MAT1125
Videregående lineær algebra

OBLIG 2

Egil Furnes
Studentnummer: 693784

2.5

2.5.2

Først, definisjonen av *isomorfi* (fra læreboken). En *isomorfi* er en bijektiv lineær avbildning og to vektorrom U og V er isomorfe dersom det eksisterer en isomorfi $T : U \to V$ som skrives $U \approxeq V$.

La U, V være to n-dimensjonale vektorrom over K, med basiser $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ og $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$.

Vi definerer avbildning $\quad T : U \to V, \qquad T(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad (x_1, \dots, x_n) \in K^n$

Linearitet:

For

$\alpha, \beta \in K$ og $u = \sum x_i u_i, w = \sum y_i u_i$

Får vi

$T(\alpha u + \beta w) = T(\sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) u_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) v_i = \alpha T(u) + \beta T(w)$

Injektivitet:

Hvis $T(u) = 0$, dvs. $\sum x_i v_i = 0$, så må alle $x_i = 0$ siden $(v_1, \dots, v_n)$ er en basis og $u = 0$ og T er injektiv.

Siden $\dim U = \dim V = n$ er T også er surjektiv, og T en isomorfi.

2.5.3

I vektorrommet $\mathcal{P}_2$ er den kanoniske basisen $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2) = (1, t, t^2)$ og Newtons basis over $(t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2)$ er $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$ med $q_0(t) = 1, q_1(t) = t - t_0 = t, q_2(t) = (t - t_0)(t - t_1) = t(t-1)$

Gitt $p(t) = 2 - t + 3t^2$.

For koordinater i $\mathcal{B}$ har vi $p(t) = 2 * 1 + (-1) * t + 3 * t^2$ og dermed:

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

For koordinater i $\mathcal{C}$ har vi $p(t) = a_0 q_0(t) + a_1 q_1(t) + a_1 q_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2(t^2 - t) = a_0 + (a_1 - a_2)t + a_2 t^2$ og bruker vi $p(t) = 2 - t + 3t^2$ gir dette oss $a_0 = 2, \quad a_1 - a_2 = -1, \quad a_2 = 3 \Rightarrow a_1 = 2$:

$$[p]_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.5.6

Fra oppgave 1.4.6 $a)$ har vi at $[x]_\mathcal{C} = x$ for alle $x \in K^m$.

Fra $b)$ vet vi at for basisvektoren $u_j = e_j$ i K^n at $[u_j]_\mathcal{B} = e_j$.

Den j-te kolonnen i basisrepresentasjonen $[T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}$ er $[Tu_j]_\mathcal{C} = [T(e_j)]_\mathcal{C} = [Ae_j]_\mathcal{C} = Ae_j$,

som er den j-te kolonnen i A.

Ettersom dette gjelder for alle $j = 1, \dots, n$ består $[T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}$ av de samme kolonnene som A og derfor er $[T]_\mathcal{C}^\mathcal{B} = A$.

2.5.9

La U, V være endeligdimensjonale vektorrom med dim $U, V = n$ og la $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ være basiser for U, V.

Vi setter $A = [T]_\mathcal{C}^\mathcal{B} \in M_n(K)$.

Anta at T er en isomorfi. Da finnes $S = T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$ og ved $[\mathrm{id}_U]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = [\mathrm{id}_V]_\mathcal{C}^\mathcal{C} = I_n$ får vi:

$$I_n = [\mathrm{id}_V]_\mathcal{C}^\mathcal{C} = [TS]_\mathcal{C}^\mathcal{C} = [T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}\,[S]_\mathcal{B}^\mathcal{C} \quad \text{og} \quad I_n = [\mathrm{id}_U]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = [ST]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = [S]_\mathcal{B}^\mathcal{C}\,[T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}.$$

Da er $A = [T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}$ inverterbar med invers $[S]_\mathcal{B}^\mathcal{C}$.

Antar nå at $A = [T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}$ er inverterbar.

Vi definerer $S \in \mathcal{L}(V, U)$ ved $[S]_\mathcal{B}^\mathcal{C} = A^{-1}$

Da er:

$$[TS]_\mathcal{C}^\mathcal{C} = [T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}[S]_\mathcal{B}^\mathcal{C} = A\,A^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad [ST]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = [S]_\mathcal{B}^\mathcal{C}[T]_\mathcal{C}^\mathcal{B} = A^{-1}A = I_n,$$

Med andre ord er $TS = \mathrm{id}_V$ og $ST = \mathrm{id}_U$.

Da er T bijektiv og en *isomorfi*.

Da har vi vist at T er isomorfi $\iff$ $[T]_\mathcal{C}^\mathcal{B}$ er inverterbar.

2.5.10

a)

Med kanoniske basiser:

$$\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (1, t, t^2, t^3), \qquad \mathcal{C} = (p_0, p_1, p_2) = (1, t, t^2),$$

Får vi:

$$\begin{aligned} T(p_0) &= 0 = 0 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 \\ T(p_1) &= 1 = p_0 \\ T(p_2) &= 2t = 2p_1 \\ T(p_3) &= 3t^2 = 3p_2 \end{aligned}$$

Dermed blir kolonnene i $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ koordinatvektorene for $T(p_j)$ i basis $\mathcal{C}$:

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

Generelt gjelder $T(t^k) = k\,t^{k-1}$ for $k = 0, \ldots, n$ og vi rå en matrise som følgende

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix},$$

for indekser $i = 0, \ldots, n-1$ rader og $k = 0, \ldots, n$ kolonner.

2.6

I $\mathbb{R}^2$ med basis $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ og standardbasis $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er basisskiftematrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inversen gir omvendt skifte:

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.5

I P_2 med kanonisk basis $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2) = (1, t, t^2)$ og Newton-basis over $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2$:

$$\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$$

$$q_0 = 1,\ \ q_1 = t - t_0 = t,\ \ q_2 = (t - t_0)(t - t_1) = t(t - 1)$$

Kan vi skrive basisvektorene i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ som:

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1$$

$$p_2 = q_1 + q_2$$

Dermed er

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$