Mat1110
Oblig 1

Egil Furnes
Studentnummer: 693784

Oppgave 1

a)

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi skal finne alle $2 * 2$ matriser B s.a. $AB = BA$. En slik løsning er $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

s.a. $AX = XA = I_2$

$$AX = \begin{pmatrix} -z & -u \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-z = 1, -u = 0, x = 0, y = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Vi vet da at $AB = BA$ hvis

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi vet også at $AI_2 = I_2A$. Derfor er også $AB = BA$ hvis

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eller

$$B = s * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor $s \in \mathbb{N}_{\nvdash}$.

(ii)

Føler samme fremgangsmåte.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Skal finne en matrise D s.a. $CD = DC$.

Finner den inverse matrisen til C s.a. $CX = XC = I_3$

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$x = 1 \tag{1}$$
$$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \tag{2}$$
$$3f = 1 \rightarrow f = \frac{1}{3} \tag{3}$$

Følgende er den inverse matrisen til C lik X

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = XC$$

Dermed er $CD = DC$ hvis $D = C^{-1}$ eller hvis $D = I_3$ eller $D = I_3$ eller

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hvor både C og D lar seg skalere med en konstant $s \in \mathbb{C}$.

Oppgave 2

(i)

Skal vise at for alle **a,b** $\in \mathbb{R}^n$ er

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{2}(|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2)$$

Kjenner følgende:

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$$
$$|\mathbf{y}|^2 = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$$
$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{2x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$$

Viser følgende

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= \frac{1}{2}(|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2)\\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{2x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{y})\\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{2x}\cdot\mathbf{y})\\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\end{aligned}$$

$\square$

(ii)

Skal vise at

$$\angle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \angle((\mathbf{T}(\mathbf{x}),\mathbf{T}(\mathbf{y})))$$

Kaller

$$\angle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \cos\theta$$

og

$$\angle(\mathbf{T}(\mathbf{x}),\mathbf{T}(\mathbf{y})) = \cos\phi$$

Vi vet at $|\mathbf{T}(\mathbf{x})| = \mathbf{c}|\mathbf{x}|$, med dette blir

$$|\mathbf{T}(\mathbf{x})||\mathbf{T}(\mathbf{y})| = \mathbf{c^2}|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

Følgende er

$$\mathbf{T}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{T}(\mathbf{y}) = (A\mathbf{x})(A\mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y}$$

Videre kjenner vi til at

$$|\mathbf{T}(\mathbf{x})|^2 = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$$

$$c^2|\mathbf{x}|^2 = c^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) = c^2\mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

Dermed er

$$\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = c^2\mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

og

$$A^T A = c^2 I$$

Finner dermed at

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{T(x)T(y)}}{|\mathbf{T(x)}||\mathbf{T(y)}|} = \frac{\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y}}{c^2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{c^2\mathbf{xy}}{c^2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \cos\theta$$

Oppgave 3

Oppgave 4