Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ingeniería

2° Cuatrimestre de 2017

86.09

Procesos estocásticos

Trabajo Práctico n°1

Repetidor Analógico vs Repetidor Digital

Integrantes:	*Padrón:*
Sanchez, Marcelo <marce_chez@msn.com>	87685
Zec, Jeremias <jeremiaszec@gmail.com>	92444
Russo, Nicolas <nicolasrusso291@gmail.com>	93211
Garcias, Ezequiel <garciaezequiel91@gmail.com>	93191

17 de octubre de 2017

Índice

1. Objetivos

En este TP se pretende analizar dos esquemas de comunicación: en uno se utilizan repetidores digitales y en el otro se utilizan repetidores analógicos. (ver Fig. 2.1). En ambos casos se quiere transmitir símbolos que representan 1 bit. Si el bit a enviar es 1, el símbolo asociado es $X_1 = A$; si en cambio se quiere transmitir el bit 0, el símbolo es $X_1 = -A$, donde $A > 0$. Es decir, la información transmitida se puede modelar como una variable aleatoria discreta de soporte $\{A; -A\}$. Asumiremos que ambos símbolos tienen probabilidad $1/2$.

Ambos sistemas de comunicaciones tienen n etapas en cascada, es decir, hay $n-1$ repetidores. En cada etapa, los símbolos se envían a través de un canal de comunicaciones que puede ser modelado por un factor de atenuación h y por la adición de ruido $W_i, i = 1, ..., n$. Asumiremos que la distribución de este ruido es gaussiana de media nula y varianza σ^2 para cada canal, es decir, $W_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, y que los ruidos de distintas etapas son independientes. La diferencia entre ambos repetidores es la manera de procesar el símbolo recibido Y_i.

2. Enunciado

Repetidor digital. En el repetidor digital, el bloque con la letra D toma una decisión acerca del símbolo transmitido y lo retransmite a la etapa siguiente. En la última etapa (receptor), el detector toma la decisión final. La operación matemática del detector D se puede escribir de la siguiente manera:

$$X_{i+1} = \begin{cases} A & \text{si} \quad Y_i \geq 0 \\ -A & \text{si} \quad Y_i < 0 \end{cases} \qquad i = 1, ..., n. \tag{2.1}$$

Repetidor Analógico. En el repetidor analógico, se toma una única decisión y ocurre en el receptor. En las etapas intermedias, los símbolos recibidos son multiplicados por una ganancia para luego retransmitirlos a la siguiente etapa. Los símbolos retransmitidos responden a la siguiente ecuación:

$$X_{i+1} = G_{i+1} Y_i, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.2}$$

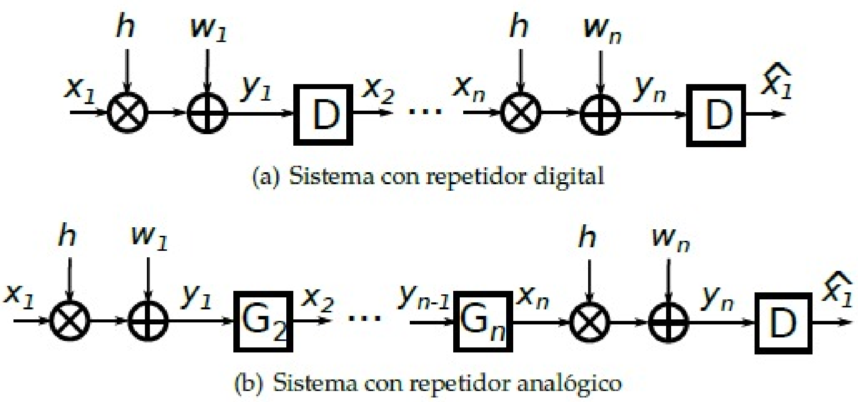

Figura 2.1 – Sistemas de comunicaciones con distintos tipos de repetidores.

La diferencia esencial entre ambos repetidores es que el repetidor analógico amplifica el símbolo de interés y el ruido aditivo de esa etapa y de las anteriores, mientras que el repetidor digital no tiene este efecto porque toma una decisión en cada etapa.

Eventos de error. El evento de error en la transmisión ocurre cuando se transmite un símbolo X1 y en el receptor se detecta un símbolo $\widehat{X_1} \neq X_1$. Es decir, la probabilidad de un error al cabo de las n etapas es:

$$\begin{aligned} P_{e,n} &= P(\widehat{X_1} \neq X_1) && (2.3) \\ &= P_{e|X_1=A} P(X_1 = A) + P_{e|X_1=-A} P(X_1 = -A) && (2.4) \\ &= \frac{1}{2}(P_{e|X_1=A} + P_{e|X_1=-A}) && (2.5) \end{aligned}$$

donde $P_{e|X_1=A} + P_{e|X_1=-A}$ son las probabilidades de error condicionales al símbolo transmitido A y $-A$.

Observar que en el caso de los repetidores digitales puede haber un error en cada uno de los repetidores, y la probabilidad de error completa $P_{e,n}$ dependerá de los posibles errores que pueda haber en cada una de las etapas (incluso podrían cancelarse los errores entre etapas sucesivas). En el repetidor analógico, que solamente amplifica la señal sin tomar ninguna decisión, el error puede ocurrir únicamente en la última etapa.

Relación señal a ruido. La energía promedio de un símbolo, o del ruido se define como la varianza de la variable aleatoria asociada. Es decir, la energía promedio del símbolo transmitido en este caso es:

$$\epsilon_{X_1} = \sigma_{X_1}^2 = A^2 \tag{2.6}$$

La SNR se definirá como el cociente entre la energía de la señal de interés y la varianza del ruido. Por ejemplo, a la entrada del primer repetidor la SNR (en dB) será:

$$SNR_1 = 10 \log_{10} \frac{h^2 A^2}{\sigma^2} [dB]. \tag{2.7}$$

Ejercicio 1 - Cálculo de ganancia de los repetidores analógicos

Asuma que cada repetidor analógico puede transmitir como máximo con una energía promedio ϵ. Determine el valor de A y las ganancias $G_2, ..., G_n$ para satisfacer ese requisito. Exprese las ganancias en función de la relación señal a ruido a la salida de cada repetidor:

$$SNR = \frac{h^2 \epsilon}{\sigma^2} \tag{2.8}$$

Ejercicio 2 - Probabilidad de error del sistema analógico

1. Exprese Y_n en función de X_1, las ganancias y los ruidos $W_1, ..., W_n$. ¿Qué distribución tiene los términos asociados sólo al ruido?

2. Calcule la relación señal a ruido en la última etapa n.

3. Calcule la probabilidad de error promedio en función de la SNR de la última etapa n.

Ejercicio 3 - Probabilidad de error del sistema digital

Para el sistema de comunicaciones digital es posible demostrar la probabilidad de error es:

$$P_{e,n}^{d} = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2Q(\sqrt{SNR}))^n), \tag{2.9}$$

donde Q es la denominada función Q (qfunc en Matlab).

1. Grafique en una misma figura las probabilidades de error del sistema digital y del sistema analógico en función de la SNR, con $SNR \in [5; 30]$ dB (con pasos de 1 dB). Grafique dichas curvas para $n \in [1; 25]$ (con pasos de 4) todas en el mismo gráfico. Utilice escala logarítmica para $P_{e;n}$ y muestre sólo el rango [100; 106] y escala en dB para la SNR.

2. Determine gráficamente para cada n la SNR para la cual ambas probabilidades de error coinciden. ¿Qué sistema elegiría en función de la SNR y de n? Extraiga conclusiones.

3. *[Opcional, por crédito extra]* Demuestre la fórmula de error del repetidor digital. *Sugerencia:* plantee una relación de recurrencia asociada a la probabilidad de error.

Ejercicio 4 - Simulación Monte Carlo de las probabilidades de error

1. Realice un simulación Monte Carlo de ambos sistemas y calcule la probabilidad de error promedio para SNR $\in [5; 25]$ dB y $n = 9$. Grafique las curvas y compare los resultados con los resultados teóricos. Indique la cantidad de realizaciones Monte Carlo utilizadas para conseguir una *buena* estimación.

2. Justifique por qué las curvas de probabilidad de error simuladas en el punto anterior deberían ser muy cercanas ("estar pegadas") a las curvas teóricas vistas anteriormente.

3. Para el sistema analógico, grafique las pdfs de la señal recibida en la última etapa Y_n condicionada al símbolo transmitido $f_{Y_n|X=A} y f_{Y_n|X=-A}$. En el misma figura, grafique las estimaciones de las densidades obtenidas mediante el histograma normalizado. Señale en el gráfico cuáles son los eventos de error para cada símbolo.

3. Desarrollo

3.1. Ejercicios

Ejercicio 1.
Del diagrama de la figura 2.1:

$$X_i = Y_{i-1} \cdot G_i Y_{i-1} = h \cdot X_{i-1} + W_{i-1} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} [Y_{i-1}] &= VAR[h \cdot X_{i-1} + W_{i-1}] \\ &= h^2 \cdot VAR[X_{i-1}] + 2COV[X_{i-1}, W_{i-1}] + VAR[W_{i-1}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por ser X y W independientes $COV[X_{i-1}, W_{i-1}] = 0$. Queda entonces:

$$VAR[Y_{i-1}] = h^2 \cdot A^2 + \sigma_w^2 \tag{3.3}$$

$$VAR[X_i] = VAR[G_i \cdot Y_{i-1}] = G_i^2 \cdot (h^2 \cdot A^2 + \sigma_w^2) \tag{3.4}$$

Se pide que $VAR[X_i] = \epsilon$. Por lo tanto:

$$G_i = \sqrt{\frac{\epsilon}{(h^2 \cdot \epsilon + \sigma_w^2)}} \qquad con\ i = 3, 4....n \tag{3.5}$$

Luego para el repetidor G_2 :

$$G_2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{(h^2 \cdot A^2 + \sigma_w^2)}} \tag{3.6}$$

Eligiendo $G_2 = G_3 = G_4 = ... = G_n$, resulta $A^2 = \epsilon \quad \Longrightarrow \boxed{A = \sqrt{\epsilon}}$

Para expresar las ganancias en función a la relación señal a ruido (SNR). Se parte de la ecuación 3.5:

$$G_i = \sqrt{\frac{\epsilon}{(h^2 \cdot \epsilon + \sigma_w^2)}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\sigma_w^2 \cdot (\frac{h^2 \cdot \epsilon}{\sigma_w^2} + 1)}} \tag{3.7}$$

Reemplazando por la definición SNR (ecuación 2.7).

$$G_i = \sqrt{\frac{SNR}{h^2 \cdot (SNR + 1)}} \tag{3.8}$$

Ejercicio 2.

2.1. Escribimos las señales Y_n en función de los bloques anteriores:

$Y_1 = X_1 h + W_1; \quad X_2 = Y_1 G_2$
$Y_2 = X_2 \cdot h + W_2 = (X_1 \cdot h + W_1) \cdot G_2 \cdot h + W_2$
$Y_2 = X_1 \cdot G_2 \cdot h^2 + W_1 \cdot G_2 \cdot h + W_2$
$Y_3 = (X_1 \cdot G_2 \cdot h^2 + W_1 \cdot G_2 \cdot h + W_2) \cdot G_3 \cdot h + W_3$

$Y_3 = X_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot h^3 + W_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot h^2 + W_2 \cdot G_3 \cdot h + W_3$

$Y_n = X_1 \cdot (\prod_{k=2}^{n} G_k) \cdot h^n + \sum_{i=1}^{n-1}[(W_i \cdot \prod_{j=i+1}^{n} G_j) \cdot h^{n-i}] + W_n$

Como W_i Son iid y definimos $G_2 = G_3 = ... = G_n = G$, resulta:

$Y_n = X_1 \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n + \sum_{i=1}^{n-1}(Gh)^{n-i} \cdot W + W$
$Y_n = X_1 \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n + \sum_{i=1}^{n}(Gh)^{n-i} \cdot W$

$\boxed{Y_n = X_1 \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n + \sum_{i=0}^{n-1}(Gh)^{i} \cdot W}$

Denotando N_i al término dentro de la sumatoria, es la variable aleatoria W escalada por una constante, y se distribuye como:

$N_i \sim \mathcal{N}(0, (Gh)^{2i} \cdot \sigma_W^2)$

Por lo tanto el término asociado al ruido se distribuye como:

$N_n \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=0}^{n-1}(Gh)^{2i} \cdot \sigma_W^2)$

2.2. Calculamos la Varianza de la señal:

$VAR[X_1 \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n] = ((Gh)^{n-1} \cdot h^n)^2 \cdot VAR[X_1] = ((Gh)^{n-1} \cdot h^n)^2 \cdot A^2$
$\epsilon_{senial} = (Gh)^{2(n-1)} \cdot h^{2n} \cdot A^2$

Por definición: $SNR = \frac{\epsilon_{senial}}{\epsilon_{ruido}}$

$$SNR_{Y_n} = \frac{(Gh)^{2(n-1)} \cdot h^{2n} \cdot A^2}{\sigma_W^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(Gh)^{2i}} \tag{3.9}$$

2.3. Suponemos $X = A$. Reescribimos Y_n:

$Y_n = N_n + A \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n$

Por lo tanto $Y_n \sim \mathcal{N}(\mu = A \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n, \sigma^2 = \sigma_W^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(Gh)^{2i}$

La probabilidad de error se calcula como:

$$P_{e|X_1=A} = P(Y_n < 0|X_1 = A) = P(N_n + A \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n < 0)$$

$$P_{e|X_1=A} = P(\frac{-N_n}{\sqrt{VAR[N_n]}} > \frac{A \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n}{\sqrt{VAR[N_n]}}) = Q(\frac{A \cdot (Gh)^{n-1} \cdot h^n}{\sqrt{VAR[N_n]}}) \tag{3.10}$$

Reemplazando la ecuación 3.9 en 3.10, la probalidad de error se puede calcular:

$$P_{e|X_1=A} = Q(\sqrt{SNR_{Y_n}}) \tag{3.11}$$

Por simetría, probabilidad total (Ecuación 2.5) y dado que $P(X_1 = A) = P(X_1 = -A) = 1/2$

$$P^a_{e,n} = Q(\sqrt{SNR_{Y_n}}) \tag{3.12}$$

Ejercicio 3.

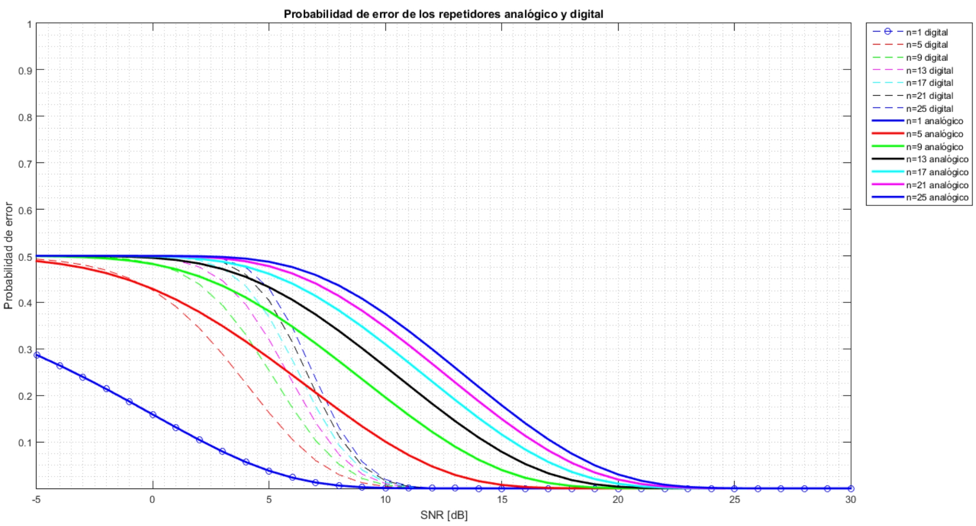

Figura 3.1 – Probabilidad de error de ambos sistemas con diferentes parámetros de SNR y número de etapas (n).

Ejercicio 4.

4.1. Simulación de Montecarlo.

Realizamos una simulación sobre los valores de SNR dentro del intervalo [5, 25] en dB.

Por cada valor del SNR se simula N = 20000 veces para obtener un resultado, luego se lo compara con el valor teórico, los resultados son los siguientes.

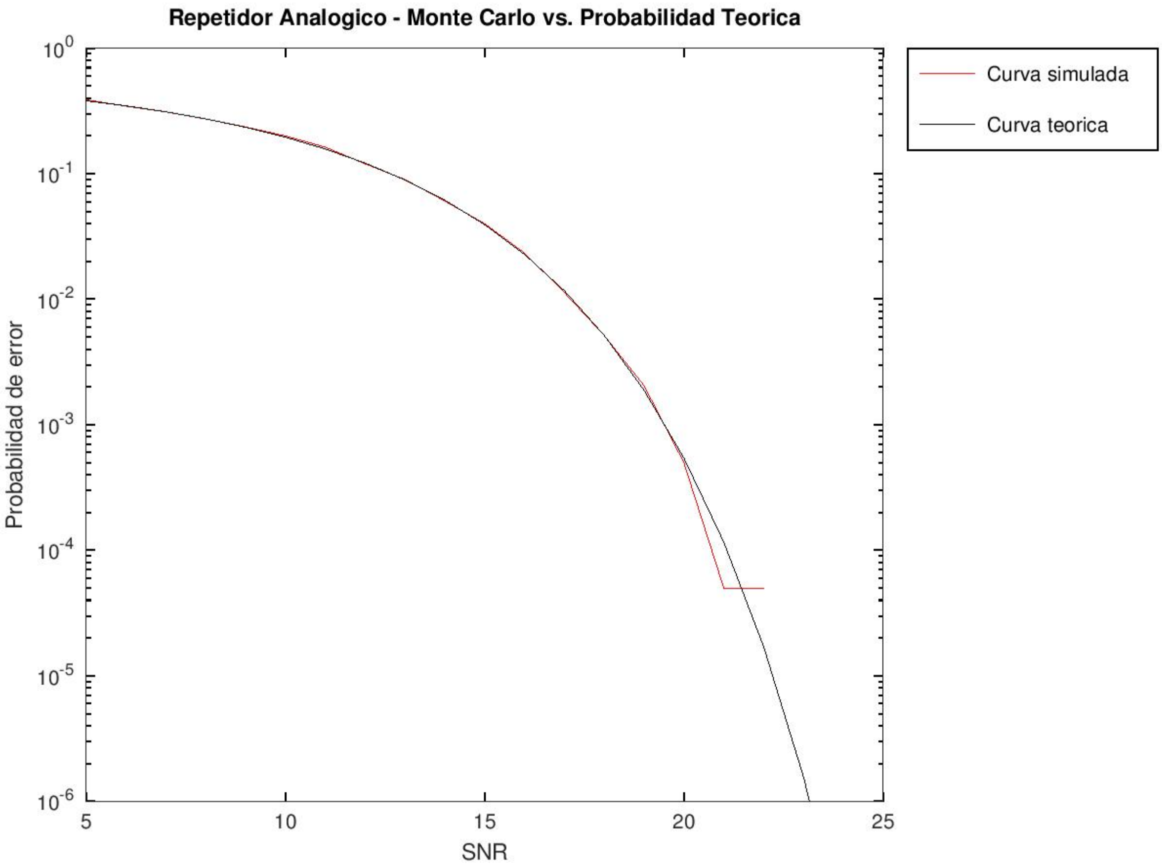

Figura 3.2 – Simulación de MonteCarlo para etapa analógica.

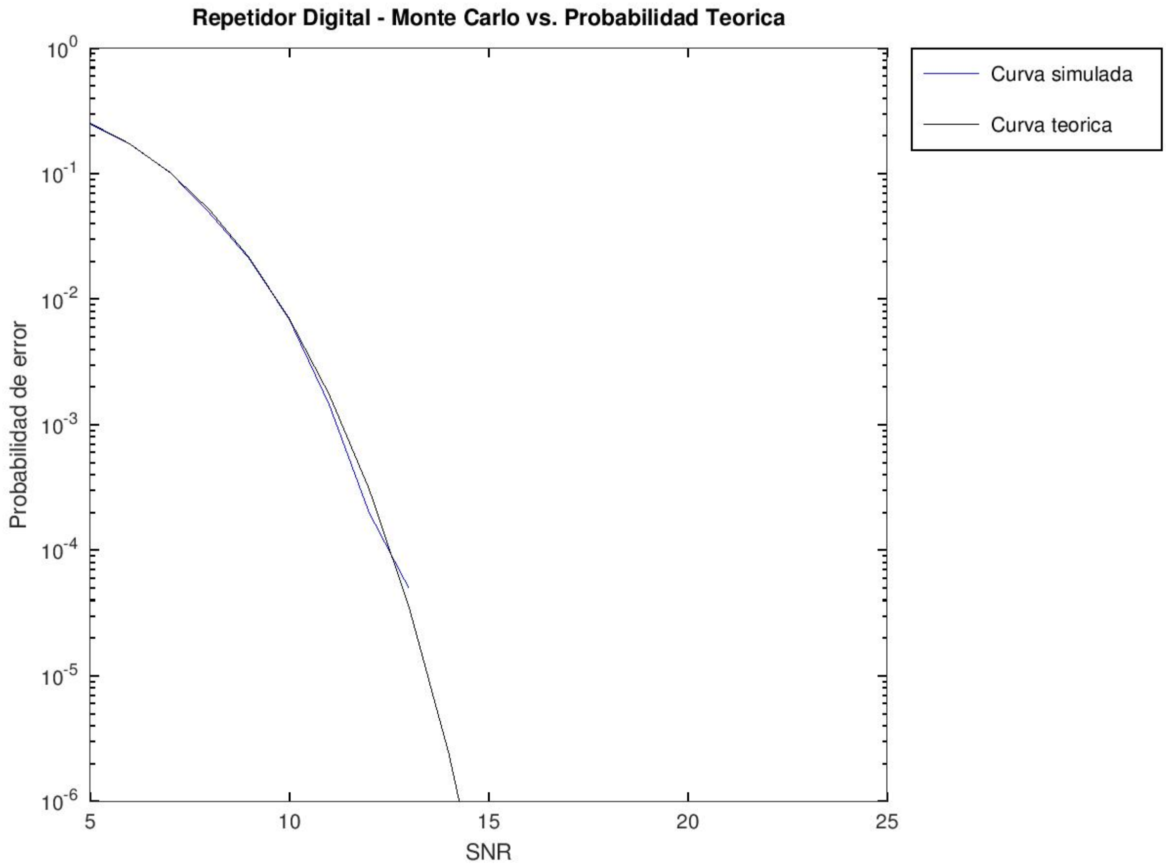

Figura 3.3 – Simulación de MonteCarlo para etapa digital.

4.2. Curvas de probabilidad.

Los resultados confirman al encontrarse tan cercanos unos del otro lo calculado en la parte teórica, debido a la gran cantidad de simulaciones.

4. Conclusiones

Como conclusión podemos decir que es muy sencillo diseñar un sistema de repetidores tanto digital como analógico utilizando la herramienta de calculo correspondiente para poder conocer sus alcances y falencias.

Más importante aún por medio de las simulaciones tenemos información más certera sobre las hipótesis teóricas calculadas previamente.

En particular notamos que a medida que aumenta la relación de señal ruido SNR, mejora más rápido el sistema digital comparado al analógico.

Sin embargo la señal analógica con ruido puede ser interpretada por un ser humano, de modo que la información transmitida puede llegar al receptor aún con ruido. En cambio la señal digital no posee ninguna distorsión sino que su funcionamiento es binario, se interpreta la información transmitida o no.