10. BÖLÜM PROBLEM VE ÇÖZÜMLERİ

10.8: Bir çamaşır makinesi çalıştırılınca kazanın hareketi 8 s de 5 devir/s hız kazanıyor; bu anda elektriği kesince 12 s de duruyor. Bu çalışma esnasında kazan kaç devir yapar?

Not: Burada hareketi iki adımda inceleyebiliriz. Hızlanma dönemi ve yavaşlama dönemi

Hızlanma dönemi

$\omega_i = \omega_0 = 0$

$\omega_s = \omega = 5$ devir/s

(1 devir = 2π radyan)

$\omega_s = \omega = 5 \cdot 2\pi = 10\pi$ rad/s

$t = 8$ s

$\Delta\theta \equiv \theta_1 = \bar{\omega}\, t$

$\theta_1 = \frac{1}{2}(0 + 10\pi) \times 8$

$\theta_1 = 40\pi$ radyan

Yavaşlama Dönemi

$\omega_i' = \omega = 10\pi$ rad/s

$\omega_s' = \omega' = 0$

$t' = 12$ s

Not: Sabit ivmeli hareketler için

$\bar{\omega} = \frac{\omega_i + \omega_s}{2}$; $\theta = \bar{\omega}\, t$

$\theta_2 = \bar{\omega}'\, t'$

$\theta_2 = \frac{1}{2}(10\pi + 0) \times 12 \Rightarrow \theta_2 = 60\pi$ rad.

$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 100\pi$ radyan.

$n \cdot 2\pi = \theta \Rightarrow n = 50$ devir.

İkinci Çözüm

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$10\pi = 0 + \alpha \cdot 8 \Rightarrow \alpha = 1{,}25\pi$ rad/s²

$\theta_1 = \overset{0}{\omega_0} t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\theta_1 = \frac{1}{2}(1{,}25\pi) \cdot 8^2$

$\theta_1 = 40\pi$ radyan

$\omega' = \omega + \alpha' t'$

$0 = 10\pi + \alpha' \cdot 12$

$\alpha' = -\frac{5\pi}{6}$ rad/s²

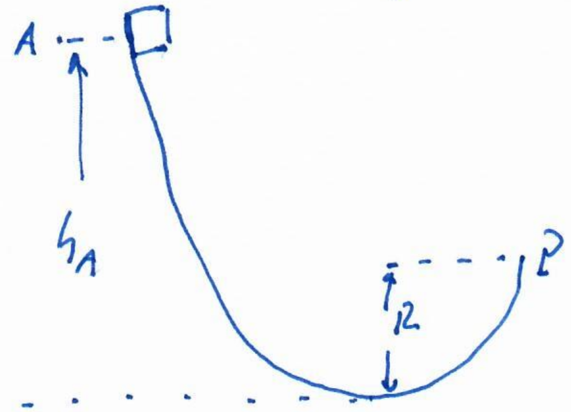
$\theta_2 = \omega t' + \frac{1}{2}\alpha' t'^2$

$\theta_2 = 10\pi \cdot 12 + \frac{1}{2}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \cdot 12^2$

$\theta_2 = 60\pi$ rad.

$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 100\pi$

10.18: 6 kg'lık bir blok, şekilde görüldüğü gibi sürtünmesiz ray üzerinde A'dan serbest bırakılıyor. Blok P noktasına geldiği zaman merkezcil ve teğetsel ivmesini bulunuz.



$m = 6\ kg$

$h_A = h = 5{,}0\ m$

$R = 2{,}0\ m$

$a_r = ?\ ,\ a_t = ?$

Blok sürtünmesiz ray üzerinde hareket ettiği için (korunumlu yani yerçekimi kuvvetinin etkisinde hareket ettiği için) hareket boyunca mekanik enerji korunur.

$$E_A = E_P \Rightarrow \overset{0}{K_A} + U_A = K_P + U_P \Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_P^2 + \cancel{m}gR$$

$$g(h-R) = \frac{1}{2}v_P^2 \Rightarrow v_P = \sqrt{2 \times g \times (h-R)}$$

$$v_P = \sqrt{2 \cdot 9.8(5{,}0-2{,}0)} \Rightarrow v_P = 7{,}67\ m/s \quad \text{veya} \quad v_P^2 = 58{,}8\ (m/s)^2$$

$$a_r = \frac{v_P^2}{R} \Rightarrow a_r = \frac{58{,}8}{2} \Rightarrow \underline{a_r = 29{,}4\ m/s^2}$$ (İvmenin yönü daire merkezine doğru)

$a_t = g = 9{,}8\ m/s^2$ (Cisim yerçekimi kuvvetinin etkisinde hareket ediyor. Yönü her noktada $-y$ yönünde)

10.24: Bir beyzbol topunun (yarıçapı 3,8 cm) kütle merkezi 38 m/s hızla hareket ediyor. Top, kütle merkezinden geçen eksen etrafında 125 rad/s açısal hız ile dönüyor. Dönme kinetik enerjisinin, öteleme kinetik enerjisine oranını hesaplayınız. Topu düzgün bir küre şeklinde alınız.

$r = 3{,}8\ cm = 3{,}8 \cdot 10^{-2}\ m$

$\upsilon = 38\ m/s$

$\omega = 125\ rad/s$

$\frac{K_D}{K_{\ddot{O}}} = ?$

$K_{\ddot{O}}$: Öteleme kinetik enerjisi

K_D : Dönme " "

$K_{\ddot{O}} = \frac{1}{2} m \upsilon^2$;

$K_D = \frac{1}{2} I \omega$; $I = \frac{2}{5} m r^2$ (Dönme eksenine göre eylemsizlik momenti)

$$\frac{K_D}{K_{\ddot{O}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{5}\cancel{m} r^2\right)\omega^2}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon^2}$$

$$\frac{K_D}{K_{\ddot{O}}} = \frac{2}{5} r^2 \frac{\omega^2}{\upsilon^2} \Rightarrow \frac{K_D}{K_{\ddot{O}}} = \frac{2}{5}(3{,}8 \cdot 10^{-2})^2 \frac{(125)^2}{(38)^2}$$

$$\frac{K_D}{K_{\ddot{O}}} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$$

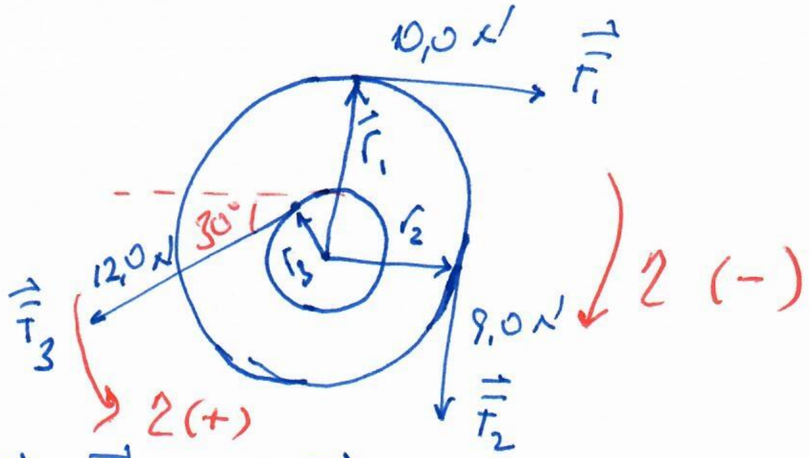
10.33: Şekilde görülen tekerin O'dan geçen eksene göre net torkunu, $a = 10$ cm, $b = 25$ cm alarak bulunuz.

$a = 10\,\text{cm} = 0,1\,\text{m}$

$b = 25\,\text{cm} = 0,25\,\text{m}$

$r_1 = r_2 = b$

$r_3 = a$



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ olup $\vec{\tau}$ torku vektörel bir büyüklüktür.

$|\vec{\tau}| \equiv \tau = rF\sin\phi$ (ϕ; $\vec{r}$ ile $\vec{F}$ arasındaki açı)

Genel olarak τ torku sistemi saatin dönme yönünde döndürüyorsa torkun işaretini negatif, saatin dönme yönünün tersine döndürüyorsa torkun işaretini pozitif alırız.

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \Rightarrow$

$\tau = -r_1F_1 - r_2F_2 + r_3F_3$

$\tau = -0,25\cdot 10,0 - 0,25\cdot 9,0 + 0,1\cdot 12 \Rightarrow \tau = -3,55\ \text{Nm}$

(−) işareti üç kuvvetin etkisinde sistemin saatin dönme yönünde döndüğünü gösterir.

Ayrıca $\tau_3 = r_3F_3\sin(90°)$ (Teğet değme noktasında yarıçapa diktir.)

802

10.37: Kütlesi 0,75 kg olan bir model uçak, 30 m yarıçaplı bir daire üzerinde uçacak şekilde bir ipe bağlanmıştır. Uçak motoru bağlama ipine dik 0,80 N'luk bir itme sağlamaktadır.

a) Daire merkezine göre motor kuvvetinin oluşturduğu torku bulunuz.

b) Bu uçuş düzeyinde uçağın açısal ivmesini bulunuz.

c) Uçağın uçuş yörüngesine teğet çizgisel ivmesini bulunuz.

$m = 0{,}75$ kg

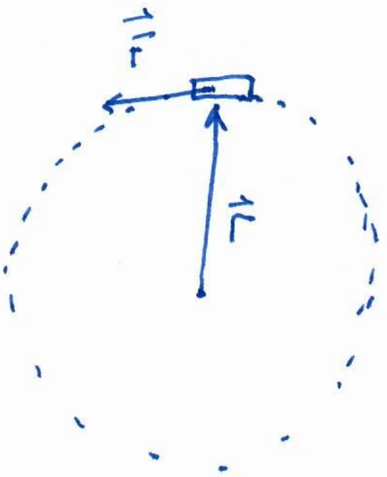
$r = 30$ m

$F = 0{,}80$ N

a) $\tau = ?$

b) $\alpha = ?$

c) $a_t = ?$



a) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = |\vec{\tau}| = rF\sin(90°) \Rightarrow \tau = rF$

$\tau = 30 \times 0{,}80 \Rightarrow \tau = 24{,}0$ N.m

b) $\tau = I\alpha$; $I = mr^2 \Rightarrow I = 0{,}75(30)^2 \Rightarrow I = 675$ kgm^2

$24{,}0 = 675 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 3{,}56 \times 10^{-2}$ rad/s^2

c) $F = ma_t \Rightarrow a_t = \dfrac{0{,}80}{0{,}75} \Rightarrow a_t = 1{,}07$ m/s^2

10.40: Yarıçapı 0,5 m ve kütlesi 100 kg olan taştan yapılmış kalın disk şeklindeki bir çömlekçi çarkı, 50 devir/dak. hızla serbestçe dönüyor. Çömlekçi, çarkın çevresine ıslak bir bezle bastırarak yarıçap boyunca içe doğru 70 N'luk bir kuvvet uyguluyor ve çarkı 6 s'de durdurabiliyor. Çark ile ıslak bez arasındaki kinetik sürtünme katsayısını bulunuz.

$r = 0,5\ m$

$m = 100\ kg$

(Disk şeklinde)

$\omega_0 = 50\ devir/dak$

$F = 70\ N$

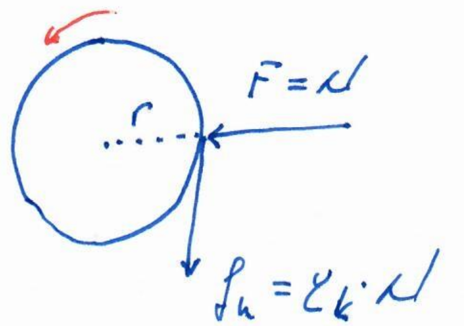
$t = 6\ s$; $\omega = 0$

$\mu_k = ?$

Not: r yarıçaplı m kütleli diskin eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2} m r^2$ dir.

$\omega_0 = 50 \frac{devir}{dak} \Rightarrow \omega_0 = 50 \cdot \frac{2\pi\ rad}{60\ s}$

$\omega_0 = 5,24\ rad/s$



$I = \frac{1}{2} m r^2$

$I = \frac{1}{2} \cdot 100 (0,5)^2 \Rightarrow I = 12,5\ kgm^2$

$\tau = I\alpha$; $\tau = r f_k$

F=N=70 N sabit, dolayısıyla f_k sabittir. O zaman disk sabit açısal ivme ile yavaşlayarak duracaktır.

$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow 0 = 5,24 + \alpha \cdot 6 \Rightarrow \alpha = -8,73\ \frac{rad}{s^2}$

$\tau = I\alpha \Rightarrow \tau = 12,5 \times (-0,873) \Rightarrow \tau = -10,9\ N.m$

$\tau = r f_k \Rightarrow f_k = 21,8\ N$

Not: Torkun (τ) büyüklüğü 10,9 N dur.

$f_k = \mu_k N \Rightarrow \mu_k = \frac{f_k}{N} = \frac{21,8}{70,0} \Rightarrow \mu_k = 0,311$

10.43: 15 kg ve 10 kg'lık iki kütle, yarıçapı 10 cm ve kütlesi 3 kg olan bir makara üzerinden geçen iple bağlıdırlar. İpin ağırlığı ihmal ediliyor ve bu ip kaymadan makarayı döndürebiliyor. Makara sürtünmesiz dönebilmektedir. Başlangıçta kütleler arasındaki yükseklik farkı 3 m ve kütlelerin herikisi de durgundur. Makaranın düzgün bir disk olduğunu kabul ederek iki kütlenin birbirinin önünden geçerkenki hızlarını bulunuz.

$m_1 = 15\ kg$

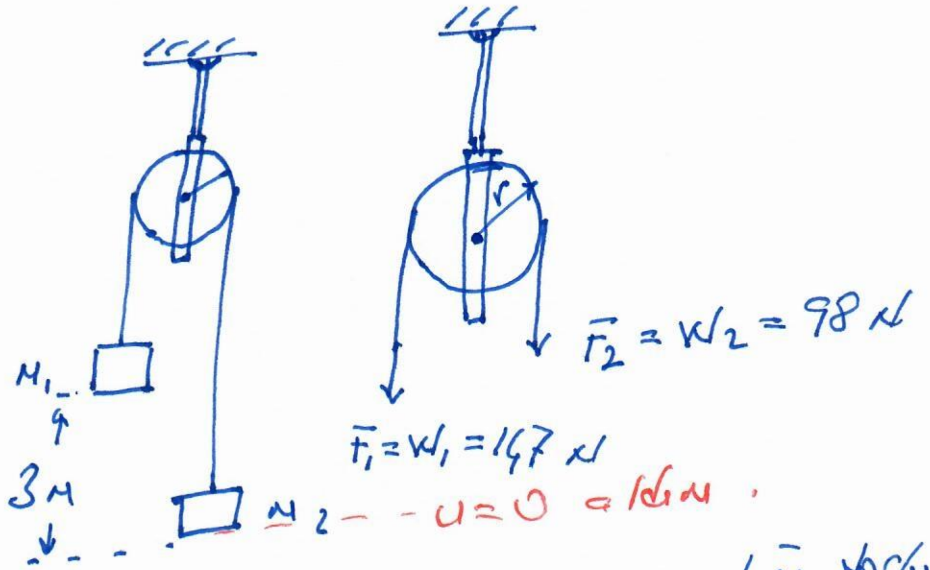
$m_2 = 10\ kg$

$r = 10\ cm = 0{,}1\ m$

$M = 3\ kg$

$v_{1i} = v_{2i} = 0$

$I_{disk} = I = \frac{1}{2} M r^2$



m_2 - - $U = 0$ aldım.

Not: Burada makara $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ kuvvetlerinin oluşturduğu torkun etkisi altında dönecektir. Makaranın dış yüzeyindeki bir noktanın herhangibir andaki çizgisel hızı cisimlerin o andaki hızlarının büyüklüğüne eşittir. Sürtünme olmadığından sistemin mekanik enerjisi korunur.

$$E_i = E_s \Rightarrow \overset{\to 0}{K_{1i}} + U_{1g} + \overset{\to 0}{K_{2i}} + \overset{\to 0}{U_{2g}} + \frac{1}{2} I \overset{\to 0}{\omega^2} = K_{1s} + K_{s2} + U_{1s} + U_{2s} + \frac{1}{2} I \omega'^2$$

Makara için: $v = r\omega'$; Son durumda $v_1 = v_2 \equiv v$ dir

$$m_1 g h = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} M r^2\right] \frac{v^2}{r^2} + (m_1 + m_2) g h' \quad (h' = 1{,}5\ m)$$

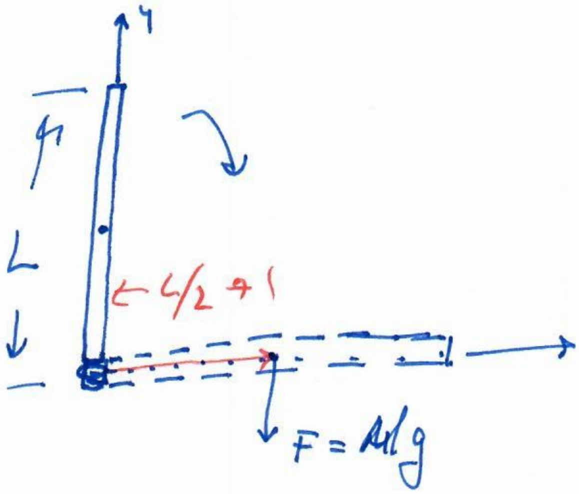
$$15 \cdot 9{,}8 \cdot 3 = \frac{1}{2}(25) v^2 + \frac{1}{4} \cdot 3 v^2 + (25) \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}5$$

$$\Rightarrow \underline{v = 2{,}36\ m/s}$$

10.59: Kütlesi M, boyu L olan düzgün bir çubuk, bir ucuna tutturulmuş yatay bir mil etrafında (mil sürtünmesiz) şekildeki gibi düşey durumda iken serbest bırakılıyor. Çubuk yatay duruma geldiği anda;

a) Açısal hızını
b) Açısal ivmesini
c) Kütle merkezinin ivmesinin x ve y bileşenlerini
d) Eksendeki (mil) tepki kuvvetinin bileşenlerini bulunuz.

M, L
a) $\omega = ?$
b) $\alpha = ?$
c) $a_x = a_r = ?$
$a_y = -a_t = ?$
d) $N \equiv F$ diyelim
$F_x = ?$ $F_y = ?$



x .. $U_g = 0$ aldım

Not: Burada çubuğun bütün kütlesini kütle merkezinde toplanmış kabul edebiliriz. Çubuk sadece yerçekimi kuvvetinin (korunumlu) etkisi altında olduğundan mekanik enerji korunur.

$E_i = E_s \Rightarrow Mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} I \omega^2$ $\left(I = \frac{1}{3} ML^2\right)$ çubuğun bir kenarından geçen eksene göre)

a) $\cancel{M}g\left(\frac{L}{\cancel{2}}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{3g/L}$

b) $\tau = I\alpha$; $\tau = Fr$ $\Big\{$ $\cancel{M}g \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 3g/2L$

c) $a_x = a_r = r\omega^2$ $a_x = \frac{L}{2} \cdot \frac{3g}{L} \Rightarrow a_x = \frac{3}{2} g$ (Yönü $-x$ yönünde)

$a_y = -a_t = -r\alpha \Rightarrow a_y = -\frac{L}{2} \cdot \frac{3g}{2L} \Rightarrow a_y = -\frac{3}{4} g$ ($-$ işareti yön gösterir)

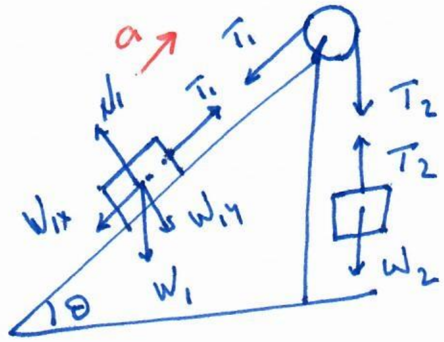
d) $F_x = Ma_x = -\frac{3}{2} Mg$ (Kuvvetin yönü ivme ile aynı yönde)

$F_y - W = -Ma_y \Rightarrow F_y = \frac{1}{4} Mg$

10.71: İki blok, şekilde gösterildiği gibi eylemsizlik momenti I ve yarıçapı 0,25 m olan bir makara üzerinden geçen kütlesi ihmal edilebilir bir ipin uçlarına bağlıdır. Eğik düzlem üzerindeki blok sabit 2 m/s² ivme ile yukarı çıkıyor.

a) İpin iki parçasındaki T_1 ve T_2 gerilimlerini
b) Makaranın eylemsizlik momentini bulunuz

I, $r = 0{,}25$
$m_1 = 15{,}0$ kg
$a_1 = 2{,}0$ m/s²
$m_2 = 20{,}0$ kg
$\theta = 37°$
a) $T_1 = ?$, $T_2 = ?$
b) $I = ?$



Not: Burada m_1 kütlesi a ivmesi ile yukarı doğru giderken m_2 kütlesi aynı ivme ile aşağı doğru gider. Makaranın en dış yüzeyindeki bir noktanın teğetsel ivmesi cisimlerin ivmesine eşittir. (Büyüklükçe)

m_1

$\Sigma F_x = T_1 - W_{1x} = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1 g \sin(37°) + m_1 a$

$T_1 = 15{,}0\,(9{,}8 \sin(37) + 2) \Rightarrow T_1 = 118$ Newton

$\Sigma F_y = 0$

m_2

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = T_2 - W_2 = m_2(-a) \rightarrow T_2 = W_2 - m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2(g - a)$

$T_2 = 20{,}0 \times (9{,}8 - 2{,}0) \Rightarrow T_2 = 156$ N

Makara için

$\Sigma \tau = r T_1 - r T_2 \Rightarrow \Sigma \tau = 0{,}25\,(118 - 156) \Rightarrow \Sigma \tau = -9{,}5$ Nm

Toplam torkun büyüklüğü 9,5 Nm

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma \tau = I\alpha \\ a_t = a = r\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \tau = I \frac{a}{r} \Rightarrow 9{,}5 = I\,\frac{2{,}0}{0{,}25} \Rightarrow I = 1{,}19 \text{ kg m}^2$$