第七章　空间解析几何

习题 7.1

1. 起点坐标为 $A(-2,3,0)$.

2. $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-2,-2)$；$2\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,-4,-4)$.

3. $\overrightarrow{a^0}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{4}{5}\vec{i}-\dfrac{3}{5}\vec{k}$.

4. $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,-2)$，$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=3$，

   方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=-\dfrac{2}{3},\cos\gamma=-\dfrac{2}{3}$.

5. A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

6. $\vec{r}=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$.

习题 7.2

1. （1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，　$(-2\vec{a})\cdot\vec{b}=-6$.

   （2）$\vec{a}\times\vec{b}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$，$\vec{a}\times2\vec{b}=10\vec{i}+2\vec{j}+14\vec{k}$.

   (3) 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 α，则 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

2. 所求单位向量为 $\overrightarrow{a^0}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}(3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k})$.

3. （1）$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}=-8\vec{j}-24\vec{k}$；

   （2）$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})=-\vec{j}-\vec{k}$；

   （3）$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$

4. $\lambda=\pm\sqrt{7}$.

5. $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\vec{r}|=14$

6. $W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=600g$ （其中 g 为重力加速度）.

7. 向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面.

习题 7.3

1. $2x-y+z-9=0$

2. $x-3y-2z=0$.

3. $y-5=0$.

4. $x+3y=0$.

5. $9y-z=2$.

6. $7x-2y-17=0$.

7. $(1,-1,3)$.

8. $d=1$

习题 7.4

1. （1）$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-3}{5}$；　（2）$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$；　（3）$\begin{cases}\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}\\ x-2=0\end{cases}$.

2. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+2}{2}$.

3. $\varphi=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

4. $x+y-3z-4=0$.

5. $8x-9y-22z-59=0$.

6. $n=2$.

7. $(3,0,5)$.

8. $\begin{cases}\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}\\ x-3=0\end{cases}$.

习题 7.5

1. $4x+4y+10z-63=0$.

2. $y^2+z^2=5x$.

3. 绕 x 轴旋转所得旋转曲面方程为 $4x^2-9(y^2+z^2)=36$；

绕 y 轴旋转所得旋转曲面方程为 $4(x^2+z^2)-9y^2=36$.

4. （1） xOy 坐标面；

（2）平行 z 轴的平面；

（3）中心轴为 z 轴的圆柱面；

（4）母线平行 z 轴的抛物柱面；

（5）椭圆抛物面；

（6）圆锥面.

5. 略

习题 7.6

1. （1）直线；　（2）椭圆线.

2. 略

3. $3y^2-z^2=16$.

4. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ z=0 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x^2+y^2\le ax \\ z=0 \end{cases}$.

6. 在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$；

在 yOz 面上的投影为 $z=y^2$ 与 $z=4$ 所围成的区域；

在 xOz 面上的投影为 $z=x^2$ 与 $z=4$ 所围成的区域.

7. 略.

总习题 7

1. （1） -3；　（2） $-\dfrac{3}{2}$；　(3)　36；　(4) $\sqrt{2}$；　(5)　$2x+2y-3z=0$.

2. $x \pm \sqrt{26}y + 3z = 3$.

3. $3x - 2y - 1 = 0$.

4. $\dfrac{x+1}{16} = \dfrac{y}{19} = \dfrac{z-4}{28}$.

5. $C(0, 0, \dfrac{1}{5})$.

6. 在 yOz 面上的投影为 $\begin{cases} z = 2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases}$， $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$ ；

在 xOz 面上的投影为 $\begin{cases} z = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$， $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$；

在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}$.

7. 在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$；

在 xOz 面上的投影为 $\begin{cases} x \le z \le \sqrt{2x} \\ y = 0 \end{cases}$；

在 yOz 面上的投影为 $\begin{cases} \dfrac{1}{4}z^4 - z^2 - y^2 \le 0,\ z \ge 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

8. $4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$.

9.（1） S_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2 + z^2}{3} = 1$， S_2 的方程 $y^2 + z^2 = (\dfrac{1}{2}x - 2)^2$ ；

（2） π.

第八章　多元函数微分法及其应用

习题 8.1

1.（1） $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x > y^2\}$；

（2） $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x > -y,\ x > y\}$；

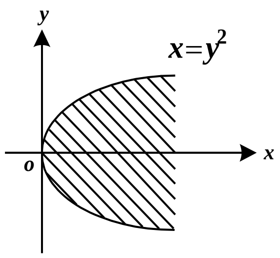
（3） $D = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \le y \le x^2\}$；

（4） $D=\{(x,y)\in R^2 \mid y>x\geq 0,\ x^2+y^2<1\}$；

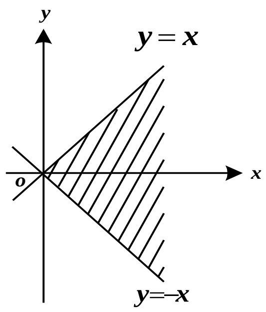
（5） $D=\{(x,y,z)\in R^3 \mid r^2<x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$；

（6） $D=\{(x,y,z)\in R^3 \mid z^2\leq x^2+y^2, x^2+y^2\neq 0\}$.

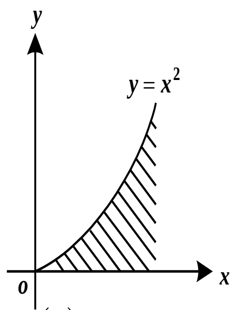
(1)-(4)中定义域的图形如下：



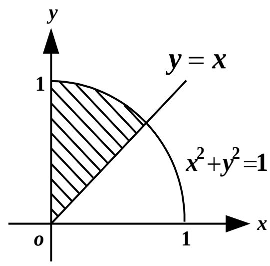
（1）



（2）



(3)



(4)

2.（1）1；　（2）$\ln 2$；　(3)　$-\dfrac{1}{4}$；　（4）　0 .

3. 略

4. 函数在 $y^2=2x$ 处间断.

5.（C）.

习题 8.2

1.（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$；

（2） $\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2}$，　$\dfrac{\partial s}{\partial v}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v^2}$；

（3） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$；

（4） $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$；

（5） $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$；

（6） $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}z^{\frac{y}{x}}\ln z$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}z^{\frac{y}{x}}\ln z$， $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{y}{x}z^{\frac{y}{x}-1}$.

2. $f_x(1,1)=2$.

3. 略.

4. $f_x(0,0)$ 不存在， $f_y(0,0)=0$.

5.（1） $dz=(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy$， $\mathrm{grad}\, z=(y+\frac{1}{y},x-\frac{x}{y^2})$；

（2） $dz=\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(-ydx+xdy)$， $\mathrm{gard}\, z=\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(-y,\, x)$；

（3） $dz=\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(-ydx+xdy)$， $\mathrm{gard}\, z=\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(-y\,,x)$；

（4） $du=x^{yz}(\frac{yz}{x}dx+z\ln xdy+y\ln xdz)$， $\mathrm{gard}\, u=x^{yz}(\frac{yz}{x},\, z\ln x\,,\ y\ln x)$.

6. 不存在.

7. $du\big|_{(1,1,0)}=2dx+dy$.

8. $\Delta z\approx-0.1190$， $dz=-0.125$

9.（1） $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$；

（2） $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$；

（3） $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$.

10. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2ye^{xy}+xy^2e^{xy}=ye^{xy}(2+xy)$， $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=x^3e^{xy}+\frac{2x}{y^3}$.

11.（A）

习题 8.3

1．略

2．$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=-e^{\cos t-2\sin t}(\sin t+2\cos t)$.

3．（1） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(1+y+yz)f'(v)$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x(1+z)f'(v)$， $\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyf'(v)$；

（2） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^y f_1'+f_2'$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^y f_1'+f_3'$.

4.略

5．（1） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+\dfrac{2}{y}f_{12}''+\dfrac{1}{y^2}f_{22}''$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}f_2'-\dfrac{x}{y^2}f_{12}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''$；

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}f_2'+\dfrac{x^2}{y^4}f_{22}''$；

（2） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2yf_2'+y^4 f_{11}''+4xy^3 f_{12}''+4x^2y^2 f_{22}''$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3 f_{11}''+5x^2y^2 f_{12}''+2x^3y f_{22}''$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2xf_1'+4x^2y^2 f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4 f_{22}''$；

（3） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2 f_{11}''+4yf_{12}''+4f_{22}''$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+(2x-3y)f_{12}''-6f_{22}''$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2 f_{11}''-6xf_{12}''+9f_{22}''$.

6． $du=\dfrac{1}{z}f_1'dx+\dfrac{1}{z}f_2'dy-\dfrac{1}{z^2}(xf_1'+yf_2')dz$；

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\dfrac{1}{z^2}f_2'-\dfrac{x}{z^3}f_{12}''-\dfrac{y}{z^3}f_{22}''$.

7． $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'(u)++4x^2 f''(u)$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'(u)+4y^2 f''(u)$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf''(u)$.

习题 8.4

1. $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}$.

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{3x^2}{y-2e^{2z}}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z}{2e^{2z}-y}$.

4. 提示：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{3}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}$，

5. $dz=-e^{-z}(2xe^{x^2}dx+3y^2e^{y^3}dy)$

6. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y(x^3-z^3)}{xy-z^2}$

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{ze^{2z}-xyz^2e^z-x^2y^2z}{(e^z-xy)^3}$.

8. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-yv}{u+v}$， $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x+yu}{u+v}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1-2xv}{2(u+v)}$， $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1+2xu}{2(u+v)}$.

习 题 8.5

1. 切线方程为$x-\frac{1}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}$，法平面方程为 $2x-8y+16z-1=0$.

2. 切线方程为$\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,

   法平面方程为$x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4=0$.

3. 切线方程 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$；　法平面方程　$x+2y+3z-8=0$.

4. 切平面方程为$x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$；法线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$.

5. 切平面方程为$x+2y-4=0$；　法线方程为 $\begin{cases} x-2=\frac{y-1}{2} \\ z=0 \end{cases}$.

6. $(1,-1,1)$ 与 $(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27})$.

7. $x+y-2=0$ 或 $x+y+2=0$.

8. 提示：曲面上任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

习 题 8.6

1. $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$.

2. $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=\frac{5+3\sqrt{2}}{2}$

3. $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=\frac{12}{\sqrt{14}}$

4. $\mathbf{grad}\, f(0,0,0)=(3,-2,-6)$，$\mathbf{grad}\, f(1,1,1)=(6,3,0)$

5. $\left|\mathrm{grad}u(1,-1,2)\right|=\sqrt{21}$.

习 题 8.7

1. 极小值 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}$.

2. 极大值 $f(2,2)=1$.

3. 略

4. 极大值 $z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

5. 当长方体的长 $x=\sqrt[3]{2k}$，宽 $y=\sqrt[3]{2k}$，高 $z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ 时用料最省.

6. 最冷点 $T(0,0)=26$ 最热点 $T(1,0)=30$.

7. 最短距离为 $\sqrt{3}$；最长距离为 $2\sqrt{3}$.

总习题 8

1. （C）

2. （1）13；（2）2；（3）-8；（4）$2x+4y-z-5=0$；

（5）$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；（6）$(-\dfrac{1}{2},-1,\dfrac{1}{2})$．

3．略

4．（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}，\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}；$$

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x，\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x.$$

5．$f_{xy}(0,0)=0$，$f_{yx}(0,0)=1$.

6．$du=\dfrac{1}{xy-z^2}[y(x^3-z^3)dx+x(y^3-z^3)dy]$．

7．$\dfrac{du}{dt}=[\varphi(t)]^{\psi(t)}[\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}\cdot\varphi'(t)+\psi'(t)\ln\varphi(t)]$．

8．$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y f_1'+xe^{2y}f_{11}''+e^y f_{13}''+xe^y f_{12}''+f_{23}''$.

9．$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$.

10．切线方程：$\begin{cases}\dfrac{y}{a}=\dfrac{z}{b}\\ x=a\end{cases}$；法平面方程：$ay+bz=0$.

11. 点 $(-3,-1,3)$，法线方程为$\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

12. 沿梯度方向的方向导数最大，且$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max}=|\mathrm{grad}u(1,1,1)|=\sqrt{5}$.

13．$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}$．

14. 当长方形边长分别为$\dfrac{2p}{3}$和$\dfrac{p}{3}$，并绕短边旋转时所得的圆柱体体积最大.

15.（1）$a=-5$, $b=2$；（2）极小值为$z(1,-1)$.

16.（1）$g(x_0,y_0)=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$；

（2）攀岩起点$P_1(5,-5), P_2(-5,5)$.

17. $f_{\max}(x,y)=f(\pm1,0)=3$，$f_{\min}(x,y)=f(0,\pm2)=-2$.

第九章 重积分

习题 9. 1

1.（1）$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \ge \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$；（2）$\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma \ge \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$.

2.（1）$0\le \iint\limits_D \sqrt{xy(x+y)}d\sigma \le 16$；（2）$36\pi \le \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma \le 100\pi$.

3.（1）$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma=\dfrac{2}{3}\pi$；（2）$\iint\limits_D y d\sigma = 0$.

4. $I_1=4I_2$.

习题 9.2

1.（1）$I=\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^a dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$；

（2）$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$；

（3）$I=\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy=\int_0^4 dy\int_{\frac{1}{4}y^2}^{y} f(x,y)dx$.

2.（1）1；（2）$\dfrac{8}{3}$；（3）$\dfrac{20}{3}$；（4）$\dfrac{6}{55}$；

（5）$\dfrac{64}{15}$；（6）$1-\sin 1$；（7）$\dfrac{13}{6}$.

3.（1）$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$；（2）$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$；

（3）$\int_{-1}^0 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；（4）$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$；

（5）$\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；（6）$\int_0^1 dy\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

4. $m=\dfrac{4}{3}$.

5. $V=\frac{7}{2}$.

6. （1） $\pi(e^4-1)$； （2） $-6\pi^2$； （3） $\frac{\pi^2}{64}$； （4） $\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$.

7. （1） $\frac{9}{4}$； （2） $\frac{\pi}{2}(\ln 2-\frac{1}{2})$； （3） $\frac{1}{8}$.

8. $V=\frac{17}{6}$.

9. $V=\frac{3\pi a^4}{32}$.

习题 9. 3

1. （1） $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)dz$；

   （2） $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz$；

   （3） $\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)dz.$

2. 2.

3. $\frac{1}{48}$.

4. 0 .

5. $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$.

6. $\frac{\pi R^2h^2}{4}$.

7. (1) $\frac{7}{12}\pi$； （2） $\frac{16}{3}\pi$； （3） $\frac{3\pi}{16}$.

8. （1） $\frac{4\pi}{5}$； （2） 3π.

9. （1） $\frac{1}{8}$； （2） $\frac{1}{12}$； （3） $\frac{\pi}{10}$； （4） 8π.

10. （1） $\frac{32}{3}\pi$； （2） $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)$； （3） 60π.

11. $k\pi a^4$

习题 9. 4

1. $2\pi ah$

2. $\sqrt{2}\pi$.

3. $16a^2$.

4. （1） $(\frac{3}{5}x_0, \frac{3}{8}y_0)$； （2） $(\frac{7}{6}, 0)$.

5. $(\frac{35}{48}, \frac{35}{54})$.

6. （1） $(0,0,\frac{3}{4})$；（2） $(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{7}{30})$.

7. $(0,0,\frac{5}{4})$.

8. （1） $I_x=\frac{72}{5}$， $I_y=\frac{96}{7}$； （2） $I_x=\frac{ab^2}{3}$， $I_y=\frac{a^2b}{3}$.

9. $I_z=\frac{1}{2}\pi ha^4$.

10. $F_z=-2\pi G[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}]$.

总习题 9

1. （1）（A）； （2）（B）； （3）（C）； （4）（B）； （5）（D）；
（6）（C）； （7）（D）； （8）（A）； （9）（C）； （10）（C）.

2. $\frac{16}{3}(\pi-\frac{2}{3})$.

3. $\frac{\pi}{2}\ln 2$.

4. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

5. $\frac{14}{15}$.

6. $\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$

7. 提示：交换积分顺序.

8. $\frac{\pi}{8}$

9. $\frac{59\pi R^5}{480}$.

10. $\frac{250}{3}\pi$.

11. $\frac{1}{364}$.

12. $\frac{4}{5}\pi abc$.

13. $\frac{368}{105}\mu$.

14. 引力 $\vec{F}=(0, F_y, F_z)$. 其中

$$F_x=0，F_y=\frac{4GmM}{\pi R^2}(\ln\frac{R+\sqrt{R^2+a^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}})，F_z=-\frac{2GmM}{R^2}(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}).$$

15. $f'(0)$.

第十章 曲线积分与曲面积分

习题 10.1

1. $2a^3\pi^2(1+2\pi^2)$.

2. $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$.

3. 1.

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$.

5. $\frac{16\sqrt{2}}{143}$

6. $2\pi a^2$

7. $m=\frac{a}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

习题 10.2

1.（1）1；（2）1.

2．3.

3. -2π.

4 $-2\pi a(a+b)$.

5．13.

6．$\frac{k}{2}(a^2-b^2)$.

习题 10.3

1． $3\pi a^2$.

2． 9.

3． $4(1-\ln 3)$.

4． $e-e^{-1}$.

5． $\frac{\pi}{4}+2$.

6．（1）0；　（2） 236；　（3） 17.

7． $\frac{\pi^2}{4}$.

8． $\lambda=-\frac{1}{2}$；　$1-\sqrt{2}$.

习题 10.4

1． $12\sqrt{14}$.

2. $4\sqrt{61}$.

3． πa^3.

4． $\frac{(1+\sqrt{2})}{2}\pi$.

5． $\frac{2h\pi}{R}$.

习题 10.5

1． 1.

2． $\frac{3\pi}{4}$.

3． $\frac{32\pi}{3}$.

4． 2π.

5． $\frac{1}{24}$.

习题 10.6

1. a^4.

2. $\frac{1}{8}$.

3. $2\pi a^3$.

4. $\frac{2}{5}\pi a^5$.

5. $\frac{11}{24}$.

6. 0.

7.（1）$\mathrm{div}\vec{A}=y^2e^{xy}+x^2e^{xy}+y\cos z$；

（2）$\mathrm{div}\vec{A}=-6x-6y+6z$；

（3）$\mathrm{div}\vec{A}=ze^x\cos y-ze^x\cos y=0$

习题 10.7

1. 0.

2. 9π.

总习题 10

1. π.

2. $2a^2$.

3. $12l$.

4. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$.

5. 0.

6. $-\frac{\pi^2}{2}$.

7. $\varphi(x)=x^2$； $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy=\frac{1}{2}$.

8. πa^2.

9. -2π.

10. π.

11. -24.

12. $\dfrac{19}{20}\pi a^5$.

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

14. 12π.

15. $\dfrac{1}{2}\pi^2 R$

第十一章　无穷级数

习题 11.1

1.（1）$s_n=\dfrac{1}{11}[1-(\dfrac{1}{100})^n]$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9}{100^n}=\dfrac{1}{11}$；

（2）$s_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}$；

（3）$s_n=\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3})$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}=\dfrac{11}{18}$；

（4）$s_n=3-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=3$；

（5）$s_n=\dfrac{5}{3}[1-(\dfrac{2}{5})^n]+[\dfrac{5}{8}1-(-\dfrac{3}{5})^n]$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n 3^n}{5^n}=\dfrac{55}{24}$.

2. （1）结论为真；　（2）结论为真.

3. 证明略，反之不成立.

4. 略.

5. 略.

6. 略.

习题 11.2

1.（1）收敛；（2）收敛；（3）收敛；（4）收敛.

（5）$a>1$时收敛，$a\le 1$时发散.

2.（1）收敛；（2）发散；（3）收敛；（4）收敛；

（5）收敛；（6）收敛；（7）发散；（8）收敛.

3.（1）收敛；（2）发散；（3）收敛；（4）发散；

（5）发散；（6）收敛；（7）收敛；（8）收敛 .

4. 证略，反之不成立.

5. 略.

6.（1）条件收敛；（2）绝对收敛；（3）条件收敛；（4）绝对收敛.

习题 11.3

1.（1）$(-1,1)$；（2）$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；（3）$(-2,2)$；（4）$(-\infty,+\infty)$；

（5）$(0,2)$；（6）$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

2.（1）$s(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$-1<x<1$；

（2）$s(x)=\dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$，$-1<x<1$；

（3）$s(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$-1<x<1$.

3.（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$；（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}=5e$.

4．略.

习题 11.4

1.（1）$e^{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n}$，$-\infty<x<+\infty$；

（2）$\ln(2+x)=\ln 2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}x^{n+1}\quad(-2<x\le 2)$；

（3） $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty)$.

（4） $\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \quad (-1 < x < 1)$；

（5） $\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n \cdot 2^n]x^n$ ， $(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2})$；

（6） $(1+x)e^{-x} = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n!}x^n$ ， $(-\infty < x < +\infty)$.

2. $\cos x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}]$， $(-\infty < x < +\infty)$.

3. $\ln x = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}(x-3)^{n+1}$， $0 < x \le 6$.

4. $\frac{1}{x^2+3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n$； $-1 < x < 3$.

5. 略.

6. 略.

习题 11. 5

1. $\sqrt[3]{9} \approx 2.0801$

2. $\ln 3 \approx 1.0986$，

3. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}dx \approx 0.72887$

4．证明略.

习题 11. 6

1.（1） $3x^2+1 = \pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$， $x \in (-\infty, +\infty)$；

（2） $e^{2x} = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx - n\sin nx)] \quad x \ne (2k+1)\pi, k \in Z$；

（3） $f(x) = \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{3(-1)^{n+1}}{n}\sin nx] \quad x \ne (2k+1)\pi, k \in Z$；

2. $1-x^2=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ ， $0\le x\le\pi$； $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

3. $2\sin\frac{x}{3}=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{9n^2-1}\sin nx$ ， $(-\pi<x<\pi)$.

4. $$f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3})\cos\frac{2n\pi x}{3}$$
$$+\frac{1}{n\pi}(\cos\frac{4n\pi}{3}-\cos\frac{2n\pi}{3})\sin\frac{2n\pi x}{3}] \qquad (x\ne\pm1+3k, \text{且 } x\ne 2+3k)$$

5. $2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$，$(-1\le x\le 1)$； $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

6. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos\frac{n\pi x}{2}$， $x\in[0,2]$.

7.（1） $f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$ ， $x\in[0,4]$；

（2） $f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{(-1)^k}{4k^2}\sin\frac{k\pi x}{2}+\frac{1-4(-1)^k}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{4}]$， $x\in(0,4)$.

总习题 11

1.（1）（C）； （2）（C）； （3）（C）； （4）（C）； (5)（B）；

（6）（D）； (7)（C）； (8)（C）； (9)（B）； (10)（C）；

2.（1） $-2<x<4$； （2）1； （3） $\frac{\pi^2}{2}$； （4） $\frac{3}{2}$.

3.（1）1； （2）略.

4. 略.

5. 略.

6. 略.

7. 收敛区间为$(-3,3)$；当$x=3$时，级数发散；当$x=-3$时，级数收敛.

8.（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}=-x\arctan x$，$x\in[-1,1]$；

（2） $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{1+x}{(1-x)^2}$ ， $-1<x<1$；

（3） $s(x)=-\ln(6-x)+\ln 3$ ， $0\le x<6$；

（4） $s(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3 & x=0\end{cases}$.

9. （1） $\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}\ln 2$； （2） $\dfrac{22}{27}$.

10. （1） $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}x^{4n+1}$ ， $-1<x<1$.

（2） $f(x)=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[\dfrac{1}{2^n}-(-1)^n]x^n$ ， $-1<x<1$.

(3) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$,

(4) $f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}$， $-1\le x\le 1$； $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$.

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x$.

12. （1）略； （2） $y(x)=xe^{x^2}$.

13. （1）略； (2) $S(x)=e^{-x}+2e^x$.