Konveks Fonksiyonlar:

$K \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası, K kümesinin içinde kalıyorsa K kümesine konveks küme denir.

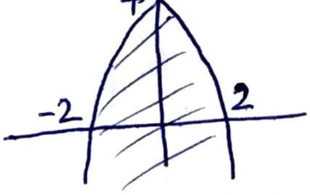
konveks konveks konveks konveks değil

$[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonun grafiğinin üst tarafında kalan bölge konveks ise, bu fonksiyona konveks (yukarı bükümlü) fonksiyon denir.

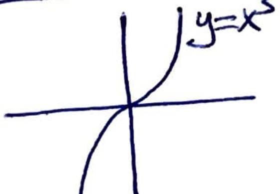
$[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonun grafiğinin altında kalan bölge konveks ise, bu fonksiyona konkav (aşağı bükümlü) fonksiyon denir.

Örnek: $f(x)=x^2$ fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Örnek: $f(x)=4-x^2$ fonksiyonu konkav fonksiyondur.



Örnek: $f(x)=x^3$ fonksiyonu konveks ve konkav değildir.



$f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ konvekstir.

$f:(-\infty,0]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ konkavdır.

Özellik: $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) aralığında ikinci türevi var olsun. $\forall x\in(a,b)$ için $f''(x)>0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks, $\forall x\in(a,b)$ için $f''(x)<0$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konkavdır.

Fonksiyonun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktalara dönüm (büküm) noktaları denir.

Örnek: $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz

Çözüm: $f'(x)=3x^2-6x-4$

$f''(x)=6x-6$

		1	
$f''(x)$	$-$	ϕ	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Fonksiyon $(-\infty,1]$ aralığında konkav ve $[1,+\infty)$ aralığında konvekstir. $x=1$ dönüm noktasıdır.

Örnek: $f(x)=3x^5-10x^3$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm: $f'(x)=15x^4-30x^2$

$f''(x)=60x^3-60x=60x(x^2-1)$

		-1		0		1	
$f''(x)$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

Fonksiyon $(-\infty,-1]$ aralığında konkav, $[-1,0]$ aralığında konveks, $[0,1]$ aralığında konkav ve $[1,+\infty)$ aralığında konkavdır. $-1, 0, 1$ noktaları dönüm noktalarıdır.

Asimptotlar:

Düşey Asimptot:

$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

eşitliklerinden en az biri sağlanıyor ise, $x=a$ doğrusu $y=f(x)$ eğrisinin düşey asimptotudur.

Örnek: $y=\dfrac{x^2-5x-14}{x^3-4x}$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $y=\dfrac{(x-2)(x+7)}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{x+7}{x(x+2)}$

$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-5x-14}{x^3-4x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-5x-14}{x^3-4x}=-\infty$

olduğundan $x=0$ düşey asimptottur.

$\lim_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-5x-14}{x^3-4x}=-\infty$ ve $\lim_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-5x-14}{x^3-4x}=+\infty$ olduğundan

$x=-2$ düşey asimptot olur.

Örnek: $y=2^{\frac{1}{x}}$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}}=0$ ve $\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty$ olduğundan $x=0$ düşey asimptottur.

Örnek: $y=\ln x$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ olduğundan $x=0$ düşey asimptot olur.

Yatay Asimptot:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ olacak şekilde b sayısı varsa, $y=b$ doğrusu yatay asimptot olur.

Örnek: $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{5x^2+1}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{3x^2-2x}{5x^2+1}=\dfrac{3}{5}$ olduğundan

$y=\dfrac{3}{5}$ yatay asimptot olur.

Örnek: $y=\dfrac{\ln x}{x}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ olduğundan

$y=0$ yatay asimptot olur.

Örnek: $y=\dfrac{3x^2+2}{4x+1}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{3x^2+2}{4x+1}=\mp\infty$ olduğundan yatay asimptot yoktur.

Örnek: $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x}{|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1 \Rightarrow y=1$ Y.A.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-1 \Rightarrow y=-1$ Y.A.

Eğri Asimptot:

$y=f(x)$ eğrisi için $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-p(x)\right)=0$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-p(x)\right)=0$ olacak şekilde bir $p(x)$ polinomu bulunabiliyorsa, $y=p(x)$ eğrisi $y=f(x)$ eğrisinin eğri asimptotudur denir. Eğer $p(x)=ax+b$ şeklinde doğru ise, bu asimptota eğik asimptot denir.

$m_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ve $n_1=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-m_1x\right)$ olmak üzere

$y=m_1x+n_1$ doğrusu, $x\to\infty$ için eğik asimptottur.

$m_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ve $n_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-m_2x\right)$ olmak üzere

$y=m_2x+n_2$ doğrusu, $x\to-\infty$ için eğik asimptottur.

Örnek: $y=\dfrac{x^3+x}{x-1}$ eğrisinin eğri asimptotunu bulunuz

Çözüm:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2+x+2 \\ \hline x^2+x & \\ x^2-x & \\ \hline 2x & \\ 2x-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+x}{x-1}=x^2+x+2+\frac{2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3+x}{x-1}-(x^2+x+2)\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{2}{x-1}=0$$

olduğundan eğri asimptot $y=x^2+x+2$ olur.

Örnek: $y=\sqrt{x^2-x}$ eğrisinin eğik asimptotunu bulunuz.

Çözüm: $m_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1$

$$n_1=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{-1}{2}$$

$x\to+\infty$ için eğik asimptot $y=x-\frac{1}{2}$ olur.

$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = -1$$

$$n_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x}+x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

$x \to -\infty$ için eğik asimptot $y = -x + \frac{1}{2}$ olur.

<u>Not:</u> $a > 0$ ise $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ eğrisinin eğik asimptotu $y = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ olur. $x \to \infty$ için eğik asimptot $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ ve $x \to -\infty$ için eğik asimptot $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ olur.

<u>Örnek:</u> $y = \sqrt{4x^2+8x+1}$ eğrisinin eğik asimptotunu bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $y = 2|x+1|$

$x \to \infty$ için eğik asimptot $y = 2x+2$ ve

$x \to -\infty$ için eğik asimptot $y = -2x-2$ olur.

<u>Örnek:</u> $y = x + \frac{\sin x}{x}$ eğrisinin eğik asimptotunu bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x + \frac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1$

$$n = \lim_{x \to \mp\infty} \left[\left(x + \frac{\sin x}{x}\right) - x\right] = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

olduğundan eğik asimptot ($x \to +\infty$ ve $x \to -\infty$ için) $y = x$ doğrusudur.

Eğri Çizimi:

Eğri çizmek için aşağıdaki yol izlenir:

1) Fonksiyonun tanım kümesi bulunur.
2) Eksenleri kestiği noktalar bulunur.
3) Asimptotlar bulunur.
4) Türev çalışması yapılarak eğrinin artan azalan olduğu aralıklar belirlenir.
5) Eğrinin konveks ve konkav olduğu aralıklar bulunur.
6) Tüm bilgiler tabloya aktarılır.
7) Tabloya göre çizim yapılır.

Örnekler:

1) $y=x^4-x^2$ eğrisini çiziniz.

Çözüm: 1) T.K. $=\mathbb{R}$

2. $x=0 \Rightarrow y=0$

$y=x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\mp 1$

3. Düşey asimptot, yatay asimptot ve eğri asimptot yoktur. $\lim\limits_{x\to\mp\infty}(x^4-x^2)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}x^2(x^2-1)=+\infty$

4. $y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

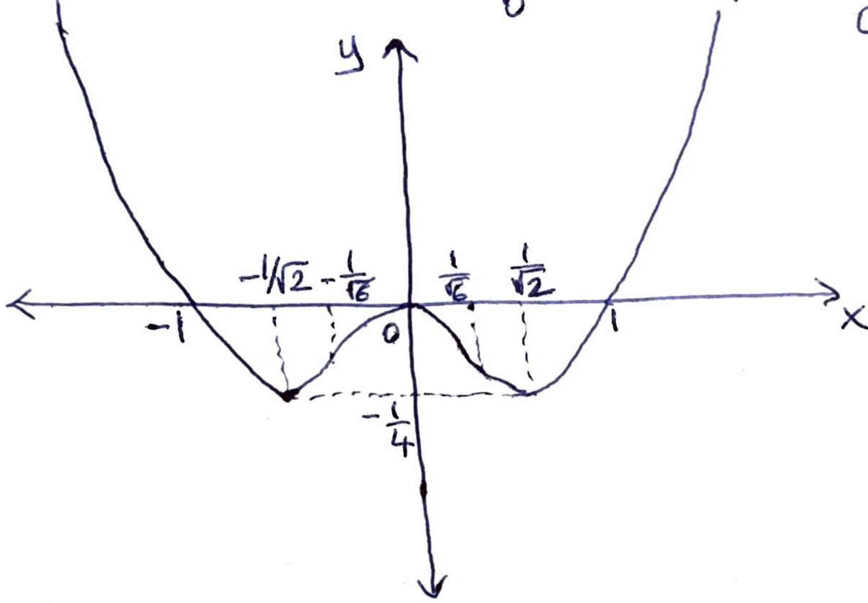
		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

5. $y''=12x^2-2=0 \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$

		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

6.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
		$\cup$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cup$		$\cup$	
	$+\infty$		0						0						0		$+\infty$



2) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1}$ eğrisini çiziniz.

<u>Çözüm:</u> 1. T.K. $=\mathbb{R}-\{-1\}$

2. $x=0 \Rightarrow y=-4$

$y=0 \Rightarrow x=\mp 2$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}=-\infty$ olduğundan $x=-1$ D.A. olur

$\lim\limits_{x\to \mp\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1}=1$ olduğundan $y=1$ Y.A. olur

4. $y'=\dfrac{2x(x+1)^2-(2x+2)(x^2-4)}{(x+1)^4}=\dfrac{2(x+1)\left[x^2+x-(x^2-4)\right]}{(x+1)^4}=\dfrac{2(x+4)}{(x+1)^3}$

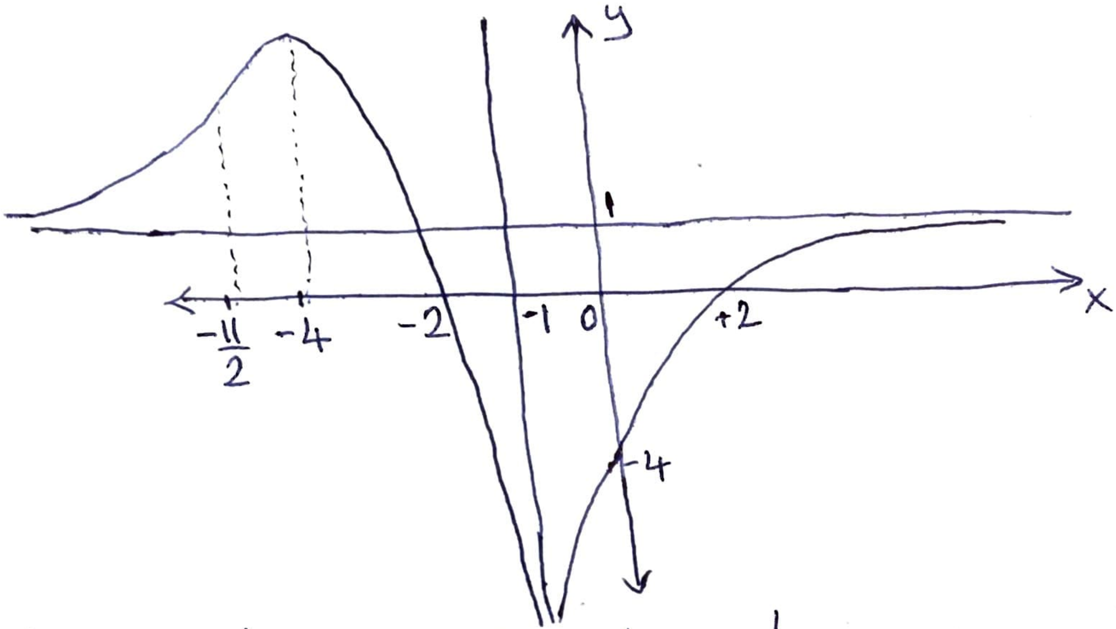
		-4		-1	
y'	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

5. $y''=\dfrac{2(x+1)^3-3(x+1)^2\cdot 2(x+4)}{(x+1)^6}=\dfrac{2(x+1)^2\left[x+1-3x-12\right]}{(x+1)^6}=\dfrac{2(-2x-11)}{(x+1)^4}$

		$-\frac{11}{2}$	
y''	$+$	0	$-$
y	$\cup$		$\cap$

6.

x	$-\infty$		$-\frac{11}{2}$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
		$\nearrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cap$	||	$\nearrow$ $\cap$		$\nearrow$ $\cap$		$\nearrow$ $\cap$	
y	1						0				-4		0		1



3) $y=x+\frac{1}{x}$ ve $y=\left|x+\frac{1}{x}\right|$ eğrilerini çiziniz.

Çözüm: 1. T.K. $\mathbb{R}-\{0\}$

2. $x\neq 0 \qquad y=\frac{x^2+1}{x}\neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty \Rightarrow x=0$ D.A.

$\lim\limits_{x\to \mp\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\mp\infty$ Y.A. yoktur.

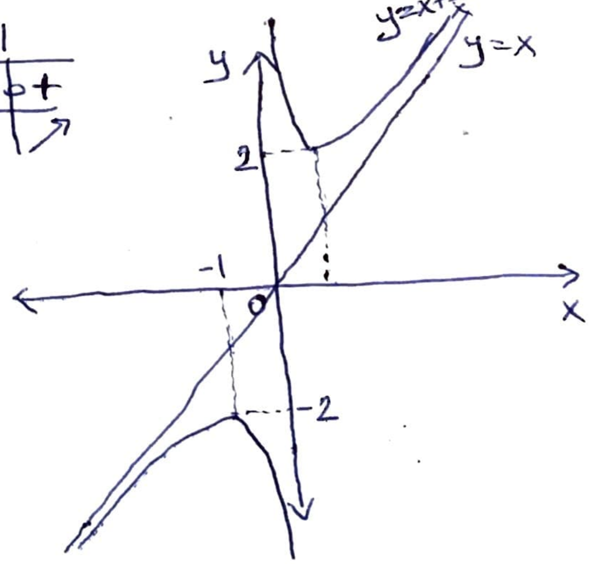
$\lim\limits_{x\to \mp\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x}=0$ old. $y=x$ E.A. olur.

4. $y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

		-1		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

5. $y''=\frac{2}{x^3}$

		0	
y''	$-$		$+$
y	$\cap$		$\cup$



6.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
		$\nearrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cap$	||	$\searrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cup$	
y	$-\infty$		-2		$-\infty$ || $+\infty$		2		$+\infty$