平衡控制器

① 动力学模型

简化单刚体动力学模型（单刚体指四足与机身之间的动力学关系）

$$\begin{bmatrix} I & I & I & I \\ [P_{g0}]_\times & [P_{g1}]_\times & [P_{g2}]_\times & [P_{g3}]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{0s} \\ f_{1s} \\ f_{2s} \\ f_{3s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\dot{v}_s - g) \\ R_{sb} I_b R_{sb}^T \dot{w}_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & c \\ 0 & R_{sb} I_b R_{sb}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s - g \\ \dot{w}_s \end{bmatrix}$$

其中 $R_{sb} I_b R_{sb}^T = I_s$（世界坐标系下的惯性张量）

P_{gi} => 从机器人重心到足端i的向量在世界坐标系下的坐标、

$P_{gi} = R_{sb}\{\overrightarrow{P_b P_{(i-1)}}\}_b - R_{sb}\{\overrightarrow{P_b P_g}\}_b$

② MPC控制器

宇树教程中平衡控制器通过QP求解动力学方程的解析解

而更进一步可以使用MPC进行控制

由于上述单刚体动力学模型为线性模型，因此可以使用最基本的线性MPC

首先写出状态空间方程

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & R_{sb} I_b R_{sb}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & I & I & I \\ [P_{g0}]_\times & [P_{g1}]_\times & [P_{g2}]_\times & [P_{g3}]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

然后定义最优控制问题（y为期望状态）参考自Dr.CAN《控制之美》

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} [\underbrace{(x-y)_i^T Q (x-y)_i}_{\text{状态代价}} + \underbrace{u_i^T R u_i}_{\text{输入代价}}] + \underbrace{(x-y)_N^T F (x-y)_N}_{\text{末端补偿}}$$

更进一步，希望两个周期间输出差距不太大、

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} [(x-y)_i^T G (x-y)_i + u_i^T R u_i + \underbrace{(u_i - u_{i-1})^T W (u_i - u_{i-1})}_{\text{输入变化代价}}] + (x-y)_N^T F (x-y)_N$$

$$= (X_k - Y)^T \bar{Q} (X_k - Y) + U_k^T (\bar{R} + \bar{W}) U_k + U_{k-1}^T \bar{W} U_{k-1} - 2 U_{k-1}^T \bar{W} U_k$$

其中 $X_k = M x_k + C U_k$

$$\Rightarrow (x_k^T M^T - Y) \bar{Q} C U_k + U_k^T C^T \bar{Q} (M x_k - Y) + U_k^T (C^T \bar{Q} C + \bar{R} + \bar{W}) U_k - 2 U_{k-1}^T \bar{W} U_k$$

$$\Rightarrow [2 C^T \bar{Q} (M x_k - Y) - 2 U_{k-1}^T \bar{W}] U_k + U_k^T (C^T \bar{G} C + \bar{R} + \bar{W}) U_k$$

最终可从代价函数中分解出二次规划问题的一般形式 $J = \frac{1}{2} x^T H x + x^T g(w_0)$（qpOASES）

③ 约束问题

对比 MIT 使用的约束以及宇树教程的约束，认为宇树教程更合理。

假设地面与机器人足端间无滑动，足端也没有腾空，则

$$\begin{cases} -\mu F_z < F_x < \mu F_z \\ -\mu F_z < F_y < \mu F_z \\ 0 < F_z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{is} \geq 0$$

当足端需要执行步态而腾空时，变为等式约束 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{is} = 0$.