1) $[\![x^8-\frac{3}{2}]\!]=x^4+10$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

Çözüm: $[\![x^8-\frac{3}{2}]\!]=x^4+10\in\mathbb{Z} \Rightarrow x^4\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^8=(x^4)^2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow [\![x^8-\frac{3}{2}]\!]=x^4+10$

$x^8+[\![-\frac{3}{2}]\!]=x^4+10 \Rightarrow x^8-2=x^4+10 \Rightarrow x^8-x^4-12=0$

$x^4=t \qquad t^2-t-12 \Rightarrow (t-4)(t+3)=0$

$\Rightarrow x^4=4$ veya $x^4=-3$

$\Rightarrow x^4=4 \Rightarrow (x^2-2)(x^2+2)=0$

$\Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$

2) $z^2=\bar{z}$ eşitliğini sağlayan arg(z) si π ile $\frac{3\pi}{2}$ arasında olan karmaşık sayıyı bulunuz.

Çözüm: $z^2=(x+iy)^2=x^2+2xyi-y^2$

$\bar{z}=x-iy$

$z^2=\bar{z} \Rightarrow x^2-y^2=x$ ve $2xy=-y$

$y\neq 0$ o.ü $2xy=-y \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$

$x^2-y^2=x \Rightarrow \frac{1}{4}-y^2=\frac{-1}{2} \Rightarrow y^2=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z=x+iy=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3) $\bar{z}-iz+2=2(z+i)-3$ eşitliğinden $Re(z)-Im(z)$ yi hesaplayınız.

Çözüm: $z=x+iy$ olsun.

$\bar{z}-iz+2=2(z+i)-3 \Rightarrow x-iy-i(x+iy)+2=2(x+iy+i)-3$

$\Rightarrow -x+y+i(-x-3y)=-5+2i$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x+y=-5\\-x-3y=2\end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{13}{4},\ y=\frac{-7}{4} \Rightarrow z=\frac{13}{4}-\frac{7}{4}i$

$Re(z)-Im(z)=\frac{13}{4}-\left(\frac{-7}{4}\right)=5$

4) $z = 1+\cos 80 + i\sin 80$ karmaşık sayısının modülünü ve argümentini bulunuz.

Çözüm: $|z| = r = \sqrt{(1+\cos 80)^2 + \sin^2 80}$

$$= \sqrt{1 + 2\cos 80 + \underbrace{\cos^2 80 + \sin^2 80}_{1}}$$

$$= \sqrt{2(1+\cos 80)} \qquad (2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha)$$

$$= \sqrt{2\cdot 2\cos^2 40}$$

$$= 2\cos 40$$

$$\tan\theta = \frac{\sin 80}{1+\cos 80} = \frac{\cancel{2}\sin 40 . \cancel{\cos 40}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} 40} = \tan 40 \Rightarrow \theta = 40^\circ$$

5) $z = 1-\cos 50 + i\sin 50$ karmaşık sayısının modülünü ve argümentini bulunuz.

Çözüm: $|z| = \sqrt{(1-\cos 50)^2 + \sin^2 50}$

$$= \sqrt{1 - 2\cos 50 + \underbrace{\cos^2 50 + \sin^2 50}_{1}}$$

$$= \sqrt{2(1-\cos 50)} \qquad (2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha)$$

$$= \sqrt{2.2\sin^2 25}$$

$$= 2\sin 25$$

$$\tan\theta = \frac{\sin 50}{1-\cos 50} = \frac{\cancel{2}\cancel{\sin} 25\cos 25}{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}} 25} = \cot 25 = \tan 65$$

$$\Rightarrow \theta = 65^\circ$$

6) $\{z \in \mathbb{C} : 3z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} + 9 = 0\}$ kümesini geometrik olarak yorumlayınız.

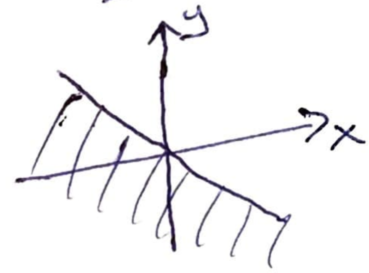
Çözüm: $3z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} + 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2+y^2) - 6(x+iy) - 6(x-iy) + 9 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1$

$M(2,0)$ merkezli $r=1$ yarıçaplı çember gösterir.

7) $|z+i| \le |z-1|$ eşitsizliğini geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm: $z = x+iy \Rightarrow z+i = x+i(y+1)$, $z-1 = x-1+iy$



$$|z+i| \le |z-1| \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} \le \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2y+1 \le x^2-2x+1+y^2$$

$$\Rightarrow y \le -x$$

8) $z = \sqrt{1-\sqrt{3}i}$ sayısının tüm köklerini bulunuz.

Çözüm: $z^2 = 1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right), \quad k=0,1$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{+\sqrt{3}}{2} + i\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right)$$

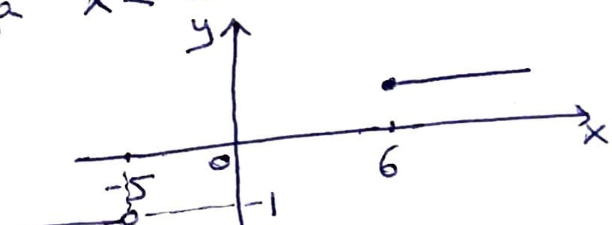
9) $y = f(x) = sgn\left(\frac{x-4}{\sqrt{[\![x]\!]^2-25}}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup, grafiğini çiziniz.

Çözüm: $T.K. = \{x \in \mathbb{R} : [\![x]\!]^2 - 25 > 0\}$

$[\![x]\!]^2 - 25 > 0 \Rightarrow [\![x]\!]^2 > 25 \Rightarrow |[\![x]\!]| > 5 \Rightarrow [\![x]\!] > 5$ veya $[\![x]\!] < -5$

$\Rightarrow x \ge 6$ veya $x < -5$

$\Rightarrow T.K. = (-\infty, -5) \cup [6, +\infty)$



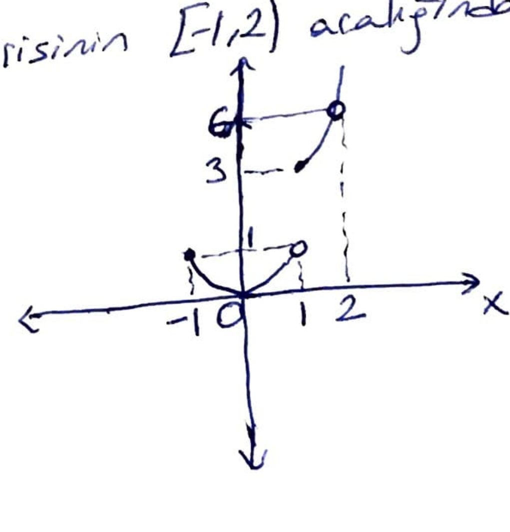
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -5 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

10) $y = x^2 + |[\![x]\!]| + sgn[\![x]\!]$ eğrisinin $[-1,2)$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

Çözüm: $-1 \le x < 0 \Rightarrow y = x^2$

$0 \le x < 1 \Rightarrow y = x^2$

$1 \le x < 2 \Rightarrow y = x^2 + 2$



11) $f:[0,2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = [\![\sin x]\!] - \operatorname{sgn}(|\sin x|)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow 0 \le |\sin x| \le 1$

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0 - 1 = -1$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow y = 0 - 1 = -1$

$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y = -1 - 1 = -2$

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow y = -1 - 1 = -2$

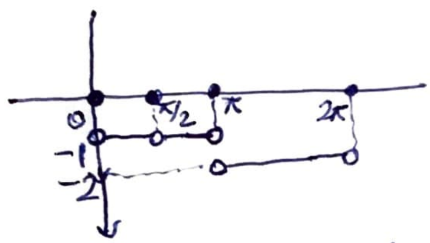
$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 1 - 1 = 0$

$x = \pi \Rightarrow y = 0 - 0 = 0$

$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y = -1 - 1 = -2$

$x = 2\pi \Rightarrow y = 0 - 0 = 0$

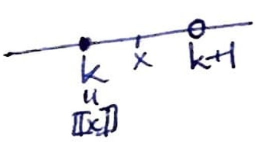


12) $f(x) = \frac{x}{2x-1} + \ln(x - [\![x]\!])$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $T.K. = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0,\ x - [\![x]\!] > 0\}$

$2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$x - [\![x]\!] > 0 \Rightarrow x \neq [\![x]\!] \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$



$[\![x]\!] = k \Rightarrow k \le x < k+1$

$\Rightarrow [\![x]\!] \le x$

$T.K = \mathbb{R} - \{\mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}\}\}$

13) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{[\![2x]\!] - [\![x]\!]}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $T.K. = \{x \in \mathbb{R} : [\![2x]\!] - [\![x]\!] \neq 0\}$

$[\![2x]\!] - [\![x]\!] = 0 \Rightarrow [\![2x]\!] = [\![x]\!] = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \le 2x < k+1$ ve $k \le x < k+1$

$\Rightarrow [\![2x]\!] = [\![x]\!] = 0 \Rightarrow 0 \le 2x < 1,\ 0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le x < \frac{1}{2}$

$[\![2x]\!] = [\![x]\!] = -1 \Rightarrow -1 \le 2x < 0,\ -1 \le x < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} \le x < 0$

$\Rightarrow x \in [-1/2, \frac{1}{2})$

$T.K. = (-\infty, \frac{-1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

14) $f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2x+3}{\ln([\![x]\!]^2-1)}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $T.K.=\{x\in\mathbb{R}: -1\le\frac{x}{2}\le 1,\ [\![x]\!]^2-1>0\}$

$-1\le\frac{x}{2}\le 1 \Rightarrow -2\le x\le 2$

$[\![x]\!]^2-1>0 \Rightarrow [\![x]\!]^2>1 \Rightarrow |[\![x]\!]|>1 \Rightarrow [\![x]\!]>1$ veya $[\![x]\!]<-1$

$\Rightarrow x\ge 2$ veya $x<-1$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

$T.K=[-2,-1)\cup\{2\}$

15) $f(x)=\frac{x}{\log_{x-2}\sqrt[3]{x^2-4}}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $T.K.=\{x\in\mathbb{R}: \sqrt[3]{x^2-4}>0,\ \sqrt[3]{x^2-4}\ne 1,\ x-2>0,\ x-2\ne 1\}$

	-2		2	
x^2-4	$+$	$-$		$+$

$x^2-4>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

$x^2-4\ne 1 \Rightarrow x^2\ne 5 \Rightarrow x\ne -\sqrt{5},\sqrt{5}$

$x-2>0 \Rightarrow x>2$

$x-2\ne 1 \Rightarrow x\ne 3$

$T.K.=(2,+\infty)\setminus\{\sqrt{5},3\}$

16) $f(x)=\sqrt{[\![x]\!]-2}+\arccos(\mathrm{sgn}(x^2-4))$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz

Çözüm: $[\![x]\!]-2\ge 0$ ve $-1\le \mathrm{sgn}(x^2-4)\le 1$ olmalıdır.

$[\![x]\!]-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2$ olmalı $\quad \mathrm{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}-1;\\ 0;\\ 1;\end{cases}$

$T.K.=[2,+\infty)$

17) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{|4x+2|-3}}{\mathrm{sgn}(x^2-3x-10)+1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz

Çözüm: $T.K.=\{x\in\mathbb{R}: \mathrm{sgn}(x^2-3x-10)+1\ne 0\}=(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$

	-2		5	
$x^2-3x-10$	$+$	$-$		$+$

$\mathrm{sgn}(x^2-3x-10)=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)\\ 0, & x\in\{-2,5\}\\ -1, & x\in(-2,5)\end{cases}$

18) $x \in \mathbb{R}^+$, $\cos(\arctan x) = x$ ise $x^2 = ?$

Çözüm: $\arctan x = t \Rightarrow x = \tan t$

$\Rightarrow \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\cos(\arctan x) = \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+x^2} = 1 \Rightarrow x^2(1+x^2) = 1 \Rightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$u = x^2$ $\quad \Rightarrow u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

19) $\lim\limits_{x \to \pi^+} [\![2 + \sin x]\!]^{\operatorname{sgn}(\pi - x)} = ?$

Çözüm: $x > \pi \Rightarrow \pi - x < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\pi - x) = -1$

$\lim\limits_{x \to \pi^+} [\![2 + \sin x]\!]^{\operatorname{sgn}(\pi - x)} = \lim\limits_{x \to \pi^+} 1^{(-1)} = \lim\limits_{x \to \pi^+} 1 = 1$

$x > \pi \Rightarrow -1 < \sin x < 0$

20) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{[\![x]\!] + [\![2x]\!] + \cdots + [\![nx]\!]}{n^2} = ?$

Çözüm: $[\![x]\!] = k \Rightarrow k \le x < k+1 \Rightarrow [\![x]\!] \le x < [\![x]\!] + 1 \Rightarrow x - 1 < [\![x]\!] \le x$

$x - 1 < [\![x]\!] \le x$

$2x - 1 < [\![2x]\!] \le 2x$

$\vdots$

$nx - 1 < [\![nx]\!] \le nx$

$+$ ―――――――――――――――――

$$\frac{x + 2x + \cdots + nx - n}{n^2} < \frac{[\![x]\!] + [\![2x]\!] + \cdots + [\![nx]\!]}{n^2} \le \frac{x + 2x + \cdots + nx}{n^2}$$

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}x - n}{n^2} < \frac{[\![x]\!] + [\![2x]\!] + \cdots + [\![nx]\!]}{n^2} \le \frac{\frac{n(n+1)}{2}x}{n^2}$$

$$\frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} < \frac{[\![x]\!] + [\![2x]\!] + \cdots + [\![nx]\!]}{n^2} \le \frac{n+1}{2n}x$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n+1}{2n}x - \dfrac{1}{n} \right) = \dfrac{x}{2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n+1}{2n}x \right)$ olduğundan

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{[\![x]\!] + [\![2x]\!] + \cdots + [\![nx]\!]}{n^2} = \dfrac{x}{2}$ olur.

21) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x-1}+2x\right)=?$ $\quad \infty-\infty$

Çözüm: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}-3x-1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-3x-1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{4-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-2x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(3+\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{4-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-2}=\frac{-3}{-2-2}=\frac{3}{4}$$

22) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}=?$

Çözüm: $x-\frac{\pi}{3}=u\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\lim_{u\to0}\frac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+u\right)}{\pi-3\left(\frac{\pi}{3}+u\right)}=\lim_{u\to0}\frac{1-2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos u-\sin\frac{\pi}{3}\sin u\right)}{\pi-\pi-3u}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{1-2\left(\frac{1}{2}\cos u-\frac{\sqrt3}{2}\sin u\right)}{-3u}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u+\sqrt3\sin u}{-3u}$$

$$=\lim_{u\to0}\left(\frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{-3u}-\frac{\sqrt3}{3}\cdot\underbrace{\frac{\sin u}{u}}_{\to1}\right)$$

$$=\lim_{u\to0}\left(\underbrace{\frac{2\cdot\sin\frac{u}{2}}{-6}}_{\to0}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{u}{2}}{u/2}}_{\to1}-\frac{\sqrt3}{3}\right)$$

$$=\frac{-\sqrt3}{3}$$

23) $f(x)=\begin{cases}ax+2b & , x\le0\\ x^2+3a-b & ; 0<x\le2\\ 3x-5 & , x>2\end{cases}$ fonksiyonunun $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(ax+2b)=2b\\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+3a-b)=3a-b\end{array}\right\}\Longrightarrow 3a-b=2b$$

$\Longrightarrow a=b$ olduğunda $x=0$ da süreklidir

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+3a-b) = 4+3a-b$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x-5) = 1$$

$\Rightarrow$ $4+3a-b=1$, $3a-b=-3$ olduğunda $x=2$ de süreklidir.

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ 3a-b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=\frac{-3}{2}$$

24) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+(k-3)x+(k-3)}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için k ne olmalıdır?

Çözüm: Fonksiyonun sürekli olması için paydanın sıfırdan farklı olması gerekir. O halde paydanın $\Delta<0$ şartını sağlayan k değerlerini bulmalıyız.

$$\Delta = (k-3)^2 - 4(k-3) = (k-3)(k-7) < 0$$

		3		7	
$(k-3)(k-7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$k\in(3,7)$ ise $\Delta<0$ olduğundan paydanın kökü yoktur. Yani, $k\in(0,7)$ için fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

25) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(nx-3), & x>2 \\ 1, & x=2 \\ [\![\frac{nx}{3}]\!], & x<2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ de sürekli olması için n ne olmalıdır?

Çözüm: $x=2$ de sürekli olması için $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 1$ olmalıdır.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \operatorname{sgn}(nx-3) = \operatorname{sgn}(2n-3) = 1 \Rightarrow 2n-3>0 \Rightarrow n>\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} [\![\frac{nx}{3}]\!] = [\![\frac{2n}{3}]\!] = 1 \Rightarrow 1 \le \frac{2n}{3} < 2 \Rightarrow \frac{3}{2} \le n < 3$$

$\Rightarrow \frac{3}{2} < n < 3$ ise, fonksiyon $x=2$ de süreklidir.