Control de Manipuladores

Pablo González

FIUBA

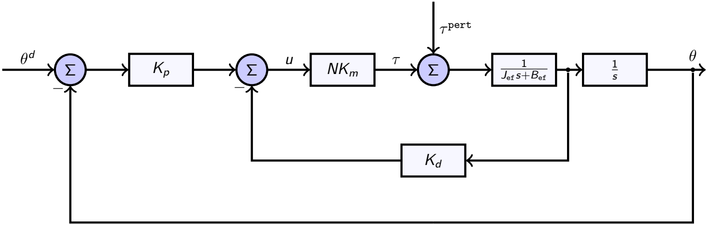
2018

Table of Contents

Control PD

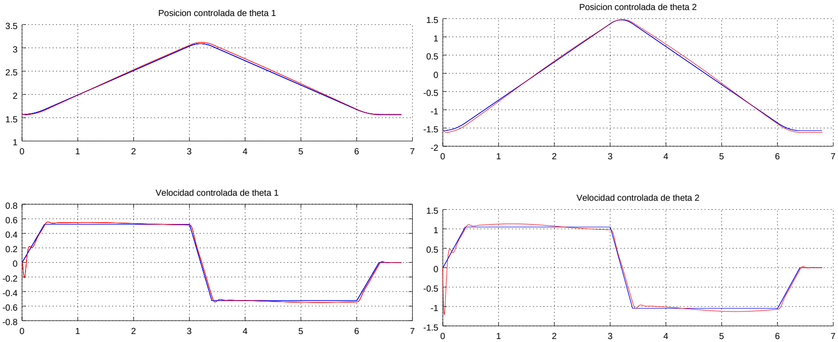
Ley de control (escalar):

$$u = K_p \left(\theta^d - \theta\right) - K_d \dot{\theta} \qquad (1)$$



- N sistema SISO estables de lazo cerrado
- Respuesta críticamente amortiguada
- ω_n limitada por ω_e o t_m
- Seguimiento de referencias tipo escalón
- Seguimiento de perturbaciones escalón !!

Respuesta del control PD sobre la planta real

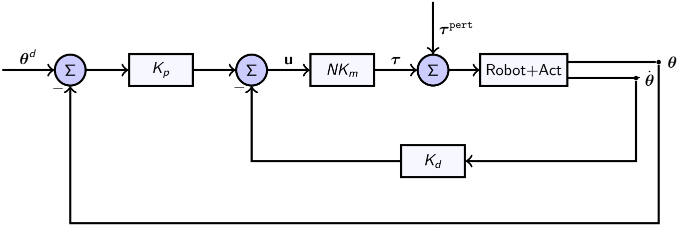


¿Por qué la respuesta no es críticamente amortiguada, siendo que se diseñó con ese criterio?

Control PD sobre la planta real

Ley de control (vectorial):

$$\mathbf{u} = K_p \left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta} \right) - K_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad (2)$$



¿Alcanzan los criterios de estabilidad y las pruebas aplicadas al caso anterior para concluir que este sistema es estable?

Dado un sistema en variables de estado definido por

$$\dot{\mathbf{X}} = f\left(\mathbf{X}, \mathbf{u}, t\right) \tag{3}$$

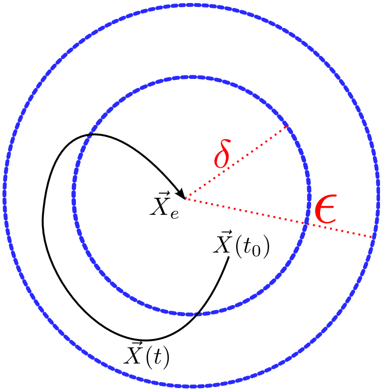
Se define como solución nula o de equilibrio $\mathbf{X}_e$, aquella que cumple:

$$\mathbf{0} = f\left(\mathbf{X}_e, \mathbf{0}, t\right)$$

Esto significa que si el sistema está en el estado $\mathbf{X}_e$, siempre que las entradas sean nulas permanecerá por siempre en él.
Una solución nula es estable si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \diagup \|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_e\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_e\| < \epsilon, \forall t > t_0 \tag{4}$$

Si se apartamos al sistema de una solución nula en $\mathbf{X}(t_0)$ y lo dejamos evolucionar libremente ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$), se encuentra que la trayectoria en el espacio de estados estará limitada y en ningún caso será divergente.



Si $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_e\| = 0$ entonces la solución nula es asintóticamente estable
Si δ tiende a infinito, se dice que la solución nula es global.
Cuando todas las soluciones nulas son estables se está en presencia de un sistema estable.

Prueba de la estabilidad

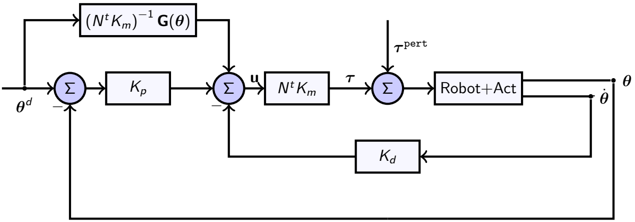
Si encontramos una función de energía generalizada V que depende del estado y demostramos que su derivada es negativa probamos la estabilidad asintótica del sistema. Es decir, **si el sistema siempre pierde energía conforme evoluciona se detiene en algún punto, y por lo tanto no diverge**

Prueba de estabilidad de Lyapunov

Encontrar $V(\mathbf{X})$ que sea:

- definida positiva,
- continua,
- y derivable.

Luego probar que $\dot{V}(\mathbf{X})$ es definida negativa, para asegurar estabilidad asintótica



$$\boldsymbol{\tau} = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + \mathbf{G}(\theta) \tag{5}$$

$$N^t\boldsymbol{\tau}_m = N^tJ_mN\ddot{\theta} + N^tB_mN\dot{\theta} + N^tF_m sign(\dot{\theta}) + \boldsymbol{\tau} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\tau}_m = K_m\mathbf{u}(t) \tag{7}$$

$$\mathbf{u}(t) = K_p\left[\theta^d(t) - \theta(t)\right] - K_d\dot{\theta} + \left(N^tK_m\right)^{-1}\mathbf{G}(\theta) \tag{8}$$

Se puede desestimar el rozamiento seco y de (5), (6) y (7):

$$N^tK_m\mathbf{u}(t) = N^tJ_mN\ddot{\theta} + N^tB_mN\dot{\theta} + M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + \mathbf{G} \tag{9}$$

Función de energía generalizada $V(\mathbf{X})$

Se proponen el vector de estado (10) y la función de energía generalizada (11)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$V(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left(M + N^t J_m N\right) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)^t \left(N^t K_m K_p\right) \left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right) \tag{11}$$

¿Esta definición cumple con las condiciones vistas para $V(\mathbf{X})$?

- definida positiva,
- continua,
- y derivable.

Cálculo de $\dot{V}(\mathbf{X})$

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left(M + N^t J_m N\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)^t \left(N^t K_m K_p\right)\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{X}) = & \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^t \left(M + N^t J_m N\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} \\
& + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \frac{d}{dt}\left(M + N^t J_m N\right)\dot{\boldsymbol{\theta}} \\
& + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left(M + N^t J_m N\right)\ddot{\boldsymbol{\theta}} \\
& + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)^t \left(N^t K_m K_p\right)\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)^t \left(N^t K_m K_p\right)\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)
\end{aligned}$$

Como N y J_m no dependen de t, M y J_m son simétricas y N diagonal:

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + N^t J_m N\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \left(N^t K_m K_p\right)\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)\right] \qquad (12)$$

Cálculo de $\dot{V}(\mathbf{X})$

Despejando $M\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ de (9) y reemplazando en (12)

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[N^t K_m \mathbf{u}(t) - \cancel{N^t J_m N \ddot{\boldsymbol{\theta}}} - N^t B_m N \dot{\boldsymbol{\theta}} - C\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{G} \right]$$
$$+ \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[\cancel{N^t J_m N \ddot{\boldsymbol{\theta}}} + \frac{1}{2}\dot{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \left(N^t K_m K_p\right)\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right) \right]$$

Simplificando y reemplazando la ley de control (8)

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[\cancel{N^t K_m K_p \left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)} - N^t K_m K_d \dot{\boldsymbol{\theta}} + \cancel{\mathbf{G}} - N^t B_m N \dot{\boldsymbol{\theta}} - C\dot{\boldsymbol{\theta}} - \cancel{\mathbf{G}} \right]$$
$$+ \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[\frac{1}{2}\dot{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \cancel{\left(N^t K_m K_p\right)\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right)} \right]$$

Simplificando se tiene:

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[-N^t K_m K_d - N^t B_m N - C + \frac{1}{2}\dot{M} \right] \dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad (13)$$

Prueba de estabilidad

Reemplazando la matriz de Arimoto en (13), y como es antisimétrica se tiene:

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = -\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[N^t K_m K_d + N^t B_m N\right] \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{14}$$

Condición para garantizar estabilidad asintótica

Para que el manipulador con control PD y compensación de peso propio sea estable se tiene que cumplir que la ec. (13) sea menor a 0 cuando $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$. Esto implica que la matriz

$$N^t K_m K_d + N^t B_m N \tag{15}$$

tiene que ser definida positiva

Table of Contents

Linealización exacta

Sea un sistema descripto por:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}, t\right) \tag{16}$$

Supongamos que **f** es la función vectorial del estado que se puede expresar como:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\left(\mathbf{X}, t\right) + G\left(\mathbf{X}, t\right)\boldsymbol{\tau} \tag{17}$$

Entonces se puede proponer una ley de control

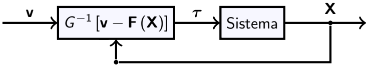
$$\boldsymbol{\tau} = G^{-1}\left(\mathbf{X}, t\right)\left[\mathbf{v} - \mathbf{F}\left(\mathbf{X}, t\right)\right] \tag{18}$$

Reemplazando (18) en (17)

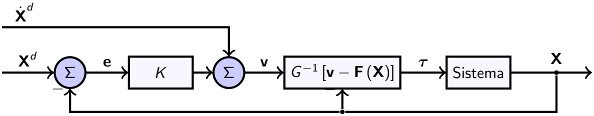
$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{X}} &= \cancel{\mathbf{F}\left(\mathbf{X}, t\right)} + \cancel{G\left(\mathbf{X}, t\right)G^{-1}\left(\mathbf{X}, t\right)}\left[\mathbf{v} - \cancel{\mathbf{F}\left(\mathbf{X}, t\right)}\right] \\
\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Resultando en un sistema lineal y desacoplado

Sobre el sistema con el bloque de linealización



Proponemos un control proporcional



$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}}^d + K\mathbf{e}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}}$$

$$\dot{\mathbf{e}} + K\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Con K diagonal, se tienen n sistemas de primer orden. Son estables si $k_i > 0$

Control por torque computado

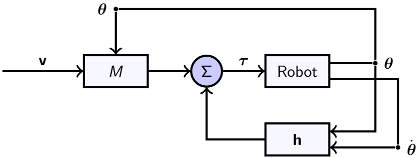
$$\boldsymbol{\tau} = \left[M_{\texttt{rob}} + N^t J_{\texttt{mot}} N\right]\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \left[C_{\texttt{rob}} + N^t B_{\texttt{mot}} N\right]\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}_{\texttt{rob}} + Fr_{\texttt{mot}} N sign(\dot{\boldsymbol{\theta}})$$
$$\boldsymbol{\tau} = M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h}$$

Expresamos el modelo de la planta como una componte lineal en $\boldsymbol{\tau}$ más un término no lineal dependiente del estado

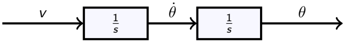
$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = M^{-1}\left[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h}\right]$$
$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -M^{-1}\mathbf{h} + M^{-1}\boldsymbol{\tau}$$
$$\mathbf{F} = -M^{-1}\mathbf{h}$$
$$G = M^{-1}$$

Proponemos el módulo de linealización:

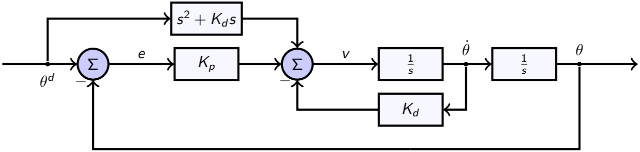
$$\boldsymbol{\tau} = G^{-1}\left[\mathbf{v} - \mathbf{F}\right]$$
$$\boldsymbol{\tau} = M\left[\mathbf{v} + M^{-1}\mathbf{h}\right]$$
$$\boldsymbol{\tau} = M\mathbf{v} + \mathbf{h}$$



Este sistema se ve como n sistemas SISO doble integrador



A la planta linealizada y desacoplada se le aplica un control PD+FF



CONTROL PD+FF+TORQUE COMPUTADO (2)

La ley de control es

$$\mathbf{v} = K_p\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right) - K_d\dot{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + K_d\dot{\boldsymbol{\theta}}^d$$

$$\mathbf{v} = K_p\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right) + K_d\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^d - \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d$$

De la linealización exacta se tiene

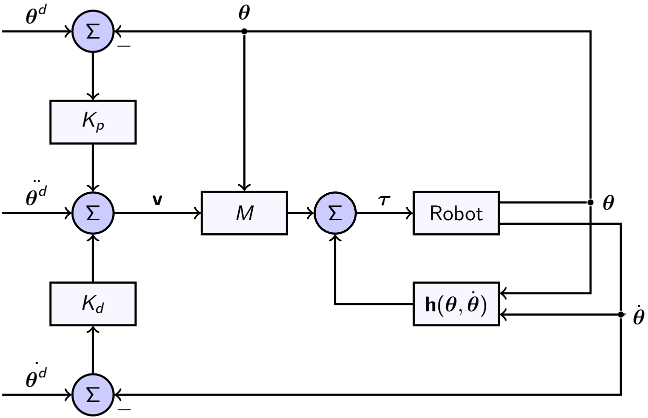
$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = K_p\left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\right) + K_d\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^d - \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d$$

Luego reemplazando la definición del error $\mathbf{e} = \boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}$

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_d\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Si $K_p = diag(\omega_i^2)$ y $K_d = diag(2\omega_i)$, se tienen n sistemas SISO críticamente amortiguados. Además el error de estado estacionario tiende a 0

Robot controlado por torque computado + PD + FF



$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{\theta}) \left[\ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + K_p \left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta} \right) + K_d \left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^d - \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) \right] + \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$$

Table of Contents

Modelo dinámico

Modelo exacto del manipulador y actuadores desconocido por nosotros:

$$\boldsymbol{\tau} = M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h} \tag{19}$$

Lo mejor que podemos expresar es:

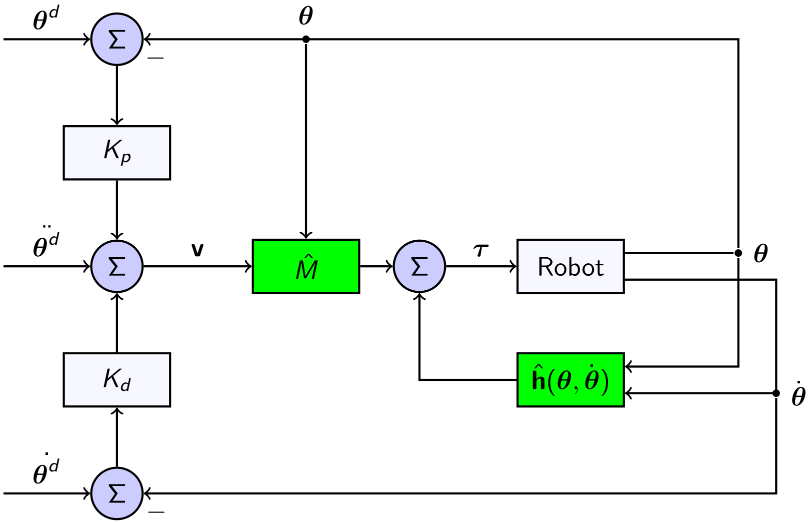
$$\boldsymbol{\tau} = \hat{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{h}}$$

En la estrategia de *Torque Computado* se plantea:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{M}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{h}} \tag{20}$$

Que aplicado al robot (Ec.19 en Ec.20) resulta:

$$M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h} = \hat{M}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{h}} \tag{21}$$



θ^d
Σ
θ
$-$
K_p
$\ddot{\theta}^d$
Σ
$\mathbf{v}$
$\hat{M}$
Σ
τ
Robot
θ
K_d
$\hat{\mathbf{h}}(\theta, \dot{\theta})$
$\dot{\theta}$
$\dot{\theta}^d$
Σ
$-$

De la Ec.21

$$
\begin{aligned}
M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h} &= \hat{M}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{h}} \\
M\ddot{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{M}\mathbf{v} + \left(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}\right) \\
\ddot{\boldsymbol{\theta}} &= M^{-1}\hat{M}\mathbf{v} + M^{-1}\left(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}\right) \\
\ddot{\boldsymbol{\theta}} &= M^{-1}\hat{M}\mathbf{v} + M^{-1}\left(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}\right) + \mathbf{v} - \mathbf{v} \\
\ddot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{v} + \left(M^{-1}\hat{M} - I\right)\mathbf{v} + M^{-1}\left(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente expresamos el vector incerteza como:

$$
\boldsymbol{\eta} = \left(M^{-1}\hat{M} - I\right)\mathbf{v} + M^{-1}\left(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}\right) \tag{22}
$$

El vector $\boldsymbol{\eta}$ depende de:

- el desconocimiento de la planta con los términos $\left(M^{-1}\hat{M} - I\right)$ y $\left(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}\right)$,
- y el error de seguimiento, a través de $\mathbf{v}$.

Dinámica Robot+Torque Computado+PD+FF

La ecuación del robot con el módulo de torque computado al reemplazar la definición de la Ec. 22 queda:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} \tag{23}$$

Aplicamos luego la ley de control para obtener la dinámica del error en función del desconocimiento de la planta. Dada la ley de control PD+FF (Ec. 24)

$$\mathbf{v} = \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + K_d \left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^d - \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) + K_p \left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta} \right) \tag{24}$$

Reemplazando en la dinámica del robot y el módulo de torque computado (Ec. 23)

$$\left(\ddot{\boldsymbol{\theta}}^d - \ddot{\boldsymbol{\theta}} \right) + K_d \left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^d - \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) + K_p \left(\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta} \right) = -\boldsymbol{\eta} \tag{25}$$

El error de seguimiento se define como $\mathbf{e} = \boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}$ y reemplazando en la Ec. 25 se tiene la dinámica del error:

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_d \dot{\mathbf{e}} + K_p \mathbf{e} = -\boldsymbol{\eta} \tag{26}$$

Table of Contents

Opciones de estrategias de control

Si $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ se tiene un sistema de lazo cerrado lineal y desacoplado. Se tienen N sistemas *SISO*, donde la la estabilidad está asegurada pidiendo K_d y K_p positivos.

Como éste no es el caso habitual, se tiene un sistema no lineal *MIMO*. ¿Cómo podemos asegurar que el sistema de la Ec. 26 es estable?

Las estrategias de control que se plantean son:

- Control Robusto. Se diseña el compensador para sumar una componente que garantice la estabilidad. Se modifica el control.
- Control Adaptativo. Se describe el modelo en los parámetros desconocidos y se estiman sus valores durante el movimiento. El control es fijo y se adecuan sus parámetros. La dinámica de la estrategia de actualización de los parámetros debe ser tenida en cuenta en la prueba de estabilidad.

Esquema del Control Adaptativo

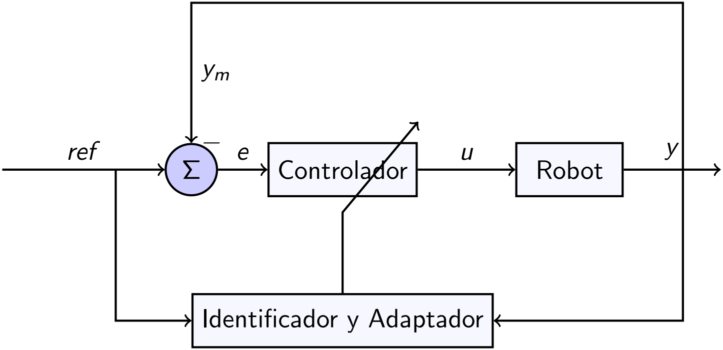


Table of Contents

Modelo Lineal en los Parámetros Dinámicos

Recordando la ec. de la dinámica del robot y el actuador; para el eje s se tiene:

$$N_s \tau_{ms} = \sum_{i=s}^{n} \sum_{j=1}^{s} Tr \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial \theta_s} J_i \frac{\partial A_0^i}{\partial \theta_j}^T \right) \ddot{\theta}_j + \sum_{i=s}^{n} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} Tr \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial \theta_s} J_i \frac{\partial^2 A_0^i}{\partial \theta_j \partial \theta_k}^T \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k$$
$$- \sum_{i=s}^{n} \mathbf{g}^T \frac{\partial A_0^i}{\partial \theta_s} \left(m_i \mathbf{r}_{Gi}^i \right) + N_s^2 J_{ms} \ddot{\theta}_s + N_s^2 B_{ms} \dot{\theta}_s + N_s F_{ms} sign(\dot{\theta}_s)$$

Se destaca la linealidad del modelo con los parámetros. Se puede expresar:

$$\boldsymbol{\tau} = K(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{p} \tag{27}$$

Donde el vector de parámetros **p** se expresa como:

$$\mathbf{p}^T = \left[m_1, m_1 X_{G1}^1, m_1 Y_{G1}^1, m_1 Z_{G1}^1, I_{1xx}, I_{1xy}, I_{1xz}, I_{1yy}, I_{1yz}, I_{1zz}, J_{m1}, B_{m1}, F_{m1}, \ldots \right]$$

Se tienen 13 parámetros por eje. Entonces **p** tiene 6×13 elementos.

Simplificación del Modelo Paramétrico

Algunos de los parámetros dinámicos son bien conocidos. Por lo tanto conviene expresar el modelo paramétrico de la Ec. 27 en función de un grupo de parámetros desconocidos $\mathbf{p}_d$ y otro que agrupe a los conocidos $\mathbf{p}_0$. Así se tiene:

$$\boldsymbol{\tau} = Y\mathbf{p}_d + Y_0\mathbf{p}_0 = Y\mathbf{p}_d + \mathbf{y}_0$$

Reemplazando en la Ec. 20 del módulo de torque computado se tiene

$$\hat{M}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{h}} = Y\mathbf{p}_d + \mathbf{y}_0 \tag{28}$$

Además el conocimiento del modelo aproximado nos permite escribir:

$$\hat{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{h}} = Y\hat{\mathbf{p}}_d + \mathbf{y}_0 \tag{29}$$

Restando las Ecs. 29 y 28 se tiene

$$\hat{M}\left(\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{v}\right) = Y\left(\hat{\mathbf{p}}_d - \mathbf{p}_d\right) \tag{30}$$

$$\left(\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{v}\right) = \left(\hat{M}^{-1}Y\right)\left(\hat{\mathbf{p}}_d - \mathbf{p}_d\right) \tag{31}$$

$$\left(\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{v}\right) = \Phi\left(\hat{\mathbf{p}}_d - \mathbf{p}_d\right) \tag{32}$$

Reemplazando la ley de control (Ec. 24) en la Ec. 32 se tiene

$$\left(\ddot{\boldsymbol{\theta}}^{d}-\ddot{\boldsymbol{\theta}}\right)+K_{d}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^{d}-\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)+K_{p}\left(\boldsymbol{\theta}^{d}-\boldsymbol{\theta}\right)=-\Phi\left(\hat{\mathbf{p}}_{d}-\mathbf{p}_{d}\right) \tag{33}$$

Comparando la Ec. 25 con la Ec. 33 se observa que hemos encontrado la forma de escribir el vector de incertezas en función del error en la estimación de los parámetros desconocidos.

Si definimos el vector de estado $\mathbf{x}^T=[\mathbf{e},\dot{\mathbf{e}}]$, y el error de estimación de los parámetros desconocidos como $\tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{p}_d-\hat{\mathbf{p}}_d$, la Ec. 33 se expresa como:

Dinámica del robot+actuador controlado por torque computado+PD+FF, en función del error de estimación de los parámetros dinámicos

$$\dot{\mathbf{x}}=\left[\begin{array}{c|c}0 & I\\ \hline -K_p & -K_d\end{array}\right]\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\Phi\tilde{\mathbf{p}} \tag{34}$$

Table of Contents

Estabilidad del Sistema de Lazo Cerrado

Se diseña el controlador buscando que se cumpla el criterio de estabilidad de *Lyapunov*. Sean R, P y Q definidas positivas, y además cumplan:

$$A^T P + PA + Q = 0$$

Se propone la función de energía del estado

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{p}}^T R\tilde{\mathbf{p}}$$

Calculando la derivada temporal se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}} + \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T R\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}}^T R\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\
&= (A\mathbf{x} + B\Phi\tilde{\mathbf{p}})^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P(A\mathbf{x} + B\Phi\tilde{\mathbf{p}}) + 2\tilde{\mathbf{p}}^T R\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\
&= \left(\mathbf{x}^T A^T + \tilde{\mathbf{p}}^T \Phi^T B^T\right) P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P(A\mathbf{x} + B\Phi\tilde{\mathbf{p}}) + 2\tilde{\mathbf{p}}^T R\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\
&= \mathbf{x}^T \left(A^T P + PA\right)\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{p}}^T \Phi^T B^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T PB\Phi\tilde{\mathbf{p}} + 2\tilde{\mathbf{p}}^T R\dot{\tilde{\mathbf{p}}}
\end{aligned}$$

Como la matriz de la forma cuadrática del primer sumando resulta ser definida negativa, y queremos que la derivada sea negativa, entonces imponemos:

$$\tilde{\mathbf{p}}^T \Phi^T B^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T PB\Phi\tilde{\mathbf{p}} + 2\tilde{\mathbf{p}}^T R\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0 \tag{35}$$

Estimación de los parámetros

De la Ec. 35 resulta:

$$
\begin{aligned}
2\tilde{\mathbf{p}}^T R\dot{\tilde{\mathbf{p}}} &= -\tilde{\mathbf{p}}^T \Phi^T B^T P\mathbf{x} - \mathbf{x}^T PB\Phi\tilde{\mathbf{p}} \\
2\tilde{\mathbf{p}}^T R\dot{\tilde{\mathbf{p}}} &= -2\tilde{\mathbf{p}}^T \Phi^T B^T P\mathbf{x} \\
R\dot{\tilde{\mathbf{p}}} &= -\Phi^T B^T P\mathbf{x} \\
\dot{\tilde{\mathbf{p}}} &= -R^{-1}\left[\Phi^T B^T P\right]\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Además como $\mathbf{p}$ es constante, resulta $\dot{\hat{\mathbf{p}}}_d = \dot{\tilde{\mathbf{p}}}$. Así se puede proponer las siguientes fórmulas de actualización de la estimación de los parámetros desconocidos:

Formula de estimación y actualización de parámetros

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -R^{-1}\left[\Phi^T B^T P\right]\mathbf{x} \tag{36}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_d[k] = \hat{\mathbf{p}}_d[k-1] + \Delta T\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \tag{37}$$

Diagrama en Bloques Control Adaptativo