



Vrije Universiteit Brussel

Faculteit Ingenieurswetenschappen

Formules Mechanica

Egon Geerardyn

revisie 1.7 (17 augustus 2008)



Voorwoord

Deze uitgave is geen officiële uitgave van de Vrije Universiteit Brussel, slechts een formularium gemaakt door een student. Mogelijk staan er hier of daar nog fouten in, indien u er tegenkomt, stuur gerust een mailtje naar egon.geerardyn@vub.ac.be.

Copyright © Egon Geerardyn.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" in the source code and available on: <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>.

De \LaTeX -broncode is vrij beschikbaar onder GNU Free Document License.

Mogelijk is er reeds een nieuwe versie beschikbaar op
<http://students.vub.ac.be/~egeerard/projects.html>

Referenties

1. D. LEFEBER, *Mechanica: Deel I*, Dienst Uitgaven VUB 2006.
2. D. LEFEBER, *Mechanica: Deel II*, Dienst Uitgaven VUB 2006.
3. D. LEFEBER, *Mechanica met ontwerpproject*, Polytechnische Kring 2007.
4. D. VAN HEMELRIJCK, *Mechanica van materialen, mechanismen en vloeistoffen*, Pointcarré 2008.
5. D. VANDEPITTE, <http://www.berekeningvanconstructies.be>, 2006.

Inhoudsopgave

1	Vectorrekening	4
1.1	Notaties	4
1.2	Beknpte Notaties	4
1.2.1	Sommatie-conventie van Einstein	4
1.2.2	Kronecker-symbolen	4
1.3	Vectoroperatoren	4
2	Coördinatentransformaties	5
2.1	Poolcoördinaten	5
2.2	Cilindercoördinaten	5
2.3	Bolcoördinaten	5
3	Kinematica van een Punt	6
3.1	Baan van een Punt	6
3.2	Snelheid van een Punt	7
3.3	Versnelling van een Punt	7
3.4	Drievlakshoek van Frenet	7
3.5	Formules van Frenet	7
3.6	Kromtecirkel en Kromtestraal	7
3.7	Perksnelheid en -versnelling	8
3.8	Relatieve beweging	8
4	Statica	9
4.1	Stelsels van glijdende vectoren	9
4.1.1	Algemene resultante	9
4.1.2	Totaal moment	9
4.1.3	Invarianten	9
4.1.4	Centrale As	10
4.2	Wrijving	10
4.3	Stabiliteit	10
4.4	Bepaling Massamiddelpunt	11
4.4.1	Discreet Massamiddelpunt	11
4.4.2	Continu Massamiddelpunt	11
4.5	Stellingen van Guldin	12
4.6	Methode van de evenwichtsvoorwaarden	12
4.7	Methode van de Virtuele Arbeid	13
5	Dynamica van een Punt	15
5.1	Basisaxioma's	15
5.2	Algemene stellingen	15
5.3	Rechtlijnige beweging	15
5.4	Rechtlijnige trillingen	17
5.4.1	Lineaire harmonische oscillator	17
5.4.2	Lineaire gedempte harmonische oscillator	18
5.4.3	Lineaire gedempte gedwongen harmonische oscillator	18
5.5	Centraal (conservatief) krachtsveld	19
5.6	Keplerbeweging	19
5.7	Relatieve Beweging	20
6	Mechanica van een stelsel punten	20
6.1	Definities	20

7	Mechanica van starre lichamen	21
7.1	Algemene begrippen	21
7.1.1	Eulerhoeken	21
7.1.2	Bryanthoeken	21
7.1.3	Roll, Pitch, Yaw / Rollen, Stampen, Gieren	21
7.2	Eindige verplaatsingen	21
7.2.1	Translaties	21
7.2.2	Rotaties	21
7.3	Dynamica	22
7.3.1	Algemene stellingen (Newton-Euler)	22
7.3.2	Virtuële arbeid	22
7.3.3	Lagrangiaanse aanpak	22
8	Mechanica van materialen	23
9	Vloeistofmechanica	23
9.1	Hydrostatica	23
9.2	Hydrodynamica	23
A	Hogere-ordemomenten	24
A.1	Massatraagheidsmomenten	24
B	Frequente Vergelijkingen	25
B.1	Allerlei	25
B.1.1	Rechte	25
B.1.2	Cycloïde	25
B.2	Kwadrieken	25
B.2.1	Cirkel	25
B.2.2	Ellips	25
B.2.3	Bol	25

1 Vectorrekening

1.1 Notaties

Vectoren

$$\overline{OV} = \bar{V}$$

Korte notaties voor Afgeleiden

$$\dot{v} = \frac{dv}{ds} \quad \text{en} \quad v'' = \frac{d^2v}{ds^2}$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad \text{en} \quad \ddot{v} = \frac{d^2v}{dt^2}$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dx} \quad \text{en} \quad v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Hierin kan x ook een andere variabele zijn, als dat aangegeven staat!

1.2 Beknopte Notaties

1.2.1 Sommatie-conventie van Einstein

Wanneer in een eenterm een index tweemaal voorkomt, dient over deze index gesommeerd te worden.

$$\text{voorbeeld: } \bar{a} = a_i \bar{1}_i = \sum_i a_i \bar{1}_i$$

1.2.2 Kronecker-symbolen

Kronecker-delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}$$

Kronecker-epsilon

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{als een index } (i, j, k) \text{ tweemaal voorkomt} \\ 1 & \text{als } (i, j, k) \text{ een even permutatie van } (1, 2, 3) \text{ of } (x, y, z) \text{ is} \\ -1 & \text{als } (i, j, k) \text{ een oneven permutatie van } (1, 2, 3) \text{ of } (x, y, z) \text{ is} \end{cases}$$

1.3 Vectoroperatoren

Opmerking: Gelijkheden aangeduid met $\stackrel{\perp}{=}$ zijn enkel geldig in orthogonale assenstelsels!

Vectoriele Som

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_i + b_i) \bar{1}_i$$

Scalair Vermenigvuldigen

$$\alpha \bar{a} = \alpha a_i \bar{1}_i$$

Scalair Product

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= ab \cos \alpha \\ &\stackrel{\perp}{=} \delta_{ij} a_i b_j \\ &\stackrel{\perp}{=} a_i b_i \end{aligned}$$

Vectoriël Product

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\perp}{=} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \bar{1}_k \end{aligned}$$

Gemengd Product

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Dubbel Vectoriël Product (expulsieformule)

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$$

Afgeleide van vectoren

$$\frac{d(\bar{a} + \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt}$$

$$\frac{d\alpha \bar{a}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \bar{a} + \alpha \frac{d\bar{a}}{dt}$$

$$\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \frac{d\bar{b}}{dt} \cdot \bar{a}$$

$$\frac{d(\bar{a} \times \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}$$

2 Coördinatentransformaties

2.1 Poolcoördinaten

Plaats

$$\begin{cases} r_x &= r \cos \theta \\ r_y &= r \sin \theta \end{cases}$$

Snelheid

$$\begin{cases} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{cases}$$

Versnelling

$$\begin{cases} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

2.2 Cilindercoördinaten

Plaats

$$\begin{cases} r_x &= r \cos \theta \\ r_y &= r \sin \theta \\ r_z &= z \end{cases}$$

Snelheid

$$\begin{cases} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} \end{cases}$$

Versnelling

$$\begin{cases} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_z &= \ddot{z} \end{cases}$$

2.3 Bolcoördinaten

Plaats

$$\begin{cases} r_x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ r_y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ r_z &= r \cos \theta \end{cases}$$

Snelheid

$$\begin{cases} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \\ v_\varphi &= r\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases}$$

Versnelling

$$\begin{cases} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_z &= r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \end{cases}$$

3 Kinematica van een Punt

3.1 Baan van een Punt

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}$$

Elementaire Booglengte

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Normaalvlak N in P

$$\overline{XP} \cdot \vec{l}_t = 0$$

$$x'_P(x - x_P) + y'_P(y - y_P) + z'_P(z - z_P) = 0$$

Vlak door P met als normaalvector de raakvector aan de baan \vec{l}_t

Osculatievlak O in P

$$(\vec{v}_P \times \vec{a}_P) \cdot \overline{PX} = 0 \Leftrightarrow (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \overline{PX} = 0$$

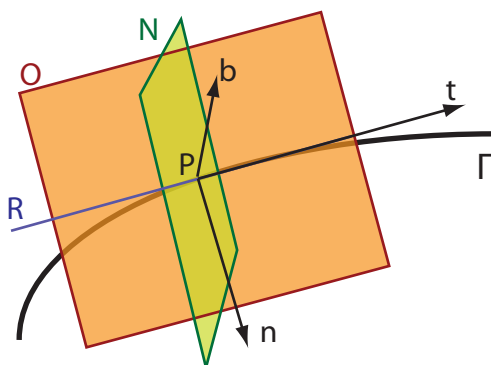
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$$

Vlak door P met als normaalvector de binormale $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$.

Raaklijn R in P

$$\overline{OQ} = \overline{P} + k\vec{l}_t = \overline{P} + k \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Drager van de snelheidsvector in P , loodrecht op de plaatsvector.



3.2 Snelheid van een Punt

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{1}_x + \frac{dy}{dt}\bar{1}_y + \frac{dz}{dt}\bar{1}_z = \dot{x}\bar{1}_x + \dot{y}\bar{1}_y + \dot{z}\bar{1}_z$$

$$v = \|\bar{v}\| = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

$$\bar{v} = \|\bar{v}\| \bar{1}_t = v\bar{1}_t$$

3.3 Versnelling van een Punt

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{1}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{1}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{1}_z = \ddot{x}\bar{1}_x + \ddot{y}\bar{1}_y + \ddot{z}\bar{1}_z$$

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{1}_t + \frac{v^2}{R}\bar{1}_n = \frac{dv}{dt}\bar{1}_t + \frac{v^2}{R}\bar{1}_n \quad \text{ontbinding van Huygens}$$

$$a^2 = \|\bar{a}\|^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2} = \dot{v}^2 + \frac{v^4}{R^2}$$

3.4 Drievlakshoek van Frenet

$$(\bar{1}_t, \bar{1}_n, \bar{1}_b)$$

$$\bar{1}_t \times \bar{1}_n = \bar{1}_b$$

$$\bar{1}_b = \frac{\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}}{\|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\|}$$

$$\bar{1}_t = \frac{\dot{\bar{r}}}{\|\dot{\bar{r}}\|} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{\dot{\bar{r}}}{\dot{s}} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}'$$

$$\bar{1}_n = \bar{1}_b \times \bar{1}_t$$

3.5 Formules van Frenet

$$\frac{d\bar{1}_t}{ds} = \frac{1}{R}\bar{1}_n$$

$$\frac{d\bar{1}_b}{ds} = \frac{1}{T}\bar{1}_n$$

$$\frac{d\bar{1}_n}{ds} = -\frac{1}{R}\bar{1}_t - \frac{1}{T}\bar{1}_b$$

3.6 Kromtecirkel en Kromtestraal

$$\rho = R = \pm \frac{ds}{d\alpha} > 0$$

Kromtestraal met baan in parametervorm $\Gamma : x(t), y(t)$

$$\rho = \pm \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

Kromtestraal met baan in natuurlijke parametervorm $\Gamma : x(s), y(s)$

$$\rho = \pm \frac{1}{x'y'' - y'x''}$$

Kromtestraal met baan als functievoorschrift $\Gamma : y = y(x)$

$$\rho = \pm \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}} \quad \text{met } \dot{} = \frac{d}{dx}$$

Kromtestraal in 3 dimensies $\Gamma : x(t), y(t), z(t)$

$$R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$$

3.7 Perksnelheid en -versnelling

$$\bar{v}_{perk} = \frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{1}{2}\overline{OP} \times \bar{v} = \frac{1}{2}\overline{MO}(\bar{v})$$

$$\bar{a}_{perk} = \frac{d^2\bar{S}}{dt^2} = \frac{1}{2}\overline{OP} \times \bar{a} = \frac{1}{2}\overline{MO}(\bar{a})$$

3.8 Relatieve beweging

Een index $_O$ slaat op de oorsprong van het relatief assenstelsel. Een index $_R$ slaat op de coördinaten in het relatief assenstelsel. Let op de gebruikte assenstelsel bij het onbinden in componenten!

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \bar{r}_R$$

$$\bar{v} = \bar{v}_R + \bar{v}_s$$

$$\bar{a} = \bar{a}_R + \bar{a}_s + \bar{a}_c$$

Hierin zijn:

$$\bar{v}_s = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_R$$

$$\bar{a}_s = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_R + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_R)$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_R$$

4 Statica

4.1 Stelsels van glijdende vectoren

Elementaire bewerkingen

- Twee tegengestelde vectoren op eenzelfde drager toevoegen (en omgekeerd)
- Twee vectoren met samenlopende (snijdende) dragers vervangen door hun resultante (en omgekeerd)
- **Varignon:** Een stelsel samenlopende vectoren is gelijkwaardig met hun algemene resultante
- Een koppel is een stelsel van twee evenwijdige tegengestelde vectoren
- **Poinsot:** Een stelsel kan herleid worden tot een koppel en een resultante

4.1.1 Algemene resultante

$$\bar{R} = \sum_i \bar{V}_i$$

Toepassingen en eigenschappen

- De totale resultante is gelijk in alle punten P en Q

$$\bar{R}_Q = \bar{R}_P = \bar{R}$$

4.1.2 Totaal moment

$$\bar{C}_P = \sum_i \bar{M}_P(\bar{V}_i) = \sum_i \overrightarrow{PA_i} \times \bar{V}_i$$

Variatie van het totaal moment

$$\bar{C}_Q = \bar{C}_P + \overrightarrow{QP} \times \bar{R}_P$$

Toepassingen en eigenschappen

- Alle punten Q met eenzelfde totaal moment $\bar{C}_P = \bar{C}_Q$ als P , liggen op een rechte evenwijdig met de resultante
- De projectie van het totaal moment in twee verschillende punten P en Q op de totale resultante \bar{R} is constant.

$$\frac{1}{R} (\bar{C}_P \cdot \bar{R}) = \frac{1}{R} (\bar{C}_Q \cdot \bar{R}) \Leftrightarrow \bar{C}_P \cdot \bar{R} = \bar{C}_Q \cdot \bar{R}$$

- De projectie van het totaal moment in 2 punten P en Q op de rechte PQ is constant.

$$\bar{C}_P \cdot \overrightarrow{PQ} = \bar{C}_Q \cdot \overrightarrow{PQ}$$

4.1.3 Invarianten

$$\bar{R}_P = \bar{R}_Q$$

$$\bar{C}_P \cdot \bar{R} = \bar{C}_Q \cdot \bar{R}$$

4.1.4 Centrale As

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{R} \times \overline{C}_P}{\|\overline{R}\|^2}$$

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{R} \times \overline{C}_0}{\|\overline{R}\|^2} + \lambda \overline{R}$$

$$\frac{C_{0,x} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{C_{0,y} - zR_x + xR_y}{R_y} = \frac{C_{0,z} - xR_y + yR_x}{R_z}$$

Eigenschappen

- $\overline{C}_Q // \overline{R}$
- **Bij een vlak stelsel vectoren (allen gelegen in 1 vlak):**
 - Het stelsel is evenwaardig met 1 vector, namelijk de algemene resultante \overline{R} gelegen op de centrale as
 - Het totaal moment \overline{C}_P staat loodrecht op het vlak
 - Op de centrale as is het totaal moment $\overline{C}_Q = 0$
- **Bij een stelsel evenwijdige vectoren:**
 - Het stelsel is evenwaardig met 1 vector, namelijk de algemene resultante \overline{R} gelegen op de centrale as
 - Op de centrale as is het totaal moment $\overline{C}_Q = 0$

4.2 Wrijving

Bindingsreacties bij ruwe binding ontbinden in tangentiële en normale component: $\overline{R} = \overline{T} + \overline{N}$. Bij Gladde binding: $\overline{R} = \overline{N}$

Wrijvingscoëfficiënt en wrijvingshoek

$$f = \frac{\|\overline{T}\|}{\|\overline{N}\|} = \frac{T}{N} = \tan \phi$$

Kinematische Wrijvingscoëfficiënt ($\overline{v}_P \neq 0$)

$$T = f_k N$$

Statische Wrijvingscoëfficiënt ($\overline{v}_P = 0$)

$$T \leq f_k N$$

4.3 Stabiliteit

Een willekeurige kleine verplaatsing $d\overline{r}$ (\overline{AA}) die alle bindingen respecteert kiezen en de zo onstane kracht(en) \overline{F} bepalen. Bij een gladde binding hoeven de bindingsreacties niet in rekening gebracht te worden!

$$A = W = \overline{F} \cdot d\overline{r} \begin{cases} < 0 \forall d\overline{r} & \text{stabiel} \\ = 0 \forall d\overline{r} & \text{onverschillig} \\ > 0 \text{ voor tenminste een } d\overline{r} & \text{instabiel} \end{cases}$$

Met wrijving in rekenig gebracht: Wrijving werkt de stabiliteit nooit tegen!

$$\bar{T} = -\sigma \bar{v} \quad \sigma > 0, \bar{v} \text{ de glij snelheid}$$

$$\bar{R}_A \cdot d\bar{r} = -\sigma v^2 dt < 0$$

Speciaal geval De kracht \bar{F} is de gradiënt van een potentiaal Φ of V :

Arbeid

$$W = A = \int \bar{F} d\bar{r}$$

$$\bar{F} = -\text{grad } \Phi$$

$$A = - \int \text{grad } \Phi d\bar{r} = -\Phi$$

Stabiliteitsvoorwaarde

$$\bar{\nabla} \Phi \cdot d\bar{r} = d\Phi \geq 0$$

voorbeeld:

$$\Phi = mgz \quad \text{cfr. potentiële energie}$$

4.4 Bepaling Massamiddelpunt

Soortelijke Massa

$$\rho(P) = \frac{dM}{dD} \quad (\text{met } M \text{ massa en } D \text{ het domein waarvan de dichtheid bepaald wordt})$$

Totale Massa

$$M = \int_D \rho(P) dD$$

4.4.1 Discreet Massamiddelpunt

$$\overline{OG} = \frac{\sum_i m_i \overline{OA_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overline{OA_i}}{M}$$

4.4.2 Continu Massamiddelpunt

$$\overline{OG} = \frac{1}{M} \int_D \rho(P) \overline{OP} dD$$

Eigenschappen

- **Ontbinding:** Men mag het lichaam steeds ontbinden, van de afzonderlijke delen het massamiddelpunt bepalen en van deze punten (voorzien met de massa van het hun overeenkomstig deel) het massamiddelpunt bepalen
- **Symmetrie:** Het massamiddelpunt ligt op het symmetrieelement van het lichaam. Deze symmetrie moet gelden voor zowel de geometrie van het lichaam als voor de massa van het lichaam! (Bij homogene lichamen is aan het laatste automatisch voldaan)
- Bij een discrete puntenverzameling: het massamiddelpunt kan gevonden worden door de centrale as van elk van de punten voorzien van een vektor met een intensiteit evenredig met de massa in het overeenkomstig punt te bepalen.
- Het massamiddelpunt van een lichaam bevindt zich steeds binnen de (kleinste) convexe veelhoek/veelvlak die het lichaam omsluit!

4.5 Stellingen van Guldin

Omwenteling van een kromme rond de x-as

$$S = 2\pi \cdot y_G \cdot L \quad \text{met hierin:}$$

S het oppervlakte van de omwentelde kromme

y_G het y -coördinaat van het massamiddelpunt van de kromme

L de (boog)lengte van de te omwentelen kromme

Omwenteling van een oppervlak rond de x-as

$$V = 2\pi \cdot y_g \cdot S \quad \text{met hierin:}$$

V het volume van het omwentelde oppervlak

y_g het y -coördinaat van het massamiddelpunt van het oppervlak

S de oppervlakte van het te omwentelen oppervlak

4.6 Methode van de evenwichtsvoorwaarden

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{0} \\ \bar{C}_P = \bar{0} \end{cases}$$

4.7 Methode van de Virtuele Arbeid

$$\sum_{\alpha} \overline{F}_{\alpha}^{u,r} + \sum_{\alpha} \overline{F}_{\alpha}^i + \sum_{\alpha} \overline{R}_{\alpha}^u + \sum_{\alpha} \overline{R}_{\alpha}^i = 0$$

Bij een star lichaam: wegvallen van de inwendige krachten (door actie-reactie). Bij gladde bindingen: kiezen van een verplaatsing zodat de ongekende uitwendige bindingsreacties wegvallen (loodrecht op de verplaatsing of, geen verplaatsing in het contactpunt). Berekenen van de virtuele arbeid door de krachten te vermenigvuldigen met een virtuele verplaatsing.

$$W = \sum_{\alpha} \overline{F}_{\alpha}^{u,r} \cdot \overline{P}_{\alpha} \overline{P}_{\alpha}' = 0$$

Bij holonome bindingen kunnen de virtuele verplaatsingen uitgedrukt worden in functie van Lagrange-coördinaten q_i en eventueel de tijd.

$$\overline{OP}_{\alpha} = \overline{r}_{\alpha} = \overline{r}_{\alpha}(q_1, \dots, q_n, t)$$

$$\overline{P}_{\alpha} \overline{P}_{\alpha}' = \delta \overline{r}_{\alpha} = \frac{\partial \overline{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i$$

De totale arbeid uitdrukken in Lagrange-coördinaten

$$W = 0 = \sum_i Q_i \delta q_i$$

$$Q_i = \sum_{\alpha} \overline{F}_{\alpha}^u \left(\frac{\partial \overline{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right)$$

Bepalen of hierin de Lagrangecoördinaten q_i onafhankelijk zijn, zo niet moeten er $P = C - V$ bindingen (het aantal gebruikte coördinaten min het aantal vrijheidsgraden) tussen de coördinaten vastgelegd worden. Indien de coördinaten onafhankelijk zijn, zijn alle $\lambda_k = 0$

$$\phi_k(q_1, \dots, q_n, t) = 0$$

Al deze bindingen worden gedifferentieerd met $\delta t = 0$.

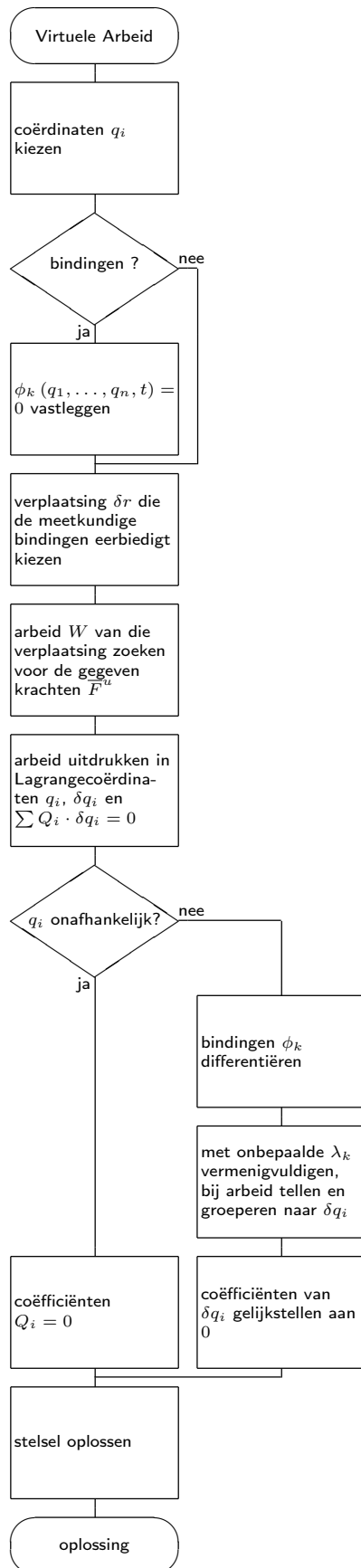
$$\forall k \in [1, p] : \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

Deze betrekkingen worden vermenigvuldigd met de onbekende Lagrangeparameters λ_k en bij de arbeid in Lagrangecoördinaten geteld. Oplossen door de coëfficiënten van q_i gelijk te stellen aan 0:

$$Q_i + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} = 0$$

Hiermee zijn de evenwichtsvoorwaarden bepaald.

Om de bindingsreacties te berekenen: verplaatsing kiezen die één bindingsreactie arbeid laat leveren (rotatie of translatie), hierbij mogen bindingen gebroken worden of bepaalde parameters constant gehouden worden (als de vrijheidsgraden dit toelaten).



5 Dynamica van een Punt

5.1 Basisaxioma's

Traagheidswet (Impuls / Kinetische resultante)

$$\bar{p} = m\bar{v}$$

$$\frac{dm\bar{v}}{dt} = \bar{F} = \bar{K} = \bar{k}$$

Bij constante massa (Wet van d' Alembert)

$$\bar{F} = \bar{k} = m\bar{a}$$

$$\bar{F} = \bar{K} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{K}_{\text{uitwendig}} + \bar{K}_{\text{binding}} + \bar{K}_{\text{relatief}}$$

Actie-Reactie (niet geldig voor relatieve krachten zoals $\bar{F}_{\text{Coriolis}}$ en \bar{F}_{sleef})

$$\bar{F}_{ab} = -\bar{F}_{ba}$$

5.2 Algemene stellingen

Impuls / Kinetische Resultante De aangroei van de bewegingshoeveelheid $m\bar{v}$ is gelijk aan de impuls $\int \bar{K} dt$ van de totale kracht.

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{K} dt = (m\bar{v})_{t_2} - (m\bar{v})_{t_1}$$

Kinetisch Moment Het kinetisch moment van het bewegend punt P ten pziachte van het punt O is het moment van de bewegingshoeveelheid in P .

$$\bar{M}_O = \overline{OP} \times m\bar{v}_P$$

De afgeleide van het kinetisch moment naar de tijd in een vast punt O (absolute assen!!) is gelijk aan het moment om dit punt van de totale kracht.

$$\frac{d\bar{M}_O}{dt} = \frac{d\overline{OP} \times m\bar{v}_P}{dt} = \overline{OP} \times \bar{K}$$

Behoud van energie

$$\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2)$$

$$\bar{F} = -\text{grad } \Phi$$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \Phi(\bar{r}) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \Phi(\bar{r}_0)$$

5.3 Rechthijnige beweging

De kracht is tijdsafhankelijk $m \cdot \ddot{x} = f(t)$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t f(u) du + v_0$$

$$x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dw \int_{w_0}^w f(u) du + v_0(t - t_0) + x_0 = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t f(u)(t - t_0) du + v_0(t - t_0) + x_0$$

De kracht is snelheidsafhankelijk $m\ddot{x} = f(\dot{x})$

Stel $\dot{x} = v$; $m\dot{v} = f(v)$

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = t - t_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

$$x(v) = x_0 + \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)}$$

De kracht is plaatsafhankelijk $m\ddot{x} = f(x)$

$$\Phi(x) = - \int_{x_0}^x f(u) du$$

$$E_0 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \Phi(x) = \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 + \Phi(x_0)$$

$$\dot{x}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - \Phi(x))}$$

$$t(x) = t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E_0 - \Phi(x)}}$$

$$F(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

Struikelblokken bij het integreren

- Het integratieinterval wordt oneindig

$$\int_{x_0}^{\infty} = F(x) dx$$

- Oplosbaar bij: $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) = 0$ of
- Oplosbaar bij: $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = x^\alpha$ met $\alpha < -1$.

- Binnen het integratieinterval ontstaat een oneindigheid

$$\int_a^b \frac{F(x)}{(x - x_0)^\alpha} dx \quad \text{met } a \leq x_0 \leq b \text{ en } F(x_0) \neq 0$$

- Oplosbaar bij: $\alpha < 1$

Autonoom systeem $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} f(x, y) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{my}$$

Stelling van Liapounoff In de omgeving van een regelmatig singulier punt, kan de beweging bestuurd worden door enkel de eerste van nul verschillende termen van de reeksontwikkeling van $f(x, y)$ en $g(x, y)$ rond dat singulier punt te beperken.

5.4 Rechthoekige trillingen

Wet van Hooke

$$\vec{F}(x) = -k\vec{r} \quad \text{of} \quad F = -kx \quad \text{met } k > 0$$

Veerwet (bij grotere uitwijkingen)

$$F(x) = -kx + \epsilon x^3 \quad \text{met } k > 0 \text{ en } \epsilon \in \mathbb{R}$$

5.4.1 Lineaire harmonische oscillator

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{of} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{met } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Oplossing (algemeen, met A en B integratieconstanten):

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ \dot{x} = \omega (A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)) \end{cases} \quad \text{met } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = \frac{v_0}{\omega}, \quad B = x_0$$

Oplossing:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

Oplossing (alternatieve notatie):

$$x = M \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{met} \quad \begin{cases} M = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \\ \varphi = \arctan \frac{B}{A} = \arctan \frac{x_0 \cdot \omega}{v_0} \end{cases}$$

5.4.2 Lineaire gedempte harmonische oscillator

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

Oplossen via de discriminant $D = \lambda^2 - 4km$ van de KV.

- **Sterk gedempte trillingen** $D > 0$ of $\lambda^2 > 4km$

- Stel $D = K^2$

- Oplossing (algemeen):

$$x = Ae^{\left[\frac{-(\lambda+K)t}{2m}\right]} + Be^{\left[\frac{-(\lambda-K)t}{2m}\right]} \quad \text{of} \quad x = e^{\frac{-\lambda t}{2m}} \left[Ae^{\frac{Kt}{2m}} + Be^{\frac{Kt}{2m}} \right]$$

- Integratieconstanten

$$A = -\frac{mv_0}{K} + x_0 \left(\frac{K - \lambda}{2K} \right) \quad B = \frac{mv_0}{K} + x_0 \left(\frac{K + \lambda}{2K} \right)$$

- Oplossing:

$$x = e^{\frac{-\lambda t}{2m}} \left[x_0 \cosh \frac{Kt}{2m} + \frac{2mv_0 + \lambda x_0}{K} \sinh \frac{Kt}{2m} \right]$$

- Nakijken via $\dot{x} = 0$ of er een maximumamplitude bereikt wordt

- **Zwak gedempte trillingen** $D < 0$ of $\lambda^2 < 4km$

- Stel $D = -K^2$ met $K \in \mathbb{R}$

- Stel $\Omega = \frac{K}{2m}$

- Oplossing (algemeen):

$$x = e^{\frac{-\lambda t}{2m}} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \quad \text{of} \quad x = M e^{\frac{-\lambda t}{2m}} \sin(\Omega t + \Phi)$$

- (Integratie)constanten

$$A = x_0 \quad B = \frac{v_0}{\Omega} + \frac{\lambda x_0}{2m\Omega} \quad M = \sqrt{A^2 + B^2}$$

- Oplossing:

$$x = e^{\frac{-\lambda t}{2m}} \left[x_0 \cos \Omega t + \left(\frac{v_0}{\Omega} + \frac{\lambda x_0}{2m\Omega} \right) \sin \Omega t \right]$$

- (Pseudo)-periode $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

- **Kritisch gedempte trillingen** $D = 0$ of $\lambda^2 = 4km$

- Oplossing (algemeen):

$$x = (A + Bt) e^{\frac{-\lambda t}{2m}}$$

- Integratieconstanten

$$A = x_0 \quad B = v_0 + \frac{\lambda}{2m} x_0$$

5.4.3 Lineaire gedempte gedwongen harmonische oscillator

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$$

5.5 Centraal (conservatief) krachtsveld

$$m\ddot{\vec{r}} = F(r)\bar{1}_r$$

Wanneer $F(\vec{r}) = F(r)$ dan geldt het volgende:

$$F(r) = \frac{dV}{dr}$$

De bewegingsvergelijkingen (in poolcoördinaten):

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta})$$

De volgende bewegingsconstanten (eerste integralen) zijn hiermee equivalent:

$$r^2\dot{\theta} = C = v_0 r_0 \sin \phi_0 = \|\vec{v}_0 \times \vec{r}_0\| \quad \text{met } \phi_0 \text{ de hoek tussen } \vec{r}_0 \text{ en } \vec{v}_0$$

$$E_0 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{mv_0^2}{2} + V(r_0)$$

Bepaling van $\theta(r)$

$$\theta - \theta_0 = \pm C \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - \frac{mC^2}{2r^2} - V(r)}}$$

Bepaling van $r(t)$ door inversie van

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E_0 - \frac{mC^2}{2r^2} - V(r)}}$$

Beide bovenstaande uitdrukkingen samenvoegen om $\theta(t)$ te bepalen.

Bepaling van $r(\theta)$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mC^2 u^2} \quad \text{met } u = \frac{1}{r}$$

5.6 Keplerbeweging

$$\vec{F}_P = \frac{A}{r^2} \bar{1}_r$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{A}{mC^2} \quad \text{met } u = \frac{1}{r}$$

Als $A < 0$: aantrekking

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$$

met hierin:

- $P = -\frac{mC^2}{A} = \frac{b^2}{a}$
- $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + 2E_0 \frac{mC^2}{A^2}}$

- $C = r^2 \dot{\theta} = v_0 r_0 \sin \phi_0$ Kinetisch moment
- $E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{|A|}{r_0}$

Als $E_0 < 0$ is de beweging een ellips met (halve grote en kleine as)

$$a = \frac{A}{2E_0} \quad b = C \sqrt{\frac{-m}{2E_0}}$$

Keplerwetten

1. Elke planeet beschrijft een ellips met de zon in een brandpunt
2. De voerstraal bestrijkt in gelijke tijdsintervallen gelijke perken (oppervlakten)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$$

3. Het kwadraat van de periode is evenredig met de derde macht van de halve grote as van de ellips.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{KM}$$

5.7 Relatieve Beweging

$$m\bar{a}_A = \bar{F} + \bar{R}$$

$$m\bar{a}_R = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_s + \bar{F}_c$$

Hierin zijn:

$$\bar{F}_s = -m\bar{a}_s$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c$$

Hierin zijn:

$$\bar{a}_s = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_R + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_R)$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_R$$

6 Mechanica van een stelsel punten

6.1 Definities

Kinetisch resultante

$$\bar{\mathcal{R}} = \sum_{(h)} m_h \bar{v}_h$$

Kinetisch moment

$$\bar{\mathcal{M}}_Q = \sum_{(h)} \bar{Q}\bar{P}_h \times m_h \bar{v}_h$$

Kinetische energie

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{(h)} m_h v_h^2$$

7 Mechanica van starre lichamen

7.1 Algemene begrippen

$$\bar{r}_P = f(q_1, \dots, q_n) \quad \text{skleronoom}$$

$$\bar{r}_P = f(q_1, \dots, q_n, t) \quad \text{rheonoom}$$

Veralgemeende snelheden \dot{q}_i

$$\bar{v}_P = \frac{d\bar{r}_P}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial t}$$

Veralgemeende versnellingen \ddot{q}_i

$$\bar{a}_P = \frac{d^2 \bar{r}_P}{dt^2} = \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 \bar{r}_P}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \frac{\partial^2 \bar{r}_P}{\partial q_i \partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \bar{r}_P}{\partial t^2}$$

7.1.1 Eulerhoeken

As	Hoek	Naam
Z_0	ψ	Precessie
X_1	θ	Nutatie
Z_2	ϕ	Rotatie

7.1.2 Bryanthoeken

As	Hoek	Naam
Z_0	ψ	Precessie
X_1	θ	Nutatie
Y_2	ϕ	Rotatie

7.1.3 Roll, Pitch, Yaw / Rollen, Stampen, Gieren

As	Hoek	Naam
X_0	γ	Roll (Rollen)
Y_0	β	Pitch (Stampen)
Z_0	α	Yaw (Gieren)

7.2 Eindige verplaatsingen

7.2.1 Translaties

7.2.2 Rotaties

Samenstelling rotaties

- 2 rotaties met evenwijdige assen geeft een rotatie met:

...

- 2 rotaties met evenwijdige assen en tegengestelde amplitude geeft een translatie met amplitude d en richting θ t.o.v. $\overline{P_1 P_2}$

$$d = 2 \left\| \overline{P_1 P_2} \right\| \sin \frac{\phi}{2} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\pi - \phi}{2}$$

Rotatie-elementen bepalen De rotatieas wordt bepaald door de eigenvector van de rotatiematrix M met bijhorende eigenwaarde $\lambda = 1$. De rotatiehoek wordt bepaald door:

$$\theta = \text{Brgcos} \frac{\text{sp}(M) - 1}{2}$$

Formule van Rodriguez

$$\bar{r}' = (\bar{I}_k \cdot \bar{r}) (1 - \cos \phi) \bar{I}_k + \cos \phi \bar{r} + \sin \phi (\bar{I}_k \times \bar{r})$$

7.3 Dynamica

König

$$E_{kin} = \frac{mv_G^2}{2} + E_{rot,G} = \frac{mv_G^2}{2} + \bar{v}_G \cdot \sum_h m_h \bar{v}_h|_{rel}$$

7.3.1 Algemene stellingen (Newton-Euler)

Kinetisch resultante

$$\bar{\mathcal{R}} = \int_{(h)} \bar{v}_h dm_h = m\bar{v}_G$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{R}}}{dt} = \bar{R}^u$$

Kinetisch moment

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \int_{(h)} \overline{OP}_h \times \bar{v}_h dm_h = m\overline{OG} \times \bar{v}_O + \bar{I}_O \bar{\omega}$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{M}}_Q}{dt} = \bar{M}_Q^u + m\bar{v}_G \times \bar{v}_Q$$

$$\bar{\mathcal{M}}_A = \bar{\mathcal{M}}_O + \overline{AO} \times \bar{\mathcal{R}}$$

Euler-vergelijkingen In HTA:

$$\begin{cases} A\dot{p} - qr(B - C) = M_x \\ B\dot{q} - pr(C - A) = M_y \\ C\dot{r} - pq(A - B) = M_z \end{cases} \quad \text{met } \bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Kinetische energie

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{(h)} m_h v_h^2 = \frac{mv_O^2}{2} + m\bar{v}_O \cdot (\bar{\omega} \times \overline{OG}) + \frac{\bar{\omega} \bar{I}_O \bar{\omega}}{2}$$

$$\frac{dE_K}{dt} = P^u + P^i \stackrel{\text{SL}}{=} P^u$$

7.3.2 Gyrostaat

$$\frac{d\bar{\mathcal{M}}_{G0}}{dt} = \bar{M}_G^u + \Gamma \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$$

7.3.3 Virtuële arbeid

7.3.4 Lagrangiaanse aanpak

$$Q_i = \sum_k \vec{F}_k^u \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial q_i}$$

$$\Psi_j = 0 \quad \text{Bindingen tussen de coördinaten}$$

Als alle krachten afgeleid zijn van een potentiaal

$$\mathcal{L} = E_K - E_p$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

8 Mechanica van materialen

$$\varepsilon = \frac{\delta L}{L_0}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

9 Vloeistofmechanica

9.1 Hydrostatica

$$P = P_0 + \rho gh$$

9.2 Hydrodynamica

Wet van Bernoulli

$$P + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{P}{\rho g} + h + \frac{v^2}{2g} = \text{cte}$$

Debiet

$$Q = \frac{dV}{dt} = v \cdot A = \frac{ds}{dt} A$$

A Hogere-ordemomenten

A.1 Massatraagheidsmomenten

Traagheidsmomenten

$$I_x = \int \varrho (y^2 + z^2) \, dD$$

Traagheidstensor (steeds symmetrisch en diagonaliseerbaar (HTA))

$$\bar{\bar{I}}_O = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

$$I_{ij}^O = \int (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) \, dm$$

Transformatie naar een gerooteerd assenstelsel

$$\bar{\bar{I}}'_O = M \bar{\bar{I}}_O M^T$$

Stelling van Steiner (transformatie naar een verplaatst assenstelsel)

$$I_{ij}^A = I_{ij}^G + m (a_k a_k \delta_{ij} - a_i a_j)$$

Uitgewerkte notatie (voor evenwijdige assen)

$$I_{d_2} = I_{d_G} + m \|d_2 d_G\|^2$$

B Frequente Vergelijkingen

B.1 Allerlei

B.1.1 Rechte

$$\vec{p} = \vec{a} + t \cdot \vec{r}$$

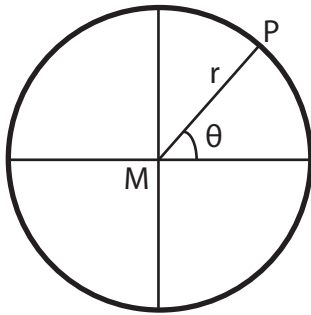
$$\begin{cases} x = a_x + k \cdot r_x \\ y = a_y + k \cdot r_y \\ z = a_z + k \cdot r_z \end{cases}$$

B.1.2 Cycloïde

$$\begin{cases} x = R(\omega t - \sin \omega t) \\ y = R(1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

B.2 Kwadrieken

B.2.1 Cirkel



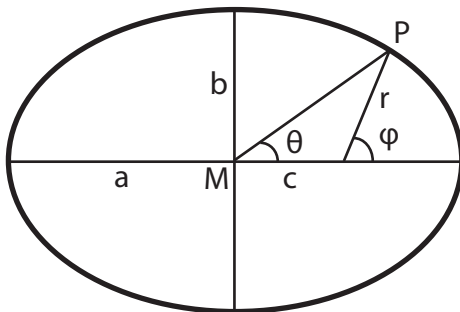
$$\vec{p} = \vec{m} + r \cdot (\vec{i}_x \cos \theta + \vec{i}_y \sin \theta)$$

$$\begin{cases} x = m_x + r \cos \theta \\ y = m_y + r \sin \theta \end{cases}$$

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$S = \pi \cdot r^2$$

B.2.2 Ellips



$$\frac{(x - m_x)^2}{a^2} + \frac{(y - m_y)^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = m_x + a \cos \theta \\ y = m_y + b \sin \theta \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}$$

$$\begin{cases} x = m_x + c + r \cos \varphi \\ y = m_y + r \sin \varphi \end{cases}$$

$$S = \pi \cdot a \cdot b$$

B.2.3 Bol

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$$