ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

<u>Tanım:</u> Tanım kümesi $\mathbb{R}^n$ nin altkümesi olan fonksiyonlara n değişkenli fonksiyonlar denir. Eğer değer kümesi $\mathbb{R}$ ise, fonksiyona n değişkenli reel değerli fonksiyon denir.

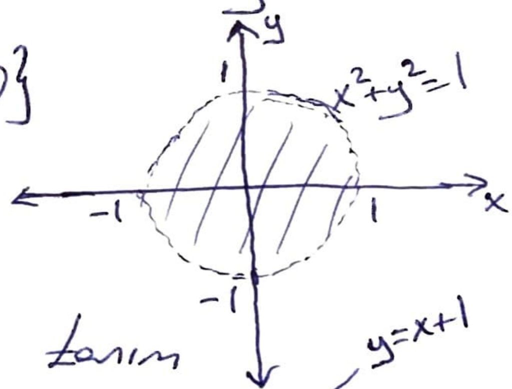
Reel değerli bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunun tanım bölgesi; $f(x,y)$ ifadesini reel yapan (x,y) noktalarının bölgesidir.

<u>Örnekler:</u>

1) $z=f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun tanım bölgesini bulup düzlemde gösteriniz.

<u>Çözüm:</u> $T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2>0\}$

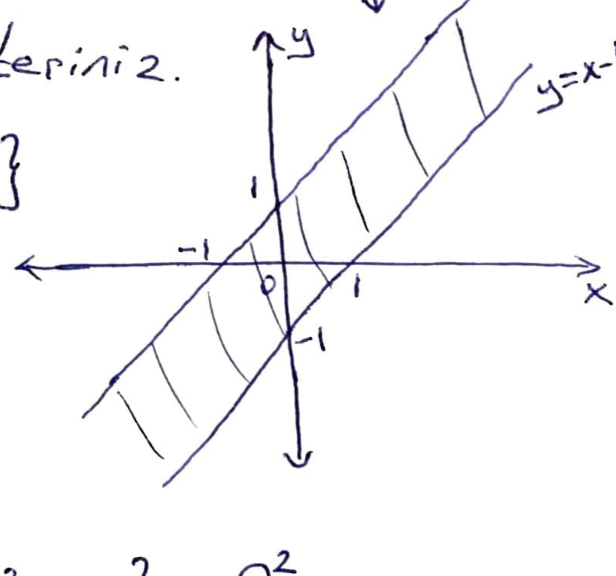
$T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$



2) $f(x,y)=\arcsin(x-y)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup düzlemde gösteriniz.

<u>Çözüm:</u> $T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le y-x\le 1\}$

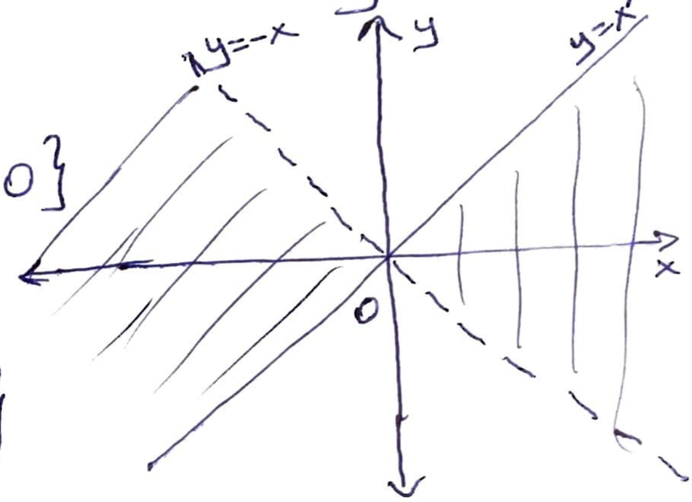
$T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le x+1 \text{ ve } y\ge x-1\}$



3) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\ge 0\}=\mathbb{R}^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup düzlende gösteriniz.

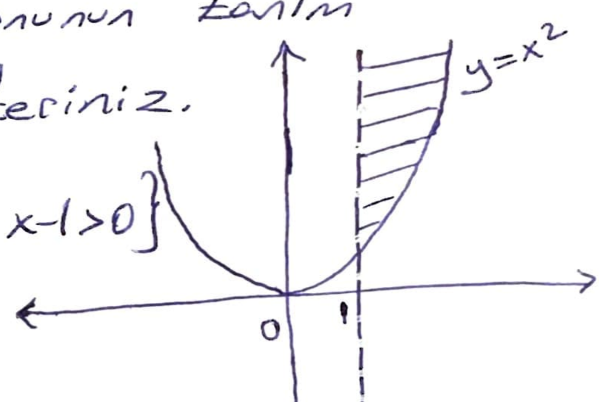


Çözüm: $T.K.=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{x-y}{x+y}\geq 0\right\}$

$T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\geq 0,\ x+y>0$

veya $x-y\leq 0,\ x+y<0\}$

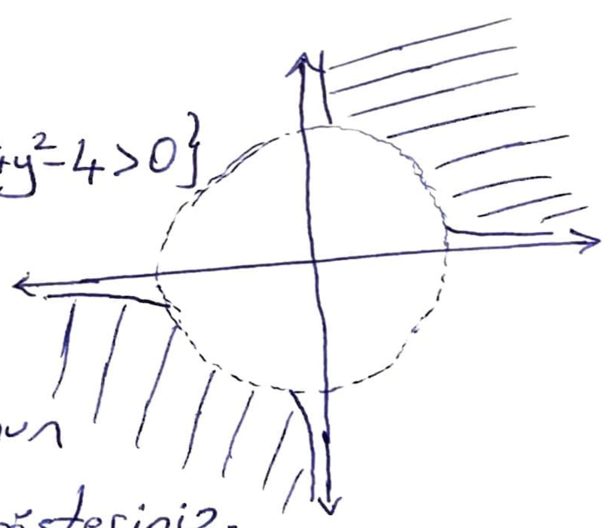
5) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}+\ln(x-1)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup düzlende gösteriniz.



Çözüm: $T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x^2\geq 0 \text{ ve } x-1>0\}$

$T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2 \text{ ve } x>1\}$

6) $f(x,y)=\sqrt{xy-1}+\ln(x^2+y^2-4)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup düzlende gösteriniz.

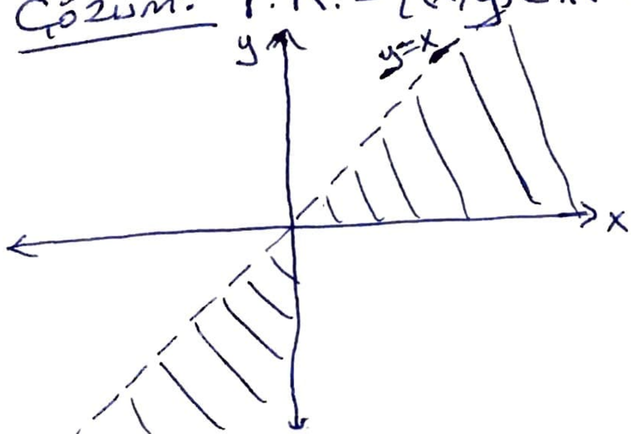


Çözüm: $T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy-1\geq 0 \text{ ve } x^2+y^2-4>0\}$

$T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\geq 1 \text{ ve } x^2+y^2>4\}$

7) $f(x,y)=\sqrt{xy}+\ln(x-y)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup düzlende gösteriniz.

Çözüm: $T.K.=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\geq 0,\ x-y>0\}$



İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri

$z=f(x,y)$ fonksiyonu verildiğinde XOY düzleminde fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların oluşturduğu eğrilere f nin seviye eğrileri denir.

Örnek: $z=f(x,y)=1+x^2+y^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

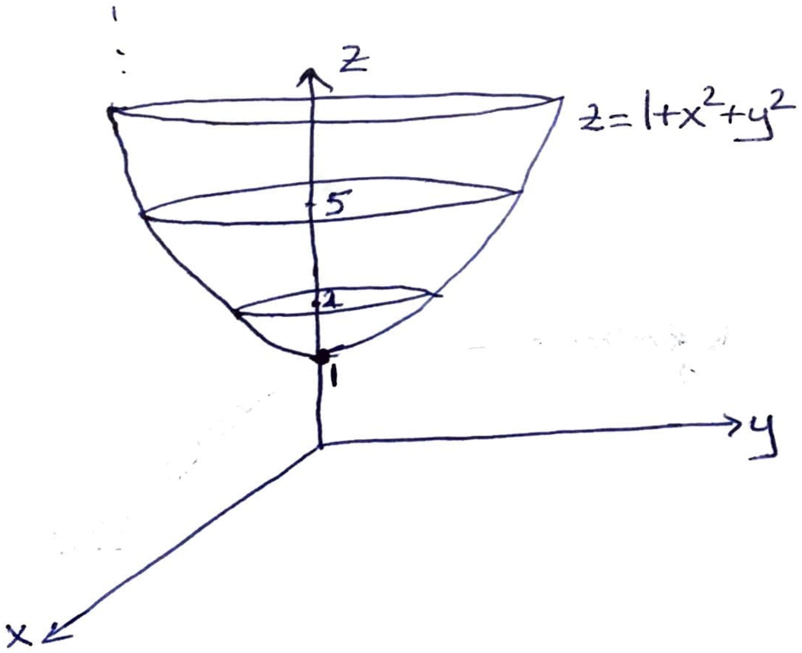
Çözüm:

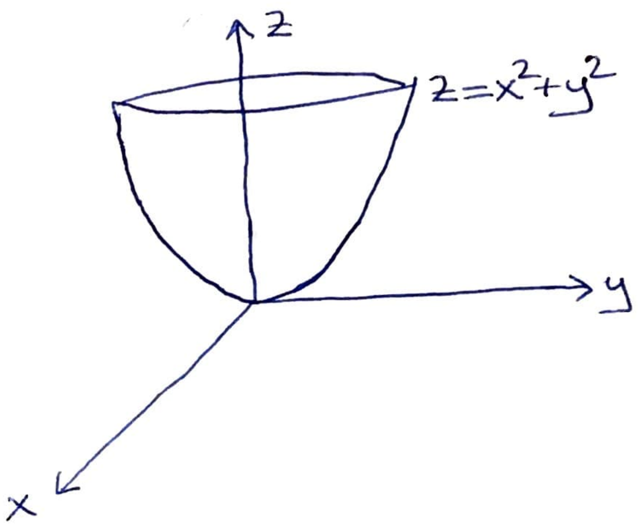
$z=1 \Rightarrow 1=1+x^2+y^2 \Rightarrow x=y=0$

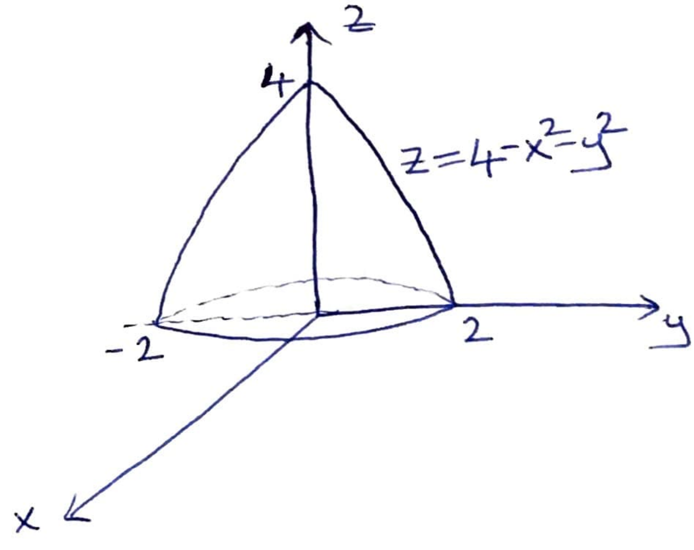
$z=2 \Rightarrow 2=1+x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$z=5 \Rightarrow 5=1+x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=4$

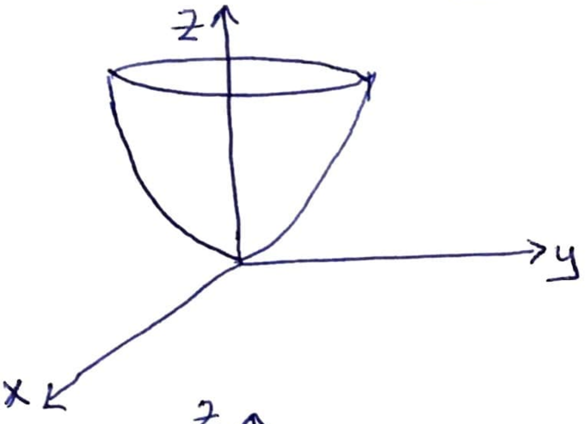
$z=10 \Rightarrow 10=1+x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=9$





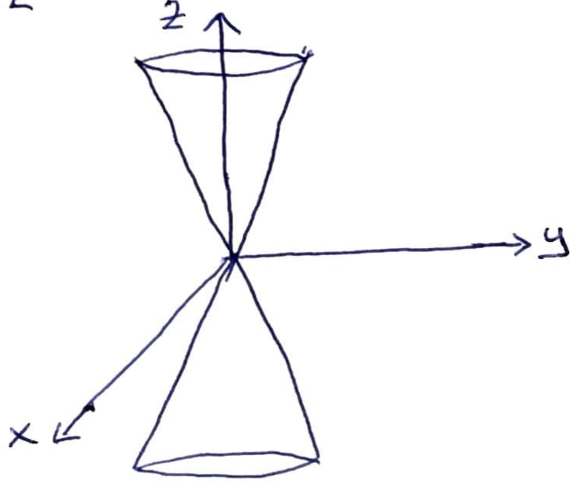


Belli Başlı Yüzey Denklemleri :



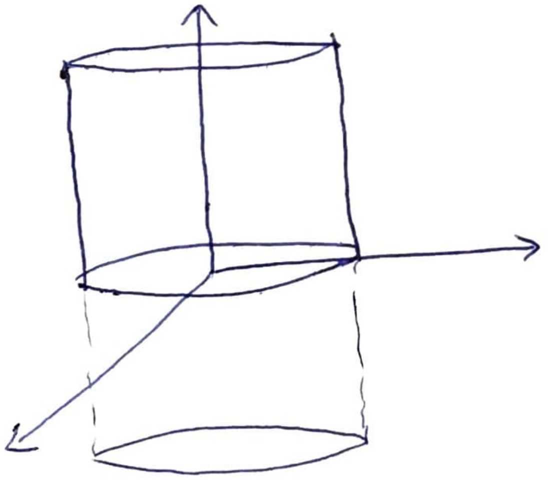
Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



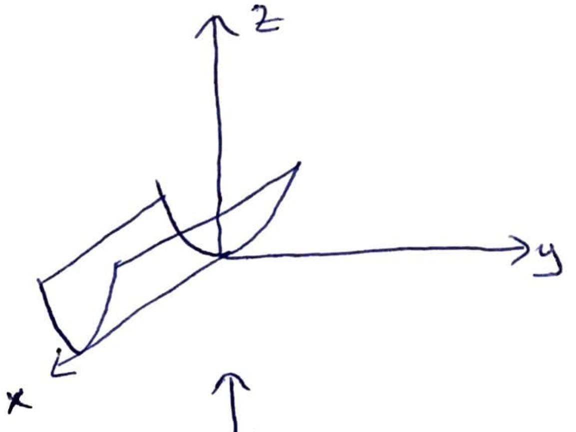
Koni

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



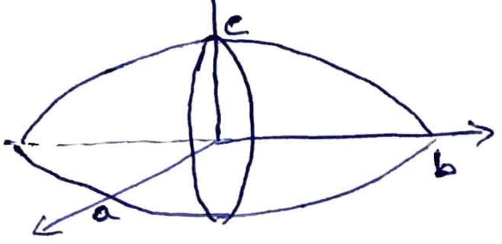
Dik Silindir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Parabolik Silindir

$$z = y^2$$



Elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit

$A \subset \mathbb{R}^2$ ve f, A üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu (a,b) noktası hariç bu noktanın komşuluğunda tanımlı olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyleki $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ olduğunda $|f(x,y)-\ell| < \varepsilon$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ olur.

ℓ limiti var ise, bu limit (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma şeklinden bağımsızdır. Yani (x,y) noktası, (a,b) noktasına hangi eğri boyunca yaklaşırsa yaklaşsın ℓ sayısı değişmez. Eğer (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma yoluna göre limit değişiyorsa fonksiyonun (a,b) noktasında limiti yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \dfrac{\sin 0}{1} = 0$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = e^{-\ln 2} = e^{\ln(\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2}$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos\left(\sqrt[3]{|xy|-1}\right) = \cos 0 = 1$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},1)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2+1} = \dfrac{1}{\frac{\pi^2}{4}+1+1} = \dfrac{4}{\pi^2+8}$

Örnek: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ ve $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ limitlerini bulunuz

b) $y=2x$ doğrusu boyunca $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitini bulunuz.

c) f fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti var mıdır?

Çözüm: a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

b) $y=2x$ doğrusu boyunca $x\to 0$ ise $y\to 0$ olur.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x.(2x)}{x^2+4x^2}=\frac{2}{5}$$

c) Yaklaşma yoluna göre limit değiştiğinden $(0,0)$ noktasında limit yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+2y}=?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+2y}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{x}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin|x|}{x}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1 \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin|x|}{x}&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(-x)}{x}=-1 \end{aligned}\right\} \text{ olduğundan limit yoktur.}$$

Not: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ limitini hesaplamak için

$$\left.\begin{array}{l} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{array}\right\} \text{ kutupsal koordinat dönüşümü}$$

yapılırsa, θ ne olursa olsun

$$\lim_{r\to 0} f(a + r\cos\theta,\ b + r\sin\theta) = l$$

ise, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ olur.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ ise

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0}\left[r^2\cos\theta\sin\theta \cdot \dfrac{\cancel{r^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cancel{r^2}}\right]$

$$= \lim_{r\to 0}\left(\frac{r^2}{2}\cdot \sin 2\theta . \cos 2\theta\right)$$

$$= 0$$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y^2} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r\cos\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta + r\sin^2\theta}$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ için limit mevcut olmadığından limit yoktur.

Limitin mevcut olması için θ ne olursa olsun limitin var ve aynı değere eşit olması gerekir.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^4\cos^4\theta - r^2\sin^2\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta}$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^4\theta - \sin^2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

$\theta = 0$ için limit mevcut olmadığından limit yoktur.

II. Yol: $y = mx^2$ parabolleri ile $(0,0)$ noktasına yaklaşalım. $x\to 0$ ise $y\to 0$ olur

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - m^2x^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

Sonuç m ye bağlı değiştiğinden limit yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim\limits_{r\to 0} \left(1+r^2\cos\theta\sin\theta\right)^{\frac{1}{r^2\cos\theta\sin\theta}}$

$$= \lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}$$

$$= e$$

$\boxed{u = r^2\cos\theta\sin\theta \quad r\to 0 \Rightarrow u\to 0}$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta - r\sin\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

Sonuç θ ya bağlı değiştiğinden limit yoktur.

II. Yol: $y = mx$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-mx}{x+mx} = \dfrac{1-m}{1+m}$ Sonuç m'ye göre değiştiğinden limit yoktur

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right) = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{r\to 0} \cos\left(\dfrac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2}\right)$

$= \lim\limits_{r\to 0} \cos\left(r\left(\cos^3\theta - \sin^3\theta\right)\right)$

$= 1$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x}{x^2+x+y^2} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x}{x^2+y^2+x} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r\cos\theta}{r^2+r\cos\theta} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2\cos\theta}{r+\cos\theta}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ için limit mevcut olmadığından limit yoktur.

II. Yol: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2x}{x^2+x+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x+1} = 2$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x^2+x+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

Yaklaşma yoluna göre limit değiştiğinden limit yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{r\to 0} \arctan\left(\dfrac{|r\cos\theta|+|r\sin\theta|}{r^2}\right)$

$= \lim\limits_{r\to 0} \arctan\left(\dfrac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{|r|}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2}$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+y)^{\frac{1}{x}} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+y)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{r\to 0} (1+r\sin\theta)^{\frac{1}{r\cos\theta}}$

$$y = (1+r\sin\theta)^{\frac{1}{r\cos\theta}} \Longrightarrow \ln y = \frac{1}{r\cos\theta}\cdot \ln(1+r\sin\theta)$$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to 0}(\ln y) = \lim_{r\to 0}\frac{\ln(1+r\sin\theta)}{r\cos\theta} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{\frac{\sin\theta}{1+r\sin\theta}}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\lim_{r\to 0} y\right) = \tan\theta$$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to 0}(1+r\sin\theta)^{\frac{1}{r\cos\theta}} = e^{\tan\theta}$$

Sonuç θ ya bağlı olarak değiştiğinden limit yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{r\to 0}\frac{\sin(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r\cos\theta}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{2r\cancel{\cos\theta}\sin\theta.\cos(r^2\cos\theta\sin\theta)}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left(2r\sin\theta.\cos(r^2\cos\theta\sin\theta)\right)$$

$$= 0$$

İki Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik

f fonksiyonu (a,b) noktasının komşuluğunda tanımlı olsun. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise, f fonksiyonu (a,b) noktasında süreklidir. f fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında sürekli ise, f süreklidir denir.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu

$(0,0)$ noktasında sürekli midir?

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^4+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}(r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Sonuç θ ya bağlı olduğundan limit yoktur. O halde, $(0,0)$ noktasında sürekli değildir.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun

$\mathbb{R}^2$ de sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta$

$$= 0$$
$$= f(0,0)$$

olduğundan $(0,0)$ noktasında süreklidir. $(x,y)\neq(0,0)$ içinde fonksiyonu süreksiz yapan nokta olmadığı için fonksiyon $\mathbb{R}^2$ de süreklidir.

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun sürekli olması için f nasıl tanımlanmalıdır?

Çözüm: Fonksiyon (0,0) noktasında tanımsız olduğundan sürekli değildir.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\theta-\cos\theta\sin^2\theta\right)$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos\theta.\cos 2\theta$$

$$=0$$

Fonksiyonun (0,0) noktasında sürekli olması için $f(0,0)=0$ olmalıdır. O halde,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa fonksiyon sürekli olur.

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun sürekli olması için f nasıl tanımlanmalıdır?

Çözüm: Fonksiyon (0,0) noktasında tanımsız olduğundan sürekli değildir.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

θ ya bağlı olarak limit değiştiğinden fonksiyonun (0,0) noktasında limiti yoktur. O halde fonksiyon, (0,0) noktasında sürekli olacak şekilde tanımlanamaz.

Örnek: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu sürekli midir?

Çözüm: Fonksiyon (0,0) noktası dışında süreklidir. (0,0) noktasındaki sürekliliğini inceleyelim.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^3\cos\theta\sin^2\theta)}{r^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{3r^2\cos\theta\sin^2\theta \cdot \cos(r^3\cos\theta\sin^2\theta)}{2r}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left(\frac{3r}{2}\cos\theta\sin^2\theta \underbrace{\cos(r^3\cos\theta\sin^2\theta)}_{\to 1}\right)$$

$$= 0$$

$$= f(0,0)$$

olduğundan f fonksiyonu (0,0) noktasında da süreklidir. O halde f, $\mathbb{R}^2$ de süreklidir.

Örnek: $f(x,y)=\begin{cases} \sin\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu (0,0) noktasında sürekli midir?

Çözüm: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to 0} \sin\left(\frac{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{r^2}\right)$$

$$= \lim_{r\to 0} \sin\left(r(\cos^3\theta-\sin^3\theta)\right)$$

$$= 0$$

$$= f(0,0)$$

olduğundan (0,0) noktasında süreklidir.