考研数学(二)

星期四, 十月 1, 2020

01 考研大纲的发布时间

1. 2021考研：2020年9月9日发布
1. 2020考研：2019年7月8日发布
2. 2019考研：2018年9月15日发布
3. 2018考研：2017年9月15日发布
4. 2017考研：2016年8月26日发布
5. 2016考研：2015年9月18日发布
6. 2015考研：2014年9月13日发布

从上述分析可知，

1. 除了2020考研以外，历年考研大纲发布时间都是集中在8月底-9月中旬。
2. 2010年-2020年数学大纲的变动很小。
3. 2021年大纲公布时间应该和往年一样的，也是在放暑假之前发布。
4. 现在可以参考：2020年全国各院校专业课考研大纲汇总。

02 数学考研大纲

数一：

新：分值：高数80%（90分），线性代数20%（30分），概率论与数理统计%（30分），满分150分。

旧：分值：高数78%（82分），线性代数22.7%（34分），概率论与数理统计22.7%（34分），满分150分。

数二：

新：分值：高数80%（120分），线性代数20%（30分），满分150分。

旧：分值：高数78%（116分），线性代数22%（34分），满分150分。

题量变化：
新： 22个题目
旧： 23个题目

题型变化：

单项选择题： （概念、性质）
新： 10小题，共50分。
旧： 8小题，共32分。

填空题： （运算、方法、准确率）
新： 6小题，共30分。
旧： 6小题，共24分。

解答题： （包括证明题、综合性）
新： 6小题，共70分。
旧： 9小题，共94分。

数三：

新：分值：高数80%（90分），线性代数20%（30分），概率论与数理统计%（30分），满分150分。

旧：分值：高数78%（82分），线性代数22.7%（34分），概率论与数理统计22.7%（34分），满分150分。

1. 2021年考研数学(二)大纲（积分部分）考试内容和考试要求

一元积分学　考试内容

1. 原函数和不定积分的概念。
2. 不定积分的基本性质。
3. 基本积分公式。
4. 定积分的概念和基本性质。
5. 定积分中值定理。

---

6. 积分上限的函数及其导数。
7. 牛顿-莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式。
8. 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法。
9. 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分。
10. 反常（广义）积分、定积分的应用。

一元积分学 考试要求

1. 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念。

2. 掌握不定积分的基本公式、掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理、 掌握换元积分法与分部积分法。

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分。

4. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式page 5。

5. （旧）了解反常积分的概念，会计算反常积分。

5. （新）理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分。

---

6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等）及函数的平均值。

多元函数微积分学 考试内容

1. 多元函数的概念。
2. 二元函数的几何意义。
3. 二元函数的极限与连续的概念。
4. 有界闭区域上二元连续函数的性质。
5. 多元函数的偏导数和全微分。

---

6. 多元复合函数。
7. 隐函数的求导法。
8. 二阶偏导数。
9. 多元函数的极值和条件极值。
10. 最大值和最小值。

---

11. 二重积分的概念、基本性质和计算。

多元函数微积分学 考试要求

1. 了解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义。

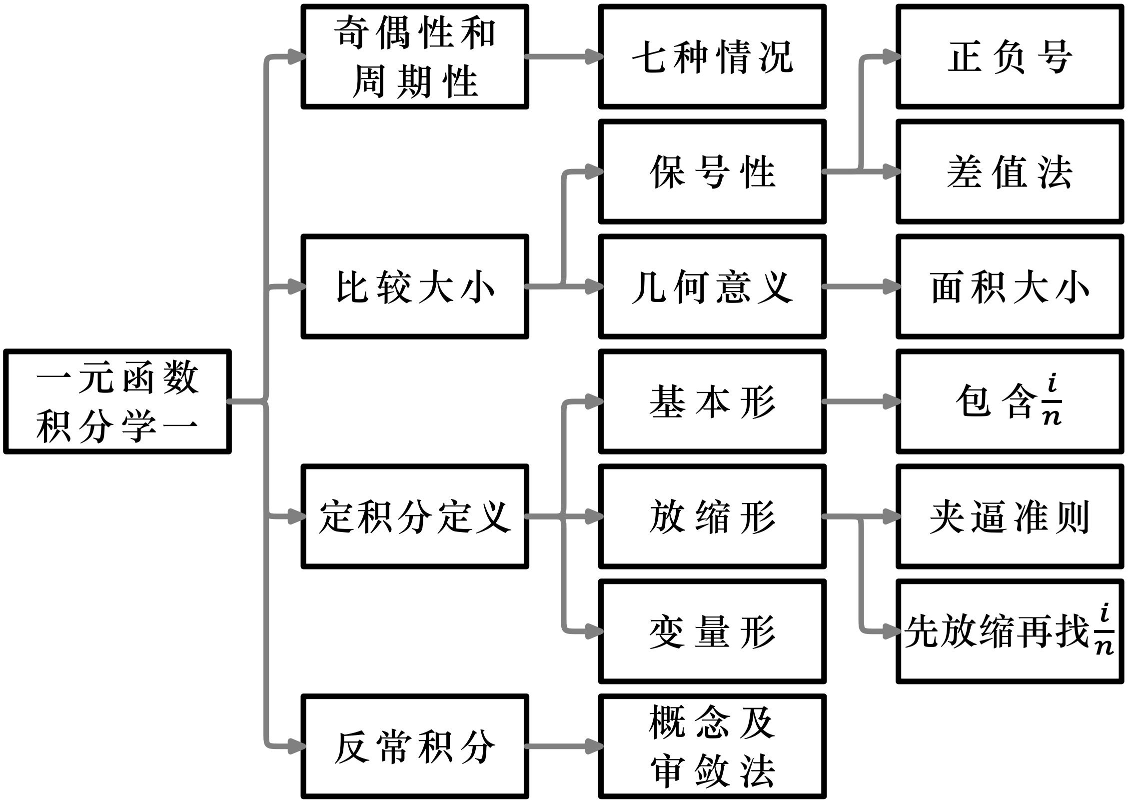
2. 了解二元函数的极限与连续的概念，了解有界闭区域上二元连续函数的性质。

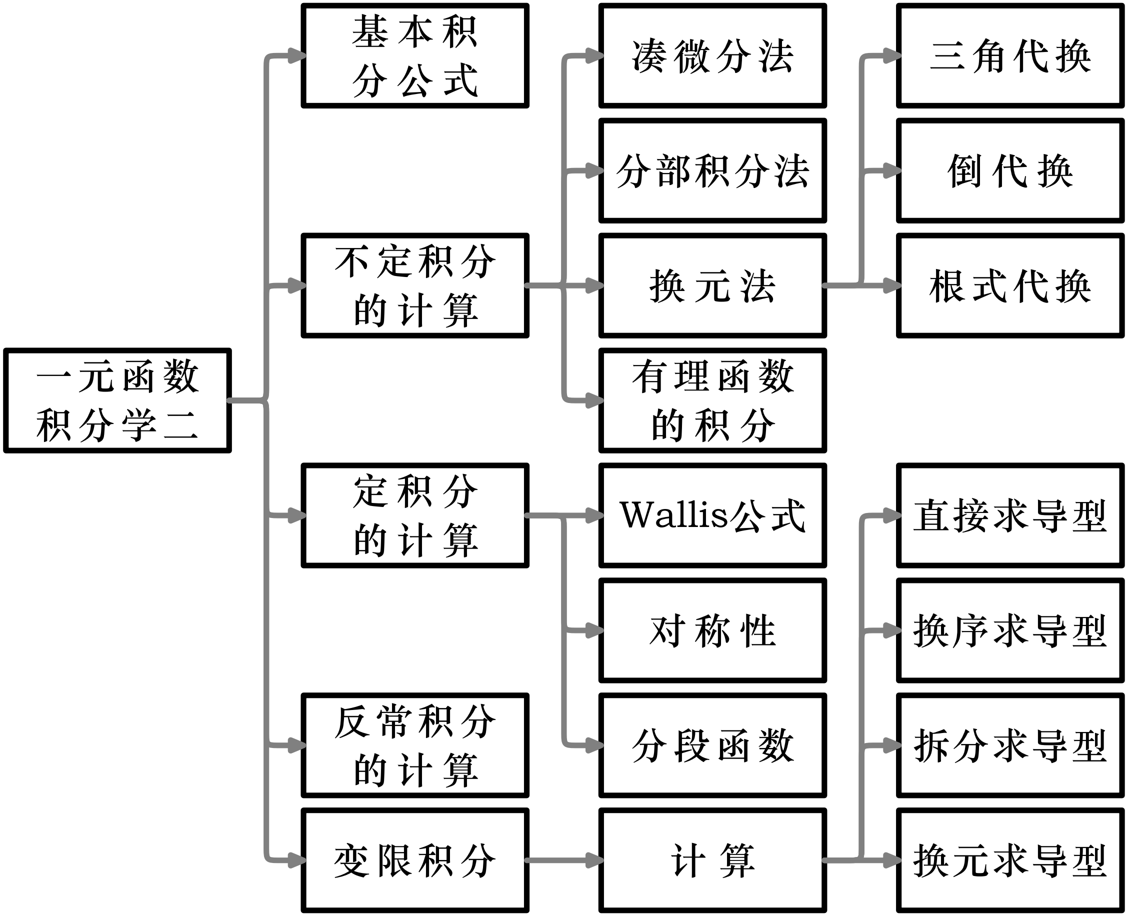
3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分，了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数。

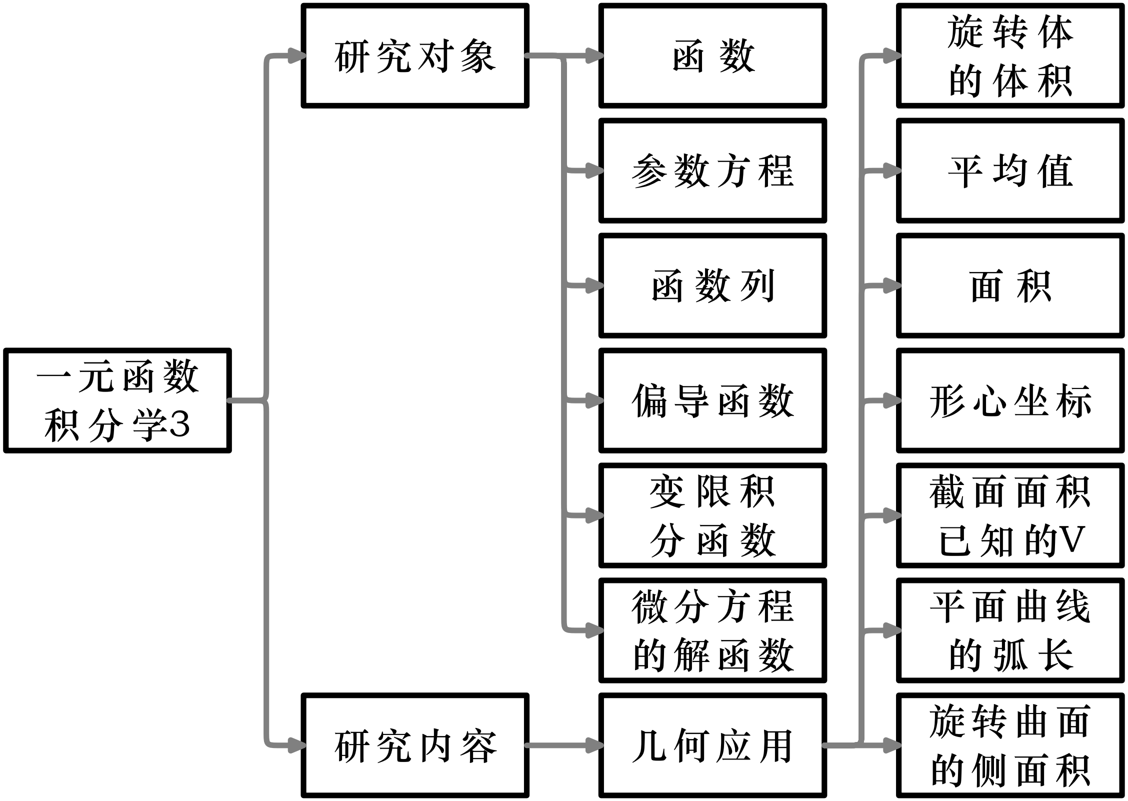
4. 了解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题。

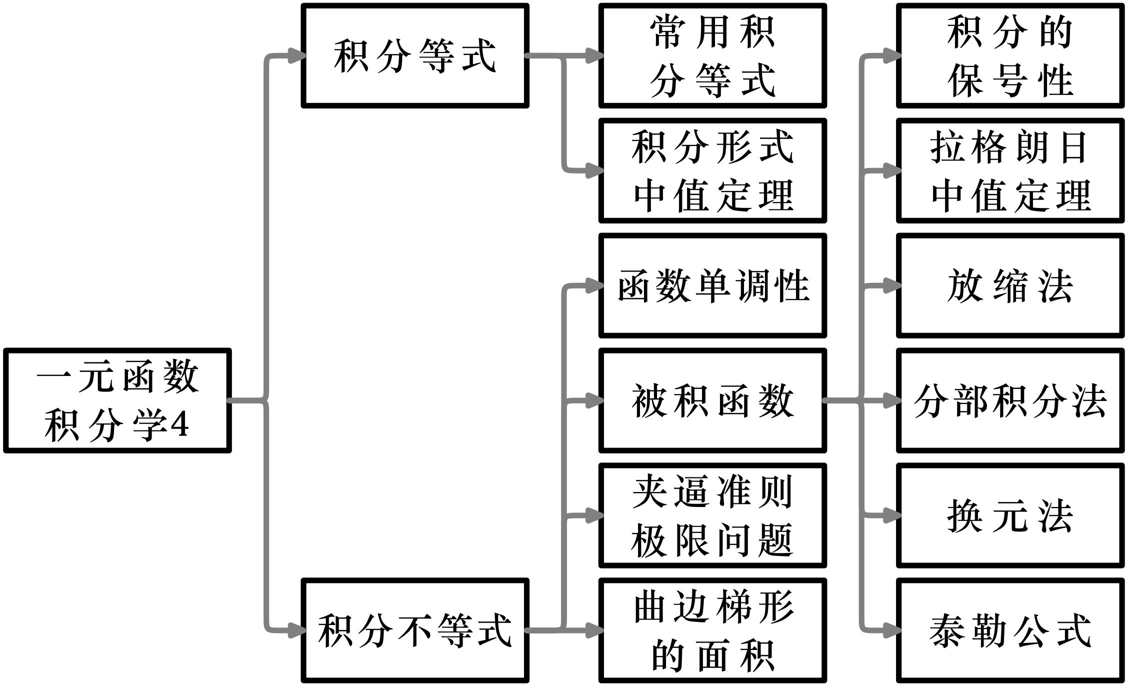
5. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)。

03 考点分布


一元函数积分学一
奇偶性和周期性
七种情况
比较大小
保号性
几何意义
正负号
差值法
面积大小
定积分定义
基本形
放缩形
变量形
包含$\frac{i}{n}$
夹逼准则
先放缩再找$\frac{i}{n}$
反常积分
概念及审敛法


一元函数积分学二
基本积分公式
不定积分的计算
定积分的计算
反常积分的计算
变限积分
凑微分法
分部积分法
换元法
有理函数的积分
Wallis公式
对称性
分段函数
计算
三角代换
倒代换
根式代换
直接求导型
换序求导型
拆分求导型
换元求导型


一元函数积分学3
研究对象
研究内容
函 数
参数方程
函数列
偏导函数
变限积分函数
微分方程的解函数
几何应用
旋转体的体积
平均值
面 积
形心坐标
截面面积已知的V
平面曲线的弧长
旋转曲面的侧面积


一元函数积分学4
积分等式
积分不等式
常用积分等式
积分形式中值定理
函数单调性
被积函数
夹逼准则极限问题
曲边梯形的面积
积分的保号性
拉格朗日中值定理
放缩法
分部积分法
换元法
泰勒公式

- 一元函数积分学5
  - 物理应用（微元法）
    - 总 路 程
    - 提取物体做功
    - 变力沿直线做功
    - 静 水 压 力
    - 细 杆 质 心
    - 曲边梯形的面积

和差角公式。（牢记）

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\sin\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

倍角公式。（牢记）

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

和差与积的关系。（牢记）

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

和差与积的关系。（牢记）

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

函数极限的计算

泰勒公式。（牢记）

1. $e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$

2. $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^{3}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4. $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n},\ -1<x\leq 1$$

泰勒公式。（牢记）

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1$$

函数极限的计算

泰勒公式。（牢记）

1. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{2}+o(x^{2}),(x\to 0)$

2. $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^{3}+o(x^{3}),(x\to 0)$

3. $\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^{3}+o(x^{3}),(x\to 0)$

4. $\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^{3}+o(x^{3}),(x\to 0)$

奇偶性

1. 设 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数。
2. 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数。
3. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，则 $f'(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.
4. 设 $f(x)$ 为奇函数且 $a \neq 0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 为偶函数.
5. 设 $f(x)$ 为奇函数且 $a = 0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 为偶函数.
6. 设 $f(x)$ 为偶函数且 $a \neq 0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 的奇偶性不确定.
7. 设 $f(x)$ 为偶函数且 $a = 0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 为奇函数.

奇偶性

1. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数且 $a=0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数.
2. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数且 $\int_0^T f(x)dx=0, a\neq 0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数.
3. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，则对任意常数 a 都有 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$

例题

设$f(x)$连续，则在下列变上限积分中，必为偶函数的是（　　）

■ ■ ■ ■

1. (A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)dt]$
2. (B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)dt]$
3. (C) $\int_0^x [f(t^2)dt]$
4. (D) $\int_0^x [f^2(t)dt]$

解：奇函数的原函数是偶函数，（A）中被积函数为奇函数，故选（A）。

（B）、（C）中被积分函数都是偶函数，偶函数$f(x)$的原函数只有$\int_0^x f(t)dt$为奇函数，因为其他原函数与此原函数相差一个常数，而奇函数加上一个非零常数后就不再是奇函数了。故（B）、（C）错误。

（D）中被积分函数仅能定为非负函数，故变上限积分不一定是偶函数。

例题

设$f(x)$是以T为周期的可微函数，则下列函数中以T为周期的函数是（　　）

(A) $\int_a^x f(t)dt$　(B) $\int_a^x f(t^2)dt$

(C) $\int_a^x f'(t^2)dt$　(D) $\int_a^x f(t)f'(t)dt$

解： (A) 若$F(x)$以T为周期，且$\int_0^T F(x)dx=0$, 则$\int_a^x F(t)dt$以T为周期，

所以(A) $\int_a^x f(t)dt$不一定。

(D) $\int_a^x f(t)f'(t)dt=\frac{1}{2}[f(t)]^2|_0^T=0$，则（D）必以T为周期。

(B) 中的f, (C)中的f'均是以T为周期，但$f(t^2)$, $f'(t^2)$均为复合函数，未必是周期函数。

（1）如$f(x)=\sin x$为周期函数，但$f(x^2)=\sin x^2$不是周期函数。因为$\sin x^2$的零点为$x^2=k\pi$，即$x=\pm\sqrt{k\pi}$, 其相邻两零点间的距离

$$d=\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

k越大， d越小，没有周期性。

（2）同理，如$\sin\frac{1}{x}$也不是周期函数。

所以（B）、（C）错误。应选（D）。

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:= Plot[Sin[x^2], {x, -2 Pi, 2 Pi}, PlotStyle -> {Thick,
Green}] Shift+Enter
```

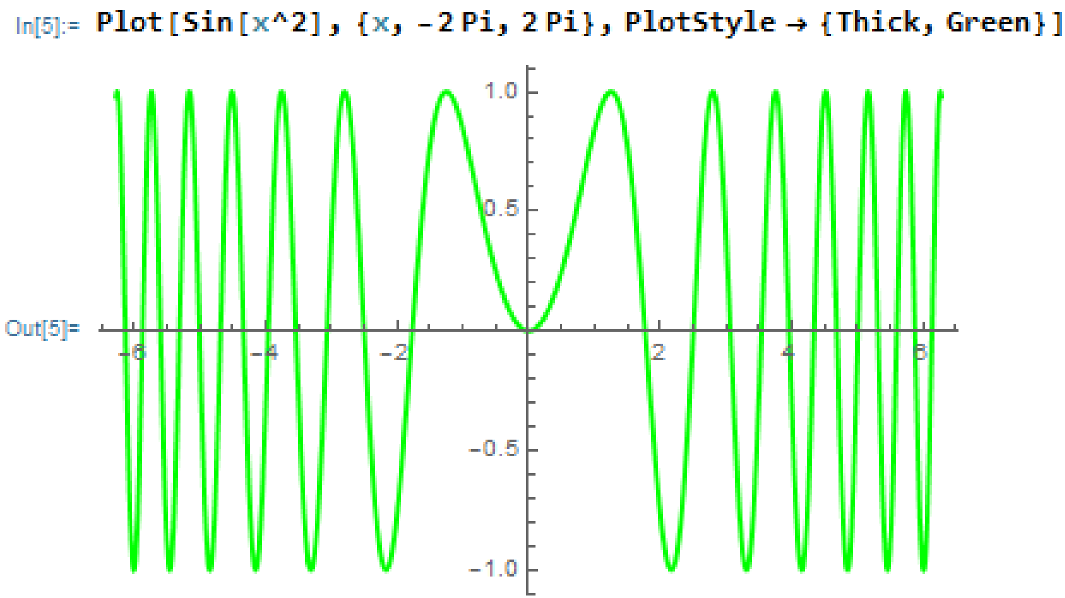


图3.1

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:= Plot[Sin[1/x], {x, -2 Pi, 2 Pi}, PlotStyle -> {Thick,
Green}] Shift+Enter
```

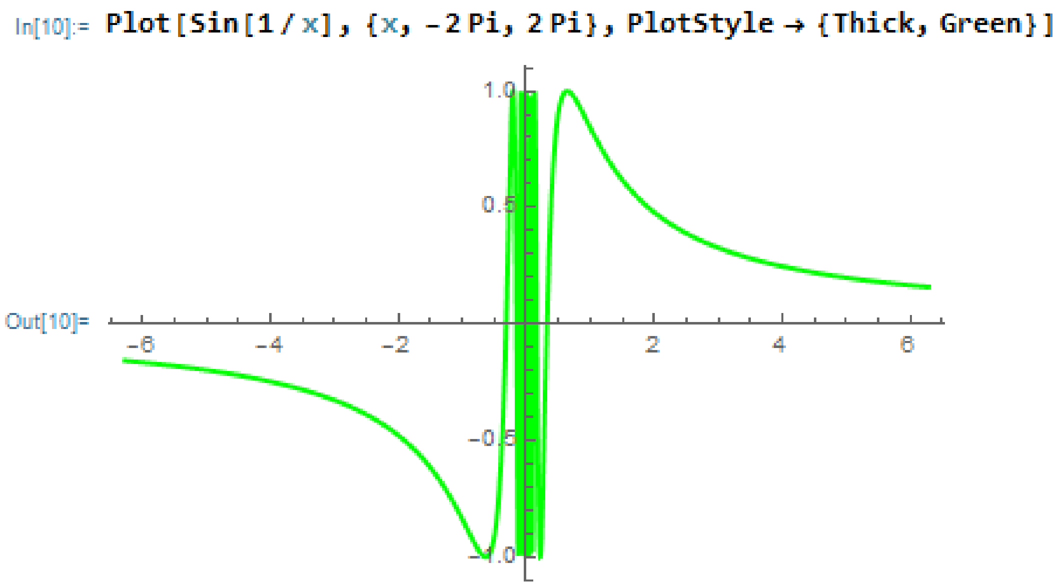


图3.2

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1] := Plot[Sin[1/x] , {x, -0.1 Pi, 0.1 Pi} , PlotStyle ->
{Thick, Green}] Shift+Enter
```

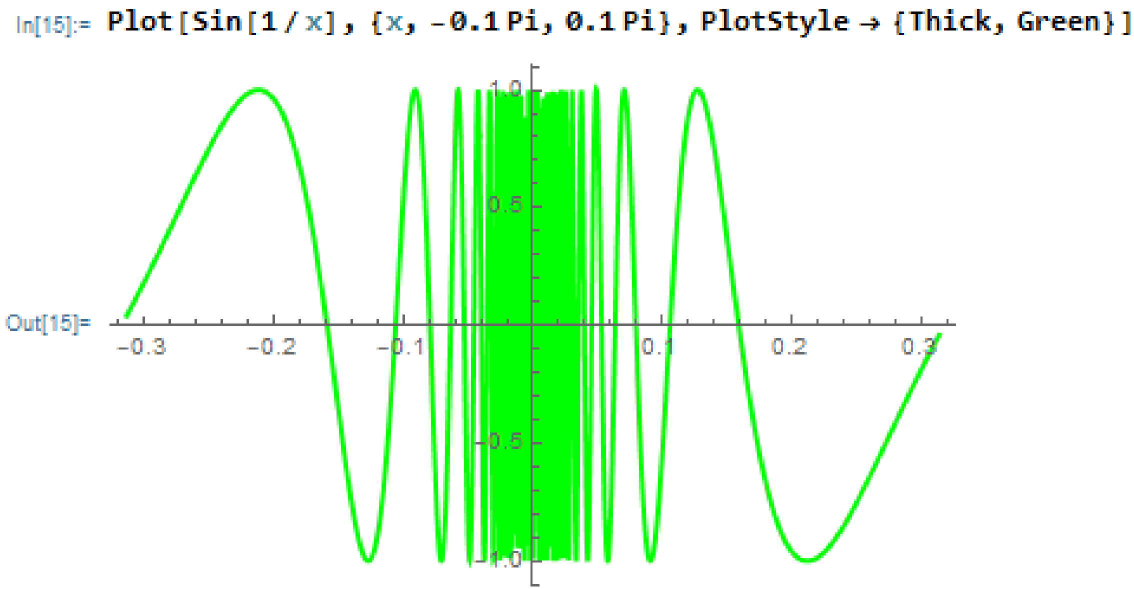


图3.3

例题

计算

$$I=\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$$

解：被积函数$\sqrt{1-\sin 2x}=|\cos x-\sin x|$ 以π 为周期，所以有

$$I=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\cos x-\sin x|dx$$

$$=n\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx$$

$$=n\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=2\sqrt{2}n$$

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:= Plot[Sqrt[1 - Sin[2 x]], {x, -2 Pi, 2 Pi},
 PlotStyle -> {Thick, Green}] Shift+Enter
```

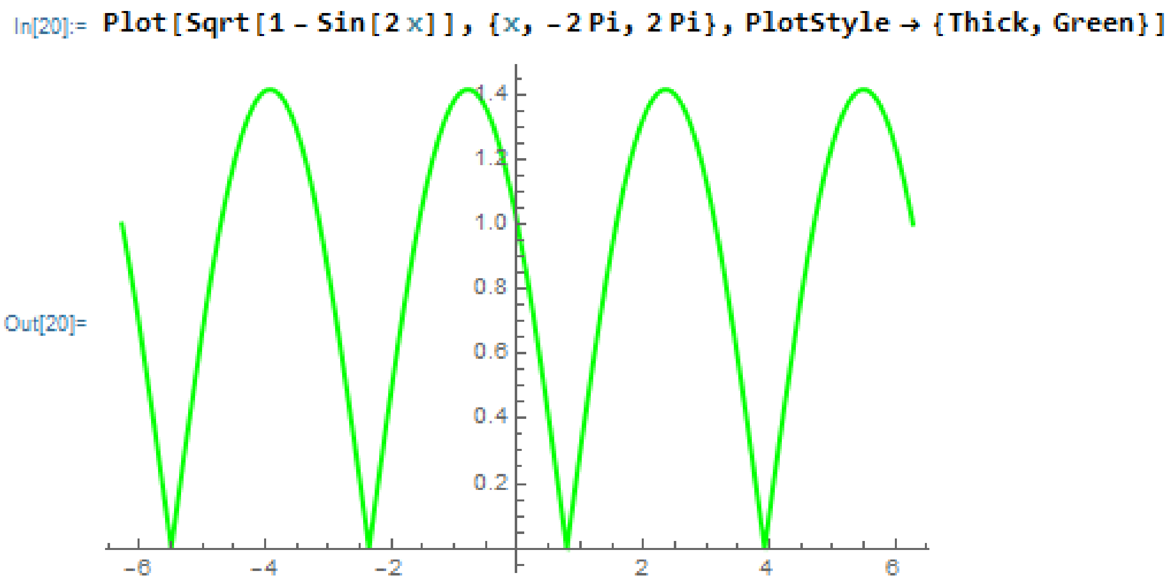


图3.4

积分的大小比较

几何意义

1. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. $\int_{x_0}^{x} f'(t)dx = f(x) - f(x_0)$

3. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,\quad$ 当$f(x) = f(-x)$时

4. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,\quad$ 当$f(x) = -f(-x)$时

5. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

积分的大小比较

保号性

1. 可以直接看出正负号。如 $|x| \geq 0$, 当 $x \in [\pi, 2\pi]$ 时，有 $\sin x \leq 0$

2. 作差$I_1 - I_2$，再换元。常令$x = \pi \pm t$, $x = \dfrac{\pi}{2} \pm t$

例题： 2018数学二选择题第5题4分

比较下列积分的大小：设

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\cdot dx,\quad N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\cdot dx,\quad K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\cdot dx$$

则 M,N,K 的大小关系为 (　　)

(A) $M>N>K$ (B) $M>K>N$ (C) $K>M>N$ (D) $K>N>M$

解：这是在同一区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上比较三个定积分，其被积函数均连续，只需比较被积函数的大小。

先利用奇偶函数在对称区间上定积分性质，化简

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\cdot dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$$

现只需在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上比较以下三个函数 1, $1+\sqrt{\cos x}$, $\frac{1+x}{e^x}$,

因为$1<1+\sqrt{\cos x}, (x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$, 所以

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx=K$$

下面证明：当$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $x\neq 0$时，

$\frac{1+x}{e^x}<1 \Leftrightarrow e^x>1+x \Leftrightarrow f(x)=e^x-x-1>0$

法一：辅助函数法，令 $f(x)=e^x-x-1$

法二：令 $f(x)=e^x-x-1$，当 $x\neq 0$时，用泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}e^{\xi}x^2>0,\ \xi\in(0,x)$$

由以上证明可知，$\frac{1+x}{e^x}<1$, 故$N<M$, 综上$K>M>N$，所以选(C)

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:=  Plot[{(1 + x)^2/(1 + x^2), (1 + x)/(E^x),
  1 + Sqrt[Cos[x]]}, {x, -Pi/2, Pi/2},
 PlotStyle -> {{Thick, Green, Thickness[0.01]}, {Dashed, Red,
    Thickness[0.01] } , {Dotted, Blue, Thickness[0.01] } } ]
Shift+Enter
```

```
In[34]:= Plot[{(1 + x)^2 / (1 + x^2), (1 + x) / (E^x), 1 + Sqrt[Cos[x]]},
  {x, -Pi / 2, Pi / 2},
  PlotStyle → {{Thick, Green, Thickness[0.01]},
    {Dashed, Red, Thickness[0.01]}, {Dotted, Blue, Thickness[0.01]}}]
```

Out[34]=

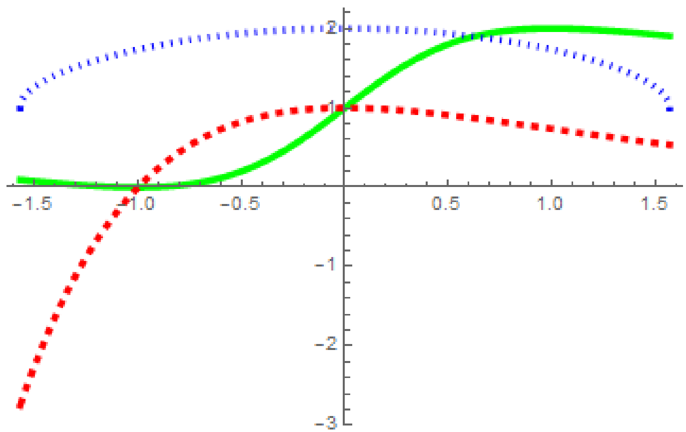


图3.5

例题

比较I_1,I_2,I_3的大小，其中

$$I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \cdot \sin x \cdot dx, \quad (k = 1,2,3)$$

则有（　　）

(A) $I_1 < I_2 < I_3$　(B) $I_3 < I_2 <_1$　(C) $I_2 < I_3 < I_1$　(D) $I_2 < I_1 < I_3$

解：首先，由$I_2 = I_1 + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx$ 及

$\int_\pi^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < 0$，可得 $I_2 < I_1$。

其次，$I_3 = I_1 + \int_\pi^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx$, 其中

$\int_\pi^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_\pi^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx$

$= \int_\pi^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_\pi^{2\pi} e^{(y+\pi)^2} \sin(y+\pi) dx$

$= \int_\pi^{2\pi} [e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}] \sin x dx > 0$

所以，$I_3 > I_1$，从而$I_2 < I_1 < I_3$，故选（D）。

和式极限，定积分定义

基本形

1. $n+i$或$an+bi$, $ab\neq 0$或 $n+i=n(1+\frac{i}{n})$

2. n^2+i^2或 $n^2+i^2=n^2[1+(\frac{i}{n})^2]$

3. n^2+ni或 $n^2+ni=n^2(1+\frac{i}{n})$

4. $\frac{i}{n}$

定积分定义

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(0+\frac{1-0}{n}i)\frac{1-0}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(0+\frac{1-0}{n}i)\frac{1-0}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

和式极限，定积分定义

变形

1. n^2+i, 找通项，放大缩小，夹逼准则。

2. $\dfrac{i^2+1}{n^2}$，则$\left(\frac{i}{n}\right)^2<\frac{i^2+1}{n^2}<\left(\frac{i+1}{n}\right)^2$

3. 通项中含有 $\dfrac{x}{n}i$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(0+\frac{x-0}{n}i\right)\cdot\frac{x-0}{n}=\int_0^x f(t)dt$$

例题

计算

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\cdot\sin\frac{i}{n}$$

考点：定积分定义。

解： $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n}\cdot\sin\frac{i}{n}$

$=\int_0^1 x\sin x dx$

$=-x\cos x|_0^1+\int_0^1\cos x dx$

$=\sin 1-\cos 1$

例题

计算

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2+\cos\frac{i\pi}{n}}$$

考点：等价无穷小。定积分定义。

解:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\pi}{n}}{2+\cos\frac{i\pi}{n}}=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{i\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\pi\int_0^1\frac{dx}{2+\cos\pi x}=\pi\int_0^1\frac{dx}{1+2\cos^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$=2\int_0^1\frac{d(\tan\frac{\pi x}{2})}{3+\tan^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

反常积分

概念

1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 称为无穷区间上的反常积分。
2. $\int_a^b f(x)dx$，其中$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$，称a为瑕点，该积分为无界函数的反常积分。

判别

1. 要求每个积分有且仅有一个瑕点。

反常积分

比较对象，牢记。

1. 当$0<p<1$时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$收敛。$x\to 0^+$时， x^p趋于0的速度不快，其倒数$\frac{1}{x^p}$ 趋于 $+\infty$ 的速度亦不快，积分收敛。
2. 当$p\geq 1$时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$发散。 $x\to 0^+$时， x^p趋于0的速度过快，其倒数$\frac{1}{x^p}$趋于 $+\infty$ 的速度亦过快，积分发散。

反常积分

比较对象，牢记。被积函数变形。

1. 当$0<p<1$时，$\int_0^1 \frac{1}{\sin^p x}dx$收敛。$x\to 0^+$时，$\sin^p x$趋于0的速度不快，其倒数$\frac{1}{\sin^p x}$趋于$+\infty$的速度亦不快，积分收敛。
2. 当$p\geq 1$时，$\int_0^1 \frac{1}{\sin^p x}dx$发散。$x\to 0^+$时，$\sin^p x$趋于0的速度过快，其倒数$\frac{1}{\sin^p x}$趋于$+\infty$的速度亦过快，积分发散。

反常积分

比较对象，牢记。积分区间变形。

1. 当$0<p<1$时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^p x}dx$收敛。$x\to 0^+$时，$\sin^p x$趋于0的速度不快，其倒数$\frac{1}{\sin^p x}$趋于$+\infty$的速度亦不快，积分收敛。
2. 当$p\geq 1$时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^p x}dx$发散。$x\to 0^+$时，$\sin^p x$趋于0的速度过快，其倒数$\frac{1}{\sin^p x}$趋于$+\infty$的速度亦过快，积分发散。

反常积分

比较对象，牢记。

1. 当$p \leq 1$时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$发散。$x \to +\infty$时，$x^p$趋于$+\infty$的速度不够快，其倒数$\frac{1}{x^p}$趋于 0 的速度亦不够快，积分发散。
2. 当$p > 1$时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$收敛。$x \to +\infty$时，$x^p$趋于$+\infty$的速度够快，其倒数$\frac{1}{x^p}$趋于 0 的速度亦够快，积分收敛。

反常积分

比较对象，牢记。被积函数变形。

1. 当 $ax + b \geq k > 0, p \leq 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(ax+b)^p} dx$ 发散。$x \to +\infty$ 时，$(ax + b)^p$ 趋于 $+\infty$ 的速度不够快，其倒数 $\frac{1}{(ax+b)^p}$ 趋于 0 的速度亦不够快，积分发散。
2. 当 $ax + b \geq k > 0, p > 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(ax+b)^p} dx$ 收敛。$x \to +\infty$ 时，$(ax + b)^p$ 趋于 $+\infty$ 的速度够快，其倒数 $\frac{1}{(ax+b)^p}$ 趋于 0 的速度亦够快，积分收敛。

例题

设 $a>0$, $b>0$, 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(2021+x)^b}dx$ 收敛，则 (　　)

(A) $a<1$ 且 $b>1$　　(B) $a>1$ 且 $b>1$

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$　　(D) $a>1$ 且 $a+b>1$

解： $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(2021+x)^b}dx=\int_0^1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(2021+x)^b}dx=I_1+I_2$

对于 I_1, 当 $x\to 0^+$ 时， $2021+x\to 2021^+$, 不是无穷小量，故只要看 x^a 即可，即 I_1 与 $\int_0^1\frac{1}{x^a}dx$ 同敛散，于是 $a<1$。

对于 I_2, 当 $x\to+\infty$, $2021+x\to+\infty$, 且与 $x\to+\infty$ 的速度一样，所以 I_2 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^ax^b}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{a+b}}dx$ 同敛散，于是 $a+b>1$。

综上， $a<1$ 且 $a+b>1$，故选（C）。

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:=  Plot[1/(x^{0.5} (2021 + x)^{1.5}), {x, 0, 2 Pi},
 PlotStyle -> {Thick, Green}]  Shift+Enter

In[2]:= Plot[1/(x^{0.4} (2021 + x)^{0.1}), {x, 0, 2 Pi},
 PlotStyle -> {Thick, Green}]  Shift+Enter

In[3]:= Plot[1/(x^2 (2021 + x)^{-3}), {x, 0, 2 Pi},
 PlotStyle -> {Thick, Green}]  Shift+Enter
```

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:=  Plot[1/(x^{0.5} + x^{1.5}), {x, 0, 2 Pi},
 PlotStyle -> {Thick, Green}]  Shift+Enter

In[2]:= Plot[1/(x^{0.4} + x^{0.1}), {x, 0, 2 Pi},
 PlotStyle -> {Thick, Green}]  Shift+Enter

In[3]:= Plot[1/(x^2 + x^{-3}), {x, 0, 2 Pi},
 PlotStyle -> {Thick, Green}]  Shift+Enter
```

例题

设 $a>b>0$, 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}dx$ 收敛，则（　　）

(A) $a>1$ 且 $b>1$ (B) $a>1$ 且 $b<1$

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$ (D) $a<1$ 且 $b<1$

解: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}dx=\int_0^1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}dx=I_1+I_2$

对于 I_1, 当 $x\to 0^+$ 时，由于 $a>b>0$，故 x^b 趋于 0的速度慢于 x^a趋于0的速度， $x^a+x^b\sim x^b$，于是 I_1 与 $\int_0^1\frac{1}{x^b}dx$ 同敛散，则 $b<1$。

对于 I_2, 当 $x\to+\infty$, 由于 $a>b>0$，故 x^a 趋于 $+\infty$ 的速度快于x^b 趋于 $+\infty$ 的速度， x^a+x^b 与 x^a为等价无穷大量，于是 I_2 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx$ 同敛散，则 $a>1$。

综上， $a>1$ 且 $b<1$，故选（B）。

基本积分公式

1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

2. $\int (ax+b)^{\mu} dx = \frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1} + C, \ (\mu \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

4. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

5. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

6. $\int \frac{x}{ax^2+b} dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$

7. $\int \frac{x^2}{ax^2+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2}{ax^2+b} dx$

8. $\int \frac{dx}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x^2}{ax^2+b}\right| + C$

基本积分公式

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = arsh\frac{x}{a} + C_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{|x|}arsh\frac{|x|}{a} + C_1 = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\right| + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

基本积分公式

1. $\int \sec x dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$

2. $\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$

3. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

4. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

5. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

6. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

7. $\int \arcsin\frac{x}{a} dx = x \arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

8. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

基本积分公式

1. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

2. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

3. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,\ n \in \mathbb{Z}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0,\ m, n \in \mathbb{Z}$

6. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0,\ m \neq n$

7. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi,\ m = n$

8. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1$

基本积分公式

1. $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$

3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

4. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$

5. $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$

凑微分法

思想

1. $\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[g(x)]d[g(x)] = \int f(u)du$
2. 当被积分函数比较复杂时，拿出一部分放到d 后面去，若能凑成$\int f(u)du$ 的形式，则凑微分成功。
3. 计算$\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$
4. 解： $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx = \int (\ln x)^5 \cdot \frac{1}{x}dx = \int \ln^5 x d(\ln x) = \frac{\ln^6 x}{6} + C$

凑微分法

方法

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a \neq 0$
2. $x^k dx = \frac{1}{k+1}d\left(x^{k+1}\right), k \neq -1$

凑微分法

牢记

1. $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$,

2. $\sqrt{x} dx = \frac{2}{3} d(x^{\frac{3}{2}})$

3. $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x})$,

4. $\frac{dx}{x^2} = d(-\frac{1}{x})$,

5. $\frac{1}{x} dx = d(\ln|x|)$

6. $e^x dx = d(e^x)$,

7. $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x), a > 0, a \neq 1$

凑微分法

牢记

1. $\sin x dx = d(-\cos x)$,
2. $\cos x dx = d(\sin x)$
3. $\frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x dx = d(\tan x)$,
4. $\frac{dx}{\sin^2 x} = \csc^2 x dx = d(-\cot x)$
5. $\frac{1}{1+x^2}dx = d(\arctan x)$,
6. $\frac{1}{1-x^2}dx = d(\arcsin x)$

凑微分法

练习

1. 计算 $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}}dx$

解：$$I = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{4-\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)^2}} = \frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

凑微分法

程序

1. 当被积函数可分为$f(x)g(x)$或$\frac{f(x)}{g(x)}$，其中$f(x)$较复杂，如果对$f(x)$或其主要部分求导数可以得到$g(x)$的倍数，常数倍或函数倍，就用凑微分进行计算。
即若$f'(x) = Ag(x)$,则$d[f(x)] = Ag(x)dx$，于是
$I = \int f(x)g(x)dx = \frac{1}{A}\int f(x)Ag(x)dx = \frac{1}{A}\int f(x)d[g(x)]$
2. 当对 $f(x)$ 求导得不到 $g(x)$ 的倍数时，考虑被积函数的分子、分母同乘以或同除以一个适当的因子，恒等变形以达到凑微分的目的。
常用的因子有 $e^{\alpha x}, x^{\beta}, \sin x, \cos x$。

凑微分法

练习

1. 计算$\int \frac{\cos^2 x-\sin x}{\left(1+\cos x\cdot e^{\sin x}\right)\cos x}dx$

解：因为 $(\cos x\cdot e^{\sin x})' = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$，所以分子、分母同乘以因子 $e^{\sin x}$。

$$I = \int \frac{(\cos^2 x-\sin x)e^{\sin x}}{\left(1+\cos x\cdot e^{\sin x}\right)\cos x\cdot e^{\sin x}}dx$$

$$= \int \frac{d(\cos x\cdot e^{\sin x})}{\left(1+\cos x\cdot e^{\sin x}\right)\cos x\cdot e^{\sin x}}$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos x\cdot e^{\sin x}} - \frac{1}{1+\cos x\cdot e^{\sin x}}\right) d\left(\cos x\cdot e^{\sin x}\right)$$

$$= \ln\left|\frac{\cos x\cdot e^{\sin x}}{1+\cos x\cdot e^{\sin x}}\right| + C$$

换元法

思想

1. 设$x = g(u)$为单调可导函数,则有
$\int f(x)dx = \int f[g(u)]d[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u)du$
当被积函数不容易积分时，如含有根式、反三角函数，可以通过换元的方法从d后面拿出一部分放到前面来，就成为$\int f[g(u)]g'(u)du$的形式，若$\int f[g(u)]g'(u)du$容易积分，则换元成功。计算完后，用反函数$u = g^{-1}(x)$回代。

换元法

方法

1. 三角函数代换。$\sqrt{a^2 - x^2}$，令 $x = a\sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$,
2. 三角函数代换。$\sqrt{a^2 + x^2}$，令 $x = a\tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$,
3. 三角函数代换。$\sqrt{x^2 - a^2}$，令 $x = a\sec t$, 若 $x > 0$, 则 $0 < t < \frac{\pi}{2}$;
4. 三角函数代换。$\sqrt{x^2 - a^2}$，令 $x = a\sec t$, 若$x < 0$, 则$\frac{\pi}{2} < t < \pi$;

换元法

恒等变形后作三角函数代换。

1. 当被积函数中含有根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$时，配方，再作三角函数代换。

换元法

根式代换。

1. 当被积函数中含有根式$\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $\sqrt{ae^{bx}+c}$时，令整个根式为t。
2. 当被积函数中既含有$\sqrt[n]{ax+b}$，又含有$\sqrt[m]{ax+b}$时，一般取m，n的最小公倍数L, 令$\sqrt[L]{ax+b}=t$。

换元法

倒代换。

1. 当被积函数分母的幂次比分子高两次及两次以上时，作倒代换，如令$x=\frac{1}{t}$。

换元法

复杂函数的直接代换。

1. 当被积函数中含有$a^x, e^x, \ln x \arcsin x, \arctan x$时，可考虑直接令复杂函数等于t。
2. 当$\ln x, \arcsin x, \arctan x$与n次多项式$P_n(x)$作乘积时，优先考虑分部积分法。

换元法

练习

1. 计算 $\int \frac{1}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$

解：因为 $\sqrt{3+4x-4x^2} = \sqrt{4-(2x-1)^2}$，令 $2x-1 = 2\sin t$，则

$$I = \int \frac{\cos t\,dt}{(2\sin t+2)2\cos t}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\sin t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tan t - \frac{1}{\cos t}\right) + C$$

分部积分法

思想

1. $\int udv = uv - \int vdu$
   适用于求 $\int udv$ 比较困难，而 $\int vdu$ 比较容易的情况。

分部积分法

方法

1. u, v的选取准则。

法一：反	$\Rightarrow$	对	$\Rightarrow$	幂	$\Rightarrow$	指	$\Rightarrow$	三
法二：反	$\Rightarrow$	对	$\Rightarrow$	幂	$\Rightarrow$	三	$\Rightarrow$	指

相对位置在左边的宜选作u，用来求导；相对位置在右边的宜选作v，用来积分。

分部积分法

练习：被积函数为下列情形时，如何选取分部积分中的u, v：

1. $P_n(x)e^{kx}, P_n(x)\sin ax, P_n(x)\cos ax$，一般来说，选 $u = P_n(x)$。
2. $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$，可以取两因子中的任意一个。
3. $P_n(x)\ln x, P_n(x)\arcsin x, P_n(x)\arctan x$，一般来说，选 $u = \ln x$，$u = \arcsin x$，$u = \arctan x$。

分部积分法

分部积分的推广公式：表格法。

1. 计算 $\int uv^{(n+1)}dx$

u的各阶导数	u	$\Rightarrow$ u'	$\Rightarrow$ u''	$\Rightarrow \cdots \Rightarrow u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n)}$	$\Rightarrow v^{(n-1)}$	$\Rightarrow v^{(n-2)}$	$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ v

计算方法：以u作起点，左上右下错位相乘，各项符号正负相间，最后一项为$(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx$

分部积分法

练习

1. $\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$

解：$I=\int \ln x\cdot d\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$$=-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

分部积分法

练习

1. 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot f(x)dx$

解：令$u = \sin^2 x$, 则有 $\sin x = \pm\sqrt{u}$,

当$\sin x = \sqrt{u}$时， $x = \arcsin\sqrt{u}$,

当$\sin x = -\sqrt{u}$时， $\sin(-x) = \sqrt{u}$, $x = -\arcsin\sqrt{u}$,

因此, 有 $f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，于是，有

$$I = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$= -\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(1-x)$$

$$= -2\int \arcsin\sqrt{x}d(\sqrt{1-x})$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}d(\sqrt{x})$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

注意：当被积函数中含有 $\arcsin u(x)$, $\arctan u(x)$时，

(1) 若可凑微分，则

$$\int f(x)\cdot \arcsin u(x)dx = \int \arcsin u(x)d[F(x)],$$

接下来用分部积分法。

(2) 若不可凑微分，则

令 $\arcsin u(x) = t$，或 $u(x) = t$，换元后再用分部积分法。

分部积分法

练习

1. 计算$\int \frac{x+1}{(1+x^2)^2}$

解：令$x = \tan t$ (作直角三角形，便于还原变量), 则

$$I = \int \frac{\tan t+1}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt$$

$$= \int (\sin t \cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

分部积分法

练习

1. $\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

考点： $d\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \cdot dx$

分析：若将被积函数的分子与分母同时乘以 $\cos x$, 并且令

$u(x) = \frac{x}{\cos x}$, $v'(x) = \frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}$,

则利用分部积分公式

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

即可使问题简化。

解：$I=\int \frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$

$$=-\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\cdot\left(\frac{x}{\cos x}\right)'dx$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$$

$$=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x)}+C$$

有理函数的积分

定义

1. 形如$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx(n<m)$的积分称为有理函数的积分，其中$P_n(x),Q_m(x)$分别是x的n次多项式和m次多项式。

分部积分法

思想

1. 先将$Q_m(x)$因式分解，再把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理分式之和。

分部积分法

方法

1. $Q_m(x)$ 的一次单因式 $(ax+b)$

产生一项 $\frac{A}{ax+b}$

2. $Q_m(x)$ 的k重因式 $(ax+b)^k$

产生k项，分别为 $\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \cdots, \frac{A_k}{(ax+b)^k}$

3. $Q_m(x)$ 的二次单因式 px^2+qx+r

产生一项 $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$

4. $Q_m(x)$ 的k重二次因式 $(px^2+qx+r)^k$

产生k项，分别为 $\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}, \frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}, \cdots, \frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}$

分部积分法

1. 练习题：计算$\int e^x \cdot \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

考点：分部积分，可以出现**积分再现**或**积分抵消**的情形。

解：$I = \int e^x \cdot \frac{1+x^2-2x}{(1+x^2)^2} dx$

$$= \int e^x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx - \int e^x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \int \frac{e^x}{1+x^2} dx + \int e^x \cdot d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \int \frac{e^x}{1+x^2} dx + \frac{e^x}{1+x^2} - \int \frac{e^x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{e^x}{1+x^2} + C$$

分部积分法

1．练习题：计算$\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx$

解：令$x^2=t$，得 $I=\frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t(t+1)^2}dt$

设 $\frac{t^2+1}{t(t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}$，通分，去分母，得

$$t^2+1=A(t+1)^2+Bt(t+1)+Ct,$$

依次令$t=-1,0$，得 $2=-C, 1=A$，再比较上式两边最高次幂系数，$1=A+B$，所以$A=1, B=0, C=-2$，

于是 $I=\frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{t}dt-\int \frac{2}{(t+1)^2}dt\right]=\frac{1}{2}\ln t+\frac{1}{t+1}+C$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+C$$

考点：分部积分。变量替换。

2019数学二解答题第16题10分

求下列不定积分

1. $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

考点：有理函数的积分。积分公式 $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C$

解：$I = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx$

$= \ln|x^2 + x + 1| - 2\ln|x - 1| - \frac{3}{x-1} + C$

定积分的计算

牢记重要公式

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

2. $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]dx$

定积分的计算

牢记重要公式

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$, $n > 1$ 奇数

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, n 正偶数

3. $\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$, $n > 1$ 奇数

4. $\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, n 正偶数

定积分的计算

牢记重要公式

1. $\int_0^{\pi}\cos^n x dx=0$, n正奇数

2. $\int_0^{\pi}\cos^n x dx=2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, n 正偶数

3. $\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_0^{2\pi}\cos^n x dx=0$, n 正奇数

4. $\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_0^{2\pi}\cos^n x dx$

$=4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, n 正偶数

定积分的计算

牢记重要公式

1. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

2. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)dx$

定积分的计算

牢记重要公式

1. $\int_a^b f(x)dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sin t\right) \cdot \frac{b-a}{2}\cos t\,dt$$

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 (b-a) \cdot f[a+(b-a)t]dt$

3. $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx, a > 0$

定积分的计算

1．练习题：设$f(x)$为连续函数，证明：区间再现公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

解：作变量代换，令 $x = a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt)$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

变形1：等式两边相加再除以2，有

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx$$

变形2：令 $F(x) = f(x)+f(a+b-x)$，则

$F(a+b-x) = f(a+b-x)+f(x) = F(x)$，故 $F(x)$ 以$x=\frac{a+b}{2}$ 为对称轴，故又有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]dx$

定积分的计算

1．练习题：计算$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

解：令$x = \tan t$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2$$ （作变量代换 $u = \frac{\pi}{4} - x$，两个积分相互抵消）

定积分的计算

1．练习题：计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos x}$

解：令$x=\frac{\pi}{4}-t$，即 $t=\frac{\pi}{4}-x$, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\frac{\pi}{4}-t)dt}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cdot\cos t}=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cdot\cos t}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(\sin t+\cos t)\cos t}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\tan t)}{\tan t+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\ln(\tan t+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\ln 2$$

定积分的计算

Wallis公式。牢记。

1. 设 n 为非负整数，证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

解：作变量代换，令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

定积分的计算

Wallis公式。牢记。

1. 设 n 为非负整数，计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

解： $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

当$n\geq 2$时，有

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1} x\sin x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1} x d(\cos x)$$

$$=-\sin^{n-1}\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x d(\sin^{n-1} x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2} x\cdot\cos x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2} x dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x dx$$
$$= (n-1)I_{n-2} + (n-1)I_n$$

于是 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$，$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$，$n = 2, 3, \cdots$

若$n > 1$的奇数，则

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

若$n > 1$为正偶数，则

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

称为Wallis公式。

定积分的计算

练习

1. 设 n 为正整数，计算 $\int_0^{\pi} \sin^n x dx$

解: $I = \int_0^{\pi} \sin^n x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x dx$

第二个积分，令$x = \pi - t$,

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n (\pi - t) d(\pi - t)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Wallis公式。

练习

1. 设n为正整数，计算$I=\int_0^{\pi}\cos^n x dx$

解：$I=\int_0^{\pi}\cos^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n x dx$

变量代换，第二个积分令$x=\pi-t$，有

$$=\int_0^{\pi}\cos^n x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n(\pi-t)d(\pi-t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)^n dt$$

当n为正奇数时，$I=0$

当n为正偶数时，$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$，Wallis公式。

定积分的计算

练习

1．设n为正整数，计算

$$I=\int_0^{2\pi}\sin^n x dx$$

解： $\sin^n x$是以2π 为周期的周期函数，于是

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x dx$$

若n为正奇数，则$\sin^n x$为奇函数，对称区间上奇函数的定积分为0 ，故 $I=0$。
若n为正偶数，则$\sin^n x$为偶函数，故

$$I=2\int_{0}^{\pi}\sin^n x dx=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

Wallis公式。

定积分的计算

练习

1. 设n为正整数，计算

$$\int_0^{2\pi} \cos^n x dx$$

解： $\cos^n x$是以2π 为周期的周期函数，于是

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n x dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos^n x dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)^n dt$$

若n为正奇数，则$I = 0$。
若n为正偶数，则

$$I = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

Wallis公式。

练习

1. 计算

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} dx$$

解：积分区间关于原点对称，所以根据对称区间上定积分的性质

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx$$

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} + \frac{\sin^4(-x)}{1+e^{-(-x)}}\right] dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

Wallis公式。

定积分的计算

诱导公式。牢记。

1. $\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t$
2. $\cos(\pi \pm t) = -\cos t$
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$

定积分的计算

练习

1. 设$f(x)$连续，证明:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

解：根据定积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]\,dx$$

$$L = \int_0^\pi x f(\sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \{x f(\sin x) + (\pi - x) f[\sin(\pi - x)]\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi [x f(\sin x) + \pi f(\sin x) - x f(\sin x)]\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx = R$$

定积分的计算

练习

1. 设$f(x)$连续，证明: $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

解：根据定积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)]\,dx$$

$$L = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{xf(\sin x) + (\pi - x)f[\sin(\pi - x)]\}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [xf(\sin x) + \pi f(\sin x) - xf(\sin x)]\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = R$$

练习

1. 设$f(x)$连续，证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

解：根据定积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

练习

1. 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)dx$，其中 $f(u,v)$ 连续。

解：根据定积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)dx = R$$

定积分的计算

考点：立方和公式、倍角公式。

1．计算

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$$

解：根据积分区间与被积分函数的特征，可利用定积分的性质

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x \cos x)\, dx = \frac{\pi - 1}{4}$$

区间简化公式

经典的区间简化公式一。

1．令 $x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin t$, 有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sin t\right)\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\cos t dt$$

区间简化公式

练习。牢记结论。

1．计算

$$I=\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}$$

解：根据定积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sin t\right)\frac{b-a}{2}\cdot \cos t dt$$

令$x-2=\sin t$, 有$3-x=1-\sin t$, $x-1=1+\sin t$,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-\sin t)(1-\sin t)}}\cos t dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t}\cdot \cos t dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

推广本题的结论。牢记公式。

设$a<b$，令 $x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin t$，则有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{b-a}{2}\cos t}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{2}\sin t\right)\left(\frac{b-a}{2}-\frac{b-a}{2}\sin t\right)}}dt \\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{b-a}{2}\cos t}{\frac{b-a}{2}\cos t}dt \\
&=\pi
\end{aligned}$$

区间简化公式

经典的区间简化公式二。

1. 令 $x-a=(b-a)t$, 有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 (b-a)f[a+(b-a)t]dt$$

区间简化公式

考点：积分公式表。牢记结论。

1. 计算

$$I=\int_1^3 \sqrt{(3-x)(x-1)}dx$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C,\ (a>|x|\geq 0)$$

解法一：根据定积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 (b-a)\cdot f[a+(b-a)t]dt$$

令$x-1=2t$, 有$3-x=2-2t$,

$$I = \int_0^1 2\cdot\sqrt{(2-2t)\cdot 2t}\cdot dt$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{t-t^2}dt$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2}dt$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

解法二：令$x-2=\sin t$, 有

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-\sin t)(1+\sin t)}\cos t dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}$$

Wallis公式。

推广本题的结论。牢记公式。

设$a<b$，令 $x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin t$，则有

$$\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b-a}{2}\cos t \cdot \frac{b-a}{2}\cos t dt$$

$$=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\pi$$

对称性下定积分的计算

考点：定积分的几何意义。定积分的定义。定积分的性质。偶倍奇零及其变形。奇偶性。解题关键，找对称点（对称中心），作变量代换。化成对称区间，再判断被积函数的奇偶性。

1．计算

$$\int_0^2 (x-1)dx$$

法一：表示以$y=x-1$ 为曲线边，x轴，$x=0, x=2$ 围成的曲边梯形的面积。0到1上的负面积与1到2上的正面积相互抵消，所以面积为0。

法二：换元，令$x-1=t$, 得

$$I=\int_{-1}^{1} t dt$$

$y=t$在区间$[-1,1]$上关于点$(0,0)$对称，为奇函数。偶倍奇零。

推广本题的结论。**牢记**公式。

设$a < b$，则有

$$I = \int_a^b \left(x - \frac{b-a}{2}\right) dx = 0$$

$y = t$在区间$[-1,1]$上关于点$(0,0)$对称，为奇函数。偶倍奇零。

对称性下定积分的计算

练习

1. 计算

$$\int_0^2 x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot dx$$

对称中心$(1,0)$，作变量代换$x - 1 = t$,

对称性下定积分的计算

练习

1. 计算

$$\int_0^{2n} x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots[x-(2n-1)]\cdot(x-2n)\cdot dx$$

对称中心$(n,0)$，作变量代换$x-n=t$,

对称性下定积分的计算

练习

1. 计算

$$\int_0^{2020} x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-2019)\cdot(x-2020)\cdot dx$$

对称中心$(1010,0)$，作变量代换$x-1010=t$,

对称性下定积分的计算

考点：定积分的几何意义。二次多项式配方。

1. 计算

$$\int_0^4 x\sqrt{4x-x^2}dx$$

解：由$4x-x^2=2^2-(x-2)^2$，令 $x-2=t$，则有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{2}(t+2)\cdot\sqrt{2^2-t^2}\cdot dt \\ &= \int_{-2}^{2} t\cdot\sqrt{2^2-t^2}\cdot dt + 2\int_{-2}^{2}\sqrt{2^2-t^2}\cdot dt \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

对称性下定积分的计算

考点：定积分的几何意义。二次多项式配方。

1. 计算

$$\int_{0}^{2} (2x+1)\cdot\sqrt{2x-x^2}\cdot dx$$

解：由$2x-x^2=1-(x-1)^2$，令 $x-1=t$，则有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} (2t+3)\cdot\sqrt{1-t^2}\cdot dt \\ &= 2\int_{-1}^{1} t\cdot\sqrt{1-t^2}\cdot dt + 3\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\cdot dt \\ &= \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

定积分分部积分中升阶降阶

概念。

1. 升阶：

$$\int_a^x f(t)dt \Rightarrow f(x) \Rightarrow f'(x) \Rightarrow f''(x)$$

2. 降阶：

$$\int_a^x f(t)dt \Leftarrow f(x) \Leftarrow f'(x) \Leftarrow f''(x)$$

沟通的桥梁：分部积分公式。变上限积分求导。

定积分分部积分中升阶降阶

考点：降阶。 $\int_a^x f(t)dt \Leftarrow f(x) \Leftarrow f'(x)$ 。导数定义。第一种重要类型极限。原函数的定义。求分式的极限。分部积分。牛莱公式。变量代换。换元必换限。

1．设$g(x)$的一个原函数为$\ln(x+1)$，求$\int_0^1 f(x)dx$，其中

$$f(x)=\lim_{t\to\infty} t^2 \cdot \left[g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)\right]\cdot \sin\frac{x}{t}$$

解:

$$f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)}{\frac{1}{t}}\cdot x\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}$$

$$=1\cdot x\cdot g'(2x)=xg'(2x)$$

故$f(x)=xg'(2x)$，所以令$2x=t$, 有

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xg'(2x)dx$$

$$=\int_0^2\frac{t}{2}\cdot g'(t)\cdot\frac{1}{2}\cdot dt=\frac{1}{4}\int_0^2 x\cdot d[g(x)]$$

$$=\frac{1}{4}\left[xg(x)\Big|_0^2-\int_0^2 g(x)dx\right]=\frac{1}{4}\left[x\cdot\frac{1}{1+x}-\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}-\ln 3\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\ln 3$$

定积分分部积分中升阶降阶

考点：升阶。 $\int_a^x f(t)dt \Rightarrow f(x) \Rightarrow f'(x)$ 。变上限积分求导。分部积分。牛莱公式。变量代换。换元换限。第一换元法。第二换元法。

1．设

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} \cdot dt$$

求

$$I = \int_0^1 (x-1)^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

解:

$f(0)=0$， $f'(x)=e^{-x^2+2x}$, 有

$$I=\frac{1}{3}(x-1)^3\cdot f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3\cdot f'(x)\cdot dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3\cdot e^{-x^2+2x}\cdot dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2\cdot e^{-(x-1)^2+1}\cdot d\left[(x-1)^2\right]$$

令 $t=(x-1)^2$, 则

$$I=-\frac{e}{6}\int_1^0 te^{-t}dt=\frac{1}{6}(e-2)$$

分段函数的定积分

考点：变量代换。换元换限。路径分段。积分性质。牛莱公式。分段函数。

1．计算

$$I=\int_{-2}^{2} f(x-1)dx$$

其中 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0 \\ 1+x^2, & x<0 \end{cases}$

解：令 $t=x-1$，则

$$I=\int_{-2}^{2} f(x-1)dx=\int_{-3}^{1} f(t)dt=\int_{-3}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt$$

$$=\int_{-3}^{0}(1+t^2)dt+\int_{0}^{1} e^{-t}dt$$

$$=\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0}-e^{-t}\Bigg|_{0}^{1}=13-e^{-1}$$

变限积分的计算

分段函数的变限积分。

考点：变量代换。换元换限。路径分段。积分性质。牛莱公式。分段函数。

1. 求

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

的表达式，其中

$$f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\le x<0\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

解：当$x\in[-1,0)$时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{x}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}$$

当$x \in [0,1]$时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{0}+\int_{0}^{x}\frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}+\int_{0}^{x}(-t)\cdot d\left(\frac{1}{e^t+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_{0}^{x}+\int_{0}^{x}\frac{1}{e^t+1}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_{0}^{x}\frac{d(e^t)}{e^t(e^t+1)}$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \frac{d(e^t)}{e^t(e^t+1)} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \left(\frac{1}{e^t} - \frac{1}{e^t+1}\right) d(e^t) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln \frac{e^t}{e^t+1}\bigg|_0^x \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln \frac{e^x}{e^x+1} - \ln \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

所以，有

$$
F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \le x < 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln \frac{e^x}{e^x+1} - \ln \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \end{cases}
$$

练习

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx$$

变限积分的计算

直接求导型。求导公式。

1.

$$\left[\int_a^{\phi(x)} f(t)dt\right]_x' = f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)$$

2.

$$\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(t)dt\right]_x' = f[\phi_2(x)]\cdot\phi_2'(x) - f[\phi_1(x)]\cdot\phi_1'(x)$$

变限积分的计算

考点：零点定理。单调性。导数。零点。辅助函数。不等式。变限积分。连续。

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程

$$\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt=0$$

在 (a,b) 内的根有（　　）个。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解：令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$$

则$F(x)$ 在$[a,b]$上连续，且

$$F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt<0,\qquad F(b)=\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt>0$$

由零点定理知 $F(x)$在(a,b) 内有零点。

再由

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$$

知 $F(x)$ 单调增加，所以$F(x)$在(a,b)内最多只有一个零点。

变限积分的计算

考点：反函数。反函数性质。可导。变限积分。连续。连续定义。积分方程。微分方程。初始条件。

1．设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，且其反函数为$g(x)$，若

$$\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$$

求$f(x)$的表达式.

解：等式两边对x求导，得

$$g[f(x)]\cdot f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

由$g[f(x)]=0$，知 $xf'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

当$x \neq 0$时，$f'(x) = 2e^x + xe^x$, 积分得 $f(x) = (x+1)e^x + C$

由于$f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，故由

$$0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[(x+1)e^x + C]$$

得$C=-1$，因此 $f(x) = (x+1)e^x - 1$

变限积分的计算

换元求导型：先用换元法，再用求导公式。

变限积分的计算

考点：变限积分。换元法。反函数。极限。可导。连续。积分。微分方程。积分方程。反函数性质。

1．设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，且其反函数为$g(x)$，若

$$\int_{x}^{x+f(x)} g(t-x)dt = x^2\ln(1+x)$$

求$f(x)$.

解：设$t-x=u$, 则 $dt=du$, 于是

$$\int_{x}^{x+f(x)} g(t-x)\cdot dt=\int_{0}^{f(x)} g(u)\cdot du=x^2\cdot\ln(1+x)$$

由于$g[f(x)]=x$, 上式两边对x 求导，有

$$xf'(x)=2x\cdot\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}$$

当$x\neq 0$时，有

$$f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$$

两边积分，有

$$\begin{aligned} f(x)&=\int\left[2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]dx \\ &=2\left[\ln(1+x)+x\ln(1+x)-x\right]+x-\ln(1+x)+C \\ &=\ln(1+x)+2x\ln(1+x)-x+C \end{aligned}$$

上式两边求极限，可知

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = C$$

由于 $f(x)$ 在$x=0$ 处右连续，又$f(0)=0$, 解得 $C=0$，于是

$$f(x) = \ln(1+x) + 2x\ln(1+x) - x$$

变限积分的计算

考点：平均值。变限积分。连续。积分。原函数。 Wallis公式。
见到 $f(x)\int_0^x f(t)dt$，一般令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$。

1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上非负连续，且

$$f(x)\int_0^x f(x-t)dt = \sin^4 x$$

求$f(x)$在$[0,\pi]$上的平均值。

解：令$x-t=u$，则

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$$

令$F(x)=\int_0^x f(u)du$, 于是

$$F(x)\cdot F'(x)=\sin^4 x$$

上式在$[0,\pi]$ 上积分，有

$$\int_0^\pi F(x)F'(x)dx=\int_0^\pi F(x)d[F(x)]=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^x=\int_0^\pi \sin^4 x dx=\frac{3}{8}\pi$$

故 $F(\pi)=\frac{\sqrt{3\pi}}{2}$, 则 $f(x)$ 在$[0,\pi]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

变限积分的计算

拆分求导型：被积函数含有绝对值，先拆分区间，化成若干个积分，再用变限积分的求导公式。

变限积分的计算

考点：变限积分。最值。绝对值。积分区间分段。导数。驻点。

1. 设$|t| \leq 1$，求积分

$$I(t)=\int_{-1}^{1}|x-t|\cdot e^{2x}dx$$

的最大值。

解：由积分性质，得

$$I(t)=\int_{-1}^{t}(t-x)\cdot e^{2x}dt+\int_{t}^{1}(x-t)\cdot e^{2x}dt$$

$$=t\int_{-1}^{t}e^{2x}dt-\int_{-1}^{t}x\cdot e^{2x}dt+\int_{t}^{1}x\cdot e^{2x}dt-t\int_{t}^{1}e^{2x}dt$$

两边求导，得

$$I'(t)=\int_{-1}^{t}e^{2x}dt+t\cdot e^{2t}-t\cdot e^{2t}-t\cdot e^{2t}-\int_{t}^{1}e^{2x}dx+te^{2t}$$

$$=\int_{-1}^{t}e^{2x}dx-\int_{t}^{1}e^{2x}dx=e^{2t}-\frac{1}{2}(e^{2}+e^{-2})$$

令 $I'(t)=0$，解得 $t=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+e^{-2}}{2}$，为唯一驻点，
$I''(t)=2e^{2t}>0$，故

$$t=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+e^{-2}}{2}$$

为 $I(t)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值，最大值只能在端点 $t=1$，$t=-1$ 取得。
又由

$$I(-1)=\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{4}e^{-2},\qquad I(1)=\frac{1}{4}e^2-\frac{5}{4}e^{-2},$$

所以，$I_{max}=I(-1)=\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{4}e^{-2}$

变限积分的计算

换序型。

1. 积分是一种累次积分，即先算里面一层积分，再算外面一层积分。一般里面一层积分不易处理，所以化为二重积分再交换积分次序，称这种类型的积分为换序型积分。换序型积分也可以用分部积分法来处理。

变限积分的计算

换序型：变限积分作为被积函数，求定积分，交换积分次序或者采用分部积分。

变限积分的计算

考点：交换积分次序。分部积分。

1. 设

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$$

求$\int_0^{\pi} f(x)dx$

解：交换积分次序，得

$$I=\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} dx\int_0^{x}\frac{\sin t}{\pi-t}dt=\int_0^{\pi} dt\int_t^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t dt=2$$

解法二：

$$I=\int_0^{\pi} f(x)dx=xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} xf'(x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^{\pi} x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}\cdot dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{\pi-x}\cdot\sin x dx=\int_0^{\pi}\sin x dx=2$$

2019数学二填空题第13题4分

1．设

$$f(x)=x\int_{1}^{x}\frac{\sin t^2}{t}dt$$

则 $\int_0^1 f(x)dx=$ ________

解：由$f(x)$表达式可得 $f(0)=0$，$f(1)=0$，$f'(x)=\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt+\sin x^2$

考虑分部积分法，得

$$I=\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$=-\int_0^1\left(x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt+x\sin x^2\right)dx$$

$$=-\int_0^1\left(x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt\right)dx-\int_0^1 x\sin x^2dx$$

$$=-I-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2d(x^2)$$

$$=-I+\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=-I+\frac{1}{2}(\cos 1-1)$$

即 $2I=\frac{1}{2}(\cos 1-1)$, 所以 $I=\dfrac{\cos 1-1}{4}$

2020数学二选择题第1题4分

考点：无穷小阶的比较。变限积分求导方法。洛必达法则。

当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是（　　）

$$(A)\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt \qquad (B)\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$$

$$(C)\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \qquad (D)\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\cdot dt$$

解：

$$(A)\quad \left[\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt\right]' = e^{x^2}-1 \sim x^2$$

$$(B)\quad \left[\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt\right]' = \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) \sim x^{\frac{3}{2}}$$

$$(C)\qquad \left(\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt\right)' = \sin(\sin x)^2 \cdot \cos x \sim x^2$$

$$(D)\qquad \left(\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} \cdot dt\right)' = \sqrt{\sin^3(1-\cos x)} \cdot \sin x$$

$$\sim x \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3} \sim \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot x^3 \cdot |x|$$

故选(D)

反常积分的计算

在收敛的条件下：

1.

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$$

其中

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

2. 若 a 为瑕点，则

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

其中

$$F(a) = \lim_{x\to a^+} F(x)$$

3. 换元后可能化为定积分。

2019数学二选择题第3题4分

下列反常积分发散的是(　　)

(A) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ (B) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ (C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ (D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

解：(D) 发散，因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}d\left(1+x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

反常积分的计算

考点：反常积分。

1. 计算$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3}dx$

解:

$$I=\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x-3)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x-3}{x-1}\bigg|_5^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln 1-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln 2$$

反常积分的计算

考点：变量代换。反常积分。凑积分。换元换限。倍角公式。

$2\sin^2 x=1-\cos 2x$

1. 计算$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$, 故 $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 是反常积分。

令 $\arcsin x = t$, 有 $x = \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t \cdot dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2}\right) \cdot dt$$

$$= \frac{t^2}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot d(\sin 2t)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos 2t \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

2020数学二填空题第13题4分

考点：反常积分。微分方程。初始条件。特征方程。齐次通解。

设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0$, $y'(0)=1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x)dx=$ ________

解：微分的特征方程为 $r^2+2r+1=0$, 得 $r_1=r_2=-1$, 所以 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$,

代入 $y(0)=0$, $y'(0)=1$, 得 $C_1=0$, $C_2=1$,

于是 $y=xe^{-x}$, 代入积分式，有

$$I=\int_0^{+\infty} y(x)dx=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)\big|_0^{+\infty}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[-e^{-x}(x+1)]-\lim_{x\to0^+}[-e^{-x}(x+1)]=1$$

2020数学二选择题第3题4分

考点：反常积分。变量代换。换元换限。反正弦函数。

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\cdot dx = \qquad (\quad)$$

(A) $\frac{\pi^2}{4}$ (B) $\frac{\pi^2}{8}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{8}$

解：令 $t=\arcsin\sqrt{x}$, 则

$$I=\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\cdot dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t\cos t} 2\sin t\cos t\,dt=\frac{\pi^2}{4}$$

一元函数积分学的几何应用

面积。

1. 直角坐标系下的面积公式 $S=\int_{a}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\cdot dx$

2. 极坐标系下的面积公式 $S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\cdot\left|r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right|\cdot dx$

一元函数积分学的几何应用

考点：平面图形面积。三角函数。直角坐标。

1. 求介于直线 $x=0$, $x=2\pi$ 之间，且由曲线 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 所围成的平面图形的面积。

```
In[2]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 Pi}, Mesh → {{0.}},
  MeshFunctions → {Sin[#] - Cos[#] &},
  MeshStyle → Directive[PointSize[0.03], Red]]
```

Out[2]=

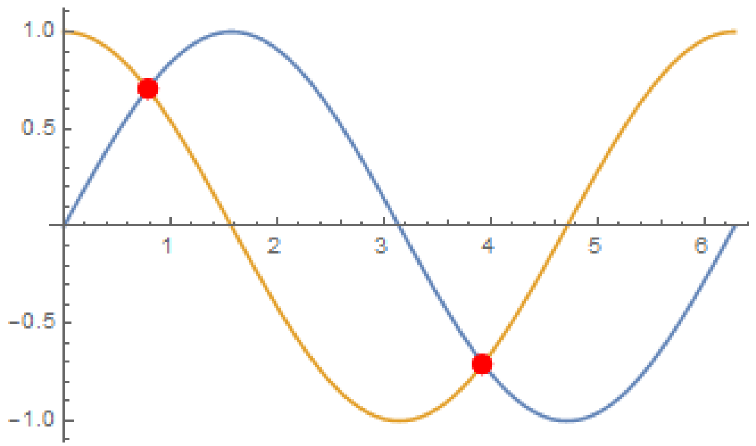


图3.6 second

解:

$$S=\int_{0}^{2\pi}|\sin x-\cos x|dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx$$

$$=(\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

解法二:

$$S=\int_{0}^{2\pi}|\sin x-\cos x|dx$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=2(2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

2019数学二解答题第19题10分

考点：面积。数列极限。变量代换。绝对值。分部积分。指数函数。三角函数。平方差公式。立方差公式。直角坐标。

设 n 是正整数，记 S_n 是 $y=e^{-x}\sin x,(0\le x\le n\pi)$ 的图形与 x 轴所围图形的面积，

1. 求 S_n，
2. 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

解：所求面积为

$$S_n=\int_0^{n\pi}|e^{-x}\sin x|\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\cdot|\sin x|\,dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}e^{-(k\pi+t)}\cdot\left|\sin(k\pi+t)\right|dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} e^{-(k\pi+t)} \cdot \sin t dt = \frac{1}{2}(1+e^{\pi}) \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(k\pi+t)}$$

$$= \frac{1+e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)} \cdot (1-e^{-n\pi})$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1+e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$$

练习。考点：面积。对称。

1. 求曲线$y^2=(1+x^2)^3$所围图形的面积。

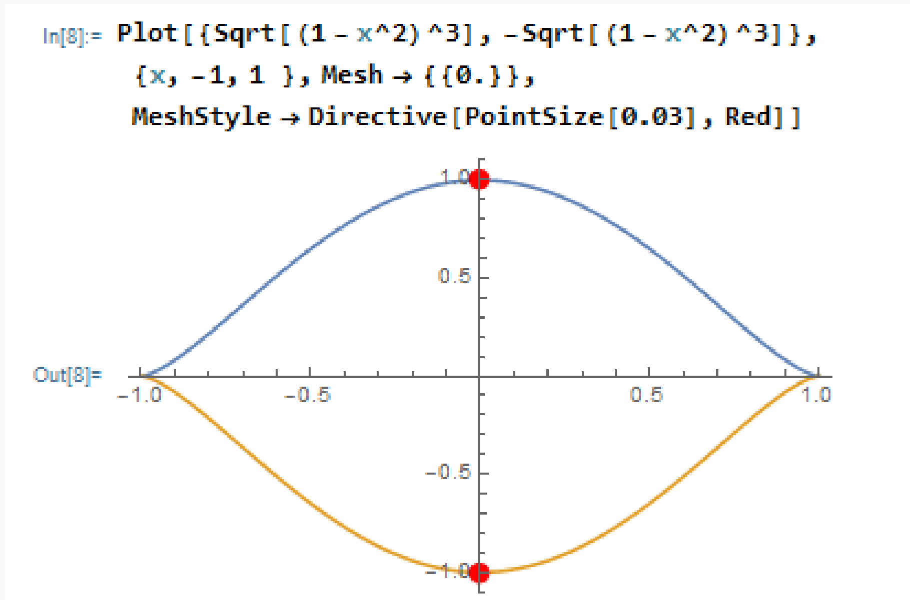


图3.7　none

解：图形关于 x 轴，y 轴均对称，令 $x=\sin t$ 则所求面积为

$$S=4\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$$

练习。

1. 求曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$与坐标轴所围图形的面积。

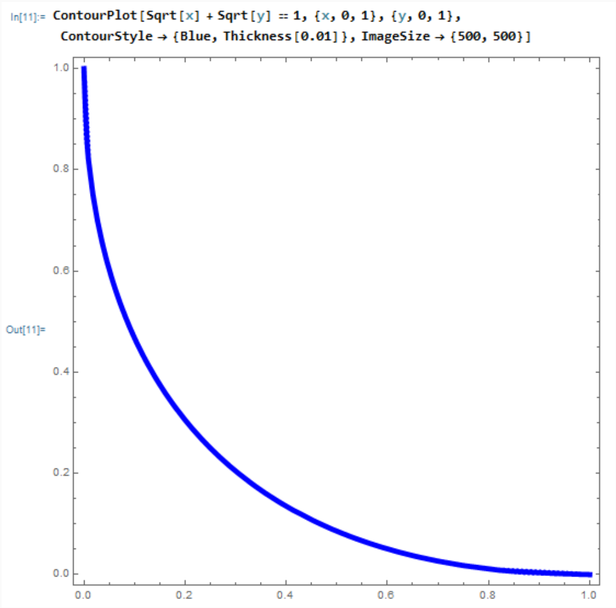


图3.8 none

解:

$$S=\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx$$

$$=\int_0^1 (1-2\sqrt{x}+x)dx=\left(x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}$$

练习。

1. 求星形线 $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$ 所围图形的面积。

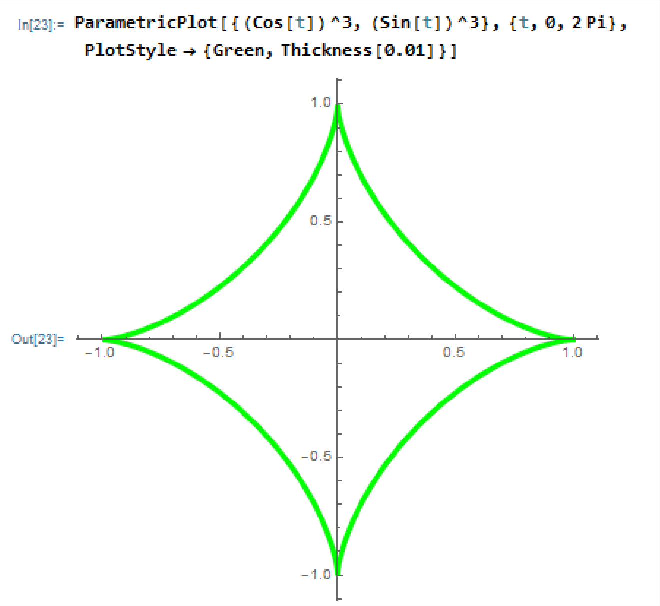


图3.9 none

解：因为 $dx=-3\cos^2 t\sin t dt$，图形关于 x 轴, y 轴均对称，故所求面积为

$$S=4\int_0^1 y dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 t\cdot(-3\cos^2 t\sin t)\cdot dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\cdot dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 t-\sin^6 t\right)dt$$

$$=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\pi$$

练习。

1. 求曲线 $x^3+y^3-3axy=0, a>0$ 所围成的平面图形的面积。笛卡尔叶形线，极坐标方程为 $r=\frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$, $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$,

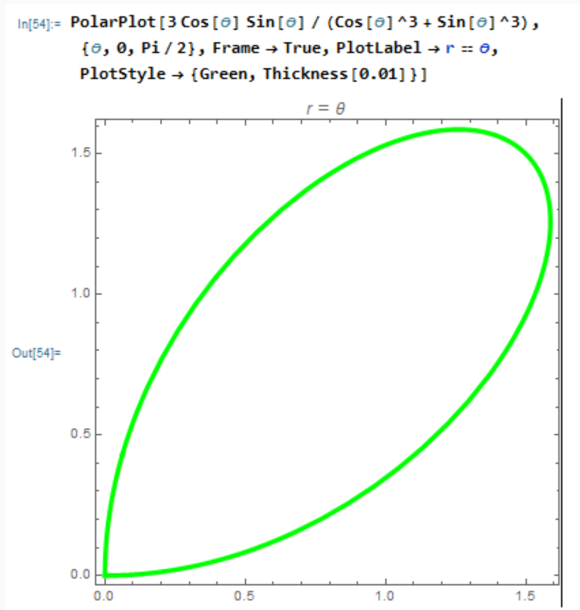


图3.10

解：所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta=\frac{9}{2}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{9}{2}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta d(\tan\theta)}{(1+\tan^3\theta)^2}d\theta=\frac{9}{2}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\tan^3\theta}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{1}{1+\tan^3\theta}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a^2$$

练习。

1. 求阿基米德螺旋线$r=a\theta,a>0$的第一圈与极轴所围成的图形的面积。

```
In[48]:= PolarPlot[θ, {θ, 0, 2 Pi}, Frame → True, PlotLabel → r == θ,
  PlotStyle → {Green, Thickness[0.01]}]
```

Out[48]=

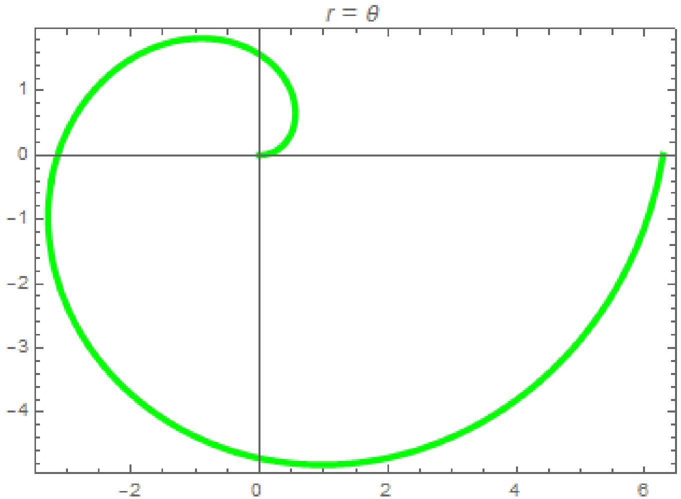


图3.11

解：所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

一元函数积分学的几何应用

旋转体的体积。

1．绕x轴：$V_x=\int_a^b \pi y^2(x)dx$

2．绕y轴：$V_y=\int_a^b 2\pi x|y(x)|dx$，圆柱壳法。

2020数学二解答题第18题10分

设$y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$,

1．求 $y=f(x)$的表达式,

2．求曲线$y=f(x)$, $y=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所形成的体积。

解：(1) 由已知，得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot f(x)=\frac{2x+1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$$

两式消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$，得

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\qquad x\in(0,+\infty)$$

(2) 由 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，得 $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$，所以体积为

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} yx\,dy=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy$$

令$y=\sin t$, 得

$$V=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi^2}{6}$$

考点：旋转体。体积。

1. 求曲线 $y=\sqrt{x(1-x)^9}$ 在 $[0,1]$ 上与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

```
In[58]:= Plot[Sqrt[x (1 - x) ^9], {x, 0, 1},
          PlotStyle → {Green, Thickness[0.01]}]
```

Out[58]=

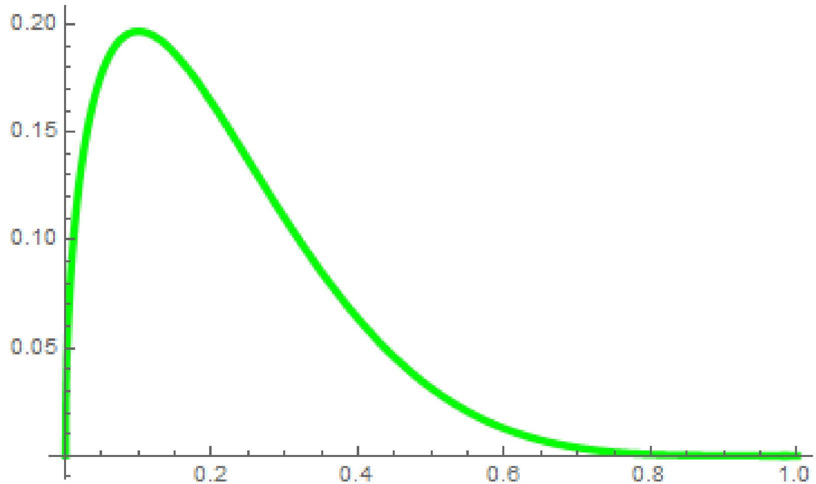


图3.12

解：令$1-x=t$，有

$$V_x=\int_0^1 \pi[y(x)]^2dx=\int_0^1 \pi[\sqrt{x(1-x)^9}]^2dx$$

$$=\pi\int_0^1 x(1-x)^9dx=\pi\int_0^1 (1-t)t^9dt$$

$$=\pi\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{\pi}{110}$$

一元函数积分学的几何应用

平均值。

1.

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

一元函数积分学的几何应用

考点：平均值。零点定理。

1. 已知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$。

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值。

（2）证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点。

解：令$1-x=t$, 有

$$V_x=\int_0^1 \pi[y(x)]^2dx=\int_0^1 \pi[\sqrt{x(1-x)^9}]^2dx$$

$$=\pi\int_0^1 x(1-x)^9dx=\pi\int_0^1 (1-t)t^9dt$$

$$=\pi\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{\pi}{110}$$

一元函数积分学的几何应用

平面曲线的弧长（仅数一、数二）。

1. 若平面光滑曲线由直角坐标方程$y=y(x),(a\le x\le b)$给出，则 $s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$
2. 若平面光滑曲线由参数方程$x=x(t),y=y(t),(\alpha\le t\le\beta)$给出，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$
3. 若平面光滑曲线由极方程$r=r(\theta)$，$(\alpha\le\theta\le\beta)$给出，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

一元函数积分学的几何应用

考点：弧长。变限积分。

1. 曲线 $\int_0^x \tan t\cdot dt,\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$____________

解：令$1-x=t$, 有

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(\tan x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\cdot dx=\ln|\sec x+\tan x|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

一元函数积分学的几何应用

考点：倍角公式。弧长。

1．求曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\cos t}\cdot dt$ 的全长。

解：$y(0)=0$, 故 $x=0$ 对应的点 $(0,0)$ 在曲线上，且要求 $\cos t\geq 0$，曲线 y 在 $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 上存在，则有 $y'=\sqrt{\cos t}$,

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx=\sqrt{1+\cos x}\cdot dx$$

故

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\cos x)^2}\cdot dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\cdot dx$$

$$=4$$

2019数学二填空题第12题4分

考点：弧长。变量代换。

1．设函数 $y=\ln\cos x,\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为 ________

解：由弧长计算公式，有

$$s=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sec x\cdot dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot d(\sin x)=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1-\sin^2 x}\cdot d(\sin x)$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-u^2}\cdot du=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\cdot du$$

$$=\frac{1}{2}[\ln(1+u)-\ln(1-u)]\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln 3}{2}$$

考点：双曲余弦。旋转体。体积。侧面积。极限。

1. 双曲余弦曲线 $y = chx = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t, (t>0)$ 及 $y=0$ 所围成一曲边梯形，该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$。

（1）求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值。（2）计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$

```
In[65]:= Plot[(E^x + E^{-x})/2, {x, -3, 3}, PlotRange → {0, 5},
  AspectRatio → Automatic, PlotStyle → Green]
```

Out[65]=

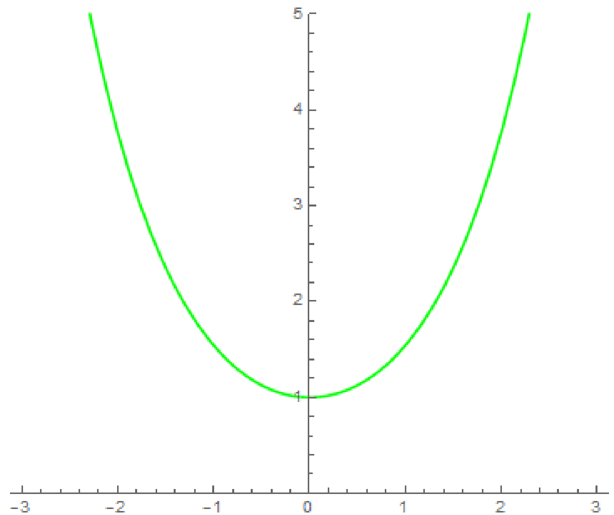


图3.13

解： (1)

$$S(t)=\int_0^t 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$=2\pi\int_0^t \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}dx$$

$$=2\pi\int_0^t \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx$$

$$V(t)=\pi\int_0^t \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx$$

所以， $\frac{S(t)}{V(t)}=2$

(2)

$$F(t)=\pi y^2\Big|_{x=t}=\pi\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int\limits_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=1$$

考点：旋转体。体积。表面积。参数方程。星形线。 Wallis公式。微元法。

1. 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2},\ (0\le x\le 1)$ 与 $x(t)=\cos^3 t,\ y(t)=\sin^3 t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积。

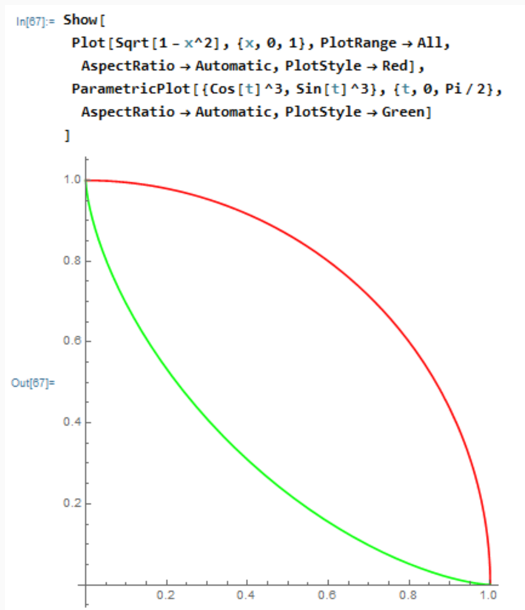


图3.14

解：设 D绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V，表面积为 S, 则

$$V=\frac{2}{3}\pi-\int_0^1 \pi y^2(t)\cdot d(x(t))$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi\sin^6 t\cdot(\cos^3 t)'\cdot dt$$

$$=\frac{2}{3}\pi+3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\cdot d(\cos t)$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{16}{105}\pi=\frac{18}{35}\pi$$

$$S = 2\pi + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(t) \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot dt$$

$$= 2\pi + 2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} \cdot dt$$

$$= 2\pi + 6\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos t \cdot dt = \frac{16}{5}\pi$$

平面上的曲边梯形的形心坐标公式。（仅数一、数二）

1. 设 $D=\{(x,y)|0\leq y\leq f(x),a\leq x\leq b\}$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， D 的形心坐标 $\bar{x},\bar{y}$ 的计算公式为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D} x d\sigma}{\iint\limits_{D} d\sigma}=\frac{\int_{a}^{b} dx\int_{0}^{f(x)} x dy}{\int_{a}^{b} dx\int_{0}^{f(x)} dy}=\frac{\int_{a}^{b} xf(x)dx}{\int_{a}^{b} f(x)dx}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_{D} y d\sigma}{\iint\limits_{D} d\sigma}=\frac{\int_{a}^{b} dx\int_{0}^{f(x)} y dy}{\int_{a}^{b} dx\int_{0}^{f(x)} dy}=\frac{\int_{a}^{b} yf(x)dx}{\int_{a}^{b} f(x)dx}$$

2. 特别地，质量均匀分布的平面薄片的质心，即形心。

考点：形心。对称性。三角代换。 Wallis公式。

1. 求由曲线 $y^2 = x^3 - x^4$ 所围成的平面图形的形心。

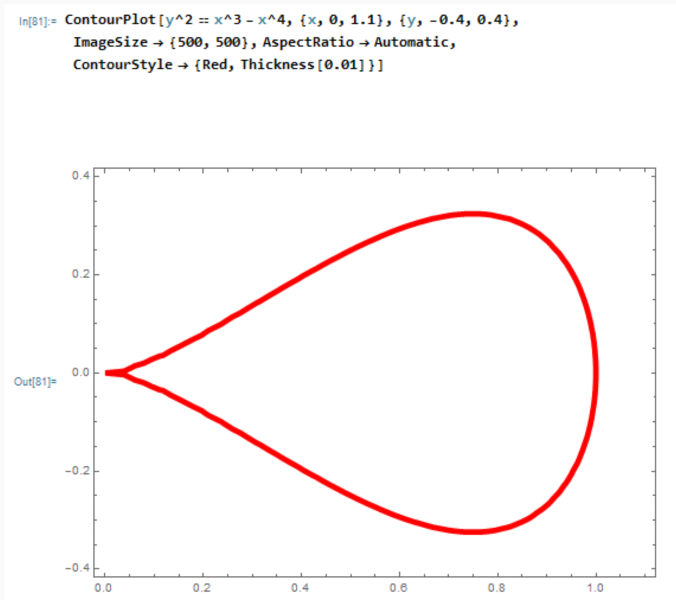


图3.15

解：图形关于 x 轴对称，故 $\bar{y}=0$, 当 $0 \le x \le 1$ 时， $y=\mp\sqrt{x^3-x^4}$, 平面图形的高 $h=2\sqrt{x^3-x^4}$, 令 $x=\sin^2\theta$, 则

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 x\cdot 2\sqrt{x^3-x^4}\cdot dx}{\int_0^1 2\sqrt{x^3-x^4}\cdot dx}=\frac{\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{1-x}\cdot dx}{\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1-x}\cdot dx}$$

$$\int_0^1 x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{1-x} \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cdot \cos\theta \cdot 2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \cdot d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta \cdot d\theta\right)$$

$$= 2\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{128}\pi$$

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1-x} \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot \cos\theta \cdot 2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cdot d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \cdot d\theta\right)$$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}\pi$$

所以， $\bar{x} = \dfrac{\frac{5\pi}{128}}{\frac{\pi}{16}} = \dfrac{5}{8}$, 故形心为 $\left(\dfrac{5}{8}, 0\right)$

一元函数积分学的几何应用

平行截面面积已知的立体体积。

1. 在 $[a,b]$ 区间上，垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得到的截面面积为 x 的连续函数 $S(x)$，则 Ω 的体积为 $V=\int_a^b S(x)dx$

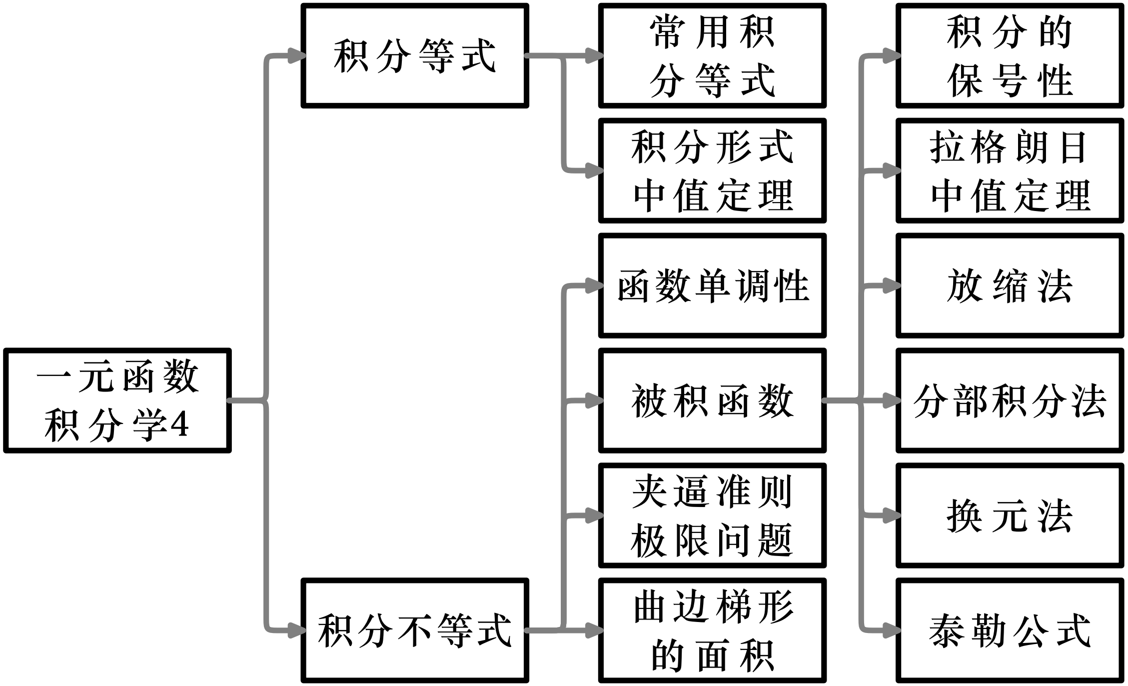
一元函数积分学的几何应用

自己练习。

1. 设一个底面半径为 3 的圆柱体，被一个与圆柱的底面相交、夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 且过底面直径的平面所截，求截下的楔形体的体积。

提示：建立适当的坐标系，垂直于 x 轴的截面是直角三角形，底边长 $\sqrt{3^2-x^2}$，对边长 $\sqrt{3^2-x^2}\cdot\tan\frac{\pi}{4}=\sqrt{3^2-x^2}$，故截面面积 $S=\frac{1}{2}\cdot(3^2-x^2)$，则

$$V=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}\cdot(3^2-x^2)\cdot dx=18$$



一元函数积分学4
积分等式
积分不等式
常用积分等式
积分形式中值定理
函数单调性
被积函数
夹逼准则极限问题
曲边梯形的面积
积分的保号性
拉格朗日中值定理
放缩法
分部积分法
换元法
泰勒公式

一元函数积分学的应用

积分等式与积分不等式。

1. 积分等式。

2. 积分形式的中值定理。

一元函数积分学的应用

考点：偶函数。周期函数。积分等式。奇偶性。周期性。

1. 设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且是以 T 为周期的周期函数，$(n=0,1,2,3,\cdots)$，证明：

$$\int_0^{nT} xf(x)\cdot dx=\frac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\cdot dx,$$

2. 计算

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\cdot dx$$

解： (1) 令 $x = nT - t$, 则

$$L = \int_0^{nT} xf(x)dx = nT\int_0^{nT} f(t)dt - \int_0^{nT} tf(t)dt$$

于是

$$\int_0^{nT} xf(x)dx = \frac{nT}{2}\int_0^{nT} f(x)dx$$

又$f(x+T) = f(x)$，则

$$\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^{T} f(x)dx$$

所以，

$$L = \int_0^{nT} xf(x)dx = \frac{n^2T}{2}\int_0^{T} f(x)dx = R$$

(2) 因为 $|\sin x|$ 是连续的以 π 为周期的偶函数，故

$$I=\int_{0}^{nT} x|\sin x|dx=\frac{n^2\pi}{2}\int_{0}^{\pi}|\sin x|dx=\frac{n^2\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin x dx=n^2\pi$$

考点：偶函数。恒等式。变量代换。定积分性质。连续。换元换限。对称区间。

1. (牢记结论) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[-a, a], (a > 0)$ 上连续， $g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x) + f(-x) = A$, (常数),

   (1) 证明:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cdot g(x) \cdot dx = A \int_{0}^{a} g(x) \cdot dx$$

   (2) 计算

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cdot \arctan e^{x} \cdot dx$$

解： (1) 令 $x=-t$, 则

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx=-\int_{a}^{0} f(-t)g(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-x)g(x)dx$$

于是，有

$$L=\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)g(x)dx$$

$$=\int_{0}^{a} f(-x)g(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)g(x)dx$$

$$=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]\,g(x)\cdot dx=A\int_{0}^{a} g(x)dx=R$$

(2) 令 $f(x)=\arctan e^{x}$, $g(x)=|\sin x|$, 则 $f(x)$, $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续， $g(x)$ 为偶函数。

又 $(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})'=0$, 所以 $\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=A$.

令 $x=0$, 得 $2\arctan 1=A$，故 $A=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $f(x)+f(-x)=\dfrac{\pi}{2}$.

于是，有

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cdot\arctan e^{x}\cdot dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cdot dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot dx=\frac{\pi}{2}$$

考点：罗尔定理。分部积分。反证法。定积分性质。变限积分的定义。变限积分的性质。辅助函数。可积的充分条件。可导。原函数。

1. 设

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\tan x\cdot dx = 0$$

其中 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，
证明：在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2，使得
$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

解：令 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，且 $F(-1)=F(1)=0$。

(反证法) 若 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内无零点，不妨设 $F(x)>0$, $x\in(-1,1)$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\tan x\cdot dx=\int_{-1}^{1}\tan x\cdot d\,[F(x)]$$

$$=F(x)\cdot\tan x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}F(x)\cdot d(\tan x)$$

$$=-\int_{-1}^{1}F(x)\cdot\sec^2 x dx<0$$

与所给条件 $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\tan x dx=0$ 矛盾，故至少存在一点 $x_0\in(-1,1)$，使得 $F(x_0)=0$。

再对 $F(x)$ 分别在区间 $[-1,x_0]$, $[x_0,1]$ 上使用罗尔定理，得到
至 少 存 在 一 点 $\xi_1\in(-1,x_0)$ 和 $\xi_2\in(x_0,1)$， 使 得 $F'(\xi_1)=0$, $F'(\xi_2)=0$, 即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。

一元函数积分学的应用

考点：积分中值定理。积分中值定理的推广。闭区间上连续函数的性质。最值性定理。介值性定理。

1. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，
   证明：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

2. 特别地，当 $g(x) \equiv 1$ 时，即得积分中值定理。

证明：当 $g(x) \equiv 0$ 时，有

$$\int_a^b g(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)\cdot 0dx = 0,$$

此时，ξ 可以是 $[a,b]$ 上任何一点，都会有下式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

成立。

当 $g(x)\not\equiv 0$ 时，必存在 $x_0\in[a,b]$, $g(x_0)$ 或者大于零或者小于零。不妨设 $g(x_0)>0$, 此时由 $g(x)$ 不变号且连续，必有 $\int_a^b g(x)dx>0$.

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的最值性定理，必能取到最小值 m 与最大值 M, 于是对于一切 $x\in[a,b]$，都有 $m\le f(x)\le M$, 则

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$$

于是，有

$$m\int_a^b g(x)dx=\int_a^b mg(x)dx$$

$$\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le\int_a^b Mg(x)dx=M\int_a^b g(x)dx$$

由于 $\int_a^b g(x)dx > 0$，得

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \le M$$

根据介值定理，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = f(\xi)$$

即得

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$$

考点：柯西中值定理。变限积分。

1. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，证明：至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

解：若 $g(x) \equiv 0$，结论显然成立。

若 $g(x) \not\equiv 0$，由于不变号，不防设 $g(x) > 0$，令 $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt$，$G(x) = \int_a^x g(t)dt$，在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理，有

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

即得

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx-0}{\int\limits_a^b g(x)dx-0}=\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}$$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx,\quad \xi\in(a,b)$$

其中 $\int_a^b g(x)dx>0$, 命题得证。

一元函数积分学的应用

积分不等式。用函数的单调性。

1. 首先将某一限（上限或下限）变量化，然后移项构造辅助函数，由辅助函数的单调性来证明不等式。
   适用情况：所给条件为“$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续”。

考点：辅助函数。导数。单调性。

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$0 \le f'(x) \le 1$ 且 $f(0)=0$，证明：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx$$

解：令

$$F(x)=\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2-\int_0^1 f^3(x)dx,\quad 0 \le x \le 1,$$

则有

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right]$$

再令

$$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$$

则有

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]\geq 0$$

所以， $G(x)$单调不减，故 $G(x)\geq G(0)=0$, 从而 $F'(x)\geq 0$, 于是 $F(x)$ 单调不减， $F(1)\geq F(0)=0$, 即

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\geq\int_0^1 f^3(x)dx$$

一元函数积分学的应用

考点：辅助函数。单调性。连续。可导。

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加且连续，证明:

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

解：不等式含有参数 a, b, 将其中的参数 b “变易”为变量 t, 构造如下辅助函数:

$$F(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^x f(x)dx$$

欲使相应的积分有意义，则需 $a \leq t \leq b$, 易知 $F(a)=0$, $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{1}{2}\int_a^t [f(t)-f(x)]dx$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$上单调增加，所以当 $a \leq x \leq t \leq b$时， $f(x) \leq f(t)$，从而 $F'(t) \geq 0$。故 $F(t)$ 在$[a,b]$ 上单调不减， $F(b) \geq F(a) = 0$，即

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

一元函数积分学的应用

处理被积函数。

已知 $f(x) \leq g(x)$，用积分保号性证得

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \quad a < b$$

一元函数积分学的应用

自己练习。不讲。

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意的 $t \in [0,1]$ 以及任意的 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 恒满足不等式

$$f[tx_1 + (1-t)x_2] \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

证明：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

一元函数积分学的应用

处理被积函数。
用拉格朗日中值定理。

1. 用拉格朗日中值定理处理被积函数 $f(x)$，再作不等式，进一步，用积分保号性。适用于所给条件为 "$f(x)$ 一阶可导" 且题中有较简单函数值（甚至为 0 ）的题目。

考点：拉格朗日中值定理

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，证明：$\int_0^2 f(x)dx<3$

解：任取 $x\in(0,2)$，对 $f(x)$ 分别在区间 $[0,x]$ 与 $[x,2]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f(x)=f(0)+xf'(\xi_1),0<\xi_1<x$$

$$f(x)=f(2)+(x-2)f'(\xi_2),x<\xi_2<2$$

又因为 $|f'(x)|\le 1$，即 $-1\le f'(x)\le 1$，且 $f(0)=f(2)=1$，

故由以上两式分别得到 $xf'(\xi_1)\le x$ 和 $(x-2)f'(\xi_2)\le 2-x$，

所以有 $f(x)\le 1+x$，$f(x)\le 3-x$。

若令

$$g(x)=\begin{cases}1+x, & 0\le x\le 1\\ 3-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

则 $f(x)\le g(x)$，$x\in[0,2]$。故

$$\int_0^2 f(x)dx \le \int_0^2 g(x)dx = 3$$

但等号不成立，因为若不然，则有 $f(x) \equiv g(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导，与题设矛盾。因此，有

$$\int_0^2 f(x)dx < 3$$

一元函数积分学的应用

用泰勒公式。

1. 将 $f(x)$ 展开成泰勒公式，再作不等式，进一步，用积分保号性。适用于所给条件为“$f(x)$ 二阶（或更高阶）可导”，且题目中有较简单函数值（甚至为 0）的题目。

一元函数积分学的应用

练习。

1. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\geq 0$, $u(t)$ 为任一连续函数， $a>0$，证明:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt \geq f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right]$$

解：由于 $f''(x)\geq 0$, 则由泰勒公式，有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 \\ &\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

取 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt$, $x=u(t)$, 代入上式，有

$$f[u(t)] \geq f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right]+f'(x_0)[u(t)-x_0]$$

对上式两端从0到a积分，有

$$\int_0^a f[u(t)]dt \geq af\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right] + f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)dt - ax_0\right]$$

$$= af\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right]$$

亦即

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt \geq f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right]$$

2019数学二解答题第21题11分

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$，证明：

1. 存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$；
2. 存在 $\eta \in (0,1)$，使得 $f''(\eta) < -2$。

解： (i) 因为 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 由积分中值定理，存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0)(1-0) = 1$, 即 $f(x_0) = 1$。

又因为 $f(1) = 1$, 所以在区间 $[x_0, 1]$上应用罗尔中值定理，可知存在 $\xi \in (x_0, 1) \subset (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

(ii) 令 $g(x) = f(x) + x^2$, 问题转化为证明存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $g''(\eta) = f''(\eta) + 2 < 0$。容易得到 $g(0) = f(0) + 0 = 0$, $g(1) = f(1) + 1 = 2$, $g(x_0) = 1 + x_0^2$, 所以分别在 $[0, x_0]$, $[x_0, 1]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$g'(\xi_1) = \frac{1 + x_0^2 - g(0)}{x_0 - 0} = \frac{1 + x_0^2}{x_0}, \quad \xi_1 \in (0, x_0)$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(1) - g(x_0)}{1 - x_0} = \frac{2 - (1 + x_0^2)}{1 - x_0} = \frac{1 - x_0^2}{1 - x_0} = 1 + x_0, \xi_2 \in (x_0, 1)$$

再在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，可知存在 $\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,1)$,使得

$$g''(\eta) = \frac{g'(\xi_2) - g'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1 + x_0 - \frac{1+x_0^2}{x_0}}{\xi_2 - \xi_1} \frac{\frac{x_0 - 1}{x_0}}{\xi_2 - \xi_1} < 0$$

因为 $x_0 \in (0,1)$, 所以结论成立。

201

一元函数积分学的应用

用放缩法。利用常见不等式关系处理被积函数，进一步用积分保号性。常见不等关系有：

1. $|\sin x| \leq 1, |\cos| \leq 1$
2. $\sin x \leq x$, $(x \geq 0)$
3. 闭区间上连续函数$f(x)$有, $|f(x)| \leq M, (\exists M > 0)$
4. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, (a, b > 0)$

一元函数积分学的应用

考点：变量代换。分部积分。绝对值。不等式。放大缩小。变限积分。

1. 设函数 $f(x) = \int_x^{x+1} \sin e^t \cdot dt$, 证明：$e^x \cdot |f(x)| \leq 2$

解：被积函数比较复杂，无法积分，通过变量替换可将其变得简单些（此时积分区间的上、下限必然会变得复杂些）然后再做下去。

202

令 $u=e^t$，则有

$$f(x)=\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u}\sin u\cdot du=-\frac{1}{u}\cos u\Big|_{e^x}^{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u du$$

$$=\frac{\cos e^x}{e^x}-\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u du$$

取绝对值，故有

$$|f(x)|\le\left|\frac{\cos e^x}{e^x}\right|+\left|\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}\right|+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\left|\frac{1}{u^2}\cos u\right|\cdot du$$

$$\le\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}du$$

$$\le\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{1}{e^{x+1}}+\frac{1}{e^x}=\frac{2}{e^x}$$

命题得证。

一元函数积分学的应用

用分部积分法。

1．利用分部积分法处理被积分函数，再利用已知条件进一步证明。

一元函数积分学的应用

考点：分部积分法。变限积分。绝对值。不等式。放大缩小。复合函数。积分公式。

1．设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2dt$，证明：当$x>0$时，$|f(x)|\leq\frac{1}{x}$

分析：所证不等式右端分母含有 x，而左端定积分的上、下限均含有 x，若让被积函数 $\sin t^2$ 进入微分符号，则有 $-\frac{1}{2t}d(\cos t^2)$，从而可以获得 $\frac{1}{x}$。这是一个重要的辅助信息，启发我们考虑先对左端的定积分进行分部积分。因此有如下解法。

解：因为

$$f(x)=\int_{x}^{x+1}\sin t^2 dt$$

$$=-\frac{\cos t^2}{2t}\Bigg|_{x}^{x+1}+\frac{1}{2}\int_{x}^{x+1}\cos t^2 d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos x^2}{x}-\frac{\cos(x+1)^2}{x+1}\right]-\frac{1}{2}\int_{x}^{x+1}\frac{\cos t^2}{t^2}dt$$

所以

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\int_{x}^{x+1}\frac{1}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x}$$

一元函数积分学的应用

用换元法。

1. 见到复合函数的积分，考虑换元法。

一元函数积分学的应用

考点：换元法。定积分性质。反函数。反函数求导。变量代换。绝对值。放大缩小。严格单调。不等式。被积函数。抽象函数。

1. 设 $|f(x)| \le \pi,\ f'(x) \ge m > 0,\ (a \le x \le b)$，

   证明：$$\left|\int_a^b \sin f(x) \cdot dx\right| \le \frac{2}{m}$$

证明：当 $a \le x \le b$ 时， $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加，故其存在反函数。记 $t = f(x)$，反函数记 $x = g(t)$，又记 $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 由 $|f(x)| \le \pi$, 则 $-\pi \le \alpha \le \beta \le \pi$，故

$$\int_a^b \sin f(x) \cdot dx = \int_\alpha^\beta \sin t \cdot g'(t) \cdot dt$$

其中 $f'(x) \ge m > 0$, 故 $0 < g'(t) = \dfrac{1}{f'(x)} \le \dfrac{1}{m}$, 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \sin f(x) dx\right| &= \left|\int_\alpha^\beta \sin t \cdot g'(t) dt\right| \\ &\le \left|\int_0^\pi \sin t \cdot g'(t) dt\right| \le \frac{1}{m}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{m}\end{aligned}$$

一元函数积分学的应用

用夹逼准则求解积分极限。

考点：数列。积分型数列。单调性。极限。夹逼准则。放大缩小。三角恒等式。递推公式。积分公式。幂函数性质。有理分式函数的极限公式。

1．计算 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$

分析：此题的关键是建立 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ 的递推公式，利用此递推公式来解题。

解：令 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot dx$，则

$$f(n)+f(n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot(1+\tan^2 x)\cdot dx$$

$$=\frac{1}{1+n}\cdot\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{1+n}$$

因为当 $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$时，有 $\tan^{n+2} x \le \tan^n x \le \tan^{n-2} x$, 所以

$f(n+2) \le f(n) \le f(n-2)$,

于是

$$\frac{1}{1+n} = f(n) + f(n+2) \le 2f(n) \le f(n-2) + f(n) = \frac{1}{n-1}$$

故有 $\frac{n}{2(1+n)} \le nf(n) \le \frac{n}{2(n-1)}$ ，

利用夹逼准则，即得 $I = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \frac{1}{2}$。

一元函数积分学的应用

曲边梯形面积的连续化与离散化问题。

一元函数积分学的应用

曲边梯形面积的连续化与离散化问题。

1. 计算 $\left[\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, 其中[·]为取整函数。

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

总路程。

1. $S=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$, 其中$v(t)$为时间t_1到t_2是的速度函数，积分即得总位移（路程）S.

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

总路程。

1. 质点以速度 $t\sin t^2$ 米/秒作直线运动，则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于 __________米。

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

变力沿直线做功。

1. 设方向沿x轴正向的力函数为$F(x)$, $(a \leq x \leq b)$，则物体沿x轴从点 a 移动到点 b 时，变力 $F(x)$ 所做的功为 $W = \int_a^b F(x)dx$，功的元素 $dW = F(x)dx$。
2. 变力关于路程的定积分就是功。

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

提取物体做功。

1. 将容器中的水全部抽出所做的功为 $W = \rho g \int_a^b xA(x)dx$, 其中 ρ 为水的密度， g 为重力加速度。
2. 功的元素 $dW = \rho g x A(x)dx$ 为位于 x 处厚度为 dx，水平截面面积为 $A(x)$ 的一层水被抽出（路程为 x）所做的功。
3. 抽水做功的特点：力（重力）不变，路程在变。
4. 求解的关键是，确定x处的水平截面面积 $A(x)$，其余的量都是固定的。

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

提取物体做功。

1. 半径为 1 的球沉入水中，球的上顶与水平面齐平，球与水的密度相同，记为 ρ，重力加速度记为 g，现将球打捞出水，至少需做多少功?

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

静水压力。

1. 垂直浸没在水中的平板的一侧受到的水压力为
   $P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]dx$, 其中 ρ 为水的密度， g 为重力加速度。
2. 压力元素
   $dP=\rho g\int_a^b [f(x)-h(x)]dx$ 是平板中矩形条所受到的压力， x 表示水深， $f(x)-h(x)$ 是矩形条的宽度， dx 是矩形条的高度。
3. 水压力问题的特点：压强随水的深度而改变。
4. 求解的关键是确定水深x处的平板的宽度 $f(x)-h(x)$。

2020数学二填空题第12题4分

静水压力。

1. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为 g, 水密度为 ρ, 则三角形平板的一侧受到的压力为 ________

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

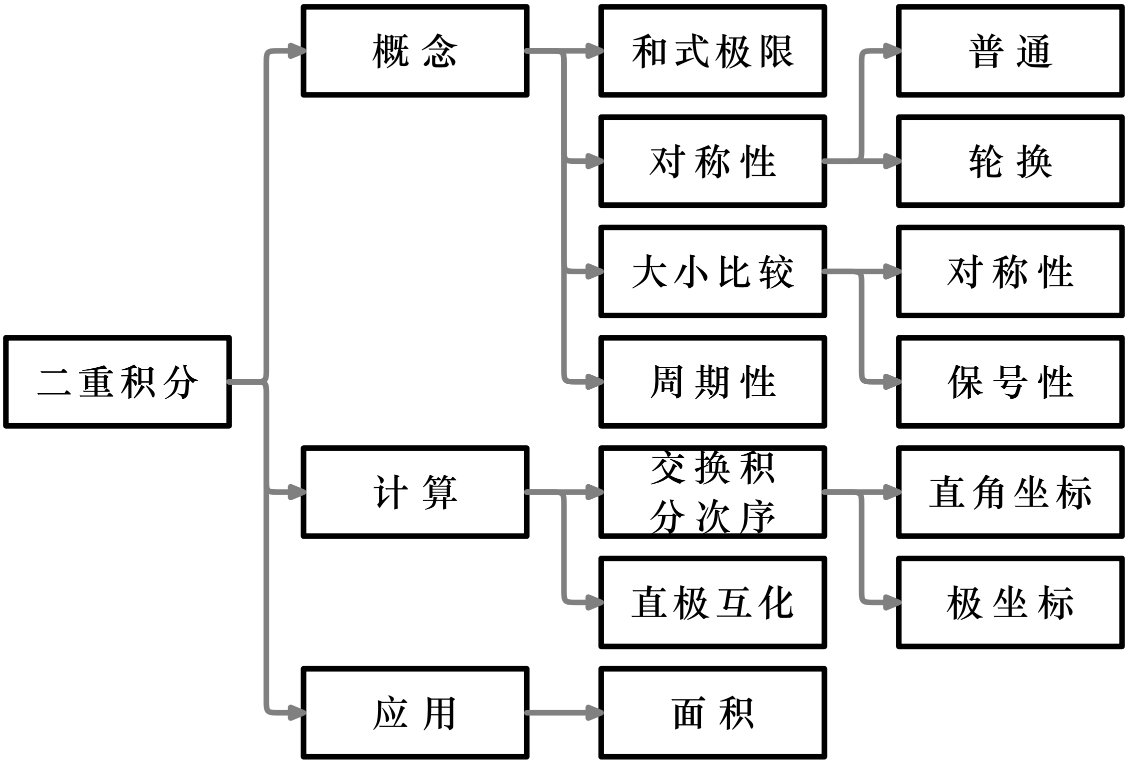
细杆质心。

1. 设直线段上的线密度为$\rho(x)$的细直杆，则其质心为 $\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$

一元函数积分学的物理应用（微元法）（仅数一、数二）

细杆质心。

1. 一根长度为1的细杆位于 x 轴的区间 [0,1] 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细杆的质心坐标 $\bar{x}=$ ________


二重积分
概念
和式极限
对称性
大小比较
周期性
普通
轮换
对称性
保号性
计算
交换积分次序
直极互化
直角坐标
极坐标
应用
面积

03 二重积分的概念

1. 二重积分的几何背景就是曲顶柱体的体积。

2. 用“分割、近似、求和、取极限”的方法求出“曲顶柱体的体积”，这就是二重积分

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$$

04 题型1. 二重积分的概念之和式极限

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}$$

注意：这里的 D 不是一般的平面有界闭区域，而是一个“长方形区域 $[a,b]\times[c,d]$”。

06 例 01

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=(\quad)$$

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

考点：二重积分的概念与将和式转化为积分和的方法。二重积分的和式。二重积分的概念。

解答过程:

设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，记 $f(x,y)=\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$.

用直线 $x=x_i=\frac{i}{n},(i=0,1,2,\cdots,n)$ 与 $y=y_j=\frac{j}{n},(j=0,1,2,\cdots,n)$ 将D分成 n^2 等份，和式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+x_i)(1+y_j^2)}\cdot\frac{1}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+\frac{j^2}{n^2})}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$$

是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的一个二重积分的和式，所以

$$\text{原式}=\iint_D\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$$

故选（D），最后结果为$\frac{\pi}{4}\ln 2$.

例01完毕。

练习题：计算

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$$

07 题型2. 二重积分的概念之普通对称性

(1). 若D关于y轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{if } f(-x,y) = f(x,y) \\ 0, & \text{if } f(-x,y) = -f(x,y) \end{cases}$$

其中D_1是D在y轴左或右侧的部分。

---

(2). 若D关于x轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{if } f(x,-y) = f(x,y) \\ 0, & \text{if } f(x,-y) = -f(x,y) \end{cases}$$

其中D_1是D在x轴上或下侧的部分。

(3). 若D关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{if } f(-x,-y) = f(x,y) \\ 0, & \text{if } f(-x,-y) = -f(x,y) \end{cases}$$

其中D_1是D关于原点对称的半个部分。

---

(4). 若D关于$y = x$对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{if } f(x,y) = f(y,x) \\ 0, & \text{if } f(x,y) = -f(y,x) \end{cases}$$

其中D_1是D关于$y = x$对称的半个部分。

(5). 若D关于$y=a(\neq 0)$对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{if } f(x,2a-y)=f(x,y)\\ 0, & \text{if } f(x,2a-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

其中D_1是D在$y=a$上或下侧的部分。

---

(6). 若D关于$x=a(\neq 0)$对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{if } f(2a-x,y)=f(x,y)\\ 0, & \text{if } f(2a-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$

其中D_1是D在$x=a$左或右侧的部分。

08 题型3. 二重积分的概念之轮换对称性

若将D中的x,y对调后，D不变，则有

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_D f(y,x)dx\,dy$$

注意:

1. 若$f(x,y)+f(y,x)=a$，则

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D[f(x,y)+f(y,x)]dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_D a dx\,dy=\frac{a}{2}\cdot S_D$$

2. 若$f(x,y)+f(y,x)>a$，则

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D[f(x,y)+f(y,x)]dx\,dy>\frac{1}{2}\iint\limits_D a dx\,dy=\frac{a}{2}\cdot S_D$$

09 题型4. 二重积分的概念之二重积分比大小

(1) 用对称性。

(2) 用保号性。

10 例 02

设

$$J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy \qquad (i=1,2,3)$$

其中 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，$D_2=\left\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\right\}$，$D_3=\left\{(x,y)|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\right\}$， 则(　　).

(A) $J_1<J_2<J_3$　(B) $J_3<J_1<J_2$　(C) $J_2<J_3<J_1$　(D) $J_2<J_1<J_3$

考点：二重积分的普通对称性。

解答过程： D_1被直线$y=x$分成两部分D_{11}和D_{12}，（普通对称性，$\sqrt[3]{x-y}=-\sqrt[3]{y-x}$）故

$$J_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy=\iint\limits_{D_{11}+D_{12}}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy=0$$

D_2被直线$y=x^2$分成两部分D_{21}和D_{22}，故

$$J_2=\iint\limits_{D_2}=\iint\limits_{D_{21}+D_{22}}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy=0+\iint\limits_{D_{22}}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy>0$$

(D_{21}关于$y=x$对称，故 $\iint_{D_{21}}=0$; D_{22}上 $x>y$, 由保号性知 $\iint_{D_{21}}>0$)

D_3被直线$y=\sqrt{x}$分成两部分D_{31}和D_{32}，故

$$J_3=\iint\limits_{D_3}=\iint\limits_{D_{31}+D_{32}}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy=0+\iint\limits_{D_{31}}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy<0$$

(D_{32} 关于 $y=x$ 对称，故 $\iint_{D_{32}}=0$; 在 D_{31} 上 $x>y$, 由保号性知 $\iint_{D_{32}}<0$)

综上，有$J_3<J_1<J_2$，选(B).

二重积分的普通对称性。 例02完毕。

11 例19 2016数学三填空题第12题4分

设$D=\{(x,y)||x|\leq y\leq 1,-1\leq x\leq 1\}$, 则

$$I=\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

考点：二重积分的对称性。

解答过程：由被积函数关于两个自变量都为偶函数，并且积分区域关于y轴对称，设 $D_1=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,x\leq y\leq 1\}$, 则

$$I=2\iint_{D_1} x^2e^{-y^2}dxdy=2\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$$

二重积分的对称性。 例19毕。

12 例17 2016数学二解答题第18题10分

计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D}\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$$

其中平面区域D是由直线$y=1,\ y=x,\ y=-x$围成的有界区域。

考点：二重积分的计算之积分区域为三角形区域。极坐标。二重积分的计算。二重积分的对称性。

积分公式表（19）

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

拓展：积分公式表（21）

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

解答过程：法一：极坐标。借助对称性。计算繁琐。

法二：

$$I=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx$$

$$=\int_0^1 (2y-y\pi)dy=1-\frac{\pi}{2}$$

二重积分的计算之积分区域为三角形区域。 例17毕。

拓展：计算

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)dr$$

13 例20 2015数学一选择题第4题4分

设D是第一象限中曲线$2xy=1$, $4xy=1$与直线$y=x$, $y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x,y)$在D上连续，则 $I=\iint_D f(x,y)dxdy=$ (　　　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

考点：二重积分的计算之极坐标。极坐标。

解答过程：画图绘制边界曲线，并将边界曲线方程用$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$代入转换为极坐标方程，于是积分区域用极坐标可以描述为

$$D: \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} \le r \le \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

所以直角坐标与极坐标的变换关系，得

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

故选（B）

二重积分的计算之极坐标。 例20毕。

14 例3 2020数学三解答题第18题10分

设区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,y\ge 0\}$,
$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)dxdy$,
计算$I=\iint_D xf(x,y)dxdy$

考点：二重积分的计算之对称性。三角代换公式。Wallis公式。极坐标。

解答过程：令$\iint_D f(x,y)dxdy=A$，则由已知条件，有

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+xA$$

两边积分，得

$$A=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D y\sqrt{1-x^2}dxdy+\iint_D Axdxdy$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy=\frac{3\pi}{16}$$

于是 $I=\iint_D x\left[y\sqrt{1-x^2}+x\frac{3\pi}{16}\right]dxdy=\frac{3\pi^2}{128}$

用极坐标　　例03毕。

练习题 1： $\iint_D x\left[y\sqrt{1-x^2}+x\frac{3\pi}{16}\right]dxdy,\ D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,y\ge 0\}$

15 例 03

证明

$$\iint\limits_{D}\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)dxdy \geq 2\pi^{2}$$

其中$D=\{(x,y)|0\leq x\leq \pi,0\leq y\leq \pi\}$.

考点：二重积分的轮换对称性。Cauchy-Schwarz不等式。

解答过程：积分区域D关于$y = x$对称，

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D} \left(e^{\sin y} + e^{-\sin x}\right) dxdy \\
&= \iint\limits_{D} e^{\sin y} dxdy + \iint\limits_{D} e^{-\sin x} dxdy \\
&= \iint\limits_{D} e^{\sin x} dxdy + \iint\limits_{D} e^{-\sin x} dxdy \qquad \text{(轮换对称性)} \\
&= \iint\limits_{D} \left(e^{\sin x} + e^{-\sin x}\right) dxdy \\
&\geq \iint\limits_{D} 2dxdy = 2\pi^2 \ \text{(Cauchy-Schwarz不等式)}
\end{aligned}
$$

例03证毕。

16 题型5. 二重积分的概念之周期性

若化为累次积分后，一元积分有用周期性的机会，则可化简计算。

17 例 04

设$D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，计算

$$I=\iint\limits_D\left|\cos(x+y)\right|d\sigma$$

考点：二重积分之被积函数的周期性。

解答过程：因为$|\cos(a+y)|$ 是 $|\cos y|$ 的水平平移, 且 $|\cos y|$ 周期为 π ,所以

$$I=\int_0^\pi dx\int_0^\pi|\cos(x+y)|dy$$

$$=\int_0^\pi dx\int_0^\pi|\cos y|dy$$

$$=2\int_0^\pi dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y dy=2\int_0^\pi dx=2\pi$$

二重积分之被积函数的周期性。 例04完毕。

18 练习题 05（仅数一）

设$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi,0\le z\le\pi\}$，计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left|\cos(x+y+z)\right|dv$$

解答提示：$2\pi^2$，因为$|\cos(a+z)|$是$|\cos z|$的水平平移。

19 二重积分的计算

1. 直角坐标系与交换积分顺序。
2. 极坐标系与交换积分顺序。
3. 直角坐标系与极坐标系互相转化。

20 题型1. 二重积分的计算之直角坐标系与交换积分顺序

(1)当积分区域D为X型区域：$\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b$时，

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$$

(2)当积分区域D为Y型区域：$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$时，

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

注意：上限大于等于下限。

21 例18 2016数学三选择题第3题4分

设

$$J_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt[3]{x-y}\,dxdy \quad (i = 1,2,3)$$

其中 $D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$,
$D_2 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$,
$D_3 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$, 则 (　　)

(A) $J_1 < J_2 < J_3$　(B) $J_3 < J_1 < J_2$　(C) $J_2 < J_3 < J_1$　(D) $J_2 < J_1 < J_3$

考点：二重积分的积分性质。

解答过程：画图，并由被积函数在积分区域内的取值的正负性，并借助积分性质，知选（B）。

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:= Integrate [ CubeRoot [ x - y ], { x, 0, 1 }, { y, 0,
1 } ] Shift+Enter
```

二重积分的积分性质。　　例18毕。■■■

22 例1 2020数学二填空题第10题4分

$$I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}dx=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

考点：二重积分的计算之交换积分次序。定积分换元法之凑微分。根号下是3次多项式，根号外面是2次多项式。

解答过程：$I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1\sqrt{x^3+1}x^2dx=\frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{2}{9}$

例01毕。■■■

22 例1 2018数学二选择题第6题4分

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{2-x^2} (1-xy)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} (1-xy)dy = (\quad)$$

$(A)\ \frac{5}{3}$ $(B)\ \frac{5}{6}$ $(C)\ \frac{7}{3}$ $(D)\ \frac{7}{6}$

考点：二重积分的计算之交换积分次序。

解答过程：

例01毕。■■■

23 题型2. 二重积分的计算之极坐标系与交换积分顺序

(1) 若极点O在积分区域D的外部，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr$$

(2) 若极点O在积分区域D的边界上，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr$$

(3) 若极点O在积分区域D的内部，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr$$

注意：正确写出极坐标系下边界曲线的方程。确定极角的范围。

24 题型3. 二重积分的计算之直极互换

注意：

1. 关于积分区域D：

（1）图形变换（平移变换、对称变换、伸缩变换）。

（2）直角坐标系下的方程给出（已知直线、未知直线）。

（3）极坐标系下的方程给出（已知曲线、未知曲线）。

（4）参数方程给出（已知曲线、未知直线）。

（5）动区域（含有其他参数）。

2 关于被积函数$f(x,y)$：

（1）分段函数（含绝对值）。（2）最大最小值函数。

（3）取整函数。（4）符号函数。（5）抽象函数。

（6）复合函数$f(u), u=u(x,y)$。（7）偏导函数 $f''_{xy}(x,y)$。

3 换元法：

（1）一元函数换元法。（2）二重积分换元法。（3）三重积分换元法（仅数一）。

3-1-1-1. 平移变换。

（a）将函数$y=f(x)$的图像沿x轴向左平移$x_0(x_0>0)$个单位长度，得到函数$y=f(x+x_0)$的图像。

将函数$y=f(x)$的图像沿x轴向右平移$x_0(x_0>0)$个单位，得到函数$y=f(x-x_0)$的图像。

（b）将函数$y=f(x)$的图像沿y轴向上平移$y_0(y_0>0)$个单位，得到函数$y=f(x)+y_0$的图像。

将函数$y=f(x)$的图像沿y轴向下平移$y_0(y_0>0)$个单位，得到函数$y=f(x)-y_0$的图像。

3-1-1-2. 对称变换。

（a）将函数$y=f(x)$的图像关于x轴对称，得到函数$y=-f(x)$的图像。

（b）将函数$y=f(x)$的图像关于y轴对称，得到函数$y=f(-x)$的图像。

（c）将函数$y=f(x)$的图像关于原点对称，得到函数$y=-f(-x)$的图像。

（d）将函数$y=f(x)$的图像关于直线$y=x$对称，得到函数$y=f^{-1}(x)$的图像。

（e）保留函数$y=f(x)$的图像在x轴及x轴上方的部分，把x轴下方的部分关于x轴对称到x轴上并去掉原来下方的部分，得到函数$y=|f(x)|$的图像。

（f）保留函数$y=f(x)$的图像在y轴及y轴右侧的部分，把y轴右侧的部分关于y轴对称到y轴左侧并去掉原来y轴左侧的部分，得到函数$y=f(|x|)$的图像。

3-1-1-3. 伸缩变换。

（a）水平伸缩。

$y=f(kx)(k>1)$的图像，可由$y=f(x)$的图像上每点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{k}$倍且纵坐标不变得到。

$y=f(kx)(0<k<1)$的图像，可由$y=f(x)$的图像上每点的横坐标伸长到原来的$\frac{1}{k}$倍且纵坐标不变得到。

（b）垂直伸缩。

$y=kf(x)(k>1)$的图像，可由$y=f(x)$的图像上每点的纵坐标伸长到原来的k倍且横坐标不变得到。

$y=kf(x)(0<k<1)$的图像，可由$y=f(x)$的图像上每点的纵坐标缩短到原来的k倍且横坐标不变得到。

3-1-2. 直角坐标系下的方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画出。

1. 比如：$x+y=1$, $x^2+y^2=1$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$。

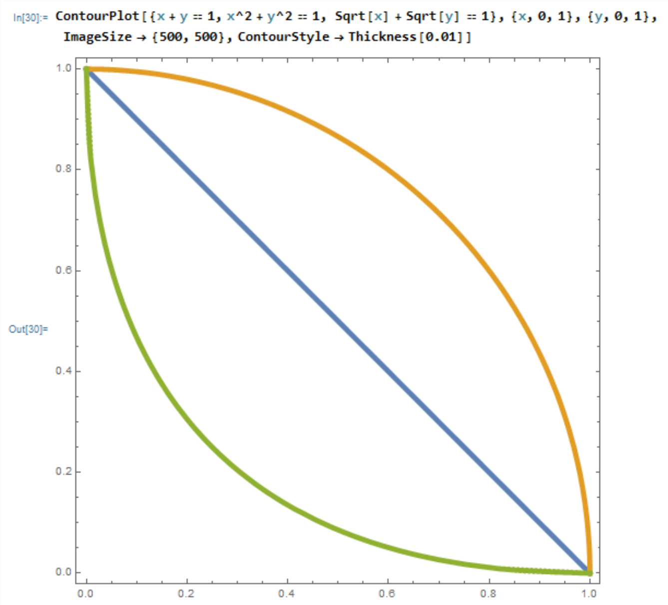


图25.1　second

3-1-2. 直角坐标系下的方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画出。

1. 1. 三次抛物线 $y = ax^3$ 2. 半立方抛物线 $y^2 = ax^3$ 3. 概率曲线 $y = e^{-x^2}$

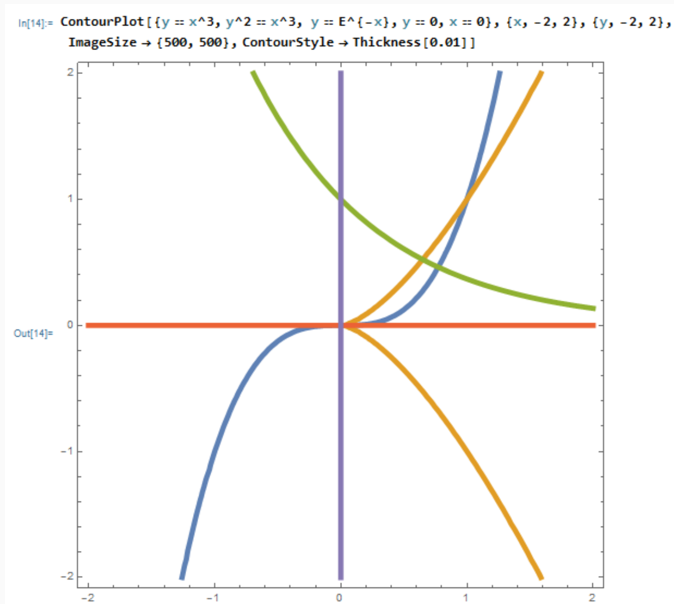


图25.2 second

3-1-2. 直角坐标系下的方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画出。

1. 箕舌线 $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$,　　蔓叶线 $y^2(2a-x) = x^3$

```
In[29]:= ContourPlot[{y == 8 / (x^2 + 4), y^2 (2 - x) == x^3, y == 0, x == 0, y == x}, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, ImageSize → {500, 500}, ContourStyle → Thickness[0.01], AspectRatio → Automatic]
```

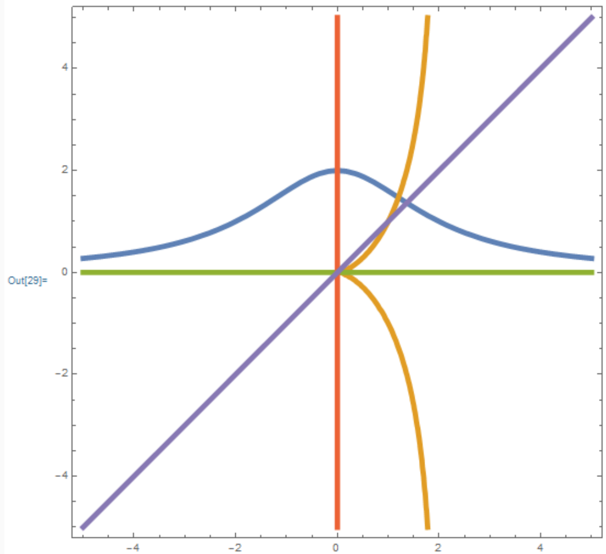


图25.3　second

3-1-2. 直角坐标系下的方程给出。

（b）未知曲线。　（i）描绘特殊点（定义域、值域）。　（ii）用图形变换。　（iii）用导数工具（一阶导数确定单调性、驻点。二阶导数确定凹凸性、拐点等）。

1. 比如：$y^2 = (1 - x + x^2)^3$。

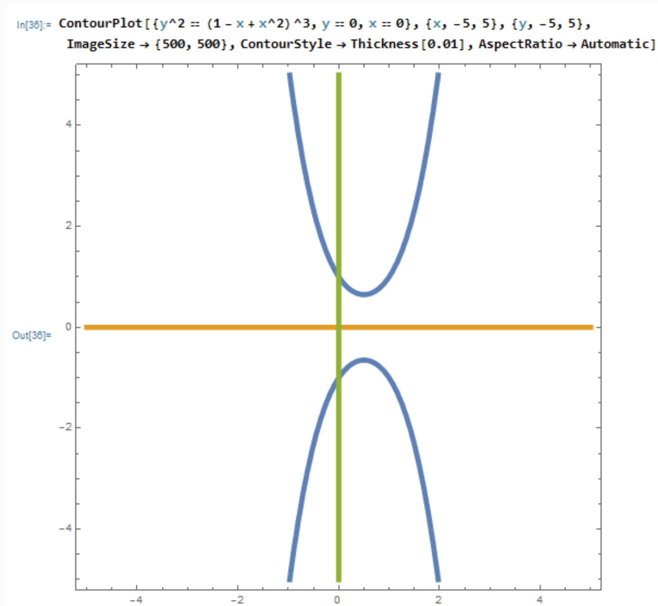


图25.4　second

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1．心形线（外摆线的一种）　（1）$\rho = a(1-\cos\theta)$,

In[50]:= ParametricPlot[a (1 - Cos[θ]) {Sin[θ], Cos[θ]}, {a, 0, 1}, {θ, -Pi, Pi}, Mesh → False]

Out[50]=

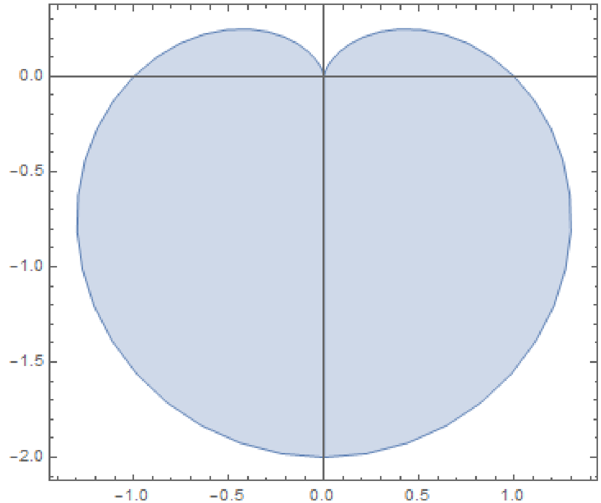


图25.5　second

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如:

1．心形线（外摆线的一种）　（2）$\rho = a(1 + \cos\theta)$,

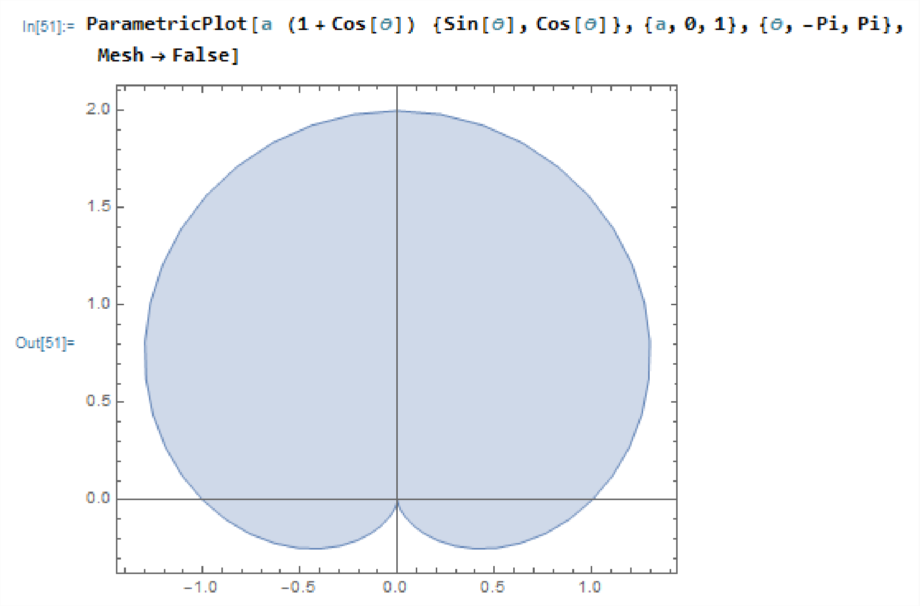


图25.6　second

3-1-3. 极坐标方程给出。

(a) 已知曲线。可以直接画图。比如:

1. 阿基米德螺旋线 $\rho = a\theta$,

```
In[64]:= PolarPlot[θ, {θ, 0, 2 Pi}, Frame → True, PlotLabel → r == θ,
          PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

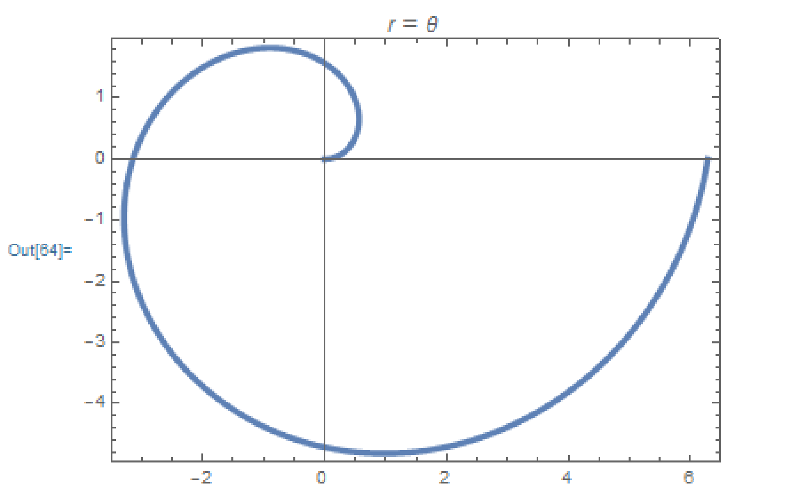


图25.7 second

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1．对数螺旋线 $\rho=e^{a\theta}$，

```
In[73]:= PolarPlot[E^θ, {θ, 0, 2 Pi}, Frame → True, PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

Out[73]=

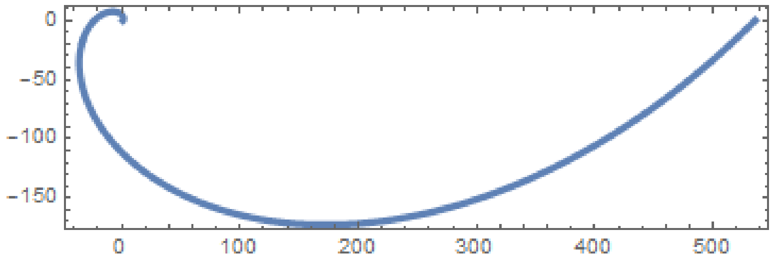


图25.8

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1. 双曲螺旋线 $\rho\theta = a$,

```
In[75]:= PolarPlot[1/θ, {θ, 0.001, 2 Pi}, Frame → True,
          PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

Out[75]=

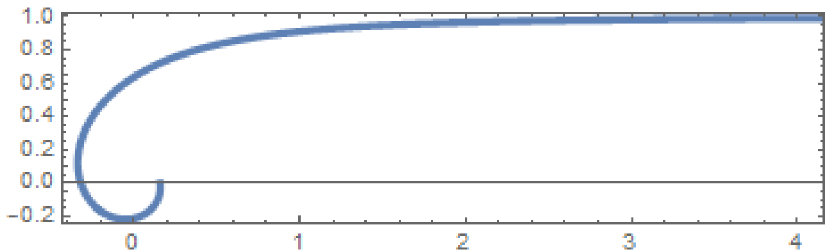


图25.9

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1. 伯努力双纽线 (1) $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$,
2. 关于伯努利双纽线的描述首见于1694年，雅各布·伯努利将其作为椭圆的一种类比来处理。椭圆是由到两个定点距离之和为定值的点的轨迹。而卡西尼卵形线则是由到两定点距离之乘积为定值的点的轨迹。当此定值使得轨迹经过两定点的中点时，轨迹便为伯努利双纽线。

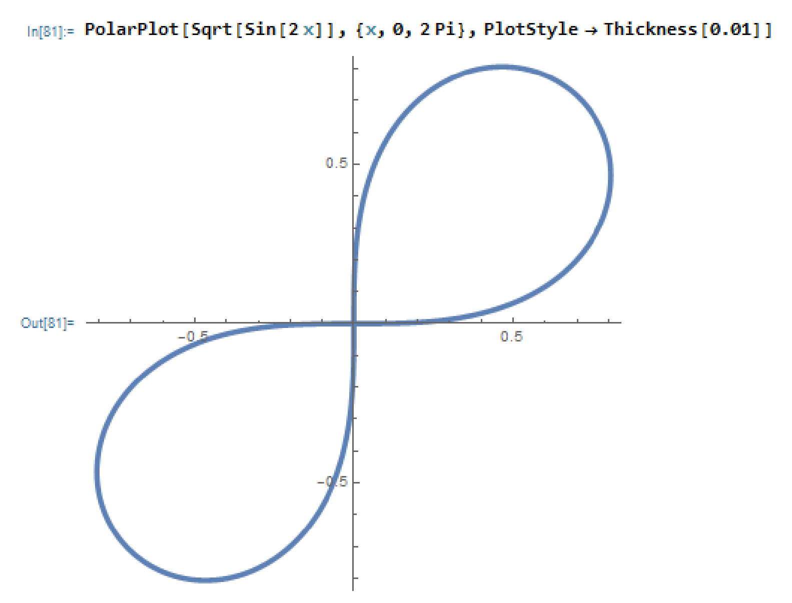


图25.10

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1. 伯努力双纽线 (2) $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$,

```
In[84]:= PolarPlot[Sqrt[Cos[2 x]], {x, 0, 2 Pi},
          PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

Out[84]=

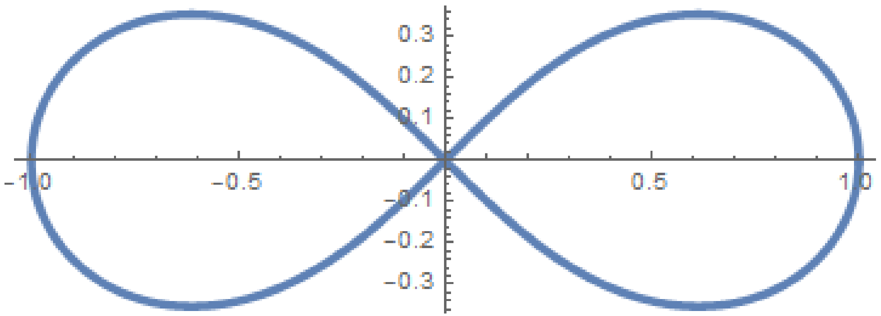


图25.11

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1．三叶玫瑰线 (1) $\rho = a\cos 3\theta$

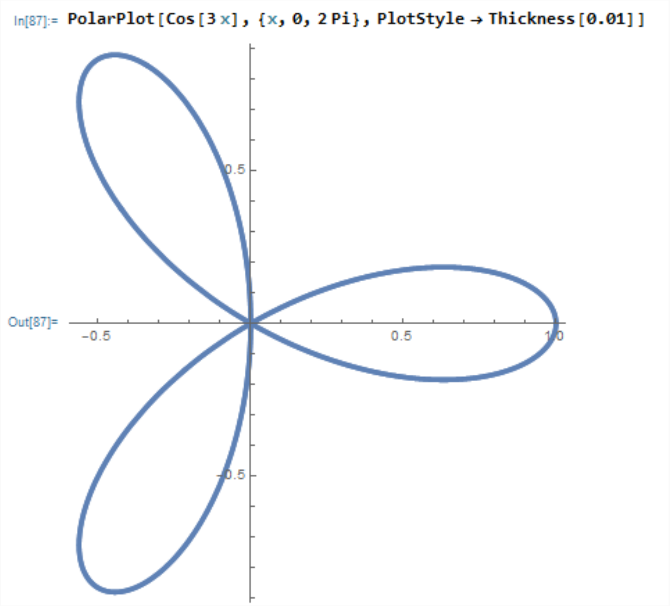


图25.12

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1． 三叶玫瑰线 (2) $\rho = a\sin 3\theta$,

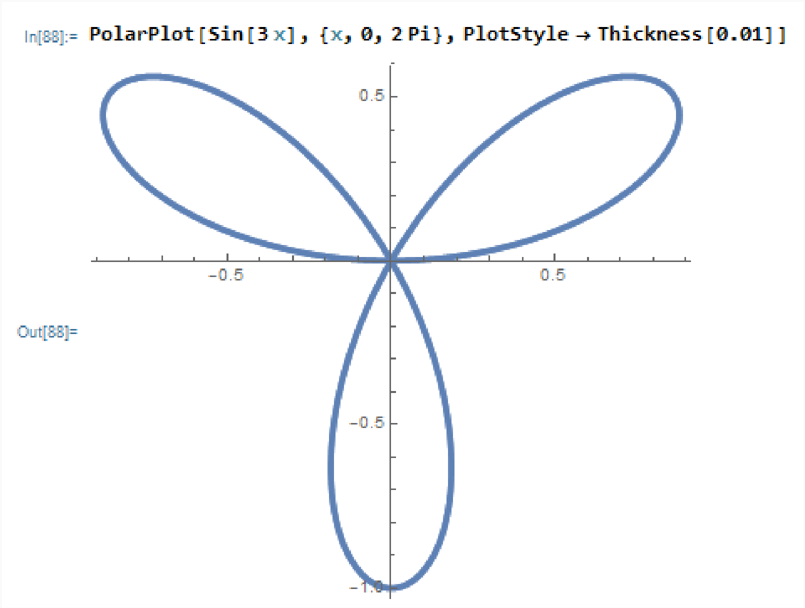


图25.13

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1. 四叶玫瑰线 (1) $\rho = a\sin 2\theta$,

```
In[89]:= PolarPlot[Sin[2 x], {x, 0, 2 Pi}, PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

Out[89]=

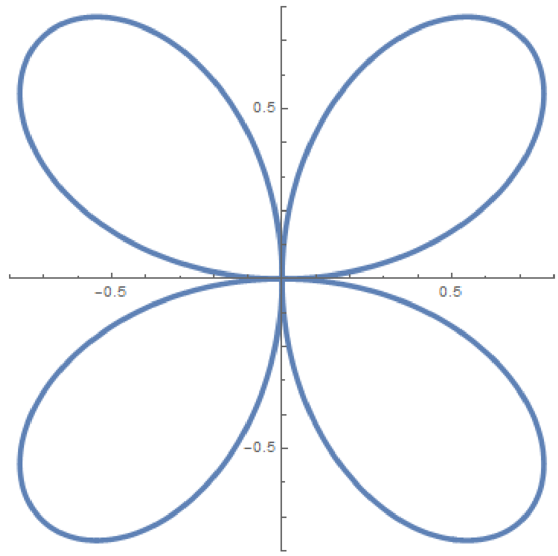


图25.14

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。比如：

1. 四叶玫瑰线 (2) $\rho = a\cos 2\theta$,

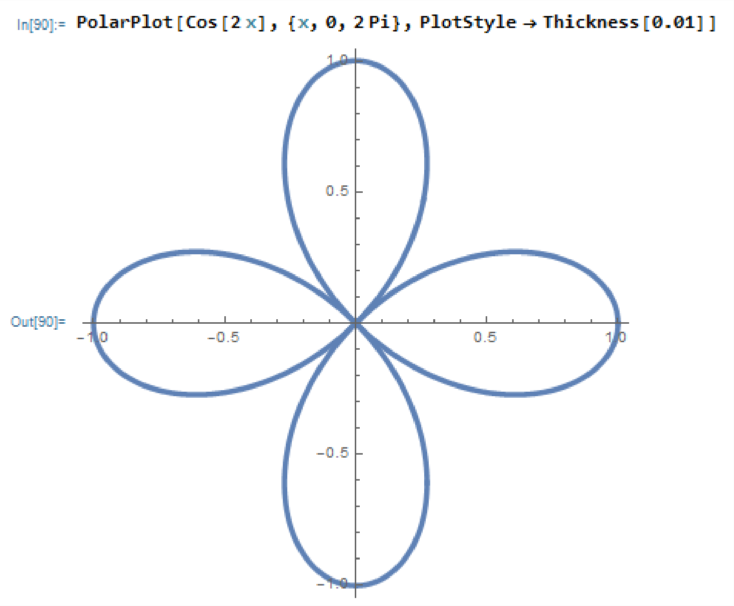


图25.15

3-1-3. 极坐标方程给出。

（a）已知曲线。可以直接画图。

注意：见到平方和x^2+y^2化为极坐标方程。比如：

伯努力双纽线 (2) $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, 化为 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$

3-1-3. 极坐标方程给出。

（b）未知曲线。

1. 描绘特殊点。 2. 用图形变换。 3. 极坐标与直角坐标相互转化。

3-1-4. 参数方程给出。

（a）已知曲线。直接画图。比如：

1. 笛卡尔叶形线 $x=\frac{3at}{1+t^3}$，　　$y=\frac{3at^2}{1+t^3}$

2. 著名科学家笛卡儿，根据他所研究的一簇花瓣和叶形曲线特征，列出了 $x^3+y^3-3axy=0$ 的方程式，这就是现代数学中有名的“笛卡儿叶线”(茉莉花瓣曲线)。

```
In[93]:= ParametricPlot[{3 t / (1 + t^3), 3 t^2 / (1 + t^3)},
          {t, -100, 100}, PlotRange → 3, PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

Out[93]=

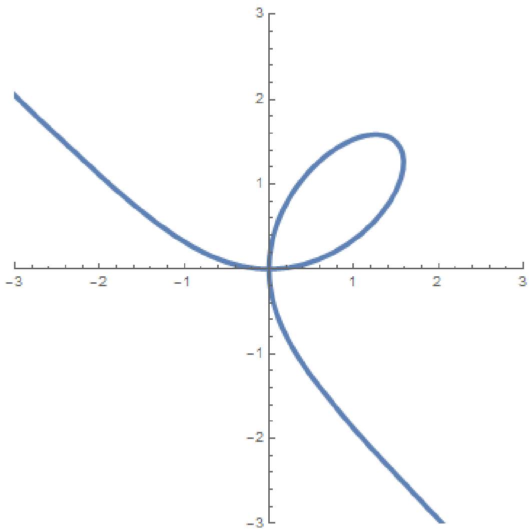


图25.16

3-1-4. 参数方程给出。

（a）已知曲线。直接画图。比如：

1. 星形线（内摆线的一种） $x = a\cos^3\theta,\qquad y = a\sin^3\theta$

```
In[100]:= ParametricPlot[{Cos[t]^3, Sin[t]^3}, {t, -100, 100},
  PlotRange → 1, PlotStyle → {Thickness[0.01], Green}]
```

Out[100]=

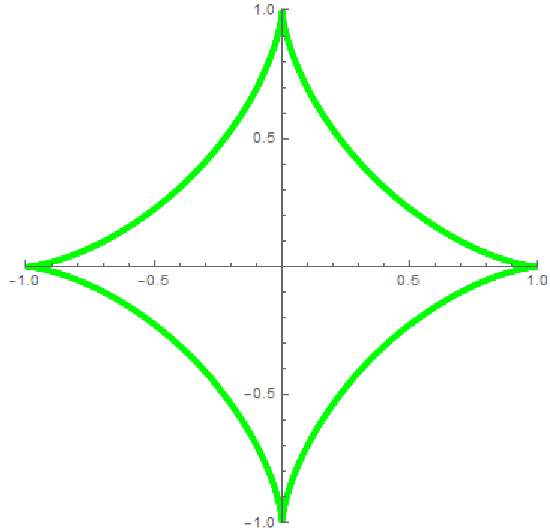


图25.17

3-1-4. 参数方程给出。

(a) 已知曲线。直接画图。比如：

1. 摆线 $x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta)$

```
In[105]:= ParametricPlot[{t - Sin[t], 1 - Cos[t]}, {t, 0, 2 Pi},
 PlotStyle → {Thickness[0.01], Green}]
```

Out[105]=

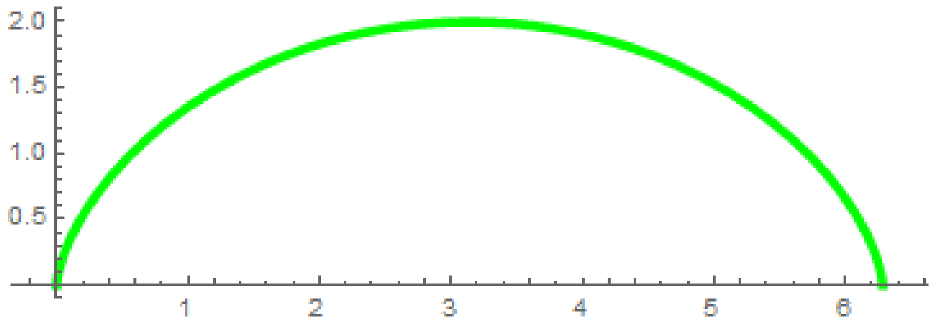


图25.18

3-1-4. 参数方程给出。

(b) 未知曲线。

(i) 描点法。

(ii) 化为直角坐标系下的方程或者极坐标系下的方程。

3-1-4. 参数方程给出。

3-1-5. 动区域（含其他参数）。

3-2. 关于被积函数$f(x,y)$:

1. 分段函数（含绝对值）。
2. 最大最小值函数。
3. 取整函数。
4. 符号函数。
5. 抽象函数。
6. 复合函数$f(u), u=u(x,y)$。
7. 偏导函数 $f''_{xy}(x,y)$。

3-3. 一元函数积分换元法（拼凑系数法、三角代换法、Wallis公式等）。二重积分换元法。三重积分换元法（仅数一）。

（i）若$x=\phi(t)$单调、导数存在且连续，$x=\phi(t)$, $dx=\phi'(t)dt$, $a=\phi(\alpha)$, $b=\phi(\beta)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

（ii） 若$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 是(x,y)面 到(u,v)面 的 一 对 一 映 射 ，且$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 存在一阶连续偏导数，

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

则

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\cdot|J|\cdot dudv$$

注意：若$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$，则

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{\rho\theta}} f[\rho\cos\theta,\rho\sin\theta]\cdot\rho d\rho d\theta$$

即直角坐标化为极坐标的换元过程。

25 例 01

计算

$$I=\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{y}{1+x^2+y^2}dx.$$

考点：二重积分的计算之交换积分次序。

解答过程：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{y}{1+x^2+y^2} dx \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{y}{1+x^2+y^2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x^2+y^2)\Big|_0^x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\ln(1+2x^2) - \ln(1+x^2)\right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \frac{1+2x^2}{1+x^2} dx
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\frac{1+2x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x}{2}\ln\frac{1+2x^2}{1+x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{(1+2x^2)(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}+\int_0^1\frac{dx}{1+2x^2}-\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$$

二重积分的计算之交换积分次序。 例01毕。

26 例11 2018数学二解答题第17题10分

设平面区域D由曲线 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le 2\pi$ 与 x 轴围成，计算二重积分

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy$$

考点：二重积分的计算。二重积分。外摆线的一拱。参数方程。

积分公式表(95) $\int \sin^3 x dx$,

积分公式表(96) $\int \cos^3 x dx$

解答过程：

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:=ParametricPlot[ {t - Sin [t], 1-Cos [t] }, {t, 0, 2Pi
},
PlotStyle -> Thickness [0.01]] Shift+Enter
```

设曲线为 $y = y(x)$，则有

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{y(x)} (x+2y)dy \\
&= \int_0^{2\pi} (xy + y^2)dx \\
&= \int_0^{2\pi} [(t-\sin t)(1-\cos t)^2 + (1-\cos t)^3]dt \\
&= 5\pi + 3\pi^2
\end{aligned}
$$

二重积分的计算之外摆线方程。 例11毕。

27 例15 2017数学三解答题第16题10分

计算二重积分

$$I=\iint_{D}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy$$

其中 D 是由第一象限中曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域。

考点：二重积分的计算之积分区域为无界区域。二重积分的计算。积分区域为无界区域。裂项法。

积分公式表（19）

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

解答过程：

$$I=\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)dx=\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi$$

二重积分的计算之无界区域。 例15毕。

28 例12 2018数学三解答题第16题10分

设平面区域D由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与 $y=\sqrt{3}x$ 和 y 轴围成，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D x^2dxdy$$

考点：二重积分的计算。三角代换。倍角公式。

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$,

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$,

(3) $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$,

(4) $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$,

解答过程:

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1] :=Plot[ {Sqrt[3-3x^2] , Sqrt[3]x, 0 } , {x, -2, 2 } ]
Shift+Enter
```

画图，交点坐标 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$，于是，有

$$I=\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} dy$$

$$=\sqrt{3}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}dx-\sqrt{3}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3dx$$

$$(x=\sin t,dx=\cos t dt)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{32}-\frac{1}{16}\right)$$

二重积分的计算之三角代换。 例12毕。

29 例 02

计算

$$I=\iint_{D}(1+x)\sqrt{1-\cos^{2}y}\,dxdy$$

其中D是由直线 $y=x+3$, $y=\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$ 及 $y=-\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域。

考点：二重积分的计算之Y型区域。

解答过程：Y型区域，先 x 后 y 的积分次序。

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{y-3}^{2y+5}(1+x)\sqrt{1-\cos^2 y}\cdot dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 y}\cdot\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{y-3}^{2y+5} dy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}y^2+14y+16\right)\sqrt{1-\cos^2 y}\cdot dy$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3y^2+32)\sin y\cdot dy=3\pi+26$$

二重积分的计算之Y型区域。

例02毕。

30 例 03

设区域D: $ay \le x^2 + y^2 \le 2ay(a > 0)$，计算

$$I = \iint\limits_{D} (x+y)^2\,dxdy$$

考点：二重积分的计算之Y型区域。 Wallis公式。

解答过程：积分区域 D 关于 y 轴对称，被积函数 $f(x,y)=(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy$ 的第一项关于 x 是偶函数，第二项关于 x 是奇函数。记 D_1 为 D 在第一象限的部分，故根据对称性有

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy + 2\iint\limits_D xydxdy \\
&= 2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\sin\theta}^{2a\sin\theta} r^3 dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^4}{4}\right|_{a\sin\theta}^{2a\sin\theta} d\theta \\
&= \frac{15a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta \\
&= \frac{15a^4}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{45\pi}{32}a^4
\end{aligned}
$$

Wallis公式

例03毕。

31 例 04

计算

$$I=\int_{-\sqrt{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dy+\int_{0}^{2}dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy$$

考点：二重积分的计算之极坐标系。 Wallis公式。直角坐标转化为极坐标。

解答过程：由于被积函数 $f(x,y)=x^2+y^2$，且由积分限所确定的积分区域的边界曲线为直线与 $y=-x$ 与圆弧 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及 $y=\sqrt{4-x^2}$，故采用极坐标计算比较方便。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2\cdot rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\theta)d\theta+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2^4$$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\pi=\frac{9\pi}{4}$$

二重积分的计算之极坐标系。 例04毕。

32 例16 2016数学一解答题第15题10分

计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D} x dx dy$$

其中平面区域

$$D=\left\{(r,\theta)|2\leq r\leq 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

考点：二重积分的计算之积分区域为心形线和圆围成的区域。极坐标。Wallis公式 ($n=2,3,4$)。二重积分的对称性。Wallis公式。心形线 $r=1-\cos\theta$，$r=1+\cos\theta$。

积分公式表（94）

$$\int\cos^2 x dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

积分公式表（96）

$$\int\cos^n x dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx$$

解答过程:

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1:= PolarPlot[ { 2, 2(1+Cos[x] ) } ,  {x, -Pi/2,Pi/2 } ]
Shift+Enter
```

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{2}^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta dr$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$=16\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta+16\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta+\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{3}+5\pi$$

Polar Double Integral: Calculate double Integral in Polar Coordinates?

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:= Integrate[9 Cos [ \[Theta] ], { \[Theta] ,  \[Theta],
\[Pi]/2 } ] Shift+Enter
In[2] := Integrate[r*r*Cos[ \[Theta]], {\[Theta], -(Pi/2),
Pi/2},
{r, 2, 2*(1+Cos[ \[Theta]]) } ] Shift+Enter
```

Out[2]:= $\frac{32}{3} + 5\pi$

二重积分的计算之积分区域为心形线和圆围成的区域。 例16毕。

33 例14 2017数学二解答题第20题11分

已知平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$，计算二重积分

$$I=\iint_D (x+1)^2 dxdy$$

考点：二重积分的计算之极坐标。二重积分的计算。圆域。倍角公式。

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,

(3) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$,

(4) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$,

解答过程：极坐标系中，D: $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \rho \le 2\sin\theta$, 所以有

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+1)^2 dxdy \\
&= \iint_D x^2 dxdy + \iint_D 2x dxdy + \iint_D dxdy \\
&= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 \cos^2\theta d\rho + \pi \\
&= 4\int_0^{\pi} \sin^4\theta \cos^2\theta d\theta + \pi \\
&= \int_0^{\pi} \sin^2 2\theta \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} \cdot d\theta + \pi = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$

二重积分的计算之极坐标。 例14毕。

34 例07 2019数学二解答题第18题10分

已知平面区域 D 满足 $|x| \le y, (x^2+y^2)^3 \le y^4$，求

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

考点：二重积分的计算之极坐标。

解答过程：图形关于 y 轴对称，所以

$$I=\iint_{D}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\iint_{D_1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2I_1$$

在极坐标系下， D 为 $0\le\rho\le\sin^2\theta, |\cos\theta|=\sin\theta$, 所以

$$I_1=\iint_{D_1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}\rho\sin\theta d\rho=\frac{43}{120\sqrt{2}}$$

所以 $I=2I_1=\frac{43}{60\sqrt{2}}$.

Wolfram Mathmatica 11.3
In[1]:= ContourPlot[(x^2+y^2)^3==y^4, {x,-1,1},{y, 0, 1}],
ImageSize -> {500, 500} Shift+Enter

用极坐标计算二重积分。 例07毕。

35 例 05

设$D=\{(r,\theta)|0\le r\le \sec\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$, 计算

$$I=\iint\limits_{D}\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\cdot r^2\sin\theta drd\theta$$

考点：二重积分的计算之极坐标系转化为直角坐标系。倍角公式。Wallis公式。极坐标转化为直角坐标。

解答过程:

$$I=\iint_D r^2\cdot\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\cdot drd\theta$$

$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\cdot d(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 \left.(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^x dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx \qquad (令x=\sin t)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$$

例05毕。

36 例2 2020数学二解答题第19题10分

计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}d\sigma$$

其中区域D由$x=1$, $x=2$, $y=x$及x轴上围成。

考点：二重积分的计算之交换积分次序（直角坐标系换成极坐标系）。被积函数含有$\sqrt{x^2+y^2}$，用极坐标。极坐标。交换积分次序。积分公式表之含有三角函数的积分公式(98) $\int \sec^3 x dx$

解答过程：先x后y，解不出来。

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=\int_0^1 dy\int_1^2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+\int_1^2 dy\int_y^2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

先y后x，有

$$I=\int_1^2 dx\int_0^x\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}\frac{r}{\cos\theta}d\theta=\frac{3}{4}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

直角坐标系换成极坐标系。 例02毕。

例2拓展：

$$(1)\ I=\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}}dx=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d(\tan\frac{x}{2})$$

$$=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$

$$(2) I=\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}dx=\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C$$

$$(3)\ I=\int \frac{1}{\sin^3 x}dx=-\int \frac{1}{\sin x}d(\cot x)$$

$$=-\frac{\cot x}{\sin x}-\int \cot x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int \frac{1}{\sin^3 x}dx+\ln|\tan\frac{x}{2}|$$

于是，

$$I=\int \frac{1}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$

$$(4)\ \int \frac{1}{\cos^3 x}dx=\int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin^3(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$=-\frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{2\sin^2(x+\frac{\pi}{2})}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}|+C$$

练习题1：

$$\int \frac{1}{\sin^n} dx \qquad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

练习题2：

$$\int \frac{1}{\cos^n} dx \qquad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

练习题3：

写出Wallis公式的内容并给予证明。

37 例13 2017数学二填空题第13题4分

$$I=\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx = (\qquad\qquad)$$

考点：二重积分的计算之交换积分次序。二重积分的计算。交换积分次序。

积分公式表（85）$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

拓展

积分公式表（86）$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

解答过程：交换积分次序，有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\tan x}{x} dx \int_0^x dy = \int_0^1 \tan x dx \\
&= \int_0^1 \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x||_0^1 \\
&= -\ln\cos 1
\end{aligned}
$$

二重积分的计算之交换积分次序。 例13毕。

练习题1: 填空

$$
I = \int_?^? dy \int_?^? \frac{\cot x}{x} dx = (\qquad\qquad)
$$

38 例 06

设D由曲线 $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t (0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算

$$I = \iint_D (x + 2y)dxdy$$

考点：二重积分的计算之D的参数方程转化为直角坐标系下的方程。二重积分的对称性。参数方程转化为直角坐标。摆线方程。

解答过程:

$$I=\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\iint\limits_D (x-\pi)dxdy+\iint\limits_D (2y+\pi)dxdy$$

$$=\iint\limits_D (2y+\pi)dxdy\,(D\text{关于直线}x=\pi\text{对称},\iint\limits_D (x-\pi)dxdy=0)$$

$$=\int_0^{2\pi} dx\int_0^{y(x)} (2y+\pi)dy=\int_0^{2\pi}\left[y^2(x)+\pi y(x)\right]dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(1-\cos t)^3+\pi(1-\cos t)^2\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)+\pi(1-2\cos t+\cos^2 t)\right]dt$$

$$=\pi(5+3\pi)$$

例06毕。

39 例 07

设 $\{D=(x,y)|x^2+y^2\leq\sqrt{2},x\geq 0,y\geq 0\}$, $[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数, 计算二重积分

$$I=\iint_D xy\left[1+x^2+y^2\right]dxdy$$

考点：二重积分的计算之被积函数含有取整函数。极坐标。二重积分。

解答过程:

$$I=\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta\cdot[1+r^2]dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3[1+r^2]dr$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^3dr+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3dr\right)$$

$$=\frac{3}{8}$$

二重积分的计算之被积函数含有取整函数。 例07毕。

40 例5 2019数学二选择题第5题4分

设

$$D=\{(x,y)||x|+|y|\le \frac{\pi}{2}\},$$

$$I_1=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

$$I_2=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

$$I_2=\iint\limits_D (1-\cos\sqrt{x^2+y^2})dxdy,$$

比较I_1,I_2,I_3的大小(　　　　　　)

$(A)\,I_3<I_2<I_1$　$(B)\,I_1<I_2<I_3$　$(C)\,I_2<I_1<I_3$　$(D)\,I_2<I_1<I_3$

考点：二重积分的计算之积分区域带绝对值的表达式。三角不等式$\sin x\le x$。连续函数凹凸性判别法一、二。

解答过程：由于$|x|+|y|\le\frac{\pi}{2}$，所以$x^2+y^2\le\frac{\pi}{2}$，令$u=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$0\le u\le\sqrt{x^2+y^2},$$

并且有$\sin u\le u$，即

$$\sin\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2+y^2},$$

所以$I_2<I_1$，令

$$g(u)=\sin u-(1-\cos u)=\sin u+\cos u-1,$$
$$g'(u)=\cos u-\sin u,$$
$$g''(u)=-\cos u-\sin u<0,\ g(0)=g(\frac{\pi}{2})=0$$

所以 $g(u)$ 为单峰函数， $g(u)\ge\min\{g(0),g(\frac{\pi}{2})\}=0$，即 $\sin u\ge1-\cos u\ge0$，所以 $I_2>I_3$。综上有 $(A)\,I_3<I_2<I_1$，选（A）。

积分区域带绝对值。 例05毕。

41 例 08

计算二重积分

$$I=\iint_{D} e^{x^2+y^2}\cdot sgn(x+y)dxdy$$

其中 $D=\left\{(x,y)|x^2\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$, $sgn(x)$ 为符号函数。

考点：二重积分的计算之被积函数含有符号函数。符号函数。极坐标。二重积分的普通对称性。积分区域D分成3块。

解答过程：根据符号函数的定义，有

$$sgn(x+y)=\begin{cases}-1, & \text{if } y<-x\\ 0, & \text{if } y=-x\\ 1, & \text{if } y>-x\end{cases}$$

直线 $y=-x$ 与抛物线 $y=x^2$, 圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}$ 围成的区域记为 D_1,

直线 $y=-x$ 与 $y=x$, $y=\sqrt{1-x^2}$ 围成的区域记为 D_2,

直线 $y=x$ 与 $y=x^2$, $y=\sqrt{1-x^2}$ 围成的区域记为 D_3, 则

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}+\iint\limits_{D_3}e^{x^2+y^2}\cdot sgn(x+y)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_1}e^{x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_{D_3}e^{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_2}e^{x^2+y^2}dxdy=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 re^{r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{4}e^{r^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}(e-1)$$

例08毕。

42 例 09

计算累次积分

$$I=\int_0^2 dx\int_0^x \sqrt{(2-x)(2-y)}\cdot f'''(y)dy$$

其中 $f(x)$ 具有三阶连续的导数，且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=-1$, $f(2)=-\frac{1}{2}$。

考点：二重积分的计算之交换积分次序。

解答过程:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 (2-y)^{\frac{1}{2}} \cdot f'''(y)dy \int_y^2 (2-x)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^2 (2-y)^2 f'''(y)dy \\
&= \frac{2}{3}\int_0^2 (2-y)^2 df''(y) \\
&= \frac{2}{3}(2-y)^2 f''(y)\Big|_0^2 + \frac{4}{3}\int_0^2 (2-y)f''(y)dy \\
&= \frac{8}{3} + \frac{4}{3}(2-y)f'(y)\Big|_0^2 + \frac{4}{3}\int_0^2 f'(y)dy \\
&= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 6
\end{aligned}
$$

43 例 10

设$f(t)$连续，证明

$$\iint_D f(x-y)dxdy=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)dt$$

其中常数 $A>0$，区域$D:|x|\le\frac{A}{2},|y|\le\frac{A}{2}$。

考点：二重积分的计算之交换积分次序。被积函数中含有绝对值函数。

解答过程：

$$\text{左边}=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dy\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(x-y)dx$$

$$=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dy\int_{-\frac{A}{2}-y}^{\frac{A}{2}-y}f(t)dt$$

$$=\int_{-A}^{0}dt\int_{-t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(t)dy+\int_{0}^{A}dt\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}-t}f(t)dy$$

$$=\int_{-A}^{0}f(t)\cdot(A+t)dt+\int_{0}^{A}f(t)\cdot(A-t)dt$$

$$=\int_{-A}^{0}f(t)(A-|t|)dt+\int_{0}^{A}f(t)(A-|t|)dt=\text{右边}$$

二重积分在计算过程中交换积分次序　　例10毕。

44 例 11

设$f(t)$连续，且

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_x^1 f(y)\cdot f(y-x)dy$$

计算

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

考点：二重积分的计算之交换积分次序。将累次积分化成二重积分后交换积分次序。

解答过程:

$$I=1+\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_x^1 f(y)\cdot f(y-x)dy$$

$$=1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)dy\int_0^y f(y-x)dx\text{(交换积分次序)}$$

$$=1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)dy\int_0^y f(t)dt\text{ (令}t=y-x,dt=-dx)$$

$$=1+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^y f(t)dt\right)\cdot f(y)dy$$

$$=1+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^y f(t)dt\right)d\left(\int_0^y f(t)dt\right)\text{(变上限积分函数求导数)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^y f(t)dt\right) d\left(\int_0^y f(t)dt\right)$$ (变上限积分函数求导数)

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(\int_0^y f(t)dt\right)^2 \Bigg|_0^1 = 1 + \frac{1}{4}I^2$$

即$I = 1 + \frac{1}{4}I^2$，解得 $I = 2$。

二重积分的内层积分作变量代换，再凑微分。 例11毕。

45 例 12

设$f(x)$在$[0,1]$上具有连续导数，$f(0)=1$, 且满足

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy = \iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$$

其中$D_t=\{(x,y)|0\le y\le t-x, 0\le x\le t\}$, $(0<t\le 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

考点：二重积分的计算之被积函数中含有一元抽象函数的导数。可分离变量的微分方程。

解答过程:

$$原式左边=\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^t dx\int_0^{t-x} f'(x+y)dy$$

$$=\int_0^t [f(t)-f(x)]dx$$

$$=tf(t)-\int_0^t f(x)dx$$

$$原式右边=\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy=\frac{t^2}{2}\cdot f(t)$$ 所以，有

$$tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\frac{t^2}{2}f(t)$$ 两边求导，有

$$(2-t)f'(t)=2f(t)$$ 分离变量，有

$$f(t)=\frac{C}{(2-t)^2}\qquad \text{代入} f(0)=1, \text{得} C=4, \text{故}$$

$$f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}\qquad (0\le x\le 1)$$

二重积分的被积函数中含有一元抽象函数的导数。 例12毕。

46 例 13

设$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, 且满足

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$$

其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xy\cdot f''_{xy}(x,y)dxdy$$

考点：二重积分的计算之被积函数中含有抽象函数的二阶偏导数。

解答过程：因为$f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, 所以$f_y'(1,y)=0$, $f_x'(x,1)=0$. 从而，有

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy \\
&= \int_0^1 xdx \int_0^1 yf_{xy}''(x,y)dy \qquad \text{(先y后x)} \\
&= \int_0^1 x\left[yf_x'(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 f_x'(x,y)dy \right] dx \\
&= -\int_0^1 dy \int_0^1 xf_x'(x,y)dx
\end{aligned}
$$

$$= -\int_0^1 dy \int_0^1 x f'_x(x,y)dx$$

$$= -\int_0^1 \left[x f(x,y) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x,y)dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$$

$$= \iint_D f(x,y)dxdy = a$$

二重积分的被积函数中含有二元抽象函数的二阶偏导数。　　例13毕。

47 例 14

计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D}\cos\frac{x-y}{x+y}d\sigma$$

其中$D=\{(x,y)|x+y\leq 1,x\geq 0,y\geq 0\}$.

考点：二重积分的计算之被积函数非常复杂。

解法一较难（直线的极坐标方程）。

解法二（雅可比行列式）容易。二重积分的被积函数非常复杂，直角坐标系下求不出来原函数。积分区域为三角形。转化为极坐标系。

积分公式 $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$。三角恒等式 $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$，

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$，$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}$，

$2\cos^2(\theta-\frac{\pi}{4})=2(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4})^2=2(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta)^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2$.

解答过程：（解法一）直线$x+y=1$的极坐标方程为$r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，则

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}\cos\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{1}{2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}d\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{1}{2\cos^{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}d\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]d\left(\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sin\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\sin 1$$

二重积分的被积函数非常复杂。 例14解法一(难)毕。

解答过程：（解法二）令$u=x-y,v=x+y$, 则$x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{v-u}{2}$,

在该变换下，直线$x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 分别变为：$u=-v$, $u=v$, $v=1$.

记变换后的区域为D'，则有D'：$-v\le u\le v, 0\le v\le 1$. 又因为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

所以

$$I=\iint\limits_{D'}\cos\frac{u}{v}\cdot|J|\cdot dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\cdot du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 2\sin 1\cdot vdv=\frac{1}{2}\sin 1$$

二重积分的被积函数非常复杂。　　例14解法二(容易)毕。

48 二重积分的应用

1. 面积。

$$S=\iint\limits_{D} d\sigma$$

2. 柱体体积（仅数一）。

曲顶为$z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$的柱体体积

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}|z(x,y)|d\sigma$$

3. 总质量（仅数一）。

$$m=\iint\limits_{D}\rho(x,y)d\sigma$$

4. 重心坐标（仅数一）。

对于平面薄片，面密度为$\rho(x,y)$， D是薄片所占的平面区域，则计算重心$(\bar{x},\bar{y})$的公式为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma},\qquad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}$$

注意:

（1）在考研的范围内，重心就是质心。

（2）当密度$\rho(x,y)$ 或者$\rho(x,y,z)$ 为常数时，重心就成了形心。

5. 转动惯量（仅数一）。

对于平面薄片，面密度为$\rho(x,y)$，D 是薄片所占的平面区域，则计算该薄片对x轴、y轴和原点O的转动惯量I_x, I_y, I_z，公式分别为

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x,y) d\sigma,$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x,y) d\sigma,$$

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x,y) d\sigma,$$

49 例 01 （仅数一）

计算双纽线

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$$

所围图形的面积。

考点：二重积分的应用之面积。

解答过程：由直角坐标与极坐标的关系知，双纽线的极坐标方程为

$$r^2=2a^2\cos 2\theta$$

所围图形的面积为

$$S=\iint\limits_{D}d\sigma=4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{0}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}rdr=2a^2$$

例01毕。

50 例 02 （仅数一）

（仅数一）求圆柱面 $x^2+y^2=ay\,(a>0)$，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围成的立体体积V。

考点：二重积分的应用之体积。极坐标。Wallis公式。

解答过程：

在圆域 $D: x^2+y^2\le ay$ 上，以锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为曲顶的曲顶柱体，积分域 $D: 0\le\theta\le\pi$, $0\le r\le a\sin\theta$，故

$$V=\iint_D r^2drd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sin\theta}r^2dr$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{4}{9}a^3$$

例02毕。

51 例 03 （仅数一）

求由两曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积 $(a>0)$。

考点：二重积分的应用之体积。

解答过程：联立 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$，得 $z=a$。

$$V=\iint_D\left(2a-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left(2a-r-\frac{r^2}{a}\right)rdr=\frac{5\pi a^3}{6}$$

体积

例03毕。

52 例 04 （仅数一）

证明曲面

$$(z-a)\phi(x)+(z-b)\phi(y)=0$$

以及$x^2+y^2=c^2$ 和 $z=0$所围成的立体的体积为

$$V=\frac{1}{2}\pi(a+b)c^2$$

其中ϕ 为任意正的连续函数，a，b，c为正常数。

考点：二重积分的应用之体积。

解答过程：由$(z-a)\phi(x)+(z-b)\phi(y)=0$，解得

$$z=\frac{a\phi(x)+b\phi(y)}{\phi(x)+\phi(y)}$$

记D: $x^2+y^2\le c^2$，有

$$V=\iint_D \frac{a\phi(x)+b\phi(y)}{\phi(x)+\phi(y)}dxdy$$

$$=\iint_D \frac{a\phi(y)+b\phi(x)}{\phi(y)+\phi(x)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (\frac{a\phi(x)+b\phi(y)}{\phi(x)+\phi(y)}+\frac{a\phi(y)+b\phi(x)}{\phi(y)+\phi(x)})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\pi(a+b)c^2$$

例04毕。

53 例 05 （仅数一）

求由曲线$x^2+3y-5=0$, $x=\sqrt{y+1}$以及 $x=0$所围成的均匀薄片（密度μ为常数）对y轴的转动惯量。

考点：二重积分的应用之转动惯量。

解答过程:

$$I_y=\iint\limits_D \mu x^2 d\sigma=\mu\int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx\int_{x^2-1}^{\frac{1}{3}(5-x^2)} dy$$

$$=\frac{4}{3}\mu\int_0^{\sqrt{2}}(2x^2-x^4)dx=\frac{32\sqrt{2}}{45}\mu$$

转动惯量 例05毕。

54 三重积分的概念（仅数一）

1. 三重积分的物理背景：以$f(x,y,z)$为点密度的空间物体的质量。

当$f(x,y,z)\equiv 1$时，空间立体Ω的体积

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dv$$

2. 对称性。

（i）普通对称性。假设 Ω 关于 yoz 面对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)=f(-x,y,z)\\ 0, & f(x,y,z)=-f(-x,y,z)\end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 在 yoz 面前面的部分。

3. 轮换对称性。

若把 x 与 y 对调后， Ω 不变，有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dv$$

这就是轮换对称性。

比如，设 $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(y)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$$

可以简化计算。

55 三重积分的计算（仅数一）

1. 直角坐标系。

（i）先一后二法（先 z 后 xy 法，也叫投影穿线法）。

当 Ω 有下曲面 $z = z_1(x,y)$、上曲面 $z = z_2(x,y)$，无侧面或侧面为柱面时，有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

（ii）先二后一法（先xy后z法，也叫定限截面法）。

当 Ω 是旋转体时，其旋转曲面方程为 $\Sigma : z = z(x,y)$，有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

2. 柱面坐标系=极坐标系下二重积分与定积分。

在直角坐标系的先一后二法中，若 $\iint_{D_{xy}} d\sigma$ 适用于极坐标系，则令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

这种方法称为柱面坐标系下三重积分的计算。

3. 球面坐标系。

（1）被积函数中含有 $f(x^2+y^2+z^2)$ 或 $f(x^2+y^2)$, 积分区域为球或球的一部分、锥或锥的一部分时，用球面坐标系。

（2）用三族面将空间 Ω 切分成一个个的微元体，其中 $\theta=\theta_0$ (常数)为过z轴的半平面，其与xoz面正向夹角为 θ_0, $0\leq\theta_0\leq 2\pi$。

$\phi=\phi_0$ （常数）为以z轴为中心轴的圆锥面，其顶点为原点，半顶角为 ϕ_0，$0\leq\phi_0\leq\pi$。

$r=r_0$（常数）为球心在原点的球面，其半径为 r_0， $0\leq r_0<+\infty$。

此微元体近似为长方体，其三组边界面分别是:

过 z 轴且与 xoz 面正向夹角为 θ 与 $\theta+d\theta$ 的半平面。

以z轴为中心轴，半顶角为 ϕ 与 $\phi+d\phi$ 的圆锥面。

以原点为圆心，半径为 r 与 $r+dr$ 的球面。

它的体积元素即为三个边长 dr, $rd\phi$ 与 $r\sin\phi d\theta$ 的乘积，即 $dv=r^2\sin\phi d\theta d\phi dr$。

（3）从原点出发画一条半射线（取值范围 $(0,+\infty)$ ），先碰到 Ω，记 $r_1(\phi,\theta)$，后离开 Ω，记 $r_2(\phi,\theta)$。

顶点在原点，以 z 轴为中心轴的圆锥面半顶角（取值范围 $[0,\pi]$ ），先碰到 Ω，记 $\phi_1(\theta)$，后离开 Ω，记 $\phi_2(\theta)$。

过 z 轴的半平面与 xoz 面正向夹角（取值范围 $[0,2\pi]$ ），先碰到 Ω，记 θ_1，后离开 Ω，记 θ_2。

于是有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)r^2\sin\phi drd\phi d\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} d\phi\int_{r_1(\phi,\theta)}^{r_2(\phi,\theta)} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)r^2\sin\phi dr$$

注意:

1. 关于积分区域Ω。常见的空间图形有（16个）

(1) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \qquad a>0$

(2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad a,b,c>0$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

(4) $x^2+y^2=z^2$

(5) $z=x^2+y^2$

---

(6) $x^2+y^2=a^2$, $z\geq 0$, $a>0$

(7) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$, $a>0$

(8) $z=xy$

(9) $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$

(10) $z=xy$, $x+y=1$, $z=0$

---

(11) $z = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$

(12) $z = x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2$

(13) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1 - x^2$

(14) $x^2 + (y - z)^2 = (1 - z)^2$, $0 \le z \le 1$

(15) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

(16) $z = 2(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$

2. 关于被积函数$f(x,y,z)$。

积分区域Ω复杂，则被积函数简单。

积分区域Ω简单，则被积函数复杂。

3. 换元法。

若 $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ 是空间 (x,y,z) 到空间 (u,v,w) 的一一映射，有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$$

则有

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\iiint_{\Omega_{uvw}} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\cdot\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

特别地，(1) 若 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$ ，

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\neq 0$$

则有直角坐标系到柱面坐标系的换元，即

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_{r\theta z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\cdot|J|drd\theta dz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{r\theta z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\cdot rdrd\theta dz$$

特别地，(2) 若$x=r\sin\phi\cos\theta, y=r\sin\phi\sin\theta, z=r\cos\phi$ ，

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r^2\sin\phi\neq 0$$

则有直角坐标系到球面坐标系的换元，即

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{r\phi\theta}} f(r\sin\phi\cos\theta,r\sin\phi\sin\theta,r\cos\phi)\cdot|J|drd\phi d\theta$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{r\phi\theta}} f(r\sin\phi\cos\theta,r\sin\phi\sin\theta,r\cos\phi)\cdot r^2\sin\phi drd\phi d\theta$$

56 三重积分的应用（仅数一）

1. 体积。

对于空间物体Ω，其体积计算公式为

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dv$$

2. 总质量。

对空间物体Ω，其体积密度为$\rho(x,y,z)$，则其总质量计算公式为

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv$$

3. 重心。

对空间物体Ω，其体积密度为$\rho(x,y,z)$，则重心$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$的计算公式为

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv}, \bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv}$$

注意：当$\rho(x,y,z)$为常数时，即为形心。

4. 转动惯量。

对于空间物体Ω，其体积密度为$\rho(x,y,z)$，则该物体对x轴、y轴、z轴和原点O的转动惯量的计算公式分别为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dv,$$

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv$$

5. 引力。

对于空间物体Ω，其体积密度为$\rho(x,y,z)$，则该物体对点(x_0,y_0,z_0)处的质量为m的质点的引力(F_x,F_y,F_z)的计算公式为

$$F_x=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$F_y=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$F_z=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

57 例8 2019数学二解答题第17题10分，2019数学三解答题第17题 10分

已知 $y(x)$ 满足微分方程

$$y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}, \quad y(1) = \sqrt{e},$$

(1) 求$y(x)$，

(2) 求平面区域D绕 x 轴旋转所成旋转体的体积，其中

$$D = \{(x, y) | 1 \le x \le 2, 0 \le y \le y(x)\}$$

考点：三重积分的应用之旋转体的体积。一阶线性微分方程的通解公式。截面法计算三重积分。

58 例 01

计 算 三 重 积 分 $\iiint_{\Omega}(x+z)dv$， 其 中 Ω 是 由 曲 面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域。

考点：三重积分的应用之球面坐标。对称性。

解答过程：法一：由 Ω 关于yoz坐标面对称，知 $\iiint_{\Omega} x dv=0$，所以

$$\iiint_{\Omega}(x+z)dv$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^1 r^3 \cos\phi \sin\phi dr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\phi|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

法二：直角坐标系下先二后一法（定限截面法）。

例01毕。

59 例4 2019数学一解答题第19题10分

设Ω是由锥面$x^2+(y-z)^2=(1-z)^2, 0\le z\le 1$，与平面$z=0$所围成的锥体，求Ω的形心坐标。

考点：三重积分的应用之形心坐标。三重积分的换元法。

解答过程：由于图形关于 yoz 坐标面左右对称，所以 $\bar{x}=0$，

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]: Plot3D[ (x^2+y^2-1)/(2y-2), {x,-4,4}, {y,-4,4}] Shift+
Enter
```

考虑三重积分换元公式，令$x=u$, $y-z=v$, $1-z=w$，可得 $\Omega:\to\Omega_{uvw}:u^2+v^2=w^2, 0\le w\le 1$, $x=u, y=v+1-w$, $z=1-w$, 所以有

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=1$$

$$\iiint\limits_{\Omega} dv=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}} dudvdw=\int_0^1 dw\iint\limits_{u^2+v^2\le w^2} dudv$$

$$=\int_0^1 \pi w^2 dw=\frac{\pi}{3}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} y dv = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} (v+1-w) dudvdw$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} vdw + \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} (1-w) dudvdw$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z dv = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} (1-w) dudvdw$$

$$= \int_0^1 (1-w) dw \iint\limits_{u^2+v^2 \le w^2} dudv$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

由三维立体的形心坐标计算公式，有$\bar{y} = \bar{z} = \frac{1}{4}$, 即形心坐标为$\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

形心坐标 例04毕。

60 例6 2019数学二解答题第17题10分

数二已知$y(x)$满足微分方程

$$y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}, \quad y(1) = \sqrt{e},$$

(1) 求$y(x)$,

(2) 求平面区域D绕x轴旋转所成旋转体的体积，其中

$$D = \{(x, y) | 1 \le x \le 2, 0 \le y \le y(x)\}$$

考点：三重积分的应用之旋转体的体积。一阶线性微分方程的通解公式。截面法计算三重积分。

解答过程：由一阶线性微分方程的通解公式，有

$$y(x)=e^{-\int -xdx}\left[\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{\int -xdx}dx+C\right]$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C)$$

代入初值$y(1)=\sqrt{e}$，有$C=0$，即$y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$

旋转曲面方程为$y^2+z^2=xe^{x^2}$,$0\le x\le 2$，用截面法计算三重积分，有

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:= Plot[ Sqrt[x] Exp[x^2/2], {x,0,1 }] Shift+Enter
```

$$V_x=\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_1^2 dx\iint\limits_{y^2+z^2\le xe^{x^2}} dydz$$

$$=\int_0^1 \pi xe^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$$

旋转体的体积。 例06毕。

61 例 02

若$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$，计算

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dxdydz$$

考点：三重积分的应用之轮换对称性。

解答过程：由轮换对称性，有

$$I = 3\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R r^3 \cos\phi \sin\phi dr$$

$$= \frac{3\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \cos\phi d\phi \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{3}{16}\pi R^4$$

三重积分的应用之轮换对称性。

例02毕。

62 例 03

设Ω由抛物面$y=\sqrt{x}$, $x+z=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $z=0$ 围成，计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{y\sin x}{x}dv$$

考点：三重积分的应用之先一后二法（投影穿线法）。

解答过程:

$$I=\iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-x} \frac{y\sin x}{x} dz$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{x}} dy \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-x} \frac{y\sin x}{x} dz$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)\frac{\sin x}{x} dx \int_{0}^{\sqrt{x}} y dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)\sin x dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

三重积分的应用之先一后二法（投影穿线法）。 例03毕。

63 例 04

设Ω由$x^2+(y-1)^2=1,\ 8z=x^2+y^2,\ z=0$所围成的区域，计算

$$I=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv$$

考点：二重积分的应用之先一后二法（投影穿线法）。极坐标。Wallis公式。

解答过程：

$$I=\iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_0^{\frac{x^2+y^2}{8}} \sqrt{x^2+y^2}dz \qquad (\text{极坐标})$$

$$=\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} rdr\int_0^{\frac{r^2}{8}} rdz$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^4dr$$

$$=\frac{4}{5}\int_0^{\pi} \sin^5\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{5}(2\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3})=\frac{64}{75} \qquad (Wallis\text{公式})$$

先一后二法（投影穿线法） 例05毕。

64 例09 2018数学一解答题第17题10分

设曲面 $\boldsymbol{\Sigma}: x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取前侧，求

$$I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$$

考点：第二类曲面积分、高斯公式、三重积分的计算之先二后一法。极坐标。偏导数。椭球体。

解答过程:

```
(* Wolfram Mathematica 11.3.0.0 *)
In[1]:=Plot3D[Sqrt[1-3*y^2-3*z^2], {y, -1,1 }, {z, -1, 1
}] Shift+Enter
```

添加辅助面 $\Sigma_1: x=0$, 方向指向x轴的负半轴（负向），记 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成的封闭区域为 Ω，则 $\Sigma+\Sigma_1$ 的总体的方向取为封闭区域的外侧，即满足高斯公式条件封闭性和方向性。由高斯公式、截面法计算三重积分，有

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$=\int_0^1 dx\iint\limits_{y^2+z^2\le\frac{1-x^2}{3}}(1+3y^2+3z^2)dydz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}}(1+3r^2)rdr$$

$$=\frac{14\pi}{45}$$

第二类曲面积分、高斯公式、三重积分的计算之截面法。 例09毕。

65 例 05

设Ω是$x^2+y^2+z^2\le R^2$, $x^2+y^2+z^2\le 2Rz(R>0)$的公共部分，计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$$

考点：三重积分的应用之球面坐标。

解答过程：以$z=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2}$为分界面，将区域Ω分为$\Omega_1$，$\Omega_2$上下两部分，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega_1} z^2 dv+\iiint\limits_{\Omega_2} z^2 dv$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\phi \int_0^{R} r^4 \cos^2\phi \sin\phi dr$$

$$+\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{R\cos\phi} r^4 \cos^2\phi \sin\phi dr$$

$$=\dots=\frac{59}{480}\pi R^5$$

球面坐标　　例05毕。

66 例 06

设$f(x)$是定义在$[0,+\infty)$上的连续函数，且满足

$$f(t)=\iiint\limits_{\Omega} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dv+t^3$$

其中$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le t^2$，求$f(1)$。

考点：三重积分的应用之积分域空间立体Ω可变。一阶线性微分方程通解公式。

解答过程:

$$f(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{t}f(r)r^2\sin\phi\, dr+t^3$$

$$=4\pi\int_0^{t}r^2f(r)dr+t^3$$

由上式知$f(0)=0$，上式两边对t同时求导得

$$f'(t)=4\pi t^2f(t)+3t^2$$

由一阶线性微分方程通解公式，有

$$f(t)=e^{\int 4\pi t^2dt}\left(\int 3t^2e^{-\int 4\pi t^2dt}dt+C\right)$$

由一阶线性微分方程通解公式，有

$$f(t) = e^{\int 4\pi t^2 dt}\left(\int 3t^2 e^{-\int 4\pi t^2 dt} dt + C\right)$$

$$= e^{\frac{4}{3}\pi t^3}\left(\int 3t^2 e^{-\frac{4}{3}\pi t^3} dt + C\right)$$

$$= Ce^{\frac{4}{3}\pi t^3} - \frac{3}{4\pi}$$

由$f(0) = 0$, $C = \frac{3}{4\pi}$，故

$$f(t) = \frac{3}{4\pi}\left(e^{\frac{4}{3}\pi t^3} - 1\right), f(1) = \frac{3}{4\pi}\left(e^{\frac{4}{3}\pi} - 1\right)$$

一阶线性微分方程通解公式　　　　例06毕。

67 例 07

设$\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，计算

$$I=\iiint_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|dv$$

考点：三重积分的应用之球面坐标。

解答过程：积分区域 Ω 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 分成上下两部分，依次为 Ω_1，Ω_2，故

$$I=\iiint\limits_{\Omega_1}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right)dv+\iiint\limits_{\Omega_2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int_1^{\frac{1}{\cos\phi}}(r-1)r^2\sin\phi\,dr$$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int_0^{1}(1-r)r^2\sin\phi\,dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\,d\phi\int_1^{\frac{1}{\cos\phi}}(r-1)r^2dr+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\,d\phi\int_0^{1}(1-r)r^2dr$$

$$=\frac{\pi}{12}(2-\sqrt{2})+\frac{\pi}{12}(3\sqrt{2}-4)=\frac{\pi}{12}(2-\sqrt{2})=\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$$

三重积分的应用之球面坐标。 例07毕。

68 例 08

设Σ为任意闭曲面，

$$I=\oiint_{\Sigma_{外侧}}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)dydz-\frac{4}{3}y^3dzdx+\left(3y-\frac{1}{3}z^3\right)dxdy$$

(1) 证明： Σ 为椭球面 $x^2+4y^2+z^2=1$ 时， I 达到最大值。

(2) 求 I 的最大值。

考点：三重积分的应用之（第二类曲面积分->高斯公式->三重积分）。椭球面方程。高斯公式。第二类曲面积分。

解答过程：（1）由高斯公式，知

$$I = \iiint_{\Omega} \left(1 - x^2 - 4y^2 - z^2\right) dxdydz$$

其中 Ω 为 Σ 所围的空间区域，为使I最大，只要 $1 - x^2 - 4y^2 - z^2 \geq 0$，即 $\Omega = \{(x, y, z)|1 - x^2 - 4y^2 - z^2 \geq 0\}$, Σ 为 Ω 的表面，即为椭球面 $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$时，I最大。

（2）由广义球面坐标系$x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\phi$, 有

$$\begin{aligned} I_{max} &= \iiint_{x^2+4y^2+z^2\leq 1} \left(1 - x^2 - 4y^2 - z^2\right) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^1 \left(1 - r^2\right) \frac{1}{2} r^2 \sin\phi \, dr \\ &= \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

三重积分的应用之高斯公式。 例08毕。

69 例 09

求曲面$z=2(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$和$z=0$所围几何体的体积。

考点：三重积分的应用之几何体的体积。积分次序先一后二。

解答过程：$\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le 2(x^2+y^2),x\le x^2+y^2\le 2x\}$, 所以

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iint\limits_{x\le x^2+y^2\le 2x}dxdy\int_0^{2(x^2+y^2)}dz$$

$$=\iint\limits_{x\le x^2+y^2\le 2x}2(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}2r^2\cdot rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}15\cos^4\theta d\theta$$

$$=15\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45\pi}{16}$$

三重积分的应用之几何体的体积。 例09毕。

70 例 10

设直线 L 过$A(1,0,0)$， $B(0,1,1)$ 两点，将L绕z轴旋转一周得到曲面 Σ， Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω 。

（1）求曲面Σ的方程。

（2）求Ω的形心坐标。

考点：三重积分的应用之形心坐标。积分次序先二后一。旋转曲面。

解答过程：（1）直线L的方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$，写成参数式为

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=-t, \\ z=-t, \end{cases} \quad (t为参数)$$

设(x,y,z)为曲面Σ上的任一点，则

$$\begin{cases} x^2+y^2=(1+t)^2+t^2, \\ z=-t, \end{cases}$$

所以曲面Σ的方程为

$$x^2+y^2-2z^2+2z=1$$

即

$$x^2+y^2=2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

旋转抛物体面。

（2）设Ω的形心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，根据对称性，得$\bar{x}=\bar{y}=0$。

设$D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2z^2-2z+1\}$，则

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z,\\0\leq z\leq 2,\end{cases}$$

所以

$$\iiint_{\Omega} dxdydz=\int_0^2 dz\iint_{D_z} dxdy$$

$$=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}z^3-z^2+z\right)\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{10\pi}{3}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \int_{0}^{2} zdz \iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$= \pi \int_{0}^{2} z(2z^2 - 2z + 1)dz$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 \right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{14\pi}{3}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz} = \frac{7}{5}$$

故Ω的形心坐标为$\left(0, 0, \frac{7}{5}\right)$.

三重积分的应用之形心坐标。 例10毕。

71 例 11

设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标。

考点：三重积分的应用之形心坐标。积分次序先二后一。

解答过程：设 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，因为 Ω 关于 yoz 平面对称，所以 $\bar{x}=0$。

对于 $0\le z\le 1$, 记 $D_z=\{(x,y)|x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2\}$，因为

$$V=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$=\int_0^1 \pi(1-z)^2dz=\frac{\pi}{3}$$

令$x=r\cos\theta$, $y=z+r\sin\theta$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} ydxdy$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{1-z}(z+r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_0^1 \pi z(1-z)^2dz=\frac{\pi}{12}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \int_0^1 dz \iint\limits_{D_z} zdxdy$$

$$= \int_0^1 \pi z(1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12}$$

所以

$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz}{V} = \frac{1}{4}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{V} = \frac{1}{4},$$

故Ω的形心坐标为$(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

三重积分的应用之形心坐标。 例11毕。

72 例 12

设物体由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2x$ 所围成，其上各点的密度 μ 等于该点到 xoz 平面的距离的平方，求该物体对 z 轴的转动惯量。

考点：三重积分的应用之转动惯量。积分次序先一后二。柱面坐标。 Wallis公式。

解答过程：这里 $\mu = y^2$，并注意到物体占有空间区域 Ω 在xoy平面上的投影域为 $D:(x-1)^2+y^2 \le 1$，从而所求转动惯量为

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} y^2(x^2+y^2)dv$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^5 \sin^2\theta dr \int_{r^2}^{2r\cos\theta} dz$$

$$= \frac{64}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^8\theta - \cos^{10}\theta)d\theta$$

$$= \frac{64}{7}\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

三重积分的应用之形心坐标。Wallis公式。 例12毕。

73 例 13

求由球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的体积密度为1的均匀体 Ω 对原点处单位质点的引力。

考点：三重积分的应用之引力。积分次序先二后一。

解答过程：引力常数 G, $z_0=0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 由对称性，有 $F_x=F_y=0$,

$$F_z=G\iiint_{\Omega}\frac{z-z_0}{r^3}dxdydz$$
$$=G\iiint_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}dxdydz$$

因为积分区域 Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[1,2]$，垂直于 z 轴且竖标为z的平面截 Ω 所得到的平面区域为 $D_z: x^2+y^2\le 4-z^2$，故

$$F_z=G\int_1^2 dz\iint_{D_z}z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy$$
$$=G\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}rdr$$
$$=G\pi\int_1^2(2-z)dz=\frac{\pi}{2}G$$

因此，所求引力为 $F=\left(F_x,F_y,F_z\right)=\left(0,0,\frac{\pi G}{2}\right)$

三重积分的应用之形心坐标。Wallis公式。 例13毕。

73 例 13

求由球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与平面$z=1$所围成的体积密度为1的均匀体Ω 对原点处单位质点的引力。

73 例 13,解答

引力常数 G, $z_0=0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 由对称性，有 $F_x=F_y=0$,

$$F_z=G\iiint\limits_{\Omega}\frac{z-z_0}{r^3}dxdydz=G\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}dxdydz$$

因为积分区域Ω在z轴上的投影区间为[1,2]，垂直于z轴且竖标为z的平面截Ω所得到的平面区域为 $D_z: x^2+y^2\le 4-z^2$，故

$$F_z=G\int_1^2 dz\iint\limits_{D_z}z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy$$

$$=G\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}rdr=G\pi\int_1^2(2-z)dz=\frac{\pi}{2}G$$

因此，所求引力为$F=(F_x,F_y,F_z)=(0,0,\frac{\pi G}{2})$

三重积分的应用之形心坐标。Wallis公式。 例13毕。

This is some sample tex[illegible]oes behin[illegible]ectangles.

test

test

test

test

test

test

test

test

test

test

test

test

test

test

Some framed text, with **align=right**.

test

- Consider the following nonlinear equation:

- This line appears only before step 4.

(Here you see step number 0)

- Consider the following nonlinear equation:

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u$$

- This line appears only before step 4.

(Here you see step number 1)

- Consider the following nonlinear equation:

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u =$$

- This line appears only before step 4.

(Here you see step number 2)

- Consider the following nonlinear equation:

$$-\Delta u + |u|^{p-1} u = f$$

- This line appears only between steps 3 and 5
- This line appears only before step 4.

(Here you see step number 3)

- Consider the following nonlinear equation:

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = f + \mathrm{div}(g)$$

- This line appears only between steps 3 and 5

- This line appears only before step 4.
- This line appears only at step 4.

(Here you see step number 4)

- Consider the following nonlinear equation:

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = f + \operatorname{div}(g) + |\nabla u|$$

- This line appears only between steps 3 and 5

(Here you see step number 5)

- Consider the following nonlinear equation:

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = f + \operatorname{div}(g) + |\nabla u|^2$$

(Here you see step number 6)

- Consider the following nonlinear equation:

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = f + \operatorname{div}(g) + |\nabla u|^2$$

(Here you see step number 7)

- Consider the following nonlinear equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-1}u = f + \operatorname{div}(g) + |\nabla u|^2$$

- The equation may be parabolic.

(Here you see step number 8)

test

75 索引

p183, 例10.19 161
p184, 例10.20 162
p184, 例10.21 163
p187, 例10.27 166
p188, 例10.28 169
p189, 例10.29 173
p191, 例10.31 177
p195, 例11.1 179
p195, 例11.2 182
p196, 例11.3 185
p197, 例11.4 187
p197, 例11.5 190
p198, 例11.6 192
p198, 例11.7 194
p198, 例11.8 196
p198, 例11.9 197
p200, 例11.10 199
p201, 例11.11 202
p201, 例11.12 204
p201, 例11.13 206
p202, 例11.14 208

p269，例14.21 318
p269，例14.22 321
p271, 例14.24（仅数一） 329
p271, 例14.25 330
p272, 例14.26 331
p272, 例14.27 333
p361, 三重积分的概念 334
p362 336
p367, 例18.1 349
p368, 例18.2 355
p368, 例18.3 356
p368, 例18.4 358
p370, 例18.6 362
p370, 例18.7 364
p371, 例18.8 367
p371, 例18.9 369
p372, 例18.10 371
p372, 例18.11 373
p373, 例18.12 377
p374, 例18.13 380
p374, 例18.14 382

2019数学二解答题第19题10分　146
2019数学二解答题第21题11分　200
2019数学二选择题第3题4分　138
2019数学二选择题第5题4分　304
2020数学三解答题第18题10分　232
2020数学二填空题第10题4分　242
2020数学二填空题第12题4分　213
2020数学二填空题第13题4分　141
2020数学二第3题4分　142
2020数学二第13题4分　141
2020数学二第19题10分　293
2020数学二解答题第18题10分　157
2020数学二解答题第19题10分　293
2020数学二选择题第1题4分　135
2020数学二选择题第3题4分　142