MAT1105 Oblig 3

Navn: Egil Furnes

Dato: 03.10.2024

Seksjon 1.9

2)

Vi kjenner til følgende.

$$\mathbf{T}(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne matrisen til $\mathbf{T}$ ved å skrive e_1 og e_2 som kolonner i en matrise.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3)

Vi kjenner til følgende.

$$\mathbf{T}(a) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne $\mathbf{T}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$ på følgende vis.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) &= 3\mathbf{T}(\mathbf{a}) - 2\mathbf{T}(\mathbf{b}) && (1) \\ &= 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} && (2) \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} && (3) \\ &= -\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} && (4) \end{aligned}$$

Seksjon 4.1

1)

Vi har følgende ligningssystem.

$$x + 2y - z = 3 \tag{5}$$
$$2x + 3y - 3z = -1 \tag{6}$$
$$-x + 2y + 3z = 1 \tag{7}$$

Vi kan skrive det om på utvidet matrise-format.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dernest kan vi utføre Gauss-eliminasjon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{II-2I}{\sim}{}^{III+I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-4II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -24 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{2}III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \overset{I+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Følgende vet vi nå at.

$$x = 25 \tag{8}$$
$$y = -5 \tag{9}$$
$$z = 12 \tag{10}$$

Seksjon 4.2

3)

Vi starter med ligningssystemet.

$$x - y + 2z = 1 \tag{11}$$
$$2x + y + z = 1 \tag{12}$$
$$-2x - y + z = 0 \tag{13}$$

Vi skriver det på utvidet matriseform og utfører Gauss-eliminasjon.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{II-2I}{}\sim^{III+2I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{3})II}{}\sim^{III+II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(\frac{1}{2})III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{II+III}{}\sim^{I-2III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vi vet nå at.

$$z = \frac{1}{2} \tag{14}$$
$$y = \frac{1}{6} \tag{15}$$
$$x = y = \frac{1}{6} \tag{16}$$

4)

Vi starter med ligningssystemet.

$$3x - 4y + z = 2 \tag{17}$$
$$x - 2y = 1 \tag{18}$$
$$-2x + 2y - z = -1 \tag{19}$$

Vi skriver det så på matriseform og utfører Gauss-eliminasjon.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{I\leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II-3I}{\sim}\overset{III+2I}{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har da følgende.

$$z = z \tag{20}$$

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \tag{21}$$

$$x = -z \tag{22}$$

10)

Seksjon 4.3

6)

```python
import sympy as sp
matrix = sp.Matrix([
    [2, -1, 1, 3, -4],
    [-1, 2, 4, 3, 2],
    [-2, 1, 3, -4, -1]
])
rref_matrix, pivot_columns = matrix.rref()
sp.pprint(rref_matrix)
```

Vi får følgende output i terminalen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Dette samsvarer med følgende løsning.

$$u = u \tag{23}$$

$$z = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}u \tag{24}$$

$$y = \frac{15}{4} - \frac{15}{4}u \tag{25}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}u \tag{26}$$

Seksjon 4.4

4a)

Vi utfører Gauss-eliminasjon på matrisen og får den på trappeform.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -61 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-6I}{\sim} \overset{IV-2I}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{IV-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV+2III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4b)

Vi har følgende matrise.

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Og ligningen.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{27}$$

Vi vet da at.

$$x_1 - x_2 + x_4 = 0 \tag{28}$$
$$x_2 + 2x_3 = 1 \tag{29}$$
$$x_4 = h \tag{30}$$

Følgende ser vi at.

$$x_1 = x_3 - h \tag{31}$$
$$x_2 = 1 - 2x_3 \tag{32}$$
$$x_3 = \text{fri} \tag{33}$$
$$x_4 = h \tag{34}$$

Vi kan skrive.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - h \\ 1 - 2x_3 \\ x_3 \\ h \end{pmatrix}$$

Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsninger for hvilke som helst verdier av h. Vi kan for eksempel sette inn for $h = 2$ og finner da følgende.

$$x_4 = 2 \tag{35}$$

$$x_3 = x_3 \tag{36}$$

$$x_2 = 1 - 2x_3 \tag{37}$$

$$x_1 = x_3 - 2 \tag{38}$$