Mat1110
Oblig 2

Egil Furnes
Studentnummer: 693784

Oppgave 1

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{III+2I \quad IV-I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{I-IV \quad II-3IV \quad III-8IV \quad II\leftrightarrow IV \quad III\leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{I+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
A = [
    1   2  -1;
    0   3   1;
   -2   4   2;
    1   3   0
];

R = rref(A);
disp(R);
```

```
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0
```

(ii)

Ja, søylene i (i) er lineært uavhengige siden de kan Gauss-elimineres til den reduserte trappeformen.

Oppgave 2

Finner volumet av D, inni kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Løsning i sylindriske koordinater:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{så kjeglen blir } z = r \text{ og kulen blir } z = \sqrt{1 - r^2}.$$

Volumet finnes med formelen:

$$V = \iiint_D 1\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$$

Integrerer først med hensyn på z:

$$\int_r^{\sqrt{1-r^2}} r\, dz = r\left(\sqrt{1 - r^2} - r\right)$$

Deretter:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} r\left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left(\int_0^{1/\sqrt{2}} r\sqrt{1 - r^2}\, dr - \int_0^{1/\sqrt{2}} r^2\, dr\right)$$

Bruker substitusjon $u = 1 - r^2$ i første integral:

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} r\sqrt{1 - r^2}\, dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3}$$

Andre integral:

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} r^2\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

Finner med dette at volumet D blir som følger:

$$V = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\right)$$

Oppgave 3

La $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$ og C være randa til A, positivt orientert.

(i) Skisse

Området A er sektoren i sirkelen $x^2 + y^2 \leq 4$ mellom $y = 0$ og $y = x$, altså vinkelen $\theta \in [0, \pi/4]$ i polarkoordinater, med radius $r \in [0, 2]$.

(ii) Direkte linjeintegral

Vi deler C i tre deler:

- C_1: fra $(0, 0)$ til $(2, 0)$ langs $y = 0$
- C_2: fra $(2, 0)$ til $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ langs sirkelen
- C_3: fra $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ til $(0, 0)$ langs $y = x$

Del 1: C_1: $x = t, y = 0, t \in [0, 2]$

$$\int_{C_1} y^2\, dx + x^2\, dy = \int_0^2 0 + x^2 \cdot 0\, dt = 0$$

Del 2: C_2: polarform, $\theta \in [0, \pi/4], r = 2$

$$x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta, \quad dx = -2\sin\theta\, d\theta, \quad dy = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^{\pi/4} (4\sin^2\theta)(-2\sin\theta) + (4\cos^2\theta)(2\cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} -8\sin^3\theta + 8\cos^3\theta\, d\theta\end{aligned}$$

Del 3: C_3: $x = t, y = t, t \in [\sqrt{2}, 0]$

$$dx = dt, \quad dy = dt, \quad y^2 dx + x^2 dy = t^2 dt + t^2 dt = 2t^2 dt$$

$$\int_{C_3} = \int_{\sqrt{2}}^0 2t^2 dt = -\int_0^{\sqrt{2}} 2t^2 dt = -\frac{4\sqrt{2}^3}{3} = -\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

Totalt:

$$I = 0 + \int_0^{\pi/4} 8(\cos^3\theta - \sin^3\theta)\, d\theta - \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

(iii) Bruk av Green's teorem

Vi har

$$I = \int_C y^2 dx + x^2 dy = \iint_A \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y} \right) dxdy = \iint_A (2x - 2y) dxdy$$

I polarkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r \in [0,2], \theta \in [0, \pi/4]$

$$2x - 2y = 2r(\cos\theta - \sin\theta), \quad dxdy = r\,dr\,d\theta$$

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/4} \int_0^2 2r(\cos\theta - \sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta &= \int_0^{\pi/4} 2(\cos\theta - \sin\theta) \int_0^2 r^2\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} 2(\cos\theta - \sin\theta) \cdot \frac{8}{3}\,d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos\theta - \sin\theta) d\theta \\ &= \frac{16}{3} [\sin\theta + \cos\theta]_0^{\pi/4} = \frac{16}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) = \frac{16}{3}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Svar:

$$I = \frac{16}{3}(\sqrt{2} - 1)$$