Tam Diferansiyel

Tek değişkenli fonksiyonlarda $y=f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli $dy=f'(x)dx=\frac{df}{dx}\cdot dx$ idi. $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli $dz=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ olarak tanımlanır.

Örnek: $z=xe^y$ fonksiyonunun dz tam diferansiyelini bulunuz.

Çözüm: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^y$ olduğundan

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=e^y dx+xe^y dy$$ olur.

Örnek: Bir dikdörtgenin bir kenarı $a=10$ cm. ve diğeri $b=24$ cm. dir. a kenarı 4 mm. arttırılır, b kenarı 1 mm. azaltılırsa köşegeni ne kadar değişir? Gerçek ve yaklaşık değişimi bulup, karşılaştırınız.

Çözüm: Köşegen uzunluğu $l=\sqrt{a^2+b^2}$ olduğundan

$dl=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}da+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}db$ olur. $a=10$, $b=24$, $da=0,4$, $db=-0,1$ alınırsa, $\underline{dl\cong 0,062}$ olur.

Gerçek değişim: $a_1=10+0,4=10,4$, $b_1=24-0,1=23,9$

$l_1=\sqrt{(10,4)^2+(23,9)^2}\cong 26,065$, $l=\sqrt{10^2+24^2}=26 \Rightarrow \underline{l_1-l=0,065}$

Örnek: $\sqrt{(2,97)^2+(4,07)^2}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$x_0=3$, $y_0=4$, $dx=-0,03$, $dy=0,07$ alınırsa,

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot(-0,03)+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot(0,07)$$

$$=\frac{-0,09+0,28}{5}=0,038$$

$f(3,4)$ de $+0,038$ değişim yaparak $f(2,97,\ 4.07)$ sayısının yaklaşık değerini elde ederiz.

$$\sqrt{(2,97)^2+(4,07)^2}\approx 5+0,038=5,038$$

Örnek: $(1,02)^{3,01}$ in yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm: $f(x,y)=x^y$, $x_0=1$, $y_0=3$, $dx=0,02$, $dy=0,01$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=yx^{y-1}dx+x^y.\ln x.dy$$

$$df=3.(0,02)+\underbrace{(\ln 1)}_{0}.(0,01)=0,06$$

$$f(1,3)=1^3=1\Rightarrow (1,02)^{3,01}\approx 1+0,06=1,06$$

Örnek: $\tan 46^\circ+\cos 88^\circ$ nin yaklaşık değerini bulunuz

Çözüm: $f(x,y)=\tan x+\cos y$, $x=45^\circ$, $y=90^\circ$, $dx=1^\circ=\frac{\pi}{180}$, $dy=\frac{-2\pi}{180}$

$$df=f_x dy+f_y dy=(1+\tan^2 x)dx+(-\sin y).dy=2.\frac{\pi}{180}-1.\frac{(-2\pi)}{180}$$

$$df=\frac{4\pi}{180}=\frac{\pi}{45}\Rightarrow \tan 46^\circ+\cos 88^\circ\approx\tan 45^\circ+\cos 90^\circ+\frac{\pi}{45}=1+\frac{\pi}{45}$$

Örnek: Bir şirket 25 cm. yüksekliğinde ve 5 cm. yarıçapında silindir şeklinde meyve suyu konservesi üretmektedir. Konservenin yarıçapı 0,1 cm. arttırılıp, yüksekliği 0,2 cm. azaltılırsa konservenin hacmi yaklaşık ne kadar değişir?

Çözüm: $V = \pi r^2 h \Rightarrow dV = \dfrac{\partial V}{\partial r} dr + \dfrac{\partial V}{\partial h} \cdot dh$

$\Rightarrow dV = 2\pi r h \, dr + \pi r^2 dh$

$h = 25$, $r = 5$, $dr = 0{,}1$ ve $dh = -0{,}2$ alınırsa,

$dV = 2\pi . 5 . 25 . (0{,}1) + \pi . 25 . (-0{,}2) = 20\pi$

Örnek: Bir elektrik direncindeki güç $P = \dfrac{E^2}{R}$ watt'tır. Eğer $E = 200$ volt ve $R = 8$ ohm ise, E 5 volt, R de 0,2 ohm azaltıldığı zaman güç ne kadar değişir?

Çözüm: $P = \dfrac{E^2}{R} \Rightarrow dP = \dfrac{\partial P}{\partial E} dE + \dfrac{\partial P}{\partial R} dR = \dfrac{2E}{R} dE - \dfrac{E^2}{R^2} dR$

$E = 200$, $R = 8$, $dE = -5$, $dR = -0{,}2$ alınırsa

$dP = -125$ olur, yani yaklaşık olarak 125 watt azalır.

Örnek: Kalp indisi $C = \dfrac{\text{kalp çıktısı}}{\text{vücut yüzey alanı}}$ ile hesaplanır. w kilogram ve h santimetre olarak ölçüldüğünde, vücut yüzey alanı $B = 71{,}84\, w^{0{,}425} h^{0{,}725}$ formülü ile verilir. Kalp çıktısı: 7 L/dak., Ağırlık: 70 kg. ve Yükseklik: 180 cm. ölçümlerine sahip birinin kalp indisini hesaplarken ağırlıktaki 1 kg.lık hata mı, yükseklikteki 2 cm. lik hata mı daha büyük etki yaratır.

Çözüm: $dC = \dfrac{7.(-0{,}425)}{71{,}84\, w^{1{,}425} h^{0{,}725}} dw + \dfrac{7.(-0{,}725)}{71{,}84\, w^{0{,}425} h^{1{,}725}} dh = -0{,}00000225\, dw - 0{,}0000049\, dh$

Yükseklik dh

Kapalı Fonksiyonların Türevi

$F(x,y,z)=0$ fonksiyonu verilsin. Zincir kuralından

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=0}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{=0}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dy}}_{=1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}}$$

Örnek: $z^3+xyz+xy^2-1=0$ ile verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonunun $z_x(1,1)$ ve $z_y(1,1)$ türevlerini bulunuz.

Çözüm: $x=1,\ y=1 \Rightarrow z^3+z+1-1=0 \Rightarrow z\underbrace{(z^2+1)}_{\neq 0}=0 \Rightarrow z=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-\frac{F_x(1,1,0)}{F_z(1,1,0)}=-\frac{yz+y^2}{3z^2+xy}\bigg|_{(1,1,0)}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\frac{F_y(1,1,0)}{F_z(1,1,0)}=-\frac{xz+2xy}{3z^2+xy}\bigg|_{(1,1,0)}=-\frac{2}{1}=-2$$

Örnek: $w=x^2+y^2+z^2$, $z^3-xy+yz+y^3=1$ ve x ile y bağımsız değişkenler ise, $(2,-1,1)$ noktasında $\frac{\partial w}{\partial x}=?$ $\frac{\partial w}{\partial y}=?$

Çözüm: $F(x,y,z)=z^3-xy+yz+y^3-1=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-y}{3z^2+y}=\frac{y}{3z^2+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-x+z+3y^2}{3z^2+y}=\frac{x-z-3y^2}{3z^2+y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\cdot\frac{y}{3z^2+y}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial x}(2,-1,1)=3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2y+2z\,\frac{x-z-3y^2}{3z^2+y}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial y}(2,-1,1)=-4$$

Örnek: F iki değişkenli türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $z=z(x,y)$, $F(x-az,y-bz)=0$ eşitliği ile tanımlı bir fonksiyon olduğuna göre $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

Çözüm: $u=x-az$, $v=y-bz$ olsun.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x}{F_u\cdot u_z+F_v\cdot v_z}=-\frac{F_u}{-aF_u-bF_v}=\frac{F_u}{aF_u+bF_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y}{F_u\cdot u_z+F_v\cdot v_z}=-\frac{F_v}{-aF_u-bF_v}=\frac{F_v}{aF_u+bF_v}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\cdot\frac{F_u}{aF_u+bF_v}+b\frac{F_v}{aF_u+bF_v}=1$$

Örnek: $z=xf\left(\frac{z}{y}\right)$ eşitliği ile verilen $z=z(x,y)$ fonksiyonunun $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm: $F(x,y,z)=xf\left(\frac{z}{y}\right)-z=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{f\left(\frac{z}{y}\right)}{xf'\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}-1}=-\frac{\frac{z}{x}}{\frac{x}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{xf'\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)}{\frac{x}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-1}=\frac{\frac{xz}{y^2}f'\left(\frac{z}{y}\right)}{\frac{x}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-1}$$

olduğundan

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{\frac{x}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-1}+\frac{\frac{xz}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)}{\frac{x}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-1}=\frac{z\left(-1+\frac{x}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)\right)}{\frac{x}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-1}$$

$$=z$$

İntegral İşareti Altında Türev

Sürekli $f(x,t)$ fonksiyonu $\{(x,t): a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. $a(t)$ ve $b(t)$ de (c,d) aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyon ise,

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{df(x,t)}{dt}\cdot dx + f(b(t),t)\cdot b'(t) - f(a(t),t)\,a'(t)$$

olur.

Örnek: $F(t)=\int_{t^3}^{2} \ln(1+x^2)\,dx$ ise, $F'(t)=?$

Çözüm: $$F'(t)=\int_{t^3}^{2}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\ln(1+x^2)\right)}_{0}dx+\ln(1+4).0-\ln\left(1+(t^3)^2\right).3t^2$$

$$=-3t^2.\ln(1+t^6)$$

Örnek: $F(t)=\int_{t}^{t^2}\frac{\cos(xt)}{x}\,dx \Rightarrow F'(t)=?$

Çözüm: $$F'(t)=\int_{t}^{t^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos(xt)}{x}\right)dx+\frac{\cos(t^2.t)}{t^2}\cdot 2t-\frac{\cos(t.t)}{t}\cdot 1$$

$$=\int_{t}^{t^2}\frac{-x\sin(xt)}{x}\,dx+\frac{2\cos(t^3)}{t}-\frac{\cos(t^2)}{t}$$

$$=\left(\frac{1}{t}\cos(xt)\Big|_{t}^{t^2}\right)+\frac{2\cos(t^3)-\cos(t^2)}{t}$$

$$=\frac{\cos(t^3)-\cos(t^2)}{t}+\frac{2\cos(t^3)-\cos(t^2)}{t}$$

$$=\frac{3\cos(t^3)-2\cos(t^2)}{t}$$

Örnek: $F(t)=\int_0^{t^2}\arctan\left(\frac{x}{t^2}\right)dx \Rightarrow F'(t)=?$

Çözüm: $F'(t)=\int_0^{t^2}\frac{-\frac{2xt}{t^4}}{1+\frac{x^2}{t^4}}dx+\arctan\left(\frac{t^2}{t^2}\right).2t-0$

$$\Rightarrow F'(t)=-t\int_0^{t^2}\frac{2x}{t^4+x^2}dx+\frac{\pi}{4}.2t$$

$$=-t.\ln(t^4+x^2)\Big|_0^{t^2}+\frac{\pi t}{2}$$

$$=-t\left(\ln(2t^4)-\ln(t^4)\right)+\frac{\pi t}{2}$$

$$=-t\ln 2+\frac{\pi t}{2}$$

Örnek: $y=\frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin[k(x-t)]dt$ ise, $y''+k^2y=?$

Çözüm: $y'=\frac{1}{k}\left[\int_0^x kf(t)\cos(k(x-t))dt+f(x).\underbrace{\sin 0}_{0}.1\right]$

$$\Rightarrow y'=\int_0^x f(t)\cos(k(x-t))dt$$

$$y''=\int_0^x f(t).(-k).\sin(k(x-t))dt+f(x).\cos 0.1$$

$$=-k\int_0^x f(t).\sin(k(x-t))dt+f(x)$$

olduğundan

$$y''+k^2y=-k\int_0^x f(t).\sin(k(x-t))dt+f(x)+k^2.\frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin(k(x-t))dt$$

$$=f(x)$$

Örnek: $F(x)=\int_0^{\ln x}\sin(\ln x-y).\cos y\,dy$ ise, $x^2F''(x)+xF'(x)+F(x)=?$

Çözüm: $F'(x)=\int_0^{\ln x}\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x-y)\cos y\,dy+\underbrace{\sin(\ln x-\ln x)}_{0}.\cos(\ln x).\frac{1}{x}-0$

$$=\frac{1}{x}\int_0^{\ln x}\cos(\ln x-y).\cos y\,dy$$

$$F''(x)=\frac{-1}{x^2}\int_0^{\ln x}\cos(\ln x-y).\cos y\,dy+\frac{1}{x}\left[\int_0^{\ln x}\left(-\frac{1}{x}\right)\sin(\ln x-y)\cos y\,dy+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\cos(\ln x-\ln x)}_{=1}.\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-0\right]$$

$$F''(x)=-\frac{1}{x^2}\left[\int_0^{\ln x}\cos(\ln x-y)\cos y\,dy+\int_0^{\ln x}\sin(\ln x-y)\cos y\,dy-\cos(\ln x)\right]$$

$$\Rightarrow x^2F''(x)+xF'(x)+F(x)=\cos(\ln x)$$

olur.