10. februar 2025

MAT1110

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 27. februar 2025, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1.

(i) La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finn alle 2×2-matriser B slik at $AB = BA$.

(ii) La

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finn alle 3×3-matriser D slik at $CD = DC$.

Oppgave 2.

(i) Vis at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2} \left(|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 \right).$$

(ii) Anta at $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning og $c > 0$ en konstant slik at for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er

$$|\mathbf{T}(\mathbf{x})| = c|\mathbf{x}|.$$

Vis at $\mathbf{T}$ bevarer vinkler i den forstand at hvis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er forskjellige fra null, så er vinkelen $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ den samme som vinkelen mellom $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ og $\mathbf{T}(\mathbf{y})$, altså

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \angle(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \mathbf{T}(\mathbf{y})).$$

Oppgave 3.

I denne oppgaven skal vi studere stereografisk projeksjon, som kan brukes til å lage vinkelriktige kart. Slike kart er nyttige ved navigasjon. Vi vil modellere jordoverflaten med enhetssfæren

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Vi tenker på $\mathbf{N} = (0,0,1)$ som nordpolen. La $S^2 - \{\mathbf{N}\}$ være det som blir igjen av S^2 når punktet $\mathbf{N}$ er fjernet.

(i) Gitt $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in S^2 - \{\mathbf{N}\}$, finn en parameterframstilling av den rette linja i $\mathbb{R}^3$ som går gjennom punktene $\mathbf{N}$ og $\mathbf{p}$. Vis at denne linja skjærer xy–planet i nøyaktig ett punkt $(q_1, q_2, 0)$, hvor

$$(q_1, q_2) = \frac{1}{1 - p_3}(p_1, p_2).$$

Setter vi $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = (q_1, q_2)$, får vi en funksjon

$$\mathbf{F} : S^2 - \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{R}^2$$

som kalles **stereografisk projeksjon**.

(ii) Vis at for ethvert punkt $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ vil linja i $\mathbb{R}^3$ gjennom $(q_1, q_2, 0)$ og $\mathbf{N}$ skjære $S^2 - \{\mathbf{N}\}$ i nøyaktig ett punkt $\mathbf{p}$ gitt ved

$$\mathbf{p} = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + 1}(2q_1, 2q_2, |\mathbf{q}|^2 - 1).$$

Setter vi $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, får vi en funksjon $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{\mathbf{N}\}$. Vis at

$$\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{q})) = \mathbf{q}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{p})) = \mathbf{p}$$

for alle $\mathbf{p} \in S^2 - \{\mathbf{N}\}$ og $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$.

Oppgave 4. I denne oppgaven skal vi se nærmere på funksjonen $\mathbf{G}$ som vi fant i Oppgave 3. Vi vil nå betrakte $\mathbf{G}$ som en funksjon med verdier i $\mathbb{R}^3$, altså

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + 1}(2q_1, 2q_2, |\mathbf{q}|^2 - 1).$$

For å forenkle regnearbeidet skal vi bruke polarkoordinater i planet. La

$$\mathbf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{L}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Ved å sette sammen $\mathbf{L}$ og $\mathbf{G}$ får vi funksjonen

$$\mathbf{H}(r, \theta) = \mathbf{G}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(i) Regn ut $\mathbf{H}(r,\theta)$.

(ii) Regn ut Jacobi-matrisene til $\mathbf{L}$ og $\mathbf{H}$ i punktet (r,θ).

(iii) Gitt $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ med $r \neq 0$, la

$$\mathbf{q} = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \mathbf{w} = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

La $B = \mathbf{G}'(\mathbf{q})$ være Jacobi-matrisen til $\mathbf{G}$ i punktet $\mathbf{q}$. Bruk matriseformen av kjerneregelen på den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{L}(\mathbf{x}))$ til å regne ut $B\mathbf{v}$ og $B\mathbf{w}$. Sjekk at

$$|B\mathbf{v}| = |B\mathbf{w}| = \frac{2}{r^2+1}, \quad (B\mathbf{v}) \cdot (B\mathbf{w}) = 0.$$

(iv) Bruk resultatet i punkt (iii) til å vise at for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ er

$$|B\mathbf{x}| = \frac{2|\mathbf{x}|}{r^2+1},$$

hvor $B = \mathbf{G}'(\mathbf{q})$ som før. (Ifølge Oppgave 2 definerer B derfor en vinkelbevarende lineæravbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.)

Hint: Enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ kan uttrykkes som

$$\mathbf{x} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$$

for passende reelle tall a, b.