Bu ders, Pamukkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü tarafından diğer fakültelerde ortak okutulan Genel Fizik-I dersi için hazırlanmıştır.

Ana kaynak kitap olarak resimdeki ders kitabı takip edilecektir.

@PauFizik

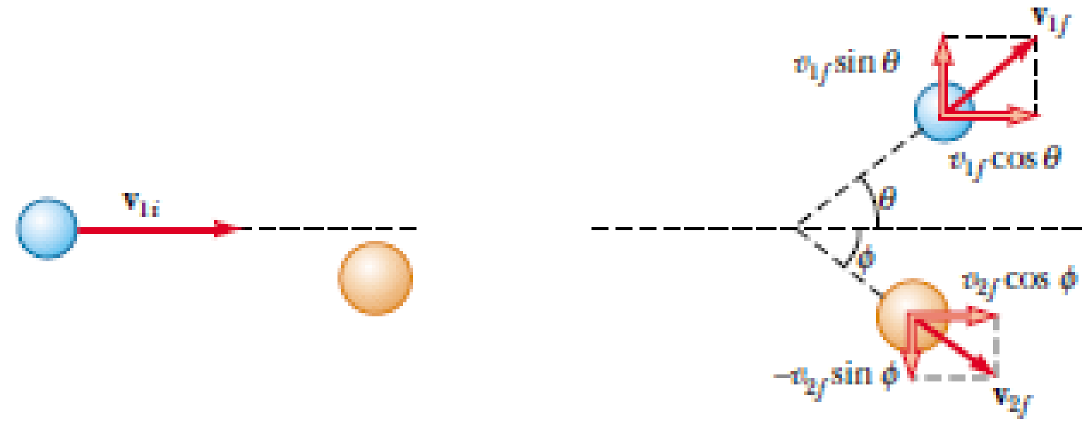
https://www.pau.edu.tr/fizik

İKİ-BOYUTTA ÇARPIŞMALAR

Çarpışmaların önemli bir bölümü düzlemde yani iki-boyutta gerçekleşir ama üç boyutta da toplam momentumun korunması gerekir. İki-boyutlu çarpışmalar için,

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1sx} + m_2 v_{2sx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1sy} + m_2 v_{2sy}$$



(a) Before the collision (b) After the collision

eşitlikleri yazılabilir. Şekildeki görüldüğü gibi, başlangıçta durgun olan m_2 kütleli bir parçacıkla, m_1 kütleli bir parçacığın iki boyutta çarpışmasını ele alalım. Bu durumda eşitliklerimiz,

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1s} \cos\theta + m_2 v_{2s} \cos\emptyset$$

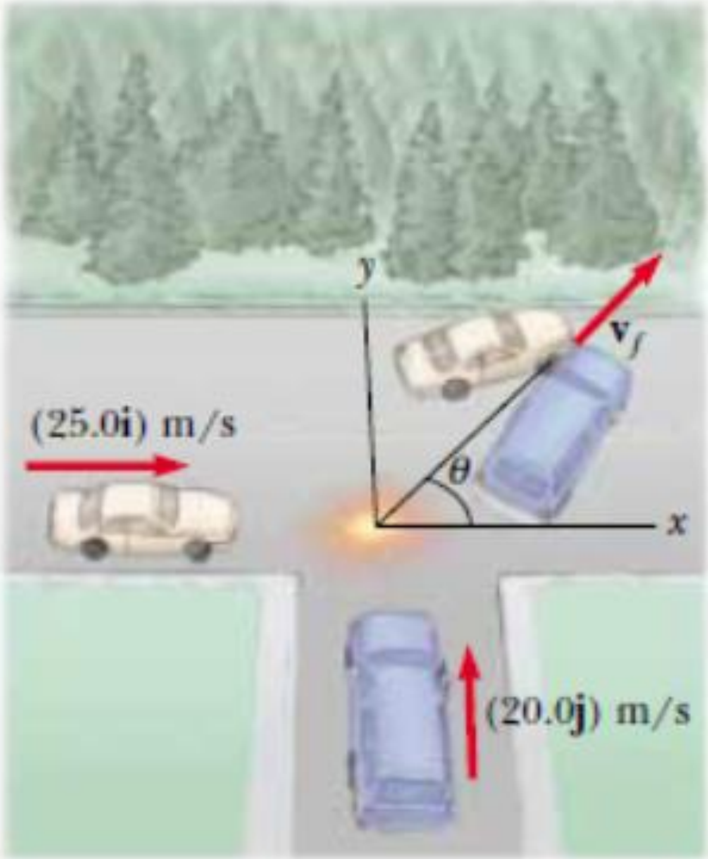
$$0 = m_1 v_{1s} \sin\theta - m_2 v_{2s} \sin\emptyset$$

şeklinde olur.

Çarpışma esnek çarpışma türündeyse ilave olarak kinetik enerjinin de korunması gerekir v

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2$$

Örnek 9-9: $25\,m/s$'lik hızla doğuya doğru hareket eden $1500\,kg$ kütleli bir araba, şekilde görüldüğü gibi $20\,m/s$'lik hızla kuzeye doğru hareket eden $2500\,kg$ kütleli büyük bir yük kamyonu ile kavşakta çarpışıyor. Araçların tamamen esnek olmayan çarpışma yaptıklarını (yapışarak birlikte hareket ettiklerini) gözönüne alarak, çarpışmadan sonra enkazın hızının büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.



Çözüm 9-9: Doğu yönü pozitif x-ekseni, kuzey yönü de pozitif y-ekseni olarak seçilirse,

$$\sum p_{xi} = m_1 v_{1ix} = (1500\,kg)(25\,m/s) = 3{,}75 \times 10^4\,kg.m/s$$

$$\sum p_{xs} = (m_1 + m_2) v_{sx} \quad ve \sum p_{xi} = \sum p_{xs} \quad ise$$

$$3{,}75 \times 10^4\,kg.m/s = (4000\,kg)(v_s \cos\theta)$$

olur. Benzer işlemler y-doğrultusu içinde yapılırsa,

$$\sum p_{yi} = m_2 v_{2iy} = (2500\,kg)(20\,m/s) = 5 \times 10^4\,kg.m/s$$

$$\sum p_{ys} = (m_1 + m_2) v_{sy} \quad ve \sum p_{yi} = \sum p_{ys} \quad ise$$

$$5 \times 10^4\,kg.m/s = (4000\,kg)(v_s \sin\theta)$$

olur. Elde edilen iki eşitlik birbirine bölünürse,

$$\frac{(4000\,kg)(v_s \sin\theta)}{(4000\,kg)(v_s \cos\theta)} = \frac{5 \times 10^4\,kg.m/s}{3{,}75 \times 10^4\,kg.m/s}$$

$$\tan\theta = \frac{5 \times 10^4\,kg.m/s}{3{,}75 \times 10^4\,kg.m/s} = 1{,}33 \Longrightarrow \boldsymbol{\theta = 53{,}1^0}$$

$$v_s = \frac{5 \times 10^4\,kg.m/s}{(4000\,kg)(\sin 53{,}1^0)} = \mathbf{15{,}6\,m/s}$$

elde edilir.

Örnek 9-10: Şekilde görüldüğü gibi, bir proton başlangıçta durgun olan başka bir protonla kafa kafaya olmayacak şekilde tam esnek çarpışma yapıyor. Gelen protonun ilk hızı $3{,}50 \times 10^{5}\ m/s$'dir. Çarpışmadan sonra, bu protonlardan biri ilk geliş doğrultusu ile $37{,}0^{0}$'lik açı yaparak, diğeri de Ø açısı ile saçılır. İki protonun çarpışmadan sonraki son hızlarını ve Ø açısını bulunuz.

(a) Before the collision

(b) After the collision

Çözüm 9-10:

$$m_1 = m_2 \quad ; \quad \theta = 37{,}0^0 \quad ve \quad v_{1i} = 3{,}50 \times 10^5 \; m/s \quad ise$$

$$v_{1s} \cos 37{,}0^0 + v_{2s} \cos \emptyset = 3{,}50 \times 10^5 \; m/s$$

$$\boldsymbol{v_{2s} \cos \emptyset = \left(3{,}50 \times 10^5 \; m/s\right) - v_{1s}(0{,}799)}$$

$$v_{1s} \sin 37{,}0^0 - v_{2s} \sin \emptyset = 0$$

$$\boldsymbol{v_{2s} \sin \emptyset = v_{1s}(0{,}602)}$$

olur. Elde edilen her iki eşitliğin kareleri alınıp taraf tarafa toplanırsa,

$$v_{2s}^2 (\cos \emptyset)^2 + v_{2s}^2 (\sin \emptyset)^2 = [(3{,}50 \times 10^5 \; m/s) - v_{1s}(0{,}799)]^2 + v_{1s}^2 (0{,}602)^2$$

$$v_{2s}^2 = 12{,}3 \times 10^{10} - v_{1s}(5{,}60 \times 10^5) + v_{1s}^2 (0{,}638) + v_{1s}^2 (0{,}362)$$

$$v_{2s}^2 = 12{,}3 \times 10^{10} - v_{1s}(5{,}60 \times 10^5) + v_{1s}^2$$

olur. Kinetik enerji korunumundan

$$v_{1s}^2 + v_{2s}^2 = (3{,}50 \times 10^5\ m/s)^2$$

elde edilirse,

$$v_{2s}^2 = (3{,}50 \times 10^5\ m/s)^2 - v_{1s}^2$$

$$v_{2s}^2 = 12{,}3 \times 10^{10} - v_{1s}^2$$

olur. Denklemler birleştirilirse

$$12{,}3 \times 10^{10} - v_{1s}^2 = 12{,}3 \times 10^{10} - v_{1s}(5{,}60 \times 10^5) + v_{1s}^2$$

$$2v_{1s}^2 = v_{1s}(5{,}60 \times 10^5)$$

$$\boldsymbol{v_{1s} = 2,80 \times 10^5\ m/s}$$

olur. Buradan,

$$v_{1s}^2 + v_{2s}^2 = (3{,}50 \times 10^5\ m/s)^2$$

Eşitliği kullanılarak

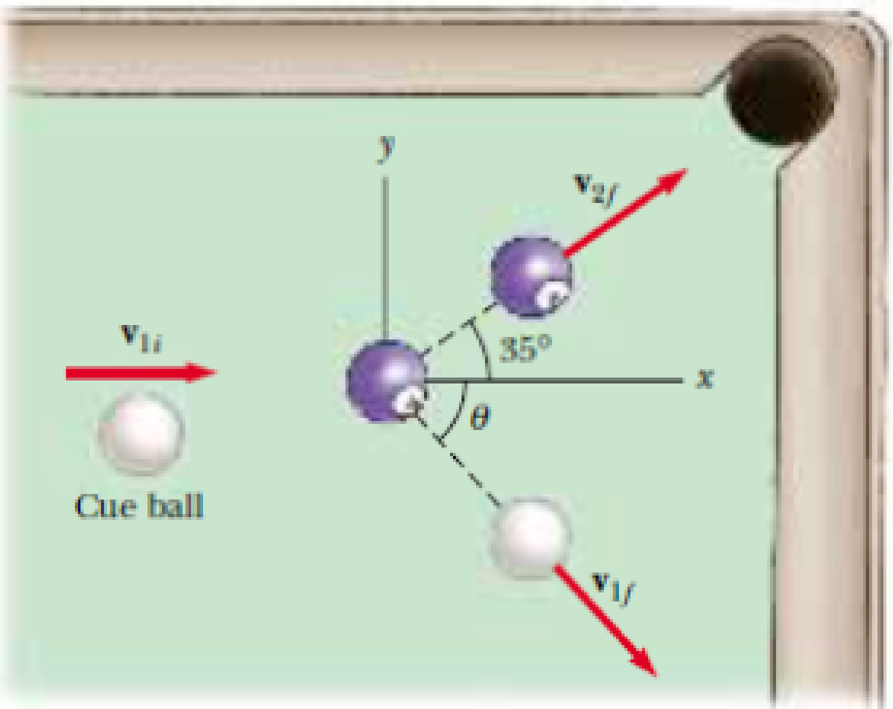
$$\boldsymbol{v_{2s} = 2,11 \times 10^5\ m/s}$$

ve

$$\boldsymbol{\emptyset = 53,0^0}$$

bulunur.

Örnek 9-11: Bir bilardo oyununda oyuncu, hedefteki topu köşedeki deliğe şekilde görüldüğü gibi düşürmek ister. Köşe deliğin, geliş doğrultusuna göre açısı 35^0 ise, gelen top hangi açı ile sapar? Bu çarpışmada yüzeyin sürtünmesiz olduğunu, dönme hareketinin önemsiz olduğunu ve çarpışmanın esnek çarpışma türünde olduğunu varsayınız.



Çözüm 9-11: Hedef top başlangıçta durgun olduğu ve $m_1 = m_2$ olduğu için kinetik enerji korunumundan,

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2s}^2 \Longrightarrow \boldsymbol{v_{1i}^2 = v_{1s}^2 + v_{2s}^2}$$

yazılabilir. Momentum korunumundan,

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1s} + \vec{v}_{2s}$$

$$v_{1i}^2 = (\vec{v}_{1s} + \vec{v}_{2s}).(\vec{v}_{1s} + \vec{v}_{2s})$$

$$v_{1i}^2 = v_{1s}^2 + v_{2s}^2 + 2\vec{v}_{1s}.\vec{v}_{2s}$$

$\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$ arasındaki açı $\theta + 35^0$ olduğundan

$$\vec{v}_{1s}.\vec{v}_{2s} = v_{1s}.v_{2s}\cos(\theta + 35^0)$$

$$\boldsymbol{v_{1i}^2 = v_{1s}^2 + v_{2s}^2 + 2v_{1s}.v_{2s}\cos(\theta + 35^0)}$$

elde edilir. Bu eşitlik, ilk elde edilen eşitlikten çıkartılırsa,

$$2v_{1s}.v_{2s}\cos(\theta + 35^0) = 0$$

$$\cos(\theta + 35^0) = 0$$

$$\theta + 35^0 = 90^0$$

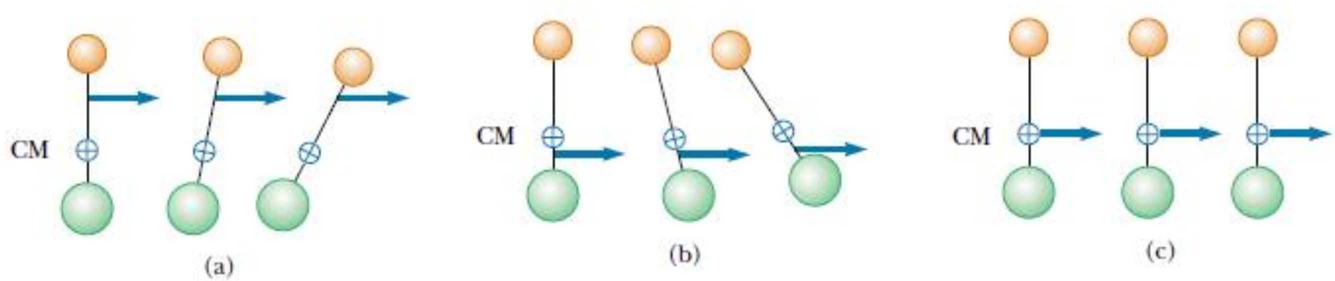
$$\theta = 55^0$$

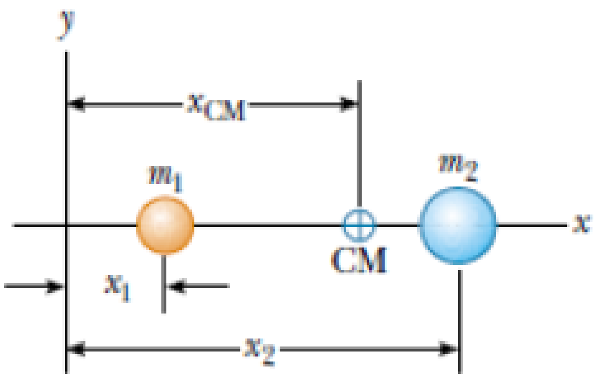
elde edilir. Bu sonuç, **iki eşit kütle (kütlelerden biri başlangıçta biri durgunken) sıyırma şeklinde esnek çarpışma yaparlarsa çarpışmadan sonra birbirlerine dik, yani aralarındaki açı 90^0 olacak şekilde hareket ederler.**

Kütle Merkezi

Mekanik bir sistemin bütününün hareketi, sistemin **kütle merkezi** olarak adlandırılan özel bir nokta yardımıyla açıklanabilir. Mekanik sistem, bir çok parçacıktan oluşan bir parçacıklar sistemi ya da havada takla atan bir jimnastikçi gibi büyük bir cisim olabilir. Böyle bir sistemin hareketi, tüm kütlesinin kütle merkezinde yoğunlaşmış olduğu ve tek bir parçacıkmış gibi davrandığı düşünülerek incelenebilir.

Şekilde görüldüğü gibi, hafif, katı bir çubukla bağlanmış iki parçacıklı sistemde kütle merkezi, parçacıkları bağlayan çizgi üzerinde bir yerde ve büyük olan kütleye daha yakındır. Eğer tek bir kuvvet, çubuk üzerinde küçük olan kütleye yakın bir noktaya uygulanırsa, sistem saat ibresi yönünde döner. Kuvvet, aynı çizgi üzerinde büyük olan kütleye yakın bir noktaya uygulanırsa, bu sefer de sistem saat ibresinin tersi yönünde döner. Kuvvet, kütle merkezine uygulanırsa, sistem dönmeden uygulanan $\vec{F}$ yönünde hareket eder.





x-ekseni üzerinde x_1 ve x_2 noktalarında bulunan, sırasıyla, m_1 ve m_2 kütlelerine sahip iki noktasal cismin kütle merkezi,

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

bağıntısı ile verilir. x-ekseni üzerine yerleştirilmiş n tane parçacık durumunda bu bağıntı:

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

şeklinde olur. Burada M sistemindeki parçacıkların toplam kütlesidir. Benzer şekilde kütle merkezinin y ve z koordinatları da,

$$y_{KM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{ve} \quad z_{KM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, üç boyutlu uzayda (*xyz*-koordinat sistemi) parçacık sisteminin kütle merkezi, kütlesi m_i olan parçacığın konum vektörü $\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$ olmak üzere, daha genel bir ifade olan

$$\vec{r}_{KM} = x_{KM}\hat{\imath} + y_{KM}\hat{\jmath} + z_{KM}\hat{k}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right)\hat{\imath} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right)\hat{\jmath} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right)\hat{k}\right]$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

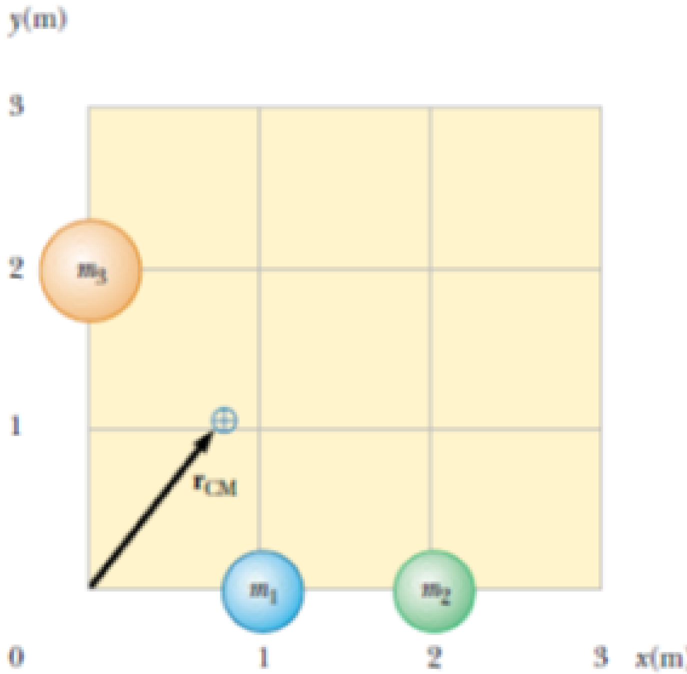
bağıntısına sahiptir.

Bir parçacık sisteminin kütle merkezi, sistemdeki tüm parçacıkların toplandığı bir nokta ve sistem üzerine etki eden tüm dış kuvvetler o noktaya etkiyormuş gibi düşünülebilir.

Bir beyzbol sopasının şekildeki gibi havaya fırlatıldığını ve yer-çekimi kuvvetinin etkisi altındaki hareketini düşünelim. Sopanın kütle merkezi siyah bir nokta ile işaretlenmiştir. Kütle merkezinin hareketine bakıldığında, bunun bir eğik atış hareketi olduğu kolayca görülür.

Ancak, kütle merkezi dışındaki noktaların hareketleri oldukça karmaşıktır.

Örnek 9-12: Konumları şekilde verilen $m_1 = m_2 = 1\ kg$ ve $m_3 = 2\ kg$ kütleli üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezini bulunuz.



Çözüm 9-12:

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \frac{(1)(1) + (1)(2) + (2)(0)}{(1 + 1 + 2)} = 0{,}75\ m$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \frac{(1)(0) + (1)(0) + (2)(2)}{(1 + 1 + 2)} = 1\ m$$

$$\vec{r}_{KM} = x_{KM}\,\hat{\imath} + y_{KM}\,\hat{\jmath} = \big((0{,}75)\hat{\imath} + (1)\hat{\jmath}\big)\ m$$

Örnek: xy-düzlemindeki konumları $\vec{r}_1 = (12\,\hat{\jmath})cm$, $\vec{r}_2 = (-12\,\hat{\imath})cm$ ve $\vec{r}_3 = (12\,\hat{\imath} - 12\,\hat{\jmath})cm$ olan cisimlerin kütleleri de sırasıyla $m_1 = 0{,}4\,kg$ ve $m_2 = m_3 = 0{,}8\,kg$ kg ile verilmektedir. Sistemin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm:

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \frac{(0{,}4)(0) + (0{,}8)(-12) + (0{,}8)(12)}{(0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}8)} = 0$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \frac{(0{,}4)(12) + (0{,}8)(0) + (0{,}8)(-12)}{(0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}8)} = -2{,}4\ cm$$

$$\vec{r}_{KM} = x_{KM}\hat{\imath} + y_{KM}\hat{\jmath} = (-2{,}4\hat{\jmath})\ cm$$

Katı Cisimlerin Kütle Merkezi

Maddenin, içinde homojen bir şekilde dağıldığı sistemlere katı cisimler denilebilir. Böyle cisimlerin kütle merkezini bulmak için, kesikli toplama işlemi yerine sürekli toplama işlemi olan integral işlemi kullanılır.

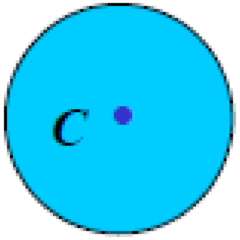
$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

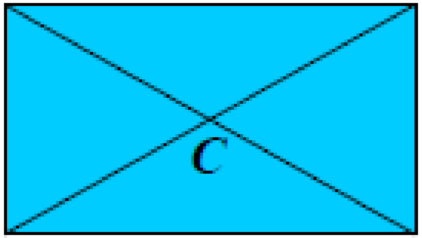
$$z_{KM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Cisimlerin simetrisi (simetri noktası, simetri ekseni, simetri düzlemi) uygun ise integral alma işlemine gerek kalmayabilir. Kütle merkezi simetri elemanı üzerinde olacaktır.

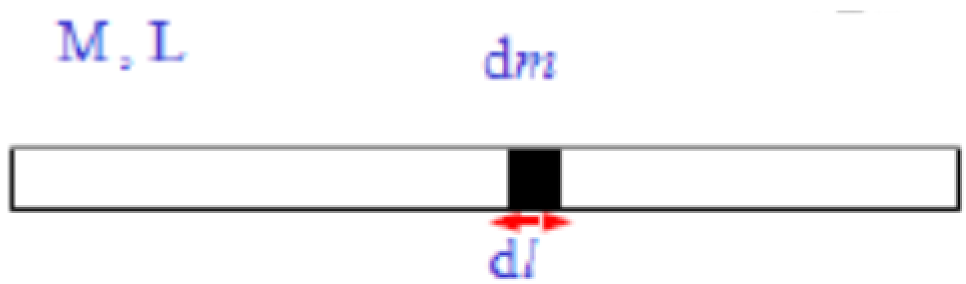


Örneğin bir kürenin kütle merkezi, kürenin merkezidir.



Bir dikdörtgenin kütle merkezi ise, karşılıklı köşegenleri birleştiren doğruların kesişim noktasıdır.

- Katı cisim L uzunluğuna ve M kütlesine sahip bir **çubuk** ise, kütle yoğunluğu çizgiseldir.



$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L} \Rightarrow x_{KM} = \frac{1}{M}\int x\lambda dx$$

- Katı cisim A yüzey alanına ve M kütlesine sahip ince bir **plaka** ise, kütle yoğunluğu yüzeyseldir:

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} \Rightarrow \boldsymbol{x_{KM} = \frac{1}{M}\int x\sigma dA} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\sigma dA}$$

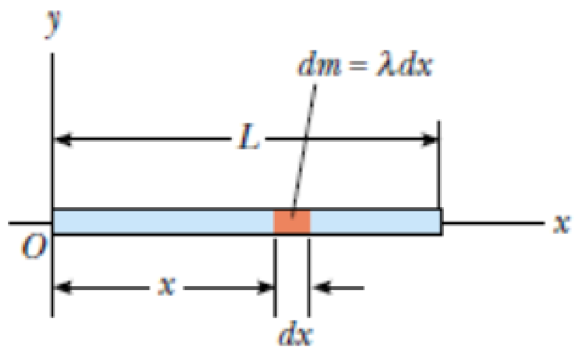
- Katı cisim V hacmine ve M kütlesine sahip ise, kütle yoğunluğu hacimseldir:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \Rightarrow \boldsymbol{x_{KM}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \int \boldsymbol{x\rho dV} \;;\; \boldsymbol{y_{KM}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \int \boldsymbol{y\rho dV} \text{ ve } \boldsymbol{z_{KM}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \int \boldsymbol{z\rho dV}$$

Örnek 9-13:

a) Kütlesi M ve uzunluğu L olan homojen bir çubuğun kütle merkezini bulunuz.

b) Çubuğun çizgisel kütle yoğunluğu $\lambda = \alpha x$ ise, kütle merkezini bulunuz. (x çubuğun sol ucundan olan uzaklık, α da bir



Çözüm 9-13:

a) $x_{KM} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{2M}(x^2|_0^L) = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2}$

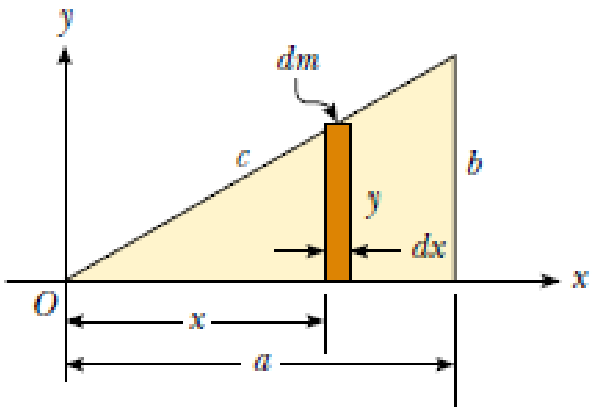
b) $x_{KM} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{1}{M}\int_0^L x(\alpha x)dx = \frac{\alpha}{3M}(x^3|_0^L)$

$$x_{KM} = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L (\alpha x)dx = \frac{\alpha}{2}(x^2|_0^L) = \frac{\alpha L^2}{2}$$

$$x_{KM} = \frac{\alpha L^3}{3M} = \frac{L^3}{3M}\left(\frac{2M}{L^2}\right) = \frac{2}{3}L$$

Örnek 9-14: Kütlesi M ve boyutları şekilde verilen dik üçgen biçimindeki plakanın kütle merkezini bulunuz.



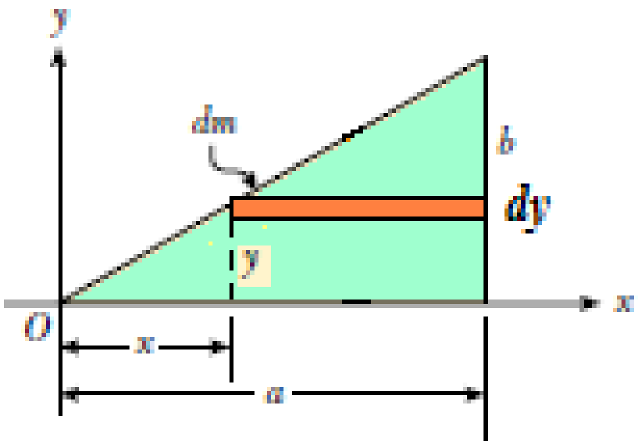
Çözüm 9-14:

$$dm = \frac{Toplam\ kütle}{Toplam\ alan} \times dilim\ alanı$$

$$dm = \frac{M}{\left(\frac{1}{2}ab\right)}(ydx) = \frac{2M}{ab}(ydx) \qquad \text{ve benzer üçgenden} \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int_0^a x\left(\frac{2M}{ab}\right)ydx = \frac{2}{ab}\int_0^a xydx = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx$$

$$x_{KM} = \frac{2}{a^2}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^a\right) = \frac{2}{3}a$$



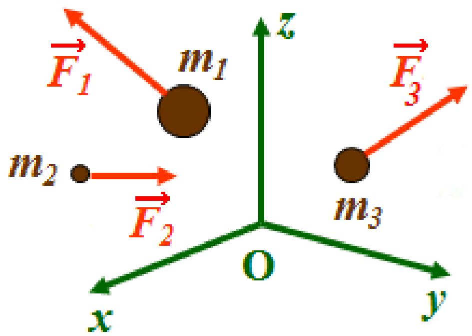
$$dm=\frac{M}{\left(\frac{1}{2}ab\right)}(a-x)dy=\frac{2M}{ab}(a-x)dy \quad \text{ve} \quad \text{benzer üçgenden} \quad \frac{b-y}{a-x}=\frac{b}{a}$$

$$y_{KM}=\frac{1}{M}\int ydm=\frac{1}{M}\int_0^b y\left(\frac{2M}{ab}\right)(a-x)dy=\frac{2}{ab}\int_0^b y(a-x)dy$$

$$y_{KM}=\frac{2}{ab}\int_0^b y\left(\frac{a(b-y)}{b}\right)dy=\frac{2}{ab}\int_0^b\left(\frac{yab}{b}-\frac{ay^2}{b}\right)dy$$

$$y_{KM}=\frac{2}{ab}\left(\frac{aby^2}{2b}-\frac{ay^3}{3b}\Big|_0^b\right)=\frac{2}{b^2}\left(\frac{by^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_0^b\right)=\frac{1}{3}b$$

Parçacıklar Sisteminin Hareketi



Kütleleri m_1, m_2, m_3, …, m_n ve konum vektörleri $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n$ olan n parçacıklı bir sistem düşünelim. Kütle merkezinin konum vektörü şu ifadeyle verilir.

$$\vec{r}_{KM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{r}_{KM}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_3\frac{d\vec{r}_3}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M\vec{v}_{KM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \vec{p}_{top}$$

bulunur. Burada $\vec{v}_{KM}$ kütle merkezinin hızı, $\vec{v}_i$ i. parçacığın hızıdır. Her iki tarafın bir kez daha zamana göre türevi alınırsa,

$$\vec{a}_{KM} = \frac{d\vec{v}_{KM}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + m_3\frac{d\vec{v}_3}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt}\right)$$

$$\vec{a}_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i$$

bulunur. Burada $\vec{a}_{KM}$ kütle merkezinin ivmesi, $\vec{a}_i$ i. parçacığın ivmesidir. Bu ifade yeniden düzenlenir ve Newton'un ikinci yasası kullanılırsa

$$M\vec{a}_{KM} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

bulunur. Burada $\vec{F}_i$ i. parçacığa etkiyen kuvvettir.

Sistemdeki herhangi bir parçacık üzerine etki eden kuvvetler, iç ve dış kuvvetlerin her ikisini de içerir. Newton'un üçüncü yasasına göre 2. parçacık üzerine 1. parçacığın uyguladığı iç kuvvet, 1. parçacık üzerine 2. parçacığın uyguladığı iç kuvvete eşit ve zıt yönlüdür. Buna göre tüm iç kuvvetler toplandığında kuvvet çiftleri birbirlerini yok eder ve sistem üzerindeki net kuvvet sadece dış kuvvetler olur. Böylece,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{dış} = M\vec{a}_{KM} = \frac{d\vec{p}_{top}}{dt}$$

Son olarak, bileşke dış kuvvet sıfır ise,

$$\frac{d\vec{p}_{top}}{dt} = M\vec{a}_{KM} = 0$$

$$\vec{p}_{top} = M\vec{v}_{KM} = sabit \qquad \left(\sum \vec{F}_{dış} = 0 \; olduğunda\right)$$

yazılabilir.

Örnek 9-17: Bir roket, düşey olarak yukarıya ateşleniyor ve 1000 m yükseklikte 300 m/s hıza ulaşıyor. Bu anda roket üç eşit parçaya ayrılıyor. Parçalanmadan sonra parçalardan biri 450 m/s hızla yukarı yönde harekete devam ediyor, ikinci parçanın hızı ise doğu yönünde 240 m/s oluyor. Parçalanmadan hemen sonra üçüncü parçanın hızı ne olur?

Çözüm 9-17: Roketin toplam kütlesi M alınırsa, her parçanın kütlesi $M/3$ olur. Parçalanma kuvvetleri iç kuvvetler olup sistemin toplam momentumunu etkilemeyip, sistemin momentumu korunur.

$$\vec{p}_i = M\vec{v}_i = M(300\hat{\jmath})\, m/s$$

$$\vec{p}_s = \frac{M}{3}(240\hat{\imath})\, m/s + \frac{M}{3}(450\hat{\jmath})\, m/s + \frac{M}{3}\vec{v}_s$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_s$$

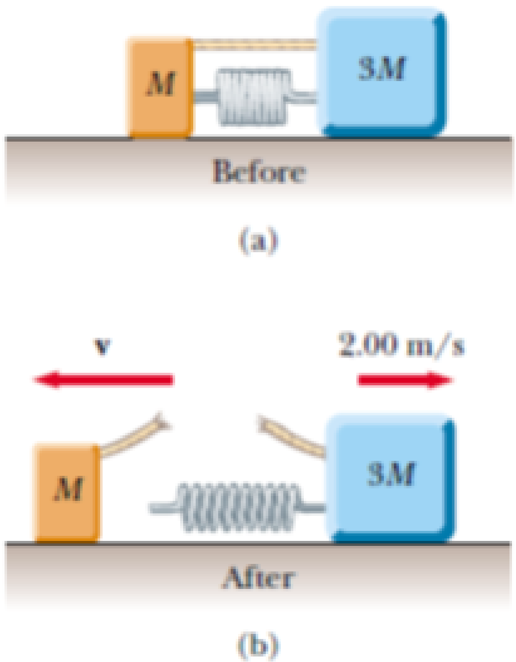
ise

$$M(300\hat{\jmath})\, m/s = \frac{M}{3}(240\hat{\imath})\, m/s + \frac{M}{3}(450\hat{\jmath})\, m/s + \frac{M}{3}\vec{v}_s$$

$$\vec{v}_s = (-240\hat{\imath} + 450\hat{\jmath})\, m/s$$

Bölüm Sonu Problemleri

Problem 6: M ve $3M$ kütleli iki blok, sürtünmesiz yatay bir yüzey üzerine yerleştirilmiştir. Bunların birine küçük bir yay tutturulmuş ve bloklar bastırılarak aradaki yay sıkışmış olarak ince bir iple birbirlerine şekildeki gibi bağlanmışlardır. Kütleleri bağlayan ip yakıldığında $3M$ kütleli blok sağa $2\ m/s$ hızla hareket eder.



a) M kütleli bloğun hızı nedir? (Başlangıçta durgun olduklarını kabul ediniz).

b) $M = 0{,}350\ kg$ ise yaydaki ilk esneklik enerjisini bulunuz.

Çözüm 6:

a) $p_i = p_s \Longrightarrow Mv_{Mi} + 3Mv_{3mi} = Mv_{Ms} + 3Mv_{3Ms}$

$$0 + 0 = Mv_{Ms} + 3Mv_{3Ms}$$

$$0 = Mv_{Ms} + 3M(2\ m/s)$$

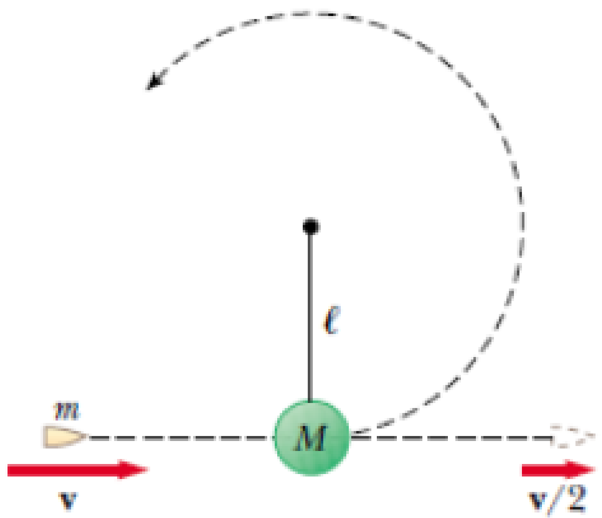
$v_{Ms} = -6\ m/s$ sola doğru hareket eder.

b) $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv_{Ms}^2 + \frac{1}{2}3Mv_{3Ms}^2$

$$U_{yay} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(0{,}350\ kg)(-6\ m/s)^2 + \frac{1}{2}3(0{,}350\ kg)(2\ m/s)^2$$

$$U_{yay} = \frac{1}{2}kx^2 = 8{,}40\ J$$

Problem 18: Şekilde görüldüğü gibi m kütleli ve v hızlı bir mermi, M kütleli bir sarkaç içinden geçer ve $v/2$ hızı ile çıkar. Sarkaç, l uzunluğunda ve kütlesi ihmal edilebilen bir ipin ucunda asılıdır. Sarkacın tam bir düşey daire üzerinde hareket edebilmesi için minimum v ne olmalıdır?



Çözüm 18:

Sarkaç-Dünya sistemi için yörüngenin alt ve üst durumlarında mekanik enerji korunur. Sarkacın dairesel bir yörünge çizebilmesi için gerekli **minimum hızı** hesaplarken, sarkaç üstteyken hemen hemen duruyormuş gibi olmalıdır.

$$K_i + U_i = K_s + U_s \Longrightarrow \frac{1}{2}Mv_{sarkaç}^2 + 0 = 0 + Mg2l$$

$$v_{sarkaç}^2 = 4gl \Longrightarrow v_{sarkaç} = 2\sqrt{gl}$$

Çarpışma sırasında sarkaç-mermi sisteminin momentumu korunduğu için;

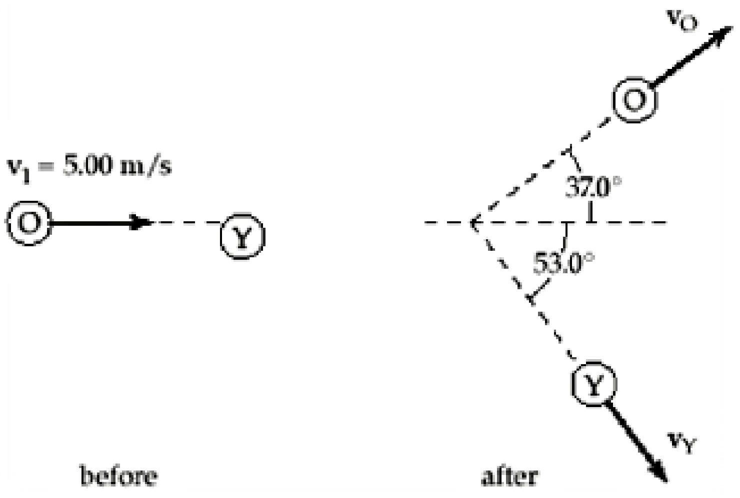
$$p_i = p_s \Longrightarrow mv + 0 = m\frac{v}{2} + M2\sqrt{gl}$$

$$\boldsymbol{v = \frac{4M}{m}\sqrt{gl}}$$

Problem 36: Eşit kütleli biri portakal rengi, diğeri sarı iki disk tamamen esnek çarpışma yaparlar. Durgun olan sarı disk, 5 m/s hızla hareket eden portakal rengi diskle çarpışır. Çarpışmadan sonra portakal renkli disk, ilk hareket yönü ile 37^0 açı yapan bir yönde gider ve sarı diskin hızı diğerinin hızına diktir (çarpışmadan sonra). Her diskin son hızını bulunuz.

Çözüm 36:

Portakal renkli diski O (Orange),
Sarı renkli diski de Y (Yellow) ile gösterirsek;



$$p_{xi} = p_{xs}$$

$$m(5\ m/s) = mv_O\cos(37{,}0^0) + mv_Y\cos(53{,}0^0)$$

$$5\ m/s = (0{,}799)v_O + (0{,}602)v_Y$$

$$p_{yi} = p_{ys}$$

$$0 = mv_O\sin(37{,}0^0) - mv_Y\sin(53{,}0^0)$$

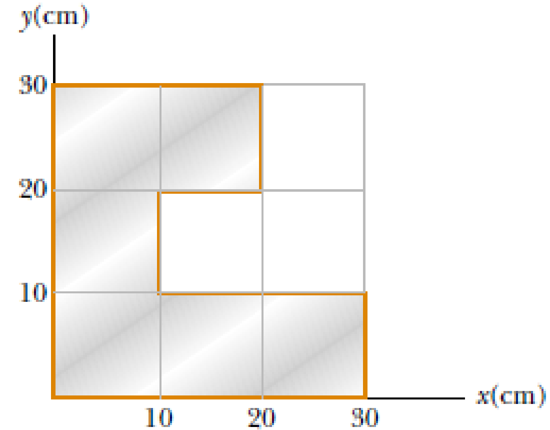
$$(0{,}602)v_O = (0{,}799)v_Y$$

Elde edilen bu iki denklem çözülürse;

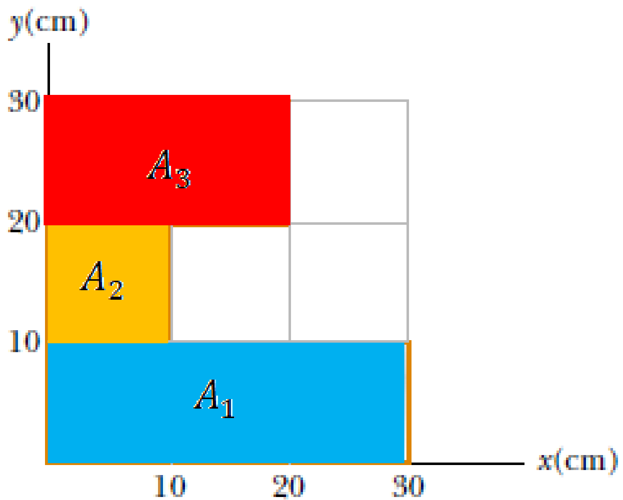
$$\boldsymbol{v_O = 3{,}99\ m/s} \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{v_Y = 3{,}01\ m/s}$$

bulunur.

Problem 41: Düzgün bir çelik levha şekildeki gibi kesilmiştir. Bu levhanın kütle merkezinin x ve y koordinatlarını bulunuz.



Çözüm 41:



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

$$\frac{M_1}{A_1} = \frac{M}{A}$$

$$A_1 = (30)(10) = 300\ cm^2$$

$$A_2 = (10)(10) = 100\ cm^2$$

$$A_3 = (20)(10) = 200\ cm^2$$

$$A = 600\ cm^2$$

$$M_1 = M\left(\frac{A_1}{A}\right) = M\left(\frac{300\ cm^2}{600\ cm^2}\right) = \frac{M}{2}$$

$$M_2 = M\left(\frac{A_2}{A}\right) = M\left(\frac{100\ cm^2}{600\ cm^2}\right) = \frac{M}{6}$$

$$M_3 = M\left(\frac{A_3}{A}\right) = M\left(\frac{200\ cm^2}{600\ cm^2}\right) = \frac{M}{3}$$

$$x_{CM} = \frac{x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3}{M} = \frac{(15{,}0\ cm)\left(\frac{M}{2}\right) + (5{,}0\ cm)\left(\frac{M}{6}\right) + (10{,}0\ cm)\left(\frac{M}{3}\right)}{M}$$

$$\boldsymbol{x_{CM} = 11{,}7\ cm}$$

$$y_{CM} = \frac{y_1M_1 + y_2M_2 + y_3M_3}{M} = \frac{(5{,}0\ cm)\left(\frac{M}{2}\right) + (15{,}0\ cm)\left(\frac{M}{6}\right) + (25{,}0\ cm)\left(\frac{M}{3}\right)}{M}$$

$$\boldsymbol{y_{CM} = 13{,}3\ cm}$$