MAT1100 Oblig 1

Navn: Egil Furnes

Dato: 26.09.2024

Oppgave 1

a)

Vi vet at:

$$v = 1 + i, w = \sqrt{3} - i \tag{1}$$

Den konjugerte til v er lik $\bar{v} = (1 - i)$. Vi ganger sammen v med den konjugerte $\bar{v}$.

$$v\bar{v} = (1 + i)(1 - i) = 1^2 - 1i + 1i - i^2 = 1 + 1 = 2 \tag{2}$$

Vi ganger sammen v og w ved bruk av vanlige regneregler.

$$vw = (1 + i)(\sqrt{3} - i) = 1\sqrt{3} - 1i + i\sqrt{3} - i^2 = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1) \tag{3}$$

Vi deler v på w ved å gange med den konjugerte til w, $\bar{w} = \sqrt{3} + i$ i teller og nevner.

$$\begin{aligned}
\frac{v}{w} = \frac{1+i}{\sqrt{3} - i} &= \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} && (4)\\
&= \frac{1\sqrt{3} + 1i + i\sqrt{3} + i^2}{\sqrt{3}^2 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - i^2} && (5)\\
&= \frac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1)}{4} && (6)\\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4} && (7)
\end{aligned}$$

b)

Vi starter med v.

$$v = 1 + i \tag{8}$$

Vi kan skrive v på polarform og på formen $re^{i\theta}$ på følgende vis.

$$z = r(cos\theta + isin\theta) = re^{i\theta} \tag{9}$$

Regner ut modulus til v.

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \tag{10}$$

Regner ut argumentene til v.

$$cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{11}$$

$$sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{12}$$

Vi ser at $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ korresponderer til $(\frac{\pi}{4})$ i første omløp av enhetssirkelen. Vi kan med dette skrive om v på polarform og siden på formen $re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} * (cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}) && (13) \\ &= \sqrt{2} * e^{i\pi/4} && (14) \end{aligned}$$

Vi finner tredjerøttene til $v = (1 + i)$. Skriver først om kvadratroten på et bedre egnet format.

$$\sqrt{2} * e^{i\pi/4} = 2^{1/2} * e^{i\pi/4} \tag{15}$$

Vi finner tredjeroten av modulus til v.

$$2^{(1/2)*(1/3)} = 2^{1/6} \tag{16}$$

Vi finner tredjedelen til argumentet til v.

$$(\pi/4) * (1/3) = \pi/12 \tag{17}$$

Vi regner med dette ut tredjerøttene til v som tilsvarer w_0, w_1 og w_2. Vi regner først ut w_0 og kan deretter finne de andre røttene ved $w_{k+1} = w_k * i$ for $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} w_0 &= 2^{1/6} * e^{i\pi/12} && (18) \\ &= 2^{1/6}(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}) && (19) \\ &= 2^{1/6}(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}) && (20) \end{aligned}$$

Vi finner følgende w_1.

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 * i & (21)\\ &= 2^{1/6}(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}) * i & (22)\\ &= 2^{1/6}(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}) & (23) \end{aligned}$$

Til slutt finner vi w_2.

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 * i & (24)\\ &= 2^{1/6}(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}) * i & (25)\\ &= 2^{1/6}(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}) & (26) \end{aligned}$$

c)

Vi starter med polynomfunksjonen $P(z)$.

$$P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6 \tag{27}$$

Vi finner ut om $v = 1 + i$ er en rot i polynomet $P(z)$, hvor vi vet at m er en rot i $P(z)$ dersom $P(m) = 0$. Vi setter inn $v = 1 + i$ i $P(z)$ og regner ut $P(1 + i)$.

$$\begin{aligned} P(1+i) &= & (28)\\ &= (1+i)(1+i)(1+i) + (1+i)(1+i) - 4(1+i) + 6 & (29)\\ &= (1+i)(1+2i-1) + (1+2i-1) - 4 - 4i + 6 & (30)\\ &= 1 + 2i - 1 + 1i - 2 - 1i + 1 + 2i - 1 - 4 - 4i + 6 & (31)\\ &= 2i + 2i - 4i + 6 - 4 - 2 & (32)\\ &= 0 & (33) \end{aligned}$$

Vi fant at $P(1 + i) = 0$ og vet dermed at $v = 1 + i$ er en rot i polynomet $P(z)$.

d)

Følgende, vet vi at at $P(z)$ er delelig med det følgende produktet.

$$[z - (1 + i)][z + (1 + i)] = z^2 - 2z + 2 \tag{34}$$

Vi fullfører polynomdivisjonen $P(z) = (z^3 + z^2 - 4z + 6) : (z^2 - 2z + 2)$ og finner følgende at dette blir $(z+3)$. Dermed ser vi at $P(z)$ kan skrives som:

$$P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6 = (z^2 - 2z + 2)(z + 3) \tag{35}$$

Det betyr at $P(z)$ kan faktoriseres, enten som reelt:

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z + 3) \tag{36}$$

ellers kan $P(z)$ faktoriseres som kompleks:

$$P(z) = [z - (1 + i)][z - (1 - i)](z + 3) \tag{37}$$

Oppgave 2

Vi kjenner til følgende:

$$0 \leq c \leq 2 \tag{38}$$

$$a_1 = \sqrt{2} \tag{39}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(c + a_n), n \geq 1 \tag{40}$$

Vi starter med å ta grensen fra n til uendelig på begge sider av uttrykket til a_{n+1}, hvor a_n går mot a når n går mot ∞.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{c + a_n}{2} = \frac{c + a}{2} \tag{41}$$

Vi bruker at $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ til å sette opp ligningen nedenfor. Vi finner med dette at $a = c$.

$$a = \frac{c + a}{2} \tag{42}$$

$$=> 2a - a = c \tag{43}$$

$$=> a = c \tag{44}$$

Med dette, har jeg vist at følgen a_n konvergerer og at grenseverdien vil være i intervallet $(0, \sqrt{2})$ gitt valg av c. $\square$

Oppgave 3

I denne oppgaven kjenner vi til at funksjonen $f : \Re \rightarrow \Re$ er gitt ved $f(x) = -4x + 5$. Jeg skal vise at f er kontinuerlig i punktet $a = 1$.

Vi benytter først definisjonen i `5.1.1`.

Jeg starter med å sette en verdi for h, hvor $a = 1$.

$$h = x - a \tag{45}$$
$$h = x - 1 \tag{46}$$
$$x = 1 + h \tag{47}$$

Deretter, setter jeg inn for $a = 1$ i funksjonen $f(x)$ og undersøker avstanden mellom $f(x)$ og $f(1)$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &= |(-4x + 5) - (-4 + 5)| && (48)\\
&= |-4x + 5 + 4 - 5| && (49)\\
&= |4 - 4x| && (50)\\
&= |4 - 4(1 + h)| && (51)\\
&= |4 - 4 - 4h| && (52)\\
&= 4|h| && (53)
\end{aligned}$$

Deretter undersøker vi om avstanden mellom x og a er tilstrekkelig mindre enn δ.

$$|h| = |x - a| < \delta \tag{54}$$

Vi velger følgende en tilstrekkelig verdi for δ.

$$\delta = \frac{\epsilon}{4} \tag{55}$$

Bruker δ i følgende ligning og undersøker om avstanden mellom $f(x)$ og $f(a)$ er mindre enn δ.

$$|f(x) - f(1)| = 4|h| < 4 * \frac{\epsilon}{4} = \delta \tag{56}$$

Vi finner at dette gjelder, og har følgende vist at funksjonen f er kontinuerlig i punktet $a = 1$. $\square$

Oppgave 4

a)

Først faktoriserer vi uttrykket $x^2 + 3x - 4$.

$$(x-1)(x+4) = x^2 + 4x - 1x - 4 = x^2 + 3x - 4 \tag{57}$$

Jeg har med dette vist at $(x-1)(x+4)$ er en faktorisering av uttrykket $x^2 + 3x - 4$.

b)

I denne oppgaven skal vi finne grenseverdien når x går mot 1 for følgende uttrykk.

$$\lim_{x \to 1} \frac{sin(x-1)}{x^2 + 3x - 4} \tag{58}$$

Vi bruker resultatet fra `a)`, hvor $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$, og skriver om uttrykket som følger.

$$\lim_{n \to 1} \frac{sin(x-1)}{(x-1)(x+4)} \tag{59}$$

Fra hintet, kjenner vi til følgende.

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \tag{60}$$

Bruker vi dette, kan vi definere u som et uttrykk av x.

$$(x-1) = u \tag{61}$$

Med dette, kan vi substituere inn u for $x - 1$, og får følgende uttrykk.

$$\lim_{x \to 1} \frac{sin(x-1)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{u \to 0} \frac{sin(u)}{u(u+5)} \tag{62}$$

Etter utregninger, finner vi at grenseverdien til funksjonen blir gitt ved 1/5.

$$\lim_{u \to 0} \frac{sin(u)}{u} * \frac{1}{u+5} = 1 * \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5} \tag{63}$$

c)

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = e^{3(x-1)}$ når $x \in [0,1]$ og $f(x) = t * \frac{sin(x-1)}{x^2+3x-4}$ når $x \in (1, \frac{\pi}{2})$.

Først ser vi at $f(1) = e^{3(1-1)} = r^0 = 1$.

Fra oppgave `b)` kjenner vi til at grenseverdien til $sin(x-1)/(x-1)(x+4)$ tilsvarer $1/5$.

For at funksjonen $f(x)$ skal være kontinuerlig i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$, må

$$t * \frac{1}{5} = f(1) = 1 \tag{64}$$

Med denne ligningen, ser vi enkelt at $t = 5$.

Verdien til det reelle tallet t slik at f er kontinuerlig på $[0, \frac{\pi}{2}]$ er da 5.

Oppgave 5

Vis at ligningen $(x^3 + 1)3^{x+1} = 2$ har en reell løsning i det lukkede intervallet $[-1, 0]$.

For å løse denne oppgaven, benytter jeg middelverdisetningen i `6.2.3`.

Først sjekker vi verdiene i endepunktene for $f(x) = (x^3 + 1)3^{x+1} - 2$ i intervallet [-1,0], hvor $x = -1$ og $x = 0$.

Jeg beregner så funksjonen i endepunktene ved å sette inn for x i $f(x)$.

$$f(-1) = (-1^3 + 1)3^{-1+1} - 2 = 0 - 2 = -2 \tag{65}$$

$$f(0) = (0^3 + 1) * 3^{0+1} - 2 = 1 * 3 - 2 = 1 \tag{66}$$

Vi har at $f(-1) = -2$ og $f(0) = 1$.

Siden funksjonen er kontinuerlig på det lukkede området $[-1, 0]$ og siden vi går fra $y = -2$ til $y = 1$ på intervallet, vil det ifølget middelverdisetningen `6.2.3` finnes en reell løsning hvor $f(x) = 0$ i intervallet $[-1, 0]$. $\square$