

Prueba de Estabilidad de un Robot con un control P+D

Pablo González

Resumen de contenidos

1. Introducción	2
2. Matriz de Arimoto	2
2.1. Teorema de las Fuerzas Vivas	3
3. Criterios de estabilidad	4
3.1. Criterio de estabilidad de Lyapunov	4
3.2. Prueba de estabilidad de Lyapunov	5
4. Prueba de estabilidad para el sistema propuesto	5
4.1. Análisis para $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$	8

1. Introducción

Para un robot cuya dinámica se encuentra descrita por la ec. 1, se demuestra la estabilidad del sistema de lazo cerrado controlado con una estrategia proporcional y derivativa (P+D).

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

Como el componente correspondiente al peso propio del mecanismo $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$ actúa de la misma forma que la fuerza de control $\boldsymbol{\tau}$, se define el torque activo en la ec. 2 como la fuerza de control que produce el movimiento del robot.

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{act}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2)$$

Se considera además la dinámica de la parte mecánica de los actuadores (motores y reducciones) como se expresa en la ec. 3.

$$N^t \boldsymbol{\tau}_m = N^t J_m N \ddot{\boldsymbol{\theta}} + N^t B_m N \dot{\boldsymbol{\theta}} + N^t F_m \text{sign}(\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

Para simplificar el análisis se considera que los motores están controlados por corriente de armadura, cumpliendo con la ec. 4, donde $\mathbf{u}(t)$ es la variable manipulada calculada por el controlador y K_m engloba la constante de torque del motor K_t y la ganancia del accionamiento.

$$\boldsymbol{\tau}_m = K_m \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

La ley de control se especifica en la ec. 5.

$$\mathbf{u}(t) = K_p (\boldsymbol{\theta}^d(t) - \boldsymbol{\theta}(t)) - K_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (5)$$

En la fig. 1 se muestra el diagrama en bloques del sistema de lazo cerrado sobre el que se realiza el estudio de estabilidad.

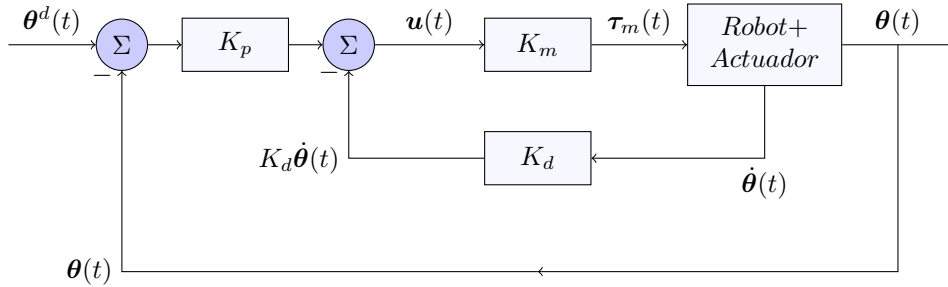


Figura 1: Diagrama en bloques del esquema de control propuesto sobre el robot

2. Matriz de Arimoto

Antes de realizar la prueba de la estabilidad es conveniente introducir la matriz de Arimoto definida en la ec. 6.

$$N_a = \dot{M} - 2C \quad (6)$$

Reemplazando en la definición de N las fórmulas de cálculo de la matriz C y derivando los elementos de la matriz M respecto del tiempo se tiene:

$$\begin{aligned}
n_{sj} &= \frac{dm_{sj}}{dt} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{sj}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial m_{sk}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_s} \right) \dot{\theta}_k \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{sj}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{sj}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial m_{sk}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_s} \right) \dot{\theta}_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{sj}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial m_{sj}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial m_{sk}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_s} \right) \dot{\theta}_k
\end{aligned}$$

Finalmente la expresión de los elementos de la matriz N se muestra en la ec. 7.

$$n_{sj} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\partial m_{sk}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_s} \right) \dot{\theta}_k \quad (7)$$

Se observa que los elementos diagonales son nulos mientras que $n_{sj} = -n_{js}$. Por lo tanto queda demostrada una importante propiedad: la matriz N_a es antisimétrica y cumple con la ec. 8

$$\mathbf{x}^t N_a \mathbf{x} = 0 \quad (8)$$

con \mathbf{x} siendo un vector cualquiera.

2.1. Teorema de las Fuerzas Vivas

El teorema de las fuerzas vivas o activas establece que la variación de la energía cinética está dada por el trabajo de las fuerzas activas, según la ec. 9 considerando incrementos diferenciales.

$$\dot{K} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \boldsymbol{\tau}_a \quad (9)$$

La ec. 9 indica que la potencia de las fuerzas activa es igual a la derivada de la energía cinética.

La definición de energía cinética está dada por la ec. 10.

$$K = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^t M \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (10)$$

Derivando la expresión respecto del tiempo y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= \frac{1}{2} \ddot{\boldsymbol{\theta}}^t M \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \dot{M} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^t M \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\ddot{\boldsymbol{\theta}}^t M \dot{\boldsymbol{\theta}} \right)^t + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \dot{M} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^t M \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^t M \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \dot{M} \dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

Luego sumando y restando $2C$, y aplicando la ec. 8

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= \dot{\theta}^t M \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^t (\dot{M} - 2C + 2C) \dot{\theta} \\
&= \dot{\theta}^t M \ddot{\theta} + \dot{\theta}^t C \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^t (\dot{M} - 2C) \dot{\theta} \\
&= \dot{\theta}^t (M \ddot{\theta} + C \dot{\theta})
\end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación dinámica del sistema (ec. 2) y observando que los torques activos son aquellos que producen movimiento se llega a la demostración del teorema (ec. 9).

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= \dot{\theta}^t (\tau - G) \\
\dot{K} &= \dot{\theta}^t \tau_a
\end{aligned}$$

3. Criterios de estabilidad

En sistemas lineales es habitual tratar con el criterio de estabilidad *BIBO* (bounded input, bounded output). Sin embargo para sistemas no lineales este criterio no lleva a una prueba de estabilidad concluyente y por lo tanto se considera el criterio de Lyapunov junto con su prueba de estabilidad.

3.1. Criterio de estabilidad de Lyapunov

Dado un sistema en variables de estado definido por la ec. 11.

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{u}, t) \quad (11)$$

Se define como solución nula o de equilibrio \mathbf{X}_e , aquella que cumple:

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{X}_e, \mathbf{0}, t)$$

Esto significa que si el sistema está en el estado \mathbf{X}_e , siempre que las entradas sean nulas permanecerá por siempre en él.

Se establece que una solución nula es estable si se cumple la definición 12.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_e\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_e\| < \epsilon, \forall t > t_0 \quad (12)$$

Esta definición significa que si se aparta de una solución nula al sistema y se lo deja evolucionar libremente, se encuentra que la trayectoria en el espacio de estados estará limitada y en ningún caso será divergente.

Si se cumple $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_e\| = 0$ entonces se dice que la solución nula es asintóticamente estable (fig 2). Y si además δ tiende a infinito, se dice que la solución nula es global.

Cuando todas las soluciones nulas son estables se está en presencia de un sistema estable.

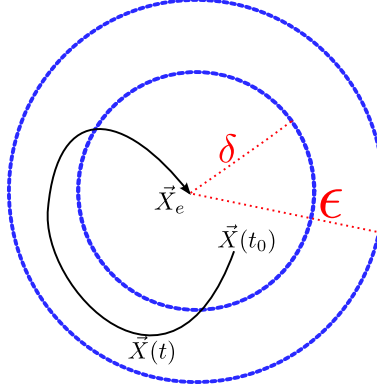


Figura 2: Evolución del estado a partir de un punto inicial $\mathbf{X}(t_0)$. En un sistema asintóticamente estable el estado final tiende a la solución nula \mathbf{X}_e

3.2. Prueba de estabilidad de Lyapunov

La prueba de estabilidad consiste en encontrar una función de energía generalizada y demostrar que su derivada es negativa. Vale decir que si el sistema siempre pierde energía conforme evoluciona se detiene en algún punto, y por lo tanto no diverge.

En términos matemáticos se debe encontrar una función dependiente del estado $V(\mathbf{X})$, que cumpla con las siguientes condiciones para ser considerada una función de energía:

- definida positiva,
- continua,
- y derivable.

Luego su derivada $\dot{V}(\mathbf{X})$ debe ser definida negativa para que el sistema sea asintóticamente estable.

4. Prueba de estabilidad para el sistema propuesto

Para el sistema de lazo cerrado propuesto se considera el vector de estado según se expresa en la ec. 13 y la función de la energía generalizada definida en la ec. 14 dada por una componente de energía cinética y por otra correspondiente a la energía potencial elástica almacenada en un resorte ficticio.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$V(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^t (M + N^t J_m N) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta})^t (N^t K_m K_p) (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}) \quad (14)$$

Partiendo de ésta definición se calcula la derivada de la energía generalizada y luego se encuentran las condiciones que hacen que sea definida negativa. Derivando la ec. 14,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{X}) = & \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^t (M + N^t J_m N) \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \frac{d}{dt} (M + N^t J_m N) \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t (M + N^t J_m N) \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta})^t (N^t K_m K_p) (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}) \\ & + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta})^t (N^t K_m K_p) \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

Observando que cada sumando es un escalar (y entonces al transponer se tiene el mismo resultado), que las matrices M y J_m son simétricas, que J_m y N no dependen del tiempo, y que se considera $\boldsymbol{\theta}^d$ constante se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{X}) = & \dot{\boldsymbol{\theta}}^t (M + N^t J_m N) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \dot{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} \\ & - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t (N^t K_m K_p) (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta})^t (N^t K_m K_p) \dot{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Si se considera que cada motor actúa sólo sobre un eje, es decir (N es diagonal), pueden agruparse los términos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{X}) = & \dot{\boldsymbol{\theta}}^t (M + N^t J_m N) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \dot{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^t (N^t K_m K_p) (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}) \\ = & \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + N^t J_m N\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} - (N^t K_m K_p) (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}) \right]\end{aligned}$$

Si por el contrario, y como es habitual encontrar, un grupo de motores actuaran en forma combinada para mover un eje en particular, la matriz N no sería diagonal. En éste caso es conveniente factorizar la ganancia proporcional en una matriz diagonal y otra correspondiente a la relación de transmisión $K_p = K_p|_{\text{diag}} N$. Luego sobre ésta estructura se puede probar la estabilidad siguiendo el mismo razonamiento.

Despejando la componente debida a la inercia del motor de la ec. 3 y eliminando el rozamiento seco por ser un elemento disipador de energía que siempre contribuye a la estabilidad, se tiene

$$N^t J_m N \ddot{\boldsymbol{\theta}} = N^t \boldsymbol{\tau}_m - N^t B_m N \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau}$$

Reemplazando en la expresión de $\dot{V}(\mathbf{X})$ resulta,

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left[M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + N^t \boldsymbol{\tau}_m - N^t B_m N \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\dot{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} - (N^t K_m K_p) (\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}) \right]$$

Sumando y restando $2C$ se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{X}) &= \dot{\theta}^t \left[M\ddot{\theta} + N^t \tau_m - N^t B_m N \dot{\theta} - \tau + \frac{1}{2} (\dot{M} - 2C + 2C) \dot{\theta} - (N^t K_m K_p) (\theta^d - \theta) \right] \\ &= \dot{\theta}^t \left[M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} - \tau + N^t \tau_m - N^t B_m N \dot{\theta} + \frac{1}{2} (\dot{M} - 2C) \dot{\theta} - (N^t K_m K_p) (\theta^d - \theta) \right]\end{aligned}$$

En la ec. 2 se observa que el efecto de la gravedad puede interpretarse como una perturbación sobre la fuerza de control aplicada a los ejes. Por lo tanto se considera para una primera solución que la fuerza de control en el eje únicamente produce movimiento; es decir que $\tau = \tau_{\text{act}}$ y $\mathbf{G}(\theta) = \mathbf{0}$. Reemplazando τ_{act} en la expresión de $\dot{V}(\mathbf{X})$ y simplificando resulta,

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \dot{\theta}^t \left[N^t \tau_m - N^t B_m N \dot{\theta} + \frac{1}{2} (\dot{M} - 2C) \dot{\theta} - (N^t K_m K_p) (\theta^d - \theta) \right]$$

Luego de la ley de control (ec. 5) y la dinámica del accionamiento (ec. 3) se tiene,

$$\tau_m = K_m K_p (\theta^d - \theta) - K_m K_d \dot{\theta}$$

Reemplazando nuevamente en $\dot{V}(\mathbf{X})$,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{X}) &= \dot{\theta}^t \left[N^t K_m K_p (\theta^d - \theta) - N^t K_m K_d \dot{\theta} - N^t B_m N \dot{\theta} - (N^t K_m K_p) (\theta^d - \theta) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}^t (\dot{M} - 2C) \dot{\theta} \\ &= -\dot{\theta}^t (N^t K_m K_d + N^t B_m N) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^t (\dot{M} - 2C) \dot{\theta}\end{aligned}$$

Aplicando la definición de la matriz de Arimoto (ec. 6) y la propiedad vista en la ec. 8 se llega a la ec. 15.

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = -\dot{\theta}^t (N^t K_m K_d + N^t B_m N) \dot{\theta} \quad (15)$$

Para garantizar la estabilidad es suficiente que la derivada temporal de la función de energía generalizada $V(\mathbf{X})$ sea definida negativa, y por lo tanto la expresión $N^t K_m K_d + N^t B_m N$ tiene que ser definida positiva. Ajustando la ganancia de la parte derivativa para cumplir con ésta condición se asegura la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

Una última observación nos muestra que para el estado definido por

$$\mathbf{X}_{\text{caso0}} = \begin{bmatrix} \theta^d - \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

la derivada de la energía generalizada sería nula. Así, la función $\dot{V}(\mathbf{X})$ no sería definida negativa, pues existiría un estado distinto de cero que produciría un cambio de energía nulo.

Sin embargo este estado implica que $\dot{\theta}$ sea nulo, y por lo tanto que también lo sea $\ddot{\theta}$. Bajo éstas condiciones τ_{act} es también nulo (ec. 2). Luego las ec. 3 y 5 se anulan dando como resultado final que θ^d es igual a θ .

Finalmente el caso se resume a $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, por lo que no invalida la condición de estabilidad hallada.

4.1. Análisis para $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$

Si se considera el efecto de la gravedad, la ec. 15 resulta,

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = -\dot{\boldsymbol{\theta}}^t \left(\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + N^t K_m K_d \dot{\boldsymbol{\theta}} + N^t B_m N \dot{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

Por lo tanto la presencia del término \mathbf{G} significa que el control P+D no puede garantizar por sí solo el seguimiento asintótico del sistema, generando un error de estado estacionario que produce un torque de sostén a través de la ganancia proporcional K_p .

Si nuevamente consideramos a \mathbf{G} como una perturbación, se observa que se podría incluir su efecto en la fuerza de control de manera que la estructura P+D genere el torque necesario para el movimiento y el componente adicional de la fuerza de control contrareste el efecto del peso propio. En este caso tendríamos un seguimiento asintótico con un control P+D modificado y la prueba de estabilidad sería tal como la desarrollada en la sección anterior.