Líkindareikningur og Tölfræði STÆ203G

Tölvuverkefni 2

Egill Ian Guðmundsson, 260693-2639

Verkefni 1

Logrinn á verði hlutabréfs breytist á milli samliggjandi daga samkvæmt normaldreifingu með meðalgildi 0,00047 og staðalfráviki 0,0031. Byrjað er í stöðu sem er jöfn 0 í tímapunkti k=0. Í tímapunkti k=1 hefur logrinn á verði hlutabréfsins stokkið upp eða niður frá síðasta lograverði hlutabréfsins þar sem stærð stökksins fylgir normaldreifingu með áðurnefndum stikagildum. Stökkið í k=2 er óháð stökkinu í k=1. Svona breytist lograverðið frá einum tímapunkti til þess næsta. Gerum ráð fyrir t=245 tímapunkta (vinnudagar).

1.1. Finnið hversu mikið hlutbréfið hefur stokkið að meðaltali eftir 245 daga. Notið hermun með B=4000 ítrunum og reiknið meðaltalið af stöðunni eftir 245 daga (raun- og log-skala).

Lausn: Keyrum kóðann fyrir þetta verkefni og fáum eftirfarandi skilaboð á skipanalínu:

```
> source("logProblem.R")
> logProblem(0.00047, 0.0031, 4000, 245, 5)
Logarithmic mean price of shares after 245 days: 0.114738988318759
Real-scale mean price of shares after 245 days: 1.12158065371152
Logarithmic standard deviation of first share after 245 days: 0.0482758694070464
Real-scale standard deviation of first share after 245 days: 1.122888370753
______________________________________________________
Theoretical logarithmic mean price of shares after 245 days: 0.11515
Theoretical real-scale mean price of shares after 245 days: 1.12204173120928
Theoretical logarithmic standard deviation of shares after 245 days: 0.0485226751117454
Theoretical real-scale standard deviation of shares after 245 days: 1.12336340458714
```

Hér sést að meðaltalið af stöðunni á lograskala eftir 245 daga reiknast sem 0.114738988318759 og meðaltalið á raunskala þá 1.1215806531152.

1.2. Notið líkindareikning til að reikna meðalgildið á lograskala og á raunskala frá byrjunarpunkt eftir 245 stökk og berið saman við svar að ofan.

Lausn: Af myndinni að ofan sést að fræðilega gildið er 0.11515 eftir 245 stökk á lograskala og er býsna nálægt gildinu sem fékkst í hermuninni (um 0.0004 skekkja). Fyrir raungildið reiknast fræðilega gildið um 0.122041731 og er einnig mjög nálægt hermigildi (einnig um 0.0004 skekkja).

1.3. Finnið einnig staðalfrávik á stöðunni frá byrjunarpunkti eftir 245 stökk. Reiknið staðalfrávik af stöðunni eftir 245 daga eftir 4000 ítranir (raun- og log-skala).

Lausn: Skoðum aftur myndina okkar góðu:

```
> source("logProblem.R")
> logProblem(0.00047, 0.0031, 4000, 245, 5)
Logarithmic mean price of shares after 245 days: 0.114738988318759
Real-scale mean price of shares after 245 days: 1.12158065371152
Logarithmic standard deviation of first share after 245 days: 0.0482758694070464
Real-scale standard deviation of first share after 245 days: 1.122888370753
________________________________________________________________
Theoretical logarithmic mean price of shares after 245 days: 0.11515
Theoretical real-scale mean price of shares after 245 days: 1.12204173120928
Theoretical logarithmic standard deviation of shares after 245 days: 0.0485226751117454
Theoretical real-scale standard deviation of shares after 245 days: 1.12336340458714
```

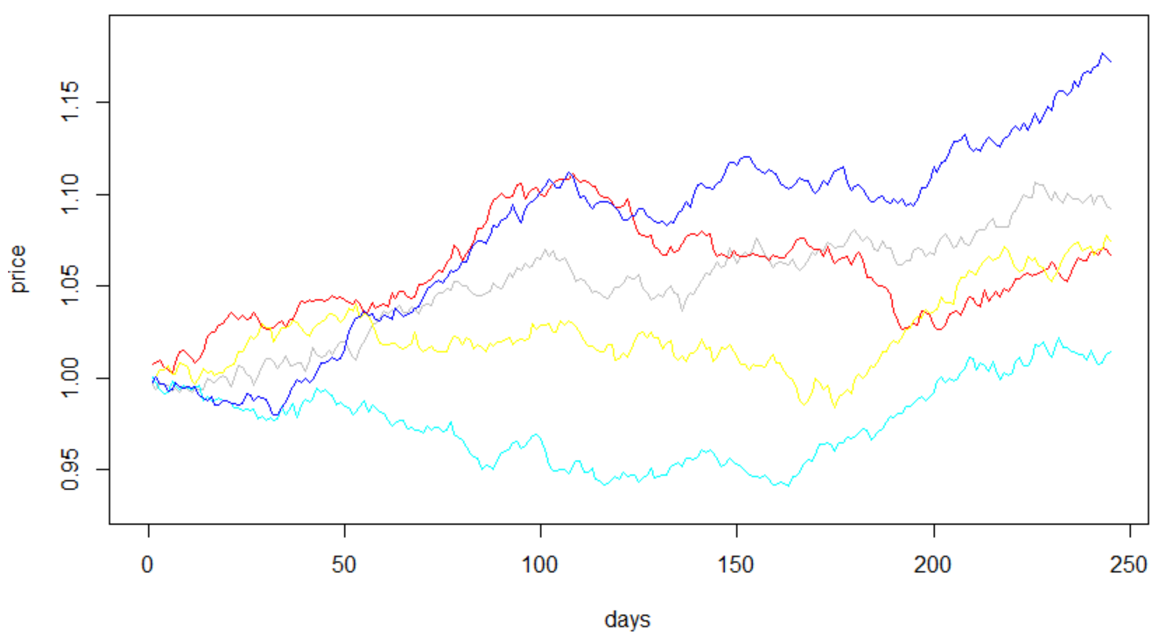
Þar kemur fram að staðalfrávikið á lograskala reiknast um 0.048275869407 og að staðalfrávikið á raunskala sé um 1.122888370753.

1.4 Notið líkindareikning til að reikna staðalfrávikið á lograskala og raunskala frá byrjunarpunkti eftir 245 stökk og berið saman við svarið í liðnum hér að ofan.

Lausn: Fræðilegt staðalfrávik á lograskala hefur þá reiknast 0.04852267511175 og hermigildið þá með um 0.0002 skekkju. Fræðilegt staðalfrávik á raunskala er um 1.12336340459 og hermigildið þá með um 0.0004 skekkju.

1.5. Teiknið fimm ferla af verði hlutbréfsins frá byrjunarstöðu yfir í lokastöðu eftir 245 stökk á raunskala með tíma á x-ás og verði á y-ás. Notið mismunandi liti fyrir hvern feril.

Lausn: Við setjum inn 5 sem númer grafa sem við viljum fá út úr forritunu og fáum þá eftirfarandi mynd:



Verkefni 2

Í þessari æfingu á að herma Poissonferli með veldisdreifingu. G.r.f. að tíðni Poissonferlisins sé c=0,062 á hverja tímaeiningu og að heildarlengd bilsins sem er skoðað sé t=78 tímaeininga. fyrsti atburðurinn frá t=0 gerist á tíma T_1 þar sem T_1 $Exp(c)$. Látum X_1 vera lengd bilsins frá t=0 til X_1 og því er $X_1 = T_1$. Næstu atburðir taka mið af fyrri atburði og reiknast eins. Almennt gildir að $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ og fyrir hvert i gildir að X_i $Exp(c)$ ásamt því að X_i er óháð X_j ef i er ekki það sama og j. Til að herma Poissonferli á bilinu [0;78] þarf að herma veldisstærðir og leggja þær saman þangaið til að summa þeirra er stærri en 78, þannig að ef $T_m < 78$ og $T_m + 1 > 78$ þá er fjöldi atburða m.

2.1. Hver er væntanlegur fjöldi atburða sem á sér stað á bilinu [0;78] skv. reglum um Poissonferli? Notið hermun með 4000 ítrunum og reiknið meðaltalið af fjölda atburða sem eiga sér stað á bilinu. Hvernig ber fræðilega væntigildinu saman við reiknaða meðaltalið sem er byggt á hermun.

Lausn: Keyrum forritið fyrir verkefni 2 og fáum eftirfarandi:

```
> poisProblem(4000, 78, 0.062, 5)
Mean value of events occurring in 78 units of time: 4.809
Theoretical expected value of events to occur in 78 units of time: 4.836
Standard deviation of events occurring in 78 units of time: 2.20073392472872
Theoretical standard deviation of events occurring in 78 units of time: 2.19909072118455
Likelihood of 1 to 13 events occurring with given Poisson distribution:
0.0079 0.0384 0.0928 0.1496 0.1809 0.175 0.141 0.0974 0.0589 0.0316 0.0153 0.0067 0.0027 0.001
Percentage of 1 to 13 events occured in simulation with given Poisson distribution:
0.0098 0.0368 0.0948 0.1532 0.1762 0.1865 0.133 0.0908 0.0608 0.033 0.0148 0.0065 0.0025 8e-04
```

Hér sést að fræðilegt vænt gildi af fjölda atburða á 78 tímaeiningum er 4.836 meðan hermigildið reynist vera 4.809 svo skekkjan er um 0,027 í þessu tilfelli.

2.2. Hvert er staðalfrávik fjölda atburða sem á sér stað á bilinu [0;78]? Notið sömu hermun og áðan. Hvernig ber fræðilega staðalfrávikinu saman við reiknaða staðalfrávikið sem er byggt á hermun?

Lausn: Við skoðum sömu hermun og áðan og fáum að hermistaðalfrávik reiknast sem 2.200733925 meðan fræðilegt staðalfrávik reiknast sem 2.19909072211 og munurinn er þá um 0.00164.

2.3. Reiknið líkurnar á að fjöldi atburða sé n, það er, reiknið P(Nt = n), fyrir n = 0, 1, ..., 13, samkvæmt reglum um Poissonferli. Notið dpois í R eða poisspdf í Matlab ykkur til aðstoðar hér.

2.4. Reiknið hlutfallslega tíðni þess að á fjöldi atburða sé Nt = n, það er, finnið fjölda ítrana þar sem fjöldi atburða er n og deilið með B = 4000 fyrir n = 0, 1, ..., 13. Berið saman við fræðilegu líkurnar samkvæmt reglum um Poissonferli. Setjið fram töflu með þessum gildum, það er, n = 0, 1, ..., 13, hlutfallslegri tíðni og fræðilegum líkum.

Lausn: Leysum þessa tvo liði saman. Tökum upplýsingarnar úr mynd að ofan og setjum í töflu til að auka læsileika:

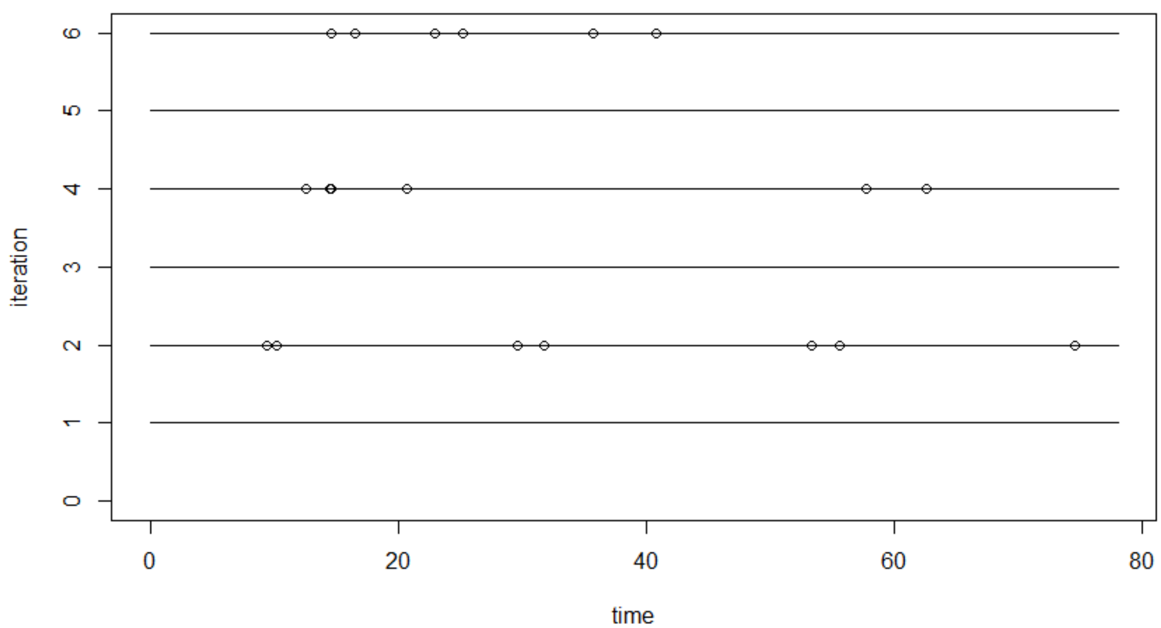
Tafla 1: Líkur á atburðum

Fjöldi atburða	**Hermigildi**	**Fræðilegt gildi**
0	0.0079	0.0098
1	0.0384	0.0368
2	0.0928	0.0948
3	0.1496	0.1532
4	0.1809	0.1762
5	0.175	0.1865
6	0.141	0.133
7	0.0974	0.0908
8	0.0589	0.0608
9	0.0316	0.033
10	0.0153	0.0148
11	0.0067	0.0065
12	0.0027	0.0025
13	0.001	0.0008

Þessi tafla virðist vera í nokkuð góðu lagi þó svo að smá sveiflur sjáist í gildunum.

2.5. Teiknið sex ferla viðburðastreymis á bilinu [0, 78]. Byrjið á að teikna sex línur fyrir ofan hvor aðra á sömu mynd. Hver lína sýnir eina hermun atburða á bilinu [0, 78]. Á hverja línu eru settir krossar þar sem atburðir áttu sér stað.

Lausn: Setjum inn í forritið að við viljum fá 5 gröf til að fá eftirfarandi niðurstöðu:



Kóði Hér á eftir fylgir kóðinn sem var notaður í úrlausn verkefnanna. Skráin logProblem.R var notuð til að leysa fyrra verkefnið meðan poisProblem.R var notuð til að leysa það seinna.

Hérna er mew meðalgildið á lografallinu, stdev er staðalfrávikið á því, iterations eru hversu margar ítranir skal framkvæma, days tímaeiningafjöldinn og numgraphs fjöldi grafa sem fallið skilar af sér.

```
logProblem <- function(mew, stdev, iterations, days, numgraphs) {

  # Vector containing prices of shares after calculations
  sharesprices = c(0)
  # Matrix containing vectors with y positional values of shares prices
  positions = matrix(data = NA, nrow = numgraphs, ncol=days, byrow = T)
  # Values for containing maximum and minimum prices for graph scaling
  maxPrice = 1;
  minPrice = 1;

  # Perform number of iterations specified and calculate final prices
  for(h in 1:iterations){
    # Calculate the final price of the shares for given days
    finalPrice = 0;
    # Vector for keeping share price on each day for graph purposes
    sharePosition = c(0)
    for(i in 1:days){
      finalPrice = finalPrice + rnorm(1,mean=mew,sd=stdev)
      sharePosition[i] = exp(finalPrice)
      if(h < numgraphs + 1){
        if(sharePosition[i] > maxPrice){
          maxPrice = sharePosition[i];
        }
        if(sharePosition[i] < minPrice){
          minPrice = sharePosition[i]
        }
      }
    }
    sharesprices[h] = finalPrice
    # Add points to matrix for graphing purposes
    if(h < numgraphs + 1){
      positions[h, ] <- sharePosition
    }
  }

  # Calculated real values of shares
  realMean = mean(sharesprices)
  realDev = sqrt(exp(2*realMean + var(sharesprices)))

  # Calculate theoretical mean price and standard deviation of shares on logarithmic scale
  theorMean = mew * days
```

```
  theorDev = sqrt(stdev^2 * days)
  theorRealDev = sqrt(exp(2*theorMean + theorDev^2))

  message("Logarithmic mean price of shares after ", days, " days: ", realMean)
  message("Real-scale mean price of shares after ", days, " days: ", exp(realMean))
  message("Logarithmic standard deviation of first share after ", days, " days: ", sd(sharesprices))
  message("Real-scale standard deviation of first share after ", days, " days: ", realDev)
  message("_____________________________________________________")
  message("Theoretical logarithmic mean price of shares after ", days, " days: ", theorMean)
  message("Theoretical real-scale mean price of shares after ", days, " days: ", exp(theorMean))
  message("Theoretical logarithmic standard deviation of shares after ", days, " days: ", theorDev)
  message("Theoretical real-scale standard deviation of shares after ", days, " days: ", theorRealDev)

  # Export positions matrix to global scale for debugging
  positions <<- positions

  # Offset min and max values so no clipping occurs on graph
  maxPrice = maxPrice + 0.01
  minPrice = minPrice - 0.01

  # Initialize graph for shares
  plot(c(0, days), c(minPrice, maxPrice), type = "n", xlab = "days", ylab = "price")

  # Plot set number of shares-price graphs
  for(j in 1:numgraphs){
    lines(positions[j, ], type="l", col= (83 + j*5) %% 657)
  }
}
```

logProblem.r

Í þessu falli er iterations ítranafjöldi, tíminn segir til um lengd hvers ferils, c er tíðni Poissonferilsins sem verið er að herma og graphNum er fjöldi þeirra grafa sem fallið á að skila af sér.

```
poisProblem <- function(iterations, time, c, graphNum){

  # Vector with event counter for each iteration
  eventCount = c(0)
  # Vector with occurrence times of events for each iteration
  eventTimes = c(0)

  # Outer loop for generating iterations
  for(h in 1:iterations){
    # Events occured this iteration
    tmpTime = 0
    tmpEvents = 0
    while(tmpTime < time){
      tmpTime = tmpTime + rexp(1,rate = c)
      if(tmpTime < time){
        tmpEvents = tmpEvents + 1
      }
      # Add time of event to vector for graph purposes
      if(h <= graphNum){
        eventTimes = c(eventTimes, tmpTime)
      }
    }
    # NA used as separator between graph lines
    if(h <= graphNum){
      eventTimes = c(eventTimes, NA)
    }
    eventCount[h] = tmpEvents
  }

  # Export variables to global scale for debugging purposes
  eventCount <<- eventCount
  eventTimes <<- eventTimes

  # Parameter for simulated Poisson Distribution
  lambda = c*time

  # Likelihood of 0:13 events occurring calculated
  likelyVector = dpois(c(0:13),lambda,log = FALSE)
  likelyVector <<- likelyVector
  for(j in 1:14){
    likelyVector[j] = round(likelyVector[j], 4)
  }

  # Check how often events have occurred in simulation with given frequency 0 to 13
  densityCounter = rep(0,14)
  for(k in 1:14){
    for(l in 1:iterations){
      if(eventCount[l] == k-1){
        densityCounter[k] = densityCounter[k] + 1
```

```r
      }
    }
    densityCounter[k] = round(densityCounter[k] / iterations, 4)
  }

  # Initialize plot for graphs
  plot(c(0, time), c(0, graphNum), type = "n", xlab = "time", ylab = "iteration")

  # Remove first point (false value)
  eventTimes = eventTimes[2:length(eventTimes)]
  # Graph lines and occurrences
  tmp = graphNum
  while(tmp > 0){
    lines(c(0,time),c(tmp,tmp))
    placeholder = 1;
    # Keep graphing same line until too big value is hit or NA value is hit (NA used as separator)
    while(!is.na(eventTimes[placeholder]) & eventTimes[placeholder] <= time){
      points(eventTimes[placeholder], tmp)
      placeholder = placeholder + 1
    }
    # Cut off all values that are "in front of" NA and throw them away
    eventTimes = eventTimes[placeholder + 1: length(eventTimes)]
    tmp = tmp - 1
  }

  message("Mean value of events occurring in ", time , " units of time: ", mean(eventCount))
  message("Theoretical expected value of events to occur in ", time, " units of time: ", lambda)
  message("Standard deviation of events occurring in ", time, " units of time: ", sd(eventCount))
  message("Theoretical standard deviation of events occurring in ", time, " units of time: ", sqrt(lambda))
  message("Likelihood of 0 to 13 events occurring with given Poisson distribution: ")
  cat(likelyVector, sep = " ")
  message("Percentage of 0 to 13 events occured in simulation with given Poisson distribution: ")
  cat(densityCounter, sep = " ")

  }
```

poisProblem.r