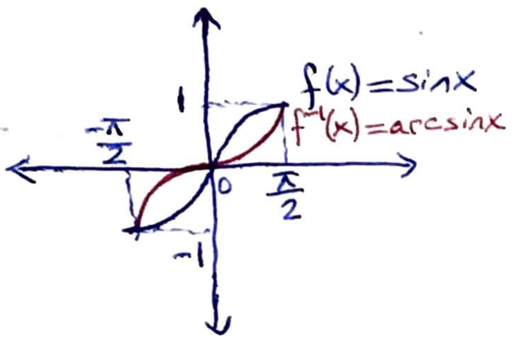
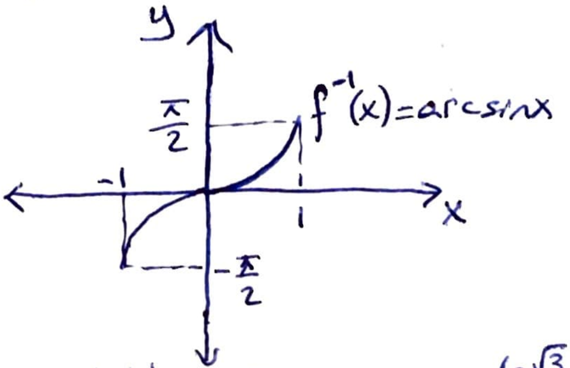
TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Arksinüs Fonksiyonu:

$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan tersi vardır. Bu fonksiyonun tersine arksinüs fonksiyonu denir. ve arcsin ile gösterilir.

$\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



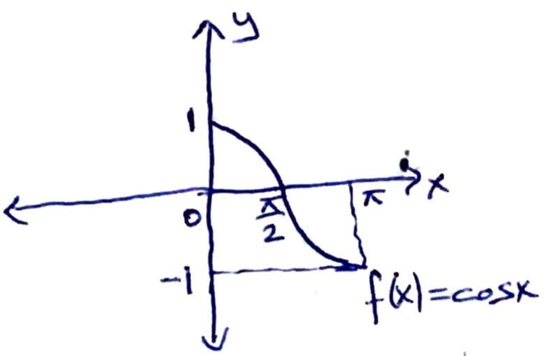


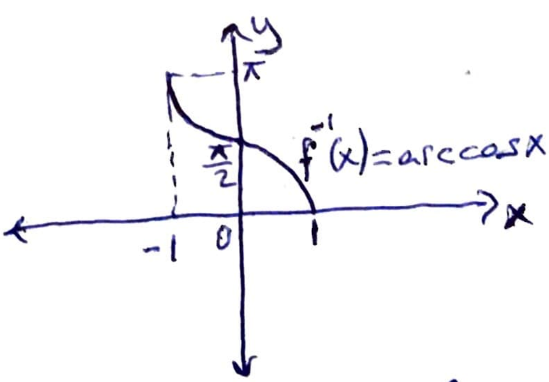
Örnek: $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\pi}{3}$

Arkkosinüs Fonksiyonu:

$f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan tersi vardır. Bu fonksiyonun tersine arkkosinüs fonksiyonu denir. ve arccos ile gösterilir.

$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$





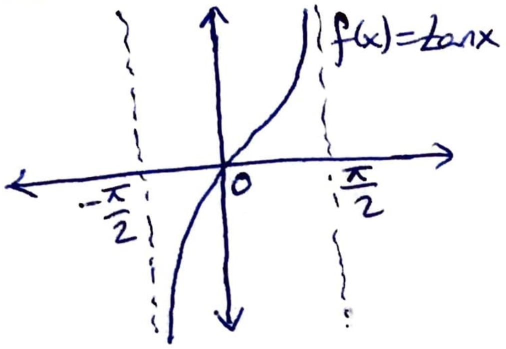
Örnek: $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

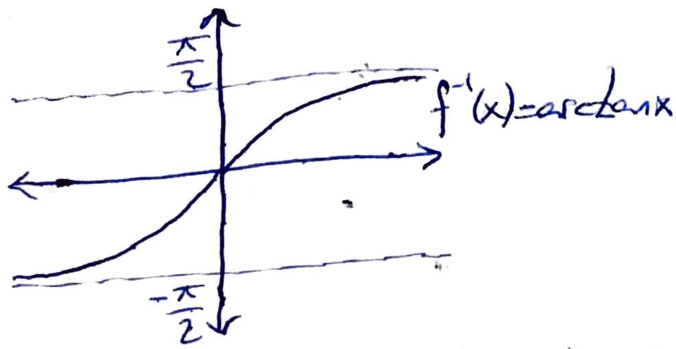
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

Arktanjant Fonksiyonu:

$f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\tan x$ fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan tersi vardır. Bu fonksiyonun tersine arktanjant fonksiyonu denir ve arctan ile gösterilir.

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



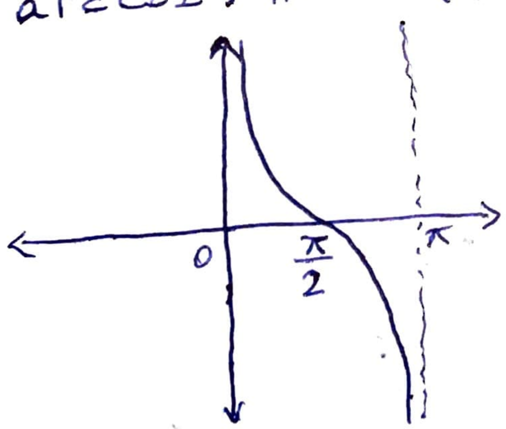


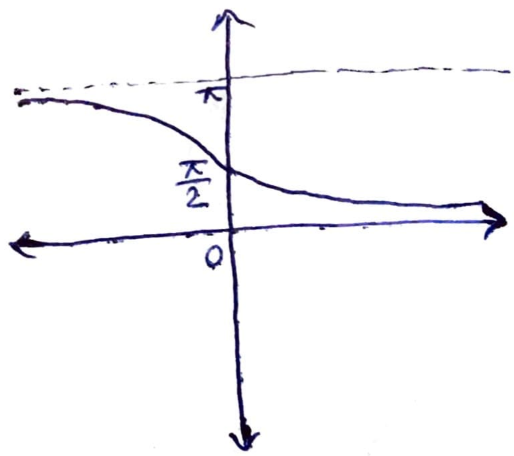
Örnek: $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$, $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$, $\arctan(-\sqrt{3})=\frac{-\pi}{3}$

Arkkotanjant Fonksiyonu:

$f:(0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\cot x$ fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan tersi vardır. Bu fonksiyonun tersine arkkotanjant fonksiyonu denir ve arccot ile gösterilir.

$\text{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi)$





Örnek: $\text{arccot}(1)=\frac{\pi}{4}$, $\text{arccot}(-1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$\text{arccot}(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, $\text{arccot}(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

Örnekler:

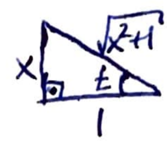
1) $\cos(2\arccos x) = 2x^2-1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $t=\arccos x \Rightarrow x=\cos t$

$\cos(2\arccos x) = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 2x^2-1$

2) $\sin(2\arctan x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $t=\arctan x \Rightarrow x=\tan t$



$\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\sin(2\arctan x) = \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

3) $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $t=\arcsin x \Rightarrow x=\sin t$

$\tan t = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\tan(\arcsin x) = \tan t = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $\sin^2(\text{arccot}\, x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $t=\text{arccot}\, x \Rightarrow x=\cot t$

$\sin t = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\sin^2(\text{arccot}\, x) = \sin^2 t = \dfrac{1}{x^2+1}$

5) $f(x) = \dfrac{\arccos\left(\frac{2x-1}{x}\right)}{[\![x]\!]-1}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $T.K. = \left\{x\in\mathbb{R} : -1\le \dfrac{2x-1}{x}\le 1,\ x\neq 0 \text{ ve } [\![x]\!]-1\neq 0\right\}$

$-1\le\dfrac{2x-1}{x}\le 1 \Rightarrow -1\le 2-\dfrac{1}{x}\le 1 \Rightarrow -3\le\dfrac{-1}{x}\le -1 \Rightarrow \dfrac{1}{3}\le x\le 1$

$[\![x]\!]-1=0 \Rightarrow [\![x]\!]=1 \Rightarrow 1\le x<2$

$[\![x]\!]-1\neq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$

$T.K. = \left[\frac{1}{3},1\right)$

Örnek: $f(x)=\arcsin\left(\frac{-3x+1}{2x-4}\right)+\frac{\sqrt{x+2}}{[\![x-1]\!]+2}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $T.K.=\left\{x\in\mathbb{R}: -1\leq \frac{-3x+1}{2x-4}\leq 1,\ 2x-4\neq 0,\ x+2\geq 0,\ [\![x-1]\!]+2\neq 0\right\}$

$$-1\leq\frac{-3x+1}{2x-4}\Rightarrow \frac{-3x+1}{2x-4}+1\geq 0\Rightarrow\frac{-x-3}{2x-4}\geq 0$$

x		-3		2	
$\frac{-x-3}{2x-4}$	$-$	ϕ	$+$		$-$

$$\Rightarrow x\in[-3,2)$$

$$\frac{-3x+1}{2x-4}\leq 1\Rightarrow\frac{-3x+1}{2x-4}-1\leq 0\Rightarrow\frac{-5x+5}{2x-4}\leq 0$$

x		1		2	
$\frac{-5x+5}{2x-4}$	$-$	ϕ	$+$		$-$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$$

$$-1\leq\frac{-3x+1}{2x-4}\leq 1\Rightarrow x\in[-3,2)\cap\{(-\infty,1]\cup(2,+\infty)\}=[-3,1]$$

$$x+2\geq 0\Rightarrow x\in[-2,+\infty)$$

$$[\![x-1]\!]+2=0\Rightarrow[\![x]\!]+1=0\Rightarrow[\![x]\!]=-1\Rightarrow -1\leq x<0$$

$$[\![x-1]\!]+2\neq 0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup[0,\infty)$$

$$T.K.=[-3,1]\cap[-2,+\infty)\cap\{(-\infty,-1)\cup[0,\infty)\}$$
$$=[-2,-1)\cup[0,1]$$

HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

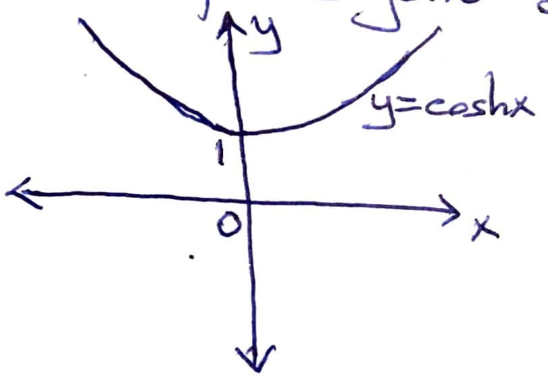
Simetrik bir küme üzerinde tanımlı her f fonksiyonu

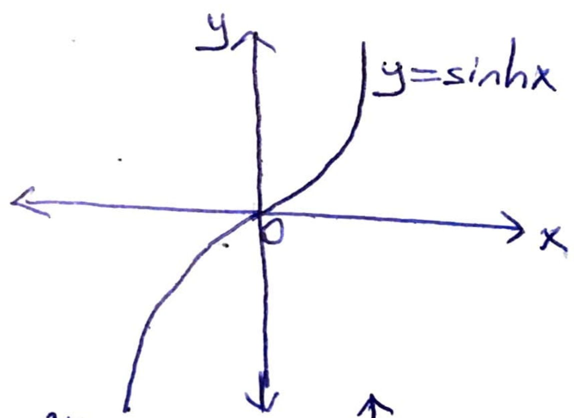
$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{çift}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{tek}}$$

şeklinde biri çift biri de tek olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir. $f(x)=e^x$ alınırsa,

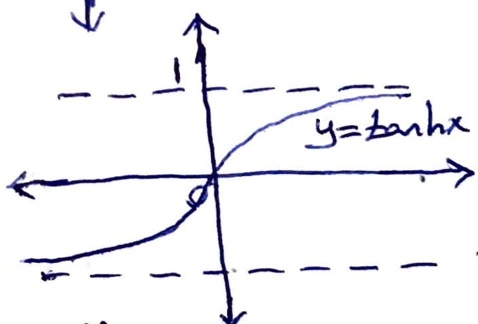
$$e^x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

olur. $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik kosinüs ve $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik sinüs fonksiyonu denir.





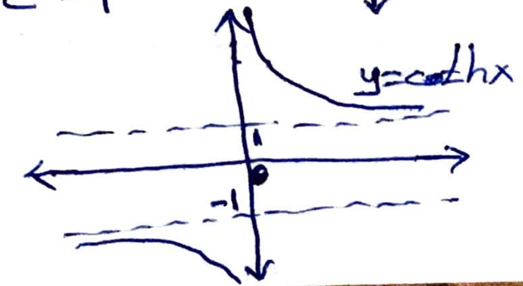
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$



$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$$



Özellikler:

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$

3) $\sinh 2x = 2\sinh x . \cosh x$

4) $\cosh(-x) = \cosh x \quad , \quad \sinh(-x) = -\sinh x$

5) $\cosh(x \mp y) = \cosh x . \cosh y \mp \sinh x . \sinh y$

6) $\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x . \sinh y$

Örnekler:

1) $\operatorname{cosech}^2 x = \coth^2 x - 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\coth^2 x - 1 = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^2 - 1 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{e^{2x} + e^{-2x} - 2} - 1 = \dfrac{4}{e^{2x} + e^{-2x} - 2}$

$$= \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)^2 = \operatorname{cosech}^2 x$$

2) $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $1 - \tanh^2 x = 1 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} = \dfrac{4}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} = \left(\dfrac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$

$$= \operatorname{sech}^2 x$$

3) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ ve $(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh(nx) - \sinh(nx)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx)$

$(\cosh x - \sinh x)^n = (e^{-x})^n = e^{-nx} = \cosh(nx) - \sinh(nx)$

4) $\sinh(\ln x) . \cosh(\ln x)$ ifadesini x türünden hesaplayınız.

Çözüm: $\sinh(\ln x) . \cosh(\ln x) = \dfrac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} . \dfrac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = \dfrac{e^{\ln x} - e^{\ln x^{-1}}}{2} . \dfrac{e^{\ln x} + e^{\ln x^{-1}}}{2}$

$$= \frac{x - \frac{1}{x}}{2} . \frac{x + \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^4 - 1}{4x^2}$$

Parametrik Fonksiyonlar

Şimdiye kadar fonksiyonlar sadece $y=f(x)$ şeklinde ifade edildi. Fonksiyonların başka gösterim şekilleri de vardır.

$y=f(x)$ kartezyen koordinat sisteminde açık formda fonksiyondur.

$F(x,y)=0$ " " " kapalı " "

$\left.\begin{array}{l} x=g(t) \\ y=h(t) \end{array}\right\}$ şeklindeki fonksiyonlara parametrik fonksiyon denir.

Örnek: $y=x^2-1$ fonksiyonunu parametrik fonksiyon haline çeviriniz.

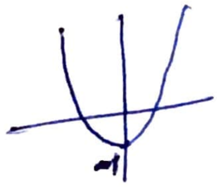
Çözüm $\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=t^2-1 \end{array}\right\}$ veya $\left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=-\sin^2 t \end{array}\right\}$ - - - -

Örnek: $x^2+y^2=r^2$ çemberinin parametrik gösterimini bulunuz

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

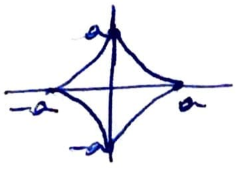
Örnek: $\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\cos 2t \end{array}$ eğrisinin kartezyen gösterimini yazınız

Çözüm $y=\cos 2t=2\cos^2 t-1=2x^2-1 \Rightarrow y=2x^2-1$



Örnek: $\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}$ $0\le t\le 2\pi$ eğrisinin kartezyen gösterimini yazınız

Çözüm
$$\left.\begin{array}{l} \cos^3 t=\dfrac{x}{a} \Rightarrow \cos^2 t=\dfrac{x^{2/3}}{a^{2/3}} \\ \sin^3 t=\dfrac{y}{a} \Rightarrow \sin^2 t=\dfrac{y^{2/3}}{a^{2/3}} \end{array}\right\} \cos^2 t+\sin^2 t=1 \longrightarrow \frac{x^{2/3}}{a^{2/3}}+\frac{y^{2/3}}{a^{2/3}}=1$$



astroid eğrisi

Tam Değer Fonksiyonu:

$A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $f: A \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonuna tam değer fonksiyonu denir.

Örnek: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

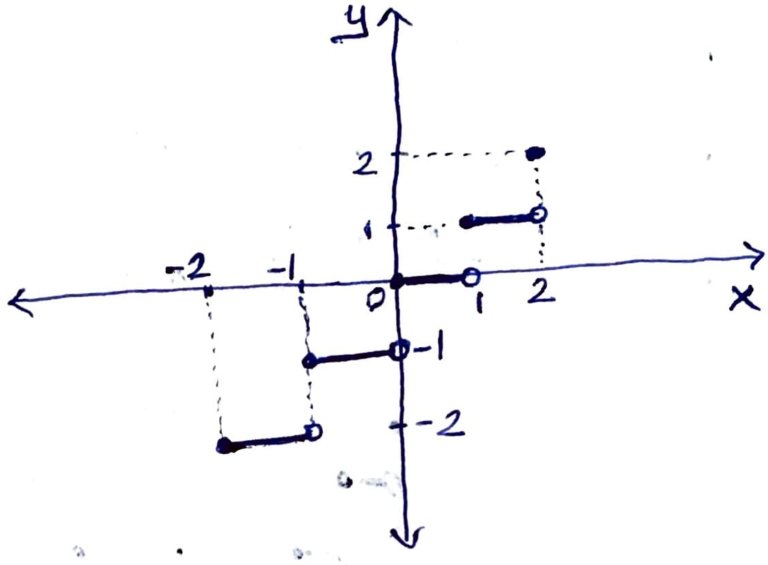
$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = -2$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$

$x = 2 \Rightarrow f(x) = 2$



Örnek: $f: [-3,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!] - x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

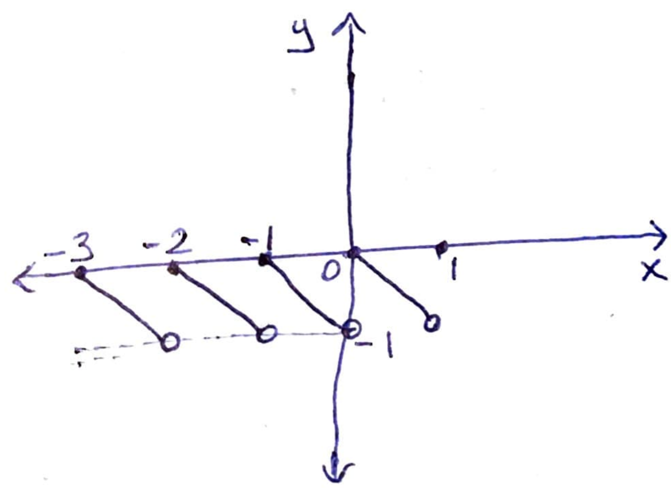
$-3 \leq x < -2 \Rightarrow f(x) = -3 - x$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = -2 - x$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -1 - x$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = -x$

$x = 1 \Rightarrow f(x) = 0$



Örnek: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

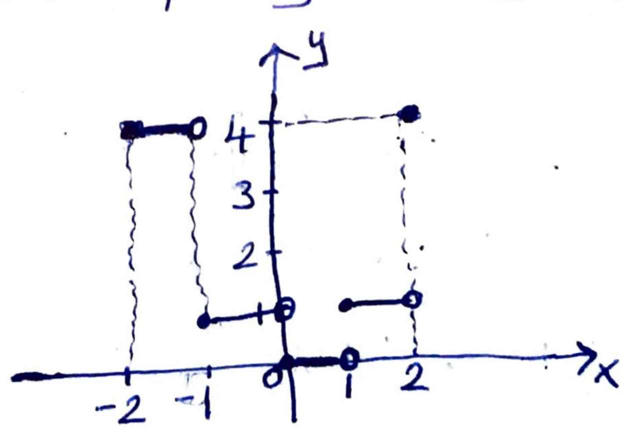
Çözüm: $f(2) = 4$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = 4$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = 1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$



Örnek: $f:[-2,2]\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=[\![x^2]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

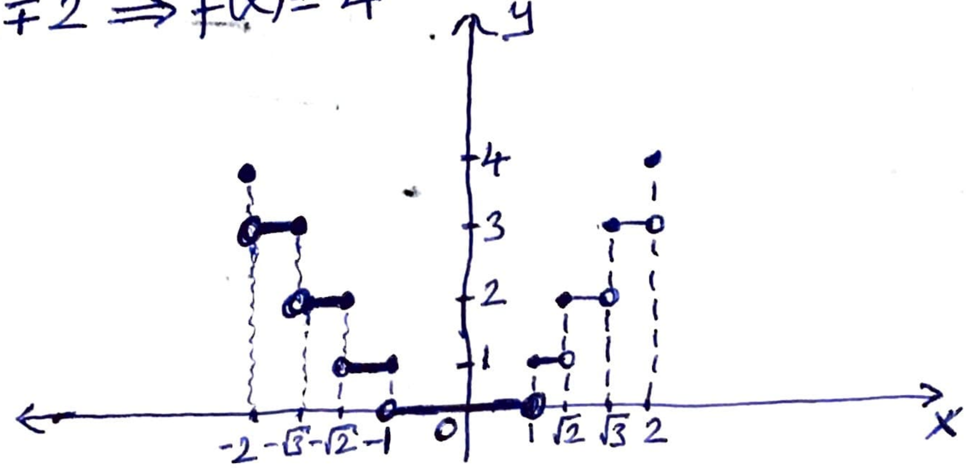
$f(x)=[\![x^2]\!]=0 \Rightarrow 0\leq x^2<1 \Rightarrow 0\leq x<1$ veya $-1<x\leq 0 \Rightarrow -1<x<1$

$f(x)=[\![x^2]\!]=1 \Rightarrow 1\leq x^2<2 \Rightarrow 1\leq x<\sqrt{2}$ veya $-\sqrt{2}<x\leq -1$

$f(x)=[\![x^2]\!]=2 \Rightarrow 2\leq x^2<3 \Rightarrow \sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ veya $-\sqrt{3}<x\leq -\sqrt{2}$

$f(x)=[\![x^2]\!]=3 \Rightarrow 3\leq x^2<4 \Rightarrow \sqrt{3}\leq x<2$ veya $-2<x\leq -\sqrt{3}$

$x=\mp 2 \Rightarrow f(x)=4$



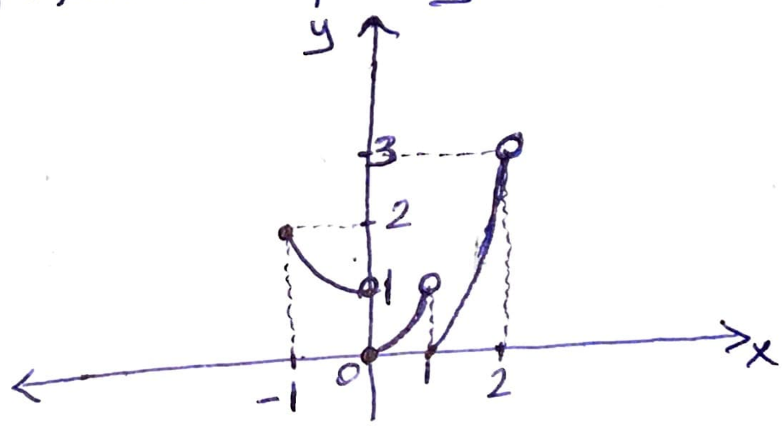
Örnek: $f:[-1,2)\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2-[\![x]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$-1\leq x<0 \Rightarrow f(x)=x^2+1$

$0\leq x<1 \Rightarrow f(x)=x^2$

$1\leq x<2 \Rightarrow f(x)=x^2-1$

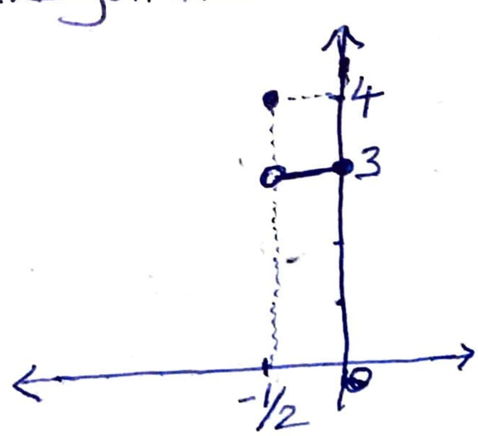


Örnek: $f:[-\frac{1}{2},0]\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=[\![\frac{2x+3}{x+1}]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f(x)=[\![2+\frac{1}{x+1}]\!]=2+[\![\frac{1}{x+1}]\!]$

$f(x)=2+[\![\frac{1}{x+1}]\!]=4 \Rightarrow 2\leq \frac{1}{x+1}<3 \Rightarrow \frac{-2}{3}<x\leq \frac{-1}{2}$

$f(x)=2+[\![\frac{1}{x+1}]\!]=3 \Rightarrow 1\leq \frac{1}{x+1}<2 \Rightarrow \frac{-1}{2}<x\leq 0$



Mutlak Değer Fonksiyonu:

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

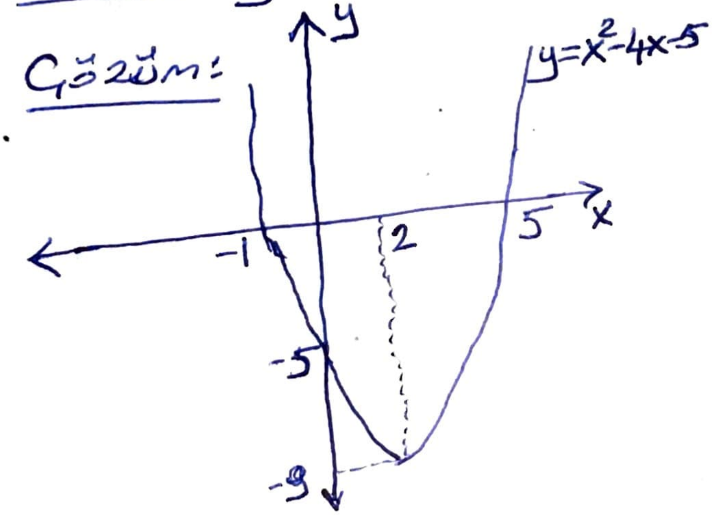
$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

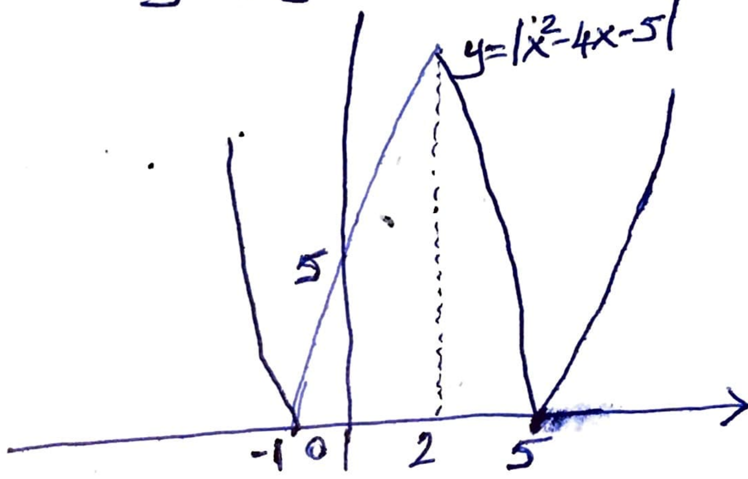
ile tanımlı fonksiyona mutlak değer fonksiyonu denir.

$y=|f(x)|$ eğrisini çizmek için $f(x)\geq 0$ ise $y=f(x)$ eğrisi, $f(x)\leq 0$ ise $y=f(x)$ eğrisinin Ox eksenine göre simetriği çizilir.

Örnek: $y=|x^2-4x-5|$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm:

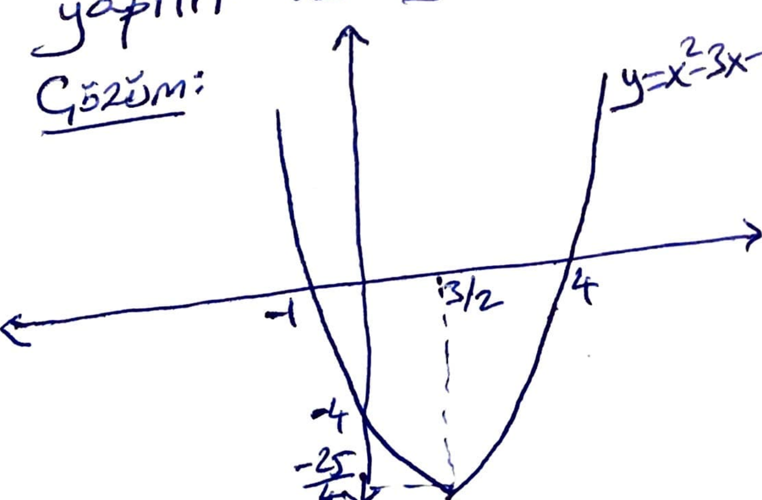


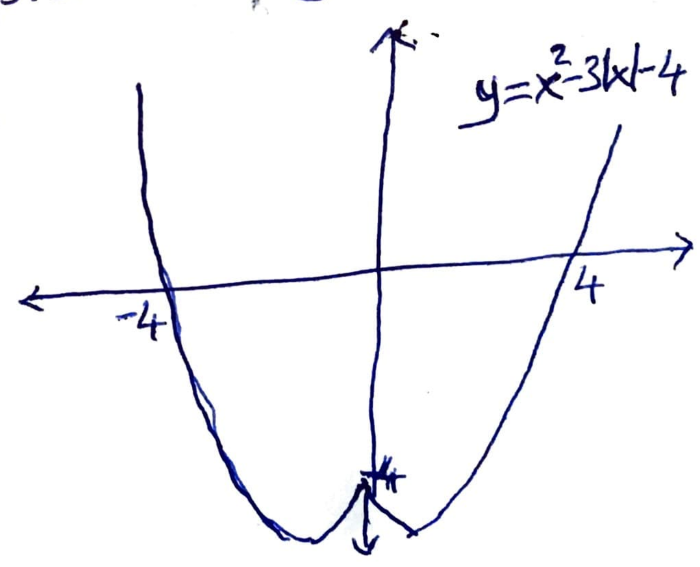


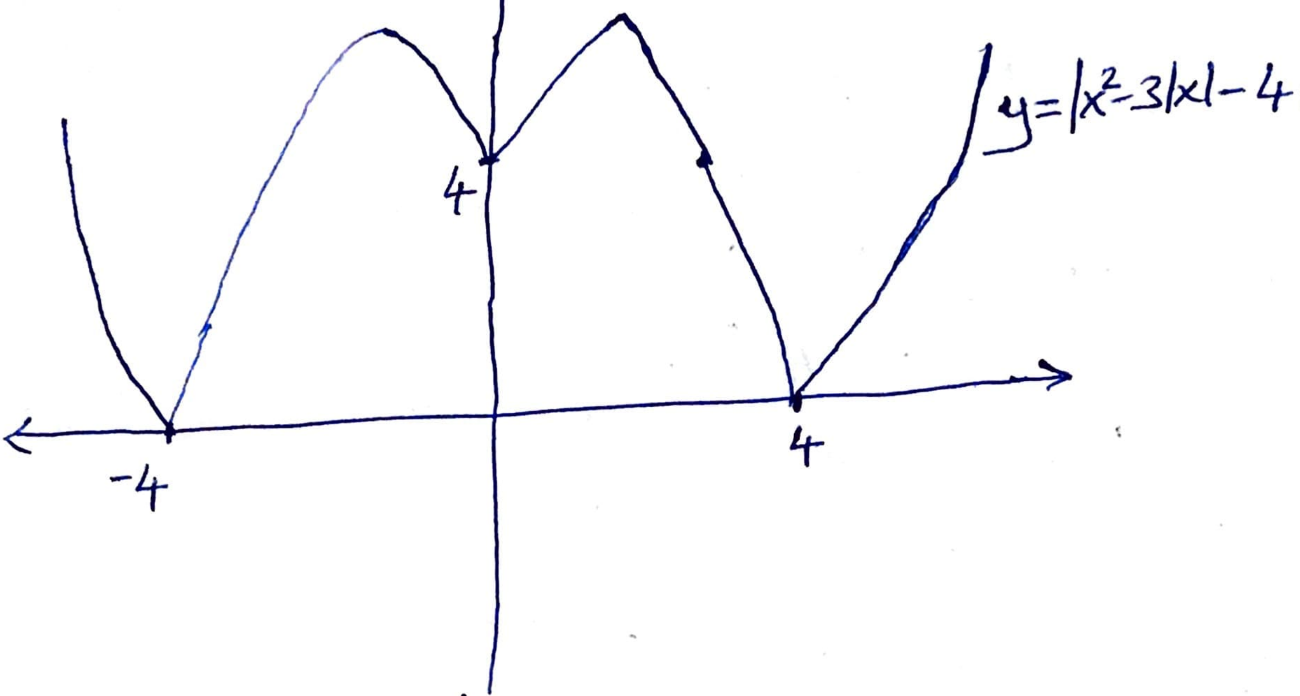
Örnek: $y=|x^2-3|x|-4|$ eğrisini çiziniz.

Not: $y=f(|x|)$ eğrisini çizmek için $x\geq 0$ için çizim yapılır ve Oy eksenine göre simetriği alınır.

Çözüm:

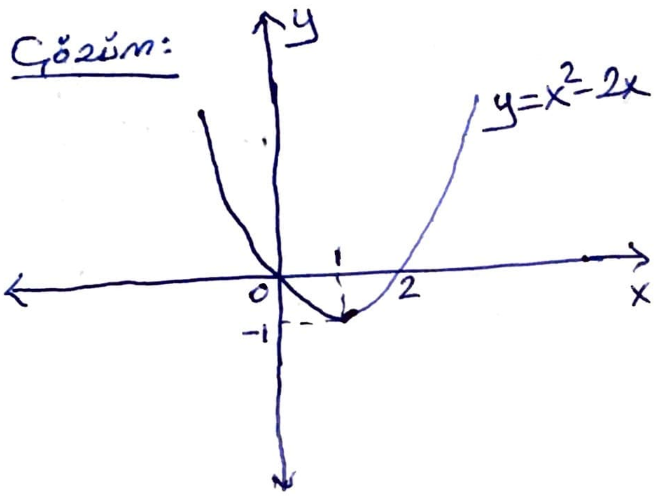


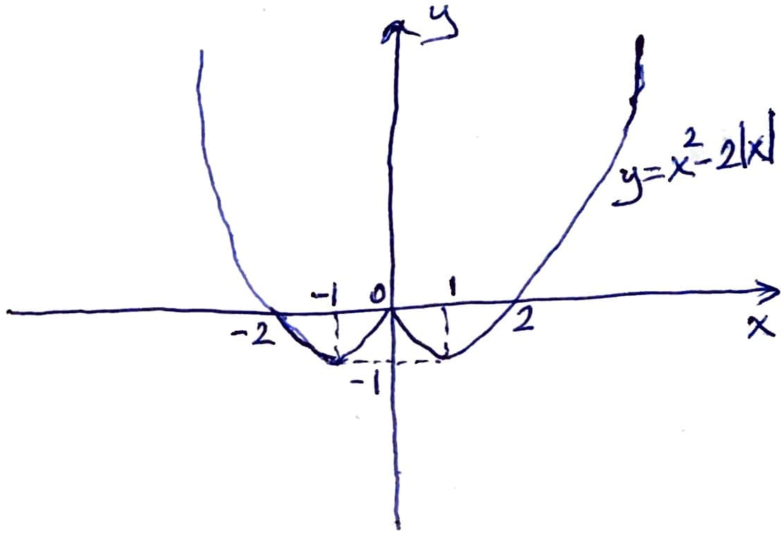


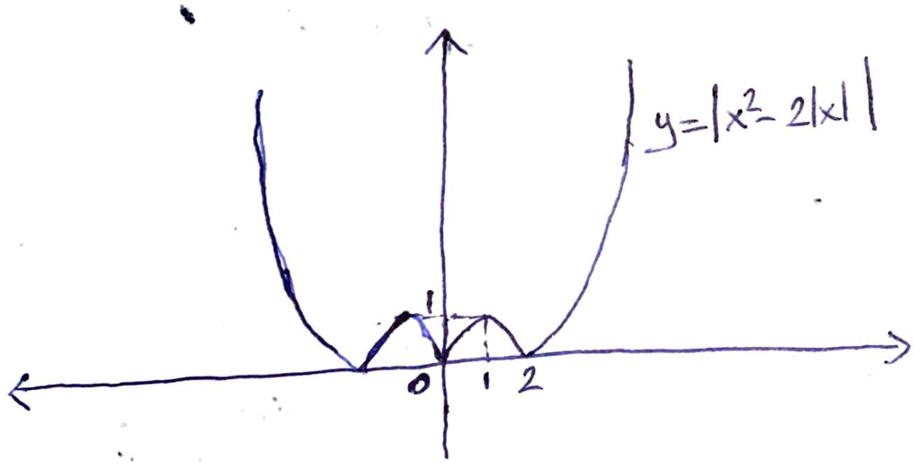


Örnek: $y=|x^2-2|x||$ eğrisini çiziniz.

Çözüm:







İşaret Fonksiyonu:

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$(\operatorname{sgn} f)(x) = \operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & f(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} -1, & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ 1, & f(x) > 0 \end{cases}$$

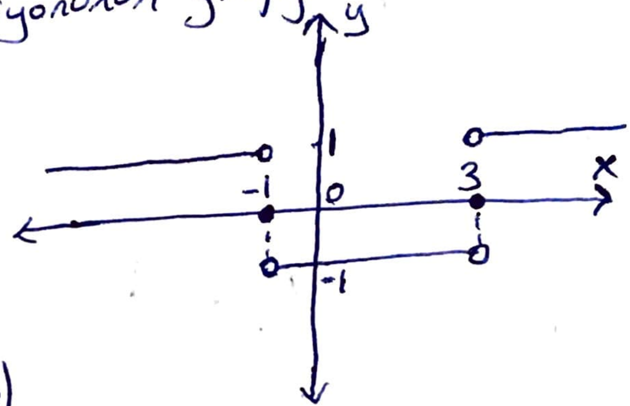
fonksiyonuna işaret fonksiyonu denir.

Örnek: $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

	-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0 $-$	0	$+$

$$\operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 3) \\ 0, & x \in \{-1, 3\} \\ 1, & x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \end{cases}$$

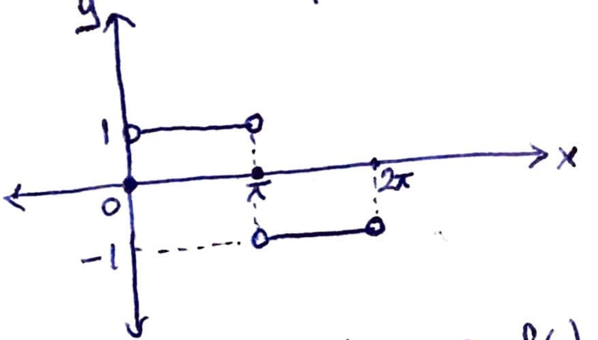


Örnek: $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

	0		π		2π
$\sin x$		$+$	0	$-$	

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (\pi, 2\pi) \\ 0, & x \in \{0, \pi, 2\pi\} \\ 1, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

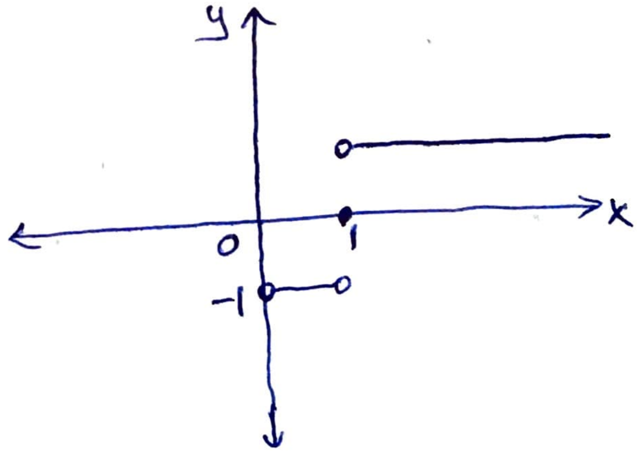


Örnek: $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(\ln x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

Çözüm:

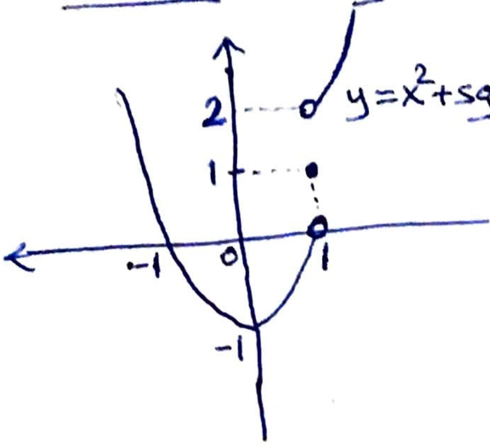
	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

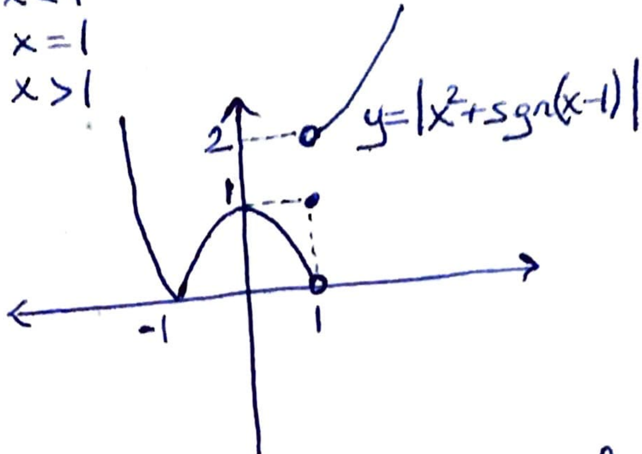
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$



Örnek: $y=|x^2+\operatorname{sgn}(x-1)|$ eğrisini çiziniz.

Çözüm: $x^2+\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}x^2-1, & x<1\\ 1, & x=1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$



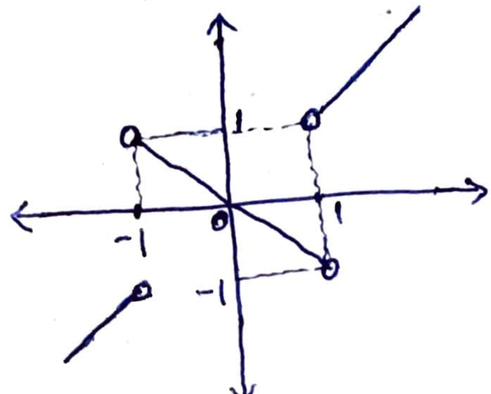


Örnek: $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sgn}(x^2-1)}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

		-1		1	
x^2-1	+	○	−	○	+

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ -x, & x\in(-1,1)\end{cases}$$

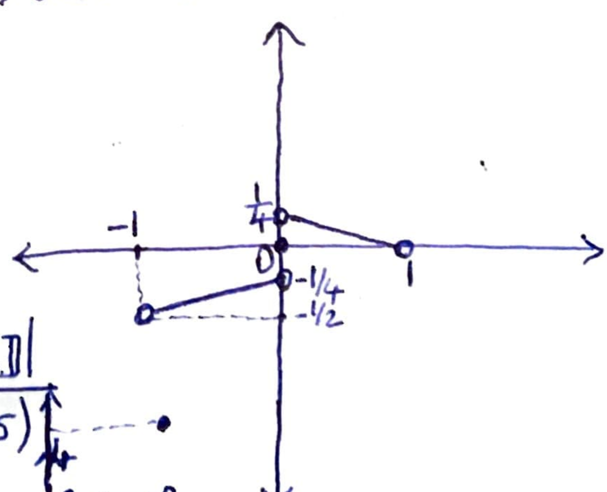


Örnek: $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{|x|-\operatorname{sgn}(x)}{[\![x^2-4]\!]}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ $\quad |x|=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$

$$[\![x^2-4]\!]=-4 \Rightarrow -4\le x^2-4<-3 \Rightarrow 0\le x^2<1 \Rightarrow -1<x<1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+1}{-4}, & -1<x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{x-1}{-4}, & 0<x<1\end{cases}$$



Ödev: $f:[-1,2]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{[\![|x|]\!]+|[\![x]\!]|}{\operatorname{sgn}(x+5)}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.