Hafta 1

Mantık

Tanım: Doğru ya da yanlış hüküm bildiren bir ifadeye önerme denir. Önermenin sahip olduğu hüküm değerine önermenin doğruluk değeri denir. Eğer önerme doğru ise doğruluk değeri 1, yanlış ise 0 ile gösterilir.

Örn: p: 3 tek bir tamsayıdır ⟹ doğru önerme $p=1$

q: cumadan sonra pazar gelir. ⟹ yanlış önerme $q=0$

(!) Soru içeren cümleler önerme olamaz. ⟹ önerme değildir.

p: Sen kimsin? ⟹ önerme değildir.

q: Ne kadar ilginç bir soru ⟹ önerme değildir (Görecelidir)

r: Kapıyı aç! ⟹ Önerme değildir (Emir cümlesi)

(!) Basit bileşimlerine ayrılamayan önermelere ilkel (basit) önerme denir.

Tanım: Bazı bağlaçlar ve basit önermeler kullanılarak elde edilen önermelere bileşik önerme denir.

Bağlaçlar

1) Değil işlemi: Bir p önermesinden p nin değili olan (tam tersi) $\neg p$ önermesi elde edilir.

p: 3 tek bir tamsayıdır

$\neg p$: 3 tek tamsayı değildir.

(2) Birleştirme Bağlacı: "ve" ($\wedge$): p ve q önermelerinin birleşimi $p \wedge q$ ile gösterilir.

p: 10 çift sayıdır
q: 7 asaldır
} $p \wedge q$ = 10 çift sayıdır ve 7 asaldır.

(3) Ayırma Bağlacı: "veya" ($\vee$): $p \vee q$ ifadesi p ve q önermelerinin ayrılmasını gösterir.

$p \vee q$: 10 çift sayıdır veya 7 asaldır.

$p \vee q \Rightarrow$ En az bir yada 2 si doğru iken $p \vee q$ doğrudur.

(4) Gerektirme Bağlacı: "ise" ($\rightarrow$) p nin q yu gerektirmesi $p \rightarrow q$ şeklinde yazılır ve "p, q'yu gerektirir" şeklinde okunur.

$p \rightarrow q$: 10'nun çift sayı olması 7 nin asal olmasını gerektirir.

$p \rightarrow q$: Eğer 10 çift sayı ise o zaman 7 asaldır.

$p \rightarrow q$: 10 nun çift sayı olması, 7 nin asal olması için yeterdir.

(5) Çift Koşulluluk Bağlacı: "ancak ve ancak" ($\leftrightarrow$) p ve q önermelerinin çift koşullu olması $p \leftrightarrow q$ ile gösterilir ve "p ancak ve ancak q" şeklinde ya da "p gerek ve yeter şart q" okunur.

Örnek:

p: yüzmek için denize girilir.

q: yarın hava bulutlu olacak

r: bilgisayarlar yaygın olarak kullanılır.

basit önermeler olsun.

$(p \vee q) \leftrightarrow r$: yüzmek için denize girmek veya yarının havanın bulutlu olması için gerek ve yeter şart bilgisayarların yaygın olarak kullanılmasıdır.

$(r \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$: Eğer bilgisayarlar yaygın olarak kullanılıyor ve yarın hava bulutlu değil ise o zaman yüzmek için denize girilmez.

Doğruluk Tabloları

Bir önermenin doğruluk değerlerini gösteren tabloya doğruluk tablosu denir.

★ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ önermeler olmak üzere bileşik bir önerme için 2^n durum vardır.

Örn: $\neg p$ önermesi için tablo:

p	$\neg p$
0	1
1	0

(1 önerme = 2^1 durum)

Örn: $p \wedge q$ önermesinin doğruluk tablosu

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Örn: $p \vee q$ önermesinin doğ. tablosu

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a) m) $p \Rightarrow q$ önermesinin doğ. tablosu

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(a) m) $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğ. tablosu

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a) m) $\neg q \wedge (\neg r \Leftrightarrow \neg q)$ bileşik önermesinin doğ. tablosunu oluşturunuz.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$(\neg r \Leftrightarrow \neg q)$	$\neg q \wedge (\neg r \Leftrightarrow \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0

$p=0, q=0$ ve $r=0$ için önerme doğrudur.

$p=0, q=0$ ve $r=1$ için önerme doğru değildir.

(a) m) $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow r$ bileşik önermesinin doğ. tablosu.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \vee q) \wedge r \Rightarrow r$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

(5)

Totoloji ve Çelişki

Eğer bir bileşik önerme, önermeyi oluşturan bileşenlerinin her mümkün doğruluk değeri için doğru ise bu önermeye totoloji; eğer hepsi sıfır ise çelişki denir.

Örn) Bir önceki 2. örnekteki önerme bir totolojidir.

Örn) $(p \wedge q) \wedge (q \to \neg p)$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu?

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$ (A)	$\neg p$	$q \to \neg p$ (B)	$A \wedge B$
0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0

} çelişkidir bil. önerme çelişkidir

Mantık Kuralları

Tanım: p ve q önermeleri verilsin. Eğer p nin doğru (yanlış) olması için gerekli ve yeter şart q nun doğru (yanlış) olması ise o zaman p ile q mantıksal denktir, ve $p \equiv q$ ile gösterilir.

Örn) p ve $\neg(\neg p)$ önermelerinin tablosu;

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
0	1	0
1	0	1

yani $p \equiv \neg(\neg p)$

Örn) $p \wedge q$ ve $q \wedge p$ önermelerinin tablosu;

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

(Örn) $\neg p \vee q$ ve $p \Rightarrow q$ tabloları

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

2 önerme denk önermedir.

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ dur.

Mantık Kuralları

1) $\neg\neg p \equiv p$ (Çift değilleme kuralı)

2) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (De Morgan Kuralı)
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

3) $p \vee q \equiv q \vee p$ (Değişme Özelliği)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

4) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (Birleşme Özelliği)
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

5) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Dağılma Özelliği)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

6) $p \vee p \equiv p$ (Eş güçlülük (Idempotent) Kuralı.
$p \wedge p \equiv p$

7) $p \vee 0 \equiv p$ (Özdeşlik Kuralı)
$p \wedge 1 \equiv p$

8) $p \vee \neg p = 1$ (To) (Totoloji Olma Kuralı)
$p \wedge \neg p = 0$ (Fo)

9. $p \vee 1 \equiv 1$ (Baskın Olma Kuralı)
   $p \wedge 0 \equiv 0$

10. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

11. $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

12. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
    $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Dualite

Tanım! p bir önerme olsun. Eğer p; $\vee$ ve $\wedge$ dan başka bir bağlaç içermiyorsa ise o zaman p^d önermesi; p de sırasıyla $\wedge$ ve $\vee$'nin; $\vee$ ve $\wedge$ ile değişmesiyle; ve F_0 ve T_0'ın sırasıyla T_0 ve F_0 ile yer değiştirmesiyle elde edilen p^d önermesine p nin duali denir.

$T_0 \Rightarrow$ totoloji, $F_0 \Rightarrow$ Çelişki

Uyarı: p ilkel(basit) bir önerme ise p^d ve p ile $(\neg p)^d$ ve $(\neg p)$ aynıdır. p ilkel olmak üzere $p \vee \neg p$ ve $p \wedge \neg p$ birbirinin dualidir. Böylece $p \vee T_0$ ve $p \wedge F_0$ önermeleri birbirini dualidir.

Ör: p, q, r ilkel önermeler ve S bileşik önerme olmak üzere

$S: [(\neg p \vee q) \wedge F_0] \vee [(r \vee T_0) \neg p]$ 'nin duali,

$S^d: [(\neg p \wedge q) \vee T_0] \wedge [(r \wedge F_0) \vee \neg p]$ 'dir.

8

Teorem: p ve q, $\vee$ ve $\wedge$ dan başka bir mantıksal bağlaç içermeyen önermeler olsun. Eğer $p \equiv q$ ise $p^d \equiv q^d$ dir.

Özellikleri Kullanarak En Sade Biçim Bulma

a) ~~rn~~

$$\underbrace{[(p \vee q) \vee ((q \vee \neg r) \wedge (p \vee r))]}_{A} \overset{?}{\equiv} \underbrace{\neg(\neg p \wedge \neg q)}_{B}$$

Sol taraftan, sağ tarafı elde edelim.

$$\underbrace{[(p \vee q) \vee (q \vee \neg r)]}_{1} \wedge \underbrace{[(p \vee q) \vee (p \vee r)]}_{2} \quad \text{dağılma}$$

$1 \equiv [p \vee (q \vee (q \vee \neg r))]$ dağılma

$\equiv [p \vee ((q \vee q) \vee \neg r)]$ birleşme

$\equiv [p \vee (q \vee \neg r)]$ idempotent

$\equiv [(p \vee q) \vee \neg r]$ birleşme

değ. $2 \equiv [(q \vee p) \vee (p \vee r)]$

değ. $\equiv [q \vee (p \vee (p \vee r))]$

birleş. $\equiv [q \vee ((p \vee p) \vee r)]$

idempotent $\equiv [q \vee (p \vee r)]$

bir. ve değ. $\equiv [(p \vee q) \vee r]$

$1 \wedge 2$

$\equiv [(p \vee q) \vee \neg r] \wedge [(p \vee q) \vee r]$ dağılma

$\equiv [(p \vee q) \vee (\neg r \wedge r)]$ tersolma

$\equiv [(p \vee q) \vee 0]$ özdeşlik

$\equiv \underline{p \vee q}$

B de morgan

$B \equiv \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q)$

çift değilleme

$\equiv \underline{p \vee q}$

$A \equiv B$ 'dir

9

Ödev! p, q, r ililal önermeler olmak üzere; aşağıdaki önermelerin mantıksal denk olup-olmadığını gösteriniz.

(a) $(p \vee q) \rightarrow r$ ve $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

(b) $(p \wedge q) \rightarrow r$ ve $((p \wedge \neg r) \rightarrow (\neg q))$

Bir Gerektirmenin Tersi, Karşıtı ve Karşıt Tersi

Tanım! Bir $p \rightarrow q$ önermesi verilsin.

$\neg p \rightarrow \neg q$ önermesine $p \rightarrow q$ önermesinin tersi;

$q \rightarrow p$ önermesine $p \rightarrow q$ " karşıtı;

$\neg q \rightarrow \neg p$ önermesine $p \rightarrow q$ " karşıt tersi denir.

Örn p: Ali futbol oynar
q: Ali çalışkandır, önermeleri verilsin.

$p \rightarrow q$ (gerektirme): Eğer Ali futbol oynarsa o zaman çalışkandır.

Tersi: $(\neg p \rightarrow \neg q)$: Eğer Ali futbol oynamıyorsa o zaman çalışkan değildir.

Karşıtı: $(q \rightarrow p)$: Eğer Ali çalışkan ise o zaman futbol oynuyordur.

Karşıt Tersi: $(\neg q \rightarrow \neg p)$: Eğer Ali çalışkan değilse o zaman futbol oynamıyordur.

Örnekler

(1) p, q, r ilkel önermeleri verilsin. $[p \vee (q \wedge r)] \vee \neg\{p \vee (q \wedge r)\} \equiv T_0$ $(=1)$ olduğunu tablo yardımıyla ve mantık kurallarını kullanarak gösteriniz.

(1) Tablo:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$ (A)	$\neg A$ (B)	$A \vee B$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

old. dan T_0 'dır.

(2) Kurallar yardımıyla

$$[p \vee (q \wedge r)] \vee [\neg p \wedge \neg (q \wedge r)]$$

$$\equiv [p \vee (q \wedge r) \vee \neg p] \wedge [p \vee (q \wedge r) \vee \neg (q \wedge r)]$$

$$\equiv [\underbrace{p \vee \neg p}_{} \vee (q \wedge r)] \wedge [p \vee (q \wedge r) \vee \neg (q \wedge r)]$$

$$\equiv [T_0 \vee (q \wedge r)] \wedge [p \vee T_0]$$

$$\equiv T_0 \wedge T_0 \equiv \cancel{1}$$

2) Mantık kurallarını kullanarak:

$$\{[(p\wedge q)\wedge r] \vee [(p\wedge q)\wedge \neg r]\} \vee \neg q\} \Rightarrow p$$

önermesini sadeleştiriniz

$$\equiv [[(p\wedge q)\wedge (r\vee \neg r)] \vee \neg q] \Rightarrow p$$

$$\equiv [[(p\wedge q)\wedge T_0] \vee \neg q] \Rightarrow p$$

$$\equiv [(p\wedge q)\vee \neg q] \Rightarrow p$$

$$\equiv [(p\vee \neg q)\wedge (q\vee \neg q)] \Rightarrow p$$

$$\equiv [(p\vee \neg q)\wedge T_0] \Rightarrow p$$

$$\equiv (p\vee \neg q) \Rightarrow p$$

$$\equiv \neg(p\vee \neg q)\vee p$$

$$\equiv (\neg p\wedge q)\vee p \equiv (\neg p\vee p)\wedge (q\vee p)$$

$$\equiv T_0\wedge (q\vee p) \equiv \underline{q\vee p}$$

3) p ve q ilkel önermeler olmak üzere; aşağıdaki ifadelerin dualini yazınız.

(a) $r: q \rightarrow p$ ise r^d ?

$r: \neg q \vee p$ olur. O zaman, $r^d: \neg q \wedge p$

(b) $r: p \rightarrow (q\vee r)$ ise $r^d = ?$

$r: \neg p \vee (q\vee r)$ old. dan $r^d: \underline{\neg p \wedge (q\wedge r)}$