FONKSİYONUN LİMİTİ

f, (a,b) aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. x değişkeni bu aralıkta x_0 değerine (f, x_0 da tanımlanmamış olabilir) yaklaştığında $f(x)$, bir l sayısına yaklaşıyorsa $x \to x_0$ için $f(x)$ in limiti l dir denir ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ile gösterilir. Bu tanımda $x \neq x_0$ dır ve $f(x_0) = l$ olmayabilir.

x değişkeni x_0 değerine sağdan yaklaştığında $f(x)$, l_1 sayısına yaklaşıyorsa $x \to x_0$ için $f(x)$ in sağdan limiti l_1 dir denir ve $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ ile gösterilir.

x değişkeni x_0 değerine soldan yaklaştığında $f(x)$, l_2 sayısına yaklaşıyorsa $x \to x_0$ için $f(x)$ in soldan limiti l_2 dir denir ve $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$ ile gösterilir.

Sağdan ve soldan limitler var ve birbirine eşit ise, limit vardır, yani $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ olur.

Limit Kuralları:

f ve g, $x = a$ noktasında limiti mevcut iki fonksiyon olsun.

1) $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} (k_1 f(x) + k_2 g(x)) = k_1 \lim\limits_{x \to a} f(x) + k_2 \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olur.

2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ ise, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ olur.

4) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)|$

5) $\lim_{x\to a} (f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$

6) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

7) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$ ve a nın bir komşuluğunda $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ise, $\lim_{x\to a} h(x) = l$ dir.

8) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ve a'nın bir komşuluğunda $|g(x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı var ise (yani g sınırlı ise), $\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = 0$ olur.

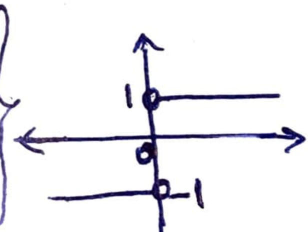
9) P(x) bir polinom olmak üzere, $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ dır.

Örnekler:

1) $f: \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında limiti var mıdır? Gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

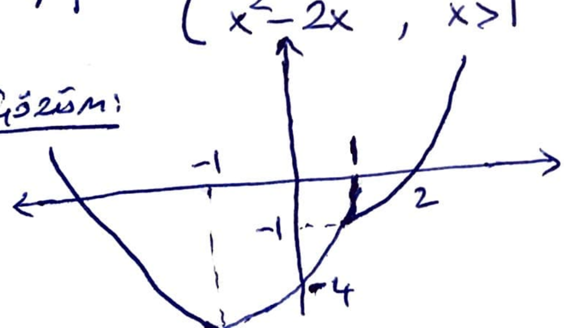
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$



$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan $x=0$ da limit yoktur.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-4, & x \leq 1 \\ x^2-2x, & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasında limiti var mıdır?

Çözüm:



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+2x-4) = -1$

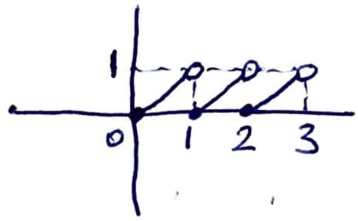
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2-2x) = -1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = -1$

3) $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonunun $x=1$ ve $x=\frac{3}{2}$ noktalarındaki limitleri var ise bulunuz

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+}(x-[\![x]\!]) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0 \\ &\lim_{x\to 1^-}(x-[\![x]\!]) = \lim_{x\to 1^-}(x-0) = 1 \end{aligned}\right\}$$



$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan $x=1$ de limit yoktur.

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}}(x-[\![x]\!]) = \lim_{x\to \frac{3}{2}}(x-1) = \frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} [\![3x+1]\!] = ?$

Çözüm: $x > \frac{1}{3} \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow 3x+1 > 2$

$x < \frac{1}{3} \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow 3x+1 < 2$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to \frac{1}{3}^+} [\![3x+1]\!] = \lim_{x\to \frac{1}{3}^+} 2 = 2 \\ &\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} [\![3x+1]\!] = \lim_{x\to \frac{1}{3}^-} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{3} \text{ de limit yoktur.}$$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sgn(x-1)\cdot|x-1|}{x-1} = ?$

Çözüm: $sgn(x-1) = \begin{cases} 1, & x>1 \\ 0, & x=1 \\ -1, & x<1 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} \frac{sgn(x-1)\cdot|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1\cdot(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \\ &\lim_{x\to 1^-} \frac{sgn(x-1)\cdot|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(-1)\cdot(-x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{sgn(x-1)\cdot|x-1|}{x-1} = 1$$

6) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-3| + 2\,sgn(x-1) - x}{[\![-x+2]\!]} = ?$

<u>Çözüm:</u> $sgn(x-1) = \begin{cases} 1, & x>1 \\ 0, & x=1 \\ -1, & x<1 \end{cases}$ $\qquad x<1 \Rightarrow -x>-1 \Rightarrow -x+2>1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-3| + 2\,sgn(x-1) - x}{[\![-x+2]\!]} = \lim_{x \to 1^-} \frac{|x-3| + 2.(-1) - x}{1} = \frac{2-2-1}{1}$$

$$= -1$$

7) $\lim\limits_{x \to \pi^-} [\![\cos x]\!]^{[\![\sin x]\!]} = ?$

<u>Çözüm:</u> $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ için $-1 < \cos x < 0$ ve $0 < \sin x < 1$ dır.

$$\lim_{x \to \pi^-} [\![\cos x]\!]^{[\![\sin x]\!]} = \lim_{x \to \pi^-} (-1)^0 = 1$$

8) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{[\![1-3x]\!] + [\![3x-1]\!]}{sgn(4-x^2) + |x-2|} = ?$

<u>Çözüm:</u> $x>2 \Rightarrow 3x>6 \Rightarrow -3x<-6 \Rightarrow -3x+1<-5$

$x>2 \Rightarrow 3x>6 \Rightarrow 3x-1>5$

		-2		2	
$4-x^2$	−	0	+	0	−

$x>2 \Rightarrow sgn(4-x^2) = -1$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{[\![1-3x]\!] + [\![3x-1]\!]}{sgn(4-x^2) + |x-2|} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-6+5}{-1+x-2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x+3)}{x+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

10) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2+2x+4}$

$= \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

11) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h} = ?$

Çözüm: $x = \sqrt{9+h}$ dönüşümü yapılırsa $h \to 0$ için $x \to 3$ olur.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{6}$

12) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h} = ?$

Çözüm: $x = \sqrt[3]{8+h}$ dönüşümü yapılırsa $h \to 0$ için $x \to 2$ olur.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2+2x+4}$

$= \dfrac{1}{12}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = ?$

Çözüm: $t = \sqrt[6]{1+x}$ dönüşümü yapılırsa $x \to 0$ için $t \to 1$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3-1}{t^2-1} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \dfrac{3}{2}$

14) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\underset{(x^2+2x+4)}{\dfrac{1}{x-2}}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x^2+2x+4}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=?$

Çözüm: I. Yol: $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ ve $-1\leq \sin\dfrac{1}{x}\leq 1$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ olur.

II. Yol: $x\geq 0$ için $-x\leq x\sin\dfrac{1}{x}\leq x$ olur. $x<0$ için

$-x\geq x\sin\dfrac{1}{x}\geq x$ olur. $\lim\limits_{x\to 0}(-x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ olur.

16) $\lim\limits_{x\to 0} x^4.\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} x^4=0$ ve $-1\leq\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\leq 1$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=0$ olur.

II. Yol: $-1\leq\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\leq 1 \Longrightarrow -x^4\leq x^4\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\leq x^4$ ve

$\lim\limits_{x\to 0}(-x^4)=\lim\limits_{x\to 0} x^4=0$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=0$ olur.

Sonsuz Limitler:

1) $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n\in\mathbb{N})$

2) $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{a_nx^n+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\dots+b_1x+b_0} = \begin{cases} 0 & , \ n<m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & , \ n=m \\ \mp\operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)\cdot\infty & , \ n>m \end{cases}$

3) $a>1$ için $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ olur.

4) $0<a<1$ için $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ olur.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} v(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x).v(x)=k$ ise,

$\lim\limits_{x\to\infty} (1+u(x))^{v(x)} = e^k$ olur.

7) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$

Örnekler:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{-4x^2+2x-1} = \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2}$

II. Yol: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(2-\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(-4+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right)} = \dfrac{-1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-2x+1}{-x^2-4x} = +\operatorname{sgn}\left(\dfrac{5}{-1}\right)\cdot\infty = -\infty$

II. Yol: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(5x-\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(-1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}\right)} = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{[\![x]\!]} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[\![x]\!]+k}{[\![x]\!]} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\overbrace{\dfrac{k}{[\![x]\!]}}^{\to 0}\right) = 1$

$x=[\![x]\!]+k$, $k\in[0,1)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right]} = \dfrac{3(0+1)}{0+1} = 3$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-10^{15-x}}{1+\frac{2^x}{3^x}} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-10^{15}\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^x}^{\to 0}}{1+\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}_{\to 0}} = \dfrac{2-0}{1+1} = 2$

6) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{[\![x]\!]^2-25}{x+5} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{[\![x]\!]^2-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{(-5)^2-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^+} 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{[\![x]\!]^2-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{(-6)^2-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{11}{x+5} = -\infty$

Limit yoktur.

7) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{[\![x^2]\!]-25}{x+5} = ?$

$(x>-5 \Rightarrow x^2<25)$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{[\![x^2]\!]-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{24-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{-1}{x+5} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{[\![x^2]\!]-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{25-25}{x+5} = \lim\limits_{x\to -5^-} 0 = 0$

$(x<-5 \Rightarrow x^2>25)$

8) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = ?$

Çözüm: $3x = \frac{1}{t}$ dönüşümü yapılırsa $x\to 0$ için $t\to\infty$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t} = \left(\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^3 = e^3$

9) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = ?$

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$

$x=4n$ dönüşümü yapılırsa $n\to\infty$ için $x\to\infty$ olur.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \sqrt{e}$$

II. Yol: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{e}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{2}\right) = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n}\left(2n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$$

10) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+4}\right)^{2x+3} = ?$

Çözüm: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+4}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2x-1}{x^2+4}\right)^{2x+3} \underset{\uparrow}{=} e^4$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+3 & x^2+4 \\ \underline{x^2+4} & 1 \\ 2x-1 & \end{array}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2+4} = 0,\ \lim_{x\to\infty}(2x+3) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)(2x+3)}{x^2+4} = 4}$$

11) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = ?$

Çözüm: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}\right)}} =$

12) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right) = ?$

Çözüm: $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ yardımıyla trigonometrik fonksiyonların limiti hesaplanır. $\lim\limits_{u(x)\to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ dir.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ dir.

Örnekler:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$

$= \frac{3}{5}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{5}{x}\right) = ?$

Çözüm: $t = \frac{5}{x}$ dönüşümü yapılırsa $t \to 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \frac{5}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{5}{t} \cdot \sin t = 5 . \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 5$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2} = 2 . \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} \cdot \overbrace{\lim\limits_{x\to 2} (x+2)}^{4}$

$\boxed{\begin{array}{l} t = x^2-4 \\ x\to 2 \Rightarrow t\to 0 \end{array}}$

$= 4 . \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 4$

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\sin x} = \dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = ?$

Çözüm: $x = \sin t$ dönüşümü yapılırsa $x \to 0$ için $t \to 0$ olur

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos x}$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} \cdot 9}$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2}{\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \right)^2} = \frac{2}{9}$$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1-\cos x} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1-\cos x} \cdot \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1-\cos^2 x} \cdot (1+\cos x)$

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\sin^2 x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} (1+\cos x) = 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 2$$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{1}{\cos x}}{x^2} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$= \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}}_{=1} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \dfrac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\cos x + 1}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x + 1} = -\dfrac{1}{2}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x - \sin 2x}{2x + 3\sin 4x} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x - \sin 2x}{2x + 3\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cancel{x}\left(3 - \dfrac{\sin 2x}{2x}\right)}{4\cancel{x}\left(\dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{\sin 4x}{4x}\right)} = \dfrac{2(3-1)}{4\left(\frac{1}{2}+3\right)}$

$= \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x} = ?$

Çözüm: $t = 1-x$ dönüşümü yapılırsa $x \to 1$ için $t \to 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{t \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$= \dfrac{\pi}{2} \cdot 1 = \dfrac{\pi}{2}$

13) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = ?$

Çözüm: $t = 1-x$ dönüşümü yapılırsa $x \to 1$ için $t \to 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \cdot \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 0} t \cdot \cot\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot \dfrac{\pi/2}{\pi/2}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \cdot \lim\limits_{t\to 0} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\sin x+\cos x}=?$

<u>Çözüm:</u> $t=\frac{\pi}{2}-x$ dönüşümü yapılırsa $x\to\frac{\pi}{2}$ için $t\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x-1}{1-\sin x+\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t+\sin t-1}{1-\cos t+\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}-}{1-\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{2\sin\frac{t}{2}}\left(-\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)}{\cancel{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)}=1$$

15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=?$

<u>Çözüm:</u> $t=x-a$ dönüşümü yapılırsa $x\to a$ için $t\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t.\cos a+\sin a.\cos t-\sin a}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t.\cos a+\sin a(\cos t-1)}{t}$$

$$=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}.\cos a+\sin a.\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}.\frac{\cos t+1}{\cos t+1}$$

$$=\cos a+\sin a.\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2 t-1}{t}.\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t+1}$$

$$=\cos a+\frac{\sin a}{2}.\lim_{t\to 0}\frac{-\sin^2 t}{t}$$

$$=\cos a-\frac{\sin a}{2}.\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}.\lim_{t\to 0}\sin t$$

$$=\cos a$$

16) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan(\pi x)}{x+2}=?$

<u>Çözüm:</u> $t=x+2$ dönüşümü yapılırsa $x\to -2$ için $t\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\tan(\pi x)}{x+2}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(\pi t-2\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(\pi t)}{\pi t}.\pi=\pi$$