De formules zijn geformuleerd voor $\mathbf{R}^n$. Op het tentamen zullen alleen $n = 2$ en $n = 3$ voorkomen. **N.B. Dit blad mag NIET tijdens het tentamen gebruikt worden.**

Transformatieformule voor integratie over gebieden in $\mathbf{R}^n$:
Laat $D \subset \mathbf{R}^n$ en $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een afbeelding zo, dat $\Phi(\Omega) = D$, Φ is differentieerbaar op (een omgeving van) Ω en $\Phi : \Omega \to D$ is injectief. Dan is voor iedere continue functie $f : D \to \mathbf{R}^n$:

$$\int_D f(x)dV(x) = \int_{\Phi(\Omega)} f(x)dV(x) = \int_\Omega f(\Phi(\omega))|\det D\Phi(\omega)|dV(\omega)$$

waarbij de integralen n-dimensionale integralen zijn in de gekozen coördinaatsystemen. In het bijzonder in $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(\Phi(u,v))|\det D\Phi(u,v)|dudv$$

$$\iiint_D f(x,y)dxdydz = \iiint_\Omega f(\Phi(u,v,w))|\det D\Phi(u,v,w)|dudvdw$$

Voorbeelden:
Poolcoördinaten in $\mathbf{R}^2$:
$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad |\det D\Phi(r,\theta)|drd\theta = rdrd\theta$
Cylindercoördinaten in $\mathbf{R}^3$:
$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \quad |\det D\Phi(r,\theta,z)|drd\theta dz = rdrd\theta dz$
Bolcoördinaten in $\mathbf{R}^3$:
$(x,y,z) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi), \quad |\det D\Phi(\rho,\theta,\phi)|d\rho d\theta d\phi = \rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$

Parametriseringen van deelverzamelingen
Om een k-dimensionale deelverzameling, $1 \leq k \leq n$, van $\mathbf{R}^n$ te beschrijven zijn k parameters nodig. Integratie over een k-dimensionale deelverzameling betekent dus integratie over de k gekozen parameters/variabelen.

Lijnintegralen in $\mathbf{R}^n$
Laat $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) een parametrisatie zijn van een gladde kromme $\mathcal{C}$, i.e., $\mathbf{r}$ is differentieerbaar, $\mathbf{r}'$ is continu en $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ (de nulvector) voor iedere $t \in (a,b)$. Voor $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gedefinieerd en continu op $\mathcal{C}$ geldt:

$$\int_\mathcal{C} f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$$

Deze integraal is richtingsonafhankelijk (denk aan lengte ($f = 1$) of massa, lading (f is dichtheidsfunctie)).

Gevolg: integralen van vectorvelden over krommen in $\mathbf{R}^n$
Laat $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een vectorveld zijn. De tangentiële component van F aan de kromme $\mathcal{C}$ in $p \in \mathcal{C}$ is $\mathbf{F}(p) \cdot \hat{\mathbf{T}}(p)$, waarbij $\hat{\mathbf{T}}(p)$ de eenheidsraakvector is aan $\mathcal{C}$ in p:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}(t)) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Hiermee is

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Deze integraal is richtingsafhankelijk (denk aan arbeid).

Opmerking: De eis, dat $\mathcal{C}$ glad moet zijn, kan in beide bovenstaande formules worden afgezwakt tot glad behalve in een eindig aantal punten (ofwel, tot stuksgewijs gladde $\mathcal{C}$). Dit leidt tot optelling van integralen over deelcurves.

Oppervlakte-integralen
Laat $D \subset \mathbf{R}^2$ een begrensd (2 dim) domein zijn en $\mathbf{r} : D \to \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) met $\mathbf{r} : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ een parametrisatie van een glad oppervlak $\mathcal{S}$ (ofwel, $\mathbf{r}$ is differentieerbaar met continue 1^e orde partiële afgeleiden en $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \neq 0$ voor iedere $(u, v) \in D$). Voor een functie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gedefinieerd en continu op $\mathcal{S}$ geldt:

$$\int_{\mathcal{S}} f dS = \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| (u, v) du dv.$$

Gevolg: flux van vectorveld door oppervlak
Laat $\mathcal{S}$ een glad *oriënteerbaar* oppervlak zijn met oriëntatie vastgelegd door de keuze van de eenheidsnormaal $\hat{\mathbf{N}} : \mathcal{S} \to \mathbf{R}^n$. Gegeven een parametrisatie $\mathbf{r}$ van $\mathcal{S}$ geldt:

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(u, v)) = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} (u, v).$$

Als de oriëntatie van $\mathcal{S}$ gegeven is, moet de daarbij passende keuze $\pm$ worden gemaakt, anders leg je zelf met de keuze de oriëntatie vast.
Met $\hat{\mathbf{N}}$ in termen van de parametrisatie uitgedrukt volgt voor een vectorveld $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ gedefinieerd en continu op $\mathcal{S}$:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \int_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v) du dv.$$

Opmerking: De eis, dat $\mathcal{S}$ glad moet zijn, kan in beide bovenstaande formules worden afgezwakt tot glad behalve in een eindig aantal lager-dimensionale deelverzamelingen (ofwel, tot stuksgewijs gladde $\mathcal{S}$). Dit leidt tot optelling van integralen over deeloppervlakken.

Integraalformules

Laat $D \subset \mathbf{R}^2$ een begrensd (2 dim) domein met rand ∂D die eindige vereniging is van stuksgewijs gladde krommen, voorzien van oriëntatie zodat D 'links ligt van ∂D'. Laat $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ een vectorveld op $\mathbf{R}^2$ zijn dat continu differentieerbaar is op een open omgeving van D. Dan geldt:

(**Green**)

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{dx} - \frac{\partial F_1}{dy} \right) dxdy.$$

Laat $\hat{\mathbf{N}}$ de naar buiten gerichte eenheidsnormaal op ∂D zijn. Dan geldt:

(**Divergentiestelling/Gauss in $\mathbf{R}^2$**)

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \int \operatorname{div} \mathbf{F} dxdy.$$

Laat $\mathcal{S}$ een begrends, oriënteerbaar, stuksgewijs glad oppervalk zijn in $\mathbf{R}^3$ met oriëntatie $\hat{\mathbf{N}}$. Laat ∂S zo georiënteerd zijn dat $\mathcal{S}$ 'links ligt van ∂S als je op de bovenkant van $\mathcal{S}$ loopt'. Laat $\mathbf{F}$ een vecorveld op $\mathbf{R}^3$ zijn dat continu differentieerbaar is op een open omgeving van $\mathcal{S}$. Dan geldt:

(**Stokes**)

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Laat $D \subset \mathbf{R}^3$ een begrensd (3 dim) domein met rand ∂D die een eindige vereniging is van gesloten, oriënteerbare, stuksgewijs gladde oppervlakken, voorzien van oriëntatie $\hat{\mathbf{N}} : \partial D \to \mathbf{R}^3$ zodat $\hat{\mathbf{N}}$ 'naar buiten wijst'. Laat $\mathbf{F}$ een vecorveld op $\mathbf{R}^3$ zijn dat continu differentieerbaar is op een open omgeving van D. Dan geldt:

(**Divergentiestelling/Gauss in $\mathbf{R}^3$**)

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$