In [37]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.stats as sps
import math
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection
%matplotlib inline
```

In [38]:

```
size=100
gamma = 0.95
X = sps.norm.rvs(size=100, loc=0, scale=1)
```

Строим доверительные интервалы:

(c) Для a при неизвестном σ^2:

$\left(\overline{X} - \sqrt{\frac{\overline{S}^2}{n-1}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}, \overline{X} + \sqrt{\frac{\overline{S}^2}{n-1}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$, где $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ из распределения Стьюдента T_{n-1}

In [39]:

```
quant = [sps.t.ppf((1+gamma)*1./2, i - 1) for i in range(2, size, 1)]

left = [X[:i].mean()-math.sqrt(((X[:i]**2).mean()-(X[:i].mean())**2)/(i-1))*quant
[i-2]
        for i in range(2, size, 1)]
right = [X[:i].mean()+math.sqrt(((X[:i]**2).mean()-(X[:i].mean())**2)/(i-1))*quant
[i-2]
        for i in range(2, size, 1)]
```

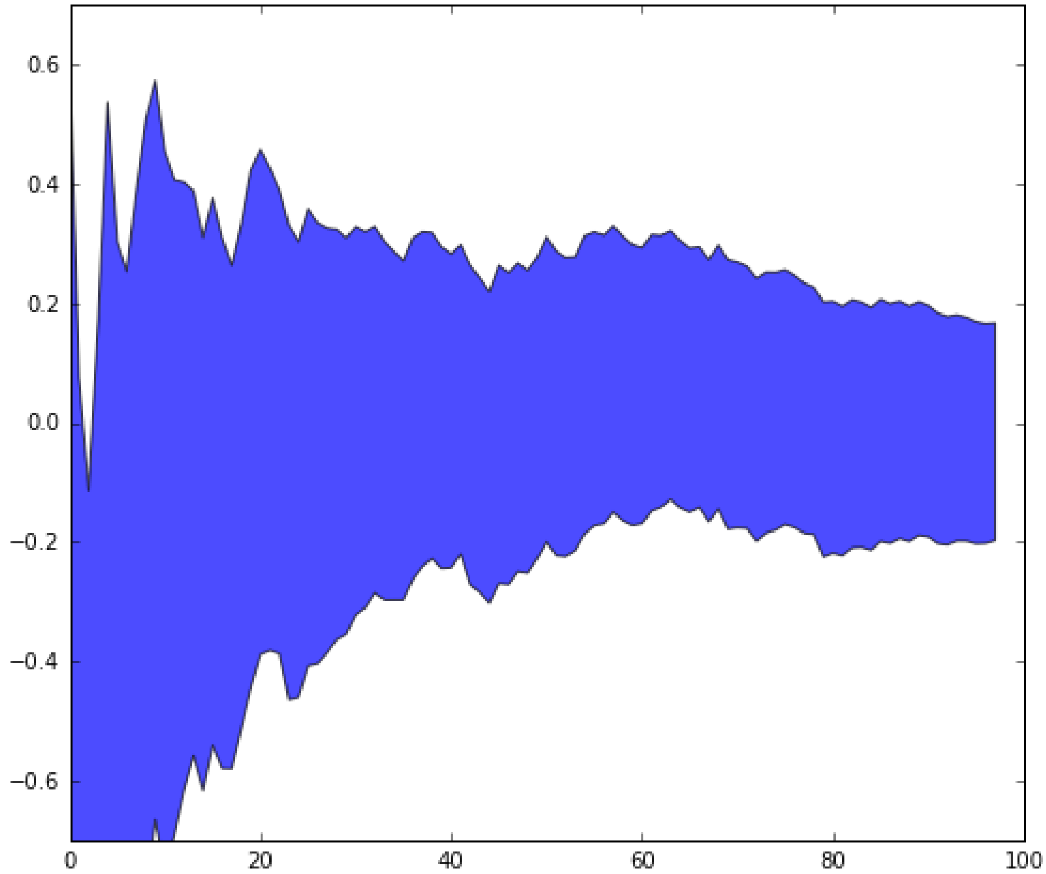
Построим график:

In [40]:

```
plt.figure(figsize=(8, 7))
plt.ylim(-0.7, 0.7)
plt.matplotlib.pyplot.fill_between(range(size-2), left, right, facecolor='blue',
                                   alpha = 0.7)
```

Out[40]:

<matplotlib.collections.PolyCollection at 0x2208a60eda0>



(d) Для σ^2 при неизвестном a :

$$\left(\frac{(n-1)\overline{S}^2}{z_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \frac{(n-1)\overline{S}^2}{z_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$$, где $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ из

распределения χ^2_{n-1}

In [41]:

```
quant_l = [sps.chi2.ppf((1+gamma)/2, i - 1) for i in range(2, size, 1)]
quant_r = [sps.chi2.ppf((1-gamma)/2, i - 1) for i in range(2, size, 1)]

left = [((X[:i]**2).mean()-(X[:i].mean())**2)*(i-1)/quant_l[i-2] for i in range(2,
size, 1)]
right = [((X[:i]**2).mean()-(X[:i].mean())**2)*(i-1)/quant_r[i-2] for i in range
(2, size, 1)]
```

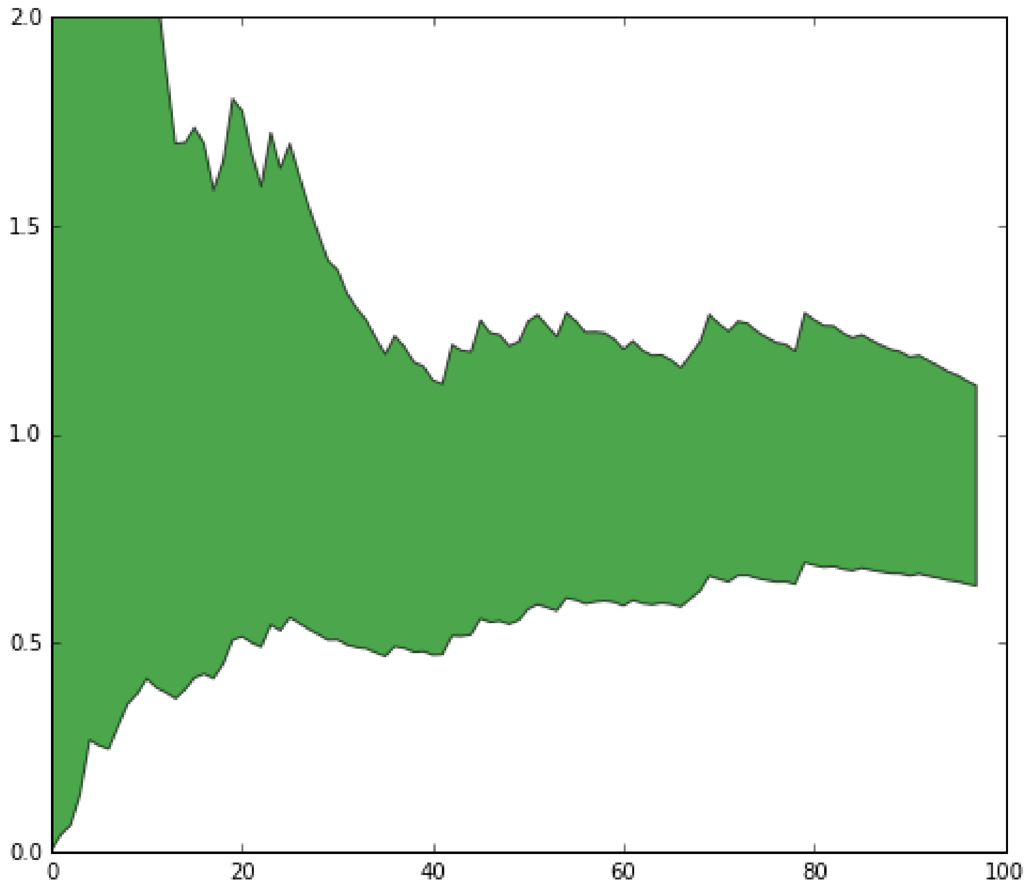
Построим график:

In [42]:

```
plt.figure(figsize=(8, 7))
plt.ylim(0, 2)
plt.matplotlib.pyplot.fill_between(range(size-2), left, right, facecolor='green',
alpha = 0.7)
```

Out[42]:

<matplotlib.collections.PolyCollection at 0x2208a818dd8>



(a) Для a при известном σ^2 :

$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$, где $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ из

стандартного нормального распределения

In [43]:

```
quant = sps.norm.ppf((1.+gamma)/2, loc=0, scale=1)
print(quant)

left = [X[:i].mean() - quant/math.sqrt(i) for i in range(1, size, 1)]
right = [X[:i].mean() + quant/math.sqrt(i) for i in range(1, size, 1)]
```

```
1.95996398454
```

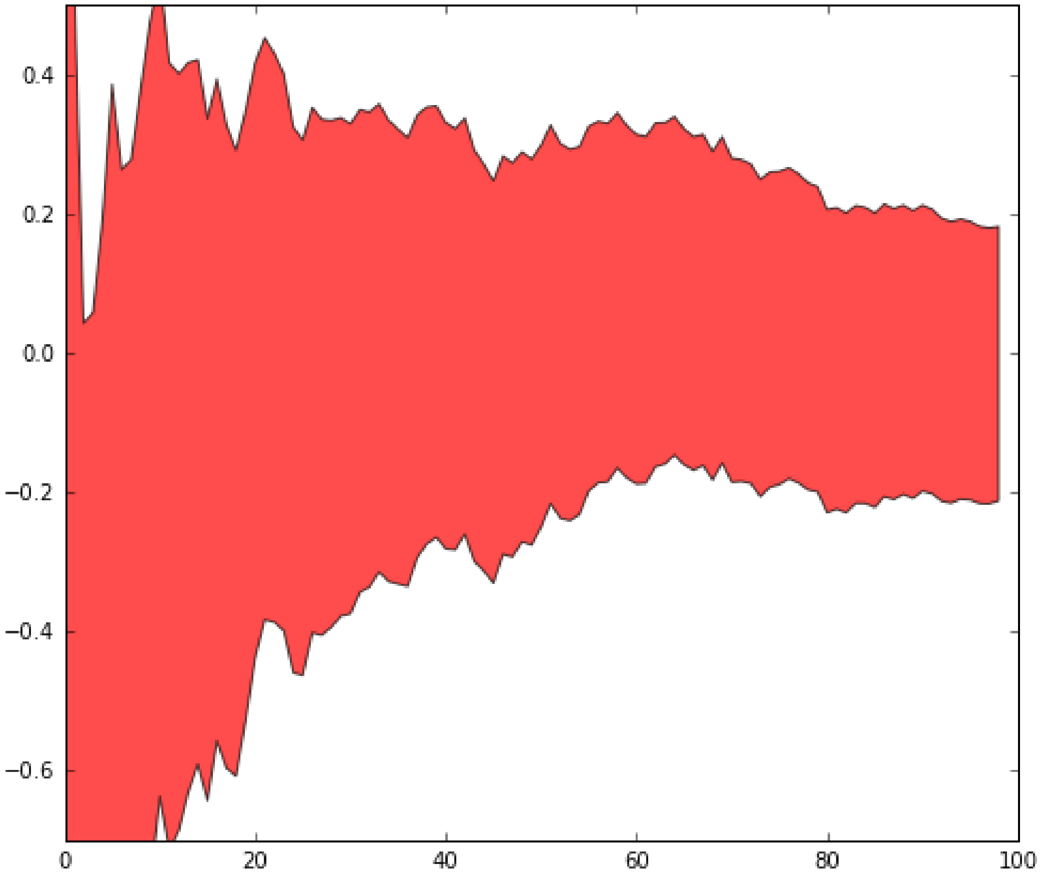
Построим график:

In [44]:

```
plt.figure(figsize=(8, 7))
plt.ylim(-0.7, 0.5)
plt.matplotlib.pyplot.fill_between(range(size-1), left, right, facecolor='red',
                                   alpha = 0.7)
```

Out[44]:

```
<matplotlib.collections.PolyCollection at 0x2208aa786d8>
```



(b) Для σ^2 при известном a :

$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{z_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{z_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$, где $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, $z_{\frac{1-\gamma}{2}}$ квантили уровней $\frac{1+\gamma}{2}$, $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно из распределения χ_n^2

In [45]:

```
quant_l = [sps.chi2.ppf((1+gamma)/2, i) for i in range(1, size, 1)]
quant_r = [sps.chi2.ppf((1-gamma)/2, i) for i in range(1, size, 1)]

left = [sum(X[:i]**2)/quant_l[i-1] for i in range(1, size, 1)]
right = [sum(X[:i]**2)/quant_r[i-1] for i in range(1, size, 1)]
```

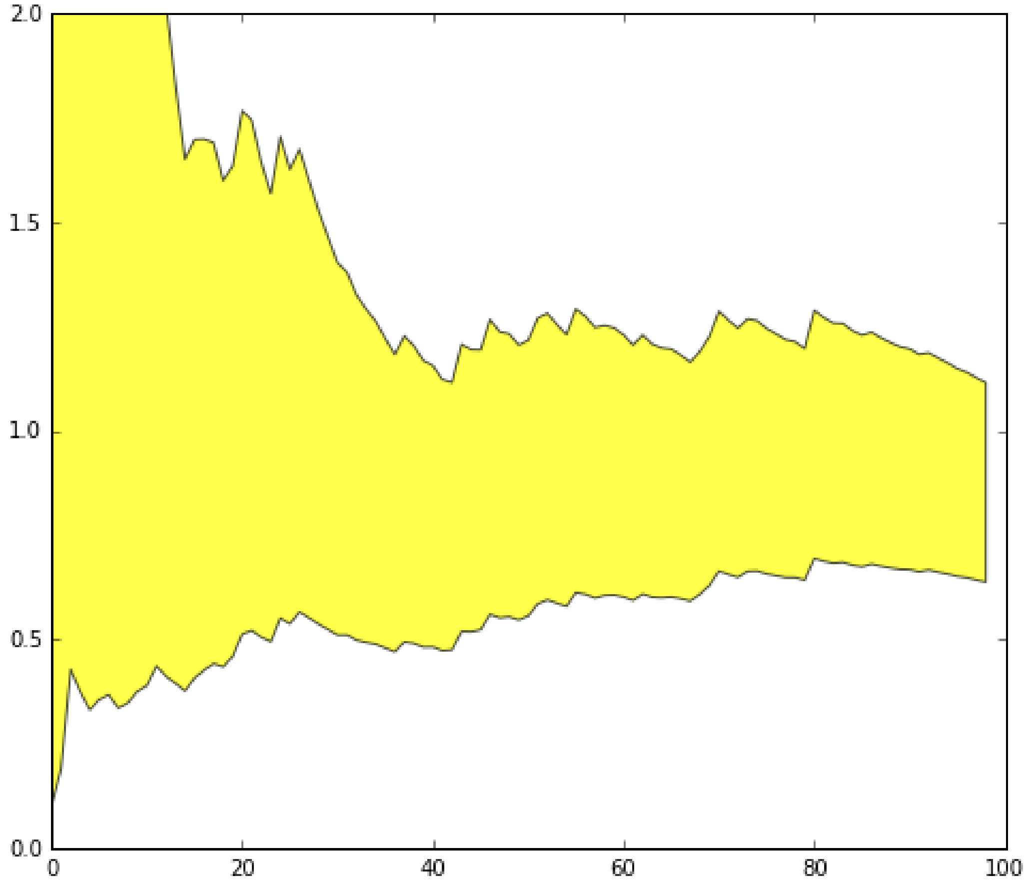
Построим график

In [46]:

```
plt.figure(figsize=(8, 7))
plt.ylim(0, 2)
plt.matplotlib.pyplot.fill_between(range(size-1), left, right, facecolor='yellow',
                                   alpha=0.7)
```

Out[46]:

<matplotlib.collections.PolyCollection at 0x2208a6d7a20>



Вывод : доверительные интервалы для мат ожидания с известной дисперсией и для дисперсии с известным матожиданием получаются лучше, чем когда матожидание и дисперсия не известны

(e) Доверительная область для (a, σ^2):

$\left(0, \frac{ns^2}{z_{1-\sqrt{\gamma}}}\right) \times \left(\overline{X} - \sqrt{\frac{s^2 z_{\sqrt{\gamma}}}{z_{1-\sqrt{\gamma}}}}, \overline{X} + \sqrt{\frac{s^2 z_{\sqrt{\gamma}}}{z_{1-\sqrt{\gamma}}}}\right)$, где z - квантили распределения $\mathcal{X}^2_{n-1}$

In [52]:

```
# считаем интервалы
quant1 = [sps.chi2.ppf(1-math.sqrt(gamma), i - 1) for i in range(2, size, 1)]
quant2 = [sps.chi2.ppf(math.sqrt(gamma), i - 1) for i in range(2, size, 1)]

left_a = [0 for i in range(2, size, 1)]
right_a = [i*((X[:i]**2).mean()-(X[:i].mean())**2)*1./quant1[i-2] for i in range
(2, size, 1)]

left_sigma = [X[:i].mean()-math.sqrt(((X[:i]**2).mean()-(X[:i].mean())**2)*quant2
[i-2]/quant1[i-2])
              for i in range(2, size, 1)]
right_sigma = [X[:i].mean()+math.sqrt(((X[:i]**2).mean()-(X[:i].mean())**2)*quant2
[i-2]/quant1[i-2])
               for i in range(2, size, 1)]
```

Строим 3D график:

In [58]:

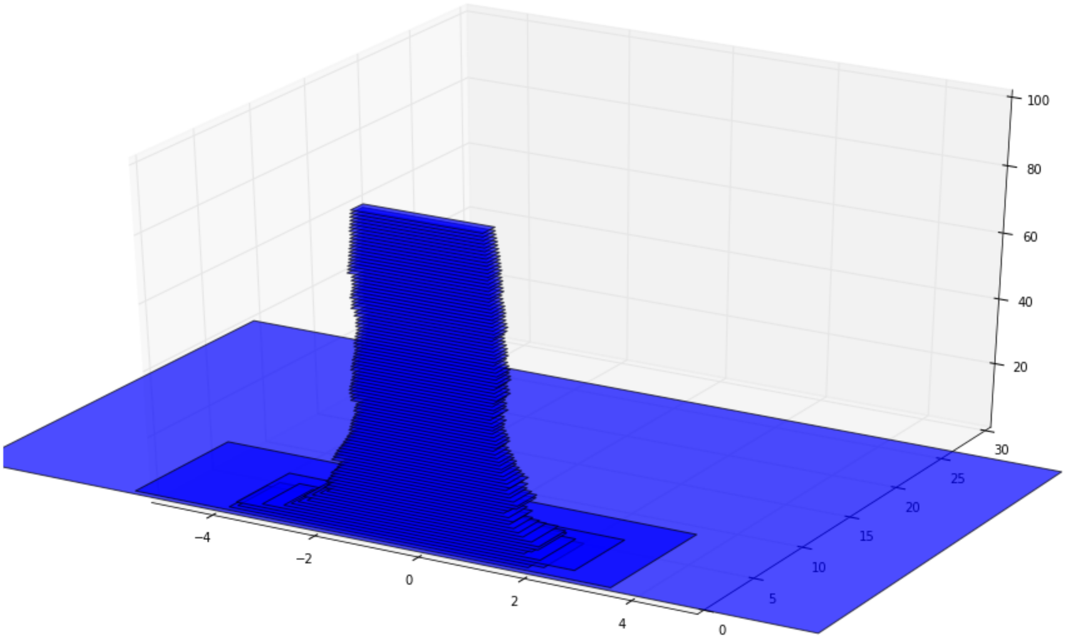
```
axis = []
for i in range(size-2):
    # координаты прямоугольника
    axis_Y = [left_a[i], left_a[i], right_a[i], right_a[i]]
    axis_X = [left_sigma[i], right_sigma[i], right_sigma[i], left_sigma[i]]
    axis_Z = [i, i, i, i]
    axis.append(list(zip(axis_X, axis_Y, axis_Z)))
```

In [65]:

```
fig = plt.figure(figsize=(16, 10))
ax = fig.gca(projection='3d')

ax.add_collection3d(Poly3DCollection(axis, alpha=0.7))
ax.set_xlim3d(-5, 5)
ax.set_zlim3d(2, size)
ax.set_ylim3d(0, 30)

plt.show()
```



Видно, что с ростом элементов выборки доверительная область очень сильно уменьшается