Hafta 2

Mantıksal Gerektirme – Çıkarım Kuralları

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge p_n) \to q$ gerektirmesini göz önüne alalım.

Muhakeme öncül denilen verilen bir önerme listesi ve çıkarım veya sonuç denilen önermeyle oluşturulur, ve $(\to)$ bağlacı ile bağlanır.

Burada $p_1, p_2, \ldots, p_n$ öncülleri doğrular denilerek bu verilen önermelerden mantıksal olarak q çıkarımının elde edildiği gösterilir.

$(p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n) \to q$ yanlış ise $(p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n) \to q$ önermesi doğrudur.

Eğer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 'den herhangi biri yanlış ise $(p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n) \to q$ önermesi doğrudur.

Eğer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 'nin her bir doğruluk değeri 1 ve q 'da doğru ise $(p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n) \to q$ önermesi doğrudur.

Her 2 durumda da geçerli bir muhakeme elde edilmiş olur.

Sonuç olarak bir muhakemenin geçerli olması için;

$(p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n) \to q$ önermesinin totoloji (To) olduğunu göstermeliyiz.

Örn) p, q, r aşağıda ifade edilen ilkel önermeler olsun.

p: Kerem çalışır

q: Kerem futbol oynar.

r: Kerem ayrık matematik dersinin sınavını geçer.

p_1, p_2, p_3 öncülleri şöyle olsun.

p_1: Eğer Kerem ders çalışırsa o zaman ayrık Matematik sınavını geçer

p_2: Eğer Kerem futbol oynamazsa o zaman çalışır.

p_3: Kerem Ayrık Matematikten kalır.

$(p_1 \land p_2 \land p_3) \Rightarrow q$ muhakemesi geçerli midir?

$p_1: p \to r \quad p_2: \neg q \to p, \quad p_3: \neg r$

Yani; Gerektirme

$((p \to r) \land (\neg q \to p) \land \neg r)) \to q$ olur.

Doğruluk Tablosu;

p	q	r	p_1 $p \to r$	$\neg q$	p_2 $\neg q \to p$	p_3 $\neg r$	(A) $p_1 \land p_2 \land p_3$	$A \to q$
0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0	0	1

To olur.

Sonuç olarak $(p_1 \land p_2 \land p_3) \to q$, To olduğundan geçerli bir muhakemedir.

Ödev: $p_1 : p$
$p_2 : (p \wedge r) \rightarrow s$ öncülleri ve $q : (r \Rightarrow s)$

Sonucu için $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow q$ önermesi geçerli bir muhakeme midir?

Mantıksal Gerektirme

p ve q önermeler olmak üzere, eğer $p \rightarrow q$ bir totoloji ise, yani p doğru iken q da doğru ise o zaman p, q yu gerektirir denir ve $p \Rightarrow q$ önermesini mantıksal olarak gerektirir ile gösterilir.

Örnek) $p \rightarrow p \vee q$ gerektirmesi totoloji midir?

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow p \vee q$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$p \rightarrow p \vee q = T_0$ old. dan; p, $p \vee q$ önermesini mantıksal olarak gerektirir, yani $p \Rightarrow (p \vee q)$ dur.

Çıkarım Kuralları

Bir muhakemeyi;
$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$
şeklinde gösterilebilir.

Şimdi biraz çıkarım kurallarını verelim;
Verilen muhakemeler geçerli muhakemelerdir.

① Ayırma Kuralı (Modus Ponens)

$[p \wedge (p \to q)] \to q$ yani $\dfrac{\begin{matrix} p \\ p \to q \end{matrix}}{\therefore\ q}$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$ (A)	$A \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$A \to q = T_0$ 'dır.

Örnek

① Ali üniversiteden mezun oldu. (p)

② Eğer Ali mezun olursa ailesi memleketine dönecek $(p \to q)$

③ Ali'nin ailesi memleketine döndü. $(\therefore q)$

② Kesilştirme Kuralı

$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ yada $\dfrac{\begin{matrix} p \to q \\ q \to r \end{matrix}}{\therefore\ p \to r}$

① Eğer 60 sayısı 3 ile bölünüyorsa, o zaman 60; 5 ile bölünür $(p \to q)$

② Eğer 60 sayısı 5 ile bölünüyorsa, o zaman 60; 2 ile bölünür $(q \to r)$

③ Eğer 60 sayısı 3 ile bölünüyorsa, o zaman 60; 2 ile bölünür $(\therefore p \to r)$

Örnek

① Elif kek pişiriyor.

② Eğer Elif kek pişirirse o zaman Elif flüt çalışması yapamaz.

③ Eğer Elif flüt çalışması yapamazsa o zaman babası ona kızgın olmayacak.

④ Bundan dolayı babası kızgın olmayacak.

Aradaki muhakemelerdeki önermeleri söz önüne alarak alırsak;

$\dfrac{\begin{matrix} p \\ p \to \neg q \\ \neg q \to \neg r \end{matrix}}{\therefore\ \neg r}$ olur.

Muhakemenin geçerli old. aşağıdaki şekilde gösterelim.

		Nedenleri
1	$p \to \neg q$	öncül
2	$\neg q \to \neg r$	öncül
3	$p \to \neg r$	1, 2 ve karşılaştırma kuralı
4	p	öncül
5	$\therefore \neg r$	3, 4 ve Ayırma Kuralı

2. yol

		Nedenleri
1	p	öncül
2	$p \to \neg q$	öncül
3	$\neg q$	1, 2 ve ayırma kuralı
4	$\neg q \to \neg r$	öncül
5	$\therefore \neg r$	3, 4 ve ayırma kuralı

3) İnkar Etme Kuralı (Modus Tollens)

$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ yada $\dfrac{\begin{matrix} p \to q \\ \neg q \end{matrix}}{\therefore \neg p}$

1) Eğer $5^2 < 3$ ise o zaman $\sqrt{2}$ bir tamsayıdır. $(p \to q)$

2) $\sqrt{2}$ bir tamsayı değildir. $(\neg q)$

$(\therefore \neg p)$

3) $5^2 \geq 3$ 'tür.

4) Birleştirme Kuralı

$p \wedge q \to (p \wedge q)$ yada $\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{\therefore p \wedge q}$

5) Çelişki Kuralı

$(\neg p \to F_0) \to p$ yada $\dfrac{\neg p \to F_0}{\therefore p}$

6

(6) Karşılaştırmalı Ayırma Kuralı

$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$ yada $\dfrac{\begin{matrix} p \vee q \\ \neg p \end{matrix}}{\therefore q}$

Örn

(1) $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı veya π bir irrasyonel sayıdır. $(p \vee q)$

(2) $\sqrt{2}$ bir irrasyonel sayıdır $(\neg p)$

(3) Bundan dolayı π bir irrasyonel sayıdır. $(\therefore q)$

Örnek

Aşağıdaki muhakemenin geçerli old. göstermek için gerekli adımların nedenlerini yazınız. $\{p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)\} \rightarrow (s \vee t)$

Adımlar	Nedenleri
(1) p	öncül
(2) $p \rightarrow q$	öncül
(3) q	(1),(2) ve ayırma kuralı
(4) $r \rightarrow \neg q$	öncül
(5) $q \rightarrow \neg r$	karşıt ters
(6) $\neg r$	(3),(5) ve ayırma kuralı.
(7) $s \vee r$	öncül
(8) s	(6)(7) ve karşılaştırmalı ayırma.
(9) $\therefore s \vee t$	Ayırıcı Kuvvetlendirme Kuralı. (*)

Diğer çıkarım kuralları

(7) Birleştirici Basitleştirme Kuralı

$(p \wedge q) \rightarrow p$

(8) Ayırma kuvvetlendirme

$p \rightarrow (p \vee q)$

(9) Koşullu ispat kuralı

$\dfrac{\begin{matrix} p \wedge q \\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \end{matrix}}{\therefore r}$

Ödev) Aşağıdaki muhakemenin geçerli old. göstermek için gerekli adımları ve nedenlerini yazınız.

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$

$r \rightarrow (s \vee t)$

$\neg s \wedge \neg u$

$\neg u \rightarrow \neg t$

$\therefore p$

Niceleyicilerin Kullanımı ve Nicelenmiş Önermeler

Açık Önerme: Eğer hüküm veren bir ifade bir veya daha fazla değişken içeriyorsa; değişkenler yerine izin verilen / uygun seçimler yazıldığında da bir önerme oluyorsa bu ifadeye açık önerme denir.

Örnek) x^2 sayısı bir çift tamsayıdır.

Bu önerme tek değişkenli bir açık önermedir.

x yerine −3, 1, 7 yazarsak bu açık önerme yanlış olur.

x yerine 0, 2, −6 " " " " doğru olur.

Çalışma evreni: Çalışma evreni açık önermenin uygun seçimlerinin birleşmesiyle oluşur.

Tek değişkenli açık önermeler p(x), q(x), r(x) vb. şekilde gösterilir.

p(x): x^2 sayısı bir çift tamsayıdır.

$\neg p(x)$: x^2 sayısı bir çift tamsayı değildir.

Nicelenmiş Tek Değişkenli Açık Önermeler

(1) En az bir x için p(x) şeklindeki önermelerde "en az bir x" varlıksal niceleyicidir ve $\exists x$ şeklinde ifade edilir.

(2) Her x için p(x) şeklindeki önermelerde "her x" niceleyicidir ve $\forall x$ şeklinde gösterilir.

Önerme	Ne zaman doğru?	Ne zaman yanlış?
$\exists x\, p(x)$	en az bir a için p(a) doğru	Her a için p(a) yanlış
$\forall x\, p(x)$	her a için p(a) doğru	En az bir a için p(a) yanlış.
$\exists x\, \neg p(x)$	en az bir a için p(a) yanlış, ¬p(a) doğru	En az bir a için ¬p(a) yanlış, böylece p(a) doğru.
$\forall x\, \neg p(x)$	her a için p(a) yanlış, böylece ¬p(a) doğru	En az bir a için ¬p(a) yanlış, böylece p(a) doğru.

Değiller

$$\neg(\forall x\, p(x)) \equiv \exists x\, \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x\, p(x)) \equiv \forall x\, \neg p(x)$$
$$\neg(\forall x\, \neg p(x)) \equiv \exists x\, \neg\neg p(x) \equiv \exists x\, p(x)$$
$$\neg(\exists x\, \neg p(x)) \equiv \forall x\, \neg\neg p(x) \equiv \forall x\, p(x)$$

Örnek

$\forall x\, [p(x) \rightarrow q(x)]$ önermesinin değili nedir?

$$\neg(\forall x\, (p(x) \rightarrow q(x))) \equiv \exists x\, (\neg(p(x) \rightarrow q(x)))$$
$$\equiv \exists x\, (\neg(\neg p(x) \vee q(x)))$$
$$\equiv \exists x\, (\neg\neg p(x) \wedge \neg q(x))$$
$$\equiv \exists x\, (p(x) \wedge \neg q(x))$$

Tanım: $p(x)$, $q(x)$ verilen bir evrende tanımlı açık önermeler olsun. (9)

(1) $\forall x[p(x) \to q(x)]$ niceleniş önermesinin karşıt tersi $\forall x[\neg q(x) \to \neg p(x)]$

(2) $\forall x[p(x) \to q(x)]$ " " karşıtı $\forall x[q(x) \to p(x)]$

(3) $\forall x[p(x) \to q(x)]$ " " tersi $\forall x[\neg p(x) \to \neg q(x)]$

Örnek

Evren olarak düzlemdeki bütün dörtgenleri alalım ve

$s(x)$: x bir karedir.

$e(x)$: x bir eşkenar dörtgendir.

(1) $\forall x[s(x) \to e(x)]$ doğru bir önermedir ve karşıt tersi

$\forall x[\neg e(x) \to \neg s(x)]$ mantıksal önermesine denktir.

(2) $\forall x[e(x) \to s(x)]$ yanlış bir önermedir ve karşıtı olan

$\forall x[s(x) \to e(x)]$ önermesi doğru bir önermedir.

$\forall x[\neg s(x) \to \neg e(x)]$ yanlış bir önermedir.

Tersi olan ifade: $\forall x[\neg s(x) \to \neg e(x)]$

Örnek

Evrenimiz tam sayılar olmak üzere $p(x): x^2 = 2x$

açık önermesini gösterelim. Aşağıdaki önermeler doğru yada yanlış mıdır

1) $p(0)$ $\Rightarrow$ $p(0)$: $0^2 = 2.0$, $0 = 0$ doğru

2) $p(1)$ $\Rightarrow$ $p(1)$ yanlış

3) $p(2)$ $\Rightarrow$ $p(2)$ doğru

4) $p(-2)$ $\Rightarrow$ $p(-2)$ yanlış

5) $\exists x\, p(x)$ $\Rightarrow$ 1'den dolayı doğru

6) $\forall x\, p(x)$ $\Rightarrow$ 2'den dolayı yanlış.