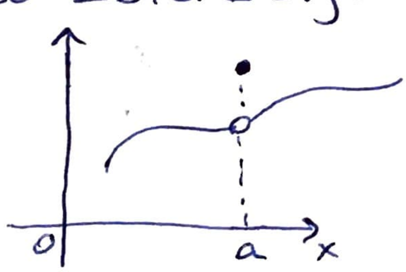
SÜREKLİLİK

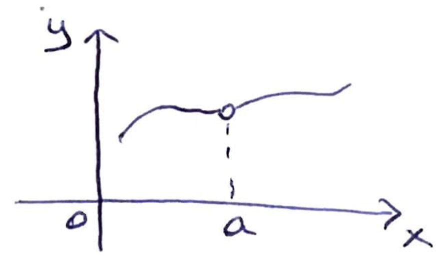
$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. f fonksiyonu her $a \in A$ için sürekli ise f fonksiyonu süreklidir denir.

$f: A \to \mathbb{R}$ ve $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli iseler, $|f|$, f^2, cf, $f+g$, $f-g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonları da a noktasında süreklidir, $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ de a noktasında süreklidir.

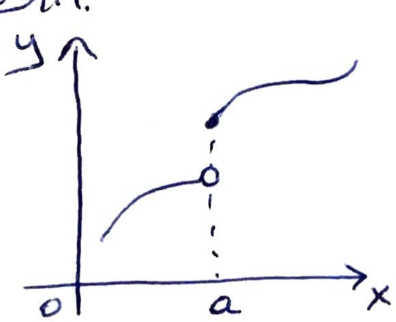
Süreksizlik Türleri:

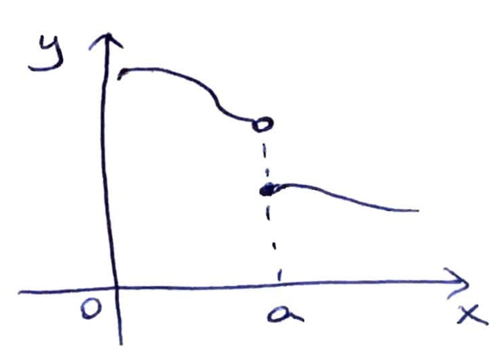
Kaldırılabilir Süreksizlik: $\lim_{x\to a} f(x)$ var, fakat bu limit $f(a)$ ya eşit değil veya $f(a)$ tanımlı değil ise, bu süreksizliğe kaldırılabilir süreksizlik denir.



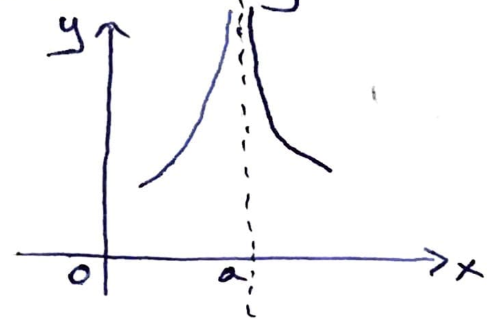


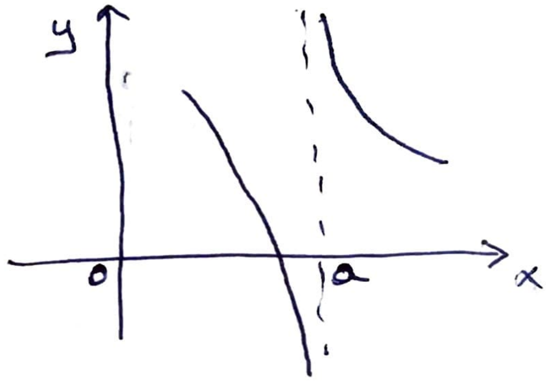
Sıçrama Süreksizliği: a noktasında sağ ve sol limitler var fakat farklı ise, bu süreksizliğe sıçrama süreksizliği denir.





Sonsuz Süreksizlik: Sağ ve sol limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise veya mevcut değil ise, bu süreksizliğe sonsuz süreksizlik denir.





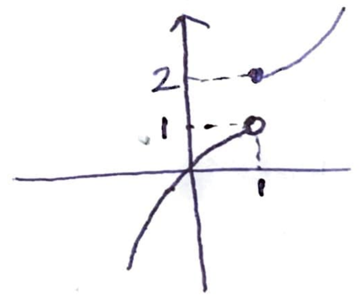
Örnekler:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 4, & x=0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 4=f(0)$ olduğundan $x=0$ da kaldırılabilir süreksizlik vardır.

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ 2x-x^2, & x<1 \end{cases}$ fonksiyonu $x=1$ de sürekli midir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)=2=f(1)$



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-x^2)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan $x=1$ de sıçrama süreksizliği vardır.

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ olduğundan f fonksiyonunun $x=0$ da sonsuz süreksizliği vardır.

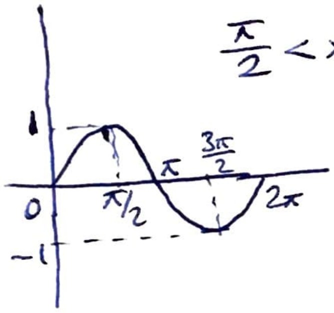
4) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} , & x\neq 0 \\ 0 , & x=0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ olduğundan f fonksiyonu $x=0$ da süreklidir.

5) $f(x)=[\![\sin x]\!]$ fonksiyonu $x=\frac{\pi}{2}$ de sürekli midir?

Çözüm: $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\sin x<1 \Rightarrow [\![\sin x]\!]=0$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi \Rightarrow 0<\sin x<1 \Rightarrow [\![\sin x]\!]=0$



$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} [\![\sin x]\!] &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 0 = 0 \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} [\![\sin x]\!] &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\![\sin x]\!]=0$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=0\neq 1=f(\frac{\pi}{2})$ olduğundan $x=\frac{\pi}{2}$ de kaldırılabilir süreksizlik vardır.

6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{1+e^{1/x-1}} , & x\neq 1 \\ 0 , & x=1 \end{cases}$ fonksiyonu $x=1$ de sürekli midir?

Çözüm:
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x-1}^{\to 0}}{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to\infty}} = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x-1}^{\to 0}}{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to 0}} = \frac{0}{1+0} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$$

olduğundan $x=1$ de süreklidir.

7) $f(x)=\dfrac{3x+4\tan x}{x}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? Eğer değilse, bu noktada sürekli olacak şekilde fonksiyon nasıl tanımlanmalıdır?

<u>Çözüm:</u> $x=0$ da tanımlı olmadığından fonksiyon $x=0$ da sürekli değildir.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3x+4\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(3+4\cdot\frac{\tan x}{x}\right)=7$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+4\tan x}{x}, & x\neq 0\\ 7, & x=0\end{cases}$$ şeklinde tanımlanırsa,

fonksiyon $x=0$ da sürekli olur.

8) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>2\\ m+2, & x=2\\ 2x+n, & x<2\end{cases}$ fonksiyonu $x=2$ de sürekli olması için m ve n ne olmalıdır?

<u>Çözüm:</u> $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4$

$$\lim_{x\to 2^-}(2x+n)=n+4$$

$x=2$ de sürekli olması için $n+4=4\Rightarrow n=0$ ve

$m+2=4\Rightarrow m=2$ olmalıdır.

9) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leq 1\\ ax-b, & 1<x<2\\ 4x, & x>2\end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

<u>Çözüm:</u> Fonksiyonun sürekli olması için $x=1$ ve $x=2$ de sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+1) = 2 = f(1)$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax-b) = a-b$$

$x=1$ de sürekli olması için $a-b=2$ olmalıdır.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax-b) = 2a-b$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (4x) = 8 = f(2)$$

$x=2$ de sürekli olması için $2a-b=8$ olmalıdır

$$\left.\begin{aligned} 2a-b&=8 \\ a-b&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=6,\ b=4$$

10) $f(x) = \begin{cases} |x+3| - a[\![x]\!], & x<-3 \\ \operatorname{sgn}(x^2+2x-3), & x>-3 \end{cases}$ olsun.

a) $\lim_{x\to -3} f(x)$ var ise $a=?$

b) f fonksiyonunun $x=-3$ de sürekli olması için $f(-3)$ ne olmalıdır?

Çözüm: a)

		-3		1	
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \operatorname{sgn}(x^2+2x-3) = -1$$
$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (|x+3| - a[\![x]\!]) = \lim_{x\to -3^-} (-x-3 - a\cdot(-4)) = 4a$$
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^-} f(x) \Rightarrow 4a=-1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

b) f fonksiyonu $x=-3$ de sürekli ise,

$$f(-3) = \lim_{x\to -3} f(x) = -1$$

olmalıdır.

11) $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{x^2+4x}$ fonksiyonu hangi noktalarda süreksizdir?

Çözüm: Fonksiyonun pay ve paydası polinom olduğundan süreklidir. O halde, fonksiyonun süreksizlik noktaları paydayı sıfır yapan $x=0$ ve $x=-4$ noktalarıdır.

12) $f(x)=\dfrac{x}{[\![2x]\!]-x}$ fonksiyonunun $[0,5]$ aralığındaki süreksizlik noktalarını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun payı polinom olduğundan süreklidir. Paydadaki $[\![2x]\!]$ fonksiyonu $\frac{n}{2}$ $(n\in\mathbb{Z})$ noktalarında süreksizdir. Şimdi paydayı sıfır yapan noktalara bakalım:

$$[\![2x]\!]-x=0 \Rightarrow [\![2x]\!]=x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\le 2x<x+1,\ x\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 0\le x<1 \text{ ve } x\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=0$$

O halde paydayı sıfır yapan $x=0$ noktasında süreksizdir. Böylece, $[0,5]$ aralığındaki süreksizlik noktalarının kümesi $\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\frac{9}{2},5\}$ olur.