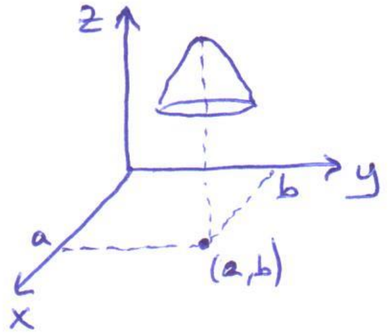
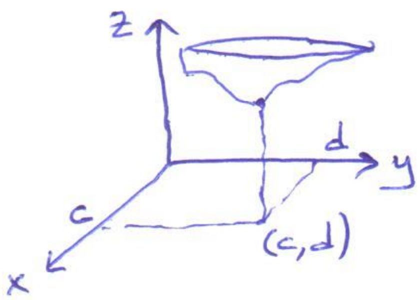
İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Ekstremumlar

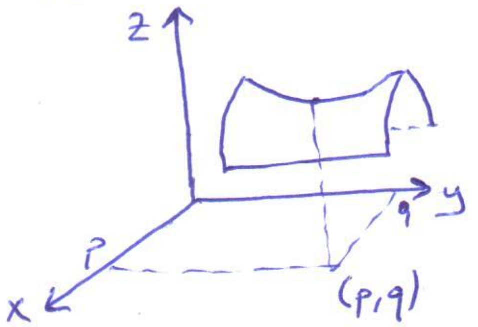
$A \subset \mathbb{R}^2$ bir açık küme, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $(a,b) \in A$ ve $(c,d) \in A$ olsun. (a,b) noktasının bir komşuluğundaki her (x,y) noktasında $f(x,y) < f(a,b)$ ise, f fonksiyonu (a,b) noktasında bir yerel maksimuma sahiptir denir.



(c,d) noktasının bir komşuluğundaki her (x,y) noktasında $f(c,d) < f(x,y)$ ise, f fonksiyonu (c,d) noktasında bir yerel minimuma sahiptir denir.



Yerel maksimum ve yerel minimum noktalara fonksiyonun yerel ekstremum noktaları denir. Eğer bir (p,q) noktasının her komşuluğunda $f(x_1,y_1) \leq f(p,q)$ olacak şekilde bir (x_1,y_1) noktası ve $f(x_2,y_2) \geq f(p,q)$ olacak şekilde bir (x_2,y_2) noktası varsa, (p,q) noktasına fonksiyonun eyer noktası denir.



$z = f(x,y)$ fonksiyonu için $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ise, (a,b) noktası kritik noktadır.

$z = f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ olsun. O halde,

1) $f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) < 0$ ise, (a,b) eyer noktasıdır.

2) $f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) > 0$ ise, (a,b) yerel minimum noktadır.

3) $f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) > 0$ ve $f_{xx}(a,b) < 0$ ise, (a,b) yerel maksimum noktadır.

Not: Bir B bölgesinde sürekli türevlere sahip bir fonksiyon mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini ya B nin içindeki bir yerel ekstremum noktasında ya da B nin sınırı üzerinde alır.

Örnek: $f(x,y) = -x^2 - 2y^2 + 6x + 4y$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm:
$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x+6=0 \Rightarrow x=3 \\ f_y(x,y) &= -4y+4=0 \Rightarrow y=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (3,1) \text{ kritik noktadır.}$$

$$f_{xx}(x,y) = -2, \quad f_{yy}(x,y) = -4, \quad f_{xy}(x,y) = 0$$

$$f_{xx}(3,1) \cdot f_{yy}(3,1) - f_{xy}^2(3,1) = 8 > 0 \quad \text{ve} \quad f_{xx}(3,1) = -2 < 0$$

olduğundan $(3,1)$ yerel maksimum noktadır. $f(3,1) = 11$ yerel maksimum değeridir.

Örnek: $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm:
$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3y - 3x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2 \\ f_y(x,y) &= 3x - 3y^2 = 0 \Rightarrow x = y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = y^4 \Rightarrow y(1-y^3) = 0$$
$$\Rightarrow y=0,\ y=1$$

O halde $(0,0)$ ve $(1,1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f_{xx}=-6x$, $f_{yy}=-6y$, $f_{xy}=3$ olur.

$f_{xx}(0,0).f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=-9<0$ olduğundan $(0,0)$ eyer noktasıdır.

$f_{xx}(1,1).f_{yy}(1,1)-f_{xy}^2(1,1)=27>0$ olduğundan $f_{xx}(1,1)=-6<0$ olduğundan $(1,1)$ noktası yerel maksimum noktadır.

Örnek: $f(x,y)=6xy^2-2x^3-3y^4$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: $f_x(x,y)=6y^2-6x^2=0 \Rightarrow y^2=x^2$

$f_y(x,y)=12xy-12y^3=0 \Rightarrow y(x-y^2)=0$

$\Rightarrow y(x-x^2)=0 \Rightarrow xy(1-x)=0$
$\Rightarrow x=0$ veya $y=0$ veya $x=1$

O halde $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f_{xx}(x,y)=-12x$, $f_{yy}(x,y)=12x-36y^2$, $f_{xy}(x,y)=12y$

$f_{xx}(0,0).f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=0$ olduğundan test sonuç vermez

$f_{xx}(1,1).f_{yy}(1,1)-f_{xy}^2(1,1)=144>0$ ve $f_{xx}(1,1)=-12<0$ olduğundan $(1,1)$ yerel maksimum noktadır.

$f_{xx}(1,-1).f_{yy}(1,-1)-f_{xy}^2(1,-1)=144>0$ ve $f_{xx}(1,-1)=-12<0$ olduğundan $(1,-1)$ noktası da yerel maksimum noktadır.

Örnek: $f(x,y)=2x^4+(x-y)^2$ fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: $f_x(x,y)=8x^3+2(x-y)=0$

$f_y(x,y)=-2(x-y)=0$

$\Rightarrow 8x^3=0 \Rightarrow x=0$
$x-y=0 \Rightarrow x=y=0$

O halde $(0,0)$ kritik noktadır.

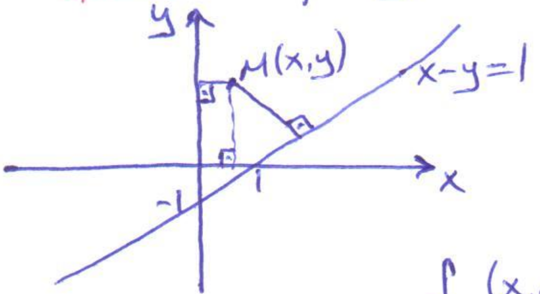
$f_{xx}(x,y)=24x^2+2$, $f_{yy}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=-2$

$f_{xx}(0,0).f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=0$ olduğundan test sonuç vermez

$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$ için $f(x,y)\geq 0$ ve $f(0,0)=0$ olduğundan $(0,0)$ noktası hem yerel minimum hem de mutlak minimum noktadır. $x \to \infty$ için $f(x,y) \to \infty$ olduğundan mutlak maksimum değeri yoktur.

Örnek: XOY düzleminde öyle bir $M(x,y)$ noktası bulunuz ki, bu noktanın x ekseni, y ekseni ve $x-y=1$ doğrusuna olan uzaklıklarının kareleri toplamı minimum olsun.

Çözüm: $f(x,y) = x^2+y^2+\left(\frac{x-y-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-xy-x+y+\frac{1}{2}$



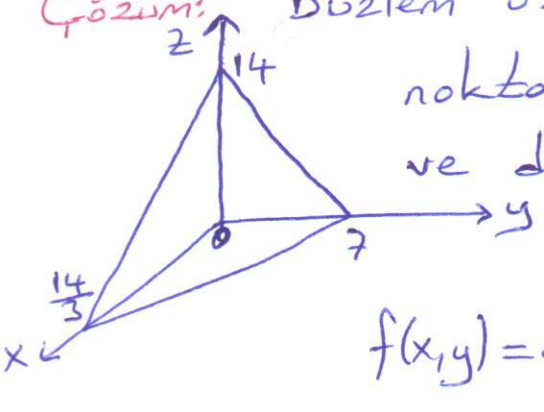
$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x-y-1=0 \\ f_y(x,y) &= 3y-x+1=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{4},\ y=\frac{-1}{4}$$

$$f_{xx}(x,y)=3,\quad f_{yy}(x,y)=3,\quad f_{xy}(x,y)=-1$$

$f_{xx}\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)-f_{xy}^2\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)=8>0$ ve $f_{xx}\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)=3>0$ olduğundan $\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)$ noktası yerel minimum noktadır. $x \to \mp\infty$ ve $y \to \mp\infty$ için $f(x,y) \to \infty$ olduğundan mutlak minimum sınırda değildir. O halde, $\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)$ noktası mutlak minimum noktadır. $f\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ br. olur. Böylece, $M=\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)$ olmalıdır.

Örnek: $3x+2y+z=14$ düzleminin koordinat başlangıcına en yakın noktasını bulunuz.

Çözüm: Düzlem üzerindeki (x,y,z) noktasının $(0,0,0)$



noktasına olan uzaklığı $d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$ ve düzlem üzerinde $z=14-3x-2y$ olduğundan

$$d=\sqrt{x^2+y^2+(14-3x-2y)^2} \text{ olur.}$$

$$f(x,y)=d^2=x^2+y^2+(14-3x-2y)^2 \text{ alınabilir.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y)=2x-6(14-3x-2y)=20x+12y-84=0 \\ f_y(x,y)=2y-4(14-3x-2y)=12x+10y-56=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)=(3,2)$$

O halde $(3,2)$ noktası kritik noktadır.

$$f_{xx}(x,y)=20\ ,\ f_{yy}(x,y)=10\ ,\ f_{xy}(x,y)=12$$

$$f_{xx}(3,2).f_{yy}(3,2)-f_{xy}^2(3,2)=56>0 \text{ ve } f_{xx}(3,2)=20>0$$

olduğundan $(3,2)$ yerel minimum noktadır. $x\to\mp\infty$ ve $y\to\mp\infty$ için $f(x,y)\to\infty$ olduğundan sınırda mutlak minimum değerini almaz. O halde, $(3,2)$ mutlak minimum nokta olduğundan koordinat başlangıcına en yakın noktadır.

Örnek: $x+y+z=60$ olan pozitif reel sayılar arasında xyz çarpımını en büyük yapacak olanları bulunuz.

Çözüm: $x+y+z=60 \Rightarrow z=60-x-y \Rightarrow xyz=xy(60-x-y)$

$$f(x,y)=xy(60-x-y)$$

$$f_x(x,y)=y(60-x-y)-xy=60y-2xy-y^2=y(60-2x-y)=0$$

$$f_y(x,y)=x(60-x-y)-xy=60x-x^2-2xy=x(60-x-2y)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y=0 \\ x=0 \end{array}} \text{ veya } \boxed{\begin{array}{c} y=0 \\ 60-x-2y=0 \end{array}} \text{ veya } \boxed{\begin{array}{c} 60-2x-y=0 \\ x=0 \end{array}} \text{ veya } \boxed{\begin{array}{c} 60-2x-y=0 \\ 60-x-2y=0 \end{array}}$$

O halde, $(0,0)$, $(60,0)$, $(0,60)$ ve $(20,20)$ kritik noktalardır.

$$f_{xx}(x,y)=-2y\ ,\ f_{yy}(x,y)=-2x\ ,\ f_{xy}(x,y)=-2x-2y+60$$

$$f_{xx}(0,0).f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=-60^2=-3600<0 \Rightarrow (0,0) \text{ eyer noktası}$$

$$f_{xx}(60,0).f_{yy}(60,0)-f_{xy}^2(60,0)=-3600<0 \Rightarrow (60,0) \text{ eyer noktası}$$

$f_{xx}(0,60)\cdot f_{yy}(0,60)-f_{xy}^2(0,60)=-3600<0 \Rightarrow (0,60)$ eyer noktasıdır

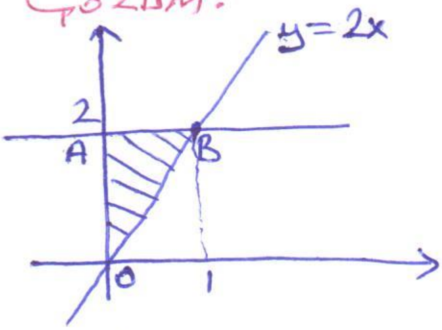
$f_{xx}(20,20)\cdot f_{yy}(20,20)-f_{xy}^2(20,20)=1200>0$ ve $f_{xx}(20,20)=-40<0$

olduğundan $(20,20)$, çarpımı en büyük yapacak sayıdır.

$x=y=20 \Rightarrow z=20$ olduğundan $x\cdot y\cdot z$ çarpımını en büyük yapan sayı $(x,y,z)=(20,20,20)$ olur.

Örnek: Birinci dörtte birlik bölgede $x=0$, $y=2$, $y=2x$ doğruları ile çevrili üçgen bölgede $f(x,y)=2x^2+y^2-4x-4y+1$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm:



$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y)=4x-4=0 \\ f_y(x,y)=2y-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)=(1,2)$$ kritik noktadır.

Mutlak ekstremumları ya bölge içindeki yerel ekstremumlarda yada bölgenin sınırı üzerinde aldığından bölgenin sınır noktalarını inceleyelim.

$[OA]$ üzerinde $x=0$ olduğundan $f(x,y)=f(0,y)=y^2-4y+1$ olur. $f'(0,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$ olduğundan $(0,2)$, $[OA]$ üzerinde kritik noktadır.

$[AB]$ üzerinde $y=2$ olduğundan $f(x,y)=f(x,2)=2x^2-4x-3$ olur. $f'(x,2)=4x-4=0 \Rightarrow x=1$ olduğundan $(1,2)$, $[AB]$ üzerinde kritik noktadır.

$[OB]$ üzerinde $y=2x$ olduğundan $f(x,2x)=6x^2-12x+1$ olur. $f'(x,2x)=12x-12=0 \Rightarrow x=1$ olduğundan $(1,2)$, $[OB]$ üzerinde kritik noktadır.

Herbir doğru parçasında mutlak ekstremum değeri, ya doğru parçasının içindeki kritik noktalarda yada doğru parçasının uç noktalarında alacağından kritik noktalar ve O, A, B köşe noktaları içinde en büyük değer mutlak maksimum değer ve en küçük değer de mutlak minimum değer olur.

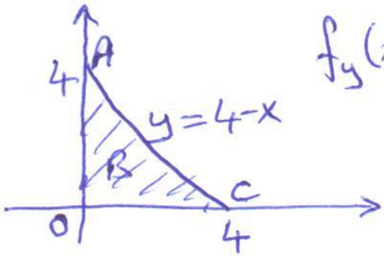
x	y	f(x,y)
0	2	−3
1	2	−5
0	0	1

O halde, mutlak minimum değeri −5 ve mutlak maksimum değeri 1 olur.

Örnek: $B=\{(x,y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq 4-x\}$ bölgesi üzerinde tanımlı $f(x,y)=xy(3-x-y)$ fonksiyonunun mutlak ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y)&=y(3-2x-y)=0\\ f_y(x,y)&=x(3-x-2y)=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}3-2x-y=0\\3-x-2y=0\end{aligned}} \text{ veya}$$



$$\boxed{\begin{aligned}y=0\\x=0\end{aligned}} \text{ veya } \boxed{\begin{aligned}y=0\\3-x-2y=0\end{aligned}} \text{ veya } \boxed{\begin{aligned}3-2x-y=0\\x=0\end{aligned}}$$

O halde $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$ ve $(1,1)$ kritik noktalardır.

$f(0,0)=0$, $f(3,0)=0$, $f(0,3)=0$, $f(1,1)=1$ olur.

Şimdi sınır üzerindeki ekstremum değerlerini bulalım.

$[OA]$ üzerinde $x=0$ olduğundan $f(x,y)=0$ olur.

$[OC]$ üzerinde $y=0$ olduğundan $f(x,y)=0$ olur.

$[A,C]$ üzerinde $y=4-x$ olduğundan $f(x,4-x)=x^2-4x$ olur.

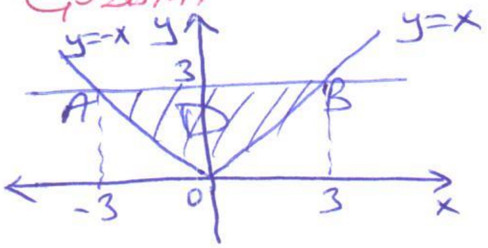
$f'(x,4-x)=2x-4=0\Longrightarrow x=2$ olduğundan $(2,2)$ kritik noktadır

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
3	0	0
0	3	0
1	1	1
2	2	-4
0	4	0
4	0	0

O halde mutlak minimum değeri -4 ve mutlak maksimum değeri 1 olur. Mutlak minimum noktası $(2,2)$ ve mutlak maksimum noktası $(1,1)$ dir.

Örnek: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=3,\ y=x,\ y=-x$ ile sınırlı bölge$\}$ olsun. $f(x,y)=2x^2-4x+y^2-4y+1$ fonksiyonunun D bölgesindeki yerel ve mutlak ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm:



$f_x(x,y)=4x-4=0 \Rightarrow x=1$

$f_y(x,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

O halde $(1,2)$ kritik noktadır.

$f_{xx}(1,2)\cdot f_{yy}(1,2)-f_{xy}^2(1,2)=8>0$ ve

$f_{xx}(1,2)=4>0$ olduğundan $(1,2)$ yerel minimum noktadır.

Şimdi sınır üzerindeki ekstremumları inceleyelim.

$[OA]$ üzerinde $y=-x$ olduğundan $f(x,-x)=3x^2+1$ olur.

$f'(x,-x)=6x=0 \Rightarrow x=0$ olduğundan $(0,0)$ kritik noktadır.

$[AB]$ üzerinde $y=3$ olduğundan $f(x,3)=2x^2-4x-2$ olur.

$f'(x,3)=4x-4=0 \Rightarrow x=1$ olduğundan $(1,3)$ kritik noktadır.

$[OB]$ üzerinde $y=x$ olduğundan $f(x,x)=3x^2-8x+1$ olur.

$f'(x,x)=6x-8=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$ olduğundan $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ kritik noktadır.

x	1	0	1	4/3	-3	3
y	2	0	3	4/3	3	3
$f(x,y)$	-5	1	-4	-13/3	28	4

$f(1,2)=-5$ mutlak minimum değerdir.

$f(-3,3)=28$ mutlak maksimum değerdir.

Lagrange Çarpanları Yöntemi

Ekstremum değerleri aranan fonksiyon iki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonu ve değişkenler $g(x,y)=0$ bağıntısını sağlıyorsa,

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

fonksiyonu gözönüne alınarak

$$h_x = f_x + \lambda g_x = 0$$
$$h_y = f_y + \lambda g_y = 0$$
$$h_\lambda = g = 0$$

sistemi bulunur. Bu sistemi sağlayan (x,y) noktaları içinde en büyük değere sahip olan mutlak maksimum değer ve en küçük değere sahip olan mutlak minimum değerdir.

Örnek: $f(x,y) = 3x+4y$ fonksiyonunun $x^2+y^2=1$ çemberi üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: $h(x,y,\lambda) = 3x+4y+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$h_x = 3+2\lambda x = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2\lambda}$$

$$h_y = 4+2\lambda y = 0 \Rightarrow y = \frac{-4}{2\lambda}$$

$$h_\lambda = x^2+y^2-1 = 0 \Rightarrow \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{16}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow 4\lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda = \mp\frac{5}{2}$$

$$\lambda = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{5},\ y = \frac{4}{5} \qquad f\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) = 5$$

$$\lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{5},\ y = \frac{-4}{5} \qquad f\left(-\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right) = -5$$

Mutlak minimum değer -5 ve mutlak maksimum değer 5 olur.

Örnek: $(0,0,0)$ noktasının $(x-y)^2-z^2=1$ yüzeyine olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z)=(x-y)^2-z^2-1=0$

$$h(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left[(x-y)^2-z^2-1\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} h_x=2x+2\lambda(x-y)=0 \Rightarrow 2\lambda(x-y)=-2x \\ h_y=2y-2\lambda(x-y)=0 \Rightarrow 2\lambda(x-y)=2y \end{array}\right\} \Rightarrow y=-x$$

$$2\lambda(x-(-x))=-2x \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{2}$$

$$h_z=2z-2\lambda z=0 \Rightarrow 2z(1-\lambda)=0 \Rightarrow z=0 \text{ veya } \lambda=1$$

$$h_\lambda=(x-y)^2-z^2-1=0$$

$\lambda=\frac{-1}{2}$ olduğundan $\lambda=1$ olamaz. O halde $z=0$ dır.

$y=-x$ ve $z=0$ ifadelerini $h_\lambda=0$ da koyalım.

$$h_\lambda=(x-(-x))^2-0^2-1=0 \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x=\mp\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \qquad f\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{-1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \qquad f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{2}$$

O halde uzaklık $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

Örnek: $f(x,y)=11-x^2-(y+3)^2$ fonksiyonunun $x^2+y^2=16$ çemberi üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimumunu bulunuz.

Çözüm: $h(x,y,\lambda)=11-x^2-(y+3)^2+\lambda(x^2+y^2-16)$

$$h_x=-2x+2\lambda x \Rightarrow 2(\lambda-1)x=0 \Rightarrow x=0 \text{ veya } \lambda=1$$

$$h_y=-2(y+3)+2\lambda y=0 \Rightarrow 2(\lambda-1)y-6=0 \Rightarrow y=\frac{3}{\lambda-1} \text{ ve } \lambda\neq 1 \text{ dir.}$$

$$h_\lambda=x^2+y^2-16=0 \xRightarrow{x=0} y=\mp 4$$

$f(0,4)=-38$ mutlak minimum değer

$f(0,-4)=10$ mutlak maksimum değer

Örnek: $x+y+z=10$ olan pozitif reel sayılar arasında $x^2y^3z^4$ çarpımını en çok yapacak olanları bulunuz.

Çözüm: $h(x,y,z,\lambda)=x^2y^3z^4+\lambda(x+y+z-10)$

$$h_x=2xy^3z^4+\lambda=0 \Rightarrow 2xy^3z^4=-\lambda$$
$$h_y=3x^2y^2z^4+\lambda=0 \Rightarrow 3x^2y^2z^2=-\lambda$$
$$h_z=4x^2y^3z^3+\lambda=0 \Rightarrow 4x^2y^3z^3=-\lambda$$
$$h_\lambda=x+y+z-10=0$$

$\Rightarrow 2xy^3z^4=3x^2y^2z^2 \Rightarrow \boxed{2y=3x}$

$\Rightarrow 2xy^3z^4=4x^2y^3z^3 \Rightarrow \boxed{z=2x}$

$x=0$ veya $y=0$ veya $z=0$ ise çarpım 0 olacağından $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ olarak alalım.

$y=\frac{3x}{2}$ ve $z=2x$ ifadelerini $h_\lambda=0$ da koyarsak

$$h_\lambda=x+\frac{3x}{2}+2x-10=0 \Rightarrow x=\frac{20}{9}$$

$$x=\frac{20}{9} \Rightarrow y=\frac{10}{3},\ z=\frac{40}{9}$$ olur.

O halde $(x,y,z)=\left(\frac{20}{9},\frac{10}{3},\frac{40}{9}\right)$ çarpımı maksimum yapar.

Örnek: $x^2+y^2+z^2=1$ küresindeki (x,y,z) noktasının santigrat cinsinden sıcaklığı $T(x,y,z)=400xyz^2$ dir. Küredeki en yüksek ve en düşük sıcaklıkların yerini bulunuz.

Çözüm: $h(x,y,z,\lambda)=400xyz^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$$h_x=400yz^2+2\lambda x=0$$
$$h_y=400xz^2+2\lambda y=0$$
$$h_z=800xyz+2\lambda z=0$$
$$h_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0$$

$h_z=0 \Rightarrow z=0$ veya $2\lambda=-800xy$

$z=0 \Rightarrow T(x,y,z)=0$ olur.

$2\lambda=-800xy$ olsun.

$h_x=400yz^2-800x^2y=0 \Rightarrow z^2=2x^2$ veya $y=0$

$h_y=400xz^2-800xy^2=0 \Rightarrow z^2=2y^2$ veya $x=0$

$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{2}+z^2=1 \Rightarrow z=\mp\frac{1}{\sqrt{2}},\ x=\mp\frac{1}{2},\ y=\mp\frac{1}{2}$

$x=0$, $y=0$ veya $z=0$ ise $T(x,y,z)=0$ olur.

$$T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=T\left(-\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=T\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$=50$ küredeki en yüksek sıcaklıktır.

$$T\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=T\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=T\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=T\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$=-50$ en düşük sıcaklıktır.

Örnek: Metal bir plakanın üzerindeki her (x,y) noktasındaki sıcaklık $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$ dir. Bir karınca, merkezi orijinde olan 5 br. yarıçaplı bir dairesel plaka üzerinde yürümektedir. Karıncanın karşılaşacağı en yüksek ve en düşük sıcaklıklar nedir?

Çözüm: $h(x,y,\lambda)=4x^2-4xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-25)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 8x-4y+2\lambda x=0 \Rightarrow 4x-2y=-\lambda x \\ h_y &= -4x+2y+2\lambda y=0 \Rightarrow 4x-2y=2\lambda y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\lambda y=-\lambda x \Rightarrow \lambda(2y+x)=0$$

$$h_\lambda = x^2+y^2-25=0$$

$\Rightarrow \lambda=0$ veya $x=-2y$

$\Rightarrow 4x-2y=0$ veya $x=-2y$

$\Rightarrow y=2x$ veya $x=-2y$

$$y=2x \overset{h_\lambda=0}{\Longrightarrow} x^2+4x^2=25 \Rightarrow \underline{x=\mp\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{y=\mp 2\sqrt{5}}$$

$$x=-2y \overset{h_\lambda=0}{\Longrightarrow} 4y^2+y^2=25 \Rightarrow \underline{y=\mp\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{x=\pm 2\sqrt{5}}$$

$T(\sqrt{5},2\sqrt{5})=0=T(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$ en düşük sıcaklıktır

$T(2\sqrt{5},-\sqrt{5})=125=T(-2\sqrt{5},\sqrt{5})$ en yüksek sıcaklıktır