.

MAT1105 Lineær algebra og numeriske metoder

OBLIG 4

Egil Furnes

Studentnummer: 693784

4.6

3a)

Jeg skriver opp vektorene a_1 og a_1 på matriseform og utfører Gauss-eliminasjon.

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{II+2I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \overset{-1I}{\sim}{}^{\frac{1}{10}II} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+3III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jeg har med dette vist at a_1 og a_2 er lineært uavhengige og at alle vektorer i $\mathbf{R^2}$ kan skrive som en lineærkombinasjon av a_1 og a_2.

7c)

Jeg starter med vektorene.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jeg skriver de så om på matriseform og utfører Gauss-eliminasjon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} {}^{II+2I} \sim^{III-3I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeg følger definisjonen for *lineær uavhengighet* i `4.6.5`. Etter radreduksjon finner vi ut at vektorene **ikke** er lineært uavhengige, ettersom at én av radene er avhengig av en av de andre radene.

8b)

Jeg begynner med vektorene.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skriver de på matriseform og utfører radreduksjon i Matlab – og finner at søylene 1, 2 og 3 kan være en lineært uavhengig delmengde.

```
>> A = [1 0 2 2
3 2 8 3
-1 1 0 1];
>> C = rref(A)
C =
    1.0000         0         0   -7.0000
         0    1.0000         0   -6.0000
         0         0    1.0000    4.5000
```

9d)

Jeg starter med å tenke før jeg regner; jeg ønsker å finne en basis for the relevante rommet for $\mathbf{R}^n$, som er $\mathbf{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-1I \quad II+3I \quad III-2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{6}II \quad \frac{1}{-3}III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+2II \quad I-III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette viser at

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er en basis.

10a)

Jeg starter med vektorene.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jeg setter det som en matrise og utfører radreduksjon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{II-2I \quad III+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{I-\frac{2}{5}III \quad II\longleftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeg utvider så mengden av vektorer til en basis $\mathbf{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.8

3)

Jeg skal skrive følgende matrise som et produkt av elementære matriser.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeg utfører radreduksjon på følgende vis.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{II \longleftrightarrow III}{\sim} \quad \tfrac{1}{4}III \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I-2II \overset{I-III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette kan også skrives som produktet av elementære matriser.
Den første operasjonen er det samme som elementærmatrisen.

$$\overset{II+I}{\sim} = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den andre operasjonen

$$\overset{II \longleftrightarrow III}{\sim} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Videre.

$$\overset{\frac{1}{3}III}{\sim} = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

. Neste,

$$\overset{I-2II}{\sim} = E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Deretter,

$$\overset{I-III}{\sim} = E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.
Dermed kan matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

skrives som produktet av den inverse til elementærmatrisene:

$$A = E_1^- 1 E_2^- 1 E_3^- 1 E_4^- 1 E_5^- 1 \tag{1}$$

4.9

3a)

Jeg skal regne ut determinanten til følgende matrise.

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

Jeg vel-velger rad 2 for å regne ut determinanten og får følgende.

$$\det = -0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Dette er lik.

$$1 * (1 * 7 - 2 * 3) = 7 - 6 = 1 \tag{2}$$

Med andre ord er determinanten til matrisen lik 1.

10)

En $n \times n$ matrise kalles *ortogonal* dersom $U^{-1} = U^T$. Jeg skal nå vise at $\det(U)$ er enten 1 eller -1.
Vi vet at $\det(U^{-1}U) = \det(I) = 1$, og ettersom $U^{-1} = U^T$ kan vi omskrive dette som $\det(U^T U) = 1$, som gir $\det(U^T) = \det(U)$ eller $\det(U)^2 = 1$.
Denne ligningen har dermed løsningene $\det(U) \pm 1$. $\square$