

# 平衡控制器

## ① 动力学模型

简化单刚体动力学模型 (单刚体指四足与机身之间的动力学关系)

$$\begin{bmatrix} \bar{I} & \bar{I} & \bar{I} & \bar{I} \\ [P_{g0}]_x & [P_{g1}]_x & [P_{g2}]_x & [P_{g3}]_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{0s} \\ f_{1s} \\ f_{2s} \\ f_{3s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\ddot{v}_s - g) \\ R_{sb}\bar{I}_bR_{sb}^T\ddot{w}_s \end{bmatrix} \quad \text{其中 } R_{sb}\bar{I}_bR_{sb}^T = \bar{I}_s \text{ (世界坐标系下的惯性张量)}$$

$p_{gi} \Rightarrow$  从机器人重心到足端  $i$  的向量在世界坐标系下的坐标.

$$p_{gi} = R_{sb} \{ \overrightarrow{p_b p_{i-1}} \}_b - R_{sb} \{ \overrightarrow{p_b p_g} \}_b$$

## ② MPC 控制器

宇树教程中平衡控制器通过QP求解动力学方程的解析解

而更进一步可以使用MPC进行控制

由于上述单刚体动力学模型为线性模型, 因此可以使用最基本的线性MPC

首先写出状态空间方程

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{I} & \bar{I} & \bar{I} & \bar{I} \\ [P_{g0}]_x & [P_{g1}]_x & [P_{g2}]_x & [P_{g3}]_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

然后定义最优控制问题 ( $y$  为期望状态) 参考自 Dr. CAN <<控制之美>>.

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{[(x-y)_i]^T Q (x-y)_i}_{\text{状态代价}} + \underbrace{u_i^T R u_i}_{\text{输入代价}} + \underbrace{(x-y)_N^T F (x-y)_N}_{\text{末端补偿}}$$

更进一步, 希望两个周期间输出差距不太大

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} [(x-y)_i]^T Q (x-y)_i + u_i^T R u_i + \underbrace{(u_i - u_{i-1})^T W (u_i - u_{i-1})}_{\text{输入变化代价}} + (x-y)_N^T F (x-y)_N$$

$$= (x_k - y)^T \bar{Q} (x_k - y) + u_k^T (\bar{R} + \bar{W}) u_k + u_{k-1}^T \bar{W} u_{k-1} - 2 u_{k-1}^T \bar{W} u_k$$

$$\text{其中 } x_k = m x_k + C u_k$$

$$\Rightarrow (x_k^T m^T - y)^T \bar{Q} (C u_k + u_k^T C^T \bar{Q} (m x_k - y) + u_k^T (C^T \bar{Q} C + \bar{R} + \bar{W}) u_k - 2 u_{k-1}^T \bar{W} u_k$$

$$\Rightarrow [2 C^T \bar{Q} (m x_k - y) - 2 u_{k-1}^T \bar{W}] u_k + u_k^T (C^T \bar{Q} C + \bar{R} + \bar{W}) u_k$$

最终可从代价函数中分解出二次规划问题的一般形式  $J = \frac{1}{2} x^T H x + x^T g (w_0)$  (qpOASES)

## ③ 约束问题

对比 MIT 使用的约束以及宇树教程的约束, 认为宇树教程更合理.

假设地面与机器人足端间无滑动力, 足端也没有腾空. 则

$$\begin{cases} -\mu F_z < F_x < \mu F_z \\ -\mu F_z < F_y < \mu F_z \\ 0 < F_z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{is} \geq 0$$

当足端需要执行步态而腾空时, 变为等式约束  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{is} = 0$ .