MAT1105
Lineær algebra og numeriske metoder

OBLIG 5

Egil Furnes
Studentnummer: 693784

Seksjon 2.1

Oppgave 4)

a)

Vi ser at dersom p_1 og p_2 interpolerer i funksjonen f i de samme punktene x_0, x_1 og x_2 får vi følgende.

$$p_1(x_0) = f(x_0) \quad p_1(x_1) = f(x_1) \quad p_2(x_2) = f(x_2)$$

og samtidig

$$p_2(x_0) = f(x_0) \quad p_2(x_1) = f(x_1) \quad p_2(x_2) = f(x_2)$$

Med dette har vi at

$$p_1(x_0) = p_2(x_0) \quad p_1(x_1) = p_2(x_1) \quad p_1(x_2) = p_2(x_2)$$

For differansen $p = p_2 - p_1$ vil dermed verdiene til p i interpolasjonspunktene være

$$p = p_2 - p_1 = 0$$

b)

Vi vet at $p = p_2 - p_1$, og at både p_1 og p_2 er kvadratiske polynomer av annen grad eller lavere.

Følgende vil $p(x) = p_2(x) - p_1(x)$ være av annen grad eller lavere.

For et polynom av grad n vet vi at det kan ha høyest n røtter med mindre uttrykket er lik 0.

Siden $p(x)$ er høyst et annengradspolynom – med tre røtter – er det følgende et nullpolynom.

c)

Anta at $p_1(x)$ og $p_2(x)$ er polynomer av grad n og interpolerer til samme funksjon f på $n+1$ ulike punkter $x_0, x_1, ..., x_n$.

Dermed er

$$p_1(x_i) = f(x_i) \quad p_2(x_i) = f(x_i) \quad \text{for } i = 0, 1, ..., n$$

Vi definerer p på følgende vis

$$p(x) = p_2(x) - p_1(x)$$

For hvert punkt $x_0, x_1, ..., x_n$ har vi at

$$p(x_i) = p_2(x_i) - p_1(x_i) = f(x_i) - f(x_i)) = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, ..., n$$

Følgende vet vi at $p(x)$ har $n+1$ røtter $x_0, x_1, ..., x_n$.

Vi vet videre at $p(x)$ har høyest n grader, ettersom $p_2(x)$ og $p_1(x)$ har høyest n grader.

Som tidligere nevnt, vet vi at polynomer av grad n kan ha høyest n røtter med mindre det er et nullpolynom.

Siden vi har funnet $n+1$ forskjellige røtter for $p(x)$ vet vi at $p(x)$ er et nullpolynom og at

$$p(x) = 0 \quad \text{for alle } x$$

Ettersom $p(x) = 0$ vet vi at

$$p_2(x) - p_1(x) = 0 \Rightarrow p_2(x) = p_1(x)$$

$\square$

Seksjon 2.2

Oppgave 2)

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	0	2	1

a)

Vi har det kubiske polynomet

$$p_3(x) = c_0(x-1)(x-3)(x-4) + c_1x(x-3)(x-4) + c_2x(x-1)(x-4) + c_3x(x-1)(x-3)$$

Vi har følgende punkter for $(x_i, f(x_i))$.

$$(0,1) \quad (1,0) \quad (3,2) \quad (4,1) \tag{1}$$

Følgende vet vi at

$$p_3(0) = 1 \qquad p_3(1) = 0 \qquad p_3(2) = 2 \qquad p_3(3) = 1$$

Nå kan jeg sette inn verdier for x i det kubiske polynomet for $p_3(x)$.

Først, for $p_3(0)$.

$$p_3(0) = c_0(0-1)(0-3)(0-4) + c_1(0)(0-3)(0-4) + c_2(0)(0-1)(0-4) + c_3(0)(0-1)(0-3)$$

$$p_3(0) = c_0(-1)(-3)(-4) = -12c_0$$

$p_3(0) = 1$

$$1 = -12c_0 \Rightarrow c_0 = -\frac{1}{12}$$

Videre, for $p_3(1)$.

$p_3(1) = c_0(1-1)(1-3)(1-4) + c_1(1)(1-3)(1-4) + c_2(1)(1-1)(1-4) + c_3(1)(1-1)(1-3)$

$$p_3(1) = c_1 1(-2)(-3) = 6c_1$$

$p_3(1) = 0$

$$6c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Så, for $p_3(3)$.

$p_3(3) = c_0(3-1)(3-3)(3-4) + c_1(3)(3-3)(3-4) + c_2(3)(3-1)(3-4) + c_3(3)(3-1)(3-3)$

$$p_3(2) = c_2(3)(2)(-1) = -6c_1$$

$p_3(3) = 2$

$$2 = -6c_1 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}$$

Til slutt for $p_3(4)$.

$p_3(4) = c_0(4-1)(4-3)(4-4) + c_1(4)(4-3)(4-4) + c_2(4)(4-1)(4-4) + c_3(4)(4-1)(4-3)$

$$p_3(4) = c_3(4)(3)(1) = 12c_3$$

$p_3(4) = 1$

$$1 = 12c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{12}$$

Dette gir *Lagrange-formen* til det interpolerte polynomet $p_3(x)$.

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) + (0)x(x-3)(x-4) + -\frac{1}{3}x(x-1)(x-4) + \frac{1}{12}x(x-1)(x-3) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-4) + \frac{1}{12}x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

b)

Jeg starter med å finne de delte differansene.

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0-1}{1-0} = -1 \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{3-1} = 1 \\
f[x_2, x_3] &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1-2}{4-3} = -1 \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1-(-1)}{3-0} = \frac{2}{3} \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1-1}{4-1} = \frac{2}{3} \\
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{4-0} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Jeg setter opp verdiene til koeffisientene c_0, c_1, c_2, c_3.

$$
\begin{aligned}
c_0 &= f(x_0) = 1 \\
c_1 &= f[x_0, x_1] = -1 \\
c_2 &= f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2}{3} \\
c_3 &= f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Dette gir *Newton-formen* til det interpolare polynomet.

$$p_3(x) = 1 - (x-0) + \frac{2}{3}(x-0)(x-1) - \frac{1}{3}(x-0)(x-1)(x-3)$$

c)

Vi har som kjent det kubiske polynomet

$p_3(x) = c_0(x-1)(x-3)(x-4) + c_1 x(x-3)(x-4) + c_2 x(x-1)(x-4) + c_3 x(x-1)(x-3)$

Jeg kan forsøke å skrive ut polynomene på *Langrange*– og *Newton-form*.

For *Lagrange*:

$$p_3(x) = -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-4) + \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)$$

For *Newton*:

$$p_3(x) = 1 - (x-0) + \frac{2}{3}(x-0)(x-1) - \frac{1}{3}(x-0)(x-1)(x-3)$$

Jeg velger å sjekke de to polynomene i Python avrundet til 10 desimaler. Alternativt, kan man utvide uttrykkene for hånd.

```
from sympy import symbols, expand, simplify, N

x = symbols('x')
lagrange = -1/12 * (x - 1) * (x - 3) * (x - 4) - (1/3) * x * (x - 1) * (x -
    4) + (1/12) * x * (x - 1) * (x - 3)
newton = 1 - x + (2/3) * x * (x - 1) - (1/3) * x * (x - 1) * (x - 3)

lagrange1 = N(expand(lagrange),10)
newton1 = N(expand(newton),10)

is_equal = simplify(lagrange1 - newton1) == 0
print(f"Lagrange and Newton rounded: \n {lagrange1} \n {newton1}")
print(f"Is Lagrange==Newton? {is_equal}")
```

Jeg får med dette følgende output i terminalen.

```
Lagrange and Newton rounded:
-0.3333333333*x**3 + 2.0*x**2 - 2.666666667*x + 1.0
-0.3333333333*x**3 + 2.0*x**2 - 2.666666667*x + 1.0
Is Lagrange==Newton? True
```

Oppgave 3)

a)

Jeg benytter formelen fra 3.5, hvor

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Jeg finner med dette

$$c_0 = f(x_0) = 2$$

Finner følgende at

$$f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

Setter inn for $f(x_1) = 1$, $c_0 = 2$, $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$.

$$1 = 2 + c_1(1)$$
$$\Rightarrow c_1 = -1$$

Videre kan jeg sette inn for å finne c_2

$$f(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$
$$\Rightarrow 0 = 2 + (-1)(2) + c_2(2)(1)$$
$$\Rightarrow c_2 = \frac{0}{2} = 0$$

Polynomet blir dermed lik

$$p_2(x) = 2 - x$$

Dette tilsvarer funksjonen til dataene

$$y = 2 - x$$

Det er med andre ord ingen forskjell (!)

b)

Vi har $f(x)$ og $p(x)$ som begge viser seg å være første grads polynomer.

Vi har tre punkter for $(x, f(x))$ gitt ved $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$.

Både polynomer $f(x)$ og $p(x)$ gir samme verdier for $n = 3$ punkter, samtidig som polynomene er av grad $n = 1$.

Siden funksjonene samsvarer i mer enn $n + 1 = 2$ av punktene, vil de også samsvare i resten av området.

$\square$

Oppgave 4)

Vi har dataene

$$(0, y_0), \quad (1, y_1), \quad (2, y_2), \quad (3, y_3)$$

a)

Bruk $p_1(3/2)$ som en tilnærming til $f(3/2)$ og vis at

$$p_1(3/2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

b)

Jeg starter med Newtonformelen for $n = 1$

$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$$

Jeg kan med dette finne

$$\begin{aligned} c_0 &= f(x_0) = y_1 \\ c_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_2 - y_1}{2 - 1} = y_2 - y_1 \end{aligned}$$

Dermed kan jeg omformulere $p_1(x)$ som

$$p_1(x) = y_1 + (y_2 - y_1)(x - 1)$$

Jeg kan med dette sette inn for $x = \frac{3}{2}$ i uttrykket $p_1(x)$

$$p_1(3/2) = y_1 + (y_2 - y_1)(\frac{3}{2} - 1)$$

Med dette finner jeg følgende

$$p_1(3/2) = y_1 + (y_2 - y_1) * (\frac{1}{2})$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

Seksjon 2.3

Oppgave 1)

Vi har uttrykket

$$|f(x) - p_n(X)| \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Vi vet at

$$M_{n+1} = \max_{x \in [0,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

For uttrykket $f(x) = e^x$ har derivatet $f^{(n+1)}(x) = e^x$ maksimumsverdi e i intervallet $[0, 1]$.

Vi vet da at

$$M_{n+1} = e$$

Videre vet vi at

$$b - a = 1 - 0 = 1$$

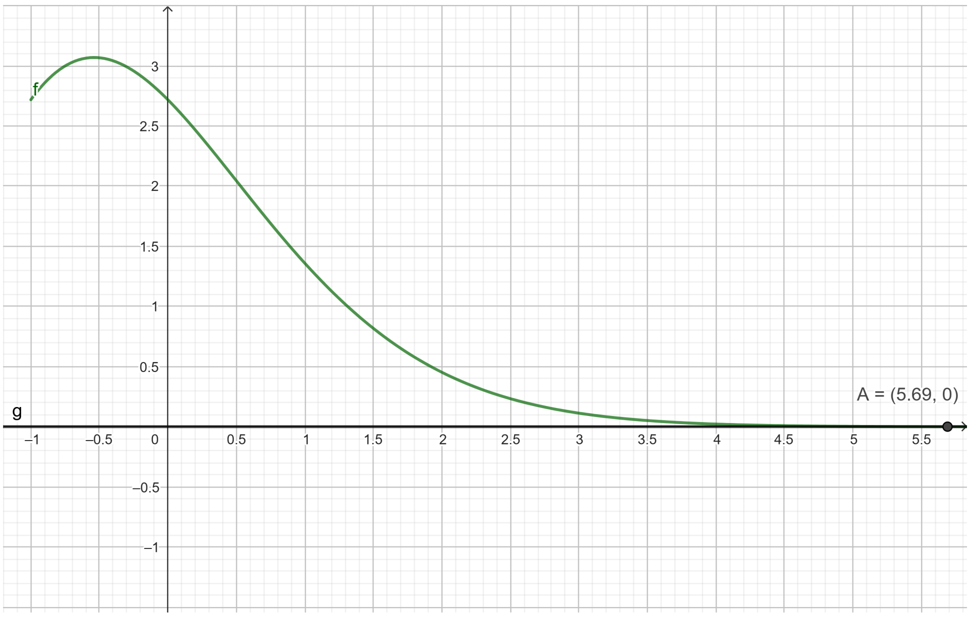
Vi kan omforme uttrykket til

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Fra dette finner vi følgende

$$\frac{e}{(n+1)!} \leq 0.001$$

Vi har da en ulikhet og vil finne første heltall n som gir at uttrykket er mindre enn 0.001.



Da kan jeg for eksempel tegne opp funksjonen $f(x) = \frac{e}{(x+1)!}$ og finne når den er mindre enn $y = 0.001$ for første heltall n.

I figuren under finner jeg skjæringspunktet $(5.69, 0)$, som vil si at $n \geq 6$ for at feilen $|f(x) - p_n(x)|$ skal være mindre enn 0.001 for alle $x \in [0, 1]$.