MAT1125
Videregående lineær algebra

OBLIG 3

Egil Furnes
Student: 693784

3.5

3.5.8

En *diagnoalmatrise* er en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ som har ikke-null elementer kun langs diagonalen: $(A)_{ij} = 0$ for alle $i \neq j$. Vis at

$$||A||_{\mathscr{L}} = \max_i |(A)_{ij}|$$

Vi lar $A = \text{diag}(a_1, \ldots, a_r)$ hvor $r = \min(m, n)$ for en vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$.

Da har vi at

$$Ax = (a_1x_1, \ldots, a_rx_r, 0, \ldots, 0)^T$$

og normen til Ax er følgende:

$$||Ax||_2^2 = \sum_{i=1}^{r} |a_i|^2|x_i|^2$$

Dersom vi bruker

$$\sum_{i=1}^{r} |a_i|^2|x_i|^2 \leq (\max_{1\leq i\leq r} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{r} |x_i|^2 = (\max_i |a_i|^2)||x_i||_2^2$$

får vi at

$$||A|| \leq \max_i |a_i|$$

La k være en indeks slik at $|a_k| = \max_i |a_i|$ og velg enhetsvektoren e_k, da er:

$$||Ae_k||_2 = ||a_ke_k||_2 = |a_k|$$

og vi finner

$$||A|| \geq |a_k| = \max_i |a_i|$$

Vi har da viset at

$$||A|| = \max_{1\leq i\leq r} |a_i|$$

4.1

Vi vet følgende. La U være er et vektorrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Et *indreprodukt* på U er en funksjon $\langle\cdot,\cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{K}$ slik at for alle $u, v, w \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$ er

$$(i) \quad \langle u, u\rangle \geq 0, \quad \langle u, u\rangle = 0 \quad \text{kun dersom} \quad u = 0 \tag{1}$$

$$(ii) \quad \langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \tag{2}$$

$$(iii) \quad \langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \tag{3}$$

$$(iv) \quad \langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \quad \text{(den komplekskonjugerte av}\langle v, u\rangle) \tag{4}$$

4.1.2 (a)

Bevis at indreproduktet er et additivt i andre argument: $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle u, v+w\rangle &= \overline{\langle v+w, u\rangle}\\ &= \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle}\\ &= \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle}\\ &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.\end{aligned}$$

4.1.2 (b)

Bevis at indreproduktet er konjugert-homogen i andre argument $\langle u, \alpha v\rangle = \bar{\alpha}\langle u, v\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle u, \alpha v\rangle &= \overline{\langle \alpha v, u\rangle}\\ &= \overline{\alpha \langle v, u\rangle}\\ &= \overline{\alpha}\ \overline{\langle v, u\rangle}\\ &= \overline{\alpha}\ \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

4.1.2 (c)

Bevis at dersom $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, er indreproduktet symmetrisk: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$. Vi har for alle u, v:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$$

Når $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ har vi at $\bar{z} = z, \forall z \in \mathbb{R}$ og dermed

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

4.1.3

La $u \in U$ være slik at $\langle u, v\rangle = 0$ for alle $v \in U$. Vis at $u = 0$. Er det samme sant dersom $\langle v, u\rangle = 0$ for alle $v\ inU$.

Vi setter $u = v$

$$\langle u, u\rangle = 0$$

Fra $4.1.1(i)$ vet vi at

$$\langle u, u\rangle \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$$

Antar nå $\langle v, u\rangle = 0$ for alle $v \in U$ og velger $v = u$

$$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

Vi har dermed at $u = 0$ i både $\langle u, v\rangle = 0$ og $\langle v, u\rangle = 0$.

4.1.5

Vi lar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Vis at de følgende er indreprodukter.

4.1.5 (a)

Det kanoniske indreproduktet i $\mathbb{K}^n$ er prikkproduktet

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{K}^n} := x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

For konjugertsymmetri har vi at:

$$\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\sum y_k \overline{x}_k} = \sum \overline{y_k} x_k = \langle x, y \rangle$$

For linearitet i første argument:

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \sum (x_{1,k} + x_{2,k}) \overline{y_k} = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \sum (\alpha x_k) \overline{y_k} = \alpha \langle x, y \rangle$$

For positiv deinitet:

$$\langle x, x \rangle = \sum |x_k|^2 \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k = 0 \quad \forall k \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

4.1.5 (c)

La $l^2(\mathbb{K}) := \{(a_1, a_2, \dots) : \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty\}$. Vi definerer l^2-*indreproduktet* som

$$\langle a, b \rangle_{l^2} := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

Viser at det er veldefinert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \overline{b_k}| \leq (\sum |a_k|^2)^{1/2} (\sum |b_k|^2)^{1/2} < \infty$$

Viser konjugertsymmetri:

$$\overline{\langle b, a \rangle} = \overline{\sum b_k \overline{a_k}} = \sum \overline{b_k} a_k = \langle a, b \rangle$$

Positiv definitet

$$\langle a, a \rangle = \sum |a_k|^2 \geq 0$$

$$\langle a, a \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad |a_k| = 0 \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

4.1.5 (d)

For $f, g \in C([a,b], \mathbb{K})$ definerer vi L^2-indreproduktet

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

Konjugertsymmetri:

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\int g\overline{f}} = \int \overline{g} f = \langle f, g \rangle$$

Linearitet:

$$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \int (f_1 + f_2)\overline{g} = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$$

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int (\alpha f)\overline{g} = \alpha \langle f, g \rangle$$

Positiv definitet:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0$$

4.2

4.2.2

Vi at L^2-normen $||f||_{L^2} := (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{1/2}$ er normen indusert av L^2-indreproduktet $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.

Normen indusert av et indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definert som

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

hvor vi ved L^2-indreproduktet får

$$\langle f, f \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

Med dette har vi

$$\text{Indusert } ||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = ||f||_{L^2}$$

4.3

4.3.2

Vi betrakter $\mathbb{R}^2$ med standardindreproduktet. Vis at listene

$$\mathscr{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

og

$$\mathscr{C} := \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

er ortonormale. Tegn vektorene i hver av listene og forklar hvordan man kan se at de to listene er ortonormale.

Viser at $\mathscr{B}$ er ortonormal med normer lik 1

$$\langle (1,0), (1,0) \rangle = 1$$

$$\langle (0,1), (0,1) \rangle = 1$$

og for ortogonalitet 0

$$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 0$$

Viser ortonormalitet for $\mathscr{C}$ ved normer lik 1

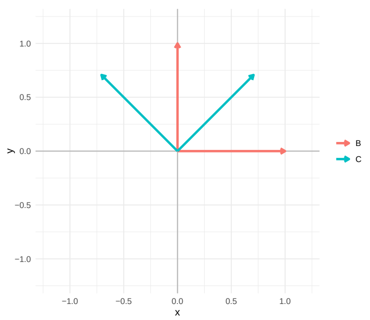
$$\langle u_1, u_1 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

og viser med det samme ortogonalitet

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Vi har at $\mathscr{B}$ er standardbasiser i $\mathbb{R}^2$ og ortogonale enhetsvektorer langs x og y aksene. For $\mathscr{C}$ har vi enhetsvektorer langs $y = x$ og $y = -x$ vinkelrette og lenge 1.



4.3.3

Vi at en ortogonal liste $u_1, \dots, u_n$ automatisk er lineært uavhengig.

Antar $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0$ og tar indreproduktet med u_k på andre side

$$\langle \sum_{j=1}^{n} a_j u_j, u_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle u_j, u_k \rangle = a_k \langle u_k, u_k \rangle$$

Ettersom $\langle u_k, u_k \rangle = 0$ når $j \neq k$.

Vi har $\langle 0, u_k \rangle = 0$ og dermed

$$a_k \langle u_k, u_k \rangle = 0$$

Ettersom $u_k \neq 0$ er $\langle u_k, u_k \rangle > 0$ så har vi a_k for hvert $k = 1, \dots, n$ og alle vi får 0 for alle ledd.