高等数学 1-2

March 27, 2021

《高等数学》

练习册

（　2020　～　2021　学年度　　第　2　学期　）

课程名称　　高等数学1-2　　

姓名 ________________

学号 ________________

学院 ________________

教师 ________________

免冠照

梦想	
困难	

7 第七章 微分方程

7.1 第一节 微分方程的基本概念

7.1.1 知识点

7.1.2 练习题

001 已知曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q, 且线段 PQ 被 y 轴平分，求该曲线所满足的微分方程。
解答

003 函数 $y = 3\,e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的 ( )
A 通解
B 特解

004 微分方程

$$xy''' + 2y'' + x^2 y = 0$$

的阶数为 ( )

A 1
B 2
C 3
D 4

005 微分方程

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{c} = 0$$

的阶数为 ( )

A 1
B 2
C 3
D 4

006　微分方程

$$\frac{d\,\rho}{d\,\theta}+\rho=\sin^2\theta$$

的阶数为 (　　)

A　1
B　2
C　3
D　4

007　一个二阶微分方程的通解应含有多少个任意常数 (　　)

A　1
B　2
C　3
D　4

008 已知 $y = c_1 \sin(x - c_2)$, $y|_{x=\pi} = 1$, $y'|_{x=\pi} = 0$, 求 c_1, c_2

解答

009 求函数 $y = ae^x - be^{-x} + x - 1$ 所满足的微分方程, 其中 a, b 为任意常数。

解答

7.2 第二节 可分离变量微分方程

7.2.1 知识点

7.2.2 练习题

011 求微分方程

$$\frac{d\,y}{d\,x}+\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}$$

的通解。

解答

7.3 第三节 齐次方程

7.3.1 知识点

7.3.2 练习题

012 将方程

$$\int_0^x \left[2y\,(t) + \sqrt{t^{\,2} + y^{\,2}(t)} \right] \quad dt = x\,y\,(x)$$

化为齐将方程的形式。

解答

013 求方程

$$\left(x^{\,2} + y^{\,2} \right) d\,x - x\,y\,d\,y = 0$$

的通解。

解答

014 求齐次方程

$$\left(y^2-3x^2\right)dy+2xy\,dx=0$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解。

解答

015 求方程

$$y'=\frac{x+y+1}{x-y-3}$$

的通解。(D7-3 齐次方程（可化为齐次方程的方程）)

解答

7.4 第四节 一阶线性微分方程

7.4.1 知识点

7.4.2 练习题

016 求方程

$$y^3\,dx + (2xy^2 - 1)\,dy = 0$$

的通解。

解答

017 求微分方程

$$y' = \frac{1}{2}\tan^2(x + 2y)$$

的通解。

解答

018 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} + \cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{x+y}{2}$$

的通解。(和差化积公式)

解答

7.5 第五节　可降阶高阶微分方程

7.5.1 知识点

7.5.2 练习题

019　求微分方程

$$y'' = x + \sin x$$

的通解。

解答

020　求微分方程

$$y'' = y' + x$$

的通解。

解答

021 求微分方程

$$y^3y'' + 1 = 0$$

满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$ 的特解。

解答

022 求微分方程

$$y'' = 3\sqrt{y}$$

满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 的特解。

解答

023　求微分方程

$$y'' = e^{2x} - \cos x$$

满足初始条件 $y|_{x=0} = 0,\ y'|_{x=0} = 1$ 的特解。

解答

024　求方程

$$\left(1 + x^2\right) \frac{d^2 y}{d x^2} - 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

的通解。

解答

7.6 第六节 高阶线性微分方程

7.6.1 知识点

7.6.2 练习题

025 方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

为 (　　)

A 二阶非齐次线性微分方程
B 二阶齐次线性微分方程

026 函数

$$y_1(x) = \sin 2x, \quad y_2(x) = 6\sin x\cos x$$

(　　)

A 线性相关
B 线性无关

027 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)\,y=0$$

的两个线性无关的特解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

是该方程的 (　　)

A 通解

B 特解

028 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是方程

$$y''+y=0$$

的 (　　)

A 通解

B 特解

029 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$ 是方程

$$y'' + y = x^2$$

的 ( )

A 通解

B 特解

030 设 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的 ( )

A 通解

B 特解

031　求方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=x$$

的通解。

解答

032　求方程

$$y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$$

的通解。

解答

7.7　第七节　常系数齐次线性微分方程

7.7.1　知识点

7.7.2　练习题

033　设 $y_1(x) = e^{\,x}$ 为齐次方程

$$y'' - 2\,y' + y = 0$$

的解，求非齐次方程

$$y'' - 2\,y' + y = \frac{1}{x}\,e^{\,x}$$

的通解。

解答

034　求微分方程

$$y'' - 2\,y' - 3y = 0$$

的通解。

解答

7.8 第八节 常系数非齐次线性微分方程

7.8.1 知识点

7.8.2 练习题

035 写出二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式。

解答

036 写出方程

$$y'' + 5y' + 6y = 3xe^{-2x}$$

的特解形式。

解答

037 求方程

$$y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$$

的一个特解。

解答

038 求方程

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$$

的一个特解。

解答

039 求方程

$$y'' - 3y' + 2y = x e^{2x}$$

的通解。

解答

040 求方程

$$y'' + y = x + e^{x}$$

的一个特解。

解答

041 求方程

$$y'' + y = x + e^{x}$$

的通解。

解答

042 求方程

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{x}$$

的通解。

解答

043 求方程

$$y'' + y = 4\sin x$$

的通解。

解答

044 求方程

$$y'' + y = x\cos 2x$$

对应齐次方程的通解。

解答

045 求方程

$$y'' + y = x\cos 2x$$

的通解。

解答

046 求方程

$$y'' + y' = 2x^2e^x$$

的通解。

解答

047 求方程

$$y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$$

的通解。

解答

8　第八章　空间解析几何与向量代数

8.1　第一节　向量及运算

8.1.1　知识点

8.1.2　练习题

049　化简

$$\vec{a}-\vec{b}+5\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5}\right)$$

解答

8.2 第二节 点积叉积

8.2.1 知识点

8.2.2 练习题

050 名词解释：数量积、向量积。
解答

051 已知三点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$
解答

052 请完整叙述三个非零向量共面的充要条件。

解答

053 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角 $\dfrac{3}{4}\pi$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, 求 $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$

解答

8.3 第三节 曲面方程

8.3.1 知识点

8.3.2 练习题

054 名词解释：椭球面、椭圆柱面。

解答

055 名词解释：双曲抛物面、椭圆抛物面。

解答

056 名词解释：单叶双曲面、双叶双曲面。

解答

057 指出下列方程

$$x^2 + y^2 = 9$$

在空间解析几何中的图形。

解答

8.4 第四节　空间曲线

8.4.1 知识点

8.4.2 练习题

058　写出曲线 C:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2 &= 1 \end{cases}$$

在 xoy 面上的投影曲线方程。

解答

8.5 第五节 平面方程

8.5.1 知识点

8.5.2 练习题

059 设一平面通过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$, 求该平面方程。

解答

060 计算

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

解答

061 名词解释：截距式方程、三点式方程。

解答

062 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程。

解答

063 请完整叙述两平面的位置关系。

解答

064 请过点 $(1,1,1)$ 且垂直于两平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程。

解答

8.6 第六节　空间直线

8.6.1 知识点

8.6.2 练习题

065 　名词解释：直线的对称式方程。

解答

066 　写出直线

$$\begin{cases} x+y+z+1 &= 0 \\ 2x-y+3z+4 &= 0 \end{cases}$$

的对称式方程和参数式方程。

解答

067 一直线过点 $A(1,2,1)$ 且垂直于直线

$$L_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$$

又和直线

$$L_2:\frac{x}{2}=y=\frac{z}{-1}$$

相交，求此直线方程。

解答

068 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程。

解答

069 求直线

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$$

与平面

$$2x+y+z-6=0$$

的交点。

解答

070 求过点 $(2,1,3)$ 且与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

垂直相交的直线方程。

解答

071 求直线

$$\begin{cases} x+y-z-1 & =0 \\ x-y+z+1 & =0 \end{cases}$$

在平面

$$x+y+z=0$$

上的投影直线方程。

解答

9　第九章　多元函数微分法及其应用

9.1　第一节　基本概念

9.1.1　知识点

9.1.2　练习题

072　名词解释：内点、外点、边界点。

解答

073　设

$$f\left(x,y\right)=\left(x^{2}+y^{2}\right)\,\sin\frac{1}{x^{2}+y^{2}}$$

其中 $x^{2}+y^{2}\neq 0$, 证明

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f\left(x,y\right)\ =0$$

解答

074

$$f\,(x,y)=\frac{x\,y}{x^{\,2}+y^{\,2}}$$

在点 $(0,0)$ 处的极限 (　　)

A　存在

B　不存在

075

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\ =\qquad (\quad)$$

A　0

B　1

C　2

D　∞

076 名词解释：二重极限、累次极限。

解答

077 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的极限 (　　)

A 存在

B 不存在

078 计算

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x\,y+1}-1}{x\,y}$$

079 设

$$f\left(x\,y, \frac{y^{2}}{x}\right) = x^{2} + y^{2}$$

求

$$f\left(\frac{y^{2}}{x}, x\,y\right)$$

080　计算

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\,\ln(1+x\,y)}{x+y}$$

A　存在
B　不存在

9.2 第二节 偏导数

9.2.1 知识点

9.2.2 练习题

081 名词解释：二元函数的偏导数。

解答

082 名词解释：三元函数的偏导数。

解答

083 ”若函数 f 在某点各偏导数都存在，则 f 在该点一定连续。”该命题是否为真? 若该命题不真，请举一个反例。

解答

084 求

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

的偏导数。

解答

第二节　偏导数（续）（高阶偏导数）

085　写出二元函数混合偏导数的定义。

解答

086　若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

A　正确
B　错误

087 设 $z=f(u)$, 方程

$$u=\phi(u)+\int_{y}^{x} p(t)dt$$

确定 u 是 x, y 的函数, 其中 $f(u), \phi(u)$ 可微, $p(t), \phi'(u)$ 连续, 且 $\phi'(u) \neq 1$, 求

$$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$$

解答

9.3 第三节 全微分

9.3.1 知识点

9.3.2 练习题

088 求

$$z = x\,y + \frac{x}{y}$$

的全微分。

解答

088a 名词解释：全微分。

解答

089 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

1. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续
2. $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续
3. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微
4. $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 存在

若用"P⇒Q" 表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列选项正确的是 ( )

A 2⇒3⇒1

B 3⇒2⇒1

C 3⇒4⇒1

D 3⇒1⇒4

9.4 第四节 复合求导

9.4.1 知识点

9.4.2 练习题

090 设 $z = u^2 + v^2$, 而 $u = x + y$, $v = x - y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

091 设 $z = u^2 \ln v$, 而 $u = \dfrac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

092 设 $z = \arctan(x\,y)$, 而 $y = e^{\,x}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

093 求

$$u = f\left(x^{\,2} - y^{\,2}, e^{\,x\,y}\right)$$

的一阶偏导数，其中 f 具有一阶连续偏导数。

094 设 $z=f(x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

9.5 第五节　隐函数求导

9.5.1 知识点

9.5.2 练习题

095 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$

096 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

097 如果函数 $f(x,y)$ 满足如下条件中的哪一条，则该函数在点 (x_0,y_0) 处连续。 (　　)

A $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$，且 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$

B $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿 L 方向有 $\dfrac{\partial f}{\partial L}$

C $f(x,y)$ 有偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$

D $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微分

098 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点处 (　　)

A 连续、偏导数存在

B 连续、偏导数不存在

C 不连续、偏导数存在

D 不连续、偏导数不存在

099 在平面 $x+y+z=1$ 上求一直线，使它与直线

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$$

垂直相交。（调整到“D8-6 空间直线”）

解答

100 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y-z=e^{z}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解答

9.6 第六节 几何中的应用

9.6.1 知识点

9.6.2 练习题

101 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程。

解答

102 求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x & =0, \\ 2x-3y+5z-4 & =0 \end{cases}$$

在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程。

解答

103 如果平面

$$3x+\lambda y-3z+16=0$$

与椭球面

$$3x^2+y^2+z^2=16$$

相切，求 λ

解答

9.7 第七节 方向导数与梯度

9.7.1 知识点

9.7.2 练习题

104 函数

$$z = 3x^2y - y^2$$

在点 $P(2,3)$ 沿曲线

$$y = x^2 - 1$$

朝 x 增大方向的方向导数。
解答

105 函数

$$f(x,y,z) = x^2 + y^z$$

求函数 f 在点 $P(1,1,1)$ 沿增加最快方向的方向导数。
解答

9.8 第八节 极值与最值

9.8.1 知识点

9.8.2 练习题

106 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

则 ( )

A 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
B 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
C 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
D 根据条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

解答

107 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解答

108 点 $(0,0)$ 是函数 $z = x^3 + y^3$ 的极值点。 (　　)

A 正确

B 错误

109 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱，问水箱长、宽、高等于多少时，所用材料最省？

解答

10　第十章　重积分

10.1　第一节　二重积分概念

10.1.1　知识点

10.1.2　练习题

110　函数

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{x-y}$$

在

$$D:\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\leq 1\end{cases}$$

上二重积分　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A　存在

B　不存在

111　函数

$$f\left(x,y\right)=\frac{x^{\,2}-y^{\,2}}{x-y}$$

在

$$D:\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\leq 1\end{cases}$$

上二重积分 ( )

A 存在

B 不存在

112 判断

$$\left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right| \le \iint_D \left|f(x,y)\right|d\sigma$$

( )

A 正确

B 错误

113　判断

$$\iint_D (x+y)^2\,d\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,d\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$　　(　　)

A　正确

B　错误

114　判断下列积分的符号

$$\iint_D \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

其中 $D:x^2+y^2\le 4$　　(　　)

A　正号

B　负号

115 计算

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,d\,x\,d\,y$$

解答

116 估计

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$$

的值，其中 $D: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$

解答

117 判断下列积分的符号

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$$

其中 $D: a \leq |x| + |y| \leq 1,\ 0 < a < 1$

解答

10.2 第二节 二重积分的计算（1）（直角坐标系）

10.2.1 知识点

10.2.2 练习题

118 计算

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)\,d\sigma$$

其中 $D:|x|\le 1,|y|\le 1$

解答

119 计算

$$\iint_D \left(x^3+3x^2y+y^3\right)\,d\sigma$$

其中 $D:0\le x\le 1,\,0\le y\le 1$

解答

120 计算

$$\iint_D x\sqrt{y}\,d\sigma$$

其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域

解答

121 计算

$$\iint_D xy^2\,d\sigma$$

其中 D 是由园周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域

解答

122 交换积分次序

$$\int_0^1 d\,y \int_0^y f\,(x,y)\,d\,x$$

解答

123 交换积分次序

$$\int_0^1 d\,y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f\,(\,x,y\,)\,d\,x$$

解答

第二节　二重积分的计算（2）（极坐标系）

124　计算

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,d\sigma$$

其中 $D: x^2+y^2 \le a^2$, $a>0$

解答

125　计算

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

解答

126 计算

$$\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \left(x^2+y^2\right) dy$$

解答

127 计算

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

解答

128 计算

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,d\sigma$$

其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域。

解答

129 计算

$$\iint_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\,d\sigma$$

其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域。

解答

130 计算

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, d\sigma$$

其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域。

解答

131 计算

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma$$

其中 D 是圆形环闭区域 $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$, $a>0$, $b>0$

解答

第二节　二重积分的计算（3）（换元法）

132　计算

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) d\sigma$$

其中 D 是椭圆形闭区域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$

解答

133　计算

$$\iint_D (xy+\cos x\,\sin y)\,d\sigma$$

其中 D 是闭区域 $-a\le x\le a,\ x\le y\le a,\ a>0$

解答

134 计算

$$\iint_D \left(y^2+3x-6y+9\right)\,d\sigma$$

其中 D 是闭区域 $x^2+y^2\le R^2$, $R>0$

解答

135 计算

$$\iint_D \left|y-x^2\right|\,d\sigma$$

其中 D 是闭区域 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

解答

136 计算

$$\iint_D \left(x^2 - y^2\right)\, d\sigma$$

其中 D 是闭区域 $0 \le x \le \pi,\, 0 \le y \le \sin x$

解答

138 设 $f(x)$ 为连续函数，$f(2) = 1$,

$$F(t) = \int_1^t d\,y \int_y^t f(x)\, d\,x$$

求 $F'(2)$

解答

139

$$\int_0^a d\,y \int_0^y e^{m\,(a-x)}\,f\,(x) d\,x = \int_0^a (a-x)\,e^{m\,(a-x)}\,f\,(x)\,d\,x$$

(　　　)

A　正确
B　错误

10.3　第三节　三重积分（1）（直角坐标）

10.3.1　知识点

10.3.2　练习题

139a1　计算

$$\iiint_{\Omega} xy^2z^3 \, d\,x \, d\,y \, d\,z$$

其中 Ω 是由曲面 $z = xy$, 平面 $y = x$, $x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的闭区域。

解答

139a2　计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{d\,x \, d\,y \, d\,z}{(1 + x + y + z)^3}$$

其中 Ω 是由平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 所围成的闭区域。

解答

139a3 计算

$$\iiint_{\Omega} xz\, d\,x\, d\,y\, d\,z$$

其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 和抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域。

解答

139a4 计算

$$\iiint_{\Omega} z\, d\,x\, d\,y\, d\,z$$

其中 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1$ 所围成的闭区域。

解答

第三节　三重积分（2）（柱面坐标）

139a5　利用柱面坐标计算

$$\iiint_\Omega z\,d\,x\,d\,y\,d\,z$$

其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。

解答

139a6　计算

$$\iiint_\Omega xy\,d\,v$$

其中 Ω 是柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域。

解答

139a7 计算

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\,d\,v$$

其中 Ω 是由曲面 $4z^2=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域。

解答

第三节　三重积分（3）（球面坐标）

139a8　利用球面坐标计算

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\,d\,x\,d\,y\,d\,z$$

其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域。

解答

139a8b1　计算

$$\iiint_{\Omega}\frac{z\,\ln\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}+1\right)}{x^{2}+y^{2}+z^{2}+1}\,d\,v$$

其中 Ω 是由球面 $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$ 所围成的闭区域。

解答

10.4 第四节 重积分的应用

10.4.1 知识点

10.4.2 练习题

139a9 求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=x$ 内部的那部分面积。
解答

139a10 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积。
解答

11　第十一章　曲线积分与曲面积分

11.1　第一节　对弧长曲线积分

11.1.1　知识点

11.1.2　练习题

140　计算

$$\int_L (x+y)\,d\,s$$

其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段。

解答

141　计算

$$\int_L y^{\,2}\,d\,s$$

其中 L 为摆线的一拱，$x=a\,(t-\sin t\,)$, $y=a\,(1-\cos t\,)$, $0\le t\le 2\,\pi$

解答

142 计算

$$\int_L (x+y)\,d\,s$$

其中 L 为连接 $(1,0)$, $(0,1)$ 两点的直线段。

解答

11.2 第二节　对坐标曲线积分

11.2.1 知识点

11.2.2 练习题

143　计算

$$\int_L (x^2 - y^2)\, d\, x$$

其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧。

解答

144　计算

$$\oint_L \frac{(x+y)\, d\, x - (x-y)\, d\, y}{x^2 + y^2}$$

其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, 逆时针方向。

解答

145 计算

$$\int_L (x+y)\,dx+(y-x)\,dy$$

其中 L 是曲线 $x=2t^2+t+1,\ y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧。

解答

146 求下列曲线所围成的图形的面积

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$$

解答

11.3 第三节 格林公式

11.3.1 知识点

11.3.2 练习题

147 计算

$$\oint_L \frac{y\,dx - x\,dy}{2(x^2+y^2)}$$

其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$, 逆时针方向。

解答

148 计算

$$\int_L \left(2xy^3 - y^2\cos x\right)dx + \left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\,dy$$

其中 L 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点 $A(0,0)$ 到 $B\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的一段弧。

解答

11.4 第四节 对面积曲面积分

11.4.1 知识点

11.4.2 练习题

149 计算

$$\int_{\Sigma}\left(x^{2}+y^{2}\right)\,dS$$

其中 Σ 是 $z^{2}=3\left(x^{2}+y^{2}\right)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分。

解答

150 计算

$$\iint_{\Sigma}\left(2xy-2x^2-x+z\right)\,dS$$

其中 Σ 是平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分。

解答

151 计算

$$\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx)\, dS$$

其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分。

解答

11.5 第五节　对坐标曲面积分

11.5.1 知识点

11.5.2 练习题

152 计算

$$\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z\, dx\, dy$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧。

解答

153 计算

$$\oiint_{\Sigma} xz\, dx\, dy + xy\, dy\, dz + yz\, dz\, dx$$

其中 Σ 是平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

解答

154 计算

$$\iint_{\Sigma} z\,d\,x\,d\,y + x\,d\,y\,d\,z + y\,d\,z\,d\,x$$

其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0,\ z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧。

解答

11.6 第六节 高斯公式

11.6.1 知识点

11.6.2 练习题

154a1 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \left(x^3+y^2\right) dydz+\left(y^3+z^2\right) dzdx+\left(z^3+x^2\right) dxdy$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解答

155 计算

$$\oiint_{\Sigma} z^2\,dxdy+x^2\,dydz+y^2\,dzdx$$

其中 Σ 是平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=a$, $z=a$ 所围成的立体的表面的外侧。

解答

156 计算

$$\oiint_{\Sigma} xz^2\,dy\,dz + (x^2y - z^3)\,dz\,dx + (2xy + y^2z)\,dx\,dy$$

其中 Σ 是由上半球体

$$0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

和圆盘

$$x^2 + y^2 \le a^2$$

所围成的封闭立体的外侧面。

解答

157 计算

$$\oiint_{\Sigma} 4xz\,dy\,dz - y^2\,dz\,dx + yz\,dx\,dy$$

其中 Σ 是平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ 所围立体的整个外侧面。

解答

12　第十二章　无穷级数

12.1　第一节　常数项级数

12.1.1　知识点

12.1.2　练习题

158　讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

解答

159　讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

解答

160 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\,\pi}{6}$$

积化和差公式

解答

12.2 第二节 数项级数及审敛法

12.2.1 知识点

12.2.2 练习题

161 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

解答

162 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$$

解答

163 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, \quad a>0$$

解答

164 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

解答

165 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$$

解答

166 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}\sin\frac{\pi}{3^{n}}$$

解答

第二节　数项级数及审敛法（续）(交错级数的审敛法)

167　讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$$

解答

168　讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$$

解答

169 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$$

解答

169a1 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{2^n\cdot n!}$$

解答

169a2 讨论级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

解答

12.3 第三节 幂级数

12.3.1 知识点

12.3.2 练习题

170 求下列级数的收敛区间

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

解答

171 求下列级数的收敛区间

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{n}}{\sqrt{n}}$$

解答

172　求下列级数的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{\,n-1}$$

解答

12.4 第四节 函数展成幂级数

12.4.1 知识点

12.4.2 练习题

173 将双曲正弦函数展开成 x 的幂级数。

解答

173a 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

解答

174 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

解答

第四节　函数展成幂级数（续）

175　将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数

$$\log x$$

解答

176　将下列函数展开成 $(x+4)$ 的幂级数

$$\frac{1}{x^{2}+3x+2}$$

解答

177 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$e^{x} \cos x$$

借助欧拉公式
解答