UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder
Eksamensdag:	Prøveeksamen
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Lykke til!

Oppgave 1 (6 poeng)

Bevis følgende utsagn ved hjelp av induksjon:

Om $n \in \mathbb{N}$ er $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Oppgave 2 (6 poeng)

La $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, der $n > m$. Bevis at $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært avhengige, altså at det finnes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ som ikke alle er lik 0, og som er slik at $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = 0$.

Oppgave 3 (6 poeng)

La $n \in \mathbb{N}$, og la A og B være mengder med $\#A = \#B = n$ (altså at både A og B har n elementer). La $f\colon A \to B$ være en funksjon. Bevis følgende utsagn med et motsigelsesbevis:

Hvis f er surjektiv, så er f også injektiv.

Oppgave 4 (12 poeng)

I denne oppgaven setter vi $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 2.)

4a

Finn den inverse matrisen til A

4b

Skriv A som et produkt av elementære matriser. Hva blir determinanten til A?

Oppgave 5 (12 poeng)

La A være matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$.

5a

Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

5b

Hva er kondisjonstallet $K(A)$?

Oppgave 6 (6 poeng)

Vi ser på funksjonen $f(x) = x^4 - x^3$ Finn newtonformen til det unike kubiske polynomet som interpolerer f i punktene -1, 0, 1, og 2.

Oppgave 7 (6 poeng)

Vi ser på tilnærmingen til $f''(a)$ gitt ved

$$\frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

Hva er feilen i denne tilnærmingen for $f(x) = x^4$?

Oppgave 8 (6 poeng)

Finne en tilnærming til $\int_1^9 \cos(\pi x/12)\, dx$ ved hjelp av midtpunktsmetoden med 4 delintervaller.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder
Eksamensdag:	Prøveeksamen
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Lykke til!

Oppgave 1 (6 poeng)

Bevis følgende utsagn ved hjelp av induksjon:

Om $n \in \mathbb{N}$ er $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Løsning:

Bevis. Når $n = 1$ er venstre side $2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$, mens høyre side er $2^2 - 1 = 3$, så utsagnet stemmer. Anta nå at utsagnet stemmer for $n = m \in \mathbb{N}$. Da er

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1,$$

som var det vi ville vise. □

Oppgave 2 (6 poeng)

La $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, der $n > m$. Bevis at $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært avhengige, altså at det finnes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ som ikke alle er lik 0, og som er slik at $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = 0$.

Løsning: La $A = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$. Om vi radreduserer A til redusert trappeform, ser vi at A har minst én kolonne som ikke er en pivotkolonne, siden $n > m$. Dermed finnes det uendelig mange løsninger på ligningen

(Fortsettes på side 2.)

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og om $\mathbf{x}$ er en ikke-null løsning på ligningen, er $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = 0$, slik at $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært avhengige.

Oppgave 3 (6 poeng)

La $n \in \mathbb{N}$, og la A og B være mengder med $\#A = \#B = n$ (altså at både A og B har n elementer). La $f\colon A \to B$ være en funksjon. Bevis følgende utsagn med et motsigelsesbevis:

Hvis f er surjektiv, så er f også injektiv.

Løsning:

Bevis. Anta motsatt at f ikke er injektiv, så det finnes $x, y \in A$ slik at $x \neq y$, men $f(x) = f(y)$. La $V_f = \{f(x) : x \in A\}$ være verdimengden til f. Siden f er surjektiv, er $V_f = B$, så $\#V_f = n$. På den annen side er $V_f = C \cup D$, der

$$C = \{f(x), f(y)\} \text{ og } D = \{f(z) : z \in A \setminus \{x, y\}\}.$$

Vi har $\#C = 1$ og $\#D \leq n - 2$, så

$$n = \#V_f \leq \#C + \#D \leq 1 + (n-2) = n - 1,$$

en selvmotsigelse. $\square$

Oppgave 4 (12 poeng)

I denne oppgaven setter vi $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

4a

Finn den inverse matrisen til A

Løsning: Vi radreduserer:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III-2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-3II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \overset{II-4III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+6III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 & -18 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \overset{I+2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 3.)

Det følger at $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 \\ -4 & 13 & 8 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

4b

Skriv A som et produkt av elementære matriser. Hva blir determinanten til A?

Løsning: Fra radoperasjonene over følger det at A kan skrives (Vi tar de inverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fem av radoperasjonene legger et multiplum av en rad til en annen. Ingen av disse endrer determinanten. Det er bare radbyttet som endrer determinanten med et fortegnskift. Determinanten blir derfor -1. Dette kan man også lett se ved å utvikle dterminanten, for eksempel langs første søyle:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6+8) - 0 + (-4-1) = 4 - 5 = -1.$$

Oppgave 5 (12 poeng)

La A være matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$.

5a

Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

Løsning: Vi har at

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 0.2)^2 - 0.64,$$

og dette er 0 kun $\lambda - 0.2 = \pm 0.8$. Derfor blir egenverdiene $\lambda_1 = -0.6$ og $\lambda_2 = 1$.
Egenvektor for $\lambda_1 = -0.6$:

$$-0.6I - A = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.8 \\ -0.8 & -0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En spesiell egenvektor blir $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 4.)

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.8 \\ -0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En spesiell egenvektor blir $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5b

Hva er kondisjonstallet $K(A)$?

Løsning: Matrisen er symmetrisk. Den er også inverterbar, siden begge egenverdiene er $\neq 0$. Kondisjonstallet er derfor forholdet mellom største og minste egenverdi i absoluttverdi, som gir $K(A) = 1/0.6 = 5/3$.

Oppgave 6 (6 poeng)

Vi ser på funksjonen $f(x) = x^4 - x^3$. Finn newtonformen til det unike kubiske polynomet som interpolerer f i punktene -1, 0, 1, og 2.

Løsning: Det interpolerende polynomet har formen

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x + c_3(x+1)x(x-1)$$

Vi har at $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, og $f(2) = 8$ Vi får derfor likningene

$$\begin{aligned} 2 &= c_0 \\ 0 &= c_0 + c_1 \\ 0 &= c_0 + 2c_1 + 2c_2 \\ 8 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3. \end{aligned}$$

Dette gir først at $c_0 = 2$, $c_1 = -2$. Deretter vår vi at $c_2 = (-2{+}4)/2 = 1$, og $c_3 = (8 - 2 + 6 - 6)/6 = 1$. Det følger at

$$p_3(x) = 2 - 2(x+1) + (x+1)x + (x+1)x(x-1).$$

Oppgave 7 (6 poeng)

Vi ser på tilnærmingen til $f''(a)$ gitt ved

$$\frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

Hva er feilen i denne tilnærmingen for $f(x) = x^4$?

(Fortsettes på side 5.)

Løsning: Vi regner ut

$$\begin{aligned}
&\frac{(a-h)^4 - 2a^4 + (a+h)^4}{h^2} \\
&= \frac{a^4 - 4a^3h + 6a^2h^2 - 4ah^3 + h^4 - 2a^4 + a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4}{h^2} \\
&= \frac{12a^2h^2 + 2h^4}{h^2} = 12a^2 + 2h^2.
\end{aligned}$$

Siden $f''(a) = 12a^2$ så blir feilen $|(12a^2 + 2h^2) - 12a^2| = 2h^2$.

Oppgave 8 (6 poeng)

Finn en tilnærming til $\int_1^9 \cos(\pi x/12)\,dx$ ved hjelp av midtpunktsmetoden med 4 delintervaller.

Løsning: Vi har $h = (9-1)/4 = 2$. De fire intervallene blir $[1,3]$, $[3,5]$, $[5,7]$, $[7,9]$ og midtpunktene på disse er 2, 4, 6, 8. Midtpunktsmetoden gir dermed

$$\begin{aligned}
&2\left(\cos(\pi 2/12) + \cos(\pi 4/12) + \cos(\pi 6/12) + \cos(\pi 8/12)\right) \\
&= 2\left(\cos(\pi/6) + \cos(\pi/3) + \cos(\pi/2) + \cos(2\pi/3)\right) \\
&= 2(\sqrt{3}/2 + 1/2 + 0 - 1/2) = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$