MAT1125
Videregående lineær algebra

OBLIG 5

Egil Furnes
Student: 693784

5.6

5.6.1

(i) T^*T er selvadjungert.

Bevis. Vi bruker at adjungering reverserer rekkefølgen av operatorer:

$$(T^*T)^* = T^{**}\,T^* = TT^*.$$

Siden T^*T og TT^* begge er operatorer på U, holder det å vise at disse er like. For alle $u, v \in U$ har vi

$$\langle T^*Tu,\, v\rangle = \langle Tu,\, Tv\rangle = \langle u,\, T^*Tv\rangle.$$

Dermed oppfyller T^*T definisjonen av å være selvadjungert, og vi konkluderer:

$$(T^*T)^* = T^*T.$$

□

(ii) T^*T har reelle, ikke-negative egenverdier (positiv semidefinit).

Bevis. La (λ, u) være et egenpar for T^*T, der $u \neq 0$. Da er

$$T^*Tu = \lambda u.$$

Ved å ta indreprodukt med u på begge sider får vi

$$\langle T^*Tu,\, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle.$$

Venstresiden kan skrives som

$$\langle T^*Tu,\, u\rangle = \langle Tu,\, Tu\rangle = \|Tu\|^2.$$

Dermed følger

$$\|Tu\|^2 = \lambda\|u\|^2.$$

Siden $\|Tu\|^2 \geq 0$ og $\|u\|^2 > 0$, får vi

$$\lambda = \frac{\|Tu\|^2}{\|u\|^2} \geq 0.$$

En egenverdi til en selvadjungert operator er alltid reell, så λ er reell og ikke-negativ. Dermed er T^*T positiv semidefinitt. □

5.6.2

La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Vi skal vise at operatoren $TT^* \in \mathcal{L}(V)$ har de samme (eller tilsvarende) egenskapene som T^*T.

(i) TT^* **er selvadjungert.**

Bevis. Adjungering snur rekkefølgen av operatorer, så

$$(TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^*.$$

Dermed er TT^* selvadjungert. □

(ii) TT^* **har reelle, ikke-negative egenverdier (positiv semidefinit).**

Bevis. La (μ, v) være et egenpar for TT^*, med $v \neq 0$. Da er

$$TT^*v = \mu v.$$

Indreprodukt med v gir

$$\langle TT^*v,\, v\rangle = \mu\langle v, v\rangle.$$

Venstresiden kan skrives som

$$\langle TT^*v,\, v\rangle = \langle T^*v,\, T^*v\rangle = \|T^*v\|^2.$$

Dermed får vi

$$\mu = \frac{\|T^*v\|^2}{\|v\|^2} \geq 0.$$

Egenverdier til selvadjungerte operatorer er alltid reelle, så $\mu \geq 0$. Dermed er TT^* positiv semidefinitt.
□

(iii) $\ker(TT^*) = \ker(T^*)$ **og** $\mathrm{im}(TT^*) = \mathrm{im}(T)$**.**

Bevis. Først viser vi at $\ker(TT^*) = \ker(T^*)$.

Hvis $T^*v = 0$, er det klart at $TT^*v = 0$, så $\ker(T^*) \subseteq \ker(TT^*)$.

Omvendt, anta at $TT^*v = 0$. Da følger

$$0 = \langle TT^*v,\, v\rangle = \langle T^*v,\, T^*v\rangle = \|T^*v\|^2,$$

og dermed $T^*v = 0$, så $v \in \ker(T^*)$. Dermed er

$$\ker(TT^*) = \ker(T^*).$$

For billedrommet bruker vi at enhver selvadjungert operator A oppfyller

$$\mathrm{im}(A) = (\ker(A))^{\perp}.$$

Vi har vist at $\ker(TT^*) = \ker(T^*)$, og siden TT^* er selvadjungert,

$$\mathrm{im}(TT^*) = (\ker(TT^*))^{\perp} = (\ker(T^*))^{\perp} = \mathrm{im}(T).$$

Dermed er

$$\mathrm{im}(TT^*) = \mathrm{im}(T).$$

□

5.6.6

Vi har fra Eksempel 5.6.5 at

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi skal vise at kvadratrøttene til egenverdiene til matrisen $AA^\top$ også er $\sqrt{360}$ og $\sqrt{90}$.

Trinn 1: Beregn $AA^\top$.

Vi får

$$\begin{aligned} AA^\top &= \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^2 + 11^2 + 14^2 & 4 \cdot 8 + 11 \cdot 7 + 14 \cdot (-2) \\ 8 \cdot 4 + 7 \cdot 11 + (-2) \cdot 14 & 8^2 + 7^2 + (-2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 333 & 81 \\ 81 & 117 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Trinn 2: Finn egenverdiene til $AA^\top$.

Egenverdiene er røttene til det karakteristiske polynomet

$$p(\lambda) = \det(AA^\top - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 333 - \lambda & 81 \\ 81 & 117 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$p(\lambda) = (333 - \lambda)(117 - \lambda) - 81^2 = \lambda^2 - 450\lambda + 32400.$$

Diskriminanten er

$$\Delta = 450^2 - 4 \cdot 32400 = 202500 - 129600 = 72900 = 270^2,$$

så

$$\lambda_{1,2} = \frac{450 \pm 270}{2} = 360 \quad \text{og} \quad 90.$$

Trinn 3: Kvadratrøttene av egenverdiene.

Kvadratrøttene av egenverdiene til $AA^\top$ er dermed

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{360}, \qquad \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{90},$$

som er de samme tallene som i Eksempel 5.6.5.

$\square$

5.6.12

La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom, og la

$$Tu \;=\; \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle u, u_k\rangle\, v_k, \qquad u \in U,$$

være en SVD av $T \in \mathcal{L}(U, V)$, der

$$(u_1, \dots, u_r) \subset U, \quad (v_1, \dots, v_r) \subset V$$

er ortonormale lister og $\sigma_1, \dots, \sigma_r > 0$ er singulærverdiene.

Vi skal vise at T^* har SVD

$$T^*v \;=\; \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle v, v_k\rangle\, u_k, \qquad v \in V.$$

For vilkårlige $u \in U$ og $v \in V$ har vi, ved definisjonen av adjungert operator,

$$\langle Tu, v\rangle_V = \langle u, T^*v\rangle_U.$$

Bruker vi uttrykket for Tu, får vi

$$\langle Tu, v\rangle_V = \Big\langle \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle u, u_k\rangle v_k,\ v \Big\rangle_V = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle u, u_k\rangle \langle v_k, v\rangle_V.$$

Siden indreproduktet er lineært i første argument, kan vi skrive høyresiden som

$$\sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle u, u_k\rangle \langle v_k, v\rangle = \left\langle u,\ \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle v, v_k\rangle u_k \right\rangle_U.$$

Dermed får vi

$$\langle u, T^*v\rangle_U = \left\langle u,\ \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle v, v_k\rangle u_k \right\rangle_U \qquad \text{for alle } u \in U.$$

Ved entydigheten av Riesz-representanten (eller bare at indreproduktet separerer vektorer) følger det at

$$T^*v = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle v, v_k\rangle\, u_k \quad \text{for alle } v \in V.$$

Dette er nettopp en SVD av T^*, med de samme singulærverdiene $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ og "byttede" ortonormale lister (v_k) og (u_k).

$\square$

5.7

5.7.5

La $A \in M_n(K)$ være inverterbar, og la

$$A = CDB^*$$

være singulærverdidekomposisjonen (SVD) til A, der

- $C, B \in M_n(K)$ er unitære (ortogonale dersom $K = \mathbb{R}$),
- $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ er diagonal med singulærverdier $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$.

Siden A er inverterbar, kan ingen singulærverdi være lik 0. Av Proposisjon 5.6.7 (i,iii) betyr dette at

$$\sigma_j > 0 \quad \text{for alle } j = 1, \dots, n,$$

slik at også D er inverterbar.

Påstand: SVD-en til A^{-1} er

$$A^{-1} = BD^{-1}C^*, \qquad \text{der } D^{-1} = \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_n).$$

Bevis. Vi bruker at inversen av et produkt av inverterbare matriser er produktet av inversene i motsatt rekkefølge:

$$A^{-1} = (CDB^*)^{-1} = (B^*)^{-1}D^{-1}C^{-1}.$$

Siden B og C er unitære, har vi

$$(B^*)^{-1} = B, \qquad C^{-1} = C^*.$$

Dermed får vi

$$A^{-1} = BD^{-1}C^*,$$

som ønsket.

For å se at dette faktisk er en SVD, observerer vi:

- B og C er fortsatt unitære matriser.
- D^{-1} er diagonal med positive diagonalelementer $1/\sigma_j > 0$.

Dermed har vi skrevet A^{-1} på formen

$$A^{-1} = (\text{unitær}) \cdot (\text{diagonal med positive elementer}) \cdot (\text{unitær})^*,$$

altså en singulærverdidekomposisjon med singulærverdier $1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_n$.

$\square$

6.1

6.1.3

Vi har funksjonene

$$e_k(t) := e^{ikt}, \qquad k \in \mathbb{Z},\ t \in [0, 2\pi],$$

og L^2-indreproduktet

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt.$$

Vi skal vise at $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal liste, det vil si at

$$\langle e_j, e_k\rangle_{L^2} = \delta_{jk} \qquad \forall\, j, k \in \mathbb{Z}.$$

For vilkårlige heltall j, k har vi

$$\langle e_j, e_k\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}\,\overline{e^{ikt}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ijt}e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\,dt.$$

Tilfelle 1: $j = k$**.** Da er eksponenten $i(j-k)t = 0$, så

$$\langle e_j, e_j\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1.$$

Dermed er $\|e_j\|_{L^2} = 1$ for alle j.

Tilfelle 2: $j \neq k$**.** Da er $j - k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, og vi kan integrere eksplisitt:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\,dt = \left[\frac{1}{i(j-k)}e^{i(j-k)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(j-k)}\big(e^{i(j-k)2\pi} - 1\big).$$

Siden $j - k$ er et heltall, er $e^{i(j-k)2\pi} = 1$, og derfor

$$\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\,dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle e_j, e_k\rangle_{L^2} = 0 \quad \text{for } j \neq k.$$

Vi har dermed vist at

$$\langle e_j, e_k\rangle_{L^2} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

altså $\langle e_j, e_k\rangle_{L^2} = \delta_{jk}$ for alle $j, k \in \mathbb{Z}$. Dermed er $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ en ortonormal liste i L^2.

$\square$

6.2

6.2.2

Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er periodisk med periode $a > 0$, det vil si

$$f(s + a) = f(s) \quad \text{for alle } s \in \mathbb{R}.$$

Vi skal vise at

$$f(s + ak) = f(s) \quad \text{for alle } s \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tilfelle $k \geq 0$. Vi bruker induksjon over k.

For $k = 0$ har vi $f(s + 0a) = f(s)$, så påstanden holder.

Anta at påstanden gjelder for et gitt $k \geq 0$, altså at $f(s + ak) = f(s)$ for alle s. Da er

$$f\big(s + a(k+1)\big) = f\big((s + ak) + a\big) = f(s + ak) = f(s),$$

der vi brukte periodisiteten $f(x+a) = f(x)$ i andre likhet. Dermed gjelder påstanden også for $k+1$, og ved induksjon for alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Tilfelle $k < 0$. La $k = -m$ med $m \in \mathbb{N}$. Vi vet fra tilfellet over at

$$f\big(s + am\big) = f(s) \quad \text{for alle } s.$$

Sett nå $s' = s + ak = s - am$. Da får vi

$$f(s) = f\big(s' + am\big) = f(s') = f(s + ak).$$

Altså er $f(s + ak) = f(s)$ også når $k < 0$.

Vi har dermed vist at $f(s + ak) = f(s)$ for alle $s \in \mathbb{R}$ og alle $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

6.2.3

La $k \in \mathbb{Z}$. Vi skal vise at funksjonene

$$f_k(t) := e^{ikt}, \qquad g_k(t) := \cos(kt), \qquad h_k(t) := \sin(kt),$$

er 2π-periodiske.

1) Periodisitet for $f_k(t) = e^{ikt}$.

Vi beregner

$$f_k(t + 2\pi) = e^{ik(t+2\pi)} = e^{ikt}e^{ik2\pi}.$$

Siden k er et heltall, er $e^{ik2\pi} = 1$, og dermed

$$f_k(t + 2\pi) = e^{ikt} = f_k(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Altså er f_k 2π-periodisk.

2) Periodisitet for $g_k(t) = \cos(kt)$.

Vi bruker Eulers formel

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Da får vi

$$g_k(t + 2\pi) = \cos\big(k(t + 2\pi)\big) = \frac{e^{ik(t+2\pi)} + e^{-ik(t+2\pi)}}{2} = \frac{e^{ikt}e^{ik2\pi} + e^{-ikt}e^{-ik2\pi}}{2}.$$

Igjen er $e^{ik2\pi} = e^{-ik2\pi} = 1$, så

$$g_k(t + 2\pi) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = \cos(kt) = g_k(t),$$

og g_k er 2π-periodisk.

3) Periodisitet for $h_k(t) = \sin(kt)$.

Vi bruker

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Da er

$$h_k(t + 2\pi) = \sin\big(k(t + 2\pi)\big) = \frac{e^{ik(t+2\pi)} - e^{-ik(t+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{ikt}e^{ik2\pi} - e^{-ikt}e^{-ik2\pi}}{2i}.$$

Som før er $e^{\pm ik2\pi} = 1$, så

$$h_k(t + 2\pi) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} = \sin(kt) = h_k(t).$$

Dermed er også h_k 2π-periodisk.

Vi har altså vist at f_k, g_k og h_k alle er 2π-periodiske for hvert heltall k. $\square$

6.2.10

(a) $f(t) \equiv 1$.

Vi beregner Fourierkoeffisientene

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,dt.$$

For $k = 0$:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

For $k \neq 0$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik2\pi} - 1}{-ik} = 0.$$

Dermed:

$$\widehat{f}_0 = 1, \qquad \widehat{f}_k = 0 \text{ for } k \neq 0.$$

Fourierrekken er derfor

$$f(t) = 1.$$

(b) $f(t) = t^2$ for $t \in [-\pi, \pi)$, 2π-periodisk utvidet.

Fourierkoeffisientene er

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\, dt.$$

Tilfellet $k = 0$:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Tilfellet $k \neq 0$: Skriv

$$e^{-ikt} = \cos(kt) - i \sin(kt).$$

Da får vi

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(kt)\, dt.$$

Integranden $t^2 \sin(kt)$ er odd, så integralet er 0. Dermed er $\widehat{f}_k$ reell:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt.$$

Et standard resultat (eller to ganger delvis integrasjon) gir

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt = \frac{4(-1)^k \pi}{k^2}.$$

Dermed:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4(-1)^k \pi}{k^2} = \frac{2(-1)^k}{k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Oppsummering:

$$\widehat{f}_0 = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \widehat{f}_k = \frac{2(-1)^k}{k^2} \quad \text{for } k \neq 0.$$

Fourierrekken i kompleks form:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{2(-1)^k}{k^2} e^{ikt}.$$

Eller i reell kosinusform (siden $\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k$):

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt), \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

(c) $f(t) = e^t$ for $t \in [0, 2\pi]$, 2π-periodisk utvidet.

Vi beregner

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^t e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(1-ik)t}\, dt.$$

For alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)t}\, dt = \left[\frac{e^{(1-ik)t}}{1-ik} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{(1-ik)2\pi} - 1}{1-ik}.$$

Siden $e^{-i2\pi k} = 1$ for heltall k, får vi

$$e^{(1-ik)2\pi} = e^{2\pi}.$$

Dermed:

$$\widehat{f}_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Fourierrekken:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)} e^{ikt}.$$

□