

# 轮 趣 科 技

## 基于车把转向控制的自平衡无人自行车

推荐关注我们的公众号获取更新资料



版本说明:

版本	日期	内容说明
V1.0	2022/06/23	第一次发布

网址: [www.wheeltec.net](http://www.wheeltec.net)

# 目 录

1. 动力学模型 .....	3
2. 设计控制器 .....	7
2.1 LQR 控制器 .....	7
2.2 PID 控制器 .....	11
3. 参考文献 .....	12
4. 附录 .....	13
4.1 关于转向结构 .....	13
4.2 关于系统框图 .....	13

# 1. 动力学模型

无人自行车作为一种无人驾驶的双轮智能交通工具，具有运动灵活、能源利用率高、绿色环保等特点，使得其在安保巡逻、躲避交通拥堵等领域具有独特的优势和应用前景。但是，另一方面，它是静态不稳定、动态可稳定的典型代表。简言之，就是在不施加任何控制的情况下，自行车不能持续维持平衡的状态。为此，本文在建立自行车的动力学模型的基础上，设计控制器使得自行车持续维持平衡的状态。

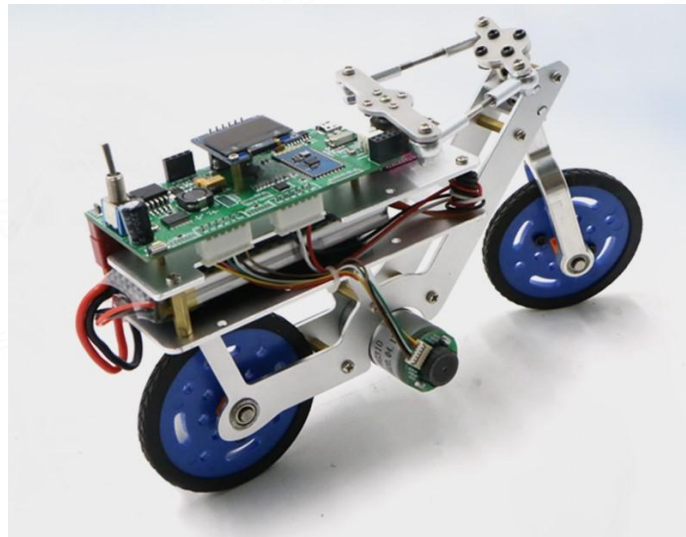


图 1-1 自平衡无人自行车的实物图

为了易于分析，不妨对自行车模型进行简化。假设自行车在水平面上运动，认为前叉转轴与地面垂直。简化后的模型如图 1-2 所示。

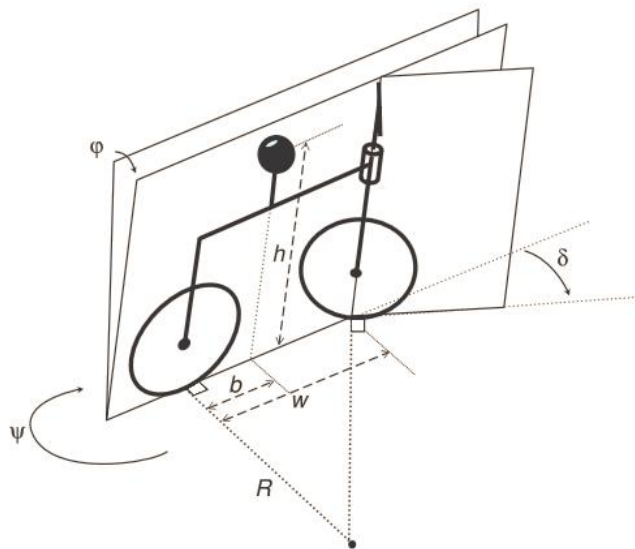


图 1-2 自行车模型<sup>[1]</sup>

设车体的质量为 $m$ ，质心高度为 $h$ ，车体的倾角为 $\varphi$ ，前叉转角为 $\delta$ ，前后轮与地面接触点之间的距离为 $w$ ，其中，后轮的着地点与重心在地面上的投影间的距离为 $b$ 。建立如下图所示的随动坐标系( $O - XYZ$ )。

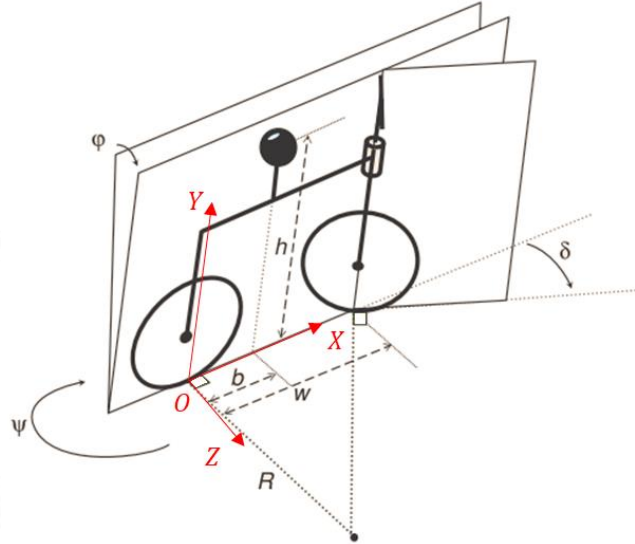


图 1-3 随动坐标系的建立

由于前叉转角 $\delta$ 比较小，可以认为质心运动的转弯半径近似等于后轮至圆心的距离 $R$ 。满足如下关系：

$$\delta = \tan \delta = \frac{w}{R} \quad (1)$$

即

$$w = R\delta \quad (2)$$

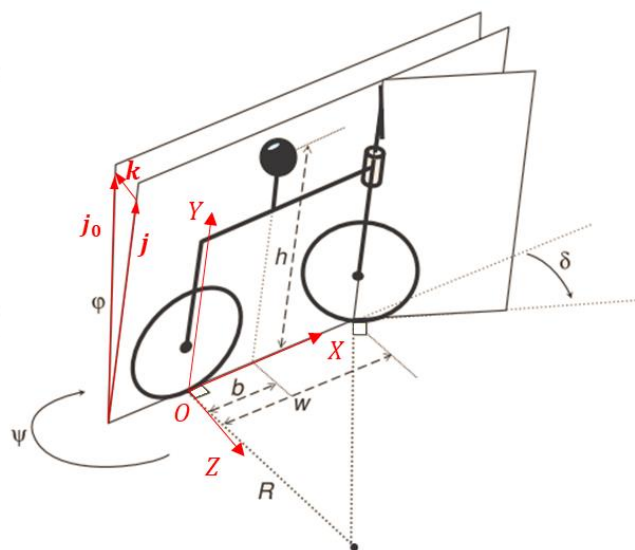


图 1-4 垂直轴的基矢量与各轴的基矢量之间的关系

设坐标系各轴的基矢量（这里用蓝色加粗字体表示向量）分别为 $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ，则质心的

位置（相对于随动坐标系的原点  $O$ ，即后轮的着地点）可以表示为  $\mathbf{r} = b\mathbf{i} + h\mathbf{j}$ 。车体的角速度由绕水平轴（ $X$  轴）转动的角速度和绕垂直轴（不是  $Y$  轴）转动的角速度两部分组成，其中，绕水平轴转动的角速度大小为  $\dot{\varphi}$ ，绕垂直轴转动的角速度大小为  $\dot{\psi}$ 。（图 1-3 反映了垂直轴的基矢量  $\mathbf{j}_0$  是如何用各轴的基矢量来表示的。这里做一个简单的说明， $\mathbf{j}_0 = \cos \varphi \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{k}$ ，又因为车体的倾角  $\varphi$  比较小，则  $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \varphi \mathbf{k}$ 。事实上，类比圆周运动， $\mathbf{j}_0$  是由  $\mathbf{j}$  旋转角度  $\varphi$  获得的， $\mathbf{j}_0 - \mathbf{j}$  是位移。很显然，当  $\varphi \rightarrow 0$  的时候，位移的方向（或者说速度的方向）就是该点的切线方向，也就是  $-\mathbf{k}$ ，大小和弧长接近，也就是  $\varphi$ 。故  $\mathbf{j}_0 - \mathbf{j} = -\varphi \mathbf{k}$ ，即  $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \varphi \mathbf{k}$ ）那么，有

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{i} - \dot{\psi} (\mathbf{j} - \varphi \mathbf{k}) \quad (3)$$

其中

$$\dot{\psi} = \frac{v}{R} \quad (4)$$

则质心相对于随动坐标系的原点  $O$  的速度为

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -h\dot{\psi}\varphi \mathbf{i} + b\dot{\psi}\varphi \mathbf{j} + (h\dot{\varphi} + b\dot{\psi}) \mathbf{k} \quad (5)$$

由此可获得质心实际的速度为

$$\dot{\mathbf{r}} = v\mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (v - h\dot{\psi}\varphi) \mathbf{i} + b\dot{\psi}\varphi \mathbf{j} + (h\dot{\varphi} + b\dot{\psi}) \mathbf{k} \quad (6)$$

由式(2)和式(4)可知

$$\dot{\psi} = \frac{v}{w} \delta \quad (7)$$

又因为  $\delta \rightarrow 0$ ，所以  $\dot{\psi} \rightarrow 0$ 。

故（计算中只考虑一阶小量）

$$\dot{\mathbf{r}} = v\mathbf{i} + (h\dot{\varphi} + b\dot{\psi}) \mathbf{k} \quad (8)$$

考虑到自行车以恒定速率  $v$  在水平面上运动，则有如下约束

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i} = 0 \\ \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由式(8)和式(9)可得，自行车的加速度为（随动坐标系中的基矢量不是常矢量）

$$\ddot{\mathbf{r}} = (h\ddot{\varphi} + b\ddot{\psi} + v\dot{\psi}) \mathbf{k} \quad (10)$$

假定自行车的质量全部集中在质心上，则可列写车体在重力和包括离心力在内的

惯性力的作用下对 X 轴的动量矩定理<sup>[2]</sup>

$$[\mathbf{r} \times (m\mathbf{g} - m\dot{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (11)$$

联立式(7)和式(11)可得车体绕水平轴转动的动力学方程为

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{h}\varphi - \frac{v^2}{hw}\delta - \frac{bv}{hw}\dot{\delta} \quad (12)$$

故系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{h} & 0 & -\frac{v^2}{hw} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{bv}{hw} \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\delta} \quad (13)$$

另一方面，系统的输出方程为

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \delta \end{pmatrix} \quad (14)$$

式(13)和式(14)即为系统的状态空间表达式。



## 2. 设计控制器

### 2.1 LQR 控制器

LQR(Linear Quadratic Regulator), 即线性二次型调节器。LQR 可得到状态线性反馈的最优控制规律, 易于构成闭环最优控制。LQR 最优控制利用廉价成本可以使原系统达到较好的性能指标且易于实现, 是现代控制理论中发展较为成熟的一部分。下面对其原理做一个简单的概述后将其应用于无人自行车的平衡过程中。

设连续线性时不变系统 (假设系统完全能控) 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (15)$$

在现代控制理论中, 最基本的控制系统就是全状态反馈控制系统 (系统框图如图 2-1 所示), 其目标是设计一个状态反馈控制器  $u = -Kx$  来控制系统的表现。

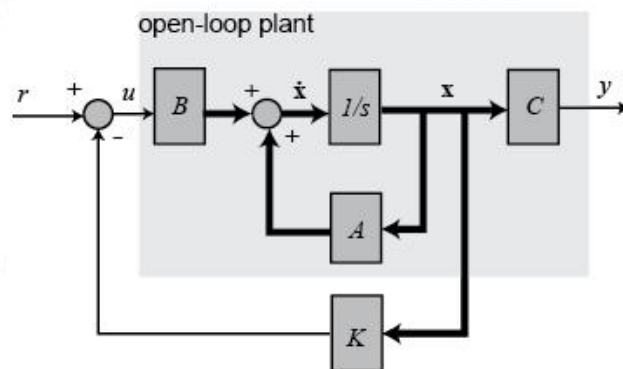


图 2-1 全状态反馈控制系统

现在的问题是这样的  $K$  不是唯一的, 那么, 怎么样的  $K$  才是最优的呢? 在引入代价函数之前, 先来看这样的问题 (来自于 MATLAB 官方教程): 假设你在寻找从家里到公司的最佳方式, 并且有多种交通方式可以选择, 你可以开车、骑自行车、坐公交车以及租直升飞机。那么, 哪种交通方式是你最佳的选择? 这个问题本身没有答案, 因为我们不知道什么是“最佳”。假设现在只考虑时间成本和金钱成本, 将 4 种交通方式的信息填入如下的表格。

表 2-1

Transportation	Time / min	Money / \$
Car	20	45
Bike	75	0

Bus	30	12
Helicopter	4	2578

可以看到，如果时间成本是我们最关注的，那么显然租直升飞机是最佳的选择。反之，如果我们更关注金钱成本，那么骑自行车将是最佳的选择。当然，在现实生活中，人们往往会追求两者的平衡。比如：今天你有个早会，你理所当然会关注时间成本，但另一方面，你也没有足够富裕，因此也要关注金钱成本。这样的话，如何进行选择呢？这里有个简单的量化评估方法，可以建立这样一个评价函数  $J = Q \cdot \text{Time} + R \cdot \text{Money}$ ，根据个人的需要设置不同的权重。如果权重设置如表 2-2 所示，那么，最优选择为开车去上班。如果权重设置如表 2-3 所示，那么，最优选择为坐公交车去上班。

表 2-2

Transportation	Q	Time / min	R	Money / \$	J(Cost)
Car	10	20	1	45	245
Bike	10	75	1	0	750
Bus	10	30	1	12	312
Helicopter	10	4	1	2578	2618

表 2-3

Transportation	Q	Time / min	R	Money / \$	J(Cost)
Car	5	20	5	45	325
Bike	5	75	5	0	375
Bus	5	30	5	12	210
Helicopter	5	4	5	2578	12910

类似的，对于控制系统，我们引入代价函数(Quadratic Cost Function)

$$J = \int_0^{+\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (16)$$

式中， $Q$ 为半正定的状态加权矩阵， $R$ 为正定的控制加权矩阵。在工程实际中， $Q$ 和 $R$ 是对称矩阵且常取对角阵。 $Q$ 中对角线上的元素 $q_i$ 表示对相应误差分量 $x_i$ （最终的目标是让每一个状态变量的值都变为0，所以每一个状态变量的值又称为误差值）的重视程度，越被重视的误差分量，希望它越快的变小，相应地，其权重系数就取得越大。类似的， $R$ 中对角线上的元素 $r_i$ 表示对相应输入分量 $u_i$ 的限制，让其不要太大。LQR 控制器的设计思路就是设计一个状态反馈控制器  $u = -Kx$ ，使得代价函数最小 $\min J$ ，从而达到利用廉价成本使原系统达到较好的性能指标的目的。至于状态反馈矩阵 $K$ 怎么计算，这里只给出相应结论：



$$K = R^{-1}B^TP \quad (17)$$

其中,  $P$  是 **Riccati** 方程  $A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$  的解。

类似的, 对于离散线性时不变系统 (假设系统完全能控), 设其状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (18)$$

二次型性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{+\infty} [X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k)] \quad (19)$$

式中,  $Q$  为对称正定的常数阵或对称半正定的常数阵,  $R$  为对称正定的常数阵。

现在的问题是设计一个状态反馈控制器  $U(k) = -LX(k)$ , 使得  $J$  最小。和上面一样, 这里只给出相应结论:

$$L = (R + B^TPB)^{-1}B^TPA \quad (20)$$

其中,  $P$  是 **Riccati** 方程  $Q - P + A^TPA - A^TPB(R + B^TPB)^{-1}B^TPA = 0$  的解。

有了上述对 LQR 控制器定性的说明后, 接下来以自行车的平衡过程为实例说明 LQR 控制器的设计。由自行车的动力学模型可知, 系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{h} & 0 & -\frac{v^2}{hw} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{bv}{hw} \\ 1 \end{pmatrix} \delta \quad (13)$$

输出方程为

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi \\ \delta \end{pmatrix} \quad (14)$$

通常情况下, 我们并不会手算状态反馈矩阵, 而是借用 MATLAB 的相关函数进行计算, 相关程序如下所示:

```
clc
g = 9.8; % 重力加速度
h = 0.088; % 自行车质心的高度
v = 0.634; % 自行车的行驶速度
w = 0.167; % 前后轮与地面接触点之间的距离
b = 0.055; % 后轮的着地点与重心在地面上的投影间的距离
A_21 = g/h;
A_23 = -v^2/(w*h);
B_21 = -(b*v)/(w*h);
A = [0 1 0; A_21 0 A_23; 0 0 0];
B = [0; B_21; 1];
C = [1 0 0; 0 0 1];
```

```

D = 0;
Ts = 0.020; % 采样间隔
t = 0:Ts:4;
u = zeros(size(t));
[G,H] = c2d(A,B,Ts); % 将连续系统变为离散系统
x0 = [0.0873; 0; 0]; % 设定系统的初始状态
Tc = ctrb(G,H);
if (rank(Tc)==3)
    fprintf('此系统是可控的! \n');
    Q = [300 0 0; 0 0 0; 0 0 300]; % Q 矩阵
    R = 1; % R 矩阵
    K = dlqr(G,H,Q,R); % 计算状态反馈系数 (自行查看计算后的数值)
    G2 = G-H*K;
    y = dlsim(G2,H,C,D,u,x0);
    subplot(2,1,1)
    plot(t,y(:,1),'b.-','LineWidth',1.5);
    xlabel('Time(s)');
    ylabel('\phi(rad)');
    grid on
    subplot(2,1,2)
    plot(t,y(:,2),'b.-','LineWidth',1.5);
    xlabel('Time(s)');
    ylabel('\delta(rad)');
    grid on
end

```

运行后的结果如下所示:

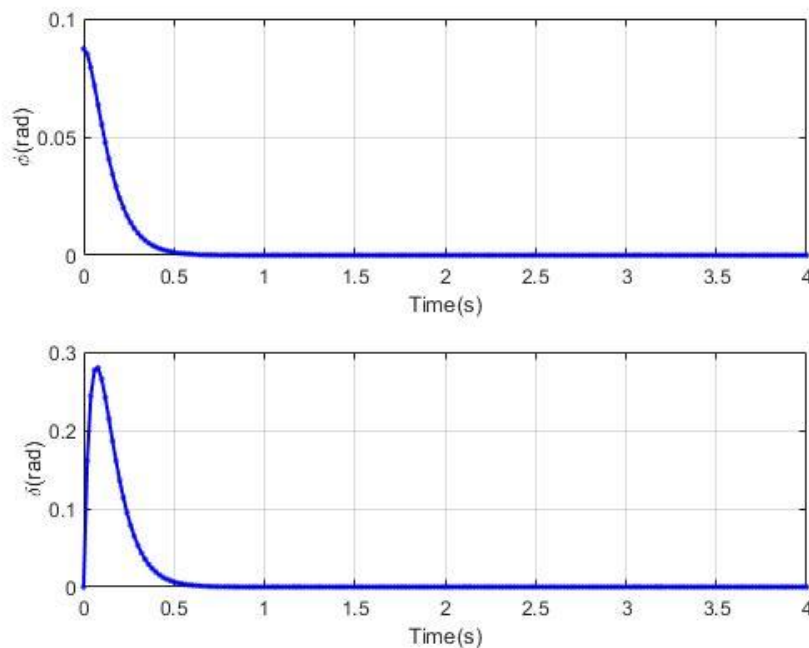


图 2-2 离散时间系统 LQR 仿真结果

对应的 C 语言代码如下所示：

```
float k1=-92.2973, k2=-8.6746, k3=10.5355; //LQR 反馈系数
...
delta_dot = -( k1*(phi-balance_point) + k2*phi_dot + k3*delta );
...
```

## 2.2 PID 控制器

由于上述 LQR 控制器的输出量前叉的转向速度 $\delta[n]$ 是不能直接通过控制舵机获得的（无法对舵机进行有效的建模）且舵机对使用者而言是一个开环系统，因此，考虑在 LQR 控制器的输出端加入一个 PID 控制器。

在我们的问题中，可以很容易的获得其控制率：

$$PWM[n] = K_p \cdot e[n] + K_d \cdot (e[n] - e[n-1]) + K_i \cdot \sum_{i=0}^n e[i] \quad (21)$$

其中， $PWM[n]$ 对应于舵机的转角大小， $e[n]$ 表示第 $n$ 次偏差，由前叉的转向速度 $\delta[n]$ 来充当，因为当自行车的倾斜程度比较大的时候，LQR 控制器的输出也会比较大，所以把 LQR 控制器的输出作为 PID 控制器的输入，目的是为了让 LQR 控制器的输出尽可能快的变为 0，此时对应系统的偏差也为 0。故式(21)可变为

$$PWM[n] = K_p \cdot \delta[n] + K_d \cdot (\delta[n] - \delta[n-1]) + K_i \cdot \sum_{i=0}^n \delta[i] \quad (22)$$

进一步的有

$$PWM[n-1] = K_p \cdot \delta[n-1] + K_d \cdot (\delta[n-1] - \delta[n-2]) + K_i \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \delta[i-1] \quad (23)$$

式(23)减式(22)可得增量式 PID 控制的表达式

$$PWM[n] = PWM[n-1] + K_i \cdot \delta[n] + K_p \cdot (\delta[n] - \delta[n-1]) + K_d \cdot (\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) \quad (24)$$

对应的 C 语言代码如下所示：

```
int ki=4, kp=16, kd=4; //PID 参数（放大 100 倍后，整数易于调试）
...
u = ki*delta_dot + kp*(delta_dot-last_delta_dot) +
kd*(delta_dot-2*last_delta_dot+last_delta_dot_2);
Servo += u/10000;
...
```

### 3. 参考文献

- [1] Limebeer D, Sharp R S. Bicycles, motorcycles, and models[J]. IEEE control systems, 2006, 26(5):34-61.
- [2] 刘延柱. 关于自行车的稳定性[J]. 力学与实践, 2012, 34(2):4.

## 4. 附录

### 4.1 关于转向结构

关于自行车的转向结构，我们把它理想化成一个梯形结构，如下图所示：

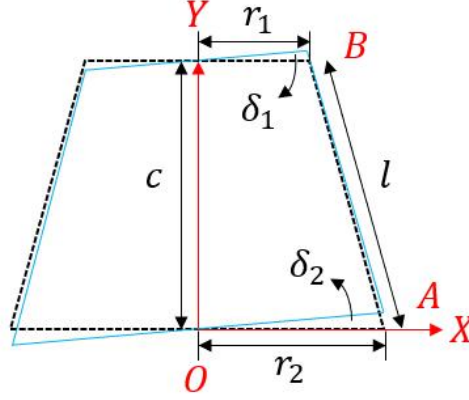


图 4-1 自平衡自行车的转向结构

静止时，有  $A = (r_2, 0)$ ,  $B = (r_1, c)$ ；转动后，有  $A' = (r_2 \cos \delta_2, r_2 \sin \delta_2)$ ,  $B' = (r_1 \cos \delta_1, c + r_1 \sin \delta_1)$ 。由于在转动过程中， $A$ 和 $B$ 的距离保持不变，则有

$$\overline{AB}^2 = \begin{cases} (r_1 - r_2)^2 + c^2 = l^2 \\ (r_1 \cos \delta_1 - r_2 \cos \delta_2)^2 + (c + r_1 \sin \delta_1 - r_2 \sin \delta_2)^2 = l^2 \end{cases} \quad (25)$$

展开有

$$2r_1r_2(1 - \cos \delta_1 \cos \delta_2) + 2c(r_1 \sin \delta_1 - r_2 \sin \delta_2) - 2r_1r_2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 = 0 \quad (26)$$

当舵机和自行车车把的转动角度较小的时候，可以认为  $\delta_1 \rightarrow 0$ ,  $\delta_2 \rightarrow 0$ 。那么，式(26)可以化简为

$$\delta_1 = \frac{r_2}{r_1} \delta_2 \quad (27)$$

故可以近似的认为自行车车把转角与舵机转角呈比例关系。

### 4.2 关于系统框图

上述控制系统的系统框图可以绘制如下：

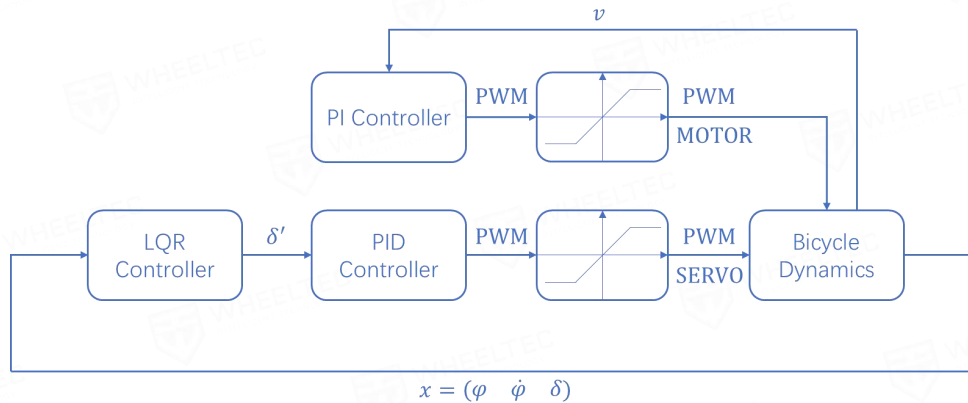


图 4-2 控制系统框图