27. februar 2025

MEK1100

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 13. mars 2025, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

For å få godkjent oppgave må den leveres inn i Canvas. Du velger selv hvor mye du vil svare på, og du vil få tilbakemelding på det du har levert. Det viktigste med oppgaven er å få trening i å løse oppgaver, noe som definitivt vil gjøre deg bedre rustet til å takle eksamen når den kommer mot slutten av semesteret.

Der det står at man skal bruke datamaskin er det fritt fram for å bruke Matlab eller Python eller andre systemer (Julia, Octave, Geogebra, etc.) så lenge man har til disposisjon tilstrekkelige numeriske og grafiske kapasiteter.

Deloppgave 1b er valgfri. For oppgave 3 kan man velge å gjøre deloppgave 3a for hånd eller deloppgave 3b på datamaskin.

Oppgave 1. Skalering

På en karusell er det hester som går rundt den vertikale senteraksen med omløpstid T samtidig som de gynger opp og ned med periode τ. Et barn som sitter på denne karusellen beveger seg med hastighet

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + v_0 \sin(\Omega t + \theta_0)\boldsymbol{k}$$

hvor $\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T}\boldsymbol{k}$ er vinkelhastigheten til karusellen, $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$ er vinkelfrekvensen til den vertikale gyngebevegelsen, v_0 er største vertikale fart, $\boldsymbol{k}$ er enhetsvektor i vertikal z-retning, $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ er posisjonsvektoren til barnet, og vinkelen θ_0 er gitt ved $\tan\theta_0 = y(0)/x(0)$.

Vi skal anta at barnet befinner seg i radiell avstand R fra senteraksen.

a) Innfør dimensjonsløse variable $x^*, y^*, z^*, t^*, \boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{v}^*$ for $x, y, z, t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ når du skalerer med R for lengde og T for tid. Vis at den skalerte likninga har to dimensjonsløse parametere $\alpha = v_0 T/R$ og $\beta = T/\tau$.

   Forklar hvorfor vi ikke trenger å innføre en ny dimensjonsløs vinkel θ_0^*.

b) Valgfri deloppgave: Skriv opp de tre komponent-likningene. Finn banen $\boldsymbol{r}^*(t^*)$ til et barn som starter i posisjon $\boldsymbol{r}^*(0) = \boldsymbol{i}$.

   HINT: Du må løse to koblede differensiallikninger på formen $\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*} = -ay^*$ og $\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t^*} = ax^*$. Dette gjøres aller enklest ved å først eliminere y^* mellom de to likningene, anta en løsning på formen $x^* = A\cos(mt^*) + B\sin(mt^*)$, bestemme m (her holder det å la $m > 0$), og deretter bestemme A og B.

Oppgave 2. Et todimensjonalt vektorfelt
Vi skal nå se på det todimensjonale vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}x \sin y + \boldsymbol{j} \cos y$$

i området $-3 \leq x \leq 3$ og $-\pi \leq y \leq \pi$.

a) Finn strømlinjene ved å løse differensiallikninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

b) Tegn strømlinjene på datamaskin.

Tegn pileplott på datamaskin for å se styrken og retningen til vektorfeltet.

Finn stagnasjonspunktene for hånd (hvor vektorfeltet er null, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) og tegn de med tjukke kulepunkter $\bullet$ på datamaskin.

For best visuelt resultat bør disse tre tingene plottes med forskjellig farge i samme plott.

c) Vis at det finnes en strømfunksjon ψ, og finn strømfunksjonen.

HINT: En strømfunksjon $\psi(x, y)$ for et todimensjonalt felt $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$ i xy-planet har egenskapen $v_x = -\partial\psi/\partial y$ og $v_y = \partial\psi/\partial x$.

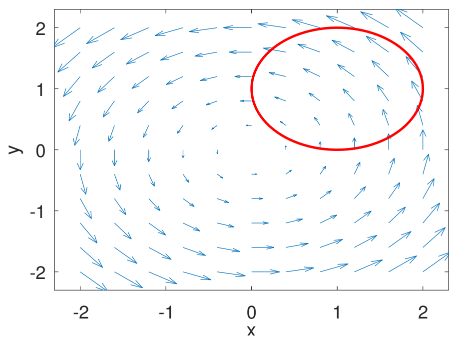
d) Vis at vektorfeltet ikke er konservativt.

e) Regn ut kurveintegralet $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ for kurven γ gitt ved $x = 0$ og $-\pi \leq y \leq \pi$.

f) Regn ut den integrerte fluksen gjennom kurven, $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s$, hvor kurven γ er den samme som i forrige deloppgave, $\boldsymbol{n}$ er en normalvektor til kurven (stadig i xy-planet) og $\mathrm{d}s$ er et infinitesimalt kurveelement.

Oppgave 3. Sirkulasjon I denne oppgaven kan du velge om du ønsker å gjøre deloppgave (a) for hånd eller deloppgave (b) på datamaskin.

a) Figuren nedenfor illustrerer feltet til en karusell $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, samt en rød sirkel med radius 1 rundt punktet $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

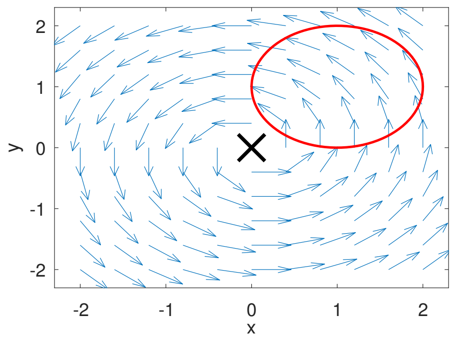


Regn ut direkte for hånd sirkulasjonen rundt den røde sirkelen.

b) Figuren nedenfor illustrerer feltet til en strømning som er forskjellig fra en vanlig karusell, nemlig

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Origo er her et singulært punkt ettersom vektorfeltet ikke er veldefinert der, derfor er origo markert med symbolet **X**. Den røde sirkelen har radius 1 rundt punktet $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.



I dette tilfellet er det nesten håpløst å regne ut sirkulasjonen rundt den røde sirkelen direkte for hånd, men det kan enkelt gjøres på datamaskin:

Først diskretiserer du sirkelen med et passende antall punkter n som $\theta_i = 2\pi i/n$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Så beregner du posisjonen med passende parametrisering, for eksempel $x_i = 1 + \cos\theta_i$ og $y_i = 1 + \sin\theta_i$. Du må finne en passende representasjon for det infinitesimale kurveelementet $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$. Og så er det bare å summere opp

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

Jo større verdi for n, jo mer nøyaktig blir svaret. La oss si vi ønsker å finne sirkulasjonen med to siffers nøyaktighet, hvor stor er sirkulasjonen og hvor stor må n være?

Matlab-hint

- En array med n jevnt fordelte punkter i intervallet $[a, b]$ lages best med `x=linspace(a,b,n);`.

- Et stort svart kulepunkt i origo kan lages med kommandoen `plot(0,0,'k.', 'MarkerSize', 20)`. En stor blå **X** i origo kan lates med kommandoen `plot(0,0,'bx', 'MarkerSize', 20, 'Linewidth',3)`.

- Den enkleste måten å lage en utskrift av en figur er å bruke det grafiske grensesnittet til plottevinduet. Du kan også lage en pdf fil med gjeldende figur med `print("-dpdf","fil.pdf");` eller `print("-dpdfcrop","fil.pdf");` Ønsker du en annen filtype bytter du ut `"-dpdf"` med `"-dXXX"` hvor XXX er ønsket filtype.

- I figurtitler kan det være gunstig å kombinere tekster og verdien av variable som brukes i Matlabkoden. Er s en streng og r et reelt tall og n et heltall kan du f.eks. benytte
  ```
  title(sprintf("String %s float %.2f int %d", s, r, n));
  ```
  Her betyr `%s` en streng, `%f` et reelt tall, `%.2f` et reelt tall med 2 desimaler, og `%d` et heltall.

Python-hint

- En array med n jevnt fordelte punkter i intervallet $[a, b]$ lages best med
  ```
  import numpy as np
  x=np.linspace(a,b,n)
  ```

- Den enkleste måten å lage en utskrift av en figur er å bruke det grafiske grensesnittet til plottevinduet. Du kan også lage en pdf fil med gjeldende figur med
  ```
  import matplotlib.pyplot as plt
  plt.savefig("fil.pdf")
  ```
  Ønsker du annen filtype bytter du ut `"fil.pdf"` med `"fil.XXX"` hvor XXX er ønsket filtype.

- I figurtitler kan det være gunstig å kombinere tekster og verdien av variable som brukes i Pythonkoden. Er s en streng og r et reelt tall og n et heltall kan du f.eks. benytte

```
plt.title("String␣{0:s}␣float␣{1:.2f}␣int␣{2:d}".format(s,␣r,␣i))
```

Funksjonen `format` kan brukes på strenger. Sløyfeparentesene definerer hvor i teksten noe skal settes inn. Tallet bestemmer hvilken verdi som settes inn, ellers går det fortløpende. For å indikere hvilken type som kommer brukes `s` for streng, `f` for reelt tall, `.2f` for reelt tall med 2 desimaler, og `d` for heltall.

LaTeX-hint

- For de som ønsker å skrive hele, eller deler, av obligen i LaTeX kan det være nyttig å inkludere alle `.m` eller `.py` filer i LaTeX koden. Dette gjøres enkelt ved verbatimkommandoen
  `\verbatiminput{filnavn.m}`
  En må huske å inkludere verbatim i starten på LaTeX fila
  `\usepackage{verbatim}`

- LaTeX har ganske bratt læringsgskurve og kan være litt skremmende i begynnelsen. Mange finner det enklere å skrive LaTeX dokumenter i en online editor som Overleaf. Der finnes det også fine introduksjoner og hjelp til hvordan man skriver i LaTeX.