Eksempler på eksamensoppgaver i MAT1125

Ulrik Skre Fjordholm

5. desember 2025

Oppgave 1. Definer det komplekse vektorrommet

$$\begin{aligned} U := \big\{&\text{alle funksjoner } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ på formen} \\ &f(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ for } \alpha, \beta \in \mathbb{C}\big\}. \end{aligned}$$

(**a**) Forklar kort hvorfor U er et vektorrom.

(**b**) Finn en basis for U.

(**c**) Finn dimensjonen til U.

Oppgave 2. La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ være en lineær avbildning.

(**a**) Definer bildet og kjernen til T.

(**b**) Vi lar nå T være gitt ved matrise-vektor-multiplikasjonen

$$T(x) := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \forall\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vis at $\operatorname{im} T$ er utspent av de første to kolonnene i matrisen ovenfor.

(**c**) Finn dimensjonen til kjernen og bildet til T.

Oppgave 3.

(**a**) Definer hva det vil si at en liste av vektorer er lineært uavhengig.

(**b**) Definer hva det vil si at en liste av vektorer er ortogonal og ortonormal.

(**c**) Vis at alle ortogonale lister er lineært uavhengige. Er det samme sant for ortonormale lister?

Oppgave 4. Vi betrakter det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^2$.

(**a**) Vis at $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, der

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(**b**) La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved matrise-vektor-multiplikasjonen $T(x) := Ax$ (for $x \in \mathbb{R}^2$) for en matrise $A \in M_2(\mathbb{R})$. Du får oppgitt at

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(der $\mathscr{B}$ er basisen fra oppgave (**a**)). Finn matrisen A.

Oppgave 5. Vi betrakter vektorrommet $\mathbb{R}^n$ med normene

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |(x)_k| \qquad \text{og} \qquad \|x\|_{\max} := \max_{k=1,\dots,n} |(x)_k| \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^n$$

(der $(x)_k$ er element nummer k i x).

(**a**) Definer hva det vil si at en følge i $\mathbb{R}^n$ konvergerer med hensyn på $\|\cdot\|_1$.

(**b**) Bevis (enten direkte eller ved å referere til resultater i boka) at dersom en følge i $\mathbb{R}^n$ er konvergent med hensyn på $\|\cdot\|_1$, er den også konvergent med hensyn på $\|\cdot\|_{\max}$.

Oppgave 6. La $U := C^0([0,1], \mathbb{R})$, mengden av kontinuerlige funksjoner fra $[0,1]$ til $\mathbb{R}$.

(**a**) La $\|f\|_{\sup} := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ for $f \in U$. Vis at $\|\cdot\|_{\sup}$ er en norm på U.

(**b**) Definer $T\colon U \to U$ ved $Tf := 2f$. Vis at T er veldefinert, lineær og kontinuerlig.

Oppgave 7. For en $n \in \mathbb{N}$ lar vi $\mathscr{P}_n := \{\text{alle reelle polynomer av grad høyst } n\}$. La $T\colon \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$ være gitt ved

$$Tp := \frac{dp}{dt}, \qquad p \in \mathscr{P}_3.$$

(**a**) Forklar hvorfor T er en veldefinert, lineær avbildning fra $\mathscr{P}_3$ til $\mathscr{P}_2$. (Du må altså vise at $Tp \in \mathscr{P}_2$ for alle $p \in \mathscr{P}_3$, og at T er lineær.)

(**b**) Er T injektiv?

(**c**) Er T surjektiv?

(**d**) La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være standardbasisene (de "kanoniske basisene") i henholdsvis $\mathscr{P}_3$ og $\mathscr{P}_2$. Finn basisrepresentasjonsmatrisen $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

(**e**) La $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ være en vilkårlig reell 3×4-matrise. Finnes det da en $S \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_3, \mathscr{P}_2)$ slik at $[S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = A$?

(**f**) Vi utstyrer $\mathscr{P}_n$ med normen $\|p\|_{\sup} := \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$. (Du trenger ikke å vise at dette er en norm på $\mathscr{P}_n$.) Bevis (enten direkte eller ved å referere til resultater i boka) at T er kontinuerlig.

(**g**) Bruk resultatet i oppgave (**f**) til å vise at det finnes et tall $C > 0$ slik at

$$\left\| \frac{dp}{dt} \right\|_{\sup} \leqslant C \|p\|_{\sup} \qquad \forall\, p \in \mathscr{P}_3.$$

Oppgave 8. La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, og la $T \in \mathcal{L}(U)$ (en lineær avbildning fra U til U).

(**a**) Vis at dersom T er normal, er

$$\|Tu\| = \|T^* u\| \qquad \forall\, u \in U.$$

(**b**) Er det samme sant om T er selvadjungert? Hva om T er unitær?

Oppgave 9. Vi betrakter det reelle vektorrommet $\mathcal{P}_n$ definert tidligere. For $p, q \in \mathcal{P}_n$ definerer vi

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(t)q(t)(1+t)\,dt.$$

Vis at dette er et indreprodukt på $\mathcal{P}_n$.

Oppgave 10. La U være et indreproduktrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, la $T \in \mathcal{L}(U)$ være selvadjungert, og la λ være en egenverdi til T. Bevis at $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hint: Start med uttrykket $\lambda\|v\|^2$, der v er en tilhørende egenvektor.

Oppgave 11. La p_0, p_1, p_2 være funksjonene

$$p_0(t) := (t+1)^2, \quad p_1(t) := (t-1)^2, \quad p_2(t) := t^2.$$

(**a**) Vis at (p_0, p_1, p_2) er en basis for $\mathcal{P}_2$.

Hint: Skriv ut en lineærkombinasjon av funksjonene, og sett inn noen spesifikke verdier for t.

(**b**) Finn basisskiftematrisen fra standardbasisen til basisen (p_0, p_1, p_2).

Oppgave 12. La U og V være normerte vektorrom over $\mathbb{R}$.

(**a**) La $f, g\colon U \to V$ være kontinuerlige funksjoner. Vis at funksjonen $f + g$ er kontinuerlig.

(**b**) La $f\colon U \to V$ være kontinuerlig og la $\alpha \in \mathbb{R}$. Vis at αf er kontinuerlig.

(**c**) Forklar hvorfor mengden $C(U, V) := \{$alle kontinuerlige funksjoner fra U til $V\}$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$.

Oppgave 13. Gitt følgende matrise A, finn

(i) den reduserte singulærverdidekomposisjonen til A,

(ii) dimensjonen til kjernen til A,

(iii) dimensjonen til bildet til A,

(iv) operatornormen $\|A\|_{\mathcal{L}}$,

(v) (om A er kvadratisk og inverterbar) kondisjonstallet til A.

(**a**) $A := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(**b**) $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(**c**) $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(**d**) $A := \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(**e**) $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(**f**) $A := \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

(**g**) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(**h**) $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(**i**) $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 14. Matrisen $A := \begin{pmatrix} 11/2 & 3 \\ -15/2 & -4 \end{pmatrix}$ har egenverdier 1 og 1/2.

(i) Finn diagonaliseringen av A.

(ii) Finn løsningen av differensligningen $x_{k+1} = Ax_k$, $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(iii) Hva skjer med løsningen x_k når $k \to \infty$?

Oppgave 15. La (u_1, u_2, u_3) være følgende liste av vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(**a**) La $V := \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3)$. Vis at V har dimensjon 3.

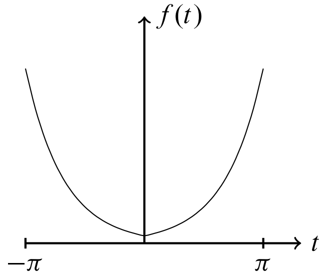
(**b**) Finn en ortonormal basis for V. (Her bruker vi prikkproduktet i $\mathbb{R}^4$.)

Oppgave 16.

(**a**) La $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(t) := e^{|t|} \qquad \text{for } t \in [-\pi, \pi).$$

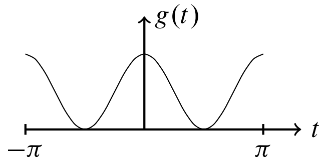
Beregn fourierrekken til f. På hvilken måte konvergerer denne fourierrekken mot f?



(b) La $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ være funksjonen

$$g(t) := \cos^2(t) \qquad \text{for } t \in [-\pi, \pi)$$

Forklar hvorfor fourierrekken til g konvergerer mot g både uniformt og i L^2-normen.



Oppgave 17. La U og V være endeligdimensjonale, og la $T \in \mathscr{L}(U, V)$. Vis at dersom $\dim U = \dim V$, så er T injektiv *hvis og bare hvis* T er surjektiv.

Oppgave 18. La U være et vektorrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, og la $T \in \mathscr{L}(U)$. Definer

$$\langle u, v \rangle_T := \langle Tu, Tv \rangle \qquad \forall\, u, v \in U.$$

Bevis at $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ er et indreprodukt på U *hvis og bare hvis* T er injektiv.

Oppgave 19. La U være et vektorrom, og anta at $S, T \in \mathscr{L}(U)$ er slik at $\operatorname{im} S \subseteq \ker T$. Vis at $(ST)^2 = 0$.

Oppgave 20.

(a) Gi et eksempel på $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ slik at $\operatorname{im} T = \ker T$.

(b) Bevis at det ikke finnes $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5)$ slik at $\operatorname{im} T = \ker T$.

Oppgave 21. La $T \in \mathscr{L}(U, V)$, der $\dim U = 9$ og $\dim V = 7$, og anta at kjernen til T har dimensjon 2. Vis at T er surjektiv.

Oppgave 22. La $\ell^1(\mathbb{R})$ være det reelle vektorrommet

$$\ell^1(\mathbb{R}) := \Big\{(a_1, a_2, \dots) : a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\Big\},$$

og definer de to normene

$$\|a\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \qquad \|a\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$$

for $a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^1(\mathbb{R})$. (Du trenger ikke å vise at disse er normer på $\ell^1(\mathbb{R})$).

Er normene $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalente? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 23. La U være et endeligdimensjonalt normert vektorrom, og la $E \subseteq U$ være en lukket, begrenset mengde. La $z \in E$.

(**a**) Definer $f\colon E \to \mathbb{R}$ ved $f(u) := \|u - z\|$. Bevis at f er kontinuerlig.

(**b**) Bevis at det finnes en $v \in E$ slik at

$$\|v - z\| \leqslant \|u - z\| \qquad \forall\, u \in E.$$

Oppgave 24. La U være et vektorrom og $T \in \mathscr{L}(U)$. Vis at T er injektiv hvis og bare hvis $\lambda := 0$ *ikke* er en egenverdi av T.

Oppgave 25. La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{R}$, og la $T \in \mathscr{L}(U)$ være selvadjungert. Vis at de følgende utsagnene er ekvivalente:

(i) Alle egenverdiene til T er positive

(ii) For alle ikke-null $u \in U$ er $\langle Tu, u\rangle > 0$.

Hint: Bruk spektralteoremet.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	11. desember 2024
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Redusert trappeform av matriser.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til vedlegget med reduserte trappeformer av matriser der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

Betrakt matrisen A gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

La W betegne kolonnerommet til A, altså $W = \mathrm{Col}A$.

a

Finn en basis for W som består av kolonnevektorer fra matrisen A. Skriv de gjenværende kolonnevektorene i A som lineærkombinasjoner av vektorer fra denne basisen.

b

Betrakt nå matrisen C og vektoren $\mathbf{b}$ gitt ved

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Finn en minste kvadraters løsning av ligningssystemet $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

c

Betrakt $\mathbb{R}^3$ som et indreproduktrom med skalarproduktet (også kalt prikkproduktet). Finn projeksjonen $\mathrm{proj}_W \mathbf{b}$ av vektoren $\mathbf{b}$ ned på W.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Betrakt de følgende to matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar og om B er diagonaliserbar (du trenger ikke å finne diagonaliseringer). Begrunn svaret ditt.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av alle polynomer av grad høyst lik 3. Sett $W = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(-1) = 0\}$, og definer $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$p_1(t) = t + 1, \qquad p_2(t) = t^2 - 1, \qquad p_3(t) = t^3 + 1.$$

Sett $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$.

a

Vis at W er et underrom av $\mathbb{P}_3$ og at $\mathcal{B}$ er en basis for W.

b

Definer elementer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$q_1(t) = t + 1, \qquad q_2(t) = (t+1)^2, \qquad q_3(t) = (t+1)^3.$$

Sett $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$. Du kan ta det for gitt at $\mathcal{C}$ også er en basis for W. Finn overgangsmatrisen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, altså (3×3)-matrisen M som tilfredsstiller $M[p]_{\mathcal{C}} = [p]_{\mathcal{B}}$ for alle $p \in W$.

c

Vi betrakter W som et indreproduktrom med indreproduktet

$$\langle p, q \rangle = \int_{-2}^{0} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \qquad p, q \in W.$$

Du kan ta det for gitt at dette definerer et indreprodukt på W. Finn en ortonormal basis for W.

Oppgave 4

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 3.)

a

Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A og finn de tilhørende egenverdiene. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $P^\intercal AP = D$, der $P^\intercal$ betegner den transponerte av P.

b

Betrakt kurven i $\mathbb{R}^2$ bestående av de punkter $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ slik at

$$x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_2^2 = 2.$$

Avgjør om kurven er en sirkel, parabel, ellipse eller hyperbel ved å foreta et variabelskifte som eliminerer kryssleddet. Skisser kurven i planet.

Oppgave 5

I denne oppgaven betrakter vi $\mathbb{R}^n$ som et indreproduktrom med skalarproduktet (også kalt prikkproduktet). Vi anser elementene i $\mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer, altså $(n \times 1)$-matriser. La $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ og betrakt $(n \times n)$-matrisen

$$R = I - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal$$

der I betegner $(n \times n)$ identitetsmatrisen og $\mathbf{v}_1^\intercal$ betegner den transponerte av $\mathbf{v}_1$, altså en $(1 \times n)$-matrise. La også $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Vis at R er en ortogonal matrise. Finn matriserepresentasjonen til T med hensyn på $\mathcal{B}$, altså $(n \times n)$-matrisen M slik at $[T(\mathbf{x})]_\mathcal{B} = M[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, og gi en geometrisk tolkning av T.

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)

Vedlegg: Redusert trappeform av matriser

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 14 & -8 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Prøveeksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	22. november 2024
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Reduserte trappeformer.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Betrakt følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a Vis at $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ utgjør en basis for $W = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, og finn koordinatvektorene $[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}}$ og $[\mathbf{v}_4]_{\mathcal{B}}$ til $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

b Finn en minste kvadraters løsning av ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 3, \end{aligned}$$

altså tall $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ som minimerer uttrykket

$$(x_1 - x_2 - 2)^2 + (2x_1 + 3x_2 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_1 - 2x_2 - 3)^2.$$

Oppgave 2

La A være 3×3-matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

a Finn egenverdiene til A. Angi en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A.

b For en initialvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, betrakt følgen av vektorer $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ gitt ved $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ for $k \geq 0$. Bestem de initialvektorer som gjør at denne følgen konvergerer. Bestem også de initialvektorer som gjør at følgen konvergerer mot nullvektoren i $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av polynomer av grad høyst lik 3 med de vanlige punktvise operasjonene for funksjonsrom. Definer en lineær avbildning $\phi\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$ ved

$$\phi(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\,\mathrm{d}t, \qquad p \in \mathbb{P}_3.$$

Sett $W = \ker(\phi)$, kjernen til ϕ. Definer polynomer $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$p_1(t) = t, \qquad p_2(t) = 1 - 3t^2, \qquad p_3(t) = t^3.$$

a Vis at disse tre polynomene er elementer i W og at de utgjør en basis for W.

I resten av oppgaven betrakter vi $\mathbb{P}_3$ som et indreproduktrom med indreproduktet

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \qquad p, q \in \mathbb{P}_3.$$

b Finn en ortogonal basis for W.

c Skriv polynomet $p \in \mathbb{P}_3$ gitt ved $p(t) = t^2$ som en sum av et element i W og et element i $W^\perp$. Hva er $\mathrm{proj}_W p$?

Oppgave 4

Betrakt den kvadratiske formen Q på $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

a Finn en ortogonal 2×2-matrise P slik at substitusjonen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

gjør $Q(x_1, x_2)$ om til en kvadratisk form uten kryssledd, altså på formen $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ for passende konstanter $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(Fortsettes på side 3.)

b Betrakt kurven i $\mathbb{R}^2$ bestående av de punkter (x_1, x_2) slik at

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0.$$

Representerer denne kurven en parabel, hyperbel, ellipse eller sirkel? Begrunn svaret ditt og skisser kurven.

Oppgave 5

La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise med ikke-negative egenverdier. Vis at det finnes en $n \times n$-matrise B slik at $B^2 = A$. (Hint: Betrakt først tilfellet der A er diagonal.)

Radreduserte matriser

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 13 \\ 3 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 20/9 \\ 0 & 1 & -1/9 \end{bmatrix}.$$

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 1. desember 2023
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Matlab-utskrift
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til Matlab-utskriften der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1. La $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2,$$

der koeffisientene c_0, c_1 og c_2 er reelle tall. Betrakt datapunktene gitt ved

$$(t_1, s_1) = (1, 2), \quad (t_2, s_2) = (2, 1), \quad (t_3, s_3) = (3, 0) \quad \text{og} \quad (t_4, s_4) = (4, 2).$$

a) Vis at kravet $p(t_i) = s_i$ for $i = 1, 2, 3, 4$ gir likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at dette likningssystemet ikke har noen løsning.

b) Begrunn at verdiene av c_0, c_1 og c_2 som minimaliserer kvadratavviket

$$S = \sum_{i=1}^{4} \Big[p(t_i) - s_i \Big]^2$$

gis av likningen

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 38 \end{bmatrix}.$$

Finn verdiene av c_0, c_1 og c_2 som minimaliserer S.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. La θ være et reelt tall, og la A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \end{bmatrix}$$

a) La $A^\intercal$ være den transponerte av matrisen A. Finn egenverdiene til matrisen $A^\intercal A$ og singulærverdiene til A.

b) Finn en singulærverdidekomposisjon $A = U\Sigma V^\intercal$ av A.

Gi en geometrisk beskrivelse av hva transformasjonen $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gjør med en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Oppgave 3. La V være vektorrommet av funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på formen

$$f(x) = ae^x + be^{-x},$$

der a og b er reelle tall, med de vanlige vektorromsoperasjonene $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ og $(kf)(x) = k\cdot f(x)$ for funksjonsrom, der $k \in \mathbb{R}$. La funksjonene cosh og sinh være definert ved

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{og} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

a) La $B = \{e^x, e^{-x}\}$. Begrunn at B er en basis for V.

b) La $B' = \{\cosh x, \sinh x\}$. Begrunn at B' også er en basis for V, og finn overgangsmatrisen P fra B til B', altså matrisen som er slik at

$$[f]_{B'} = P \cdot [f]_B \qquad \text{for alle } f \in V.$$

c) La $T : V \to V$ være definert ved $T(f) = f'$, der f' er den deriverte av f. Vis at T er en lineærtransformasjon, og at avbildningen $T^2 : V \to V$ definert ved $T^2(f) = T(T(f))$ er identitetstransformasjonen på V. Forklar hvorfor T er inverterbar.

d) Finn matrisene $[T]_B$ og $[T]_{B'}$ til T med hensyn på B og B'. Finn egenverdiene til T. Avgjør om B og B' er egenbasiser for T, det vil si avgjør om de består av egenvektorer for T.

e) Vi definerer $\langle f, g\rangle$ for $f, g \in V$ ved å la $\langle f, g\rangle$ være prikkproduktet av koordinatvektorene $[f]_{B'}$ og $[g]_{B'}$ i $\mathbb{R}^2$, altså

$$\langle f, g\rangle = ([f]_{B'})^\intercal \, [g]_{B'}$$

Vis at $\langle f, g\rangle$ er et indreprodukt på V, og at basisen B' er ortonormal med hensyn til dette indreproduktet.

f) Finn $\langle e^{-x}, \sinh x\rangle$ med indreproduktet definert i e). Vis at for alle indreprodukter på V slik at basisen B' er ortonormal, vil indreproduktet av e^{-x} og $\sinh x$ ha den samme verdien.

SLUTT

VEDLEGG TIL EKSAMEN MAT1120 FREDAG 1. DESEMBER 2023: MATLAB-UTSKRIFT

A =

1	1	1	2
1	2	4	1
1	3	9	0
1	4	16	2

```
>> B=rref(A)
```

B =

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

C =

4	10	30	5
10	30	100	12
30	100	354	38

```
>> D=rref(C)
```

D =

1.0000	0	0	5.2500
0	1.0000	0	-3.8500
0	0	1.0000	0.7500

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Lørdag 18. november 2023 (prøveeksamen)
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00 (gjennomgang kl. 15 i auditorium 5)

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Matlab-utskrift
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til Matlab-utskriften der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1. La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \\ -5 & 15 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for nullrommet $\mathrm{Nul}A$ og en basis for kolonnerommet $\mathrm{Col}A$ til matrisen A.

b) Finn en ortonormal basis for $\mathrm{Nul}A$.

Oppgave 2. La $V = \mathbf{P}_1$ være vektorrommet av polynomer

$$p(t) = c_0 + c_1 t,$$

der $c_0, c_1 \in \mathbf{R}$. La avbildningene $T : V \to V$ og $S : V \to V$ være definert ved

$$T(p) = p(1) + p(0)t \quad \text{og} \quad S(p) = p + t.$$

a) Vis at T er en lineærtransformasjon, men at S *ikke* er en lineærtransformasjon.

b) Finn matrisen $[T]_B$ til T med hensyn på basisen $B = \{1, t\}$ for V.

(Fortsettes på side 2.)

c) Begrunn at $B' = \{1+t, 1-t\}$ også er en basis for V, og finn matrisen $[T]_{B'}$ til T med hensyn på B'.

d) Finn overgangsmatrisen P fra B til B', altså matrisen som er slik at $[p]_{B'} = P \cdot [p]_B$ for alle $p \in V$. Finn også overgangsmatrisen Q fra B' til B, altså matrisen Q som er slik at $[p]_B = Q \cdot [p]_{B'}$ for alle $p \in V$.

Oppgave 3. Onkel Skrue har funnet et gammelt brev som forteller om en nedgravd skatt. Brevet sier:

> *Kongen, som var glad i tallmagi, befalte at skatten skulle graves ned på breddegrad B og lengdegrad L slik at*
>
> $$5B + 8L = 200, \quad 2B + L = \tfrac{1029}{2} \quad \textit{og} \quad B + 6L = \tfrac{1696}{5}.$$
>
> *Det klarte vi ikke, men vi gjorde så godt vi kunne.*

Til tross for sin brede erfaring fra økonomiske beregninger, som gjør at han aldri regner feil, klarer ikke Skrue å finne B og L ved hjelp av opplysningene i brevet.

a) Gi en mulig forklaring på Skrues manglende suksess.

I frustrasjon spør onkel sine tre nevøer Ole, Dole og Doffen om hjelp. Guttene merker seg særlig brevets ord "så godt vi kunne". De slår opp i Hakkespettbokens kapittel *Hvordan løse uløselige problemer*, og ved hjelp av dette kommer de frem til at B og L kanskje oppfyller likningene

$$30B + 48L = \frac{11841}{5} \qquad \text{og} \qquad 48B + 101L = \frac{41\,497}{10}$$

b) Forklar hvordan guttene kan ha regnet seg frem til disse likningene. (Hakkespettboken har et omfattende kapittel om lineær algebra.) Finn breddegraden B og lengdegraden L likningene leder til.

c) Doffen synes det er rart at den tallglade kongen ikke ganget opp nevnerne i likningene for B og L, slik at de fikk den penere formen

$$5B + 8L = 200, \quad 4B + 2L = 1029 \quad \text{og} \quad 5B + 30L = 1696.$$

Til sin store overraskelse finner Doffen at dette leder til *andre* likninger for B og L enn de fra b), med helt andre (og geografisk umulige) løsninger for breddegrad og lengdegrad. Forklar dette.

Oppgave 4. La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 3t & 0 & 2\sqrt{1-t^2} \\ 3\sqrt{1-t^2} & 0 & -2t \end{bmatrix},$$

der $t \in (0,1)$ er et reelt tall. Finn en singulærverdidekomposisjon (SVD) $A = U\Sigma V^\intercal$ av matrisen A.

SLUTT

VEDLEGG TIL PRØVEEKSAMEN MAT1120 LØRDAG 18. NOVEMBER 2023: MATLAB-UTSKRIFT

```
A =

   -2     6     2    -1

    1    -3    -4     2

   -5    15     0     0

   -1     3    -2     1

>> B=rref(A)

B =

    1    -3     0     0

    0     0     1    -1/2

    0     0     0     0

    0     0     0     0


>> 5*200 + 1029 + 1696/5
ans = 11841/5

>> 8*200 + 1029/2 + 6*(1696/5)
ans = 41497/10

M =

   30     48     11841/5

   48    101     41497/10

>> R=rref(M)

R =

    1     0     551/10

    0     1     149/10

>> 5*200 + 4*1029 + 5*1696
ans = 13596
>> 8*200 + 2*1029 + 30*1696
ans = 54538

M =

   66    198     13596

  198    968     54538

>> R=rref(M)

R =

    1     0    1627/17

    0     1     625/17
```

Løsningsforslag til enkelte eksempeleksamensoppgaver i MAT1125

Ulrik Skre Fjordholm

7. desember 2025

Løsning på oppgave 1.

(**a**) U er definert som spennet av funksjonene cos og sin, som begge ligger i det komplekse vektorrommet $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Altså er U et underrom, og er derfor i seg selv et vektorrom.

Alternativ løsning: U er definert som alle (komplekse) lineærkombinasjoner av funksjonene cos og sin. Dermed vil også summen av elementer i U, og skalarmultipler av elementer i U, ligge i U. Nullelementet er nullfunksjonen, og den negative inversen av $f = \alpha \cos + \beta \sin$ er $-f := -\alpha \cos - \beta \sin$. De andre vektorromaksiomene følger som for alle andre funksjonsrom vi har sett.

(**b**) Siden U er definert som spennet av cos og sin, vil listen $(\cos, \sin)$ utspenne U. For å se at disse er lineært uavhengige, lar vi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ være slik at $f := \alpha \cos + \beta \sin = 0$. Da er

$$0 = f(0) = \alpha \cos(0) + \beta \sin(0) = \alpha,$$

så $\alpha = 0$, og

$$0 = f(\pi/2) = \beta \sin(\pi/2) = \beta,$$

så $\beta = 0$. Altså er listen lineært uavhengig, og er dermed en basis for U.

(**c**) Basisen i forrige deloppgave har to elementer, så U har dimensjon 2.

Løsning på oppgave 2.

(**a**) Bildet til T er mengden

$$\operatorname{im} T := \{Tx : x \in \mathbb{R}^3\}$$

og kjernen til T er mengden

$$\ker T := \{x \in \mathbb{R}^3 : Tx = 0\}.$$

(**b**) La $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^4$ være kolonnene i matrisen. Da er

$$T(x) = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3,$$

altså en lineærkombinasjon av $\{u_1, u_2, u_3\}$. Vi observerer at vi kan skrive $u_3 = u_1 - u_2$, slik at

$$T(x) = (x_1 + x_3)u_1 + (x_2 - x_3)u_2.$$

Altså er $T(x) \in \operatorname{span}(\{u_1, u_2\})$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, slik at $\operatorname{im} T \subseteq \operatorname{span}(\{u_1, u_2\})$. Motsatt er $\operatorname{im} T = \operatorname{span}(\{u_1, u_2, u_3\}) \supseteq \operatorname{span}(\{u_1, u_2\})$. Altså er det likhet mellom mengdene: $\operatorname{im} T = \operatorname{span}(\{u_1, u_2\})$. Dette beviser utsagnet.

(**c**) Vi ser at kolonnene u_1, u_2 er lineært uavhengige, for om $x_1u_1 + x_2u_2 = 0$ sier andre komponent at $-x_2 = 0$, og tredje komponent sier at $x_1 = 0$. Altså er $\{u_1, u_2\}$ en basis for $\operatorname{span}(\{u_1, u_2\}) = \operatorname{im} T$, slik at $\dim \operatorname{im} T = 2$. Av dimensjonssatsen får vi da

$$\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{im} T = 3 - 2 = 1.$$

Løsning på oppgave 3.

(**a**) La U være et vektorrom over en kropp $\mathbb{K}$ og la $u_1, \dots, u_n \in U$. Listen av vektorer $\{u_1, \dots, u_n\}$ er *lineært uavhengig* om følgende implikasjon er sann:

$$\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ og } \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0.$$

(**b**) La U være et indreproduktrom over $\mathbb{K}$ og la $u_1, \dots, u_n \in U$. Listen $\{u_1, \dots, u_n\}$ er *ortogonal* dersom ingen av vektorene er lik nullvektoren, og om $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ for alle $j, k = 1, \dots, n$, $j \neq k$.

Listen er *ortonormal* om den er ortogonal, og om $\|u_k\| = 1$ for $k = 1, \dots, n$ (der $\|\cdot\|$ er normen indusert av indreproduktet). En annen måte å si dette på er at $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$ for $j, k = 1, \dots, n$.

(**c**) La $\{u_1, \dots, u_n\}$ være en ortogonal liste, og anta at $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ er slik at

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = 0.$$

Ta indreproduktet mellom denne ligningen og vektoren u_j:

$$0 = \left\langle \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k, u_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{=0 \text{ for } k \neq j} = \alpha_j \langle u_j, u_j \rangle = \alpha_j \|u_j\|^2.$$

Siden listen er ortogonal er $u_j \neq 0$, så vi kan dele på $\|u_j\|^2$ på begge sider og få $\alpha_j = 0$. Siden argumentet gjelder for alle j, får vi at $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$, slik at listen er lineært uavhengig.

Det samme er sant for ortonormale lister, fordi alle ortonormale lister også er ortogonale, slik at vi kan anvende det vi nettopp har bevist.

Løsning på oppgave 5.

(**a**) En følge $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^n$ konvergerer mot $x \in \mathbb{R}^n$ med hensyn på $\|\cdot\|_1$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$\|x_j - x\|_1 < \varepsilon \quad \text{når} \quad j \geqslant N.$$

(**b**) Siden $\mathbb{R}^n$ er endeligdimensjonalt, er alle normer på $\mathbb{R}^n$ ekvivalente, så $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_{\max}$ er ekvivalente. Dermed vil konvergens med hensyn på $\|\cdot\|_1$ implisere konvergens med hensyn på $\|\cdot\|_{\max}$.

Alternativ løsning: La $x_1, x_2, \ldots$ være en følge i $\mathbb{R}^n$ som konvergerer mot x. La $\varepsilon > 0$ og la $N \in \mathbb{N}$ være slik at

$$\|x_j - x\|_1 < \varepsilon \quad \text{når} \quad j \geqslant N.$$

Vi har $\|y\|_1 := \sum_{k=1}^n |(y)_k|$ for alle $y \in \mathbb{R}^n$, så $(y)_\ell \leqslant \sum_{k=1}^n |(y)_k| = \|y\|_1$ for alle $\ell = 1, \ldots, n$ Dermed er

$$|(x_j - x)_\ell| \leqslant \|x_j - x\|_1 < \varepsilon$$

for alle $\ell = 1, \ldots, n$ når $j \geqslant N$. Dermed vil også

$$\|x_j - x\|_{\max} = \max_{\ell=1,\ldots,n} |(x_j - x)_\ell| < \varepsilon$$

når $j \geqslant N$. Altså konvergerer følgen mot x også i $\|\cdot\|_{\max}$-normen.

Løsning på oppgave 6.

(**a**) Vi må vise fire betingelser:

Veldefinert: Vi påstår at $\|f\|_{\sup}$ er et endelig tall for alle $f \in U$. Siden f er en kontinuerlig funksjon på et lukket, begrenset intervall, har den et maksimum og et minimum: Det finnes $t_1, t_2 \in [0,1]$ slik at

$$f(t_1) \leqslant f(t) \leqslant f(t_2) \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Dermed vil $\|f\|_{\sup} = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \max(|f(t_1)|, |f(t_2)|)$, som er et endelig tall.

Positivitet: Vi må vise at $\|f\|_{\sup} \geqslant 0$ for alle f, og at $\|f\|_{\sup} = 0$ kun når $f = 0$. Det første er opplagt, siden $\|f\|_{\sup}$ er definert som supremum av en mengde ikkenegative tall. Dersom $\|f\|_{\sup} := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = 0$, er $|f(t)| \leqslant 0$ for alle $t \in [0,1]$, som er det samme som å si at $f(t) = 0$ for alle $t \in [0,1]$. Altså er $f = 0$.

Homogenitet: Vi må vise at $\|\alpha f\|_{\sup} = |\alpha|\|f\|_{\sup}$ for alle skalarer α. Vi har

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_{\sup} &= \sup_{t\in[0,1]} |\alpha f(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \big(|\alpha||f(t)|\big) \\ &= |\alpha| \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = |\alpha|\|f\|_{\sup}.\end{aligned}$$

Trekantulikheten: Vi må vise at $\|f+g\|_{\sup} \leqslant \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$ for alle $f, g \in U$. Vi har

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{\sup} &= \sup_{t\in[0,1]} |(f+g)(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)+g(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[0,1]} \big(|f(t)| + |g(t)|\big) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| \\ &= \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}.\end{aligned}$$

(**b**) Om $f \in U$, er $2f$ funksjonen $t \mapsto 2f(t)$. Siden multipler av kontinuerlige funksjoner også er kontinuerlig, vil også $2f \in U$. Altså er T veldefinert.

T er lineær, for om $f, g \in U$ og $\alpha \in \mathbb{R}$, er

$$T(f+g) = 2(f+g) = 2f + 2g = Tf + Tg$$

og

$$T(\alpha f) = 2(\alpha f) = \alpha(2f) = \alpha Tf.$$

En lineær avbildning T er kontinuerlig hvis og bare hvis den er begrenset, det vil si det finnes en konstant $C > 0$ slik at $\|Tf\|_{\sup} \leqslant C\|f\|_{\sup}$ for alle $f \in U$. Vi har

$$\|Tf\|_{\sup} = \|2f\|_{\sup} = 2\|f\|_{\sup},$$

så vi kan velge konstanten $C = 2$.

Alternativ løsning: La $f \in U$ og la $\varepsilon > 0$. For en vilkårlig $g \in U$ er da

$$\|Tf - Tg\|_{\sup} = \|2f - 2g\|_{\sup} = 2\|f - g\|_{\sup}.$$

Dersom $\|f - g\|_{\sup} < \delta := \varepsilon/2$, er da $\|Tf - Tg\|_{\sup} < \varepsilon$. Altså er T kontinuerlig.

Løsning på oppgave 7.

(**a**) Ethvert polynom er deriverbart, og den deriverte av et polynom av grad høyst 3, er et polynom av grad høyst 2. Altså er $Tp \in \mathscr{P}_2$ for alle $p \in \mathscr{P}_3$, så T er veldefinert.

Om $p, q \in \mathscr{P}_3$ og $\alpha \in \mathbb{R}$, er

$$T(p+q) = \frac{d(p+q)}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} = Tp + Tq$$

og

$$T(\alpha p) = \frac{d(\alpha p)}{dt} = \alpha \frac{dp}{dt} = \alpha Tp.$$

Altså er T lineær.

(**b**) T er ikke injektiv, for det finnes ulike $p, q \in \mathscr{P}_3$ slik at $Tp = Tq$. Da for eksempel $p(t) = 1$ for alle t og $q(t) = 2$ for alle t. Da er $Tp = Tq = 0$.

(**c**) T er surjektiv: La $q \in \mathscr{P}_2$, og la $p(t) := \int_0^t q(s)\, ds$. Da er $p \in \mathscr{P}_3$, og av Kalkulus' Fundamentalteorem (eller Analysens Fundamentalteorem) er $\frac{dp}{dt} = q$. Altså finnes en $p \in \mathscr{P}_3$ slik at $Tp = q$.

(**d**) La $p_0(t) = 1$ for alle t og $p_k(t) = t^k$ for alle t for $k = 1, \ldots, 3$. Vi har $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \big([Tp_0]_{\mathscr{C}} \quad [Tp_1]_{\mathscr{C}} \quad [Tp_2]_{\mathscr{C}} \quad [Tp_3]_{\mathscr{C}}\big)$. Bildet av basispolynomene er

$$Tp_0 = 0, \qquad Tp_k = kp^{k-1} \quad \text{for } k = 1, \ldots, 3,$$

slik at

$$[Tp_0]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_1]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_2]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [Tp_3]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi får derfor

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

(**e**) Ja, det gjør det. At $[S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = A$ er det samme som å si at

$$[Sp]_{\mathscr{C}} = A[p]_{\mathscr{B}} \qquad \forall\ p \in \mathscr{P}_3.$$

Vi kan nå *definere* S til å være lineæravbildningen med nettopp denne egenskapen: For $p \in \mathscr{P}_3$ definerer vi

$$Sp := \beta_0 p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2,$$

der

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A[p]_{\mathscr{B}}.$$

(**f**) T er en lineæravbildning fra et endeligdimensjonalt vektorrom til et annet. Av det vi har bevist i MAT1125, er da T automatisk kontinuerlig.

(**g**) Vi har vist i MAT1125 at en lineæravbildning er kontinuerlig hvis og bare hvis det finnes en konstant $C > 0$ slik at $\|Tf\| \leqslant C\|f\|$ for alle $f \in U$. Setter vi inn for T får vi da

$$\left\| \frac{dp}{dt} \right\|_{\sup} \leqslant C\|p\|_{\sup} \qquad \forall\ p \in \mathscr{P}_3.$$

Løsning på oppgave 8.

(**a**) Vi har

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \langle u, T^*Tu\rangle = \langle u, TT^*u\rangle = \langle T^*u, T^*u\rangle = \|T^*u\|^2.$$

Tar vi kvadratrøtter på begge sider, får vi den ønskede likheten.

(**b**) Ja, det samme er sant for både selvadjungerte og unitære operatorer, fordi slike operatorer automatisk er normale. Om T er selvadjungert, er $T^* = T$, så $T^*T = TT = TT^*$. Om T er unitær er $T^* = T^{-1}$, så $T^*T = T^{-1}T = \mathrm{id} = TT^{-1} = TT^*$.

Løsning på oppgave 9. Vi må sjekke følgende betingelser:

Positivitet: For alle $p \in \mathscr{P}_n$ må $\langle p, p\rangle \geqslant 0$, og $\langle p, p\rangle = 0$ kun når $p = 0$. Fra definisjonen får vi

$$\langle p, p\rangle = \int_0^1 p(t)^2(1+t)\,dt,$$

som aldri er negativt, siden integranden er ikkenegativ. Dersom $\langle p, p\rangle = 0$, må $p(t)^2(1+t) = 0$ for alle $t \in [0, 1]$, for den eneste ikkenegative funksjonen med integral lik 0, er nullfunksjonen, Men $1 + t \geqslant 1$ for alle t, så da må $p(t)^2 = 0$ for alle t, og dermed $p = 0$.

Additivitet: For alle $p, q, r \in \mathscr{P}_n$ må $\langle p+q, r\rangle = \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle$. Vi får

$$\begin{aligned}
\langle p+q, r\rangle &= \int_0^1 (p(t)+q(t))r(t)(1+t)\,dt \\
&= \int_0^1 p(t)r(t)(1+t) + q(t)r(t)(1+t)\,dt \\
&= \int_0^1 p(t)r(t)(1+t)\,dt + \int_0^1 q(t)r(t)(1+t)\,dt \\
&= \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle.
\end{aligned}$$

Homogenitet: For alle $p, q \in \mathscr{P}_n$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ må $\langle \alpha p, q\rangle = \alpha\langle p, q\rangle$. Vi får

$$\langle \alpha p, q\rangle = \int_0^1 \alpha p(t)q(t)(1+t)\,dt = \alpha \int_0^1 p(t)q(t)(1+t)\,dt = \alpha\langle p, q\rangle.$$

Symmetri: For alle $p, q \in \mathscr{P}_n$ må $\langle p, q\rangle = \overline{\langle q, p\rangle}$; siden indreproduktet er reelt, er sistnevnte lik $\langle q, p\rangle$, så vi må vise at $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$. Vi får

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)(1+t)\,dt = \int_0^1 q(t)p(t)(1+t)\,dt = \langle q, p\rangle.$$

Løsning på oppgave 10. Som i hintet starter vi med uttrykket $\lambda\|v\|^2$, der v er en egenvektor til λ:

$$\begin{aligned}\lambda\|v\|^2 &= \lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle \\ &= \langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle = \overline{\lambda}\|v\|^2.\end{aligned}$$

Siden v er en egenvektor, er den ulik 0, så vi kan dele på $\|v\|^2$ på begge sider og få $\lambda = \overline{\lambda}$. Altså er λ et reelt tall.

Løsning på oppgave 12.

(**a**) La $u \in U$ og $\varepsilon > 0$. Siden f og g er kontinuerlige, finnes $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 > 0$ slik at

$$\begin{aligned}\|u - v\|_U < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad \|f(u) - f(v)\|_V < \varepsilon, \\ \|u - v\|_U < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad \|g(u) - g(v)\|_V < \varepsilon.\end{aligned}$$

La $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Da er $\delta > 0$, og $\|u-v\|_U < \delta$ impliserer både $\|u-v\|_U < \delta_1$ og $\|u - v\|_U < \delta_2$, så dersom $\|u - v\|_U < \delta$, er

$$\begin{aligned}\|(f+g)(u) - (f+g)(v)\|_V &= \|(f(u) - f(v)) + (g(u) - g(v))\|_V \\ &\leqslant \|f(u) - f(v)\|_V + \|g(u) - g(v)\|_V < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Altså er $f + g$ kontinuerlig.

(**b**) La $\alpha \in \mathbb{R}$, la $u \in U$ og la $\varepsilon > 0$. La $\delta > 0$ være slik at $\|u - v\|_U < \delta$ impliserer $\|f(u) - f(v)\|_V < \varepsilon$. Da er

$$\|(\alpha f)(u) - (\alpha f)(v)\|_V = \|\alpha(f(u) - f(v))\|_V = |\alpha|\|f(u) - f(v)\|_V \leqslant |\alpha|\varepsilon,$$

så αf er kontinuerlig.

(**c**) Vi har vist at $C(U, V)$ er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. Resten av beviset følger som for alle andre funksjonsrom: Nullvektoren er nullfunksjonen, addisjon og skalarmultiplikasjon gjøres punktvis, den additive inversen er funksjonen $(-f)(u) := -(f(u))$, og så videre.

Løsning på oppgave 13.

(**a**) Vi har

$$A^*A = A^\mathsf{T}A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.$$

Denne matrisen har karakteristisk polynom

$$p(\lambda) = (3-\lambda)(7-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 10\lambda + 9,$$

som har røtter $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$. Singulærverdiene til A er altså $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$ og $\lambda_2 = 1$. Egenvektorene tilhørende λ_1 og λ_2 må oppfylle

$$A^*A\tilde{u}_1 = 9\tilde{u}_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \tilde{u}_1 = 0,$$

som er tilfellet om for eksempel $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. På samme måte får vi at $\tilde{u}_2$ må oppfylle

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \tilde{u}_2 = 0,$$

som bl.a. har løsning $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$. Normaliserer vi disse får vi

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Siden vi har to positive egenverdier σ_1, σ_2 kan vi definere v_1, v_2 direkte som

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Altså blir singulærverdidekomposisjonen av A

$$A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}}$$

(som er det samme som den reduserte SVDen av A). Siden A ikke har 0 som singulærverdi, er $\dim\ker A = 0$, og siden A har to positive singulærverdier, er $\dim\operatorname{im} A = 2$. Operatornormen er lik største singulærverdi, så $\|A\|_{\mathcal{L}} = 3$. Kondisjonstallet er lik største singulærverdi delt på minste singulærverdi, så $\kappa(A) = 3/1 = 3$.

(**d**) Vi har

$$A^*A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}.$$

Denne matrisen har karakteristisk polynom

$$p(\lambda) := \det(A^*A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 100\lambda + 900,$$

som har røtter $\lambda_1 = 90$ og $\lambda_2 = 10$. Dermed har A singulærverdier $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ og $\sigma_2 = \sqrt{10}$. Vi finner så egenvektorene til A^*A:

$$A^*A\tilde{u}_1 = 90\tilde{u}_1 \quad \iff \quad \begin{pmatrix} -16 & 32 \\ 32 & -64 \end{pmatrix} \tilde{u}_1 = 0,$$

som har løsning $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Videre får vi

$$A^*A\tilde{u}_2 = 10\tilde{u}_1 \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{pmatrix} \tilde{u}_2 = 0,$$

som har løsning $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Normaliserer vi disse får vi

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Siden de tilhørende singulærverdiene σ_1, σ_2 er positive, kan vi definere v_1, v_2 direkte:

$$v_1 := \frac{1}{\sigma_1} A u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \frac{1}{\sigma_2} A u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dette gir den reduserte SVDen

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \operatorname{diag}_{2\times 2}(\sigma_1, \sigma_2) \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^* \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.}} \end{aligned}$$

Dersom vi var bedt om å finne den fulle SVDen til A, måtte vi kompletterert vektorene (v_1, v_2) med en tredje vektor v_3 slik at (v_1, v_2, v_3) var ortonormal. Ved inspeksjon ser vi at vektoren

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Vi får dermed den fulle SVDen

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \operatorname{diag}_{3\times 2}(\sigma_1, \sigma_2) \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^* \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.}} \end{aligned}$$

Dimensjonen til kjernen til A er lik antall singulærverdier som er lik 0, som er 0. Dimensjonen til bildet til A er lik antall positive singulærverdier, som er 2. Operatornormen er lik største singulærverdi, så $A = 3\sqrt{10}$.

Løsning på oppgave 14.

(i) La $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 1/2$. Vi finner de tilhørende egenvektorene u_1 og u_2 til A. Vi har

$$0 = (A - \lambda_1 \cdot I_2)u_1 = \begin{pmatrix} 9/2 & 3 \\ -15/2 & -5 \end{pmatrix} u_1 \qquad \Leftarrow \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

og

$$0 = (A - \lambda_2 \cdot I_2)u_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -15/2 & -9/2 \end{pmatrix} u_2 \qquad \Leftarrow \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Om vi lar $R := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, får vi $R^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Vi får dermed diagonaliseringen

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}}.$$

(ii) Løsningen er gitt ved $x_k = A^k x_0$, som vi kan forenkle ved hjelp av diagonaliseringen:

$$\begin{aligned} x_k = RD^k R^{-1} x_0 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 3/2^k \\ -3 + 5/2^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Når $k \to \infty$ vil x_k konvergere mot $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, egenvektoren tilhørende egenverdien 1.

Løsning på oppgave 15.

(**a**) Listen $\mathcal{B} := (u_1, u_2, u_3)$ har tre elementer og spenner V, så vi må vise at listen er lineært uavhengig. La $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ være slik at

$$0 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k u_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Av første ligning er $\alpha_1 = 0$; av andre ligning er dermed $\alpha_2 = 0$; og av tredje ligning er $\alpha_3 = 0$. Dermed er listen lineært uavhengig.

(**b**) Vi bruker Gram–Schmidt på $\mathcal{B}$:

$$v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|_{\ell^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}},$$

$$\tilde{v}_2 := u_2 - (u_2 \cdot v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|_{\ell^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_3 &:= u_3 - (u_3 \cdot v_1)v_1 - (u_3 \cdot v_2)v_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$v_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|_{\ell^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}.$$

Gram–Schmidt-prosedyren garanterer at den nye listen er ortonormal og har samme spenn som den opprinnelige. Altså er (v_1, v_2, v_3) en ortonormal basis for V.

Løsning på oppgave 16.

(**a**) Vi har $f(t) = e^{-t}$ for $t \in (-\pi, 0)$ og $f(t) = e^t$ for $t \in (0, \pi)$, så

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{e_k(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{-t}e^{-ikt}\,dt + \int_0^{\pi} e^t e^{-ikt}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{-t(1+ik)}\,dt + \int_0^{\pi} e^{t(1-ik)}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1 - e^{-(-\pi)(1+ik)}}{-(1+ik)} + \frac{e^{\pi(1-ik)} - 1}{1 - ik}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{\pi}e^{i\pi k} - 1}{1 + ik} + \frac{e^{\pi}e^{-i\pi k} - 1}{1 - ik}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{1 + ik} + \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{1 - ik}\right).
\end{aligned}$$

Om ønskelig kan dette forenkles videre til

$$\hat{f}_k = \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{\pi(1 + k^2)}.$$

Dermed er fourierrekken til f

$$\underline{\underline{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{\pi(1+k^2)} e^{ikt}.}}$$

Siden f er kontinuerlig, vil fourierrekken til f konvergere mot f i L^2-normen.

(**b**) Vi påstår at g er to ganger kontinuerlig deriverbar på $\mathbb{T}$.

I intervallet $(-\pi, \pi)$ er funksjonen g en komposisjon av to ganger (egentlig uendelig mange ganger) deriverbare funksjoner, og er dermed to ganger deriverbar. Vi har

$$g'(t) = -2\cos(t)\sin(t), \qquad g''(t) = 2\sin^2(t) - 2\cos^2(t),$$

så i endepunktene $t = \pm\pi$ har vi

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= 1, & g'(-\pi) &= 0, & g''(-\pi) &= -2, \\ g(\pi) &= 1, & g'(\pi) &= 0, & g''(\pi) &= -2. \end{aligned}$$

Altså er g, g' og g'' også kontinuerlig i $t = \pm\pi$, så g er to ganger kontinuerlig deriverbar på hele sirkelen. Dermed oppfyller g kravet i teoremet om uniform konvergens av fourierrekken. Siden uniform konvergens impliserer L^2-konvergens, konvergerer fourierrekken også i L^2-norm.

Løsning på oppgave 17. Vi bruker dimensjonssatsen:

$$\dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim U.$$

Dersom T er injektiv, er $\dim\ker T = 0$, så $\dim\operatorname{im} T = \dim U = \dim V$. Men da må $\operatorname{im} T = V$, så T er surjektiv. Dersom T er surjektiv, er $\operatorname{im} T = V$, så $\dim\ker T = \dim U - \dim\operatorname{im} T = \dim U - \dim V = 0$, så T er injektiv.

Løsning på oppgave 18. Om $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ er et indreprodukt, vet vi spesielt at $\langle u, u\rangle_T > 0$ for alle $u \neq 0$. Altså er $\langle Tu, Tu\rangle > 0$ for alle $u \neq 0$. Siden $\langle Tu, Tu\rangle > 0$ hvis og bare hvis $Tu \neq 0$, kan vi altså slutte at $Tu \neq 0$ for alle $u \neq 0$. Altså er $\ker T = \{0\}$, som er ekvivalent med at T er injektiv.

Anta motsatt at T er injektiv. Vi har

$$\langle u, u\rangle_T = \langle Tu, Tu\rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, u \in U,$$

og om $\langle u, u\rangle_T = 0$ er $\langle Tu, Tu\rangle = 0$, det vil si $Tu = 0$. Men T er injektiv, så $u = 0$. Linearitet og konjugatsymmetri beviser man som vanlig:

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v, w\rangle_T &= \langle T(\alpha u + \beta v), Tw\rangle = \langle \alpha Tu + \beta Tv, Tw\rangle \\ &= \alpha\langle Tu, Tv\rangle + \beta\langle Tv, Tw\rangle = \langle u, w\rangle_T + \langle v, w\rangle_T, \end{aligned}$$

og

$$\langle u, v\rangle_T = \langle Tu, Tv\rangle = \overline{\langle Tv, Tu\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle_T}.$$

Løsning på oppgave 20.

(**a**) La $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være den lineære avbildningen

$$T\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

Om (e_1, e_2, e_3, e_4) er standardbasisen i $\mathbb{R}^4$, er da

$$\begin{aligned}\operatorname{im} T &= \{Tx : x \in \mathbb{R}^4\} = T(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_4 e_4) : \alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4 : \alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{span}(e_3, e_4),\end{aligned}$$

mens

$$\begin{aligned}\ker T &= \{x \in \mathbb{R}^4 : Tx = 0\}\\ &= \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_4 e_4 : \alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R} \text{ og } \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4 = 0\}\\ &= \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_4 e_4 : \alpha_1, \alpha_2 = 0 \text{ og } \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_4 e_4 : \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{span}(e_3, e_4).\end{aligned}$$

Altså er $\operatorname{im} T = \ker T$.

(**b**) Om $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5)$ er slik at $\ker T = \operatorname{im} T$, får vi av dimensjonssatsen at

$$5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = 2 \dim \operatorname{im} T.$$

Venstre side er et oddetall, mens høyre side er et partall – en selvmotsigelse.

Løsning på oppgave 22. Nei, de er ikke ekvivalente. Anta motsatt at de er ekvivalente; da finnes en $C > 0$ slik at $\|a\|_1 \leqslant C\|a\|_\infty$ for alle $a \in \ell^1(\mathbb{R})$. La $n \in \mathbb{N}$ og definer

$$a := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ ganger}}, 0, \ldots).$$

Da er $\|a\|_1 = n$ og $\|a\|_\infty = 1$, så vi får $n \leqslant C$. Men om vi velger $n > C$ gir dette en selvmotsigelse.

Løsning på oppgave 23.

(**a**) For $u, v \in E$ er

$$|f(u) - f(v)| = \big|\|u - z\| - \|v - z\|\big| \leqslant \|(u - z) - (v - z)\| = \|u - v\|$$

(der vi har brukt den omvendte trekantulikheten). Altså er f Lipschitz-kontinuerlig, så f er kontinuerlig.

(**b**) f er en kontinuerlig funksjon på en lukket, begrenset mengde i et endeligdimensjonalt normert vektorrom, så f antar et minimum i et punkt $v \in E$. Altså er $f(v) \leqslant f(u)$ for alle $u \in E$, som var det vi ønsket.

Løsning på oppgave 25. Siden T er selvadjungert og U er endeligdimensjonalt, sier spektralteoremet at det finnes en ortonormal basis $(u_1, \ldots, u_n)$ for U slik at

$$Tu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k \qquad \forall\, u \in U,$$

der $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ er egenverdier for T, og $u_1, \ldots, u_n$ er tilhørende egenvektorer.

Anta først at $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. For en ikke-null $u \in U$ er da

$$\begin{aligned} \langle Tu, u \rangle &= \left\langle \textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k, u \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, u_k \rangle \langle u_k, u \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, u_k \rangle \overline{\langle u, u_k \rangle} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \big| \langle u, u_k \rangle \big|^2. \end{aligned}$$

Siden $u \neq 0$, er minst ett av tallene $\langle u, u_k \rangle$ ikke-null, la oss si ledd $k = m$, så

$$\langle Tu, u \rangle \geqslant \lambda_m \big| \langle u, u_m \rangle \big|^2 > 0.$$

Anta motsatt at $\langle Tu, u \rangle > 0$ for alle ikke-null $u \in U$. Lar vi $u = u_k$ for en vilkårlig k, får vi

$$0 < \langle Tu_k, u_k \rangle = \langle \lambda_k u_k, u_k \rangle = \lambda_k \|u_k\|^2.$$

Deler vi på $\|u_k\|^2$ på begge sider får vi $\lambda_k > 0$.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	11. desember 2024
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Redusert trappeform av matriser.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine. Du kan henvise til vedlegget med reduserte trappeformer av matriser der du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

Betrakt matrisen A gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

La W betegne kolonnerommet til A, altså $W = \mathrm{Col} A$.

a

Finn en basis for W som består av kolonnevektorer fra matrisen A. Skriv de gjenværende kolonnevektorene i A som lineærkombinasjoner av vektorer fra denne basisen.

Løsning

La oss kalle kolonnevektorene til A for $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ og $\mathbf{a}_4$. I vedlegget får vi oppgitt den reduserte trappeformen til A. Her ser vi at kolonne 1 og 2 er pivotkolonner. Dermed utgjør $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ en basis for W. Vi ser også fra den reduserte trappeformen at $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$.

(Fortsettes på side 2.)

b

Betrakt nå matrisen C og vektoren $\mathbf{b}$ gitt ved

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Finn en minste kvadraters løsning av ligningssystemet $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Løsning

Vi løser normalligningene $C^\intercal C\mathbf{x} = C^\intercal\mathbf{b}$ for å finne minste kvadraters løsninger. Vi beregner at

$$C^\intercal C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}, \quad C^\intercal\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ifølge vedlegget har dette ligningssystemet en unik løsning $\widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

c

Betrakt $\mathbb{R}^3$ som et indreproduktrom med skalarproduktet (også kalt prikkproduktet). Finn projeksjonen $\mathrm{proj}_W\mathbf{b}$ av vektoren $\mathbf{b}$ ned på W.

Løsning

Først observerer vi at kolonnerommet til C sammenfaller med W siden C sine kolonner nøyaktig er basisen fra a. Så vet vi fra teorien at $\mathrm{proj}_W\mathbf{b} = C\widehat{\mathbf{x}}$ der $\widehat{\mathbf{x}}$ er en minste kvadraters løsning av $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dermed er

$$\mathrm{proj}_W\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

Betrakt de følgende to matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar og om B er diagonaliserbar (du trenger ikke å finne diagonaliseringer). Begrunn svaret ditt.

(Fortsettes på side 3.)

Løsning

Matrisen A er symmetrisk og dermed (ortogonalt) diagonaliserbar ved spektralteoremet for symmetriske matriser. Matrisen B er øvre triangulær, så egenverdiene er diagonalelementene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0$. Egenrommene til B er da nullrommene til matrisene

$$\lambda_1 I - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 I - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at disse to nullrommene er éndimensjonale siden de utspent av henholdsvis

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dermed utspenner egenvektorene til B ikke hele $\mathbb{R}^2$ men et 2-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^2$, og følgelig er ikke B diagonaliserbar.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av alle polynomer av grad høyst lik 3. Sett $W = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(-1) = 0\}$, og definer $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$p_1(t) = t + 1, \qquad p_2(t) = t^2 - 1, \qquad p_3(t) = t^3 + 1.$$

Sett $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$.

a

Vis at W er et underrom av $\mathbb{P}_3$ og at $\mathcal{B}$ er en basis for W.

(Fortsettes på side 4.)

Løsning

Vi ser først at nullvektoren er i W. La $p, q \in W$ og $c \in \mathbb{R}$. Da er $p(-1) = 0$ og $q(-1) = 0$, så

$$\begin{aligned}(p+q)(-1) &= p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0,\\ (c \cdot p)(-1) &= c \cdot p(-1) = c \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Dette viser at $p + q, c \cdot p \in W$, så W er et underrom av $\mathbb{P}_3$. Vi ser at $p_1(-1) = -1 + 1 = 0$, $p_2(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$ og $p_3(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$, så $p_1, p_2, p_3 \in W$. For å vise at $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig lar vi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ og antar at $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = 0$. Dette gir

$$(c_1 - c_2) + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

så vi konkluderer med at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Siden for eksempel polynomet konstant lik 1 ikke er med i W er dimensjonen til W høyst lik 3. Siden $\mathcal{B} \subseteq W$ og $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig, må $\dim W = 3$ og dermed er $\mathcal{B}$ en basis for W.

b

Definer elementer $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$q_1(t) = t + 1, \qquad q_2(t) = (t+1)^2, \qquad q_3(t) = (t+1)^3.$$

Sett $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$. Du kan ta det for gitt at $\mathcal{C}$ også er en basis for W. Finn overgangsmatrisen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, altså (3×3)-matrisen M som tilfredsstiller $M[p]_\mathcal{C} = [p]_\mathcal{B}$ for alle $p \in W$.

Løsning

Når vi ekspanderer parentesene ser vi at

$$\begin{aligned}q_1(t) &= p_1(t),\\ q_2(t) &= t^2 + 2t + 1 = t^2 + 2t + 2 - 1 = 2(t+1) + (t^2 - 1)\\ &= 2p_1(t) + p_2(t),\\ q_3(t) &= t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = t^3 + 3t^2 + 3t + 3 - 3 + 1\\ &= 3(t+1) + 3(t^2 - 1) + t^3 + 1 = 3p_1(t) + 3p_2(t) + p_3(t).\end{aligned}$$

Dermed er

$$[q_1]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad [q_2]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad [q_3]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}.$$

Det følger at

$$M = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 5.)

c

Vi betrakter W som et indreproduktrom med indreproduktet

$$\langle p, q\rangle = \int_{-2}^{0} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \qquad p, q \in W.$$

Du kan ta det for gitt at dette definerer et indreprodukt på W. Finn en ortonormal basis for W.

Løsning

Vi bruker Gram–Schmidt-algoritmen på basisen $\mathcal{C}$. Denne gir en ortogonal basis $\{r_1, r_2, r_3\}$ der

$$\begin{aligned} r_1 &= q_1, \\ r_2 &= q_2 - \frac{\langle r_1, q_2\rangle}{\langle r_1, r_1\rangle} r_1, \\ r_3 &= q_3 - \frac{\langle r_1, q_3\rangle}{\langle r_1, r_1\rangle} r_1 - \frac{\langle r_2, q_3\rangle}{\langle r_2, r_2\rangle} r_2. \end{aligned}$$

Observer at for et naturlig tall k er $\int_{-2}^{0}(t+1)^k\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$ som er lik $2/(k+1)$ dersom k er et partall og lik 0 dersom k er et oddetall. Dermed er $\langle r_1, q_2\rangle = \int_{-2}^{0}(t+1)^3\,\mathrm{d}t = 0$, så $r_2 = q_2$. Videre er $\langle r_1, q_3\rangle = \int_{-2}^{0}(t+1)^4 = 2/5$, $\langle r_1, r_1\rangle = \int_{-2}^{0}(t+1)^2\,\mathrm{d}t = 2/3$ og $\langle r_2, q_3\rangle = \int_{-2}^{0}(t+1)^5\,\mathrm{d}t = 0$, så

$$r_3 = q_3 - (2/5)/(2/3)q_1 = q_3 - (3/5)q_1.$$

Vi regner nå ut normene. Vi har $\|r_1\| = \sqrt{2/3}$ og $\|r_2\|^2 = \int_{-2}^{0}(t+1)^4\,\mathrm{d}t = 2/5$, så $\|r_2\| = \sqrt{2/5}$. Til slutt er

$$\|r_3\|^2 = \int_{-2}^{0}((t+1)^6 - \frac{6}{5}(t+1)^4 + \frac{9}{25}(t+1)^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} = \frac{8}{175},$$

så polynomene

$$\begin{aligned} \tilde{r_1}(t) &= \sqrt{3/2}(t+1), \\ \tilde{r_2}(t) &= \sqrt{5/2}(t+1)^2, \\ \tilde{r_3}(t) &= \sqrt{175/8}((t+1)^3 - (3/5)(t+1)) \end{aligned}$$

utgjør en ortonormal basis for W.

Oppgave 4

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 6.)

a

Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A og finn de tilhørende egenverdiene. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $P^\intercal AP = D$, der $P^\intercal$ betegner den transponerte av P.

Løsning

Vi regner ut:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 \\ 3/2 - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_1,$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 + 3/2 \\ -\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = -2\mathbf{v}_2.$$

Dette viser at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer for A med tilhørende egenverdier henholdsvis 2 og -2. Siden disse to vektorene er ortogonale og har lengde 1 følger det at

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

tilfredsstiller $P^\intercal AP = D$ og at P er ortogonal.

b

Betrakt kurven i $\mathbb{R}^2$ bestående av de punkter $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ slik at

$$x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_2^2 = 2.$$

Avgjør om kurven er en sirkel, parabel, ellipse eller hyperbel ved å foreta et variabelskifte som eliminerer kryssleddet. Skisser kurven i planet.

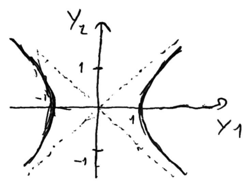
(Fortsettes på side 7.)

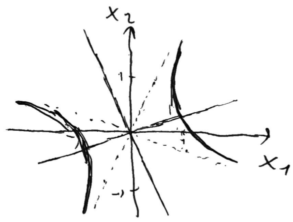
Løsning

Om vi betrakter den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal A\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ så ser vi at ligningen til kurven svarer nøyaktig til $Q(\mathbf{x}) = 2$. Med variabelskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ får vi dermed at

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\intercal D\mathbf{y} = 2y_1^2 - 2y_2^2,$$

så ligningen blir $y_1^2 - y_2^2 = 1$ i de nye koordinatene. Dette er ligningen til hyperbelen skissert til venstre under. Siden matrisen P svarer til rotasjon med 30 grader mot klokka, vil skissen til høyre under gi hyperbelen i (x_1, x_2)-koordinatene.





Oppgave 5

I denne oppgaven betrakter vi $\mathbb{R}^n$ som et indreproduktrom med skalarproduktet (også kalt prikkproduktet). Vi anser elementene i $\mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer, altså $(n \times 1)$-matriser. La $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ og betrakt $(n \times n)$-matrisen

$$R = I - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal$$

der I betegner $(n \times n)$ identitetsmatrisen og $\mathbf{v}_1^\intercal$ betegner den transponerte av $\mathbf{v}_1$, altså en $(1 \times n)$-matrise. La også $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Vis at R er en ortogonal matrise. Finn matriserepresentasjonen til T med hensyn på $\mathcal{B}$, altså $(n \times n)$-matrisen M slik at $[T(\mathbf{x})]_\mathcal{B} = M[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, og gi en geometrisk tolkning av T.

(Fortsettes på side 8.)

Løsning

Vi gjør følgende utregning, hvor vi bruker regnereglene for transponerte samt at $\mathbf{v}_1^\intercal \mathbf{v}_1 = 1$:

$$\begin{aligned} R^\intercal R &= (I^\intercal - 2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal)^\intercal)(I - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal) \\ &= I - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal + 4\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal \\ &= I - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal + 4\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal = I. \end{aligned}$$

Dette viser at $R^{-1} = R^\intercal$, så R er ortogonal. For $2 \leq i \leq n$ vil $\mathbf{v}_1^\intercal \mathbf{v}_i = 0$ siden $\mathcal{B}$ er en ortogonal mengde, så dette gir

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1, \\ T(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{v}_i - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

Dermed er koordinatvektorene gitt ved

$$[T(\mathbf{v}_1)]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{v}_2)]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad [T(\mathbf{v}_n)]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så matriserepresentasjonen er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Om vi lar $W = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\}$ så kan vi tenke på T som en refleksjon gjennom hyperplanet $W^\perp$: Vektorene $\mathbf{x}$ som står ortogonalt på hyperplanet, altså skalarmultiplum av $\mathbf{v}_1$, avbildes til $-\mathbf{x}$, mens vektorene i hyperplanet avbildes til seg selv.

SLUTT

(Fortsettes på side 9.)

Vedlegg: Redusert trappeform av matriser

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 14 & -8 \end{bmatrix}$$

har redusert trappeform gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Prøveeksamen i:	MAT1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	22. november 2024
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Reduserte trappeformer.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Betrakt følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a Vis at $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ utgjør en basis for $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, og finn koordinatvektorene $[\mathbf{v}_3]_\mathcal{B}$ og $[\mathbf{v}_4]_\mathcal{B}$ til $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

Løsning

Vi definerer matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Da sammenfaller kolonnerommet til A med W. Fra vedlegget ser vi at kolonnevektor 1 og 2 i A sin reduserte trappeform er pivotkolonner. Fra teorien vet vi at dette betyr at kolonnevektor 1 og 2 i A, altså $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, utgjør en basis for W. Fra den reduserte trappeformen ser vi også at $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, så

$$[\mathbf{v}_3]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}_4]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

b Finn en minste kvadraters løsning av ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 3, \end{aligned}$$

altså tall $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ som minimerer uttrykket

$$(x_1 - x_2 - 2)^2 + (2x_1 + 3x_2 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_1 - 2x_2 - 3)^2.$$

Løsning

La oss sette

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Da kan ligningssystemet uttrykkes som $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$. For å finne en minste kvadraters løsning ser vi på $B^\mathsf{T} B\mathbf{x} = B^\mathsf{T}\mathbf{b}$. Vi regner ut at

$$B^\mathsf{T} B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}, \quad B^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ifølge vedlegget har dette ligningssystemet en unik løsning $x_1 = 20/9$, $x_2 = -1/9$. Dette er altså vår minste kvadraters løsning.

Oppgave 2

La A være 3×3-matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

a Finn egenverdiene til A. Angi en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A.

(Fortsettes på side 3.)

Løsning

Siden A er diagonal ser vi umiddelbart at egenverdiene er $\lambda_1 = -1/2$ og $\lambda_2 = 1$. For å finne egenvektorene tilhørende λ_1 radreduserer vi matrisen $\lambda_1 I - A$:

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Her vil en løsning tilfredsstille $x_2 + x_3 = 0$, så om vi introduserer parameterne $s = x_1$ og $t = x_2$ så vil den generelle løsningen har form $x_1 = s$, $x_2 = t$ og $x_3 = -t$. Verdiene $(s,t) = (1,0)$ og $(s,t) = (0,1)$ gir da de to egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

For å finne egenvektorene tilhørende λ_2 radreduserer vi $\lambda_2 I - A$:

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Her vil en løsning tilfredsstille $x_1 + x_2 = 0$ og $x_3 = 0$, så om vi introduserer $x_1 = t$ så er den generelle løsningen gitt ved $x_1 = t$, $x_2 = -t$ og $x_3 = 0$. Da korresponderer $t = 1$ til egenvektoren

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A er da $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

b For en initialvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, betrakt følgen av vektorer $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ gitt ved $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ for $k \geq 0$. Bestem de initialvektorer som gjør at denne følgen konvergerer. Bestem også de initialvektorer som gjør at følgen konvergerer mot nullvektoren i $\mathbb{R}^3$.

(Fortsettes på side 4.)

Løsning

Siden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ kan vi skrive $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ for passende $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Vi får da

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = A^k(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = c_1(-1/2)^k\mathbf{v}_1 + c_2(-1/2)^k\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3.$$

Når $k \to \infty$ vil $\mathbf{x}_k \to c_3\mathbf{v}_3$. Altså konvergerer følgen uansett initialvektor. For at følgen skal konvergere mot nullvektoren må $c_3 = 0$. Altså skjer dette nøyaktig for initialvektorer i $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av polynomer av grad høyst lik 3 med de vanlige punktvise operasjonene for funksjonsrom. Definer en lineær avbildning $\phi\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$ ved

$$\phi(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\,\mathrm{d}t, \qquad p \in \mathbb{P}_3.$$

Sett $W = \ker(\phi)$, kjernen til ϕ. Definer polynomer $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ ved

$$p_1(t) = t, \qquad p_2(t) = 1 - 3t^2, \qquad p_3(t) = t^3.$$

a Vis at disse tre polynomene er elementer i W og at de utgjør en basis for W.

Løsning

Vi bemerker oss alle først at om $p \in \mathbb{P}_3$ er en odde funksjon, altså at $p(-t) = -p(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, så må $\phi(p) = 0$, siden $\int_{-1}^{0} p(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t$ i dette tilfellet. Dette gir at $\phi(p_1) = 0$ og $\phi(p_3) = 0$. For p_2 beregner vi at

$$\phi(p_2) = \int_{-1}^{1} (1 - 3t^2)\,\mathrm{d}t = (t - t^3)|_{-1}^{1} = (1 - 1^3) - ((-1) - (-1)^3) = 0.$$

Dermed er $p_1, p_2, p_3 \in W$. Vi ser umiddelbart at $\{p_1, p_3\}$ er lineært uavhengig, og siden monomene av grad 1 og grad 3 ikke opptrer i p_2 må også $\{p_1, p_2, p_3\}$ være lineært uavhengig. Siden for eksempel polynomet $q \in \mathbb{P}_3$ gitt ved $q(t) = 1$ ikke er i W, vet vi at $W \neq \mathbb{P}_3$, så eneste mulighet er $\dim W = 3$. Dermed er $\{p_1, p_2, p_3\}$ en basis for W.

I resten av oppgaven betrakter vi $\mathbb{P}_3$ som et indreproduktrom med indreproduktet

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \qquad p, q \in \mathbb{P}_3.$$

b Finn en ortogonal basis for W.

(Fortsettes på side 5.)

Løsning

Vi bruker Gram–Schmidt-prosessen. La $q_1 = p_1$. Siden produktet $p_2 q_1$ er en odde funksjon, vil $\langle p_2, q_1 \rangle = 0$, så $q_2 = p_2 - \mathrm{proj}_{q_1} p_2 = p_2$. Vi regner ut

$$\langle p_3, q_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^4 \, \mathrm{d}t = \frac{2}{5}, \quad \langle q_1, q_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

I tillegg er $p_3 q_2 = p_3 p_2$ også en odde funksjon, så $\langle p_3, q_2 \rangle = 0$. Totalt sett gir dette $q_3 = p_3 - \mathrm{proj}_{q_1} p_3 - \mathrm{proj}_{q_2} p_3 = p_3 - (3/5)p_1$, altså er q_3 gitt ved $q_3(t) = t^3 - (3/5)t$ for $t \in \mathbb{R}$. Vi har altså at $\{p_1, p_2, q_3\}$ er en ortogonal basis for W.

c Skriv polynomet $p \in \mathbb{P}_3$ gitt ved $p(t) = t^2$ som en sum av et element i W og et element i $W^{\perp}$. Hva er $\mathrm{proj}_W p$?

Løsning

Vi ser at $p_2(t) = 1 - 3p(t)$, så $p(t) = 1/3 - (1/3)p_2(t)$. La oss sette $q(t) = 1$ for $t \in \mathbb{R}$ som før. Da har vi at $\langle p_i, q \rangle = \int_{-1}^{1} p_i(t) \cdot 1 \, \mathrm{d}t = \phi(p_i) = 0$ for $i = 1, 2, 3$, så $q \in W^{\perp}$. Dermed gir

$$p = -\frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} q$$

et uttrykk for p som en sum av et element i W, nemlig $(-1/3)p_2$, og et element i $W^{\perp}$, nemlig $(1/3)q$. Fra teorien vet vi at også at $\mathrm{proj}_W p = (-1/3)p_2$.

Oppgave 4

Betrakt den kvadratiske formen Q på $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2.$$

a Finn en ortogonal 2×2-matrise P slik at substitusjonen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

gjør $Q(x_1, x_2)$ om til en kvadratisk form uten kryssledd, altså på formen $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ for passende konstanter $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(Fortsettes på side 6.)

Løsning

Vi har at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal A\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen har karakteristisk polynom

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Det følger at egenverdiene til A er $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 2$. Vi finner egenrommene:

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Her får vi følgende tilhørende egenvektorer av lengde 1 og følgende matrise P som har vektorene som søyler:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fra teorien følger det nå at om vi gjør substitusjonen $\mathbf{y} = P^\intercal \mathbf{x}$, ekvivalent $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, så vil $Q(\mathbf{x}) = 0y_1^2 + 2y_2^2 = 2y_2^2$.

b Betrakt kurven i $\mathbb{R}^2$ bestående av de punkter (x_1, x_2) slik at

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0.$$

Representerer denne kurven en parabel, hyperbel, ellipse eller sirkel? Begrunn svaret ditt og skisser kurven.

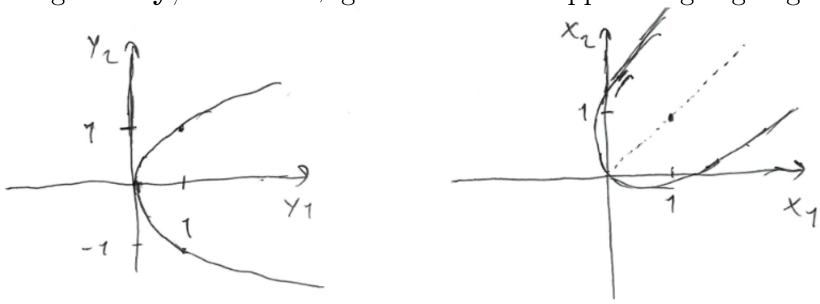
(Fortsettes på side 7.)

Løsning

La oss uttrykke ligningen i de nye koordinatene fra oppgave a. Siden $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ har vi at $x_1 = (1/\sqrt{2})y_1 - (1/\sqrt{2})y_2$ og $x_2 = (1/\sqrt{2})y_1 + (1/\sqrt{2})y_2$. Dette gir

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 &= 2y_2^2 - y_1 + y_2 - y_1 - y_2 \\ &= 2y_2^2 - 2y_1 = 0, \end{aligned}$$

eller $y_1 = y_2^2$. Denne ligningen representerer en parabel som går gjennom origo og krummer mot høyre med den positive y_1-aksen som refleksjonslinje. Siden matrisen P representerer en rotasjon med 45 grader og $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, beskriver følgende skisse den opprinnelige ligningen:



Oppgave 5

La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise med ikke-negative egenverdier. Vis at det finnes en $n \times n$-matrise B slik at $B^2 = A$. (Hint: Betrakt først tilfellet der A er diagonal.)

Løsning

Vi betrakter først en $n \times n$ diagonal matrise D med elementer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen. At denne har ikke-negative egenverdier betyr nøyaktig at $\lambda_i \geq 0$ for $i = 1, \ldots, n$, så vi kan danne diagonalmatrisen M som har elementer $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ på diagonalen. Vi ser da at $M^2 = D$.

For en generell symmetrisk $n \times n$-matrise A med ikke-negative egenverdier gir spektralteoremet at det fins en diagonalmatrise D og en ortogonal matrise P slik at $A = PDP^\intercal$. Siden elementene på diagonalen til D er egenverdiene til A, må disse være ikke-negative. Lar vi M være som til å begynne med, får vi at $M^2 = D$. Sett $B = PMP^\intercal$. Da er

$$B^2 = (PMP^\intercal)(PMP^\intercal) = PM^2P^\intercal = PDP^\intercal = A.$$

Dermed er B en slik matrise som oppgaven spurte om.

(Fortsettes på side 8.)

Radreduserte matriser

Matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
har redusert trappeform
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Matrisen
$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 13 \\ 3 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$
har redusert trappeform
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 20/9 \\ 0 & 1 & -1/9 \end{bmatrix}.$$

Eksamen MAT 1120 1. desember 2023

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $p(t_1) = s_1$ gir $c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = 2$

$p(t_2) = s_2$ gir $c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 = 1$

$p(t_3) = s_3$ gir $c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3^2 = 0$

$p(t_4) = s_4$ gir $c_0 + c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot 4^2 = 2$

Altså

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fra Matlab-utskiften får vi at dette systemet kan radreduseres til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siste likning sier her $0 = 1$, så likningssystemet har ingen løsninger.

b) Vi ønsker å finne minste kvadraters løsning til $A\vec{x} \approx \vec{b}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi vet da fra pensum at vektoren $\vec{x}$ som minimaliserer S oppfyller

$$(A^T A)\vec{x} = A^T \vec{b}$$

Her blir

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 38 \end{bmatrix}$$

(Oppgave 1 forts.)

Videre har vi

$$A^T A = \begin{array}{cccc|ccc} & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 4 \\ & & & & 1 & 3 & 9 \\ & & & & 1 & 4 & 16 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 10 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 30 & 100 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 30 & 100 & 354 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix}$$

Likningen $(A^T A)\vec{x} = A^T \vec{b}$ sier altså

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 38 \end{bmatrix}}}$$

Fra Matlab-utskriften får vi at dette systemet kan radreduseres til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.25 \\ -3.85 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Altså vil $\underline{\underline{c_0 = 5.25}}$, $\underline{\underline{c_1 = -3.85}}$ og $\underline{\underline{c_2 = 0.75}}$ minimalisere S.

Oppgave 2

a) Vi har

$$A^T A = \begin{array}{cc|ccc} & & 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ & & 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\sin\theta & 3\cos\theta & 0 & 9(\sin^2\theta + \cos^2\theta) & 0 \\ 7\cos\theta & 7\sin\theta & 0 & 0 & 49(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

(Oppgave 2 forts.)

Siden A^TA er en diagonal matrise, er egenverdiene elementene langs diagonalen. Egenverdiene til A^TA er altså

$$\lambda_1 = 49, \quad \lambda_2 = 9 \quad \text{og} \quad \lambda_3 = 0$$

Singulærverdier for A: $\sigma_1 = \sqrt{49} = 7$, $\sigma_2 = \sqrt{9} = 3$ og evt. $\sigma_3 = \sqrt{0} = 0$

(Om 0 regnes som singulærverdi er en definisjonssak. Det er vanlig å gjøre det, men vi har ikke gjort det. Begge deler ok her.)

b) Vi ser at en ortonormal egenbasis for A^TA er

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

der $\vec{v}_i$ hører til λ_i for $i = 1, 2, 3$. Videre:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -3\sin\theta & 7\cos\theta \\ 0 & 3\cos\theta & 7\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Altså har vi $A = U\Sigma V^T$ der

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra SVD-en $A = U\Sigma V^T$ ser vi at avbildningen $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ kan oppfattes som en transformasjon i tre trinn:

- Først byttes første og tredje komponent på $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$
- Så multipliseres første komponent med 7 og andre komponent med 3, og tredje koordinat droppes
- Til slutt roteres den resulterende vektoren en vinkel θ mot klokken i $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 3

a) At $B = \{e^x, e^{-x}\}$ spenner ut V er klart, siden V per definisjon består av funksjoner f som er lineærkombinasjoner av e^x og e^{-x}. For å vise at $\vec{b}_1 = e^x$ og $\vec{b}_2 = e^{-x}$ er lineært uavhengige, anta at

$$ae^x + be^{-x} = 0, \text{ der } a, b \in \mathbb{R}$$

Innsetting av $x = 0$ gir $a + b = 0$. Derivasjon på begge sider gir

$$ae^x + b(-e^{-x}) = 0$$

Innsetting av $x = 0$ gir her $a - b = 0$, dvs. $a = b$. Kombinert med $a + b = 0$ gir dette $a = b = 0$, så e^x og e^{-x} er lineært uavhengige. Altså er B en basis for V.

b) Vi har
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \qquad \text{I}$$
$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \qquad \text{II}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} + \text{II gir} & e^x = \cosh x + \sinh x \\ \text{I} - \text{II gir} & e^{-x} = \cosh x - \sinh x \end{array}\right\} (*)$$

Altså spenner vektorene $\vec{b}_1' = \cosh x$ og $\vec{b}_2' = \sinh x$ ut V. Siden basisen B har to vektorer, vet vi at V er todimensjonalt. Det følger at B' er en basis for V, fordi B' har to vektorer.

Vi får

$$P = [id]_{B' \leftarrow B} = \left[[\vec{b}_1]_{B'} \; [\vec{b}_2]_{B'} \right] = \left[[e^x]_{B'} \; [e^{-x}]_{B'} \right] \overset{(*)}{=} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}}$$

(Oppgave 3 forts.)

c) Vi har

$$T(f+g) = (f+g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$$
$$T(rf) = (rf)' = r \cdot f' = r \cdot T(f)$$

for alle $f, g \in V$ og $r \in \mathbb{R}$, ved vanlige derivasjonsregler. Altså er T en lineærtransformasjon.

Siden en vilkårlig $f \in V$ kan skrives $f(x) = ae^x + be^{-x}$, har vi

$$T^2(f) = T(T(f)) = T(f') = T(ae^x - be^{-x})$$
$$= (ae^x - be^{-x})' = ae^x + be^{-x} = f$$

for alle $f \in V$. Altså er T^2 identitetstransformasjonen på V. At T^2 er identitetstransformasjonen, betyr at $T^{-1} = T$. Altså er T inverterbar.

d) Vi har

$$[T]_B = \left[[T(\vec{b}_1)]_B \; [T(\vec{b}_2)]_B \right] = \left[[(e^x)']_B \; [(e^{-x})']_B \right]$$
$$= \left[[e^x]_B \; [-e^{-x}]_B \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Videre er

$$T(\vec{b}_1') = (\cosh x)' = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x = \vec{b}_2'$$
$$T(\vec{b}_2') = (\sinh x)' = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x = \vec{b}_1'$$

Så

$$[T]_{B'} = \left[[T(\vec{b}_1')]_{B'} \; [T(\vec{b}_2')]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Oppgave 3 forts.)

Matrisen $[T]_B$ er diagonal, så B er en egenbasis for T, og egenverdiene til T er diagonalelementene i $[T]_B$. Egenverdiene til T er altså $\underline{\underline{1 \text{ og } -1}}$.

Matrisen $[T]_{B'}$ er ikke diagonal, så B' er ikke en egenbasis for T.

e) At dette er et indreprodukt, følger fra vanlige regneregler for matriser. For alle $f, g \in V$ og $r \in \mathbb{R}$ har vi

I1 $\langle f,g\rangle = [f]_{B'}^T [g]_{B'} = [g]_{B'}^T [f]_{B'} = \langle g,f\rangle$

I2 $\langle f, g+h\rangle = [f]_{B'}^T [g+h]_{B'} = [f]_{B'}^T \left([g]_{B'} + [h]_{B'}\right)$

$$= [f]_{B'}^T [g]_{B'} + [f]_{B'}^T [h]_{B'} = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$$

I3 $\langle f, rg\rangle = [f]_{B'}^T [rg]_{B'} = [f]_{B'}^T r[g]_{B'}$

$$= r \cdot [f]_{B'}^T [g]_{B'} = r\langle f,g\rangle$$

I4 $\langle f,f\rangle = [f]_{B'}^T [f]_B = \|[f]_{B'}\|^2$, som er ≥ 0 for alle f og lik 0 hvis og bare hvis $[f]_{B'} = \vec{0}$, dvs. $f = 0$.

Vi har $\langle \vec{b}_1', \vec{b}_2'\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$$\langle \vec{b}_1', \vec{b}_1'\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

og tilsvarende $\langle \vec{b}_2', \vec{b}_2'\rangle = 1$. Altså er B' ortonormal.

f) Fra (*) under b) har vi $e^{-x} = 1 \cdot \vec{b}_1' - 1 \cdot \vec{b}_2'$, så $[e^{-x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Videre er $[\sinh x]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så

$$\langle e^{-x}, \sinh x\rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-1}}$$

Hvis $\langle f,g\rangle$ er et vilkårlig indreprodukt på V slik at B' er ortonormal, får vi

$$\langle e^{-x}, \sinh x\rangle = \langle \vec{b}_1' - \vec{b}_2', \vec{b}_2'\rangle = \langle \vec{b}_1', \vec{b}_2'\rangle - \langle \vec{b}_2', \vec{b}_2'\rangle \overset{B' \text{ ortonormal}}{=} 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}$$

Prøveeksamen MAT 1120 lørdag 18.11.23

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Vi har
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \\ -5 & 15 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{Matlab}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her har første og tredje søyle i den reduserte trappeformen til A pivotelementer, så de tilsvarende søylevektorene i A er en basis for bildet $\text{Col}\, A$ til A. Altså er

$$\{(-2,1,-5,-1),\ (2,-4,0,2)\}$$

en basis for $\text{Col}\, A$. $\text{Nul}\, A$ er løsningsrommet til likningen $A\vec{x} = \vec{0}$, og fra den reduserte trappeformen ser vi at denne er ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

Her blir $x_2 = t$ og $x_4 = s$ frie parametre, og løsningen er

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = t \\ x_3 = \frac{1}{2}s \\ x_4 = s \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \{(3,1,0,0),\ (0,0,\tfrac{1}{2},1)\}$$

en basis for $\text{Nul}\, A$.

(Oppgave 1 forts.)

b) Her kan vi bruke Gram-Schmidt på basisen $\mathcal{B}$.
Det blir relativt enkelt, fordi $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$ allerede er ortogonale.
Vi får

$$\vec{m}_1 = \vec{b}_1 = (3,1,0,0)$$
$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{m}_1\|} \cdot \vec{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1,0,0)$$
$$\vec{m}_2 = \vec{b}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{b}_2 \rangle \vec{q}_1 = \vec{b}_2 - 0 \cdot \vec{q}_1 = (0,0,\tfrac{1}{2},1)$$
$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{m}_2\|} \cdot \vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} \cdot \vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \cdot \vec{m}_2$$
$$= \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \vec{m}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}(0,0,\tfrac{1}{2},1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1,2)$$

Så $\underline{\underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1,2) \right\}}}$ er en ortonormal basis for Nul A.

Oppgave 2

a) Vi har

$$T(p+q) = (p+q)(1) + (p+q)(0) \cdot t$$
$$= p(1) + q(1) + (p(0) + q(0)) \cdot t$$
$$= [p(1) + p(0) \cdot t] + [q(1) + q(0) \cdot t]$$
$$= T(p) + T(q) \qquad \text{for alle } p, q \in V$$

$$T(rp) = (rp)(1) + (rp)(0) \cdot t$$
$$= r \cdot p(1) + r \cdot p(0) \cdot t$$
$$= r\,[p(1) + p(0) \cdot t] = r\,T(p) \qquad \text{for alle } r \in \mathbb{R} \text{ og } p \in V.$$

Altså er T en lineærtransformasjon.

Vi har $S(1+t) = (1+t)+t = 1+2t$

$$S(1) + S(t) = (1+t) + (t+t) = 1+3t \neq S(1+t)$$

så S er ikke en lineærtransformasjon.

(Oppgave 2 forts.)

b) La $\vec{b}_1 = 1$ og $\vec{b}_2 = t$, med $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$

Vi har ($\vec{b}_1(t) = 1$ og $\vec{b}_2(t) = t$)

$$T(\vec{b}_1) = T(1) = 1 + 1 \cdot t = 1 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2$$

$$T(\vec{b}_2) = T(t) = 1 + 0 \cdot t = 1 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2$$

Så
$$[T]_B = \left[[T(\vec{b}_1)]_B \ \ [T(\vec{b}_2)]_B \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

c) La $B' = \{\vec{b}_1', \vec{b}_2'\} = \{1+t, 1-t\}$

Vi vet fra b) at vektorrommet V har dimensjon 2. Siden B' består av to vektorer, holder det derfor å vise at disse er lineært uavhengige. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ er slik at

$$a(1+t) + b(1-t) = 0, \quad (\text{for alle } t)$$

får vi
$$a + at + b - bt = 0$$
$$(a+b) + (a-b)t = 0$$

For at dette skal stemme, må $a+b=0$ og $a-b=0$. Den siste av disse gir $a=b$, og den første gir da $a=b=0$.

Altså er $\vec{b}_1'$ og $\vec{b}_2'$ lineært uavhengige, så B' er en basis.

For å finne $[T]_{B'}$, velger jeg å først finne overgangsmatrisen

$$[id]_{B \leftarrow B'} \quad (\text{den trengs til d) uansett})$$

Vi har
$$[id]_{B \leftarrow B'} = \left[[\vec{b}_1']_B \ \ [\vec{b}_2']_B \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dermed også
$$[id]_{B' \leftarrow B} = \left([id]_{B \leftarrow B'}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \qquad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(oppgave 2 forts.)

Nå får vi

$$[T]_{B'} = [id]_{B' \leftarrow B} \cdot [T]_B \cdot [id]_{B \leftarrow B'}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{cc|cc|cc} & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

d) Fra c) har vi

$$P = [id]_{B' \leftarrow B} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}}$$

$$Q = [id]_{B \leftarrow B'} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 3

a) Kongens likningssystem er

$$\begin{cases} 5B + 8L = 200 & \text{I} \\ 2B + L = \frac{1029}{2} & \text{II} \\ B + 6L = \frac{1696}{5} & \text{III} \end{cases}$$

$\text{I} - 2 \cdot \text{II} - \text{III}$ gir $0 = 200 - 1029 - \frac{1696}{5}$

som ikke er sant. Likningssystemet er altså selvmotsigende, dvs. det har ingen løsninger. Dette kan forklare Skrues manglende suksess.

(Oppgave 3 forts.)

b) Vi har

$$A^TA = \begin{bmatrix}5&2&1\\8&1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&8\\2&1\\1&6\end{bmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} & & & 5 & 8\\ & & & 2 & 1\\ & & & 1 & 6\\ \hline 5&2&1&30&48\\8&1&6&48&101\end{array} = \begin{bmatrix}30&48\\48&101\end{bmatrix}$$

Videre

$$A^T\begin{bmatrix}200\\ \frac{1029}{2}\\ \frac{1696}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&2&1\\8&1&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}200\\ \frac{1029}{2}\\ \frac{1696}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{11841}{5}\\ \frac{41497}{5}\end{bmatrix}$$

Ole, Dole og Doffens likninger kan skrives

$$\begin{bmatrix}30&48\\48&101\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}B\\L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{11841}{5}\\ \frac{41497}{5}\end{bmatrix} \qquad (*)$$

Altså

$$A^TA\begin{bmatrix}B\\L\end{bmatrix} = A^T\begin{bmatrix}200\\ \frac{1029}{2}\\ \frac{1696}{5}\end{bmatrix}$$

Dette er normallikningen til kongens likningssystem $A\begin{bmatrix}B\\L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}200\\ \frac{1029}{2}\\ \frac{1696}{5}\end{bmatrix}$

Altså har Ole, Dole og Doffen funnet likningene som gir minste kvadraters løsninger (beste tilnærmede løsning) til kongens uløselige likningssystem.

Fra Matlab-utskriften ser vi at (*) har den entydige løsningen

$$B = \frac{551}{10} = \underline{\underline{55{,}1}} \qquad L = \frac{149}{10} = \underline{\underline{14{,}9}}$$

(Oppgave 3 forts.)

c) Det nye likningssystemet: $\begin{cases} 5B + 8L = 200 \\ 4B + 2L = 1029 \\ 5B + 30L = 1696 \end{cases}$

Vi har

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 5 & 30 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} & & & 5 & 8 \\ & & & 4 & 2 \\ & & & 5 & 30 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 66 & 198 \\ 8 & 2 & 30 & 198 & 968 \end{array} = \begin{bmatrix} 66 & 198 \\ 198 & 968 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 1029 \\ 1696 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13596 \\ 54538 \end{bmatrix}$$

(se Matlab-utskrift)

Så normallikningen for det nye likningssystemet er

$$\begin{bmatrix} 66 & 198 \\ 198 & 968 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13\,596 \\ 54\,538 \end{bmatrix}$$

Fra Matlab-utskriften får vi at løsningen her er

$$B = \frac{1627}{17} \qquad L = \frac{625}{17}$$

Breddegraden B er større enn 90, så den er umulig.

Forklaring: Å multiplisere en likning med et tall $\neq 0$, svarer til en omvekting av kvadratavvikene, se vektet minste kvadraters metode.

(KOLA s. 661, Lay s. 431) Se også bakerst!

Oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} 3t & 0 & 2\sqrt{1-t^2} \\ 3\sqrt{1-t^2} & 0 & -2t \end{bmatrix} \qquad t \in (0,1)$$

Vi har:

$$A^T A = \begin{array}{cc|ccc} & & 3t & 0 & 2\sqrt{1-t^2} \\ & & 3\sqrt{1-t^2} & 0 & -2t \\ \hline 3t & 3\sqrt{1-t^2} & 9t^2+9(1-t^2) & 0 & 6t\sqrt{1-t^2}-6t\sqrt{1-t^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{1-t^2} & -2t & 6t\sqrt{1-t^2}-6t\sqrt{1-t^2} & 0 & 4(1-t^2)+4t^2 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi ser at egenverdiene til A^TA er $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$.

Singulærverdiene er altså $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2$$

En ortonormal egenbasis for A^TA tilsvarende egenverdiene λ_1, λ_2 og λ_3 består av vektorene

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Altså $V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Vi finner så

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3t \\ 3\sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{1-t^2} \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ -t \end{bmatrix}$$

(Oppgave 4 forts.)

Altså
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

og
$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \sqrt{1-t^2} \\ \sqrt{1-t^2} & -t \end{bmatrix}$$

Vi har nå

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{U} \Sigma V^T \\ &= \begin{bmatrix} t & \sqrt{1-t^2} \\ \sqrt{1-t^2} & -t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Tilleggsforklaring til Doffens paradoks (oppgave 3c)}}$

Under b) ble verdiene av B og L funnet ved å minimalisere kvadratsummen

$$\left[(5B+8L)-200\right]^2 + \left[(2B+L)-\frac{1029}{2}\right]^2 + \left[(B+6L)-\frac{1696}{5}\right]^2$$

De nye verdiene av B og L blir funnet ved å minimalisere

$$\left[(5B+8L)-200\right]^2 + \left[(4B+2L)-1029\right]^2 + \left[(5B+30L)-1696\right]^2$$
$$= \left[(5B+8L)-200\right]^2 + \left[2\left((2B+L)-\frac{1029}{2}\right)\right]^2 + \left[5\left((B+6L)-\frac{1696}{5}\right)\right]^2$$
$$= \left[(5B+8L)-200\right]^2 + 4\cdot\left[(2B+L)-\frac{1029}{2}\right]^2 + 25\cdot\left[(B+6L)-\frac{1696}{5}\right]^2$$

Som vi ser, svarer dette til at kvadratavvikene på andre og tredje komponent har blitt vektet med henholdsvis 4 og 25. Da vil minimaliseringen legge mer vekt på å få disse små, så de optimale verdiene B, L vil endres. Endringen svarer til multiplikasjon med en diagonal vektmatrise W med diagonalelementer $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ og $w_3 = 5$.