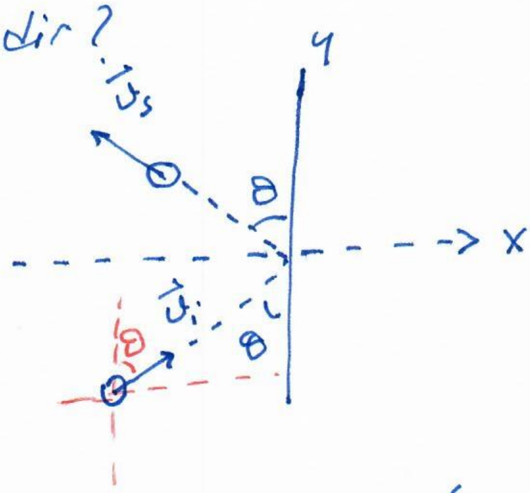
9. BÖLÜM PROBLEM VE ÇÖZÜMLERİ

9.11: 3 kg kütleli bir çelik gülle büyük bir duvara, duvarla 60° lik açı yapacak şekilde 10 m/s hızla çarpar ve top aynı hız ve açı ile yansıtılır. Eğer top duvarla 0,20 s temasta kalırsa duvarın topa uyguladığı ortalama kuvvet nedir?



$m = 3$ kg
$\theta = 60°$
$v_i = 10$ m/s
$v_s = 10$ m/s
$\Delta t = 0,20$ s
$\vec{F} = ?$

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_s - \vec{P}_i = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}\,dt \quad ; \quad \vec{I} = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}\,dt\ ,$$

$\vec{F}$ kuvveti ortalama sabit bir kuvvet alınırsa $\vec{I} = \vec{F}.\Delta t$ olur

Sonuç olarak;

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_s - \vec{P}_i = \vec{F}.\Delta t$$

$$\vec{V}_i = v_i \sin(60°)\,i + v_i \cos(60)\,j \Rightarrow \vec{V}_i = 8,66\,i + 0,50\,j$$

$$\vec{V}_s = v_i \sin(60)(-i) + v_i \cos(60)\,j \Rightarrow \vec{V}_s = -8,66\,i + 0,50\,j$$

$$\Delta\vec{P} = m\vec{V}_s - m\vec{V}_i \Rightarrow \Delta\vec{P} = 3[-8,66i + 0,50j - (8,66i + 0,50j)]$$

$$\Delta\vec{P} = -52,0\,i \text{ kg m/s}$$

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}.\Delta t \Rightarrow \vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} = \frac{-52,0i}{0,20} \Rightarrow \vec{F} = -260\,i \text{ Newton}$$

9.16 : 75 kg lık bir buz patencisi 10 m/s hızla kayarken aynı kütleli durgun bir patenciye çarpıyor. İki patenci, çarpışmadan sonra 5 m/s hızla birlikte, tek parça olarak hareket ediyorlar. Bir patencinin bir kemiğini kırmadan uygulayabileceği ortalama kuvvet 4500 N'dur. Çarpışma süresi 0,1 s ise; patencinin bir yeri kırılır mı ?

$m_1 = m_2 = 75$ kg

$v_{1i} = 10$ m/s

$v_{2i} = 0$

$v_{1s} = v_{2s} = 5$ m/s

$F_{max} = 4500$ N

$\bar{F} = ?$

$\Delta t = 0,1$ s

Not Burada 1. patenci 10 m/s hızla durmakta olan 2. patenciye çarpıyor, çarpışmadan sonra iki patenci 1. patencinin geliş doğrultusunda 5 m/s hızla gidiyor.

İkinci patencinin momentumundaki değişim ikinci patenciye etkiyen impulsa eşittir.

$$\Delta \vec{P}_2 = \vec{P}_{2s} - \vec{P}_{2i} \Rightarrow \Delta \vec{P}_2 = m_2 \vec{v}_{2s} - m_2 \cancelto{0}{\vec{v}_{2i}}$$

Hareketin x yönünde olduğunu kabul ettim.

$$\Delta \vec{P}_2 = m_2 v_{2s} \hat{i} \Rightarrow \Delta \vec{P}_2 = 75 \cdot 5,0 \, \hat{i}$$

Diğer taraftan $\Delta \vec{P}_2 = \vec{I}_2 = \vec{\bar{F}}_2 \cdot \Delta t$

$$\vec{\bar{F}}_2 = \frac{\Delta \vec{P}_2}{\Delta t} \Rightarrow \vec{\bar{F}}_2 = \frac{75 \times 5,0 \, \hat{i}}{0,1} \Rightarrow \vec{\bar{F}} = 3750 \, \hat{i} \text{ Newton}$$

$|\vec{\bar{F}}| < F_{max}$ olduğundan patencilerin herhangi bir kemiği kırılmaz

Soru: Başlangıç hızları v_{1i}, v_{2i} olan m_1, m_2 kütleli iki parçacık esnek olarak çarpışıyor. Çarpışmadan sonraki hızları v_{1s}, v_{2s} ise; çarpışmadan sonraki hızları çarpışmadan önceki hızlar cinsinden bulunuz.

$m_1 \; v_{1i} \qquad m_2 \; v_{2i}$

Çözüm

Çarpışma esnek çarpışma; kinetik enerji korunur. Yani çarpışmadan önceki sistemin kinetik enerjisi, çarpışmadan sonraki sistemin kinetik enerjisine eşittir.
Her türlü çarpışmada momentum korunur.

1: Momentum korunumundan ($P_i = P_s$)

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1s} + m_2 v_{2s} \Rightarrow m_1(v_{1i} - v_{1s}) = m_2(v_{2s} - v_{2i}) \quad (1)$$

2. Kinetik Enerji Korunumundan ($K_i = K_s$)

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2$$ ($\frac{1}{2}$ ler kısaltılarak;)

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1s}^2 + m_2 v_{2s}^2 \Rightarrow m_1(v_{1i}^2 - v_{1s}^2) = m_2(v_{2s}^2 - v_{2i}^2)$$

$$\Rightarrow m_1(v_{1i} - v_{1s})(v_{1i} + v_{1s}) = m_2(v_{2s} - v_{2i})(v_{2s} + v_{2i}) \quad (2)$$

$\frac{2}{1}$; den

$$\frac{\cancel{m_1}\cancel{(v_{1i} - v_{1s})}(v_{1i} + v_{1s})}{\cancel{m_1}\cancel{(v_{1i} - v_{1s})}} = \frac{\cancel{m_2}\cancel{(v_{2s} - v_{2i})}(v_{2s} + v_{2i})}{\cancel{m_2}\cancel{(v_{2s} - v_{2i})}}$$

$$\Rightarrow v_{1i} + v_{1s} = v_{2s} + v_{2i} \Rightarrow v_{2s} = v_{1i} + v_{1s} - v_{2i} \quad (3)$$ ((1) de (3) ü yerine koyalım)

$$m_1 v_{1i} - m_1 v_{1s} = m_2(v_{1i} + v_{1s} - v_{2i}) - m_2 v_{2i}$$

$$\to (m_1 - m_2) v_{1i} + 2 m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{1s} \Rightarrow v_{1s} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

v_{1s} değerini (3) de yerine koyarak;

$$v_{2s} = \frac{(2 m_1)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_{2i}$$ bulunur.

9.26 : Şekilde gösterilen sürtünmesiz ABC rayını gözönüne alınız. $m_1 = 5$ kg kütleli bir blok A'dan serbest bırakılıyor, B de duran $m_2 = 10$ kg kütleli blokla esnek olarak çarpışıyor. Çarpışmadan sonra m_1'in çıkabileceği maksimum yüksekliği hesaplayınız.

$m_1 = 5$ kg

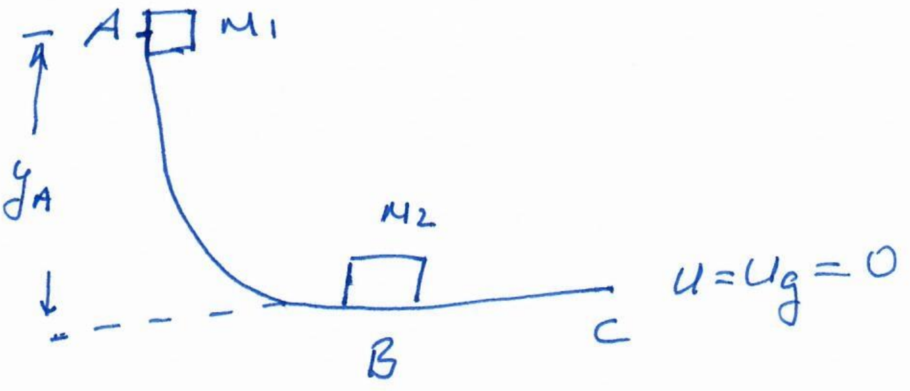
$v_A = 0$

$v_B = v_{2i} = 0$

$m_2 = 10$ kg

$y_A = 5,0$ m

$y_{max} = ?$



Not : Burada; (1) m_1 kütlesi A dan B ye gelecek m_1 in çarpışmadan hemen önceki hızı
(2) m_1 in çarpışmadan sonraki hızlarda v_{1i}, çarpışmadan sonra sırasıyla $\cancel{v_{2i}}$ v_{1s}, v_{2s} olsun.
(3) m_1'in çarpışmadan sonra çıkabileceği max. yükseklik ($h_{max} \equiv y_{max}$)

(1) m_1 in $A \to B$ hareketi (Korunumlu kuvvet etkisinde)

$$E_A = E_B \Rightarrow \overset{\to 0}{K_A} + U_A = K_B + \overset{\to 0}{U_B} \Rightarrow m_1 g y_A = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

$$v_{1i} = \sqrt{2 g y_A} \Rightarrow v_{1i} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 5,0} \Rightarrow v_{1i} = 9,9 \text{ m/s}$$

(2) Çarpışmada kinetik enerji ve momentum korunur. Bir önceki problemden

$$v_{1s} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} \overset{\to 0}{v_{2i}} \Rightarrow v_{1s} = \frac{(5,0 - 10,0)}{15} \times 9,9$$

$$v_{1s} = -3,3 \text{ m/s}$$

(3) Yine enerji korunumundan;

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 = m_1 g y_{max} \Rightarrow y_{max} = \frac{v_{1s}^2}{2g} \Rightarrow y_{max} = \frac{(-3,3)^2}{2 \times 9,8} = 0,556 \text{ m}$$

9.33: Bir bilardo topu, 5 m/s hızla harekette iken aynı kütleli durgun bir topa çarpar. Çarpışmadan sonra top, ilk hareket yönüne göre 30° açı altında 4,33 m/s hızla hareket eder. Esnek çarpışmayı gözönüne alarak (sürtünme ve dönme etkisini gözönüne almadan) çarpılan topun hızının yön ve büyüklüğünü bulunuz.

$m_1 = m_2 \equiv m$

$v_{1i} = 5\ m/s$

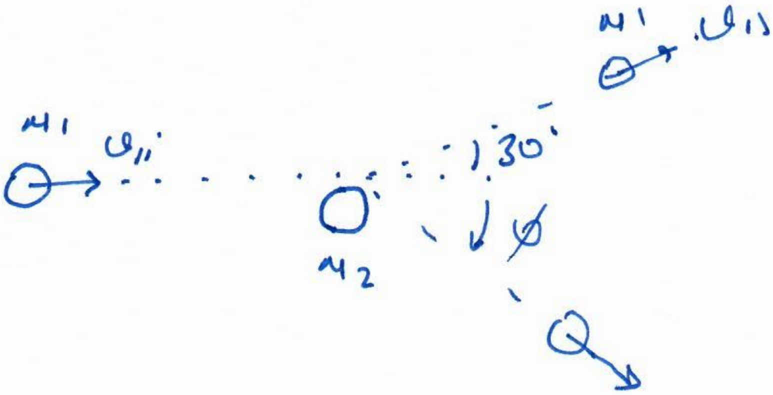
$v_{2i} = 0$

$\theta = 30°$

$v_{1s} = 4,33\ m/s$

$v_{12} = ?$

yönü $= ?$ $(\phi = ?)$



Not: Burada çarpışma iki boyutta ve momentum vektörel bir büyüklük olduğundan momentum bileşenleri korunur.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_s \Rightarrow \begin{cases} P_{ix} = P_{sx} \\ P_{iy} = P_{sy} \end{cases}$$

$$\left(\begin{aligned} v_{1sx} &= v_{1s} \cdot \cos(30) \\ v_{1sy} &= v_{1s} \cdot \sin(30) \\ v_{2sx} &= v_{2s} \cos\phi \\ v_{2sy} &= v_{2s} \sin\phi \end{aligned} \right)$$

$$P_{ix} = P_{sx} \Rightarrow m_1 v_{1i} = m_1 v_{1sx} + m_2 v_{2sx} \Rightarrow v_{1i} = v_{1sx} + v_{2sx} \quad (1)$$

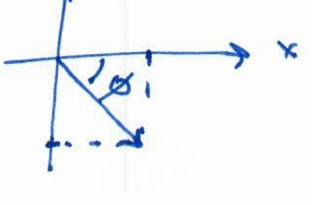
$$P_{iy} = P_{sy} \Rightarrow 0 = v_{1sy} + v_{2sy} \quad (2) \Rightarrow 4,33 \cdot \sin(30) = -v_{2sy}$$

$$v_{2sy} = -2,17\ m/s$$

(1) den $5,0 = 4,33 \cdot \cos(30) + v_{2sx} \Rightarrow v_{2sx} = 1,25\ m/s$

$$v_{2s} = \sqrt{(1,25)^2 + (-2,17)^2}$$

$$\underline{v_{2s} = 2,50\ m/s}$$



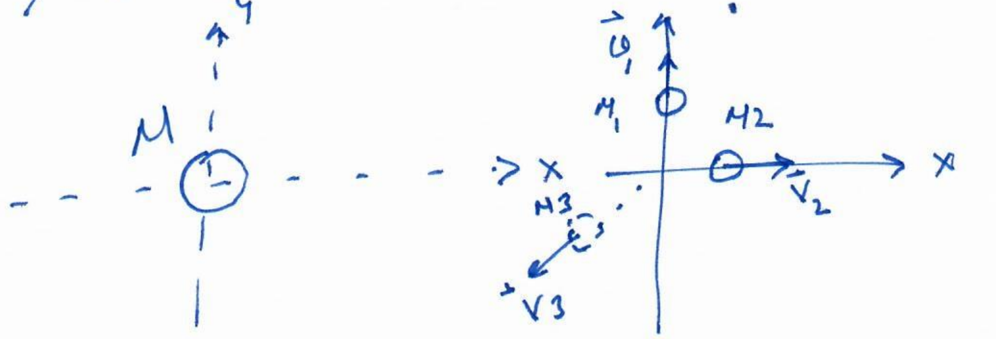
$$\tan\phi = \left(\frac{-2,17}{1,25}\right)$$

$$\phi = -60°$$

9.39: 17×10^{-27} kg kütleli kararsız bir çekirdek durgunken üç parçaya bölünür. Parçacıklardan birinin kütlesi 5×10^{-27} kg dır ve y ekseni boyunca 6×10^{6} m/s hızıyla hareket ediyor. $8{,}4\times10^{-27}$ kg kütleli diğer parçacık 4×10^{6} m/s hızla x-ekseni boyunca hareket etmektedir.

a) üçüncü parçacığın hızını

b) Bu olayda ortaya çıkan toplam kinetik enerji artışını bulunuz.



Patlamadan önce   Patlamadan sonra

$M = 17\times10^{-27}$ kg

$\vec{V}_i = 0$

$m_1 = 5\times10^{-27}$ kg

$\vec{V}_1 = 6\times10^{6}\,\hat{j}$ m/s

$m_2 = 8{,}4\times10^{-27}$ kg

$\vec{V}_2 = 4\times10^{6}\,\hat{i}$ m/s

a) $\vec{V}_3 = ?$

b) $\Delta K = K_s - K_i$?

a) Kütle korunumundan; $M = m_1 + m_2 + m_3 \Rightarrow m_3 = M - m_1 - m_2$

$m_3 = (17 - 5{,}0 - 8{,}4)\cdot10^{-27} \Rightarrow m_3 = 3{,}6\times10^{-27}$ kg

Momentum korunumundan $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$

$M\vec{V}_i = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + m_3\vec{V}_3 \Rightarrow 0 = 5\cdot\cancel{10^{-27}}\cdot6\cdot10^{6}\hat{j} + 8{,}4\cdot\cancel{10^{-27}}\cdot4\cdot10^{6}\hat{i} + 3{,}6\cdot\cancel{10^{-27}}\vec{V}_3$

$\Rightarrow \vec{V}_3 = -9{,}33\cdot10^{6}\,\hat{i} - 8{,}33\cdot10^{6}\,\hat{j}$ (m/s)

b) $\Delta K = K_s - K_i \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}m_3V_3^2 - \overset{0}{\frac{1}{2}MV_i^2}$

$\Delta K = \frac{1}{2}\left\{5(6\times10^{6})^2 + 8{,}4\cdot(4\cdot10^{6})^2 + 3{,}6\cdot\left[(-9{,}33\times10^{6})^2 + (-8{,}33\cdot10^{6})^2\right]\right\}10^{-27}$

$\Delta K = 4{,}39\times10^{-13}$ Joule

9.45 : Uzunluğu 30 cm olan bir çubuğun çizgisel kütle yoğunluğu

$$\lambda = 50\ g/m + 20x\ g/m^2$$

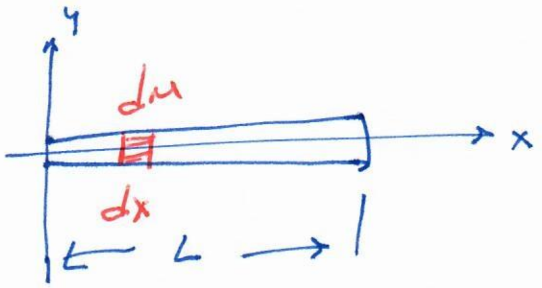
ile verilmektedir, burada x bir ucundan olan uzaklık ve metre cinsindendir.

a) Çubuğun kütlesi nedir?

b) Kütle merkezi $x=0$ ucundan ne kadar uzaktadır?

$L = 30\ cm = 0,30\ m$

$\lambda = 50 \frac{g}{m} + 20X \frac{g}{m^2}$



a) $M = ?$

b) $x_{km} = ?$

a) Çubuk üzerinde gözönüne aldığımız bir dx uzunluğunun kütlesi $dM = \lambda dx$ dir. Her iki tarafın integrali alınarak

$$M = \int_0^L \lambda dx \Rightarrow M = \int_{0,0}^{0,30} (50 + 20x) dx \Rightarrow M = (50x + 10x^2)\Big|_0^{0,30}$$

$$M = [50 \times 0,30 + 10 \times (0,30)^2] \Rightarrow M = 15,9 \text{ gram}$$

b) $x_{km} = \frac{1}{M} \int_L x\, dM$ Burada $(dM = \lambda dx)$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int_0 \lambda x\, dx \Rightarrow x_{km} = \frac{1}{M} \int_{0,0}^{0,30} (50 + 20x)\, x\, dx$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \cdot 50x^2 + \frac{1}{3} \cdot 20x^3\right]\Big|_{0,0}^{0,30}$$

$$x_{km} = \frac{1}{15,9} \left[25 (0,30)^2 + \frac{20}{3} (0,30)^3\right] \Rightarrow \underline{x_{km} = 0,153\ m}$$

9.46 : xy düzleminde iki parçacıklı bir sistemi ele alınız.

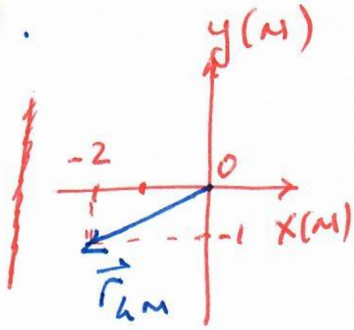
$m_1 = 2\,kg,\ \vec{r}_1 = (1i + 2j)\,m,\ \vec{v}_1 = (3i + 0{,}5j)\,m/s$;

$m_2 = 3\,kg,\ \vec{r}_2 = (-4i - 3j)\,m,\ \vec{v}_2 = (3i - 2j)\,m/s$

a) Sistemin kütle merkezini bulunuz ve kabaca şekil üzerinde gösteriniz.

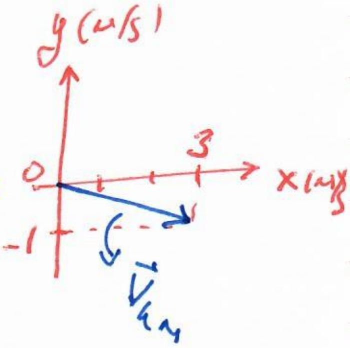
b) Kütle merkezinin hızı bulunuz kabaca şekilde gösteriniz

c) Sistemin toplam doğrusal momentumu bulunuz.



a) $\vec{r}_{km} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow \vec{r}_{km} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{(m_1 + m_2)}$

$$\vec{r}_{km} = \frac{2(1i+2j) + 3(-4i-3j)}{2+3} \Rightarrow \vec{r}_{km} = (-2i - j)\,m$$



b) $\vec{V}_{km} = \dfrac{\sum m_i V_i}{M} = \dfrac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 V_2}{(m_1 + m_2)}$

$$\vec{V}_{km} = \frac{2(3i + 0{,}5j) + 3(3i - 2j)}{2+3} \Rightarrow \vec{V}_{km} = (3i - j)\,m/s$$

c) $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Rightarrow \vec{P} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$

$$\vec{P} = 2(3i + 0{,}5j) + 3(3i - 2j) \Rightarrow \vec{P} = (15i - 5j)\,kg\,m/s$$

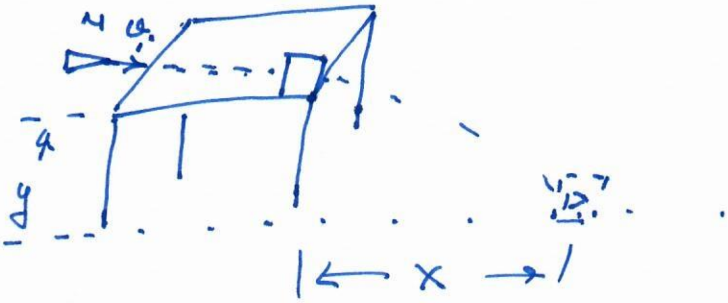
9.57: 8 g'lık bir mermi, 1 m yükseklikte sürtünmesiz bir masanın kenarında duran 2,5 kg lık bir bloğa ateşleniyor. Mermi bloğun içinde kalıyor ve çarpışmadan sonra blok, masanın tabanından 2 m uzakta yere düşüyor. Merminin ilk hızını bulunuz.

$m = 8\ g$

$y_i = 1\ m$

$M = 2{,}5\ kg$

$x = 2\ m$



Problemi sondan başa doğru çözebiliriz. Blok + mermi x yönünü ne kadar zamanda aldı ise (sabit hızlı), y yönünü da aynı zamanda yerçekim ivmesi ile almıştır.

$$y_s - y_i = v_{yi}\, t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad ; \quad v_{yi} = 0 \quad a_y = -g = -9{,}8\ m/s^2$$

$$0 - 1{,}0 = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2 \Rightarrow t = 0{,}452\ s$$

$$x = Vt \Rightarrow 2{,}0 = V \cdot (0{,}452) \Rightarrow V = 4{,}42\ m/s$$

(Çarpışmadan sonraki ortak hız)

Çarpışmada momentum korunumunu kullanarak;

$$P_i = P_s \Rightarrow m v_i = (m+M) V \Rightarrow v_i = \frac{(m+M)}{m} V$$

$$v_i = \frac{(8 \cdot 10^{-3} + 2{,}5)}{8 \cdot 10^{-3}} \cdot 4{,}42 \Rightarrow v_i = 1{,}39 \times 10^3\ m/s$$