MEK1100
Oblig 1

Egil Furnes
Studentnummer: 693784

Oppgave 1

a)

Vi har omløpstid T og periode τ, og et barn som beveger seg med hastigheten

$$v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r + v_0 \sin(\Omega t + \theta_0)k \tag{1}$$

Velger $\frac{R}{T}$ som referansehastighet og innfører følgende dimensjonsløse variabler:

$$x^* = \frac{x}{R} \quad y^* = \frac{y}{R} \quad z^* = \frac{z}{R} \quad t^* = \frac{T}{R} \quad r^* = \frac{r}{R} \quad v^* = \frac{v}{\frac{R}{T}} \tag{2}$$

Setter inn for $\omega = \frac{2\pi}{T}k$ og $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$, og skalerer uttrykket:

$$v^* = \frac{v}{R/T} = \frac{1}{R/T}\left[\left(\frac{2\pi}{T}k\right) \times (Rr^*) + v_0 \sin(\Omega t + \theta_0)k\right] \tag{3}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}k \times Rr^*\right)\frac{T}{R} + \frac{v_0}{R/T}\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \theta_0\right)k \tag{4}$$

$$= (2\pi k \times r^*) + \left(\frac{v_0 T}{R}\sin(2\pi t^*/\beta + \theta_0)k\right) \tag{5}$$

Med dette oppstår de dimensjonsløse parameterne $\alpha = \frac{v_0 T}{R}$ og $\beta = \frac{T}{\tau}$.

Har ikke behov for å innføre dimensjonsløs vinkel θ_0^* ettersom forholdet $\frac{y}{x} = \frac{y^*}{x^*}$.

Oppgave 2

Ser på det todimensjonale vektorfeltet $v = ix\sin y + j\cos y$ i området $x \in [-3, 3]$ og $y \in [-\pi, \pi]$.

a)

Strømlinjene oppfyller differensiallikningen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\cos y}{x \sin y}$$

Separasjon av variabler gir:

$$\sin y\, dy = \frac{\cos y}{x} dx$$

Dividerer begge sider med $\cos y$:

$$\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{dx}{x}$$

$$\tan y\, dy = \frac{dx}{x}$$

Integrerer begge sider:

$$\int \tan y\, dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\cos y| = \ln|x| + C$$

Omskrives til:

$$|\cos y| = C|x|$$

eller ekvivalent:

$$\cos y = Cx$$

der C er en integrasjonskonstant.

b)

```


clc; clear; close all;

% Definer rutenett
x = linspace(-3, 3, 20);
y = linspace(-pi, pi, 20);
[X, Y] = meshgrid(x, y);

% Beregn vektorfelt
Vx = X .* sin(Y);
Vy = cos(Y);

% Plot pileplott av vektorfeltet
```

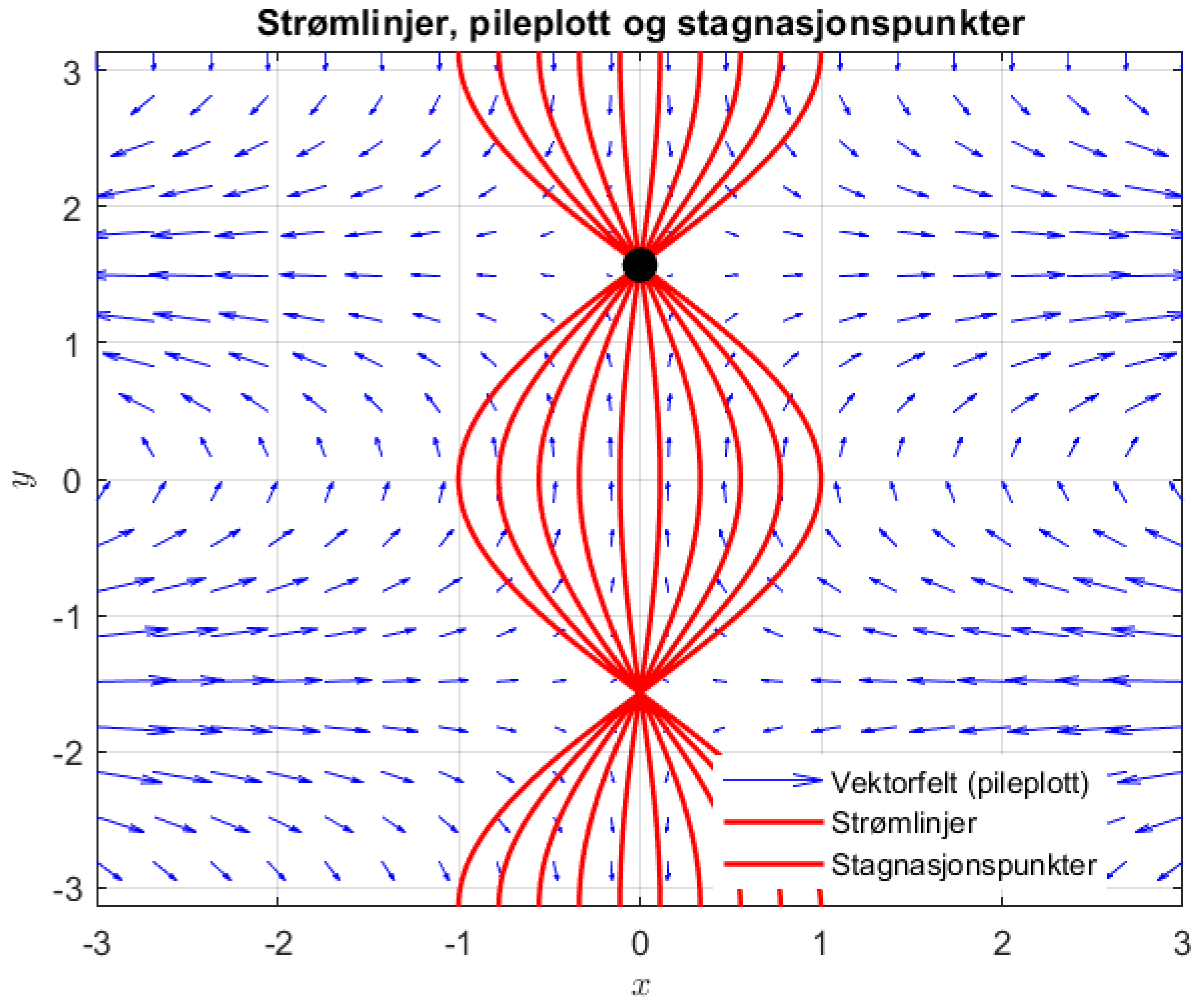
```
figure;
quiver(X, Y, Vx, Vy, 'b', 'AutoScaleFactor', 1);
hold on;

% Strømlinjer: cos(y) = Cx
C_values = linspace(-1, 1, 10); % Ulike konstanter for strømlinjer
Y_stream = linspace(-pi, pi, 100);
for C = C_values
    X_stream = C * cos(Y_stream);
    plot(X_stream, Y_stream, 'r', 'LineWidth', 1.5);
end

% Finn stagnasjonspunkter: v_x = 0, v_y = 0
stagnation_x = 0;
stagnation_y = acos(0); % y = ±/2
plot(stagnation_x, stagnation_y, 'ko', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'k'); % Stagnasjonspunkt

% Plot-justering
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$y$', 'Interpreter', 'latex');
title('Strømlinjer, pileplott og stagnasjonspunkter', 'Interpreter', 'latex');
grid on;
xlim([-3 3]);
ylim([-pi pi]);

legend('Vektorfelt (pileplott)', 'Strømlinjer', 'Stagnasjonspunkter', 'Location', 'Best');
hold off;
```



c)

c) Finne strømfunksjonen $\psi(x, y)$

Vi leter etter en strømfunksjon $\psi(x, y)$ som tilfredsstiller:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Gitt vektorfeltet:

$$v = x \sin y i + \cos y j$$

bruker vi definisjonene:

$$x \sin y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\cos y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Løser for ψ: 1. Integrerer $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \cos y$:

$$\psi = x \cos y + f(y)$$

2. Setter inn i $-\frac{\partial \psi}{\partial y} = x \sin y$:

$$-\left(-x \sin y + f'(y)\right) = x \sin y$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C$$

Strømfunksjonen er dermed:

$$\psi(x, y) = x \cos y + C$$

d)

Et vektorfelt er konservativt hvis curl er null, altså:

$$\nabla \times v = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) k$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(x \sin y)$$

$$0 - x \cos y = -x \cos y$$

Siden dette ikke er null, er vektorfeltet **ikke konservativt**.

e)

Kurven γ er definert som $x = 0$ for $-\pi \leq y \leq \pi$. Kurveintegralet er:

$$\int_\gamma v \cdot dr$$

Siden $x = 0$, følger vi kurven i y-retning. **Parametrisering**: $r(y) = (0, y)$ **Differensialelement**: $dr = (0, dy)$

Skalere produktet:

$$v \cdot dr = (0 \sin y, \cos y) \cdot (0, dy) = \cos y \, dy$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos y \, dy$$

$$\sin y \Big|_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0$$

Kurveintegralet er **null**.

f)

Fluksen gjennom kurven γ er:

$$\int_{\gamma} v \cdot nds$$

Normalvektoren til kurven $x = 0$ er $n = -i$. Dermed:

$$v \cdot n = -v_x = -(0 \sin y) = 0$$

Siden integranden er **0**, er også fluksen **null**.

Oppgave 3

a)

Vi har gitt vektorfeltet:

$$v = -yi + xj$$

og en rød sirkel med radius $r = 1$ rundt punktet:

$$r_0 = i + j = (1, 1)$$

Sirkelen kan parametriseres som:

$$r(\theta) = (1 + \cos\theta)i + (1 + \sin\theta)j, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Derivert med hensyn på θ:

$$\frac{dr}{d\theta} = (-\sin\theta)i + (\cos\theta)j$$

Setter inn $x = 1 + \cos\theta$ og $y = 1 + \sin\theta$ i vektorfeltet:

$$v = -(1 + \sin\theta)i + (1 + \cos\theta)j$$

Sirkulasjonen er gitt ved linjeintegralet:

$$\oint_\gamma v \cdot dr$$

$$\oint_\gamma [-(1 + \sin\theta)i + (1 + \cos\theta)j] \cdot [(-\sin\theta)i + (\cos\theta)j]\, d\theta$$

Utfører skalarproduktet:

$$\oint_\gamma [(1 + \sin\theta)\sin\theta + (1 + \cos\theta)\cos\theta]\, d\theta$$

$$= \oint_\gamma \left[\sin\theta + \sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta\right] d\theta$$

$$= \oint_\gamma \left[(\sin\theta + \cos\theta) + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\right] d\theta$$

$$= \oint_\gamma \left[(\sin\theta + \cos\theta) + 1\right] d\theta$$

Siden integralene av $\sin\theta$ og $\cos\theta$ over en hel periode $0 \leq \theta \leq 2\pi$ er null:

$$\oint_\gamma (\sin\theta + \cos\theta) d\theta = 0$$

og

$$\oint_\gamma d\theta = 2\pi$$

Får vi:

$$\oint_\gamma v \cdot dr = 2\pi$$

Sirkulasjonen rundt den røde sirkelen er:

$$\oint_\gamma v \cdot dr = 2\pi$$