustituir cada elemento de $\mathbf{A}$ por su adjunto correspondiente.

Ejemplo 37

La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, ya que $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Calculemos los adjuntos de $\mathbf{A}$ (teniendo en cuenta el signo correspondiente):

$$\begin{array}{lll}
A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 & A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\
A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\
A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 & A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2
\end{array}$$

Por tanto: $\mathbf{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Así pues, $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{(\mathbf{adj}(\mathbf{A}))^\top}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Podemos comprobar que, en efecto, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5. Rango de una matriz. Cálculo mediante determinantes

El **rango de una matriz** se define como el número de filas o columnas linealmente independientes. Si la matriz es $\mathbf{A}$, su rango lo denotaremos por $\text{rg}(\mathbf{A})$.

Nota

Se puede demostrar que, en cualquier matriz, el número de filas linealmente independientes coincidirá siempre con el número de columnas linealmente independientes.

Ejemplo 38

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, el número de filas linealmente independientes es 3, por tanto, su rango es 3.

En el ejemplo anterior ha sido fácil calcular el rango, ya que la matriz es triangular, pero el cálculo para una matriz cualquiera no es elemental.

El concepto de matriz tiene importantes aplicaciones en álgebra lineal y en geometría, por ello, es importante desarrollar un método que permita calcular el rango de una matriz de forma eficiente.

Dada una matriz $\mathbf{A}$ de m filas y n columnas, se llama **menor de orden** h (para $1 \leq h \leq \text{mín}(m, n)$) a todo determinante que se obtenga tras seleccionar h filas y h columnas en la matriz $\mathbf{A}$.

Ejemplo 39. Menor de una matriz

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & \boxed{-8} & \boxed{-2} \\ 2 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$, un menor de orden 2 se obtiene al seleccionar dos filas y dos columnas. Por ejemplo, si seleccionamos las dos últimas filas y las dos últimas columnas obtenemos el siguiente menor:

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Otro menor de orden 2 es, por ejemplo, el que se obtiene de seleccionar las dos últimas filas y las columnas primera y tercera:

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Dado un menor de orden h, se llama **orlado** de dicho menor al determinante que se obtiene tras añadirle, de forma ordenada, los elementos de una nueva fila y de una nueva columna.

Nota

Esto significa que solo se pueden añadir elementos que, dentro de la matriz inicial, estén en la misma fila o columna que los elementos del menor

Ejemplo 40. Orlado de un menor

Siguiendo con el ejemplo anterior, a partir del último menor se pueden generar dos orlados:

- El menor de orden 3 que se obtiene al agregar la primera fila y la última columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- El menor de orden 3 que se obtiene al agregar la primera fila y la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Una vez introducidos los conceptos de menor y orlado, conviene resaltar el siguiente resultado, el cual es la clave para determinar el rango de una matriz:

Teorema del rango. El rango de una matriz no nula viene determinado por el orden del mayor menor no nulo que se pueda obtener a partir de ella.

En otras palabras: si todos los elementos de una matriz son ceros, el rango de la matriz es cero. Si la matriz tiene algún elemento no nulo, su rango será igual o mayor a uno. Para determinarlo, será necesario hallar el menor no nulo de orden mayor que se puede formar con los elementos de la matriz. El orden de dicho menor será el rango de la matriz.

Ejemplo 41. Cálculo del rango de una matriz

Volviendo a la matriz de los ejemplos anteriores, queda claro que su rango será mayor que 1 (por ser una matriz no nula) y menor o igual que 3 (puesto que, como máximo, se podrá formar un menor de orden 3).

Es fácil comprobar que el rango de la matriz será igual o mayor que 2, ya que el siguiente menor de orden 2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Usaremos el menor anterior como «base de orden 2» para tratar de obtener, a partir de él, algún menor de orden 3 no nulo (si no lo logramos a partir de esta «base», no lo lograremos a partir de ningún otro menor de orden 2).

Resulta, sin embargo, que los dos únicos menores de orden 3 que se pueden obtener orlando el menor anterior son nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, que no encontraremos en la matriz ningún menor de orden 3 cuyo valor sea distinto de cero. Por consiguiente, el rango de la matriz será 2, *i. e.,* $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$.

Ejemplo 42. Cálculo del rango de una matriz

Se desea obtener el rango de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obviamente, el rango estará entre los valores 1 (ya que la matriz es no nula) y 4 (ya que, como máximo, se podrá formar un menor de orden 4).

Es fácil hallar un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Por tanto, ya está claro que $\text{rg}(\mathbf{A}) \geq 2$.

El siguiente paso será ir orlando el menor anterior (que tomaremos como «base de orden 2») para ver si se puede construir un menor de orden 3 no nulo:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ya que la F3 es múltiplo de la F1.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ya que la F1 y la F3 son iguales.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Hemos hallado un menor de orden 3 no nulo, por tanto: $\text{rg}(\mathbf{A}) \geq 3$.

Usaremos este nuevo menor como «base de orden 3».

Resulta, sin embargo, que $\text{rg}(\mathbf{A}) \neq 0$, ya que el único menor de orden 4 que se puede formar es nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ya que F3 es múltiplo de F1.

Por tanto, se tendrá que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$.

4.6. Aplicaciones a los espacios vectoriales

1) Dependencia e independencia lineal

Sea $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V (con $\dim(V) = n$). Disponiéndolos por filas o por columnas obtenemos una matriz $\mathbf{A}$.

Se verifica que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ son **linealmente independientes** si y solo si $\text{rg}(\mathbf{A}) = k$ (y consecuentemente que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ son **linealmente dependientes** si y solo si $\text{rg}(\mathbf{A}) < k$).

Ejemplo 43

Los vectores $(2, 1, 2), (3, 2, 1), (-1, 1, -7)$ de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes, ya que dada la matriz formada disponiéndolos en columnas, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, tiene $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ (basta comprobar que $|\mathbf{A}| = 0$ y que hay un menor de orden 2 no nulo).

Proposición. En $\mathbb{R}^n$, n vectores son linealmente independientes si, y solo si, el determinante de la matriz que se construye a partir de ellos es no nulo.

Ejemplo 44

Vamos a comprobar, usando la proposición anterior, que el rango del conjunto:

$$\{(1, 3, 0), (-1, 2, -4), (1, 1, 2)\}$$

es 3, *i. e.,* que los tres vectores anteriores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 - (-4) - (-6) = 2 \neq 0$$

Ejemplo 45

Vamos a comprobar, usando la proposición anterior, que el rango del conjunto:

$$\{(1,3,0),(-1,2,-4),(0,5,-4)\}$$

es inferior a 3, *i. e.,* que los tres vectores anteriores son linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 - (-20) - 12 = 0$$

2) Dimensión de un subespacio generado

Sea $W =< \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k >$ el subespacio generado por esos vectores. Dada la matriz $\mathbf{A}$ que se obtiene disponiendo los vectores en filas o columnas, se verifica que:

$$\mathbf{dim}(W) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}).$$

Ejemplo 46

Los vectores $(1,2,3,4),(5,6,7,8),(4,4,4,4)$ de $\mathbb{R}^4$ proporciona la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Tenemos que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$ (comprobarlo con software) y por consiguiente esos tres vectores generan un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2.

4.7. Matriz de cambio de base en un espacio vectorial

Recordemos que una base B de un espacio vectorial V de $\mathbf{dim}(V) = n$, proporciona un sistema de coordenadas para V y cada vector $\mathbf{v} \in V$ se identifica de manera única con sus coordenadas en esa base (números reales $(c_1, \ldots, c_n)$).

Para fijar ideas podemos identificar $(c_1, \ldots, c_n)$ con un vector de $\mathbb{R}^n$ (o una matriz $1 \times n$).

Sean $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $A = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases de un espacio vectorial V.

Consideramos la matriz $\mathbf{C}$ cuadrada de orden n cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B en la base A, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n\times n}$, se llama **matriz del cambio de base** de B a A.

Si $\mathbf{v} \in V$ tiene coordenadas $b_1 \ldots, b_n$ en la base B y tiene coordenadas $a_1, \ldots, a_n$ en la base A, se verifica:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 47

Sean $B = \{(1,1,1), (1,0,3), (3,4,5)\}$ y $A = \{2,3,-1), (0,0,1), (2,1,0)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Para calcular la matriz del cambio de base de B a A seguimos los pasos:

1) Calculamos las coordenadas de $(1,1,1)$ en A resolviendo la ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de $\mathbf{M}$ es no nulo, la matriz $\mathbf{M}$ es invertible y, por lo tanto, obtenemos

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) De la misma forma se calculan las coordenadas de los otros dos vectores:

$$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que los cálculos podrían haberse hecho con una única operación de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

es la matriz del cambio de base $\mathbf{C}$ de B a A.

Una vez hemos calculado la matriz de cambio de base de B a A, podemos aplicar lo que hemos visto en el recuadro gris anterior. Por ejemplo, el vector que tenga coordenadas $(1,1,0)$ en la base B tendrá las siguientes coordenadas en A:

$$\mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Ecuaciones de rectas y planos

5.1. Ecuaciones de una recta en el plano

De forma intuitiva, parece claro que dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ determinan de manera unívoca una recta r (la que pasa por ambos). Una recta en el plano puede también venir determinada por un punto de paso y un vector que marque la dirección de la recta (vector director). Como se verá a continuación, las ecuaciones de una recta r pueden tomar distintas expresiones equivalentes.

Ecuación vectorial

Dados dos puntos de paso de r, P: (p_1, p_2) y Q: (q_1, q_2), se puede considerar el vector director $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (v_1, v_2) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. Cualquier otro punto X: (x, y) de la recta r verificará la ecuación:

$$X = P + k \cdot \mathbf{v}, \text{ donde } k \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Ecuaciones paramétricas

La ecuación (1) se puede reescribir como sigue:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + k \cdot (v_1, v_2),$$

es decir,

$$(x, y) = (p_1 + k \cdot v_1, p_2 + k \cdot v_2)$$

expresión equivalente al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Ecuación continua

Despejando el parámetro k en (2), se llega a las ecuaciones continuas de r (siempre que $v_1, v_2 \neq 0$ y $v_1 \neq v_2$):

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x-p_1}{v_1} \\ k = \frac{y-p_2}{v_2} \end{cases}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \tag{3}$$

Ecuación punto-pendiente y ecuación explícita

Despejando la y de la expresión (3) se llega a:

1) La ecuación punto-pendiente: $y - p_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - p_1)$, es decir:

$$y - p_2 = m \cdot (x - p_1), \tag{4}$$

donde $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ es la **pendiente** de r.

2) La ecuación explícita: $y = m \cdot (x - p_1) + p_2 = m \cdot x - m \cdot p_1 + p_2$, es decir:

$$y = m \cdot x + n, \tag{5}$$

siendo $n = -m \cdot p_1 + p_2$ **la ordenada de origen**.

Ecuación general

También es posible desarrollar la expresión (3) de la siguiente manera:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} \Leftrightarrow v_2 \cdot (x-p_1) = v_1 \cdot (y-p_2) \Leftrightarrow v_2 \cdot x - v_1 \cdot y - v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2 = 0$$

De forma genérica:

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

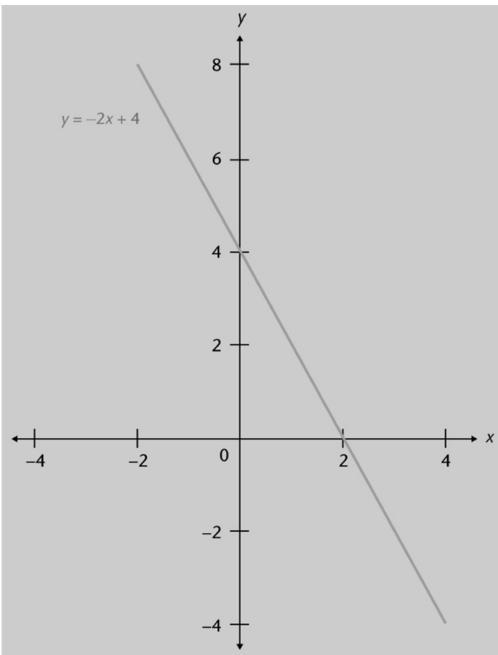
donde $A = v_2$, $B = -v_1$ y $C = -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2$.

Ejemplo 48

Sea r la recta que pasa por el punto P: $(1,2)$ y cuya dirección viene dada por el vector $\mathbf{v} = (1,-2)$.

- Ecuación vectorial: $(x,y) = (1,2) + k \cdot (1,-2)$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + k \cdot 1 \\ y = 2 + k \cdot (-2) \end{cases}$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2}$.
- Ecuación explícita: $y = -2x + 4$.
- Ecuación general: $2x + y - 4 = 0$.

Figura 4. Representación gráfica de la recta que pasa por P: $(1,2)$ con vector director $\mathbf{v} = (1,-2)$



5.2. Ecuaciones de una recta en el espacio

De forma similar a lo que ocurría en $\mathbb{R}^2$, también en el espacio $\mathbb{R}^3$ se pueden considerar varias expresiones alternativas para la ecuación de una recta r (la deducción de dichas expresiones es análoga al caso de $\mathbb{R}^2$):

Dados dos puntos de paso de r, P: (p_1, p_2, p_3) y Q: (q_1, q_2, q_3), se puede considerar el vector director $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (v_1, v_2, v_3)$. Cualquier otro punto X: (x, y, z) de la recta r verificará la ecuación: $X = P + k \cdot \mathbf{v}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

De esta forma, se pueden considerar las siguientes ecuaciones alternativas (siempre que $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \neq 0$):

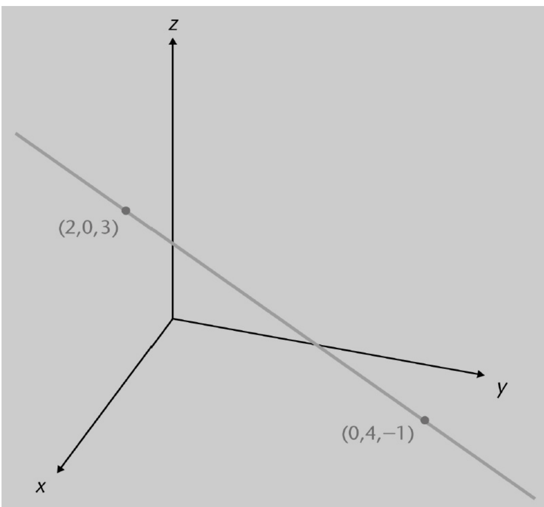
- **Ecuación vectorial**: $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + k \cdot (v_1, v_2, v_3)$.
- **Ecuaciones paramétricas**: $\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \\ z = p_3 + k \cdot v_3 \end{cases}$
- **Ecuación continua**: $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2} = \dfrac{z - p_3}{v_3}$

Ejemplo 49

Sea r la recta que pasa por el punto P: $(1, 2, 1)$ y cuya dirección viene dada por el vector $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$.

- Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 1) + k \cdot (1, -2, 2)$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$ para $k \in \mathbb{R}$.
- Ecuación continua: $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 2}{-2} = \dfrac{z - 1}{2}$.

Figura 5. Representación gráfica de la recta que pasa por P: $(1, 2, 1)$ con vector director $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$



5.3. Ecuaciones de un plano en el espacio

La ecuación de un plano π en el espacio $\mathbb{R}^3$, viene determinada por un punto del plano, P: (p_1, p_2, p_3), y dos vectores no nulos y no proporcionales (i. e., no paralelos), $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Es posible considerar distintas expresiones equivalentes para la ecuación de un plano en el espacio:

- **Ecuación vectorial**:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + k \cdot (u_1, u_2, u_3) + h \cdot (v_1, v_2, v_3) \text{ donde } k, h \in \mathbb{R}.$$

- **Ecuaciones paramétricas**:

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot u_1 + h \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot u_2 + h \cdot v_2 \\ z = p_3 + k \cdot u_3 + h \cdot v_3 \end{cases} \text{donde } k, h \in \mathbb{R}.$$

- **Ecuación general:** A partir de la ecuación

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene una expresión de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$.

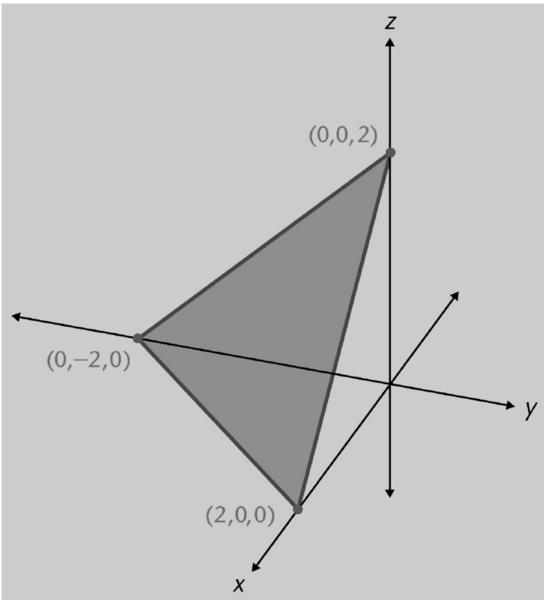
Ejemplo 50

Sea π el plano que pasa por el punto P: $(1, 2, 3)$ y tiene por vectores directores $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$. Entonces:

- Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k \cdot (1, 0, -1) + h \cdot (0, 1, 1)$ para $k, h \in \mathbb{R}$.
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + h \\ z = 3 - k + h \end{cases}$ para $k, h \in \mathbb{R}$.
- Ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 6. Representación gráfica del plano que pasa por P: $(1,2,3)$ con vectores directores $\mathbf{u}=(1,0,-1)$ y $\mathbf{v}=(0,1,1)$



6. Producto escalar y ortogonalidad

6.1. Producto escalar, módulo de un vector y ángulo entre vectores

Dados dos vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, se define el **producto escalar** de ambos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$$

Observar que:

a) El producto escalar de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ da como resultado un número real.

b) Usando notación matricial, se puede escribir el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como el producto matricial de la matriz fila $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ por la matriz columna de las coordenadas de $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 51

Si $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (2, -1, 4), 4)$, el producto escalar

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 12.$$

Observar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 12 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

Proposición. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y c un escalar (número real) cualquiera. Se cumple:

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.
b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$.
c) $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v})$.
d) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$ si, y solo si, $\mathbf{u} = 0$ es el vector nulo (*i. e.*, $\mathbf{u} = (0, 0, \ldots, 0)$).

El producto escalar permite definir el concepto de módulo o longitud de un vector:

El **módulo** o longitud de un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ este concepto coincide con la noción usual de la longitud del segmento orientado (flecha) que representa a un vector.

Proposición. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y c un escalar cualquiera. Se cumple:

a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{u}\| = 0$ si, y solo si, $\mathbf{u} = 0$.
b) $\|c\mathbf{u}\| = |c|\|\mathbf{u}\|$ (donde $|c|$ es el valor absoluto de c).
c) $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz).
d) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdad triangular).

Un **vector unitario** es aquel cuyo módulo o longitud vale 1. Observar que, dado un vector no nulo $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$, siempre es posible obtener otro vector $\mathbf{v}$ unitario con la misma dirección y sentido que $\mathbf{u}$: basta para ello con tomar $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$. Este proceso se llama normalización del vector $\mathbf{u}$.

Ejemplo 52

El vector $\mathbf{w} = (0, -3/5, 4/5)$ es unitario ya que

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{0^2 + (-3/5)^2 + (4/5)^2} = 1.$$

Por otra parte, el vector $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ no es unitario ya que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \neq 1.$$

Finalmente, podemos normalizar el vector $\mathbf{u}$ de forma que nos queda un nuevo vector $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$ que será un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\mathbf{u}$.

El concepto de módulo de un vector permite introducir otra noción importante, la de distancia entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$:

Dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se define la **distancia** entre ambos como:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Nota

Si $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$, entonces $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es, intuitivamente, la distancia entre los puntos P y Q, calculada como $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

Ejemplo 53

La distancia entre los vectores $\mathbf{u} : (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} : (2, -1, 4)$ es:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, 3, -1) \Rightarrow d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se puede definir el ángulo entre dos vectores no nulos utilizando el producto escalar:

Dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, se define el **ángulo** entre ambos como el número real θ, perteneciente al intervalo $[0, \pi]$, tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Nota

θ se expresa en radianes.

Ejemplo 54

Calculemos el ángulo θ que forman entre sí los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (2, -1, 4)$:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = 0{,}69985.$$

Por lo tanto, $\theta = \cos^{-1}(0{,}69985) = 0{,}7956$ radianes.

6.2. Vectores y bases ortogonales en $\mathbb{R}^n$

Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ entonces el ángulo que forman los dos vectores es $\pi/2$ ($\cos\theta = 0$), intuitivamente, las direcciones de los dos vectores son perpendiculares. El siguiente concepto generaliza a $\mathbb{R}^n$ la idea intuitiva de perpendicularidad.

Dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, vectores en $\mathbb{R}^n$, se dice que son **ortogonales** (intuitivamente perpendiculares) entre sí cuando se cumple:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Observar que el vector 0 $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todo vector de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 55

Si sabemos que los vectores $\mathbf{v} = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{w} = (0, 3, m)$ son ortogonales, ¿cuánto valdrá m? Por ser ortogonales, se tendrá que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, *i. e.,* $0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 4 \cdot m$; despejando se obtiene $m = 3/4$.

Sean $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector y $W \leq \mathbb{R}^n$ y un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\mathbf{u}$ es ortogonal al subespacio W si $\mathbf{u}$ es ortogonal a todo vector de W.

El conjunto de todos los vectores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ que son ortogonales al subespacio W se llama complemento ortogonal de W y se denota por $W^{\perp}$.

El complemento ortogonal de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ es, a su vez, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 56

En $\mathbb{R}^3$, considérese el plano xy, cuya ecuación es $z = 0$. Este plano es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores cuya tercera coordenada es nula, *i. e.,*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\} = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) > .$$

Es evidente, entonces, que el vector $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ es ortogonal a W ya que, dado $\mathbf{w} = (w_1, w_2, 0) \in W$, tenemos $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$. De hecho, si denotamos por $Z =< (0, 0, 1) >$ al subespacio generado por $\mathbf{u}$, *i. e.,* es la recta que coincide con el eje z de $\mathbb{R}^3$, se tiene que Z es el complemento ortogonal de W, es decir: $Z = W^{\perp}$. Observar que también se cumple $W = Z^{\perp}$.

Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base de W. Se dice que B es una **base ortogonal** de W si los vectores que la componen son ortogonales entre sí, *i. e.*,

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \ \forall i \neq j.$$

Por otra parte, se dice que B es una **base ortonormal** de W si es una base ortogonal y, además, todos los vectores que la componen son unitarios.

Observar que dada una base ortogonal B será inmediato obtener una base ortonormal: bastará con normalizar cada uno de los vectores de B, *i. e.*, si $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es una base ortogonal de W, entonces $B' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ $\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|}$ $(i = 1, \ldots, k)$ será una base ortonormal de W.

Ejemplo 57

Los vectores $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1/2, -2, 7/2)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$ ya que $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 >= \mathbb{R}^3$ y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forman un conjunto de vectores linealmente independientes. Se trata, además, de una base ortogonal, ya que: $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$, $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ (en general, si un conjunto de vectores no nulos son ortogonales entre sí, entonces también son linealmente independientes). A partir de la base ortogonal $B = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ resulta inmediato obtener una base ortonormal B':

$$\begin{aligned} \|(3, 1, 1)\| &= \sqrt{11} \\ \|(-1, 2, 1)\| &= \sqrt{6} \\ \|(-1/2, -2, 7/2)\| &= \sqrt{33/2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B' = \{(3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}), (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}),$ $((-1/2)/\sqrt{33/2}, -2/\sqrt{33/2}, (7/2)\sqrt{33/2})\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Dada una base $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, cualquier vector $\mathbf{v} \in W$ se podrá expresar como combinación lineal de los elementos de la base, *i. e.,* existirán valore reales $c_1, \ldots c_k$ tales que:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots c_k\mathbf{u}_k.$$

i. e.,

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = c_1(u_{11}, \ldots, u_{1n}) + \ldots + c_k(u_{k1}, \ldots, u_{kn}).$$

En general, para determinar el valor exacto de los k coeficientes c_i será necesario resolver el sistema de k ecuaciones lineales resultante:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= c_1 u_{11} + c_2 u_{21} + \ldots + c_k u_{k1} \\
\mathbf{v}_2 &= c_1 u_{12} + c_2 u_{22} + \ldots + c_k u_{k2} \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= c_1 u_{1n} + c_2 u_{2n} + \ldots + c_k u_{kn}
\end{aligned}$$

En el caso de bases ortogonales, sin embargo, el proceso de determinación de los c_i se simplifica notablemente:

Teorema. Sea $B = \{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonal de $W \leq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in W$ un vector de W. La expresión de $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los elementos de B es:

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + c_k \mathbf{u}_k, \quad \text{donde } c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}, \ i = 1, \ldots, k.$$

Ejemplo 58

Como se ha demostrado en el ejemplo anterior, los vectores $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1/2, -2, 7/2)$ constituyen una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Consideremos ahora el vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$, cuya expresión en la base canónica es $\mathbf{v} = (6, 1, -8)$. ¿Cuál será la expresión de $\mathbf{v}$ en la base ortogonal $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$? Si B no fuese una base ortogonal, para responder a la pregunta tendríamos que resolver la ecuación vectorial:

$$(6, 1, -8) = c_1(3, 1, 1) + c_2(-1, 2, 1) + c_3(-1/2, -2, 7/2).$$

Esta ecuación vectorial da lugar a un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Al ser B una base ortogonal, podemos utilizar el Teorema anterior para hallar las coordenadas de $\mathbf{v}$ en B:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 11 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = -12 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_3 = -33 \\
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 11 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 6 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = 33/2
\end{array}$$

con lo que

$$c_1 = \tfrac{11}{11} = 1 \quad c_2 = \tfrac{-12}{6} = -2 \quad c_3 = \tfrac{-33}{33/2} = -2 \ \cdot$$

Así pues, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$, esto es, las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B son $(1, -2, -2)$.

6.3. Proyecciones ortogonales

Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, un subespacio vectorial $W \leq \mathbb{R}^n$ y una base ortogonal $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de W, se llama **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre W, $PO(\mathbf{v}, W)$, al siguiente vector $\mathbf{v}^* \in W$:

$$PO(\mathbf{v}, W) = \mathbf{v}^* = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k, \ \ \text{for } c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}, \ i = 1, \ldots, k$$

Ejemplo 59

Considérense el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ siguiente: $W =< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$, siendo $\mathbf{u}_1 = (2, 5, -1)$ y $\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 1)$. Observar que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base ortogonal de W y que W es un plano en $\mathbb{R}^3$.

Se desea hallar la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ sobre el subespacio W, *i. e.*, PO$(\mathbf{v}, W)$:

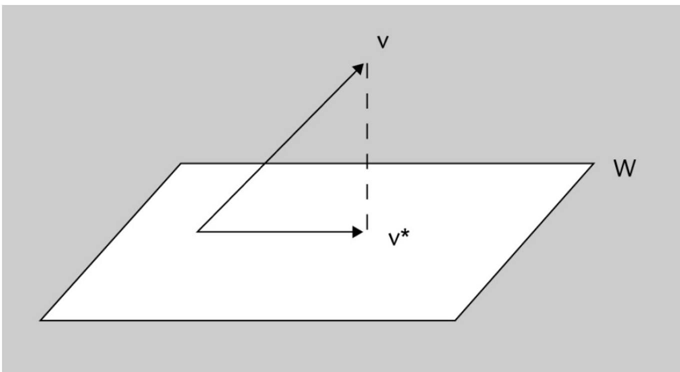
$$\begin{array}{ll} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 9 & \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = 3 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 30 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 6 \end{array},$$

con lo que

$$c_1 = \tfrac{9}{30} = \tfrac{3}{10} \quad c_2 = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto, la proyección ortogonal $\mathbf{v}^* = \frac{3}{10}(2, 5, -1) + \frac{1}{2}(-2, 1, 1) = (-\frac{2}{5}, 2, \frac{1}{5}) \in W$.

Figura 7. Representación gráfica de la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ sobre el subespacio W.



Teorema (descomposición ortogonal). En las condiciones de la definición anterior, dado un vector cualquiera $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, este se puede escribir de la forma:

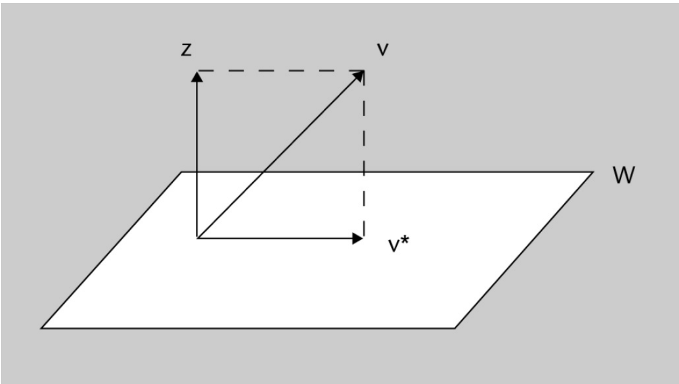
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{z}$$

siendo $\mathbf{v}^*$ la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre W y $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ un vector de $W^\perp$.

Ejemplo 60

Continuando con el ejemplo anterior, nos planteamos «descomponer ortogonalmente» el vector $\mathbf{v}$ como suma de su proyección ortogonal sobre el espacio W, $\mathbf{v}^*$, y de otro vector $\mathbf{z}$, perpendicular a W. Según hemos visto, $\mathbf{v}^* = \left(-\frac{2}{5}, 2, \frac{1}{5}\right) \in W$. Por otra parte, $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^* = (1, 2, 3) - (-\frac{2}{5}, 2, \frac{1}{5}) = (\frac{7}{5}, 0, \frac{14}{5})$. Comprobemos que, como dice el teorema, $\mathbf{z} \in W^\perp$, para lo cual será suficiente con demostrar que z es ortogonal a los vectores de una base de W: $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_1 = 2 \cdot \frac{7}{5} + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{14}{5} = 0$
$\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_2 = (-2) \cdot \frac{7}{5} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{14}{5} = 0$

Figura 8. Descomposición ortogonal del vector **v**



Observar que, si $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{z}$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ es la componente de $\mathbf{v}$ ortogonal a W. Esta idea es la base del método de ortogonalización de Gram-Schmidt que se verá en el próximo apartado.

Teorema (aproximación óptima). En las condiciones de la definición anterior, se cumple que $\mathbf{v}^*$ es el vector de W más cercano a $\mathbf{v}$, *i. e.*, $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) < d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ para todo vector $\mathbf{u} \in W$ diferente de $\mathbf{v}^*$.

La distancia de un vector (punto) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a un subespacio $W \leq \mathbb{R}^n$ se define como la distancia de $\mathbf{v}$ al vector (punto) más cercano de W, esto es, la distancia de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}^*$.

Ejemplo 61

Si $\mathbf{u}_1 = (5, -2, 1)$ y $\mathbf{u}_2 = (1, 2, -1)$, ¿cuál es la distancia entre el vector $\mathbf{v} = (-1, -5, 10)$ y el subespacio $W =< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$? Por el Teorema de la aproximación óptima, la distancia entre $\mathbf{v}$ y W será la misma que la distancia entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^*$, la proyección de $\mathbf{v}$ sobre W. Lo primero será comprobar que la base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es ortogonal:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0.$$

Ahora hallamos $\mathbf{v}^*$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 15, \quad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = 30; \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = -21, \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 6;$$

con lo que

$$c_1 = \tfrac{15}{30} = \tfrac{1}{2} \quad c_2 = -\tfrac{21}{6} = -\tfrac{7}{2} \ \cdot$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}^* = \frac{1}{2}(5, -2, 1) + \frac{-7}{2}(1, 2, -1) = (-1, -8, 4) \in W$.

Finalmente: $d(\mathbf{v}, W) = d(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\| = \|(0, 3, 6)\| = 3\sqrt{5}$.

6.4. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

En ocasiones, puede resultar muy conveniente disponer de una base ortonormal para un subespacio vectorial $W \leq \mathbb{R}^n$. El proceso de Gram-Schmidt es un algoritmo que permite obtener una base ortogonal para cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ no trivial (se entiende por subespacio trivial de $\mathbb{R}^n$ al subespacio que solo contiene el vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$).

Una vez obtenida la base ortogonal, la obtención de una base ortonormal es inmediata, ya que bastará con normalizar los vectores de la base ortogonal proporcionada por el algoritmo.

Algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea $W \leq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial de $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base cualquiera de W. Pasos:

1: Tomar $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ y considerar $W_1 =< \mathbf{v}_1 >$.

2: Tomar $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - PO(\mathbf{u}_2, W_1)$ y considerar $W_2 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.

3: Tomar $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - PO(\mathbf{u}_3, W_2)$ y considerar $W_3 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$.

4: Tomar $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - PO(\mathbf{u}_4, W_3)$ y considerar $W_4 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 >$.

$\vdots$

k: Tomar $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - PO(\mathbf{u}_k, W_{k-1})$.

En tales condiciones, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base ortogonal de W.

Ejemplo 62

Considérense los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes: $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1,1)$ y $\mathbf{u}_3 = (0,0,1,1)$. Los vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son linealmente independientes y, por tanto, $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de un subespacio W de dimensión 3. A continuación utilizaremos el método de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal de W:

1) Tomamos $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$ y $W_1 =< \mathbf{v}_1 >$.

2) Tomamos $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,1) - PO(\mathbf{u}_2, W_1)$. Operando, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 3 \\ &\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 4 \\ &c_1 = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Podríamos usar directamente el vector $\mathbf{v}_2$ que hemos obtenido y continuar con el proceso. Sin embargo, a fin de simplificar los cálculos, tomaremos en su lugar el vector proporcional $\mathbf{v}_2' = 4\mathbf{v}_2 = (-3,1,1,1)$, el cual tiene la misma dirección. Tomamos $W_2 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2' >$. Observar que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2'$ son vectores ortogonales y que $\mathbf{v}_2 \in W^\perp$ (por el teorema de descomposición ortogonal) y, por lo tanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es base ortogonal de W_2

3) Tomamos $\mathbf{v}_3 = (0,0,1,1) - PO(\mathbf{u}_3, W_2)$. Operando, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 2 \quad && \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2' = 2 \\ &\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 4 \quad && \mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{v}_2' = 12 \\ &c_1 = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} \quad && c_2 = \tfrac{2}{12} = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) - \frac{1}{6}(-3,1,1,1) = (0, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
A fin de simplificar los cálculos, tomamos $\mathbf{v}_3' = (0,-2,1,1)$.
Observar que $\mathbf{v}_3'$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2'$ ya que $\mathbf{v}_3 \in W_2^\perp$ (por el teorema de descomposición ortogonal); por lo tanto, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3'\}$ es una base ortogonal de W_3.

Así pues, según el teorema anterior, B será base ortogonal de W. Para obtener una base ortonormal de W bastará con normalizar los vectores de B:

$$\|\mathbf{v}_1\| = 2 \quad \|\mathbf{v}_2'\| = 2\sqrt{3} \quad \|\mathbf{v}_3'\| = \sqrt{6}$$

Por lo tanto $B' = \{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \left(0, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\}$ es base ortonormal de W.

Resumen

En este módulo se han revisado conceptos y métodos asociados al álgebra lineal y a la geometría, los cuales son básicos para el desarrollo de módulos posteriores (sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones geométricas, aplicaciones lineales, etc.).

En primer lugar, se han revisado los conceptos clave asociados a espacios vectoriales reales:

- subespacio vectorial
- combinación lineal de vectores
- sistema generador
- independencia lineal
- rango de un conjunto de vectores
- base y dimensión de un espacio vectorial

A continuación, se han revisado los conceptos clave asociados a la teoría de matrices y determinantes:

- dimensión de una matriz
- matriz transpuesta
- tipos de matrices (diagonal, simétrica, triangular, etc.)
- operaciones con matrices (suma, resta, multiplicación, ...)
- matriz inversa
- cálculo de determinantes de orden 2 y 3
- cálculo de determinantes por adjuntos
- propiedades de los determinantes
- cálculo de la matriz inversa
- cálculo del rango de una matriz
- determinantes y dependencia lineal

En la parte final del módulo, se ha realizado una revisión de los siguientes conceptos geométricos:

- ecuaciones de rectas y planos en 2D y 3D
- producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y ángulo entre vectores
- ortogonalidad (bases ortogonales y ortonormales)
- proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

El módulo se ha completado con ejemplos y actividades resueltas (con y sin ayuda de software), en las que también se han introducido algunas aplicaciones interesantes de la teoría expuesta a diferentes ámbitos temáticos (informática, telecomunicaciones, economía, etc.).

Ejercicios de autoevaluación

1. Determinad cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son base de $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(-2,3,0),(3,-1,2),(-1,5,2)\}$
b) $\{(-1,2,1),(2,4,0),(5,1,1)\}$

2. Usando determinantes, calculad la inversa, si existe, de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, calculad $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}$.

Para realizar con o sin la ayuda de software.

4. Considerad los vectores siguientes: $\mathbf{u} = (a,1,-2)$, $\mathbf{v} = (1,a,2)$, $\mathbf{w} = (2a,1,0)$. Hallad el valor de a para que los vectores sean linealmente independientes.

5. Sabiendo que se cumple $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$, obtened la matriz $\mathbf{X}$ si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calculad la inversa, cuando exista según el valor del parámetro a, de $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$.

Para realizar con o sin la ayuda de software.

7. Dados los vectores $(1,2,0)$, $(1,0,1)$ y $(-2,2,-3)$, hallad la dimensión del subespacio generado. Calculad k para que el vector $(4,3,k)$ pertenezca a dicho subespacio.

8. Dados los vectores $B = \{(1,1,2),(1,2,3),(3,4,3)\}$ y $A = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Comprobad que B y A son bases de $\mathbb{R}^3$ y calculad las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (1,1,1)$ en B y en A, respectivamente.
b) Calculad la matriz del cambio de base de B a A y comprobad la coherencia con el resultado del apartado anterior.

9. Razonad si las siguientes afirmaciones sobre vectores de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar son verdaderas o falsas:

a) El módulo de un vector es un número positivo.
b) La distancia entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.
c) Si dos vectores no nulos son ortogonales entonces son linealmente independientes.
d) La proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es múltiplo escalar de $\mathbf{u}$.
e) Si un vector coincide con su proyección ortogonal sobre un subespacio, entonces el vector es del subespacio.
f) El conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ ortogonales a un vector dado es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

10. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ y sea el vector $\mathbf{v} = (2,-1,-1)$.

a) Comprobad que $B_1 = \{(-1,0,1),(-1,3,-2)\}$ es una base de W.

b) Calculad les coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B_1.
c) Sabiendo que $B_2 = \{(-1,0,1),(0,1,-1)\}$ es también base de W, calculad las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B_2.
d) Calculad la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 y comprobad que es coherente con lo que se ha hecho en los dos primeros apartados.

11. Un modelo de producción de Leontief se expresa mediante una tabla de *input-output* como la que se expone a continuación:

Para realizar con la ayuda de software.

Tabla 2. Modelo de producción de Leontief

	Sector I	Sector II	Sector III
Sector I	0.5	0.4	0.2
Sector II	0.2	0.3	0.1
Sector III	0.1	0.1	0.3

Esta tabla se interpreta de la siguiente manera: si el sector II quiere producir 1000 unidades, entonces necesitará 400 unidades del sector I, 300 del sector II y 100 del sector III.

Tabla 3. Interpretación del modelo de producción de Leontief

	Sector I	Sector II	Sector III
Sector I	0.5	0.4 × 1000 = 400 unidades del sector I	0.2
Sector II	0.2	0.3 × 1000 = 300 unidades del sector II	0.1
Sector III	0.1	0.1 × 1000 = 100 unidades del sector III	0.3

La matriz $\mathbf{C}$ representa el consumo de una economía y en este caso será:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Si la demanda total de consumidores y consumidoras viene dada por el vector (d_1, d_2, d_3) siendo d_i la demanda que los consumidores y consumidoras hacen del sector i $(1, 2$ o $3)$, entonces la cantidad producida en la economía, (x_1, x_2, x_3), satisface la ecuación siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

a) Si en una economía la demanda final es $d_1 = 50$, $d_2 = 30$, $d_3 = 20$, se pide el nivel de producción (x_1, x_2, x_3) necesario para cubrir dicha demanda.
b) Si el nivel de producción es $x_1 = 4350$, $x_2 = 3480$, $x_3 = 1958$, ¿cuál será la demanda que se puede cubrir?

12. Calculad, usando las propiedades de los determinantes, el valor del determinante asociado a la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$.

13. Dado el punto P: $(-1,0,3)$ y el vector $\mathbf{v} = (2,-1,4)$ se pide:

a) Ecuación de la recta r definida por P y $\mathbf{v}$ en sus distintas formas.
b) Hallar las coordenadas que faltan en Q: $(x, y, -3)$ para que este punto pertenezca a r.

14. Dado el punto P: $(-2, 1, 1)$ y los vectores $\mathbf{u} = (3, -1, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, -2, 1)$ se pide:

a) Ecuación general del plano π que pasa por P y contiene las direcciones $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
b) Hallar las coordenadas que faltan en Q: $(x, -3, 0)$ para que este punto pertenezca a π.

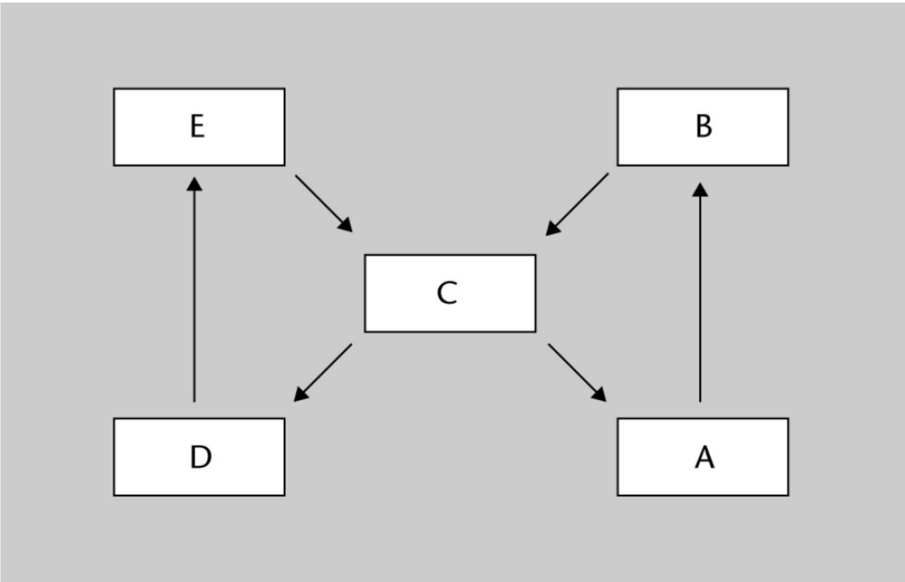
Para realizar con la ayuda de software.

15. El grafo de la figura 9 muestra los enlaces directos existentes entre cinco *web sites* pertenecientes a distintas compañías dedicadas al desarrollo de software de simulación.

a) Representad matricialmente la información que proporciona el grafo dado sobre enlaces directos utilizando para ello una matriz de ceros y unos, *i. e.*, el elemento $(\mathbf{M})_{ij}$ será 1 si existe un enlace directo entre la compañía que ocupa la fila i y la compañía que ocupa la columna j (con $i \neq j$), siendo 0 en caso contrario.
b) Representad matricialmente la información que proporciona el grafo dado sobre enlaces no directos separados por un único *web site* (por ejemplo, hay un enlace de este tipo entre los *sites* A y C, ya que desde A se puede llegar a C pasando por B).
c) Calculad $\mathbf{M}^2$. ¿Qué observáis?
d) Calculad $\mathbf{M} + \mathbf{M}^2$ e interpretad el resultado.

Para realizar con la ayuda de software.

Figura 9. Grafo que representa los enlaces directos entre cincos sitios web



16. Una manera elemental de codificar un mensaje de texto consiste en asignar a cada letra del abecedario un número. Por ejemplo, usando la asignación $A = 01$, $B = 02$, …, $Z = 27$, espacio en blanco = 28, el mensaje «mañana día D» se codificaría (no teniendo en cuenta la acentuación y las mayúsculas) como: «13 01 15 01 14 01 28 04 09 01 28 04». La sucesión anterior se puede escribir en forma matricial, completando con espacios en blanco (valor 28) si fuese necesario.

a) Escribid una matriz que represente la secuencia anterior. ¿Por qué creéis que a partir de dicha matriz puede resultar relativamente sencillo descifrar el texto original?
b) Multiplicad la matriz anterior por una segunda matriz (matriz de codificación-decodificación que, en general, no puede tener menos filas que columnas y debe tener rango máximo). ¿Creéis que ahora será más difícil obtener el texto original a partir de la matriz resultante (sin conocer la matriz de codificación-decodificación)?

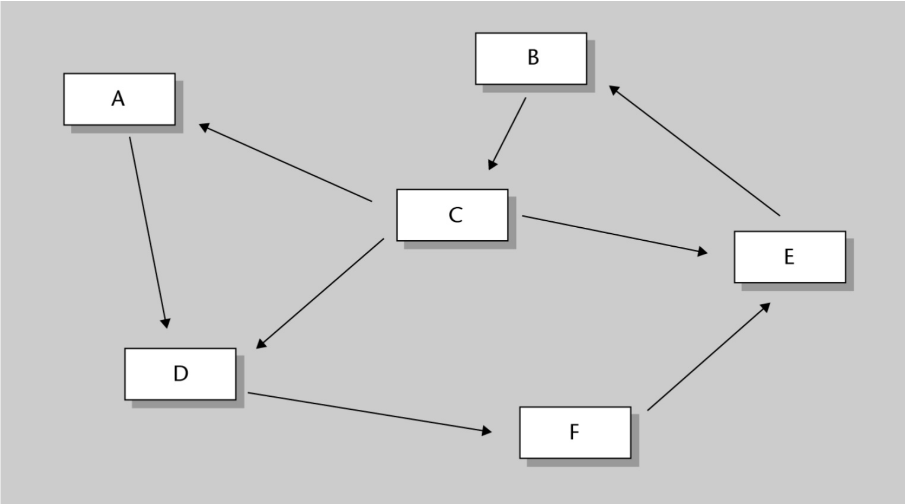
Para realizar con la ayuda de software.

17. Dados los conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^3$, $B = \{(0, 1, -2), (5, -7, 4), (6, 3, 5)\}$, $A = \{(1, 1, -2), (-5, -1, 2), (7, 0, -5)\}$.

a) Comprobad que B y A son bases de $\mathbb{R}^3$ y calculad las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ en B y A, respectivamente.
b) Calculad la matriz del cambio de base de B a A y comprobad la coherencia del resultado del apartado anterior.

18. El grafo siguiente muestra los enlaces directos existentes entre seis *web sites* pertenecientes a diversas compañías dedicadas al desarrollo de software matemático:

Figura 10. Grafo que representa los enlaces directos entre seis sitios web

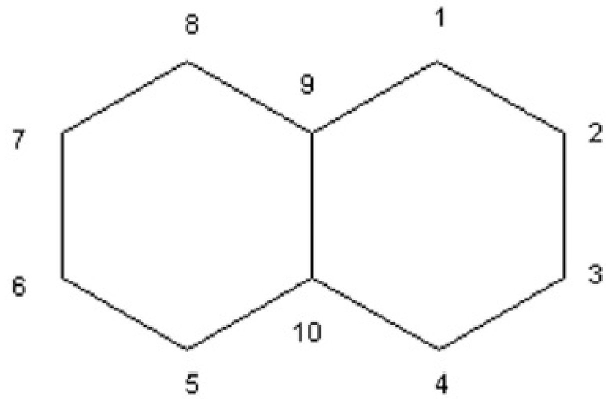


a) Representad matricialmente la información que proporciona el grafo anterior sobre enlaces directos utilizando para ello una matriz $\mathbf{M}$ de ceros y unos, i. e.: el elemento $(\mathbf{M})_{ij}$ será 1 si existe un enlace directo entre la compañía que ocupa la fila i-ésima y la compañía que ocupa la columna j-ésima (con i diferente de j), siendo 0 en caso contrario.

b) Encontrad, usando la matriz $\mathbf{M}$, la matriz $\mathbf{N}$ que representa los enlaces de hasta dos conexiones –i. e.: enlaces directos o de una o dos conexiones–, entre los *web site*. Interpretad la matriz $\mathbf{N}$ resultante.

19. Considerad el grafo asociado a la molécula del naftaleno:

Figura 11. Molécula de naftaleno



a) Representad matricialmente la información que proporciona el grafo anterior utilizando para ello una matriz $\mathbf{M}$ de ceros y unos.

b) Indicad la dimensión de la matriz.

c) Calculad la matriz traspuesta, la inversa y el determinante de la matriz.

d) ¿Qué podéis decir de $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1}$? ¿Y de $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M}$? A partir de lo que halléis, ¿podríais asegurar que el producto de matrices es conmutativo?

Solucionario

Ejemplo introductorio

Recordemos que la tabla o matriz de cambio de estados era:

Tabla 1. Probabilidades de que una red LAN pase del estado X al estado Y

	Hoy (día n)		
Mañana (día $n+1$)	**Estado A**	**Estado B**	**Estado C**
Estado A	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Estado B	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Estado C	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Podemos representar, respectivamente, la matriz de cambio de estados y el vector de estado inicial como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P(A_0) \\ \leftarrow P(B_0) \\ \leftarrow P(C_0) \end{matrix}$$

Usaremos la notación siguiente:

$$\begin{aligned} A_k &= \text{«dentro de } k \text{ días, la LAN estará en estado } A\text{»} \\ B_k &= \text{«dentro de } k \text{ días, la LAN estará en estado } B\text{»} \\ C_k &= \text{«dentro de } k \text{ días, la LAN estará en estado } C\text{»} \end{aligned}$$

Por teoría de la probabilidad (unión de eventos disjunto y probabilidad condicionada), sabemos que:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P([A_0 \cap A_1] \cup [B_0 \cap A_1] \cup [C_0 \cap A_1]) \\ &= P([A_0 \cap A_1]) + P([B_0 \cap A_1]) + P([C_0 \cap A_1]) \\ &= P(A_1|A_0) \cdot P(A_0) + P(A_1|B_0) \cdot P(B_0) + P(A_1|C_0) \cdot P(C_0) \\ &= M_{11} \cdot v_1 + M_{12} \cdot v_2 + M_{13} \cdot v_3 \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= M_{21} \cdot v_1 + M_{22} \cdot v_2 + M_{23} \cdot v_3 \\ P(C_1) &= M_{31} \cdot v_1 + M_{32} \cdot v_2 + M_{33} \cdot v_3 \end{aligned}$$

En otras palabras, si denotamos por X_k al vector que contiene las probabilidades de que la LAN se encuentre en estado A, B o C tras k días, tendremos que:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} P(A_1) \\ P(B_1) \\ P(C_1) \end{pmatrix} = M \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.375 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Es decir: en general, se puede comprobar que: $\mathbf{X}_k = \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{v}$, lo cual nos permite contestar al resto de preguntas del primer bloque:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0.531 \\ 0.266 \\ 0.203 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P(A_2) \\ \leftarrow P(B_2) \\ \leftarrow P(C_2) \end{matrix}$$

$$\mathbf{X}_7 = \mathbf{M}^7 \cdot \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X}_7 = \begin{pmatrix} 0.608 \\ 0.218 \\ 0.174 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P(A_7) \\ \leftarrow P(B_7) \\ \leftarrow P(C_7) \end{matrix}$$

Concluimos, por tanto, que la probabilidad de la LAN esté funcionando correctamente tras uno, dos y siete días es, respectivamente, 0.375, 0.531 y 0.608.

Ejercicios de autoevaluación

1.

a) El conjunto de vectores $\{(-2,3,0),(3,-1,2),(-1,5,2)\}$ son linealmente dependientes, ya que:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, no pueden ser base de $\mathbb{R}^3$.

b) El conjunto de vectores $\{(-1,2,1),(2,4,0),(5,1,1)\}$ son linealmente independientes, ya que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -26 \neq 0$$

Por tanto, dado que son 3 vectores linealmente independientes, constituyen una base de $\mathbb{R}^3$.

2. Resolvemos de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\top}$$

donde $\mathbf{A}_{ij}$ es el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$. Como que $\det(\mathbf{A}) = 6 \neq 0$ existe la matriz inversa.

$\mathbf{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{\top} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. Resolvemos de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-10 & -8+8 & 4-4 \\ 4-4 & -3+2 & 2-2 \\ -8+8 & 8-8 & -3+2 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I}_3$$

4. Para que los vectores sean linealmente independientes, el determinante formado por ellos ha de ser no nulo.

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, su determinante vale: $\det(\mathbf{A}) = 2a - 2 + 4a^2$.

Los valores de a que anulan el determinante anterior son: $a = 1/2$ y $a = -1$. Ello implica que cualquier valor de a distinto a éstos hace que los vectores sean linealmente independientes (y, por tanto, base de $\mathbb{R}^3$ ya que son tres vectores).

5. Primero hemos de comprobar que $\mathbf{A}$ es una matriz regular (invertible). Para ello, calculamos su determinante y comprobamos que no vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

Primero hemos de despejar $\mathbf{X}$ en la expresión matricial anterior, para lo cual debemos multiplicar por $\mathbf{A}^{-1}$ por la derecha ambos miembros de la ecuación, de modo que nos quedará.

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Ahora procedemos a calcular la inversa de $\mathbf{A}$ y el producto $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. La inversa existe si el determinante de la matriz es distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a^2-4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = \pm 2.$$

luego la inversa existirá cuando a sea diferente de $a \neq 0, 2, -2$. Para calcularla, formamos la matriz de los adjuntos

$$\begin{pmatrix} a^2-4 & 2-a & 2-a \\ 0 & a^2 & -2a \\ 0 & -2a & a^2 \end{pmatrix};$$

transponemos

$$\begin{pmatrix} a^2-4 & 0 & 0 \\ 2-a & a^2 & -2a \\ 2-a & -2a & a^2 \end{pmatrix}$$

y dividimos por el determinante de la matriz

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a(2+a)} & \frac{a}{a^2-4} & \frac{-2}{a^2-4} \\ \frac{-1}{a(2+a)} & \frac{-2}{a^2-4} & \frac{a}{a^2-4} \end{pmatrix}.$$

7. La dimensión del subespacio generado es igual al rango de la matriz formada por los vectores dados.

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

y, por tanto, la dimensión del subespacio es 2.

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que los vectores que proporcionan ese menor, $(1,2,0)$ y $(1,0,1)$, son linealmente independientes y por tanto forman una base del subespacio.

Para que $(4,3,k) \in < (1,2,0),(1,0,1) >$, este vector debe ser linealmente dependiente con los vectores de la base del subespacio, esto es, que el determinante sea 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5-2k = 0, \text{y, por tanto, } k = 5/2$$

8.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y, por tanto, los dos conjuntos de vectores son linealmente independientes y por ser $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, concluimos que los dos conjuntos son base de $\mathbb{R}^3$.

Las coordenadas de $\mathbf{v}$ en B son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Y las coordenadas de $\mathbf{v}$ en A son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Los cálculos pueden ser comprobados con software.

b) La matriz del cambio de base de B a A es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, comprobamos los resultados del apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

9.

a) Cierto
b) Cierto
c) Cierto
d) Falso
e) Cierto
f) Cierto

10.

a) En primer lugar, comprobamos que $B_1 \subset W$. Solo hay que comprobar que los dos vectores verifican la ecuación que determina $W : x + y + z = 0$:

$$\begin{aligned} -1 + 0 + 1 &= 0 \Rightarrow (-1, 0, 1) \in W \\ -1 + 3 + (-2) &= 0 \Rightarrow (-1, 3, -2) \in W. \end{aligned}$$

Comprobemos que el rango de la matriz formada por los dos vectores es máximo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

y, efectivamente,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Por tanto, los dos vectores son linealmente independientes.
Además, tenemos que probar que es un sistema generador de W, es decir, que puede

generar cualquier valor del subespacio. Primero, constuimos el sistema reultante de la combinación lineal de los vectores de B_1, con tres ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{aligned}\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y+z=0\}\to (x,y,-x-y) &= \alpha(-1,0,1)+\beta(-1,3,-2)\\ &= (-\alpha-\beta,3\beta,\alpha-2\beta).\end{aligned}$$

Luego, observamos que se trata de un sistema compatible determinado, es decir, existen (α,β) como solución; esta solución será única y distinta para cada vector $(x,y,z)\in W$. Para comprobarlo, calculamos el rango de la matriz de coeficientes, **A**:, y la matriz ampliada del sistema **M**:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\alpha & -\beta\\ 0 & 3\beta\\ \alpha & -2\beta\end{pmatrix}\quad \mathbf{M}=\left(\begin{array}{cc|c}-\alpha & -\beta & x\\ 0 & 3\beta & y\\ \alpha & -2\beta & -x-y\end{array}\right).$$

Por un lado, tenemos que el rango de **A** es 2, ya que podemos encontrar fácilmente un menor de orden 2 distinto de cero; por otro lado, el determinante $\det(\mathbf{M})=0$ y, por tanto, su rango también será 2. En conclusión, $\mathrm{rg}(\mathbf{A})=\mathrm{rg}(\mathbf{M})=n=2$, con lo que el sistema es compatible determinado.

b) En primer lugar comprobaremos que $(2,-1,-1)\in W$, efectivamente:

$$2+(-1)+(-1)=0\Rightarrow(2,-1,-1)\in W.$$

Ahora, el vector **v** en la base que nos piden será de la forma (a,b), que se calcula resolviendo el sistema:

$$(2,-1,-1)=a(-1,0,1)+b(-1,3,-2),$$

que corresponde a este sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{rcl}2 &=& -a-b\\ -1 &=& 3b\\ -1 &=& a-2b\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad a=-\tfrac{5}{3},\ b=-\tfrac{1}{3}\ .$$

Así pues, $\mathbf{v}=\left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$ en esta base.

c) Ahora, el vector **v** en la base dada será también de la forma (a,b) y, resolviendo el sistema correspondiente de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$(2,-1,-1)=a(-1,0,1)+b(0,1,-1),$$

obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl}2 &=& -a\\ -1 &=& b\\ -1 &=& a-b\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad a=-2,\ b=-1\ .$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}=(-2,-1)$ en dicha base.

d) Lo que haremos es poner los vectores de B_1 en combinación lineal de los de B_2; así,

$$\begin{array}{rcl} (-1,0,1) & = & a(-1,0,1)+b(0,1,-1) \quad \Rightarrow \quad a=1 \text{ y } b=0 \\ (-1,3,-2) & = & a(-1,0,1)+b(0,1,-1) \quad \Rightarrow \quad a=1 \text{ y } b=3 \end{array},$$

esto es, que podemos escribir el vector $(-1,0,1)$ como $(1,0)$ y $(-1,3,-2)$ como $(1,3)$ en la base B_2.
Así, la matriz correspondiente al cambio de base de B_1 a B_2 es la matriz que resulta después de escribir los vectores en columna:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

y, efectivamente, si multiplicamos el vector $\mathbf{v}$ escrito en la base B_1 por la matriz $\mathbf{A}$, obtenemos el vector $\mathbf{v}$ escrito en la base B_2:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

11.

a) A partir de la expresión matricial se despeja el vector de producción $\mathbf{X}$, del modo siguiente:

$$\mathbf{X} = \mathbf{CX}+\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{IX}-\mathbf{CX} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{D}$$

y, por tanto, la demanda la podemos obtener a partir de la inversa de la matriz $\mathbf{I}-\mathbf{C}$.
El vector de producción resultante es $x_1 = 225{,}9$, $x_2 = 118{,}5$ y $x_3 = 77{,}8$.

b) Para determinar la demanda que se puede satisfacer a partir de las cantidades producidas basta con multiplicar $(\mathbf{I}-\mathbf{C})\cdot\mathbf{X} = \mathbf{D}$.
Dado que

$$\mathbf{I}-\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 \end{pmatrix},$$

la demanda que se puede satisfacer es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4350 \\ 3480 \\ 1958 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = (\mathbf{I}-\mathbf{C})\cdot\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 391.4 \\ 1370.2 \\ 587.6 \end{pmatrix}.$$

12.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+a+c \\ 1 & c & c+a+b \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

O, también,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & c & a \\ 1 & a & b \\ 1 & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = 0.$$

13.

a) Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k \cdot (2, -1, 4)$ for $k \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones paramétricas: $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + 2k \\ y & = & -k \\ z & = & 3 + 4k \end{array} \right.$ donde $k \in \mathbb{R}$.

Ecuación continua: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$.

b) Para que Q sea un punto de r, sus coordenadas han de satisfacer la ecuación de la recta, *i. e.*,

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{(-3)-3}{4},$$

de donde

$$x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$$

$$y = \frac{3}{2}$$

Así pues, el punto Q será $(-4, \frac{3}{2}, -3)$.

14.

a) Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-(-2) & y-1 & z-1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, la ecuación general del plano será: $3x + y - 4z + 9 = 0$.

b) Para que Q pertenezca al plano, ha de verificar la ecuación del mismo, *i. e.*,

$$3 \cdot (x) + (-3) - 4 \cdot (0) + 9 = 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

Así pues, las coordenadas del punto Q son $(-2, -3, 0)$.

15.

a) La matriz **M** será (entendiendo que cada fila corresponde a las conexiones desde un sitio web origen hacia los sitios web destino, ordenadas por A, B, C, D, E en filas y columnas):

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

b) Ahora, la nueva matriz será:

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

c) Se comprueba que $\mathbf{M}^2 = \mathbf{N}$, esto es, que $\mathbf{M}^2$nos proporciona los enlaces indirectos a través de una conexión (*site*).
Se puede comprobar que $\mathbf{M}^3$ proporciona los enlaces indirectos a través de dos conexiones, $\mathbf{M}^4$ los enlaces indirectos a través de tres conexiones, etc.

d) Calculamos

$$\mathbf{M}+\mathbf{M}^2 = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \end{array}$$

La matriz obtenida representa los enlaces, bien directos o bien a través de una conexión, entre los *web sites*.

16.

a) La matriz buscada puede ser la siguiente (observar que no tiene por qué ser única, ya que puede variar en dimensiones):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 15 & 28 & 28 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta matriz, no resultaría excesivamente complicado (para una persona especialista) obtener el texto original. Por ejemplo, el valor 1 se repite con bastante frecuencia, lo que denota que probablemente se trate de una vocal. Lógicamente, cuanto más largo sea el texto, tanto más fácil será detectar patrones en la secuencia que ayuden a su decodificación.

b) Podemos obtener una codificación bastante más sofisticada si multiplicamos la matriz anterior por otra matriz (la de codificación-decodificación):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 15 & 28 & 28 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \text{secuencia original}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ -8 & -2 & 7 & 3 \\ -7 & -2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \text{matriz de codificación-decodificación}$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 93 & 127 & 102 \\ 2 & 94 & 134 \\ -147 & -188 & -153 \\ 117 & 215 & 200 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \text{secuencia codificada}$$

Resulta evidente que, a menos que se conozca la matriz de codificación-decodificación empleada, no será sencillo descubrir patrones en la secuencia que proporcionen pistas sobre el texto original.

17.

a) Considerando las matrices resultantes de poner los vectores de los conjuntos A y B en columnas, calculamos sus determinantes:

$$\begin{array}{lcll} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix} & = & -20 & \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} & = & -115 & \neq 0 \end{array}.$$

Como vemos que ambos son no nulos, entonces tanto el conjunto A como el conjunto B forman base de $\mathbb{R}^3$.
Para convertir el vector $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ en la base formada por el conjunto A debemos componerlo con la matriz inversa resultante de poner los tres vectores en columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, para escribir el vector $\mathbf{v}$ en la base formada por el conjunto B hacemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{152}{115} \\ \frac{16}{115} \\ \frac{5}{23} \end{pmatrix}$$

b) La matriz de cambio de base de B a A se calcula de este modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{13}{2} & -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 2 & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

Comprobamos que esta matriz nos cambia los componentes del vector $\mathbf{v}$ en la base B a sus componentes en la base A encontradas anteriormente:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{13}{2} & -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 2 & -\frac{11}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{152}{115} \\ \frac{16}{115} \\ \frac{5}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

18.

a) La matriz **M** será (entendiendo que cada fila corresponde a las conexiones desde un lugar web origen hacia los lugares web destino, ordenadas por A, B, C, D, E y F en filas y columnas):

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}$$

b) Según se explica en el ejercicio de autoevaluación 14, la matriz **N** que nos piden será $\mathbf{N} = \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3$, esto es,

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}$$

Los elementos 0 que hay en N significan que no hay enlace directo, ni mediante una conexión ni mediante dos. Los elementos 1 significan que hay un único enlace (el cual será o bien directo, o bien mediante una conexión o bien mediante dos conexiones).

Además, los elementos 2 indican que se puede hacer el enlace de dos formas distintas (i. e., uno con una conexión y el otro con dos, etc.). Hay que observar también que, a pesar de que el grafo inicial presenta pocos enlaces directos, al considerar las conexiones de hasta orden 2 nos percatamos de que casi todas las webs están a una «distancia» de tres clics de ratón.

19.

a), b), c) La dimensión de $\mathbf{M}$ es 10×10:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{M}) = -9$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

d) Tenemos que

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}_{10}$$

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}_{10}$$

El producto de matrices **NO** es conmutativo, a pesar de que en este caso particular del ejercicio sí lo sea.

Glosario

adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada *m* Determinante menor complementario del elemento a_{ij} con el signo $(-1)^{i+j}$ donde i, j son los índices de la fila y la columna que ocupa el elemento.

base de un espacio (o un subespacio) vectorial *f* Conjunto de vectores linealmente independientes, tales que todo vector del espacio (o el subespacio) es combinación lineal de éstos.

base ortogonal *f* Base cuyos vectores, tomados dos a dos, son ortogonales entre sí.

base ortonormal *f* Base ortogonal que, además, está compuesta por vectores unitarios.

determinante *m* Dada una matriz cuadrada, el determinante es un número que se calcula a partir de sus elementos y que proporciona información sobre la independencia lineal de sus filas (y de sus columnas).

dimensión de un espacio (o un subespacio) vectorial *f* Número máximo de vectores linealmente independientes que contiene este espacio y que es igual al número de vectores de cualquier base del espacio (o subespacio).

espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ *m* Conjunto dotado de una operación interna que recibe el nombre de suma y una multiplicación por escalares reales con ciertas propiedades específicas.

generadores de un espacio (o subespacio) vectorial *m* Todo conjunto de vectores tales que todo vector del espacio (o subespacio) se puede poner como combinación lineal del conjunto de generadores.

independencia lineal de vectores *f* Dado un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de vectores, es linealmente independiente si la ecuación $k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_k\mathbf{v}_k = 0$ implica $k_1 = \ldots = k_k = 0$. En caso contrario decimos que son linealmente dependientes.

matriz *f* Tabla de números en forma de n filas y m columnas. Esto será una matriz $n \times m$.

matriz inversa *f* Aquella que presentan las matrices cuadradas que tienen determinante diferente de cero. Su producto con la matriz dada, tanto por la izquierda como por la derecha, es la matriz identidad.

menor *adj* Dada una matriz, se llama menor o determinante menor a cualquier determinante de la matriz cuadrada que se forme con los elementos de la matriz correspondientes a k filas y k columnas, suprimiendo las restantes. Las filas y columnas no deben coincidir necesariamente.

menor complementario *adj* Dada una matriz cuadrada, llamamos menor complementario de un elemento a_{ij}, al determinante menor que se forma suprimiendo la fila i y la columna j.

módulo o norma de un vector *m* Es la longitud de un vector. Se obtiene al calcular la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo.

rango de un conjunto de vectores *m* Número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

subespacio vectorial *m* Subconjunto de un espacio vectorial que tiene estructura de espacio vectorial.

subespacio vectorial generado *m* Dado un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, el subespacio que genera es el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de los vectores del conjunto.

vector *m* Llamamos vectores a los elementos de un espacio vectorial. Los vectores del espacio vectorial numérico n-dimensional ($\mathbb{R}^n$) están formados por una matriz de una sola columna (o una sola fila) de n elementos.

vector unitario *m* Todo vector cuyo módulo sea 1.

vectores ortogonales *m, pl* Dos vectores son ortogonales si su producto escalar vale 0.

Bibliografía

García Cabello, Julia (2006). *Álgebra Lineal. Sus Aplicaciones en Economía, Ingenierías y otras Ciencias.* Delta Publicaciones universitarias. Universitat de Granada

Gutiérrez González, Eduardo; Ochoa García, Sandra (2014). *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Larousse - Grupo Editorial.

Farin, Gerald; Hansford, Dianne (2013). *Practical Linear Algebra.* A K Peters/CRC Press.

Lay, David C.; McDonald, Judi J.; Lay, Steven R. (2011). *Linear algebra and its applications.* Pearson Education Limited.

Liesen, Jörg (2008). *Linear algebra.* Springer.

Martín Ordóñez, Pablo; García Garrosa, Amelia; Getino Fernández, Juan (2012). *Álgebra lineal para ingenieros.* Delta Publicaciones.

Strang, Gilbert (2016). *Introduction to linear algebra.* Cambridge Press.