Háskóli Íslands

STÆ203G Líkindareikningur og tölfræði

HAG206G Líkindareikningur og tölfræði

MAS201F Líkindareikningur og tölfræði

Vor 2016

Tölvuverkefni 2

Sett fyrir: Föstudaginn 12. febrúar 2016.

Skiladagur: Föstudagurinn 26. febrúar 2016.

Verkefni 1 í tölvuæfingu 2: Logrinn á verði hlutabréfs breytist á milli samliggjandi daga (sami tími dags) samkvæmt normaldreifingu með meðalgildi $0{,}00047$ og staðalfrávik $0{,}0031$. Byrjað er í stöðu sem er jöfn núlli (á lograskala) í tímapunkti $k = 0$. Í tímapunkti $k = 1$ hefur logrinn á verði hlutabréfsins stokkið upp eða niður frá síðasta lograverði hlutabréfsins þar sem stærð stökksins fylgir normaldreifingu með áðurnefndum stikagildum. Í tímapunkti $k = 2$ er tekið eitt stökk frá lograverðinu í tímapunkti $k = 1$ þar sem stærð stökksins fylgir normaldreifingu. Stökkið í tímapunkti $k = 2$ er óháð stökkinu í tímapunkti $k = 1$. Svona breytist lograverðið frá einum tímapunkti til þess næsta (24 klukkustundir á milli). Tímaeiningin hér er dagur eða 24 klukkustundir. Aðeins eru taldir vinnudag, ekki frídagar. Gerum ráð fyrir að fjöldi vinnudaga á einu ári séu $t = 245$.

1. Finnið hversu mikið hlutabréfið hefur stokkið að meðaltali eftir 245 daga. Notið hermun með $B = 4000$ ítrunum og reiknið meðaltalið af stöðunni eftir 245 daga (bæði fyrir raunskala og lograskala).

2. Notið líkindareikning til að reikna meðalgildið á lograskala og á raunskala frá byrjunarpunkti eftir 245 stökk og berið saman við svarið í liðnum hér fyrir ofan.

3. Finnið einnig staðalfrávikið á stöðunni frá byrjunarpunkti eftir 245 stökk. Reiknið staðalfrávikið af stöðunni eftir 245 daga byggt á $B = 4000$ ítrunum (bæði fyrir raunskala og lograskala).

4. Notið líkindareikning til að reikna staðalfrávikið á lograskala og á raunskala frá byrjunarpunkti eftir 245 stökk og berið saman við svarið í liðnum hér fyrir ofan.

5. Teiknið fimm ferla af verði hlutbréfsins frá byrjunarstöðu yfir í lokastöðu eftir 245 stökk (daga) með tímann á x-ás og verðið á raunskala á y-ás. Notið fimm mismunandi liti, einn fyrir hvern feril. Upphafsstaðan, þ.e. þegar $t = 0$, er þannig að verð hlutabréfsins er $\exp(0) = 1.0$.

Stærðfræðileg framsetning á verkefninu

Látum X_k vera slembistærðina sem lýsir stökkinu á lograskala frá tímapunkti $k - 1$ yfir í tímapunkt k. X_k fylgir normaldreifingu með meðalgildi $\mu = 0{,}00047$ og staðalfrávik $\sigma = 0{,}0031$. Athugið að X_k og X_l eru óháðar gefið að $k \neq l$. Látum W_t vera verðið á logskala í tímapunkti t. Um W_t gildir

$$W_t = \sum_{k=1}^{t} X_k.$$

Meðalgildi og dreifni W_t eru

$$\mathrm{E}(W_t) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right) = \sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}(X_k)$$

$$\mathrm{var}(W_t) = \mathrm{var}\left(\sum_{k=1}^{t} X_k\right) = \sum_{k=1}^{t} \mathrm{var}(X_k).$$

Síðasta formúlan fyrir dreifnina byggir á því að X_k-in séu óháð.

Að því gefnu að X_k-in fylgi normaldreifingu þá fylgir W_t normaldreifingu með meðalgildi $\mathrm{E}(W_t)$ og dreifni $\mathrm{var}(W_t)$. Raunverðgildi hlutabréfsins í tímapunkti t, táknað með U_t, er gefið með

$$U_t = \exp(W_t).$$

Að því gefnu að W_t fylgir normaldreifingu þá fylgir U_t lognormaldreifingu með stika

$$\mu_{U,t} = \mathrm{E}(W_t), \quad \sigma^2_{U,t} = \mathrm{var}(W_t).$$

Væntigildi og dreifni U_t eru

$$\mathrm{E}(U_t) = \exp(\mu_{U,t} + 0.5\sigma^2_{U,t}), \quad \mathrm{var}(U_t) = \exp(2\mu_{U,t} + \sigma^2_{U,t})\{\exp(\sigma^2_{U,t}) - 1\}.$$

Forritun í R

Til að herma slembibreytu í R sem hegðar sér eins og X_t má nota

```
X_t = rnorm(1,mean = 0.00047, sd = 0.0031)
```

Skipunin `rnorm` gefur slembistærðir frá normaldreifingunni þar sem fyrsta talan í sviganum er fjöldi tala sem á að búa til, `mean` og `sd` eru μ-ið og σ-an í normaldreifingunni.
Til að herma slembibreytu eins og W_t í R þar sem $t = 245$ má nota

```
t = 245
W_t_temp = 0
for(k in 1:t){
    W_t_temp = W_t_temp + rnorm(1, mean = 0.00047, sd = 0.0031)
}
W_t = W_t_temp
```

Til að herma W_t í alls $B = 4000$ ítrunum má skrifa aðra for-lykkju um W_t. Til að reikna meðaltal og staðalfrávik úrtaks má nota skipanirnar `mean` og `sd` í R. Til að teikna myndir með R má nota skipanirnar `plot`, `lines` og `points`.

Forritun í Matlab

Til að herma slembibreytu í Matlab sem hegðar sér eins og X_t má nota

```
X_t =  normrnd(0.00047,0.0031);
```

Skipunin `normrnd` gefur slembistærðir frá normaldreifingunni þar sem tölurnar tvær í sviganum eru μ-ið og σ-an í normaldreifingunni.
Til að herma slembibreytu eins og W_t í Matlab þar sem $t = 245$ má nota

```
t = 245;
W_t_temp = 0;
for k = 1:t
    W_t_temp = W_t_temp + normrnd(0.00047,0.0031);
end
W_t = W_t_temp;
```

Til að herma W_t í alls $B = 4000$ ítrunum má skrifa aðra for-lykkju um W_t. Til að reikna meðaltal og staðalfrávik úrtaks má nota skipanirnar `mean` og `std` í Matlab. Til að teikna myndir með Matlab má nota skipunina `plot`.

Verkefni 2 í tölvuæfingu 2: Í þessari æfingu á að herma Poissonferli með veldisdreifingu. Gerið ráð fyrir að tíðni Poissonferlisins sé $c = 0{,}062$ á hverja tímaeiningu og að heildarlengd bilsins sem er skoðað sé $t = 78$ tímaeiningar. Fyrsti atburðinn frá $t = 0$ gerist á tíma T_1 þar sem $T_1 \sim \mathrm{Exp}(c)$. Látum X_1 vera lengd bilisins frá $t = 0$ til T_1 og þvi er $X_1 = T_1$. Næsti atburður gerist á tíma T_2 þar sem $T_2 = T_1 + X_2$ og $X_2 \sim \mathrm{Exp}(c)$. Þriðji atburðurinn gerist á tíma T_3 þar sem T_3 = T_2 + X_3 og $X_3 \sim \mathrm{Exp}(c)$. Almennt gildir að $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ og fyrir hvert $i = 1, ..., n$, gildir að $X_i \sim \mathrm{Exp}(c)$ og X_i er óháð X_j ef $i \neq j$. Til að herma Poissonferli á bilinu $[0, 78]$ þarf að herma veldisstærðir og leggja þær saman þar til summa þeirra er stærri en 78, þannig að ef $T_m < 78$ og $T_m + 1 > 78$ þá er fjöldi atburða m.

1. Hver er væntanlegur fjöldi atburða sem á sér stað á bilinu $[0, 78]$ samkvæmt reglum um Poissonferli? Notið hermun með $B = 4000$ ítrunum og reiknið meðaltalið af fjölda atburða sem eiga sér stað á bilinu $[0, 78]$. Hvernig ber fræðilega væntigildinu saman við reiknaða meðaltalið sem er byggt á hermun?

2. Hvert er staðalfrávik fjölda atburða sem á sér stað á bilinu $[0, 78]$ samkvæmt reglum um Poissonferli? Notið hermun með $B = 4000$ ítrunum og reiknið staðalfrávikið af fjölda atburða sem eiga sér stað á bilinu $[0, 78]$. Hvernig ber fræðilega staðalfrávikinu saman við reiknaða staðalfrávikið sem er byggt á hermun?

3. Reiknið líkurnar á að fjöldi atburða sé n, það er, reiknið $P(N_t = n)$, fyrir $n = 0, 1, ..., 13$, samkvæmt reglum um Poissonferli. Notið `dpois` í R eða `poisspdf` í Matlab ykkur til aðstoðar hér.

4. Reiknið hlutfallslega tíðni þess að á fjöldi atburða sé $N_t = n$, það er, finnið fjölda ítrana þar sem fjöldi atburða er n og deilið með $B = 4000$ fyrir $n = 0, 1, ..., 13$. Berið saman við fræðilegu líkurnar samkvæmt reglum um Poissonferli. Setjið fram töflu með þessum gildum, það er, $n = 0, 1, ..., 13$, hlutfallslegri tíðni og fræðilegum líkum.

5. Teiknið sex ferla viðburðastreymis á bilinu $[0, 78]$. Byrjið á að teikna sex línur fyrir ofan hvor aðra á sömu mynd. Hver lína sýnir eina hermun atburða á bilinu $[0, 78]$. Á hverja línu eru settir krossar þar sem atburðir áttu sér stað.

<u>Stærðfræðileg nálgun á verkefninu</u>

Sjá nánar í glósum um Poissonferli.

<u>Forritun í R</u>

Til að herma slembistærð í R sem hegðar sér eins og X_i má nota

```
c = 0.062
X_i = rexp(1,rate = c)
```

Skipunin `rexp` gefur slembistærðir frá veldisdreifingu þar sem fyrri talan í sviganum er fjöldi stærða sem á að búa til og `rate` er tíðnin sem er jöfn einum á móti meðalgildinu.

Til herma Poissonferli á bilinu $[0, t]$ þegar $t = 78$ má nota

```
t = 78
T_n_temp = 0
N_temp = 0
while(T_n_temp < t){
T_n_temp = T_n_temp + rexp(1,rate = c)
N_temp = N_temp + 1
}
N_t = N_temp - 1
```

Til að herma N_t í alls $B = 4000$ ítrunum má skrifa for-lykkju um N_t.

<u>Forritun í Matlab</u>

Til að herma slembistærð í R sem hegðar sér eins og X_i má nota

```
c = 0.062;
X_i = exprnd(1/c);
```

Skipunin `exprnd` gefur slembistærðir frá veldisdreifingu þar sem talan í sviganum er meðalgildinu.

Til herma Poissonferli á bilinu $[0, t]$ þegar $t = 78$ má nota

```
t = 78;
T_n_temp = 0;
N_temp = 0;
while T_n_temp < t
    T_n_temp = T_n_temp + exprnd(1/c);
    N_temp = N_temp + 1;
end
N_t = N_temp - 1;
```

Til að herma N_t í alls $B = 4000$ ítrunum má skrifa for-lykkju um N_t.