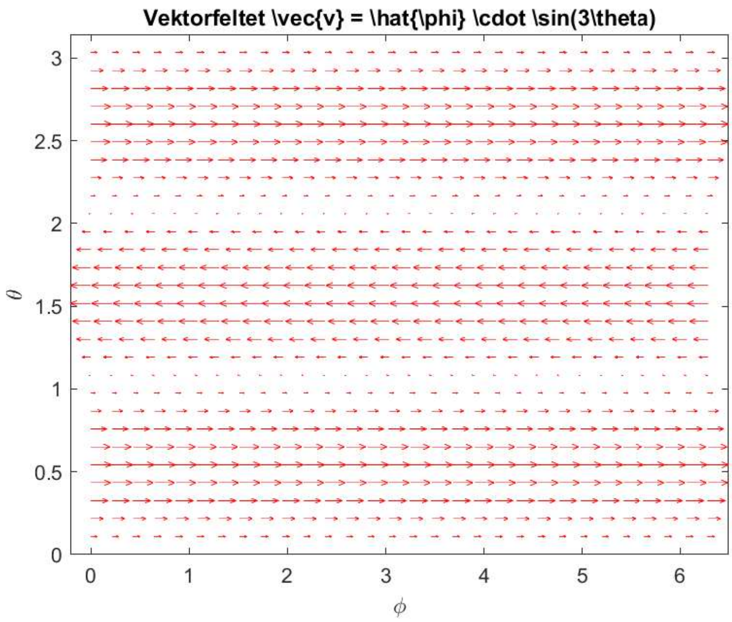
MEK1100
Oblig 2

Egil Furnes
Studentnummer: 693784

Oppgave 1

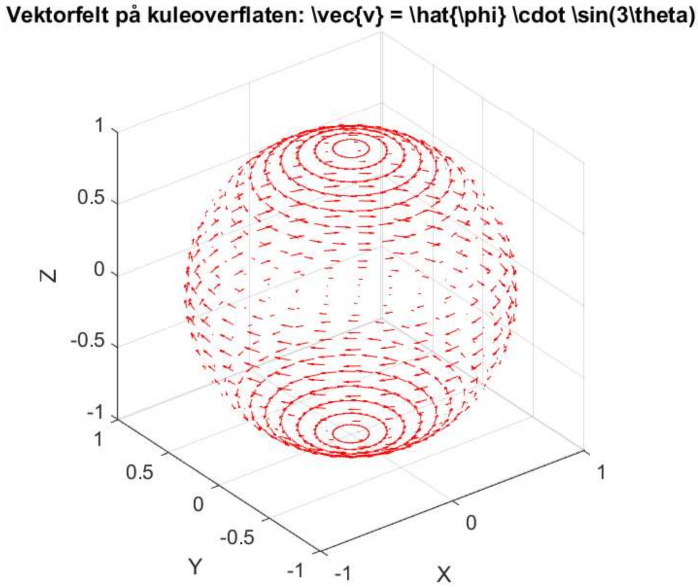
a)

```
phi = linspace(0, 2*pi, 30);
theta = linspace(0, pi, 30);
[PHI, THETA] = meshgrid(phi, theta);

Vphi = sin(3 * THETA);     % phi-komponent
Vtheta = zeros(size(Vphi)); % theta-komponent

figure;
quiver(PHI, THETA, Vphi, Vtheta, 'r')
xlabel('\phi'), ylabel('\theta')
title('Vektorfeltet \vec{v} = \hat{\phi} \cdot \sin(3\theta)')
axis tight
```



b)

```
theta = linspace(0, pi, 30);       % polarvinkel (fra nordpol til
    sørpol)
phi = linspace(0, 2*pi, 30);       % asimutalvinkel
[PHI, THETA] = meshgrid(phi, theta);
r = 1;                             % enhetskule

X = r * sin(THETA) .* cos(PHI);
Y = r * sin(THETA) .* sin(PHI);
Z = r * cos(THETA);

Vphi = sin(3 * THETA);

Vx = -Vphi .* sin(PHI);
Vy = Vphi .* cos(PHI);
Vz = zeros(size(Vx));

figure;
quiver3(X, Y, Z, Vx, Vy, Vz, 'r')
xlabel('X'), ylabel('Y'), zlabel('Z')
title('Vektorfelt på kuleoverflaten: \vec{v} = \hat{\phi} \cdot \sin
    (3\theta)')
axis equal
```


Vektorfelt på kuleoverflaten: \vec{v} = \hat{\phi} \cdot \sin(3\theta)
1
0.5
Z
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
Y
-1
-1
0
1
X

c)

Skal finne divergensen til vektorfeltet

$$\vec{v} = \hat{\varphi} \cdot \sin(3\theta)$$

Formel i kulekoordinater:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}(v_\varphi) = \frac{1}{r \sin\theta} \cdot 0 = 0$$

Divergensen er 0.

d)

Skal beregne virvlingen til v, $\nabla \times \vec{v}$.

Relevant komponent i kulekoordinater,

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \cdot v_\varphi) = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{d}{d\theta} (\sin\theta \cdot \sin(3\theta))$$

Bruker produktregelen,

$$\frac{d}{d\theta} (\sin\theta \cdot \sin(3\theta)) = \cos\theta \cdot \sin(3\theta) + 3 \sin\theta \cdot \cos(3\theta)$$

og finner at

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin\theta} (\cos\theta \sin(3\theta) + 3 \sin\theta \cos(3\theta))$$

e)

Siden divergensen til $\vec{v}$ er null, eksisterer det en strømfunksjon ψ slik at

$$\vec{v} = \nabla \times (\psi \hat{r})$$

Ja, v har en strømfunksjon i kulekoordinater, siden et rotasjonsfelt i to dimensjoner kan representeres ved en skalar strømfunksjon.

f)

Strømlinjene til $\vec{v}$ følger retningen til vektorfeltet:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \sin(3\theta) \Rightarrow \theta = \text{konstant}$$

Strømlinjene følger linjer med konstant θ lik breddegrader på kuleoverflaten.

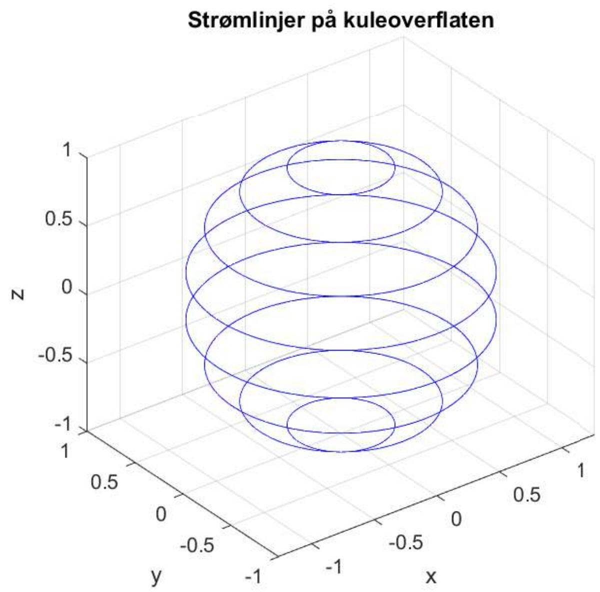
g)

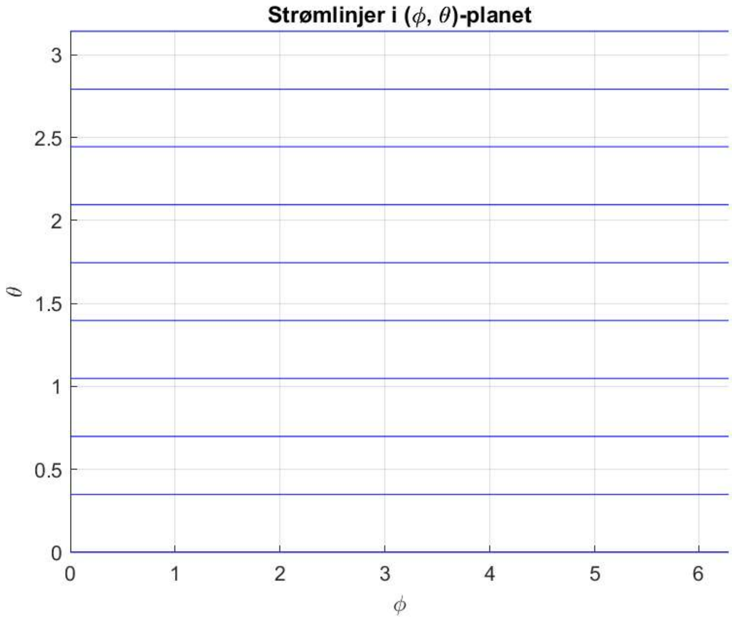
Fra oppgave (f) vet vi at strømlinjene følger

$$\theta = \text{konstant},$$

altså horisontale linjer i (φ, θ)-planet, som tilsvarer breddegrader på kuleoverflaten.

```

phi = linspace(0, 2*pi, 100);
theta_vals = linspace(0, pi, 10);

figure;
hold on
for i = 1:length(theta_vals)
    plot(phi, theta_vals(i)*ones(size(phi)), 'b')
end
xlabel('\phi'), ylabel('\theta')
title('Strømlinjer i (\phi, \theta)-planet')
axis([0 2*pi 0 pi])
grid on

r = 1;
phi = linspace(0, 2*pi, 200);
theta_vals = linspace(0, pi, 10);

figure;
hold on
for i = 1:length(theta_vals)
    theta = theta_vals(i);
    x = r * sin(theta) * cos(phi);
    y = r * sin(theta) * sin(phi);
    z = r * cos(theta) * ones(size(phi));
    plot3(x, y, z, 'b')
end
xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z')
title('Strømlinjer på kuleoverflaten')
axis equal
view(3)
grid on
```


Strømlinjer på kuleoverflaten
z
1
0.5
0
-0.5
-1
y
1
0.5
0
-0.5
-1
x
-1
-0.5
0
0.5
1


Strømlinjer i (ϕ, θ)-planet
θ
ϕ
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
1
2
3
4
5
6

h)

Skal finne en Helmholtz-dekomposisjon for vektorfeltet

$$\vec{v} = \hat{\varphi} \cdot \sin(3\theta)$$

Vektorfelt som går mot null kan skrives som,

$$\vec{v} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

hvor ϕ er et skalarpotensial (den irrotasjonelle delen) og $\vec{A}$ er et vektorpotensial.

Vet at,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

og kan velge $\phi = 0$ slik at

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{A}$$

Siden $\vec{v}$ bare har en komponent i $\hat{\varphi}$-retning og strømfunksjon $\psi(\theta)$ eksisterer, er,

$$\vec{v} = \nabla \times (\psi(\theta) \cdot \hat{r})$$

og en mulig Helmholtz-dekomposisjon er dermed

$$\vec{v} = \nabla \times (\psi(\theta) \cdot \hat{r})$$

hvor ψ er en strømfunksjon av θ.

i)

Skal beregne den integrerte fluksen av vektorfeltet

$$\vec{v} = \hat{\varphi} \cdot \sin(3\theta)$$

gjennom en kurve på jordas overflate som går fra nordpolen til sørpolen langs en linje med konstant φ), meridianen. Langs en meridian er $d\vec{S}$ normal til flaten og peker i radial retning, banen ligger i planet (θ, r), $\vec{v}$ har kun komponent i retningen $\hat{\varphi}$, som er vinkelrett på meridianen. Derfor er vektorfeltet $\vec{v}$ ortogonalt på arealelementet vi integrerer over og $\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$, hvor fluksen gjennom en meridian er 0.