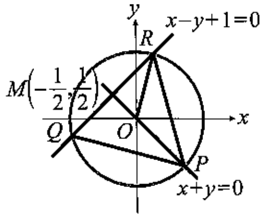
4. (1) 因為 $\overline{OR}=\overline{OQ}$，$\overline{PR}=\overline{PQ}$，所以 O、P 兩點皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線上。



(2) P 點在第四象限。

(3) $\overleftrightarrow{OP}\perp\overleftrightarrow{QR}$，
且 $\overleftrightarrow{QR}$ 斜率為 1，
所以 $\overleftrightarrow{OP}$ 斜率為 -1
$\Rightarrow \overleftrightarrow{OP}$ 的方程式為 $x+y=0$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{OP}$、$\overleftrightarrow{QR}$ 的交點為 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，
為 $\overline{QR}$ 的中點。

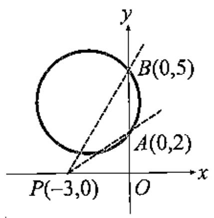
(4) 設 $\overline{QR}$ 的中點為 M，
$\triangle OMR$ 是直角三角形，
其中 $\overline{OM}=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
又 $\angle ORM=30^\circ$
$\Rightarrow \overline{OR}=2\overline{OM}=\sqrt{2}$，此為圓 C 半徑，
故圓方程式為 $x^2+y^2=2$。

(5) 圓 C 在 P 點的切線平行 $\overleftrightarrow{QR}$，
設切線方程式為 $x-y=k$，
圓心 O 到切線的距離 $=\frac{|0-0-k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，
得 $k=\pm 2$，
故過 P 點的切線方程式為 $x-y=2$。

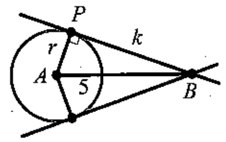
故選 (1)(4)。

三、精彩好題

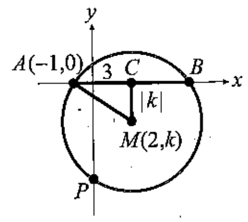
1. $x^2+y^2+4x-7y+10=0$
$\Rightarrow (x+2)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{25}{4}$，
圓心為 $(-2,\frac{7}{2})$，
半徑為 $\frac{5}{2}$，
且與 y 軸交於 $A(0,2)$、$B(0,5)$，
而直線 $y=m(x+3)$ 過點 $P(-3,0)$，
由圖可知：
滿足條件的 m 範圍為 $m_{AP}<m<m_{BP}$，
又 $m_{AP}=\frac{2}{3}$，$m_{BP}=\frac{5}{3}$，
所以 $(a,b)=(\frac{2}{3},\frac{5}{3})$。

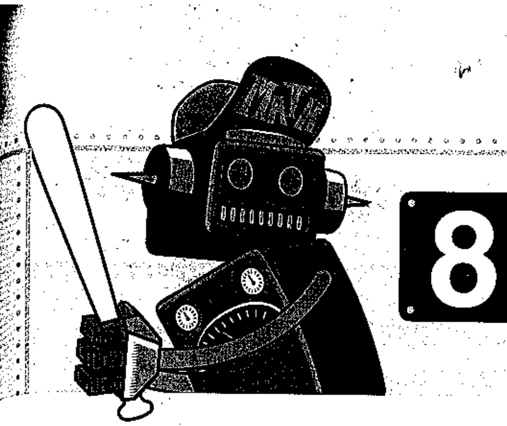


2. 由圖可知：$r^2+k^2=25$，
由算幾不等式可知 $\frac{r^2+k^2}{2}\geq\sqrt{r^2k^2}$，
所以 $rk\leq\frac{25}{2}$，
得 $\triangle PAB=\frac{1}{2}rk\leq\frac{25}{4}$，
所以 $\triangle PAB$ 的面積最大可能值 $=\frac{25}{4}$。



3. 設圓心 $M(2,k)$，
如圖，
圓半徑 $\overline{AM}=\overline{MP}$，
即 $\sqrt{3^2+k^2}$
$=\sqrt{(2-0)^2+[k-(-5)]^2}$
$\Rightarrow 9+k^2=4+k^2+10k+25$
$\Rightarrow k=-2$，
所以圓半徑 $\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$。





8 多項式的除法原理

甲 多項式的基本概念

重點整理

多項式

1. x 的多項式：形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$，其中 n 為正整數或零，a_n，a_{n-1}，……，a_1，a_0 為實數。
2. 名詞介紹：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$
   (1) 項：a_nx^n、$a_{n-1}x^{n-1}$、……、a_1x、a_0，分別為 $f(x)$ 的 n 次項、$n-1$ 次項、……、1 次項、常數項。
   (2) 係數：a_k 稱為 $f(x)$ 中 x^k 項的係數。
   (3) 次數：若 $a_n\neq 0$，則稱 $f(x)$ 為 n 次多項式，以符號 $\deg f(x)=n$ 表示，a_n 為 $f(x)$ 的首項係數。
   註 $f(x)=a_0$ 稱為常數多項式。
   當 $a_0\neq 0$ 時，$f(x)=a_0$ 為零次多項式。
   當 $a_0=0$ 時，$f(x)=0$ 為零多項式。
   (4) 多項式的值：當 $f(x)$ 中的 x 代表特定數值 a 時，稱 $f(a)$ 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的值。
3. 多項式相等：當兩多項式的次數及同次項的係數都相等時，稱這兩多項式相等。

一分鐘觀念釐清

關於多項式 $f(x)=-3x^4+2x^5-x+5$，判斷下列各小題之真偽：

(　　) 1. $f(x)$ 為四次多項式。
(　　) 2. x^3 項的係數為 0。
(　　) 3. $f(x)$ 的首項係數 -3。
(　　) 4. $f(x)$ 的常數項 5。
(　　) 5. $f(-1)=1$。

答案：1. (✕)　2. (◯)　3. (✕)　4. (◯)　5. (◯)

乙 多項式的四則運算

重點整理

四則運算

1. 加法與減法：兩多項式相加或相減，將同次項的係數相加或相減即可。
2. 乘法：(1) 兩個單項的多項式之乘積為係數相乘而次方相加。
   (2) 利用乘法對加法的分配律計算兩多項式相乘。
3. 除法：以 $7x^3-4x^2+x-3$ 除以 x^2+2x-2 為例。
   長除法：依降次排列，缺項要補 0

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 7x & -18 & & \\
\hline
x^2+2x-2 & 7x^3-4x^2 & +x & -3 & \\
 & 7x^3+14x^2 & -14x & & \\
\hline
 & -18x^2 & +15x & -3 & \\
 & -18x^2 & -36x & +36 & \\
\hline
 & & 51x & -39 &
\end{array}
$$

得商式為 $7x-18$，餘式為 $51x-39$。

除法原理

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩個多項式且 $g(x)\neq 0$，在計算「$f(x)$ 除以 $g(x)$」時，可求得唯一的一組 $q(x)$ 及 $r(x)$，滿足 $f(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$，此時 $q(x)$ 與 $r(x)$ 分別稱為商式與餘式。

綜合除法

1. 綜合除法：以 $2x^3-3x^2+4x-7$ 除以 $x-2$ 為例。

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{被除式}}} & \\
 & 2 & -3 & +4 & -7 & 2 \quad \text{第一列} \\
+) & & +4 & +2 & +12 & \quad\ \text{第二列} \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad +1 \quad +6}_{\text{商式}} & & & \underbrace{+5}_{\text{餘式}} & \quad\ \text{第三列}
\end{array}
$$

2. 注意事項：
   (1) 除式方面：當除式為 $x-a$ 時，算式的右側要用 a 當乘數。
   (2) 操作方面：第一列與第二列相加得第三列。

一分鐘觀念釐清

( ) 1. 若 $\deg f(x)=2$ 且 $\deg g(x)=2$，則 $\deg[f(x)+g(x)]=2$。
( ) 2. 若 $\deg f(x)=2$ 且 $\deg g(x)=3$，則 $\deg[f(x)\times g(x)]=6$。
( ) 3. 若 $\deg f(x)=3$ 且 $\deg g(x)=2$，則 $f(x)\div g(x)$ 的餘式必為一次式。
( ) 4. 若 $f(x)=(x-3)(x^2+5x-3)+(x+2)$，則 $f(x)\div(x-3)$ 的餘式為 $x+2$。
( ) 5. 設 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $q(x)$，餘式為 $r(x)$，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\dfrac{r(x)}{g(x)}$。
( ) 6. 多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的商式與 $f(x)$ 除以 $3x-6$ 的商式相同。
( ) 7. 多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式與 $f(x)$ 除以 $3x-6$ 的餘式相同。

答案：1.(×) 2.(×) 3.(×) 4.(×) 5.(○) 6.(×) 7.(○)

例題 1

已知 $f(x)=x^3+4x^2+5x-3$，$g(x)=x^2+2x-1$，求：
(1) $f(x)+(2x-1)g(x)$。
(2) $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式與餘式。

解 (1) $f(x)+(2x-1)g(x)=(x^3+4x^2+5x-3)+(2x-1)(x^2+2x-1)$
$=(x^3+4x^2+5x-3)+(2x^3+4x^2-2x-x^2-2x+1)$
$=3x^3+7x^2+x-2$

(2)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & +2 & & \\
\hline
x^2+2x-1 & x^3 & +4x^2 & +5x & -3 \\
 & x^3 & +2x^2 & -x & \\
\hline
 & & +2x^2 & +6x & -3 \\
 & & +2x^2 & +4x & -2 \\
\hline
 & & & +2x & -1
\end{array}
$$

商式 $x+2$，餘式 $2x-1$。

類題

1. 多項式 $4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$ 等於下列哪一個選項？
(1) $x(x+1)^2$ (2) $2x(x-1)^2$ (3) $x(x-1)(x+1)$ (4) $2(x-1)^2(x+1)$
(5) $2x(x-1)(x+1)$。 100 學測
2. 已知 $f(x)=2x^3+5x^2+3x+4$，$g(x)=2x^2+2x+1$，求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式與餘式。

答 1. (5)。
2. 商式 $x+\dfrac{3}{2}$，餘式 $-x+\dfrac{5}{2}$。

例題 2

若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+mx^2+2x+n$，求實數 m、n 的值。

解

$$
\begin{array}{r|llllll}
 & x^3 & +0x^2 & -x & +4 & & \\
\hline
x^2+x+2 & x^5 & +x^4 & +x^3 & +mx^2 & +2x & +n \\
 & x^5 & +x^4 & +2x^3 & & & \\
\cline{2-7}
 & & 0x^4 & -x^3 & +mx^2 & +2x & \\
 & & & -x^3 & -x^2 & -2x & \\
\cline{2-7}
 & & & & (m+1)x^2 & +4x & +n \\
 & & & & 4x^2 & +4x & +8 \\
\cline{2-7}
 & & & & (m-3)x^2 & +0x & +(n-8)
\end{array}
$$

$\Rightarrow m-3=0$ 且 $n-8=0$

$\Rightarrow m=3$，$n=8$。

類題

1. 已知 $2x^4-3x^3+ax^2-x+b$ 可以被 x^2-2x+5 整除，求實數 a、b 的值及商式。
2. 已知 $2x^3+ax^2+bx-1$ 除以 x^2-3x-1 的餘式為 2，求實數 a、b 的值及商式。

答

1. $a=11$，$b=15$，商 $2x^2+x+3$。
2. $a=-3$，$b=-11$，商 $2x+3$。

例題 3

已知 $2x^3+3x^2+ax+5$ 除以 x^2+x+b 的商式為 $2x+1$，餘式為 $x+2$，求實數 a、b 的值。

解

〔法一〕由除法原理知：

$$2x^3+3x^2+ax+5=(x^2+x+b)(2x+1)+(x+2)，$$

將 x 分別用 0、1 代入得 $\begin{cases}5=b+2\\ a+10=3(b+2)+3\end{cases}$，

解得 $a=8$，$b=3$。

〔法二〕$2x^3+3x^2+ax+5=(x^2+x+b)(2x+1)+(x+2)$

$$=2x^3+3x^2+(2b+2)x+(b+2)，$$

比較係數得 $\begin{cases}a=2b+2\\ 5=b+2\end{cases}$，解得 $a=8$，$b=3$。

類題

1. 若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$ 的商式為 $x+2$，餘式為 $2x-1$，求 $f(x)$。
2. 已知 $2x^4+ax^3+14x+4$ 除以 $x+b$ 的商式為 $2x^3-3x^2-6x+2$，餘式為 8，求實數 a、b 的值。

答

1. x^2+2x-1。 2. $a=-7$，$b=-2$。

例題 4

$f(x)=3x^4+x^3+4x^2+16x-1$，求 $f(\dfrac{\sqrt{7}-2}{3})$ 之值。

解

令 $x=\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}\Rightarrow 3x=\sqrt{7}-2\Rightarrow(3x+2)^2=7\Rightarrow 3x^2+4x-1=0$，

又 $f(x)=3x^4+x^3+4x^2+16x-1$

$=(3x^2+4x-1)(x^2-x+3)+3x+2$，

所以 $f(\dfrac{\sqrt{7}-2}{3})=3\times\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}+2=\sqrt{7}$。

類題

1. $f(x)=2x^4-6x^3+5x^2+2x-2$，求 $f(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2})$ 之值。
2. 若 $(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2})^4-(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2})^3-3(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2})^2+10(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2})+4=a+b\sqrt{13}$，其中 a、b 為有理數，求 a、b 的值。

答

1. $\sqrt{3}$。 2. $a=9$，$b=1$。

例題 5

設 a、b 為實數，且 $a\neq 0$。已知多項式 $f(x)$ 除以 $ax+b$ 的商式為 $Q(x)$，餘式為 r，求：

(1) $f(x)$ 除以 $x+\dfrac{b}{a}$ 的商式及餘式。 (2) $f(x)$ 除以 $\dfrac{1}{b}x+\dfrac{1}{a}$ 的商式及餘式。

(3) $f(\dfrac{x}{a})$ 除以 $x+b$ 的商式及餘式。 (4) $f(bx)$ 除以 $x+\dfrac{1}{a}$ 的商式及餘式。

(5) $xf(x)$ 除以 $ax+b$ 的商式及餘式。

解 已知 $f(x)=(ax+b)Q(x)+r$：

(1) $f(x)=(x+\frac{b}{a})[aQ(x)]+r$，
所以商式 $aQ(x)$，餘式 r。

(2) $f(x)=(\frac{1}{b}x+\frac{1}{a})[abQ(x)]+r$，
所以商式 $abQ(x)$，餘式 r。

(3) $f(\frac{x}{a})=(x+b)Q(\frac{x}{a})+r$，
所以商式 $Q(\frac{x}{a})$，餘式 r。

(4) $f(bx)=(abx+b)Q(bx)+r=(x+\frac{1}{a})[abQ(bx)]+r$，
所以商式 $abQ(bx)$，餘式 r。

(5) $xf(x)=x(ax+b)Q(x)+rx=(ax+b)[xQ(x)]+\frac{r}{a}(ax+b)-\frac{b}{a}r$
$=(ax+b)[xQ(x)+\frac{r}{a}]-\frac{b}{a}r$，
所以商式 $xQ(x)+\frac{r}{a}$，餘式 $-\frac{b}{a}r$。

類題 設 a、b 為實數，且 $a\neq 0$。已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-\frac{b}{a}$ 的商式為 $Q(x)$，餘式為 r，求：

(1) $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的商式及餘式。　(2) $f(\frac{x}{a})$ 除以 $x-b$ 的商式及餘式。

(3) $f(bx)$ 除以 $x-\frac{1}{a}$ 的商式及餘式。　(4) $xf(x)$ 除以 $ax-b$ 的商式及餘式。

答 (1) 商式 $\frac{1}{a}Q(x)$，餘式 r。　(2) 商式 $\frac{1}{a}Q(\frac{x}{a})$，餘式 r。

(3) 商式 $bQ(bx)$，餘式 r。　(4) 商式 $\frac{x}{a}Q(x)+\frac{r}{a}$，餘式 $\frac{b}{a}r$。

例題 6

設 $f(x)=x^5+2x^2-3x-4$，求：

(1) 已知 $f(x)$ 表成 $(x-2)$ 的多項式之形式為 $a(x-2)^5+b(x-2)^4+c(x-2)^3+d(x-2)^2+e(x-2)+f$，求實數 a、b、c、d、e、f 的值。

(2) $f(1.99)$ 的近似值到小數點以下第二位（第三位四捨五入）。

解題要領

連續使用綜合除法。說明：

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^5+2x^2-3x-4=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+10x+17)+30\\
&=(x-2)[(x-2)(x^3+4x^2+12x+34)+85]+30=(x-2)^2(x^3+4x^2+12x+34)+85(x-2)+30\\
&=(x-2)^2[(x-2)(x^2+6x+24)+82]+85(x-2)+30=(x-2)^3(x^2+6x+24)+82(x-2)^2+85(x-2)+30\\
&=(x-2)^3[(x-2)(x+8)+40]+82(x-2)^2+85(x-2)+30\\
&=(x-2)^4(x+8)+40(x-2)^3+82(x-2)^2+85(x-2)+30\\
&=(x-2)^4[(x-2)+10]+40(x-2)^3+82(x-2)^2+85(x-2)+30\\
&=(x-2)^5+10(x-2)^4+40(x-2)^3+82(x-2)^2+85(x-2)+30
\end{aligned}$$

解 (1)

1	+0	+0	+2	−3	−4	2	
	+2	+4	+8	+20	+34		
1	+2	+4	+10	+17	+30	←f	
	+2	+8	+24	+68			
1	+4	+12	+34	+85	←e		
	+2	+12	+48				
1	+6	+24	+82	←d			
	+2	+16					
1	+8	+40	←c				
	+2						
1	+10	←b					
1	←a						

所以 $a=1$，$b=10$，$c=40$，$d=82$，$e=85$，$f=30$。

(2) 因為 $f(x)=(x-2)^5+10(x-2)^4+40(x-2)^3+82(x-2)^2+85(x-2)+30$，

所以 $f(1.99)=\overbrace{(-0.01)^5+10(-0.01)^4+40(-0.01)^3}^{\text{數值太小，忽略不計}}+82(-0.01)^2+85(-0.01)+30$
$\approx 0.0082-0.85+30=29.1582\approx 29.16$。

類題 1. 若多項式 $f(x)=x^3-3x^2+9x-7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，求：

(1) 實數 a、b、c、d 之值。

(2) $f(-0.99)$ 的近似值到小數點以下第二位（第三位四捨五入）。

2. 設 $f(x)=4x^3-6x^2-2x+3$：

(1) 將 $f(x)$ 表示成 $f(x)=A(x+\frac{1}{2})^3+B(x+\frac{1}{2})^2+C(x+\frac{1}{2})+D$，求實數 A、B、C、D 的值。

(2) 求 $f(-0.499)$ 的近似值到小數點以下第二位（第三位四捨五入）。

答 1. (1) $a=1$，$b=-6$，$c=18$，$d=-20$。　(2) -19.82。

2. (1) $A=4$，$B=-12$，$C=7$，$D=2$。　(2) 2.01。

丙 餘式定理與因式定理

重點整理

餘式定理

餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以一次式 $ax-b$ 的餘式等於 $f(\frac{b}{a})$。

證明：設 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的商式為 $q(x)$，餘式為常數 r

$\Rightarrow f(x)=(ax-b)q(x)+r$，

將 $x=\frac{b}{a}$ 代入上式，得 $f(\frac{b}{a})=0\times q(\frac{b}{a})+r=r$，

因此，餘式 $r=f(\frac{b}{a})$。

因式定理

1. 因式定理：設 $f(x)$ 為多項式，$ax-b$ 為一次多項式。
   (1) 若 $f(\frac{b}{a})=0$，則 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式。
   (2) 若 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $f(\frac{b}{a})=0$。
2. 因式定理的推廣：
   若 a_1，a_2，……，a_n 是 n 個不同的實數，
   且多項式 $f(x)$ 滿足 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots\cdots=f(a_n)=0$，
   則 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$ 是 $f(x)$ 的因式。

一分鐘觀念釐清

(　　) 1. 多項式 $x^{2019}+1$ 可以被 $x+1$ 整除。
(　　) 2. $2x+2$ 是 x^2-1 的因式。
(　　) 3. 若多項式 $f(x)$ 滿足 $f(5)=0$，則 $x+5$ 是 $f(x)$ 的因式。
(　　) 4. 若 $x-7$ 是多項式 $f(x)$ 的因式，則 $f(7)=0$。
(　　) 5. 若多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2)=f(\frac{1}{3})=0$，則 $(x-2)(3x-1)$ 是 $f(x)$ 的因式。
(　　) 6. 多項式 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $f(2)$。

答案：1.(○)　2.(○)　3.(×)　4.(○)　5.(○)　6.(×)

例題 7

(1) 已知 $f(x)=729x^6+3x-5$，分別求 $f(x)$ 除以 $x-1$ 與 $3x+1$ 的餘式。
(2) 已知 $f(x)=x^5+6x^4-4x^3+25x^2+30x+20$，求 $f(-7)$ 的值。

解 (1) 由餘式定理知：

$f(x)$ 除以 $x-1$ 與 $3x+1$ 的餘式分別為 $f(1)$ 與 $f(-\frac{1}{3})$，

$f(1)=729+3-5=727$；$f(-\frac{1}{3})=729(-\frac{1}{3})^6+3(-\frac{1}{3})-5=-5$，

所以 $f(x)$ 除以 $x-1$ 與 $3x+1$ 的餘式分別為 727 與 -5。

(2) 由餘式定理知：

$f(-7)$ 為 $f(x)$ 除以 $x+7$ 的餘式，

1	+6	−4	+25	+30	+20	−7
	−7	+7	−21	−28	−14	
1	−1	+3	+4	+2	,6	

所以 $f(-7)=6$。

解題要領

若直接將 $x=-7$ 代入 $f(x)$ 求 $f(-7)$ 的值，數目較大，不容易計算，所以利用餘式定理較佳。

類題

1. 求 $f(x)=x^{2019}-3x^{1019}+1$ 除以 $x-1$ 的餘式。
2. 若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式為
   (1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11。
3. 設 $f(x)=1250x^6-2790x^5-3125x^4+707x^3+100x^2+45x-62$，求 $f(3)$ 的值。

答

1. -1。
2. (5)。
3. 217。

例題 8

(1) 已知多項式 $f(x)=x^{2019}+2kx-k+3$ 除以 $x+1$ 的餘式為 8，求 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式。
(2) 已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2-4x+3 的餘式為 $3x-7$，多項式 $g(x)$ 除以 x^2-5x+6 的餘式為 $2x+1$，求 $5f(x)+2g(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式。

解 (1) $f(-1)=8\Rightarrow -1-2k-k+3=8\Rightarrow k=-2$，

所求 $=f(1)=1+2k-k+3=k+4=2$。

(2) 令 $f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+3x-7$，

$g(x)=(x^2-5x+6)Q_2(x)+2x+1$

$\Rightarrow f(3)=0\times Q_1(3)+2=2$；$g(3)=0\times Q_2(3)+7=7$，

所求 $=5f(3)+2g(3)=10+14=24$。

類題

1. 已知多項式 $f(x)=9x^3+kx^2+3x+4$ 除以 $x-1$ 的餘式為 13，求 $f(x)$ 除以 $3x+1$ 的餘式。
2. 已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2+x-6 的餘式為 $2x-5$，多項式 $g(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式為 $x+3$，求 $f(x)g(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式。

答

1. $\frac{7}{3}$。
2. -5。

例題 9

已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 6；除以 $x-3$ 的餘式為 13，求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式。

解 設 $f(x)=(x-2)Q_1(x)+6$

$=(x-3)Q_2(x)+13$

$=(x-2)(x-3)Q_3(x)+ax+b$，

令 $x=2\Rightarrow 2a+b=6$……①，

令 $x=3\Rightarrow 3a+b=13$……②，

解 ①② 得 $a=7$，$b=-8$，所以餘式 $7x-8$。

類題

1. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 2；除以 $x-2$ 的餘式為 5，求 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式。
2. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 3；除以 $x-2$ 的餘式為 6；除以 $x-3$ 的餘式為 13，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式。

答

1. $x+3$。
2. $2x^2-3x+4$。

例題 10

設多項式 $f(x)$ 除以 x^2-5x+4 的餘式為 $x+2$；除以 x^2-5x+6 的餘式為 $3x+4$，求多項式 $f(x)$ 除以 x^2-4x+3 的餘式。

解 設 $f(x)=(x^2-5x+4)Q_1(x)+x+2=(x^2-5x+6)Q_2(x)+3x+4$

$=(x^2-4x+3)Q_3(x)+ax+b$，

則 $f(x)=(x-1)(x-4)Q_1(x)+x+2=(x-2)(x-3)Q_2(x)+3x+4$

$=(x-1)(x-3)Q_3(x)+ax+b$，

令 $x=1\Rightarrow 3=a+b$……①，

令 $x=3\Rightarrow 13=3a+b$……②，

解 ①② 得 $a=5$，$b=-2$，所以餘式 $5x-2$。

類題

1. 設多項式 $h(x)$ 被 x^2-1 除後的餘式為 $3x+4$，並已知 $h(x)$ 有因式 x，若 $h(x)$ 被 $x(x^2-1)$ 除後的餘式 px^2+qx+r，求 $p^2-q^2+r^2$。
2. 已知三次多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $3x+1$；除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $x+5$，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式。

答

1. 7。
2. $-x^2+6x-1$。

例題 11

(1) 已知 $2x-1$ 是 $f(x)=4x^3+ax+3$ 的因式，求實數 a 的值。
(2) 已知 x^2-2x-3 是 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-3$ 的因式，求實數 a、b 的值。

解 (1) 因為 $2x-1$ 是 $f(x)=4x^3+ax+3$ 的因式，

所以 $f(\frac{1}{2})=0\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+3=0\Rightarrow a=-7$。

(2)〔法一〕利用因式定理：$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$，

$$\begin{cases}f(-1)=0\\f(3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2+a-b-3=0\\54+9a+3b-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-8\end{cases}。$$

〔法二〕利用長除法：

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & +1 & & \\
\hline
1-2-3 & 2 & +a & +b & -3\\
 & 2 & -4 & -6 & \\
\hline
 & & (a+4) & +(b+6) & -3\\
 & & 1 & -2 & -3\\
\hline
 & & & (a+3)+(b+8) & +0
\end{array}$$

所以 $a+3=0$ 且 $b+8=0\Rightarrow a=-3$，$b=-8$。

類題

1. 下列何者為 $2x^5-3x^4-7x^3-6x^2-x+3$ 的因式？
   (1) $x-1$ (2) $x+1$ (3) $2x-1$ (4) $2x+1$ (5) $3x-9$。
2. 已知 $x-2$ 是 x^3-2x^2+kx+2 的因式，求實數 k 的值。
3. 已知 $2x^2-5x+2$ 是 $10x^3+ax^2+bx+2$ 的因式，求實數 a、b 的值。

答

1. (2)(3)(5)。
2. -1。
3. $a=-23$，$b=5$。

例題 12

已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(-1)=f(3)=0$，$f(2)=-24$ 與 $f(4)=100$，求 $f(x)$。

解

因為 $f(-1)=f(3)=0$，

所以 $(x+1)(x-3)$ 是 $f(x)$ 的因式，

因為 $\deg f(x)=3$，

所以設 $f(x)=(x+1)(x-3)(ax+b)$，

$$\begin{cases} f(2)=3\times(-1)\times(2a+b)=-24 \\ f(4)=5\times1\times(4a+b)=100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=8 \\ 4a+b=20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-4 \end{cases},$$

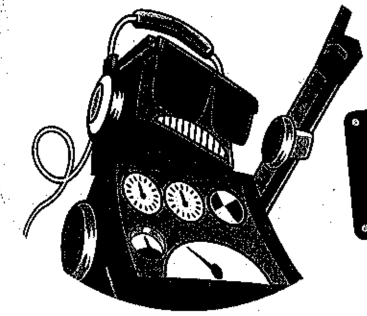
所以 $f(x)=(x+1)(x-3)(6x-4)=6x^3-16x^2-10x+12$。

類題

1. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(0)=f(-2)=0$，且 $f(1)=3$，$f(2)=40$，求 $f(x)$。
2. 已知三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為 1，且滿足 $f(1)=f(2)=3$，且 $f(-1)=-3$，求 $f(x)$。
   提示：設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)+3$，將 $f(-1)=-3$ 代入求得 $a=0$。

答

1. $4x^3+5x^2-6x$。
2. x^3-3x^2+2x+3。



綜合評量

一、基礎題

1. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 為實係數多項式函數。若 $f(1)=f(2)=0$ 且 $f(3)=4$，則 $a+2b+c$ 的值是下列哪一個選項？________
   (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5。 106 指考乙
2. 已知 $f(x)=(2x^3-x^2+1)(x^2+3x-1)+3x^2-2$，請選出正確的選項。________
   (1) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 7
   (2) $x+1$ 是 $f(x)$ 的因式
   (3) $f(x)$ 除以 $2x^3-x^2+1$ 的餘式為 $3x^2-2$
   (4) $f(x)$ 除以 x^2+3x-1 的餘式為 $3x^2-2$
   (5) $f(x)$ 除以 $2x^3-x^2+1$ 的商式為 x^2+3x-1。
3. 設兩多項式 $f(x)=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$，$g(x)=2x^2-x+1$，若 $f(x)=g(x)$，求實數 a、b、c 的值為________。
4. 若 $2x^3+ax+10$ 除以 x^2-3x+b 的商式為 $2x+c$，餘式為 $3x-2$，求實數 a、b、c 的值為________。
5. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ 可被 $x+1$ 整除，且 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 3，求實數 a、b 的值為________。
6. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x(x-1)$ 的餘式為 $ax+3$；除以 $x(x+1)$ 的餘式為 $-3x+b$；除以 x^2-1 的餘式為 $cx+4$：
   (1) 求 a、b、c 為________。
   (2) $f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的餘式為________。
7. 設三次多項式 $f(x)$ 除以 x^2+2x+3 的餘式為 $3x-1$；除以 x^2-x-2 的餘式為 $22x+16$，求 $f(x)=$________。
8. 設多項式 $f(x)=x^4-3x^3-7x^2+5x+2=a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e$：
   (1) 求 a、b、c、d、e 的值為________。
   (2) 求 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為________。
   (3) 求 $f(1+\sqrt{3})$ 的值為________。
9. 計算 $(12)^7-11\times(12)^6-11\times(12)^5-13\times(12)^4+15\times(12)^3-34\times(12)^2-25\times12+1$ 的值為________。
10. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $(x+2)f(x)=x^3+ax-2$，求實數 a 及 $f(x)$ 為________。

9. 令 $f(x)=x^7-11x^6-11x^5-13x^4+15x^3-34x^2$
$-25x+1$，
所求即為 $f(12)$，

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} 1 & -11 & -11 & -13 & +15 & -34 & -25 & +1 & 12 \\ & +12 & +12 & +12 & -12 & +36 & +24 & -12 & \\ \hline 1 & +1 & +1 & -1 & +3 & +2 & -1 & ,\ -11 & \end{array}$$

所以所求 $=f(12)=-11$。

10. 由 $(x+2)f(x)=x^3+ax-2$，
知 $x+2$ 為 x^3+ax-2 的因式
$\Rightarrow (-2)^3+(-2)a-2=0$
$\Rightarrow a=-5$，
$f(x)=(x^3-5x-2)\div(x+2)$
$=x^2-2x-1$。

二、進階題

1. 設 $f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$
$\Rightarrow (x+1)f(x)$
$=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+(x+1)(ax+b)$
$=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)$
$+[ax^2+(a+b)x+b]$
$=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)$
$+a(x^2+x+1)+bx+(b-a)$，
所以 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為
$bx+(b-a)$
$\Rightarrow bx+(b-a)=5x+3$
$\Rightarrow b=5$ 且 $b-a=3$
$\Rightarrow b=5$，$a=2$，
所以 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $2x+5$。

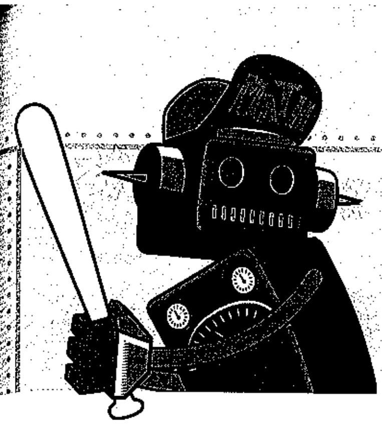
2. 設 $f(x)=a(x+1)(x-2)(x-4)+51$，
$f(1)=-9$
$\Rightarrow a\times 2\times(-1)\times(-3)+51=-9$
$\Rightarrow a=-10$，
所以 $f(x)=-10(x+1)(x-2)(x-4)+51$
$=-10x^3+50x^2-20x-29$。

3. $f(x)=(x^3+1)Q(x)+2x^2+3x+5$，
(1) 所求 $=f(-1)$
$=0\times Q(-1)+2-3+5$
$=4$。
(2) $f(x)=(x^3+1)Q(x)+2x^2+3x+5$
$=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+2(x^2-x+1)+5x+3$，
所以餘式為 $5x+3$。

三、精彩好題

1. 設 $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+g(x)\cdots\cdots$①，
其中 $g(x)$ 為一次多項式：
(1) 設 $g(x)=ax+b$，將 $x=1$ 與 $x=2$ 代入①，
即可聯立求得 a、b。
(2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式 $f(2)=g(2)$。
(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式
$f(1)=(1-2)^2+g(1)=1+g(1)$。
(5) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+g(x)$
$=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-1)(x-2)-x+2+g(x)$，
所以 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是
$-x+2+g(x)$。

2. 設 $f(x)=(x^2-1)Q(x)+2x+1$：
(1) $f(0)=-Q(0)+1$，值不確定。
(2) $f(1)=0\times Q(1)+3=3$。
(3) 當 $Q(x)=0$ 時，$f(x)$ 為一次式。
(4) $4x^4+2x^2-3$ 除以 x^2-1 的餘式為 3。
(5) $4x^4+2x^3-3$ 除以 x^2-1 的餘式為 $2x+1$。



9 一次與二次函數

甲 函數的概念與一次函數

重點整理

函數概念

1. 函數的定義：設 x 與 y 是兩個變數。當 x 的值給定時，y 的值也隨著 x 的值而唯一確定，我們稱這種對應關係為「y 是 x 的函數」。若將此函數命名為 f，則用記號 $y=f(x)$ 表示。
2. 在函數關係 $y=f(x)$ 中，x 稱為自變數，y 稱為應變數，$f(a)$ 表示 $x=a$ 所對應的函數值。在坐標平面上，所有點 $(x, f(x))$ 所構成的圖形，稱為函數 $f(x)$ 的圖形。

一次函數

1. 一次函數：設 a、b 為實數，形如 $y=f(x)=ax+b$（$a\neq 0$）的函數稱為一次函數。
2. 一次函數的圖形：一次函數 $y=ax+b$ 的圖形就是一條斜率為 a，y 截距為 b 的直線。
(1) 當 $a>0$ 時，圖形由左往右上升，即函數值隨變數 x 增大而增大。
(2) 當 $a<0$ 時，圖形由左往右下降，即函數值隨變數 x 增大而減小。

一分鐘觀念釐清

(　　) 1. 一次函數 $y=-2x-10$ 的圖形是一條斜率為 -2 的直線。
(　　) 2. 一次函數 $y=-2x-10$ 的 y 截距為 10。
(　　) 3. 一次函數 $y=-2x-10$，當 x 增加 3 單位時，其相對應的函數值增加 6 單位。
(　　) 4. 滿足 $f(1)=0$ 且 $f(3)=2$ 的一次函數為 $f(x)=x-1$。
(　　) 5. 一次函數 $f(x)=ax+b$ 的圖形，當 a 值愈大時，直線的傾斜程度愈大。

答案：1.(○)　2.(×)　3.(×)　4.(○)　5.(×)

例題 1

(1) 設一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(-1)=3$，$f(3)=-5$，則當 x 增加 1 單位時，其相對應的函數值會增加或減少多少單位？

(2) 設 $y=f(x)$ 為一次函數，已知 $f(0)=6$ 且 x 值增加 3 時，對應的 y 值減少 6，求 $f(x)$。

解

(1)〔法一〕設 $f(x)=ax+b$（$a\neq 0$），

因為 $f(-1)=3$，$f(3)=-5$，

所以 $\begin{cases}-a+b=3\\3a+b=-5\end{cases}$ 解得 $a=-2$，$b=1$，

即 $f(x)=-2x+1$

所以當 x 增加 1 單位時，相對應的函數值會減少 2 單位。

〔法二〕直接由 $(-1,3)$、$(3,-5)$ 兩點計算出直線斜率 $\dfrac{3-(-5)}{-1-3}=-2$ 即可得。

(2) 因為 x 值增加 3 時，對應的 y 值減少 6，

所以斜率為 -2，

設 $f(x)=-2x+k$，

$f(0)=6\Rightarrow k=6$，

所以 $f(x)=-2x+6$。

類題

1. 設一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=-3$，$f(2)=-1$，請選出正確的選項：

(1) $f(3)=1$

(2) L 的斜率為負

(3) L 的 y 截距為 5

(4) 每當 x 增加 1 單位時，其相對應的函數值增加 2 單位

(5) $\dfrac{f(2019)-f(1919)}{100}=2$。

2. 設 $f(x)$ 為一次函數，已知 $f(1)=1$ 且 x 值減少 2 時，對應的 y 值減少 6，求 $f(100)$ 的值。

答

1. (1)(4)(5)。
2. 298。

例題 2

已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(1.42)=3$，$f(10.78)=21$，求 $f(4.54)$ 的值。

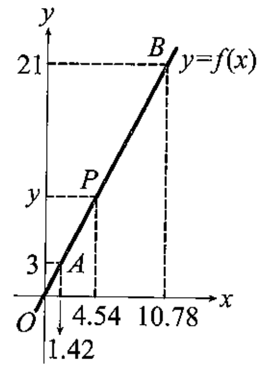
解

設 $f(4.54)=y$：

〔法一〕如右圖，

$A(1.42, 3)$、$B(10.78, 21)$、$P(4.54, y)$，

由平行線截比例線段性質，



得 $\dfrac{4.54-1.42}{10.78-4.54}=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{y-3}{21-y}$

$\Rightarrow \dfrac{3.12}{6.24}=\dfrac{y-3}{21-y}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{y-3}{21-y}$

$\Rightarrow y=9$，

所以 $f(4.54)=9$。

〔法二〕直線斜率為 $\dfrac{21-3}{10.78-1.42}=\dfrac{y-3}{4.54-1.42}$

$\Rightarrow \dfrac{18}{9.36}=\dfrac{y-3}{3.12}$

$\Rightarrow y=9$。

類題 已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(\sqrt{3})=3$，$f(\sqrt{7})=7$，若 $f(a)=5$，求實數 a 的值。

答 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$。

乙 二次函數

重點整理

二次函數及其圖形

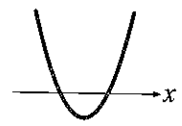
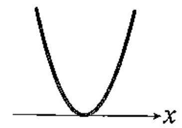
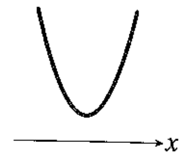
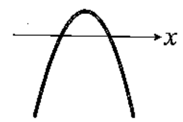
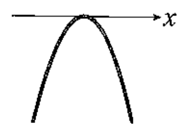
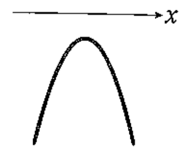
1. 二次函數：設 a、b、c 為實數，$a \neq 0$，形如 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的函數稱為二次函數。
2. 二次函數的圖形：設 $a \neq 0$
   (1) 二次函數 $y = ax^2$ 的圖形：
   ① $y = ax^2$ 的圖形是以原點為頂點，以 y 軸為對稱軸的拋物線。
   ② 當 $a > 0$ 時，$y = ax^2$ 的圖形開口向上，且 a 的值愈大，開口愈小；當 $a < 0$ 時，$y = ax^2$ 的圖形開口向下，且 $|a|$ 的值愈大，開口愈小。
   ③ $y = ax^2$ 的圖形與 $y = -ax^2$ 的圖形對稱於 x 軸。
   (2) 二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形：
   將函數 $y = ax^2$ 的圖形往右平移 h 單位，就可得函數 $y = a(x-h)^2$ 的圖形，再向上平移 k 單位，就可得函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形。此圖形為以 (h, k) 為頂點，以直線 $x = h$ 為對稱軸的拋物線。
   (3) 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形：
   $y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$。
   ① 圖形為以 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ 為頂點，以直線 $x = -\frac{b}{2a}$ 為對稱軸的拋物線。
   ② 當 $a > 0$ 時，拋物線的開口向上，頂點是圖形的最低點；當 $a < 0$ 時，拋物線的開口向下，頂點是圖形的最高點。

最大值與最小值

二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的最大值與最小值：
將 $y = ax^2 + bx + c$ 配方成 $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$。
1. x 值無限制：
   (1) $a > 0$ 時，當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時，y 有最小值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$。
   (2) $a < 0$ 時，當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時，y 有最大值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$。
2. x 值有限制：$\alpha \le x \le \beta$ 或 $x \ge \beta$ 或 $x \le \alpha$ 或……，
   在 x 的範圍內求出距離 $-\frac{b}{2a}$ 最近與最遠的點即可得最大、最小值。

二次函數圖形的分類

二次函數 $y = ax^2 + bx + c$，判別式 $D = b^2 - 4ac$。

a \ D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$ 開口向上			
$a < 0$ 開口向下			

(1) 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的函數值恆正 $\Leftrightarrow a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$。
(2) 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的函數值恆負 $\Leftrightarrow a < 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$。

一分鐘觀念釐清

(　　) 1. $y = 10x^2$ 的圖形開口比 $y = x^2$ 大。
(　　) 2. $y = -x^2$ 的圖形與 $y = x^2$ 的圖形對稱於 x 軸。
(　　) 3. $y = 2x^2$ 的圖形對稱於 y 軸。
(　　) 4. 拋物線 $y = 2(x+1)^2$ 的圖形是將拋物線 $y = 2x^2$ 往右平移 1 單位。
(　　) 5. 拋物線 $y = 2(x-1)^2 + 7$ 的對稱軸為直線 $x - 1 = 0$。
(　　) 6. 二次函數的圖形與 y 軸一定恰交於一點。
(　　) 7. $(-2, 5)$、$(0, 5)$、$(2, 5)$ 三點位在同一個二次函數的圖形上。
(　　) 8. 若二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的對稱軸為直線 $x - 3 = 0$，則 $f(1) = f(5)$。
(　　) 9. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 在 $-2 \le x \le 5$ 的範圍內一定有最大值也有最小值。
(　　) 10. 對任意實數 x，$x^2 - 3x + 3$ 的值恆為正數。

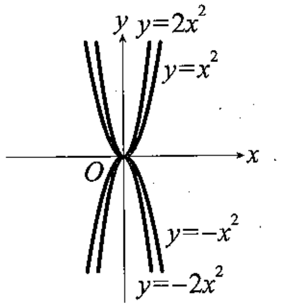
答案：1.(╳)　2.(○)　3.(○)　4.(╳)　5.(○)　6.(○)　7.(╳)
8.(○)　9.(○)　10.(○)

例題 3

在同一坐標平面上，描繪下列各二次函數的圖形：

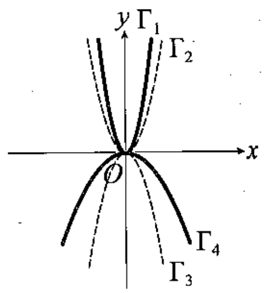
(1) $y=x^2$。 (2) $y=-x^2$。 (3) $y=2x^2$。 (4) $y=-2x^2$。

解



類題

1. 若圖形 Γ 與 $y=5x^2$ 的圖形對稱於 x 軸，則 Γ 的方程式為何？
2. 如圖，Γ_1、Γ_2、Γ_3、Γ_4 分別表示二次函數 $y=ax^2$，$y=bx^2$，$y=cx^2$，$y=dx^2$ 的圖形，請比較常數 a、b、c、d 的大小。



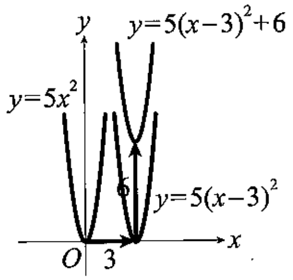
答

1. $y=-5x^2$。
2. $a>b>d>c$。

例題 4

在同一坐標平面上，描繪二次函數 $y=f(x)=5x^2$，$y=g(x)=5(x-3)^2$ 與 $y=h(x)=5(x-3)^2+6$ 的圖形。

解



解題要領

將函數 $f(x)=5x^2$ 的圖形往右平移 3 單位，就可得函數 $g(x)=5(x-3)^2$ 的圖形。再將函數 $g(x)=5(x-3)^2$ 的圖形向上平移 6 單位，就可得函數 $h(x)=5(x-3)^2+6$ 的圖形。

類題

1. 在同一坐標平面上，$y=3x^2$ 與 $y=3(x+1)^2-7$ 的圖形是否可以經由適當的平移而完全重疊？若是可以，如何平移呢？
2. 在同一坐標平面上，將 $y=3x^2$ 的圖形先鉛直上移 5 單位，再水平左移 2 單位得到函數 $y=f(x)$ 的圖形，求 $f(x)$。

答

1. 可以；往左平移 1 單位，往下平移 7 單位。
2. $f(x)=3(x+2)^2+5$。

例題 5

描繪 $y=3x^2-12x+7$ 的圖形，並求出其頂點及對稱軸。

解

$y=3x^2-12x+7=3(x^2-4x)+7$

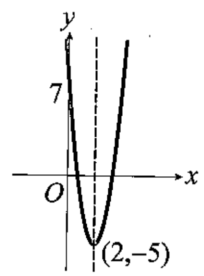
$=3(x^2-4x+2^2)-12+7=3(x-2)^2-5$，

將 $y=3x^2$ 的圖形往右平移 2 單位，

再向下平移 5 單位，

即可得 $y=3(x-2)^2-5$ 的圖形，如圖所示，

拋物線的頂點為 $(2,-5)$，對稱軸為直線 $x=2$。



解題要領

利用配方法，將函數化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

類題

1. 求二次函數 $y=-2x^2-3x+5$ 圖形的頂點及對稱軸。
2. 在同一坐標平面上，將 $y=-3x^2$ 的圖形往右平移 h 單位，再向上平移 k 單位，所得到的圖形恰與 $y=7+6x-3x^2$ 的圖形重合，求實數 h、k 的值。

答

1. 頂點 $(-\frac{3}{4},\frac{49}{8})$，對稱軸為直線 $x=-\frac{3}{4}$。
2. $h=1$，$k=10$。

例題 6

已知二次函數$f(x)$的圖形通過三點$(0, 5)$、$(-1, 9)$、$(2, 3)$，求$f(x)$及其頂點坐標。

解 設$f(x)=ax^2+bx+c$，

過三點$(0, 5)$、$(-1, 9)$、$(2, 3)$

$$\Rightarrow\begin{cases}5=c\\9=a-b+c\\3=4a+2b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=5\end{cases}，$$

所以$f(x)=x^2-3x+5$，

又$f(x)=x^2-3x+5=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}$，所以頂點$(\frac{3}{2},\frac{11}{4})$。

類題

1. 已知二次函數$f(x)$的圖形與x軸交於$(-3, 0)$與$(5, 0)$，與y軸交於$(0, 15)$，求$f(x)$及其頂點坐標。
   提示：可設$f(x)=a(x+3)(x-5)$，將$(0, 15)$代入解a。
2. 已知二次函數$f(x)$的圖形通過三點$(-1, 22)$、$(3, -2)$、$(0, 7)$，求$f(x)$及其頂點坐標。

答

1. $f(x)=-x^2+2x+15$，頂點$(1, 16)$。
2. $f(x)=3x^2-12x+7$，頂點$(2, -5)$。

例題 7

已知二次函數$f(x)$圖形的對稱軸為$x=2$，且通過$A(-1, -7)$、$B(1, 1)$兩點，求$f(x)$。

解 因為對稱軸$x=2$，

所以可設$f(x)=a(x-2)^2+k$，

過$A(-1, -7)$、$B(1, 1)$

$$\Rightarrow\begin{cases}9a+k=-7\\a+k=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\k=2\end{cases}，$$

所以$f(x)=-(x-2)^2+2=-x^2+4x-2$。

類題

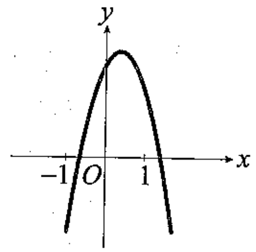
1. 已知二次函數$f(x)$圖形的頂點$(2, -6)$，且通過點$(1, -3)$，求$f(x)$。
2. 已知二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$的圖形通過兩點$A(1, 12)$、$B(0, 6)$，且其對稱軸$x=-1$，求a、b、c之值。

答

1. $f(x)=3x^2-12x+6$。
2. $a=2$，$b=4$，$c=6$。

例題 8

已知二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$的圖形如圖，請分別判斷a、b、c、b^2-4ac、$a+b+c$、$4a-2b+c$的正負。



解

(1) 因為圖形開口向下，所以$a<0$。

(2) 因為圖形對稱軸$x=-\frac{b}{2a}>0$，又$a<0$，所以$b>0$。

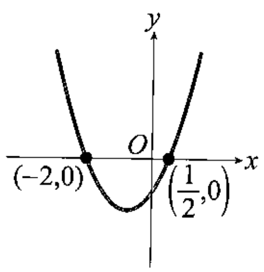
(3) 因為圖形與y軸的交點$(0, c)$在x軸的上方，所以$c>0$。

(4) 因為圖形與x軸交於相異兩點，所以$b^2-4ac>0$。

(5) $a+b+c=f(1)>0$。

(6) $4a-2b+c=f(-2)<0$。

類題



1. 若函數$f(x)=ax^2+bx+c$的圖形如圖，則下列各數哪些為負數？ (1)a (2)b (3)c (4)b^2-4ac (5)$a-b+c$。
2. 設a、b為實數，若二次函數$f(x)=a(x-2)^2+b$，滿足$f(4)>0$且$f(5)<0$，則下列選項何者正確？ (1)$a<0$ (2)$b<0$ (3)$f(0)>0$ (4)$f(-1)>0$ (5)$f(6)>f(5)$。

答

1. (3)(5)。
2. (1)(3)。

例題 9

已知二次函數 $f(x)=-2x^2-4x+3$：

(1) 求 $f(x)$ 的最大值及發生最大值時之 x 值。

(2) 當 $-3\le x\le -2$ 時，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

(3) 當 $-2\le x\le 1$ 時，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解 (1) $f(x)=-2x^2-4x+3=-2(x+1)^2+5$，

當 $x=-1$ 時，

$f(x)$ 有最大值 5。

(2) 當 $-3\le x\le -2$ 時，由圖可知：

$x=-2$ 時，

$f(x)$ 有最大值 $f(-2)=-8+8+3=3$，

$x=-3$ 時，

$f(x)$ 有最小值 $f(-3)=-18+12+3=-3$。

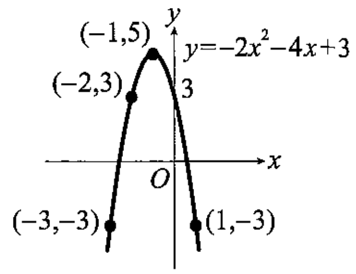
(3) 當 $-2\le x\le 1$ 時，由圖可知：

$x=-1$ 時，

$f(x)$ 有最大值 $f(-1)=5$，

$x=1$ 時，

$f(x)$ 有最小值 $f(1)=-2-4+3=-3$。



類題

1. 已知二次函數 $f(x)=2x^2-12x+22$：
   (1) 求 $f(x)$ 的最小值及發生最小值時之 x 值。
   (2) 當 $-1\le x\le 4$ 時，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。
   (3) 當 $|x|\le 2$ 時，求 $f(x)$ 的最大值與最小值。
2. 設 $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-8)^2+(x-9)^2+(x-10)^2$，若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有最小值，求 a。

答 1. (1) $x=3$，最小值 4。 (2) 最大值 36，最小值 4。 (3) 最大值 54，最小值 6。

2. $\frac{11}{2}$。

例題 10

已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx$ 在 $x=2$ 時有最大值 $-\frac{1}{a}$，求實數 a、b 的值。

解 因為 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最大值 $-\frac{1}{a}$，所以 $f(x)$ 可表示為 $a(x-2)^2-\frac{1}{a}$，其中 $a<0$

$\Rightarrow ax^2+bx=a(x-2)^2-\frac{1}{a}=ax^2-4ax+4a-\frac{1}{a}$，

比較係數得 $\begin{cases} b=-4a \cdots\cdots ① \\ 0=4a-\frac{1}{a} \cdots\cdots ② \end{cases}$，

由 ② $4a-\frac{1}{a}=0\Rightarrow 4a^2-1=0\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$，但 $a<0$，

所以 $a=-\frac{1}{2}$ 代入 ① 得 $b=2$。

類題

1. 已知二次函數 $f(x)=ax^2-4x+b$ 在 $x=-1$ 時有最大值 5，求實數 a、b 的值。
2. 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 時有最小值 6，求實數 a、b 的值。

答 1. $a=-2$，$b=3$。 2. $a=3$，$b=-6$。

例題 11

已知對任意實數 x，kx^2-4x+1 的值恆為正數，求實數 k 的範圍。

解 因為二次函數 $y=kx^2-4x+1$ 的函數值恆為正數，

所以其圖形完全在 x 軸的上方，

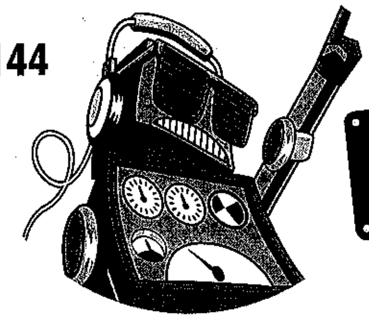
所以 $k>0$ 且判別式 $D=(-4)^2-4k<0$

$\Rightarrow k>0$ 且 $16-4k<0\Rightarrow k>0$ 且 $k>4$，所以 $k>4$。

類題

1. 已知對任意實數 x，$-x^2+6x+k-2$ 的值恆為負數，求實數 k 的範圍。
2. 已知對任意實數 x，mx^2+2x 的值恆小於 2，求實數 m 的範圍。
   提示：對任意實數 x，$mx^2+2x<2$ 恆成立，即 mx^2+2x-2 恆負。

答 1. $k<-7$。 2. $m<-\frac{1}{2}$。



綜合評量

一、基礎題

1. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最小值 1 且 $f(3)=3$。請問 $f(1)$ 之值為下列哪一選項？＿＿＿＿
(1) 5　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 條件不足，無法確定。 105 學測

2. 請選出與拋物線 $y=-2x^2$ 開口大小相同的拋物線。＿＿＿＿
(1) $y=2x^2$　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$　(3) $y=-2x^2+5$　(4) $y=2x^2+2019x-1$　(5) $y=x^2+2x+1$。

3. 在同一坐標平面上，下列哪些函數的圖形可以經由適當的平移而與 $y=(x+2)^2+4$ 的圖形完全重疊？＿＿＿＿
(1) $y=-(x+2)^2+4$　(2) $y=(x-3)^2-5$　(3) $y=x^2+x+1$　(4) $y=2x^2+8x+16$
(5) $y=-x^2+2x+4$。

4. 已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(4^7)=3$，$f(4^9)=8$，求 $f(4^8)$ 的值＝＿＿＿＿。

5. 將 $y=-x^2-6x+5$ 的圖形往右平移 2 單位，再向下平移 10 單位後，得到函數 $y=f(x)$ 的圖形，求 $f(x)=$＿＿＿＿。

6. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t)=-t^2+10t+11$，其中 $1\le t\le 10$，則這段時間內該地區的最大溫差？＿＿＿＿
(1) 9　(2) 16　(3) 20　(4) 25　(5) 36。 96 學測

7. 設點 (x, y) 在直線 $2x-y=1$ 上移動，求：
(1) x^2+y^2 之最小值＝＿＿＿＿。　(2) xy 之最小值＝＿＿＿＿。

8. 已知對任意實數 x，二次函數 $y=x^2+10x+m+6$ 的圖形恆在直線 $y=2x+2$ 的上方，求實數 m 的範圍為＿＿＿＿。

9. 如圖，小新想利用 19 公尺長的竹籬幫他的寵物狗布奇圍成一個矩形的專屬空間，並在其中一邊留下寬 1 公尺的出入口。小新能圍出的最大面積是多少？＿＿＿＿

10. 某製造玩具工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x)=5+2x$，其中 x 以千個為單位，依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如右關係：以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$，以及獲利函數 $h(x)=g(x)-f(x)$。

數量（千個）	報價總值（萬元）
5	37.5
10	70
15	97.5

(1) 若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元？＿＿＿＿
(2) 試求報價總值函數 $g(x)$。＿＿＿＿
(3) 根據 $h(x)$，試問訂單數量多少時，獲利總值最高？＿＿＿＿ 98 指考乙

二、進階題

1. 已知二次函數 $f(x)=x^2+2ax+b$ 的圖形通過點 $(3, 2)$，且頂點在直線 $x-y-1=0$ 上，求數對 $(a, b)=$＿＿＿＿。
2. 已知圓 O 的半徑為 3，則圓 O 的內接矩形中，面積最大為何？＿＿＿＿
3. 已知 $f(x)=(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+1$，求 $f(x)$ 的最小值及發生最小值時之 x 值。＿＿＿＿

三、精彩好題

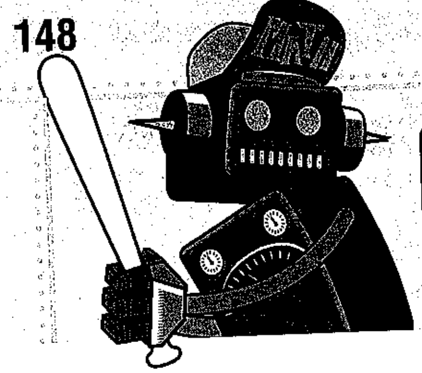
1. 設二次實係數多項式函數 $f(x)=ax^2+2ax+b$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 上的最大值為 7、最小值為 3。試求數對 (a, b) 的所有可能值。＿＿＿＿ 101 指考乙
2. 考慮實數 a、b、c，其中 $a\ne 0$。令 Γ 為 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，試選出正確的選項。＿＿＿＿
(1) 若 $a>0$，則 Γ 會通過第一象限
(2) 若 $a<0$，則 Γ 會通過第一象限
(3) 若 $b^2-4ac>0$，則 Γ 會通過第一象限
(4) 若 $c>0$，則 Γ 會通過第一象限
(5) 若 $c<0$，則 Γ 會通過第一象限。 106 指考乙

答案

一、基礎題
1. (3)　2. (1)(3)(4)　3. (2)(3)　4. 4
5. $f(x)=-x^2-2x+3$　6. (4)
7. (1) $\frac{1}{5}$　(2) $-\frac{1}{8}$　8. $m>12$　9. 25 平方公尺
10. (1) 2.25 萬元　(2) $g(x)=-\frac{1}{10}x^2+8x$　(3) 30 千個

二、進階題
1. $(-2, 5)$ 或 $(-3, 11)$　2. 18
3. $x=-2$，最小值 -9

三、精彩好題
1. $(1, 4)$ 或 $(-1, 6)$　2. (1)(4)



10 三次函數的圖形特徵

甲 三次函數的圖形

重點整理

$y=ax^3$ 的圖形

1. 三次函數 $y=ax^3$ 的圖形：

(1) $a>0$。

(2) $a<0$。

2. 三次函數 $y=ax^3$ 的圖形特徵：

(1) 當 $a>0$ 時，圖形由左往右上升；
　當 $a<0$ 時，圖形由左往右下降。

(2) 圖形通過原點。

(3) 當點 $A(\alpha, a\alpha^3)$ 在圖形上時，A 對於原點 O 的對稱點 $A'(-\alpha, -a\alpha^3)$ 也會在圖形上，因此圖形是以原點 O 為對稱中心的點對稱圖形。

註 若函數 $f(x)$ 的圖形對稱原點，則 $f(-x)=-f(x)$；反之，若函數 $f(x)$ 具有 $f(-x)=-f(x)$ 的特性，則函數的圖形會對稱於原點。

$y=ax^3+px$ 的圖形

1. 三次函數 $y=ax^3+px$（$p\neq 0$）的圖形：

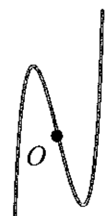
(1) a、p 同號時：

① $a>0$。

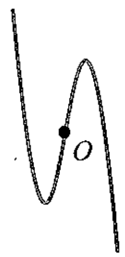
② $a<0$。

(2) a、p 異號時：

① $a>0$。



② $a<0$。



2. 三次函數 $y=ax^3+px$（$p\neq 0$）的圖形特徵：

(1) 當 $a>0$ 時，圖形的最右方都是上升的；
　當 $a<0$ 時，圖形的最右方都是下降的。

(2) 圖形通過原點且都對稱於原點。

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形

1. 三次函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形：

(1) 配三次方，化成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式：

$$y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x^3+\frac{b}{a}x^2)+cx+d$$
$$=a(x+\frac{b}{3a})^3-\frac{b^2}{3a}x-\frac{b^3}{27a^2}+cx+d$$
$$=a(x+\frac{b}{3a})^3+(c-\frac{b^2}{3a})(x+\frac{b}{3a})+(-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d)$$
$$=a(x-h)^3+p(x-h)+k,$$

其中 $h=-\frac{b}{3a}$，$p=c-\frac{b^2}{3a}$，$k=f(-\frac{b}{3a})$。

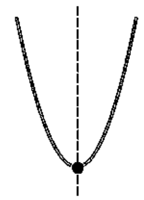
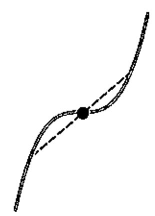
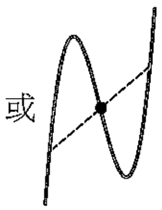
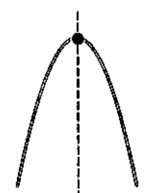
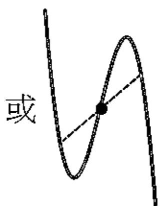
(2) 由 $y=ax^3+px$ 的圖形向右平移 h 單位，
再向上平移 k 單位即可得到 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的圖形，
且點 (h, k) 為圖形的對稱中心。

2. 三次函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形特徵：

(1) 點 (h, k) 是圖形的對稱中心，其中 $h=-\frac{b}{3a}$，$k=f(-\frac{b}{3a})$。

(2) 圖形既沒有最高點也沒有最低點。

二次函數與三次函數圖形的特徵比較

<table>
<tr><th colspan="2">二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$</th><th colspan="2">三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$</th></tr>
<tr><td>頂點</td><td>$(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$</td><td rowspan="2">對稱中心</td><td rowspan="2">$(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$</td></tr>
<tr><td>對稱軸</td><td>$x=-\frac{b}{2a}$</td></tr>
<tr><td>$a>0$</td><td></td><td>$a>0$</td><td> 或 </td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td></td><td>$a<0$</td><td> 或 </td></tr>
</table>

一分鐘觀念釐清

(　　) 1. 所有的三次函數 $y=f(x)$ 都會滿足 $f(-x)=-f(x)$。
(　　) 2. 三次函數 $y=-x^3$ 的圖形對稱於 x 軸。
(　　) 3. 三次函數 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-10$ 的函數值恆為負數。
(　　) 4. 三次函數 $y=f(x)=-3(x-2)^3-2(x-2)+7$ 的圖形以原點為對稱中心。
(　　) 5. 三次函數 $y=f(x)=-3(x-2)^3-2(x-2)+7$ 的最大值為 7。
(　　) 6. 三次函數 $y=f(x)=(x-1)^3+4(x-1)^2+5(x-1)+6$ 的對稱中心為 $(1,6)$。
(　　) 7. 任意一個三次函數都可以找到一個對稱中心。
(　　) 8. 三次函數的圖形與 x 軸至少交於一點。
(　　) 9. 任意三次多項式的圖形都可以經由平移使其圖形對稱原點。

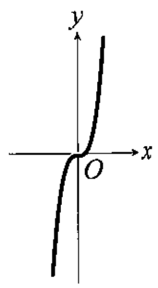
答案：1.(×)　2.(×)　3.(×)　4.(×)　5.(×)　6.(×)　7.(○)
8.(○)　9.(○)

例題 1

描繪下列函數的圖形：
(1) $f(x)=x^3$。　(2) $f(x)=-2x^3$。

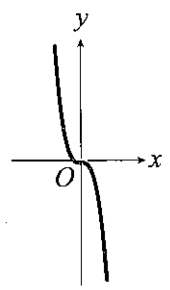
解 (1) 列出一些滿足 $y=x^3$ 的點 (x,y) 如下：

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	-8	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

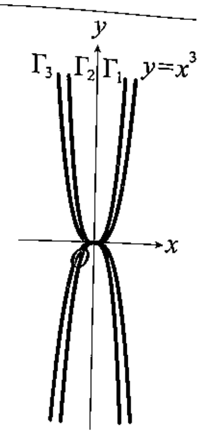


在坐標平面上描點，
再利用平滑曲線將這些點連接起來而得出右圖，
即為 $y=x^3$ 的圖形。

(2) 同 (1) 方法，描點可得 $y=-2x^3$ 的圖形如下。



類題 右圖中，Γ_1、Γ_2、Γ_3 分別為三次函數 $y=ax^3$，$y=bx^3$，$y=cx^3$ 的圖形。試比較 1、a、b、c 四個數的大小。



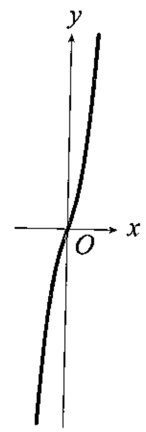
答 $a>1>c>b$。

例題 2

描繪 $y=f(x)=x^3+3x$ 的圖形。

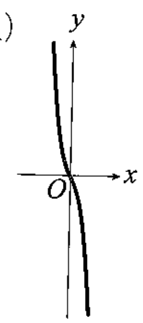
解 因為 $f(-x)=(-x)^3+3(-x)=-x^3-3x=-f(x)$，
所以圖形對稱原點，
又 $y=x^3+3x=x(x^2+3)$，
因為 x^2+3 恆正，所以當 $x>0$ 時，y 值恆正；
當 $x<0$ 時，y 值恆負。
利用描點法先畫出 $x\geq 0$ 時的圖形，再利用圖形對稱原點，
畫出 $x\leq 0$ 時的圖形，描繪如右。

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	$\frac{13}{8}$	4	$\frac{63}{8}$	14

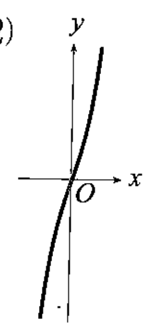


類題 描繪下列函數的圖形：(1) $y=-x^3-2x$ 的圖形。　(2) $y=\frac{1}{5}x^3+3x$。

答 (1)



(2)

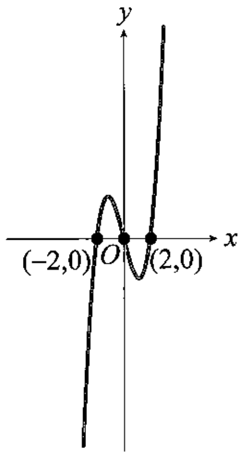


例題 3

描繪 $y=f(x)=x^3-4x$ 的圖形。

解 因為 $f(-x)=(-x)^3-4(-x)=-x^3+4x=-f(x)$，
所以圖形對稱原點，
又 $y=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)$，
所以圖形與 x 軸交於 0、-2 與 2 三處，
利用描點法先畫出 $x\geq 0$ 時的圖形，
再利用圖形對稱原點，
畫出 $x\leq 0$ 時的圖形，描繪如右。

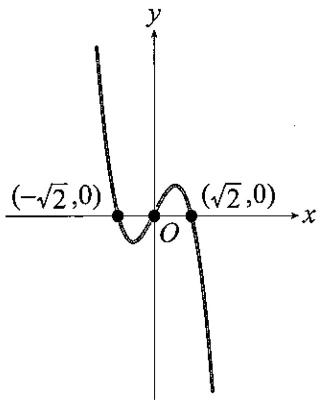
x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	0	$-\frac{15}{8}$	-3	0	15



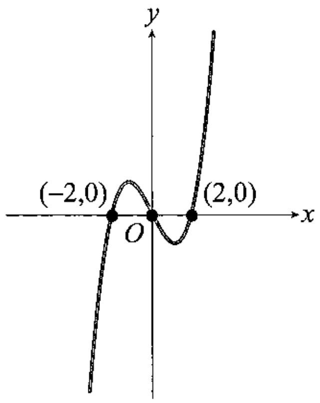
類題

描繪下列函數的圖形：
(1) $y=-x^3+2x$。
(2) $y=\frac{1}{2}x^3-2x$。

答 (1)



(2)



例題 4

將下列函數化成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式：
(1) $y=x^3+3x^2-4x+3$。
(2) $y=x^3-6x^2+9x-3$。
(3) $y=2x^3-4x^2+3x-1$。

解 **解題要領**

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 配成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式
Step1：$a=$ 領導係數
Step2：$h=-\frac{b}{3a}$
Step3：$k=f(h)$
Step4：再將 $x=0$ 代入 $d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 解得 p

(1) 比較三次方係數可知 $a=1$，
又 $h=-\frac{b}{3a}=-\frac{3}{3\times 1}=-1$，$k=f(-1)=-1+3+4+3=9$，
因此 $y=x^3+3x^2-4x+3=(x+1)^3+p(x+1)+9$，
再將 $x=0$ 代入上式，得 $3=1+p+9$，解得 $p=-7$，
故 $y=x^3+3x^2-4x+3=(x+1)^3-7(x+1)+9$。

(2) 比較三次方係數可知 $a=1$，
又 $h=-\frac{b}{3a}=-\frac{-6}{3\times 1}=2$，$k=f(2)=8-24+18-3=-1$，
因此 $y=x^3-6x^2+9x-3=(x-2)^3+p(x-2)-1$，
再將 $x=0$ 代入上式，得 $-3=-8-2p-1$，解得 $p=-3$，
故 $y=x^3-6x^2+9x-3=(x-2)^3-3(x-2)-1$。

(3) 比較三次方係數可知 $a=2$，
又 $h=-\frac{b}{3a}=-\frac{-4}{3\times 2}=\frac{2}{3}$，$k=f(\frac{2}{3})=\frac{16}{27}-\frac{16}{9}+2-1=-\frac{5}{27}$，
因此 $y=2x^3-4x^2+3x-1=2(x-\frac{2}{3})^3+p(x-\frac{2}{3})-\frac{5}{27}$，
再將 $x=0$ 代入上式，得 $-1=-\frac{16}{27}-\frac{2p}{3}-\frac{5}{27}$，解得 $p=\frac{1}{3}$，
故 $y=2x^3-4x^2+3x-1=2(x-\frac{2}{3})^3+\frac{1}{3}(x-\frac{2}{3})-\frac{5}{27}$。

類題 將下列函數化成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式：

(1) $y=-x^3-3x^2+9x+2$。

(2) $y=x^3-12x^2$。

(3) $y=-2x^3+3x^2+2x+3$。

答 (1) $y=-(x+1)^3+12(x+1)-9$。

(2) $y=(x-4)^3-48(x-4)-128$。

(3) $y=-2(x-\frac{1}{2})^3+\frac{7}{2}(x-\frac{1}{2})+\frac{9}{2}$。

例題 5

描繪 $y=x^3-6x^2+8x+1$ 的圖形，並求出其對稱中心。

解

解題要領

1. 先將函數化成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式。
2. 利用平移概念，將 $y=ax^3+px$ 的圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位。

$y=x^3-6x^2+8x+1$

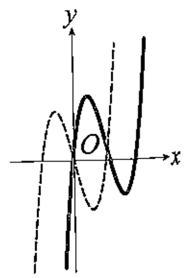
$=(x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3)-12x+8+8x+1$

$=(x-2)^3-4x+9=(x-2)^3-4(x-2)+1$，

所以將 $y=x^3-4x$ 的圖形向右平移 2 單位，再向上平移 1 單位，

即可得到此函數圖形，如右圖所示，

其對稱中心為點 $(2, 1)$。



類題 1. 求三次函數 $y=-x^3-9x^2+6x+70$ 的對稱中心。

2. 已知 $y=5(x-h)^3+9(x-h)+k$ 圖形的對稱中心為 $(-3,-7)$，求實數 h、k 的值。

答 1. $(-3,-2)$。

2 $h=-3$，$k=-7$。

乙 廣域特徵與局部特徵

重點整理

廣域特徵	1. 在一個頗大的範圍（如全部的實數 x）內觀察函數 $y=f(x)$ 圖形的特徵，稱為廣域特徵。 2. 三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 圖形的廣域特徵近似於曲線 $y=ax^3$。
局部特徵	1. 在一個頗小的範圍（如 $1.999\le x\le 2.001$）內觀察函數 $y=f(x)$ 圖形的特徵，稱為局部特徵。 2. 若三次多項式 $f(x)$ 表成 $(x-h)$ 的多項式之形式為 $f(x)=a(x-h)^3+b(x-h)^2+c(x-h)+d$， 則函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=h$ 附近的局部特徵近似於直線 $y=c(x-h)+d$。

一分鐘觀念釐清

(　　) 1. 三次函數圖形的廣域特徵由三次項決定。

(　　) 2. 三次函數圖形的局部特徵近似一條直線。

(　　) 3. 二次函數圖形的局部特徵近似一條直線。

(　　) 4. 已知三次函數 $y=f(x)=9(x-5)^3+8(x-5)^2+7(x-5)+6$，則局部看 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 附近的圖形會近似於直線 $y=7x+6$。

(　　) 5. 已知三次函數 $y=f(x)=2(x-1)^3-3(x-1)^2+10(x-1)+5$，用 $10(0.99-1)+5$ 去估計 $f(0.99)$ 的值，誤差會小於 0.001。

答案：1.(○)　2.(○)　3.(○)　4.(×)　5.(○)

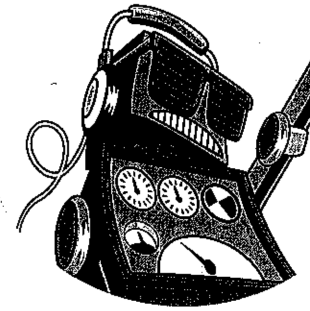
例題 6

設三次函數 $y=f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)+c$，已知廣域看 $y=f(x)$ 的圖形會很接近 $y=-5x^3$ 的圖形，而局部看 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 附近的圖形卻近似於直線 $y=-3x+8$，求實數 a、b、c 的值。

解　因為廣域看 $y=f(x)$ 的圖形會很接近 $y=-5x^3$ 的圖形，
所以 $a=-5$，
因為局部看 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 附近的圖形近似直線 $y=-3x+8$，
所以直線 $y=b(x-2)+c$，
即 $y=-3x+8$
$\Rightarrow b=-3$ 且 $-2b+c=8$
$\Rightarrow b=-3$，$c=2$。

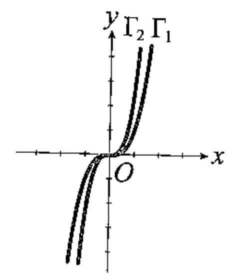
類題　已知三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(4)=0$，且圖形的廣域特徵近似於曲線 $y=-2x^3$，在 $x=3$ 附近的局部特徵近似於直線 $y=2x-1$，求 $f(x)$。
提示：設 $f(x)=-2(x-3)^3+m(x-3)^2+2(x-3)+5$，$f(4)=0$ 代入求 m。

答　$f(x)=-2x^3+13x^2-22x+8$。

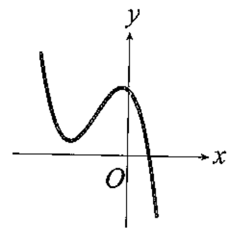


綜合評量

一、基礎題

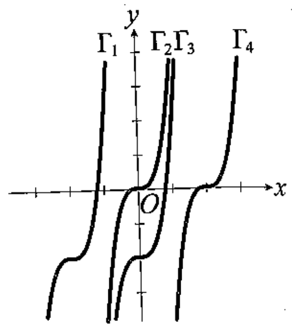


1. 右圖中，Γ_1 與 Γ_2 分別為三次函數 $y=ax^3$ 與 $y=bx^3$ 的圖形，下列選項何者正確？________
(1) $a>0$　(2) $b>0$　(3) $a>b$　(4) Γ_1 與 Γ_2 都對稱原點
(5) Γ_1 的圖形不會過第四象限。
2. 已知點 $P(a,b)$ 在 $y=-x^3$ 的圖形上，則下列哪些點一定也會在 $y=x^3$ 的圖形上？________
(1) (a,a^3)　(2) $(a,-a^3)$　(3) (b,a)　(4) $(-a,b)$　(5) $(-b,-a)$。
3. 設 a、b 為實數，對於三次函數 $f(x)=2x^3-4x^2+ax+b$ 的敘述，下列何者正確？________
(1) 一定可以找到實數 k 滿足 $f(k)=2020$　(2) $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=2020$ 不相交
(3) $y=f(x)$ 的圖形一定會與 x 軸相交　(4) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(\frac{2}{3},f(\frac{2}{3}))$
(5) $f(\frac{2}{3})=\dfrac{f(1)+f(\frac{1}{3})}{2}$。



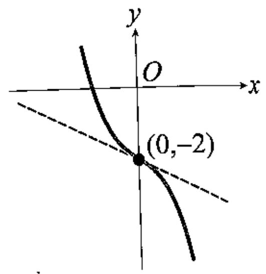
4. 右圖為 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的圖形，下列選項何者正確？________
(1) $a<0$　(2) $b<0$　(3) $p<0$　(4) $d>0$　(5) $k<0$。
5. 若三次函數 $f(x)=x^3+6x^2$ 的圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位之後，新圖形會對稱原點，求 h、k 的值為________。
6. 設三次函數 $f(x)=ax^3+bx$，已知 $f(-2019)=100$，求 $f(2019)$ 的值為________。
7. 試求三次函數 $f(x)=-x^3-6x^2+15x-3$ 圖形的對稱中心。________
8. 已知三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+b$ 圖形的對稱中心為 $(2,-7)$，求實數 a、b 的值為________。
9. 已知三次函數 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ 過點 $(1,7)$，且圖形的對稱中心為 $(-1,-9)$，求 $f(x)=$________。
10. 已知 $O(0,0)$、$A(-1,-17)$、$B(3,27)$、$C(4,k)$ 四點都在三次函數 $y=f(x)$ 的圖形上，且 A、B 對稱於圖形的對稱中心，求 k 的值為________。

二、進階題



1. 已知 $f(x)=x^3$，則下列三次函數的圖形分別對應到右圖中的哪一個曲線？____
(1) $y=f(x)$　(2) $y=f(x)-4$
(3) $y=f(x-4)$　(4) $y=f(x+4)-4$。
2. 已知三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 圖形的對稱中心為 $(-1,3)$，且圖形在對稱中心附近的局部特徵近似於一條斜率為 2 的直線，求實數 a、b、c 的值為____。
3. (1) 將三次函數 $f(x)=2x^3-6x^2+8x-7$ 化成 $2(x-h)^3+2(x-h)+k$ 的形式，求數對 (h,k) $=$____。
(2) 承 (1)，證明 $f(x)=2x^3-6x^2+8x-7$ 的圖形對稱於點 (h,k)。____

三、精彩好題



1. 右圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，$(0,-2)$ 為圖形的對稱中心，已知圖形在 $x=0$ 附近的局部特徵近似於直線 $y=-\frac{1}{2}x-2$，則下列選項何者正確？____
(1) $a<0$　(2) $b<0$　(3) $c<0$　(4) $d<0$　(5) $c<d$。
2. 研究人員神龍發現某一檔股票上市 t 個交易日後，每張股票的價值可以用三次函數 $f(t)=-t^3+75t^2-1200t+10000$ 來表示，若神龍經過精算後，知道股價在過此三次函數的反曲點後，會再繼續上漲幾天達到股價的高點，之後股價就會一路下跌，因此神龍打算在三次函數的反曲點後 15 個交易日賣掉股票，則神龍在股票上市____個交易日後賣掉股票，神龍每張股票可以賣____元。

註 三次函數的反曲點為圖形的對稱中心。

答案

一、基礎題
1. (1)(2)(4)(5)　2. (1)(4)　3. (1)(3)(4)(5)　4. (1)(2)(4)
5. $h=2$，$k=-16$　6. -100　7. $(-2,-49)$
8. $a=-6$，$b=9$　9. $f(x)=-x^3-3x^2+9x+2$
10. 68

二、進階題
1. (1) Γ_2　(2) Γ_3　(3) Γ_4　(4) Γ_1　2. $a=3$，$b=5$，$c=6$
3. (1) $(1,-3)$　(2) 證明詳見解析

三、精彩好題
1. (1)(3)(4)　2. 40；18000 元

解析

一、基礎題

1. (3) $b>a$。
2. 因為 (a,b) 在 $y=-x^3$ 的圖形上，
所以 $b=-a^3$，
將選項代入檢驗：
(1)、(2) $x=a$ 代入 $y=x^3$ 得 $y=a^3$，
所以 (a,a^3) 在 $y=x^3$ 的圖形上。
(3) $b^3\neq a$。
(4) $(-a)^3=-a^3=b$，
所以 $(-a,b)$ 在 $y=x^3$ 的圖形上。
(5) $(-b)^3=-b^3\neq -a$。
3. (1)、(2) 因為 $y=f(x)$ 圖形的最右邊是上升的，
所以一定會與直線 $y=2020$ 相交，
亦即，
可以找到實數 k 滿足 $f(k)=2020$。
(3) 三次函數的圖形與 x 軸至少交於一點。
(4) 對稱中心的 x 坐標為 $-\frac{-4}{3\times 2}=\frac{2}{3}$，
所以對稱中心 $(\frac{2}{3},f(\frac{2}{3}))$。
(5) 令 $A(\frac{1}{3},f(\frac{1}{3}))$、$B(1,f(1))$，
因為 x 坐標 $\frac{1}{3}$ 與 1 的中點為 $\frac{\frac{1}{3}+1}{2}=\frac{2}{3}$
恰為對稱中心的 x 坐標，
所以 A、B 對稱於圖形的對稱中心，
所以 $\frac{f(1)+f(\frac{1}{3})}{2}=f(\frac{2}{3})$。
4. (1) 因為圖形的最右邊是下降的，
所以 $a<0$。
(2) 對稱中心的 x 坐標 $-\frac{b}{3a}<0$，
所以 $b<0$。
(3) 由圖形特徵知 $ap<0$，
所以 $p>0$。
(4) 與 y 軸交點 $(0,d)$ 在 x 軸上方，
所以 $d>0$。
(5) 對稱中心 (h,k) 在第二象限，
所以 $k>0$。
5. $f(x)=x^3+6x^2$
$=(x+2)^3-12x-8$
$=(x+2)^3-12(x+2)+16$，
所以原圖形會對稱 $(-2,16)$，
將圖形向右平移 2 單位，向上平移 -16 單位，
新圖形會對稱原點，
所以 $h=2$，$k=-16$。
6. 〔法一〕
$f(-2019)=100$
$\Rightarrow a(-2019)^3+b(-2019)=100$
$\Rightarrow (-2019^3)a-2019b=100$，
所以 $f(2019)=a(2019)^3+b(2019)=-100$。
〔法二〕
因為三次函數 $f(x)=ax^3+bx$ 的圖形對稱原點
且 $(-2019,100)$ 在圖形上，
所以點 $(-2019,100)$ 對原點的
對稱點 $(2019,-100)$ 也在圖形上，
故 $f(2019)=-100$。
7. $f(x)=-x^3-6x^2+15x-3$
$=-(x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3)+12x+8+15x-3$
$=-(x+2)^3+27x+5$
$=-(x+2)^3+27(x+2)-49$，
所以對稱中心為 $(-2,-49)$。
8. 因為對稱中心 $(2,-7)$，
所以 $f(x)$ 可以表示成 $(x-2)^3+p(x-2)-7$ 的形式，展開得
$f(x)=(x^3-6x^2+12x-8)+(px-2p)-7$
$=x^3-6x^2+(12+p)x-2p-15$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\0=12+p\\b=-2p-15\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\p=-12\\b=9\end{cases}$$。
9. 因為對稱中心 $(-1,-9)$，
所以 $f(x)$ 可以表示成 $-(x+1)^3+p(x+1)-9$ 的形式，
過點 $(1,7)\Rightarrow 7=-2^3+2p-9\Rightarrow p=12$，
所以 $f(x)=-(x+1)^3+12(x+1)-9$
$=-(x^3+3x^2+3x+1)+(12x+12)-9$
$=-x^3-3x^2+9x+2$。

10. $\overline{AB}$ 中點 $(1, 5)$ 即為對稱中心，

設 $f(x) = a(x-1)^3 + p(x-1) + 5$

過 $O(0, 0)$、$A(-1, -17)$ 兩點

$\Rightarrow \begin{cases} -a-p+5=0 \\ -8a-2p+5=-17 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ p=3 \end{cases}$，

所以 $f(x) = 2(x-1)^3 + 3(x-1) + 5$，

將點 $C(4, k)$ 代入得 $k = 54 + 9 + 5 = 68$。

二、進階題

1. 由圖形平移的概念，得知：

$\Gamma_1 : y = f(x+4) - 4$，

$\Gamma_2 : y = f(x)$，

$\Gamma_3 : y = f(x) - 4$，

$\Gamma_4 : y = f(x-4)$。

2. 因為 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 圖形的對稱中心為 $(-1, 3)$，

設 $f(x) = (x+1)^3 + p(x+1) + 3$，

因為圖形在對稱中心附近的局部特徵近似於一條斜率為 2 的直線，

所以 $p = 2$，

故 $f(x) = (x+1)^3 + 2(x+1) + 3 = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$，

所以 $a = 3$，$b = 5$，$c = 6$。

3. (1) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 7$

$= 2(x-1)^3 + 2(x-1) - 3$

$\Rightarrow (h, k) = (1, -3)$。

(2) 設 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 7$ 圖形上任一點 (a, b)，

即 $b = 2a^3 - 6a^2 + 8a - 7$，

證明 (a, b) 對 $(1, -3)$ 的對稱點

$(2-a, -6-b)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上，

當 $x = 2 - a$ 時，

$y = 2(2-a)^3 - 6(2-a)^2 + 8(2-a) - 7$

$= 2(8 - 12a + 6a^2 - a^3) - 6(4 - 4a + a^2)$

$\quad + 8(2-a) - 7$

$= -2a^3 + 6a^2 - 8a + 1$

$= -(b+7) + 1 = -6 - b$，

所以 $(2-a, -6-b)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上，

所以 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 7$ 的圖形對稱於點 $(1, -3)$。

三、精彩好題

1. (1) 因為圖形的最右方是下降的，所以 $a < 0$。

(2) 因為對稱中心的 x 坐標 $-\dfrac{b}{3a} = 0$，

所以 $b = 0$。

(3)(4)(5) 因為在 $x = 0$ 附近的局部特徵近似於直線 $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$，

所以 $c = -\dfrac{1}{2}$，$d = -2$。

2. $f(t) = -t^3 + 75t^2 - 1200t + 10000$

$= -(t^3 - 3 \times t^2 \times 25 + 3 \times t \times 25^2 - 25^3)$

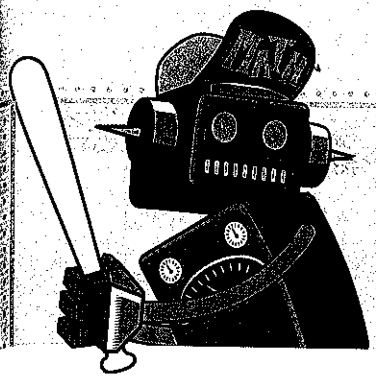
$\quad + 1875t - 15625 - 1200t + 10000$

$= -(t-25)^3 + 675(t-25) + 11250$，

反曲點為對稱中心 $(25, 11250)$，

$25 + 15 = 40$，

所以神龍在股票上市 40 個交易日後賣掉股票，此時，每張股票 $f(40) = 18000$（元）。



11 多項式不等式

甲 多項式函數的圖形

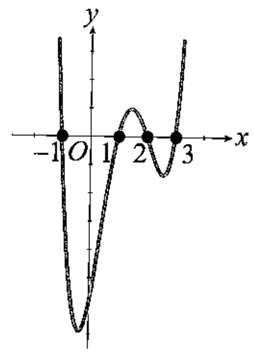
重點整理

多項式函數的圖形

1. 一次函數 $f(x) = ax + b$ 的圖形是一條直線。
2. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形是一條拋物線。
3. 三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形是一條點對稱的曲線。
4. 高於三次的函數圖形：描點或利用電腦繪製，

例如：$f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

$= (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$。



圖形的性質

多項式函數 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$（$n \geq 1$）的圖形：

1. 圖形都是連續不斷的。
2. 若實數 x_0 滿足 $f(x_0) = 0$，則 $(x_0, 0)$ 是 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸的一個交點。
3. n 次函數的圖形與 x 軸至多有 n 個交點。
4. 當 $a_n > 0$ 時，圖形的最右方是上升的；
   當 $a_n < 0$ 時，圖形的最右方是下降的。

(　　) 1. 多項式函數的圖形有可能跟 y 軸不相交。

(　　) 2. 多項式函數的圖形有可能跟 x 軸不相交。

(　　) 3. 多項式函數的圖形有可能跟 x 軸交於相異 10 點以上。

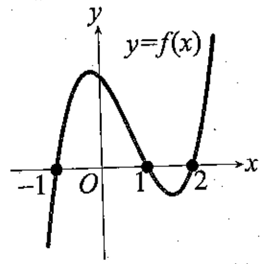
(　　) 4. $f(x) = (x+3)(x-1)(x-2)(x-5)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-3, 0)$、$(1, 0)$、$(2, 0)$、$(5, 0)$ 四個點。

(　　) 5. $f(x) = -x^4 + 10000x^3 + 10000x^2 + 10000$ 的圖形最右方是上升的。

答案：1.(×)　2.(○)　3.(○)　4.(○)　5.(×)

例題 1

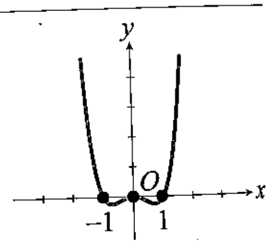
已知三次函數 $y=f(x)$ 的圖形如右：



(1) 寫出滿足 $f(x)=0$ 之實數 x 的值。
(2) 寫出滿足 $f(x)>0$ 之實數 x 的區間。
(3) 寫出滿足 $f(x)<0$ 之實數 x 的區間。
(4) 寫出滿足 $f(x)\geq 0$ 之實數 x 的區間。

解 (1) 因為圖形與 x 軸交於 $(-1,0)$、$(1,0)$、$(2,0)$ 三點，所以 $x=-1$、1、2。
(2) 因為圖形在 x 軸上方的部分，其 y 坐標（函數值）皆為正，
所以滿足 $f(x)>0$ 的區間為 $(-1,1)$ 或 $(2,\infty)$。
(3) 因為圖形在 x 軸下方的部分，其 y 坐標（函數值）皆為負，
所以滿足 $f(x)<0$ 的區間為 $(-\infty,-1)$ 或 $(1,2)$。
(4) 由 (1)(2) 知，滿足 $f(x)\geq 0$ 的區間為 $[-1,1]$ 或 $[2,\infty)$。

類題 已知四次函數 $y=f(x)$ 的圖形如右：

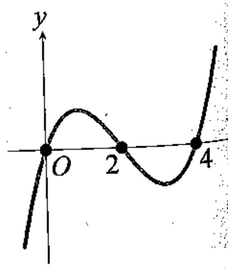


(1) 寫出滿足 $f(x)=0$ 之實數 x 的值。
(2) 寫出滿足 $f(x)\geq 0$ 之實數 x 的區間。
(3) 寫出滿足 $f(x)<0$ 之實數 x 的區間。

答 (1) -1、0、1。 (2) $(-\infty,-1]$ 或 $x=0$ 或 $[1,\infty)$。 (3) $(-1,0)$ 或 $(0,1)$。

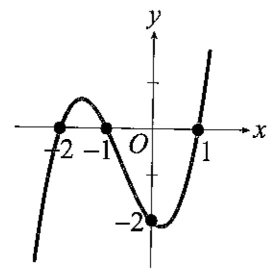
例題 2

右圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，
已知圖形通過 $(0,0)$、$(2,0)$、$(4,0)$ 三點，
試判斷 a、b、c、d 及 $a+b+c+d$ 之正負。



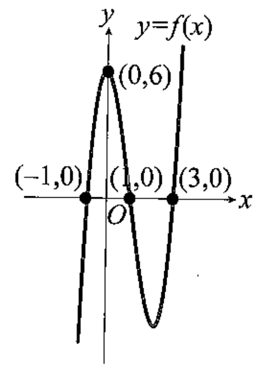
解 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=ax(x-2)(x-4)=ax^3-6ax^2+8ax$，
(1) 因為圖形的最右方是上升的，所以 $a>0$。
(2) $b=-6a<0$。
(3) $c=8a>0$。
(4) $d=0$。
(5) $a+b+c+d=f(1)>0$。

類題 1. 請問用下列哪一個函數的部分圖形來描述右圖較恰當？



(1) $f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$
(2) $f(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)$
(3) $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$
(4) $f(x)=-(x-1)(x+1)(x-2)$
(5) $f(x)=(x-1)^2(x+1)(x-2)$。

2. 已知三次函數 $y=f(x)$ 的圖形如下，求 $f(x)$。



答 1. (1)。
2. $f(x)=2x^3-6x^2-2x+6$。

乙 多項式不等式

重點整理

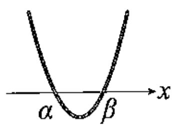
一次不等式

解一次不等式：$ax+b>0$。
1. $a>0\Rightarrow x>-\dfrac{b}{a}$。
2. $a<0\Rightarrow x<-\dfrac{b}{a}$。

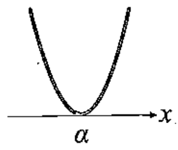
二次不等式

解二次不等式：$ax^2+bx+c>0$，$ax^2+bx+c\geq 0$，$ax^2+bx+c<0$，$ax^2+bx+c\leq 0$。

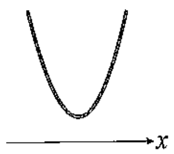
1. $a>0$，$D=b^2-4ac>0$：圖形與 x 軸交於兩點。
   設 $ax^2+bx+c=0$ 的二根為 α、β（$\alpha<\beta$），則：
   (1) $ax^2+bx+c>0$ 的解為：$x>\beta$ 或 $x<\alpha$。
   (2) $ax^2+bx+c\geq 0$ 的解為：$x\geq\beta$ 或 $x\leq\alpha$。
   (3) $ax^2+bx+c<0$ 的解為：$\alpha<x<\beta$。
   (4) $ax^2+bx+c\leq 0$ 的解為：$\alpha\leq x\leq\beta$。



2. $a>0$，$D=b^2-4ac=0$：圖形與 x 軸相切。
   設 $ax^2+bx+c=0$ 的根為 α（重根），則：
   (1) $ax^2+bx+c>0$ 的解為：$x\in\mathbb{R}$，但 $x\neq\alpha$。
   (2) $ax^2+bx+c\geq 0$ 的解為：$x\in\mathbb{R}$。
   (3) $ax^2+bx+c<0$ 的解為：無解。
   (4) $ax^2+bx+c\leq 0$ 的解為：$x=\alpha$。



3. $a>0$，$D=b^2-4ac<0$：圖形與 x 軸不相交。
   (1) $ax^2+bx+c>0$ 的解為：$x\in\mathbb{R}$。
   (2) $ax^2+bx+c\geq 0$ 的解為：$x\in\mathbb{R}$。
   (3) $ax^2+bx+c<0$ 的解為：無解。
   (4) $ax^2+bx+c\leq 0$ 的解為：無解。



高次不等式

解高次不等式：$f(x)>0$，$f(x)\geq 0$，$f(x)<0$，$f(x)\leq 0$。
Step1. 將最高次方的係數調整為正數。
Step2. 將 $f(x)$ 分解成實係數一次式或二次式的乘積。
Step3. 將 $f(x)=0$ 之實根，由小而大排列在數線上。
Step4. 由右而左，正負相間，取題目所求之範圍。

一分鐘觀念釐清

(　　) 1. 不等式 $-3x>6$ 的解為 $x>-2$。
(　　) 2. 不等式 $3(x+7)^2>0$ 的解為所有實數。
(　　) 3. 不等式 $x(x+1)>x+1$ 的解為 $x>1$。
(　　) 4. 不等式 $x^2-x+1>0$ 無解。
(　　) 5. 不等式 $(x+1)(2-x)\leq 0$ 與 $(x+1)(x-2)\leq 0$ 有相同的解。
(　　) 6. 不等式 $(x^2+x+1)(x+2)(x+3)\leq 0$ 與 $(x+2)(x+3)\leq 0$ 有相同的解。

答案：1.(×)　2.(×)　3.(×)　4.(×)　5.(×)　6.(○)

例題 3

解下列一次不等式：
(1) $-2(x-3)-(3x-7)<3(2x+3)-9x+2$。
(2) $\dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{3x-2}{10}>-1$。

解 (1) $-2x+6-3x+7<6x+9-9x+2\Rightarrow -2x<-2$，
兩邊同除以 -2，
得不等式的解為 $x>1$。
(2) 兩邊同乘以 10 得 $2(2x+1)-(3x-2)>-10$
$\Rightarrow 4x+2-3x+2>-10$
$\Rightarrow x>-14$。

類題

1. 解下列不等式：
   (1) $5(x+8)-3(2x-1)\geq 4(3x-5)-10x$。
   (2) $\dfrac{4x+1}{3}-\dfrac{3x-9}{2}<5$。
2. 已知不等式 $(5-a)x>-8$ 的解為 $x<4$，求：
   (1) 實數 a 的值。
   (2) 不等式 $(2a-9)x<-10$ 的解。

答 1. (1) $x\leq 21$。　(2) $x>-1$。
2. (1) 7。　(2) $x<-2$。

例題 4

解下列二次不等式：
(1) $x^2-2x-3\leq 0$。
(2) $4-x-3x^2<0$。
(3) $x^2+4x-1>0$。
(4) $x^2-4x+4>0$。
(5) $x^2-3\sqrt{2}x+5\leq 0$。

解 (1) $x^2-2x-3\le 0\Rightarrow(x+1)(x-3)\le 0\Rightarrow -1\le x\le 3$，也可以寫成解區間 $[-1,3]$。

(2) 將兩邊同乘以 -1，使二次項係數為正數，

$3x^2+x-4>0\Rightarrow(3x+4)(x-1)>0\Rightarrow x>1$ 或 $x<-\frac{4}{3}$，

也可以寫成解區間 $(1,\infty)$ 或 $(-\infty,-\frac{4}{3})$。

(3) 解方程式 $x^2+4x-1=0$ 得 $x=-2\pm\sqrt{5}$，

所以 $x^2+4x-1>0$ 的解為 $x>-2+\sqrt{5}$ 或 $x<-2-\sqrt{5}$，

也可以寫成解區間 $(-2+\sqrt{5},\infty)$ 或 $(-\infty,-2-\sqrt{5})$。

(4) $x^2-4x+4>0\Rightarrow(x-2)^2>0\Rightarrow x\in R$，但 $x\ne 2$，

也可以寫成解區間 $(-\infty,2)$ 或 $(2,\infty)$。

(5) 因為 $x^2-3\sqrt{2}x+5$ 的二次項係數為正數且判別式

$D=(-3\sqrt{2})^2-4\times1\times5=-2<0$，

所以 $x^2-3\sqrt{2}x+5$ 恆正，

所以 $x^2-3\sqrt{2}x+5\le 0$ 無解。

類題 解下列不等式：

(1) $2x^2-3x+1>0$。 (2) $-3x^2+x+2\ge 0$。 (3) $x^2-3x-1>0$。

(4) $x^2-6x+9\le 0$。 (5) $2x^2-x+1>0$。

答 (1) $x>1$ 或 $x<\frac{1}{2}$。 (2) $-\frac{2}{3}\le x\le 1$。 (3) $x>\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ 或 $x<\frac{3-\sqrt{13}}{2}$。

(4) $x=3$。 (5) $x\in R$。

例題 5

設 $f(x)$ 為二次函數，且不等式 $f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$，求 $f(2x)<0$ 之解。

解 〔法一〕$-2<x<4\Rightarrow(x+2)(x-4)<0\Rightarrow-(x+2)(x-4)>0$，

令 $f(x)=-a(x+2)(x-4)$，

$a>0\Rightarrow f(2x)=-a(2x+2)(2x-4)$，

所以 $f(2x)<0\Rightarrow(2x+2)(2x-4)>0\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$。

〔法二〕$f(x)>0$ 之解為 $-2<x<4$

$\Rightarrow f(2x)>0$ 之解為 $-2<2x<4\Rightarrow -1<x<2$，

所以 $f(2x)<0$ 之解為 $x>2$ 或 $x<-1$。

類題 1. 已知二次不等式 $ax^2-2x+b>0$ 的解為 $-5<x<1$，求實數 a、b 的值。

2. 已知 $f(x)$ 為二次函數，若不等式 $f(x)\le 0$ 的解為 $x\ge 5$ 或 $x\le -3$，求 $f(2x-1)>0$ 的解。

答 1. $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{5}{2}$。

2. $-1<x<3$。

例題 6

設一線段長為 a，且知以 $2a$、$2a+3$、$2a+6$ 為三邊長可圍成一鈍角三角形，求 a 的範圍。

解 鈍角三角形要滿足以下條件：

(1) 三邊皆為正：

$2a>0$（最短邊大於 0 即可）

$\Rightarrow a>0$。

(2) 任二邊和大於第三邊：

$(2a)+(2a+3)>2a+6$（較小的兩邊和大於第三邊即可）

$\Rightarrow a>\frac{3}{2}$。

(3) 最大角為鈍角：

$(2a)^2+(2a+3)^2<(2a+6)^2$

$\Rightarrow 4a^2-12a-27<0\Rightarrow(2a+3)(2a-9)<0$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}<a<\frac{9}{2}$。

由 (1)(2)(3) 取交集得 $\frac{3}{2}<a<\frac{9}{2}$。

類題 設一線段長為 k，且知以 k、$2k+1$、$2k-1$ 為三邊長可圍成一鈍角三角形，求 k 的範圍。

答 $2<k<8$。

例題 7

若對於所有實數 x，$ax^2+(a-1)x+(a-1)>0$ 恆成立，求 a 的範圍。

解

$a>0$ 且 $D=(a-1)^2-4a(a-1)<0$

$\Rightarrow a>0$ 且 $(a-1)(a-1-4a)<0$

$\Rightarrow a>0$ 且 $(a-1)(3a+1)>0$

$\Rightarrow a>0$ 且 $a>1$ 或 $a<-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow a>1$。

解題要領

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的函數值恆正 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $b^2-4ac<0$。
二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的函數值恆負 $\Leftrightarrow a<0$ 且 $b^2-4ac<0$。

類題

1. 若對於所有實數 x，$3x^2+2ax-a\geq 0$ 均成立，求 a 的範圍。
2. 若不等式 $mx^2+2x-2\geq 0$ 無解，求實數 m 的範圍。
   提示：不等式 $mx^2+2x-2\geq 0$ 無解，即 mx^2+2x-2 恆負。

答

1. $-3\leq a\leq 0$。
2. $m<-\frac{1}{2}$。

例題 8

若對於所有實數 x，不等式 $-(x+1)^2<(a-2)x-a<(x-1)^2-1$ 恆成立，求實數 a 的範圍。

解

$-(x+1)^2<(a-2)x-a<(x-1)^2-1$ 恆成立

$\Rightarrow -(x+1)^2<(a-2)x-a$ 恆成立且 $(a-2)x-a<(x-1)^2-1$ 恆成立，

整理得 $x^2+ax+(1-a)>0$ 恆成立且 $x^2-ax+a>0$ 恆成立

$\Rightarrow a^2-4(1-a)<0$ 且 $(-a)^2-4a<0$

$\Rightarrow -2-2\sqrt{2}<a<-2+2\sqrt{2}$ 且 $0<a<4$，

取交集得 $0<a<-2+2\sqrt{2}$。

類題 若對於所有實數 x，不等式 $-(x+1)^2<ax-(a+1)<x^2$ 恆成立，求實數 a 的範圍。

答 $2-2\sqrt{2}<a<-4+2\sqrt{3}$。

例題 9

解下列不等式：

(1) $(x+2)(x-1)(x-3)>0$。

(2) $(5-x)(x+1)(x-2)(x+4)\geq 0$。

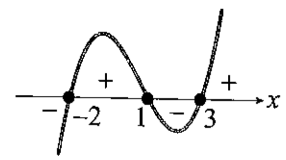
(3) $(x^2+2x-3)(x^2+3x-10)>0$。

解

(1) $(x+2)(x-1)(x-3)>0$ 的圖形與 x 軸交於 $(-2,0)$、$(1,0)$、$(3,0)$ 三點，這三點將 x 軸分成四段，分段討論 $(x+2)(x-1)(x-3)$ 的正、負如下：

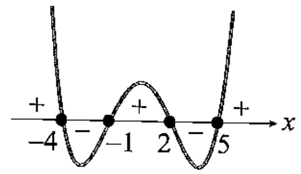
x 的範圍	$x<-2$	$-2<x<1$	$1<x<3$	$x>3$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-1)(x-3)$	$-$	$+$	$-$	$+$

由上表，可知函數的正負區間示意圖如下：



最右一段為正，
且每往左一段就變號，
所以不等式 $(x+2)(x-1)(x-3)>0$ 的解為 $-2<x<1$ 或 $x>3$。

(2) 先將 $(5-x)(x+1)(x-2)(x+4)\geq 0$
化成 $(x-5)(x+1)(x-2)(x+4)\leq 0$，
仿照 (1) 分五段討論，
可得函數的正負區間示意圖如下：

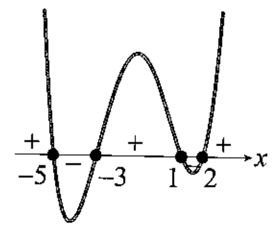


解題要領

先將最高次方的係數調整為正數（此時最右一段區間的函數值為正數）再解不等式。

所以不等式的解為 $-4\leq x\leq -1$ 或 $2\leq x\leq 5$。

(3) 利用因式分解將 $(x^2+2x-3)(x^2+3x-10)>0$
化成 $(x-1)(x+3)(x+5)(x-2)>0$，
所以不等式的解為 $x<-5$ 或 $-3<x<1$ 或 $x>2$。



類題 解下列不等式：

(1) $(x+1)(3x-2)(4x-5)\ge 0$。 (2) $(x^2+2x-2)(x-2)<0$。

(3) $(6-x-x^2)(x^2+5x+4)\le 0$。

答 (1) $-1\le x\le \frac{2}{3}$ 或 $x\ge \frac{5}{4}$。 (2) $x<-1-\sqrt{3}$ 或 $-1+\sqrt{3}<x<2$。

(3) $x\le -4$ 或 $-3\le x\le -1$ 或 $x\ge 2$。

例題 10

解下列不等式：

(1) $(x^2-2x+5)(x+2)(x-4)\le 0$。 (2) $(x-2)^2(x-5)<0$。

(3) $(x-1)^{101}(x-2)^8(x+3)^{25}\le 0$。

解 (1) 因為二次函數 x^2-2x+5 恆正。

所以 $(x^2-2x+5)(x+2)(x-4)\le 0$ 的解

與不等式 $(x+2)(x-4)\le 0$ 的解相同。

所以不等式的解為 $-2\le x\le 4$。

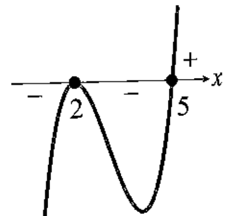
> **解題要領**
>
> 當不等式中有「恆正的因式」時，可將其剔除後再求解。

(2) 〔法一〕

函數 $y=(x-2)^2(x-5)$ 的圖形與 x 軸交於 $(2,0)$、$(5,0)$ 二點，

仿照例題 9 逐段討論 y 的正負，

可得函數的正負區間示意圖如右：



因為 $(x-2)^2$ 是偶數次，所以在 2 的左右兩段同號，

因此不等式的解為 $x<2$ 或 $2<x<5$（也可寫成 $x<5$ 但 $x\ne 2$）。

〔法二〕

針對 $(x-2)^2$ 討論：

① 當 $x=2$ 時：$(x-2)^2=0$ 代入不等式 $(x-2)^2(x-5)<0$ 不合。

② 當 $x\ne 2$ 時：$(x-2)^2>0$

$\Rightarrow$ 不等式 $(x-2)^2(x-5)<0$ 與 $(x-5)<0$ 的解相同 $\Rightarrow x<5$。

綜合 ①② 得不等式的解為 $x<5$ 但 $x\ne 2$。

(3) ① 當 $x=1$ 或 2 或 -3 時：代入不等式 $(x-1)^{101}(x-2)^8(x+3)^{25}\le 0$ 合。

② 當 $x\ne 1$ 且 $x\ne 2$ 且 $x\ne -3$ 時：$(x-1)^{100}>0$ 且 $(x-2)^8>0$ 且 $(x+3)^{24}>0$

$\Rightarrow$ 不等式 $(x-1)^{101}(x-2)^8(x+3)^{25}\le 0$ 與 $(x-1)(x+3)\le 0$ 的解相同

$\Rightarrow -3\le x\le 1$。

綜合 ①② 得不等式的解為 $-3\le x\le 1$ 或 $x=2$。

類題 解下列不等式：

(1) $(x^2+2x+3)(x-3)(x+5)>0$。

(2) $(x+2)^2(x-1)\ge 0$。

(3) $(x+1)^{19}(x-2)^4(x-7)^{2019}<0$。

(4) $(x^2-4x+4)(x^2+x-6)>0$。

答 (1) $x<-5$ 或 $x>3$。

(2) $x=-2$ 或 $x\ge 1$。

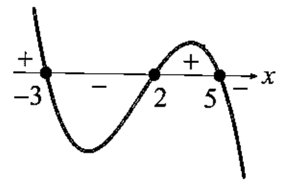
(3) $-1<x<7$，但 $x\ne 2$。

(4) $x>2$ 或 $x<-3$。

例題 11

已知三次不等式 $ax^3+bx^2+cx-30\le 0$ 的解為 $-3\le x\le 2$ 或 $x\ge 5$，求實數 a、b、c 的值。

解 依題意，可得函數 $y=ax^3+bx^2+cx-30$ 的正負區間示意圖如下：



因為 $x=-3$、2、5 的函數值為 0，且最右方一段為負，

所以 $y=a(x+3)(x-2)(x-5)$，$a<0$，

比較常數項，得 $30a=-30\Rightarrow a=-1$，

所以 $y=-(x+3)(x-2)(x-5)=-x^3+4x^2+11x-30$，

所以 $a=-1$，$b=4$，$c=11$。

類題 1. 已知三次不等式 $ax^3+bx^2+cx-6\ge 0$ 的解為 $x\le -1$ 或 $1\le x\le 3$，求實數 a、b、c 的值。

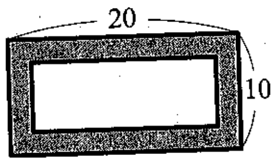
2. 已知 $f(x)$ 是首項係數為 1 的三次多項式，且不等式 $f(x)>0$ 的解為 $x>0$，但 $x\ne 2$，求不等式 $f(x)<x$ 的解。

答 1. $a=-2$，$b=6$，$c=2$。

2. $x<0$ 或 $1<x<3$。

例題 12

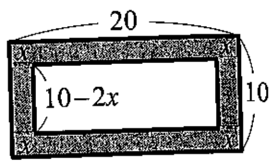
如圖，小花家有一個長 20 公尺、寬 10 公尺的長方形庭院，她想在庭院的四周鋪設等寬的人工草皮（圖中灰底部分），為了綠化，希望人工草皮的總面積至少要 56 平方公尺，但基於預算考量，人工草皮的總面積不得超過 144 平方公尺，請問人工草皮寬度的範圍為何？



解 設人工草皮的寬度 x 公尺

$\Rightarrow$ 人工草皮的總面積為

$20x+20x+x(10-2x)+x(10-2x)=-4x^2+60x$，



依題意 $\begin{cases}-4x^2+60x\geq 56\\-4x^2+60x\leq 144\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2-15x+14\leq 0\\x^2-15x+36\geq 0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}1\leq x\leq 14\\x\geq 12 \text{ 或 } x\leq 3\end{cases}$

$\Rightarrow 1\leq x\leq 3$ 或 $12\leq x\leq 14$，

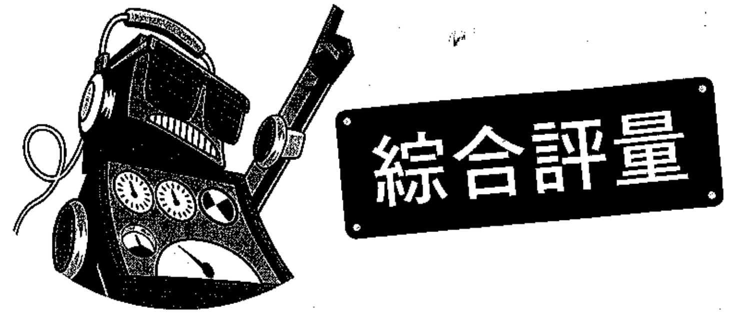
但 $10-2x\geq 0$，所以 $x\leq 5$，故 $1\leq x\leq 3$，

因此人工草皮寬度最少 1 公尺，最多 3 公尺。

類題 哈利波特向奧利凡德訂製一根實心魔杖，魔杖由高 20 公分的圓柱和一個半球體組成，如右圖，哈利波特要求球半徑至少 1 公分且圓柱的體積至少必須是半球體體積的 10 倍，請你幫奧利凡德計算出球半徑 r 的範圍。

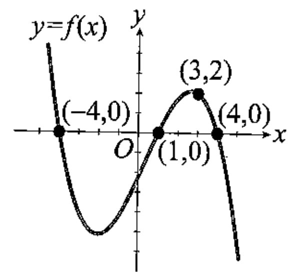
提示：半徑為 r 的球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$。

答 $1\leq r\leq 3$。



一、基礎題

1. 右圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，請選出正確的選項。________



(1) 方程式 $f(x)=0$ 有三個相異實根

(2) 不等式 $f(x)<0$ 的解為 $-4<x<1$

(3) 滿足 $f(x)\geq 0$ 之實數 x 的區間為 $(-\infty,-4)$ 或 $(1,4)$

(4) 多項式 $(x-4)\times f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 -2

(5) 多項式 $(x+3)\times f(x)$ 可以被 $(x-4)(x+4)$ 整除。

2. 下列哪些不等式的解為 $-1<x<2$ ？________

(1) $-x^2-x+2<0$　(2) $-9(x+1)(x-2)>0$　(3) $(x-1)^2(x+1)(x-2)<0$

(4) $(x^2-2x+3)(x+1)(x-2)<0$　(5) $x(x+1)(x-5)^6<2(x+1)(x-5)^6$。

3. 解聯立不等式 $\begin{cases}2x>3x+1\\3x+1<4x+7\end{cases}$ 得 x 的範圍為________。

4. 求滿足不等式 $4<x^2-3x\leq 18$ 的整數解為________。

5. 求下列不等式的解：

(1) $(x^2-2)(x^2-x-6)<0$：________。

(2) $(x^2+2x+5)(x^2+4x+3)(x-1)^3(x+2)^2>0$：________。

6. 已知二次不等式 $kx^2+2(2k-1)x+(7k-2)\geq 0$ 的解為全體實數，則實數 k 的範圍為________。

7. 設 a、b 為實數，若 $x^2-ax+b<0$ 的解為 $1<x<\frac{3}{2}$，則不等式 $2bx^2-ax-3>0$ 的解為________。

8. 設 a、b 為實數，已知不等式 $ax^2-6x+b\leq 0$ 的解為 $x=\frac{3}{2}$，則數對 $(a,b)=$________。

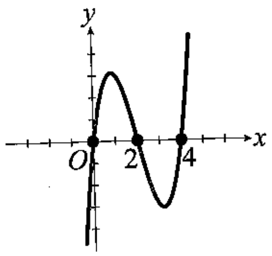
9. 已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式，若 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-5,0)$、$(6,0)$、$(8,0)$ 三點，且點 $A(10,-10)$ 在圖形上，則不等式 $f(x)\geq 0$ 的解為________。

10. 已知 x 的二次不等式 $ax^2-2ax+2a-3<0$：

(1) 若不等式的解為 $-1<x<3$，則實數 $a=$________。

(2) 若不等式無解，則實數 a 的範圍為________。

二、進階題



1. 右圖為三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的圖形，則不等式 $f(x+3)\le 0$ 的解為＿＿＿＿。
2. 設 a、b 為實數，若三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+14x+b$ 有一次因式 $x-1$ 與 $x-2$：
   (1) $a=$＿＿＿＿，$b=$＿＿＿＿。
   (2) $f(x)<0$ 的解為＿＿＿＿。
3. 設 a 為實數，若對於所有實數 x，二次函數 $f(x)=ax^2+(a+1)x+a\ge 0$ 恆成立，則 $g(a)=-a^2-8a+5$ 的最大值為＿＿＿＿。

三、精彩好題

1. 若 a 為整數，且 $y=-7x^2+ax+\frac{1}{3}$ 的圖形與 x 軸的兩個交點都介於 $x=-1$ 與 $x=1$ 之間，則滿足這樣條件的 a 有＿＿＿＿個。 104 指考乙
2. 關於多項式不等式：$x^2(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)<(2x-3)(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)$，下列哪些選項是它的一個解？＿＿＿＿ 99 指考乙
   (1) -2π　(2) $-\pi$　(3) π　(4) 2π。

答案

一、基礎題
1. (1)(4)(5)　2. (2)(4)(5)　3. $-6<x<-1$
4. -3、-2、5、6
5. (1) $-2<x<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<x<3$　(2) $-3<x<-1$ 或 $x>1$ 但 $x\ne -2$
6. $k\ge\frac{1}{3}$　7. $x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{2}{3}$
8. $(2,\frac{9}{2})$　9. $x\le -5$ 或 $6\le x\le 8$
10. (1) $a=\frac{3}{5}$　(2) $a\ge 3$

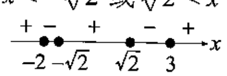
二、進階題
1. $x\le -3$ 或 $-1\le x\le 1$
2. (1) $a=-7$，$b=-8$　(2) $x<1$ 或 $2<x<4$　3. -4

三、精彩好題
1. 13　2. (2)(4)

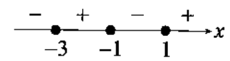
解析

一、基礎題

1. (1) $y=f(x)$ 圖形與 x 軸有三個相異交點。
   (2) $f(x)<0$ 的解為 $-4<x<1$ 或 $x>4$。
   (3) 滿足 $f(x)\ge 0$ 之實數 x 的區間為 $(-\infty,-4]$ 或 $[1,4]$。
   (4) 由餘式定理知：餘式為 $(3-4)\times f(3)=-2$。
   (5) $(x+3)\times f(x)$ 除以 $x-4$ 的餘式為 $7f(4)=0$，
   $(x+3)\times f(x)$ 除以 $x+4$ 的餘式為 $-f(-4)=0$，
   所以 $(x+3)\times f(x)$ 可被 $(x-4)(x+4)$ 整除。
2. (1) $-x^2-x+2<0\Rightarrow x^2+x-2>0$
   $\Rightarrow (x-1)(x+2)>0\Rightarrow x>1$ 或 $x<-2$。
   (2) $-9(x+1)(x-2)>0\Rightarrow (x+1)(x-2)<0$
   $\Rightarrow -1<x<2$。
   (3) ① 當 $x=1$ 時，$(x-1)^2=0$ 代入不等式不合。
   ② 當 $x\ne 1$ 時，$(x-1)^2>0$
   $\Rightarrow$ 與不等式 $(x+1)(x-2)<0$ 的解 $-1<x<2$ 相同。
   綜合 ①② 得 $-1<x<2$，但 $x\ne 1$。
   (4) 因為 x^2-2x+3 恆正，所以與 $(x+1)(x-2)<0$ 的解 $-1<x<2$ 相同。
   (5) $x(x+1)(x-5)^6<2(x+1)(x-5)^6$
   $\Rightarrow (x+1)(x-5)^6(x-2)<0$。
   ① 當 $x=5$ 時，$(x-5)^6=0$ 代入不等式不合。
   ② 當 $x\ne 5$ 時，$(x-5)^6>0\Rightarrow$ 與不等式 $(x+1)(x-2)<0$ 的解 $-1<x<2$ 相同。
   綜合 ①② 得 $-1<x<2$。
3. $\begin{cases}-x>1\\-x<6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-1\\x>-6\end{cases}\Rightarrow -6<x<-1$。
4. $4<x^2-3x\le 18\Rightarrow\begin{cases}x^2-3x-4>0\\x^2-3x-18\le 0\end{cases}$
   $\Rightarrow\begin{cases}x>4 \text{ 或 } x<-1\\-3\le x\le 6\end{cases}$，
   取交集得 $-3\le x<-1$ 或 $4<x\le 6$，
   所以整數解為 $x=-3$、-2、5、6。
5. (1) $(x^2-2)(x^2-x-6)<0$
   $\Rightarrow (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+2)(x-3)<0$
   $\Rightarrow -2<x<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<x<3$。



   (2) 因為 x^2+2x+5 恆正，
   所以 $(x^2+2x+5)(x^2+4x+3)(x-1)^3(x+2)^2>0$
   $\Rightarrow (x^2+4x+3)(x-1)^3(x+2)^2>0$
   $\Rightarrow (x+1)(x+3)(x-1)^3(x+2)^2>0$。



   ① 當 $x=1$ 或 -2 時：代入不等式不合。
   ② 當 $x\ne 1$ 且 $x\ne -2$ 時：$(x-1)^2>0$ 且 $(x+2)^2>0$
   $\Rightarrow (x+1)(x+3)(x-1)>0$
   $\Rightarrow -3<x<-1$ 或 $x>1$。
   綜合①②得 $-3<x<-1$ 或 $x>1$ 但 $x\ne -2$。
6. $kx^2+2(2k-1)x+(7k-2)\ge 0$ 對任意實數 x 恆成立
   $\Rightarrow\begin{cases}k>0\\D=4(2k-1)^2-4k(7k-2)\le 0\end{cases}$
   $\Rightarrow\begin{cases}k>0\\(2k-1)^2-k(7k-2)\le 0\end{cases}$
   $\Rightarrow\begin{cases}k>0\\3k^2+2k-1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k>0\\k\ge\frac{1}{3} \text{ 或 } k\le -1\end{cases}$
   $\Rightarrow k\ge\frac{1}{3}$。
7. $1<x<\frac{3}{2}\Rightarrow (x-1)(2x-3)<0$
   $\Rightarrow 2x^2-5x+3<0$
   $\Rightarrow x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}<0$，
   所以 $a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，
   $2bx^2-ax-3>0$
   $\Rightarrow 3x^2-\frac{5}{2}x-3>0$
   $\Rightarrow 6x^2-5x-6>0$
   $\Rightarrow x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{2}{3}$。
8. 不等式 $ax^2-6x+b\le 0$ 的解為 $x=\frac{3}{2}$
   $\Rightarrow$ 二次函數 $f(x)=ax^2-6x+b$ 的圖形開口向上且與 x 軸交於 $(\frac{3}{2},0)$
   $\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2\le 0$
   $\Rightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}\le 0$
   $\Rightarrow 2x^2-6x+\frac{9}{2}\le 0$
   所以 $a=2$，$b=\frac{9}{2}$。