Maksimum Minimum Problemleri:

Bir maksimum minimum problemini çözmek için aşağıdaki yol izlenir:

1) Problemde verilenler değişkenlerle gösterilir.
2) Maksimum yada minimum olması istenen ifade, verilenler kullanılarak tek değişkenli fonksiyon haline getirilir.
3) Probleme göre değişkenin sınırları belirlenir.
4) Kritik noktalar bulunur.
5) Fonksiyonun kritik noktaları ve aralığın uç nokta değerlerinin en küçüğü mutlak minimum değer, en büyüğü de mutlak maksimum değerdir.

Örnekler:

1) Toplamları 40 olan iki pozitif tamsayının kareleri toplamı en fazla kaç olur?

Çözüm: $x+y=40$

$f(x,y)=x^2+y^2 \Rightarrow f(x)=x^2+(40-x)^2, \quad x\in[1,39]$

$f'(x)=2x-2(40-x)=4x-80=0 \Rightarrow x=20$ kritik nokta

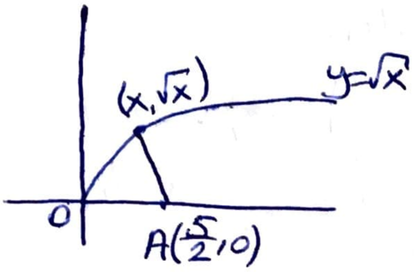
$\{f(1), f(20), f(39)\}=\{1522, 800, 1522\}$ kümesinin en büyük değeri 1522 olduğundan kareleri toplamı en fazla 1522 olur.

$1^2+39^2=1522$

$39^2+1^2=1522$

2) $A(\frac{5}{2},0)$ noktasının $y=\sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm: $d(x)=\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{x^2-4x+\frac{25}{4}}$



$$d'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+\frac{25}{4}}}=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+\frac{25}{4}}}$$

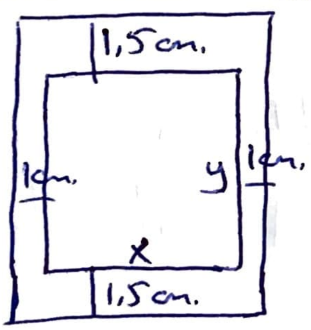
		2	
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$x=2$ mutlak minimum noktadır.

$$d(2)=\sqrt{4-8+\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}$$

3) Bir kağıdın $24\ cm^2$ lik kısmına yazı yazılacaktır. Alttan ve üstten 1,5 cm., sağdan ve soldan 1 cm. boşluk bırakılacağına göre bu kağıden alanı en az kaç cm^2 olmalıdır?

Çözüm: $xy=24$ $\quad A(x,y)=(x+2)(y+3)$



$$\Rightarrow A(x)=(x+2)\left(\frac{24}{x}+3\right)=30+3x+\frac{48}{x}$$

$$A'(x)=3-\frac{48}{x^2}=\frac{3x^2-48}{x^2}$$

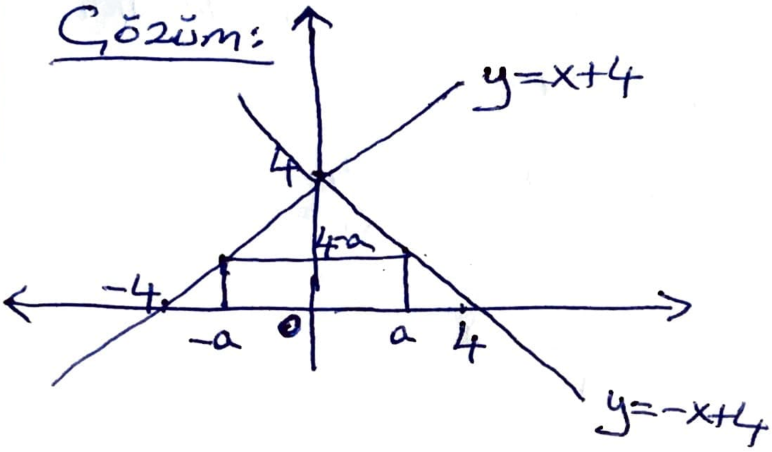
		-4		4	
$A'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$A(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x>0$ olacağından mutlak minimum noktası 4 olur.

$$A(4)=30+3.4+\frac{48}{4}=54\ cm^2$$

4) $y=x+4$, $y=-x+4$ doğruları ve Ox ekseni tarafından sınırlanan bölgede bulunan iki köşesi verilen doğrular, iki köşesi de Ox ekseni üzerinde olan dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 olabilir?

Çözüm:



$$A = 2a(4-a) = 8a - 2a^2$$

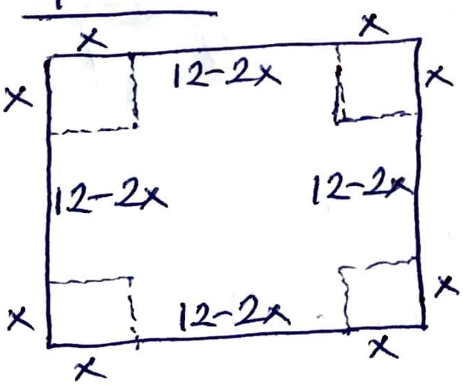
$$A' = 8 - 4a = 0 \Rightarrow a = 2$$

		2	
A'	+	0	−
A	↗		↘

$$A(2) = 8.2 - 2.4 = 8 \ br^2$$

5) Bir kenarının uzunluğu 12 cm. olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden birer eşit alanlı kare kesilerek geriye kalan parçadan üstü açık bir kare prizma yapılıyor. Bu prizmanın hacmi en fazla kaç cm^3 olur?

Çözüm:



$$V = (12-2x)^2 . x$$

$$V' = -4(12-2x).x + (12-2x)^2$$

$$= (12-2x)(-4x+12-2x)$$

$$= (12-2x)(12-6x)$$

		2		6	
V'	+	0	−	0	+
V	↗		↘		↗

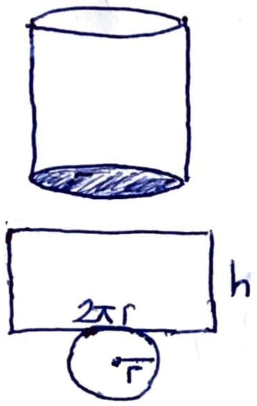
$x>6$ olursa $12-2x<0$ olacağından $x>6$ olamaz.

O halde hacim, $x=2$ de maksimum değere ulaşır.

$V(2) = 8^2 . 2 = 128 \ cm^3$ olur.

6) Bir sanayici alüminyumdan dik dairesel silindir şeklinde üstü açık $64 cm^3$ hacminde kutular yapmaktadır. En az alüminyum kullanması için yapacağı silindirin taban yarıçapı kaç cm. olmalıdır?

Çözüm: $V = \pi r^2 h = 64 \Rightarrow h = \dfrac{64}{\pi r^2}$



$A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \dfrac{64}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}$

$A = \pi r^2 + \dfrac{128}{r}$

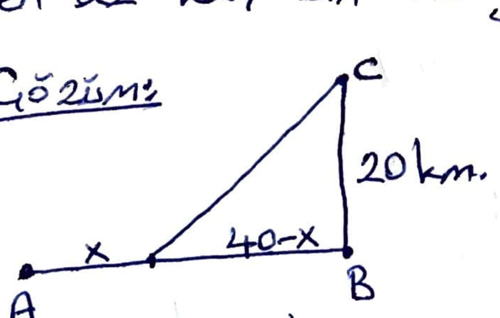
$A' = 2\pi r - \dfrac{128}{r^2} = \dfrac{2\pi r^3 - 128}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

		$\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$	
A'	$-$	0	$+$
A	$\searrow$		$\nearrow$

En az alüminyum kullanması için $r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ olmalıdır.

7) B köyü A köyünün 40 km. doğusunda, C köyü de B nin 20 km. kuzeyindedir. A ile B ve B ile C arasında stabilize yol vardır. A ile C arası asfaltlanacaktır. 1 km. stabilize yolun asfaltlanması 30.000TL ye, 1 km. yeni yolun açılıp asfaltlanması 60.000TL ye mal olmaktadır. A ile C arası asfalt yol en az kaç bin TL ye mal olur?

Çözüm:



$f(x) = 30x + \sqrt{(40-x)^2 + 400} \cdot 60$

$f(x) = 30\left(x + 2\sqrt{(40-x)^2+400}\right)$

$f'(x) = 30\left(1 + \dfrac{(-2)(40-x)}{\sqrt{(40-x)^2+400}}\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{2(40-x)}{\sqrt{(40-x)^2+400}} = 1 \Rightarrow 4(40-x)^2 = (40-x)^2 + 400 \Rightarrow x = 40 - \dfrac{20}{\sqrt{3}}$

$\left\{f(0), f\left(40-\frac{20}{\sqrt{3}}\right), f(40)\right\} = \left\{1200\sqrt{5}, 1200 + 600\sqrt{3}, 1800\right\}$ kümesinin en az değeri 1800 olduğundan asfalt yol en az 1.800.000TL ye mal olur.

8) L uzunluğunda bir tel iki parçaya bölünerek bir çember ve bir kare yapılması isteniyor. Kare ile çemberin alanları toplamları minimum olması için çemberin yarıçapı ne olmalıdır?

Çözüm: $\underbrace{x}_{\text{çember}}\ \underbrace{L-x}_{\text{kare}}$

$$f(x)=\left(\frac{L-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

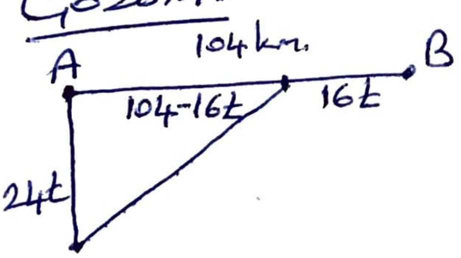
$$f'(x)=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{L-x}{4}\right)+\frac{2x}{4\pi}=\underset{(\pi)}{\frac{x-L}{8}}+\underset{(4)}{\frac{x}{2\pi}}=\frac{(\pi+4)x-\pi L}{8\pi}$$

		$\frac{\pi L}{\pi+4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Alanları toplamı minimum olması için $x=\frac{\pi L}{\pi+4}$ ve $r=\frac{x}{2\pi}=\frac{L}{2\pi+8}$ olmalıdır.

9) Sabah saat 09.00 da B gemisi A gemisine göre 104 km. doğudadır. B gemisi 16 km./s. hızla batıya, A gemisi ise 24 km./s. hızla güneye doğru hareket ediyor. Bu hareketine devam ederse, iki gemi birbirine ne zaman en yakın olacaklardır? Aralarındaki mesafe ne olur.

Çözüm:



$$d(t)=\sqrt{(104-16t)^2+(24t)^2}$$

$$d'(t)=\frac{(-32)(104-16t)+48\cdot(24t)}{2\sqrt{(104-16t)^2+(24t)^2}}$$

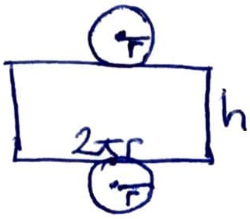
$$=\frac{832t-1664}{2\sqrt{(104-16t)^2+(24t)^2}}=0\Rightarrow t=2$$

		2	
$d'(t)$	$-$	0	$+$
$d(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

2 saat sonra, yani saat 11.00 de birbirine en yakın olur. Aralarındaki mesafe $d(2)=24\sqrt{13}$ olur.

10) Yüzey alanı S olan silindirler içinde hacmi en büyük olan silindirin boyutları nedir?

Çözüm:



$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow h = \frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V = \pi r^2 h = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cdot \frac{S-2\pi r^2}{2\cancel{\pi} \cancel{r}} = \frac{1}{2}(Sr - 2\pi r^3)$$

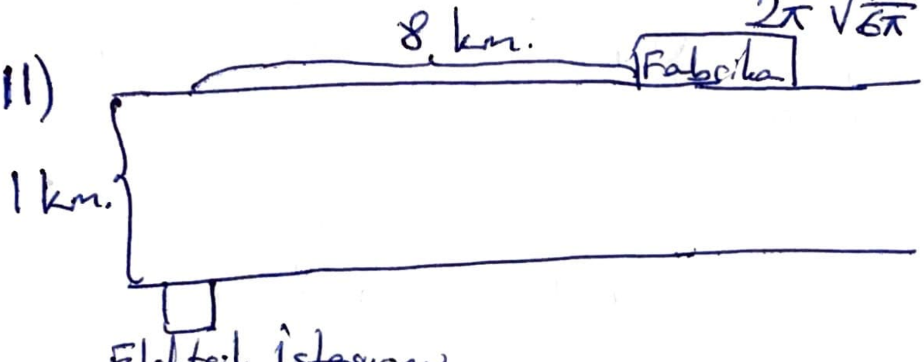
$$V' = \frac{1}{2}(S - 6\pi r^2) = 0 \Rightarrow r = \mp\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

	$-\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$		$\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$	
V'	$-$	0 $+$	0	$-$
V	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$

$r > 0$ dır. Hacmin en büyük olması için $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ ve

$$h = \frac{S - 2\cancel{\pi} \cdot \frac{S}{6\cancel{\pi}}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \sqrt{6\pi S}$$ olmalıdır.

11)



İstasyondan fabrikaya hava hattı ile kablo çekilecek olursa, km. başına 30TL harcanacaktır. Suyun altından çekilirse, km. başına 50TL. harcanacaktır. İstasyon ile fabrika arasında çekilecek kablonun en uygun maliyetini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = 50\sqrt{1+(8-x)^2} + 30x$

$$f'(x) = \frac{-50(8-x)}{\sqrt{1+(8-x)^2}} + 30 = 0 \Rightarrow \frac{5\cancel{0}(8-x)}{\sqrt{1+(8-x)^2}} = 3\cancel{0}$$

$$\Rightarrow 25(8-x)^2 = (1+(8-x)^2)9 \Rightarrow 16(8-x)^2 = 9 \Rightarrow x = \frac{29}{4}$$

$\{f(0), f(\frac{29}{4}), f(8)\} = \{400, 280, 290\}$ kümesinin en küçük değeri 280 olduğundan en uygun maliyet 280 TL. olur.