内 容 简 介

算法设计与分析是计算机科学技术中处于核心地位的一门专业基础课,越来越受到重视。本书将计算机经典问题和算法设计技术很好地结合起来,系统地介绍了算法设计技术及其在经典问题中的应用。全书共 12 章,第 1 章介绍了算法的基本概念和算法分析方法,第 2 章从算法的观点介绍了 NP 完全理论,第 3 章～第 11 章分别介绍了蛮力法、分治法、减治法、动态规划法、贪心法、回溯法、分支限界法、概率算法和近似算法等算法设计技术,第 12 章基于图灵机计算模型介绍了计算复杂性理论。每章均附有一篇阅读材料,以通俗易懂的笔触介绍了算法领域的一些最新研究成果。书中所有算法均给出了伪代码,大部分算法还给出了 C++ 描述,书中所有问题均给出了若干应用实例。

本书内容丰富,深入浅出,结合应用,图例丰富,可作为高等院校计算机专业本科和研究生学习算法设计与分析的教材,也可供工程技术人员和自学读者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

算法设计与分析/ 王红梅编著 .—北京: 清华大学出版社,2006 .7
(普通高校本科计算机专业特色教材精选)
ISBN 7 - 302 - 12942 - 8

Ⅰ .算… Ⅱ .王… Ⅲ .①电子计算机 - 算法设计 - 高等学校 - 教材 ②电子计算机 - 算法分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ .TP301 .6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 041915 号

出 版 者: 清华大学出版社　　地　　址: 北京清华大学学研大厦
http:// www .tup .com .cn　　邮　　编: 100084
社 总 机: 010 - 62770175　　客户服务: 010 - 62776969
责任编辑: 袁勤勇
印 刷 者: 北京市昌平环球印刷厂
装 订 者: 三河市新茂装订有限公司
发 行 者: 新华书店总店北京发行所
开　　本: 185×260　印张: 17　字数: 401 千字
版　　次: 2006 年 7 月第 1 版　2006 年 7 月第1 次印刷
书　　号: ISBN 7 - 302 - 12942 - 8/ TP・8222
印　　数: 1～3000
定　　价: 23 .00 元

普通高校本科计算机专业 特色 教材精选

编审委员会

出版说明

INTRODUCTION

在我国高等教育逐步实现大众化后，越来越多的高等学校将会面向国民经济发展的第一线，为行业、企业培养各级各类高级应用型专门人才。为此，教育部已经启动了“高等学校教学质量和教学改革工程”，强调要以信息技术为手段，深化教学改革和人才培养模式改革。如何根据社会的实际需要，根据各行各业的具体人才需求，培养具有特色显著的人才，是我们共同面临的重大问题。具体地说，培养具有一定专业特色的和特定能力强的计算机专业应用型人才则是计算机教育要解决的问题。

为了适应21世纪人才培养的需要，培养具有特色的计算机人才，急需一批适合各种人才培养特点的计算机专业教材。目前，一些高校在计算机专业教学和教材改革方面已经做了大量工作，许多教师在计算机专业教学和科研方面已经积累了许多宝贵经验。将他们的教研成果转化为教材的形式，向全国其他学校推广，对于深化我国高等学校的教学改革是一件十分有意义的事情。

清华大学出版社在经过大量调查研究的基础上，决定组织编写一套《普通高校本科计算机专业特色教材精选》。本套教材是针对当前高等教育改革的新形势，以社会对人才的需求为导向，主要以培养应用型计算机人才为目标，立足课程改革和教材创新，广泛吸纳全国各地的高等院校计算机优秀教师参与编写，从中精选出版确实反映计算机专业教学方向的特色教材，供普通高等院校计算机专业学生使用。

本套教材具有以下特点：

1.编写目的明确

本套教材是在深入研究各地各学校办学特色的基础上，面向普通高校的计算机专业学生编写的。学生通过本套教材，主要学习计算机科学与技术专业的基本理论和基本知识，接受利用计算机解决实际问题的基本训练，培养研究和开发计算机系统，特别是应用系统的基本能力。

2.理论知识与实践训练相结合

根据计算学科的三个学科形态及其关系，本套教材力求突出学科的理论与实践紧密结合的特征，结合实例讲解理论，使理论来源于实践，又进一步指导实践。学生通过实践深化对理论的理解，更重要的是使学生学会理论方法的实际运用。在编写教材时突出实用性，并做到通俗易懂，易教易学，使学生不仅知其然，知其所以然，还要会其如何然。

3.注意培养学生的动手能力

每种教材都增加了能力训练部分的内容，学生通过学习和练习，能比较熟练地应用计算机知识解决实际问题。既注重培养学生分析问题的能力，也注重培养学生解决问题的能力，以适应新经济时代对人才的需要，满足就业要求。

4.注重教材的立体化配套

大多数教材都将陆续配套教师用课件、习题及其解答提示，学生上机实验指导等辅助教学资源，有些教材还提供能用于网上下载的文件，以方便教学。

由于各地区各学校的培养目标、教学要求和办学特色均有所不同，所以对特色教学的理解也不尽一致，我们恳切希望大家在使用教材的过程中，及时地给我们提出批评和改进意见，以便我们做好教材的修订改版工作，使其日趋完善。

我们相信经过大家的共同努力，这套教材一定能成为特色鲜明、质量上乘的优秀教材。同时，我们也希望通过本套教材的编写出版，为“高等学校教学质量和教学改革工程”作出贡献。

清华大学出版社

前言

PREFACE

算法设计与分析是计算机科学技术中处于核心地位的一门专业基础课，越来越受到重视，CC2001 和 CCC2002 都将“算法和复杂性”列为主领域，将算法设计策略、基本可计算性理论、P 和 NP 问题类等算法设计技术和复杂性分析方法列为核心知识单元。

无论是计算科学还是计算实践，算法都在其中扮演着重要角色，算法被公认为是计算机科学的基石。翻开重要的计算机学术刊物，算法都占有一席之地，没有算法，计算机程序将不复存在。对于计算机专业的学生，学会读懂算法、设计算法，应该是一项最基本的要求，而发明算法则是计算机学者的最高境界。

提高学生的问题求解能力是高等教育的一个主要目标，在计算机科学的课程体系中，安排一门关于算法设计与分析的课程是非常必要的，因为这门课程能够引导学生的思维过程，告诉学生如何应用一些特定的算法设计策略来解决问题。学习算法还能够提高学生分析问题的能力。算法可以看作是解决问题的一类特殊方法——它不是问题的答案，而是经过精确定义的、用来获得答案的求解过程。因此，无论是否涉及计算机，特定的算法设计技术都可以看作是问题求解的有效策略。

本书将计算机经典问题和算法设计技术很好地结合起来，系统地介绍了算法设计技术及其在经典问题中的应用。通过同一算法设计技术在不同问题中的应用进行比较，牢固掌握算法设计技术的基本策略；通过不同的算法设计技术在同一问题中的应用进行比较，更容易体会到算法设计技术的思想方法，收到融会贯通的效果。所以，本书采用了模块化的设计思想，读者除了按本书组织的章节学习外，还可以将每种算法设计技术的问题提取出来，比较解决相同问题的不同解决方法。随着本书内容的不断展开，读者也将感受到综合应用多种算法设计技术有时可以更有效地解决问题。

全书共 12 章，第 1 章介绍了算法的基本概念和算法分析方法，第 2 章从算法的观点非形式化地介绍了 NP 完全理论，第 3 章～第 11 章分别

介绍了蛮力法、分治法、减治法、动态规划法、贪心法、回溯法、分支限界法、概率算法和近似算法等算法设计技术，第 12 章基于图灵机计算模型介绍了计算复杂性理论。

书中所有问题均给出了若干应用实例，每章还设有一个实验项目，通过设计提高学生创造性思维的培养。每章均附有一篇阅读材料，以通俗易懂的笔触介绍了算法领域的一些最新研究成果，保证知识的先进性。书中所有算法均给出了伪代码，大部分算法还给出了 C ++ 描述。在算法介绍上，注重对问题求解过程的理解，注重算法设计思路和分析过程的讲解，体现了“授之以渔”的教学理念。

王涛老师收集和整理了本书的阅读材料，参加本书编写的还有胡明、许建潮、孙卫佳、逄焕利、刘钢、陈志雨等老师，研究生张倩、魏卓调试了本书的全部算法。

由于作者的知识和写作水平有限，书稿虽几经修改，仍难免有缺点和错误。热忱欢迎同行专家和读者批评指正，使本书在使用中不断改进、日臻完善。

作者的电子邮箱是：wanghm@mail .ccut .edu .cn。

作　者

2006 年 2 月

目 录

CONTENTS

第1章 绪 论

CHAPTER

算法理论研究的是算法的设计技术和分析技术,前者是指面对一个问题,如何设计一个有效的算法;后者则是对已设计的算法,如何评价或判断其优劣。二者是相互依存的,设计出的算法需要检验和评价,对算法的分析反过来又将改进算法的设计。

1.1 算法的基本概念

算法的概念在计算机科学领域几乎无处不在,在各种计算机软件系统的实现中,算法设计往往处于核心地位。例如,操作系统是现代计算机系统中不可缺少的系统软件,操作系统的各个任务都是一个单独的问题,每个问题由操作系统中的一个子程序根据特定的算法来实现。用什么方法来设计算法,如何判定一个算法的优劣,所设计的算法需要占用多少时间资源和空间资源,在实现一个软件系统时,都是必须予以解决的重要问题。

1.1.1 为什么要学习算法

用计算机求解任何问题都离不开程序设计,而程序设计的核心是算法设计。一般来说,对程序设计的研究可以分为4个层次:算法、方法学、语言和工具,其中算法研究位于最高层次。算法对程序设计的指导可以延续几年甚至几十年,它不依赖于方法学、语言和工具的发展与变化。例如,用于数据存储和检索的Hash算法产生于20世纪50年代,用于排序的快速排序算法发明于20世纪60年代,但它们至今仍被人们广为使用,可是程序设计方法已经从结构化发展到面向对象,程序设计语言也变化了几代,至于编程工具很难维持3年不变。所以,对于从事计算机专业的人士来说,学习算法是非常必要的。

学习算法还能够提高人们分析问题的能力。算法可以看作是解决问

题的一类特殊方法——它不是问题的答案,而是经过精确定义的[①]、用来获得答案的求解过程。因此,无论是否涉及计算机,特定的算法设计技术都可以看作是问题求解的有效策略。著名的计算机科学家科努思(Donald Knuth)是这样论述这个问题的:“受过良好训练的计算机科学家知道如何处理算法,如何构造算法、操作算法、理解算法以及分析算法,这些知识远不只是为了编写良好的计算机程序而准备的。算法是一种一般性的智能工具,一定有助于我们对其他学科的理解,不管是化学、语言学、音乐还是另外的学科。为什么算法会有这种作用呢?我们可以这样理解:人们常说,一个人只有把知识教给别人,才能真正掌握它。实际上,一个人只有把知识教给计算机,才能真正掌握它,也就是说,将知识表述为一种算法……比起简单地按照常规去理解事物,用算法将其形式化会使我们获得更加深刻的理解。”

算法研究的核心问题是时间(速度)问题。人们可能有这样的疑问:既然计算机硬件技术的发展使得计算机的性能不断提高,算法的研究还有必要吗?

计算机的功能越强大,人们就越想去尝试更复杂的问题,而更复杂的问题需要更大的计算量。现代计算技术在计算能力和存储容量上的革命仅仅提供了计算更复杂问题的有效工具,无论硬件性能如何提高,算法研究始终是推动计算机技术发展的关键。下面看几个例子。

1.检索技术

20 世纪 50 年代 ~ 60 年代,检索的对象是规模比较小的数据集合。例如,编译系统中的标识符表,表中的记录个数一般在几十至数百这样的数量级。

20 世纪 70 年代 ~ 80 年代,数据管理采用数据库技术,数据库的规模在 K 级或 M 级,检索算法的研究在这个时期取得了巨大的进展。

20 世纪 90 年代以来,Internet 引起计算机应用的急速发展,海量数据的处理技术成为研究的热点,而且数据驻留的存储介质、数据的存储方法以及数据的传输技术也发生了许多变化,这些变化使得检索算法的研究更为复杂,也更为重要。

近年来,智能检索技术成为基于 Web 信息检索的研究热点。使用搜索引擎进行 Web 信息检索时,经常看到一些搜索引擎前 50 个搜索结果中几乎有一半来自同一个站点的不同页面,这是检索系统缺乏智能化的一种表现。另外,在传统的 Web 信息检索服务中,信息的传输是按 pull 的模式进行的,即用户找信息。而采用 push 的方式,是信息找用户,用户不必进行任何信息检索,就能方便地获得自己感兴趣的信息,这就是智能信息推送技术。这些新技术的每一项重要进步都与算法研究的突破有关。

2.压缩与解压缩

随着多媒体技术的发展,计算机的处理对象由原来的字符发展到图像、图形、音频、视频等多媒体数字化信息,这些信息数字化后,其特点就是数据量非常庞大,同时,处理多媒

① 算法固有的精确性限制了它所能够解决的问题种类,比如说,我们无法找到一个使人生活快乐的算法,也不能找到一个使人富有和出名的算法。

体所需的高速传输速度也是计算机总线所不能承受的。因此,对多媒体数据的存储和传输都要求对数据进行压缩。声音文件的 MP3 压缩技术说明了压缩与解压缩算法研究的巨大成功,一个播放 3～4 分钟歌曲的 MP3 文件通常只需 3MB 左右的磁盘空间。

3 .信息安全与数据加密

在计算机应用迅猛发展的同时,也面临着各种各样的威胁。一位酒店经理曾经描述了这样一种可能性:“ 如果我能破坏网络的安全性,想想你在网络上预订酒店房间所提供的信息吧 ! 我可以得到你的名字、地址、电话号码和信用卡号码,我知道你现在的位置,将要去哪儿,何时去,我也知道你支付了多少钱,我已经得到足够的信息来盗用你的信用卡 !”这的确是一个可怕的情景。所以,在电子商务中,信息安全是最关键的问题,保证信息安全的一个方法就是对需要保密的数据进行加密。在这个领域,数据加密算法的研究是绝对必需的,其必要性与计算机性能的提高无关。

1.1.2　算法及其重要特性

算法(algorithm)被公认为是计算机科学的基石。通俗地讲,算法是解决问题的方法。严格地说,算法是对特定问题求解步骤的一种描述,是指令的有限序列,此外,算法还必须满足下列 5 个重要特性(如图 1 .1 所示):

(1) 输入: 一个算法有零个或多个输入。算法的输入来源于两种方式: 一种是从外界获得数据,另一种是由算法自己产生被处理的数据。

(2) 输出: 一个算法有一个或多个输出。既然算法是为解决问题而设计的,那么算法实现的最终目的就是要获得问题的解。没有输出的算法是无意义的。

(3) 有穷性: 一个算法必须总是(对任何合法的输入)在执行有穷步之后结束,且每一步都在有穷时间内完成。

(4) 确定性: 算法中的每一条指令必须有确切的含义,不存在二义性。并且,在任何条件下,对于相同的输入只能得到相同的输出。

(5) 可行性: 算法描述的操作可以通过已经实现的基本操作执行有限次来实现。

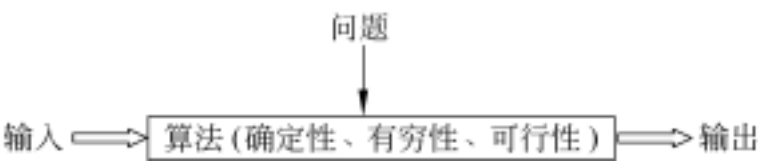


图 1 .1　算法的概念

概 念 回 顾

算法和程序不同。程序(program)是对一个算法使用某种程序设计语言的具体实现,原则上,算法可以用任何一种程序设计语言来实现。算法的有穷性意味着不是所有的计算机程序都是算法。

1.1.3 算法的描述方法

算法设计者在构思和设计了一个算法之后,必须清楚准确地将所设计的求解步骤记录下来,即描述算法。常用的描述算法的方法有自然语言、流程图、程序设计语言和伪代码等。下面以欧几里得算法(用辗转相除法求两个自然数 m 和 n 的最大公约数)为例进行介绍。

1.自然语言

用自然语言描述算法,最大的优点是容易理解,缺点是容易出现二义性,并且算法通常都很冗长。欧几里得算法用自然语言描述如下:

① 输入 m 和 n;
② 求 m 除以 n 的余数 r;
③ 若 r 等于 0,则 n 为最大公约数,算法结束,否则执行第④步;
④ 将 n 的值放在 m 中,将 r 的值放在 n 中;
⑤ 重新执行第②步。

2.流程图

用流程图描述算法,优点是直观易懂,缺点是严密性不如程序设计语言,灵活性不如自然语言。欧几里得算法用流程图描述如图 1.2 所示。

在计算机应用早期,使用流程图描述算法占有统治地位,但实践证明,除了一些非常简单的算法以外,这种描述方法使用起来非常不方便。如今,只能在早期有关算法的教材中找到它的踪影了。

3.程序设计语言

用程序设计语言描述的算法能由计算机直接执行,而缺点是抽象性差,使算法设计者拘泥于描述算法的具体细节,忽略了“好”算法和正确逻辑的重要性,此外,还要求算法设计者掌握程序设计语言及其编程技巧。

欧几里得算法用 C++ 语言书写的程序如下:

```
#include <iostream.h>
int CommonFactor(int m, int n)
{
    int r = m % n;
    while (r != 0)
    {
        m = n;
        n = r;
        r = m % n;
    }
    return n;
```

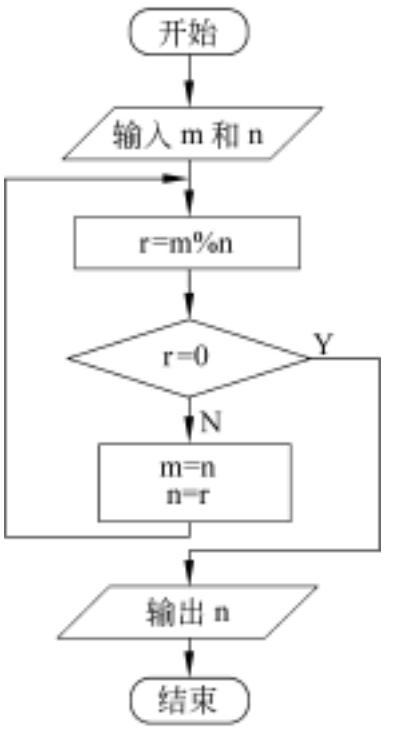


图 1.2 用流程图描述算法

```
}
void main( )
{
   cout < < CommonFactor(63 , 54) < < endl;
}
```

4 .伪代码

伪代码(pseudocode)是介于自然语言和程序设计语言之间的方法,它采用某一程序设计语言的基本语法,操作指令可以结合自然语言来设计。至于算法中自然语言的成分有多少,取决于算法的抽象级别,抽象级别高的伪代码自然语言多一些。计算机科学家从来没有对伪代码的书写形式达成过一种共识,只是要求了解任何一种现代程序设计语言的人都能很好地理解。

欧几里得算法采用符合 C ++ 语法的伪代码描述如下:

伪代码

算法 1 .1——欧几里得算法

```
1 . r = m % n;
2 . 循环直到 r = 0
    2 .1   m = n;
    2 .2   n = r;
    2 .3   r = m % n;
3 . 输出 n;
```

伪代码不是一种实际的编程语言,但在表达能力上类似于编程语言,同时极小化了描述算法的不必要的技术细节,是比较合适的描述算法的方法,被称为“算法语言”或“第一语言”。

1.1.4 算法设计的一般过程

算法是问题的解决方案,这个解决方案本身并不是问题的答案,而是能获得答案的指令序列。不言而喻,由于实际问题千奇百怪,问题求解的方法千变万化,所以,算法的设计过程是一个灵活的充满智慧的过程,它要求设计人员根据实际情况具体问题具体分析。可以肯定的是,发明(或发现)算法是一个非常有创造性和值得付出精力的过程。

在设计算法时,遵循下列步骤可以在一定程度上指导算法的设计[①]。

1 .理解问题

在面对一个算法任务时,算法设计者往往不能准确地理解要求他做的是什么,对算法希望实现什么只有一个大致的想法就匆忙地落笔写算法,其后果往往是写出的算法漏洞百出。在设计算法时需要做的第一件事情就是完全理解要解决的问题,仔细阅读问题的

① 这个一般过程并不是一个绝招,能为任意的问题设计算法,一个公认的事实是——这样的绝招是不存在的。

描述,手工处理一些小例子。

对设计算法来说,这是一项重要的技能:准确地理解算法的输入是什么?要求算法做的是什么?即明确算法的入口和出口,这是设计算法的切入点。

2.预测所有可能的输入

算法的输入确定了该算法所解问题的一个实例。一般而言,对于问题 P,总有其相应的实例集 I,则算法 A 若是问题 P 的算法,意味着把 P 的任一实例 input∈I 作为算法 A 的输入,都能得到问题 P 的正确输出。

预测算法所有可能的输入,包括合法的输入和非法的输入。事实上,无法保证一个算法(或程序)永远不会遇到一个错误的输入,一个对大部分输入都运行正确而只有一个输入不行的算法,就像一颗等待爆炸的炸弹。这绝不是危言耸听,有大量这种引起灾难性后果的案例。例如,许多年以前,整个 AT&T 的长途电话网崩溃,造成了几十亿美元的直接损失。原因只是一段程序的设计者认为他的代码能一直传送正确的参数值,可是有一天,一个不应该有的值作为参数传递了,导致了整个北美电话系统的崩溃。

如果养成习惯——首先考虑问题和它的数据,然后列举出算法必须处理的所有特殊情况,那么可以更快速地成功构造算法。

3.在精确解和近似解间做选择

计算机科学的研究目标是用计算机来求解人类所面临的各种问题。但是,有些问题无法求得精确解,例如求平方根、解非线性方程、求定积分等,有些问题由于其固有的复杂性,求精确解需要花费太长的时间,其中最著名的要算旅行商问题(即 TSP 问题,是指旅行家要旅行 n 个城市,要求经历各个城市且仅经历一次,并要求所走的路程最短),此时,只能求出近似解。

有时需要根据问题以及问题所受的资源限制,在精确解和近似解间做选择。

4.确定适当的数据结构

在结构化的程序设计时代,著名的计算机学者沃思(Wirth)提出了“算法 + 数据结构 = 程序”的观点,断言了算法和数据结构是构成计算机程序的重要基础。在面向对象的程序设计时代,数据结构对于算法设计和分析仍然是至关重要的。本书所讨论的很多算法设计技术都是基于精心设计的数据结构。

确定数据结构通常包括对问题实例的数据进行组织和重构,以及为完成算法所设计的辅助数据结构。在很多情况下,数据结构的设计直接影响基于该结构之上设计的算法的时间性能。

概 念 回 顾

数据结构是指相互之间存在一定关系的数据元素的集合。按照视点的不同,数据结构分为逻辑结构和存储结构。数据结构从逻辑上分为 4 类:集合、线性结构、树结构和图结构,常用的存储结构有两种:顺序存储结构和链接存储结构。

5 .算法设计技术

现在,设计算法的必要条件都已经具备了,如何设计一个算法来解决一个特定的问题呢?这正是本书讨论的主题。

算法设计技术(algorithm design technique,也称算法设计策略)是设计算法的一般性方法,可用于解决不同计算领域的多种问题。本书讨论的算法设计技术已经被证明是对算法设计非常有用的通用技术,包括蛮力法、分治法、减治法、动态规划法、贪心法、回溯法、分支限界法、概率算法、近似算法等。这些算法设计技术构成了一组强有力的工具,在为新问题(即没有令人满意的已知算法可以解决的问题)设计算法时,可以运用这些技术设计出新的算法。算法设计技术作为问题求解的一般性策略,在解决计算机领域以外的问题时,也能发挥相当大的作用,读者在日后的学习和工作中将会发现学习算法设计技术的好处。

6 .描述算法

在构思和设计了一个算法之后,必须清楚准确地将所设计的求解步骤记录下来,即描述算法。描述算法的常用方法有自然语言、流程图、程序设计语言和伪代码等,其中伪代码是比较合适的描述算法的方法。因为 C ++ 语言的功能强,而且大多数读者都比较熟悉,所以,本书对于算法的描述采用符合 C ++ 语法的伪代码,使得算法的描述简明清晰,既不拘泥于 C ++ 语言的实现细节,又容易转换为 C ++ 程序。

7 .跟踪算法

逻辑错误无法由计算机检测出来,因为计算机只会执行程序,而不会理解动机。经验和研究都表明,发现算法(或程序)中的逻辑错误的重要方法就是系统地跟踪算法。跟踪必须要用“心和手”来进行,跟踪者要像计算机一样,用一组输入值来执行该算法,并且这组输入值要最大可能地暴露算法中的错误。即使有几十年经验的高级软件工程师,也经常利用此方法查找算法中的逻辑错误。

8 .分析算法的效率

算法有两种效率:时间效率和空间效率,时间效率显示了算法运行得有多快,空间效率则显示了算法需要多少额外的存储空间,相比而言,我们更关注算法的时间效率。事实上,计算机的所有应用问题,包括计算机自身的发展,都是围绕着“时间——速度”这样一个中心进行的。一般来说,一个好的算法首先应该是比同类算法的时间效率高,算法的时间效率用时间复杂性来度量。

9 .根据算法编写代码

现代计算机技术还不能将伪代码形式的算法直接“输入”进计算机中,而需要把算法转变为特定程序设计语言编写的程序,算法中的一条指令可能对应实际程序中的多条指令。在把算法转变为程序的过程中,虽然现代编译器提供了代码优化功能,但仍需要一些

标准的技巧,比如,在循环之外计算循环中的不变式、合并公共子表达式、用开销低的操作代替开销高的操作等。一般来说,这样的优化对算法速度的影响是一个常数因子,可能会使程序提高10%～50%的速度。

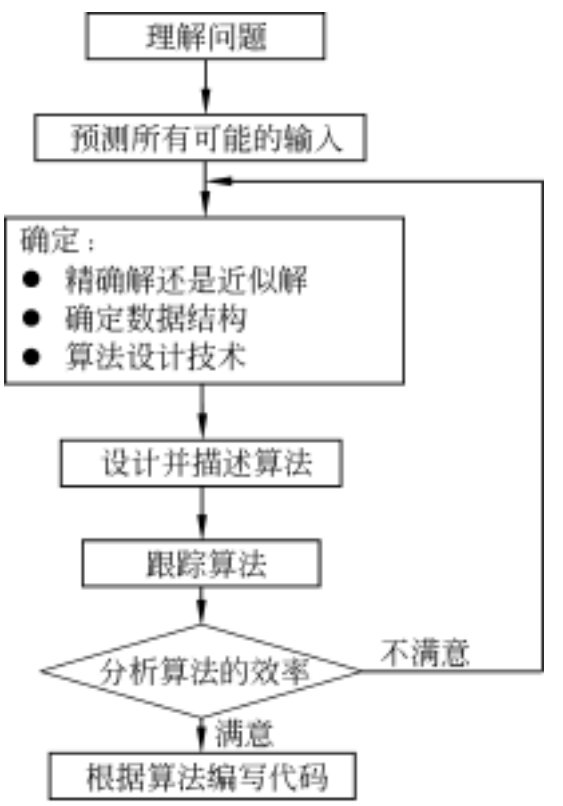


图 1.3 算法设计的一般过程

算法设计的一般过程如图 1.3 所示。需要强调的是,一个好算法是反复努力和重新修正的结果,所以,即使足够幸运地得到了一个貌似完美的算法,也应该尝试着改进它。那么,什么时候应该停止这种改进呢?设计算法是一种工程行为,需要在资源有限的情况下,在互斥的目标之间进行权衡。设计者的时间显然也是一种资源,在实际应用中,常常是项目进度表迫使我们停止改进算法。

1.1.5 重要的问题类型

就像生物学把自然界的所有生物作为自己的研究对象,计算机科学把问题作为自己的研究对象,研究如何用计算机来解决人类所面临的各种问题。在计算领域的无数问题中,或者由于问题本身具有一些重要特征,或者由于问题具有实用上的重要性,有一些领域的问题是算法研究人员特殊关注的。经验证明,无论对于学习算法还是应用算法,对这些问题的研究都是极其重要的。在本书中,我们将围绕下述问题展开对算法设计技术的讨论。

1.查找问题

查找是在一个数据集合中查找满足给定条件的记录。对于查找问题来说,没有一种算法对于任何情况都是合适的。有的算法查找速度比其他算法快,但却需要较多的存储空间(例如 Hash 查找),有的算法查找速度非常快,但仅适用于有序数组(例如折半查找),如此,等等。此外,如果在查找的过程中数据集合可能频繁地发生变化,除了考虑查找操作,还必须考虑在数据集合中执行插入和删除等操作,这种情况下,就必须仔细地设计数据结构和算法,以便在各种操作的需求之间达到一个平衡。而且,组织用于高效查找的特大型数据集合对实际应用具有非常重要的意义。

2.排序问题

简单地说,排序就是将一个记录的无序序列调整成为一个有序序列的过程。在对记录进行排序时,需要选定一个信息作为排序的依据,例如,可以按学生姓名对学生记录进行排序,这个特别选定的信息称为关键码。

排序的主要目的是为了进行快速查找,这就是为什么字典、电话簿和班级名册都是排好序的。出于同样的考虑,在其他领域的很多重要算法中,排序也被作为一个辅助步骤,例如,搜索引擎将搜索到的结果按相关程度排序后显示给用户。

迄今为止，已经发明的排序算法不下几十种，没有一种排序算法在任何情况下都是最好的解决方案，有些排序算法比较简单，但速度相对较慢；有些排序算法速度较快，但却很复杂；有些排序算法适合随机排列的输入；有些排序算法更适合基本有序的初始排列；有些排序算法仅适合存储在内存中的序列，有些排序算法可以用来对存储在磁盘上的大型文件排序，等等。

3．图问题

算法中最古老也最令人感兴趣的领域是图问题，很多纷乱复杂的现实问题抽象出的模型都是图结构，例如，可以利用图研究化学领域的分子结构，解决高校排课问题，解决任务分配问题和车间调度问题，等等。

概 念 回 顾

图(graph)通常表示为 $G=(V,E)$，其中，G 表示一个图，V 是图 G 中顶点的集合，E 是图 G 中顶点之间边的集合。若顶点 v_i 和 v_j 之间的边没有方向，则称这条边为无向边，用无序偶对(v_i,v_j)来表示；若从顶点 v_i 到 v_j 的边有方向，则称这条边为有向边(也称为弧)，用有序偶对 $<v_i$

个初级阶段。随着计算机图形图像处理、机器人和断层 X 摄像技术等方面应用的深入，人们对几何算法产生了强烈的兴趣。本书只讨论两个经典的计算几何问题：最近对问题和凸包问题。最近对问题是在给定平面上的 n 个点中，求距离最近的两个点，凸包问题要求找出一个能把给定集合中的所有点都包含在里面的最小凸多边形。

1.2 算法分析

算法分析(algorithm analysis)指的是对算法所需要的两种计算机资源——时间和空间进行估算，所需要的资源越多，该算法的复杂性就越高。不言而喻，对于任何给定的问题，设计出复杂性尽可能低的算法是设计算法时追求的一个重要目标；另一方面，当给定的问题有多种解法时，选择其中复杂性最低者，是选用算法时遵循的一个重要准则。随着计算机硬件性能的提高，一般情况下，算法所需要的额外空间已不是我们需要关注的重点了，但是对算法时间效率的要求仍然是计算机科学不变的主题。本书重点讨论算法时间复杂性(time complexity)的分析，对空间复杂性(space complexity)的分析是类似的。

1.2.1 渐进符号

算法的复杂性是运行算法所需要的计算机资源的量，这个量应该集中反映算法的效率，而从运行该算法的实际计算机中抽取出来。撇开与计算机软、硬件有关的因素，影响算法时间代价的最主要因素是问题规模。问题规模(problem scope)是指输入量的多少，一般来说，它可以从问题描述中得到。例如，对一个具有 n 个整数的数组进行排序，问题规模是 n；对一个 m 行 n 列的矩阵进行转置，则问题规模是 m 和 n。一个显而易见的事实是：几乎所有的算法，对于规模更大的输入都需要运行更长的时间。例如，需要更多时间来对更大的数组排序，更大的矩阵转置需要更长的时间。所以运行算法所需要的时间 T 是问题规模 n 的函数，记作 $T(n)$。

要精确地表示算法的运行时间函数常常是很困难的，即使能够给出，也可能是个相当复杂的函数，函数的求解本身也是相当复杂的。考虑到算法分析的主要目的在于比较求解同一个问题的不同算法的效率，为了客观地反映一个算法的运行时间，可以用算法中基本语句的执行次数来度量算法的工作量。基本语句(basic statement)是执行次数与整个算法的执行次数成正比的语句，基本语句对算法运行时间的贡献最大，是算法中最重要的操作。这种衡量效率的方法得出的不是时间量，而是一种增长趋势的度量。换言之，只考察当问题规模充分大时，算法中基本语句的执行次数在渐近意义下的阶，通常使用大 O、大 Ω 和 Θ 等 3 种渐进符号表示。

1.大 O 符号

定义 1.1 若存在两个正的常数 c 和 n_0，对于任意 $n \geq n_0$，都有 $T(n) \leq c \times f(n)$，则称 $T(n) = O(f(n))$(或称算法在 $O(f(n))$ 中)。

大 O 符号用来描述增长率的上限，表示 $T(n)$ 的增长最多像 $f(n)$ 增长的那样快，也就是说，当输入规模为 n 时，算法消耗时间的最大值，这个上限的阶越低，结果就越有价值。

大 O 符号的含义如图 1.4 所示，为了说明这个定义，将问题规模 n 扩展为实数。

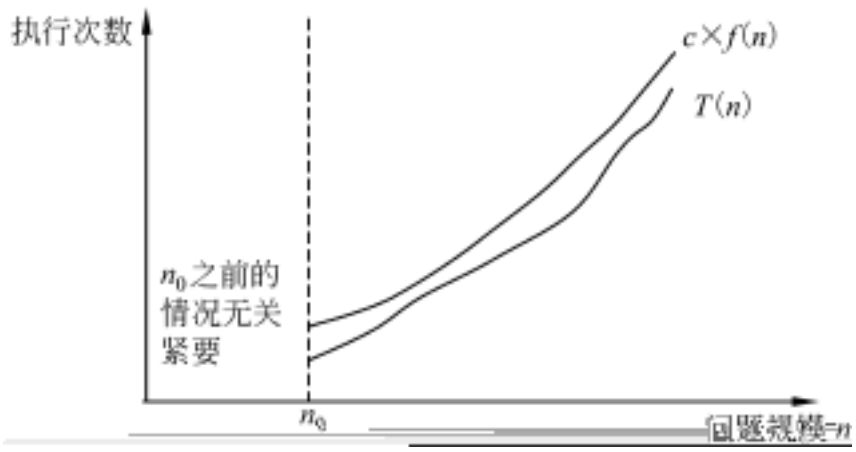


图 1.4　大 O符号的含义

应该注意的是,定义 1.1 给了很大的自由度来选择常量 c 和 n_0 的特定值,例如,下列推导都是合理的:

$100n+5\leq 100n+n$(当 $n\geq 5$) $=101n=O(n)$　　($c=101$, $n_0=5$)

$100n+5\leq 100n+5n$(当 $n\geq 1$) $=105n=O(n)$　　($c=105$, $n_0=1$)

2.大 Ω符号

定义 1.2　若存在两个正的常数 c 和 n_0,对于任意 $n\geq n_0$,都有 $T(n)\geq c\times g(n)$,则称 $T(n)=\Omega(g(n))$(或称算法在 $\Omega(g(n))$中)。

大 Ω符号用来描述增长率的下限,也就是说,当输入规模为 n 时,算法消耗时间的最小值。与大 O 符号对称,这个下限的阶越高,结果就越有价值。

大 Ω符号的含义如图 1.5 所示。

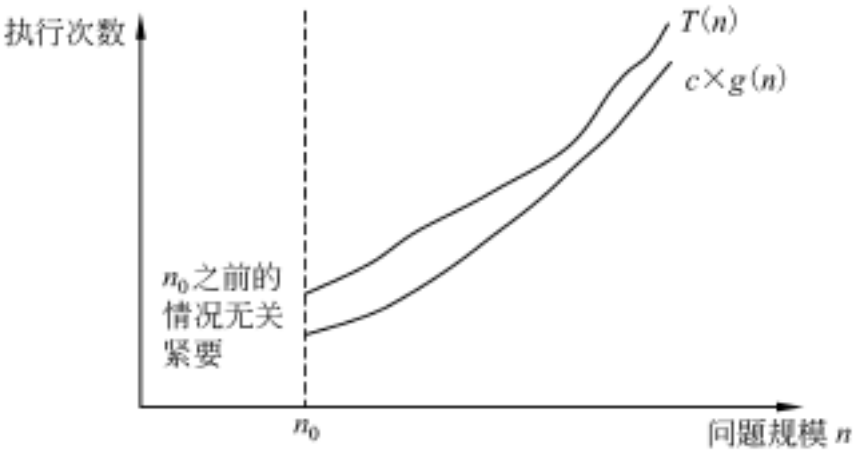


图 1.5　大 Ω符号的含义

大 Ω符号常用来分析某个问题或某类算法的时间下界。例如,矩阵乘法问题的时间下界为 $\Omega(n^2)$,是指任何两个 $n\times n$ 矩阵相乘的算法的时间复杂性不会小于 n^2,基于比较的排序算法的时间下界为 $\Omega(n\log_2 n)$,是指无法设计出基于比较的排序算法,其时间复杂性小于 $n\log_2 n$。

大 Ω符号常常与大 O 符号配合以证明某问题的一个特定算法是该问题的最优算法,或是该问题中的某算法类中的最优算法。

3.Θ符号

定义 1.3　若存在 3 个正的常数 c_1、c_2 和 n_0,对于任意 $n\geq n_0$,都有 $c_1\times f(n)\geq T(n)$

$\geq c \times f(n)$，则称 $T(n) = \Theta(f(n))$。

Θ符号意味着 $T(n)$与 $f(n)$同阶，用来表示算法的精确阶。Θ符号的含义如图 1.6 所示。

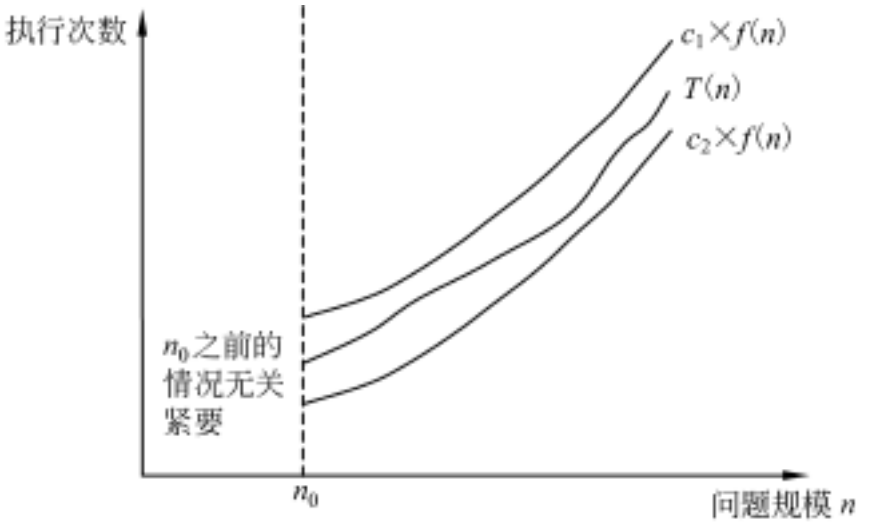


图 1.6 Θ符号的含义

下面举例说明大 O、大 Ω和 Θ3 种渐进符号的使用。

例 1.1 $T(n) = 3n - 1$

【解答】 当 $n \geq 1$ 时，$3n - 1 \leq 3n = O(n)$

当 $n \geq 1$ 时，$3n - 1 \geq 3n - n = 2n = \Omega(n)$

当 $n \geq 1$ 时，$3n \geq 3n - 1 \geq 2n$，则 $3n - 1 = \Theta(n)$

例 1.2 $T(n) = 5n^2 + 8n + 1$

【解答】 当 $n \geq 1$ 时，$5n^2 + 8n + 1 \leq 5n^2 + 8n + n = 5n^2 + 9n \leq 5n^2 + 9n^2 \leq 14n^2 = O(n^2)$

当 $n \geq 1$ 时，$5n^2 + 8n + 1 \geq 5n^2 = \Omega(n^2)$

当 $n \geq 1$ 时，$14n^2 \geq 5n^2 + 8n + 1 \geq 5n^2$，则 $5n^2 + 8n + 1 = \Theta(n^2)$

定理 1.1 若 $T(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0 (a_m > 0)$，则有 $T(n) = O(n^m)$，且 $T(n) = \Omega(n^m)$，因此，有 $T(n) = \Theta(n^m)$。

1.2.2 最好、最坏和平均情况

影响算法时间代价的最主要因素是问题规模，但是，对于某些算法，即使问题规模相同，如果输入数据不同，其时间代价也不同。

例 1.3 在一维整型数组 A[n]中顺序查找与给定值 k 相等的元素(假设该数组中有且仅有一个元素值为 k)，顺序查找算法如下：

C++描述

算法 1.2——顺序查找

```
int Find(int A[ ], int n)
{
    for (i=0; i<n; i++)
      if (A[i] = = k) break;
    return i;
}
```

顺序查找从第一个元素开始,依次比较每一个元素,直到找到 k 为止,而一旦找到了 k,算法也就结束了。这样,顺序查找的时间代价可能在一个很大的范围内浮动。如果数组的第一个元素恰好就是 k,算法只要比较一个元素就行了,这是最好情况;如果数组的最后一个元素是 k,算法就要比较 n 个元素,这是最坏情况;如果在数组中查找不同的元素,假设数据是等概率分布的,则平均要比较 $n/2$ 个元素,这是平均情况。

一般来说,最好情况不能作为算法性能的代表,因为它发生的概率太小,对于条件的考虑太乐观了。但是,当最好情况出现的概率较大的时候,应该分析最好情况。

分析最差情况有一个好处:它能让你知道算法的运行时间最坏能坏到什么程度,这一点在实时系统中尤其重要。

通常需要分析平均情况的时间代价,特别是算法要处理不同的输入时,但它要求已知输入数据是如何分布的。通常假设是等概率分布,例如,上面提到的顺序查找算法平均情况下的时间性能,如果数据不是等概率分布,那么算法的平均情况就不一定是比较一半的元素了。

1.2.3　非递归算法的分析

从算法是否递归调用的角度来说,可以将算法分为非递归算法和递归算法。

对非递归算法时间复杂性的分析,关键是建立一个代表算法运行时间的求和表达式,然后用渐进符号表示这个求和表达式。

例 1.4　在一个整型数组中查找最小值元素,具体算法如下:

C++描述

算法 1.3——求数组最小值

```
int ArrayMin(int a[ ], int n)
{
    min = a[0];
    for (i = 1; i< n; i ++ )
      if (a[i] < min) min = a[i];
    return min;
}
```

在算法 1.3 中,问题规模显然是数组中的元素个数,执行最频繁的操作是在 for 循环中,循环体中包含两条语句:比较和赋值,应该把哪一个作为基本语句呢?由于每做一次循环都会进行一次比较,而赋值语句却不一定执行,所以,应该把比较运算作为该算法的基本语句。接下来考虑基本语句的执行次数,由于每执行一次循环就会做一次比较,而循环变量 i 从 1 到 $n-1$ 之间的每个值都会做一次循环,可得到如下求和表达式:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 1$$

用渐进符号表示这个求和表达式:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n - 1 = O(n)$$

非递归算法分析的一般步骤是:

(1) 决定用哪个(或哪些)参数作为算法问题规模的度量。

在大多数情况下,问题规模是很容易确定的,可以从问题的描述中得到。

(2) 找出算法中的基本语句。

算法中执行次数最多的语句就是基本语句,通常是最内层循环的循环体。

(3) 检查基本语句的执行次数是否只依赖于问题规模。

如果基本语句的执行次数还依赖于其他一些特性(如数据的初始分布),则最好情况、最坏情况和平均情况的效率需要分别研究。

(4) 建立基本语句执行次数的求和表达式。

计算基本语句执行的次数,建立一个代表算法运行时间的求和表达式。

(5) 用渐进符号表示这个求和表达式。

计算基本语句执行次数的数量级,用大 O 符号来描述算法增长率的上限。

1.2.4 递归算法的分析

递归算法实际上是一种分而治之的方法,它把复杂问题分解为若干个简单问题来求解。对递归算法时间复杂性的分析,关键是根据递归过程建立递推关系式,然后求解这个递推关系式。下面介绍几种求解递推关系式的技术。

1.猜测技术

猜测技术首先对递推关系式估计一个上限,然后试着证明它正确。如果给出了一个正确的上限估计,经过归纳证明就可以验证事实。如果证明成功,那么就试着收缩上限。如果证明失败,那么就放松限制再试着证明,一旦上限符合要求就可以结束了。当只求解算法的近似复杂性时这是一种很有用的技术。

例 1.5 使用猜测技术分析二路归并排序算法的时间复杂性。

二路归并排序是将一个长度为 n 的记录序列分成两部分,分别对每一部分完成归并排序,最后把两个子序列合并到一起。其运行时间用下面的递推式描述:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ 2T(n/2) + n & n > 2 \end{cases}$$

也就是说,在序列长度为 n 的情况下,算法的代价是序列长度为 $n/2$ 时代价的两倍(对归并排序的递归调用)加上 n(把两个子序列合并在一起)。

假定 $T(n) \leq n^2$,并证明这个猜测是正确的。在证明中,为了计算方便,假定 $n = 2^k$。

对于最基本的情况,$T(2) = 1 \leq 2^2$;对于所有 $i \leq n$,假设 $T(i) \leq i^2$,而

$$T(2n) = 2T(n) + 2n \leq 2n^2 + 2n \leq 4n^2 = (2n)^2$$

由此,$T(n) = O(n^2)$ 成立。

$O(n^2)$ 是一个最小上限吗?如果猜测更小一些,例如对于某个常数 c,$T(n) \leq cn$,很明显,这样做不行。所以,真正的代价一定在 n 和 n^2 之间。

现在试一试 $T(n) \leq n\log_2 n$。

对于最基本的情况,$T(2) = 1 \leq (2\log_2 2) = 2$;对于所有 $i \leq n$,假设 $T(i) \leq i\log_2 i$,而

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n \leq 2n\log_2 n + 2n = 2n(\log_2 n + 1) \leq 2n\log_2 (2n)$$

这就是我们要证明的，$T(n) = O(n\log_2 n)$。

2．扩展递归技术

扩展递归技术是将递推关系式中等式右边的项根据递推式进行替换，这称为扩展。扩展后的项被再次扩展，以此下去，会得到一个求和表达式，然后就可以借助于求和技术了。

例 1.6　使用扩展递归技术分析下面递推式的时间复杂性。

$$T(n) = \begin{cases} 7 & n = 1 \\ 2T(n/2) + 5n^2 & n > 1 \end{cases}$$

简单起见，假定 $n = 2^k$。将递推式像下面这样扩展：

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + 5n^2 \\ &= 2(2T(n/4) + 5(n/2)^2) + 5n^2 \\ &= 2(2(2T(n/8) + 5(n/4)^2) + 5(n/2)^2) + 5n^2 \\ &= 2^k T(1) + 2^{k-1} 5\left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^2 + \cdots + 2 \times 5\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 5n^2 \end{aligned}$$

最后这个表达式可以使用如下的求和表示：

$$T(n) = 7n + 5\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{n}{2^i}\right)^2 = 7n + 5n^2\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

$$= 7n + 5n^2\left(2 - \frac{2}{n}\right) = 10n^2 - 3n \leq 10n^2 = O(n^2)$$

3．通用分治递推式

递归算法分析的第 3 种技术是利用通用分治递推式：

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ aT(n/b) + cn^k & n > 1 \end{cases}$$

其中 a、b、c、k 都是常数。这个递推式描述了大小为 n 的原问题分成若干个大小为 n/b 的子问题，其中 a 个子问题需要求解，而 cn^k 是合并各个子问题的解需要的工作量。下面使用扩展递归技术对通用分治递推式进行推导，并假定 $n = b^m$。

$$\begin{aligned} T(n) &= aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k \\ &= a\left(aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + c\left(\frac{n}{b}\right)^k\right) + cn^k \\ &= a^m T(1) + a^{m-1} c\left(\frac{n}{b^{m-1}}\right)^k + \cdots + ac\left(\frac{n}{b}\right)^k + cn^k \\ &= c\sum_{i=0}^{m} a^{m-i}\left(\frac{n}{b^{m-i}}\right)^k \\ &= c\sum_{i=0}^{m} a^{m-i} b^{ik} \end{aligned}$$

$$= ca^m \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{b^k}{a} \right)^i$$

这个求和是一个几何级数,其值依赖于比率 $r = \frac{b^k}{a}$,注意到 $a^m = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$,有以下 3 种情况:

(1) $r < 1$: $\sum_{i=0}^{m} r^i < \frac{1}{1-r}$,由于 $a^m = n^{\log_b a}$,所以 $T(n) = O(n^{\log_b a})$。

(2) $r = 1$: $\sum_{i=0}^{m} r^i = m + 1 = \log_b n + 1$,由于 $a^m = n^{\log_b a} = n^k$,所以 $T(n) = O(n^k \log_b n)$。

(3) $r > 1$: $\sum_{i=0}^{m} r^i = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1} = O(r^m)$,所以,$T(n) = O(a^m r^m) = O(b^{km}) = O(n^k)$。

对通用分治递推式的推导概括为下面的主定理:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a > b^k \\ O(n^k \log_b n) & a = b^k \\ O(n^k) & a < b^k \end{cases}$$

1.2.5 算法的后验分析

前面我们介绍了如何对非递归算法和递归算法进行数学分析,这些分析技术能够在数量级上对算法进行精确度量。但是,数学不是万能的,实际上,许多貌似简单的算法很难用数学的精确性和严格性来分析,尤其在做平均效率分析时。

算法的后验分析(posteriori)也称算法的实验分析,它是一种事后计算的方法,通常需要将算法转换为对应的程序并上机运行。其一般步骤如下:

(1) 明确实验目的

在对算法进行实验分析时,可能会有不同的目的,例如,检验算法效率理论分析的正确性;比较相同问题的不同算法或相同算法的不同实现间的效率,等等。实验的设计依赖于实验者要寻求什么答案。

(2) 决定度量算法效率的方法,为实验准备算法的程序实现

实验目的有时会影响,甚至会决定如何对算法的效率进行度量。一般来说,有以下两种度量方法:

① 计数法。在算法中的适当位置插入一些计数器,来度量算法中基本语句(或某些关键语句)的执行次数。

② 计时法。记录某个特定程序段的运行时间,可以在程序段的开始处和结束处查询系统时间,然后计算这两个时间的差。

在用计时法时需要注意,在分时系统中,所记录的时间很可能包含了 CPU 运行其他程序的时间(例如系统程序),而实验应该记录的是专门用于执行特定程序段的时间。例如,在 UNIX 中将这个时间称为用户时间,time 命令就提供了这个功能。

(3) 决定输入样本,生成实验数据

对于某些典型的算法(例如 TSP 问题),研究人员已经制定了一系列输入实例作为测

试的基准,但大多数情况下,需要实验人员自己确定实验的输入样本。一般来说,通常需要确定:

① 样本的规模。一种可借鉴的方法是先从一个较小的样本规模开始,如果有必要再加大样本规模。

② 样本的范围。一般来说,输入样本的范围不要小得没有意义,也不要过分大。此外,还要设计一个能在所选择的样本范围内产生输入数据的程序。

③ 样本的模式。输入样本可以符合一定的模式,也可随机产生。根据一个模式改变输入样本的好处是可以分析这种改变带来的影响,例如,如果一个样本的规模每次都会翻倍,可以通过计算 $T(2n)/T(n)$,考察该比率揭示的算法性能是否符合一个基本的效率类型。

如果对于相同规模的不同输入实例,实验数据和实验结果会有很大不同,则需要考虑是否包括同样规模的多个不同输入实例。例如排序算法,对于同样数据集合的不同初始排列,算法的时间性能会有很大差别。

(4) 对输入样本运行算法对应的程序,记录得到的实验数据

作为实验结果的数据需要记录下来,通常用表格或者散点图记录实验数据,散点图就是在笛卡儿坐标系中用点将数据标出。以表格呈现数据的优点是直观、清晰,可以方便地对数据进行计算,以散点图呈现数据的优点是可以确定算法的效率类型。例如表 1.1 是对某算法采用计数法得到的实验数据,图 1.7 是一个典型的散点图。

表 1.1　表格法记录实验数据

规模	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
次数	11 966	24 303	39 992	53 010	67 272	78 692	91 274	113 063	129 799

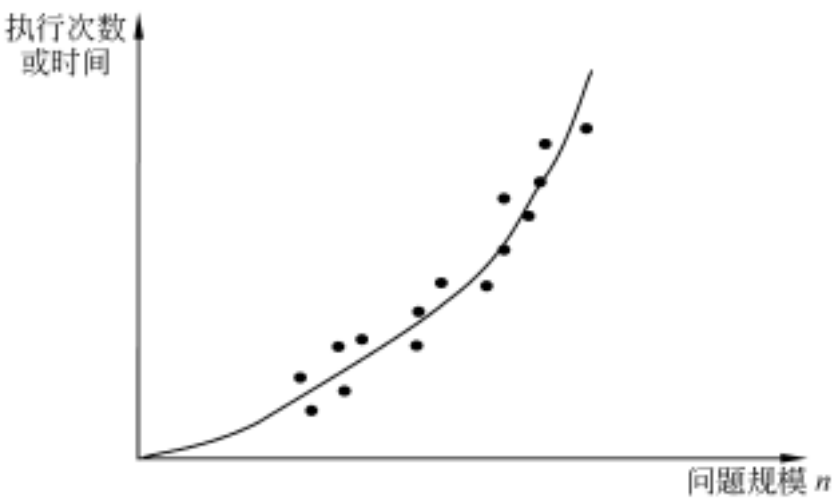


图 1.7　典型的散点图

(5) 分析得到的实验数据

根据实验得到的数据,结合实验目的,对实验结果进行分析,并根据实验结果不断调整实验的输入样本,经过对比分析,得出具体算法效率的有关结论。

算法的数学分析和实验分析的基本区别是:数学分析不依赖于特定输入,缺点是适用性不强,尤其对算法做平均性能分析时。实验分析能够适用于任何算法,但缺点是其结

论依赖于实验中使用的特定输入实例和特定的计算机系统。

实际应用中,可以采用数学分析和后验分析相结合的方式来分析算法。此时,描述算法效率的函数是在理论上确定的,而其中一些必要的参数则是针对特定计算机或程序根据实验数据得来的。

1.3 实验项目——求最大公约数

1.实验题目

求两个自然数 m 和 n 的最大公约数。

2.实验目的

(1) 复习数据结构课程的相关知识,实现课程间的平滑过渡;

(2) 掌握并应用算法的数学分析和后验分析方法;

(3) 理解这样一个观点:不同的算法能够解决相同的问题,这些算法的解题思路不同,复杂程度不同,解题效率也不同。

3.实验要求

(1) 至少设计出 3 个版本的求最大公约数的算法;

(2) 对所设计的算法采用大 O 符号进行时间复杂性分析;

(3) 上机实现算法,并用计数法和计时法分别测算算法的运行时间;

(4) 通过分析对比,得出自己的结论。

4.实现提示

设 m 和 n 是两个自然数,m 和 n 的最大公约数记为 gcd(m, n),是能够同时被 m 和 n 整除的最大整数。下面给出求最大公约数的 3 个版本的算法思想,注意算法中没有对输入数据进行校验。

伪代码

算法 1.4——连续整数检测

1. t = min{m, n};
2. m 除以 t,如果余数为 0,则执行步骤 3,否则,执行第 4 步;
3. n 除以 t,如果余数为 0,返回 t 的值作为结果,否则,执行第 4 步;
4. t = t - 1,转第 2 步;

例如,要计算 gcd(66, 12),首先令 t = 12,因为 66 除以 12 余数不为 0,将 t 减 1,而 12 除以 11 余数不为 0,再将 t 减 1,重复上述过程,直到 t = 6,此时 12 除以 6 的余数为 0 并且 66 除以 6 的余数为 0,则 gcd(66, 12) = 6。

伪代码

算法 1.5——欧几里得算法

1. r = m % n;
2. **循环直到** r = 0
   2.1　m = n;
   2.2　n = r;
   2.3　r = m % n;
3. **输出** n;

例如，要计算 gcd(66, 12)，**因为** 66 **除以** 12 **的余数为** 6，**再将** 12 **除以** 6，**余数为** 0，**则** gcd(66, 12) = 6。

伪代码

算法 1.6——分解质因数

1. **将** m **分解质因数**;
2. **将** n **分解质因数**;
3. **提取** m **和** n **中的公共质因数**;
4. **将** m **和** n **中的公共质因数相乘，乘积作为结果输出**;

例如，要计算 gcd(66, 12)，**首先分解质因数** 66 = 2×3×11，12 = 2×2×3，**然后提取二者的公共质因数** 2×3，**则** gcd(66, 12) = 2×3 = 6。

严格地说，算法 1.6 **还不能称为一个真正意义上的算法，因为其中求质因数的步骤没有明确定义(该步骤应该得到一个质因数的数组)，如何提取** *m* **和** *n* **中的公共质因数也没有定义清楚，请读者将这个算法补充完整。**

阅读材料——人工神经网络与 BP 算法

人工神经网络(artificial neural networks, ANN)**是一个以有向图为拓扑结构的动态系统，它通过对连续或断续的输入作状态响应而进行信息处理。人工神经网络技术与计算机技术的结合，为人类进一步研究模拟人类智能及了解人脑思维的奥秘开辟了一条新途径。**

人类对人工神经网络的研究可以追溯到 1943 **年，心理学家** W.S.McCuloch **和数理逻辑学家** W.Pitts **最早提出的人工神经网络模型——**M-P **模型，这是第一个用数理语言描述人脑的信息处理过程的模型，从此开创了神经科学理论研究的新纪元**；1969 **年，人工智能的创始人之一** M.Minsky **和** S.Papert **出版了有较大影响的《感知器》一书，指出感知器功能上的局限性，该论点极大地影响了人工神经网络的研究，至此进入了人工神经网络发展史上长达** 10 **年的低潮期。进入** 20 **世纪** 80 **年代后，随着计算机科学、生物技术和光电技术等领域学科的迅速发展，人工神经网络的研究进入到了一个新的大发展阶段。**

1982 **年美国生物学家、物理学家** J.Hopfield **提出了** Hopfield **网络模型**；1985 **年** D.E.Rumelhart **和** J.LMcclelland **提出了误差反向传播算法**(back-propagation

algorithm,简称 BP 算法),成为至今为止影响较大的一种网络学习方法;1992 年,Holland 用模拟生物进化的方式提出了遗传算法,用来求解复杂优化问题;1995 年 Mitra 把人工神经网络与模糊逻辑理论、生物细胞学说以及概率论相结合提出了模糊神经网络,使得神经网络的研究取得了突破性进展。

人工神经网络是由许多人工神经元按一定规则连接构成的,其互连模式有许多的种类,常见的一种分类是前馈网络和反馈网络。1988 年,以美国学者 Rumelhart、Hinton 和 Williams 等为首,提出了基于 BP 算法的多层前向神经网络,成功地解决了多层神经网络中隐含层神经元连接权值的学习问题。该网络模型一经问世,立即受到众多学者的关注,并取得了很大发展。目前,该网络是最常用、最流行、最成熟的人工神经网络。其学习方式采用误差反向传播算法,具有很强的非逻辑归纳特性。理论研究表明:一个 3 层的前馈神经网络能够模拟任何复杂的非线性系统。图 1 .8 是 3 层前向神经网络拓扑结构图。

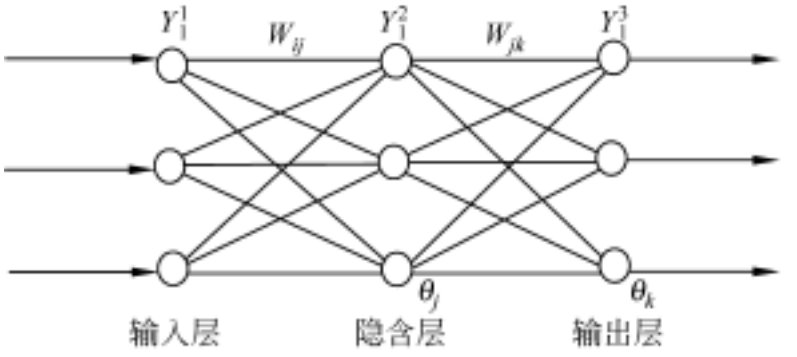


图 1 .8　3 层前向神经网络拓扑结构图

说明:Y_i^1 为输入层结点 i 的输入,Y_k^3 为输出层结点 k 的输出,Y_j^2 为隐含层结点 j 的输出,T_k 为输出层结点 k 对应的教师信号,W_{ij} 为结点 i 和结点 j 间的连接权值,W_{jk} 为结点 j 和结点 k 间的连接权值,θ_k 为输出层结点 k 的阈值,θ_j 为隐含层结点 j 的阈值。

BP 算法的主要思想是,学习过程由信号的正向传播与误差的逆向传播两个过程组成,正向传播时,模式作用于输入层,经隐含层处理后,传向输出层。若输出层未能得到期望的输出,则转入误差的逆向传播阶段,将输出误差按某种形式,通过隐含层向输入层逐层返回,并“分摊”给各层的所有单元,从而获得各层单元的参考误差(称误差信号),以作为修改各单元间权值的依据。这种信号正向传播与误差逆向传播的各层权矩阵的修改过程,是周而复始地进行的,权值不断修改的过程也就是网络的学习(或称训练)过程。此过程一直进行到网络输出的误差逐渐减小到可接受的程度或达到设定的学习次数为止。

设隐含层和输出层的激活采用 S 型函数:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

由于 BP 算法要求网络的输入输出函数具有可微分性,而 S 型函数具有此特性。从形式上看,S 型函数的输出曲线两端平坦,中间部分变化激烈;从生理学角度看,一个人对远远低于或高于他智力和知识水平的问题,往往很难产生强烈的思维反应;从数学角度看,S 型函数具有可微分性,且具有饱和非线性,可以增加网络的非线性映射能力,因此 S 型函数更接近于生物神经元的信号输出形式,所以选用 S 型函数作为 BP 网络的输出函数。

误差函数(网络的实际输出向量 Y_k 与教师信号向量 T_k 的误差)采用二乘误差函数:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(T_k - Y_k)^2$$

BP 算法的一般框架如下:

1. 初始化网络权值 W(t)和阈值 θ(t);
   其中,W(t)和 θ(t)为较小的随机数,t 为学习次数,初始值为 0;
2. 输入一个学习样本(X_k, T_k),其中 k = (1, 2, …, n),n 为样本数;
3. 计算隐含层各结点的输出值;
4. 计算输出层结点的输出值;
5. 计算输出层结点和隐含层结点之间权值的修正量;
6. 计算隐含层结点和输入层结点之间权值的修正量;
7. 基于步骤 5 的修正量来修正输出层和隐含层连接权值矩阵和阈值向量;
8. 基于步骤 6 的修正量来修正隐含层和输入层连接权值矩阵和阈值向量;
9. 判断全部学习样本是否取完,若取完,则转步骤 2,否则
   9.1　计算误差函数;
   9.2　若小于规定的误差上限,则算法结束;
   9.3　若已达到学习次数,则算法结束,否则 t = t + 1,转步骤 2;

人工神经网络具有以分布方式存储知识、并行方式处理、较强的容错能力,并且它具有可以逼近任意的非线性函数以及有很强的自学习、自适应及联想记忆功能等特征,吸引了众多研究人员的兴趣,并在相关领域取得了显著的进展,例如,自动化领域中的系统识别和神经控制器以及智能检测,经济领域中的市场预测和信贷分析,工程领域中的汽车工程、军事工程、水利工程、化学工程,信息领域中的信号处理、模式识别、数据压缩,医学领域中的生物活动分析、医学专家系统等。

参 考 文 献

[1] 周春光等. 计算智能. 长春: 吉林大学出版社, 2001
[2] 李晓峰. 人工神经网络 BP 算法的改进与应用. 四川大学学报, 2000(2)

习　题　1

1. 在欧几里得提出的欧几里得算法中(即最初的欧几里得算法)用的不是除法而是减法。请用伪代码描述这个版本的欧几里得算法。

2. 图论诞生于七桥问题。出生于瑞士的伟大数学家欧拉(Euler,1707—1783 年)提出并解决了该问题。七桥问题是这样描述的: 一个人是否能在一次步行中穿越哥尼斯堡(现在叫加里宁格勒,在波罗的海南岸)城中全部的 7 座桥后回到起点,且每座桥只经过一次,图 1.9

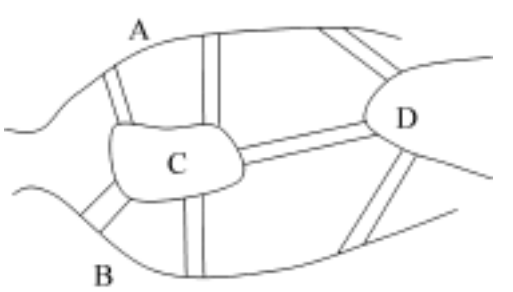


图 1.9　第 2 题图

是这条河以及河上的两个岛和 7 座桥的草图。请将该问题的图模型抽象出来,并判断此问题是否有解。

3 . 计算 π 值的问题能精确求解吗 ? 设计求解 π 值的算法。

4 . 设计算法求数组中相差最小的两个元素(称为最接近数)的差。要求分别给出伪代码和 C ++ 描述。

5 . 对于下列函数,请指出当问题规模增加到 4 倍时,函数值会增加多少 ?

(1) $\log_2 n$ (2) $\sqrt{n}$ (3) n (4) n^2 (5) n^3 (6) 2^n

6 . 考虑下面的算法,回答下列问题:

```
int Stery(int n) // n 为非负整数
{
    S = 0;
    for (i = 1; i < = n; i ++ )
       S = S + i3 i;
    return S;
}
```

(1) 该算法求的是什么 ?
(2) 该算法的基本语句是什么 ?
(3) 基本语句执行了多少次 ?
(4) 该算法的效率类型是什么 ?
(5) 对该算法进行改进,分析改进算法的效率;
(6) 如果算法不能再改进了,请证明这一点。

7 . 使用扩展递归技术求解下列递推关系式:

(1) $T(n) = \begin{cases} 4 & n = 1 \\ 3T(n-1) & n > 1 \end{cases}$ (2) $T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(n/3) + n & n > 1 \end{cases}$

8 . 考虑下面的递归算法,回答下列问题:

```
int Q(int n) // n 为正整数
{
    if (n = = 1) return 1;
    else return Q(n - 1) + 23 n - 1;
}
```

(1) 该算法求的是什么 ?
(2) 写出 n = 3 时的执行过程;
(3) 建立该算法的递推关系式并求解;
(4) 将该算法转换为非递归算法。

9 . 欧几里得算法在输入规模为 n 时的平均效率,是根据算法执行的平均除法次数 $D_{avg}(n)$ 来度量的, $D_{avg}(n)$ 是 $\gcd(n, 1), \gcd(n, 2), \cdots, \gcd(n, n-1)$ 和 $\gcd(n, n)$ 的除法次数的平均值。例如, $D_{avg}(5) = (1 + 2 + 3 + 2 + 1)/5 = 1.8$。画出 $D_{avg}(n)$ 的散点图,并指出可能的效率类型。

10 . 如果 $T_1(n) = O(f(n))$, $T_2(n) = O(g(n))$,证明:

(1) $T_1(n) + T_2(n) = \max\{O(f(n)), O(g(n))\}$

(2) $T_1(n) \times T_2(n) = O(f(n)) \times O(g(n))$

11 . 国际象棋是很久以前由一个印度人 Shashi 发明的,当他把该发明献给国王时,国王很高兴,就许诺可以给这个发明人任何他想要的奖赏。Shashi 要求以这种方式给他一些粮食: 棋盘的第 1 个方格内只放 1 粒麦粒,第 2 格 2 粒,第 3 格 4 粒,第 4 格 8 粒……以此类推,直到 64 个方格全部放满。这个奖赏的最终结果会是什么样呢 ?

12 . 有 4 个人打算过桥,这个桥每次最多只能有两个人同时通过。他们都在桥的某一端,并且是在晚上,过桥需要一只手电筒,而他们只有一只手电筒。这就意味着两个人

过桥后必须有一个人将手电筒带回来。每个人走路的速度是不同的：甲过桥要用 1 分钟，乙过桥要用 2 分钟，丙过桥要用 5 分钟，丁过桥要用 10 分钟，显然，两个人走路的速度等于其中较慢那个人的速度，问题是他们全部过桥最少要用多长时间？

13．欧几里得游戏：开始的时候，白板上有两个不相等的正整数，两个玩家交替行动，每次行动时，当前玩家都必须在白板上写出任意两个已经出现在板上的数字的差，而且这个数字必须是新的，也就是说，和白板上的任何一个已有的数字都不相同，当一方再也写不出新数字时，他就输了。请问，你是选择先行动还是后行动？为什么？

第2章 NP完全理论

CHAPTER

计算科学的研究目标是用计算机来求解人类所面临的各种问题,问题本身的内在复杂性决定了求解这个问题的算法的计算复杂性(computing complexity),那么,如何判定一个问题的内在复杂性?如何区分一个问题是"易解"的还是"难解"的?许多情况下,要确定一个问题的内在复杂性是很困难的,人们对许多问题至今无法确切地了解其内在的计算复杂性,因此只能用分类的方法将计算复杂性大致相同的问题归类进行研究。NP完全理论从计算复杂性的角度对问题的分类以及问题之间的关系进行研究,从而为算法设计提供指导。本章从算法的观点非形式化地讨论NP完全理论,第12章将基于图灵机的计算模型对NP完全理论以及计算复杂性理论进行精确的形式化讨论。

2.1 下 界

对于任何待求解的问题,如果能找到一个尽可能大的函数 $g(n)$(n为问题规模),使得求解该问题的所有算法都可以在 $\Omega(g(n))$的时间内完成,则函数 $g(n)$称为该问题计算复杂性的下界(lower bound)。如果已经知道一个和下界的效率类型相同的算法,则称该下界是紧密(close)的。

如果我们知道了一个问题的计算复杂性下界,也就是求解该问题的所有算法所需的时间下界,就可以较准确地评价解决该问题的各种算法的效率,进而确定对已有的算法还有多少改进的余地。如果一个问题的算法和下界的效率类型相同,那么对该算法的改进最多是一个常数因子;如果一个问题的最快的算法和最优的下界之间还有很大差距,那么意味着或者存在一个匹配下界的更快的算法,或者可以证明存在一个更好的下界。

确定和证明某个问题的计算复杂性下界,一般来说是很困难的,因为这涉及求解该问题的所有算法,而枚举所有可能的算法,并对它们加以分析,显然是不可能的。事实上,存在大量问题,它们的下界是不清楚的,

大多数已知的下界要么是平凡的,要么是在忽略某些基本运算(如算术运算)的意义上,应用一个严格约束的计算模型(如判定树模型)推导出来的。

2.1.1 平凡下界

确定一个问题的计算复杂性下界的最简单的方法是对问题的输入中必须要处理的元素进行计数,同时,对必须要输出的元素进行计数。因为任何算法至少要"读取"所有要处理的元素,并"写出"它的全部输出,这种计数方法产生的是一个平凡下界(ordinary lower bound)。平凡下界不用借助任何计算模型或进行复杂的数学运算就能够推导出来,例如,任何生成 n 个不同元素的所有排列对象的算法都必定属于 $\Omega(n!)$,因为输出的规模是 $n!$;计算两个 n 阶矩阵乘积的算法的平凡下界属于 $\Omega(n^2)$,因为任何这样的算法必须处理输入矩阵中的 $2n^2$ 个元素,并生成乘积中的 n^2 个元素。

平凡下界往往过小而失去意义。例如,TSP 问题的平凡下界是 $\Omega(n^2)$,因为它的输入是 $n(n-1)/2$ 个城市间的距离,它的输出是构成最优回路的 $n+1$ 个城市的序列,但是,这个平凡下界是没有意义的,因为 TSP 问题还没有找到一个多项式时间算法。

2.1.2 判定树模型

许多重要的算法,尤其是排序和查找算法,它们的工作方式都是对输入元素进行比较,因此可以用判定树来研究这些算法的时间性能。判定树(decision trees)是这样一棵二叉树:它的每一个内部结点对应一个形如 $x \leq y$ 的比较,如果关系成立,则控制转移到该结点的左子树,否则,控制转移到该结点的右子树,它的每一个叶子结点表示问题的一个结果。在用判定树模型建立问题的时间下界时,通常忽略求解问题的所有算术运算,只考虑分支执行时的转移次数。例如,在 3 个数中求最小值的判定树如图 2.1 所示,判定树中每一个内部结点代表一次比较,每一个叶子结点表示算法的一个输出。

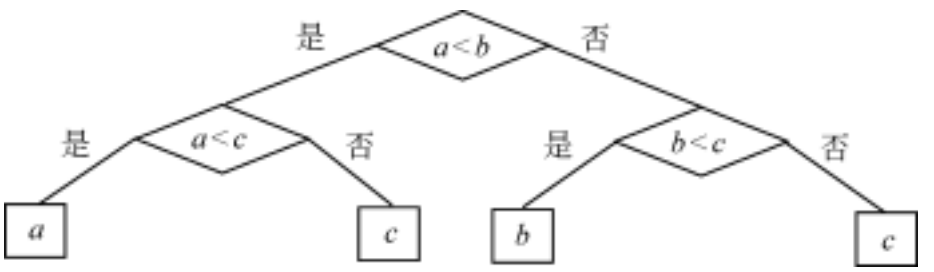


图 2.1 3 个数求最小值的判定树

需要注意的是,判定树中叶子结点的个数可能大于问题的输出个数,因为对于某些算法,相同的输出可能是通过不同的比较路径得来的。但是,判定树中叶子结点的个数必须至少和可能的输出一样多。对于一个问题规模为 n 的输入,算法可以沿着判定树中一条从根结点到叶子结点的路径来完成,比较次数等于路径中经过的边的个数。

下面以排序问题为例介绍应用判定树模型求解下界的方法。可以把排序算法的输出解释为对一个待排序序列的下标求一种排列,使得序列中的元素按照升序排列。例如,待排序序列是 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,则输出是这些元素的一个排列。因此,对于一个任意的 n

个元素的序列排序后,可能的输出有 $n!$个。也就是说,判定树的叶子结点至少有 $n!$个。那么,至少具有 $n!$个叶子结点的判定树的高度是多少呢?

引理 2.1　若 T 是至少具有 $n!$个叶子结点的二叉树,则 T 的高度至少是:

$$n\log_2 n - 1.5n = \Omega(n\log_2 n)$$

证明: 设 l 是二叉树 T 中的叶子结点的个数,其高度为 h(高度从 0 开始计算),则:

$$n! \leq l \leq 2^h$$

因此,

$$h \geq \log_2 n! = \sum_{j=1}^{n} \log_2 j \geq n\log_2 n - n\log_2 e + \log_2 e$$

$$\geq n\log_2 n - 1.5n = \Omega(n\log_2 n)$$

引理 2.1 通常称为信息论下界,它说明任何基于比较的对 n 个元素排序的算法,判定树的高度都不会大于 $\Omega(n\log_2 n)$。因此,$\Omega(n\log_2 n)$ 是这些算法的时间下界。由此,有下面的定理:

定理 2.1　任何基于比较的排序算法,对 n 个元素进行排序的时间下界为 $\Omega(n\log_2 n)$。

例如,对 3 个元素进行排序的判定树如图 2.2 所示,显然,最坏情况下的时间复杂性是从根结点到叶子结点的最长路径长度,它不超过判定树的高度。

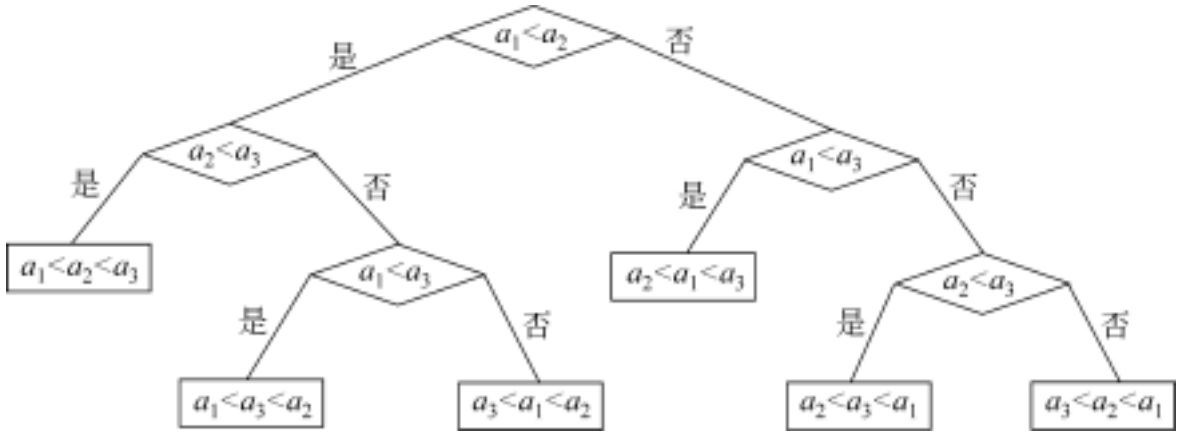


图 2.2　对 3 个数进行排序的判定树

2.1.3 最优算法

我们已经证明了基于比较的对 n 个元素进行排序的算法,其时间下界是 $\Omega(n\log_2 n)$,这意味着不能设计出任何一个算法,它在最坏情况下的时间复杂性小于 $\Omega(n\log_2 n)$。因此,如果一个基于比较的排序算法其时间复杂性是 $O(n\log_2 n)$,就认为它是基于比较的排序算法中的最优算法。

所谓最优算法(optimality algorithm)是指在某一种度量标准下,优于该问题的所有(可能的)算法。一般情况下,如果能够证明求解问题 Π 的任何算法的运行时间下界是 $\Omega(g(n))$,那么,对以时间 $O(g(n))$ 来求解问题 Π 的任何算法,都认为是最优算法。

例如,在一个整数数组中求最小值元素的算法如下:

C++描述

算法 2.1——求数组最小值

```
int ArrayMin(int a[ ], int n)
{
    min = a[0];
    for (i = 1; i< n; i ++ )
      if (a[i] < min) min = a[i];
    return min;
}
```

我们在 1.2.3 中已经分析过这个算法，它需要进行 $n-1$ 次比较操作，其时间复杂性是 $O(n)$。下面证明对于任何 n 个整数，求最小值元素至少需要进行 $n-1$ 次比较，即该问题的时间下界是 $\Omega(n)$。

将 n 个整数划分为 3 个动态的集合 A、B、C，其中 A 为未知元素的集合，B 为已经确定不是最小元素的集合，C 是最小元素的集合，任何一个通过比较求最小值元素的算法都要从 3 个集合为 $(n, 0, 0)$（即 $|A| = n, |B| = 0, |C| = 0$）的初始状态开始，经过运行，最终到达 $(0, n-1, 1)$ 的完成状态，如图 2.3 所示。

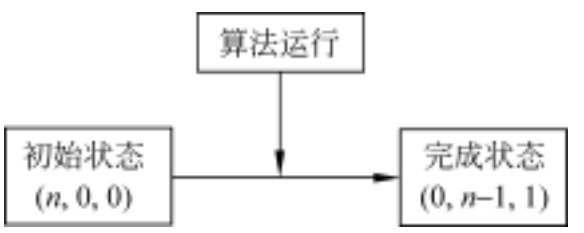


图 2.3 通过比较求最小值元素的算法

这个过程实际上是将元素从集合 A 向集合 B 和集合 C 移动的过程，但每次比较，至多能把一个较大的元素从集合 A 移向集合 B，因此，任何求最小值算法至少要进行 $n-1$ 次比较，其时间下界是 $\Omega(n)$。所以，算法 2.1 是最优算法。

需要说明的是，如果有两个算法都是上述意义下的最优算法，要确定这两个算法哪一个是最优的，就需要进一步比较这两个算法的时间复杂性表达式中的高阶项系数，系数较小的算法，其时间性能更优一些。

在实际的算法设计与分析中，一般不会像求最小值这样简单，最优算法的设计往往是很难的，在大多数情况下，即使是常用的算法，也往往是可以改进的。当所设计的算法被证明是最优算法时，那将是一个十分难得的成果。

2.2 算法的极限

算法作为求解问题的方法，可以求解现实世界中各种各样的问题，但是，算法的能力不是没有极限的，在计算机技术飞速发展的今天，有些问题仍然无法用算法求解，有些问题虽然可以用算法求解，但因该算法需要过长的时间或太大的存储容量，而成为不可用的算法。

2.2.1 易解问题与难解问题

如果一个问题 Π 存在一个时间复杂性是 $O(n^k)$ 的算法，其中，n 是问题规模，k 是一个

非负整数,则称问题 Π 存在多项式时间算法。现实世界中有很多问题存在多项式时间算法(polynomial - time algorithms),这类算法在可以接受的时间内实现问题求解,例如,排序问题、串匹配问题等。现实世界中还有很多问题至今没有找到多项式时间算法,只能用指数时间算法(exponential - time algorithms)求解,而指数时间算法的计算时间随着问题规模的增长而快速增长,即使中等规模的输入,其计算时间也是以世纪来衡量的,例如汉诺塔问题、TSP 问题等。通常将存在多项式时间算法的问题看作是易解问题(easy problem),将需要指数时间算法解决的问题看作是难解问题(hard problem)。

在计算机科学界已达成这样的共识:把多项式时间复杂性作为易解问题和难解问题的分界线。原因主要有以下几点:

(1) 多项式函数与指数函数的增长率有本质的差别

一般来说,具有多项式时间复杂性的算法是可使用的算法,而具有指数时间复杂性的算法,只有当问题规模足够小时才是可使用的算法。表 2.1 给出了多项式函数增长和指数函数增长的比较。

表 2.1　多项式函数增长和指数函数增长的比较

问题规模 n	多项式函数					指数函数	
	$\log_2 n$	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
1	0.00	1	0.00	1	1	2	1
10	3.32	10	33.2	100	1 000	1 024	3 628 800
20	4.32	20	86.4	400	8 000	1 048 376	2.4E18
30	4.91	30	147.2	900	27 000	1.0E9	2.7E32
40	5.32	40	212.9	1 600	64 000	1.0E12	8.2E47
50	5.64	50	282.2	2 500	125 000	1.0E15	3.0E64
100	6.64	100	664.4	10 000	1.0E6	1.3E30	9.3E157

从表 2.1 中可以看到,随着问题规模 n 的增长,多项式函数的增长虽然有差别,但还是可以接受的。而当 $n=100$ 时,一个指数函数的算法已无法在常规计算机上完成了。

(2) 计算机性能的提高对多项式时间算法和指数时间算法的影响不同

假设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 是求解同一个问题的 5 个算法,它们的时间复杂性函数分别是 $10n$、$20n$、$5n\log_2 n$、$2n^2$、2^n,并假定在计算机 C_1 和 C_2 上运行这些算法,C_2 的速度是 C_1 的速度的 10 倍。若这些算法在 C_1 上运行的时间为 T,可处理的问题规模为 n,在 C_2 上运行同样的时间可处理的问题规模可扩大为 n',表 2.2 给出了对不同时间复杂性函数的算法,以及计算机速度提高后所能处理问题规模的增长情况。

表 2.2　速度是原来 10 倍的计算机所能处理问题规模的增长情况

$T(n)$	n	n'	变　化	n'/n
$10n$	1000	10 000	$n'=10n$	10
$20n$	500	5 000	$n'=10n$	10
$5n\log_2 n$	250	1 842	$\sqrt{10}n<n'<10n$	7.37
$2n^2$	70	223	$n'=\sqrt{10}n$	3.16
2^n	13	16	$n'=n+\log_2 10\approx n+3$	1

从表 2.2 中可以看到,前两个函数都是线性的,只是系数不同,速度是原来 10 倍的计算机处理二者时,问题规模的增长都是 10 倍;运行时间是 $2n^2$ 的算法其问题规模增长的倍数要比线性增长的算法小,只增长了 $\sqrt{10} \approx 3.16$ 倍。可见,增长率高的算法从机器性能提高中得益较少。

考虑运行时间是 2^n 的算法,原来能处理的问题规模是 13,在计算机性能增长 10 倍时,在相同的时间里,问题规模的增长只是加上了一个常数,能够处理的问题规模为 16。假如再换一台比原有计算机快 100 倍的新计算机,能够处理的问题规模是 19。可见,指数时间算法与多项式时间算法有根本的不同。

(3) 多项式时间复杂性忽略了系数,但不影响易解问题和难解问题的划分

对于多项式时间复杂性作为易解问题和难解问题的分界线,人们最可能提出的疑问就是:可以构造一些特殊的多项式函数和指数函数,在某些情况下,二者的增长率近乎相同,或者多项式函数的增长率大于指数函数的增长率,此时,忽略系数是否合理。例如,表 2.3 给出了一些特殊函数的增长率。

表 2.3 一些特殊函数的增长率

问题规模 n	多项式函数			指数函数	
	n^8	$10^8 n$	n^{1000}	1.1^n	$2^{0.01n}$
5	390 625	5×10^8	5^{1000}	1.611	1.035
10	10^8	10^9	10^{1000}	2.594	1.072
100	10^{16}	10^{10}	10^{2000}	13 780.612	2
1 000	10^{24}	10^{11}	10^{3000}	2.47×10^{41}	1024

在表 2.3 中,考察多项式函数 $T_1(n) = n^8$ 和指数函数 $T_4(n) = 1.1^n$,在 $n = 100$ 以内,$T_1(n)$的值大于 $T_4(n)$的值,但当 n 充分大时,指数函数的值仍然超过多项式函数的值;另外,计算机科学家在研究中发现,类似于 $T_2(n) = 10^8 n$、$T_3(n) = n^{100}$ 和 $T_5(n) = 2^{0.01n}$ 这样的时间函数是不自然的,在人类遇到的实际问题中,并不存在这样的问题以及算法。对于实用的多项式时间算法,其指数很少会大于 3。所以,用多项式时间复杂性作为易解问题和难解问题的分界线,至今未受到有力的反驳。

(4) 多项式时间复杂性的闭包性

许多问题是一些子问题的组合或重叠,而多项式函数通过算术运算的组合或重叠(即多项式函数的多项式函数),得到的函数仍然是多项式阶的。

(5) 多项式时间复杂性的独立性

某问题在一种计算模型(例如图灵机)下有多项式时间算法,那么,在其他计算模型下也一定有多项式时间算法。

多项式时间复杂性的闭包性和独立性从理论上说明了多项式时间复杂性作为易解问题和难解问题划分的合理性和完整性。

2.2.2 实际问题难以求解的原因

在现实世界中,很多实际问题难以用计算机来求解,其原因至少有以下几点:

(1) 问题的解空间太大

逻辑学的一个基本问题是布尔可满足问题(Boolean satisfiability problem,也称 SAT 问题): 判断包含一些布尔变量的合取范式是否为真。例如,对于一个包含 100 个布尔变量的合取范式

$$F(x) = (x_{17} \vee \overline{X}_{37} \vee x_{26}) \wedge (\overline{X}_{65} \wedge x_{36}) \wedge \cdots \wedge (x_{54} \vee \overline{X}_{36} \vee x_{85} \vee \overline{X}_{59})$$

问题是要找出每个变量 x_i $(1 \leq i \leq 100)$的真值指派,使得 $F(x)$ = TRUE。

应 用 实 例

SAT 问题来源于许多实际的逻辑推理问题。SAT 问题不仅与许多应用问题相关,它还是建立 NP 完全理论的突破点,著名的 Cook 定理使 SAT 问题成为第一个被证明的 NP 完全问题。

在 SAT 问题中,任何一个长度为 100 的二进制串都是该问题的可能解,每个变量都有两个取值: TRUE 或 FALSE,100 个变量就有 2^{100} 个可能解,因此,解空间的大小是 $2^{100} \approx 10^{30}$,这是一个非常大的数!要想穷尽所有这些可能解是根本不可能的。假如使用一台每秒测试 1 000 个串的计算机,在宇宙起源之时即 15 亿年以前开始计算,即使一刻不停地算到现在,也只能算出不到所有可能解的十分之一!

(2) 评估函数难以确定

我们希望评估函数能评价可能解的质量,越接近正确答案的可能解应该产生越好的评估值,从而使问题的求解向着正确的方向前进。那么,如何区分这些可能解的优劣呢?对于 SAT 问题,其评估函数难以确定。如果采用的是蛮力穷举法,我们不需要评估函数,只需要一个一个地找,直到找到一个二进制串使得 $F(x)$ = TRUE。但是,如果想用评估函数指引我们比蛮力法更快地找到解的话,那就不仅仅是要知道结果是 TRUE 还是 FALSE 了,这就使得解 SAT 问题的算法立刻复杂起来。

(3) 实际问题很复杂,无法求得精确解

假设一个公司有 n 个仓库存放以公斤为单位的纸,这些纸要送到 k 个商店,从仓库 i 到商店 j 的运输费用由函数 f_{ij} 来确定,函数 f_{ij} 的形式由许多因素决定,诸如仓库到商店的距离、路面的质量、交通的畅通情况、车的平均时速限制,等等。例如,从仓库 2 到商店 3 的运输费用函数 f_{23} 可定义如下:

$$f_{23}(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 4 + 3.33x & (0 < x \leq 3) \\ 19.5 & (3 < x \leq 6) \\ 0.5 + 10\sqrt{x} & (x > 6) \end{cases}$$

其中 x 指的是需要运输的纸的数量,这种不连续性在大多数运输问题中是很常见的,在实际应用中,问题往往比这还复杂。

由以上条件可以构造该问题的一个模型: 满足 $\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \leq \text{sour}(i)$ 和 $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq \text{dest}(j)$,

并且 $x_{ij} \geq 0(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq k)$ 等约束条件,使目标函数 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f_{ij}(x_{ij})$ 最小。其中,sour 表示源地址(仓库),dest 表示目的地址(商店),问题的约束条件定义了一个可行解:任何一次从仓库运走的纸都不超过仓库的库存量,运到商店的纸至少等于预定的数量。

对于类似这样的问题,用传统的方法求其精确的最优解几乎是不可能的,但是,至少有两种办法可以尝试:

① 简化模型,使用传统的方法(本书介绍的方法)找到最优解;

② 保持模型不变,使用非传统的方法(智能算法,例如模拟退火或演化计算)找到近似最优解。

大量的实验数据表明,后一种方法更为实用。但是不管采用哪种方法,都难以得到问题的精确解,因为,要么必须将模型近似化,要么必须将解近似化。

(4) 实际问题的约束条件难以满足

高校课表编排问题显然有以下约束条件:

① 每门课程必须有一个教室,这个教室要能容纳所有选该课的学生并且具备教学所需的设备;

② 选多门课的学生不能安排在同一时间上多门课;

③ 教师不能安排在同一时间上多门课。

这些是问题的可能解必须具备的条件,称为硬约束,同时还有一些软约束,软约束是我们希望但不是必须满足的,包括:

① 如果某课程一周有两次课,就要将它安排在星期一和星期三或者星期二和星期四,如果两次课相隔的时间太近或太远都不理想;

② 如果同时有多个教室满足问题的要求,那么该课程就应该安排在一个大小最为接近学生人数的教室;

③ 如果某门课程比较重要,最好将它安排在上午。

当然,还有许多这样的软约束。任何一个安排都必须满足硬约束,至于软约束则是可选的,问题马上变得复杂并富有技巧性了。首先要将软约束量化,使得我们能够评估任何两个候选解,然后还要能修改一个可行解并希望由它产生另一个能更好满足软约束的可行解。

在所有软约束量化之后,还要找到一个最佳安排:既是可行解又能很好地满足软约束。假设已经找到一个可行解,但它不能很好满足软约束,则可以用一些变化算子作用于这个解来明显改善满足软约束的情况,但与此同时,可能产生了一个违背硬约束的解。可以设计变化算子禁止可行解变成非可行解,也可以对生成的非可行解改进以生成一个仍能很好满足软约束的可行解。这两种方法都很困难,如何有效地处理实际问题的约束条件是我们面临的最大挑战。

2.2.3 不可解问题

对于易解问题,存在多项式时间算法可以有效地解决;对于难解问题,虽然至今没有找到多项式时间算法,但是,存在指数时间算法可以花费很长时间解决。尽管当问题规模很大时,运行时间太长使得指数时间算法无法使用,至少在理论上,难解问题可以用计算

机求解。但是,并不是所有的问题都可以用计算机来求解,有些问题不论耗费多少时间也不能用计算机求解,这样的问题称为不可解问题(unsoluble problem)。

不可解问题的一个典型例子是停机问题(halting problem):给定一个计算机程序和一个特定的输入,判断该程序是进入死循环,还是可以停机。

应 用 实 例

程序员每天都可能编写一些进入死循环的程序。当一个程序处在死循环中时,你无法确切地知道它只是一个很慢的程序,还是一个进入死循环的程序。如果停机问题可以用计算机求解,那么编译器就能够查看程序,并且在运行之前就能告诉你这个程序可能进入死循环。

停机问题是无法解决的,没有一个计算机程序能够肯定地确定另外一个计算机程序是否会对一个指定的输入停机。下面证明停机问题不可能通过任何计算机程序来解决,证明采用反证法。

假定有一个名为 Halt 的函数可以解决停机问题,它有两个输入:一个是源程序(即被检测的程序),另一个是源程序的某个给定的输入。当然,实际上不可能编写出这样的函数,但是,如果确实存在解决停机问题的函数,这应该是它的一个合理框架。

伪代码

算法 2.2——停机问题

```
bool Halt (char * prog , char * input )   // prog 为源程序,input 为输入
{
    if (源程序 prog 对于输入 input 停止执行) return true;
    else return false;
}
```

现在来考虑两个显然存在的简单函数,函数 SelfHalt 判断函数 Halt 是否能够解决自身的停机问题,函数 Contrary 在函数 SelfHalt 能够解决自身停机问题时进入一个死循环。

伪代码

算法 2.3——验证函数

```
bool SelfHalt (char * prog )     // 如果源程序 prog 以 prog 作为输入能够停机返回 true
{
    if (Halt (prog , prog)) return true;
    else return false;
}
void Contrary (char * prog )     // 当源程序 prog 能够解决自身停机问题时进入一个死循环
{
    do
        result = SelfHalt(prog);
    while (result = = true) ;
}
```

当函数 Contrary 运行其本身时会发生什么呢？一种可能是对 SelfHalt 的调用返回 true，也就是说，函数 SelfHalt 表明函数 Contrary 在其自身上运行时会停机，而 Contrary 进入一个无限循环；另一方面，如果函数 SelfHalt 返回 false，那么 Halt 就已经表明了 Contrary 不会在自身停下来，而 Contrary 却停机了，这样 Contrary 的动作在逻辑上与 Halt 能够正确解决停机问题的假设相矛盾。于是，通过反证法证明了 Halt 不能正确解决停机问题，从而没有程序能够解决停机问题。

不可解问题的另一个典型的例子是：判断一个程序中是否包含计算机病毒。实际的病毒检测程序做得很好，通常能够确定一个程序中是否包含特定的计算机病毒，至少能够检测现在已经知道的那些病毒，但是心怀恶意的人总能开发出病毒检测程序还不能够识别出来的新病毒。

2.3 P 类问题和 NP 类问题

P 类问题和 NP 类问题的严格定义是针对语言识别问题（语言识别问题是一种特殊的判定问题）基于某种计算模型给出的，本节从算法的角度为 P 类问题和 NP 类问题给出一种非形式化的简单解释。

2.3.1 判定问题

在计算复杂性理论中，经常考虑的是判定问题，因为判定问题可以很容易地表达为语言的识别问题，从而方便地在某种计算模型上进行求解。

一个判定问题（decision problem）是仅仅要求回答 yes 或 no 的问题。例如，停机问题就是一个判定问题，但是，停机问题不能用任何计算机算法求解，所以，并不是所有的判定问题都可以在计算机上得到求解。

在实际应用中，当然不局限于判定问题，很多问题以求解或计算的形式出现，但它们可以转化为一系列更容易研究的判定问题。事实上，大多数问题可以很容易地转化为相应的判定问题，下面给出一些例子。

例 2.1　排序问题：将一个整数数组调整为非降序排列。排序问题的判定形式可叙述为：给定一个整数数组，是否可以按非降序排列。

例 2.2　图着色问题：给定无向连通图 $G=(V, E)$，求图 G 的最小色数 k，使得用 k 种颜色对 G 中的所有顶点着色，可使任意两个相邻顶点着色不同。图着色问题的判定形式可叙述为：给定无向连通图 $G=(V, E)$ 和一个正整数 k，是否可以用 k 种颜色为 G 中的所有顶点着色，使得任何两个相邻顶点着色不同。

例 2.3　哈密顿回路问题：在图 $G=(V, E)$ 中，从某个顶点出发，求经过所有顶点一次且仅一次，再回到出发点的回路。哈密顿回路问题的判定形式可叙述为：在图 $G=(V, E)$ 中，是否有一个回路经过所有顶点一次且仅一次，然后回到出发点。

例 2.4　TSP 问题：在一个带权图 $G=(V, E)$ 中，求经过所有顶点一次且仅一次，再回到出发点，且路径长度最短的回路。TSP 问题的判定形式可叙述为：给定一个带权图 $G=(V, E)$ 和一个正整数 k，是否有一个经过所有顶点一次且仅一次再回到出发点的回

路,其总距离小于 k。

判定问题有一个重要特性: 虽然在计算上对问题求解是困难的,但在计算上判定一个待定解是否解决了该问题却是简单的。例如,求解哈密顿回路是个难解问题,但是验证一个给定顶点序列是不是哈密顿回路却很容易,只需要检查前 n 个顶点是否互不相同,而最后一个顶点和第一个顶点是否相同;求大整数 S = 49 770 428 644 836 899 的因子是个难解问题,但是验证 a = 223 092 871 是不是大整数 S 的因子却很容易,只需要将大整数 S 除以这个因子 a,然后验证结果是否为 0;求一个线性方程组的解可能很困难,但是验证一组解是否是方程组的解却很容易,只需要将这组解代入方程组中,然后验证是否满足这组方程。

2.3.2 确定性算法与 P类问题

定义 2.1　设 A 是求解问题 Π 的一个算法,如果在算法的整个执行过程中,每一步只有一个确定的选择,则称算法 A 是确定性(determinism)算法。

确定性算法在执行过程中,每一个步骤都有一个确定的选择,如果重新用同一输入实例运行算法,所得的结果严格一致。

定义 2.2　如果对于某个判定问题 Π,存在一个非负整数 k,对于输入规模为 n 的实例,能够以 $O(n^k)$ 的时间运行一个确定性算法,得到 yes 或 no 的答案,则该判定问题 Π 是一个 P(polynomial)类问题。

从定义 2.2 可以看到,P 类问题是由具有多项式时间的确定性算法来求解的判定问题组成。对于判定问题定义 P 类问题,主要是为了能够给出较为严格的 NP 类问题的定义。事实上,所有易解问题都属于 P 类问题。

2.3.3 非确定性算法与 NP类问题

一般来说,一个问题的验证过程比求解过程更容易进行,为了界定一个比 P 类问题更大的问题类,人们考虑验证过程为多项式时间的问题类,为此,引入不确定性算法的概念。

定义 2.3　设 A 是求解问题 Π 的一个算法,如果算法 A 以如下猜测并验证的方式工作,就称算法 A 是非确定性(nondeterminism)算法:

(1) 猜测阶段。在这个阶段,对问题的输入实例产生一个任意字符串 y,在算法的每一次运行时,串 y 的值可能不同,因此,猜测以一种非确定的形式工作。

(2) 验证阶段。在这个阶段,用一个确定性算法验证两件事: 首先,检查在猜测阶段产生的串 y 是否是合适的形式,如果不是,则算法停下来并得到 no;另一方面,如果串 y 是合适的形式,那么算法验证它是否是问题的解,如果是问题的解,则算法停下来并得到 yes,否则,算法停下来并得到 no。

例如,考虑 TSP 问题的判定形式,假定算法 A 是求解 TSP 判定问题的非确定性算法。首先算法 A 以非确定的形式猜测一个路径是 TSP 判定问题的解,然后,用确定性算法检查这个路径是否经过所有顶点一次且仅一次并返回出发点,如果答案为 yes,则继续

验证这个回路的总长度是否≤ k,如果答案仍为 yes,则算法输出 yes,否则算法输出 no。通过把各个边的代价加起来,并且验证边是否形成一个访问所有顶点一次且仅一次的回路,就可以检查一个特定的路径。显然,如果算法 A 输出 no,并不意味着不存在一个满足要求的回路,因为算法的猜测可能是不正确的;另一方面,如果算法输出 yes,当且仅当对于 TSP 判定问题的某个输入实例,至少存在一条满足要求的回路。

可以用另一种方式理解非确定性算法。假设有一个可以同时测试所有可能答案的超级并行计算机,对于需要求解的问题 Π,给出解答的一个猜测,检查并验证这个猜测是否是问题的正确解。猜测问题的正确答案,然后并行检查或验证所有可能答案以确定哪一个正确的思想就是非确定性。

显然,非确定性算法不是一个实际可行的算法,引入非确定性算法的目的在于给出 NP 类问题的定义,从而将验证过程为多项式时间的问题归为一类进行研究。

定义 2.4　如果对于某个判定问题 Π,存在一个非负整数 k,对于输入规模为 n 的实例,能够以 $O(n^k)$的时间运行一个非确定性算法,得到 yes 或 no 的答案,则该判定问题 Π 是一个 NP(nondeterministic polynomial)类问题。

对于 NP 类判定问题,重要的是它必须存在一个确定性算法,能够以多项式时间来检查和验证在猜测阶段所产生的答案。

NP 类问题是难解问题的一个子类,并不是任何一个在常规计算机上需要指数时间的问题(即难解问题)都是 NP 类问题。例如,汉诺塔问题不是 NP 类问题,因为它对于 n 层汉诺塔需要 $O(2^n)$步打印出正确的移动集合,一个非确定性算法不能在多项式时间猜测并验证一个答案。

尽管 NP 类问题是对于判定问题定义的,事实上,可以在多项式时间应用非确定性算法解决的所有问题都属于 NP 类问题。

综上所述,P 类问题和 NP 类问题的主要差别在于:

(1) P 类问题可以用多项式时间的确定性算法来进行判定或求解;

(2) NP 类问题可以用多项式时间的非确定性算法来进行判定或求解。

如果问题 Π 属于 P 类,则存在一个多项式时间的确定性算法,来对它进行判定或求解。显然,对这样的问题 Π,也可以构造一个多项式时间的非确定性算法,来验证其解的正确性。因此,问题 Π 也属于 NP 类问题,即 $P \subseteq NP$。反之,如果问题 Π 属于 NP 类,则存在一个多项式时间的非确定性算法,来猜测并验证它的解,但是,不一定能够构造一个多项式时间的确定性算法,来对它进行求解或判定。因此,人们猜测 $P \neq NP$。但是,这个不等式是成立还是不成立,至今没有得到证明。

2.4　NP 完全问题

NP 完全问题是 NP 类问题的一个子类,对这个子类中的任何一个问题,如果能够证明用多项式时间的确定性算法来进行求解或判定,那么,NP 完全问题中的所有问题都可以通过多项式时间的确定性算法来进行求解或判定。

2.4.1 问题变换与计算复杂性归约

NP 类问题包括了实际应用领域的几乎所有判定问题,这些问题的算法在最坏情况下的时间复杂性都是一些形如 2^n、$n!$ 等快速增长的指数函数。我们希望能够在 NP 类问题的内部找到一种方法,比较两个问题的计算复杂性,并进一步找到 NP 类问题中最难的问题。比较两个问题的计算复杂性的方法是问题变换。

定义 2.5　假设问题 Π′存在一个算法 A,对于问题 Π′的输入实例 I′,算法 A 求解问题 Π′得到一个输出 O′,另外一个问题 Π 的输入实例是 I,对应于输入 I,问题 Π 有一个输出 O,则问题 Π 变换到问题 Π′是一个 3 个步骤的过程:

(1) 输入转换:把问题 Π 的输入 I 转换为问题 Π′的适当输入 I′。

(2) 问题求解:对问题 Π′应用算法 A 产生一个输出 O′。

(3) 输出转换:把问题 Π′的输出 O′转换为问题 Π 对应于输入 I 的正确输出。

问题变换的一般过程如图 2.4 所示。

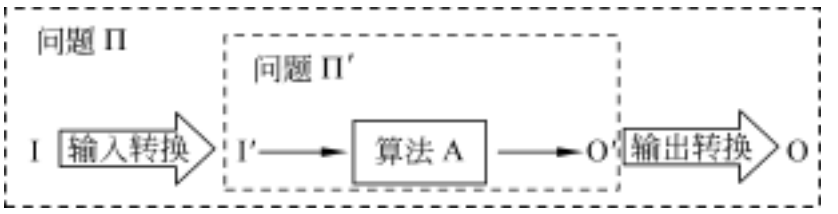


图 2.4　问题 Π 变换为问题 Π′的过程

若在 $O(\tau(n))$ 的时间内完成上述输入和输出转换,则称问题 Π 以 $\tau(n)$ 时间变换到问题 Π′,记为 $\Pi \propto_{\tau(n)} \Pi'$,其中,$n$ 为问题规模;若在多项式时间内完成上述输入和输出转换,则称问题 Π 以多项式时间变换到问题 Π′,记为 $\Pi \propto_p \Pi'$。

例如,算法 A 可以求解排序问题,输入 I′是一组整数 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,输出 O′是这组整数的一个排列 $x_{i1} \leq x_{i2} \leq \cdots \leq x_{in}$。考虑配对问题,输入 I 是两组整数 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和 $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$,输出 O 是两组整数的元素配对,即 X 中的最小值与 Y 中的最小值配对,X 中的次小值与 Y 中的次小值配对,以此类推。

解决配对问题的一种方法是使用一个已存在的排序算法 A,首先将这两组整数排序,然后根据它们的位置进行配对。所以,经过下述 3 步,配对问题被变换到排序问题:

(1) 把配对问题的输入 I 转化为排序问题的两个输入 I_1'和 I_2';

(2) 排序这两组整数,即应用算法 A 对两个输入 I_1'和 I_2'分别排序得到两个有序序列 O_1'和 O_2';

(3) 把排序问题的输出 O_1'和 O_2'转化为配对问题的输出 O,这可以通过配对每组整数的第一个元素、第二个元素……来得到。

配对问题到排序问题的变换有助于建立配对问题代价的一个上限,因为上述输入和输出转换都是在多项式时间完成,所以,如果排序问题有多项式时间算法,则配对问题也一定有多项式时间算法。

需要强调的是,问题变换的主要目的不是给出解决一个问题的算法,而是给出通过另一个问题理解一个问题的计算时间上下限的一种方式。

下面两个定理刻画了问题变换与计算复杂性之间的关系，如图 2.5 所示。

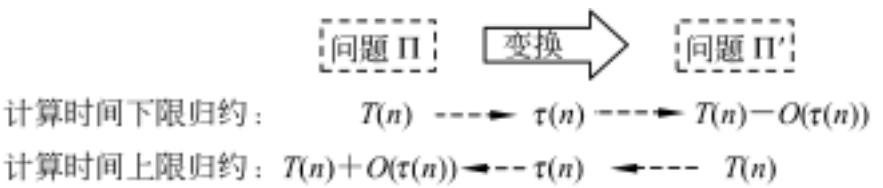


图 2.5 计算复杂性归约示意图

定理 2.2(计算时间下限归约) 若已知问题 Π 的计算时间下限是 $T(n)$，且问题 Π 可 $\tau(n)$ 变换到问题 Π′，即 $\Pi \propto_{\tau(n)} \Pi'$，则 $T(n) - O(\tau(n))$ 为问题 Π′的一个计算时间下限。

定理 2.3(计算时间上限归约) 若已知问题 Π′的计算时间上限是 $T(n)$，且问题 Π 可 $\tau(n)$ 变换到问题 Π′，即 $\Pi \propto_{\tau(n)} \Pi'$，则 $T(n) + O(\tau(n))$ 为问题 Π 的一个计算时间上限。

下面的定理说明了多项式问题变换是可传递的。

定理 2.4 设 Π、Π′和 Π″是 3 个判定问题，若 $\Pi \propto_p \Pi'$ 且 $\Pi' \propto_p \Pi''$，则 $\Pi \propto_p \Pi''$。

证明：设 A 是一个对于某个多项式 p，在 $p(n)$ 步内实现 $\Pi \propto_p \Pi'$ 的算法，设 B 是一个对于某个多项式 q，在 $q(n)$ 步内实现 $\Pi' \propto_q \Pi''$ 的算法，设 x 是规模为 n 的算法 A 的一个输入，显然，算法 A 以输入 x 运行时，其输出的大小不能超过 $cp(n)$，如果算法 B 接收规模大小为 $cp(n)$ 的输入时，存在某个多项式 r，它的运行时间是 $O(q(cp(n))) = O(r(n))$，由此，从问题 Π 到问题 Π″是一个多项式变换。

一般来说，问题变换不是一个可逆的过程。如果问题 Π 和问题 Π′可相互变换，即 $\Pi \propto_{\tau(n)} \Pi'$ 且 $\Pi' \propto_{\tau(n)} \Pi$ 时，称问题 Π 和问题 Π′是 $\tau(n)$ 时间等价的。特别地，当为 $\tau(n)$ 线性函数时，称问题 Π 和问题 Π′是等价的，此时，问题 Π 和问题 Π′具有相同的计算复杂性。

2.4.2 NP完全问题的定义

有大量问题都具有这个特性：我们知道存在多项式时间的非确定性算法，但是不知道是否存在多项式时间的确定性算法。同时，我们不能证明这些问题中的任何一个不存在多项式时间的确定性算法，这类问题称为 NP 完全问题。

定义 2.6 令 Π 是一个判定问题，如果问题 Π 属于 NP 类问题，并且对 NP 类问题中的每一个问题 Π′，都有 $\Pi' \propto_p \Pi$，则称判定问题 Π 是一个 NP 完全问题(NP complete problem)，有时把 NP 完全问题记为 NPC。

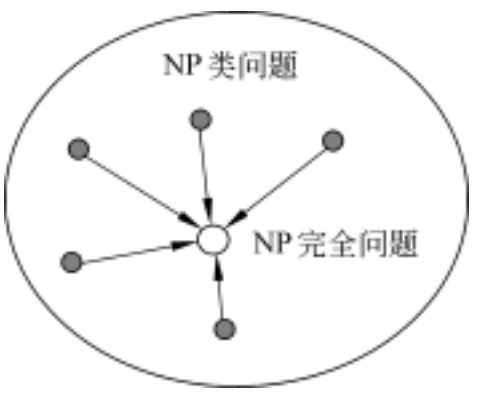


图 2.6 NP 完全问题示意图
图中箭头表示问题变换

NP 完全问题(如图 2.6 所示)是 NP 类问题中最难的一类问题，其中任何一个问题至今都没有找到多项式时间算法。而且 NP 完全问题有一个重要性质：如果一个 NP 完全问题能在多项式时间内得到解决，那么 NP 完全问题中的每一个问题都可以在多项式时间内求解。尽管已经进行了多年的研究，目前还没有一个 NP 完全问题有多项式时间算法。这些问题也许存在多项式时间算法，因为计算机科学是相对新生的科学，肯定还会有新的算法设计技术

有待发现;这些问题也许不存在多项式时间算法,但目前缺乏足够的技术来证明这一点。

我们已经定义了 P 类问题、NP 类问题、NP 完全问题等概念,广义上说,P 类问题是可以用确定性算法在多项式时间内求解的一类问题,NP 类问题是可以用非确定性算法在多项式时间猜测并验证的一类问题,而且 $P \subseteq NP$。是否存在一些问题属于 NP 类问题而不属于 P 类问题呢?至今,还没有人能证明是否 $P \neq NP$。若 $P \neq NP$,则说明 NP 类中的所有问题,包括 NP 完全问题,都不存在多项式时间算法;若 $P = NP$,则说明 NP 类中的所有问题,包括 NP 完全问题都具有多项式时间算法。无论哪一种答案,都将为算法设计提供重要的指导和依据。目前人们猜测 $P \neq NP$,则 P 类问题、NP 类问题、NP 完全问题之间的关系如图 2.7 所示。

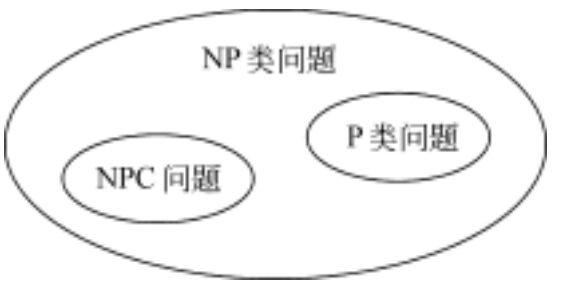


图 2.7　P 类问题、NP 类问题和 NPC 问题之间的关系

NP 类问题中还有一些问题,人们不知道它是属于 P 类问题还是属于 NP 完全问题,这些问题还在等待人们证明它们的归属。一个典型的例子是线性规划问题:设 $C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $B=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$, $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$,在满足 $AX=B$, $X\geq 0$ 的约束条件下,使目标函数 $Z=CX$ 取得极大值。长时间以来,线性规划问题没有多项式时间算法,也无法证明它是 NP 完全问题。20 世纪 80 年代,这个问题得到了解决,用来求解线性规划问题的实用的多项式时间算法被设计出来,从而证明了线性规划问题属于 P 类问题。另一个典型的例子是图的同构问题:对任意给定的两个图 $G_1=(V_1, E_1)$和 $G_2=(V_2, E_2)$,判断它们是否同构,即是否存在一个一一映射 $f: V_1 \rightarrow V_2$,使得$(u, v)\in E_1$当且仅当$(f(u), f(v))\in E_2$,其中,$u, v\in V_1$ 且 $f(u), f(v)\in V_2$。图的同构问题是目前尚未判断它是属于 P 类问题还是 NP 完全问题的少数几个问题之一,也可能它两者都不是。

难解问题中还有一类问题,虽然也能证明所有的 NP 类问题可以在多项式时间内变换为问题 Π,但是并不能证明问题 Π 是 NP 类问题,所以,问题 Π 不是 NP 完全的。但是,问题 Π 至少与任意 NP 类问题有同样的难度,这样的问题称为 NP 难问题,如图 2.8 所示。

定义 2.7　令 Π 是一个判定问题,如果对于 NP 类问题中的每一个问题 Π′,都有 $\Pi' \propto_p \Pi$,则称判定问题 Π 是一个 NP 难问题。

因此,如果 Π 是 NP 完全问题,而 Π′是 NP 难问题,那么,它们之间的差别在于 Π 必定是 NP 类问题,而 Π′不一定在 NP 类问题中。

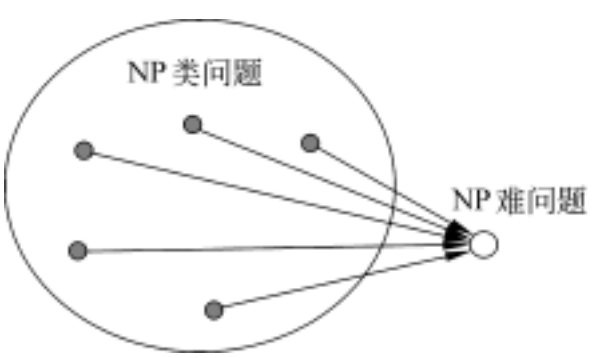


图 2.8　NP 难问题示意图
图中箭头表示问题变换

一般而言,若判定问题属于 NP 完全问题,则相应的最优化问题属于 NP 难问题。例如,判定图 $G=(V, E)$中是否存在哈密顿回路是 NP 完全问题,而求哈密顿回路中最短路径的 TSP 问题则是 NP 难问题,判定图 $G=(V, E)$中是否存在 k 个顶点的团问题是 NP 完全问题,而求图 $G=(V, E)$中顶点数最多的团问题则是 NP 难问题。

2.4.3 基本的 NP完全问题

证明一个判定问题 Π 是 NP 完全问题需要经过两个步骤:

(1) 证明问题 Π 属于 NP 类问题,也就是说,可以在多项式时间以确定性算法验证一个任意生成的串,以确定它是不是问题的一个解;

(2) 证明 NP 类问题中的每一个问题都能在多项式时间变换为问题 Π。由于多项式问题变换具有传递性,所以,只需证明一个已知的 NP 完全问题能够在多项式时间变换为问题 Π。

NP 完全问题的证明思想如图 2.9 所示。

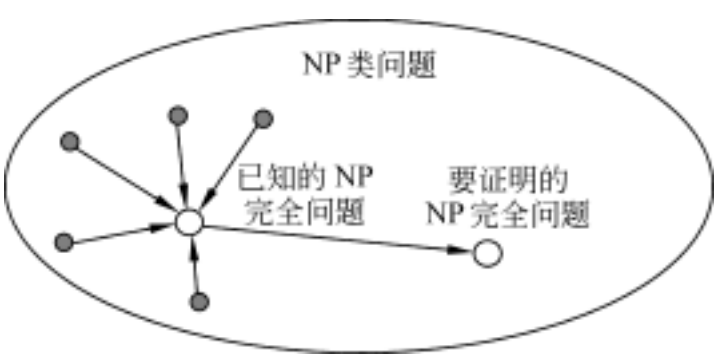


图 2.9 NP 完全问题的证明

图中箭头表示问题变换

1971 年,Cook 通过 Cook 定理证明了可满足问题(SAT 问题)是 NP 完全的。1972 年,Karp 证明了十几个问题都是 NP 完全的。这些 NP 完全问题的证明思想和技巧,以及利用它们证明的几千个 NP 完全问题,极大地丰富了 NP 完全理论。下面列出的是一些基本的 NP 完全问题。

1. SAT 问题(Boolean satisfiability problem)

SAT 问题也称为合取范式的可满足问题,来源于许多实际的逻辑推理的应用。一个合取范式形如: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$,子句 A_i $(1 \leq i \leq n)$形如: $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$,其中,$a_i$称为文字,为某一布尔变量或该布尔变量的非。SAT 问题是指: 是否存在一组对所有布尔变量的赋值(TRUE 或 FALSE),使得整个合取范式取值为真。

SAT 问题的 NP 完全证明请参见第 12 章的 12.3.2 节。

2. 最大团问题(maximum clique problem)

图 $G=(V, E)$的团是图 G的一个完全子图,即该子图中任意两个互异的顶点都有一条边相连。团问题是对于给定的无向图 $G=(V, E)$和正整数 k,是否存在具有 k 个顶点的团。

下面证明团问题属于 NP 完全问题,证明分两部分进行:

(1) 团问题属于 NP 类问题。显然,验证图 G的一个子图是否构成团只需要多项式时间,所以,团问题属于 NP 类问题。

(2) SAT$\propto_p$团问题。对于任意一个合取范式 f,按照如下方法构造相应的图 G:

① 图 G 的每个顶点对应 f 中的每个文字,多次出现的重复表示;

② 若图 G 中两个顶点对应的文字不互补且不出现在同一子句中,则将其连线。

例如,合取范式 $(A\vee\overline{B})\wedge(B\vee\overline{C})\wedge(C\vee\overline{A})$ 对应的图如图 2.10 所示。

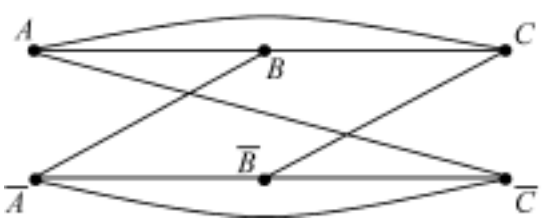


图 2.10　合取范式对应的图

设 f 有 n 个子句,则 f 可满足当且仅当 f 对应的图 G 中有 n 个顶点的团。因为若 f 满足,即有某种赋值使得 f 取值为真,它等价于使得每个 A_i $(1\leq i\leq n)$ 中都至少有一个文字为真,这 n 个文字中对应的图 G 中的 n 个顶点就构成一个团;若图 G 中有一个具有 n 个顶点的团,则取使这 n 个顶点对应的文字都为真的赋值,则 f 的取值为真。

显然,上述构造图 G 的方法可以在多项式时间完成,所以,SAT$\propto_p$团问题。由(1)和(2)可得,团问题是 NP 完全问题。证毕。

3.图着色问题(graph coloring problem)

给定无向连通图 $G=(V,\ E)$ 和正整数 k,是否可以用 k 种颜色对 G 中的顶点着色,使得任意两个相邻顶点着色不同。

4.哈密顿回路问题(Hamiltonian cycle problem)

在图 $G=(V,\ E)$ 中,是否存在经过所有顶点一次且仅一次,再回到出发点的回路。

5.TSP 问题(traveling salsman problem)

给定带权图 $G=(V,\ E)$ 和正整数 k,是否存在一条哈密顿回路,其路径长度小于 k。

6.顶点覆盖问题(vertex cover problem)

设图 $G=(V,\ E)$,V' 是顶点 V 的子集,若图 G 的任一条边至少有一个顶点属于 V',则称 V' 为图 G 的顶点覆盖。

顶点覆盖问题是对于图 $G=(V,\ E)$ 和正整数 k,是否存在顶点 V 的一个子集 V',使得图 G 的任一条边至少有一个顶点属于 V' 且 $|V'|\leq k$。

7.最长路径问题(longest path problem)

给定一个带权图 $G=(V,\ E)$ 和一个正整数 k,对于图 G 中的任意两个顶点 v_i, $v_j\in V$ $(1\leq i,\ j\leq n,\ i\neq j)$,是否存在从顶点 v_i 到顶点 v_j 的长度大于 k 的简单路径。

8.子集和问题(sum of subset problem)

给定一个整数集合 S 和一个正整数 k,判定是否存在 S 的一个子集 S',使得 S' 中整数的和为 k。

2.4.4　NP完全问题的计算机处理

NP 完全问题是计算机难以处理的,但在实际中经常会遇到,我们回避不了这些问

题,因此,人们提出了解决 NP 完全问题的各种方法。

1.采用先进的算法设计技术

当实际应用中的问题规模不是很大时,采用动态规划法、回溯法、分支限界法等算法设计技术还是能够解决问题的。

2.充分利用限制条件

许多问题,虽然直观上归结为一个 NP 完全问题,但往往进一步的分析会发现它还会包含某些限制条件,而有些问题当增加了限制条件后,可能会改变性质。例如,限定 0/1 背包问题中,物品的重量和价值均为正整数;限定图着色问题中的图为平面图;限定 TSP 问题中边的代价满足三角不等式等。所以,在解决实际问题时,应特别注意在将实际问题归结为抽象问题后,是否还满足其他特定的限制条件。

3.近似算法

在现实世界中,很多问题的输入数据是用测量方法获得的,而测量的数据本身就存在着一定程度的误差,因此,输入数据是近似的。同时,很多问题的解允许有一定程度的误差,只要给出的解是合理的、可接受的。此外,采用近似算法可以在很短的时间内得到问题的近似解,所以,近似算法是求解 NP 完全问题的一个可行的方法。近似算法因"正确性"不能保证已不同于普通算法。目前,近似算法的研究越来越受到重视,可以说是解决 NP 完全问题的最重要的途径。

4.概率算法

概率算法也称为随机算法,与近似算法不同,它允许把随机性的操作注入到算法运行中,同时允许结果以较小的概率出现错误,并以此为代价,获得算法运行时间大幅度减少。

5.并行计算

并行计算是利用多台处理机共同完成一项计算,虽然从原理上说增加处理机的个数不能根本解决 NP 完全问题,但这也是解决 NP 完全问题的措施之一。事实上,并行计算是解决计算密集型问题的必经之路,近年来许多难解问题的计算成功都离不开并行算法的支持。例如,数千个城市的 TSP 问题的计算、129 位大整数的分解、"深蓝"弈棋程序的成功,都得益于并行计算的实现。

6.智能算法

遗传算法(GA)、人工神经网络(ANN)、DNA 算法、蚁群算法(ACO)、免疫算法(IA)、模拟退火(SA)等来源于自然界的优化思想,被称为智能算法。例如,遗传算法是一种随机的近似优化算法,它从生物物种的遗传进化规律得到启发,同时已成为解决难解优化问题的有力手段。

2.5　实验项目——SAT 问题

1.实验题目

SAT 问题也称为合取范式的可满足问题,一个合取范式形如: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$,子句 A_i $(1 \leq i \leq n)$形如: $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$,其中,$a_i$称为文字,为某一布尔变量或该布尔变量的非。SAT 问题是指:是否存在一组对所有布尔变量的赋值(TRUE 或 FALSE),使得整个合取范式取值为真。

2.实验目的

(1) 掌握 NP 完全问题的特点;

(2) 理解这样一个观点:NP 完全问题的算法具有指数时间,而指数时间算法的计算时间随着问题规模的增长而快速增长。

3.实验要求

(1) 设计算法求解 SAT 问题;

(2) 设定问题规模为 3、5、10、20、50,设计实验程序考察算法的时间性能。

4.实现提示

假设 SAT 问题的规模为 n,则任一个长度为 n 的二进制串都是该问题的可能解。考虑最简单的方法:将每一个长度为 n 的二进制串依次代入某个给定的合取范式中,直到该合取范式取值为 TRUE,得到此问题的解,或将所有长度为 n 的二进制串依次检测后该合取范式的取值始终为 FALSE,则此问题无解。

伪代码

算法 2.4——SAT 问题

1.将一个长度为 n 的二进制串 s 初始化为 00…0;
2.循环直到串 s 为 11…1
　2.1　将二进制串 s 代入给定的合取范式中;
　2.2　若合取范式取值为 TRUE,则将串 s 作为结果输出,算法结束;
　2.3　否则,将串 s 加 1;
3.输出“无解”;

对于合取范式,可以在程序运行中手工输入,可以作为算法 2.4 的参数通过调用程序传入,也可以设计一个函数自动生成一个合取范式,具体算法请读者自行设计。

阅读材料——遗传算法

在人类历史上,通过学习与模拟来增强自适应能力的例子不胜枚举。模拟飞禽,人类可以遨游天空;模拟游鱼,人类可以横渡海洋;模拟昆虫,人类可以纵观千里;模拟大脑,人

类创造了影响世界发展的计算机。人类的模拟能力并不仅仅局限于自然现象和其他生命体。自 20 世纪后半叶以来,人类正在将其模拟的范围延伸到人自身,除了向自身结构的学习以外,更向其自身的演化这一宏观的过程学习,来增强自己解决问题的能力,其代表性的就是遗传算法(genetic algorithm, GA)。

美国 Michigan 大学的 John Holland 和他的学生在 1975 年提出的遗传算法,是源于模拟达尔文的进化论"优胜劣汰、适者生存"的原理和孟德尔、摩根的遗传变异理论,在迭代过程中保持已有的结构,同时寻找更好的结构。其本意是在人工适应系统中设计一种基于自然的演化机制。

Holland 设计了遗传算法的模拟与操作原理,运用了统计决策理论对遗传的搜索机理进行了理论分析,建立了著名的 Schema 定理和隐含并行性原理,为遗传算法的发展奠定了基础。De Jong 将遗传算法应用于函数优化,设计了一系列遗传算法的执行策略和性能评价指标,对遗传算法性能做了大量的分析。De Jong 的在线和离线是目前衡量遗传算法性能的主要手段,而他精心挑选的 5 个试验函数也是目前遗传算法数值试验中用得最多的试验函数。

在 Holland 和 De Jong 的工作之后,遗传算法经历了一个相对平衡的发展时期,目前逐渐被人们所接受和运用。遗传算法的发展高潮开始于 20 世纪 80 年代末,而且延续至今。目前,关于遗传算法理论的研究在下述 3 个方面进行: (1)Schema 理论的拓广与深入;(2)遗传算法的马氏链分析;(3)遗传算法的收敛理论。

1 . 遗传算法的基本原理

GA 是建立在自然选择和群体遗传学基础上,通过自然选择、杂交和变异实现搜索的方法,其基本过程是: 首先采用某种编码方式将解空间映射到编码空间(可以是位串、实数等,具体问题中,可以直接采用解空间的形式进行编码,也可以直接在解的表示上进行遗传操作,从而易于引入特定领域的启发式信息,可以取得比二进制编码更高的效率。实数编码一般用于数值优化,有序串编码一般用于组合优化),每个编码对应问题的一个解,称为染色体或个体;其次通过随机的方法产生初始解(被称为群体或种群),在种群中根据适应值或某种竞争机制选择个体(适应值就是解的满意程度,可以由外部显式适应度函数计算,也可以由系统本身产生,如由个体在种群中的存活量和繁殖量确定),再次使用各种遗传操作算子(包括杂交,变异等)产生下一代(下一代可以完全替代原种群,即非重叠种群,也可以部分替代原种群中一些较差的个体,即重叠种群),如此进化下去,直到满足期望的终止条件。遗传算法中使用适应度这个概念来度量种群中的各个个体在优化过程中有可能达到最优解的优良程度。度量个体适应度的函数称为适应度函数,适应度函数的定义一般与具体问题有关。

2 . 基本遗传算法

遗传算法是模拟由个体组成的种群的整体学习过程,其中个体表示给定问题的搜索空间中的一个结点。遗传算法从任意初始种群出发,通过随机选择(使种群中的优秀个体有更多的机会传给下一代)、杂交(体现自然界中种群内个体之间的信息交换)和变异(在

种群中引入新的变种确保种群中信息的多样性)等遗传操作,使种群一代一代地进化到搜索空间中越来越好的区域,直至达到最优解。

下面给出遗传算法的一般框架:

1. 初始化:
   1.1　设置进化代数计数器 t = 0;
   1.2　设置最大迭代次数 T;
   1.3　对搜索空间进行编码;
   1.4　随机产生包含 m 个个体作为初始种群 P(0);
2. 种群 P(t)经过选择、交叉、变异运算之后得到下一代种群 P(t + 1)
   2.1　选择运算:将选择算子作用于种群;
   2.2　交叉运算:将交叉算子作用于种群;
   2.3　变异运算:将变异算子作用于种群;
   2.4　个体评价:计算种群中各个个体的适应度;
3. 若 t < = T,则 t = t + 1,转步骤 2;
4. 否则,以进化过程中得到的最大适应度的个体作为最优解输出,算法结束;

3. GA 算法中的关键问题

理论上,GA 算法可以收敛到全局最优解,但在实际应用中也存在一些问题,比如种群早熟、收敛速度较慢、偶尔收敛于局部最优解等。为了解决这些问题,在 GA 算法中需要解决以下 5 个问题:

(1) 编码方式

GA 从原理上要求使用者采用最简单的代码组合来表示问题的解,这样可以使低阶、长度短、适应度高的基因能够产生更多的后代,从而加快收敛。

(2) 初始种群的产生

GA 通常使用随机的方法产生初始种群,这样原理上可以使初始种群均匀分布于整个解空间,使 GA 从全局范围内搜索最优解。但对于某一实际问题,往往事先可以获得一些关于最优解的信息。

(3) 适应度函数的选取

研究结果表明,对同一问题采用不同的适应度函数,将导致 GA 收敛速度及精度的不同。所以针对如何构造合适的适应度函数也展开了许多研究。

(4) GA 算子

GA 主要使用 3 个算子: 选择、交叉、变异,其实现方法通常是轮盘赌法选择、单点交叉和定概率变异。近年来,相继提出了竞争选择、排序选择、稳态选择,多点交叉、均匀交叉以及变概率变异、预测变异等。

(5) GA 参数值

对任何一个 GA 的使用者来说,都必须精心选择以下参数: 种群规模、染色体长度、杂交概率、变异概率等,这些参数的选择对问题的最终结果影响很大。

4 .改善遗传算法性能的措施

(1) 综合优选参数

解决实际问题时可以采用试探法,从操作参数的意义和优化结果看,彼此之间有较强的独立性,所以可以先假定其他参数固定不变,研究单一参数的最佳选取值,然后再综合优选。

(2) 采用变参数法

由于在算法搜索的不同阶段各操作参数的影响不同,故可以采用给定初值,然后在 GA 每代搜索中有规律地变化以改善 GA 性能的策略。一般说来,杂交概率逐渐减小,变异概率逐渐增加。

(3) 选择式单点杂交

作为遗传算法的主要操作,杂交方法的构造与选择直接影响计算的速度和结果的优劣。当选择作为杂交的两个个体的适应度值相差较大时,可将适应度高者保留不变,只让适应度低的个体接收其优良性态,使种群向最优范围逼近,以避免杂交可能导致的种群平均性态变异的缺陷。

(4) 特殊的杂交方法

常用的特殊杂交操作包括头尾杂交和头头杂交。

(5) 终止进化准则

终止进化准则也是遗传算法中需要研究的关键技术。若仅仅以遗传代数作为终止进化准则,当最优解在远早于最大遗传代数之前出现的情况下,势必会浪费计算时间。可以考虑以最优个体最少保留代数与最大遗传代数相结合作为终止进化准则,从而避免单因素控制准则的缺陷。

人们对遗传算法的兴趣有两个背景:

其一是工程领域,特别是人工智能与控制领域,不断涌现出超大规模的非线性系统,在这些系统的研究中存在大量的经典优化方法所不能有效求解的优化问题,如神经网络连接权值及网络拓扑结构的优化、模糊系统中模拟规则的选取及适应度函数的确定、知识库的维护与更新等。

其二是遗传算法本身就是一种模拟自然演化这一学习过程的求解问题的方法,它能以独立的或与其他方法相结合的形式用于智能机器学习系统的设计中。

遗传算法是一种随机的优化与搜索方法,具有并行性、通用性、全局优化性、健壮性、可操作性与简单性等特点,遗传算法不论是在应用上、算法设计上,还是基础理论上,都得到了长足的发展,已成为信息科学、计算机科学、运筹学和应用数学等诸多学科共同关注的热点研究领域。但是到目前为止,它始终未能对自身演化本身的研究发生作用,而且就其实质来讲,目前的 GA 学习人类演化过程还只是形式的,尚未能刻画人类自身的演化过程,更未能刻画神经元思维真实的学习过程。因此,就其模型本身来讲需要更加深入的探讨。

参 考 文 献

[1] 刘勇等 . 非数值并行算法——遗传算法 . 北京: 科学出版社, 2000
[2] 徐宁等 . 几种现代优化算法的比较研究 . 北京: 系统工程与电子技术,2002, 12(24)

习　题　2

1 . 求下列问题的平凡下界, 并指出其下界是否紧密。

(1) 求数组中的最大元素;

(2) 判断邻接矩阵表示的无向图是不是完全图;

(3) 确定数组中的元素是否都是惟一的;

(4) 生成一个具有 n 个元素集合的所有子集。

2 . 对于求数组中两个最接近数(即相差最小)的问题, 求该问题的一个紧密下界。

3 . 画出在 3 个数 a, b, c 中求中值问题的决策树。

4 . 堆可以表示为数组的形式。当具有 n 个元素的数组 A 是一个堆时, 说明测试这个数组是否是堆所需要的最少比较次数。

5 . 假设某算法的时间复杂性为 $T(n) = 2^n$, 在计算机 C_1 和 C_2 上运行这个算法, C_2 的速度是 C_1 的 100 倍。若该算法在 C_1 上运行的时间为 t, 可处理的问题规模为 n, 在 C_2 上运行同样的时间可处理的问题规模是多少 ? 如果 $T(n) = n^2$, 在 C_2 上运行同样的时间可处理的问题规模是多少 ?

6 . 对一个正整数 n 进行因子划分的最自然的想法是对范围在 $1 \sim \sqrt{n}$ 的整数试除, 它可以找到 n 的最小素数因子。请写出这个算法。因子划分问题是易解问题还是难解问题 ?

7 . 给出背包问题的判定形式, 并简要描述背包问题判定形式的非确定性算法。

8 . 已知顶点覆盖问题是 NP 完全的, 证明哈密顿回路问题是 NP 完全的。

9 . 令 Π_1 和 Π_2 是两个判定问题, 并且 $\Pi_1 \propto_p \Pi_2$。假定 Π_2 可以在时间 $O(n^k)$ 内求解, Π_1 可以用时间 $O(n^j)$ 归约到 Π_2, 证明: Π_1 可以在时间 $O(n^j + n^k)$ 内求解。

10 . 设计一个多项式时间算法, 在给定的具有 n 个顶点的无向图 $G = (V, E)$ 中, 找出大小为 k 的团, 这里 k 是一个给定的正整数。这与团集问题的 NP 完全性矛盾吗 ? 为什么 ?

11 . 证明: 如果一个 NP 完全问题被证明在多项式时间内可解, 则 $P = NP$。

12 . 证明: 对于一个有向无环图 G, 可以在多项式时间内求出图 G 的哈密顿回路。

第3章 蛮力法

CHAPTER

蛮力法(brute force method),也称穷举法,是一种简单而直接地解决问题的方法,常常直接基于问题的描述,因此,也是最容易应用的方法。但是,用蛮力法设计的算法其时间性能往往也是最低的,典型的指数时间算法一般都是通过蛮力搜索而得到的。

3.1 蛮力法的设计思想

这里的"力"是指计算机的计算能力,而不是人的智"力"。蛮力法是一种简单而直接地解决问题的方法,常常直接基于问题的描述,所以,蛮力法也是最容易应用的方法。例如,对于给定的整数 a 和非负整数 n,计算 a^n 的值,最直接最简单的想法就是把 1 和 a 相乘 n 次,即:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{次}}$$

应 用 实 例

计算 a^n 的值是非对称加密算法 RSA 算法的主要组成部分。RSA 算法的加密和解密过程都需要求一个整数的整数次幂再取模。例如,设公钥为(5,119),私钥为(77,119),明文 $m=19$,则加密得密文 c 为:

$$c = 19^5 \bmod 119 = 2\,476\,099 \bmod 119 = 66$$

解密得明文 m 为:

$$m = 66^{77} \bmod 119 = 19$$

因此计算 a^n 算法的效率直接影响到 RSA 算法的性能。

蛮力法所依赖的基本技术是扫描技术,即采用一定的策略将待求解问题的所有元素依次处理一次,从而找出问题的解。依次处理所有元素是蛮力法的关键,为了避免陷入重复试探,应保证处理过的元素不再被处理。在基本的数据结构中,依次处理每个元素的方法是遍历,例如:

(1) 集合的遍历

在集合中按照元素序号的顺序可以依次处理每个元素。

(2) 线性表的遍历

在线性表中按照元素的序号依次处理每个元素。例如,假设线性表以数组形式存储,则遍历是按照数组下标的顺序依次处理每个数组元素。

(3) 树的遍历

树的遍历有前序、后序和层序 3 种方式,二叉树的遍历有前序、中序、后序和层序 4 种方式,任一种遍历方式都可以依次处理每个元素。

(4) 图的遍历

图的遍历有深度优先和广度优先两种次序,深度优先遍历是一种递归处理的方法,在遍历中尽可能向深处移动,而广度优先遍历是一种按层次遍历的方法。

虽然巧妙和高效的算法很少来自于蛮力法,基于以下原因,蛮力法也是一种重要的算法设计技术:

(1) 理论上,蛮力法可以解决可计算领域的各种问题。对于一些非常基本的问题,例如,求一个序列中的最大元素,计算 n 个数的和等,蛮力法是一种常用的算法设计技术。

(2) 蛮力法经常用来解决一些较小规模的问题。如果要解决的问题规模不大,用蛮力法设计的算法其速度是可以接受的,此时,设计一个更高效算法的代价是不值得的。

(3) 对于一些重要的问题(例如,排序、查找、字符串匹配),蛮力法可以产生一些合理的算法,它们具备一些实用价值,而且不受问题规模的限制。

(4) 蛮力法可以作为某类问题时间性能的底限,来衡量同样问题的更高效算法。

3.2 查找问题中的蛮力法

在查找问题中应用蛮力法就是依次考察待查找集合,显然这是最笨拙的查找方法。但是,在某些情况下(如查找集合不大)也是一种合理的方法。

3.2.1 顺序查找

顺序查找从表的一端向另一端逐个将元素与给定值进行比较,若相等,则查找成功,给出该元素在表中的位置;若整个表检测完仍未找到与给定值相等的元素,则查找失败,给出失败信息。其查找过程如图 3.1 所示。

图 3.1 顺序查找示意图

C++描述

算法 3.1——顺序查找

```
int SeqSearch1(int r[ ], int n, int k) // 数组 r[1] ～ r[n]存放查找集合
{
    i = n;
    while (i > 0 && r[i] != k)
        i -- ;
    return i;
}
```

算法 3.1 的基本语句是 i > 0 和 r[i] != k[①],其执行次数为:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i b_i + \sum_{i=1}^{n} p_i c_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n - i + 1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n - i + 1) = n + 1 = O(n)$$

下面讨论一种改进的算法:设置“哨兵”。哨兵就是待查值,将它放在查找方向的“尽头”处,免去了在查找过程中每一次比较后都要判断查找位置是否越界,从而提高了查找速度。其查找过程如图 3.2 所示。

图 3.2　改进的顺序查找示意图

C++描述

算法 3.2——顺序查找的改进版本

```
int SeqSearch2(int r[ ], int n, int k)      // 数组 r[1] ～ r[n]存放查找集合
{
    r[0] = k; i = n;
    while (r[i] != k)
        i -- ;
    return i;
}
```

算法 3.2 的基本语句是 r[i] != k,其执行次数为:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i c_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n - i + 1) = \frac{n+1}{2}O(n)$$

用蛮力法设计的算法,一般来说,经过适度的努力后,都可以对算法的第一个版本进行一定程度的改良,改进其时间性能,但只能减少系数,而数量级不会改变。考察顺序查找和其改进版本,其时间复杂性都是 $O(n)$,而系数相差一倍。实践证明,改进算法在表长

① 基本语句也可以是 i --,但此处需要细致分析所有关键语句的执行次数,所以,将 i > 0 和 r[i] != k 作为基本语句更合适。

大于 1000 时,进行一次顺序查找的时间几乎减少一半。

3.2.2 串匹配问题

概 念 回 顾

给定两个串 $S = "s_1 s_2 \cdots s_n"$ 和 $T = "t_1 t_2 \cdots t_m"$,在主串 S 中查找子串 T 的过程称为串匹配(也称模式匹配),T 称为模式。

在文本处理系统、操作系统、编译系统、数据库系统以及 Internet 信息检索系统中,串匹配是使用最频繁的操作。串匹配问题的算法复杂程度不高,并且具有下面两个明显的特征:(1)问题规模 n 很大,常常需要在大量信息中进行匹配,因此,算法的一次执行时间不容忽视;(2)匹配操作经常被调用,执行频率高,因此,算法改进所取得的效益因积累往往比表面上看起来要大得多。

应 用 实 例

在 Word 等文本编辑器中有这样一个功能:在“查找”对话框中输入待查找内容(常见的是查找某个字或词),系统会在整个文档中进行查找,将与待查找内容相匹配的部分高亮显示。

应用蛮力法解决串匹配问题的过程是显而易见的:从主串 S 的第一个字符开始和模式 T 的第一个字符进行比较,若相等,则继续比较二者的后续字符;若不相等,则从主串 S 的第二个字符开始和模式 T 的第一个字符进行比较,重复上述过程,若 T 中的字符全部比较完毕,则说明本趟匹配成功;若最后一轮匹配的起始位置是 $n - m$,则主串 S 中剩下的字符不足够匹配整个模式 T,匹配失败。这个算法称为朴素的模式匹配算法,简称 BF 算法。

例如,给定主串 $S = "ababcabcacbab"$,模式 $T = "abcac"$,BF 算法的匹配过程如图 3.3 所示。

伪代码

算法 3.3——BF 算法

```
1. 在串 S 和串 T 中设比较的起始下标 i 和 j;
2. 循环直到 S 中所剩字符个数小于 T 的长度或 T 的所有字符均比较完
   2.1  如果 S[i] = T[j],则继续比较 S 和 T 的下一个字符;否则
   2.2  将 i 和 j 回溯,准备下一趟比较;
3. 如果 T 中所有字符均比较完,则匹配成功,返回匹配的起始比较下标;
   否则,匹配失败,返回 0;
```

设串 S 长度为 n,串 T 长度为 m,在匹配成功的情况下,考虑最坏情况,即每趟不成功的匹配都发生在串 T 的最后一个字符。

例如:$S = "aaaaaaaaaab"$

$T = "aaab"$

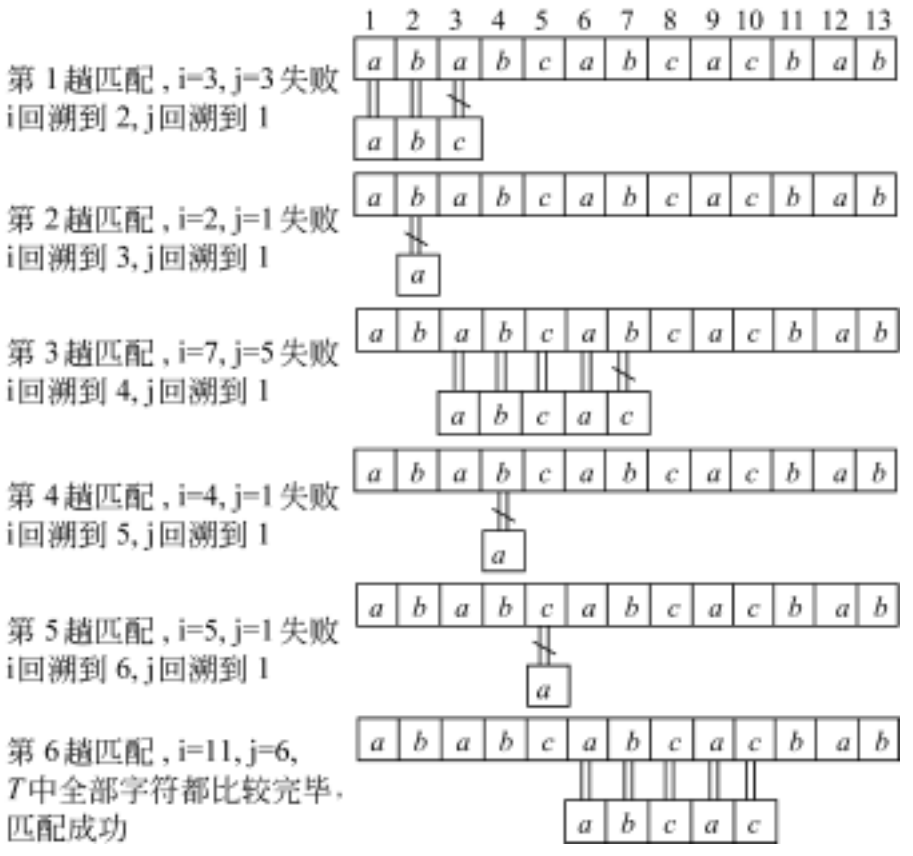


图 3 3　BF 算法的执行过程

设匹配成功发生在 s_i 处，则在 $i-1$ 趟不成功的匹配中共比较了 $(i-1)\times m$ 次，第 i 趟成功的匹配共比较了 m 次，所以总共比较了 $i\times m$ 次，因此平均比较次数是：

$$\sum_{i=1}^{n-m+1} p_i \times (i\times m) = \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{1}{n-m+1} \times (i\times m) = \frac{m(n-m+2)}{2}$$

一般情况下，$m \ll n$，因此最坏情况下的时间复杂度是 $O(n\times m)$。

BF 算法简单但效率较低，一种对 BF 算法做了很大改进的串匹配算法是由 Knuth、Morris 和 Pratt 同时设计的 KMP 算法，其基本思想是主串不进行回溯。

分析 BF 算法的执行过程，造成 BF 算法效率低的原因是回溯，即在某趟匹配失败后，对于串 S 要回溯到本趟匹配开始字符的下一个字符，串 T 要回溯到第 1 个字符，而这些回溯往往是不必要的。如图 3 3 所示的匹配过程，在第 3 趟匹配过程中，$s_3 \sim s_6$ 和 $t_1 \sim t_4$ 是匹配成功的，$s_7 \neq t_5$ 匹配失败，因此有了第 4 趟。因为在第 3 趟中有 $s_4 = t_2$，而 $t_1 \neq t_2$，肯定有 $t_1 \neq s_4$，所以第 4 趟是不必要的，同理第 5 趟也是不必要的，可以直接到第 6 趟。进一步分析第 6 趟中的第一对字符 s_8 和 t_1 的比较是多余的，因为第 3 趟中已经比较了 s_8 和 t_4，并且 $s_8 = t_4$，而 $t_1 = t_4$，必有 $s_8 = t_1$，因此第 6 趟比较可以从第 2 对字符 s_7 和 t_2 开始进行，这就是说，第 3 趟匹配失败后，指针 i 不动，而是将模式 T 向右“滑动”到第 2 个字符，用 t_2“对准”s_7 继续进行匹配。

综上所述，希望某趟在 s_i 和 t_j 匹配失败后，指针 i 不回溯，模式 T 向右滑动至某个位置 k，使得 t_k 对准 s_i 继续进行匹配。显然，关键问题是如何确定位置 k？

模式 $T=$ ''$t_1\ t_2 \cdots t_m$''中的每一个字符 t_j 都对应一个 k 值，这个 k 值仅依赖于模式本身字符序列的构成，而与主串无关。用 next[j]表示 t_j 对应的 k 值($1\leq j\leq m$)，则 $t_1 \cdots t_{k-1}$ 既

是 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的真前缀又是 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的真后缀的最长子串，因此，将 $k = \text{next}[j]$ 称为 t_j 的前缀函数值，k 就等于串 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的既是真前缀又是真后缀的最长子串的长度加 1。图 3.4 给出了一个求前缀函数值的例子。

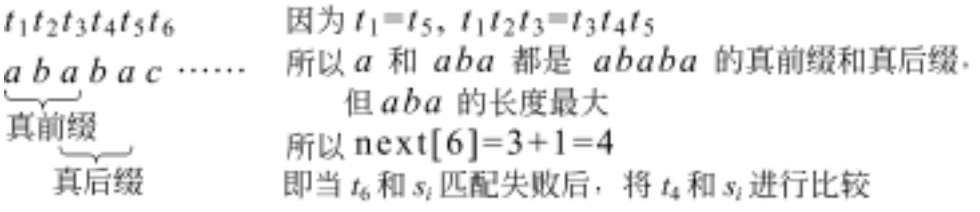


图 3.4　前缀函数求解示意图

因此，next 数组的定义如下：

$$\text{next}[j] = \begin{cases} 0 & j = 1 \\ \max\{k \mid 1 \le k < j \text{ 且 } ''t_1 t_2 \cdots t_{k-1}'' = ''t_{j-k+1} t_{j-k+2} \cdots t_{j-1}''\} \\ 1 & \text{其他情况} \end{cases}$$

由模式 T 的前缀函数定义易知，next[1] = 0，因为此时 t_1 没有真前缀也没有真后缀。假设已经计算出 next[1]，next[2]，…，next[j]，如何计算 next[$j+1$]呢？设 $k = \text{next}[j]$，这意味着 $t_1 \cdots t_{k-1}$ 既是 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的真后缀又是 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的真前缀，即：

$$t_1 \cdots t_{k-1} = t_{j-k+1} t_{j-k+2} \cdots t_{j-1}$$

此时，比较 t_k 和 t_j，可能出现两种情况：

(1) $t_k = t_j$：说明 $t_1 \cdots t_{k-1} t_k = t_{j-k+1} \cdots t_{j-1} t_j$，由前缀函数定义，next[$j$] = $k+1$。

(2) $t_k \neq t_j$：此时要找出 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的后缀中第 2 大真前缀，显然，这个第 2 大的真前缀就是 next[next[j]] = next[k]，即 $t_1 \cdots t_{\text{next}[k]-1} = t_{j-\text{next}[k]+1} \cdots t_{j-1}$（为什么？），再比较 $t_{\text{next}[k]}$ 和 t_j，如图 3.5 所示。此时仍会出现两种情况，当 $t_{\text{next}[k]} = t_j$ 时，与情况(1)类似，next[j] = next[k] + 1；当 $t_{\text{next}[k]} \neq t_j$ 时，与情况(2)类似，再找 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的后缀中第 3 大真前缀，重复(2)的过程，直到找到 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的后缀中的最大真前缀，或确定 $t_1 \cdots t_{j-1}$ 的后缀中不存在真前缀，此时，next[$j+1$] = 1。

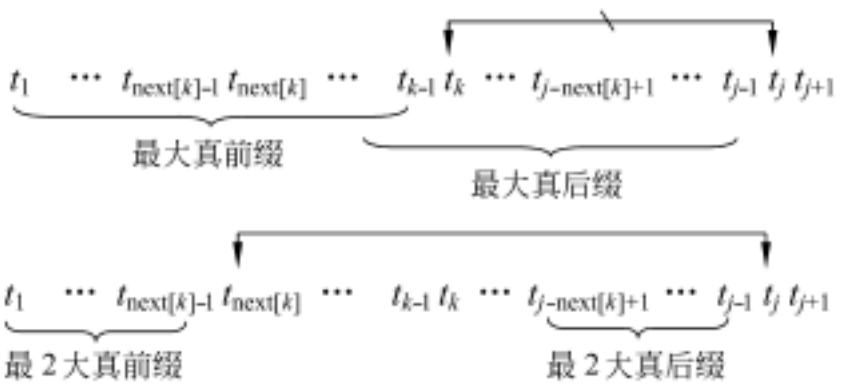


图 3.5　$t_k \neq t_j$ 的情况

例如，模式 $T = ''abaababc''$ 的 next 值计算如下：

j = 1 时，next[1] = 0；j = 2 时，next[2] = 1；j = 3 时，$t_1 \neq t_2$，next[3] = 1；

j = 4 时，$t_1 = t_3$，next[4] = 2；

j = 5 时，$t_2 \neq t_4$，令 k = next[2] = 1，$t_1 = t_4$，next[5] = k + 1 = 2；

j = 6 时，$t_2 = t_5$，next[6] = 3；j = 7 时，$t_3 = t_6$，next[7] = 4；

j = 8 时，$t_4 \neq t_7$，k = next[4] = 2，$t_2 = t_7$，next[8] = k + 1 = 3。

C++描述

算法 3.4——KMP 算法中求 next 数组

```
void GetNext(char T[ ], int next[ ])
{
    next[1] = 0;
    j = 1; k = 0;
    while (j< T[0])
        if ((k = = 0)| |(T[j] = = T[k])) {
            j ++ ;
            k ++ ;
            next[j] = k;
    }
    else k = next[k];
}
```

算法 3.4 只需将模式扫描一遍，设模式的长度为 m，则算法的时间复杂性为 $O(m)$。

设主串 S = "ababcabcacbab"，模式 T = "abcac"，KMP 算法的匹配过程如图 3.6 所示。

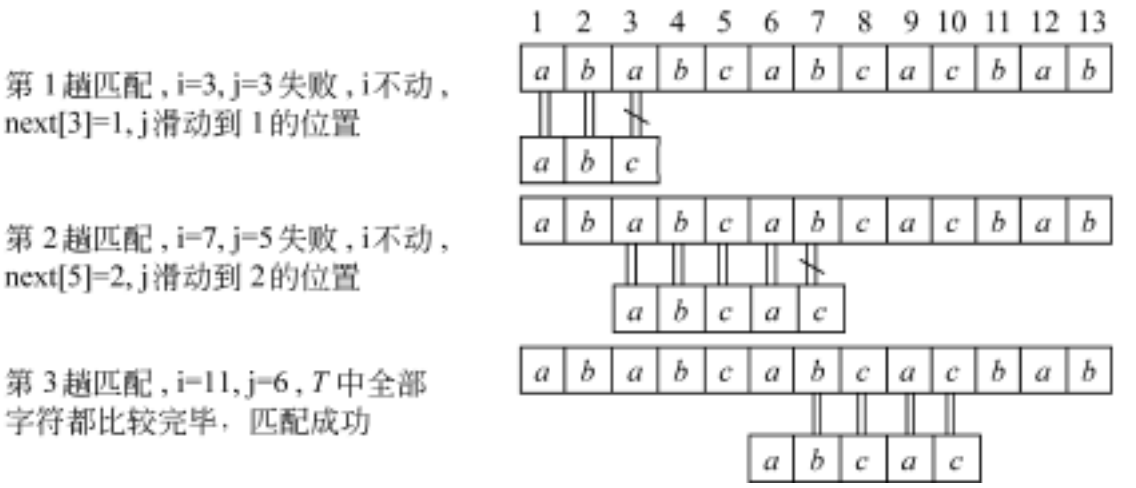


图 3.6　KMP 算法的匹配过程示例

KMP 算法用伪代码描述如下：

伪代码

算法 3.5——KMP 算法

1．在串 S 和串 T 中分别设比较的起始下标 i 和 j；

2．循环直到 S 中所剩字符长度小于 T 的长度或 T 中所有字符均比较完毕

　2.1　如果 S[i] = T[j]，则继续比较 S 和 T 的下一个字符；否则

　2.2　将 j 向右滑动到 next[j]位置，即 j = next[j]；

　2.3　如果 j = 0，则将 i 和 j 分别加 1，准备下一趟比较；

3．如果 T 中所有字符均比较完毕，则返回匹配的起始下标，否则返回 0；

KMP 算法的时间复杂性是 $O(n+m)$,当 $m \ll n$ 时,KMP 算法的时间复杂性是 $O(n)$。

3.3 排序问题中的蛮力法

选择排序和起泡排序是应用蛮力法设计排序算法最直观的例子,它们都以一种清晰的方式应用了蛮力法。

概 念 回 顾

排序:给定一个记录序列(r_1, r_2, …, r_n),其相应的关键码分别为(k_1, k_2, …, k_n),排序是将这些记录排列成顺序为(r_{s1}, r_{s2}, …, r_{sn})的一个序列,使得相应的关键码满足 $k_{s1} \leq k_{s2} \leq \cdots \leq k_{sn}$(升序或非降序)或 $k_{s1} \geq k_{s2} \geq \cdots \geq k_{sn}$(降序或非升序)。

3.3.1 选择排序

选择排序开始的时候,扫描整个序列,找到整个序列的最小记录和序列中的第一个记录交换,从而将最小记录放到它在有序区的最终位置上,然后再从第二个记录开始扫描序列,找到 $n-1$ 个序列中的最小记录,再和第二个记录交换位置。一般地,第 i 趟排序从第 i 个记录开始扫描序列,在 $n-i+1$ ($1 \leq i \leq n-1$)个记录中找到关键码最小的记录,并和第 i 个记录交换作为有序序列的第 i 个记录,如图 3.7 所示。

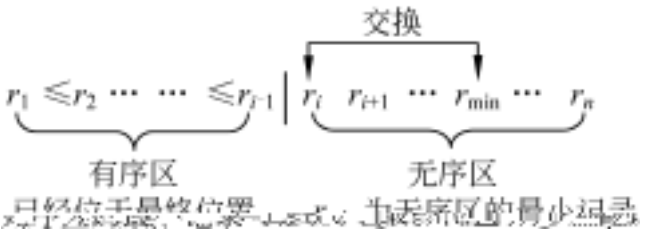


图 3.7 简单选择排序的基本思想图解

C++描述

算法 3.6——选择排序

```
void SelectSort(int r[ ], int n)          // 数组下标从 1 开始
{
    for (i = 1; i< = n - 1; i++ )         // 对 n 个记录进行 n - 1 趟简单选择排序
    {
        index = i;
        for (j= i + 1; j< = n; j ++ )     // 在无序区中找最小记录
            if (r[j] < r[index]) index = j;
        if (index != i) r[i]←→r[index];   // 若最小记录不在最终位置则交换
    }
}
```

该算法的基本语句是内层循环体中的比较语句 r[j] < r[index],其执行次数为:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

因此,对任何输入来说,选择排序算法的时间性能都是 $O(n^2)$。但是,选择排序算法

记录交换次数最多为 $n-1$ 次，因为外层循环每重复执行一轮，交换记录的语句最多只执行一次，这个特[illegible]算法超过了许多其他排序算法。

3.3.2 起[illegible]

起泡排序[illegible]列，在扫描过程中两两比较[illegible]大记录就被“沉”[illegible]扫描将第二大[illegible]个位置，重复上述操作，直到[illegible]个序列就排好序了，如图 3 .8 所示。

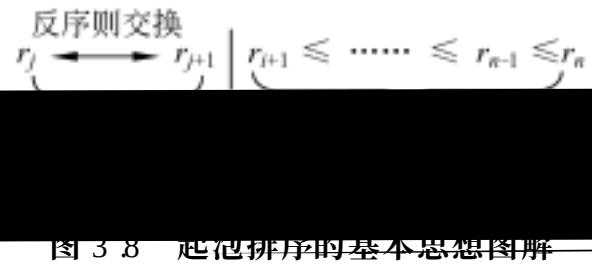


图 3 .8　起泡排序的基本思想图解

```
{
    for (i = 1; i< = n - 1; i++ )
        for (j = 1; j < = n - i; j++ )
```

分析算法 3.8 的时间性能，在最好情况下，待排序记录序列为正序，算法只执行一趟，进行了 $n-1$ 次关键码的比较，不需要移动记录，时间复杂性为 $O(n)$；在最坏情况下，待排序记录序列为反序，每趟排序在无序序列中只有一个最大的记录被交换到最终位置，故算法执行 $n-1$ 趟，第 $i(1 \leq i < n)$ 趟排序执行了 $n-i$ 次关键码的比较和 $n-i$ 次记录的交换，这样，关键码的比较次数为 $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$，记录的移动次数为 $3\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{3n(n-1)}{2}$，因此，时间复杂性为 $O(n^2)$；在平均情况下，其时间复杂性与最坏情况同数量级。

3.4 组合问题中的蛮力法

对于组合问题来说，穷举查找是一种最简单的蛮力方法，它要求生成并依次考察问题域中的每一个元素，从中选出满足问题约束的元素。对组合问题应用蛮力法，除非问题规模很小，否则会由于问题的解空间太大而产生组合爆炸现象。

应用蛮力法解决组合问题常常需要一个算法来生成问题域中的某些(或所有)组合对象。下面首先介绍排列对象的生成算法。

3.4.1 生成排列对象

如何应用蛮力法生成{1, 2, …, n}的所有 $n!$ 个排列呢？假设已经生成了所有 $(n-1)!$ 个排列，可以把 n 插入到 $n-1$ 个元素的每一种排列中的 n 个位置中去，来得到问题规模为 n 的所有排列。按照这种方式生成的所有排列都是独一无二的，并且它们的总数应该是 $n(n-1)! = n!$ (请读者证明)。具体过程如图 3.9 所示。

开始	1
插入 2	12 21
插入 3	123 132 312 213 231 321

图 3.9 生成排列的过程

伪代码

算法 3.9——生成排列对象

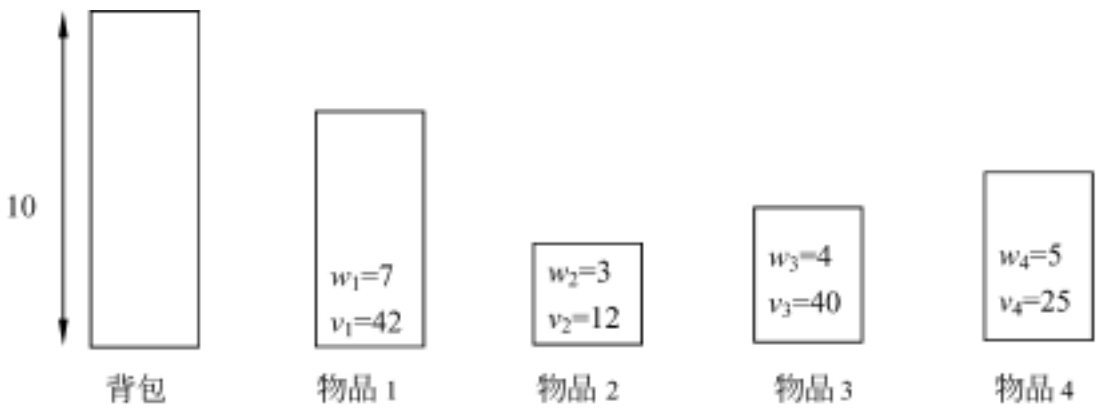
```
1. 生成初始排列{1};
2. for (i=2; i<=n; i++)
       for (j=1; j<=(i-1)!; j++)
           for (k=i; k>=1; k--)
               将 i 插入到第 j 个排列中的第 k 个位置;
```

显然，算法 3.9 的时间复杂性为 $O(n!)$，也就是说和排列对象的数量成正比。

3.4.2 生成子集

生成子集问题的蛮力方法是基于这样一种关系：n 个元素的集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的所有 2^n 个子集和长度为 n 的所有 2^n 个比特串之间的一一对应关系。建立这样对应关系的最简便的方法是为每一个子集指定一个比特串 $b_1 b_2, \cdots, b_n$，如果 a_i 属于该子集，则

$b_i = 1$;如果 a_i 不属于该子集,则 $b_i = 0 (1 \leq i \leq n)$。例如,对于具有 3 个元素的集合,比特串 110 表示子集{a_1, a_2},比特串 1



(a) 4 个物品和一个容量为 10的背包

序号	子集	总重量	总价值	序号	子集	总重量	总价值
1		0	0	9	{2,3}	7	52
2	{1}	7	42	10	{2,4}	8	37
3	{2}	3	12	11	{3,4}	9	65
4	{3}	4	40	12	{1,2,3}	14	不可行
5	{4}	5	25	13	{1,2,4}	15	不可行
6	{1,2}	10	54	14	{1,3,4}	16	不可行
7	{1,3}	11	不可行	15	{2,3,4}	12	不可行
8	{1,4}	12	不可行	16	{1,2,3,4}	19	不可行

(b) 蛮力法求解 0/ 1 背包问题的过程

图 3 .11　0/ 1 背包问题的求解过程示例

应 用 实 例

假设有 n 个建筑物要建在 n 个地点，c_{ij} 是在地点 j 建造建筑物 i 的成本，如何分配建筑任务，使得建设的总成本最少。

图 3 .12 给出了一个任务分配问题的成本矩阵，矩阵元素 $C[i, j]$ 代表将任务 j 分配给人员 i 的成本。

任务分配问题就是在分配成本矩阵中的每一行选取一个元素，这些元素分别属于不同的列，并且元素之和最小。可以用一个 n 元组 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 来描述任务分配问题的一个可能解，其中第 i 个分量 $j_i (1 \leq i \leq n)$ 表示在第 i 行中选择的列号，例如，(2, 3, 1) 表示这样一种分配：任务 2 分配给人员 1、任务 3 分配给人员 2、任务 1 分配给人员 3。因此用蛮力法解决任务分配问题要求生成整数 1～n 的全排列，然后把成本矩阵中的相应元素相加来求得每种分配方案的总成本，最后选出具有最小和的方案。求解过程如图 3 .13 所示。

任务 1 任务 2 任务 3

$$C=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

人员 1
人员 2
人员 3

图 3 .12　任务分配问题的成本矩阵

由图 3 .13 可知，第 3 号分配方案的成本最低。由于任务分配问题需要考虑的排列数量是 $n!$，所以，除了该问题的一些规模非常小的实例，蛮力法几乎是不实用的。

序号	分配方案	总成本
1	1, 2, 3	9 + 4 + 1 = 14
2	1, 3, 2	9 + 3 + 8 = 20
3	2, 1, 3	2 + 6 + 1 = 9
4	2, 3, 1	2 + 3 + 5 = 10
5	3, 1, 2	7 + 6 + 8 = 21
6	3, 2, 1	7 + 4 + 5 = 16

图 3 .13　任务分配问题求解过程

3 .5　图问题中的蛮力法

3.5.1　哈密顿回路问题

在欧拉发现七桥问题之后的一个世纪,著名的爱尔兰数学家哈密顿(William Hamilton,1805—1865 年)提出了著名的周游世界问题。他用正十二面体的 20 个顶点代表 20 个城市,要求从一个城市出发,经过每个城市恰好一次,然后回到出发城市。图 3 .14 所示是一个正十二面体的展开图,按照图中的顶点编号所构成的回路,就是哈密顿回路的一个解。

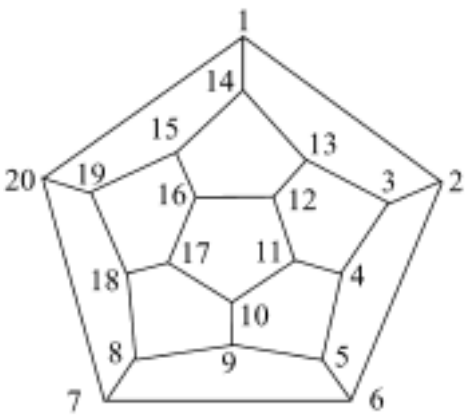


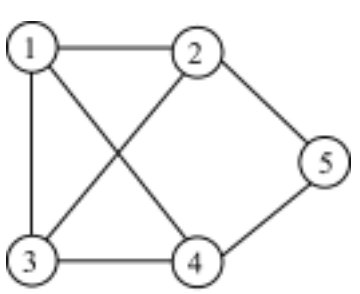
图 3 .14　哈密顿回路问题示意图

目前还没有一个有效的算法来确定一个给定的图中是否含有哈密顿回路。使用蛮力法寻找哈密顿回路的基本思想是对于给定的无向图 $G=(V, E)$,首先生成图中所有顶点的排列对象(v_{i1}, v_{i2}, …, v_{in}),然后依次考察每个排列对象是否满足以下两个条件:

(1) 相邻顶点之间存在边,即(v_{ij}, v_{ij+1}) $\in E(1 \leq j \leq n-1)$;

(2) 最后一个顶点和第一个顶点之间存在边,即(v_{in}, v_{i1}) $\in E$。

满足这两个条件的回路就是哈密顿回路。图 3 .15 是一个蛮力法求解哈密顿回路的例子。



(a) 一个无向图

路径	(v_{ij}, v_{ij+1}) $\in E$	(v_{in}, v_{i1}) $\in E$
12345	1→2→3→4→5(是)	否
12354	1→2→3 5→4(否)	是
12435	1→2 4→3　　5(否)	否
12453	1→2 4→5　　3(否)	是
12534	1→2→5 3→4(否)	是
12543	1→2→5→4→3(是)	是

(b) 哈密顿回路求解过程

图 3 .15　蛮力法求解哈密顿回路的过程示例

显然,蛮力法求解哈密顿回路在最坏情况下需要考察所有顶点的排列对象,其时间复杂性为 $O(n!)$。

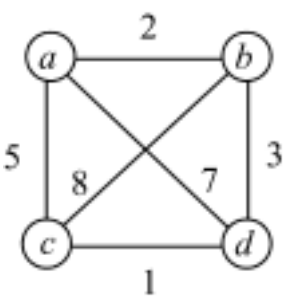
3.5.2 TSP问题

TSP 问题是指旅行家要旅行 n 个城市然后回到出发城市,要求各个城市经历且仅经历一次,并要求所走的路程最短。该问题又称为货郎担问题、邮递员问题、售货员问题,是图问题中最广为人知的问题。由于 TSP 问题有着貌似简单的表述、重要的应用以及和其他 NP 完全问题的重要关系,它在近 100 年的时间里强烈地吸引着计算机科学工作者。

应 用 实 例

某工厂生产各种颜色的汽车,总共有 n 种颜色。随着给汽车所上颜色的转换,生产线上每台机器都需要从一种颜色切换到另一种颜色,其转换开销取决于转换的两种颜色以及它们的顺序。例如,从黄色切换到黑色需要 30 个单位的开销,从黑色切换到黄色需要 80 个单位的开销,从黄色切换到绿色需要 35 个单位的开销等。要解决的问题是找到一个最优生产调度,使得颜色转换的总开销最少。

用蛮力法解决 TSP 问题,可以找出所有可能的旅行路线,从中选取路径长度最短的简单回路,图 3 .16 给出了一个例子。



序号	路径	路径长度	是否最短
1	$a\to b\to c\to d\to a$	18	否
2	$a\to b\to d\to c\to a$	11	是
3	$a\to c\to b\to d\to a$	23	否
4	$a\to c\to d\to b\to a$	11	是
5	$a\to d\to b\to c\to a$	23	否
6	$a\to d\to c\to b\to a$	18	否

图 3 .16 用蛮力法求解 TSP 问题的过程

注意到,在图 3 .16 中有 3 对不同的路径,对每对路径来说,不同的只是路径的方向,因此,可以将这个数量减半,则可能的解有 $(n-1)!/2$ 个。这是一个非常大的数,随着 n 的增长,TSP 问题的可能解也在迅速地增长,例如:

一个 10 城市的 TSP 问题大约有 180 000 个可能解。

一个 20 城市的 TSP 问题大约有 60 000 000 000 000 000 个可能解。

一个 50 城市的 TSP 问题大约有 10^{62} 个可能解,而一个行星上也只有 10^{21} 升水,所以,用蛮力法求解 TSP 问题,只能解决问题规模很小的实例。

3.6　几何问题中的蛮力法

3.6.1　最近对问题

最近对问题要求找出一个包含 n 个点的集合中距离最近的两个点。

应 用 实 例

在空中交通控制问题中，若将飞机作为空间中移动的一个点来处理，则具有最大碰撞危险的两架飞机，就是这个空间中最接近的一对点。这类问题是计算几何中研究的基本问题之一。

简单起见，只考虑二维的情况，并假设所讨论的点是以标准笛卡儿坐标形式(x, y)给出的。因此，在两个点 $P_i = (x_i, y_i)$和 $P_j = (x_j, y_j)$之间的距离是标准的欧几里得距离：

$$d = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

蛮力法求解最近对问题的过程是：分别计算每一对点之间的距离，然后找出距离最小的那一对，为了避免对同一对点计算两次距离，只考虑 $i < j$ 的那些点对(P_i, P_j)。

C++描述

算法 3.11——最近对问题

```
int ClosestPoints(int n, int x[ ], int y[ ], int &index1, int &index2)
{
   minDist = +∞;
   for (i = 1; i < n; i ++ )
      for (j = i + 1; j < = n; j ++ )
      {
         d = (x[i] - x[j])3 (x[i] - x[j]) + (y[i] - y[j])3 (y[i] - y[j]);
         if (d < minDist) {
            minDist = d;
            index1 = i;
            index2 = j;
         }
      }
   return minDist;
}
```

算法 3.11 的基本操作是计算两个点的欧几里得距离。注意到在求欧几里得距离时，避免了求平方根操作，其原因是：如果被开方的数越小，则它的平方根也越小。所以，算法 3.11 的基本操作就是求平方，其执行次数为：

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2 = 2\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) = n(n - 1) = O(n^2)$$

3.6.2 凸包问题

先定义什么是凸集合。

定义 3.1 对于平面上的一个点的有限集合,如果以集合中任意两点 P 和 Q 为端点的线段上的点都属于该集合,则称该集合是凸集合。

显然,任意凸多边形都是凸集合,图 3.17 给出了一些凸集合和非凸集合的例子。

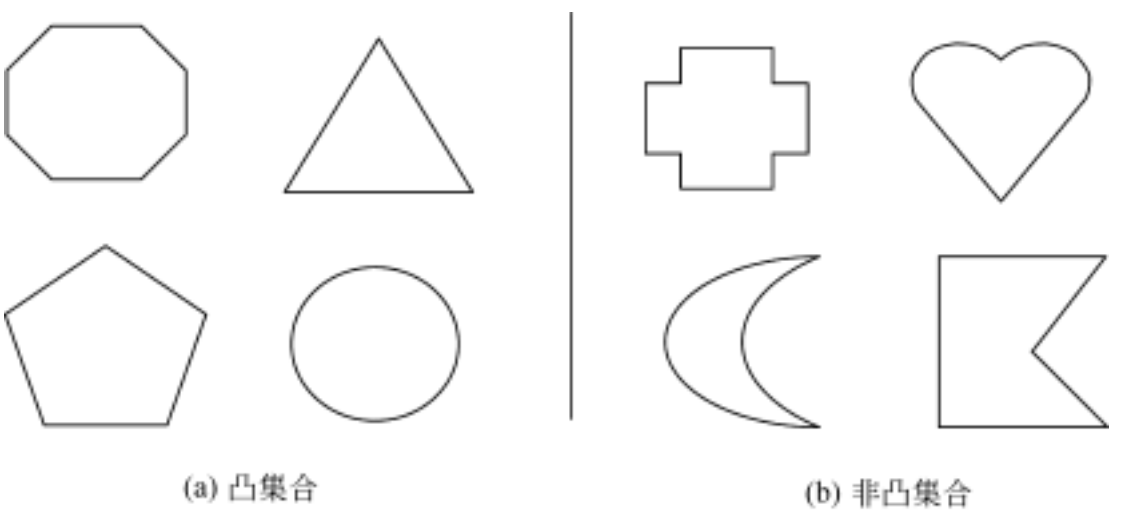


图 3.17 凸集合与非凸集合示例

定义 3.2 一个点集 S 的凸包是包含 S 的最小凸集合,其中,最小是指 S 的凸包一定是所有包含 S 的凸集合的子集。

应 用 实 例

在实际生活中,人脸检测技术有着广阔的应用空间。基于眼睛粗定位是将人脸区域送入分类器进行判别的人脸检测方法,该方法能够正确检测 0°～360°旋转人脸图像,对于非监视环境下的人脸检测具有错误报警低,速度快的特点。

眼睛粗定位方法是一种基于彩色图像的定位方法。首先将皮肤部分提取出来,然后使用凸包填充算法,将大多数皮肤部分填充为凸包的形状,这样,就可以肯定在填充后的这些区域中,必定含有眼睛部分。

对于平面上 n 个点的集合 S,它的凸包就是包含所有这些点(或者在内部,或者在边界上)的最小凸多边形。如果 S 是凸集合,它的凸包一定是它自身;如果 S 是两个点组成的集合,它的凸包是连接这两个点的线段;如果 S 是由 3 个不同线的点组成的集合,它的凸包是以这 3 个点为顶点的三角形;如果三点同线,它的凸包是以距离最远的两个点为端点的线段;对于更多点组成的集合,图 3.18 给出了一个凸包的例子。

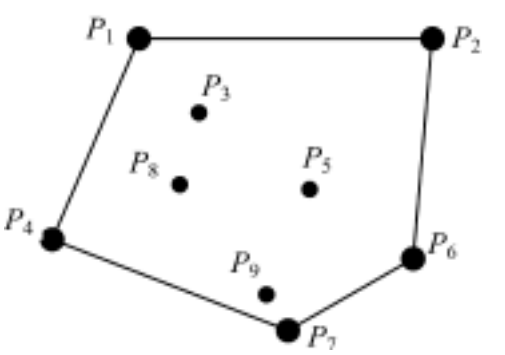


图 3.18 9 个点的集合的凸包

定理 3.1 任意包含 $n>2$ 个点(不共线)的集合 S 的凸包是以 S 中的某些点为顶点的凸多边形;如果

所有点都位于一条直线上,则凸多边形退化为一条线段。

凸包问题是为一个具有 n 个点的集合构造凸多边形的问题。为了解决凸包问题,需要找出凸多边形的顶点,这样的点称为极点。一个凸集合的极点应该具有这样性质:对于任何以凸集合中的点为端点的线段来说,它不是这种线段中的点。例如,一个三角形的极点是它的 3 个顶点,一个圆的极点是它圆周上的点,图 3 .18 所示集合的极点是{ P_1, P_2, P_4, P_6, P_7 }。

如何用蛮力法解决凸包问题呢?因为线段构成了凸包的边界,可以基于这个事实来构造一个简单但缺乏效率的算法:对于一个由 n 个点构成的集合 S 中的两个点 P_i 和 P_j,当且仅当该集合中的其他点都位于穿过这两点的直线的同一边时(假定不存在三点同线的情况),它们的连线是该集合凸包边界的一部分。对每一对点都检验一遍后,满足条件的线段构成了该凸包的边界。

在平面上,穿过两个点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)的直线是由下面的方程定义的:

$$ax + by = c \quad (\text{其中}, a = y_2 - y_1, b = x_1 - x_2, c = x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

这样一条直线把平面分成两个半平面:其中一个半平面中的点都满足 $ax + by > c$,另一个半平面中的点都满足 $ax + by < c$。因此,为了检验这些点是否位于这条直线的同一边,可以简单地把每个点代入方程 $ax + by = c$,检验这些表达式的符号是否相同。

该算法的效率如何呢?所有不同的点共组成了 $n(n-1)/2$ 条边,对每条边都要对其他 $n-2$ 个顶点求出在直线方程 $ax + by = c$ 中的符号,所以,其时间复杂性是 $O(n^3)$。

3 .7　实验项目——串匹配问题

1 .实验题目

给定一个文本,在该文本中查找并定位任意给定字符串。

2 .实验目的

(1) 深刻理解并掌握蛮力法的设计思想;

(2) 提高应用蛮力法设计算法的技能;

(3) 理解这样一个观点:用蛮力法设计的算法,一般来说,经过适度的努力后,都可以对算法的第一个版本进行一定程度的改良,改进其时间性能。

3 .实验要求

(1) 实现 BF 算法;

(2) 实现 BF 算法的改进算法:KMP 算法和 BM 算法;

(3) 对上述 3 个算法进行时间复杂性分析,并设计实验程序验证分析结果。

4 .实现提示

BF 算法、KMP 算法和 BM 算法都是串匹配问题中的经典算法,BF 算法和 KMP 算法请参见本章第 3 2 节。下面介绍 BM 算法。

BM(Boyer - Moore)算法是 Boyer 和 Moore 共同设计的快速串匹配算法。BM 算法与 KMP 算法的主要区别是匹配操作的方向不同。虽然 BM 算法仅把匹配操作的字符比较顺序改为从右向左,但匹配发生失败时,模式 T 右移的计算方法却发生了较大的变化。

为了方便讨论,假设字符表 $\sum = \{a, b, \cdots, y, z\}$,BM 算法的关键是,对给定的模式 $T = "t_1 t_2 \cdots t_m"$,定义一个从字符到正整数的映射:

$$\text{dist}: c \rightarrow \{1, 2, \cdots, m\} \quad [c \in \sum]$$

函数 dist 称为滑动距离函数,它给出了正文中可能出现的任意字符在模式中的位置。函数 dist 定义如下:

$$\text{dist}(c) = \begin{cases} m - j & j = \max\{j \mid t_j = c \text{且} 1 \leq j \leq m-1\} \\ m & \text{若 } c \text{不出现在模式中或 } t_m = c \end{cases}$$

例如,$T = "pattern"$,则 dist(p) = 6, dist(a) = 5, dist(t) = 3, dist(e) = 2, dist(r) = 1, dist(n) = 7,字符表$\sum$中的其他字符 ch 的 dist(ch) = 7。

BM 算法的基本思想是:假设将主串中自位置 i 起往左的一个子串与模式进行从右到左的匹配过程中,若发现不匹配,则下次应从主串的 i + dist(s_i) 位置开始重新进行新一轮的匹配,其效果相当于把模式和主串均向右滑过一段距离 dist(s),即跳过 dist(s_i) 个字符而无需进行比较。

例如,给定主串 $S = "ababcabcacbab"$,模式 $T = "abcac"$,则 dist(a) = 1, dist(b) = 3, dist(c) = 5, BM 算法的匹配过程如图 3 .19 所示。

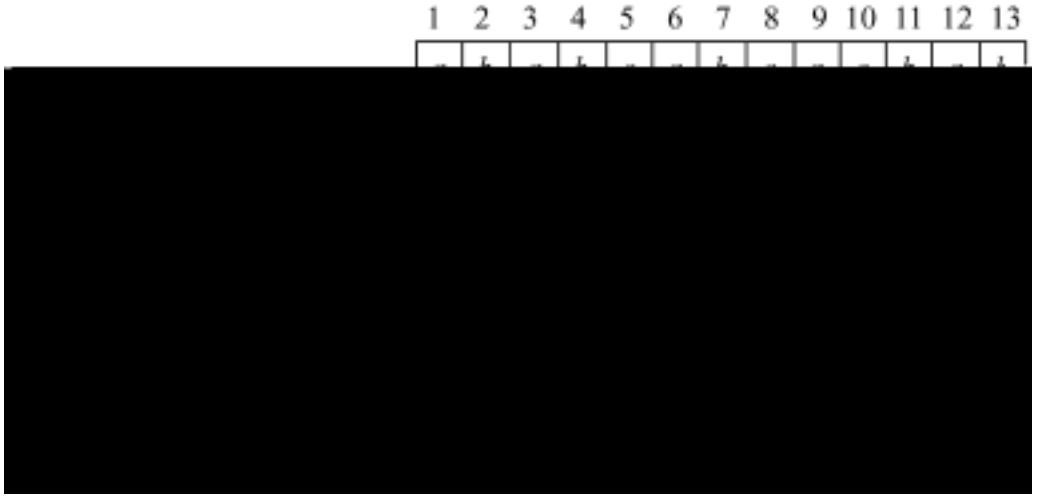


图 3 .19 BM 算法的匹配过程示例

因为在实际应用中,字符表中大部分字符不出现在模式串中,所以,应用 BM 算法可以大大加快串匹配的速度。

C++描述

算法 3 .12——BM 算法

```
int BM(char S[ ], char T[ ], int n, int m)
{ // 主串的长度为 n,模式串的长度为 m,主串和模式的数组下标从 1 开始
    i = m;
    while (i < = n)
    {
       j = m;
       while (j > 0 && S[i] = = T[j])
       {
          j = j - 1;
          i = i - 1;
       }
       if (j = = 0) return i + 1;
       else i = i + dist(S[i]);        // dist 函数请读者自行设计
    }
    return 0;
}
```

阅读材料——蚁群算法

众所周知,蚂蚁是一种群居类动物,常常成群结队地出现于人类的日常生活环境中。科学工作者发现,蚂蚁的个体行为极其简单,群体却表现出极其复杂的行为特征,能够完成复杂的任务。蚂蚁还能够适应环境的变化,表现在蚁群运动路线上突然出现障碍物时,蚂蚁能够很快地重新找到最优路径等。

读者是否听说过“汉家天下,蚂蚁助成”的典故?说在楚汉相争之时,汉高祖刘邦采纳谋士张良用饴糖作为诱饵,使蚂蚁“闻糖”而聚,组成了“霸王自刎乌江”6 个大字,使刚愎自用的楚霸王项羽行军至乌江,看到由蚂蚁“天然”形成的 6 个大字,以为是天意,仰天长叹,拔剑自杀而亡。

蚂蚁之所以能够“闻糖”而聚,是因为蚂蚁释放的化学信息物质——信息素(pheromone)和生物学特性所决定的。

通过观察,人类发现蚂蚁个体之间是通过信息素进行信息传递,从而能相互协作,完成复杂的任务。蚁群之所以表现出复杂有序的行为,与个体之间的信息交流与相互协作起着重要的作用。

蚁群的这种生活习性引起了一些学者的注意。1991 年,意大利学者 M .Dorigo 等基于自然界蚁群觅食原理,首先提出了第一个蚁群算法(ant algorithm)的最早形式——蚂蚁系统(ant system, AS),并应用在 TSP 问题中。AS 算法被提出之后,其应用范围逐渐广泛,算法本身也不断被完善和改进,形成了一系列的蚁群优化(ant colony optimization, ACO)算法。

1 .蚁群算法的原理

蚂蚁在寻找食物或者寻找回巢的路径中,会在它们经过的地方留下一些信息素,而信息素能被同一蚁群中后来的蚂蚁感受到,并作为一种信号影响后到者的行动(具体表现在后到的蚂蚁选择有信息素的路径的可能性,比选择没有信息素的路径的可能性大得多),而后到者留下的信息素会对原有的信息素进行加强,并如此循环下去。这样,经过蚂蚁越多的路径,在后到蚂蚁的选择中被选中的可能性就越大(因为残留的信息素浓度较大)。由于在一定的时间内,越短的路径会被越多的蚂蚁访问,因而积累的信息素也就越多,在下一个时间内被其他的蚂蚁选中的可能性也就越大。这个过程会一直持续到所有的蚂蚁都走最短的那一条路径为止。这种行为表现出一种信息正反馈现象: 某一路径上走过的蚂蚁越多,则后到者选择该路径的概率就越大,因此距离近的食物源会吸引越来越多的蚂蚁,信息素浓度的增长速度就会越快,同时通过这种信息的交流,蚂蚁也就寻找到食物与蚁穴之间的最短路径了。

下面举一个非常简单的生物原型来理解蚁群算法的原理,如图 3 .20 所示。设一群蚂蚁随机地向四面八方去觅食。当某只蚂蚁觅到食物时,一般就沿原路回巢,同时在归途上留下信息素,信息素随着向四周散发其浓度会不断下降。若有两只蚂蚁都找到食物,且沿原路返回,从蚁穴到食物源可沿 ABC,也可沿 AC 两条路径行走。ABC 路径长,AC 路径短。甲乙丙 3 只蚂蚁去搬食物,甲乙先出发,这时选择 ABC、AC 两条路径的几率是一样的,不妨设蚂蚁甲走 AC 这条路径,蚂蚁乙走 ABC 这条路径。每只蚂蚁在其经过的路径上都会释放一定浓度的信息素,而蚂蚁的生物特性会循信息素浓度大的路径前进。这样当甲已经开始返回的时候,乙还在路上,这时由于 AC 路径上已经存在信息素,而 ABC 路径上在食物源这一端还没有信息素,甲仍循 AC 返回。当甲抵达巢穴时,丙出发,丙会循 AC 前进,因为 AC 路径上有两次信息素的遗留物(去一次、回来一次),而在 ABC 路径上只有一次信息素的遗留物,故 AC 路径上的信息素浓度比 ABC 路径上的信息素浓度大,因此,蚂蚁会沿信息素浓度大的路径上前行。这样在有大量个体的情况下,最终所有蚂蚁都会循 AC 前进。于是后面的蚂蚁会渐渐地沿着由 A 到 C 的最短路程到达食物源。

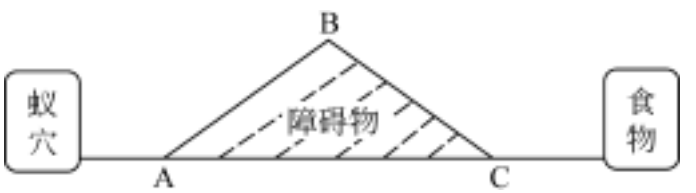


图 3 .20　蚁群觅食过程

受到蚂蚁觅食时的通信机制的启发,由 Dorigo 设计了第一个蚁群优化算法,求解计算机算法学中经典的 TSP 问题。TSP 问题是指旅行家要旅行 *n* 个城市,要求各个城市经历且仅经历一次,然后回到出发城市,并要求所走的路程最短。蚁群优化算法设计虚拟的蚂蚁将摸索不同路线,并留下会随时间逐渐消失的虚拟信息素,每只蚂蚁每次随机选择要走的路径,它们倾向于选择路径比较短、信息素比较浓的路径。根据“信息素较浓的路线更近”的原则,即可选择出最佳路线。由于这个算法利用了正反馈机制,使得较短的路径

能够有较大的机会得到选择,并且由于采用了概率算法,所以它能够不局限于局部最优解。

2 .蚁群算法的模型

蚁群算法的主要根据是信息正反馈原理和某种启发式算法的有机结合,其优化过程主要包括选择、更新以及协调 3 个过程。在选择过程中,信息素浓度越高的路径被选择的概率越大;在更新过程中,路径上的信息素随蚂蚁的经过而增长,同时也随时间的推移而挥发;在协调过程中,蚂蚁之间通过信息素进行信息交流相互协作。在选择和更新过程中,较好的解(较短的路径)通过路径上的信息素得到加强,从而引导下一代蚂蚁向较优解邻域搜索使算法收敛,同时更新过程的信息素挥发又使得算法具有探索能力增加解的多样性,使得算法不易陷入局部最优。

下面以 TSP 问题为例说明蚁群算法的基本模型。

设人工蚂蚁的数量为 m,城市 i 和 j 之间的距离为 $d_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$; t 时刻位于城市 i 的蚂蚁个数为 $b_i(t)$,则 $m = \sum_{i=1}^{n} b_i(t)$; t 时刻在 i 和 j 城市之间残留的信息量为 $\tau_{ij}(t)$,且 $\tau_{ij}(0) = C$(C为常数)。蚂蚁 $k(k = 1, 2, \cdots, m)$ 在运动过程中,根据各条路径上的信息量选择路径,且按概率 ρ_{ij}^{k} 进行选择

$$\rho_{ij}^{k} = \begin{cases} \dfrac{\tau_{ij}^{\alpha}(t)\eta_{ij}^{\beta}(t)}{\sum_{s \in \text{allowed}_k} \tau_{is}^{\alpha}(t)\eta_{s}^{\beta}(t)} & j \in \text{allowed}_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.1}$$

其中: ρ_{ij}^{k} 表示 t 时刻蚂蚁 k 由位置 i 移到位置 j 的概率; allowed_k 表示蚂蚁 k 还未走过的城市,以保证搜索到的路径的合法性; $\eta_{ij} = 1/d_{ij}$ 称为先验知识,表示由位置 i 移到位置 j 的期望程度; α, β 表示残留信息与期望的相对重要程度。当蚂蚁 k 走过 n 个城市后,必须对路径上的信息素进行更新,即:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(t + n) &= \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t) \\ \Delta\tau_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{k} \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中: ρ 表示信息素消失程度, $\Delta\tau_{ij}^{k}$ 表示第 k 只蚂蚁本次循环中留在路径(i, j)上的信息量, $\Delta\tau_{ij}$ 表示所有蚂蚁本次循环中留在路径(i, j)上的信息量。$\Delta\tau_{ij}^{k}$ 定义如下:

$$\Delta\tau_{ij}^{k} = \begin{cases} \dfrac{Q}{L_k} & \text{若第 } k \text{ 只蚂蚁在本次循环中经过路径}(i, j) \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \tag{3.3}$$

其中: L_k 表示第 k 只蚂蚁在本次循环中所走路径的总长度。

由式(3 .1)蚂蚁选择构造路径,由式(3 .2)更新路径上的信息素。这两个步骤重复迭代搜索整个空间,最终搜索到信息素较浓的路径形成较短的最优路径。

下面给出蚁群算法的框架:

```
1．设置参数,初始化蚁群;
2．当未满足终止条件时重复执行
   2.1  将每个人工蚁放到一个城市上;
   2.2  当每个人工蚁未找到可行解时重复执行
        2.2.1  每个人工蚁按转换概率式 3.1 搜索下一个城市;
        2.2.2  用式 3.3 修改相应的信息量;
```

3．蚁群算法的展望

蚁群算法作为一种新的启发式优化算法,虽然刚问世十几年,却引起相关领域研究者的关注。蚁群算法具有较强的鲁棒性、通用性、快速性、全局优化性、并行搜索等优点,蚁群算法从本质上讲是一种模拟进化算法,它的产生与进化算法的发展息息相关。如果与群体搜索策略结合使用,并保证群体中个体之间的信息交换,则蚁群算法可体现进化计算的优越性。

蚁群算法作为群体智能的典型实现案例,通过模拟生物寻优能力来解决实际问题,受到学术界的广泛关注。同时,由于群体智能的研究还处于萌芽阶段,蚁群算法还存在许多问题。

(1) 从数学上对于蚁群算法的正确性与可靠性进行证明比较困难。

(2) 蚁群算法是一个专用算法,一个算法一般只能解决某一类问题,各种算法之间的相似性很差。

(3) 系统的高层次行为是需要通过低层次的昆虫(蚂蚁)之间的简单行为交互而产生的。单个个体控制的简单性并不意味着整个系统设计的简单性,因此我们必须将高层次的复杂行为映射到低层次简单个体的简单行为,而这两者之间存在较大差别。在系统设计时也要保证多个个体简单行为的交互能够表现出我们所希望看到的高层次复杂行为,这是群体智能中一个极困难的问题。

(4) 蚁群算法的搜索时间较长,在算法模型、收敛性及理论依据等方面还有许多工作有待进一步深入研究。

参 考 文 献

[1] 李士勇等．蚁群算法及其应用．哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2004

[2] 吴启迪等著．智能蚁群算法及应用．上海: 上海科技教育出版社, 2004

[3] 吴斌等．一种基于蚁群算法的 TSP 问题分段求解算法．计算机学报,2001,24(12)

习 题 3

1．分析计算 a^n 的蛮力算法的时间性能,要求: 先表示成 n 的函数,再用 n 的二进制位数的函数表示这个时间性能。

2 .设计算法求解 $a^n \bmod m$, 其中 $a > 1$, n 是一个大整数。如何处理 a^n 的巨大数量级？

3 .对于 KMP 算法中求 next 数组问题,设计一个蛮力算法,并分析其时间性能。

4 .假设在文本"*ababcabccabccacbab*"中查找模式"*abccac*",求分别采用 BF 算法和 KMP 算法进行串匹配过程中的字符比较次数。

5 .找词游戏。要求游戏者从一张填满字符的正方形表中,找出包含在一个给定集合中的所有单词。这些词在正方形表中可以横着读、竖着读或者斜着读。为这个游戏设计一个蛮力算法。

6 .为 3 .4 .1 节中生成排列对象算法设计程序上机实现,能对这个算法进行改进吗？

7 .最近对问题也可以以 k 维空间的形式出现, k 维空间中的两个点 $p_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 和 $p_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ 的欧几里得距离定义为: $d(p_1, p_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i)^2}$。对 k 维空间的最近对问题设计蛮力算法,并分析其时间性能。

8 .对于一个平面上 n 个点的集合 S,设计蛮力算法求集合 S 的凸包的一个极点。

9 .考虑线性规划问题的一个小规模的实例: 约束条件(1) $x + y \leq 4$; (2) $x + 3y \leq 6$; (3) $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$,使目标函数 $3x + 5y$ 取极大值,设计蛮力算法求解该线性规划问题。

10 .设计算法判定一个以邻接矩阵表示的连通图是否具有欧拉回路。

11 .设计算法生成在 n 个元素中包含 k 个元素的所有组合对象。

12 .魔方阵是一个古老的智力问题,它要求在一个 $n \times n$ 的矩阵中填入 1 到 n^2 的数字(n 为奇数),使得每一行、每一列、每条对角线的累加和都相等,图 3 .21 所示是一个 3 阶魔方阵。解答下列问题:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

图 3 .21　3 阶魔方阵

(1) 证明: n 阶魔方阵中每一行、每一列、每条对角线的累加和一定等于 $n(n^2 + 1)/2$;

(2) 设计蛮力算法生成 n 阶魔方阵。还有其他更好的算法吗？

13 .在美国有一个连锁店叫 7 - 11 店,因为这个商店以前是早晨 7 点开门,晚上 11 点关门。有一天,一个顾客在这个店挑选了 4 样东西,然后到付款处去交钱。营业员拿起计算器,按了一些键,然后说:“总共是 $7 .11。”这个顾客开了个玩笑说:“哦？难道因为你们的店名叫 7 - 11,所以我就要付 $7 .11 吗？”营业员没有听出这是个玩笑,回答说:“当然不是,我已经把这 4 样东西的价格相乘才得出这个结果的！”顾客一听非常吃惊,“你怎么把它们相乘呢？你应该把它们相加才对！”营业员答道:“噢,对不起,我今天非常头疼,所以把键按错了。”然后,营业员将结果重算了一遍,将这 4 样东西的价格加在一起,然而,令他俩更为吃惊的是总和也是 $7 .11。设计蛮力算法找出这 4 样东西的价格各是多少？

第4章 分 治 法

CHAPTER

分治者,分而治之也。分治法(divide and conquer method)是最著名的算法设计技术,作为解决问题的一般性策略,分治法在政治和军事领域也是克敌制胜的法宝。

用计算机求解问题所需的时间一般都和问题规模有关,问题规模越小,求解问题所需的计算时间也越少,从而也较容易处理。分治法将一个难以直接解决的大问题划分成一些规模较小的子问题,分别求解各个子问题,再合并子问题的解得到原问题的解。

4.1 概 述

4.1.1 分治法的设计思想

分治法的设计思想是将一个难以直接解决的大问题,划分成一些规模较小的子问题,以便各个击破,分而治之。更一般地说,将要求解的原问题划分成 k 个较小规模的子问题,对这 k 个子问题分别求解。如果子问题的规模仍然不够小,则再将每个子问题划分为 k 个规模更小的子问题,如此分解下去,直到问题规模足够小,很容易求出其解为止,再将子问题的解合并为一个更大规模的问题的解,自底向上逐步求出原问题的解。

人们从大量实践中发现,在用分治法设计算法时,最好使子问题的规模大致相等。也就是将一个问题划分成大小相等的 k 个子问题(通常 $k=2$),这种使子问题规模大致相等的做法是出自一种平衡(balancing)子问题的思想,它几乎总是比子问题规模不等的做法要好。另外,在用分治法设计算法时,最好使各子问题之间相互独立,这涉及分治法的效率,如果各子问题不是独立的,则分治法需要重复地求解公共的子问题,此时虽然也可以用分治法,但一般用动态规划法较好。图 4.1 所示是分治法的典型情况。

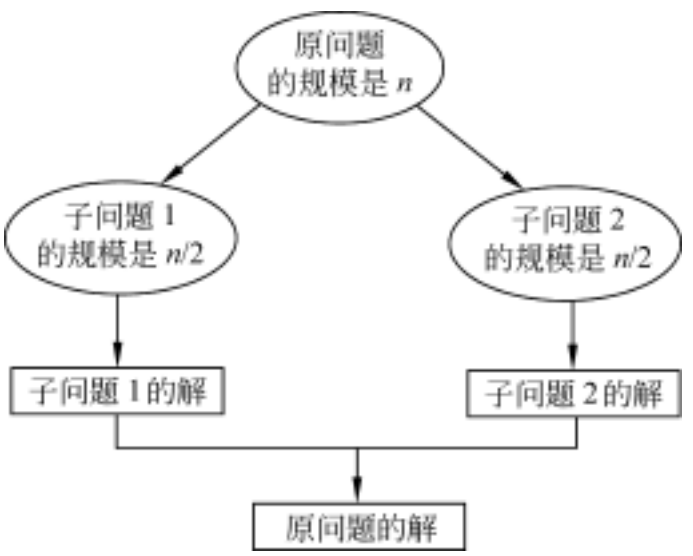


图 4.1 分治法的典型情况

4.1.2 分治法的求解过程

一般来说,分治法的求解过程由以下 3 个阶段组成:

(1) 划分:既然是分治,当然需要把规模为 n 的原问题划分为 k 个规模较小的子问题,并尽量使这 k 个子问题的规模大致相等。

(2) 求解子问题:各子问题的解法与原问题的解法通常是相同的,可以用递归的方法求解各个子问题,有时递归处理也可以用循环来实现。

(3) 合并:把各个子问题的解合并起来,合并的代价因情况不同有很大差异,分治算法的有效性很大程度上依赖于合并的实现。

分治法的一般过程

```
DivideConquer(P)                    // 求解规模为 n 的问题 P
{
   if (P 的规模足够小) 直接求解 P;
   分解为 k 个子问题 P1 , P2 , … , Pk ;
   for (i = 1; i< = k; i ++ )
       yi = DivideConquer(Pi ) ;    // 解各子问题,通常采用递归
   return Merge(y1 , … , yk ) ;     // 将各子问题的解合并为原问题的解
}
```

例如,对于给定的整数 a 和非负整数 n,采用分治法计算 a^n 的值,如果 $n=1$,可以简单地返回 a 的值;如果 $n>1$,可以把该问题分解为两个子问题:计算前$\lfloor n/2 \rfloor$个 a 的乘积和后$\lceil n/2 \rceil$个 a 的乘积,再把这两个乘积相乘得到原问题的解。所以,应用分治技术得到如下计算方法:

$$a^n = \begin{cases} a & \text{如果 } n = 1 \\ a^{\lfloor n/2 \rfloor} \times a^{\lceil n/2 \rceil} & \text{如果 } n > 1 \end{cases}$$

图 4.2 给出了 $a=2$, $n=4$ 的一个问题实例的求解过程,当 $n=1$ 时的子问题求解只是简单地返回 a 的值,而每一次的合并操作只是做一次乘法。

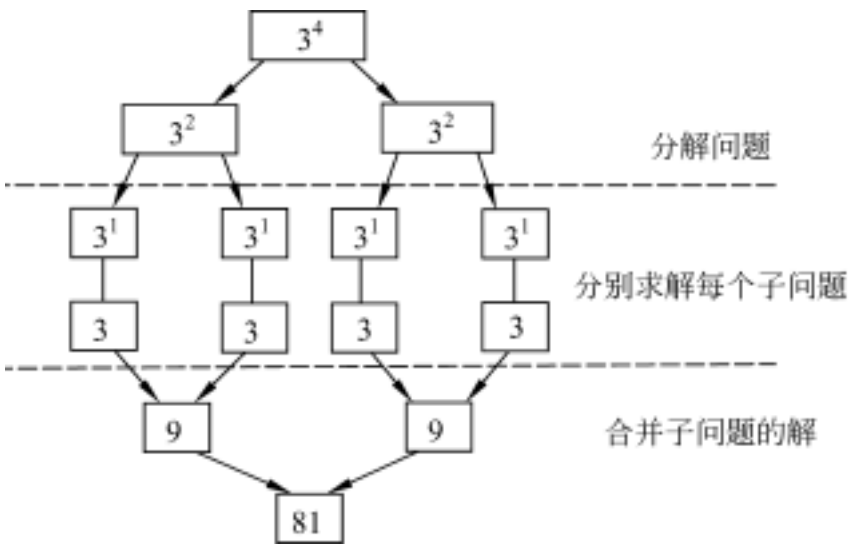


图 4.2　分治法计算 a^n 的求解过程

同应用蛮力法把 1 和 a 相乘 n 次相比，这是一个更高效的算法吗？由于把原问题 a^n 分解为两个子问题 $a^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 和 $a^{\lceil n/2 \rceil}$，这两个子问题需要分别求解，根据 1.2.4 节的通用分治递推式的主定理，其时间复杂性为 $O(n\log_2 n)$，而蛮力法计算 a^n 的值，其时间复杂性为 $O(n)$。因此，不是所有的分治法都比简单的蛮力法更有效，但是，正确使用分治法往往比使用其他算法设计方法的效率更高，事实上，分治法孕育了计算机科学中许多重要且有效的算法。

4.2　递　　归

由分治法产生的子问题往往是原问题的较小模式，这就为使用递归技术提供了方便。在这种情况下，反复应用分治手段，可以使子问题与原问题类型一致而其规模却不断缩小，最终使子问题缩小到很容易直接求解，这自然导致递归过程的产生。分治与递归就像一对孪生兄弟，经常同时应用在算法设计之中，并由此产生许多高效的算法。

4.2.1　递归的定义

递归(recursion)就是子程序(或函数)直接调用自己或通过一系列调用语句间接调用自己，是一种描述问题和解决问题的基本方法。

递归通常用来解决结构自相似的问题。所谓结构自相似，是指构成原问题的子问题与原问题在结构上相似，可以用类似的方法解决。具体地，整个问题的解决，可以分为两部分：第一部分是一些特殊情况，有直接的解法；第二部分与原问题相似，但比原问题的规模小。实际上，递归是把一个不能或不好解决的大问题转化为一个或几个小问题，再把这些小问题进一步分解成更小的小问题，直至每个小问题都可以直接解决。因此，递归有两个基本要素：

(1) 边界条件：确定递归到何时终止，也称为递归出口。

(2) 递归模式：大问题是如何分解为小问题的，也称为递归体。

递归函数只有具备了这两个要素，才能在有限次计算后得出结果。例如，阶乘函数可递归地定义为：

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 1 \quad \cdots\cdots \text{边界条件} \\ n(n-1)! & n > 1 \quad \cdots\cdots \text{递归模式} \end{cases}$$

根据阶乘的递归定义很容易写出求阶乘的递归算法。

C++描述

算法 4.1——求阶乘

```
int Fac(int n)
{
   if (n==1) return 1;          //递归结束
   return n3 Fac(n-1);          //问题规模减1,递归调用
}
```

汉诺塔问题是递归函数的经典应用,它来自一个古老的传说:在世界刚被创建的时候有一座钻石宝塔(塔 A),其上有 64 个金碟。所有碟子按从大到小的次序从塔底堆放至塔顶。紧挨着这座塔有另外两个钻石宝塔(塔 B 和塔 C)。从世界创始之日起,婆罗门的牧师们就一直在试图把塔 A 上的碟子移到塔 C 上去,其间借助于塔 B 的帮助。每次只能移动一个碟子,任何时候都不能把一个碟子放在比它小的碟子上面。当牧师们完成任务时,世界末日也就到了。

对于汉诺塔问题的求解,可以通过以下 3 个步骤实现:

(1) 将塔 A 上的 $n-1$ 个碟子借助塔 C 先移到塔 B 上;

(2) 把塔 A 上剩下的一个碟子移到塔 C 上;

(3) 将 $n-1$ 个碟子从塔 B 借助塔 A 移到塔 C 上。

显然,这是一个递归求解的过程,当 $n=3$ 时汉诺塔问题的求解过程如图 4.3 所示。

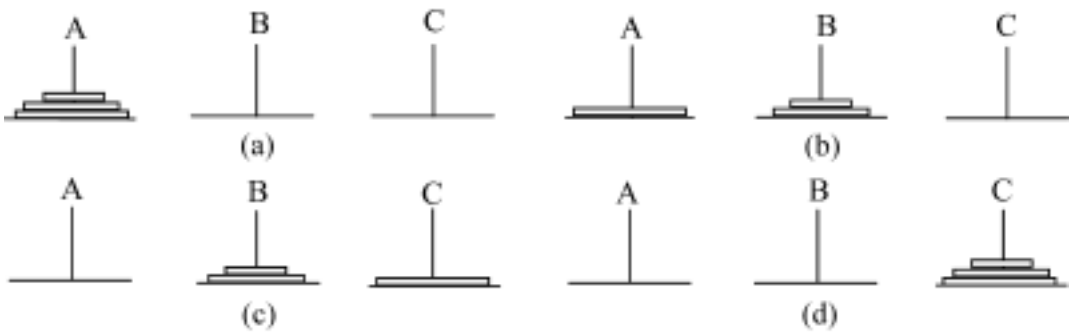


图 4.3 Hanoi 求解示意图

C++描述

算法 4.2——汉诺塔算法

```
1  void Hanoi(int n, char A, char B, char C)   //第一列为语句行号
2  {
3     if (n==1) Move(A, C);    // Move 是一个抽象操作,表示将碟子从 A 移到 C 上
4     else {
5        Hanoi(n-1, A, C, B);
6        Move(A, C);
7        Hanoi(n-1, B, A, C);
8     }
9  }
```

4.2.2　递归函数的运行轨迹

在递归函数中,调用函数和被调用函数是同一个函数,需要注意的是递归函数的调用层次,如果把调用递归函数的主函数称为第 0 层,进入函数后,首次递归调用自身称为第 1 层调用;从第 i 层递归调用自身称为第 $i+1$ 层。反之,退出第 $i+1$ 层调用应该返回第 i 层。采用图示方法描述递归函数的运行轨迹,从中可较直观地了解到各调用层次及其执行情况,具体方法如下:

(1) 写出函数当前调用层执行的各语句,并用有向弧表示语句的执行次序;

(2) 对函数的每个递归调用,写出对应的函数调用,从调用处画一条有向弧指向被调用函数入口,表示调用路线,从被调用函数末尾处画一条有向弧指向调用语句的下面,表示返回路线;

(3) 在返回路线上标出本层调用所得的函数值。

$n=3$ 时汉诺塔算法的运行轨迹如图 4.4 所示,有向弧上的数字表示递归调用和返回的执行顺序。

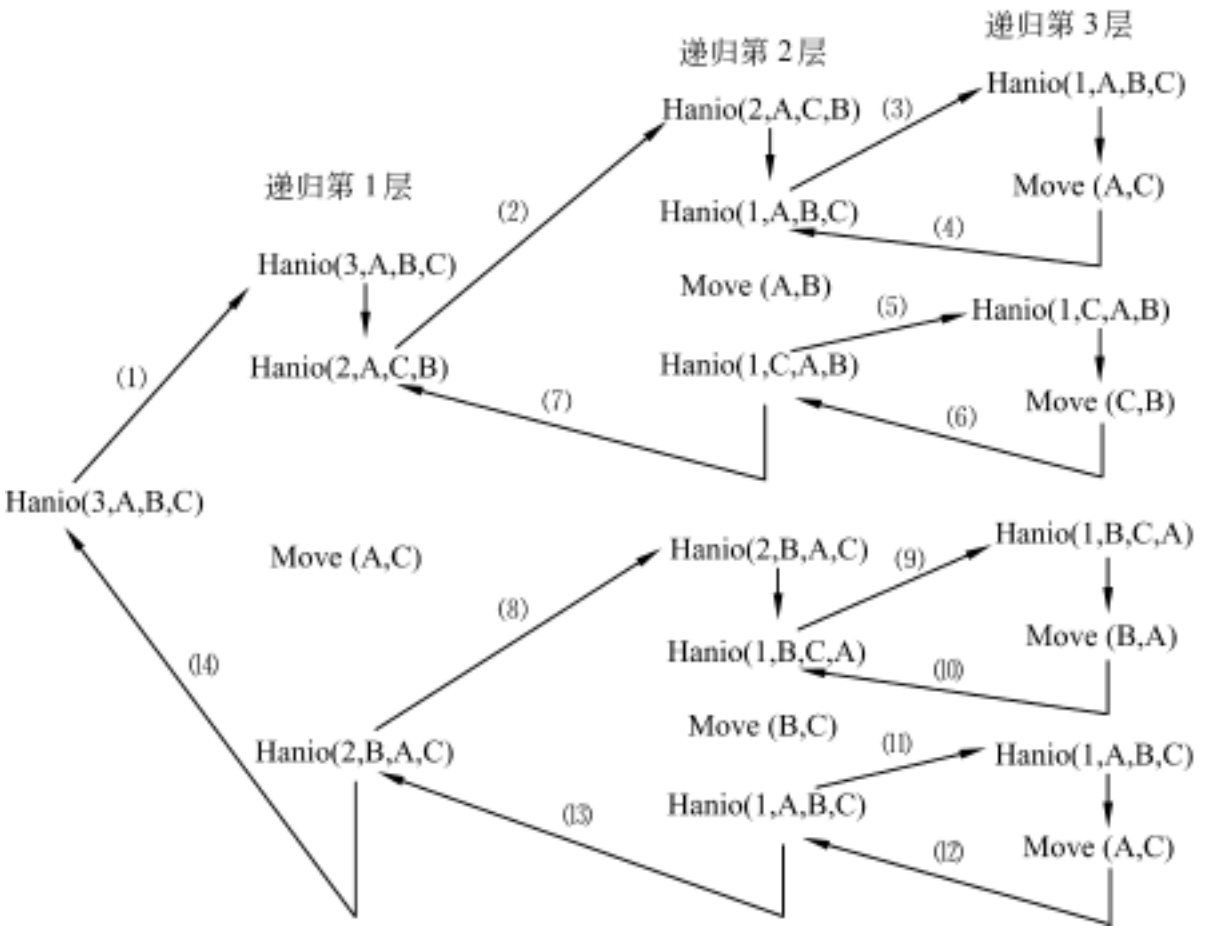


图 4.4　汉诺塔算法的运行轨迹

4.2.3　递归函数的内部执行过程

一个递归函数的调用过程类似于多个函数的嵌套调用,只不过调用函数和被调用函数是同一个函数。为了保证递归函数的正确执行,系统需设立一个工作栈。具体地说,递归调用的内部执行过程如下:

(1) 运行开始时,首先为递归调用建立一个工作栈,其结构包括值参、局部变量和返

回地址;

(2) 每次执行递归调用之前,把递归函数的值参和局部变量的当前值以及调用后的返回地址压栈;

(3) 每次递归调用结束后,将栈顶元素出栈,使相应的值参和局部变量恢复为调用前的值,然后转向返回地址指定的位置继续执行。

上述汉诺塔算法在执行过程中,工作栈的变化如图 4.5 所示,其中栈元素的结构为(返回地址,n 值,A 值,B 值,C 值),返回地址对应算法中语句的行号,分图的序号对应图 4.4 中递归调用和返回的序号。

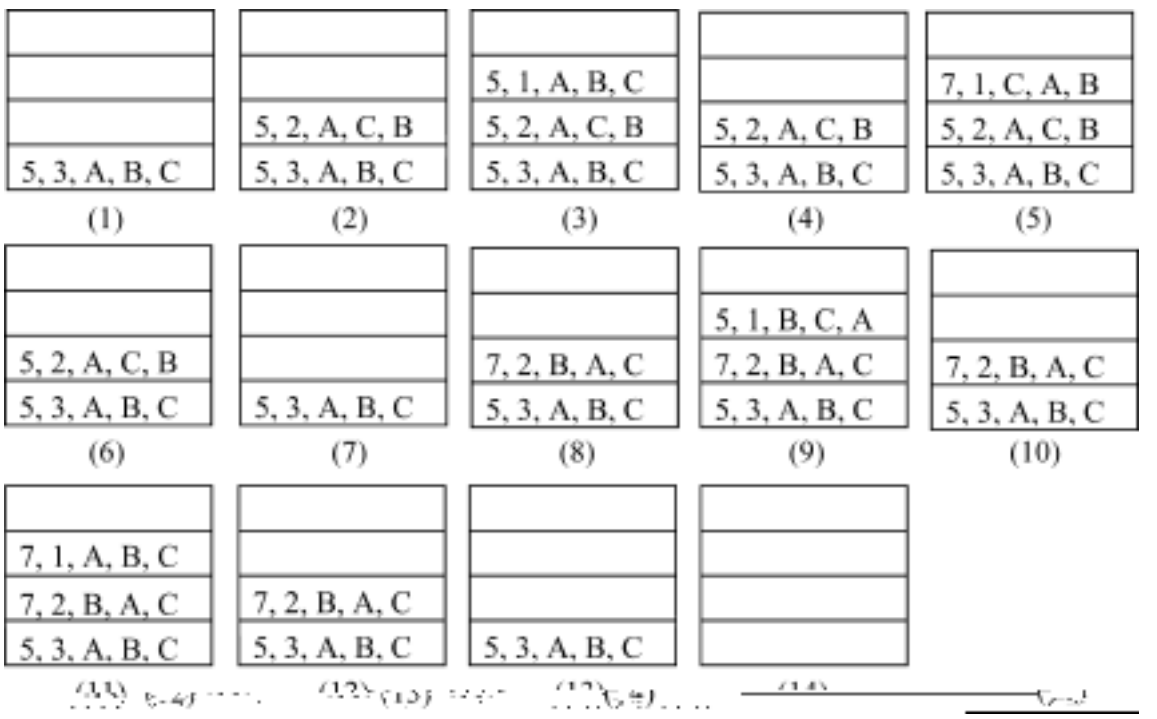


图 4.5 汉诺塔算法执行过程中工作栈变化示意图

递归算法结构清晰,可读性强,而且容易用数学归纳法来证明算法的正确性,因此,它为设计算法和调试程序带来很大方便,是算法设计中的一种强有力的工具。但是,因为递归算法是一种自身调用自身的算法,随着递归深度的增加,工作栈所需要的空间增大,递归调用时的辅助操作增多,因此,递归算法的运行效率较低。

4.3 排序问题中的分治法

4.3.1 归并排序

二路归并排序是成功应用分治法的一个完美的例子,其分治策略是:

(1) 划分:将待排序序列 r_1,r_2,…,r_n 划分为两个长度相等的子序列 r_1,…,$r_{n/2}$ 和 $r_{n/2+1}$,…,r_n。

(2) 求解子问题:分别对这两个子序列进行归并排序,得到两个有序子序列。

(3) 合并:将这两个有序子序列合并成一个有序序列。

归并排序的分治思想如图 4.6 所示。

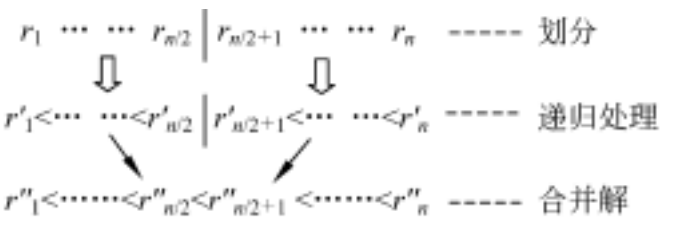


图 4.6 归并排序的分治思想

C++描述

算法 4.3——归并排序

```
void MergeSort(int r[ ], int r1[ ], int s, int t)
{
    if (s = = t) r1[s] = r[s];
      else {
        m = (s + t)/ 2;
        Mergesort(r, r1, s, m);          // 归并排序前半个子序列
        Mergesort(r, r1, m + 1, t);      // 归并排序后半个子序列
        Merge(r1, r, s, m, t);           // 合并两个已排序的子序列
      }
}
```

在两个有序子序列的合并过程中可能会破坏原来的有序序列,所以,合并不能就地进行。设两个相邻的有序子序列为 $r[s] \sim r[m]$和 $r[m+1] \sim r[t]$,将这两个有序子序列合并成一个有序序列 $r1[s] \sim r1[t]$。为此,设 3 个参数 i、j 和 k 分别指向两个待合并的有序子序列和最终有序序列的当前记录,初始时 i、j 分别指向两个有序子序列的第一个记录,即 $i = s$, $j = m + 1$, k 指向存放合并结果的位置,即 $k = s$。然后,比较 i 和 j 所指记录的关键码,取出较小者(假设按升序排序)作为归并结果存入 k 所指位置,直至两个有序子序列之一的所有记录都取完,再将另一个有序子序列的剩余记录顺序送到合并后的有序序列中。合并两个有序子序列的算法如下:

C++描述

算法 4.4——合并有序子序列

```
void Merge(int r[ ], int r1[ ], int s, int m, int t)
{
   i = s; j = m + 1; k = s;
   while (i< = m & & j< = t)
   {
      if (r[i] < = r[j]) r1[k ++ ] = r[i ++ ];      // 取 r[i]和 r[j]中较小者放入 r1[k]
            else r1[k ++ ] = r[j ++ ];
   }
   if (i< = m) while (i < = m)          // 若第一个子序列没处理完,则进行收尾处理
                    r1[k ++ ] = r[i ++ ];
   else while (j < = t)                 // 若第二个子序列没处理完,则进行收尾处理
            r1[k ++ ] = r[j ++ ];
}
```

算法 4.4(即二路归并排序的合并步)的时间复杂性为 $O(n)$,所以,二路归并排序算法存在如下递推式:

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=2\\ 2T(n/2)+n & n>2\end{cases}$$

根据 1.2.4 节的主定理,二路归并排序的时间代价是 $O(n\log_2 n)$。二路归并排序在合并过程中需要与原始记录序列同样数量的存储空间,因此其空间复杂性为 $O(n)$。

4.3.2 快速排序

快速排序也是基于分治技术的重要排序算法,和归并排序不同的是:归并排序是按照记录在序列中的位置对序列进行划分的,而快速排序是按照记录的值对序列进行划分的。快速排序的分治策略是:

(1) 划分:选定一个记录作为轴值,以轴值为基准将整个序列划分为两个子序列 $r_1\cdots r_{i-1}$ 和 $r_{i+1}\cdots r_n$,轴值的位置 i 在划分的过程中确定,并且前一个子序列中记录的值均小于或等于轴值,后一个子序列中记录的值均大于或等于轴值。

(2) 求解子问题:分别对划分后的每一个子序列递归处理。

(3) 合并:由于对子序列 $r_1\cdots r_{i-1}$ 和 $r_{i+1}\cdots r_n$ 的排序是就地进行的,所以合并不需要执行任何操作。

快速排序的分治思想如图 4.7 所示。

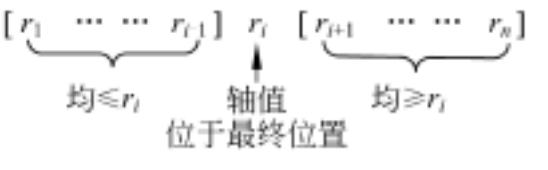


图 4.7 快速排序的分治思想

在快速排序中,轴值的选择应该遵循平衡子问题的原则,使划分后的两个子序列的长度尽量相同——称为划分的对称性,这是决定快速排序算法时间性能的关键。轴值的选择有很多方法,例如可以在划分之前,在序列中随机选出一个记录作为轴值,这样可以使轴值的选择是随机的,从而期望划分是较对称的。

假设以第一个记录作为轴值,对待排序序列进行划分的过程为:

(1) 初始化:取第一个记录作为基准,设置两个参数 i, j 分别用来指示将要与基准记录进行比较的左侧记录位置和右侧记录位置,也就是本次划分的区间。

(2) 右侧扫描过程:将基准记录与 j 指向的记录进行比较,如果 j 指向记录的关键码大,则 j 前移一个记录位置(即 j--)。重复右侧扫描过程,直到右侧的记录小(即反序),若 $i<j$,则将基准记录与 j 指向的记录进行交换。

(3) 左侧扫描过程:将基准记录与 i 指向的记录进行比较,如果 i 指向记录的关键码小,则 i 后移一个记录位置(即 i++)。重复左侧扫描过程,直到左侧的记录大(即反序),若 $i<j$,则将基准记录与 i 指向的记录交换。

(4) 重复(2)、(3)步骤,直到 i 与 j 指向同一位置,即基准记录最终的位置。

图 4.8 所示是一个一次划分的例子(黑体代表轴值)。

图 4.8　一次划分的过程示例

C++描述

算法 4.5——一次划分

```
int Partition(int r[ ], int first, int end)
{
    i = first; j = end;                          // 初始化
    while (i < j)
    {
        while (i < j && r[i] <= r[j]) j--;       // 右侧扫描
        if (i < j) {
            r[i]←→r[j];                          // 将较小记录交换到前面
            i++;
        }
        while (i < j && r[i] <= r[j]) i++;       // 左侧扫描
        if (i < j) {
            r[j]←→r[i];                          // 将较大记录交换到后面
            j--;
        }
    }
    retutn i;                                    // i为轴值记录的最终位置
}
```

以轴值为基准将待排序列划分为两个子序列后,对每一个子序列分别递归进行排序。图 4.9 所示是一个快速排序的完整例子

初始键值序列	23	13	49	6	31	19	28
一次划分之后	[19	13	6]	**23**	[31	49	28]
分别进行快速排序	[6	13]	**19**				
	6	[13]					
		13					
					[28]	**31**	[49]
					28		**49**
最终结果	6	13	19	23	28	31	49

图 4.9 快速排序的过程示例

从图 4.9 可以看出,快速排序对各个子序列的排序是就地进行,不需要合并子问题的解。算法如下:

C++描述

算法 4.6——快速排序

```
void QuickSort(int r[ ], int first, int end)
{
    if (first < end) {
        pivot = Partition(r, first, end);    //问题分解,pivot 是轴值在序列中的位置
        QuickSort(r, first, pivot - 1);      //递归地对左侧子序列进行快速排序
        QuickSort(r, pivot + 1, end);        //递归地对右侧子序列进行快速排序
    }
}
```

在最好的情况下,每次划分对一个记录定位后,该记录的左侧子序列与右侧子序列的长度相同。在具有 n 个记录的序列中,一次划分需要对整个待划分序列扫描一遍,则所需时间为 $O(n)$。设 $T(n)$ 是对 n 个记录的序列进行排序的时间,每次划分后,正好把待划分区间划分为长度相等的两个子序列,则有:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2\ T(n/2) + n \\ &\leq 2(2T(n/4) + n/2) + n = 4T(n/4) + 2n \\ &\leq 4(2T(n/8) + n/4) + 2n = 8T(n/8) + 3n \\ &\cdots\ \cdots \\ &\leq nT(1) + n\log_2 n = O(n\log_2 n) \end{aligned}$$

因此,时间复杂度为 $O(n\log_2 n)$。

在最坏的情况下,待排序记录序列正序或逆序,每次划分只得到一个比上一次划分少一个记录的子序列(另一个子序列为空)。此时,必须经过 $n-1$ 次递归调用才能把所有记录定位,而且第 i 趟划分需要经过 $n-i$ 次关键码的比较才能找到第 i 个记录的基准位置,因此,总的比较次数为:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\frac{1}{2}n(n-1)=O(n^2)$$

记录的移动次数小于等于比较次数。因此,时间复杂性为 $O(n^2)$。

在平均情况下,设基准记录的关键码第 k 小($1\leq k\leq n$),则有:

$$T(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(T(n-k)+T(k-1))+n$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}T(k)+n$$

这是快速排序的平均时间性能,可以用归纳法证明,其数量级也为 $O(n\log_2 n)$。

由于快速排序是递归执行的,需要一个栈来存放每一层递归调用的必要信息,其最大容量应与递归调用的深度一致,例如图 4.9 所示的快速排序执行过程中所需栈的容量为 4。最好情况下要进行 $\log_2 n$ 次递归调用,栈的深度为 $O(\log_2 n)$;最坏情况下,因为要进行 $n-1$ 次递归调用,所以,栈的深度为 $O(n)$;平均情况下,栈的深度为 $O(\log_2 n)$。

4.4　组合问题中的分治法

4.4.1　最大子段和问题

给定由 n 个整数(可能有负整数)组成的序列(a_1, a_2, …, a_n),最大子段和问题要求该序列形如 $\sum_{k=i}^{j}a_k$ 的最大值($1\leq i\leq j\leq n$),当序列中所有整数均为负整数时,其最大子段和为 0。例如,序列(-20, 11, -4, 13, -5, -2)的最大子段和为 $\sum_{k=2}^{4}a_k=20$。

最大子段和问题的分治策略是:

(1) 划分:按照平衡子问题的原则,将序列(a_1, a_2, …, a_n)划分成长度相同的两个子序列(a_1, …, $a_{\lfloor n/2\rfloor}$)和($a_{\lfloor n/2\rfloor+1}$, …, a_n),则会出现以下 3 种情况:

① a_1, …, a_n 的最大子段和 = a_1, …, $a_{\lfloor n/2\rfloor}$ 的最大子段和;

② a_1, …, a_n 的最大子段和 = $a_{\lfloor n/2\rfloor+1}$, …, a_n 的最大子段和;

③ a_1, …, a_n 的最大子段和 = $\sum_{k=i}^{j}a_k$,且 $1\leq i\leq\lfloor n/2\rfloor$,$\lfloor n/2\rfloor+1\leq j\leq n$。

(2) 求解子问题:对于划分阶段的情况①和②可递归求解,情况③需要分别计算 $s1=\max\left\{\sum_{k=i}^{\lfloor n/2\rfloor}a_k\ (1\leq i\leq\lfloor n/2\rfloor)\right\}$,$s2=\max\left\{\sum_{k=\lfloor n/2\rfloor+1}^{j}a_k\ (\lfloor n/2\rfloor+1\leq j\leq n)\right\}$,则 $s1+s2$ 为情况③的最大子段和。

(3) 合并:比较在划分阶段的 3 种情况下的最大子段和,取三者之中的较大者为原问题的解。

最大子段和的分治思想如图 4.10 所示。

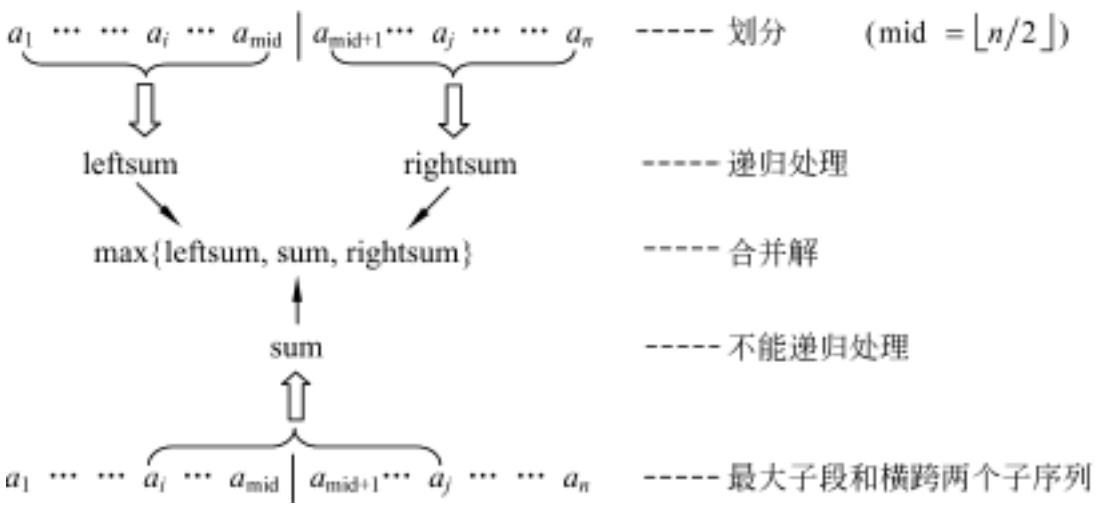


图 4.10 最大子段和的分治思想

C++描述

算法 4.7——最大子段和问题

```
int MaxSum(int a[ ], int left, int right)
{
   sum = 0;
   if (left = = right) {          // 如果序列长度为 1,直接求解
       if (a[left] > 0) sum = a[left];
       else sum = 0;
   }
   else {
      center = (left + right)/ 2;                  // 划分
      leftsum = MaxSum(a, left, center);           // 对应情况①,递归求解
      rightsum = MaxSum(a, center + 1, right);     // 对应情况②,递归求解
      s1 = 0; lefts = 0;                           // 以下对应情况③,先求解 s1
      for (i = center; i > = left; i - - )
      {
          lefts + = a[i];
          if (lefts > s1) s1 = lefts;
      }
      s2 = 0; rights = 0;                          // 再求解 s2
      for (j = center + 1; j < = right; j++ )
      {
          rights + = a[j];
          if (rights > s2) s2 = rights;
      }
      sum = s1 + s2;                               // 计算情况③的最大子段和
      if (sum < leftsum) sum = leftsum;            // 合并,在 sum、leftsum 和 rightsum 中取较大者
      if (sum < rightsum) sum = rightsum;
   }
   return sum;
}
```

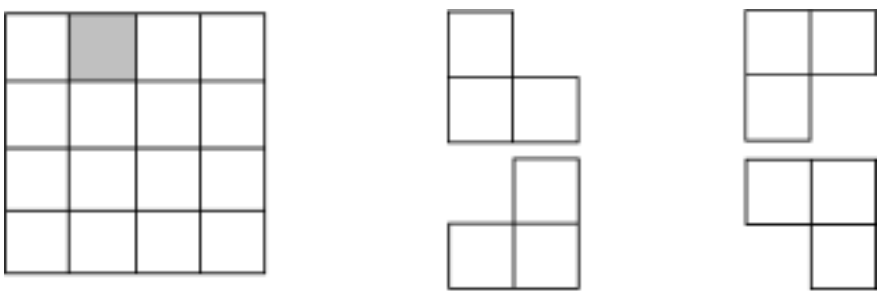
分析算法 4 .7 的时间性能，对应划分得到的情况①和②，需要分别递归求解，对应情况③，两个并列 for 循环的时间复杂性是 $O(n)$，所以，存在如下递推式：

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(n/2) + n & n > 1 \end{cases}$$

根据 1 2 .4 节主定理，算法 4 .7 的时间复杂性为 $O(n\log_2 n)$。

4.4.2 棋盘覆盖问题

在一个 $2^k \times 2^k$ ($k \geq 0$)个方格组成的棋盘中，恰有一个方格与其他方格不同，称该方格为特殊方格。显然，特殊方格在棋盘中出现的位置有 4^k 种情形，因而有 4^k 种不同的棋盘，图 4 .11(a)所示是 $k = 2$ 时 16 种棋盘中的一个。棋盘覆盖问题要求用图 4 .11(b)所示的 4 种不同形状的 L 型骨牌覆盖给定棋盘上除特殊方格以外的所有方格，且任何两个 L 型骨牌不得重叠覆盖。



(a) k=2时的一种棋盘　　(b) 4种不同形状的L型骨牌

图 4 .11　棋盘覆盖问题示例

如何应用分治法求解棋盘覆盖问题呢？分治的技巧在于如何划分棋盘，使划分后的子棋盘的大小相同，并且每个子棋盘均包含一个特殊方格，从而将原问题分解为规模较小的棋盘覆盖问题。$k > 0$ 时，可将 $2^k \times 2^k$ 的棋盘划分为 4 个 $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ 的子棋盘，如图 4 12(a)所示。这样划分后，由于原棋盘只有一个特殊方格，所以，这 4 个子棋盘中只有一个子棋盘包含该特殊方格，其余 3 个子棋盘中没有特殊方格。为了将这 3 个没有特殊方格的子棋盘转化为特殊棋盘，以便采用递归方法求解，可以用一个 L 型骨牌覆盖这 3 个较小棋盘的会合处，如图 4 .12(b)所示，从而将原问题转化为 4 个较小规模的棋盘覆盖问题。递归地使用这种划分策略，直至将棋盘分割为 1×1 的子棋盘。

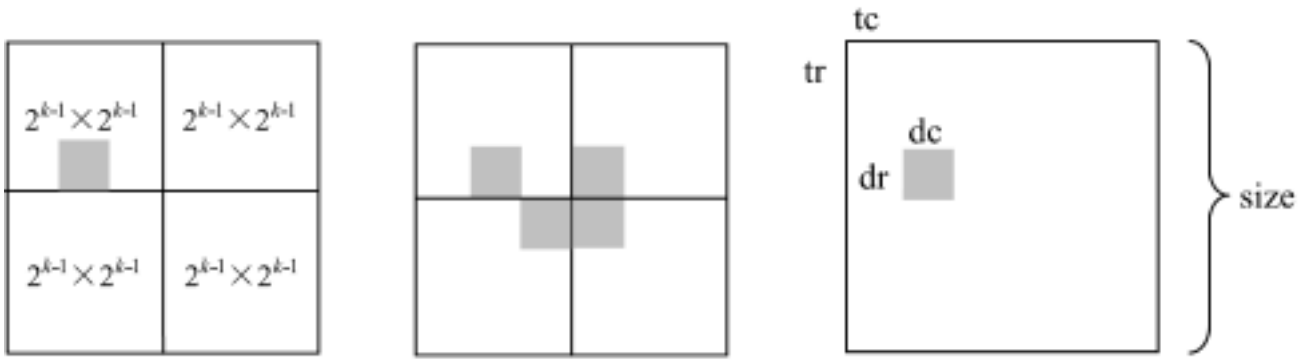
下面讨论棋盘覆盖问题中数据结构的设计。

(1) 棋盘：可以用一个二维数组 board[size][size]表示一个棋盘，其中，size = 2^k。为了在递归处理的过程中使用同一个棋盘，将数组 board 设为全局变量。

(2) 子棋盘：整个棋盘用二维数组 board[size][size]表示，其中的子棋盘由棋盘左上角的下标 tr、tc 和棋盘大小 s 表示。

(3) 特殊方格：用 board[dr][dc]表示特殊方格，dr 和 dc 是该特殊方格在二维数组 board 中的下标。

(4) L 型骨牌：一个 $2^k \times 2^k$ 的棋盘中有一个特殊方格，所以，用到 L 型骨牌的个数为 $(4^k - 1)/3$，将所有 L 型骨牌从 1 开始连续编号，用一个全局变量 t 表示。



(a) 棋盘分割　(b) 构造相同子问题　(c) 棋盘及特殊方格的表示

图 4.12　棋盘分割示意图

C++描述

算法 4.8——棋盘覆盖

```
void ChessBoard(int tr, int tc, int dr, int dc, int size)
// tr 和 tc 是棋盘左上角的下标,dr 和 dc 是特殊方格的下标
// size 是棋盘的大小,t 已初始化为 0
{
    if (size == 1) return;    // 棋盘只有一个方格且是特殊方格
    t++;    // L 型骨牌号
    s = size/2;    // 划分棋盘
    // 覆盖左上角子棋盘
    if (dr < tr + s && dc < tc + s)  // 特殊方格在左上角子棋盘中
      ChessBoard(tr, tc, dr, dc, s);        // 递归处理子棋盘
    else{    // 用 t 号 L 型骨牌覆盖右下角,再递归处理子棋盘
      board[tr + s - 1][tc + s - 1] = t;
      ChessBoard(tr, tc, tr+s-1, tc+s-1, s); }
    // 覆盖右上角子棋盘
    if (dr < tr + s && dc >= tc + s)   // 特殊方格在右上角子棋盘中
      ChessBoard(tr, tc+s, dr, dc, s);        // 递归处理子棋盘
    else {    // 用 t 号 L 型骨牌覆盖左下角,再递归处理子棋盘
      board[tr + s - 1][tc + s] = t;
      ChessBoard(tr, tc+s, tr+s-1, tc+s, s); }
    // 覆盖左下角子棋盘
    if (dr >= tr + s && dc < tc + s)  // 特殊方格在左下角子棋盘中
      ChessBoard(tr+s, tc, dr, dc, s);        // 递归处理子棋盘
    else {    // 用 t 号 L 型骨牌覆盖右上角,再递归处理子棋盘
      board[tr + s][tc + s -
```

设 $T(k)$是算法 4.8 覆盖一个 $2^k \times 2^k$棋盘所需时间，从算法的划分策略可知，$T(k)$满足如下递推式：

$$T(k) = \begin{cases} O(1) & k = 0 \\ 4T(k-1) + O(1) & k > 0 \end{cases}$$

解此递推式可得 $T(k) = O(4^k)$。由于覆盖一个 $2^k \times 2^k$棋盘所需的骨牌个数为$(4^k - 1)/3$，所以，算法 4.8 是一个在渐进意义下的最优算法。

4.4.3 循环赛日程安排问题

设有 $n = 2^k$个选手要进行网球循环赛，要求设计一个满足以下要求的比赛日程表：

(1) 每个选手必须与其他 $n-1$ 个选手各赛一次；

(2) 每个选手一天只能赛一次。

按此要求，可将比赛日程表设计成一个 n行 $n-1$ 列的二维表，其中，第 i行第 j 列表示和第 i 个选手在第 j 天比赛的选手。

按照分治的策略，可将所有参赛的选手分为两部分，$n = 2^k$个选手的比赛日程表就可以通过为 $n/2 = 2^{k-1}$个选手设计的比赛日程表来决定。递归地执行这种分割，直到只剩下两个选手时，比赛日程表的制定就变得很简单：只要让这两个选手进行比赛就可以了。

图 4.13 列出 8 个选手的比赛日程表的求解过程，显然，这个求解过程是自底向上的迭代过程，其中左上角和左下角分别为选手 1 至选手 4 以及选手 5 至选手 8 前 3 天的比赛日程，据此，将左上角部分的所有数字按其对应位置抄到右下角，将左下角的所有数字按其对应位置抄到右上角，这样，就分别安排好了选手 1 至选手 4 以及选手 5 至选手 8 在后 4 天的比赛日程，如图 4.13(c)所示。具有多个选手的情况可以以此类推。

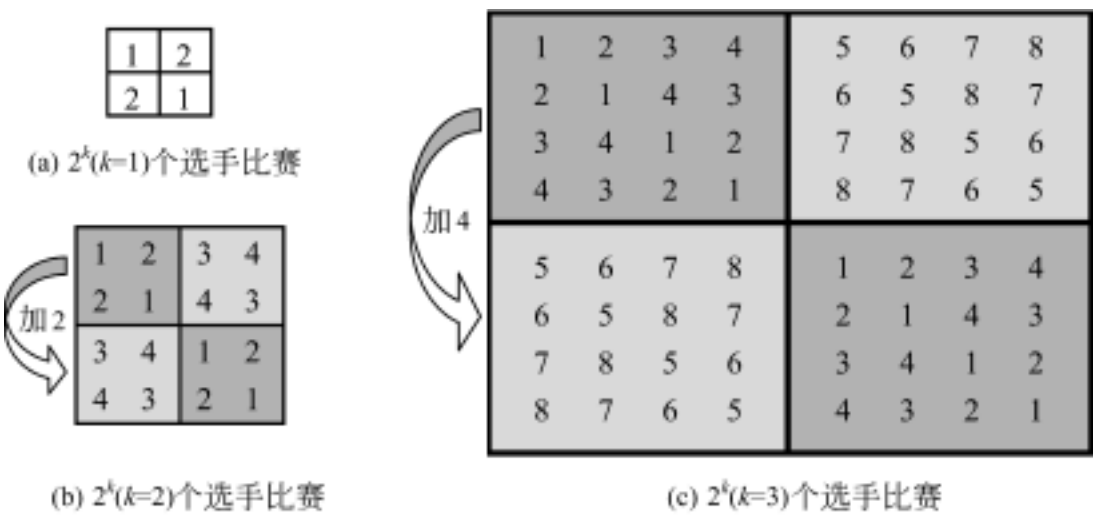


图 4.13　8 个选手的比赛日程表求解过程

这种解法是把求解 2^k个选手比赛日程问题划分成依次求解 $2^1, 2^2, \cdots, 2^k$ 个选手的比赛日程问题，换言之，2^k个选手的比赛日程是在 2^{k-1} 个选手的比赛日程的基础上通过迭代的方法求得的。在每次迭代中，将问题划分为 4 部分：

(1) 左上角：左上角为 2^{k-1} 个选手在前半程的比赛日程。

(2) 左下角：左下角为另 2^{k-1} 个选手在前半程的比赛日程，由左上角加 2^{k-1}得到，例如 2^2 个选手比赛，左下角由左上角直接加 2 得到，2^3 个选手比赛，左下角由左上角直接加

4 得到,如图 4 .13 所示。

(3) 右上角: 将左下角直接抄到右上角得到另 2^{k-1} 个选手在后半程的比赛日程。

(4) 右下角: 将左上角直接抄到右下角得到 2^{k-1} 个选手在后半程的比赛日程。

算法设计的关键在于寻找这 4 部分元素之间的对应关系,具体算法如下:

C++描述

算法 4 .9——循环赛日程表

```
void GameTable(int k, int a[ ][ ])
{  // n = 2^k (k≥1)个选手参加比赛,二维数组 a 表示日程安排,数组下标从 1 开始
   n = 2; // k = 0,两个选手比赛日程可直接求得
   // 求解两个选手比赛日程,得到左上角元素
   a[1][1] = 1; a[1][2] = 2;
   a[2][1] = 2; a[2][2] = 1;
   for (t = 1; t < k; t ++ )                    // 迭代处理,依次处理 2^2, …, 2^k 个选手比赛日程
   {
      temp = n; n = n3 2;
      // 填左下角元素
      for (i = temp + 1; i < = n; i ++ )
         for (j = 1; j < = temp; j ++ )
            a[i][j] = a[i - temp][j] + temp;// 左下角元素和左上角元素的对应关系
      // 将左下角元素抄到右上角
      for (i = 1; i < = temp; i++ )
         for (j = temp + 1; j < = n; j ++ )
            a[i][j] = a[i + temp][(j + temp)% n];
      // 将左上角元素抄到右下角
      for (i = temp + 1; i < = n; i ++ )
         for (j = temp + 1; j < = n; j ++ )
            a[i][j] = a[i - temp][j - temp];
   }
}
```

分析算法 4 .9 的时间性能,迭代处理的循环体内部有 3 个循环语句,每个循环语句都是一个嵌套的 for 循环,且它们的执行次数相同,基本语句是最内层循环体的赋值语句,即填写比赛日程表中的元素。基本语句的执行次数是:

$$T(n) = 3\sum_{t=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{2^t}\sum_{j=1}^{2^t} 1 = 3\sum_{t=1}^{k-1} 4^t = O(4^k)$$

所以,算法 4 .9 的时间复杂性为 $O(4^k)$。

4 .5 几何问题中的分治法

在 2 .6 节中,我们用蛮力法解决了两个经典的计算几何问题: 最近对问题和凸包问题,其时间性能分别是 $O(n^2)$ 和 $O(n^3)$,对于这两个问题,本节我们讨论两个更复杂,同时

效率更好的算法,它们都是基于分治技术的。

4.5.1　最近对问题

设 $p_1=(x_1, y_1)$, $p_2=(x_2, y_2)$, …, $p_n=(x_n, y_n)$是平面上 n 个点构成的集合 S,最近对问题就是找出集合 S 中距离最近的点对。严格地讲,最接近点对可能多于一对,简单起见,只找出其中的一对作为问题的解。

用分治法解决最近对问题,很自然的想法就是将集合 S 分成两个子集 S_1 和 S_2,每个子集中有 $n/2$ 个点。然后在每个子集中递归地求其最接近的点对,在求出每个子集的最接近点对后,在合并步中,如果集合 S 中最接近的两个点都在子集 S_1 或 S_2 中,则问题很容易解决,如果这两个点分别在 S_1 和 S_2 中,问题就比较复杂了。

为了使问题易于理解,先考虑一维的情形,此时,S 中的点退化为 x 轴上的 n 个点 x_1, x_2, …, x_n。用 x 轴上的某个点 m 将 S 划分为两个集合 S_1 和 S_2,并且 S_1 和 S_2 含有点的个数相同。递归地在 S_1 和 S_2 上求出最接近点对(p_1, p_2)和(q_1, q_2),如果集合 S 中的最接近点对都在子集 S_1 或 S_2 中,则 $d=\min\{(p_1, p_2), (q_1, q_2)\}$即为所求,如果集合 S 中的最接近点对分别在 S_1 和 S_2 中,则一定是(p_3, q_3),其中,p_3 是子集 S_1 中的最大值,q_3 是子集 S_2 中的最小值,如图 4.14 所示。

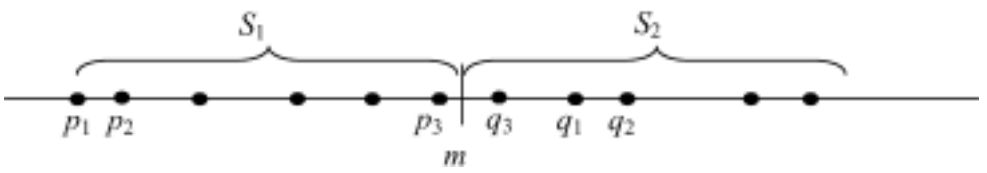


图 4.14　分治法应用于最近对的一维情况

按这种分治策略求解最近对问题的算法效率取决于划分点 m 的选取,一个基本的要求是要遵循平衡子问题的原则。如果选取 $m=(\max\{S\}+\min\{S\})/2$,则有可能因集合 S 中点分布的不均匀而造成子集 S_1 和 S_2 的不平衡,如果用 S 中各点坐标的中位数(即 S 的中值)作为分割点,则会得到一个平衡的分割点 m,使得子集 S_1 和 S_2 中有个数大致相同的点。

下面考虑二维的情形,此时 S 中的点为平面上的点,其坐标为(x_i, y_i),且 $1\leq i\leq n$。为了将平面上的点集 S 分割为点的个数大致相同的两个子集 S_1 和 S_2,选取垂直线 $x=m$ 来作为分割线,其中,m 为 S 中各点 x 坐标的中位数。由此将 S 分割为 $S_1=\{p\in S \mid x_p\leq m\}$和 $S_2=\{q\in S \mid x_q>m\}$。递归地在 S_1 和 S_2 上求解最近对问题,分别得到 S_1 中的最近距离 d_1 和 S_2 中的最近距离 d_2,令 $d=\min(d_1, d_2)$,若 S 的最近对(p, q)之间的距离小于 d,则 p 和 q 必分属于 S_1 和 S_2。不妨设 $p\in S_1$, $q\in S_2$,则 p 和 q 距直线 $x=m$ 的距离均小于 d,所以,可以将求解限制在以 $x=m$ 为中心、宽度为 $2d$ 的垂直带 $P1$ 和 $P2$ 中,垂直带之外的任何点对之间的距离都一定大于 d,如图 4.15 所示。

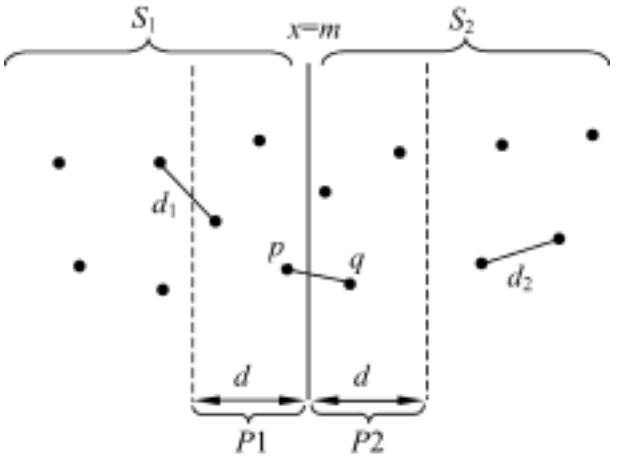
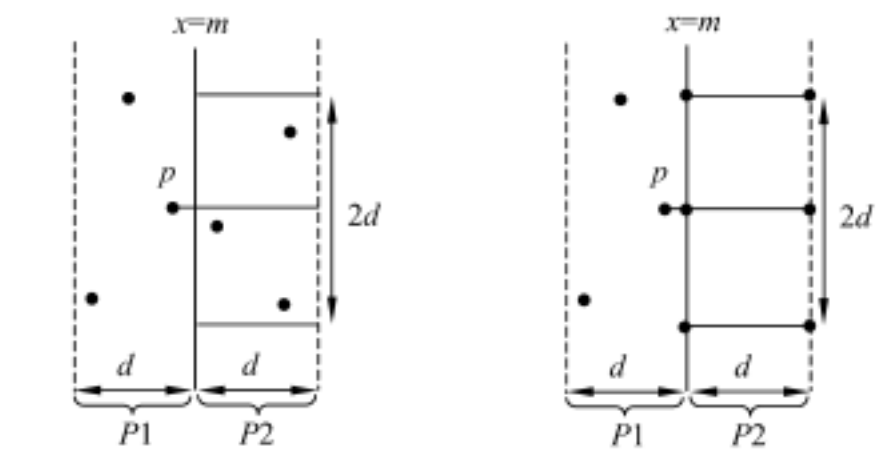


图 4.15　最近对问题的分治思想

对于点 $p\in P1$,需要考察 $P2$ 中的各个点和

点 p 之间的距离是否小于 d,显然,$P2$ 中这样点的 y 轴坐标一定位于区间[$y-d$, $y+d$]之间,而且,这样的点不会超过 6 个,因为 $P2$ 中点的相互之间的距离至少为 d,如图 4.16 所示。所以,可以将 $P1$ 和 $P2$ 中的点按照 y 轴的坐标值升序排列,顺序地处理 $P1$ 中的点 p,同时在 $P2$ 中取出 6 个候选点,计算它们和点 p 之间的距离。



(a) 包含点 q 的 $d\times 2d$ 的矩形区域　(b) 最坏情况下需要检查的 6 个点

图 4.16　对于点 $p\in P1$,在 $P2$ 中需要考察的点

应用分治法求解含有 n 个点的最近对问题,其时间复杂性可由下面的递推式表示:

$$T(n) = 2T(n/2) + f(n)$$

由以上分析,合并子问题的解的时间 $f(n)=O(1)$,根据 1.2.4 节的通用分治递推式的主定理,可得 $T(n)=O(n\log_2 n)$。

4.5.2 凸包问题

用分治法解决凸包问题的方法和快速排序类似,这个方法也称为快包。

设 $p_1=(x_1, y_1)$, $p_2=(x_2, y_2)$, …, $p_n=(x_n, y_n)$是平面上 n 个点构成的集合 S,并且这些点按照 x 轴坐标升序排列。几何学中有这样一个明显的事实:最左边的点 p_1 和最右边的点 p_n 一定是该集合的凸包顶点(即极点),如图 4.17 所示。设 p_1p_n 是从 p_1 到 p_n 的直线,这条直线把集合 S 分成两个子集:S_1 是位于直线左侧和直线上的点构成的集合,S_2 是位于直线右侧和直线上的点构成的集合(设 p_1p_2 是从 p_1 到 p_2 的直线,如果 $p_1p_2p_3$ 构成一个逆时针的回路,则称点 p_3 位于直线 p_1p_2 的左侧,如构成顺时针的回路,则称点 p_3 位于直线 p_1p_2 的右侧)。S_1 的凸包由下列线段构成:以 p_1 和 p_n 为端点的线段构成的下边界,以及由多条线段构成的上边界,这条上边界称为上包。类似地,S_2 中的多条线段构成的下边界称为下包。整个集合 S 的凸包是由上包和下包构成的。

快包的思想是:首先找到 S_1 中的顶点 p_{max},它是距离直线 p_1p_n 最远的顶点,则三角形 $p_{max}p_1p_n$ 的面积最大,如图 4.18 所示。S_1 中所有在直线 $p_{max}p_1$ 左侧的点构成集合 $S_{1,1}$,S_1 中所有在直线 $p_{max}p_n$ 右侧的点构成集合 $S_{1,2}$,包含在三角形 $p_{max}p_1p_n$ 之中的点可以不考虑了。递归地继续构造集合 $S_{1,1}$ 的上包和集合 $S_{1,2}$ 的上包,然后将求解过程中得到的所有最远距离的点连接起来,就可以得到集合 S_1 的上包。同理,可求得集合 S_1 的下包。

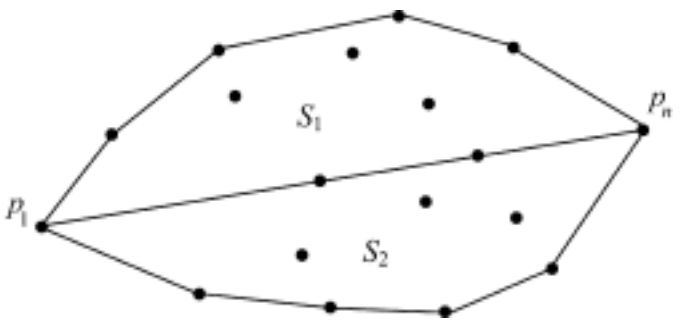


图 4 .17　点集合 S 的上包和下包

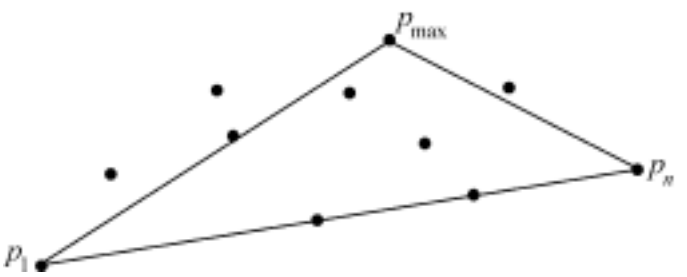


图 4 .18　快包方法求点集 S 的上包

接下来的问题是如何判断一个点是否在给定直线的左侧(或右侧)？几何学中有这样一个定理：如果 $p_1 = (x_1, y_1)$，$p_2 = (x_2, y_2)$，$p_3 = (x_3, y_3)$是平面上的任意 3 个点，则三角形 $p_1\ p_2\ p_3$ 的面积等于下面行列式的绝对值的一半：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3$$

当且仅当点 $p_3 = (x_3, y_3)$位于直线 $p_1\ p_2$ 的左侧时，该式的符号为正。应用这个定理，可以在一个常数时间内检查一个点是否位于两个点确定的直线的左侧，并且可以求得这个点到该直线的距离。

快包的效率与快速排序的效率相同，平均情况下是 $O(n\log_2 n)$，最坏情况下是 $O(n^2)$。

4 .6　实验项目——最近对问题

1 . 实验题目

设 $p_1 = (x_1, y_1)$，$p_2 = (x_2, y_2)$，…，$p_n = (x_n, y_n)$是平面上 n 个点构成的集合 S，设计算法找出集合 S 中距离最近的点对。

2 . 实验目的

(1) 进一步掌握递归算法的设计思想以及递归程序的调试技术；
(2) 理解这样一个观点：分治与递归经常同时应用在算法设计之中。

3 . 实验要求

(1) 分别用蛮力法和分治法求解最近对问题；
(2) 分析算法的时间性能，设计实验程序验证分析结论。

4 . 实现提示

蛮力法实现最近对问题的算法请参考 3 .6 .1 节，下面给出基于 4 .5 .1 节讨论的分治法求解最近对问题的算法。

伪代码

算法 4 .10——最近对问题

```
int ClosestPoints(S)        // S为平面上 n 个点的坐标组成的集合
{
   1 .if (n < 2) return ∞;
   2 . m = S 中各点 x 坐标的中位数;
   3 . 构造 S1 和 S2,使得 S1 中点的 x 坐标小于 m,S2 中点的 x 坐标大于 m;
   4 . d1 = ClosestPoints(S1); d2 = ClosestPoints(S2);
   5 . d = min(d1, d2);
   6 . 构造 P1 和 P2,使得 P1 是 S1 中点的 x 坐标与 m 的距离小于 d 的点集, P2 是 S2 中点的 x
       坐标与 m 的距离小于 d 的点集;
   7 . 将 P1 和 P2 中的点按 y 坐标升序排列;
   8 . 对 P1 中的每一个点 p,在 P2 中查找与点 p 的 y 坐标小于 d 的点,并求出其中的最小
       距离 d′;
   9 . return min(d, d′);
}
```

阅读材料——鱼群算法

在自然界,动物经过漫长的生物进化过程,形成了形形色色的觅食和生存方式,一些低级生物的觅食和生活方式形成了它们与高级生物所不同的特有方式,比如蚂蚁、鱼类、鸟类等,它们通常以群居的方式生活和觅食。研究工作者对其行为观察与研究,发现了许多有利于人类解决自身问题的方法,并通过对其行为的模拟,产生一系列寻优问题求解的新思路,这些研究被称为群体智能(swarm intelligence)的研究。

所谓群体是指一组相互之间可以直接通信或者间接通信,并且能够合作进行问题求解的主体,是指无智能的主体通过合作表现出智能行为的特性。

通过对自然界中鱼类生活环境的观察,发现在一片水域中,鱼生存数目最多的地方一般就是该水域中富含营养物质最多的地方,于是这片水域就会吸引更多的鱼。近年来我国学者李晓磊等提出的人工鱼群算法正是基于这种思想,模仿鱼群的觅食行为而实现的寻优算法。

鸟类和鱼类的群体的形成并不需要一个领头者,只需要每只鸟或每条鱼遵循一些局部的相互作用规则即可,通常采用以下 3 条规则:

(1) 分隔规则: 尽量避免与临近伙伴过于拥挤。

(2) 对准规则: 尽量与临近伙伴的平均方向一致。

(3) 内聚规则: 尽量朝临近伙伴的中心移动。

由此得出自然界鱼群的 3 种行为:

(1) 觅食行为: 鱼在水中游动的过程一般可视为随机移动,但当鱼发现食物时,它们会向着食物逐渐增多的方向快速游去。

(2) 聚群行为: 鱼群为了保证群体的生存和躲避危害,在游动过程中会自然地聚集

成群。

(3) 追尾行为：当一条或几条鱼发现食物时，其临近的伙伴会尾随它快速到达食物点。

相应地定义人工鱼个体的基本行为描述为：

(1) 觅食行为：人工鱼在其视野中探索下一个局部状态，如果该状态优于目前状态，则向该方向前进一步；否则，随机移动一步。

(2) 追尾行为：在其视野中搜索伙伴，并找出它们中状态最优的一个，如果它的状态优于自身状态，则向其方向前进一步。

(3) 聚群行为：在其视野中搜索伙伴，并找出它们的中心位置，如果其状态优于自身状态，则向其中心位置前进一步。

人工鱼群算法通过觅食、追尾和聚群 3 种行为来实现解空间的搜索。其中觅食行为是人工鱼根据当前自身的适应值(食物浓度)随机游动的行为，是一种个体极值寻优的过程，属于自学习的过程；而追尾和聚群行为则是人工鱼与周围环境交互的过程。这两种过程是在保证不与伙伴过于拥挤且与临近伙伴的平均移动方向一致的情况下向群体极值(中心)移动。人工鱼在整个寻优过程中，充分利用自身信息和环境信息来调整搜索方向，从而最终达到食物浓度最高的地方即全局最优。

设 Step 为移动步长，Visual 为视野范围，则人工鱼的模型可以定义为一个 C ++ 类：

```
class    AF_ fish
{
private:
   float AF_X[n];                    // 人工鱼的位置
   float AF_step;                    // 人工鱼移动的步长
   float AF_visual;                  // 人工鱼的感知距离
public:
   AF_fish ( ) ;
   ～AF_ fish ( );
   float AF_ foodConsistence ( );    // 人工鱼当前位置对食物的感知度
   void AF_ move ( ) ;               // 人工鱼移动的距离
   float AF_ follow ( ) ;            // 人工鱼追尾行为
   float AF_prey ( ) ;               // 人工鱼觅食行为
   float AF_swarm ( ) ;              // 人工鱼聚群行为
   int AF_evaluate ( );              // 人工鱼适应度
   void AF_init ( );                 // 初始化人工鱼
};
```

根据定义的人工鱼模型和行为描述，相应地可以从构造单条鱼的底层行为做起，通过鱼群中各个体的局部寻优，达到全局最优值在群体中突现出来。在寻优过程中，通常会有两种表现方式：一是通过人工鱼最终的分布情况来确定最优解的分布，随着寻优过程的进展，人工鱼往往会聚集在极值点的周围，而且，全局最优的

状态。

定义 G_1 为全局极值，G_2 为局部极值，S 为满意解空间，I 为解空间，则人工鱼群算法实现过程如图 4 .19 所示。

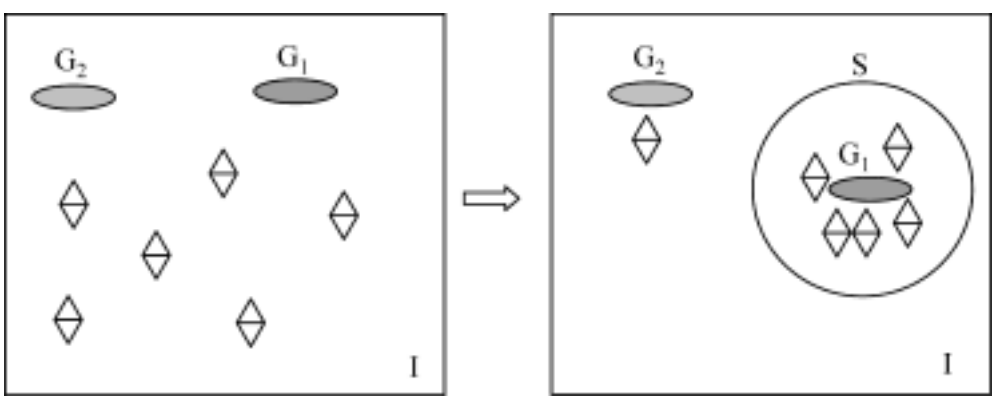


图 4 .19 人工鱼群算法实现过程

人工鱼群算法的基本思想是：每个人工鱼探索它当前所处的环境状况(包括目标函数的变化情况和伙伴的变化情况)，从而选择一种行为，最终人工鱼集结在几个局部极值的周围，若讨论极大值问题，则拥有较大的食物浓度值的人工鱼一般处于值较大的极值域周围，这有助于获取全局极值，而值较大的极值域周围一般能集结较多的人工鱼，这有助于判断并获取全局极值。

人工鱼群算法的框架如下：

1 . 随机产生人工鱼的初始值；

2 . 当不满足结束条件(设定迭代次数或小于某个预期误差)，重复执行下列步骤：

2 .1 更新人工鱼觅食行为；

2 .2 更新人工鱼聚群行为；

2 .3 更新人工鱼追尾行为；

2 .4 计算适度函数；

人工鱼群算法从人工鱼的个体行为出发，充分利用自身信息和环境信息来调整搜索方向，从而达到食物浓度最高的地方即全局最优解，为优化问题的解决提供了一条新思路。

参 考 文 献

[1] 李晓磊，钱积新 . 人工鱼群算法自下而上的寻优模式 . 过程系统工程年会论文集，2001：76～82

[2] 李晓磊，邵之江，钱积新 . 一种基于动物自治体的寻优模式：鱼群算法 . 系统工程理论与实践，2002，22：32～38

[3] 李晓磊等 . 基于分解协调的人工鱼群优化算法研究 . 电路与系统学报，2003，8

[4] 李晓磊 . 一种新型的智能优化方法——人工鱼群算法 . 浙江大学博士学位论文，2003

习　题　4

1．设计分治算法求一个数组中最大元素的位置，建立该算法的递推式并求解。

2．对于待排序列(5，3，1，9，8，2，4，7)，画出快速排序的递归运行轨迹。

3．设计递归算法生成 n 个元素的所有排列对象。

4．设计递归算法求多项式 $A(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 的值，建立该算法的递推式并求解。(提示：将 $A(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 转化为 $A(x)=(\cdots(a_n x+a_{n-1}x+\cdots+a_1 x+a_0))$

5．分治法的时间性能与直接计算最小问题的时间、合并子问题解的时间以及子问题的个数有关，试说明这几个参数与分治法时间复杂性之间的关系。

6．证明：如果分治法的合并可以在线性时间内完成，则当子问题的规模之和小于原问题的规模时，算法的时间复杂性可达到 $O(n)$。

7．设计算法将平面上的点集 S 分割为点的个数大致相同的两个子集 S_1 和 S_2。

8．在有序序列(r_1，r_2，…，r_n)中，存在序号 $i(1\leq i\leq n)$，使得 $r_i=i$。请设计一个分治算法找到这个元素，要求算法在最坏情况下的时间性能为 $O(\log_2 n)$。

9．设计一个有效算法，对于一个给定的数组循环左移 i 位，要求时间复杂性为 $O(n)$，空间复杂性为 $O(1)$。例如对 abcdefgh 循环左移 3 位得到 defghabc。

10．在一个序列中出现次数最多的元素称为众数。请设计算法寻找众数并分析算法的时间复杂性。

11．设 M 是一个 $n\times n$ 的整数矩阵，其中每一行(从左到右)和每一列(从上到下)的元素都按升序排列。设计分治算法确定一个给定的整数 x 是否在 M 中，并分析算法的时间复杂性。

12．格雷码(Gray code)是一个长度为 2^n 的序列，序列中无相同元素，且每个元素都是长度为 n 的二进制位串，相邻元素恰好只有 1 位不同。例如长度为 2^3 的格雷码为(000，001，011，010，110，111，101，100)。设计分治算法对任意的 n 值构造相应的格雷码。

第5章 减治法

CHAPTER

分治法是把一个大问题划分为若干个子问题,分别求解各个子问题,然后再把子问题的解进行合并得到原问题的解。减治法(reduce and conquer method)同样是把一个大问题划分为若干个子问题,但是这些子问题不需要分别求解,只需求解其中的一个子问题,因而也无需对子问题的解进行合并。所以,严格地说,减治法应该是一种退化了的分治法。应用减治技术设计的算法通常具有很高的效率,一般来说其时间复杂性是 $O(\log_2 n)$。

5.1 减治法的设计思想

减治法在将原问题分解为若干个子问题后,利用了规模为 n 的原问题的解与较小规模(通常是 $n/2$)的子问题的解之间的关系,这种关系通常表现为:

(1) 原问题的解只存在于其中一个较小规模的子问题中;

(2) 原问题的解与其中一个较小规模的解之间存在某种对应关系。

由于原问题的解与较小规模的子问题的解之间存在这种关系,所以,只需求解其中一个较小规模的子问题就可以得到原问题的解。减治法的设计思想如图 5.1 所示。

例如,对于给定的整数 a 和非负整数 n,利用减治法计算 a^n 的值,如果 $n=1$,可以简单地返回 a 的值;如果 n 是偶数并且 $n>1$,可以把该问题的规模减半,即计算 $a^{n/2}$ 的值,而且规模为 n 的解 a^n 和规模减半的解 $a^{n/2}$ 之间具有明显的对应关系 $a^n=(a^{n/2})^2$;如果 n 是奇数并且 $n>1$,可以先用偶指数的规则计算 $a^{(n-1)}$,再把结果乘以 a。所以,应用减治技术得到如下计算方法:

$$a^n = \begin{cases} a & n = 1 \\ (a^{n/2})^2 & n > 1 \text{ 且是偶数} \\ (a^{(n-1)/2})^2 \times a & n > 1 \text{ 且是奇数} \end{cases}$$

显然,上述算法的时间复杂性是 $O(\log_2 n)$。注意该算法和 4.1 节介绍的分治法不同,应用分治法得到 a^n 的计算方法是:

$$a^n = \begin{cases} a & n = 1 \\ a^{\lfloor n/2 \rfloor} \times a^{\lceil n/2 \rceil} & n > 1 \end{cases}$$

分治法是对分解的子问题分别求解,需要对子问题的解进行合并,而减治法只对一个子问题求解,并且不需要进行解的合并。应用减治法(例如减半法)得到的算法通常具有如下递推式:

$$T(n) = \begin{cases} a & n = 1 \\ T(n/2) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

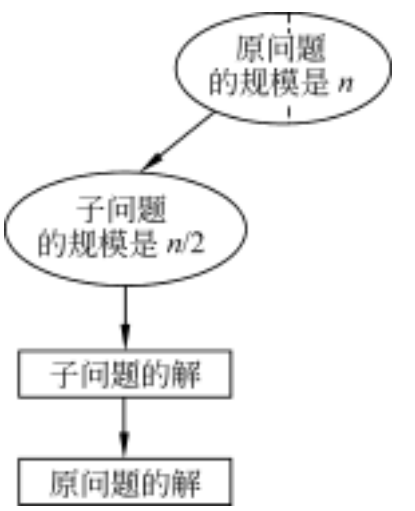


图 5.1 减治法的典型情况(减半技术)

所以,通常来说,应用减治法处理问题的效率是很高的,一般是 $O(\log_2 n)$数量级。

5.2 查找问题中的减治法

在传统的算法设计技术的分类中,折半查找属于分治技术的典型应用。但是,由于折半查找与待查值每比较一次,根据比较结果使得查找的区间减半,所以,折半查找应该属于减治技术的成功应用。

5.2.1 折半查找

折半查找利用了记录按关键码有序的特点,其基本思想(见图 5.2)为:在有序表中,取中间记录作为比较对象,若给定值与中间记录的关键码相等,则查找成功;若给定值小于中间记录的关键码,则在中间记录的左半区继续查找;若给定值大于中间记录的关键码,则在中间记录的右半区继续查找。不断重复上述过程,直到查找成功,或所查找的区域无记录,查找失败。

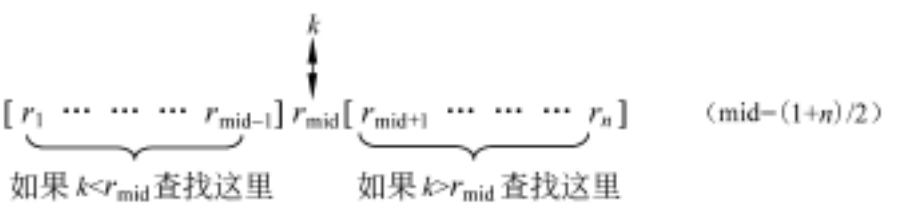


图 5.2 折半查找的减治思想

例如,在有序表{ 7, 14, 18, 21, 23, 29, 31, 35, 38, 42, 46, 49, 52 }中查找值为 14 的记录的过程如图 5.3 所示。

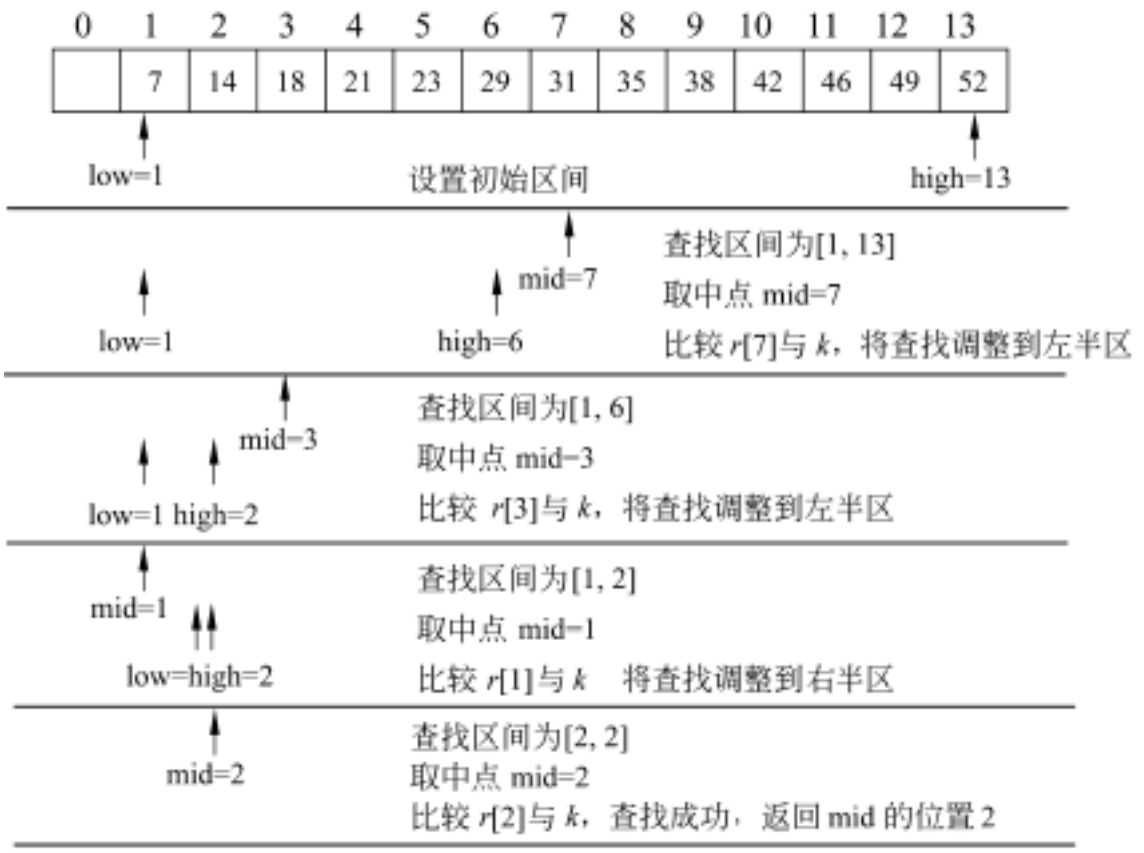


图 5.3　折半查找成功情况下的查找过程

伪代码

算法 5.1——折半查找

1．low = 1; high = n;　　// 设置初始查找区间
2．测试查找区间[low, high]是否存在，若不存在，则查找失败；否则
3．取中间点 mid = (low + high)/ 2; 比较 k 与 r[mid]，有以下三种情况：
　3.1　若 k < r[mid]，则 high = mid - 1；查找在左半区进行，转 2；
　3.2　若 k > r[mid]，则 low = mid + 1；查找在右半区进行，转 2；
　3.3　若 k = r[mid]，则查找成功，返回记录在表中位置 mid；

从折半查找的过程看，以有序表的中间记录作为比较对象，并以中间记录将表分割为两个子表，对子表继续这种操作。所以，对表中每个记录的查找过程，可用判定树来描述，判定树中的每个结点对应有序表中的一个记录，结点的值为该记录在有序表中的位置。长度为 n 的判定树的构造方法为：

(1) 当 $n=0$ 时，判定树为空；

(2) 当 $n>0$ 时，判定树的根结点是有序表中序号为 mid = (n + 1)/ 2 的记录，根结点的左子树是与有序表 $r[1] \sim r[\text{mid}-1]$ 相对应的判定树，根结点的右子树是与 $r[\text{mid}+1] \sim r[n]$ 相对应的判定树。

图 5.4 给出了具有 11 个结点的判定树。

可以看到，在表中查找任一记录的过程，即是判定树中从根结点到该记录结点的路径，和给定值的比较次数等于该记录结点在树中的层数。具有 n 个结点的判定数的深度为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$，所以，查找成功时进行的关键码比较次数至多为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$。为便于讨论，以深度为 k 的满二叉树($n = 2^k - 1$)为例，假设表中每个记录的查找概率相等，即 $p_i = 1/n (1 \le i \le n)$，而树的第 i 层上有 2^{i-1} 个结点，因此，折半查找的平均查找长度为：

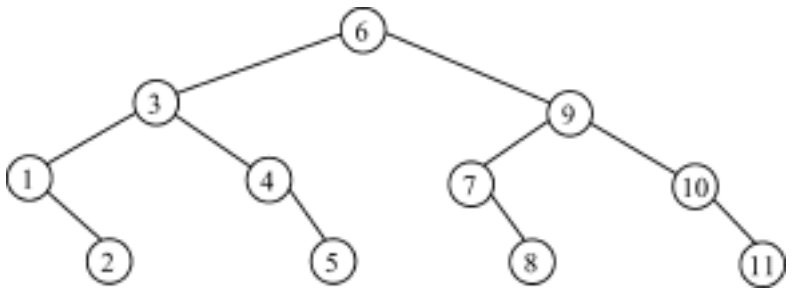


图 5.4 具有 11 个结点的判定树

$$ASL = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} j \times 2^{j-1} = \frac{1}{n}(1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + \cdots + k \times 2^{k-1})$$

$$\approx \log_2 (n+1) - 1$$

所以,折半查找的时间复杂性为 $O(\log_2 n)$。

5.2.2 二叉查找树

概 念 回 顾

二叉查找树(binary search trees),又称二叉排序树,是具有下列性质的二叉树:

(1) 若它的左子树不空,则左子树上所有结点的值均小于根结点的值;

(2) 若它的右子树不空,则右子树上所有结点的值均大于根结点的值;

(3) 它的左右子树也都是二叉排序树。

由二叉排序树的定义,在二叉排序树 root 中查找给定值 k 的过程是:

(1) 若 root 是空树,则查找失败;

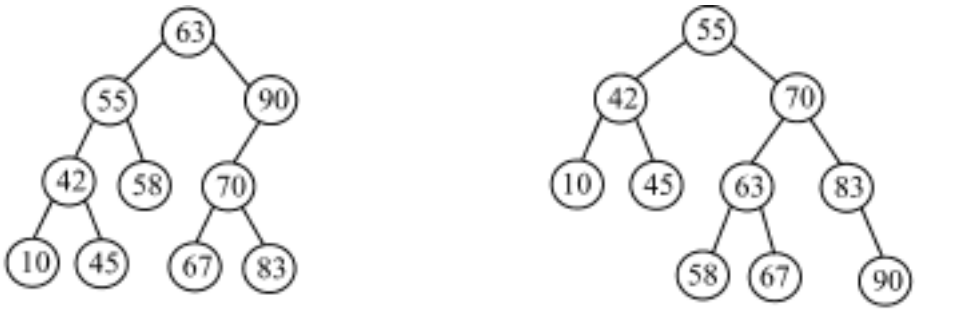
(2) 若 k= 根结点的值,则查找成功;

(3) 否则,若 k< 根结点的值,则在 root 的左子树上查找;

(4) 否则,在 root 的右子树上查找。

上述过程一直持续到 k 被找到或者待查找的子树为空,如果待查找的子树为空,则查找失败。二叉排序树的查找效率就在于只需要查找两个子树之一。

例如,在图 5.5(a)所示的二叉排序树上查找关键码等于 58 的记录。首先将 58 与根结点的关键码比较,因为 58 < 63,则在以 63 为根的左子树上查找,此时 63 的左子树不空,则将 58 与其根结点 55 比较,因为 58 > 55,则在以 55 为根结点的右子树上查找,而 55



(a) 按 63,90,55,58,70,42,10,45,83,67 的顺序构造的二叉排序树

(b) 按 55,42,10,70,63,58,83,67,90,45 的顺序构造的二叉排序树

图 5.5 二叉排序树示例

的右子树不空,且 58 与其根结点相等,则查找成功。和上述过程类似,查找关键码等于 95 的记录,在 95 同 63、90 比较后,因为 90 < 95,则在以 90 为根结点的右子树上查找,但该子树为空,故查找失败。

二叉排序树的结点结构为:

```
struct BiNode
{
  int data;   //结点的值,假设查找集合的元素为整型
  BiNode * lchild, * rchild;   //指向左、右子树的指针
};
```

下面给出具体的二叉排序树的查找算法。

C++描述

算法 5.2——二叉排序树的查找

```
BiNode * SearchBST(BiNode * root, int k)
{
      if (root == NULL) return NULL;
      else if (root -> data == k) return root;
           else if (k < root -> data) return SearchBST(root -> lchild, k);
                else return SearchBST(root -> rchild, k);
}
```

在二叉排序树上查找关键码等于给定值的结点的过程,恰好走了一条从根结点到该结点的路径,和给定值的比较次数等于给定值的结点在二叉排序树中的层数,比较次数最少为 1 次(即整个二叉排序树的根结点就是待查结点),最多不超过树的深度。具有 n 个结点的二叉树的深度至少是$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$,至多是 n,所以,二叉排序树的查找性能在 $O(\log_2 n)$和 $O(n)$之间。

5.3　排序问题中的减治法

5.3.1　堆排序

概 念 回 顾

堆(heap)是具有下列性质的完全二叉树:每个结点的值都小于或等于其左右孩子结点的值(小根堆);或者每个结点的值都大于或等于其左右孩子结点的值(大根堆)。如果将具有 n 个结点的堆按层序从 1 开始编号,则结点之间满足如下关系:

$$\begin{cases} k_i \le k_{2i} \\ k_i \le k_{2i+1} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} k_i \ge k_{2i} \\ k_i \ge k_{2i+1} \end{cases} \qquad 1 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor$$

以结点的编号作为下标,将堆用顺序存储结构(即数组)来存储,则堆对应于一组序列,如图 5 .6 所示。

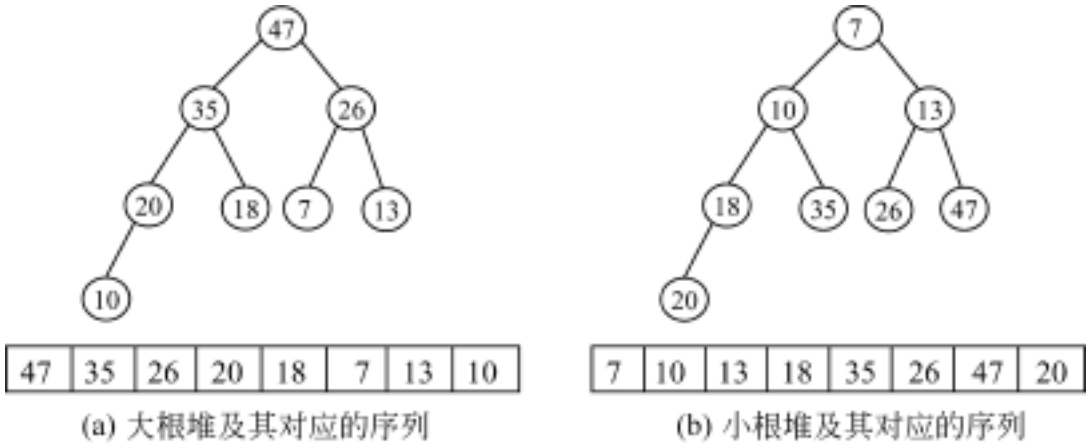


图 5 .6 堆的示例

堆排序是利用堆(假设利用大根堆)的特性进行排序的方法,其基本思想(见图 5 .7)是:首先将待排序的记录序列构造成一个堆,此时,选出了堆中所有记录的最大者即堆顶记录,然后将它从堆中移走(通常将堆顶记录和堆中最后一个记录交换),并将剩余的记录再调整成堆,这样又找出了次大的记录,以此类推,直到堆中只有一个记录为止。

图 5 .7 堆排序的基本思想

堆调整问题(将一个无序序列调整为堆)是堆排序算法的关键,筛选法调整和插入法调整是成功应用减治法的例子,从而使堆排序的整体时间性能达到 $O(n\log_2 n)$。

筛选法调整堆要解决的关键问题是:在一个完全二叉树中,根结点的左右子树均是堆,如何调整根结点,使整个完全二叉树成为一个堆?

如图 5 .8 所示,图 5 .8(a)是一棵完全二叉树,且根结点 28 的左右子树均是堆。为了将整个二叉树调整为堆,首先将根结点 28 与其左右子树的根结点比较,根据堆的定义,应将 28 与 35 交换,如图 5 .8(b)所示。经过这一次交换,破坏了原来左子树的堆结构,需要对左子树再进行调整,调整后的堆如图 5 .8(c)所示。

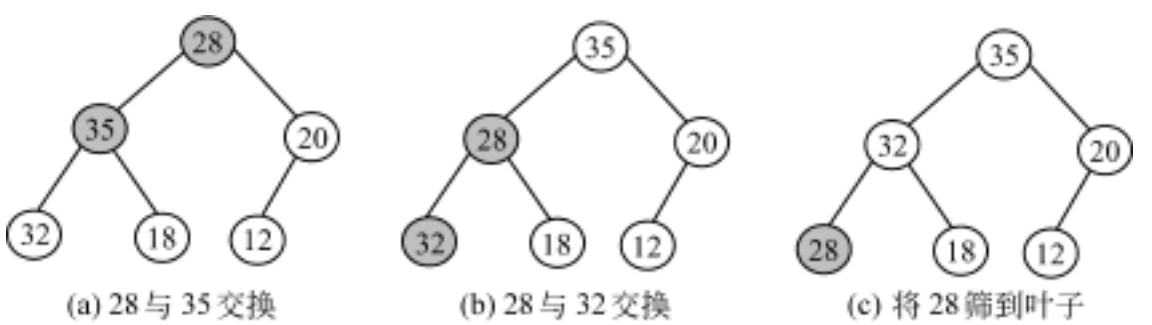


图 5 .8 筛选法调整堆的示例

由这个例子可以看出,在调整堆的过程中,总是将根结点(即被调整结点)与左右子树的根结点进行比较,若不满足堆的条件,则将根结点与左右子树根结点的较大者进行交换,这个调整过程一直进行到所有子树均为堆或将被调整的结点(即原来的根结点)交换

到叶子为止。这个自堆顶至叶子的调整过程称为“筛选”。

假设当前要筛选结点的编号为 k,堆中最后一个结点的编号为 n,并且结点 k 的左右子树均是堆(即 $r[k+1] \sim r[n]$满足堆的条件),则筛选算法用伪代码可描述为:

伪代码

算法 5.3——筛选法调整堆

1. 设置 i 和 j,分别指向当前要筛选的结点和要筛选结点的左孩子;
2. 若结点 i 已是叶子,则筛选完毕,否则,比较要筛选结点的左右孩子结点,并将 j 指向关键码较大的结点;
3. 将要筛选结点 i 的关键码与结点 j 的关键码进行比较,有以下两种情况:
   3.1　如果结点 i 的关键码大,则完全二叉树已经是堆,筛选完毕;
   3.2　否则将 r[i]与 r[j]交换;令 i = j,转步骤 2 继续进行筛选;

算法 5.3 将根结点与左右子树的根结点进行比较,若不满足堆的条件,则将根结点与左右子树根结点的较大者进行交换,所以,每比较一次,需要调整的完全二叉树的问题规模就减少一半,因此,其时间性能是 $O(\log_2 n)$。

C++描述

算法 5.4——筛选法调整堆

```
void SiftHeap(int r[ ], int k, int n)
{
  i = k; j = 2* i;                    // 置 i 为要筛的结点,j 为 i 的左孩子
  while (j< = n)                      // 筛选还没有进行到叶子
  {
    if (j < n && r[j] < r[j+1]) j++ ;  // 比较 i 的左右孩子,j 为较大者
    if (r[i] > r[j])                  // 根结点已经大于左右孩子中的较大者
       break;
    else {
      r[i]←→r[j];                     // 将根结点与结点 j 交换
      i = j; j = 2* i;                // 被筛结点位于原来结点 j 的位置
    }
  }
}
```

插入法调整堆要解决的关键问题是:在堆中插入一个结点,如何调整被插入结点,使整个完全二叉树仍然是一个堆?

如图 5.9 所示,图 5.9(a)是一个堆,将 35 作为完全二叉树的最后一个结点插入,破坏了堆的结构。为了将整个二叉树调整为堆,首先将 35 与其根结点 28 比较,根据堆的定义,应将 35 与 28 交换,如图 5.9(b)所示;再将 35 与其根结点 32 比较,根据堆的定义,应将 35 与 32 交换,如图 5.9(c)所示;此时 35 小于其根结点 40,调整过程结束。调整后的堆如图 5.9(c)所示。

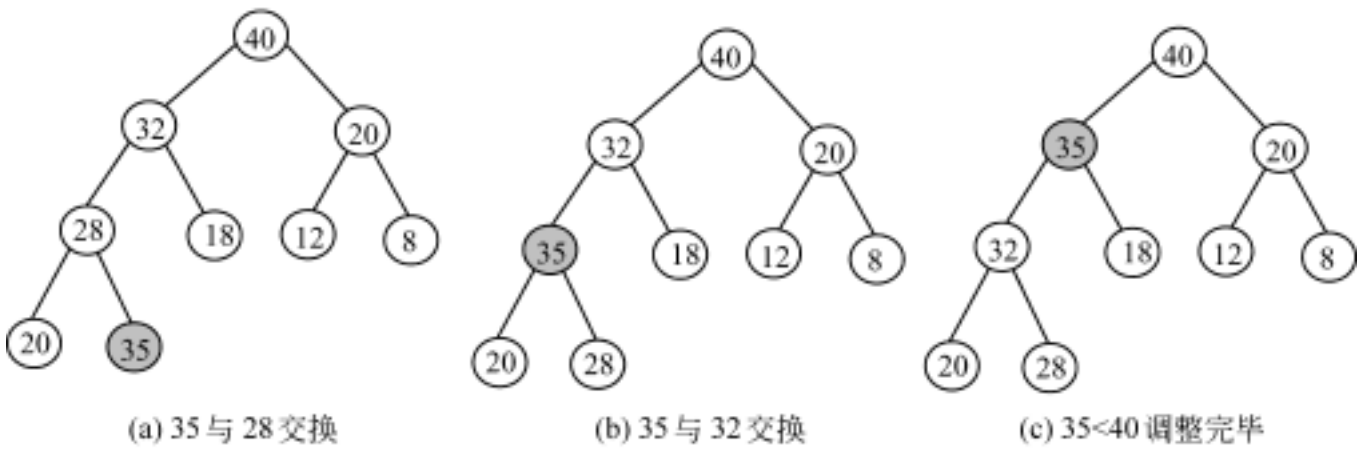


图 5.9 插入法调整堆的示例

由这个例子可以看出,在调整堆的过程中,总是将被调整结点与该结点的双亲结点进行比较,若不满足堆的条件,则将被调整结点与其根结点交换,这个调整过程一直进行到被调整结点小于其双亲结点或将被调整结点交换到根结点为止。这个自叶子至根结点的调整过程称为“插入”。

假设当前堆中有 k 个结点,则要插入结点的编号为 $k+1$,插入法调整堆的算法如下:

伪代码

算法 5.5——插入法调整堆

1. 设 i 指向当前要插入的结点;
2. 若结点 i 是整个堆的根结点,则调整完毕;
3. 否则,设 j 指向结点 i 的双亲结点,将结点 i 与结点 j 进行比较;
   3.1 如果结点 i 的关键码小,则完全二叉树已经是堆,调整完毕;
   3.2 否则将 r[i]与 r[j]交换,令 i = j,转步骤 2 继续进行调整;

C++描述

算法 5.6——插入法调整堆

```
void InsertHeap(int r[ ], int k)    //堆中有 k 个结点,现插入一个新结点 k + 1
{
  i = k + 1;                        //置 i 为要插入的结点
  while (i != 1)
  {
      j = i/2;                      //j 为 i 的双亲结点
      if (r[i] < r[j])              //待插入结点已小于根结点,调整结束
          break;
      else {
          r[i]←→r[j];               //将根结点与结点 j 交换
          i = j;                    //待插入点位于原来结点 j 的位置
      }
  }
}
```

插入法调整堆具有更简洁的思路，调整过程中结点的比较次数最多不超过完全二叉树的深度，因而时间复杂性为 $O(\log_2 n)$

图 5.11　选择问题的查找过程示例(查找第 4 小元素)

伪代码

算法 5.7——选择问题

```
1. i = 1; j = n;     // 设置初始查找区间
2. 以 r[i]为轴值对序列 r[i]～r[j]进行一次划分,得到轴值的位置 s;
3. 将轴值位置 s 与 k 比较
   3.1  如果 k = s,则将 r[s]作为结果返回;
   3.2  否则,如果 k < s,则 j = s - 1,转步骤 2;
   3.3  否则,i= s + 1,转步骤 2;
```

与快速排序类似,算法 5.7 的效率取决于轴值的选取。如果每次划分的轴值恰好是序列的中值,则可以保证处理的区间比上一次减半,由于在一次划分后,只需处理一个子序列,所以,比较次数的递推式应该是:

$$T(n) = T(n/2) + O(n)$$

使用扩展递归技术对递推式进行推导,得到该递推式的解是 $O(n)$,这是最好情况;如果每次划分的轴值恰好是序列中的最大值或最小值(例如,在找最小元素时总是在最大元素处划分),则处理区间只能比上一次减少 1 个,所以,比较次数的递推式应该是:

$$T(n) = T(n-1) + O(n)$$

使用扩展递归技术对递推式进行推导,得到该递推式的解是 $O(n^2)$,这是最坏情况;平均情况下,假设每次划分的轴值是划分序列中的一个随机位置的元素,则处理区间按照一种随机的方式减少,可以证明,算法 5.7 可以在 $O(n)$ 的平均时间内找出 n 个元素中的第 k 小元素。

5.4　组合问题中的减治法

5.4.1　淘汰赛冠军问题

假设有 $n=2^k$ 个选手进行竞技淘汰赛,最后决出冠军的选手,用函数

```
bool Comp(string mem1, string mem2)
```

模拟两位选手的比赛,若 mem1 获胜则函数 Comp 返回 TRUE,否则函数 Comp 返回 FALSE,并假定可以在常数时间内完成函数 Comp 的执行,下面的算法实现选手的竞技淘汰比赛的过程。

C++描述

算法 5.8——淘汰赛冠军问题

```
string Game(string r[ ], int n)
{
    i = n;
    while (i > 1)
    {
       i = i/ 2;
       for (j = 0; j < i; j++ )
          if (Comp(r[j+ i], r[j]))
             r[j] = r[j + i];
    }
    return r[0];
}
```

因为 $n = 2^k$，所以，外层的 while 循环共执行 k 次，在每一次执行时，内层的 for 循环的执行次数分别是 $n/2, n/4, \cdots, 1$，而函数 Comp 可以在常数时间内完成，因此，算法 5.8 的执行时间为：

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{2^i} = n\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = n - 1 = O(n)$$

5.4.2 假币问题

在 n 枚外观相同的硬币中，有一枚是假币，并且已知假币较轻。可以通过一架没有刻度的天平来任意比较两组硬币，从而得知两组硬币的重量是否相同，或者哪一组更轻一些，但不知道轻多少，假币问题是要求设计一个高效的算法来检测出这枚假币。

问题的解决是经过一系列比较和判断，可以用判定树来描述这个判定过程。解决这个问题的最自然的想法就是一分为二，也就是把硬币分成两组。把 n 枚硬币分成两组，每组有$\lfloor n/2 \rfloor$枚硬币，如果 n 为奇数，就留下一枚硬币，然后把两组硬币分别放到天平的两端。如果两组硬币的重量相同，那么留下的硬币就是假币；否则，用同样的方法对较轻的那组硬币进行同样的处理，因为假币一定在较轻的那组里。

注意，在假币问题中，尽管我们把硬币分成了两组，但每次用天平比较后，只需解决一个规模减半的问题，所以，它属于一个减治算法。该算法在最坏的情况下的时间性能有这样一个递推式：

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(n/2) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

应用扩展递归技术求解这个递推式，得到 $T(n) = O(\log_2 n)$。

对于假币问题，将问题规模减半的算法很容易想到，但实际上，减半不是一个最好的选择，考虑不是把硬币分成两组，而是分成 3 组，前两组有$\lceil n/3 \rceil$组硬币，其余的硬币作为第 3 组，将前两组硬币放到天平上，如果它们的重量相同，则假币一定在第 3 组中，用同样的方法对第 3 组进行处理；如果前两组的重量不同，则假币一定在较轻的那一组中，用同

样的方法对较轻的那组硬币进行处理。显然这个算法存在递推式:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(n/3) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

这个递推式的解是 $T(n) = O(\log_3 n)$。这个减治法是将原问题一分为三,从而获得了更少的比较次数。

考虑假币问题的一个更复杂的版本——不知道假币与真币相比较轻还是较重。下面给出一个 8 枚硬币的三分算法。

设有 8 枚硬币,分别表示为 a、b、c、d、e、f、g、h,从 8 枚硬币中任取 6 枚 a、b、c、d、e、f,在天平两端各放 3 枚进行比较。假设 a、b、c 放在天平的一端,d、e、f 放在天平的另一端,可能出现 3 种比较结果:

(1) $a+b+c>d+e+f$

(2) $a+b+c=d+e+f$

(3) $a+b+c<d+e+f$

若 $a+b+c>d+e+f$,可以肯定这 6 枚硬币中必有一枚为假币,同时也说明 g、h 为真币。这时可将天平两端各去掉一枚硬币,假设去掉 c 和 f,同时将天平两端的硬币各换一枚,假设硬币 b、e 作了互换,然后进行第二次比较,比较的结果同样可能有 3 种:

① $a+e>d+b$: 这种情况表明天平两端去掉硬币 c、f 且硬币 b、e 互换后,天平两端的轻重关系保持不变,从而说明了假币必然是 a、d 中的一个,这时我们只要用一枚真币(例如 h)和 a 进行比较,就能找出假币。若 $a>h$,则 a 是较重的假币;若 $a=h$,则 d 为较轻的假币;不可能出现 $a<h$ 的情况。

② $a+e=d+b$: 此时天平两端由不平衡变为平衡,表明假币一定在去掉的两枚硬币 c、f 中,同样用一枚真币(例如 h)和 c 进行比较,若 $c>h$,则 c 是较重的假币;若 $c=h$,则 f 为较轻的假币;不可能出现 $c<h$ 的情况。

③ $a+e<d+b$: 此时表明由于两枚硬币 b、e 的对换,引起了两端轻重关系的改变,那么可以肯定 b 或 e 中有一枚是假币,同样用一枚真币(例如 h)和 b 进行比较,若 $b>h$,则 b 是较重的假币;若 $b=h$,则 e 为较轻的假币;不可能出现 $b<h$ 的情况。

对于结果(2) 和(3) 的情况,可按照上述方法作类似的分析。图 5.12 给出了判定过程,图中大写字母 H 和 L 分别表示假币较其他真币重或轻,边线旁边给出的是天平的状态。8 枚硬币中,每一枚硬币都可能是或轻或重的假币,因此共有 16 种结果,反映在判定

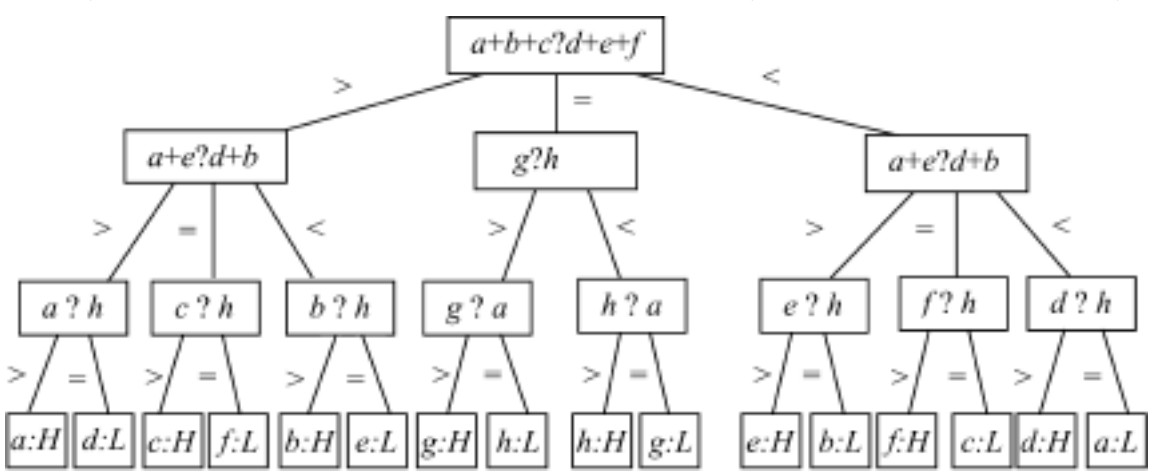


图 5.12 8 枚硬币问题的判定树

树中,则有 16 个叶子结点,从图 5 .12 中可看出,每种结果都需要经过 3 次比较才能得到。

5 5　实验项目——8 枚硬币问题

1 .实验题目

在 8 枚外观相同的硬币中,有一枚是假币,并且已知假币与真币的重量不同,但不知道假币与真币相比较轻还是较重。可以通过一架天平来任意比较两组硬币,设计一个高效的算法来检测出这枚假币。

2 .实验目的

(1) 深刻理解并掌握减治法的设计思想;
(2) 提高应用减治法设计算法的技能;
(3) 理解这样一个观点: 建立正确的模型对于问题的求解是非常重要的。

3 .实验要求

(1) 设计减治算法实现 8 枚硬币问题;
(2) 设计实验程序,考察用减治技术设计的算法是否高效;
(3) 扩展算法,使之能处理 n 枚硬币中有 1 枚假币的问题。

4 .实现提示

假设用一个数组 B[n]表示硬币,元素 B[i]中存放第 i 枚硬币的重量,其中 n - 1 个元素的值都是相同的,只有一个元素与其他元素值不同,则当 n = 8 时即代表 8 枚硬币问题。由于 8 枚硬币问题限制只允许使用天平比较轻重,所以,算法中只能出现元素相加和比较语句。

阅读材料——粒子群算法

优化问题一直受到人们的广泛重视,在科学、经济以及工程领域发挥着极为重要的作用。优化算法研究对改进算法性能、拓宽算法应用领域、完善算法体系同样具有重要的作用。自从 20 世纪 80 年代以来,一些通过模拟或提示某种自然现象或过程而得到的优化算法,由于其独特的优点和机制为解决复杂问题提供了新的思路和手段,并在诸多领域得到了成功的应用。由于这类算法构造的直观性与自然机理,通常被称为智能优化算法。粒子群优化算法就是其中的一种,它是源于对鸟群觅食过程中的迁徙和聚集的模拟。

鸟群的运动是自然界一道亮丽的风景线,它们的群体运动总是能带给人以美的感受和无限遐想。而这种群体运动又呈现出许多显明的对比: 运动的个体是离散的鸟,但整体的运动却像连续的液体;运动的概念是简单的,在视觉上却又是复杂的;个体运动是随机排列的,但群体运动却又是整齐划一的。一个呈分布状态的群体表现出似乎是有意识

的集中控制,这种现象引起许多学者的兴趣。比如生物学家 Frank Heppner 建立的鸟群运动模型,其基本思想是鸟会受到栖息地的吸引。鸟群起飞时并无目的地,在空中自然形成群体,当群体中一只鸟发现栖息地就会飞向这个栖息地,同时也会将周围的鸟“拉”过来,而周围的鸟也将影响群体中其它的鸟,最终将整个群体引向这个栖息地。

设想这样一个场景:一群鸟在随机地搜寻食物,在这个区域里只有一块食物,所有的鸟都不知道食物在哪里,但是它们知道当前的位置离食物还有多远,那么找到食物的最优策略就是搜寻目前离食物最近的鸟的周围区域。

1.粒子群算法的基本思想

研究者发现鸟群觅食飞行时,在飞行过程中经常会突然改变方向、散开、聚集,其行为不可预测,但其整体总保持一致性,个体与个体间也保持着最适宜的距离。通过对类似生物群体行为的研究,发现生物群体中存在着一种信息共享机制,它为群体的进化提供了一种优势,这就是基本粒子群算法形成的基础。

美国学者 James Kennedy 和 Russell Eberhart 受 Heppner 建立的鸟群运动模型的启发,于 1995 年提出了粒子群优化算法(particle swarm optimization, PSO)。

PSO 算法将鸟群运动模型中的栖息地类比为所求问题的解空间中可能解的位置,通过个体间的信息传递,引导整个群体向可能解的方向移动,增加发现较好解的可能性。群体中的鸟被抽象为一个个没有质量、没有形状的“粒子”,通过这些“粒子”的相互协作和信息共享,在解空间中寻找最优解。

2.基本粒子群算法

在 PSO 算法中,每个优化问题的潜在解都可以想象成搜索空间中的一只鸟,我们称之为“粒子”。粒子在搜索空间中以一定的速度飞行,这个速度根据它本身的飞行经验和同伴的飞行经验来动态调整。所有的粒子都有一个被目标函数决定的适应值,并且知道自己到目前为止发现的最好位置(particle best,记为 pbest)和当前的位置。这个可以看作是粒子自己的飞行经验。除此之外,每个粒子还知道到目前为止整个群体中所有粒子发现的最好位置(global best,记为 gbest, gbest 是 pbest 中的最好值),这个可以看作是粒子的同伴的经验。每个粒子根据下列信息改变自己的当前位置:(1)当前位置;(2)当前速度;(3)当前位置与自己最好位置之间的距离;(4)当前位置与自身的群体最好位置之间的距离。

飞行经验是指该粒子本身所找到的最优位置,称之为个体极值;同伴飞行经验是指该粒子周围的粒子目前找到的最优解,称之为群体极值。当以整个种群为同伴时,算法称之为全局粒子群算法;当同伴只取种群的一部分粒子时,则形成了局部粒子群算法。PSO 算法中所有粒子均有一个适应值,通常由目标函数决定,另外每个粒子均有一个速度决定它们飞翔的方向与距离,然后粒子群追随当前的最优粒子在解空间中搜索。PSO 算法由随机初始化形成的粒子而组成的一个种群,以迭代的方式进行搜索而得到最优解。

假设在一个 d 维的目标搜索空间中,有 m 个粒子组成一个种群,其中第 i 个粒子在搜索空间的位置表示为一个 d 维的向量 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{id})$, $i = 1, 2, \cdots, m$,第 i 个

粒子的飞行速度为 $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{id})$，记第 i 个粒子当前搜索到的最优位置(即个体极值)为：$p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{id})$，整个粒子群目前搜索到的最优位置(即全局极值)为：$g = (g_1, g_2, \cdots, g_d)$。粒子根据下式进行更新其速度和位置：

$$v_i = v_i + c_1 r_1 (p_i - x_i) + c_2 r_2 (g_d - x_i) \tag{5.1}$$

$$x_i = x_i + v_i \tag{5.2}$$

其中，c_1、c_2 为学习因子，取值范围是非负常数，r_1、r_2 是介于[0, 1]之间的随机数。粒子在解空间中不断跟踪个体极值与全局极值进行搜索，直到达到规定的迭代次数或满足规定的误差标准为止。粒子在每一维飞行的速度不能超过算法设计的最大速度 v_{max} (设置较大的 v_{max} 可以保证粒子种群的全局搜索能力，设置较小的 v_{max} 则粒子种群的局部搜索能力增强)。

式 5.1 是速度更新公式，它主要通过 3 部分来计算粒子 i 的新速度：

特性空间是高度非线性的。

PSO 算法还有一种更广泛的应用：简单而有效地演化人工神经网络，不仅用于演化网络的权重，而且包括优化神经网络的结构。作为一个演化神经网络的例子，PSO 算法已应用于分析人的颤抖。对人颤抖的诊断，包括帕金森和原发性颤抖，是一个非常具有挑战性的领域。PSO 算法已成功地应用于演化一个用来快速和准确地辨别普通个体及有颤抖个体的神经网络。

PSO 算法的另一个应用实例是对一个电气设备的功率反馈和电压进行控制。它采用一种二进制与实数混合的 PSO 算法来决定对连续的和离散的控制变量的控制策略，以得到稳定的电压。

参 考 文 献

[1] 李博 .粒子群优化算法及其在神经网络中的应用 .大连理工大学硕士论文, 2005
[2] 李建勇 .粒子群优化算法的研究 .浙江大学硕士论文, 2004
[3] 黄岚等 .粒子群优化算法求解旅行商问题 .吉林大学学报(理学版), 2003,41(4)
[4] 周驰等 .粒子群优化算法 .计算机应用研究, 2003(12)
[5] 李维等 .粒子群优化算法综述 .中国科学工程, 2004(5)
[6] 张利彪等 .基于粒子群算法求解多目标优化问题 .计算机研究与发展, 2004(7)

习 题 5

1 .修改折半查找算法使之能够进行范围查找。所谓范围查找是要找出在给定值 a 和 b 之间的所有元素($a \leq b$)。

2 .计算两个正整数 n 和 m 的乘积有一个很有名的算法称为俄式乘法，其思想是利用了一个规模是 n 的解和一个规模是 $n/2$ 的解之间的关系：$n \times m = n/2 \times 2m$(当 n 是偶数)，或：$n \times m = (n-1)/2 \times 2m + m$(当 n 是奇数)，并以 $1 \times m = m$ 作为算法结束的条件。如图 5 .13 给出了利用俄式乘法计算 50×65 的例子。据说 19 世纪的俄国农夫使用该算法并因此得名，这个算法也使得乘法的硬件实现速度非常快，因为只使用移位就可以完成二进制数的折半和加倍。请设计算法实现俄式乘法。

n	m	
50	65	
25	130	130
12	260	
6	520	
3	1040	1040
1	2080	+ 2080
		3250

图 5 .13 第 2 题图

3 .拿子游戏。考虑下面这个游戏：桌子上有一堆火柴，游戏开始时共有 n 根火柴，两个玩家轮流拿走 1、2、3 或 4 根火柴，拿走最后一根火柴的玩家为获胜方。请为先走的玩家设计一个制胜的策略(如果该策略存在)。

4 .对于相同的输入序列，筛选法和插入法是否产生相同的堆？请证明你的结论。

5 .求两个正整数 m 和 n 的最小公倍数。(提示：m 和 n 的最小公倍数 $\mathrm{lcm}(m, n)$ 与 m 和 n 的最大公约数 $\gcd(m, n)$ 之间有如下关系：$\mathrm{lcm}(m, n) = m \times n / \gcd(m, n)$。)

6 .在 120 枚外观相同的硬币中，有一枚是假币，并且已知假币与真币的重量不同，但

不知道假币与真币相比较轻还是较重。可以通过一架天平来任意比较两组硬币，最坏情况下，能不能只比较 5 次就检测出这枚假币？

7．在 n 个元素组成的无序序列中，求最小元素和第 2 小元素需要进行多少次比较？

8．竞赛树是一棵完全二叉树，它反映了一系列“淘汰赛”的结果：叶子代表参加比赛的 n 个选手，每个内部结点代表由该结点的孩子结点所代表的选手中的胜者，显然，树的根结点就代表了淘汰赛的冠军。请回答下列问题：

(1) 这一系列的淘汰赛中比赛的总场数是多少？

(2) 设计一个高效的算法，它能够利用比赛中产生的信息确定亚军。

第6章 动态规划法

CHAPTER

动态规划(dynamic programming)是在20世纪50年代由美国数学家贝尔曼(Richard Bellman)为研究最优控制问题而提出的,“programming”的含义是计划和规划的意思。动态规划作为一种工具在应用数学中的价值被大家认同以后,在计算机科学界,动态规划法成为一种通用的算法设计技术用来求解多阶段决策最优化问题。

分治法将待求解问题分解成若干个子问题,先分别求解子问题,然后合并子问题的解得到原问题的解。动态规划法也是将待求解问题分解成若干个子问题,但是子问题间往往不是相互独立的。如果用分治法求解,这些子问题的重叠部分被重复计算多次。而动态规划法将每个子问题只求解一次并将其解保存在一个表格中,当需要再次求解此子问题时,只是简单地通过查表获得该子问题的解,从而避免了大量的重复计算。

6.1 概 述

6.1.1 最优化问题

在实际生活中,经常有这样一类问题:该问题有 n 个输入,它的解由这 n 个输入的一个子集组成,这个子集必须满足某些事先给定的条件,这些条件称为约束条件,满足约束条件的解称为问题的可行解。满足约束条件的可行解可能不只一个,为了衡量这些可行解的优劣,事先给出一定的标准,这些标准通常以函数的形式给出,这些标准函数称为目标函数。使目标函数取得极值(极大或极小)的可行解称为最优解,这类问题就称为最优化问题[①]。下面的付款问题就是我们日常生活中经常遇到的最优化问题。

付款问题:超市的自动柜员机(POS机)要找给顾客数量最少的现金。例如,要找4元6角现金,如果POS机送出一大堆硬币,比如46个1角钱,

① 最优化问题根据描述约束条件和目标函数的数学模型的特性,以及求解问题的方法,可以分为线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划等。

就让人笑话了,而最好找 2 个 2 元、1 个 5 角和 1 个 1 角。

假定 POS 机中有 n 张面值为 p_i $(1 \leq i \leq n)$ 的货币,用集合 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 表示,如果 POS 机需支付的现金为 A,那么,它必须从 P 中选取一个最小子集 S,使得

$$p_i \in S, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = A(m = |S|) \tag{6.1}$$

如果用向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 S 中所选取的货币,则

$$x_i = \begin{cases} 1 & p_i \in S \\ 0 & p_i \mid S \end{cases} \tag{6.2}$$

那么,POS 机支付的现金必须满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = A \tag{6.3}$$

并且

$$d = \min \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6.4}$$

在上述付款问题中,集合 P 是该问题的输入,满足式(6.1)的解称为可行解,式(6.2)是解的表现形式,因为向量 X 中有 n 个元素,每个元素的取值为 0 或 1,所以,可以有 2^n 个不同的向量,所有这些向量的全体构成该问题的解空间,式(6.3)是该问题的约束条件,式(6.4)是该问题的目标函数,使式(6.4)取得极小值的解称为该问题的最优解。

6.1.2 最优性原理

对于一个具有 n 个输入的最优化问题,其求解过程往往可以划分为若干个阶段,每一阶段的决策仅依赖于前一阶段的状态,由决策所采取的动作使状态发生转移,成为下一阶段决策的依据。如图 6.1 所示,S_0 是初始状态,依据此状态做出决策 P_1,按照 P_1 所采取的动作,使状态转换为 S_1,依据状态 S_1 做出决策 P_2,按照 P_2 所采取的动作,使状态 S_1 转换为 S_2 ……,经过一系列的决策和状态转换,到达最终状态 S_n,从而,一个决策序列在不断变化的状态中产生。这个决策序列产生的过程称为多阶段决策过程。

图 6.1 多阶段决策过程

在多阶段决策过程中,由于每一阶段的决策仅与前一阶段的状态有关,而与如何到达这种状态的方式无关。因此,可以把每一阶段作为一个子问题来处理,然后按顺序求解各个子问题。最优决策是在最后阶段形成的,然后向前推导,直到初始阶段,得到一个最优决策序列,而决策的具体结果和所产生的状态转移,却是由初始阶段开始进行,然后向后迭代,直到得出最终结果——最优解。

假定对一个状态可以做出多个决策,而每一个决策可以产生一个新的状态,动态规划的决策过程如图 6.2 所示。对初始状态 S_0,$P_1 = \{p_{1,1}, p_{1,2}, \cdots, p_{1,r_1}\}$ 是可能的决策集合,由它们产生的状态是 $S_1 = \{s_{1,1}, s_{1,2}, \cdots, s_{1,r_1}\}$,其中 s_{1,k_1} 是由决策 p_{1,k_1} $(1 \leq k_1 \leq r_1)$ 所产生的状态。但此时尚无法判定哪一个决策是最优的,于是,把这些决策的集合作为这

一阶段的子问题的解保存起来(通常用表格的形式),然后,在状态集合 S_1 上做出决策集合 P_2 产生了状态集合 S_2,……,最后,在状态集合 S_{n-1} 上做出决策集合 P_n 产生了状态集合 S_n,则 $S_n=\{s_{n,1}, s_{n,2}, \cdots, s_{n,r_n}\}$ 是最终状态集合,其中只有一个状态是最优的,假设这个状态为 $s_{n,k_n}(1\leq k_n\leq r_n)$,它是由决策 p_{n,k_n} 产生的,则可以确定 p_{n,k_n} 是最优决策,假定决策 p_{n,k_n} 是由状态 $s_{n-1,k_{n-1}}$ 做出的,由此回溯,使状态到达 $s_{n-1,k_{n-1}}$ 的决策是最优决策,这种回溯一直进行到 p_{1,k_1},从而得到一个最优决策序列$\{p_{1,k_1}, p_{2,k_2}, \cdots, p_{n,k_n}\}$。

从上述动态规划的决策过程可以看到,在每一阶段的决策中有一个赖以决策的策略或目标,这种策略或目标是由问题的性质和特点所确定,通常以函数的形式表示并具有递推关系,我们称之为动态规划函数。

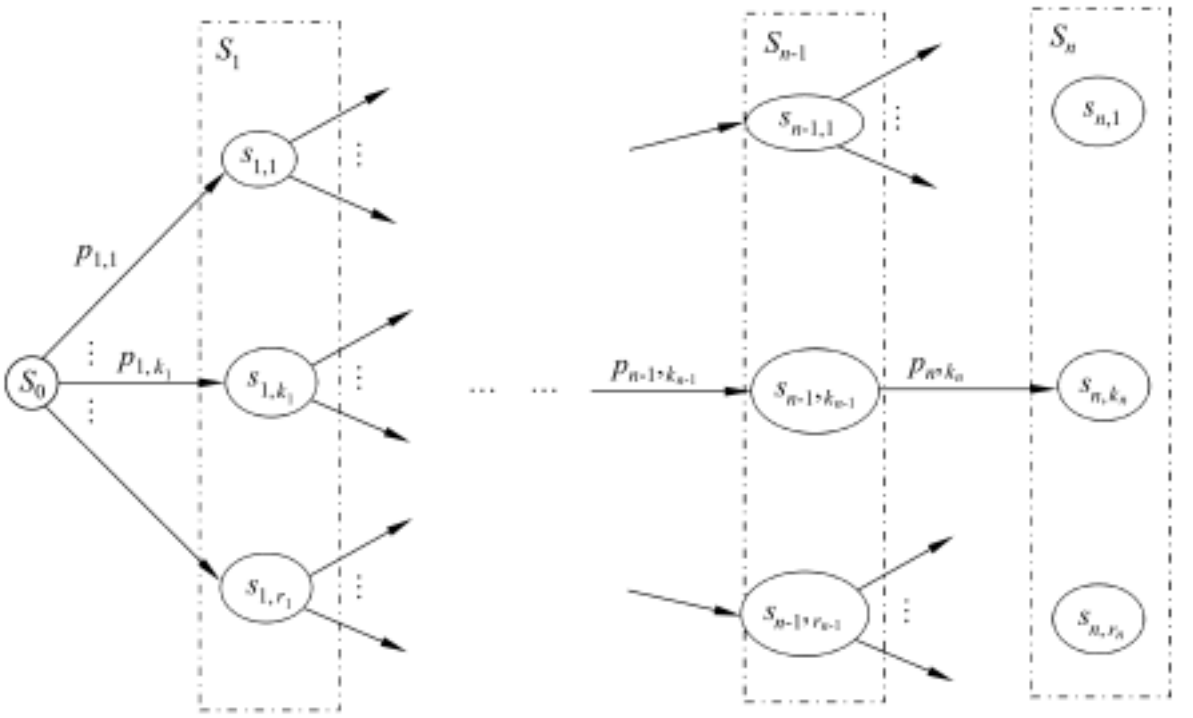


图 6.2　动态规划的决策过程

多阶段决策过程满足最优性原理(optimal principle):无论决策过程的初始状态和初始决策是什么,其余的决策都必须相对于初始决策所产生的当前状态,构成一个最优决策序列。换言之,在多阶段决策中,各子问题的解只与它前面的子问题的解相关,而且各子问题的解都是相对于当前状态的最优解,整个问题的最优解是由各个子问题的最优解构成。如果一个问题满足最优性原理通常称此问题具有最优子结构性质。

6.1.3　动态规划法的设计思想

动态规划法将待求解问题分解成若干个相互重叠的子问题,每个子问题对应决策过程的一个阶段,一般来说,子问题的重叠关系表现在对给定问题求解的递推关系(也就是动态规划函数)中,将子问题的解求解一次并填入表中,当需要再次求解此子问题时,可以通过查表获得该子问题的解而不用再次求解,从而避免了大量的重复计算。为了达到这个目的,可以用一个表来记录所有已解决的子问题的解,这就是动态规划法的设计思想。具体的动态规划法是多种多样的,但它们具有相同的填表形式。

动态规划法的一般过程如图 6.3 所示。

例如,斐波那契数存在如下递推式:

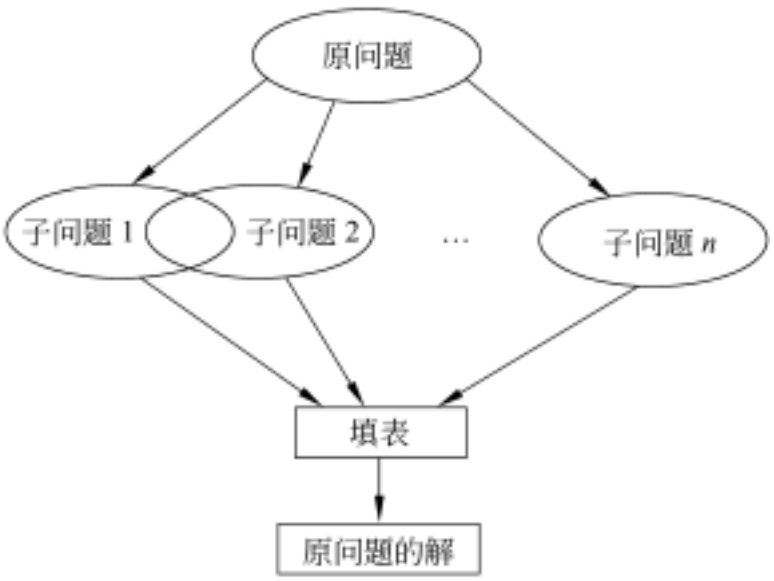


图 6.3 动态规划法的求解过程

$$F(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ 1 & n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & n\geq 2\end{cases}$$

采用分治法计算斐波那契数,由于子问题 $F(n-1)$和 $F(n-2)$具有相互重叠的部分,所以,相同的子问题被重复计算。图 6.4 给出了 $n=5$ 时分治法计算斐波那契数的过程。

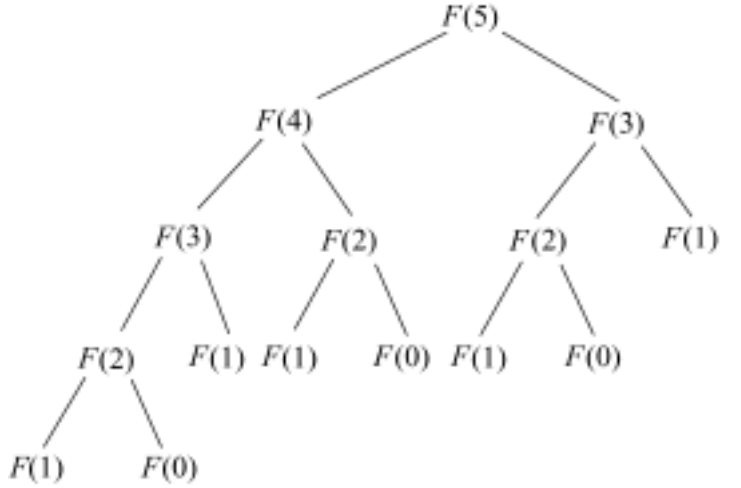


图 6.4 $n=5$ 时分治法计算斐波那契数的过程

注意到,计算 $F(n)$是以计算它的两个重叠子问题 $F(n-1)$和 $F(n-2)$的形式来表达的,所以,可以设计一张表填入 $n+1$ 个 $F(n)$的值,如图 6.5 所示。开始时,根据递推式的初始条件可以直接填入 0 和 1,然后根据递推式作为运算规则计算出其他所有元素,显然,表中最后一项就是 $F(n)$的值。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

图 6.5 动态规划法求解斐波那契数 $F(9)$的填表过程

可以用动态规划法求解的问题除了能够分解为相互重叠的若干子问题外,还要满足最优性原理(也称最优子结构性质),这类问题具有如下特征:该问题的最优解中也包含着其子问题的最优解。在分析问题是否满足最优性原理时,通常先假设由问题的最优解

导出的子问题的解不是最优的,然后再设法说明在这个假设下可构造出比原问题最优解更好的解,从而导致矛盾。

动态规划法利用问题的最优性原理,以自底向上的方式从子问题的最优解逐步构造出整个问题的最优解。应用动态规划法设计算法一般分成 3 个阶段:

(1) 分段: 将原问题分解为若干个相互重叠的子问题。

(2) 分析: 分析问题是否满足最优性原理,找出动态规划函数的递推式。

(3) 求解: 利用递推式自底向上计算,实现动态规划过程。

6.2　图问题中的动态规划法

6.2.1　TSP问题

TSP 问题是指旅行家要旅行 n 个城市,要求各个城市经历且仅经历一次,然后回到出发城市,并要求所走的路程最短。

应 用 实 例

广义旅行商问题(generalized traveling salesman problem, GTSP),其描述是: 把给定的 n 个城市分成 m 个组,旅行商要选择一条访问每个组中一个城市的最短回路。显然,TSP 问题是 GTSP 问题的特例,如果把城市看做集合中的点,TSP 问题的解以访问集合的每个点为特征,而 GTSP 的最佳路径只包含每个子集合中的一个点,因此 TSP 问题与 GTSP 问题有着不同的应用场合。

大规模平面多轮廓加工路径的优化问题常转化为 GTSP 问题来处理。在平面多轮廓加工中,刀具从一条轮廓起点出发,切出整条轮廓后移至下一条轮廓加工,每条轮廓的加工顺序及其起点位置决定了刀具在轮廓间移动的空行程距离。当通过路径优化减少空行程距离时,必须考虑轮廓起点和轮廓加工顺序两方面的因素,因此,路径优化问题可以转化为 GTSP 问题。

各个城市间的距离可以用代价矩阵来表示,如果$(i, j) \notin E$,则 $c_{ij} = \infty$。图 6.6 所示是一个带权图的代价矩阵。

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & 7 \\ 5 & \infty & 2 & 3 \\ 6 & 4 & \infty & 2 \\ 3 & 7 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

图 6.6　带权图的代价矩阵

设 $s, s_1, s_2, \cdots, s_p, s$ 是从 s 出发的一条路径长度最短的简单回路,假设从 s 到下一个城市 s_1 已经求出,则问题转化为求从 s_1 到 s 的最短路径,显然 $s_1, s_2, \cdots, s_p, s$ 一定构成一条从 s_1 到 s 的最短路径,如若不然,设 $s_1, r_1, r_2, \cdots, r_q, s$ 是一条从 s_1 到 s 的最短路径且经过 $n-1$ 个不同城市,则 $s, s_1, r_1, r_2, \cdots, r_q, s$ 将是一条从 s 出发的路径长度最短的简单回路且比 $s, s_1, s_2, \cdots, s_p, s$ 要短,从而导致矛盾。所以,TSP 问题满足最优性原理。

假设从顶点 i 出发,令 $d(i, V')$ 表示从顶点 i 出发经过 V' 中各个顶点一次且仅一次,最后回到出发点 i 的最短路径长度,开始时,$V' = V - \{i\}$,于是,TSP 问题的动态规划函

数为:

$$d(i, V') = \min\{c_{ik} + d(k, V' - \{k\})\} \quad (k \in V') \tag{6.5}$$

$$d(k, \{\}) = c_{ki} \quad (k \neq i) \tag{6.6}$$

在图 6.6 所示带权图中,从城市 0 出发,经城市 1、2、3 然后回到城市 0 的最短路径长度是:

$$d(0, \{1, 2, 3\}) = \min\{c_{01} + d(1, \{2, 3\}), c_{02} + d(2, \{1, 3\}), c_{03} + d(3, \{1, 2\})\}$$

这是最后一个阶段的决策,它必须依据 $d(1, \{2, 3\})$、$d(2, \{1, 3\})$和 $d(3, \{1, 2\})$的计算结果,而:

$$d(1, \{2, 3\}) = \min\{c_{12} + d(2, \{3\}), c_{13} + d(3, \{2\})\}$$

$$d(2, \{1, 3\}) = \min\{c_{21} + d(1, \{3\}), c_{23} + d(3, \{1\})\}$$

$$d(3, \{1, 2\}) = \min\{c_{31} + d(1, \{2\}), c_{32} + d(2, \{1\})\}$$

这一阶段的决策又依赖于下面的计算结果:

$$d(1, \{2\}) = c_{12} + d(2, \{\}) \quad d(2, \{3\}) = c_{23} + d(3, \{\}) \quad d(3, \{2\}) = c_{32} + d(2, \{\})$$

$$d(1, \{3\}) = c_{13} + d(3, \{\}) \quad d(2, \{1\}) = c_{21} + d(1, \{\}) \quad d(3, \{1\}) = c_{31} + d(1, \{\})$$

而下式可以直接获得(括号中是该决策引起的状态转移):

$$d(1, \{\}) = c_{10} = 5(1\rightarrow0) \quad d(2, \{\}) = c_{20} = 6(2\rightarrow0) \quad d(3, \{\}) = c_{30} = 3(3\rightarrow0)$$

再向前推导,有:

$$d(1, \{2\}) = c_{12} + d(2, \{\}) = 2 + 6 = 8(1\rightarrow2)$$

$$d(1, \{3\}) = c_{13} + d(3, \{\}) = 3 + 3 = 6(1\rightarrow3)$$

$$d(2, \{3\}) = c_{23} + d(3, \{\}) = 2 + 3 = 5(2\rightarrow3)$$

$$d(2, \{1\}) = c_{21} + d(1, \{\}) = 4 + 5 = 9(2\rightarrow1)$$

$$d(3, \{1\}) = c_{31} + d(1, \{\}) = 7 + 5 = 12(3\rightarrow1)$$

$$d(3, \{2\}) = c_{32} + d(2, \{\}) = 5 + 6 = 11(3\rightarrow2)$$

再向前推导,有:

$$d(1, \{2, 3\}) = \min\{c_{12} + d(2, \{3\}), c_{13} + d(3, \{2\})\} = \min\{2 + 5, 3 + 11\} = 7(1\rightarrow2)$$

$$d(2, \{1, 3\}) = \min\{c_{21} + d(1, \{3\}), c_{23} + d(3, \{1\})\} = \min\{4 + 6, 2 + 12\} = 10(2\rightarrow1)$$

$$d(3, \{1, 2\}) = \min\{c_{31} + d(1, \{2\}), c_{32} + d(2, \{1\})\} = \min\{7 + 8, 5 + 9\} = 14(3\rightarrow2)$$

最后有:

$$d(0, \{1, 2, 3\}) = \min\{c_{01} + d(1, \{2, 3\}), c_{02} + d(2, \{1, 3\}), c_{03} + d(3, \{1, 2\})\}$$
$$= \min\{3 + 7, 6 + 10, 7 + 14\} = 10(0\rightarrow1)$$

所以,从顶点 0 出发的 TSP 问题的最短路径长度为 10,路径是 0→1→2→3→0。

假设对 n 个顶点分别用 0～$n-1$ 的数字编号,下面考虑从顶点 0 出发求解 TSP 问题的填表形式。首先,按个数为 1,2,…,$n-1$ 的顺序生成 1～$n-1$ 个元素的子集存放在数组 V[2^{n-1}]中,例如当 $n=4$ 时,V[1] = {1}, V[2] = {2}, V[3] = {3}, V[4] = {1, 2}, V[5] = {1, 3}, V[6] = {2, 3}, V[7] = {1, 2, 3}。设数组 d[n][2^{n-1}]存放迭代结果,其中 d[i][j]表示从顶点 i 经过子集 V[j]中的顶点一次且仅一次,最后回到出发点 0 的最短路径长度。首先,根据式(6.6)将数组 d 的第 0 列初始化,然后根据式(6.5)逐列计算,其填表过程如图 6.7 所示。

i \ j	{}	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
0								10
1	5		8	6			7	
2	6	9		5		10		
3	3	12	11		14			

图 6.7　动态规划法的填表过程

设顶点之间的代价存放在数组 c[n][n]中,动态规划法求解 TSP 问题

点个数为 n,则源点 s 的编号为 0,终点 t 的编号为 $n-1$,并且,对图中的任何一条边 (u, v),顶点 u 的编号小于顶点 v 的编号。图 6.8 所示是一个含有 10 个顶点的多段图。

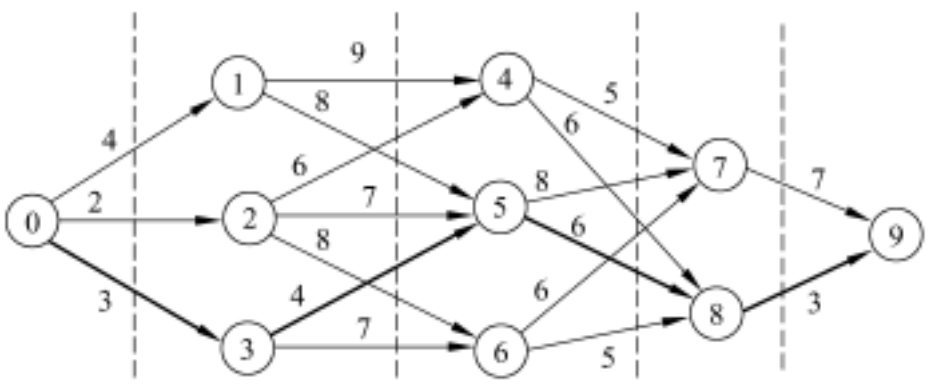


图 6.8 一个多段图

设 s, s_1, s_2, …, s_p, t 是从 s 到 t 的一条最短路径,从源点 s 开始,设从 s 到下一段的顶点 s_1 已经求出,则问题转化为求从 s_1 到 t 的最短路径,显然 s_1, s_2, …, s_p, t 一定构成一条从 s_1 到 t 的最短路径,如若不然,设 s_1, r_1, r_2, …, r_q, t 是一条从 s_1 到 t 的最短路径,则 s, s_1, r_1, r_2, …, r_q, t 将是一条从 s 到 t 的路径且比 s, s_1, s_2, …, s_p, t 的路径长度要短,从而导致矛盾。所以,多段图的最短路径问题满足最优性原理。

在图 6.8 中,对多段图的边 (u, v),用 c_{uv} 表示边上的权值,将从源点 s 到终点 t 的最短路径记为 $d(s, t)$,则从源点 0 到终点 9 的最短路径 $d(0, 9)$ 由下式确定:

$$d(0, 9) = \min\{c_{01} + d(1, 9), c_{02} + d(2, 9), c_{03} + d(3, 9)\}$$

这是最后一个阶段的决策,它依赖于 $d(1, 9)$、$d(2, 9)$和 $d(3, 9)$的计算结果,而

$$d(1, 9) = \min\{c_{14} + d(4, 9), c_{15} + d(5, 9)\}$$

$$d(2, 9) = \min\{c_{24} + d(4, 9), c_{25} + d(5, 9), c_{26} + d(6, 9)\}$$

$$d(3, 9) = \min\{c_{35} + d(5, 9), c_{36} + d(6, 9)\}$$

这一阶段的决策又依赖于 $d(4, 9)$、$d(5, 9)$和 $d(6, 9)$的计算结果:

$$d(4, 9) = \min\{c_{47} + d(7, 9), c_{48} + d(8, 9)\}$$

$$d(5, 9) = \min\{c_{57} + d(7, 9), c_{58} + d(8, 9)\}$$

$$d(6, 9) = \min\{c_{67} + d(7, 9), c_{68} + d(8, 9)\}$$

这一阶段的决策依赖于 $d(7, 9)$和 $d(8, 9)$的计算,而 $d(7, 9)$和 $d(8, 9)$可以直接获得(括号中给出了决策产生的状态转移):

$$d(7, 9) = c_{79} = 7 (7 \rightarrow 9)$$

$$d(8, 9) = c_{89} = 3 (8 \rightarrow 9)$$

再向前推导,有:

$$d(6, 9) = \min\{c_{67} + d(7, 9), c_{68} + d(8, 9)\} = \min\{6 + 7, 5 + 3\} = 8 (6 \rightarrow 8)$$

$$d(5, 9) = \min\{c_{57} + d(7, 9), c_{58} + d(8, 9)\} = \min\{8 + 7, 6 + 3\} = 9 (5 \rightarrow 8)$$

$$d(4, 9) = \min\{c_{47} + d(7, 9), c_{48} + d(8, 9)\} = \min\{5 + 7, 6 + 3\} = 9 (4 \rightarrow 8)$$

$$d(3, 9) = \min\{c_{35} + d(5, 9), c_{36} + d(6, 9)\} = \min\{4 + 9, 7 + 8\} = 13 (3 \rightarrow 5)$$

$$d(2, 9) = \min\{c_{24} + d(4, 9), c_{25} + d(5, 9), c_{26} + d(6, 9)\}$$

$$= \min\{6 + 9, 7 + 9, 8 + 8\} = 15 (2 \rightarrow 4)$$

$$d(1,9)=\min\{c_{14}+d(4,9),\ c_{15}+d(5,9)\}=\min\{9+9,\ 8+9\}=17\ (1\rightarrow 5)$$

$$d(0,9)=\min\{c_{01}+d(1,9),\ c_{02}+d(2,9),\ c_{03}+d(3,9)\}$$

$$=\min\{4+17,\ 2+15,\ 3+13\}=16\ (0\rightarrow 3)$$

最后，得到最短路径为 0→3→5→8→9，长度为 16。

下面考虑多段图的最短路径问题的填表形式。

用一个数组 cost[n]作为存储子问题解的表格，cost[i]表示从顶点 i 到终点 $n-1$ 的最短路径，数组 path[n]存储状态，path[i]表示从顶点 i 到终点 $n-1$ 的路径上顶点 i 的下一个顶点。则：

$$\text{cost}[i]=\min\{c_{ij}+\text{cost}[j]\}\quad (i\leq j\leq n \text{ 且顶点 } j \text{ 是顶点 } i \text{ 的邻接点}) \tag{6.7}$$

$$\text{path}[i]=\text{使 } c_{ij}+\text{cost}[j] \text{ 最小的 } j \tag{6.8}$$

动态规划法求解多段图的最短路径问题的算法如下：

伪代码

算法 6.2——多段图的最短路径

```
1. 初始化: 数组 cost[n]初始化为最大值,数组 path[n]初始化为 -1;
2. for (i= n - 2; i> =0; i--)
   2.1  对顶点 i 的每一个邻接点 j,根据式(6.7)计算 cost[i];
   2.2  根据式(6.8)计算 path[i];
3. 输出最短路径长度 cost[0];
4. 输出最短路径经过的顶点:
   4.1  i=0;
   4.2  循环直到 path[i]=n-1
        4.2.1  输出 path[i];
        4.2.2  i=path[i];
```

算法 6.2 主要由 3 部分组成：第 1 部分是初始化部分，其时间性能为 $O(n)$；第 2 部分是依次计算各个顶点到终点的最短路径，由两层嵌套的循环组成，外层循环执行 $n-1$ 次，内层循环对所有出边进行计算，并且在所有循环中，每条出边只计算一次。假定图的边数为 m，则这部分的时间性能是 $O(m)$；第 3 部分是输出最短路径经过的顶点，其时间性能是 $O(n)$。所以，算法 6.2 的时间复杂性为 $O(n+m)$。

6.3　组合问题中的动态规划法

6.3.1　0/1背包问题

给定 n 种物品和一个背包，物品 i 的重量是 w_i，其价值为 v_i，背包的容量为 C。背包问题是如何选择装入背包的物品，使得装入背包中物品的总价值最大？如果在选择装入背包的物品时，对每种物品 i 只有两种选择：装入背包或不装入背包，即不能将物品 i 装入背包多次，也不能只装入物品 i 的一部分，则称为 0/1 背包问题。

在 0/1 背包问题中，物品 i 或者被装入背包，或者不被装入背包，设 x_i 表示物品 i 装

入背包的情况，则当 $x_i = 0$ 时，表示物品 i 没有被装入背包，$x_i = 1$ 时，表示物品 i 被装入背包。根据问题的要求，有如下约束条件和目标函数：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C \\ x_i \in \{0,1\} \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases} \tag{6.9}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \tag{6.10}$$

于是，问题归结为寻找一个满足约束条件式(6.9)，并使目标函数式(6.10)达到最大的解向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

首先证明 0/1 背包问题满足最优性原理。

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是所给 0/1 背包问题的一个最优解，则$(x_2, \cdots, x_n)$是下面一个子问题的最优解：

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^{n} w_i x_i \leq C - w_1 x_1 \\ x_i \in \{0,1\} \quad (2 \leq i \leq n) \end{cases}, \qquad \max \sum_{i=2}^{n} v_i x_i$$

如若不然，设$(y_2, \cdots, y_n)$是上述子问题的一个最优解，则 $\sum_{i=2}^{n} v_i y_i > \sum_{i=2}^{n} v_i x_i$，且 $w_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} w_i y_i \leq C$。因此，$v_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} v_i y_i > v_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} v_i x_i = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$，这说明$(x_1, y_2, \cdots, y_n)$是所给 0/1 背包问题比$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$更优的解，从而导致矛盾。

0/1 背包问题可以看作是决策一个序列$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，对任一变量 x_i 的决策是决定 $x_i = 1$ 还是 $x_i = 0$。在对 x_{i-1} 决策后，已确定了$(x_1, \cdots, x_{i-1})$，在决策 x_i 时，问题处于下列两种状态之一：

(1) 背包容量不足以装入物品 i，则 $x_i = 0$，背包不增加价值；

(2) 背包容量可以装入物品 i，则 $x_i = 1$，背包的价值增加了 v_i。

这两种情况下背包价值的最大者应该是对 x_i 决策后的背包价值。令 $V(i, j)$ 表示在前 $i(1 \leq i \leq n)$ 个物品中能够装入容量为 $j(1 \leq j \leq C)$ 的背包中的物品的最大值，则可以得到如下动态规划函数：

$$V(i, 0) = V(0, j) = 0 \tag{6.11}$$

$$V(i, j) = \begin{cases} V(i-1, j) & j < w_i \\ \max\{V(i-1, j), V(i-1, j-w_i) + v_i\} & j > w_i \end{cases} \tag{6.12}$$

式(6.11)表明：把前面 i 个物品装入容量为 0 的背包和把 0 个物品装入容量为 j 的背包，得到的价值均为 0。式(6.12)的第一个式子表明：如果第 i 个物品的重量大于背包的容量，则装入前 i 个物品得到的最大价值和装入前 $i-1$ 个物品得到的最大价值是相同的，即物品 i 不能装入背包；第二个式子表明：如果第 i 个物品的重量小于背包的容量，则会有以下两种情况：(1)如果把第 i 个物品装入背包，则背包中物品的价值等于把前 $i-1$ 个物品装入容量为 $j - w_i$ 的背包中的价值加上第 i 个物品的价值 v_i；(2)如果第 i 个物品没有装入背包，则背包中物品的价值就等于把前 $i-1$ 个物品装入容量为 j 的背包中所取

得的价值。显然,取二者中价值较大者作为把前 i 个物品装入容量为 j 的背包中的最优解。

按下述方法来划分阶段: 第一阶段,只装入前 1 个物品,确定在各种情况下的背包能够得到的最大价值;第二阶段,只装入前 2 个物品,确定在各种情况下的背包能够得到的最大价值;以此类推,直到第 n 个阶段。最后,$V(n, C)$便是在容量为 C的背包中装入 n 个物品时取得的最大价值。为了确定装入背包的具体物品,从 $V(n, C)$的值向前推,如果 $V(n, C) > V(n-1, C)$,表明第 n 个物品被装入背包,前 $n-1$ 个物品被装入容量为 $C - w_n$ 的背包中;否则,第 n 个物品没有被装入背包,前 $n-1$ 个物品被装入容量为 C的背包中。以此类推,直到确定第 1 个物品是否被装入背包中为止。由此,得到如下函数:

$$x_i = \begin{cases} 0 & V(i, j) = V(i-1, j) \\ 1, j = j - w_i & V(i, j) > V(i-1, j) \end{cases} \tag{6.13}$$

例如,有 5 个物品,其重量分别是{2, 2, 6, 5, 4},价值分别为{6, 3, 5, 4, 6},背包的容量为 10,求装入背包的物品和获得的最大价值。

根据动态规划函数,用一个$(n+1)\times(C+1)$的二维表 V, $V[i][j]$表示把前 i 个物品装入容量为 j 的背包中获得的最大价值,根据式(6.11)把表的第 0 行和第 0 列初始化为 0,然后一行一行地计算 $V[i][j]$,如图 6.9 所示。

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$w_1=2$ $v_1=6$	1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6	6	$x_1=1$
$w_2=2$ $v_2=3$	2	0	0	6	6	9	9	9	9	9	9	9	$x_2=1$
$w_3=6$ $v_3=5$	3	0	0	6	6	9	9	9	9	11	11	14	$x_3=0$
$w_4=5$ $v_4=4$	4	0	0	6	6	9	9	9	10	11	13	14	$x_4=0$
$w_5=5$ $v_5=6$	5	0	0	6	6	9	9	12	12	15	15	15	$x_5=1$

图 6.9　0/1 背包求解(填表)过程

从图 6.9 可以看到,装入背包的物品的最大价值是 15,根据式(6.13),装入背包的物品为 X = {1, 1, 0, 0, 1}。

设 n 个物品的重量存储在数组 w[n]中,价值存储在数组 v[n]中,背包容量为 C,数组 V[n+1][C+1]存放迭代结果,其中 V[i][j]表示前 i 个物品装入容量为 j 的背包中获得的最大价值,数组 x[n]存储装入背包的物品,动态规划法求解 0/1 背包问题的算法如下:

C++描述

算法 6.3——0/1 背包问题

```
int KnapSack(int n, int w[ ], int v[ ])
{
    for (i=0; i<=n; i++)    //初始化第 0 列
      V[i][0]=0;
    for (j=0; j<=C; j++)    //初始化第 0 行
      V[0][j]=0;
```

```
    for (i=1; i<=n; i++)   //计算第 i 行,进行第 i 次迭代
      for (j=1; j<=C; j++)
        if (j<w[i])
            V[i][j]=V[i-1][j];
        else
            V[i][j]=max(V[i-1][j], V[i-1][j-w[i]]+v[i]);
    j=C;     //求装入背包的物品
    for (i=n; i>0; i--)
    {
      if (V[i][j]>V[i-1][j]) {
        x[i]=1;
        j=j-w[i];
      }
      else x[i]=0;
    }
    return V[n][C];     //返回背包取得的最大价值
}
```

在算法 6 3 中,第 1 个 for 循环的时间性能是 $O(n)$,第 2 个 for 循环的时间性能是 $O(C)$,第 3 个循环是两层嵌套的 for 循环,其时间性能是 $O(n\times C)$,第 4 个 for 循环的时间性能是 $O(n)$,所以,算法 6 .3 的时间复杂性为 $O(n\times C)$。

6.3.2 最长公共子序列问题

对给定序列 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$和序列 $Z=(z_1, z_2, \cdots, z_k)$,$Z$ 是 X 的子序列当且仅当存在一个严格递增下标序列$(i1, i2, \cdots, ik)$,使得对于所有 $j=1, 2, \cdots, k$,有 $z_j=x_{ij}$ $(1\leq ij\leq m)$。例如,对于序列 $X=(a, b, c, b, d, a, b)$,序列(b, c, d, b)是 X 的一个长度为 4 的子序列,相应的递增下标序列为$(2, 3, 5, 7)$,序列(a, c, b, d, b)是 X 的一个长度为 5 的子序列,相应的递增下标序列为$(1, 3, 4, 5, 7)$。可见,一个给定序列的子序列可以有多个。

给定两个序列 X 和 Y,当另一个序列 Z 既是 X 的子序列又是 Y 的子序列时,称 Z 是序列 X 和 Y 的公共子序列。例如,序列 $X=(a, b, c, b, d, b)$,$Y=(a, c, b, b, a, b, d, b, b)$,序列$(a, c, b)$是序列 X 和 Y 的一个长度为 3 的公共子序列,序列(a, b, b, d, b)是序列 X 和 Y 的一个长度为 5 的公共子序列。最长公共子序列问题就是在序列 X 和 Y 的公共子序列中查找长度最长的公共子序列。

设序列 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$的最长公共子序列为 $Z=\{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$,记 X_k为序列 X 中前 k 个连续字符组成的子序列,Y_k为序列 Y 中前 k 个连续字符组成的子序列,Z_k为序列 Z 中前 k 个连续字符组成的子序列,显然有下式成立:

(1) 若 $x_m=y_n$,则 $z_k=x_m=y_n$,且 Z_{k-1}是 X_{m-1}和 Y_{n-1}的最长公共子序列;

(2) 若 $x_m\neq y_n$且 $z_k\neq x_m$,则 Z 是 X_{m-1}和 Y 的最长公共子序列;

(3) 若 $x_m\neq y_n$且 $z_k\neq y_n$,则 Z 是 X 和 Y_{n-1}的最长公共子序列。

可见,两个序列的最长公共子序列包含了这两个序列的前缀序列的最长公共子序列。因此,最长公共子序列问题满足最优性原理。

要找出序列 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$的最长公共子序列,可按下述递推方式计算:当 $x_m=y_n$时,找出 X_{m-1}和 Y_{n-1}的最长公共子序列,然后在其尾部加上 x_m即可得到 X 和 Y 的最长公共子序列;当 $x_m \neq y_n$时,必须求解两个子问题:找出 X_{m-1}和 Y 的最长公共子序列以及 X_m和 Y_{n-1} 的最长公共子序列,这两个公共子序列中的较长者即为 X 和 Y 的最长公共子序列。用 $L[i][j]$表示子序列 X_i和 Y_j的最长公共子序列的长度,可得如下动态规划函数:

$$L[0][0]=L[i][0]=L[0][j]=0 \quad (1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n) \tag{6.14}$$

$$L[i][j]=\begin{cases} L[i-1][j-1]+1 & x_i=y_j,\ i>1,\ j>1 \\ \max\{L[i][j-1], L[i-1][j]\} & x_i\neq y_j,\ i>1,\ j>1 \end{cases} \tag{6.15}$$

由此,把序列 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$的最长公共子序列的搜索分为 m 个阶段,第 1 阶段,按照式(6.15)计算 X_1 和 Y_j 的最长公共子序列长度 $L[1][j]$ $(1\leq j\leq n)$,第 2 阶段,按照式(6.15)计算 X_2 和 Y_j 的最长公共子序列长度 $L[2][j]$ $(1\leq j\leq n)$,以此类推,最后在第 m 阶段,计算 X_m 和 Y_j 的最长公共子序列长度 $L[m][j]$ $(1\leq j\leq n)$,则 $L[m][n]$就是序列 X_m和 Y_n的最长公共子序列的长度。

为了得到序列 X_m和 Y_n 具体的最长公共子序列,设二维表 $S[m+1][n+1]$,其中 $S[i][j]$表示在计算 $L[i][j]$的过程中的搜索状态,并且有:

$$S[i][j]=\begin{cases} 1 & x_i=y_j \\ 2 & x_i\neq y_j \text{ 且 } L[i][j-1]\geq L[i-1][j] \\ 3 & x_i\neq y_j \text{ 且 } L[i][j-1]<L[i-1][j] \end{cases} \tag{6.16}$$

若 $S[i][j]=1$,表明 $x_i=y_j$,则下一个搜索方向是 $S[i-1][j-1]$;若 $S[i][j]=2$,表明 $x_i\neq y_j$ 且 $L[i][j-1]\geq L[i-1][j]$,则下一个搜索方向是 $S[i][j-1]$;若 $S[i][j]=3$,表明 $x_i\neq y_j$ 且 $L[i][j-1]<L[i-1][j]$,则下一个搜索方向是 $S[i-1][j]$。

例如,序列 $X=(a, b, c, b, d, b)$,$Y=(a, c, b, b, a, b, d, b, b)$,建立两个(m+1)×(n+1)的二维表 L 和表 S,分别存放搜索过程中得到的子序列的长度和状态。首先把表 L 和表 S 的第 0 行和第 0 列初始化为 0,然后根据式(6.15)和式(6.16)逐行计算填入表 L 和表 S 中。计算结果如图 6.10 所示。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2
3	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
4	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3
5	0	1	2	3	3	3	3	4	4	4
6	0	1	2	3	4	4	4	4	5	**5**

(a) 长度矩阵 L

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	↖1	2	2	2	1	2	2	2	2
2	0	3	↖2	1	1	2	1	2	1	1
3	0	3	1	↖2	←2	←2	2	2	2	2
4	0	3	3	1	1	3	↖1	3	1	1
5	0	3	3	3	2	2	2	↖1	2	2
6	0	3	3	1	1	3	1	2	↖1	↖1

(b) 状态矩阵 S

图 6.10　最长公共子序列求解示意图

从图 6.10 可以看出,最长公共子序列的长度为 5,最长公共子序列是(a, c, b, d,

b),在序列 *X* 中的递增下标序列是(1, 3, 4, 5, 6),在序列 *Y* 中的递增下标序列是(1, 2, 6, 7, 9),即二维表 *S* 中斜线所在位置。

设序列 *X* 存储在数组 x[m]中,序列 *Y* 存储在数组 y[n]中,二维数组 L[m+1][n+1]存储最长公共子序列的长度的迭代过程,S[m+1][n+1]存储相应的状态,最长公共子序列存储在数组 z[k]中,动态规划法求解最长公共子序列的算法如下:

C++描述

算法 6.4——最长公共子序列问题

```
int CommonOrder(int m, int n, int x[ ], int y[ ], int z[ ])
{
    for (j=0; j<=n; j++)    //初始化第 0 行
      L[0][j]=0;
   for (i=0; j<=m; i++)    //初始化第 0 列
      L[i][0]=0;
   for (i=1; i<=m; i++)
     for (j=1; j<=n; j++)
       if (x[i]==y[j]) { L[i][j]=L[i-1][j-1]+1; S[i][j]=1; }
       else if (L[i][j-1]>=L[i-1][j]) { L[i][j]=L[i][j-1]; S[i][j]=2; }
            else {L[i][j]=L[i-1][j]; S[i][j]=3; }
   i=m; j=n; k=L[m][n];
   for (i>0 && j>0)
   {
     if (S[i][j]==1) { z[k]=x[i]; k--; i--; j--; }
     else if (S[i][j]==2) j--;
          else i--;
   }
   return L[m][n];
}
```

在算法 6.4 中,第 1 个 for 循环的时间性能是 $O(n)$,第 2 个 for 循环的时间性能是 $O(m)$,第 3 个循环是两层嵌套的 for 循环,其时间性能是 $O(m\times n)$,第 4 个 for 循环的时间性能是 $O(k)$,而 $k\leq\min\{m,n\}$,所以,算法 6.4 的时间复杂性是 $O(m\times n)$。

6.4 查找问题中的动态规划法

6.4.1 最优二叉查找树

设$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$是 n 个记录的集合,其查找概率分别是$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$,最优二叉查找树(optimal binary search trees)是以这 n 个记录构成的二叉查找树中具有最少平均比较次数的二叉查找树,即 $\sum_{i=1}^{n} p_i \times c_i$ 最小,其中 p_i 是记录 r_i 的查找概率,c_i 是在二叉查找树中查找 r_i 的比较次数。

例如,集合{ A, B, C, D}的查找概率是{0 .1, 0 .2, 0 .4, 0 .3},图 6 .11 给出了 3 棵二叉查找树,在查找成功的情况下,二叉查找树(a)的平均比较次数是 0 .1×1 + 0 .2×2 + 0 .4×3 + 0 .3×4 = 2 .9,二叉查找树(b)的平均比较次数是 0 .1×2 + 0 .2×1 + 0 .4×2 + 0 .3×3 = 2 .1,最优二叉查找树是(c),平均比较次数是 0 .1×3 + 0 .2×2 + 0 .4×1 + 0 .3×2 = 1 .7。

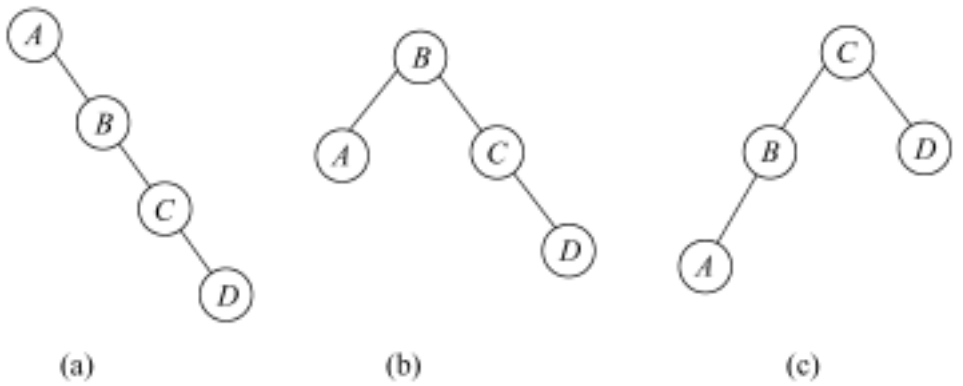


图 6 .11　二叉查找树示例

将由{ r_1, r_2, …, r_n}构成的二叉查找树记为 $T(1, n)$,其中 $r_k(1 \leq k \leq n)$是 $T(1, n)$的根结点,则其左子树 $T(1, k-1)$由{ r_1, …, r_{k-1}}构成,其右子树 $T(k+1, n)$由{ r_{k+1}, …, 猃}构成,如图 6 .12 所示。显然,若 $T(1, n)$是最优二叉查找树,则其左子树 $T(1, k-1)$和右子树 $T(k+1, n)$也是最优二叉查找树,如若不然,假设 $T'(1, k-1)$是比 $T(1, k-1)$更优的二叉查找树,则 $T'(1, k-1)$的平均比较次数小于 $T(1, k-1)$的平均比较次数,从而由 $T'(1, k-1)$、r_k和 $T(k+1, n)$构成的二叉查找树 $T'(1, n)$的平均比较次数小于 $T(1, n)$的平均比较次数,这与 $T(1, n)$是最优二叉查找树的假设相矛盾。因此最优二叉查找树满足最优性原理。

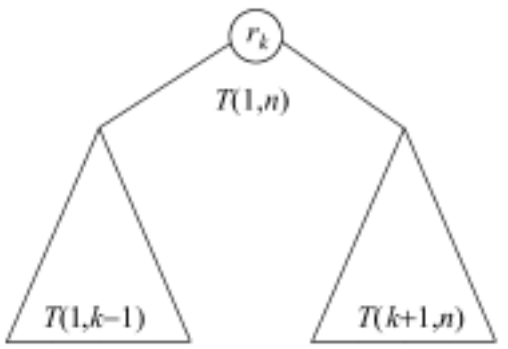


图 6 .12　以 r_k 为根的二叉查找树

设 $T(i, j)$是由记录{ r_i, …, r_j}$(1 \leq i \leq j \leq n)$构成的二叉查找树, $C(i, j)$是这棵二叉查找树的平均比较次数。虽然最后的结果是 $C(1, n)$,但遵循动态规划法的求解方法,需要求出所有较小子问题 $C(i, j)$的值,考虑从{ r_i, …, r_j}中选择一个记录 r_k作为二叉查找树的根结点,可以得到如下关系:

$$C(i, j) = \min_{i \leq k \leq j} \left\{ p_k \times 1 + \sum_{s=i}^{k-1} p_s \times (r_s \text{ 在 } T(i, k-1) \text{ 中的层数} + 1) + \sum_{s=k+1}^{j} p_s \times (r_s \text{在 } T(k+1, n) \text{ 中的层数} + 1) \right\}$$

$$= \min_{i \leq k \leq j} \left\{ p_k + \sum_{s=i}^{k-1} p_s \times r_s \text{ 在 } T(i, k-1) \text{ 中的层数} + \sum_{s=i}^{k-1} p_s + \sum_{s=k+1}^{j} p_s \times r_s \text{ 在 } T(k+1, n) \text{ 中的层数} + \sum_{s=k+1}^{j} p_s \right\}$$

$$= \min_{i \le k \le j}\left\{ \sum_{s=i}^{k-1} p_s \times r_s \text{ 在 } T(i, k-1) \text{ 中的层数} + \sum_{s=k+1}^{j} p_s \times r_s \text{在 } T(k+1, n) \text{ 中的层数} + \sum_{s=i}^{j} p_s \right\}$$

$$= \min_{i \le k \le j}\left\{ C(i, k-1) + C(k+1, j) + \sum_{s=i}^{j} p_s \right\}$$

因此,得到如下动态规划函数:

$$C(i, i-1) = 0 \quad (1 \le i \le n+1) \tag{6.17}$$

$$C(i, i) = p_i \quad (1 \le i \le n) \tag{6.18}$$

$$C(i, j) = \min\left\{ C(i, k-1) + C(k+1, j) + \sum_{s=i}^{j} p_s \right\} \quad (1 \le i \le j \le n,\ i \le k \le j) \tag{6.19}$$

式(6.17)解释为空树的比较次数为 0,式(6.18)解释为只包含记录 r_i 的二叉查找树。设一个二维表 $C[n+1][n+1]$,其中 $C[i][j]$ 表示二叉查找树 $T(i, j)$ 的平均比较次数。注意,在式(6.19)中,当 $k=1$ 时,求 $C[i][j]$ 需要用到 $C[i][0]$,当 $k=n$ 时,求 $C[i][j]$ 需要用到 $C[n+1][j]$,所以,二维表 $C[n+1][n+1]$ 行下标的范围为 1～$n+1$,列下标的范围为 0～n。为了在求出由 $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ 构成的二叉查找树的平均比较次数的同时得到最优二叉查找树,设一个二维表 $R[n+1][n+1]$,其下标范围与二维表 C 相同,$R[i][j]$ 表示二叉查找树 $T(i, j)$ 的根结点的序号。

例如,集合 $\{A, B, C, D\}$ 的查找概率是 $\{0.1, 0.2, 0.4, 0.3\}$,二维表 C 和 R 的初始情况如图 6.13 所示。

	0	1	2	3	4
1	0	0.1			
2		0	0.2		
3			0	0.4	
4				0	0.3
5					0

(a) 二维表 C

	0	1	2	3	4
1		1			
2			2		
3				3	
4					4
5					

(b) 二维表 R

图 6.13 初始表的状态

在二维表 C 和 R 中只需计算主对角线以上的元素,首先计算 $C(1, 2)$:

$$C(1,2) = \min\left\{ \begin{array}{l} k=1: C(1,0) + C(2,2) + \sum_{s=1}^{2} p_s = 0 + 0.2 + 0.3 = 0.5 \\ k=2: C(1,1) + C(3,2) + \sum_{s=1}^{2} p_s = 0.1 + 0 + 0.3 = 0.4 \end{array} \right\} = 0.4$$

因此,在前两个记录构成的最优二叉查找树的根结点的序号是 2,按对角线逐条计算每一个 $C(i, j)$ 和 $R(i, j)$,得到如图 6.14 所示的最终表。

由图 6.14 可以看到,最优二叉查找树的平均比较次数是 1.7,因为 R(1, 4) = 3,所以,这棵最优二叉查找树的根结点是 C,由二叉查找树的性质,它的左子树只包含结点 A

	0	1	2	3	4	
1	0	0.1	0.4	1.1	1.7	d=3
2		0	0.2	0.8	1.4	d=2
3			0	0.4	1.0	d=1
4				0	0.3	
5					0	

(a) 二维表 C

	0	1	2	3	4	
1		1	2	3	3	d=3
2			2	3	3	d=2
3				3	3	d=1
4					4	
5						

(b) 二维表 R

图 6.14　最终表的状态

和 B,右子树包含结点 D。因为 R(1,2) = 2,所以左子树的根结点是 B,因为 $R(1,1) = 1$,所以结点 B 的左孩子是 A,因为 $R(4,4) = 4$,所以结点 C 的右孩子是 D。图 6.11(c)完整地展示了这棵最优二叉查找树。

设 n 个字符的查找概率存储在数组 $p[n]$中,动态规划法求解最优二叉查找树的算法如下:

C++描述

算法 6.5——最优二叉查找树

```
double OptimalBST(int n, double p[ ], double C[ ][ ], int R[ ][ ] )
{
   for (i= 1; i< =n; i++ )  // 按式(6.17)和式(6.18)初始化
   {
      C[i][i - 1] = 0;
      C[i][i] = p[i];
      R[i][i] = i;
   }
   C[n + 1][n] = 0;
   for (d = 1; d < n; d ++ )       // 按对角线逐条计算
     for (i = 1; i< = n - d; i++ )
     {
        j = i + d;
        min = ∞; mink = i; sum = 0;
        for (k = i; k< = j; k++ )
        {
           sum = sum + p[k];
           if (C[i][k - 1] + C[k + 1][j] < min) {
              min = C[i][k - 1] + C[k + 1][j];
              mink = k;
           }
        }
        C[i][j] = min + sum;
        R[i][j] = mink;
     }
   return C[1][n];
}
```

算法 6 5 的基本语句显然是三层 for 循环中最内层的条件语句,其执行次数为:

$$T(n)=\sum_{d=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-d}\sum_{k=i}^{i+d}1=\sum_{d=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-d}(d+1)=\sum_{d=1}^{n-1}(d+1)\times(n-d)=O(n^3)$$

6.4.2 近似串匹配问题

在一个文本中查找某个给定的单词,由于单词本身可能有文法上的变化,加上书写和印刷方面的错误,实际应用中往往需要进行近似匹配。这种近似串匹配与串匹配不同,实际问题中确定两个字符串是否近似匹配不是一个简单的问题,例如,我们可以说 pattern 与 patern 是近似的,但 pattern 与 patient 就不是近似的,这存在一个差别大小的问题。

应 用 实 例

Word 等文本编辑器中的拼写错误检查就是近似串匹配。

在 Word 等文本编辑器还有这样的一个功能:在输入英文单词的时候,如果发现单词拼写有问题,可以通过鼠标右键找出与该单词形近的单词或短语,这是近似串匹配的又一个应用实例。

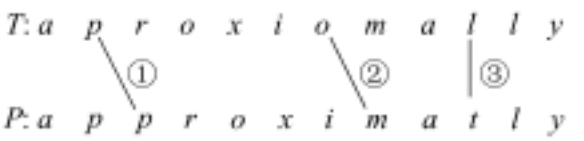
设样本 $P=p_1p_2\cdots p_m$,文本 $T=t_1t_2\cdots t_n$,对于一个非负整数 K,样本 P 在文本 T 中的 K - 近似匹配(K - approximate match)是指 P 在 T 中包含至多 K 个差别的匹配(一般情况下,假设样本是正确的)。这里的差别是指下列三种情况之一:

(1) 修改:P 与 T 中对应字符不同。

(2) 删去:T 中含有一个未出现在 P 中的字符。

(3) 插入:T 中不含有出现在 P 中的一个字符。

例如,图 6 .15 是一个包含上述 3 种差别(通常称为编辑错误)的 3 - 近似匹配。



6 .15 3 - 近似匹配(①为删去,②为插入,③为修改)

事实上,能够指出图 6 .15 中的两个字符串有 3 个差别并不是一件容易的事,因为不同的对应方法可以得到不同的 K 值。例如,把两个字符串从字符 a 开始顺序对应,可以计算出 6 个修改错误。因此,样本 P 和文本 T 为 K - 近似匹配包含两层含义:

(1) 二者的差别数至多为 K;

(2) 差别数是指二者在所有匹配对应方式下的最小编辑错误总数。

显然,如果样本 $p_1p_2\cdots p_m$ 在文本 T 的某一位置上有最优(差别数最小)的对应关系,则样本 P 的任意一个子串 $p_i\cdots p_j(1\leq i<j\leq m)$ 与文本 T 的对应关系也必然是最优的。所以,近似串匹配问题满足最优性原理。

利用动态规划法求解近似串匹配问题的关键是找出动态规划函数。为此,定义一个代价函数 $D(i,j)(0\leq i\leq m,0\leq j\leq n)$ 表示样本前缀子串 $p_1\cdots p_i$ 与文本前缀子串 $t_1\cdots t_j$ 之

间的最小差别数，则 $D(m, n)$表示样本 P 与文本 T 的最小差别数。

根据近似匹配的定义，容易确定代价函数的初始值：

(1) $D(0, j) = 0$，这是因为样本为空串，与文本 $t_1 \cdots t_j$ 有 0 处差别；

(2) $D(i, 0) = i$，这是因为样本 $p_1 \cdots p_i$ 与空文本有 i 处差别。

当样本 $p_1 \cdots p_i$ 与文本 $t_1 \cdots t_j$ 对应时，$D(i, j)$有 4 种可能的情况：

(1) 字符 p_i 与 t_j 相对应且 $p_i = t_j$，则总差别数为 $D(i-1, j-1)$；

(2) 字符 p_i 与 t_j 相对应且 $p_i \neq t_j$，则总差别数为 $D(i-1, j-1)+1$；

(3) 字符 p_i 为多余，即字符 p_i 对应于 t_j 后的空格，则总差别数为 $D(i-1, j)+1$；

(4) 字符 t_j 为多余，即字符 t_j 对应于 p_i 后的空格，则总差别数为 $D(i, j-1)+1$。

由此，得到如下递推式：

$$D(i,j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i & j = 0 \\ \min\{D(i-1,j-1), D(i-1,j)+1, D(i,j-1)+1\} & i>0, j>0, p_i = t_j \\ \min\{D(i-1,j-1)+1, D(i-1,j)+1, D(i,j-1)+1\} & i>0, j>0, p_i \neq t_j \end{cases}$$

例如，已知样本 P=“ $happy$”, $K=1$, T=“ $Have\ a\ hsppy\ day$.”是一个可能有编辑错误的文本，在 T 中求 1 - 近似匹配的过程如图 6 .16 所示。

		H	a	v	e		a		h	s	p	p	y		d	a	y
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	2	2	2	1	2	2	2	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2
p	3	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2	1	2	3	3	3	2	3
p	4	4	4	3	3	3	4	3	3	3	3	2	1	2	3	4	3	3
y	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	2	3	3	4

图 6 .16　K - 近似匹配求解过程

首先将 $D(0, j)$全部置 0，将 $D(i, 0)$置为 i。然后逐列地计算 $D(i, j)$，在计算过程中，总是根据 $D(i, j)$对应的两个字符 p_i 和 t_j 是否相同，以及位于 $D(i, j)$左上方 $D(i-1, j-1)$、正上方 $D(i-1, j)$、正左方 $D(i, j-1)$的值决定 $D(i, j)$的取值。例如，计算 $D(1, 1)$，因为“ h”和“ H”不同，所以，在 $D(0, 0)+1=1$、$D(0, 1)+1=1$ 和 $D(1, 0)+1=2$ 三者中取最小值，故 $D(1, 1)=1$。

由于 $D(5, 12)=1$ 且 $m=5$，所以，在 t_{12} 处找到了差别数为 1 的近似匹配，此时的对应关系如图 6 .17 所示。

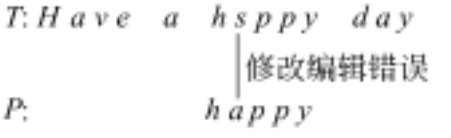


图 6 .17　1 - 近似匹配时的对应关系

C++描述

算法 6.6——近似串匹配问题

```
int ASM(char P[ ], char T[ ], int m, int n, int K)
{
   for (j = 1; j < = n; j++ )      // 初始化第 0 行
     D[0][j] = 0;
   for (i = 0; i< = m; i++ )      // 初始化第 0 列
     D[i][0] = i;
   for (j = 1; j < = n; j++ )      // 根据递推式依次计算每一列
   {
     for (i = 1; i< = m; i++ )
     {
       if (P[i] = = T[j])
         D[i][j] = min(D[i - 1][j - 1], D[i - 1][j] + 1, D[i][j - 1] + 1);
       else
         D[i][j] = min(D[i - 1][j - 1] + 1, D[i - 1][j] + 1, D[i][j - 1] + 1);
     }
     if (D[m][j]) < = K)  return j;
    }
}
```

算法 6.6 的基本语句是两层 for 循环中的判断语句,其时间复杂性为 $O(m \times n)$。

6.5 实验项目——最大子段和问题

1.实验题目

给定由 n 个整数(可能有负整数)组成的序列(a_1, a_2, …, a_n),求该序列形如 $\sum_{k=i}^{j} a_k$ 的子段和的最大值,当所有整数均为负整数时,其最大子段和为 0。

2.实验目的

(1) 深刻掌握动态规划法的设计思想并能熟练运用;

(2) 理解这样一个观点:同样的问题可以用不同的方法解决,一个好的算法是反复努力和重新修正的结果。

3.实验要求

(1) 分别用蛮力法、分治法和动态规划法设计最大子段和问题的算法;

(2) 比较不同算法的时间性能;

(3) 给出测试数据,写出程序文档。

4 .实现提示

蛮力法求解最大子段和问题的设计思想很简单,依次从第 1 个数开始计算长度为 1, 2,…, n 的子段和,将这一阶段的最大子段和保存起来,再从第 2 个数开始计算长度为 1, 2,…, n - 1 的子段和,将这一阶段的最大子段和与前一阶段求得的最大子段和比较,取较大者保存起来,以此类推,最后保存的即是整个序列的最大子段和。

分治法求解最大子段和问题的算法请参见 4 .4 .1 节。

动态规划法求解最大子段和问题的关键是要确定动态规划函数。记

$$b(j) = \max_{1 \le i \le j} \left\{ \sum_{k=i}^{j} a_k \right\} \qquad (1 \le j \le n)$$

则

$$\max_{1 \le i \le j \le n} \sum_{k=i}^{j} a_k = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{1 \le i \le j} \sum_{k=i}^{j} a_k \right\} = \max_{1 \le j \le n} \{ b(j) \}$$

由 $b(j)$的定义,当 $b(j-1) > 0$ 时, $b(j) = b(j-1) + a_j$,否则, $b(j) = a_j$。可得如下递推式:

$$b(j) = \begin{cases} b(j-1) + a_j & b(j-1) > 0 \\ a_j & b(j-1) \le 0 \end{cases} \qquad (1 \le j \le n)$$

阅读材料——文化算法

在人类社会中,文化被看成是保存信息的载体,这些信息可以被社会的所有成员获得并用来指导他们的行为。文化具有继承性,其继承性给社会的新一代成员提供信息和指导来帮助他们适应环境。

人类学家认为,文化是指“在社会中的不同人群之间和不同年代的人群之间历史地传递的,用符号表示的概念现象的系统”;社会学家认为“文化是一种将个体以往经验保存于其中的知识库,新的个体可以在知识库中学到他没有直接经历的经验知识”;而信息论和系统论的研究将文化看成“人与环境相互交互的系统,能够对系统中的人产生正向或负向的影响”;麦克米伦英语词典将“culture”描述为“包括知识、信念、艺术、道德、习俗和其他社会人能获得的能力和养成的习惯”。

受这些思想的启发,模拟人类社会中文化的进化过程,1994 年美国学者 Robert G . Reynolds 最早提出文化算法(cultural algorithm, CA),近年来引起了人们的关注。

文化算法主要是基于进化算法思想,通过信念空间和群体空间共同合作,相互交互进行迭代求解。文化算法把文化进化过程看成两个空间: 一个是由在进化过程中获取的经验和知识组成的信念空间;一个是由具体个体组成的群体空间,这两个空间通过特定的协议进行信息交流。

群体空间是算法进行问题求解的空间,通过 generate( )与 select( )的进化操作和 obj( )的性能评价进行自身的迭代求解;群体空间不断产生知识和经验信息,通过接受操作 accept( )保存到信念空间,信念空间通过自身的进化操作进行更新操作 updata( ),并

通过影响操作 influence( )对群体空间的进一步进化进行指导。模拟文化进化过程的计算模型如图 6 .18 所示。

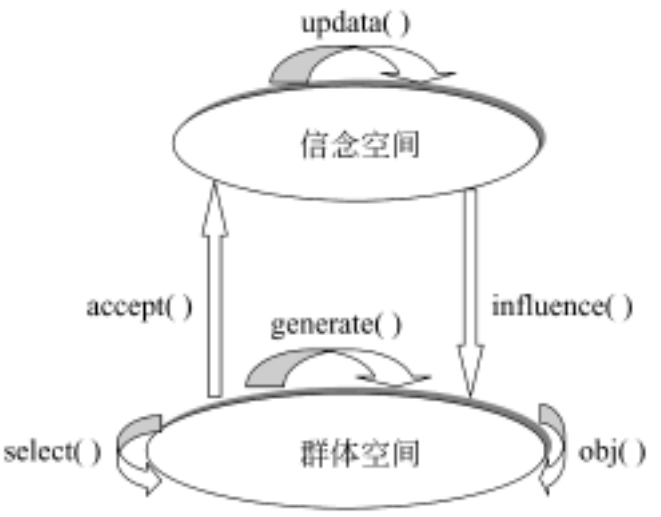


图 6 .18　文化算法的模型

其中:

accept( ): 用于收集从群体中被选择个体的知识和经验。

influence( ): 可以利用解决问题的知识指导群体空间的进化。

updata( ): 信念空间可以通过 updata( )函数进化。

generate( ): 群体的操作函数(如交叉、变异等)。

select( ): 群体选择函数,选择新的群体。

obj( ): 目标函数。

基于上述模型给出文化算法的一般框架:

```
1 . t 初始化为 0;
2 . 初始化群体空间 P^t ;
3 . 初始化信念空间 B^t ;
4 . while (termination condition is not achieved)
    4 .1   evalution P^t ;
    4 .2   updata(B^t , accept(P^t ))          // 更新信念空间
    4 .3   generate(P^t , influence(B^t ));    // 更新群体空间
    4 .4   t = t + 1;
```

文化算法包括上下两层空间框架,下层的群体空间和上层信念空间各自保存自己的群体,并各自独立并行进化。一般而言,下层空间定期贡献精英个体给上层空间,上层空间不断进化自己的精英群体,反过来影响(或控制)下层空间群体,最终形成‘双进化双促进’机制。由此可见,这种文化算法框架针对不同具体问题可以采用不同内涵的群体空间和信念空间,具有广泛的应用前景。

Chung 和 Reynolds 将进化规划(evolutionary programming)和遗传算法数值优化系统结合起来进行函数优化问题求解,将问题的解空间分为可行域和非可行域,利用群体空间中的可行解和非可行解对信念空间中保存解位置信息的解区间进行调整,再以该区间对问题解空间进行可行域和非可行域的进一步划分来指导群体在可行域内的继续进化。Jin 等学者提出了一种 n 维的信念解模式,称为信念元(belief - cell),将其作为进行非线性约束获取、保存和整合的机制,通过不可行个体对解空间进行剪枝来引导进化搜索,都取得了较好的效果。

文化算法目前在国内研究尚少,但我们相信文化算法提供了一种显性的机制来获取、保存和整合群体寻优求解的知识和经验,而传统的进化计算技术只隐性地表示和保存知

识信息,因此,会吸引更多学者开展文化算法的研究。

参 考 文 献

[1] Robert G . Reynolds, Xidong Jin . Using Region - Schema to Solve Nonlinear Constraint Optimization Problems: A Cultural Algorithm Approach . In: Festschrift Conference in Honor of Jonh H, Holland ,1999

[2] 杨海英,黄皓,窦全胜 .基于文化算法的负载均衡自适应机制 . 计算机工程与应用,2005,21

[3] 艾景波 . 文化粒子群优化算法及其在布局设计中的应用研究 . 大连理工大学硕士论文,2005

[4] Reynolds, R . G . An Introduction to Cultural Algorithms . Proceedings of the Third Annual Conference on Evolutionary Programming, February 24-26, 1994, San Diego, California: 131～139

习　题　6

1 . 动态规划法和分治法之间有什么共同点? 有什么不同点?

2 . 用动态规划法求图 6 .19 中从顶点 0 到顶点 15 的最短路径,写出求解过程。

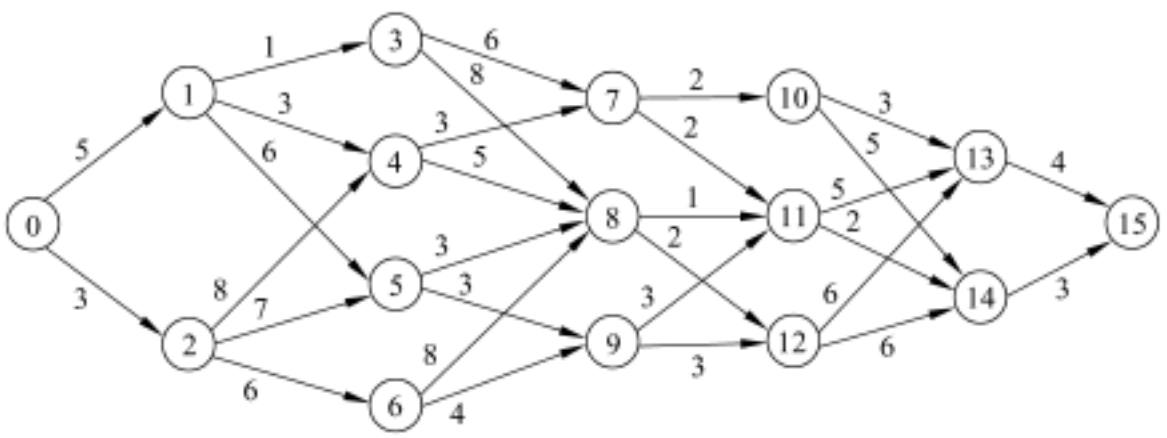


图 6 .19　第 2 题图

3 . 用动态规划法求如下 0/ 1 背包问题的最优解: 有 5 个物品,其重量分别为(3, 2, 1, 4, 5),物品的价值分别为(25, 20, 15, 40, 50),背包容量为 6。写出求解过程。

4 . 用动态规划法求两个字符串 A =“ $xzyzzyx$ ”和 B =“ $zxyyzxz$ ”的最长公共子序列。写出求解过程。

5 . 写出算法 6 .1 对应的程序并上机实现。

6 . 写出算法 6 .2 对应的程序并上机实现。

7 . 对于最优二叉查找树的动态规划算法,设计一个线性时间算法,从二维表 R 中生成最优二叉查找树。

8 . 考虑下面的货币兑付问题: 在面值为(v_1 , v_2 , …, v_n)的 n 种货币中,需要支付 y 值的货币,应如何支付才能使货币支付的张数最少,即满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = y$,且使 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 最小(x_i 是非负整数)。设计动态规划算法求解货币兑付问题,并分析时间性能和空间性能。

9 . 对第 8 题,给定 $v_1 = 1$, $v_2 = 5$, $v_3 = 6$, $v_4 = 11$, $y = 20$,写出动态规划法的求解过程。

10．Ackermann 函数 $A(m, n)$可递归地定义如下：

$$A(m,n)=\begin{cases} n+1 & m=0 \\ A(m-1,1) & m>0, n=0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & m>0, n>0 \end{cases}$$

设计动态规划算法计算 $A(m, n)$，要求算法的空间复杂性为 $O(m)$。

11．设 A 是由 n 个不同整数构成的序列，设计算法求 A 中最长的单调递增子序列。

12．一个农夫带着一条狼、一只羊和一筐菜，想从河一边（左岸）乘船到另一边（右岸），由于船太小，农夫每次只能带一样东西过河，而且如果没有农夫看管，则狼会吃羊，羊会吃菜。农夫怎样过河才能把每样东西安全地送过河呢？请将这个问题的模型抽象出来，并设计算法求解。

13．多边形游戏。多边形游戏是一个单人玩的游戏，开始时有一个由 n 个顶点构成的多边形，每个顶点具有一个整数值，每条边具有一个运算符“+”或“×”。游戏规则是每次选择一条边 e 以及和 e 相关联的两个顶点 i 和 j，用一个新的顶点 k 取代边 e、顶点 i 和 j，顶点 k 的整数值是顶点 i 和 j 的整数值通过边 e 上的运算符计算得到的结果。当所有边都删除时，游戏结束，游戏的得分就是所剩顶点的整数值。设计动态规划算法，对于给定的多边形计算最高得分。

14．有 n 枚硬币，其中有一枚硬币是假币，并且假币的重量较轻，可以通过一架天平来任意比较两组硬币，请设计方案找出其中的假币，要求在最坏情况下用天平的比较次数最少。

第7章 贪心法

CHAPTER

为了解决一个复杂的问题,人们总是要把它分解为若干个类似的子问题。分治法是把一个复杂问题分解为若干个相互独立的子问题,通过求解子问题并将子问题的解合并得到原问题的解;动态规划法是把一个复杂问题分解为若干个相互重叠的子问题,通过求解子问题形成的一系列决策得到原问题的解;而贪心法(greedy method)是把一个复杂问题分解为一系列较为简单的局部最优选择,每一步选择都是对当前解的一个扩展,直到获得问题的完整解。贪心法的典型应用是求解最优化问题,而且对许多问题都能得到整体最优解,即使不能得到整体最优解,通常也是最优解的很好近似。

7.1 概 述

7.1.1 贪心法的设计思想

作为一种算法设计技术,贪心法是一种简单有效的方法。正如其名字一样,贪心法在解决问题的策略上目光短浅,只根据当前已有的信息就做出选择,而且一旦做出了选择,不管将来有什么结果,这个选择都不会改变。换言之,贪心法并不是从整体最优考虑,它所做出的选择只是在某种意义上的局部最优。这种局部最优选择并不总能获得整体最优解(optimal solution),但通常能获得近似最优解(near - optimal solution)。如果一个问题的最优解只能用蛮力法穷举得到,则贪心法不失为寻找问题近似最优解的一个较好办法。

考虑用贪心法求解付款问题。假设有面值为 5 元、2 元、1 元、5 角、2 角、1 角的货币,需要找给顾客 4 元 6 角现金,为使付出的货币的数量最少,首先选出 1 张面值不超过 4 元 6 角的最大面值的货币,即 2 元,再选出 1 张面值不超过 2 元 6 角的最大面值的货币,即 2 元,再选出 1 张面值不超过6 角的最大面值的货币,即 5 角,再选出 1 张面值不超过 1 角的最大面值的货币,即 1 角,总共付出 4 张货币。在付款问题每一步的贪心选择中,在

不超过应付款金额的条件下,只选择面值最大的货币,而不去考虑在后面看来这种选择是否合理,而且它还不会改变决定:一旦选出了一张货币,就永远选定。付款问题的贪心选择策略是尽可能使付出的货币最快地满足支付要求,其目的是使付出的货币张数最慢地增加,这正体现了贪心法的设计思想。

上述付款问题应用贪心法得到的是整体最优解,但是如果把面值改为 3 元、1 元、8 角、5 角、1 角,找给顾客的是 1 个 3 元、1 个 1 元、1 个 5 角和 1 个 1 角共 4 张货币,但最优解却是 3 张货币:1 个 3 元和 2 个 8 角。对于一个具体的问题,怎么知道是否可以用贪心法求解,以及能否得到问题的最优解呢?这个问题很难给予肯定的回答。但是,从许多可以用贪心法求解的问题中看到,这类问题一般具有两个重要的性质:最优子结构性质(optimal substructure property)和贪心选择性质(greedy selection property)。

(1) 最优子结构性质

当一个问题的最优解包含其子问题的最优解时,称此问题具有最优子结构性质,也称此问题满足最优性原理。问题的最优子结构性质是该问题可以用动态规划法或贪心法求解的关键特征。

在分析问题是否具有最优子结构性质时,通常先假设由问题的最优解导出的子问题的解不是最优的,然后证明在这个假设下可以构造出比原问题的最优解更好的解,从而导致矛盾。

(2) 贪心选择性质

所谓贪心选择性质是指问题的整体最优解可以通过一系列局部最优的选择,即贪心选择来得到,这是贪心法和动态规划法的主要区别。在动态规划法中,每步所做出的选择(决策)往往依赖于相关子问题的解,因而只有在求出相关子问题的解后,才能做出选择。而贪心法仅在当前状态下做出最好选择,即局部最优选择,然后再去求解做出这个选择后产生的相应子问题的解。正是由于这种差别,动态规划法通常以自底向上的方式求解各个子问题,而贪心法则通常以自顶向下的方式做出一系列的贪心选择,每做一次贪心选择就将问题简化为规模更小的子问题。

对于一个具体问题,要确定它是否具有贪心选择性质,必须证明每一步所做的贪心选择最终导致问题的整体最优解。通常先考察问题的一个整体最优解,并证明可修改这个最优解,使其从贪心选择开始。做出贪心选择后,原问题简化为规模较小的类似子问题,然后,用数学归纳法证明,通过每一步的贪心选择,最终可得到问题的整体最优解。

7.1.2 贪心法的求解过程

贪心法通常用来求解最优化问题,它犹如登山一样,一步一步向前推进,从某一个初始状态出发,根据当前的局部最优策略,以满足约束方程为条件,以使目标函数增长最快(或最慢)为准则,在候选集合中进行一系列的选择,以便尽快构成问题的可行解。一般来说,用贪心法求解问题应该考虑如下几个方面:

(1) 候选集合 C:为了构造问题的解决方案,有一个候选集合 C 作为问题的可能解,即问题的最终解均取自于候选集合 C。例如,在付款问题中,各种面值的货币构成候选集合。

(2) 解集合 S:随着贪心选择的进行,解集合 S 不断扩展,直到构成一个满足问题的

完整解。例如,在付款问题中,已付出的货币构成解集合。

(3) 解决函数 solution: 检查解集合 S 是否构成问题的完整解。例如,在付款问题中,解决函数是已付出的货币金额恰好等于应付款。

(4) 选择函数 select: 即贪心策略,这是贪心法的关键,它指出哪个候选对象最有希望构成问题的解,选择函数通常和目标函数有关。例如,在付款问题中,贪心策略就是在候选集合中选择面值最大的货币。

(5) 可行函数 feasible: 检查解集合中加入一个候选对象是否可行,即解集合扩展后是否满足约束条件。例如,在付款问题中,可行函数是每一步选择的货币和已付出的货币相加不超过应付款。

开始时解集合 S 为空,然后使用选择函数 select 按照某种贪心策略,从候选集合 C 中选择一个元素 x,用可行函数 feasible 去判断解集合 S 加入 x 后是否可行,如果可行,把 x 合并到解集合 S 中,并把它从候选集合 C 中删去;否则,丢弃 x,从候选集合 C 中根据贪心策略再选择一个元素,重复上述过程,直到找到一个满足解决函数 solution 的完整解。贪心法的一般过程如下:

贪心法的一般过程

```
Greedy(C)                    // C 是问题的输入集合即候选集合
{
   S = { };                  // 初始解集合为空集
   while (not solution(S)) // 集合 S 没有构成问题的一个解
   {
      x = select(C);         // 在候选集合 C 中做贪心选择
      if feasible(S, x)      // 判断集合 S 中加入 x 后的解是否可行
         S = S + {x};
      C = C - {x};
   }
   return S;
}
```

贪心法是在少量计算的基础上做出贪心选择而不急于考虑以后的情况,这样一步一步扩充解,每一步均是建立在局部最优解的基础上,而每一步又都扩大了部分解。因为每一步所做出的选择仅基于少量的信息,因而贪心法的效率通常很高。

设计贪心算法的困难在于证明得到的解确实是问题的整体最优解。

7.2　图问题中的贪心法

7.2.1　TSP问题

TSP 问题是指旅行家要旅行 n 个城市,要求各个城市经历且仅经历一次,然后回到出发城市,并要求所走的路程最短。

贪心法求解 TSP 问题的贪心策略是显然的,至少有两种贪心策略是合理的。

1 .最近邻点策略

从任意城市出发,每次在没有到过的城市中选择最近的一个,直到经过了所有的城市,最后回到出发城市。

如图 7 .1(a)所示是一个具有 5 个顶点的无向图的代价矩阵,从顶点 1 出发,按照最近邻点的贪心策略,得到的路径是 1→4→3→5→2→1,总代价是 14。求解过程如图 7 .1(b)～(f)所示。

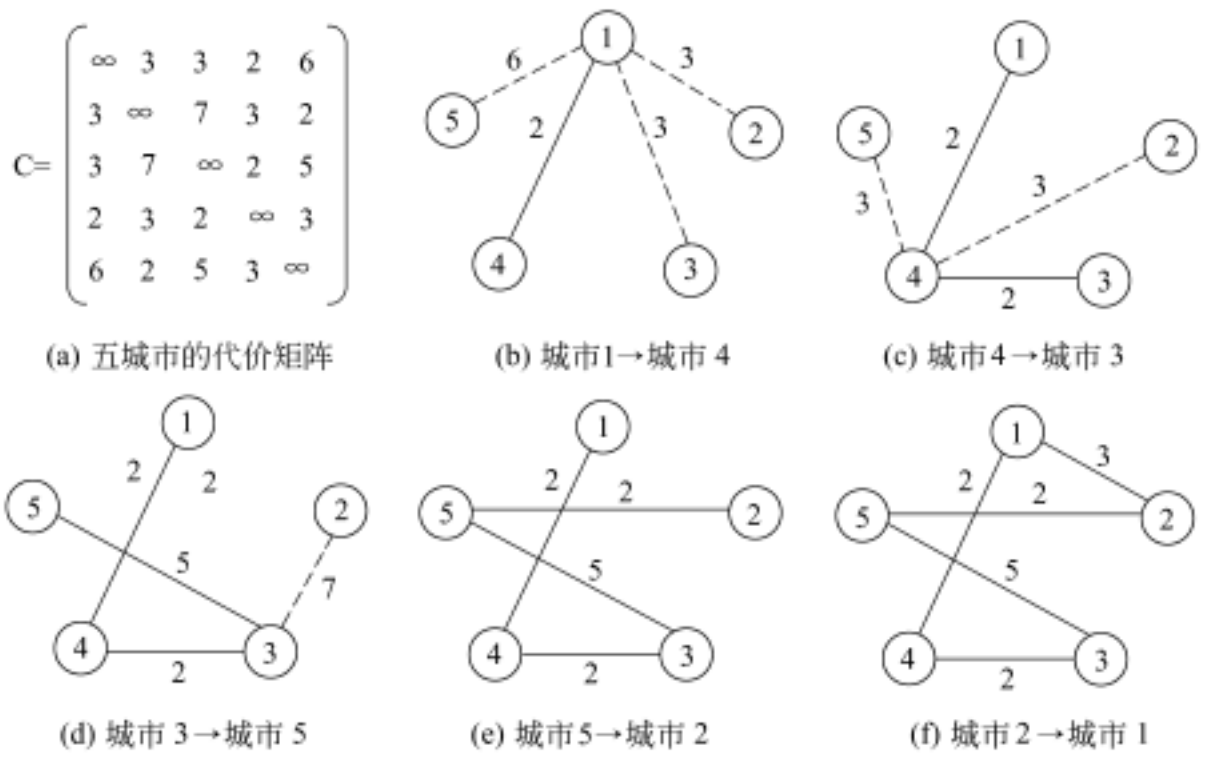


图 7 .1 最近邻点贪心策略求解 TSP 问题的过程

设图 G 有 n 个顶点,边上的代价存储在二维数组 w[n][n]中,集合 V 存储图的顶点,集合 P 存储经过的边,最近邻点策略求解 TSP 问题的算法如下:

伪代码

算法 7 .1——最近邻点策略求解 TSP 问题

```
1 . P = { };
2 . V = V - {u0}; u = u0;          // 从顶点 u0 出发
3 . 循环直到集合 P 中包含 n - 1 条边
    3 .1  查找与顶点 u 邻接的最小代价边(u, v)并且 v 属于集合 V;
    3 .2  P = P + {(u, v)};
    3 .3  V = V - {v};
    3 .4  u = v;          // 从顶点 v 出发继续求解
```

算法 7 .1 的时间性能为 $O(n^2)$,因为共进行 n - 1 次贪心选择,每一次选择都需要查找满足贪心条件的最短边。

用最近邻点贪心策略求解 TSP 问题所得的结果不一定是最优解,图 7 .1(a)中从城市 1 出发的最优解是 1→2→5→4→3→1,总代价只有 13。当图中顶点个数较多并且各边的代

价值分布比较均匀时,最近邻点策略可以给出较好的近似解,不过,这个近似解以何种程度近似于最优解,却难以保证。例如,在图 7 .1 中,如果增大边(2, 1)的代价,则总代价只好随之增加,没有选择的余地。

2 .最短链接策略

每次在整个图的范围内选择最短边加入到解集合中,但是,要保证加入解集合中的边最终形成一个哈密顿回路。因此,当从剩余边集 E'中选择一条边(u, v)加入解集合 S 中,应满足以下条件:

① 边(u, v)是边集 E'中代价最小的边;

② 边(u, v)加入解集合 S 后,S 中不产生回路;

③ 边(u, v) 加入解集合 S 后,S 中不产生分枝。

如图 7 .2(a)所示是一个五城市的代价矩阵,从顶点 1 出发,按照最短链接的贪心策略,得到的路径是 1→4→3→5→2→1,总代价是 14。求解过程如图 7 .2(b)～(f)所示。

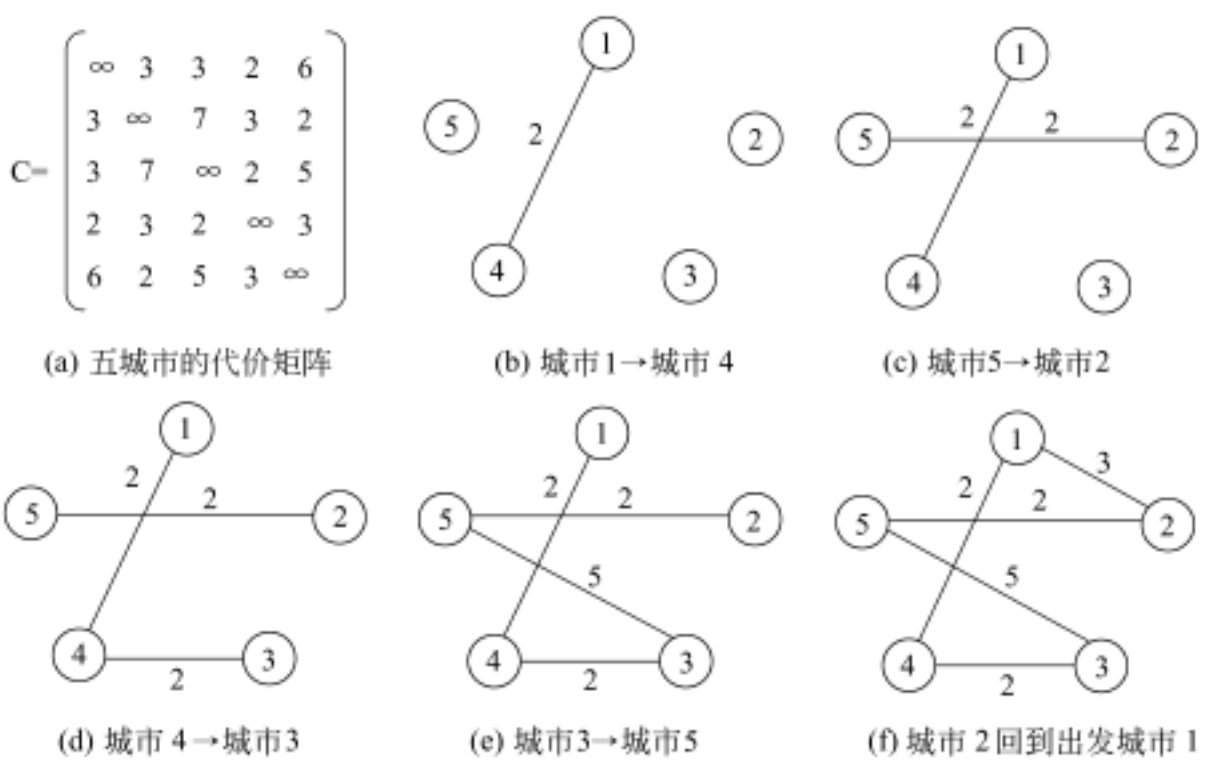


图 7 .2　最短链接贪心策略求解 TSP 问题的过程

设图 G 有 n 个顶点,边上的代价存储在二维数组 w[n][n]中,集合 E′是候选集合即存储所有未选取的边,集合 P 存储经过的边,最短链接策略求解 TSP 问题的算法如下:

伪代码

算法 7 .2——最短链接策略求解 TSP 问题

```
1 . P = { };
2 . E′= E;      // 候选集合,初始时为图中所有边
3 .循环直到集合 P 中包含 n - 1 条边
   3 .1   在 E′中选取最短边(u, v);
   3 .2   E′= E′- {(u, v)};
   3 .3   如果 (顶点 u 和 v 在 P 中不连通 and 不产生分枝) 则 P = P + {(u, v)};
```

在算法 7.2 中,如果操作“在 E'中选取最短边(u, v)”用顺序查找,则算法 7.2 的时间性能是 $O(n^2)$,如果采用堆排序的方法将集合 E'中的边建立堆,则选取最短边的操作可以是 $O(\log_2 n)$,对于两个顶点是否连通以及是否会产生分枝,可以用并查集的操作将其时间性能提高到 $O(n)$,此时算法 7.2 的时间性能为 $O(n\log_2 n)$。

7.2.2 图着色问题

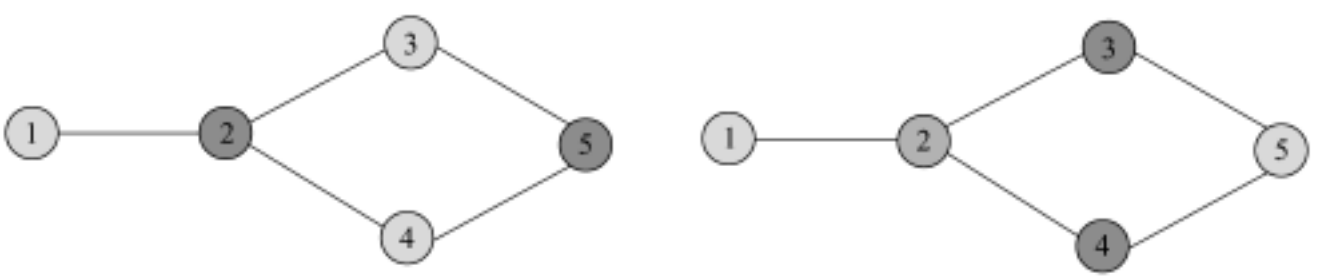
给定无向连通图 $G=(V, E)$,求图 G 的最小色数 k,使得用 k 种颜色对 G 中的顶点着色,可使任意两个相邻顶点着色不同。例如,图 7.3(a)所示的图可以只用两种颜色着色,将顶点 1、3 和 4 着成一种颜色,将顶点 2 和顶点 5 着成另外一种颜色。为简单起见,下面假定 k 个颜色的集合为{颜色 1, 颜色 2, …, 颜色 k}。

应 用 实 例

自动导向小车(以下简称 AGV)用于生产过程中工件及成品的运送工作,如何使 AGV 的运行效率得到提高,如何安排 AGV 的调度次数和调度顺序,是调度问题研究的关键所在。自动导向小车的调度问题可以转化为图着色问题。例如,某车间内部加工工件 v_1, v_2, …, v_n,若加工完成后,等待 AGV 的运输,同时运输毛坯进行下一步的加工。一辆 AGV 一次只能进行一种工件毛坯的输送和对应成品的搬运。可以构造无向图 $G=(V, E)$,其中 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,边$(v_i, v_j)\in E$ 当且仅当工件 v_i 和工件 v_j 由同一辆 AGV 进行运输,则该图的最少着色数就是所需的最小调度次数。

一种显然的贪心策略是选择一种颜色,以任意顶点作为开始顶点,依次考察图中的未被着色的每个顶点,如果一个顶点可以用颜色 1 着色,换言之,该顶点的邻接点都还未被着色,则用颜色 1 为该顶点着色,当没有顶点能以这种颜色着色时,选择颜色 2 和一个未被着色的顶点作为开始顶点,用第二种颜色为尽可能多的顶点着色,如果还有未着色的顶点,则选取颜色 3 并为尽可能多的顶点着色,以此类推。

在图 7.3 中,如果考虑的顶点顺序是 1, 2, 3, 4, 5,则顶点 1、顶点 3 和顶点 4 被着颜色 1,顶点 2 和顶点 5 被着颜色 2,得到最优解,如图 7.3(a)所示。如果考虑的顶点顺序是 1, 5, 2, 3, 4,则顶点 1 和顶点 5 被着颜色 1,顶点 2 被着颜色 2,顶点 3 和顶点 4 被着颜



(a) 考虑顶点顺序为 1,2,3,4,5 得到最优解 2　　(b) 考虑顶点顺序为 1,5,2,3,4 得到近似解 3

图 7.3　贪心法求解图着色问题示例

色 3,得到近似解,如图 7 .3(b)所示。因此贪心法求解图着色问题可能,但不能保证找到一个最优解。

设数组 color[n]表示顶点的着色情况,贪心法求解图着色问题的算法如下:

伪代码

算法 7 .3——图着色问题

```
1 .color[1] = 1;  // 顶点 1 着颜色 1
2 .for (i= 2; i< =n; i++)  // 其他所有顶点置未着色状态
     color[i] = 0;
3 .k = 0;
4 .循环直到所有顶点均着色
   4 .1  k ++ ;  // 取下一个颜色
   4 .2  for (i= 2; i< =n; i++)  // 用颜色 k 为尽量多的顶点着色
         4 .2 .1  若顶点 i 已着色,则转步骤 4 .2,考虑下一个顶点;
         4 .2 .2  若图中与顶点 i 邻接的顶点着色与顶点 i 着颜色 k 不冲突,则 color[i] = k;
5 .输出 k;
```

考虑一个具有 2n 个顶点的无向图,顶点的编号从 1 到 2n,当 i 是奇数时,顶点 i 与除了顶点 i + 1 之外的其他所有编号为偶数的顶点邻接;当 i 是偶数时,顶点 i 与除了顶点 i - 1之外的其他所有编号为奇数的顶点邻接,这样的图称为双向图(bipartite)。在双向图中,顶点可以分成两个集合 V_1 和 V_2 (编号为奇数的顶点集合和编号为偶数的顶点集合),并且每一条边都连接 V_1 中的一个顶点和 V_2 中的一个顶点。图 7 .4 所示就是一个具有 8 个顶点的双向图。

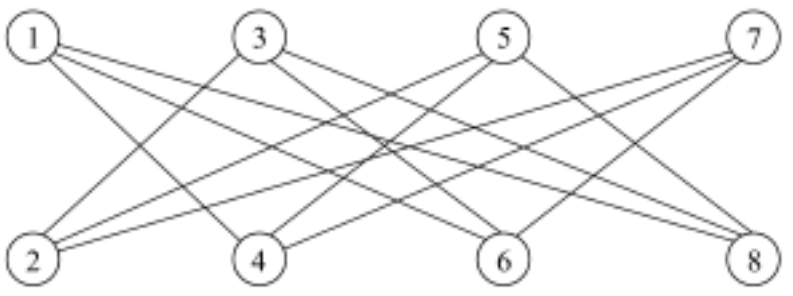


图 7 .4　具有 8 个顶点的双向图

双向图只用两种颜色就可以完成着色,例如,可以将奇数顶点全部着成颜色 1,将偶数顶点全部着成颜色 2。如果贪心法以 1, 3, …, 2n - 1, 2, 4, …, 2n 的顺序为双向图着色,则算法可以得到这个最优解,但是如果贪心法以 1, 2, …, n 的自然顺序为双向图着色,则算法找到的是一个需要 n 种颜色的解。

7.2.3　最小生成树问题

设 G = (V, E) 是一个无向连通网,生成树上各边的权值之和称为该生成树的代价,在 G 的所有生成树中,代价最小的生成树称为最小生成树(minimal spanning trees)。

应 用 实 例

假设图 G 的顶点表示城镇,边 (u, v) 上的代价表示从城镇 u 到城镇 v 铺设电话线的代价,如果只允许电话线直接连接各个城镇,则图 G 的最小生成树就是铺设一个可以覆盖所有城镇的电话网络的最小代价的解决方案。

在最小生成树问题中,至少有两种合理的贪心策略:

1 .最近顶点策略

任选一个顶点,并以此建立起生成树,每一步的贪心选择是简单地把不在生成树中的最近顶点添加到生成树中。Prim 算法 就应用了这个贪心策略,它使生成树以一种自然的方式生长,即从任意顶点开始,每一步为这棵树添加一个分枝,直到生成树中包含全部顶点。

设最小生成树 $T = (U, TE)$,初始时 $U = \{u_0\}$ (u_0 为任意顶点), $TE = \{\}$。显然,Prim 算法的关键是如何找到连接 U 和 $V - U$ 的最短边来扩充生成树 T。对于每一个不在当前生成树中的顶点 $v \in V - U$,必须知道它连接生成树中每一个顶点 $u \in U$ 的边信息,从中选择最短边。所以,对不在当前生成树中的顶点 $v \in V - U$,需要保存两个信息: lowcost[v] 表示顶点 v 到生成树中所有顶点的最短边; adjvex[v] 表示该最短边在生成树中的顶点。例如,对于图 7 5(a)所示连通网,图 7 5(b)～(f)给出了从顶点 A 出发,用 Prim 算法构造

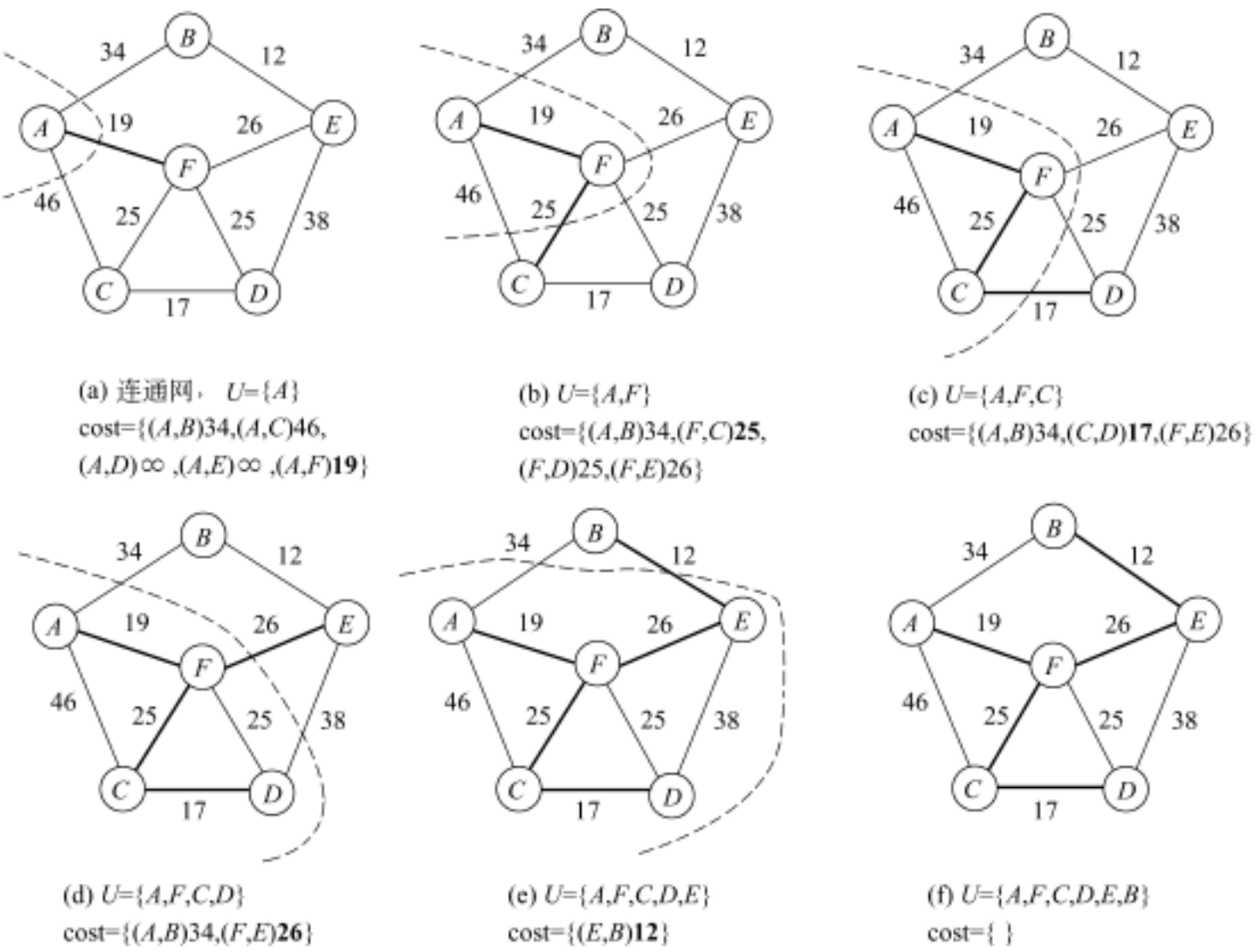


图 7 5　Prim 算法构造最小生成树的过程示意

最小生成树的过程,其中虚线内的顶点属于顶点集 U,粗边属于边集 TE,cost 表示候选最短边集,cost 中的黑体表示将要加入 TE 的最短边。

设图 G 中顶点的编号为 0～n - 1,Prim 算法如下:

伪代码

算法 7.4——Prim 算法

1. 初始化两个辅助数组 lowcost 和 adjvex;
2. U = {u_0}; 输出顶点 u_0;　　// 将顶点 u_0 加入生成树中
3. 重复执行下列操作 n - 1 次
   3.1　在 lowcost 中选取最短边,取 adjvex 中对应的顶点序号 k;
   3.2　输出顶点 k 和对应的权值;
   3.3　U = U + {k};
   3.4　调整数组 lowcost 和 adjvex;

分析 Prim 算法,设连通网中有 n 个顶点,则第一个进行初始化的循环语句需要执行 n - 1 次,第二个循环共执行 n - 1 次,内嵌两个循环,其一是在长度为 n 的数组中求最小值,需要执行 n - 1 次,其二是调整辅助数组,需要执行 n - 1 次,所以,Prim 算法的时间复杂度为 $O(n^2)$。

2. 最短边策略

设 $G=(V, E)$是一个无向连通网,令 $T=(U, TE)$是 G的最小生成树。最短边策略从 $TE=\{\}$开始,每一次贪心选择都是在边集 E 中选取最短边(u, v),如果边(u, v)加入集合 TE 中不产生回路,则将边(u, v)加入边集 TE 中,并将它在集合 E 中删去。Kruskal 算法 就应用了这个贪心策略,它使生成树以一种随意的方式生长,先让森林中的树木随意生长,每生长一次就将两棵树合并,到最后合并成一棵树。

Kruskal 算法对图 7.6(a)所示无向连通网构造最小生成树的过程如图 7.6(b)～(f)所示,其中,粗边表示已加入边集 TE 中。

伪代码

算法 7.5——Kruskal 算法

1. 初始化:U = V; TE = { };
2. 循环直到 T 中的连通分量个数为 1
   2.1　在 E 中寻找最短边(u,v);
   2.2　如果顶点 u、v 位于 T 的两个不同连通分量,则
      2.2.1　将边(u,v)并入 TE;
      2.2.2　将这两个连通分量合为一个;
   2.3　E = E - {(u,v)};

Kruskal 算法为了提高每次贪心选择时查找最短边的效率,可以先将图 G 中的边按代价从小到大排序,则这个操作的时间复杂度为 $O(e\log_2 e)$,其中 e 为无向连通网中边的个数。对于两个顶点是否属于同一个连通分量,可以用并查集的操作将其时间性能提高

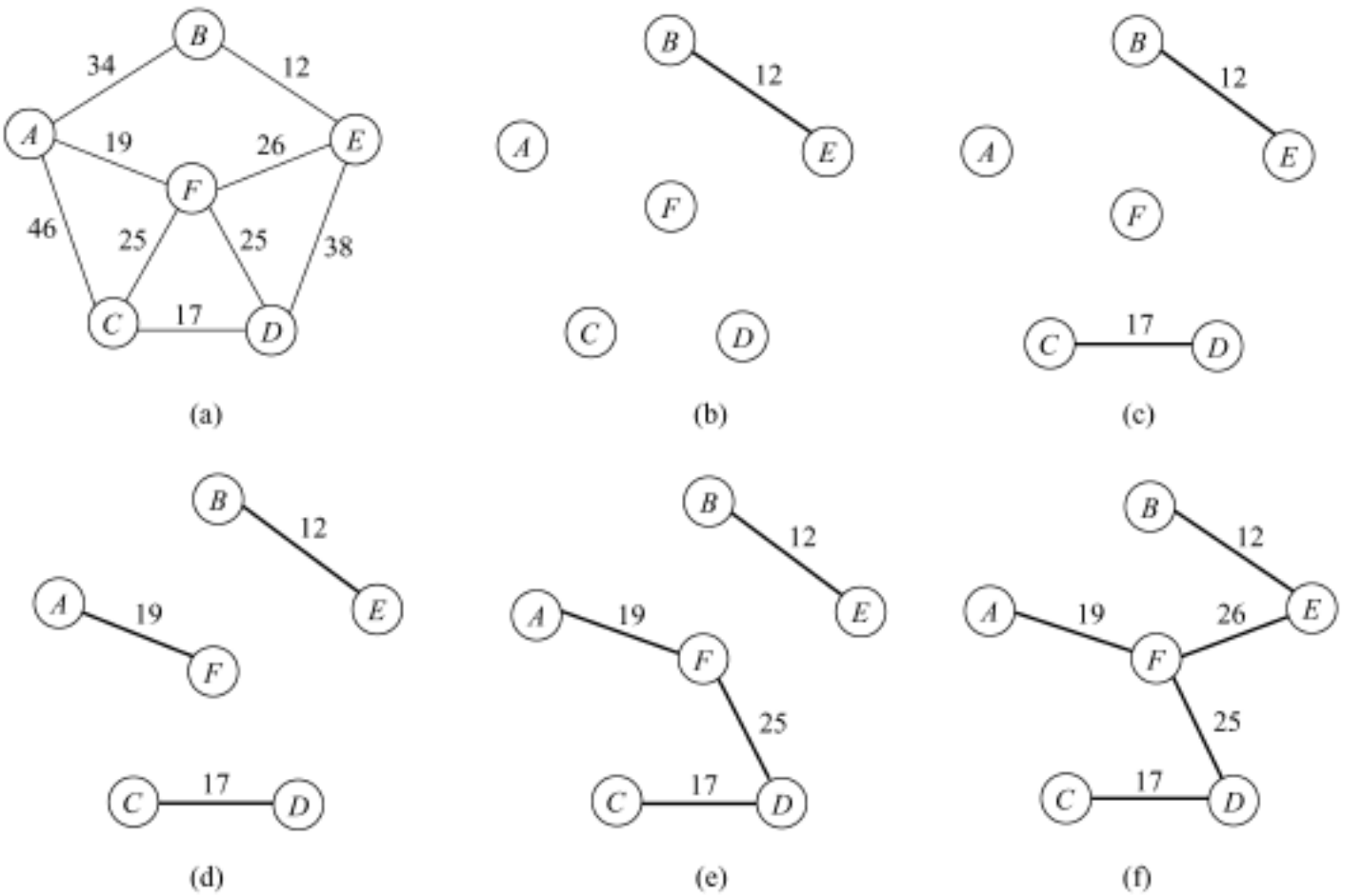


图 7.6 Kruskal 方法构造最小生成树的过程

到 O(n),所以,Kruskal 算法的时间性能是 $O(e\log_2 e)$。

7.3 组合问题中的贪心法

7.3.1 背包问题

给定 n 种物品和一个容量为 C 的背包,物品 i 的重量是 w_i,其价值为 v_i,背包问题是如何选择装入背包的物品,使得装入背包中物品的总价值最大?

设 x_i 表示物品 i 装入背包的情况,根据问题的要求,有如下约束条件和目标函数:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = C \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \tag{7.2}$$

于是,背包问题归结为寻找一个满足约束条件式 7.1,并使目标函数式(7.2)达到最大的解向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

如果 $\sum_{i=1}^{n} w_i \leq C$,很明显,最优解就是把所有物品都装入背包。所以,考虑 $\sum_{i=1}^{n} w_i > C$ 的情况。用贪心法求解背包问题的关键是如何选定贪心策略,使得按照一定的顺序选择每个物品,并尽可能的装入背包,直到背包装满。至少有 3 种看似合理的贪心策略:

(1) 选择价值最大的物品,因为这可以尽可能快地增加背包的总价值。但是,虽然每一步选择获得了背包价值的极大增长,但背包容量却可能消耗得太快,使得装入背包的物品个数减少,从而不能保证目标函数达到最大。

(2) 选择重量最轻的物品,因为这可以装入尽可能多的物品,从而增加背包的总价值。但是,虽然每一步选择使背包的容量消耗得慢了,但背包的价值却没能保证迅速增长,从而不能保证目标函数达到最大。

(3) 以上两种贪心策略或者只考虑背包价值的增长,或者只考虑背包容量的消耗,而为了求得背包问题的最优解,需要在背包价值增长和背包容量消耗两者之间寻找平衡。正确的贪心策略是选择单位重量价值最大的物品。

应用第 3 种贪心策略,每次从物品集合中选择单位重量价值最大的物品,如果其重量小于背包容量,就可以把它装入,并将背包容量减去该物品的重量,然后我们就面临了一个最优子问题——它同样是背包问题,只不过背包容量减少了,物品集合减少了。因此背包问题具有最优子结构性质。

例如,有 3 个物品,其重量分别是{20, 30, 10},价值分别为{60, 120, 50},背包的容量为 50,应用 3 种贪心策略装入背包的物品和获得的价值如图 7.7 所示。

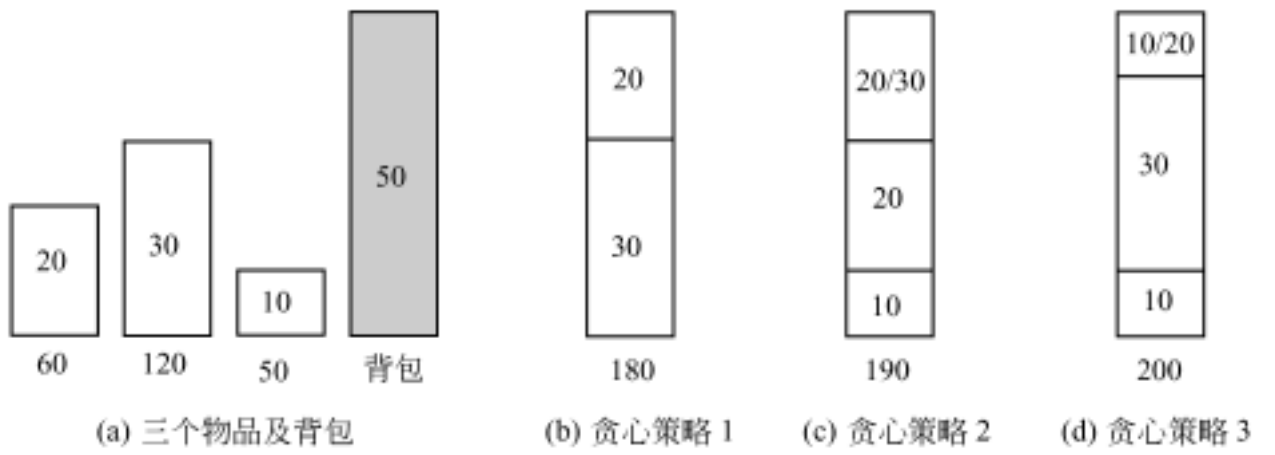


图 7.7　背包问题的贪心法求解示例

设背包容量为 C,共有 n 个物品,物品重量存放在数组 w[n]中,价值存放在数组 v[n] 中,问题的解存放在数组 x[n]中,贪心法求解背包问题的算法如下:

伪代码

算法 7.6——背包问题

```
1. 改变数组 w 和 v 的排列顺序,使其按单位重量价值 v[i]/ w[i]降序排列;
2. 将数组 x[n]初始化为 0;  // 初始化解向量
3. i = 1;
4. 循环直到(w[i] > C)
   4.1  x[i] = 1;      // 将第 i 个物品放入背包
   4.2  C = C - w[i];
   4.3  i ++ ;
5. x[i] = C/ w[i];
```

算法 7.6 的时间主要消耗在将各种物品依其单位重量的价值从大到小排序。因此,

其时间复杂性为 $O(n\log_2 n)$。

下面证明贪心法求解背包问题获得的解是整体最优解。

不失一般性,假设物品按其单位重量价值降序排列,即:

$$v_1/w_1 \geq v_2/w_2 \geq \cdots \geq v_n/w_n$$

设 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是根据第 3 种贪心策略找到的解,如果所有的 x_i 等于 1,则解 X 显然是最优的。否则,设 j 是满足 $x_j<1$ 的最小下标,根据贪心策略,当 $i<j$ 时,$x_i=1$;当 $i>j$ 时,$x_i=0$,即解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$(1, 1, \cdots, 1, x_j, 0, 0, \cdots, 0)$的形式,并且满足

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = C \tag{7.3}$$

此时背包获得的价值为

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

设 $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是某个最优解,显然

$$\sum_{i=1}^{n} w_i y_i = C \tag{7.4}$$

下面证明 $X=Y$,证明采用反证法。

如果 $X\neq Y$,一定存在 $k(1\leq k\leq n)$,对于 $1\leq i<k$,有 $x_i=y_i$,但 $x_k\neq y_k$。

(1) 若 $x_k<y_k$,因为 $y_k<1$,必有 $x_k<1$,但是 $x_{k+1}=\cdots=x_n=0$,所以,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{k} w_i x_i = C < \sum_{i=1}^{k} w_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$$

与式(7.4)矛盾;

(2) 若 $x_k>y_k$,有

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{k} w_i x_i = C > \sum_{i=1}^{k} w_i y_i$$

由式(7.4)可知,$y_{k+1}, \cdots, y_n$不全为 0,增大 y_k的值,同时减少 $y_{k+1}, \cdots, y_n$中的不为 0 的某些值,得到 $Z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$,对于 $1\leq i<k$,有 $z_i=y_i$,对于 $k<i\leq n$,有 $z_i\leq y_i$,但 $z_k>y_k$,且 $\sum_{i=1}^{n} w_i z_i = C$。

由于 $v_1/w_1\geq v_2/w_2\geq\cdots\geq v_n/w_n$,所以,在解 Z 中,单位重量价值大的物品增多,单位重量价值小的物品减少,从而解 Z 优于解 Y,与 Y 是最优解矛盾。

由(1)和(2)可知,$X=Y$,因此,解 X 是最优的。

背包问题与 0/1 背包问题类似,所不同的是在选择物品 $i(1\leq i\leq n)$装入背包时,可以选择一部分,而不一定要全部装入背包。这两类问题都具有最优子结构性质,极为相似,但背包问题可以用贪心法求解,而 0/1 背包问题却不能用贪心法求解。图 7.8 给出了一个用贪心法求解 0/1 背包问题的示例。从图 7.8 可以看出,对于 0/1 背包问题,贪心法之所以不能得到最优解,是由于物品不允许分割,因此,无法保证最终能将背包装满,部分闲置的背包容量使背包的单位重量价值降低了。事实上,在考虑 0/1 背包问题时,应比较选择该物品和不选择该物品所导致的方案,然后再做出最优选择。由此导出许多互相重叠的子问题,所以,0/1 背包问题可用动态规划法求解。

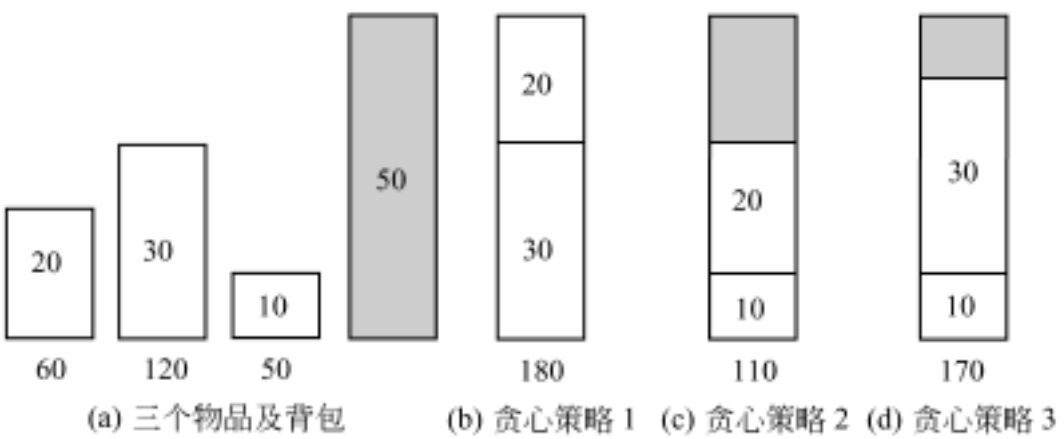


图 7.8　0/1 背包问题的贪心法求解示例

7.3.2 活动安排问题

设有 n 个活动的集合 $E=\{1, 2, \cdots, n\}$,其中每个活动都要求使用同一资源(如演讲会场),而在同一时间内只有一个活动能使用这一资源。每个活动 i 都有一个要求使用该资源的起始时间 s_i 和一个结束时间 f_i,且 $s < f_i$。如果选择了活动 i,则它在半开时间区间$[s, f_i)$内占用资源。若区间$[s, f_i)$与区间$[s_j, f_j)$不相交,则称活动 i 与活动 j 是相容的。也就是说,当 $s \geq f_j$ 或 $s_j \geq f_i$ 时,活动 i 与活动 j 相容。活动安排问题要求在所给的活动集合中选出最大的相容活动子集。

贪心法求解活动安排问题的关键是如何选择贪心策略,使得按照一定的顺序选择相容活动,并能安排尽量多的活动。至少有两种看似合理的贪心策略:

(1) 最早开始时间: 这样可以增大资源的利用率。

(2) 最早结束时间: 这样可以使下一个活动尽早开始。

由于活动占用资源的时间没有限制,因此,后一种贪心选择更为合理。直观上,按这种策略选择相容活动可以为未安排的活动留下尽可能多的时间,也就是说,这种贪心选择的目的是使剩余时间段极大化,以便安排尽可能多的相容活动。

为了在每一次贪心选择时快速查找具有最早结束时间的相容活动,先把 n 个活动按结束时间非减序排列。这样,贪心选择时取当前活动集合中结束时间最早的活动就归结为取当前活动集合中排在最前面的活动。

例如,设有 11 个活动等待安排,这些活动按结束时间的非减序排列如表 7.1 所示。

表 7.1　11 个活动按结束时间的非减序排列

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

贪心法求解活动安排问题每次总是选择具有最早结束时间的相容活动加入解集合中,具体的贪心求解过程如图 7.9 所示,其中阴影长条表示该活动已加入解集合中,空白长条表示该活动是当前正在检查相容性的活动。算法首先选择活动 1 加入解集合,因为

活动 1 具有最早结束时间,活动 2 和活动 3 与活动 1 不相容,所以舍弃它们,而活动 4 与活动 1 相容且在剩下的活动中具有最早结束时间,因此将活动 4 加入解集合。然后在剩下的活动中找与活动 4 相容并具有最早结束时间的活动,以此类推。最终被选定的活动集合为{1, 4, 8, 11}。

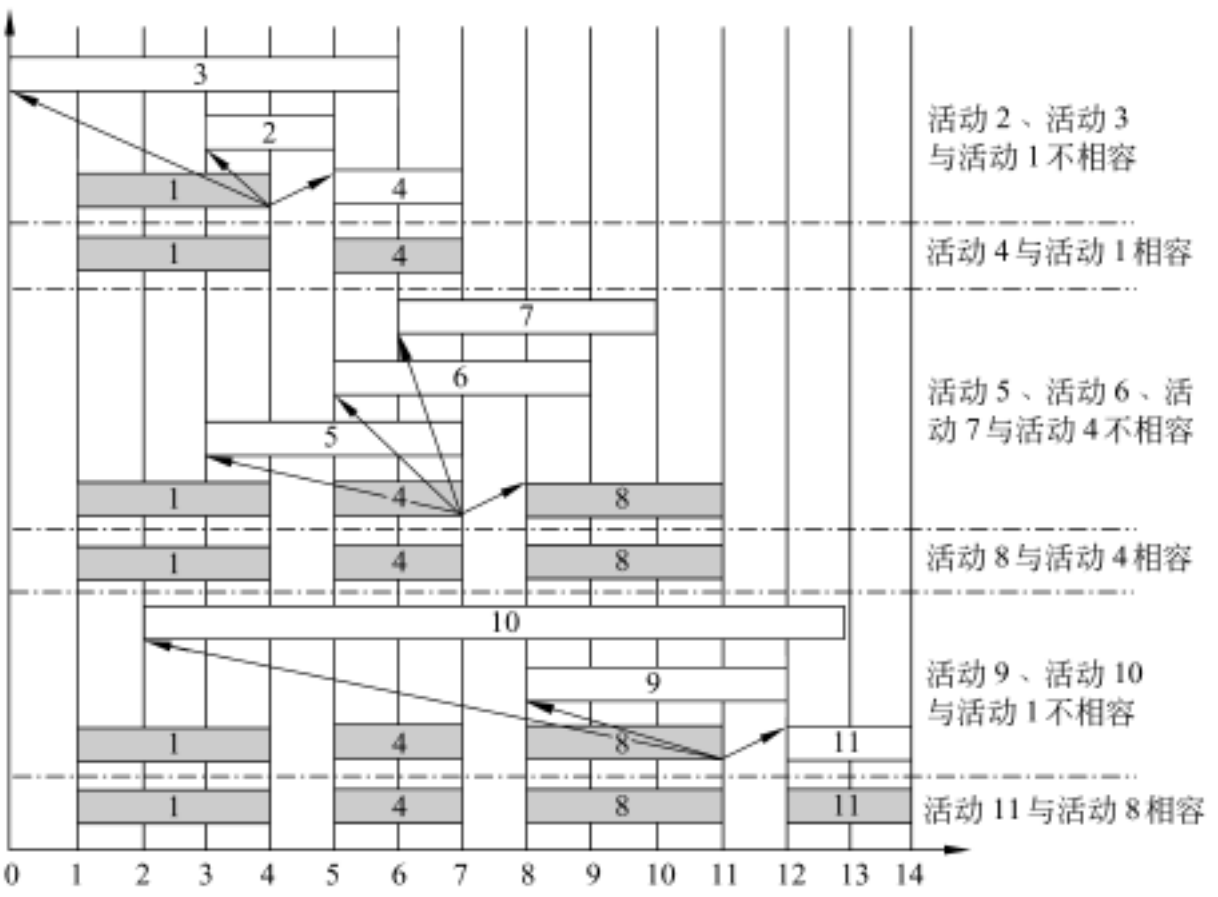


图 7.9 活动安排问题的贪心法求解过程

设有 n 个活动等待安排,这些活动的开始时间和结束时间分别存放在数组 s[n]和 f[n]中,集合 B 存放问题的解,即选定的活动集合,算法如下:

伪代码

算法 7.7——活动安排问题

```
1. 对数组 f[n]按非减序排序,同时相应地调整 s[n];
2. B={1};      // 最优解中包含活动 1
3. j=1; i=2;   // 从活动 i 开始寻找与活动 j 相容的活动
4. 当(i≤n)时循环执行下列操作
   4.1  如果(s[i]>=f[j]) 则
        4.1.1  B=B+{j};
        4.1.2  j=i;
   4.2  i++;
```

算法 7.7 的时间主要消耗在将各个活动按结束时间从小到大排序。因此,算法的时间复杂性为 $O(n\log_2 n)$。

下面证明贪心法求解活动安排问题得到的解是整体最优解。

设 $E=\{1, 2, \cdots, n\}$为 n 个活动的集合,且 E 中的活动按结束时间非减序排列,所

以,活动 1 具有最早的结束时间。首先证明活动安排问题有一个最优解以贪心选择开始,即该最优解中包含活动 1。设 $A<E$ 是活动安排问题的一个最优解,且 A 中的活动也按结束时间非减序排列,A 中的第一个活动是活动 k。若 $k=1$,则 A 就是以贪心选择开始的最优解;若 $k>1$,则设 $B=A-\{k\}+\{1\}$,即在最优解 A 中用活动 1 取代活动 k。由于 $f_1 \leq f_k$,所以,B 中的活动也是相容的,且 B 中活动个数与 A 中活动个数相同,故 B 也是最优解。由此可见,总存在以贪心选择开始的最优活动安排方案。

进一步,在做出了贪心选择,即选择了活动 1 后,原问题简化为对 E 中所有与活动 1 相容的活动安排子问题。也就是说,若 A 是原问题的最优解,则 A'是活动安排子问题 $E'=\{s_i \geq f_1,\ s_i \in E\}$的最优解。如若不然,假设 B'是 E'的最优解,则 B'比 A'包含更多的活动,将活动 1 加入 B'中将产生 E 的一个解 B,且 B 比 A 包含更多的活动,这与 A 是原问题的最优解相矛盾。因此每一步贪心选择都将问题简化为一个规模较小的与原问题具有相同形式的子问题。对贪心选择次数应用数学归纳法可证,贪心法求解活动安排问题最终产生原问题的最优解。

下面给出求解活动安排问题的贪心算法的 C ++ 描述。

C++描述

算法 7 .8——活动安排问题

```
int ActiveManage(int s[ ], int f[ ], bool a[ ], int n)
{   // 各活动的起始时间和结束时间存储于数组 s 和 f 中且按结束时间的非减序排列
    a[1] = 1;
    j= 1; count = 1;
    for (i= 2; i< =n; i++ )
    {
      if (s[i] > =f[j]) {
        a[i] = 1;
        j = i;
        count ++ ;
      }
      else a[i] = 0;
    }
    return count;
}
```

7.3.3　多机调度问题

设有 n 个独立的作业$\{1, 2, \cdots, n\}$,由 m 台相同的机器$\{M_1, M_2, \cdots, M_m\}$进行加工处理,作业 i 所需的处理时间为 t_i $(1 \leq i \leq n)$,每个作业均可在任何一台机器上加工处理,但不可间断、拆分。多机调度问题要求给出一种作业调度方案,使所给的 n 个作业在尽可能短的时间内由 m 台机器加工处理完成。

多机调度问题是 NP 难问题,到目前为止还没有有效的解法。对于这类问题,用贪心法求解有时可以得到较好的近似解。贪心法求解多机调度问题的贪心策略是最长处理时

间作业优先,即把处理时间最长的作业分配给最先空闲的机器,这样可以保证处理时间长的作业优先处理,从而在整体上获得尽可能短的处理时间。按照最长处理时间作业优先的贪心策略,当 $m \geq n$ 时,只要将机器 i 的$[0, t_i)$时间区间分配给作业 i 即可;当 $m < n$ 时,首先将 n 个作业依其所需的处理时间从大到小排序,然后依此顺序将作业分配给空闲的处理机。

例如,设 7 个独立作业{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}由 3 台机器{M_1, M_2, M_3}加工处理,各作业所需的处理时间分别为{2, 14, 4, 16, 6, 5, 3}。首先将这 7 个作业按处理时间从大到小排序,则作业{4, 2, 5, 6, 3, 7, 1}的处理时间为{16, 14, 6, 5, 4, 3, 2}。按照最长处理时间作业优先的贪心策略,将作业 4 分配给机器 M_1,则机器 M_1 将在时间 16 后空闲;将作业 2 分配给机器 M_2,则机器 M_2 将在时间 14 后空闲;将作业 5 分配给机器 M_3,则机器 M_3 将在时间 6 后空闲;至此,三台机器均已分配作业。机器 M_3 在时间 6 后空闲,将作业 6 分配给机器 M_3,并且机器 M_3 将在时间 6 + 5 = 11 后空闲;目前在三台机器中空闲最早的是机器 M_3,将作业 3 分配给机器 M_3,并且机器 M_3 将在时间 11 + 4 = 15 后空闲;在时间 14 后机器 M_2 空闲,将作业 7 分配给机器 M_2,并且机器 M_2 将在时间 14 + 3 = 17 后空闲;在时间 15 后机器 M_3 空闲,将作业 1 分配给机器 M_3,并且机器 M_3 将在时间 15 + 2 = 17 后空闲。贪心法产生的作业调度如图 7.10 所示,所需的加工时间为 17。

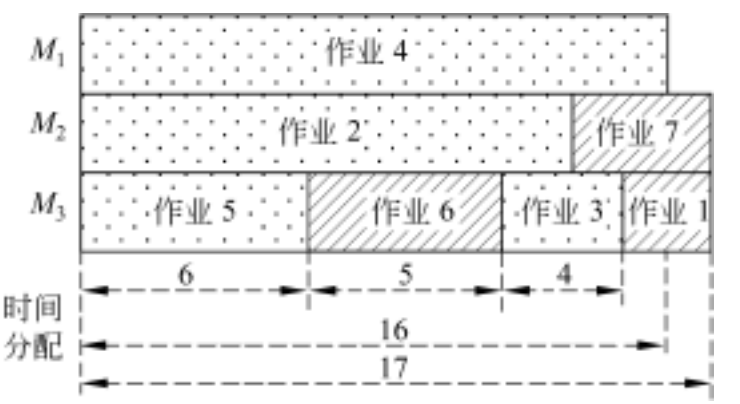


图 7.10 三台机器的调度问题示例

设 n 个作业的处理时间存储在数组 t[n]中,m 台机器的空闲时间存储在数组 d[m]中,集合数组 S[m]存储每台机器所处理的作业,其中集合 S[i]表示机器 i 所处理的作业,贪心法求解多机调度问题的算法如下:

伪代码

算法 7.9——多机调度问题

```
1. 将数组 t[n]由大到小排序,对应的作业序号存储在数组 p[n]中;
2. 将数组 d[m]初始化为 0;
3. for (i=1; i<=m; i++)
   3.1  S[i] = {p[i]};  // 将 m 个作业分配给 m 个机器
   3.2  d[i] = t[i];
4. for (i=m+1; i<=n; i++)
   4.1  j = 数组 d[m]中最小值对应的下标;  // j 为最先空闲的机器序号
   4.2  S[j] = S[j] + {p[i]};     // 将作业 i 分配给最先空闲的机器 j
   4.3  d[j] = d[j] + t[i];       // 机器 j 将在 d[j]后空闲
```

在算法 7.9 中,操作“数组 d[m]中最小值对应的下标”如果采用蛮力法查找,则算法的时间性能为:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} 1 + \sum_{i=m+1}^{n} m = m + (n - m) \times m$$

通常情况下 $m \ll n$，则算法 7.9 的时间复杂性为 $O(n \times m)$。

7.4　实验项目——霍夫曼编码

1. 实验题目

设需要编码的字符集为$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，它们出现的频率为$\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$，应用霍夫曼树构造最短的不等长编码方案。

2. 实验目的

(1) 了解前缀编码的概念，理解数据压缩的基本方法；
(2) 掌握最优子结构性质的证明方法；
(3) 掌握贪心法的设计思想并能熟练运用。

3. 实验要求

(1) 证明霍夫曼树满足最优子结构性质；
(2) 设计贪心算法求解霍夫曼编码方案；
(3) 设计测试数据，写出程序文档。

4. 实现提示

设需要编码的字符集为$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，它们出现的频率为$\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$，以$d_1, d_2, \cdots, d_n$作为叶子结点，$w_1, w_2, \cdots, w_n$作为叶子结点的权值，构造一棵霍夫曼编码树，规定霍夫曼编码树的左分支代表 0，右分支代表 1，则从根结点到每个叶子结点所经过的路径组成的 0 和 1 的序列便为该叶子结点对应字符的编码，即为霍夫曼编码。

考虑到霍夫曼树中共有 $2n - 1$ 个结点，并且进行 $n - 1$ 次合并操作，为了便于选取根结点权值最小的二叉树以及合并操作，设置一个数组 huffTree[2n - 1]保存霍夫曼树中各结点的信息，数组元素的结点结构如图 7.11 所示。

weight	lchild	rchild	parent

weight：该结点的权值。
lchild：该结点的左孩子结点在数组中的下标。
rchild：该结点的右孩子结点在数组中的下标。
parent：该结点的双亲结点在数组中的下标。

图 7.11　霍夫曼树的结点结构

将数组元素的结点类型定义为：

```
struct element
```

```
{
   double weight;  // 字符出现的概率为实数
   int lchild, rchild, parent;
};
```

建立霍夫曼树的算法如下:

C++描述

算法 7.10——建立霍夫曼树

```
void HuffmanTree(element huffTree[ ], int w[ ], int n )
{
     for (i = 0; i< 23 n - 1; i ++ )     // 初始化
     {
          huffTree [i] .parent =  - 1;
          huffTree [i] .lchild =  - 1;
          huffTree [i] .rchild =  - 1;
     }
     for (i = 0; i< n; i ++ )            // 构造 n 棵只含有根结点的二叉树
          huffTree [i] .weight = w[i];
     for (k = n; k <23 n - 1; k ++ )  // n - 1 次合并
     {
          Select(huffTree, i1, i2);     // 在 huffTree 中找权值最小的两个结点 i1 和 i2
          huffTree[i1] .parent = k;     // 将 i1 和 i2 合并,则 i1 和 i2 的双亲是 k
          huffTree[i2] .parent = k;
          huffTree[k] .weight = huffTree[i1] .weight + huffTree[i2] .weight;
          huffTree[k] .lchild = i1;
          huffTree[k] .rchild = i2;
     }
}
```

Select 函数用来在数组 huffTree 中选取两个权值最小的根结点,请读者自行完成。

根据已建立的霍夫曼树,规定霍夫曼树的左分支代表 0,右分支代表 1,则霍夫曼编码即是从根结点到每个叶子结点所经过的路径组成的 0 和 1 的序列。算法如下:

伪代码

算法 7.11——霍夫曼编码

```
void HuffmanCode(element huffTree[ ], int n )
{
   for (i = 0; i< n; i ++ )     // 在数组 huffTree 中前 n 个元素是叶子结点,需要编码
   {
      s = " ";      // 编码 s 初始化为空串
      j = i;        // 暂存 i,不破坏循环变量
      while (结点 j 存在双亲)
```

```
        {
          if (结点 j 是其双亲的左孩子) s = s + "0";
          else s = s + "1";
          j = 结点 j 的双亲;
        }
        将 s 作为结点 i 的编码逆序输出;
      }
    }
```

阅读材料——模拟退火算法

解决现实世界优化问题通常有两种方法：一种是建立一个近似的模型，以便于利用传统方法获得精确的解；另一种是建立一个较精确的模型，利用近似算法获得近似的解。对于实际的应用，后者在各方面的性能往往超过了前者。

传统(求精确解)方法包括线性规划法、梯度法、牛顿迭代法、分枝限界法、分治法等，而现代(近似启发式)方法包括随机爬山法、局部搜索、演化计算、遗传算法等。

所谓局部搜索算法是指：假设问题的解空间为 S，局部搜索算法从一个初始解 $i \in S$ 开始，根据具体问题定义的邻域结构，在当前解 i 的邻域 S_i 内按一定规则找到一个新解，再用这个新解取代 i 成为当前解，判断是否满足算法结束条件，如不满足则再对当前解重复上述过程；如满足则算法结束，当前解就作为算法的最终解。

局部搜索算法的关键是定义具体问题相关的邻域，并且局部搜索算法的性能和邻域的定义以及初始状态有关，邻域定义的不同或初始状态选取的不同会对算法的性能产生决定性的影响。但是，局部搜索算法容易陷入局部最优，达到全局最优比较困难。为了克服局部搜索算法极易陷入局部最优的缺点，许多学者提出改进策略，模拟退火算法(simulated annealing algorithm, SA)是其中一种改进策略，它是一种求解全局优化算法。

求解全局优化问题的方法可分为两类：一类是确定性方法，另一类是随机性方法。前者基于确定性的搜索策略，在目标函数满足特定的限制条件下可以对求得全局最优解提供确定性的保证，这类方法一般适用于求解满足特定要求的一些特殊问题。后者在搜索策略中引入了适当的随机因素，对目标函数一般不需要特殊的限制条件，具有比较广泛的适用性，由于采用随机搜索策略，这类方法只能在概率意义上为求得全局最优解提供保证。

1953 年，Metropolis 等学者率先提出了模拟退火算法的思想，1983 年，Kirkpatrick 等首先将其应用于组合优化。

模拟退火算法的基本思想来源于物理退火过程，所谓物理退火过程包括 3 个阶段：

(1) 加温阶段。其目的是增强粒子的热运动，使其偏离平衡位置。当温度足够高时，固体将熔解为液体，从而消除系统原先可能存在的非均匀态，使随后进行的冷却过程以某一平衡态为起点。

(2) 等温阶段。对于与周围环境交换热量而温度不变的封闭系统,系统状态的自发变化总是朝自由能减少的方向进行,当自由能达到最小时,系统达到平衡。

(3) 冷却阶段。其目的是使粒子的热运动减弱并渐趋有序,系统能量逐渐下降从而得到低能的晶体结构。

固定在恒定温度下达到热平衡的过程用 Monte Carlo 方法进行模拟。该方法算法简单,但是必须大量采样才能得到比较精确的结果,计算量大。1953 年,Metropolis 等人提出新的采样法,称为 Metropolis 准则,基于此准则给出的算法,计算量显著减少。下面首先给出模拟退火算法的思想,然后给出算法并分析各参数。

模拟退火算法的思想是:先将固体加热至熔化,再让其徐徐冷却,凝固成规整晶体。在加热固定时,固体内部的粒子随着温度的升高,粒子排列从较有序的结晶状态转变为无序的液态,这个过程称为熔解,此时内能增大;冷却时,液体粒子随着温度的徐徐降低,粒子渐趋有序,液体凝固成固体的晶态,这个过程称为退火。最后在常温时达到基态,内能减为最小。根据 Metropolis 准则,粒子在温度 T 时趋于平衡的几率为 $e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$,其中 E 为温度 T 时的内能,ΔE 为其改变量,k 为 Boltzman 常数。用固体退火模拟组合优化问题,将内能 E 模拟为目标函数 f,温度 T 模拟为控制参数 t,即得到解组合优化问题的模拟退火算法:由初始解 i 和控制参数初值 t 开始,对当前解重复“产生新解→计算目标函数差→判断是否接受→接受或舍弃”的迭代,并逐步衰减 t 值,算法终止时的当前解即为所求问题的近似最优解。

下面看一个生活中的现象来进一步体会模拟退火算法的思想。假设想让一个乒乓球在一个不平的表面上掉到最深的裂缝中,如果只是让乒乓球在表面上滚动,那么它会停留在局部极小点。如果晃动表面,则可以使乒乓球弹出局部极小点。技巧是晃动要足够大,让乒乓球能从局部极小点弹出来,但又不能太大以至于把球从全局最小点中赶出来(类似徐徐冷却)。

模拟退火算法的基本术语:

(1) 能量函数。能量函数表示解所对应的能量 E,一般为目标函数 $f(x)$,即有 $E = f(x)$。

(2) 生成函数。生成函数 $g(\Delta x)$ 定义了当前点与待访问的下一个点之差的概率密度函数,其中 $\Delta x = x_{new} - x$。算法根据这个差来生成一个新解。

(3) 接受函数。在由生成函数产生新解之后,算法基于接受函数 $h(\Delta E, T)$ 的值来决定是否接受或放弃该新解。常用的接受函数是 Boltzman 概率分布 $h(\Delta E, T) = 1/(1 + \exp(\Delta E/(CT)))$。其中,$C$ 是与系统有关的常量,T 是温度,ΔE 是能量差 $f(x_{new}) - f(x)$。模拟退火算法是以概率的方式产生新解,当 ΔE 为负,算法倾向接受该解;当 ΔE 为正,算法以较小的概率接受该解,但还是有可能遍历这些差解。

(4) 模拟退火时间表。退火时间表作为时间或迭代次数的函数控制温度从高到低下降。退火时间表的设计与应用有关,一个比较简单的设计方式是每次迭代以一定的比例降低温度。

下面给出模拟退火算法的框架:

1．选取一个初始解 x，并设定一个较高的起始温度；
2．求目标函数值 $E = f(x)$；
3．按照由生成函数确定的概率选择 Δx，令新点 $x_{new} = x + \Delta x$；
4．计算新的目标函数值 $E_{new} = f(x_{new})$；
5．按照接受函数确定的概率将 x 设为 x_{new}，E 设为 E_{new}；
6．按照退火时间表降低温度 T(通常将 T 设为 ηT，其中 η 为 0 到 1 之间的常数)；
7．若满足结束条件，则停止；否则，转步骤 3。

模拟退火算法具有如下特点：

(1) 高效性。与局部搜索算法相比，模拟退火算法可望在较短时间里求得更优近似解，并且模拟退火算法允许任意选取初始解和随机数列，又能得出较优近似解，前期工作量较少。

(2) 健壮性。在可能影响模拟退火算法性能的诸因素中，问题规模的影响最为显著。当问题规模增大导致搜索范围的绝对增大，计算时间增加。模拟退火算法对于解空间而言，搜索范围因问题规模的增大而相对减少，从而引起解质量的下降。解和计算时间均随问题规模的增大而趋于稳定，且不受初始解和随机数序列的影响。

(3) 通用性和灵活性。模拟退火算法能应用于多种组合优化问题，为一个问题编制的程序可以有效地用于其他问题。

模拟退火算法是一种现代启发式算法，实质上是局部搜索法的推广。它克服了局部搜索法局部最优的缺点，但它也同样面临解的表示和邻域结构设计问题，这要针对具体问题特点进行设计，好的设计方法能使算法只在可行解域内进行搜索，否则，会扩大搜索空间，增加搜索时间。

同时，模拟退火算法是一种通用、高效、健壮、可行的随机近似算法，并且可以较容易地并行实现以进一步提高运行效率，适合求解大规模组合优化问题特别是 NP 完全问题，因此具有很大的实用价值。由于其讨论涉及随机分析、Mpkob 理论、渐近收敛性、统计分析方法和并行算法等学科，所以对模拟退火算法的研究还具有重要的理论意义。此外，对模拟退火算法作一些局部或策略上的修改，还可得到一些推广或变异形式。

参 考 文 献

[1] 康立山．非数值并行算法 - 模拟退火算法．北京：科学出版社，2000
[2] 钱敏平．从数学角度看计算智能．科学通报，1998 .16(43)
[3] 杨若黎．一种高效的模拟退火全局优化算法．系统工程理论与实践，1997 .5

习　题　7

1．Dijkstra 算法是求解有向图最短路径的一个经典算法，也是应用贪心法的一个成功实例，请描述 Dijkstra 算法的贪心策略。

2．求如下背包问题的最优解：有 7 个物品，价值 $P=(10, 5, 15, 7, 6, 18, 3)$，重量 $w=(2, 3, 5, 7, 1, 4, 1)$，背包容量 $W=15$。

3．为顶点覆盖问题设计一个贪心算法。（提示：顶点覆盖问题在 2.4.3 节有介绍）

4．为最大团问题设计一个贪心算法。（提示：最大团问题在 2.4.3 节有介绍）

5．假设要在足够多的会场里安排一批活动，并希望使用尽可能少的会场。设计一个有效的贪心算法进行会场安排。

6．证明背包问题具有贪心选择性质。

7．设有 n 个顾客同时等待一项服务，顾客 i 需要的服务时间为 t_i $(1 \leq i \leq n)$，应如何安排 n 个顾客的服务次序才能使顾客总的等待时间达到最小？

8．在第 7 题中，如果有 s 处提供同一服务，应如何安排 n 个顾客的服务次序？

9．设 e 是无向图 $G=(V, E)$ 中具有最小代价的边，证明边 e 一定在图 G 的某个最小生成树中。

10．贪心法的理论基础是拟阵，借助于拟阵可以建立关于贪心法的一般性理论，这对于确定何时使用贪心法可以得到问题的整体最优解十分有用。请查找并学习有关拟阵的知识。

第8章 回 溯 法

CHAPTER

在现实世界中,很多问题没有(至少目前没有)有效的算法,例如 TSP 问题,这些问题的解只能通过穷举搜索来得到。为了使搜索空间减少到尽可能小,需要采用系统化的搜索技术。回溯法(back track method)就是一种有组织的系统化搜索技术,可以看作是蛮力法穷举搜索的改进。蛮力法穷举搜索首先生成问题的可能解,然后再去评估可能解是否满足约束条件。而回溯法每次只构造可能解的一部分,然后评估这个部分解,如果这个部分解有可能导致一个完整解,则对其进一步构造,否则,就不必继续构造这个部分解了。回溯法常常可以避免搜索所有的可能解,所以,它适用于求解组合数量较大的问题。

8.1 概 述

8.1.1 问题的解空间

复杂问题常常有很多的可能解,这些可能解构成了问题的解空间。解空间也就是进行穷举的搜索空间,所以,解空间中应该包括所有的可能解。确定正确的解空间很重要,如果没有确定正确的解空间就开始搜索,可能会增加很多重复解,或者根本就搜索不到正确的解。例如下面的问题:桌子上有 6 根火柴棒,要求以这 6 根火柴棒为边搭建 4 个等边三角形。可以很容易用 5 根火柴棒搭建两个等边三角形,但却很难将它扩展到 4 个等边三角形,如图 8.1(a)所示。是问题的描述产生了误导,因为它暗示的是一个二维的搜索空间(火柴是放在桌子上的),但是,为了解决这个问题,必须在三维空间中考虑,如图 8.1(b)所示。

对于任何一个问题,可能解的表示方式和它相应的解释隐含了解空间及其大小。例如,对于有 n 个物品的 0/1 背包问题,其可能解的表示方式可以有以下两种:

(1) 可能解由一个不等长向量组成,当物品 $i(1 \leq i \leq n)$装入背包时,解向量中包含分量 i,否则,解向量中不包含分量 i,解向量的长度等于装入背

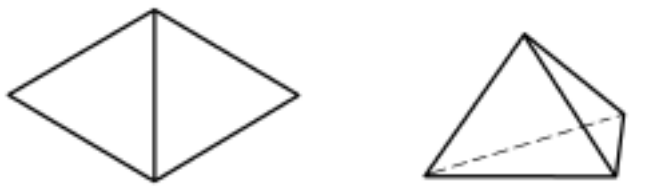


图 8.1 错误的解空间将不能搜索到正确答案

包的物品个数,则解空间由长度为 0～n 的解向量组成。当 $n=3$ 时,其解空间是:

{ ( ), (1), (2), (3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3) }

(2) 可能解由一个等长向量$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$组成,其中 $x_i=1(1\leq i\leq n)$ 表示物品 i 装入背包,$x_i=0$ 表示物品 i 没有装入背包,则解空间由长度为 n 的 0/1 向量组成。当 $n=3$ 时,其解空间是:

{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1) }

为了用回溯法求解一个具有 n 个输入的问题,一般情况下,将其可能解表示为满足某个约束条件的等长向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,其中分量 $x_i(1\leq i\leq n)$的取值范围是某个有限集合 $S_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir_i}\}$,所有可能的解向量构成了问题的解空间。

例如,n 个城市的 TSP 问题,将其可能解表示为向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,其中分量 $x_i(1\leq i\leq n)$的取值范围 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$,并且解向量必须满足约束条件 $x_i\neq x_j(1\leq i, j\leq n)$。当 $n=3$ 时,TSP 问题的解空间为:

{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) }

问题的解空间一般用解空间树(solution space trees, 也称状态空间树)的方式组织,树的根结点位于第 1 层,表示搜索的初始状态,第 2 层的结点表示对解向量的第一个分量做出选择后到达的状态,第 1 层到第 2 层的边上标出对第一个分量选择的结果,以此类推,从树的根结点到叶子结点的路径就构成了解空间的一个可能解。

对于 $n=3$ 的 0/1 背包问题,其解空间树如图 8.2 所示,树中第 i 层与第 $i+1$ 层$(1\leq i\leq n)$结点之间的边上给出了对物品 i 的选择结果,左子树表示该物品被装入了背包,右子

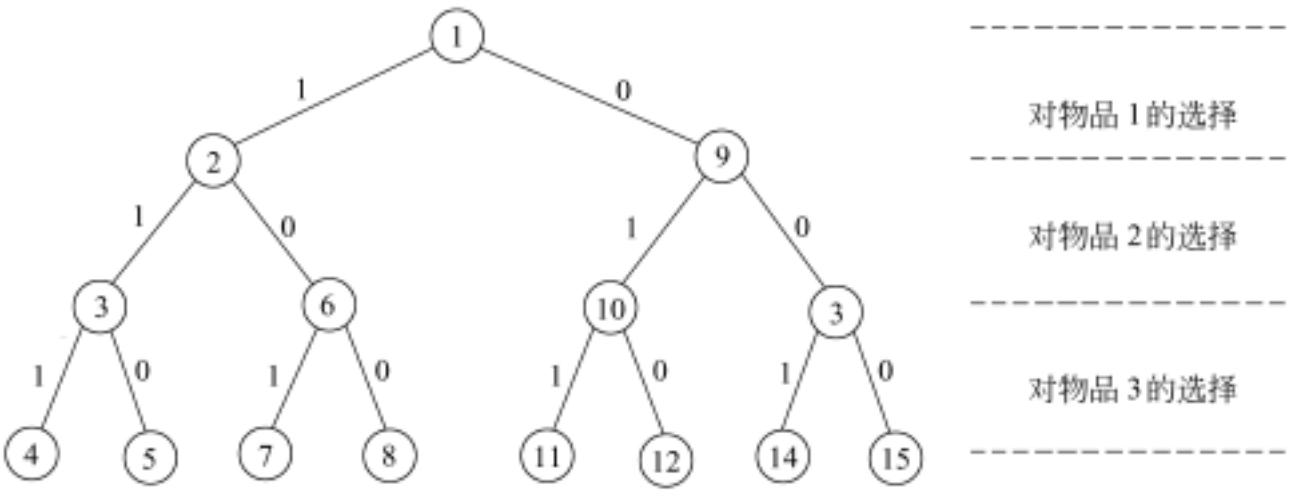


图 8.2 0/1 背包问题的解空间树

树表示该物品没有被装入背包。树中的 8 个叶子结点分别代表该问题的 8 个可能解，例如结点 8 代表一个可能解(1，0，0)。

对于 $n=4$ 的 TSP 问题，其解空间树如图 8 .3 所示，树中第 i 层与第 $i+1$ 层($1\leq i\leq n$)结点之间的边上给出了分量 x_i 的取值。记 $i\rightarrow j$ 表示从顶点 i 到顶点 j 的边($1\leq i，j\leq n$)，从图 8 .3 中可以看到，根结点有 4 棵子树，分别表示从顶点 1、2、3、4 出发求解 TSP 问题，当选择第 1 棵子树后，结点 2 有 3 棵子树，分别表示 1→2、1→3、1→4，以此类推。树中的 24 个叶子结点分别代表该问题的 24 个可能解，例如结点 5 代表一个可能解，路径为 1→2→3→4→1，长度为各边代价之和。

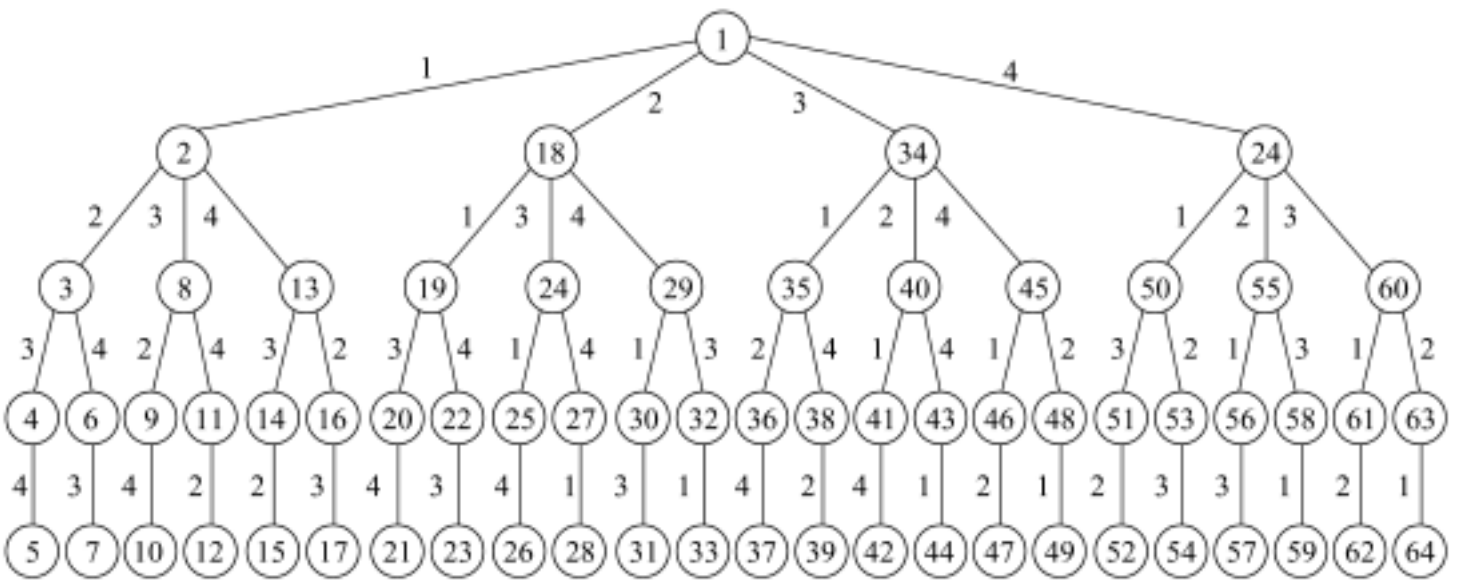


图 8 .3　n = 4 的 TSP 问题的解空间树

8.1.2　解空间树的动态搜索(1)

蛮力法是对整个解空间树中的所有可能解进行穷举搜索的一种方法，但是，只有满足约束条件的解才是可行解，只有满足目标函数的解才是最优解，这就有可能减少搜索空间。回溯法从根结点出发，按照深度优先策略遍历解空间树，搜索满足约束条件的解。在搜索至树中任一结点时，先判断该结点对应的部分解是否满足约束条件，或者是否超出目标函数的界，也就是判断该结点是否包含问题的(最优)解，如果肯定不包含，则跳过对以该结点为根的子树的搜索，即所谓剪枝(pruning)；否则，进入以该结点为根的子树，继续按照深度优先策略搜索。

例如，对于 $n=3$ 的 0/ 1 背包问题，3 个物品的重量为{20，15，10}，价值为{20，30，25}，背包容量为 25，从图 8 .2 所示的解空间树的根结点开始搜索，搜索过程如下：

(1) 从结点 1 选择左子树到达结点 2，由于选取了物品 1，故在结点 2 处背包剩余容量是 5，获得的价值为 20；

(2) 从结点 2 选择左子树到达结点 3，由于结点 3 需要背包容量为 15，而现在背包仅有容量 5，因此结点 3 导致不可行解，对以结点 3 为根的子树实行剪枝；

(3) 从结点 3 回溯到结点 2，从结点 2 选择右子树到达结点 6，结点 6 不需要背包容

量,获得的价值仍为 20;

(4) 从结点 6 选择左子树到达结点 7,由于结点 7 需要背包容量为 10,而现在背包仅有容量 5,因此结点 7 导致不可行解,对以结点 7 为根的子树实行剪枝;

(5) 从结点 7 回溯到结点 6,在结点 6 选择右子树到达叶子结点 8,而结点 8 不需要容量,构成问题的一个可行解(1, 0, 0),背包获得价值 20。

按此方式继续搜索,得到的搜索空间如图 8 .4 所示。

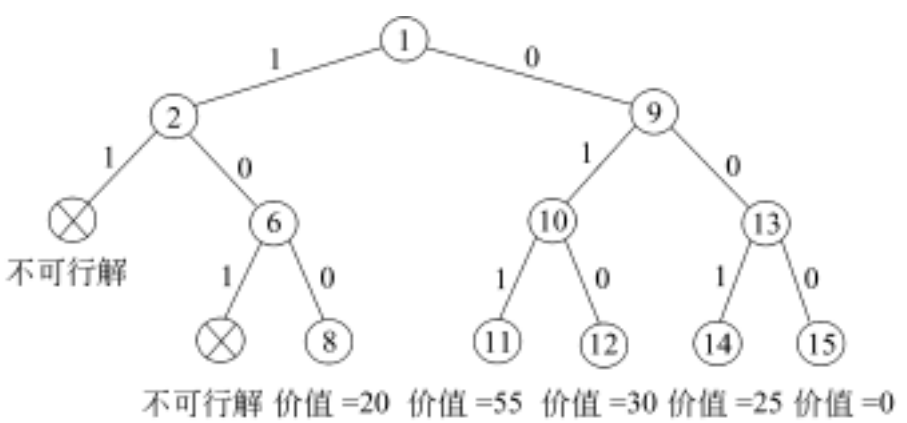


图 8 .4 0/ 1 背包问题的搜索空间

再如,对于 $n=4$ 的 TSP 问题,其代价矩阵如图 8 .5 所示,从图 8 .3 所示解空间树的根结点开始搜索,搜索过程如下:

(1) 目标函数初始化为∞;

(2) 从结点 1 选择第 1 棵子树到结点 2,表示在图中从顶点 1 出发;

(3) 从结点 2 选择第 1 棵子树到达结点 3,表示在图中从顶点 1 到顶点 2,路径长度为3;

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & 7 \\ 12 & \infty & 2 & 8 \\ 8 & 6 & \infty & 2 \\ 3 & 7 & 6 & \infty \end{pmatrix}$$

图 8 .5 TSP 问题的代价矩阵

(4) 从结点 3 选择第 1 棵子树到达结点 4,表示在图中从顶点 2 到顶点 3,路径长度为 3 + 2 = 5;

(5) 从结点 4 选择惟一的一棵子树到结点 5,表示在图中从顶点 3 到顶点 4,路径长度为 5 + 2 = 7,结点 5 是叶子结点,找到了一个可行解,路径为 1→2→3→4→1,路径长度为 7 + 3 = 10,目标函数值 10 成为新的下界,也就是目前的最优解;

(6) 从结点 5 回溯到结点 4,再回溯到结点 3,选择结点 3 的第 2 棵子树到结点 6,表示在图中从顶点 2 到顶点 4,路径长度为 3 + 8 = 11,超过目标函数值 10,因此,对以结点 6 为根的子树实行剪枝。

按此方式继续搜索,得到的搜索空间如图 8 .6 所示。

从上述两个例子可以看出,回溯法的搜索过程涉及的结点(称为搜索空间)只是整个解空间树的一部分,在搜索过程中,通常采用两种策略避免无效搜索: (1)用约束条件剪去得不到可行解的子树; (2)用目标函数剪去得不到最优解的子树。这两类函数统称为剪枝函数(pruning function)。

需要注意的是,问题的解空间树是虚拟的,并不需要在算法运行时构造一棵真正的树

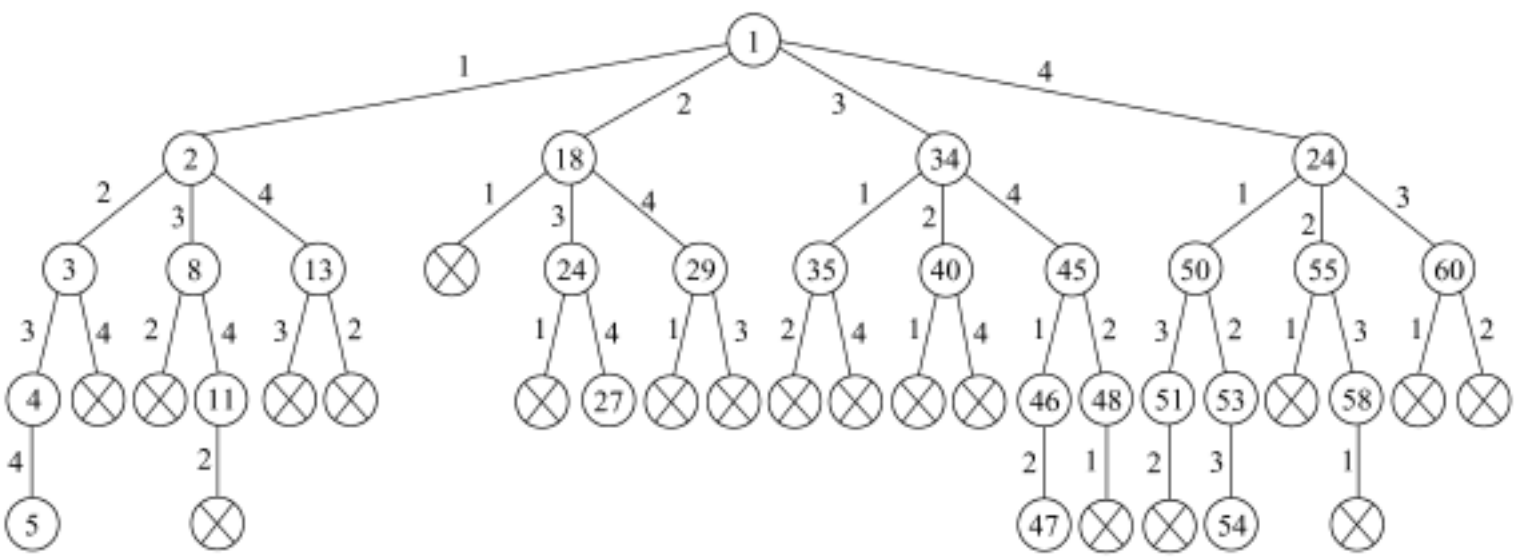


图 8.6　TSP 问题的搜索空间

结构,只需要存储从根结点到当前结点的路径。例如,在 0/1 背包问题中,只需要存储当前背包中装入物品的状态,在 TSP 问题中,只需要存储当前正在生成的路径上经过的顶点。

8.1.3　回溯法的求解过程

由于问题的解向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中的每个分量 $x_i(1\leq i\leq n)$都属于一个有限集合 $S_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir_i}\}$,因此,回溯法可以按某种顺序(例如字典序)依次考察笛卡儿积 $S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$中的元素。初始时,令解向量 X 为空,然后,从根结点出发,选择 S_1 的第一个元素作为解向量 X 的第一个分量,即 $x_1=a_{11}$,如果 $X=(x_1)$是问题的部分解,则继续扩展解向量 X,选择 S_2 的第一个元素作为解向量 X 的第 2 个分量,否则,选择 S_1 的下一个元素作为解向量 X 的第一个分量,即 $x_1=a_{12}$。以此类推,一般情况下,如果 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_i)$是问题的部分解,则选择 S_{i+1} 的第一个元素作为解向量 X 的第 $i+1$ 个分量时,有下面 3 种情况:

(1) 如果 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_{i+1})$是问题的最终解,则输出这个解。如果问题只希望得到一个解,就结束搜索,否则继续搜索其他解。

(2) 如果 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_{i+1})$是问题的部分解,则继续构造解向量的下一个分量。

(3) 如果 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_{i+1})$既不是问题的部分解也不是问题的最终解,则存在下面两种情况:

① 如果 $x_{i+1}=a_{i+1k}$不是集合 S_{i+1} 的最后一个元素,则令 $x_{i+1}=a_{i+1k+1}$,即选择 S_{i+1} 的下一个元素作为解向量 X 的第 $i+1$ 个分量;

② 如果 $x_{i+1}=a_{i+1k}$是集合 S_{i+1} 的最后一个元素,就回溯到 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_i)$,选择 S_i 的下一个元素作为解向量 X 的第 i 个分量,假设 $x_i=a_{ik}$,如果 a_{ik} 不是集合 S_i 的最后一个元素,则令 $x_i=a_{ik+1}$;否则,就继续回溯到 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1})$。

回溯法的递归形式的一般框架如下:

回溯法的一般框架——递归形式	
主算法 1．X = { }; 2．flag = false; 3．advance(1); 4．if (flag) 输出解 X else 输出“无解”;	advance(int k) 1．对每一个 $x \in S_k$ 循环执行下列操作 1.1 $x_k = x$; 1.2 将 x_k 加入 X; 1.3 if (X 是最终解) flag = true; return; 1.4 else if (X 是部分解) advance(k + 1);

回溯算法的非递归迭代形式的一般框架如下：

回溯法的一般框架——迭代形式

```
1．X = { };
2．flag = false;
3．k = 1;
4．while (k > = 1)
   4.1 当(Sk 没有被穷举)循环执行下列操作
      4.1.1 xk = Sk 中的下一个元素;
      4.1.2 将 xk 加入 X;
      4.1.3 if (X 为最终解) flag = true; 转步骤 5;
      4.1.4 else if (X 为部分解) k = k + 1; 转步骤 4;
   4.2 重置 Sk,使得下一个元素排在第 1 位;
   4.3 k = k - 1;      // 回溯
5．if flag 输出解 X;
   else 输出“无解”;
```

8.1.4 回溯法的时间性能

一般情况下，在问题的解向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中，分量 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 的取值范围为某个有限集合 $S_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir_i}\}$，因此，问题的解空间由笛卡儿积 $A = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ 构成，并且第 1 层的根结点有 $|S_1|$ 棵子树，则第 2 层共有 $|S_1|$ 个结点，第 2 层的每个结点有 $|S_2|$ 棵子树，则第 3 层共有 $|S_1| \times |S_2|$ 个结点，依此类推，第 $n+1$ 层共有 $|S_1| \times |S_2| \times \cdots \times |S_n|$ 个结点，它们都是叶子结点，代表问题的所有可能解。

在用回溯法求解问题时，常常遇到两种典型的解空间树：

(1) 子集树(subset trees)：当所给问题是从 n 个元素的集合中找出满足某种性质的子集时，相应的解空间树称为子集树。在子集树中，$|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_n| = c$，即每个结点有相同数目的子树，通常情况下 $c = 2$，所以，子集树中共有 2^n 个叶子结点，因此，遍历子

集树需要 $\Omega(2^n)$时间。例如,0/1 背包问题的解空间树是一棵子集树。

(2) 排列树(permutation trees): 当所给问题是确定 n 个元素满足某种性质的排列时,相应的解空间树称为排列树。在排列树中,通常情况下,$|S_1| = n$,$|S_2| = n-1$,…,$|S_n| = 1$,所以,排列树中共有 $n!$个叶子结点,因此,遍历排列树需要 $\Omega(n!)$时间。例如,TSP 问题的解空间树是一棵排列树。

回溯法实际上属于蛮力穷举法,当然不能指望它有很好的最坏时间复杂性,遍历具有指数阶个结点的解空间树,在最坏情况下,时间代价肯定为指数阶。然而,从本章介绍的几个算法来看,它们都有很好的平均时间性能。回溯法的有效性往往体现在当问题规模 n 很大时,在搜索过程中对问题的解空间树实行大量剪枝。但是,对于具体的问题实例,很难预测回溯法的搜索行为,特别是很难估计出在搜索过程中所产生的结点数,这是分析回溯法的时间性能的主要困难。下面介绍用概率方法估算回溯法所产生的结点数。

估算回溯法产生结点数的概率方法的主要思想是: 假定约束函数是静态的(即在回溯法的执行过程中,约束函数不随算法所获得信息的多少而动态改变),在解空间树上产生一条随机路径,然后沿此路径估算解空间树中满足约束条件的结点总数 m。设 x 是所产生随机路径上的一个结点,且位于解空间树的第 i 层,对于 x 的所有孩子结点,计算出满足约束条件的结点数 m_i,路径上的下一个结点从 x 的满足约束条件的 m_i 个孩子结点中随机选取,这条路径一直延伸,直到叶子结点或者所有孩子结点均不满足约束条件为止。

随机路径中含有的结点总数的计算方法是: 假设第 1 层有 m_0 个满足约束条件的结点,每个结点有 m_1 个满足约束条件的孩子结点,则第 2 层上有 $m_0 m_1$ 个满足约束条件的结点;同理,假设第 2 层上的每个结点均有 m_2 个满足约束条件的孩子结点,则第 3 层上有 $m_0 m_1 m_2$ 个满足约束条件的结点,依此类推,第 n 层上有 $m_0 m_1 m_2 \cdots m_{n-1}$ 个满足约束条件的结点,因此,这条随机路径上的结点总数为: $m_0 + m_0 m_1 + m_0 m_1 m_2 + \cdots + m_0 m_1 m_2 \cdots m_{n-1}$。

例如,对于四皇后问题,图 8.7 给出了 4 条随机路径所对应的棋盘状态和产生的结点总数。

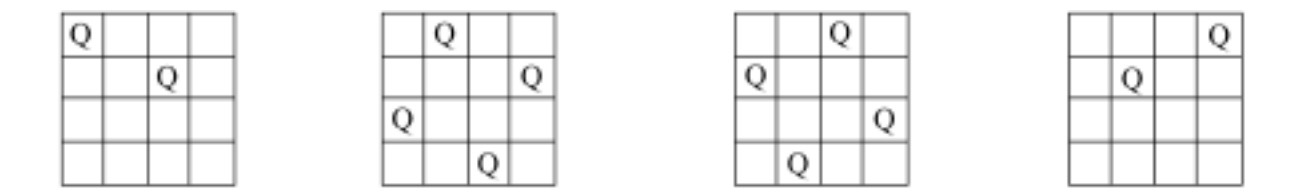


图 8.7　四皇后问题的随机路径及路径上结点总数估算示例

在使用概率估算方法估算搜索空间的结点总数时,为了估算得更精确一些,可以选取若干条不同的随机路径(通常不超过 20 条),分别对各随机路径估算结点总数,然后再取这些结点总数的平均值。例如,图 8.7 所示四皇后问题,搜索空间的结点数取 4 条随机路径结点总数的平均值,结果为 14。而四皇后问题的解空间树中的结点总数为 65,则回溯法求解四皇后问题产生的搜索空间的结点数大约是解空间树中的结点总数的 14/65≈21.5%,这说明回溯法的效率大大高于蛮力穷举法。

8.2 图问题中的回溯法

8.2.1 图着色问题

图着色问题描述为：给定无向连通图 $G=(V, E)$和正整数 m，求最小的整数 m，使得用 m 种颜色对 G 中的顶点着色，使得任意两个相邻顶点着色不同。

应 用 实 例

机场停机位分配是指根据航班和机型等属性，为每个航班指定一个具体的停机位。具体分配停机位时，必须满足下列约束条件：(1)每个航班必须被分配且仅能被分配 1 个停机位；(2)同一时刻同一个停机位不能分配 1 个以上的航班；(3)应满足航站衔接以及过站时间衔接要求；(4)机位与所使用机位的航班应该相互匹配。

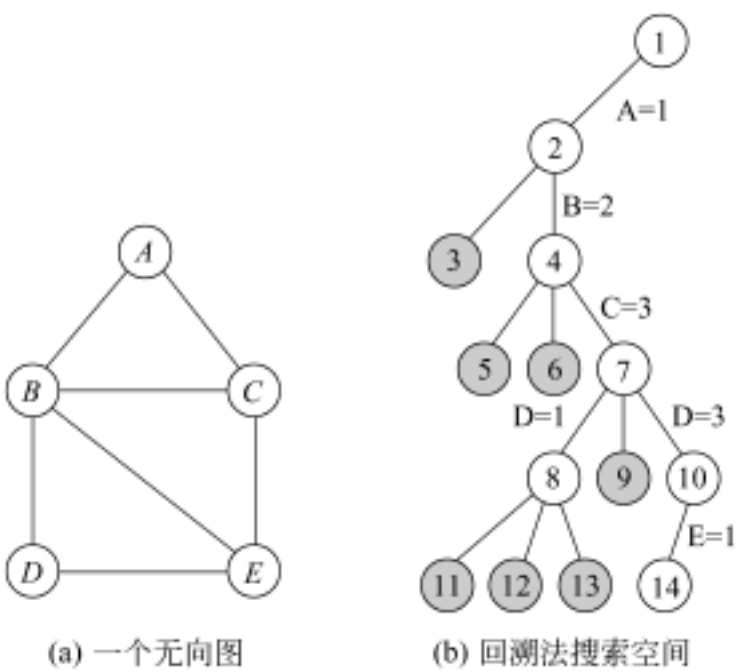
对飞机进行停机位分配时，假设班机时刻表为已知，并且按照“先到先服务”的原则对航班进行机位分配，这样就可以将停机位分配转化为图着色问题。

由于用 m 种颜色为无向图 $G=(V, E)$着色，其中，V 的顶点个数为 n，可以用一个 n 元组 $C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$来描述图的一种可能着色，其中，$c_i \in \{1, 2, \cdots, m\}(1 \leq i \leq n)$表示赋予顶点 i 的颜色。例如，五元组(1, 2, 2, 3, 1)表示对具有 5 个顶点的无向图的一种着色，顶点 1 着颜色 1，顶点 2 着颜色 2，顶点 3 着颜色 2，如此，等等。如果在 n 元组 C 中，所有相邻顶点都不会着相同颜色，就称此 n 元组为可行解，否则为无效解。用 m 种颜色为一个具有 n 个顶点的无向图着色，就有 m^n 种可能的着色组合，因此，它的解空间树是一棵完全 m 叉树，树中每一个结点都有 m 棵子树，最后一层有 m^n 个叶子结点，每个叶子结点代表一种可能着色。

回溯法求解图着色问题，首先把所有顶点的颜色初始化为 0，然后依次为每个顶点着色。在图着色问题的解空间树中，如果从根结点到当前结点对应一个部分解，也就是所有的颜色指派都没有冲突，则在当前结点处选择第一棵子树继续搜索，也就是为下一个顶点着颜色 1，否则，对当前子树的兄弟子树继续搜索，也就是为当前顶点着下一个颜色，如果所有 m 种颜色都已尝试过并且都发生冲突，则回溯到当前结点的父结点处，上一个顶点的颜色被改变，依此类推。

例如，在图 8.8(a)所示的无向图中求解三着色问题，在解空间树中，从根结点出发，搜索第 1 棵子树，即为顶点 A 着颜色 1，再搜索结点 2 的第 1 棵子树，即为顶点 B 着颜色 1，这导致一个不可行解，回溯到结点 2，选择结点 2 的第 2 棵子树，即为顶点 B 着颜色 2，在为顶点 C 着色时，经过着颜色 1 和颜色 2 的失败的尝试后，选择结点 4 的第 3 棵子树，即为顶点 C 着颜色 3，在结点 7 选择第 1 棵子树，即为顶点 D 着颜色 1，但是在为顶点 E 着色时，顶点 E 无论着 3 种颜色的哪一种均发生冲突，于是导致回溯，在结点 7 选择第 2 棵子树也会发生冲突，于是，选择结点 7 的第 3 棵子树，即顶点 D 着颜色 3，在结点 10 选择第 1 棵子树，即为顶点 E 着颜色 1，得到了一个解(1, 2, 3, 3, 1)。注意到，解空间树中

共有 243 个结点，而回溯法只搜索了其中的 14 个结点后就找到了问题的解。在解空间树中的搜索过程如图 8.8(b)所示。



(a) 一个无向图　　(b) 回溯法搜索空间

图 8.8　回溯法求解图着色问题示例

在回溯法的搜索过程中只需要保存已处理顶点的着色情况，设数组 color[n]表示顶点的着色情况，回溯法求解 *m* 着色问题的算法如下：

伪代码

算法 8.1——图着色问题

1. 将数组 color[n]初始化为 0；
2. k = 1；
3. while (k >= 1)
   - 3.1　依次考察每一种颜色，若顶点 k 的着色与其他顶点的着色不发生冲突，则转步骤 3.2；否则，搜索下一个颜色；
   - 3.2　若顶点已全部着色，则输出数组 color[n]，返回；
   - 3.3　否则，
     - 3.3.1　若顶点 k 是一个合法着色，则 k = k + 1，转步骤 3 处理下一个顶点；
     - 3.3.2　否则，重置顶点 k 的着色情况，k = k - 1，转步骤 3 回溯；

假设 *n* 个顶点的无向图采用邻接矩阵存储，数组 c[n][n]存储顶点之间边的情况，回溯法求解 *m* 着色问题的算法的 C++ 描述如下：

C++描述

算法 8.2——图着色问题

```
void GraphColor(int n, int c[ ][ ], int m)  //所有数组下标从 1 开始
{
   for (i = 1; i <= n; i++ )        //将数组 color[n]初始化为 0
      color[i] = 0;
   k = 1;
```

```
    while (k >= 1)
    {
        color[k] = color[k] + 1;
        while (color[k] <= m)
            if Ok(k) break;
            else color[k] = color[k] + 1;     // 搜索下一个颜色
        if (color[k] <= m && k == n) {   // 求解完毕,输出解
            for (i= 1; i <= n; i ++ ) cout << color[i];
            return;
        }
        else if (color[k] <= m && k < n)
                k = k + 1;                    // 处理下一个顶点
            else {
                color[k] = 0; k = k - 1;      // 回溯
            }
    }
}
bool Ok(int k)    // 判断顶点 k 的着色是否发生冲突
{
    for (i = 1; i< k; i++ )
        if (c[k][i] == 1 && color[i] == color[k]) return false;
    return true;
}
```

8.2.2 哈密顿回路问题

在欧拉发现七桥问题之后的一个世纪,著名的爱尔兰数学家哈密顿(William Hamilton,1805—1865 年)提出了著名的周游世界问题。他用正十二面体的 20 个顶点代表 20 个城市,要求从一个城市出发,经过每个城市恰好一次,然后回到出发城市。图 8.9 所示是一个正十二面体的展开图,按照图中的顶点编号所构成的回路,就是哈密顿回路的一个解。

假定图 $G=(V, E)$ 的顶点集为 $V=\{1, 2, \cdots, n\}$,则哈密顿回路的可能解表示为 n 元组 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,其中,$x_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$。根据题意,有如下约束条件:

$$\begin{cases} (x_i, x_{i+1}) \in E(1 \leq i \leq n-1) \\ (x_n, x_1) \in E \\ x_i \neq x_j (1 \leq i, j \leq n, i \neq j) \end{cases}$$

在哈密顿回路的可能解中,考虑到约束条件 $x_i \neq x_j (1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$,则可能解应该是$(1, 2, \cdots, n)$的一个排列,对应的解空间树中有 $n!$个叶子结点,$n=4$ 时哈密顿回路的解空间树如图 8.3 所示。

图 8 .10(a)所示是一个无向图,在解空间树中从根结点 1 开始搜索。首先将 x_1 置为 1,到达结点 2,表示哈密顿回路从顶点 1 开始。然后将 x_2 置为 1,到达结点 3,但顶点 1 重复访问,搜索结点 3 的兄弟子树,将 x_2 置为 2,构成哈密顿回路的部分解(1, 2),在经过结点 5 和结点 6 的失败的尝试后,将 x_3 置为 3,将哈密顿回路的部分解扩展到(1, 2, 3),在经过结点 8、结点 9 和结点 10 的失败的尝试后,将 x_4 置为 4,将哈密顿回路的部分解扩展到(1, 2, 3, 4),在经过结点 12、结点 13、结点 14 和结点 15 的失败的尝试后,将 x_5 置为 5,将哈密顿回路的部分解扩展到(1, 2, 3, 4, 5),但是在图 8 .10(a)中从顶点 5 到顶点 1 没有边,引起回溯;将 x_4 置为 5,到达结点 17,构成哈密顿回路的部分解(1, 2, 3, 5),在经过结点 18、结点 19 和结点 20 的失败的尝试后,将 x_5 置为 4,将哈密顿回路的部分解扩展到(1, 2, 3, 5, 4),而在图 8 .10(a)中从顶点 4 到顶点 1 存在边,所以,找到了一条哈密顿回路(1, 2, 3, 5, 4, 1),搜索过程结束。注意到,解空间树中共有 243 个结点,而回溯法只搜索了其中的 21 个结点后就找到了问题的解。在解空间树中的搜索过程如图 8 .10(b)所示。

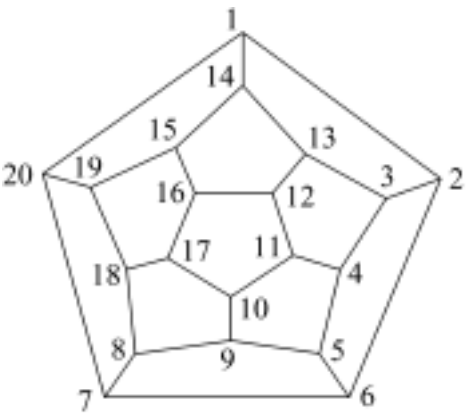


图 8 .9　哈密顿回路问题示意图

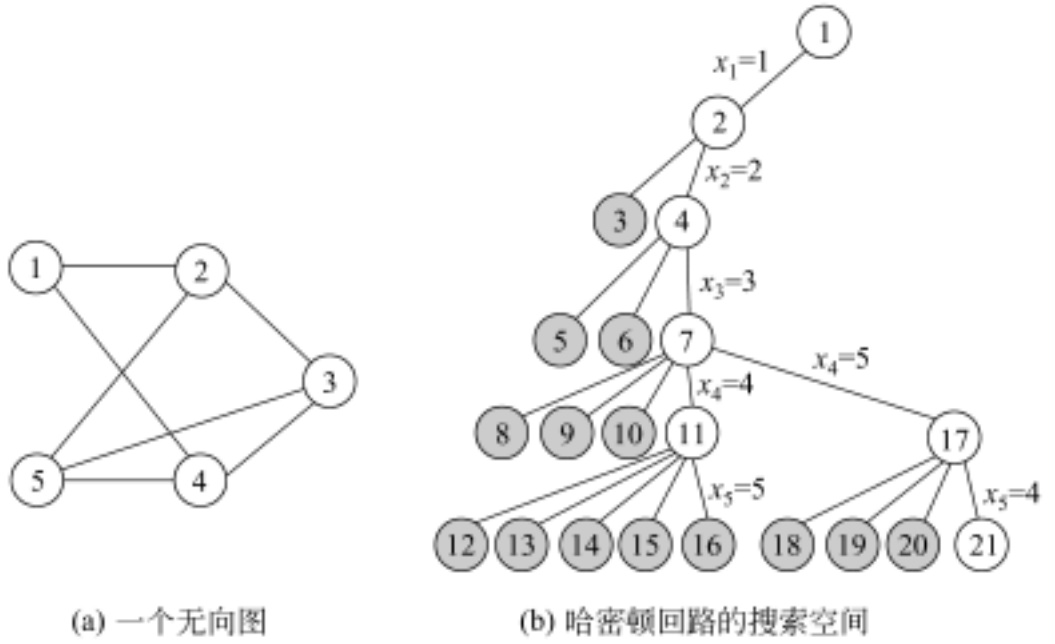


图 8 .10　回溯法求哈密顿回路示例

用回溯法求解哈密顿回路,首先把 n 元组的每一个分量初始化为 0,然后深度优先搜索解空间树,如果满足约束条件,则继续进行搜索,否则,将引起搜索过程的回溯。

设数组 x[n]存储哈密顿回路上的顶点,数组 visited[n]存储顶点的访问标志,visited[i] = 1 表示哈密顿回路经过顶点 i,算法如下:

伪代码

算法 8 .3——哈密顿回路问题

1 . 将顶点数组 x[n]初始化为 0,标志数组 visited[n]初始化为 0;
2 . k = 1; visited[1] = 1; x[1] = 1; 从顶点 1 出发构造哈密顿回路;

3 . while (k > = 1)
  3 .1 x[k] = x[k] + 1,搜索下一个顶点;
  3 .2 若(n 个顶点没有被穷举)执行下列操作
    3 .2 .1 若(顶点 x[k]不在哈密顿回路上 & & (x[k - 1], x[k]) ∈E),转步骤 3 .3;
    3 .2 .2 否则, x[k] = x[k] + 1,搜索下一个顶点;
  3 .3 若数组 x[n]已形成哈密顿路径,则输出数组 x[n],算法结束;
  3 .4 否则,
    3 .4 .1 若数组 x[n]构成哈密顿路径的部分解,则 k = k + 1,转步骤 3;
    3 .4 .2 否则,重置 x[k], k = k - 1,取消顶点 x[k]的访问标志,转步骤 3;

假设图采用邻接矩阵存储,用数组 c[n][n]存储图中的边,回溯法求解哈密顿回路的算法用 C ++ 描述如下:

C++描述

算法 8 .4——哈密顿回路问题

```
void Hamiton(int n, int x[ ], int c[ ][ ])  // 所有数组下标从 1 开始
{
  for (i = 1; i< = n; i ++ )   // 初始化顶点数组和标志数组
  {
    x[i] = 0;
    visited[i] = 0;
  }
  k = 1; visited[1] = 1; x[1] = 1;  // 从顶点 1 出发
  while (k > = 1)
  {
    x[k] = x[k] + 1;   // 搜索下一顶点
    while (x[k] < = n)
      if (visited[x[k]] = = 0 && c[x[k - 1]][x[k]] = = 1) break;
      else x[k] = x[k] + 1;
    if (x[k] < = n && k = = n && c[x[k]][1] = = 1) {
      for (k = 1; k< = n; k ++ )  cout < < x[k];
      return;
    }
    else if (x[k] < = n && k < n ) {
        visited[x[k] ] = 1;
        k = k + 1;
      }
      else {              // 回溯
        x[k] = 0;
        visited[x[k] ] = 0;
        k = k - 1;
      }
  }
}
```

8.3　组合问题中的回溯法

8.3.1　八皇后问题

八皇后问题是19世纪著名的数学家高斯于1850年提出的。问题是：在8×8的棋盘上摆放8个皇后，使其不能互相攻击，即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上。可以把八皇后问题扩展到 n 皇后问题，即在 $n \times n$ 的棋盘上摆放 n 个皇后，使任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上。

显然，棋盘的每一行上可以而且必须摆放一个皇后，所以，n 皇后问题的可能解用一个 n 元向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示，其中，$1 \leq i \leq n$ 并且 $1 \leq x_i \leq n$，即第 i 个皇后放在第 i 行第 x_i 列上。

由于两个皇后不能位于同一列上，所以，解向量 X 必须满足约束条件：

$$x_i \neq x_j \tag{8.1}$$

若两个皇后摆放的位置分别是 (i, x_i) 和 (j, x_j)，在棋盘上斜率为 -1 的斜线上，满足条件 $i-j=x_i-x_j$，在棋盘上斜率为1的斜线上，满足条件 $i+j=x_i+x_j$，综合两种情况，由于两个皇后不能位于同一斜线上，所以，解向量 X 必须满足约束条件：

$$|i-x_i| \neq |j-x_j| \tag{8.2}$$

为了简化问题，下面讨论四皇后问题，如图8.11所示。四皇后问题的解空间树应该是一个完全四叉树，树的根结点表示搜索的初始状态，从根结点到第2层结点对应皇后1在棋盘中第1行的可能摆放位置，从第2层结点到第3层结点对应皇后2在棋盘中第2行的可能摆放位置，依此类推。

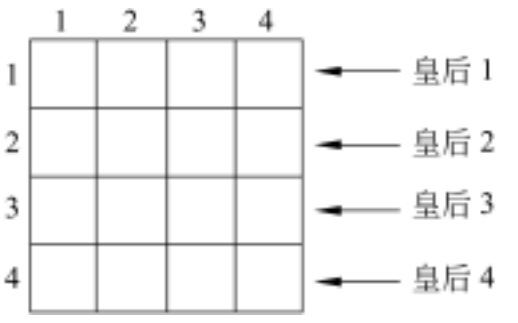


图 8.11　四皇后问题

回溯法从空棋盘开始，首先把皇后1摆放到它所在行的第1个可能的位置，也就是第1行第1列；对于皇后2，在经过第1列和第2列的失败的尝试后，把它摆放到第1个可能的位置，也就是第2行第3列；对于皇后3，把它摆放到第3行的哪一列上都会引起冲突(即违反约束条件)，所以，进行回溯，回到对皇后2的处理，把皇后2摆放到下一个可能的位置，也就是第2行第4列；然而，皇后3摆放到第3行的哪一列上都会引起冲突，再次进行回溯，回到对皇后2的处理，但此时皇后2位于棋盘的最后一列，继续回溯，回到对皇后1的处理，把皇后1摆放到下一个可能的位置，也就是第1行第2列，接下来，把皇后2摆放第2行第4列的位置，把皇后3摆放到第3行第1列的位置，把皇后4摆放到第4行第3列的位置，这就是四皇后问题的一个解，在解空间树中的搜索过程如图8.12所示。在 $n=4$ 的情况下，解空间树共有65个结点、24个叶子结点，但在实际搜索过程中，遍历操作只涉及8个结点，在24个叶子结点中，仅遍历1个叶子结点就找到了满足条件的解。如果问题需要求出所有解，回溯算法继续同样的操作，或者利用棋盘的对称性来求出其他解。

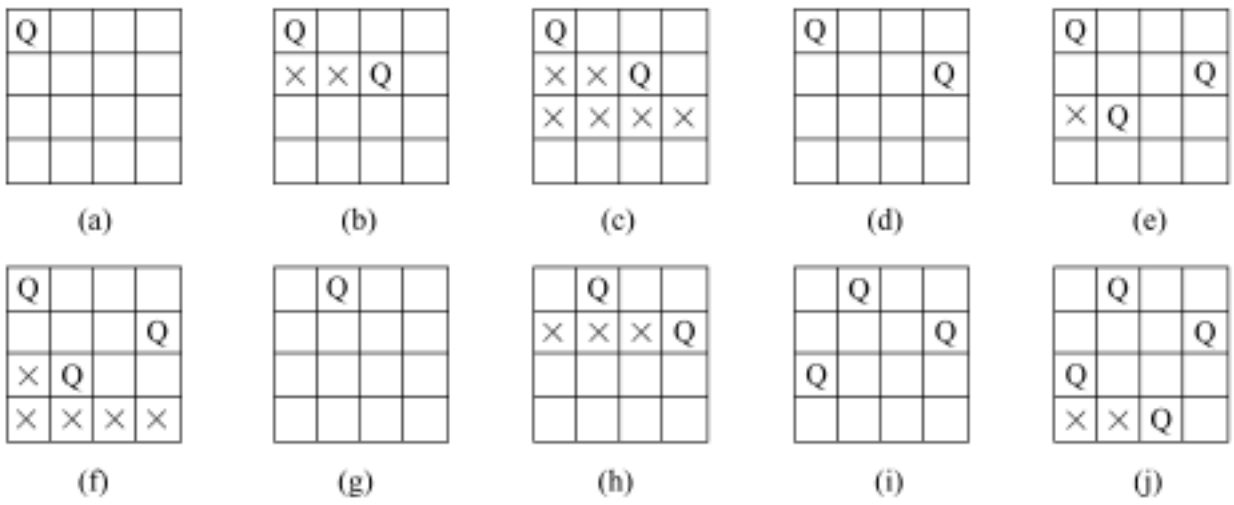


图 8.12 回溯法求解四皇后问题的搜索过程(×表示失败的尝试,Q 表示放置皇后)

C++描述

算法 8.5——n 皇后问题

```
void Queue(int n)
{
   for (i = 1; i< = n; i ++ )      // 初始化
      x[i] = 0;
   k = 1;
   while (k > = 1)
   {
      x[k] = x[k] + 1;       // 在下一列放置第 k 个皇后
      while (x[k] < = n && !Place(k))
         x[k] = x[k] + 1;       // 搜索下一列
      if (x[k] < = n && k = = n) {    // 得到一个解,输出
         for (i = 1; i< = n; i ++ )
            cout < < x[i];
         return;
      }
      else if (x[k] < = n && k < n)
               k = k + 1;         // 放置下一个皇后
            else {
               x[k] = 0;       // 重置 x[k],回溯
               k = k - 1;
            }
   }
}
bool Place(int k)   // 考察皇后 k 放置在 x[k]列是否发生冲突
{
   for (i = 1; i< k; i++ )
      if (x[k] = = x[i] | | abs(k - i) = = abs(x[k] - x[i])) return false;
    return true;
}
```

8.3.2　批处理作业调度问题

n 个作业{1, 2, …, n}要在两台机器上处理,每个作业必须先由机器 1 处理,然后再由机器 2 处理,机器 1 处理作业 i 所需时间为 a_i,机器 2 处理作业 i 所需时间为 b_i($1 \leq i \leq n$),批处理作业调度问题要求确定这 n 个作业的最优处理顺序,使得从第 1 个作业在机器 1 上处理开始,到最后一个作业在机器 2 上处理结束所需时间最少。

应 用 实 例

在计算机系统中完成一批作业,每个作业都要先完成计算,然后将计算结果打印输出这两项任务,计算任务由计算机的 CPU 完成,打印任务由打印机完成。

显然,批处理作业的一个最优调度应使机器 1 没有空闲时间,且机器 2 的空闲时间最小。可以证明,存在一个最优作业调度使得在机器 1 和机器 2 上作业以相同次序完成。

例如,有 3 个作业{1, 2, 3},这 3 个作业在机器 1 上所需的处理时间为(2, 3, 2),在机器 2 上所需的处理时间为(1, 1, 3),则这 3 个作业存在 6 种可能的调度方案:(1, 2, 3)、(1, 3, 2)、(2, 1, 3)、(2, 3, 1)、(3, 1, 2)、(3, 2, 1),相应的完成时间为 10, 8, 10, 9, 8, 8,如图 8 .13 所示。显然,最佳调度方案是(1, 3, 2)、(3, 1, 2)和(3, 2, 1),其完成

(a) 调度方案 (1,2,3),最后完成时间为 10

(b) 调度方案 (1,3,2),最后完成时间为 8

(c) 调度方案 (2,1,3),最后完成时间为 10

(d) 调度方案 (2,3,1),最后完成时间为 9

(e) 调度方案 (3,1,2),最后完成时间为 8

(f) 调度方案 (3,2,1),最后完成时间为 8

图 8 .13　n = 3 时批处理调度问题的调度方案

时间为 8。

对于批处理作业调度问题,由于要从 n 个作业的所有排列中找出具有最早完成时间的作业调度,所以,批处理作业调度问题的解空间是一棵排列树。

设数组 a[n]存储作业在机器 1 上的处理时间,b[n]存储作业在机器 2 上的处理时间,回溯法求解批处理作业调度问题的算法如下:

C++描述

算法 8.6——批处理作业调度问题

```
void BatchJob(int n, int a[ ], int b[ ], int &bestTime)
{  // 数组 x 存储具体的作业调度,下标从 1 开始;
   // 数组 sum1 存储机器 1 的作业时间,sum2 存储机器 2 的作业时间,下标从 0 开始
   for (i=1; i<=n; i++)
   {
      x[i]=0;
      sum1[i]=0;
      sum2[i]=0;
   }
   sum1[0]=0; sum2[0]=0;      // 初始迭代使用
   k=1; bestTime=∞;
   while (k>=1)
   {
      x[k]=x[k]+1;
      while (x[k]<=n)
          if (Ok(k)) {
             sum1[k]=sum1[k-1]+a[x[k]];
             sum2[k]=max(sum1[k], sum2[k-1])+b[x[k]];
             if (sum2[k]<bestTime) break;
             else x[k]=x[k]+1;
          }
          else x[k]=x[k]+1;
      if (x[k]<=n && k<n)
          k=k+1;             // 安排下一个作业
      else {
          if (x[k]<=n && k==n)          // 得到一个作业安排
              if (bestTime>sum2[k])
                 bestTime=sum2[k];
          x[k]=0;            // 重置 x[k],回溯
          k=k-1;
      }
   }
}
bool Ok(int k)      // 作业 k 与其他作业是否发生冲突(重复)
```

```
{
   for (i = 1; i< k; i++ )
      if (x[i] = = x[k]) return false;
   return true;
}
```

8.4　实验项目——0/1背包问题

1.实验题目

给定 n 种物品和一个容量为 C 的背包,物品 i 的重量是 w_i,其价值为 v_i,0/1背包问题是如何选择装入背包的物品(物品不可分割),使得装入背包中物品的总价值最大?

2.实验目的

(1) 掌握回溯法的设计思想;
(2) 掌握解空间树的构造方法,以及在求解过程中如何存储求解路径;
(3) 考察回溯法求解问题的有效程度。

3.实验要求

(1) 设计可能解的表示方式,构成解空间树;
(2) 设计回溯算法完成问题求解;
(3) 设计测试数据,统计搜索空间的结点数。

4.实现提示

为了便于求解,将物品按单位重量价值从大到小排序,这样只要顺序考察各物品即可。设 bestP 表示当前背包获得的最大价值,背包当前的重量和获得的价值分别用变量 cw 和 cp 表示,物品的重量存储在数组 w[n]中,价值存储在数组 p[n]中,算法如下:

伪代码

算法 8.7——0/1背包问题

```
1.将各物品按单位重量价值从大到小排序;
2. bestP = 0;
3. BackTrack(1);
4.输出背包的最大价值 bestP;

BackTrack(int i)
1. if (i> n) {
      if (bestP < cp) bestP = cp;
      return;
   }
```

```
2．若(cw + w[i] < = C),则                    // 进入左子树
   2.1   cw = cw + w[i];
   2.2   cp = cp + p[i];
   2.3   BackTrack(i + 1);
   2.4   cw = cw - w[i]; cp = cp - p[i];   // 回溯,进入右子树
```

阅读材料——禁忌搜索算法

优化算法是一种搜索过程或规则,它基于某种思想和机制,通过一定的途径或规则来得到满足用户要求的最优解。近些年来,人们提出的现代启发式算法,都是通过模拟或揭示某些自然现象或过程而得到发展。这些算法为解决复杂问题提供了新的思路和手段,在优化领域占有极为重要的地位,代表了优化技术的发展方向。1986 年,由 Fred Glover 首次提出的禁忌搜索算法(tabu search algorithm, TS)就是其中之一,它是模拟人类智力过程的一种全局搜索算法,是对局部邻域搜索的一种扩展。

禁忌(tabu)一词来源于汤加语,是波利尼西亚的一种语言,其含义是保护措施或者是有危险禁止的意思。这正符合禁忌搜索的主题,一方面,当沿着产生相反结果的道路走下去时,也不会陷入一个圈套而导致无处可逃,另一方面,在必要情况下,保护措施允许被淘汰,也就是说,某种措施被强制运用时,禁忌条件就宣布无效。

在日常生活中有这样一个常识现象:当我们要寻找某个东西或寻找某个地方时,对刚刚已搜索的地方不会立即去搜索,而更大的概率是到近一段时间内没有过去的地方进行搜索,若没有找到,再搜索已去过的地方。禁忌搜索算法正是基于这种思想提出的。

禁忌搜索算法的基本思想是:首先确定一个初始可行解 x, x 可以从一个启发式算法获得或在可行解集合 X 中任意选择;定义可行解 x 的邻域移动集 $S(x)$,从邻域移动集中挑选一个能改进当前解 x 的移动 $x' \in S(x)$,再从新解 x' 开始,重复搜索,如果邻域移动集中只能接受比前一个可行解 x 更好的解,搜索就可能陷入循环。为了避免陷入循环和局部最优,构造一个短期循环记忆表即禁忌表来存储刚刚进行过的 $|T|$ ($|T|$ 为禁忌表长度)个邻域移动,这些移动称为禁忌移动,对于当前的移动,在以后的 $|T|$ 次循环内是禁止的,以避免回到原始解,$|T|$ 次后释放该移动。禁忌表是一个循环表,搜索过程中被循环地修改使禁忌表始终保存着 $|T|$ 个移动,当迭代中所发现的最好解无法改进或无法离开时,算法停止。

从上述描述中可以看到,禁忌搜索算法是从一个初始可行解出发,选择一系列使目标函数值减少最多(假设求极小值问题)的特定搜索方向(即移动)作为试探,同时为了避免陷入局部最优解,禁忌搜索采用了一种灵活的“记忆”技术,即禁忌表来对已经进行的优化过程进行记录和选择,指导下一步的搜索方向。禁忌表中保存了最近若干次迭代过程中所实现的移动,凡是处于禁忌表中的移动,在当前迭代过程中是不允许实现的,这样可以避免算法重新访问在最近若干次迭代过程中已经访问过的解,从而防止了循环,帮助算法摆脱局部最优解。另外,为了尽可能不错过产生最优解的“移动”,禁忌搜索算法采用藐视

准则来赦免一些被禁忌的优良状态,进而保证多样化的有效探索以最终实现全局优化。

下面给出基本的禁忌搜索算法的一般框架:

1.给定算法参数,随机产生初始解 x,置禁忌表为空
2.设初始为当前解和当前最好解;
3.重复执行以下步骤,直到满足终止条件:
　3.1　利用当前解 x 的邻域函数产生其所有(或若干)邻域解,从中确定若干候选解;
　3.2　求出目标函数(也称为适应值函数);
　3.3　对候选解执行下列操作:
　　3.3.1　若候选解不在禁忌表或在禁忌表中但其目标函数值比最好解还好,则把它作为新的当前解并转到 3.4;
　　3.3.2　若所有候选解都在禁忌表中,则转到 3.1;
　3.4　设当前解为最好解;
　3.5　若禁忌表已满,则按某原则更新禁忌表;
　3.6　将当前解插入禁忌表;
4.记下最优解,结束算法;

禁忌搜索的适应值函数用于对搜索状态的评价,它结合禁忌准则和藐视准则来选取新的当前状态。目标函数直接作为适应值函数是比较容易理解的做法。当然,目标函数的任何变形都可作为适应值函数。

禁忌对象是被置入禁忌表中的那些状态变化的元素,其目的是为了尽量避免迂回搜索而多探索一些有效的搜索途径。状态变化分为解的简单变化、解向量中分量的变化和目标值变化三种。所谓解的简单变化是指从一个解变化到另一个解,这种变化在搜索算法中经常使用,是变化最基本因素;所谓解向量中分量的变化是指解与解之间的变化可以通过某些分量的变化来体现;而目标值变化是指在优化问题的求解过程中,目标值是否发生变化,是否接近最优目标值。在搜索过程中会产生一系列的状态变化,于是禁忌对象就可以选取三种状态变化中的任何一种。例如,当解从 x 变到 y 时,y 可能是局部最优解,为了避开局部最优解,禁忌 y 这个解再次出现。禁忌的规则是:当 y 的邻域中有比它更优的解时,选择更优的解;当 y 为该问题的局部最优解时,不再选 y,而选择比 y 较差的解。

禁忌表记录以前若干次的移动,禁忌这些移动在近期内返回,其目的是阻止搜索过程中出现循环和避免陷入局部最优。在迭代固定次数后,禁忌表释放这些移动,重新参加运算,因此它是一个循环表。每迭代一次,它的禁忌对象被记录在禁忌表的末端,而它的最早的一个移动从禁忌表中释放出来。显然,禁忌表的规模影响搜索速度和解的质量,禁忌表规模较小时,搜索区间大,得到的解较分散;反之,禁忌规模较大时,搜索区间较小,得到的解较集中。一般在开始时让禁忌规模较小,在搜索过程中当接近最优解时增大禁忌表规模,这就是动态禁忌表。

藐视准则可以基于以下准则进行:

(1) 基于适应值的原则。如果某个禁忌候选解的适应值优于以往最优解,则禁忌候选解为当前解;若移动过程中发觉当前的路径小于以往的任何路径,则此解不受禁忌表的限制;

(2) 基于方向的准则。按有效的方向进行搜索。

邻域函数、禁忌对象、禁忌表和藐视准则等实现思想构成了禁忌搜索算法的关键。通常邻域函数沿用局部邻域搜索的思想,用以实现邻域搜索;禁忌表和禁忌对象的设置,体现了算法避免迂回搜索的特点;藐视准则,则是对优良状态的奖励,它是对禁忌策略的一种放松。需要指出的是,上述算法仅是一种简单的禁忌搜索框架,对各关键环节复杂和多样化的设计则可构造出各种禁忌搜索算法。同时,算法流程中的禁忌对象,可以是搜索状态,也可以是特定搜索操作,甚至可以是搜索目标值等。

禁忌搜索算法对于初始解具有较强的依赖性,一个较好的初始解可使禁忌搜索在解空间中搜索到更好的解,而一个较差的初始解则会降低禁忌搜索的收敛速度,搜索到的解也相对较差;迭代搜索过程是串行的,仅是单一状态的移动,而非并行搜索,这就使得算法的优化时间往往较长。

禁忌搜索算法在组合优化、生产调度、机器学习、路由选择和电路设计等领域取得了很大的成功。Tan 等人研究了 CDMA 中多用户检测的禁忌搜索算法;Niar 等人设计了多维 0/ 1 背包问题的并行禁忌搜索算法;Watson 等人提出了求解车间调度的禁忌搜索算法的动态模型等。近年来,在函数全局优化方面得到较多的研究,并呈大发展的趋势。为了进一步改善禁忌搜索算法的性能,可以对算法本身的操作和参数选择进行改进,也可以把禁忌搜索与其他启发式方法结合起来,例如与模拟退火算法、遗传算法、神经网络等相结合。

参 考 文 献

[1] 邢文训, 谢金鑫 . 现代优化计算方法[M] . 北京: 清华大学出版社, 1999

[2] 陈冬芳等 . 全局最优化算法及其应用 . 大庆石油学院学报, 2005 .1(29)

[3] 徐宁等 . 几种现代优化算法的比较研究 . 系统工程与电子技术, 2002 .12(24)

[4] 王海峰 . 禁忌搜索算法的研究及其在车间生产控制中的应用 . 大连铁道学院硕士论文, 2002

习 题 8

1 . 用递归函数设计图着色问题的回溯算法。

2 . 用递归函数设计八皇后问题的回溯算法。

3 . 修改算法 8 5,使它可以输出 n 皇后问题的所有布局。

4 . 对图 8 .14 使用回溯法求解图着色问题,画出生成的搜索空间。

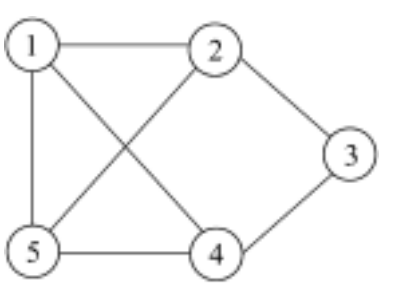


图 8 .14 第 4 题图

5 . 给定背包容量 $W = 20$,以及 6 个物品,重量为(5, 3, 2, 10, 4, 2),价值为(11, 8, 15, 18, 12, 6)。画出回溯法求解上

述 0/ 1 背包问题的搜索空间。

6 .给定一个正整数集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$和一个正整数 y,设计回溯算法,求集合 X 的一个子集 Y,使得 Y 中元素之和等于 y。

7 .设计回溯算法求解最大团问题。(提示: 最大团问题在 2 .4 .3 节有介绍)。

8 .迷宫问题。迷宫问题的求解是实验心理学中的一个经典问题,心理学家把一只老鼠从一个无顶盖的大盒子的入口处赶进迷宫,迷宫中设置很多隔壁,对前进方向形成了多处障碍,心理学家在迷宫的惟一出口处放置了一块奶酪,吸引老鼠在迷宫中寻找通路以到达出口,如图 8 .15 所示。设计回溯算法实现迷宫求解。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
入口 (1,1)	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
	2	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
	3	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
	4	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
	5	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
	6	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

出口 (6,8)

图 8 .15　第 8 题图(其中 1 代表有障碍,0 代表无障碍)
前进的方向有 8 个,分别是上、下、左、右、左上、左下、右上、右下

9 .亚瑟王打算请 150 名骑士参加宴会,但是有些骑士相互之间会有口角,而亚瑟王知道谁和谁不合。亚瑟王希望能让他的客人围着一张圆桌坐下,而所有不和的骑士相互之间都不会挨着坐。回答下列问题:

(1) 哪一个经典问题能够作为亚瑟王问题的模型 ?

(2) 请证明,如果与每个骑士不和的人数不超过 75,则该问题有解;

(3) 设计回溯算法求解亚瑟王问题。

第 9 章 分支限界法

CHAPTER

回溯法按深度优先策略遍历问题的解空间树,在遍历过程中,应用约束条件、目标函数等剪枝函数实行剪枝。分支限界法(branch and bound method)按广度优先策略遍历问题的解空间树,在遍历过程中,对已经处理的每一个结点根据限界函数估算目标函数的可能取值,从中选取使目标函数取得极值(极大或极小)的结点优先进行广度优先搜索,从而不断调整搜索方向,尽快找到问题的解。因为限界函数常常是基于问题的目标函数而确定的,所以,分支限界法适用于求解最优化问题。

9.1 概 述

9.1.1 解空间树的动态搜索(2)

回溯法从根结点出发,按照深度优先策略遍历问题的解空间树。例如,图 8.4 所示对 0/1 背包问题的搜索,如果某结点所代表的部分解不满足约束条件(即超过背包容量),则对以该结点为根的子树实行剪枝;否则,继续按深度优先策略遍历以该结点为根的子树。这种遍历过程一直进行,当搜索到一个满足约束条件的叶子结点时,就找到了一个可行解。对整个解空间树的遍历结束后,所有可行解中价值最大的就是问题的最优解。回溯法求解 0/1 背包问题,虽然实行剪枝减少了搜索空间,但是,整个搜索过程是按深度优先策略机械地进行,所以,这种搜索是盲目的。

再如,图 8.6 所示对 TSP 问题的搜索,首先将目标函数的界初始化为最大值,在搜索过程中,如果某结点代表的部分解超过目标函数的界,则对以该结点为根的子树实行剪枝;否则,继续按深度优先策略遍历以该结点为根的子树。这种目标函数的界只有在找到了一个可行解(即第一个叶子)后才有意义,以后的搜索相对来说才有了方向。所以,从搜索的整个过程来看,这种搜索仍然是盲目的。

分支限界法首先确定一个合理的限界函数,并根据限界函数确定目标函数的界[down, up](对于最小化问题,根据限界函数确定目标函数的下

界 down,目标函数的上界 up 可以用某种启发式方法得到,例如贪心法。对于最大化问题,根据限界函数确定目标函数的上界 up,目标函数的下界 down 可以用某种启发式方法得到)。然后,按照广度优先策略遍历问题的解空间树,在分支结点上,依次搜索该结点的所有孩子结点,分别估算这些孩子结点的目标函数的可能取值(对于最小化问题,估算结点的下界;对于最大化问题,估算结点的上界),如果某孩子结点的目标函数可能取得的值超出目标函数的界,则将其丢弃,因为从这个结点生成的解不会比目前已经得到的解更好;否则,将其加入待处理结点表(以下简称表 PT)中。依次从表 PT 中选取使目标函数的值取得极值(对于最小化问题,是极小值;对于最大化问题,是极大值)的结点成为当前扩展结点,重复上述过程,直到找到最优解。

随着这个遍历过程的不断深入,表 PT 中所估算的目标函数的界越来越接近问题的最优解。当搜索到一个叶子结点时,如果该结点的目标函数值是表 PT 中的极值(对于最小化问题,是极小值;对于最大化问题,是极大值),则该叶子结点对应的解就是问题的最优解;否则,根据这个叶子结点调整目标函数的界(对于最小化问题,调整上界;对于最大化问题,调整下界),依次考察表 PT 中的结点,将超出目标函数界的结点丢弃,然后从表 PT 中选取使目标函数取得极值的结点继续进行扩展。

下面以 0/1 背包问题为例介绍分支限界法的搜索过程。假设有 4 个物品,其重量分别为(4, 7, 5, 3),价值分别为(40, 42, 25, 12),背包容量 $W = 10$。首先,将给定物品按单位重量价值从大到小排序,结果如表 9.1 所示。

表 9.1 0/1 背包问题的价值/重量排序结果

物品	重量(w)	价值(v)	价值/重量(v/w)
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

这样,第 1 个物品给出了单位重量的最大价值,最后一个物品给出了单位重量的最小价值。应用贪心法求得近似解为(1, 0, 0, 0),获得的价值为 40,这可以作为 0/1 背包问题的下界。如何求得 0/1 背包问题的一个合理的上界呢?考虑最好情况,背包中装入的全部是第 1 个物品且可以将背包装满,则可以得到一个非常简单的上界的计算方法:$ub = W \times (v_1/w_1) = 10 \times 10 = 100$。于是,得到了目标函数的界[40, 100]。

一般情况下,解空间树中第 i 层的每个结点,都代表了对物品 1～i 做出的某种特定选择,这个特定选择由从根结点到该结点的路径唯一确定:左分支表示装入物品,右分支表示不装入物品。对于第 i 层的某个结点,假设背包中已装入物品的重量是 w,获得的价值是 v,计算该结点的目标函数上界的一个简单方法是把已经装入背包中的物品取得的价值 v,加上背包剩余容量 $W - w$ 与剩下物品的最大单位重量价值 v_{i+1}/w_{i+1} 的积,于是,得到限界函数:

$$ub = v + (W - w) \times (v_{i+1}/w_{i+1}) \tag{9.1}$$

分支限界法求解 0/ 1 背包问题,其搜索空间如图 9 .1 所示,具体的搜索过程如下:

(1) 在根结点 1,没有将任何物品装入背包,因此,背包的重量和获得的价值均为 0,根据限界函数计算结点 1 的目标函数值为 10×10 = 100。

(2) 在结点 2,将物品 1 装入背包,因此,背包的重量为 4,获得的价值为 40,目标函数值为 40 + (10 - 4)×6 = 76,将结点 2 加入待处理结点表 PT 中;在结点 3,没有将物品 1 装入背包,因此,背包的重量和获得的价值仍为 0,目标函数值为 10×6 = 60,将结点 3 加入表 PT 中。

(3) 在表 PT 中选取目标函数值取得极大的结点 2 优先进行搜索。

(4) 在结点 4,将物品 2 装入背包,因此,背包的重量为 11,不满足约束条件,将结点 4 丢弃;在结点 5,没有将物品 2 装入背包,因此,背包的重量和获得的价值与结点 2 相同,目标函数值为 40 + (10 - 4) ×5 = 70,将结点 5 加入表 PT 中。

(5) 在表 PT 中选取目标函数值取得极大的结点 5 优先进行搜索。

(6) 在结点 6,将物品 3 装入背包,因此,背包的重量为 9,获得的价值为 65,目标函数值为 65 + (10 - 9) ×4 = 69,将结点 6 加入表 PT 中;在结点 7,没有将物品 3 装入背包,因此,背包的重量和获得的价值与结点 5 相同,目标函数值为 40 + (10 - 4) ×4 = 64,将结点 6 加入表 PT 中。

(7) 在表 PT 中选取目标函数值取得极大的结点 6 优先进行搜索。

(8) 在结点 8,将物品 4 装入背包,因此,背包的重量为 12,不满足约束条件,将结点 8 丢弃;在结点 9,没有将物品 4 装入背包,因此,背包的重量和获得的价值与结点 6 相同,目标函数值为 65。

(9) 由于结点 9 是叶子结点,同时结点 9 的目标函数值是表 PT 中的极大值,所以,结点 9 对应的解即是问题的最优解,搜索结束。

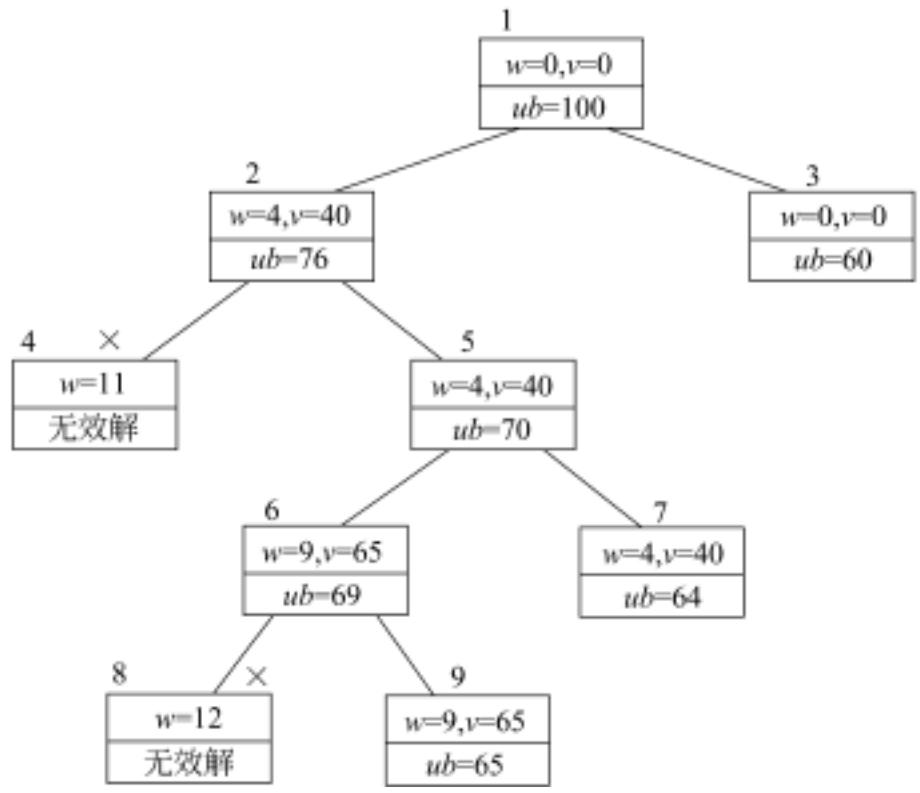


图 9 .1　分支限界法求解 0/ 1 背包问题示例

(×表示该结点被丢弃,结点上方的序号表示搜索顺序)

从 0/1 背包问题的搜索过程可以看出,与回溯法相比,分支限界法可以根据限界函数不断调整搜索方向,选择最有可能取得最优解的子树优先进行搜索,从而尽快找到问题的解。

9.1.2 分支限界法的设计思想

假设求解最大化问题,问题的解向量为 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,其中,$x_i$ 的取值范围为某个有穷集合 S_i,$|S_i|=r_i$ $(1\leq i\leq n)$。在使用分支限界法搜索问题的解空间树时,首先根据限界函数估算目标函数的界[down, up],然后从根结点出发,扩展根结点的 r_1 个孩子结点,从而构成分量 x_1 的 r_1 种可能的取值方式。对这 r_1 个孩子结点分别估算可能取得的目标函数值 bound(x_1),其含义是以该孩子结点为根的子树所可能取得的目标函数值不大于 bound(x_1),也就是部分解应满足:

$$\text{bound}(x_1)\geq\text{bound}(x_1, x_2)\geq\cdots\geq\text{bound}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

若某孩子结点的目标函数值超出目标函数的界,则将该孩子结点丢弃;否则,将该孩子结点保存在待处理结点表 PT 中。从表 PT 中选取使目标函数取得极大值的结点作为下一次扩展的根结点,重复上述过程,当到达一个叶子结点时,就得到了一个可行解 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$及其目标函数值 bound($x_1, x_2, \cdots, x_n$)。如果 bound($x_1, x_2, \cdots, x_n$)是表 PT 中目标函数值最大的结点,则 bound($x_1, x_2, \cdots, x_n$)就是所求问题的最大值,($x_1, x_2, \cdots, x_n$)就是问题的最优解;如果 bound($x_1, x_2, \cdots, x_n$)不是表 PT 中目标函数值最大的结点,说明还存在某个部分解对应的结点,其上界大于 bound($x_1, x_2, \cdots, x_n$)。于是,用 bound($x_1, x_2, \cdots, x_n$)调整目标函数的下界,即令 down = bound($x_1, x_2, \cdots, x_n$),并将表 PT 中超出目标函数下界 down 的结点删除,然后选取目标函数值取得极大值的结点作为下一次扩展的根结点,继续搜索,直到某个叶子结点的目标函数值在表 PT 中最大。

分支限界法求解最大化问题的一般过程如下:

分支限界法的一般过程

1. 根据限界函数确定目标函数的界[down, up];
2. 将待处理结点表 PT 初始化为空;
3. 对根结点的每个孩子结点 x 执行下列操作
   - 3.1 估算结点 x 的目标函数值 value;
   - 3.2 若(value >= down),则将结点 x 加入表 PT 中;
4. 循环直到某个叶子结点的目标函数值在表 PT 中最大
   - 4.1 i = 表 PT 中值最大的结点;
   - 4.2 对结点 i 的每个孩子结点 x 执行下列操作
     - 4.2.1 估算结点 x 的目标函数值 value;
     - 4.2.2 若(value >= down),则将结点 x 加入表 PT 中;
     - 4.2.3 若(结点 x 是叶子结点且结点 x 的 value 值在表 PT 中最大),则将结点 x 对应的解输出,算法结束;
     - 4.2.4 若(结点 x 是叶子结点但结点 x 的 value 值在表 PT 中不是最大),则令 down = value,并且将表 PT 中所有小于 value 的结点删除;

应用分支限界法的关键问题是:

(1) 如何确定合适的限界函数

分支限界法在遍历过程中根据限界函数估算某结点的目标函数的可能取值。好的限界函数不仅计算简单,还要保证最优解在搜索空间中,更重要的是能在搜索的早期对超出目标函数界的结点进行丢弃,减少搜索空间,从而尽快找到问题的最优解。有时,对于具体的问题实例需要进行大量实验,才能确定一个合理的限界函数。

(2) 如何组织待处理结点表

为了能在待处理结点表 PT 中选取使目标函数取得极值(极大或极小)的结点时提高查找效率,表 PT 可以采用堆的形式,也可以采用优先队列的形式存储。

(3) 如何确定最优解中的各个分量

分支限界法对问题的解空间树中结点的处理是跳跃式的,回溯也不是单纯地沿着双亲结点一层一层向上回溯,因此,当搜索到某个叶子结点且该叶子结点的目标函数值在表 PT 中最大时(假设求解最大化问题),求得了问题的最优值,但是,却无法求得该叶子结点对应的最优解中的各个分量。这个问题可以用如下方法解决:

① 对每个扩展结点保存根结点到该结点的路径;

② 在搜索过程中构建搜索经过的树结构,在求得最优解时,从叶子结点不断回溯到根结点,以确定最优解中的各个分量。

例如,图 9.1 所示 0/1 背包问题,为了对每个扩展结点保存根结点到该结点的路径,将部分解(x_1, …, x_i)和该部分解的目标函数值都存储在待处理结点表 PT 中,在搜索过程中表 PT 的状态如图 9.2 所示。

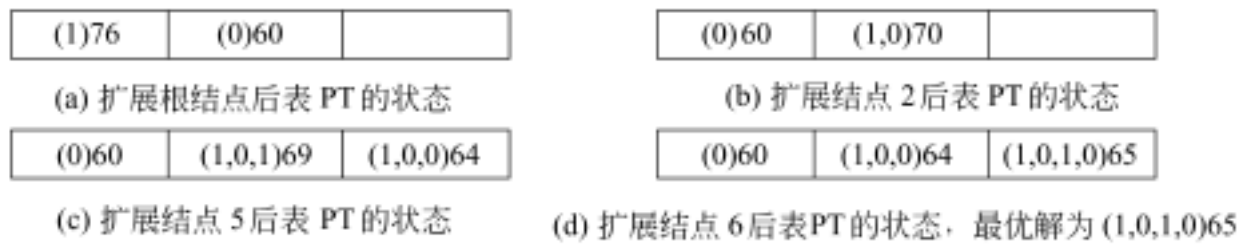


图 9.2　方法①确定 0/1 背包问题最优解的各分量

例如,图 9.1 所示 0/1 背包问题,为了在搜索过程中构建搜索经过的树结构,设一个表 ST,在表 PT 中取出最小值结点进行扩充时,将最小值结点存储到表 ST 中,表 PT 和表 ST 的数据结构为(物品 i - 1 的选择结果, < 物品 i, 物品 i 的选择结果 > ub),在搜索过程中表 PT 和表 ST 的状态如图 9.3 所示。

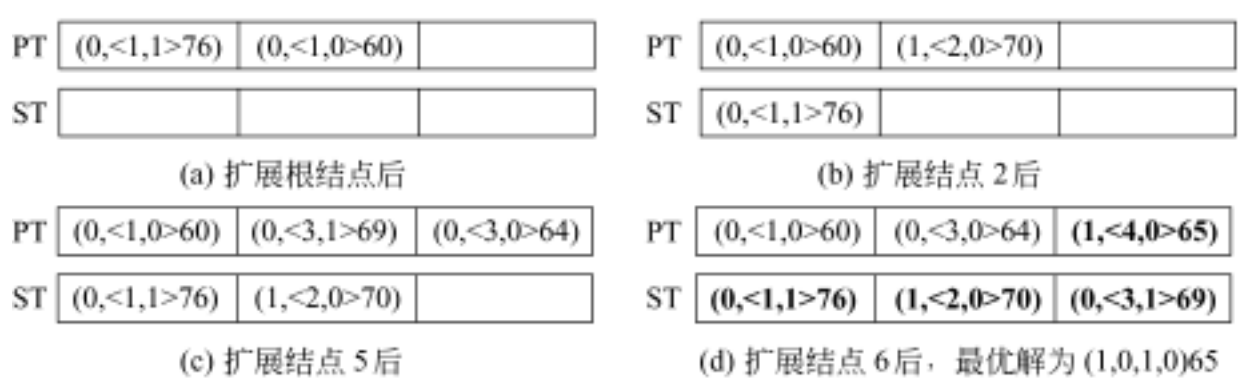


图 9.3　方法②确定 0/1 背包问题最优解的各分量

在扩展结点 6 求得最优值 65 时,可知物品 4 没有被装入背包,而物品 3 被装入背包,在表 ST 中回溯,物品 2 没有被装入背包,物品 1 被装入背包,回溯所经过的路线是: 1, < 4,0 > 65→0, < 3,1 > 69→1, < 2,0 > 70→0, < 1,1 > 76。

9.1.3 分支限界法的时间性能

一般情况下,在问题的解向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中,分量 $x_i(1\leq i\leq n)$的取值范围为某个有限集合 $S_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir_i}\}$,因此,问题的解空间由笛卡儿积 $A=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$构成,并且第 1 层的根结点有 $|S_1|$棵子树,则第 2 层共有 $|S_1|$个结点,第 2 层的每个结点有 $|S_2|$棵子树,则第 3 层共有 $|S_1|\times|S_2|$个结点,依此类推,第 $n+1$ 层共有 $|S_1|\times|S_2|\times\cdots\times|S_n|$个结点,它们都是叶子结点,代表问题的所有可能解。

分支限界法和回溯法实际上都属于蛮力穷举法,当然不能指望它有很好的最坏时间复杂性,遍历具有指数阶个结点的解空间树,在最坏情况下,时间复杂性肯定为指数阶。与回溯法不同的是,分支限界法首先扩展解空间树中的上层结点,并采用限界函数,有利于实行大范围剪枝;同时,根据限界函数不断调整搜索方向,选择最有可能取得最优解的子树优先进行搜索。所以,如果选择了结点的合理扩展顺序以及设计了一个好的限界函数,分支界限法可以快速得到问题的解。

分支限界法可以对许多组合问题的较大规模的输入实例在合理的时间内求解。然而,对于具体的问题实例,很难预测分支限界法的搜索行为,无法从实质上预先判定: 哪些实例可以在合理的时间内求解,哪些实例不能在合理的时间内求解。

分支限界法的较高效率是以付出一定代价为基础的,其工作方式也造成了算法设计的复杂性。首先,一个更好的限界函数通常需要花费更多的时间计算相应的目标函数值,而且对于具体的问题实例,通常需要进行大量实验,才能确定一个好的限界函数;其次,由于分支限界法对解空间树中结点的处理是跳跃式的,因此,在搜索到某个叶子结点得到最优值时,为了从该叶子结点求出对应的最优解中的各个分量,需要对每个扩展结点保存该结点到根结点的路径,或者在搜索过程中构建搜索经过的树结构,这使得算法的设计较为复杂;最后,算法要维护一个待处理结点表 PT,并且需要在表 PT 中快速查找取得极值的结点,等等。这都需要较大的存储空间,在最坏情况下,分支限界法需要的空间复杂性是指数阶。

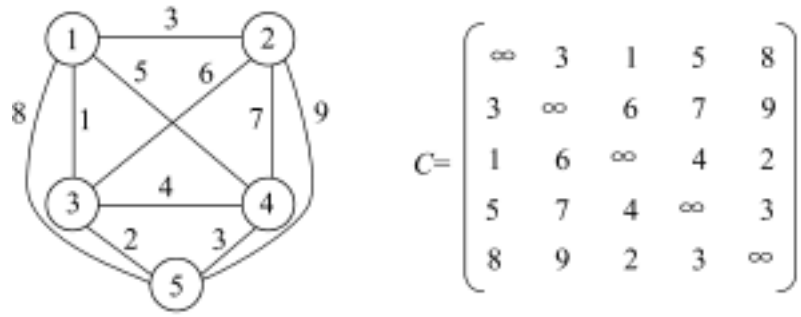
9.2 图问题中的分支限界法

9.2.1 TSP问题

TSP 问题是指旅行家要旅行 n 个城市,要求各个城市经历且仅经历一次,然后回到出发城市,并要求所走的路程最短。

图 9.4(a)所示是一个带权无向图,(b)是该图的代价矩阵。

对图 9.4 所示无向图采用贪心法求得近似解为 1→3→5→4→2→1,其路径长度为 1+2+3+7+3=16,这可以作为 TSP 问题的上界。如何求得 TSP 问题的一个合理的下



(a) 一个无向图　　(b) 无向图的代价矩阵

图 9.4　无向图及其代价矩阵

界呢？把矩阵中每一行最小的元素相加，可以得到一个简单的下界，其路径长度为 1 + 3 + 1 + 3 + 2 = 10，但是还有一个信息量更大的下界：考虑一个 TSP 问题的完整解，在每条路径上，每个城市都有两条邻接边，一条是进入这个城市的，另一条是离开这个城市的，那么，如果把矩阵中每一行最小的两个元素相加再除以 2，如果图中所有的代价都是整数，再对这个结果向上取整，就得到了一个合理的下界。需要强调的是，这个解并不是一个合法的选择（可能没有构成哈密顿回路），它仅仅给出了一个参考下界。对图 9.4 所示的无向图，目标函数的下界是：$lb = ((1+3)+(3+6)+(1+2)+(3+4)+(2+3))/2 = 14$。于是，得到了目标函数的界[14, 16]。

某条路径的一些边被确定后，就可以并入这些信息并计算部分解的目标函数值的下界。一般情况下，对于一个正在生成的路径，假设已确定的顶点集合 $U = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$，即路径上已确定了 k 个顶点，此时，该部分解的目标函数值的计算方法如下：

$$lb = \left(2\sum_{i=1}^{k-1} c[r_i][r_{i+1}] + \sum_{r_i \in U} r_i \text{ 行不在路径上的最小元素} + \sum_{r_j \in U} r_j \text{ 行最小的两个元素} \right) \Big/ 2 \tag{9.2}$$

例如，图 9.4 所示为无向图，如果部分解包含边 (1, 4)，则该部分解的下界是 $lb = ((1+5)+(3+6)+(1+2)+(3+5)+(2+3))/2 = 16$。

应用分支限界法求解图 9.4 所示无向图的 TSP 问题，其搜索空间如图 9.5 所示，具体的搜索过程如下（加黑表示该路径上已经确定的边）：

(1) 在根结点 1，根据限界函数计算目标函数的值为：

$lb = ((1+3)+(3+6)+(1+2)+(3+4)+(2+3))/2 = 14$。

(2) 在结点 2，从城市 1 到城市 2，路径长度为 3，目标函数的值为：

$((1+3)+(3+6)+(1+2)+(3+4)+(2+3))/2 = 14$，

将结点 2 加入待处理结点表 PT 中；在结点 3，从城市 1 到城市 3，路径长度为 1，目标函数的值为：

$((1+3)+(3+6)+(1+2)+(3+4)+(2+3))/2 = 14$，

将结点 3 加入表 PT 中；在结点 4，从城市 1 到城市 4，路径长度为 5，目标函数的值为：

$((1+5)+(3+6)+(1+2)+(3+5)+(2+3))/2 = 16$，

将结点 4 加入表 PT 中；在结点 5，从城市 1 到城市 5，路径长度为 8，目标函数的值为：

$((1+8)+(3+6)+(1+2)+(3+5)+(2+8))/2 = 20$，

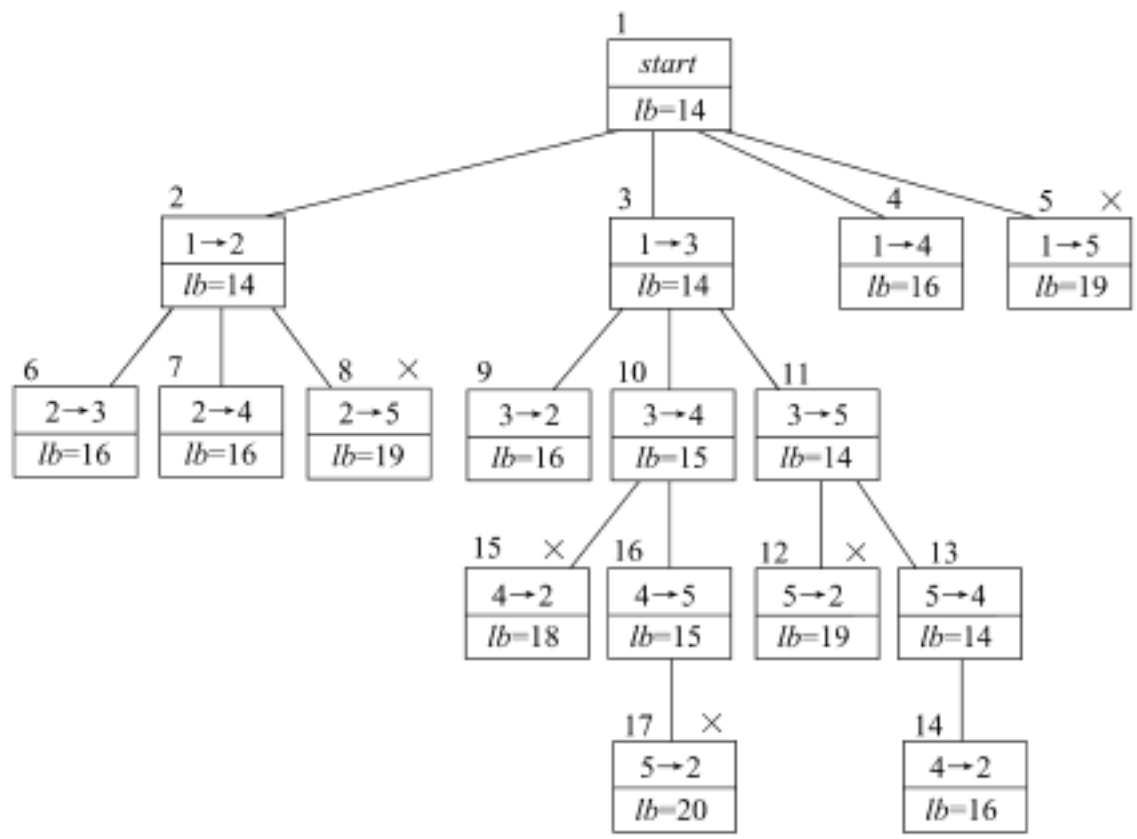


图 9.5 分支限界法求解 TSP 问题示例

(×表示该结点被丢弃,结点上方数字表示搜索顺序)

超出目标函数的界,将结点 5 丢弃。

(3) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 2 优先进行搜索。

(4) 在结点 6,从城市 2 到城市 3,目标函数值为:

$$((1+3)+(3+6)+(1+6)+(3+4)+(2+3))/2=16,$$

将结点 6 加入表 PT 中;在结点 7,从城市 2 到城市 4,目标函数值为:

$$((1+3)+(3+7)+(1+2)+(3+7)+(2+3))/2=16,$$

将结点 7 加入表 PT 中;在结点 8,从城市 2 到城市 5,目标函数值为:

$$((1+3)+(3+9)+(1+2)+(3+4)+(2+9))/2=19,$$

超出目标函数的界,将结点 8 丢弃。

(5) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 3 优先进行搜索。

(6) 在结点 9,从城市 3 到城市 2,目标函数值为:

$$((1+3)+(3+6)+(1+6)+(3+4)+(2+3))/2=16,$$

将结点 9 加入表 PT 中;在结点 10,从城市 3 到城市 4,目标函数值为:

$$((1+3)+(3+6)+(1+4)+(3+4)+(2+3))/2=15,$$

将结点 10 加入表 PT 中;在结点 11,从城市 3 到城市 5,目标函数值为:

$$((1+3)+(3+6)+(1+2)+(3+4)+(2+3))/2=14,$$

将结点 11 加入表 PT 中。

(7) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 11 优先进行搜索。

(8) 在结点 12,从城市 5 到城市 2,目标函数值为:

$$((1+3)+(3+9)+(1+2)+(3+4)+(2+9))/2=19,$$

超出目标函数的界,将结点 12 丢弃;在结点 13,从城市 5 到城市 4,目标函数值为:

((1 + 3) + (3 + 6) + (1 + 2) + (3 + 4) + (2 + 3))/ 2 = 14,

将结点 13 加入表 PT 中。

(9) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 13 优先进行搜索。

(10) 在结点 14,从城市 4 到城市 2,目标函数值为:

((1 + 3) + (3 + 7) + (1 + 2) + (3 + 7) + (2 + 3))/ 2 = 16,

最后从城市 2 回到城市 1,目标函数值为:

((1 + 3) + (3 + 7) + (1 + 2) + (3 + 7) + (2 + 3))/ 2 = 16,

由于结点 14 为叶子结点,得到一个可行解,其路径长度为 16。

(11) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 10 优先进行搜索。

(12) 在结点 15,从城市 4 到城市 2,目标函数值为:

((1 + 3) + (3 + 7) + (1 + 4) + (7 + 4) + (2 + 3))/ 2 = 18,

超出目标函数的界,将结点 15 丢弃;在结点 16,从城市 4 到城市 5,目标函数值为:

((1 + 3) + (3 + 6) + (1 + 4) + (3 + 4) + (2 + 3))/ 2 = 15,

将结点 16 加入表 PT 中。

(13) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 16 优先进行搜索。

(14) 在结点 17,从城市 5 到城市 2,目标函数的值为:

((1 + 3) + (3 + 9) + (1 + 4) + (3 + 4) + (9 + 3))/ 2 = 20,

超出目标函数的界,

将结点 17 丢弃。

(15) 表 PT 中目标函数值均为 16,且有一个是叶子结点 14,所以,结点 14 对应的解 1→3→5→4→2→1 即是 TSP 问题的最优解,搜索过程结束。

为了对每个扩展结点保存根结点到该结点的路径,将部分解(x_1, …, x_i)和该部分解的目标函数值都存储在待处理结点表 PT 中,在搜索过程中表 PT 的状态如图 9.6 所示。

(1, 2)14	(1, 3)14	(1, 4)16

(a) 扩展根结点后的状态

(1, 3)14	(1, 4)16	(1, 2, 3)16	(1, 2, 4)16

(b) 扩展结点 2 后的状态

(1, 4)16	(1, 2, 3)16	(1, 2, 4)16	(1, 3, 2)16	(1, 3, 4)15	(1, 3, 5)14

(c) 扩展结点 3 后的状态

(1, 4)16	(1, 2, 3)16	(1, 2, 4)16	(1, 3, 2)16	(1, 3, 4)15	(1, 3, 5, 4)14

(d) 扩展结点 11 后的状态

(1, 4)16	(1, 2, 3)16	(1, 2, 4)16	(1, 3, 2)16	(1, 3, 4)15	(1, 3, 5, 4, 2)16

(e) 扩展结点 13 后的状态

(1, 4)16	(1, 2, 3)16	(1, 2, 4)16	(1, 3, 2)16	(1, 3, 5, 4, 2)16	(1, 3, 4, 5)15

(f) 扩展结点 10 后的状态

(1, 4)16	(1, 2, 3)16	(1, 2, 4)16	(1, 3, 2)16	(1, 3, 5, 4, 2)16	

(g) 扩展结点 16 后的状态，最优解为 1→3→5→4→2→1

图 9.6　TSP 问题最优解的确定

设数组 x[n]存储路径上的顶点,分支限界法求解 TSP 问题的算法用伪代码描述如下:

伪代码

算法 9.1——TSP 问题

```
1. 根据限界函数计算目标函数的下界 down;采用贪心法得到上界 up;
2. 将待处理结点表 PT 初始化为空;
3. for (i=1; i<=n; i++)
       x[i]=0;
4. k=1; x[1]=1;//从顶点 1 出发求解 TSP 问题
5. while (k>=1)
   5.1  i=k+1;
   5.2  x[i]=1;
   5.3  while (x[i]<=n)
            5.3.1  如果路径上顶点不重复,则
                       5.3.1.1  根据式 9.2 计算目标函数值 lb;
                       5.3.1.2  if (lb<=up) 将路径上的顶点和 lb 值存储在表 PT 中;
            5.3.2  x[i]=x[i]+1;
   5.4  若 i==n 且叶子结点的目标函数值在表 PT 中最小
        则将该叶子结点对应的最优解输出;
   5.5  否则,若 i==n,则在表 PT 中取叶子结点的目标函数值最小结点的 lb,令 up=lb,将
        表 PT 中目标函数值 lb 超出 up 的结点删除;
   5.6  k=表 PT 中 lb 最小的路径上顶点个数;
```

9.2.2 多段图的最短路径问题

设图 $G=(V, E)$ 是一个带权有向连通图,如果把顶点集合 V 划分成 k 个互不相交的子集 $V_i(2\leq k\leq n, 1\leq i\leq k)$,使得 E 中的任何一条边(u, v),必有 $u\in V_i$, $v\in V_{i+m}(1\leq i<k, 1<i+m\leq k)$,则称图 G 为多段图,称 $s\in V_1$ 为源点,$t\in V_k$ 为终点。图 9.7 所示是一个含有 10 个顶点的多段图。

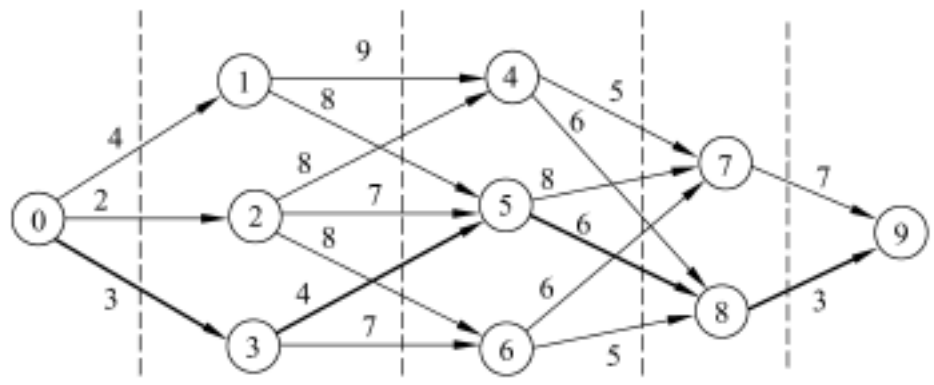


图 9.7 一个多段图

多段图的最短路径问题是求从源点到终点的最小代价路径。

对图 9.7 所示多段图应用贪心法求得近似解为 0→2→5→8→9,其路径代价为:

2 + 7 + 6 + 3 = 18,这可以作为多段图最短路径问题的上界。把每一段最小的代价相加,可以得到一个非常简单的下界,其路径长度为 2 + 4 + 5 + 3 = 14。于是,得到了目标函数的界[14, 18]。

由于多段图将顶点划分为 k 个互不相交的子集,所以,多段图划分为 k 段,一旦某条路径的一些段被确定后,就可以并入这些信息并计算部分解的目标函数值的下界。一般情况下,对于一个正在生成的路径,假设已经确定了 i 段($1 \leq i \leq k$),其路径为(r_1, r_2, …, r_i, r_{i+1}),此时,该部分解的目标函数值的计算方法即限界函数如下:

$$lb = \sum_{j=1}^{i} c[r_j][r_{j+1}] + \min_{\langle r_{i+1}, v_p \rangle \in E} \{c[r_{i+1}][v_p]\} + \sum_{j=i+2}^{k} \text{第 } j \text{ 段的最短边} \qquad (9.3)$$

例如,对图 9.7 所示多段图,如果部分解包含边(0, 1),则第 1 段的代价已经确定,并且在下一段只能从顶点 1 出发,最好的情况是选择从顶点 1 出发的最短边,则该部分解的下界是 lb = 4 + 8 + 5 + 3 = 20。

应用分支限界法求解图 9.7 所示多段图的最短路径问题,其搜索空间如图 9.8 所示,具体的搜索过程如下(加黑表示该路径上已经确定的边):

(1) 在根结点 1,根据限界函数计算目标函数的值为 14。

(2) 在结点 2,第 1 段选择边 <0, 1>,目标函数值为 lb = 4 + 8 + 5 + 3 = 20,超出目标函数的界,将结点 2 丢弃;在结点 3,第 1 段选择边 <0, 2>,目标函数值为 lb = 2 + 6 + 5 + 3 = 16,将结点 3 加入待处理结点表 PT 中;在结点 4,第 1 段选择边 <0, 3>,目标函数值为 lb = 3 + 4 + 5 + 3 = 15,将结点 4 加入表 PT 中。

(3) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 4 优先进行搜索。

(4) 在结点 5,第 2 段选择边 <3, 5>,目标函数值为 lb = 3 + 4 + 6 + 3 = 16,将结点 5 加入表 PT 中;在结点 6,第 2 段选择边 <3, 6>,目标函数值为 lb = 3 + 7 + 5 + 3 = 18,将结点 6 加入表 PT 中。

(5) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 3 优先进行搜索。

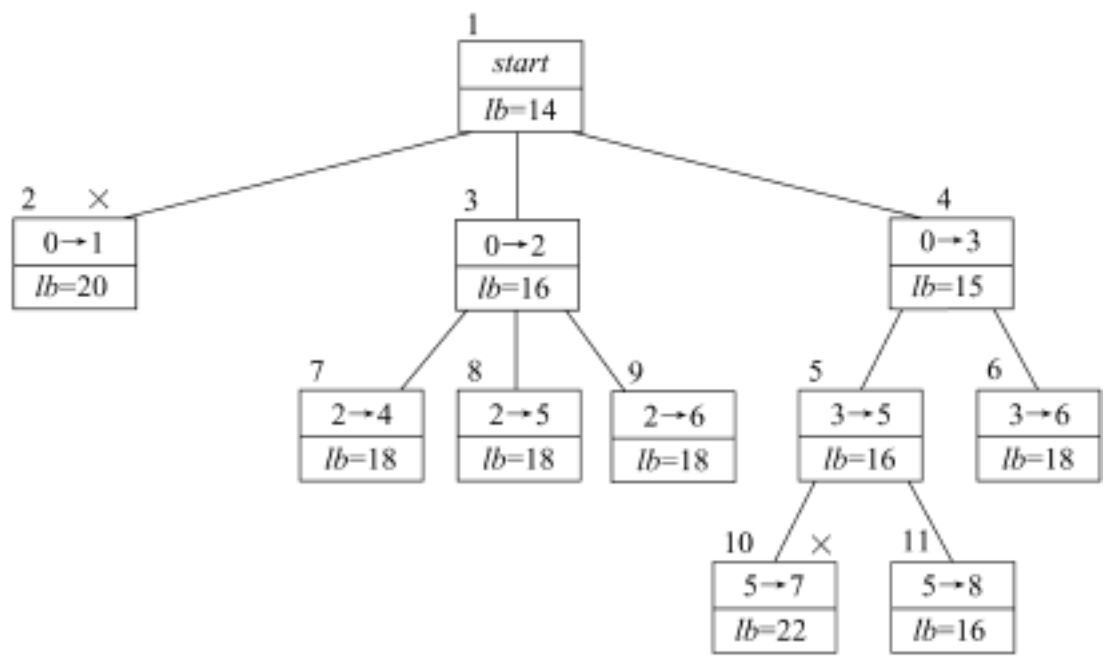


图 9.8　分支限界法求解多段图的最短路径问题示例

(×表示该结点被丢弃,结点上方的数字表示搜索顺序)

(6) 在结点 7,第 2 段选择边 < 2, 4 > ,目标函数值为 lb = 2 + 8 + 5 + 3 = 18,将结点 7 加入表 PT 中;在结点 8,第 2 段选择边 < 2, 5 > ,目标函数值为 lb = 2 + 7 + 6 + 3 = 18,将结点 8 加入表 PT 中;在结点 9,第 2 段选择边 < 2, 6 > ,目标函数值为 lb = 2 + 8 + 5 + 3 = 18,将结点 9 加入表 PT 中。

(7) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 5 优先进行搜索。

(8) 在结点 10,第 3 段选择边 < 5, 7 > ,可直接确定第 4 段的边 < 7, 9 > ,目标函数值为 lb = 3 + 4 + 8 + 7 = 22,为一个可行解但超出目标函数的界,将其丢弃;在结点 11,第 3 段选择边 < 5, 8 > ,可直接确定第 4 段的边 < 8, 9 > ,目标函数值为 lb = 3 + 4 + 6 + 3 = 16,为一个较好的可行解。由于结点 11 是叶子结点,并且其目标函数值是表 PT 中最小的,所以,结点 11 代表的解即是问题的最优解,搜索过程结束。

为了在搜索过程中构建搜索经过的树结构,设一个表 ST,在表 PT 中取出最小值结点进行扩充时,将最小值结点存储到表 ST 中,表 PT 和表 ST 的数据结构为(第 i 段, < 第 i 段顶点, 第 i + 1 段顶点 > lb),在搜索过程中表 PT 和表 ST 的状态如图 9 .9 所示。

图 9 .9 多段图的最短路径问题最优解的确定

在扩展结点 5 求得最优值 16 时,可知第 3 段的边是 < 5, 8 > ,在表 ST 中回溯,第 2 段的边是 < 3, 5 > ,而第 1 段的边一定是 < 0, 3 > 。回溯过程是: (3, < 5, 8 > 16)→(2, < 3, 5 > 16)→(1, < 0, 3 > 15)。

设多段图含有 k 段,且源点为 0,终点为 n - 1,分支限界法求解多段图的最短路径问题的算法用伪代码描述如下:

伪代码

算法 9 .2——多段图的最短路径问题

```
1 . 根据限界函数计算目标函数的下界 down;采用贪心法得到上界 up;
2 . 将待处理结点表 PT 初始化为空;
3 . for (i = 1; i < = k; i++ )
        x[i] = 0;
4 . i = 1; u = 0;          // 求解第 i 段
5 . while (i > = 1)
```

```
5.1  对顶点 u 的所有邻接点 v
     5.1.1  根据式 9.3 计算目标函数值 lb;
     5.1.2  若 lb<=up,则将 i,<u,v>,lb 存储在表 PT 中;
5.2  如果 i==k-1 且叶子结点的 lb 值在表 PT 中最小,则输出该叶子结点对应的最优解;
5.3  否则,如果 i==k-1 且表 PT 中的叶子结点的 lb 值不是最小,则
     5.3.1  up=表 PT 中的叶子结点最小的 lb 值;
     5.3.2  将表 PT 中目标函数值超出 up 的结点删除;
5.4  u=表 PT 中 lb 最小的结点的 v 值;
5.5  i=表 PT 中 lb 最小的结点的 i 值;i++;
```

9.3　组合问题中的分支限界法

9.3.1　任务分配问题

任务分配问题要求把 n 项任务分配给 n 个人,每个人完成每项任务的成本不同,要求分配总成本最小的最优分配方案。如图 9.10 所示是一个任务分配的成本矩阵。

$$C=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{任务1} & \text{任务2} & \text{任务3} & \text{任务4} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{人员}a \\ \text{人员}b \\ \text{人员}c \\ \text{人员}d \end{matrix}$$

图 9.10　任务分配问题的成本矩阵

在不对问题实际求解的情况下,如何求得一个最优分配成本的上界和下界呢?考虑任意一个可行解,例如矩阵中的对角线是一个合法的选择,表示将任务 1 分配给人员 a、任务 2 分配给人员 b、任务 3 分配给人员 c、任务 4 分配给人员 d,其成本是 9+4+1+4=18;或者应用贪心法求得一个近似解:将任务 2 分配给人员 a、任务 3 分配给人员 b、任务 1 分配给人员 c、任务 4 分配给人员 d,其成本是 2+3+5+4=14。显然,14 是一个更好的上界。为了获得下界,考虑人员 a 执行所有任务的最小代价是 2,人员 b 执行所有任务的最小代价是 3,人员 c 执行所有任务的最小代价是 1,人员 d 执行所有任务的最小代价是 4。因此,将每一行的最小元素加起来就得到解的下界,其成本是 2+3+1+4=10。需要强调的是,这个解并不是一个合法的选择(3 和 1 来自于矩阵的同一列),它仅仅给出了一个参考下界,这样,最优值一定是[10, 14]之间的某个值。

设当前已对人员 1～i 分配了任务,并且获得了成本 v,则限界函数可以定义为:

$$lb = v + \sum_{k=i+1}^{n} \text{第 } k \text{ 行的最小值} \tag{9.4}$$

应用分支限界法求解图 9.10 所示任务分配问题,对解空间树的搜索如图 9.11 所示,具体的搜索过程如下:

(1) 在根结点 1,没有分配任务,根据限界函数估算目标函数值为 2+3+1+4=10。

(2) 在结点 2,将任务 1 分配给人员 a,获得的成本为 9,目标函数值为:9 + (3+1+4) = 17,超出目标函数的界[10, 14],将结点 2 丢弃;在结点 3,将任务 2 分配给人员 a,获得的

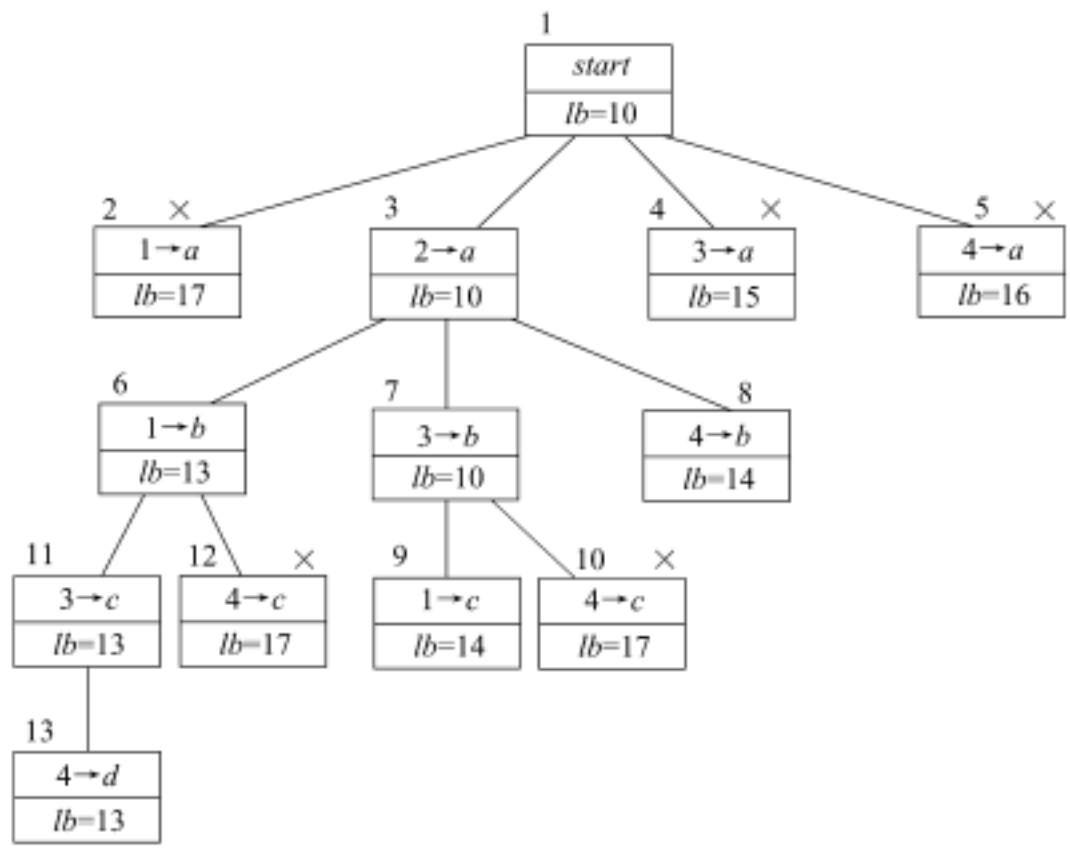


图 9.11　分支限界法求解任务分配问题示例

(×表示该结点被丢弃,结点上方的数字表示搜索顺序)

成本为 2,目标函数值为 2 + (3 + 1 + 4) = 10,将结点 3 加入待处理结点表 PT 中;在结点 4,将任务 3 分配给人员 *a*,获得的成本为 7,目标函数值为 7 + (3 + 1 + 4) = 15,超出目标函数的界[10, 14],将结点 4 丢弃;在结点 5,将任务 4 分配给人员 *a*,获得的成本为 8,目标函数值为 8 + (3 + 1 + 4) = 16,超出目标函数的界[10, 14],将结点 5 丢弃。

(3) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 3 优先进行搜索。

(4) 在结点 6,将任务 1 分配给人员 *b*,获得的成本为 2 + 6 = 8,目标函数值为 8 + (1 + 4) = 13,将结点 6 加入表 PT 中;在结点 7,将任务 3 分配给人员 *b*,获得的成本为 2 + 3 = 5,目标函数值为 5 + (1 + 4) = 10,将结点 7 加入表 PT 中;在结点 8,将任务 4 分配给人员 *b*,获得的成本为 2 + 7 = 9,目标函数值为 9 + (1 + 4) = 14,将结点 8 加入表 PT 中。

(5) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 7 优先进行搜索。

(6) 在结点 9,将任务 1 分配给人员 *c*,获得的成本为 5 + 5 = 10,目标函数值为 10 + 4 = 14,将结点 9 加入表 PT 中;在结点 10,将任务 4 分配给人员 *c*,获得的成本为 5 + 8 = 13,目标函数值为 13 + 4 = 17,超出目标函数的界[10, 14],将结点 10 丢弃。

(7) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 6 优先进行搜索。

(8) 在结点 11,将任务 3 分配给人员 *c*,获得的成本为 8 + 1 = 9,目标函数值为 9 + 4 = 13,将结点 11 加入表 PT 中;在结点 12,将任务 4 分配给人员 *c*,获得的成本为 8 + 8 = 16,目标函数值为 16 + 4 = 20,超出目标函数的界[10, 14],将结点 12 丢弃。

(9) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 11 优先进行搜索。

(10) 在结点 13,将任务 4 分配给人员 *d*,获得的成本为 9 + 4 = 13,目标函数值为 13,由于结点 13 是叶子结点,同时结点 13 的目标函数值是表 PT 中的极小值,所以,结点 13 对应的解即是问题的最优解,搜索结束。

为了在搜索过程中构建搜索经过的树结构,设一个表 ST,在表 PT 中取出最小值结点进行扩充时,将最小值结点存储到表 ST 中,表 PT 和表 ST 的数据结构为(人员 i - 1 分配的任务, < 任务 k, 人员 i > lb),在搜索过程中表 PT 和表 ST 的状态如图 9.12 所示。

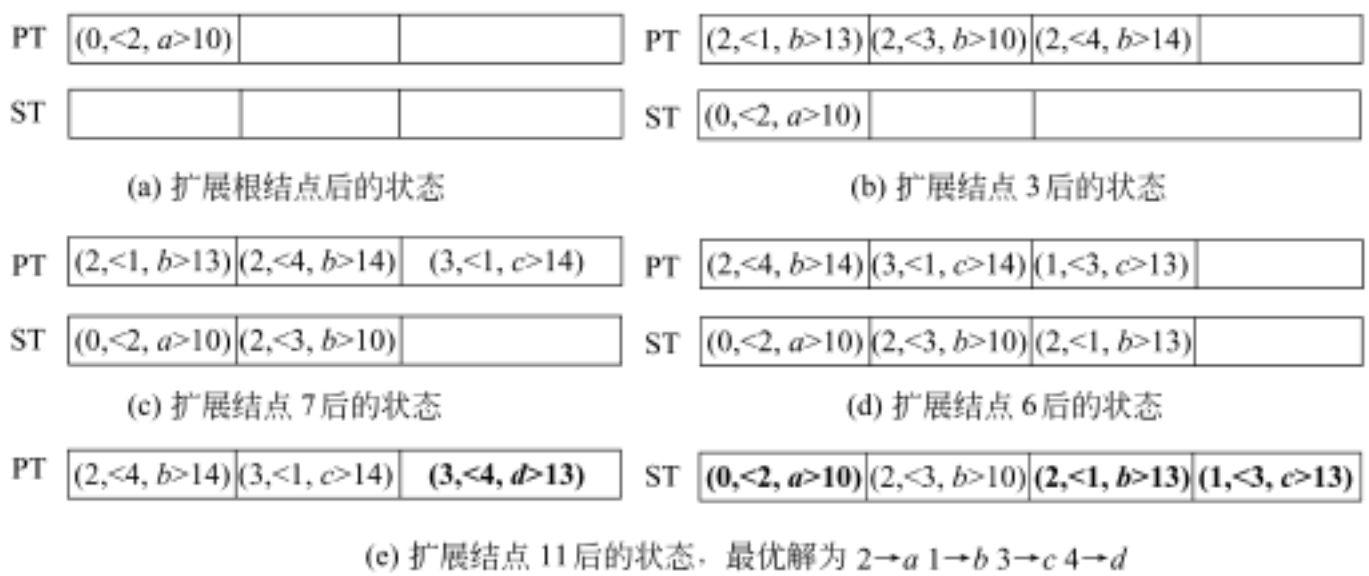


图 9.12　任务分配问题最优解的确定

在扩展结点 11 求得最优值 13 时,在表 ST 中的回溯过程是:

(3, < 4, d > 13) → (1, < 3, c > 13) → (2, < 1, b > 13) → (0, < 2, a > 10)

即最优解为(2, 1, 3, 4)。

设 x[k]为分配给人员 k 的任务,分支限界法求解任务分配问题的算法如下:

伪代码

算法 9.3——任务分配问题

```
1. 根据限界函数计算目标函数的下界 down;采用贪心法得到上界 up;
2. 将待处理结点表 PT 初始化为空;
3. for (i = 1; i < = n; i++)
       x[i] = 0;
4. k = 1; i = 0; // 为第 k 个人分配任务,i 为第 k - 1 个人分配的任务
5. while (k > = 1)
   5.1  x[k] = 1;
   5.2  while (x[k] < = n)
        5.2.1  如果人员 k 分配任务 x[k]不发生冲突,则
               5.2.1.1  根据式 9.4 计算目标函数值 lb;
               5.2.1.2  若 lb < = up,则将 i, < x[k], k > lb 存储在表 PT 中;
        5.2.2  x[k] = x[k] + 1;
   5.3  如果 k = = n 且叶子结点的 lb 值在表 PT 中最小,则输出该叶子结点对应的最优解;
   5.4  否则,如果 k = = n 且表 PT 中的叶子结点的 lb 值不是最小,则
        5.4.1  up = 表 PT 中的叶子结点最小的 lb 值;
        5.4.2  将表 PT 中超出目标函数界的结点删除;
   5.5  i = 表 PT 中 lb 最小的结点的 x[k]值;
   5.6  k = 表 PT 中 lb 最小的结点的 k 值;k ++ ;
```

9.3.2 批处理作业调度问题

给定 n 个作业的集合 $J=\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$,每个作业都有 3 项任务分别在 3 台机器上完成,作业 J_i 需要机器 j 的处理时间为 t_{ij} $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq 3)$,每个作业必须先由机器 1 处理,再由机器 2 处理,最后由机器 3 处理。批处理作业调度问题要求确定这 n 个作业的最优处理顺序,使得从第 1 个作业在机器 1 上处理开始,到最后一个作业在机器 3 上处理结束所需的时间最少。

显然,批处理作业的一个最优调度应使机器 1 没有空闲时间,且机器 2 和机器 3 的空闲时间最小。可以证明,存在一个最优作业调度使得在机器 1、机器 2 和机器 3 上作业以相同次序完成。

设 $J=\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ 是 4 个待处理的作业,每个作业的处理顺序相同,即先在机器 1 上处理,然后在机器 2 上处理,最后在机器 3 上处理,需要的处理时间如图 9.13 所示。

	机器 1	机器 2	机器 3
J_1	5	7	9
J_2	10	5	2
J_3	9	9	5
J_4	7	8	10

$T=$

图 9.13 4 个待处理作业在 3 个机器上的处理时间

若处理顺序为 (J_2, J_3, J_1, J_4),则从作业 2 在机器 1 处理开始到作业 4 在机器 3 处理完成的调度方案如图 9.14 所示。

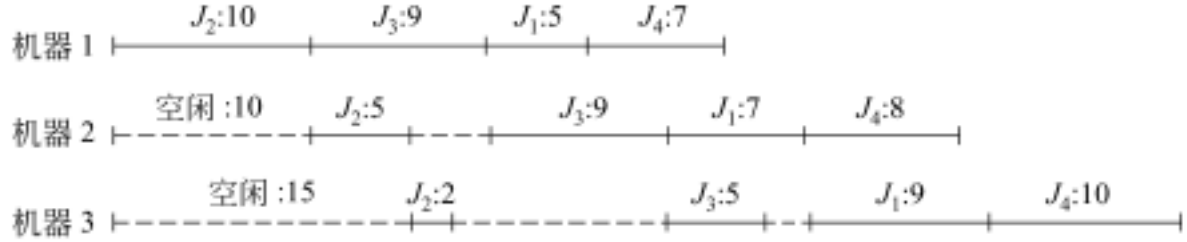


图 9.14 批处理调度问题的调度方案(- - - 表示机器空闲,最后完成时间为 54)

分支限界法求解批处理作业调度问题的关键在于限界函数,即如何估算部分解的下界。考虑理想情况,机器 1 和机器 2 无空闲,最后处理的恰好是在机器 3 上处理时间最短的作业。例如,以作业 J_i 开始的处理顺序,估算处理所需的最短时间是:

$$t_{i1} + \sum_{j=1}^{n} t_{j2} + \min_{k\neq i}\{t_{k3}\}$$

一般情况下,对于一个已安排的作业集合 $M<\{1, 2, \cdots, n\}$,$|M|=k$,即已安排了 k 个作业,设 sum1[k]表示机器 1 完成 k 个作业的处理时间,sum2[k]表示机器 2 完成 k 个作业的处理时间,现在要处理作业 $k+1$,此时,该部分解的目标函数值的下界计算方法如下:

(1) sum1[$k+1$] = sum1[k] + $t_{k+1,1}$

(2) $lb=\max\{\text{sum1}[k+1], \text{sum2}[k]\} + \sum_{i\in M} t_{i2} + \min\left\{\sum_{j\neq k+1, j\in M} t_{j3}\right\}$

(3) sum2[$k+1$] = max{sum1[$k+1$], sum2[k]} + $t_{k+1,2}$

应用分支限界法求解图 9.13 所示批处理作业调度问题,其搜索空间如图 9.15 所示,具体的搜索过程如下:

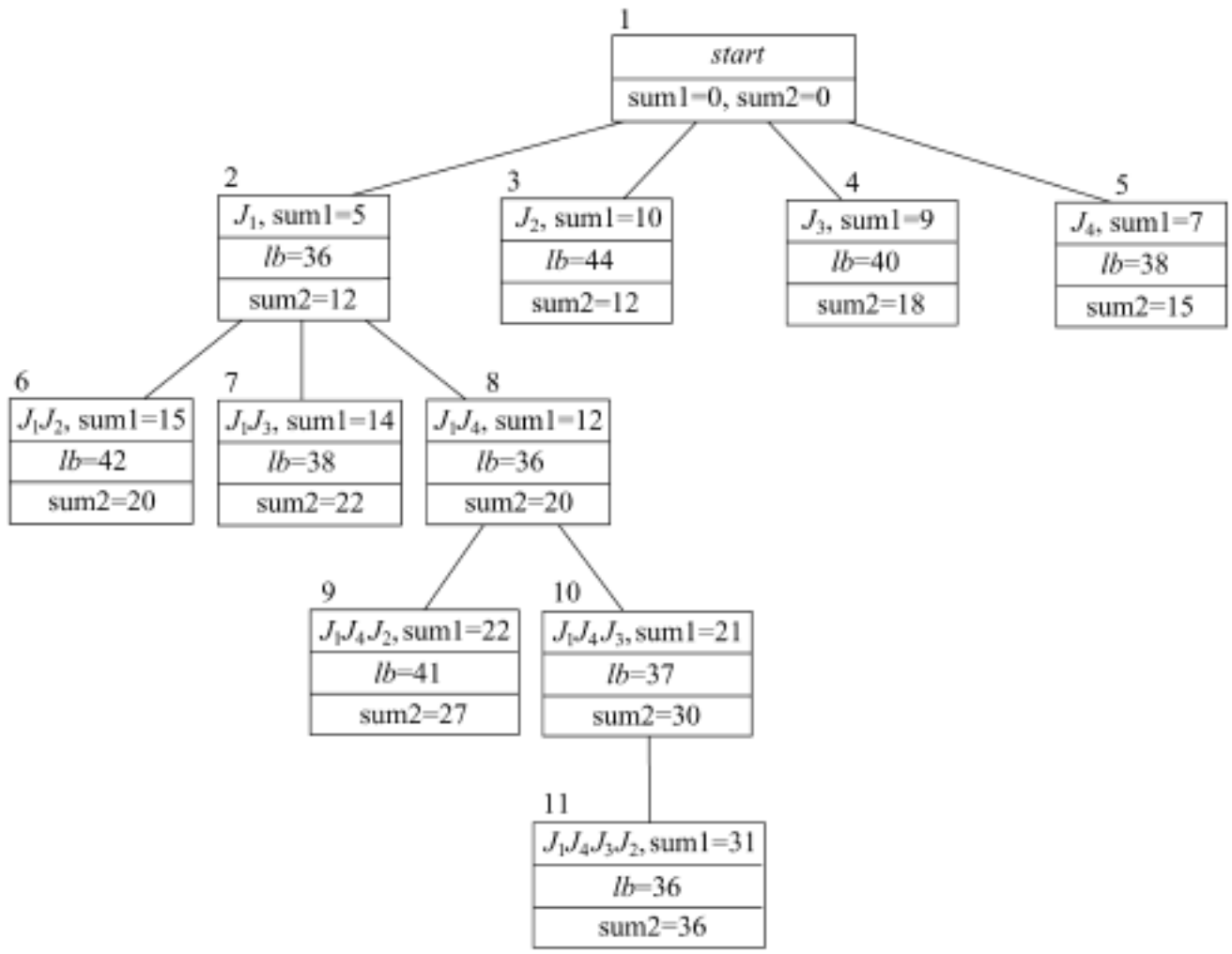


图 9 .15　分支限界法求解批处理作业调度问题的示例

(1) **在根结点,将** sum1[0]**和** sum2[0]**分别初始化为** 0。

(2) **在结点** 2,**以作业** J_1 **开始处理,则** sum1[1] = 5,**目标函数值为** 5 + (7 + 5 + 9 + 8) + 2 = 36, sum2[1] = 5 + 7 = 12,**将结点** 2 **加入待处理结点表** PT **中**;**在结点** 3,**以作业** J_2 **开始处理,则** sum1[1] = 10,**目标函数值为** 10 + (7 + 5 + 9 + 8) + 5 = 44, sum2[1] = 10 + 2 = 12,**将结点** 3 **加入表** PT **中**;**在结点** 4,**以作业** J_3 **开始处理,则** sum1[1] = 9,**目标函数值为** 9 + (7 + 5 + 9 + 8) + 2 = 40, sum2[1] = 9 + 9 = 18,**将结点** 4 **加入表** PT **中**;**在结点** 5,**以作业** J_4 **开始处理,则** sum1[1] = 7,**目标函数值为** 7 + (7 + 5 + 9 + 8) + 2 = 38, sum2[1] = 7 + 8 = 15,**将结点** 5 **加入表** PT **中**。

(3) **在表** PT **中选取目标函数值极小的结点** 2 **优先进行搜索**。

(4) **在结点** 6,**准备处理作业** J_2,**则** sum1[2] = 5 + 10 = 15,**目标函数值为** 15 + (5 + 9 + 8) + 5 = 42, sum2[2] = 15 + 5 = 20,**将结点** 6 **加入表** PT **中**;**在结点** 7,**准备处理作业** J_3,**则** sum1[2] = 5 + 9 = 14,**目标函数值为** 14 + (5 + 9 + 8) + 2 = 38, sum2[2] = 14 + 9 = 23,**将结点** 7 **加入表** PT **中**;**在结点** 8,**准备处理作业** J_4,**则** sum1[2] = 5 + 7 = 12,**目标函数值为** 12 + (5 + 9 + 8) + 2 = 36, sum2[2] = 12 + 8 = 20,**将结点** 8 **加入表** PT **中**。

(5) **在表** PT **中选取目标函数值极小的结点** 8 **优先进行搜索**。

(6) **在结点** 9,**准备处理作业** J_2,**则** sum1[3] = 12 + 10 = 22,**目标函数值为** 22 + (5 + 9) + 5 = 41, sum2[3] = 22 + 5 = 27,**将结点** 9 **加入表** PT **中**;**在结点** 10,**准备处理作业** J_3,**则** sum1[3] = 12 + 9 = 21,**目标函数值为** 21 + (5 + 9) + 2 = 37, sum2[3] = 21 + 9 = 30,**将结点** 10 **加入表** PT **中**。

(7) 在表 PT 中选取目标函数值极小的结点 10 优先进行搜索。

(8) 在结点 11,准备处理作业 J_2,则 sum1[4] = 21 + 10 = 31,目标函数值为 31 + 5 = 36,sum2[4] = 31 + 5 = 36,由于结点 11 是叶子结点,并且目标函数值在表 PT 中最小,则结点 11 代表的解即是问题的最优解,sum2[4]是机器 2 完成所有 4 个作业的时间,则机器 3 完成所有 4 个作业的时间是 sum2[4] + t_{23} = 36 + 2 = 38。搜索过程结束。

9.4 实验项目——电路布线问题

1.实验题目

印刷电路板将布线区域划分成 $n \times n$ 个方格。精确的电路布线问题要求确定连接方格 a 到方格 b 的最短布线方案。在布线时,电路只能沿着直线或直角布线,也就是不允许线路交叉。

2.实验目的

(1) 进一步掌握分支限界法的设计思想,掌握限界函数的设计技巧;

(2) 考察分支限界法求解问题的有效程度,并与回溯法进行对比;

(3) 理解这样一个观点:好的限界函数不仅计算简单,还要保证最优解在搜索空间中,更重要的是能在搜索的早期对超出目标函数界的结点进行丢弃,减少搜索空间,从而尽快找到问题的最优解。

3.实验要求

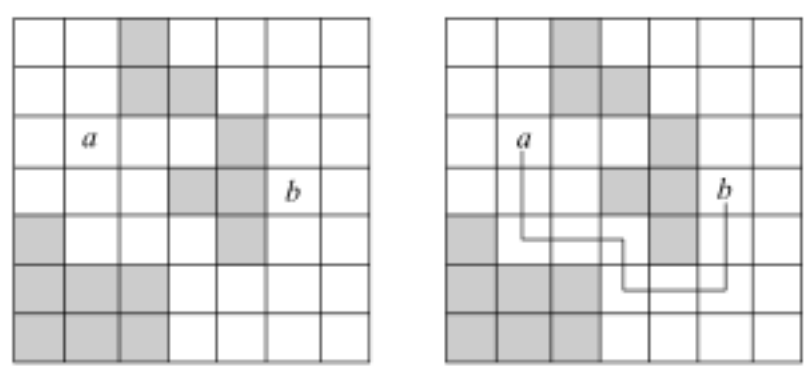
(1) 对电路布线问题建立合理的模型,通过实验确定一个合理的限界函数;

(2) 设计算法实现电路布线问题;

(3) 设计测试数据,统计搜索空间的结点数。

4.实现提示

图 9.16(a)所示是一块准备布线的电路板。在布线时,电路只能沿直线或直角布线。为了避免线路相交,已布线的方格做了封锁标记(图中用阴影表示),其他线路不允许穿过被封锁的方格。



(a) 布线区域　　(b) 最短布线路径

图 9.16　印刷电路板及其最短布线路径

用分支限界法求解电路布线问题，从起始方格 *a* 开始作为根结点，与起始位置 a 相邻且可达的方格成为可行结点，连同从起始方格到这个方格的距离 1 加入待处理结点表 PT 中(可用队列存储表 PT)。然后，从表 PT 中取出队首结点成为下一个扩展结点，将与当前扩展结点相邻且可达的方格连同从起始方格到这个方格的距离 2 加入表 PT 中。重复上述过程，直到达到目标方格 *b* 或表 PT 为空。

阅读材料——免疫算法

人类对自然免疫的认识可以追溯到 300 年以前。早在 17 世纪，我国医学家就创造性地发明了以人痘预防天花；1796 年，英国医生 Edward Jenner“牛痘”的发明，取代了人痘疫苗，是公认的现代免疫学开端；法国免疫学家 Pasteur 发明的细菌疫苗，奠定了经典免疫疫苗的基础。经过 300 多年的发展，免疫学已经从微生物学的一章发展成一门独立的学科，并派生出若干分支，成为生物学领域中的相对年轻的一门学科。

生物免疫系统是一个高度进化、复杂的功能系统。当生物遭到不同的抗原侵入时，其自身能快速地识别抗原，并产生相应的抗体。生物体中的抗原和抗体之间、抗体和抗体之间的相互作用，构成了生物系统的免疫平衡。人们借鉴生物免疫系统的学习、记忆和自适应调节的能力，形成了一种模拟免疫系统智能行为的仿生算法——免疫算法 IA (immune algorithm)。

人工免疫系统的研究起源于 20 世纪 80 年代末期，Farmer 作为这方面研究的先驱，首次将免疫机理与人工智能相结合，免疫系统的许多特征引起了国内外科学工作者的广泛兴趣。20 世纪 90 年代初，免疫机理被成功地用于遗传算法之后，陆续出现了许多与免疫有关的智能算法，如免疫遗传算法、克隆选择算法、模式跟踪算法、阴性选择算法、免疫网络算法、免疫网络与神经网络结合的控制算法等，这些方法已经在工程领域获得了广泛应用。

de Castro 基于克隆选择原理，采用二进制编码成功地实现了克隆选择算法。Jerne 提出了以免疫网络理论为基础的人工免疫网络模型，目前该模型已经广泛应用于工程领域，并且免疫网络与其他智能技术的结合已经成为一种研究发展趋势。Hunt 和 Cooke 开发的 B 细胞网络模型，成功用于 DNA 识别。T . Fukuda 等人于 1998 年提出了一类求解多态优化问题的免疫算法，该算法模拟了生物免疫系统的识别多样性与多样性免疫细胞的产生与维持机制。

免疫系统的作用关系可以用图 9 .17 表示。

免疫学概念与免疫算法术语的关系如下:

免疫系统——免疫算法

抗原——优化问题或进化群体中最好的解

抗体——优化问题中的可行解

记忆细胞——进化群体中较好的解

自我抗体——优化问题的可行解

免疫算法实际上是一个进化过程，表现为由进化链(抗体群 - 克隆选择 - 细胞克隆及

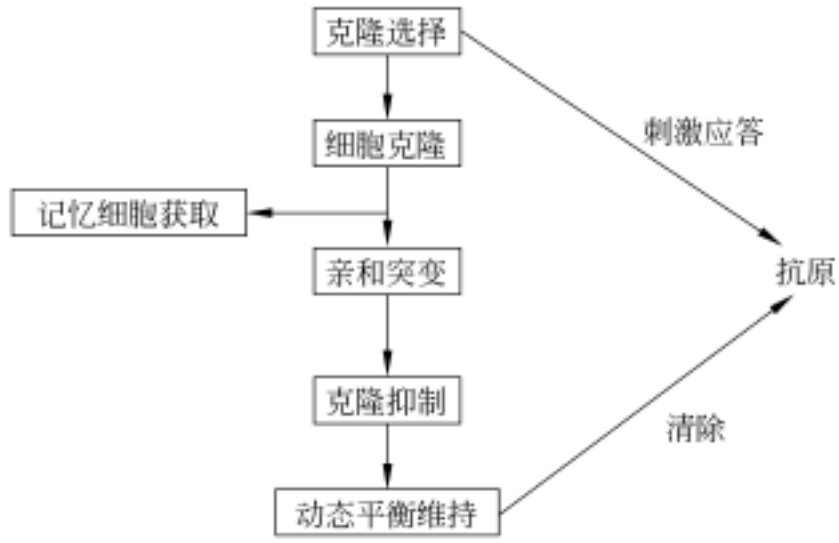


图 9 .17　免疫系统的作用关系

记忆细胞演化 - 亲和突变 - 免疫选择 - 募集新成员 - 新抗体群)构成的随机搜索链,其工作原理如图 9 .18 所示。

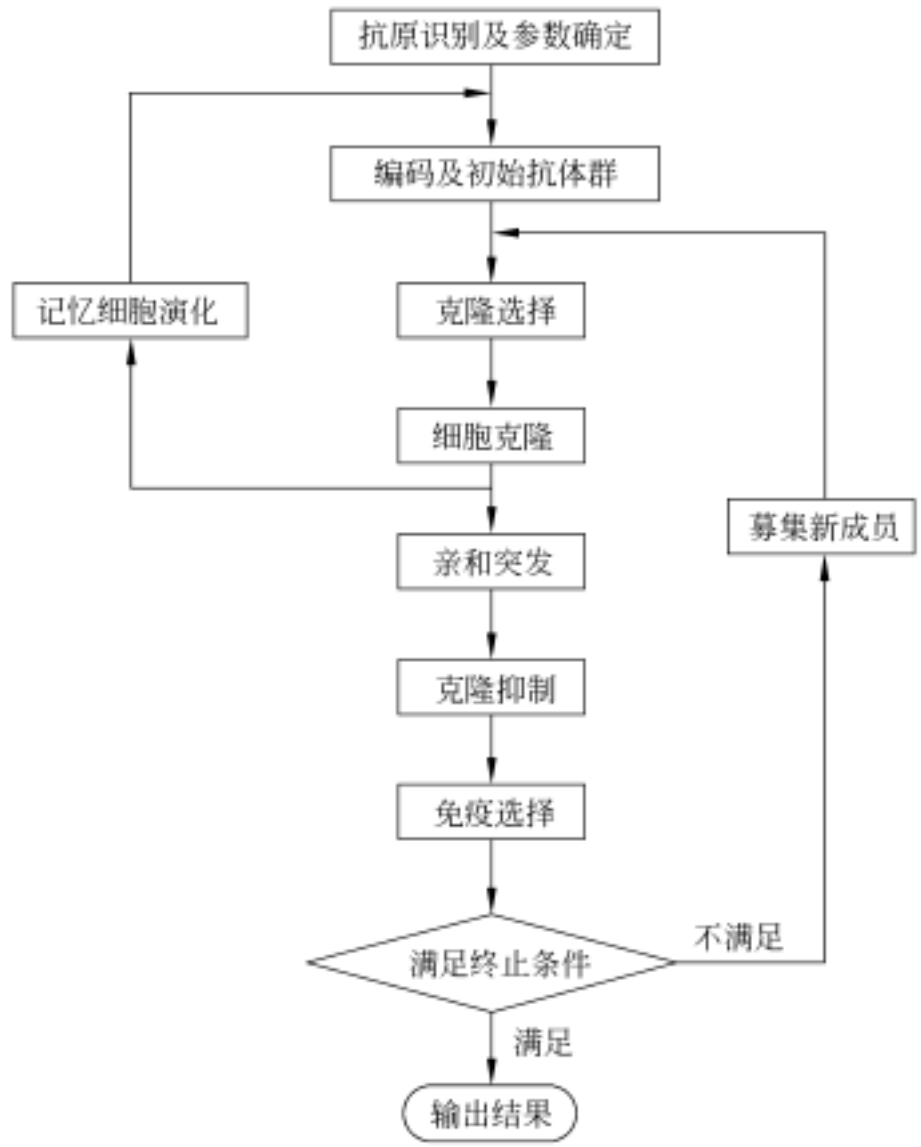


图 9 .18　免疫算法的工作原理

在 IA 中,生物个体对应抗体,以定长二进制串表示;个体适应性度量对应抗体与抗原(即问题与约束)之间的亲和力;选择对应免疫选择: 在鼓励高亲和力抗体的同时,抑制高浓度的抗体;繁殖对应免疫细胞的分化与增殖。下面给出基于抗体克隆选择学说和免

疫网络学说的一般免疫算法框架。

1．输入抗原(说明：一般将目标函数和各种约束作为算法的抗原)；
2．产生初始抗体(说明：在解空间中用随机的方法产生)；
3．当不满足终止条件(通过限定迭代次数或在连续若干次迭代中的最好解都无法改善，以及二者的混合形式作为终止条件)时，重复执行下列步骤：
　3.1　计算亲和度；
　3.2　更新记忆单元；
　3.3　促进或抑制新抗体产生；
　3.4　产生新抗体；
4．输出计算结果；

免疫算法最大的特点就是具有免疫记忆特性、抗体的自我识别能力和免疫的多样性，免疫算法已经应用于智能控制、模式识别、优化设计等领域。

由于对免疫机理的认识还不是十分系统与深入，有关免疫算法的研究主要集中在利用免疫机理改进其他算法以构成新算法，如免疫遗传算法、免疫神经网络等。同时我们也应看到，免疫系统的研究已经起步，关于内分泌机理和算法的研究虽然还未见报道，这必将伴随着免疫系统的研究，成为人工智能的另一新兴研究领域。

参 考 文 献

[1] 黄席樾，张著洪等著．现代智能算法理论及应用．北京：科学出版社，2005
[2] 王磊，潘进，焦李成．免疫算法．电子学报，2000，28(7)
[3] 焦李成，杜海峰．人工免疫系统的进展与展望．电子学报，2003，31(10)
[4] 王磊，潘进，焦李成．免疫规划．计算机学报，2000，23(8)

习　题　9

1．对于任务分配问题的分支限界法，在最好情况下，它的搜索空间包含多少个结点？

2．应用算法 9.1 求解如图 9.19 所示的 TSP 问题。

3．设计回溯算法求解单源地最短路径问题，对图 9.20 画出分支限界法的搜索空间(从顶点 a 出发)。

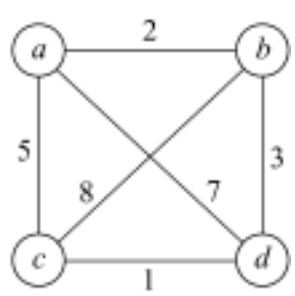


图 9.19　第 2 题图

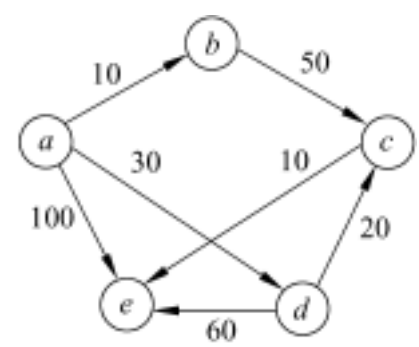


图 9.20　第 3 题图

4.对于 TSP 问题,还有一个基于归约的分支限界算法,请上网查找这个算法并与算法 9.1 进行对比。

5.对图 9.21 所示的任务分配问题,画出分支限界法的搜索空间。

$$C=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{任务 1} & \text{任务 2} & \text{任务 3} & \text{任务 4} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 12 \\ 9 & 12 & 13 & 5 \\ 8 & 7 & 9 & 3 \\ 12 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{人员 } a \\ \text{人员 } b \\ \text{人员 } c \\ \text{人员 } d \end{matrix}$$

图 9.21 第 5 题图

6.给定背包容量 $W=20$,6 个物品的重量分别为(5, 3, 2, 10, 4, 2),价值分别为(11, 8, 15, 18, 12, 6)。画出分支限界法求解上述 0/1 背包问题的搜索空间。

7.若 J_1, J_2, J_3, J_4 4 个任务在机器 M_1, M_2, M_3 上同顺序加工处理,加工时间矩阵如图 9.22 所示,求最佳的加工顺序,使得这 4 个任务从开始处理到结束加工时间最短。

$$C=\begin{array}{c} \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{matrix}$$

图 9.22 加工时间矩阵

8.对于 9.3.2 节介绍的批处理作业调度问题,给出分支限界算法。

9.假设分支限界法中的待处理结点表 PT 用堆来组织,设计表 PT 的插入和查找最小值算法。

10.在分支限界法求解 TSP 问题中,为了对每个扩展结点保存根结点到该结点的路径,请设计待处理结点表 PT 的数据结构。

第10章 概率算法

CHAPTER

前面讨论的算法设计技术都是针对确定性算法,即算法的每一步都明确指定下一步该如何进行,对于任何合理的输入,确定性算法都必须给出正确的输出。概率算法(probabilistic algorithm)把"对于所有合理的输入都必须给出正确的输出"这一求解问题的条件放宽,允许算法在执行过程中随机选择下一步该如何进行,同时允许结果以较小的概率出现错误,并以此为代价,获得算法运行时间的大幅度减少。

10.1 概 述

假设你意外地得到了一张藏宝图,但是,可能的藏宝地点有两个,要到达其中一个地点,或者从一个地点到达另一个地点都需要5天的时间。你需要4天的时间解读藏宝图,得出确切的藏宝位置,但是一旦出发后就不允许再解读藏宝图。更麻烦的是,有另外一个人知道这个藏宝地点,每天都会拿走一部分宝藏。不过,有一个小精灵可以告诉你如何解读藏宝图,它的条件是,需要支付给它相当于知道藏宝地点的那个人3天拿走的宝藏。如何做才能得到更多的宝藏呢?

假设你得到藏宝图时剩余宝藏的总价值是 x,知道藏宝地点的那个人每天拿走宝藏的价值是 y,并且 $x>9y$,可行的方案有:

(1) 用4天的时间解读藏宝图,用5天的时间到达藏宝地点,可获宝藏价值 $x-9y$;

(2) 接受小精灵的条件,用5天的时间到达藏宝地点,可获宝藏价值 $x-5y$,但需付给小精灵宝藏价值 $3y$,最终可获宝藏价值 $x-8y$;

(3) 投掷硬币决定首先前往哪个地点,如果发现地点是错的,就前往另一个地点。这样,你就有一半的机会获得宝藏价值 $x-5y$,另一半的机会获得宝藏价值 $x-10y$,所以,最终可获宝藏价值 $x-7.5y$。

当面临一个选择时,如果计算正确选择的时间大于随机地确定一个选择的时间,那么,就应该随机选择一个。同样,当算法在执行过程中面临一

个选择时,有时候随机地选择算法的执行动作可能比花费时间计算哪个是最优选择要好。

10.1.1 概率算法的设计思想

概率算法把‘对于所有合理的输入都必须给出正确的输出’这一求解问题的条件放宽,把随机性的选择注入到算法中,在算法执行某些步骤时,可以随机地选择下一步该如何进行,同时允许结果以较小的概率出现错误,并以此为代价,获得算法运行时间的大幅度减少。如果一个问题没有有效的确定性算法可以在一个合理的时间内给出解答,但是,该问题能接受小概率的错误,那么,采用概率算法就可以快速找到这个问题的解。

例如,判断表达式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是否恒等于 0。概率算法首先生成一个随机 n 元向量 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$,并计算 $f(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 的值,如果 $f(r_1, r_2, \cdots, r_n) \neq 0$,则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$;如果 $f(r_1, r_2, \cdots, r_n) = 0$,则或者 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 恒等于 0,或者是 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 比较特殊,如果这样重复几次,继续得到 $f(r_1, r_2, \cdots, r_n) = 0$ 的结果,那么就可以得出 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 恒等于 0 的结论,并且测试的随机向量越多,这个结果出错的可能性就越小。

在算法中增加这种随机性的因素,通常可以引导算法快速地求解问题,概率算法所需要的执行时间和空间,经常小于同一问题的已知最佳确定性算法,而且,概率算法的实现通常都比较简单,也比较容易理解。

一般情况下,概率算法具有以下基本特征:

(1) 概率算法的输入包括两部分,一部分是原问题的输入,另一部分是一个供算法进行随机选择的随机数序列(random numbers sequence);

(2) 概率算法在运行过程中,包括一处或若干处随机选择,根据随机值来决定算法的运行;

(3) 概率算法的结果不能保证一定是正确的,但可以限定其出错概率;

(4) 概率算法在不同的运行中,对于相同的输入实例可以有不同的结果,因此,对于相同的输入实例,概率算法的执行时间可能不同。

对所求解问题的同一输入实例运行同一概率算法求解两次可能得到完全不同的效果,这两次求解所需要的时间,甚至所得到的结果可能会有相当大的差别,有时候允许概率算法产生错误的结果。只要在任意输入实例上发生错误的概率适当小,就可以在给定实例上多次运行算法,换言之,一旦概率算法失败了,只需要重新启动算法,就又有成功的希望。概率算法的另一个好处是,如果存在一个以上的正确答案,则运行几次概率算法后,就有可能得到几个不同的答案。

对于确定性算法,通常分析在平均情况下以及最坏情况下的时间复杂性。对于概率算法,通常分析在平均情况下以及最坏情况下的期望(expected)时间复杂性,即由概率算法反复运行同一输入实例所得的平均运行时间。

需要强调的是,“随机”并不意味着‘随意’,如果要在多个值中进行选择,那么随机的含义是选择每一个值的概率是已知的并且是可控制的。算法是不会接受诸如‘在 1 和 8 之间选一个数’这样的指令,但是,如果是‘在 1 和 8 之间选一个数,而且每个数被选中的概率是相等的’这样的指令,算法就可以接受。如果手工运行算法,可以通过掷骰子来得

到一个随机的结果,在计算机中则是通过随机数发生器来实现。

10.1.2　随机数发生器

在概率算法中,需要由一个随机数发生器产生随机数序列,以便在算法的运行过程中,按照这个随机数序列进行随机选择。因此,随机数的产生在概率算法的设计中起着很重要的作用。

目前,在计算机上产生随机数还是一个难题,因为在原理上,这个问题只能近似解决。计算机中产生随机数的方法通常采用线性同余法,产生的随机数序列为 a_0, a_1, …, a_n, 满足:

$$\begin{cases} a_0 = d \\ a_n = (ba_{n-1} + c) \bmod m \quad n = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{10.1}$$

其中, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $m > 0$, $d \leq m$。d 称为随机数发生器的随机种子(random seed),当 b、c 和 m 的值确定后,给定一个随机种子,由式 10.1 产生的随机数序列也就确定了。换言之,如果随机种子相同,则一个随机数发生器将会产生相同的随机数序列。所以,严格地说,随机数只是一定程度上的随机,应该将随机数称为伪随机数(pseudorandom)。如何选择常数 b、c 和 m 将直接关系到所产生随机数序列的"随机"性能,这是随机性理论研究的内容,有兴趣的读者可查阅相关资料。

计算机语言提供的随机数发生器,一般会输出一个分布在开区间(0, 1)上的随机小数,并且需要一个随机种子,这个随机种子可以是系统当前的日期或时间。下面给出利用 C ++ 语言中的随机函数 rand 产生的分布在任意区间[a, b]上的随机数算法。

C++描述

算法 10.1——随机数发生器

```
int Random(int a, int b)
{
   return rand( )%(b - a) + a;      // rand( )产生(0, 32767)之间的随机整数
}
```

10.2　舍伍德(Sherwood)型概率算法

分析确定性算法在平均情况下的时间复杂性时,通常假定算法的输入实例满足某一特定的概率分布。事实上,很多算法对于不同的输入实例,其运行时间差别很大。例如快速排序算法,假设输入实例是等概率均匀分布,其时间复杂性是 $O(n\log_2 n)$,而当输入实例基本有序时,其时间复杂性达到 $O(n^2)$。此时,可以采用舍伍德型概率算法来消除算法的时间复杂性与输入实例间的这种联系。

如果一个确定性算法无法直接改造成舍伍德型概率算法,可借助于随机预处理技术,即不改变原有的确定性算法,仅对其输入实例随机排列(称为洗牌),同样可以收到舍伍德

型概率算法的效果。假设输入实例为整型,下面的随机洗牌算法可在线性时间实现对输入实例的随机排列。

C++描述

算法 10.2——随机洗牌

```
void RandomShuffle(int n, int r[ ])
{
   for (i = 0; i< n; i ++ )
   {
      j = Random(0, n - i - 1);
      r[i]←→r[j];      // 交换 r[i]和 r[j]
   }
}
```

舍伍德型概率算法总能求得问题的一个解,并且所求得的解总是正确的。但与其相对应的确定性算法相比,舍伍德型概率算法的平均时间复杂性没有改进。换言之,舍伍德型概率算法不是避免算法的最坏情况行为,而是设法消除了算法的不同输入实例对算法时间性能的影响,对所有输入实例而言,舍伍德型概率算法的运行时间相对比较均匀,其时间复杂性与原有的确定性算法在平均情况下的时间复杂性相当。

10.2.1 快速排序

快速排序算法的关键在于一次划分中选择合适的轴值作为划分的基准。如果轴值是序列中最小(或最大)记录,则一次划分后,由轴值分割得到的两个子序列不均衡,使得快速排序的时间性能降低,如图 10.1(a)所示。舍伍德型概率算法在一次划分之前,根据随机数在待划分序列中随机确定一个记录作为轴值,并把它与第一个记录交换,则一次划分后得到期望均衡的两个子序列,如图 10.1(b)所示,从而使算法的行为不受待排序序列的不同输入实例的影响,使快速排序在最坏情况下的时间性能趋近于平均情况的时间性能。

初始键值序列	**6**	13	19	23	31	35	58
一次划分结果	**6**	[13	19	23	31	35	58]

(a) 以最小值 6 为轴值,划分不均衡

初始键值序列	6	13	19	**23**	31	35	58
随机选择一个记录与 6 交换	**23**	13	19	6	31	35	58
一次划分结果	[6	13	19]	**23**	[31	35	28]

(b) 随机选择轴值,划分均衡

图 10.1 一次划分引入随机选择的示例

C++描述

算法 10.3——随机快速排序

```
void QuickSort (int r[ ], int low, int high)
{
  if (low < high) {
      i= Random(low, high);
      r[low]←→r[i];
      k = Partition(r, low, high);
      QuickSort(r, low, k - 1);
      QuickSort(r, k + 1, high);
  }
}
```

一次划分算法 Partition 与 4.3.2 节中相同。算法 10.3 在最坏情况下的时间复杂性仍是 $O(n^2)$，这是由于随

(a) 若 $k<s$,则 r_k 在轴值的前面　　(b) 若 $k>s$,则 r_k 在轴值的后面

图 10.2　轴值与第 k 小元素之间的关系

所以,选择问题的时间性能同快速排序一样,其核心在于一次划分中选择合适的轴值作为划分的基准。如果轴值是序列 T 的中值,则一次划分后将待查找区间减少一半;如果轴值是序列 T 的最小(或最大)记录,则一次划分后,只能将待查找区间减少一个;最坏情况下,退化为顺序查找。

舍伍德型概率算法在一次划分之前,根据随机数在待划分序列中随机确定一个记录作为轴值,并把它与第一个记录交换,则一次划分后得到期望均衡的两个子序列,使得选择问题在最坏情况下的时间性能趋近于平均情况的时间性能。

C++描述

算法 10.4——选择问题

```
int Select(int r[ ], int low, int high, int k)
{
  if (high - low < = k) return r[high];  // 数组长度小于 k
  else {
    i = Random(low, high);               // 在区间[low, high]中随机选取一个元素,下标为 i
    r[low]←→r[i];                        // 交换元素
    s = Partition(r, low, high);         // 进行一次划分,得到轴值的位置 s
    if (k = = s) return r[s];            // 元素 r[s]就是第 k 小元素
    else if (k < s) return Select(r, low, s - 1, k);    // 在前半部分继续查找
         else return Select(r, s + 1, high, k);         // 在后半部分继续查找
}
```

10.3　拉斯维加斯(Las Vegas)型概率算法

拉斯维加斯型概率算法不时地做出可能导致算法陷入僵局的选择,并且算法能够检测是否陷入僵局,如果是,算法就承认失败。这种行为对于一个确定性算法是不能接受的,因为这意味着它不能解决相应的问题实例。但是,拉斯维加斯型概率算法的随机特性可以接受失败,只要这种行为出现的概率不占多数。当出现失败时,只要在相同的输入实例上再次运行概率算法,就又有成功的可能。拉斯维加斯型概率算法中的随机性选择能引导算法快速地求解问题,显著地改进算法的时间复杂性,甚至对某些迄今为止找不到有效算法的问题,也能得到满意的解。

拉斯维加斯型概率算法的一个显著特征是,它所做的随机性选择有可能导致算法找

不到问题的解,即算法运行一次,或者得到一个正确的解,或者无解。因此,需要对同一输入实例反复多次运行算法,直到成功地获得问题的解。

由于拉斯维加斯型概率算法有时运行成功,有时运行失败,因此,通常拉斯维加斯型概率算法的返回类型为 bool,并且有两个参数:一个是算法的输入,另一个是当算法运行成功时保存问题的解。当算法运行失败时,可对同一输入实例再次运行,直到成功地获得问题的解。其一般形式如下:

拉斯维加斯型概率算法的一般形式

```
void Obstinate(input x, solution y)
{
   success = false;
   while ( !success) success = LV(x, y);
}
```

设 $p(x)$ 是对输入实例 x 调用拉斯维加斯型概率算法获得问题的一个解的概率,则一个正确的拉斯维加斯型概率算法应该对于所有的输入实例 x 均有 $p(x)>0$。在更强的意义下,要求存在一个正的常数 δ,使得对于所有的输入实例 x 均有 $p(x)>\delta$。由于 $p(x)>\delta$,所以,只要有足够的时间,对任何输入实例 x,拉斯维加斯型概率算法总能找到问题的一个解。换言之,拉斯维加斯型概率算法找到正确解的概率随着计算时间的增加而提高。

10.3.1　八皇后问题

八皇后问题是拉斯维加斯型概率算法从允许失败的行为中获益的一个很好的例子。

八皇后问题是在 8×8 的棋盘上摆放 8 个皇后,使其不能互相攻击,即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上。

由于棋盘的每一行上可以而且必须放置一个皇后,所以,八皇后问题的可能解用一个向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_8)$ 表示,其中,$1\leq x_i\leq 8$ 并且 $1\leq i\leq 8$,即第 i 个皇后放置在第 i 行第 x_i 列上。由于两个皇后不能位于同一列上,所以,解向量 X 必须满足约束条件:

$$x_i \neq x_j \tag{10.2}$$

若两个皇后摆放的位置分别是 (i, x_i) 和 (j, x_j),在棋盘上斜率为 -1 的斜线上,满足条件 $i-j=x_i-x_j$;在棋盘上斜率为 1 的斜线上,满足条件 $i+j=x_i+x_j$。综合两种情况,由于两个皇后不能位于同一斜线上,所以,解向量 X 必须满足约束条件:

$$|i-x_i|\neq|j-x_j| \tag{10.3}$$

满足式 10.2 和式 10.3 的向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_i)$ 表示已放置的 i 个皇后 $(1\leq i\leq 8)$ 互不攻击,也就是不发生冲突。

对于八皇后问题的任何一个解而言,每一个皇后在棋盘上的位置无任何规律,不具有系统性,而更像是随机放置的。由此想到拉斯维加斯型概率算法:在棋盘上相继的各行

中随机地放置皇后,并使新放置的皇后与已放置的皇后互不攻击,直至 8 个皇后均已相容地放置好,或下一个皇后没有可放置的位置。

伪代码

算法 10.5——八皇后问题

1. 将数组 x[8]初始化为 0;试探次数 count 初始化为 0;
2. for (i=1; i<=8; i++)
   - 2.1 产生一个[1, 8] 的随机数 j;
   - 2.2 count = count + 1,进行第 count 次试探;
   - 2.3 若皇后 i 放置在位置 j 不发生冲突,
     则 x[i] = j;count = 0;转步骤 2 放置下一个皇后;
   - 2.4 若(count = = 8),则无法放置皇后 i,算法运行失败;
     否则,转步骤 2.1 重新放置皇后 i;
3. 将元素 x[1]～x[8]作为八皇后问题的一个解输出;

拉斯维加斯型概率算法通过反复调用算法 10.5,直至得到八皇后问题的一个解。

如果将上述随机放置策略与回溯法相结合,则会获得更好的效果。可以先在棋盘的若干行中随机地放置相容的皇后,然后在其他行中用回溯法继续放置,直至找到一个解或宣告失败。在棋盘中随机放置的皇后越多,回溯法搜索所需的时间就越少,但失败的概率也就越大。例如八皇后问题,随机地放置两个皇后再采用回溯法比完全采用回溯法快大约两倍;随机地放置 3 个皇后再采用回溯法比完全采用回溯法快大约一倍;而所有的皇后都随机放置比完全采用回溯法慢大约一倍。很容易解释这个现象:不能忽略产生随机数所需的时间,当随机放置所有的皇后时,八皇后问题的求解大约有 70% 的时间都用在了产生随机数上。

10.3.2 整数因子分解问题

设 n 是正整数且 $n>1$,整数 n 的因子分解问题是找出 n 的如下形式的惟一分解式:

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$$

其中,$p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 是素数,m_1, m_2, …, m_k 是正整数。

如果 n 是一个合数,则 n 必有一个非平凡因子 $m(1<m<n)$,使得 m 可以整除 n。给定一个合数 n,求 n 的一个非平凡因子的问题称为整数因子划分问题。

整数因子分解问题可以归结为整数因子划分和素数测试:假设对整数 n 进行因子分解,首先进行素数测试,如果 n 是素数,则分解完成;否则,再进行因子划分,找到 n 的一个非平凡因子 m,并递归地对 m 和 n/m 进行因子分解。素数测试问题将在 10.4.2 节讨论,下面讨论整数因子划分问题。

对一个正整数 n 进行因子划分的最自然的想法是试除,它可以找到 n 的最小素数因子。算法如下:

C++描述

算法 10.6——整数因子划分

```
int Factor(int n)
{
   i = sqrt(n);
   for (m = 2; m <= i; m ++ )
      if (n % m == 0) return m;
   return 1;      // 如果找不到一个因子,则 n 是素数
}
```

算法 Factor 是对范围在 $1 \sim \sqrt{n}$的所有整数进行了试除而得到了 n 的最小素数因子，其时间复杂性是 $O(\sqrt{n})$。对于一个正整数 n，其位数为 $m = \lceil \log_{10}(n+1) \rceil$，则算法 Factor 的时间复杂性是 $O(10^{m/2})$。假定每次循环只需要 1ns，它也需要花费 1 000 年的时间来分解一个 40 位左右的坚固的(hard)合数。“坚固的”合数是指这个数是两个规模相当的素数的乘积。

到目前为止，还没有找到求解整数因子划分问题的多项式时间算法。

求解整数因子划分问题的拉斯维加斯型概率算法在开始时选取 $0 \sim n-1$ 范围内的随机数 x_1，然后递归地由下式产生无穷序列 x_1，x_2，…，x_k，…：

$$x_i = (x_{i-1}^2 - 1) \bmod n$$

对于 $i = 2^k$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$)，以及 $2^k < j \leq 2^{k+1}$，计算 $x_j - x_i$ 与 n 的最大公因子 d，如果 d 大于 1，则 d 即是 n 的非平凡因子，算法实现对 n 的一次划分。

计算 $x_j - x_i$ 与 n 的最大公因子可以采用欧几里得算法，具体算法如下：

C++描述

算法 10.7——最大公因子

```
int Gcd(int a, int b)
{
   r = a % b
   while (r != 0)
   {
      a = b;
      b = r;
      r = a % b;
   }
   return b;
}
```

利用欧几里得算法求解整数因子划分的拉斯维加斯型概率算法如下：

C++描述

算法 10.8——整数因子划分

```
int Pollard(int n)
{
   i = 1; k = 2;
   x = Random(0, n - 1);        // x为[0, n - 1]区间的随机整数
   y = x;
   while (true)
   {
      i ++ ;
      x = (x3 x - 1) % n;
      d = Gcd(y - x, n);
      if (d > 1) return d;      // 若 y - x 与 n 存在最大公约数 d,则 d 即为 n 的非平凡因子
      if (i = = k) {
         y = x;
         k3 = 2;
      }
   }
}
```

算法 Pollard 中的 while 循环执行约 $\sqrt{p}$次后,会得到 n的一个素数因子 p。由于 n的最小素数因子 $p \leq \sqrt{n}$,故算法 Pollard 可在 $O(n^{1/4})$的时间内找到 n的一个素数因子。

10.4 蒙特卡罗(Monte Carlo)型概率算法

对于许多问题来说,近似解毫无意义。例如,一个判定问题,其解为‘是’或‘否’,二者必居其一,不存在任何近似解。再如,整数因子划分问题,其解必须是准确的,一个整数的近似因子没有任何意义。蒙特卡罗型概率算法用于求问题的准确解。

一个蒙特卡罗型概率算法偶尔会出错,但无论任何输入实例,总能以很高的概率找到一个正确解。换言之,蒙特卡罗型概率算法总是给出解,但是,这个解偶尔可能是不正确的,一般情况下,也无法有效地判定得到的解是否正确。蒙特卡罗型概率算法求得正确解的概率依赖于算法所用的时间,算法所用的时间越多,得到正确解的概率就越高。

设 p是一个实数,且 $1/2 < p < 1$。如果一个蒙特卡罗型概率算法对于问题的任一输入实例得到正确解的概率不小于 p,则称该蒙特卡罗型概率算法是 p正确的。如果对于同一输入实例,蒙特卡罗型概率算法不会给出两个不同的正确解,则称该蒙特卡罗型概率算法是一致的。如果重复地运行一个一致的 p正确的蒙特卡罗型概率算法,每一次运行都独立地进行随机选择,就可以使产生不正确解的概率变得任意小。

有些情况下,蒙特卡罗型概率算法的参数除了描述问题实例的输入参数 I外,还有描述错误解可接受概率的参数,这类算法的时间复杂性通常由问题规模以及错误解可接受概率的函数 $T(n, \varepsilon)$来描述,其中 n为输入实例 I的规模。

10.4.1　主元素问题

设 T[n]是一个含有 n 个元素的数组，x 是数组 T 的一个元素，如果数组中有一半以上的元素与 x 相同，则称元素 x 是数组 T 的主元素(major element)。例如，在数组 T[7] = {3, 2, 3, 2, 3, 3, 5}中，元素 3 就是主元素。

一种求解主元素问题的简单方法是统计每个元素在数组中出现的次数，如果某个元素出现的次数大于 $n/2$，则该元素就是数组的主元素；如果没有出现次数超过 $n/2$ 的元素，则数组中不存在主元素。显然，这个算法的时间复杂性是 $O(n^2)$。

蒙特卡罗型概率算法求解主元素问题可以随机地选择数组中的一个元素 T[i]进行统计，如果该元素出现的次数大于 $n/2$，则该元素就是数组的主元素，算法返回 true；否则随机选择的这个元素 T[i]不是主元素，算法返回 false。此时，数组中可能有主元素也可能没有主元素。如果数组中存在主元素，则非主元素的个数小于 $n/2$。因此，算法将以大于 1/2 的概率返回 true，以小于 1/2 的概率返回 false，这说明算法出现错误的概率小于 1/2。如果连续运行算法 k 次，算法返回 false 的概率将减少为 2^{-k}，则算法发生错误的概率为 2^{-k}。具体算法如下：

C++描述

算法 10 9——主元素问题

```
bool Majority(int T[ ], int n)
{
    i = Random(0, n - 1);
    x = T[i];              // 随机选择一个数组元素
    k = 0;
    for (j = 0; j < n; j++ )
      if (T[j] = = x) k++ ;
    if (k > n/2)           //  k > n/2 时含有主元素为 T[i]
      return true;
    else
      return false;
}

bool MajorityMC(int T[ ], int n, double e)
{
    k = log(1/e)/log(2);
    for (i = 1; i< = k; i++ )
      if (Majority(T, n)) return true;
    return false;
}
```

对于任何给定的 $\varepsilon > 0$，算法 MajorityMC 重复调用 $\lceil \log_2(1/\varepsilon) \rceil$ 次算法 Majority，其错误概率小于 ε，时间复杂性显然是 $O(n\log_2(1/\varepsilon))$。

10.4.2 素数测试问题

素数(primality)的研究和密码学有很大的关系,同时素数测试又是素数研究中的一个重要课题。研究表明,素数的分布是稀疏的,小于 10^4 的素数有 1229 个,小于 10^8 的素数有 5 761 455 个,小于 10^{12} 的素数有 37 607 912 018 个。

测试一个整数 n 是否是素数,最简单的方法是把这个数除以 2～$\sqrt{n}$的数,如果余数为 0,则 n 是一个合数,否则,n 就是一个素数。

C++描述

算法 10.10——素数测试

```
bool Factor(int n)
{
   i = sqrt(n);
   for (m = 2; m < = i; m ++ )
      if (n % m = = 0) return false;
   return true; / / 如果找不到一个因子,则 n 是素数
}
```

算法 10.10 的时间复杂性是 $O(\sqrt{n})$。对于一个正整数 n,其位数为 $m = \lceil \log_{10}(n+1) \rceil$,则算法 Factor 的时间复杂性是 $O(10^{m/2})$,因此,这个算法的时间复杂性是指数阶的。

采用概率算法进行素数测试的理论基础来自现代数论之父 Pierre de Fermat,他在 1640 年证明了下面的费马(Fermat)定理。

费马定理　如果 n 是一个素数,a 为正整数且 $0 < a < n$,则 $a^{n-1} \bmod n \equiv 1$。

例如,7 是一个素数,取 $a = 5$,则 $a^{n-1} \bmod n = 5^6 \bmod 7 = 1$;67 是一个素数,取 $a = 2$,则 $a^{n-1} \bmod n = 2^{66} \bmod 67 = 1$。

费马定理表明,如果存在一个小于 n 的正整数 a,使得 $a^{n-1} \bmod n \neq 1$,则 n 肯定不是素数。因此,可以设计一个素数判定算法,通过计算 $d = a^{n-1} \bmod n$ 来判定 n 是否是素数。如果 $d \neq 1$,则 n 肯定不是素数;如果 $d = 1$,则 n 很可能是素数,但也存在合数 n,使得 $a^{n-1} \bmod n = 1$,例如,341 是合数,取 $a = 2$,而 $2^{340} \bmod 341 = 1$。

费马定理只是素数判定的一个必要条件,有些合数也满足费马定理,这些合数被称作 Carmichael 数。Carmichael 数是非常少的,在 1～100 000 000 范围内的整数中,只有 255 个 Carmichael 数。为了提高素数测试的准确性,可以多次随机选取小于 n 的正整数 a,重复计算 $d = a^{n-1} \bmod n$ 来判定 n 是否是素数。例如,对于 341,取 $a = 3$,则 $3^{340} \bmod 341 = 56$,从而判定 341 不是素数。

下面给出了计算 $a^{n-1} \bmod n$ 的 Fermat 测试算法。注意,算法是在每做一次乘法之后对 n 取模,而不是先计算 a^{n-1} 再对 n 取模。

C++描述

算法 10 .11——Fermat 测试

```
int ExpMod(int n)                    // 计算 a^(n-1) mod n
{
   a = Random(2, n - 1);             // 产生[2, n - 1]之间的一个随机整数
   b = 1;
   for (i = 1; i< = n - 1; i++ )
      b = (b3 a) % n;
   return b;
}

bool Prime1(int n)
{
   if (ExpMod(n) = = 1)
      return true;                   // 可能是素数或 Carmichael 数
   else
      return false;                  // 一定不是素数
}
```

算法 Prime1 返回 false 时，整数 n 一定是一个合数，如果算法 Prime1 返回 true，说明正整数 n 可能是素数，还可能是 Carmichael 数。但是，这个简单的测试却很少给出错误的结果，例如，对于 4～2000 之间的所有合数，算法仅对 15，341，561，645，1105，1387，1729 和 1905 这几个数返回素数。当一个合数 n 对于整数 a 满足费马定理时，称整数 a 为合数 n 的伪证据(pseudowitness)。所以，只有在选取到一个伪证据时，Fermat 测试的结论才是错误的。

幸运的是伪证据相当少。在小于 1 000 的 332 个合数中只有 5 个没有伪证据，超过一半的合数只有两个伪证据，超过 15 个伪证据的合数不超过 160 个。如果考虑更大的数，这个概率会更小。

但是，有些合数的伪证据比例相当高，在小于 1 000 的合数中，情况最坏的是 561，它有 318 个伪证据。最坏的一个例子是一个 15 位的合数 651 693 055 693 681，它以大于 99 .9965％的概率返回 true，尽管这个数确实是合数！此时，通过之前采用的技巧，将算法 Prime1 重复任意次数，都不能将误差概率减少到任意小的 ε 内。

可以利用下面的二次探测定理对上面的 Fermat 测试算法做进一步的改进，以避免将 Carmichael 数当作素数。

二次探测定理　如果 n 是一个素数，x 为正整数且 $0 < x < n$，则方程 $x^2 \bmod n = 1$ 的解为 $x = 1$ 或 $x = n - 1$。

利用二次探测定理，可以在计算 $a^{n-1} \bmod n$ 的过程中增加对于整数 n 的二次探测，一旦发现 n 违背二次探测条件，即可得出 n 不是素数的结论。算法如下：

C++描述

算法 10.12——素数测试

```
int Power(int a, int p, int n)      //计算 a^p mod n,并实施对 n 的二次探测
{
    if (p==0) result=1;
    else {
      x=Power(a, p/2, n);           //递归计算
      result=(x*x)%n;               //二次探测
      if ((result==1)&&(x!=1)&&(x!=n-1))
        composite=true;             //  n 一定是合数
      if ((p%2)==1)                 //  p 是奇数
        result=(result*a)%n;
    }
    return result;
}

bool Prime2(int n)
{
    composite=false;
    a=Random(2, n-1);               //产生[2, n-1]的随机数
    result=Power(a, n-1, n);
    if (composite||(result!=1)) return false;
    else return true;
}
```

算法 Prime2 返回 false 时,整数 n 一定是一个合数,如果算法 Prime2 返回 true,整数 n 在高概率的意义下是一个素数。仍然可能存在合数 n,对于随机选取的整数 a,算法返回 true,但是,当 n 充分大时,这样的整数 a 不超过$(n-9)/4$个,算法 Prime2 是一个 3/4 正确的蒙特卡罗型概率算法。通过多次重复调用,错误概率不超过$(1/4)^k$。这是一个很保守的估计,实际使用的效果要好得多。

10.5 实验项目——随机数发生器

1.实验题目

设计一个随机数发生器,可以产生分布在任意整数区间[a, b]的随机数序列。

2.实验目的

(1) 掌握线性同余法产生随机数的方法;

(2) 了解计算机中的随机数是如何产生的,以及为什么将随机数称为伪随机数。

3 .实验要求

(1) 根据线性同余法设计随机数发生器算法;
(2) 调整关键参数,使得随机数序列的‘ 随机 ”性能较好;
(3) 对于随机数发生器中关键参数的调整,写出调整过程和测试报告。

4 .实现提示

线性同余法产生的随机数序列为 a_0 , a_1 , …, a_n ,满足:

$$\begin{cases} a_0 = d \\ a_n = (ba_{n-1} + c) \bmod m \quad n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

其中, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $m > 0$, $d \leq m$。如何选择常数 b、c 和 m 将直接关系到所产生随机数序列的‘ 随机 ”性能。直观上看, m 应取得充分大的数,例如可以取机器大数,另外, m 和 b 应该是互质的,即 $\gcd(m, b) = 1$,例如 b 可以取一素数。为了使随机种子 d 尽可能‘ 随机 ”, d 可以取系统时间,也可以在算法运行中由用户给定。

阅读材料——DNA 计算与 DNA 计算机

DNA 分子生物技术是一个最新发展起来的,以模拟分子生物 DNA 的双螺旋结构和碱基互补配对规律进行信息编码的方法和技术,是从生物分子层次来揭示智能形成的本质。

DNA 计算是伴随着分子生物学的兴起和发展而出现的。1994 年,美国加利福尼亚大学的 Adleman 博士在《科学》期刊上首次发表了关于 DNA 分子生物计算方法的开创性文章,他通过生化方法求解了 7 个顶点的哈密顿回路问题,显示了用 DNA 进行特定目的计算的可行性,其新颖性不仅仅在于算法,也不仅仅在于速度,而在于采用了迄今为止还没有作为计算机硬件的生物技术来实现。这篇文章引起了许多学者尤其是计算机科学家的兴趣,随后,Lipton 等学者也很快地提出了基于 DNA 模型的 DNA 算法,近年来该领域更是吸引了众多学者的目光。

目前 DNA 计算研究已涉及许多方面,如 DNA 计算的能力、模型和算法等。最近也有学者开始将 DNA 计算与遗传算法、神经网络、模糊系统和混沌系统等智能计算方法相结合。DNA 计算的许多研究等待着各个学科的合作研究,如生物学、化学、计算机科学、数学和工程等,目前许多领域的科学家正在协调合作将这一理想变为现实。

根据现代细胞学和遗传学的研究,控制生物性状遗传的主要物质是脱氧核糖核酸 DNA。DNA 是一种高分子化合物,组成它的基本单位是脱氧核苷酸,每个脱氧核苷酸是由一分子磷酸、一分子脱氧核糖和一分子含氮碱基组成的。含氮碱基有 4 种,腺嘌呤(A)、鸟嘌呤(G)、胞嘧啶(C)和胸腺嘧啶(T)。DNA 不仅具有一定的化学组成,还具有规则的双螺旋结构,这一结构的主要特点是: (1)DNA 分子是由两条平行的脱氧核苷酸长链盘旋而成; (2)DNA 分子中的脱氧核糖和磷酸交替连接,排列在外侧; (3)DNA 两条链上的碱基通过氢键连接起来,形成碱基对。碱基对的组成有一定的规律,即腺嘌呤 A 一

定与胸腺嘧啶 T 配对,鸟嘌呤 G 一定与胞嘧啶 C 配对。也就是说,一条链上某一碱基是 A,则另一条链上与它配对的碱基必定是 T,一条链上某一碱基是 G,则另一条链上与它配对的碱基必定是 C,反之亦然,这就是著名的碱基互补配对原则。组成 DNA 的碱基虽然只有 4 种,而且这 4 种碱基的配对方式只有两种,但由于碱基对具有多种不同的排列顺序,因而构成了 DNA 分子的多样性。

单个 DNA 可看作由 4 个不同符号 A、G、C 和 T 组成的串,它类似于计算机中的‘0’和‘1’编码,可表示成 4 个字母的集合 $\sum = \{A, G, C, T\}$ 来编码信息。DNA 串可作为编码信息,酶可看作模拟在 DNA 序列上简单的计算。不同的酶用作不同的算子,例如限制内核酸酶可作为分离算子,DNA 结合酶可作为结合算子,DNA 聚合酶可作为复制算子,外核酸酶可作为删除算子等。

DNA 算法的基本思想是:以 DNA 碱基序列作为信息编码的载体,利用现代分子生物技术,在试管内通过控制酶的作用进行 DNA 的序列反应,作为实现运算的过程,以反应前的 DNA 序列作为输入的数据,反应后的 DNA 序列作为运算的结果。换言之,利用 DNA 特殊的双螺旋结构和碱基互补配对原则对问题进行编码,把要运算的对象映射成 DNA 分子链,在 DNA 溶液的试管里,在生物酶的作用下,生成各种数据池(data pool),然后按照一定的规则将原始问题的数据运算映射成 DNA 分子链的可控的生化过程。最后,利用分子生物技术,如聚合酶链反应 PCR、聚合重叠放大技术 POA、超声波降解、亲和层析、克隆、诱变、电泳、磁珠分离等获得运算结果。这种思想突破了传统计算机体系结构的束缚,开创了一种新的计算方式。

DNA 运算的一般框架如下:

(1) 对问题进行编码(用{A, C, G, T}进行编码)和输入;
(2) 仿生化学反应;
(3) 实际的生物化学实验——聚合反应(显式并行算法);
(4) 得到终点解空间;
(5) 优化解空间;
(6) 判断解是否满足终止条件,若是则结束,否则返回到步骤 3。

例如,Adleman 博士用 DNA 计算求哈密顿路径问题的实例可进行如下描述:

(1) 问题的编码及输入:每个节点的编码 O_I($I = 0, 1, \cdots, 6$)长度为 20bp (base pair),保证编码是可识别和惟一的;

(2) 生成一个图的随机路径集,通过温度控制 DNA 链接酶、溶液来实现;

(3) 搜索以 V_0 开始 V_6 结束的路径集,通过以 O_0 和 O_6 作引物的聚合酶链反应来实现;

(4) 搜索出具有 6 个边的路径集,层析分离 3%～5%琼脂糖凝胶;

(5) 搜索出不重复边的路径集,生物素亲和层析磁珠分离;

(6) 选择出最短路径,电泳分离,取分子量最小者。

DNA 计算机是一种生物计算机,由美国南加州大学 A·艾德鲁曼教授于 1994 年首

次演示出来。这种计算机技术是用构成 DNA 的 4 种碱基作元件,能进行复杂的数值运算。目前,设计一个 DNA 计算机的主要障碍有:

1 .构造的现实性及计算潜力

DNA 计算机的核心思想在于将经过编码后的 DNA 链作为输入,在试管内经过一定时间控制的生化反应,以此完成运算。反应的产物及溶液给出了全部的解空间。但是最优解怎样与其他解分离,怎样输出,这是一个技术性极强的问题。尽管现代分子生物学提供了像 PCR、高效电泳、亲和层析等选择以及放大纯化技术,但所消耗的时间和空间复杂性远比在此前所进行的反应过程复杂得多。特别是随着求解问题规模的增大,输出技术可能成为 DNA 计算机实现的主要障碍。

2 .运算过程中的错误发生与传播

理论上讲,每次 PCR 循环中,不仅前一循环后已带有错误碱基的复制数量会增加,而且还会产生新的错误复本。随着循环次数的增加,DNA 双链中不含任何错误碱基的复本比例在产物中会越来越少。另外,由于热力学和动力学的原因,把大量的 DNA 链放在一起通过几百个过程步骤,偶尔会有一些非酶的非受控制的支路反应发生,甚至包括 DNA 链的动力分解。这样的错误会导致一些“伪解”出现,并在整个解空间中传播,那么系统结构及程序中就必须有相应的程序来纠错,这样就增大了最优解输出的难度。

3 .人机界面

对于各种计算问题,需要寻找一种直接的翻译方式变换成 DNA 计算系统,也即 DNA 生物化学反应的运算途径,以至鉴别和输出最优解的技术路线,使得 DNA 计算机适应广阔的问题面,并具有实用性。从目前来看,DNA 计算机与传统计算机并不是绝然隔离的,要构成良好的人机界面(甚至包括 DNA 生化反应运算过程)和最优解输出过程的自动化控制都离不开传统计算机。所以也有人认为,DNA 计算机至多只能起到一个运算器的作用,即使如此,我们认为这种传统计算机与 DNA 计算互补所获得的计算也将产生了不起的影响。

从 1994 年至今十多年的时间里,DNA 计算的研究已经取得了不少令人振奋的结果,DNA 计算大大开拓了我们对计算的认识,使人们重新思考什么是计算机。相信在多学科的共同努力下,定能寻找到那些在 DNA 计算走向实用所要解决的问题,并进一步解决它们,使得生物计算机最终取代硅计算机或者与之相结合而走向大规模应用。

习　题　10

1 .生日问题。有多少个人在一起使得其中至少有两个人生日相同的机会超过没有人生日相同的机会,即有相同生日的机会超过 1/ 2 ?

2 .在美国有一个连锁店叫 7 - 11 店,因为这个商店以前是早晨 7 点开门,晚上 11 点关门。有一天,一个顾客在这个店挑选了 4 件商品,然后到付款处去交钱。营业员拿起计

算器,按了一些键,然后说:“总共是$7.11。”这个顾客开了个玩笑说:“哦?难道因为你们的店名叫7-11,所以我就要付$7.11吗?”营业员没有听出这是个玩笑,回答说:“当然不是,我已经把这4件商品的价格相乘才得出这个结果的!”顾客一听非常吃惊,“你怎么把它们相乘呢?你应该把它们相加才对!”营业员答道:“噢,对不起,我今天非常头疼,所以把键按错了。”然后,营业员将结果重算了一遍,将这4件商品的价格加在一起,然而,令他俩更为吃惊的是总和也是$7.11。现在的任务是设计拉斯维加斯型概率算法找出这4件商品的价格各是多少?

3.设计求解SAT问题的概率算法。

4.在求解n皇后问题的概率算法中,如果将随机放置策略与回溯法相结合,则会获得更好的效果。例如,对于100皇后问题随机放置88个皇后,1000皇后问题随机放置983个皇后,预期的搜索结点个数最少。请设计实验并验证(或修改)这个结论。

5.设计求解串匹配问题的概率算法。

6.假设n是一个素数,令x为$1\leq x\leq n-1$的整数,如果存在一个整数y,$1\leq y\leq n-1$,使得$x\equiv y^2 \bmod n$,则称y是x模n的平方根,例如9就是3模13的平方根。设计一个拉斯维加斯型概率算法,求整数x模n的平方根。

7.对于概率算法,为什么只分析其平均情况下的时间复杂性,而忽略最坏情况下的时间复杂性?

8.利用算法10.10判定133是否为素数。

9.有3个一样大的箱子,分别放着笔记本电脑、一支笔和一盒糖。当然事先你不知道哪个箱子装的是哪件东西。现在让你选择其中一个箱子,然后由工作人员打开另外两个箱子中的一个(假设工作人员知道哪个箱子里装的是什么),如果工作人员打开的那个箱子里没有电脑,现在,你被告知作最后的选择:是坚持原来的选择还是选择另一个没有打开的箱子?哪种选择获得电脑的概率会更大一些?

10.一个狡猾的股票经纪人挑选出1024个人作为客户——用受骗者可能更恰当一些,每天,他给每个人寄一份有关股市在第二天涨或跌的预测,这样一直持续10天。当然诡计就在于:这10天可能有2^{1024}个不同的结果,他寄给每个人一个不同的可能结果,一直进行了10天。到第10天末,一个不幸的受害者会惊异地发现,股票经纪人所预测的股市走向10次中次次都准确,即使那些得到8次或9次预测准确的人也会对这个经纪人留下深刻的印象,无论如何,这个股票经纪人都不会失业。请说明其中的道理。

第11章 近似算法

CHAPTER

迄今为止,所有的难解问题都没有多项式时间算法,采用回溯法和分支限界法等算法设计技术可以相对有效地解决这类问题。然而,这些算法的时间性能常常是无法保证的。在用别的方法都不能奏效时,可以采用另外一种完全不同的方法——近似算法(approximate algorithm)求解。近似算法是解决难解问题的一种有效策略,其基本思想是放弃求最优解,而用近似最优解代替最优解,以换取算法设计上的简化和时间复杂性的降低。由于很多实际问题可以接受近似最优解,而求最优解又需要付出过多的时间和空间代价,因此,有关近似算法的研究越来越受到人们的重视。

对近似算法的深入研究指出,有些问题不适合用近似算法求解,对这些问题求近似最优解几乎和求最优解一样难。本章介绍近似算法求NP难问题的几个成功实例。

11.1 概 述

11.1.1 近似算法的设计思想

许多难解问题实质上是最优化问题,即要求在满足约束条件的前提下,使某个目标函数达到最大值或最小值的解。在这类问题中,求得最优解往往需要付出极大的代价。

在现实世界中,很多问题的输入数据是用测量方法获得的,而测量的数据本身就存在着一定程度的误差,因此,输入数据是近似的。同时,很多问题的解允许有一定程度的误差,只要给出的解是合理的、可接受的,近似最优解常常就能满足实际问题的需要。此外,采用近似算法可以在很短的时间内得到问题的近似解,所以,近似算法是求解难解问题的一个可行的方法。

即使某个问题存在有效算法,好的近似算法也会发挥作用。因为待求解问题的实例是不确定的,或者在一定程度上是不准确的,如果使用近似算法造成的误差比不精确的数据带来的误差小,并且近似算法远比精确算

法高效,那么,出于实用的目的,当然更愿意选择近似算法了。

近似算法的基本思想是用近似最优解代替最优解,以换取算法设计上的简化和时间复杂性的降低。近似算法是这样一个过程:虽然它可能找不到一个最优解,但它总会为待求解的问题提供一个解。为了具有实用性,近似算法必须能够给出算法所产生的解与最优解之间的差别或者比例的一个界限,它保证任意一个实例的近似最优解与最优解之间相差的程度。显然,这个差别越小,近似算法越具有实用性。

11.1.2 近似算法的性能

衡量近似算法性能最重要的标准有两个:

(1) 算法的时间复杂性:近似算法的时间复杂性必须是多项式阶的,这是设计近似算法的基本目标。

(2) 解的近似程度:近似最优解的近似程度也是设计近似算法的重要目标。近似程度可能与近似算法本身、问题规模,乃至不同的输入实例都有关。

不失一般性,假设近似算法求解的是最优化问题,且对于一个确定的最优化问题,每一个可行解所对应的目标函数值均为正数。

若一个最优化问题的最优值为 c^*,求解该问题的一个近似算法求得的近似最优值为 c,则将该近似算法的近似比(approximate ratio)η定义为:

$$\eta = \max\left\{\frac{c}{c^*}, \frac{c^*}{c}\right\}$$

在通常情况下,该性能比是问题输入规模 n 的一个函数 $\rho(n)$,即:

$$\max\left\{\frac{c}{c^*}, \frac{c^*}{c}\right\} \leq \rho(n)$$

这个定义对于最大化问题和最小化问题都是适用的。对于一个最大化问题,$c \leq c^*$,此时近似算法的近似比表示最优值 c^* 比近似最优值 c 大多少倍;对于一个最小化问题,$c^* \leq c$,此时近似算法的近似比表示近似最优值 c 比最优值 c^* 大多少倍。所以,近似算法的近似比 η 不会小于 1,近似算法的近似比越大,它求出的近似解就越差。显然,一个能求得最优解的近似算法,其近似比为 1。

有时用相对误差表示一个近似算法的近似程度会更方便些。若一个最优化问题的最优值为 c^*,求解该问题的一个近似算法求得的近似最优值为 c,则该近似算法的相对误差(relative error)λ定义为:

$$\lambda = \left|\frac{c - c^*}{c^*}\right|$$

近似算法的相对误差总是非负的,它表示一个近似最优解与最优解相差的程度。若问题的输入规模为 n,存在一个函数 $\varepsilon(n)$,使得

$$\left|\frac{c - c^*}{c^*}\right| \leq \varepsilon(n)$$

则称 $\varepsilon(n)$ 为该近似算法的相对误差界(relative error bound)。近似算法的近似比 $\rho(n)$ 与相对误差界 $\varepsilon(n)$ 之间显然有如下关系:

$$\varepsilon(n) \leq \rho(n) - 1$$

有许多问题的近似算法具有固定的近似比和相对误差界，即 $\rho(n)$ 和 $\varepsilon(n)$ 不随着问题规模 n 的变化而变化，在这种情况下，用 ρ 和 ε 来表示近似比和相对误差界。还有许多问题的近似算法没有固定的近似比，即近似比 $\rho(n)$ 随着问题规模 n 的增长而增长，换言之，问题规模 n 越大，近似算法求出的近似最优解与最优解相差得就越多。

对有些难解问题，可以找到这样的近似算法，其近似比可以通过增加计算量来改进，也就是说，在计算量和解的精确度之间有一个折中，较少的计算量得到较粗糙的近似解，而较多的计算量可以得到较精确的近似解。

11.2　图问题中的近似算法

11.2.1　顶点覆盖问题

无向图 $G=(V, E)$ 的顶点覆盖是顶点集 V 的一个子集 $V' \subseteq V$，使得若 (u, v) 是 G 的一条边，则 $v \in V'$ 或 $u \in V'$。顶点覆盖 V' 的大小是它所包含的顶点个数 $|V'|$。顶点覆盖问题是求出图 G 中的最小顶点覆盖，即含有顶点数最少的顶点覆盖。

顶点覆盖问题是一个 NP 难问题，因此，没有一个多项式时间算法有效地求解。虽然要找到图 G 的一个最小顶点覆盖是很困难的，但要找到图 G 的一个近似最小覆盖却很容易。可以采用如下策略：初始时边集 $E'=E$，顶点集 $V'=\{\}$，每次从边集 E' 中任取一条边 (u, v)，把顶点 u 和 v 加入到顶点集 V' 中，再把与 u 和 v 顶点相邻接的所有边从边集 E' 中删除，直到边集 E' 为空。显然，最后得到的顶点集 V' 是无向图的一个顶点覆盖，由于每次把尽量多的相邻边从边集 E' 中删除，可以期望 V' 中的顶点数尽量少，但不能保证 V' 中的顶点数最少。图 11.1 中给出了一个顶点覆盖问题的近似算法求解过程。

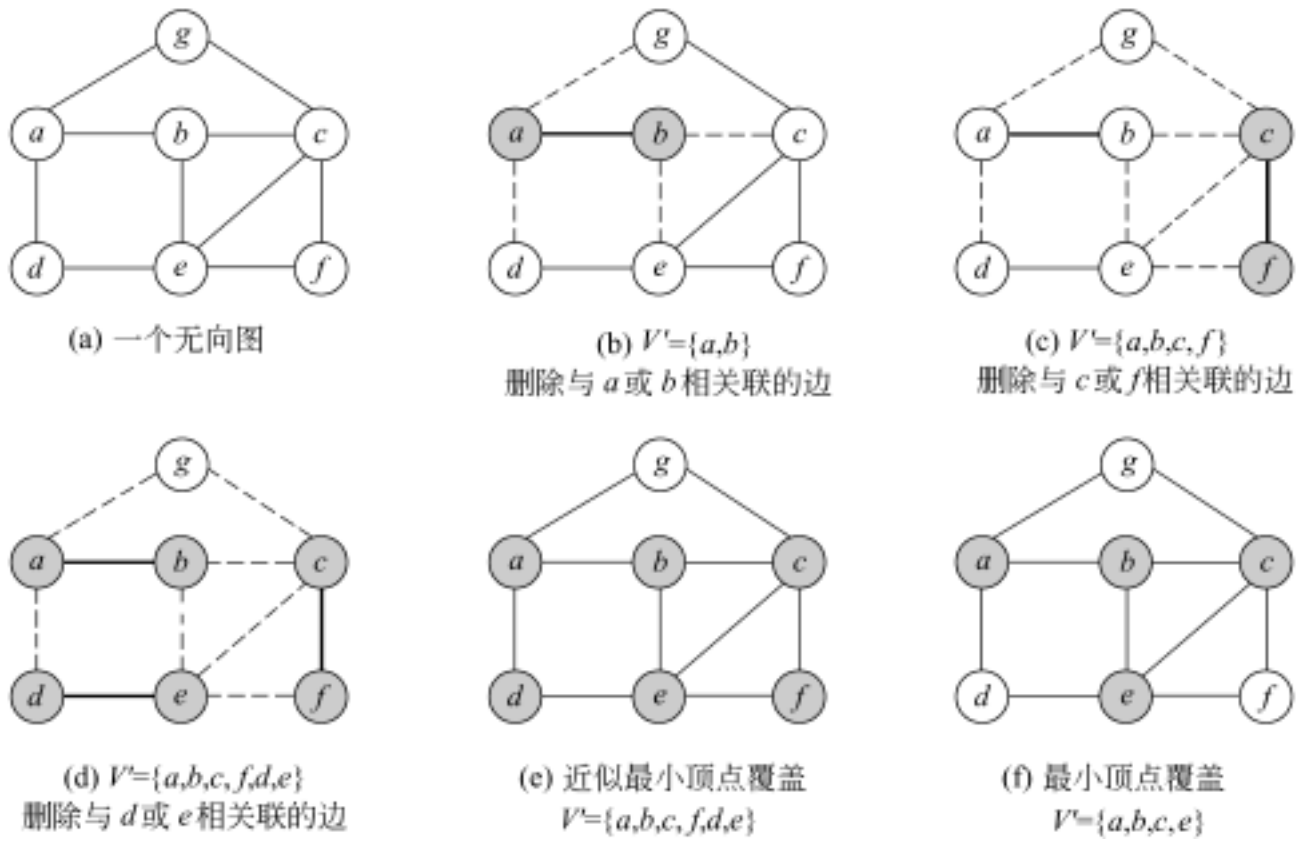


图 11.1　最小覆盖问题的近似算法求解过程

假设无向图 G 中 n 个顶点的编号为 0～n - 1,顶点覆盖问题的近似算法如下:

伪代码

算法 11 .1——顶点覆盖问题

```
1 . for (i= 0; i < n; i++)              / / 顶点覆盖初始化为空
      x[i] = 0;
2 . E ′= E;
3 . 循环直到 E 为空
    3 .1   从 E ′中任取一条边(u, v);
    3 .2   x[u] = 1; x[v] = 1;          / / 将顶点 u 和 v 加入顶点覆盖中
    3 .3   从 E ′中删去与 u 和 v 相关联的所有边;
```

算法 11 .1 可以用邻接表的形式存储无向图,由于算法中对每条边只进行一次删除操作,设图 G 含有 n 个顶点 e 条边,则算法 11 .1 的时间复杂性为 $O(n+e)$。

下面考察算法 11 .1 的近似比。若用 A 表示算法在步骤 3 .1 中选取的边的集合,则 A 中任何两条边没有公共顶点。因为算法选取了一条边,并在将其顶点加入顶点覆盖后,就将 E' 中与该边的两个顶点相关联的所有边从 E' 中删除,因此,下一次再选取的边就与该边没有公共顶点。由数学归纳法易知,A 中的所有边均没有公共顶点。算法结束时,顶点覆盖中的顶点数 $|V'| = 2|A|$。另一方面,图 G 的任一顶点覆盖一定包含 A 中各边的至少一个端点,因此,若最小顶点覆盖为 V^3 ,则 $|V^3| \geq |A|$。由此可得,$|V'| \leq 2|V^3|$,即算法 11 .1 的近似比为 2。

11.2.2 TSP问题

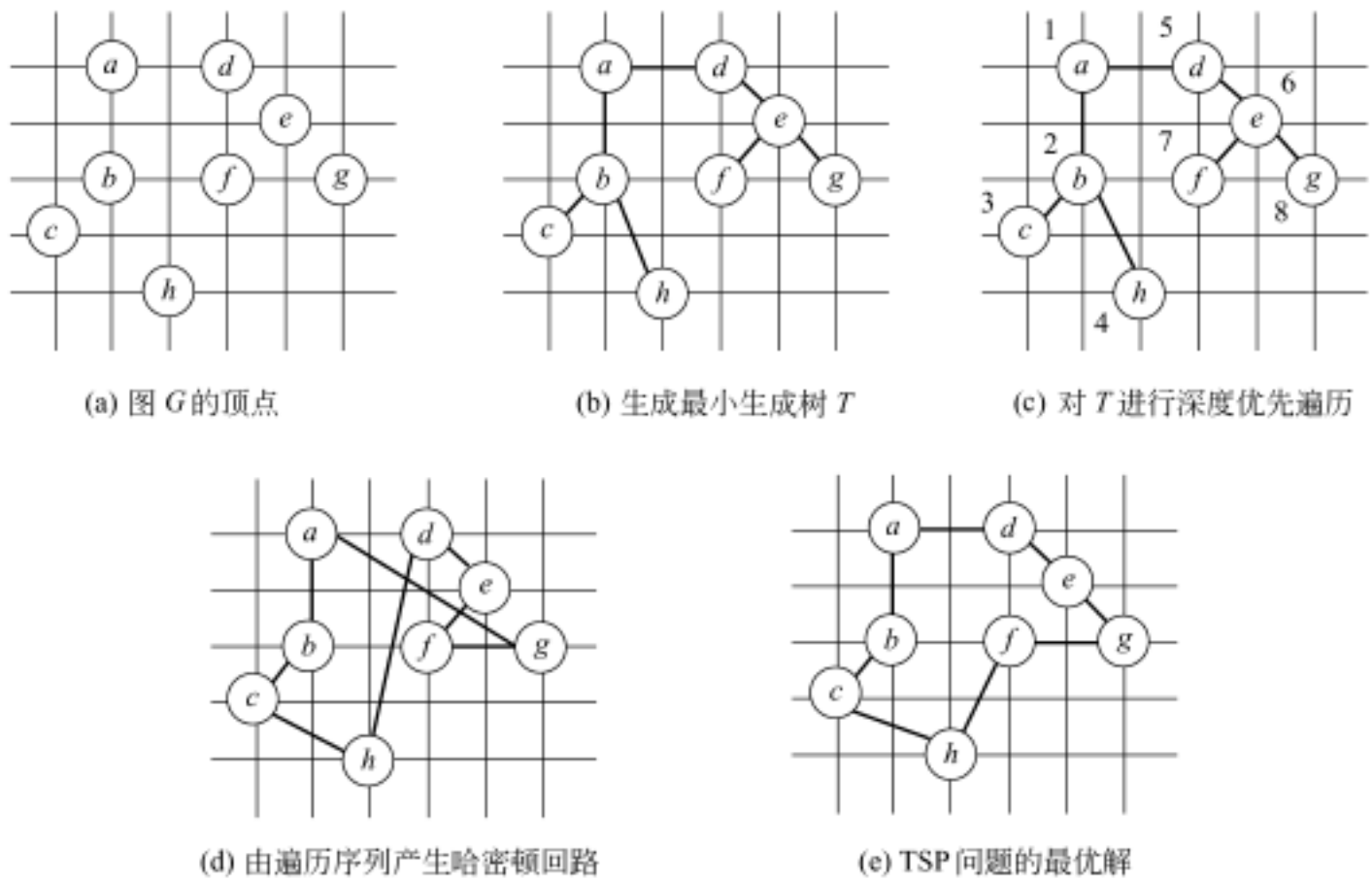
TSP 问题是指旅行家要旅行 n 个城市,要求各个城市经历且仅经历一次,然后回到出发城市,并要求所走的路程最短。

如果无向图 $G=(V, E)$ 的顶点在一个平面上,边 $(i, j) \in E$ 的代价 $c(i, j)$ 均为非负整数,且两个顶点之间的距离为欧几里得距离(Euclidean distance),则对图 G 的任意 3 个顶点 $i, j, k \in V$,显然满足如下三角不等式:

$$c(i, j) + c(j, k) \geq c(i, k)$$

事实上,很多以 TSP 问题为背景的应用问题,如交通、航线、机械加工等应用问题,顶点之间的代价都满足三角不等式。

可以证明,满足三角不等式的 TSP 问题仍为 NP 难问题,但是,可以设计一个近似算法,其近似比为 2。图 11 .2(a)给出了一个满足三角不等式的无向图,图中方格的边长为 1。求解 TSP 问题的近似算法首先采用 Prim 算法生成图的最小生成树 T,如图 11 .2(b)所示,图中粗线表示最小生成树中的边,然后对 T 进行深度优先遍历,经过的路线为 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow h \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow g \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$,得到遍历序列 $L = (a, b, c, h, d, e, f, g)$,由序列 L 得到哈密顿回路,即近似最优解,如图 11 .2(d)所示,其路径长度约为 19 .074,图 11 .2(e)所示是图 11 .2(a)的最优解,其路径长度约为 16 .084。



(a) 图 G 的顶点　(b) 生成最小生成树 T　(c) 对 T 进行深度优先遍历

(d) 由遍历序列产生哈密顿回路　(e) TSP 问题的最优解

图 11.2　TSP 问题的近似算法求解示例

伪代码

算法 11.2——满足三角不等式的 TSP 问题

1. 在图中任选一个顶点 v;
2. 采用 Prim 算法生成以顶点 v 为根结点的最小生成树 T;
3. 对生成树 T 从顶点 v 出发进行深度优先遍历,得到遍历序列 L;
4. 根据 L 得到图 G 的哈密顿回路;

算法 11.2 的时间主要耗费在采用 Prim 算法构造最小生成树,因此,其时间复杂性为 $O(n^2)$。

下面考察算法 11.2 的近似比。设满足三角不等式的无向图 G 的最短哈密顿回路为 H^3,$W(H^3)$是 H^3 的代价之和;T 是由 Prim 算法求得的最小生成树,$W(T)$是 T 的代价之和;H 是由算法 11.2 得到的近似解,也是图 G 的一个哈密顿回路,$W(H)$是 H 的代价之和。因为图 G 的任意一个哈密顿回路删去一条边,构成图 G 的一个生成树,所以,有

$$W(T) \leq W(H^3)$$

设算法 11.2 中深度优先遍历生成树 T 得到的路线为 R,则 R 中对于 T 的每条边都经过两次,所以有:

$$W(R) = 2W(T)$$

算法 11.2 得到的近似解 H 是 R 删除了若干中间点(不是第一次出现的顶点)得到的,每删除一个顶点恰好是用三角形的一条边取代另外两条边。例如,在图 11.2 中,遍历生成树的路线为 $a \to b \to c \to b \to h \to b \to a \to d \to e \to f \to e \to g \to e \to d \to a$,删除第 2 次出现的顶点 b,相当于用边(c, h)取代另外两条边(c, b)和(b, h)。由三角不等式可知,这种取代

不会增加总代价,所以,有

$$W(H) \leq W(R)$$

从而

$$W(H) \leq 2W(H^3)$$

由此,算法 11.2 的近似比为 2。

11.3 组合问题中的近似算法

11.3.1 装箱问题

设有 n 个物品和若干个容量为 C 的箱子,n 个物品的体积分别为$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$,且有 $s_i \leq C(1 \leq i \leq n)$,把所有物品分别装入箱子,求占用箱子数最少的装箱方案。

应 用 实 例

装箱问题是大量实际问题的抽象。例如,有若干货物要装入集装箱后运输,则在装入所有货物的条件下,占用集装箱最少的装箱方案就是装箱问题。类似的还有码头运输货物的船只的装船方案等。

最优装箱方案可以通过把 n 个物品划分为若干子集,每个子集的体积和小于等于 C,然后取子集个数最少的划分方案。但是,这种划分可能的方案数有 $(n+2)^{n-2}$ 种,在多项式时间内不能够保证找到最优装箱方案。

大多数装箱问题的近似算法采用贪心策略,即在每个物品装箱时规定一种局部选择方法。下面介绍 4 种不同的求解装箱问题的近似算法。

1.首次适宜法(first fit)

首次适宜法首先将所有的箱子初始化为空,然后依次取每一个物品,将该物品装入第一个能容纳它的箱子中。

例如,有 10 个物品,其体积分别为 $S=(4, 2, 7, 3, 5, 4, 2, 3, 6, 2)$,若干个容量为 10 的箱子,采用首次适宜法得到的装箱结果如图 11.3 所示。

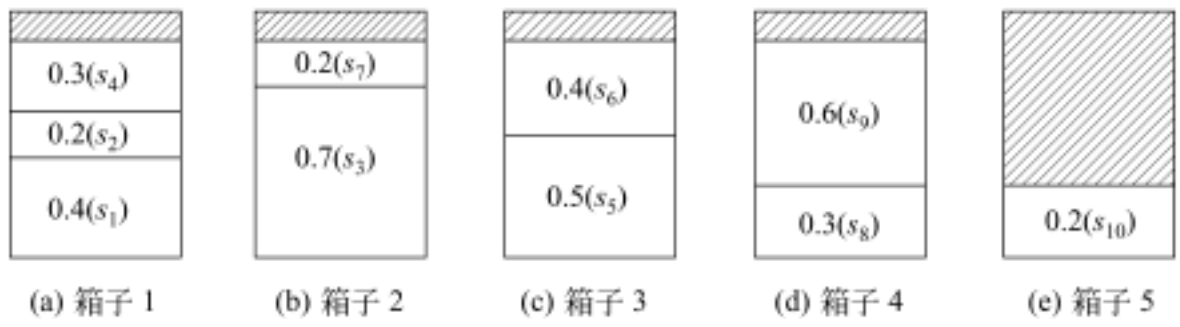


图 11.3 首次适宜法求解装箱问题示例(阴影表示闲置部分)

首次适宜法求解装箱问题的算法如下:

C++描述

算法 11 3——首次适宜法

```
int FirstFit(int n, int C, int s[ ], int b[ ])
{ // 假设物品体积均为整数,b[j]为第 j 个箱子已装入物品的体积,数组下标均从 1 开始
   k = 0;
   for (j = 1; j < = n; j++ )          // 初始化
      b[j] = 0;
   for (i = 1; i< = n; i ++ )          // 装入第 i 个物品
   {
      j = 1;
      while (C - b[j] < s[i])          // 查找第 1 个能容纳物品 i 的箱子
         j ++ ;
      b[j] = b[j] + s[i];
      k = max(j, k);                   // 已装入物品的箱子个数
   }
   return k;
}
```

算法 FirstFit 的基本语句是查找第 1 个能容纳物品 i 的箱子,其时间复杂性为 $O(n^2)$。

下面考察算法 11 .3 的近似比。不失一般性,假设箱子的容量 C 为一个单位的体积,C_i 为第 i 个箱子已装入物品的体积,由首次适宜装箱策略,有 $C_i + C_j > 1$。设装箱问题的近似解为 k,则

若 k 为偶数,则 $C_1 + C_2 + \cdots + C_k > k/2$

若 k 为奇数,则 $C_1 + C_2 + \cdots + C_k > (k-1)/2$

将两式相加,得:

$$2\sum_{i=1}^{k} C_i > \frac{2k-1}{2}$$

设装箱问题的最优解为 m,则在最优化装入时,所有箱子恰好装入全部物品,即:

$$m = \sum_{i=1}^{m} C_m = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

所以,有:

$$2\sum_{i=1}^{k} C_i = 2\sum_{i=1}^{n} s_i = 2m > \frac{2k-1}{2}$$

即

$$\frac{k}{m} < 2$$

由此,算法 FirstFit 的近似比小于 2。

2 .最适宜法

最适宜法的物品装入过程与首次适宜法类似,不同的是,总是把物品装到能够容纳它

并且目前最满的箱子中，使得该箱子装入物品后闲置空间最小。

例如，有 10 个物品，其体积分别为 $S=(4, 2, 7, 3, 5, 4, 2, 3, 6, 2)$，若干个容量为 10 的箱子，采用最适宜法得到的装箱结果如图 11.4 所示。

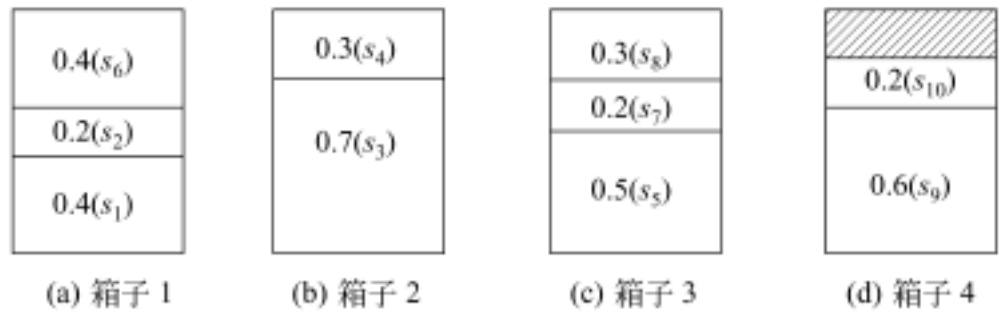


图 11.4 最适宜法求解装箱问题示例(阴影表示闲置部分)

C++描述

算法 11.4——最适宜法

```
int BestFit(int n, int C, int s[ ], int b[ ])
{ //假设物品体积均为整数,b[j]为第 j 个箱子已装入物品的体积,数组下标均从 1 开始
   k = 0;
   for (j = 1; j < = n; j++ )          // 初始化
      b[j] = 0;
   for (i = 1; i< = n; i++ )           // 装入第 i 个物品
   {
      min = C; m = k + 1;
      for (j = 1; j < = k; j++ )       // 查找能够容纳物品 i 并且目前最满的编号最小的箱子
      {
         temp = C - b[j] - s[i];       // 求箱子 j 装入物品 i 后的剩余容量
         if (temp > 0 && temp < min) {
            min = temp;
            m = j;
            b[m] = b[m] + s[i];
         }
      }
      k = max(m, k);                   // 已装入物品的箱子个数
   }
   return k;
}
```

算法 BestFit 的近似比请读者参照算法 FirstFit 自行分析。

3.首次适宜降序法

首次适宜降序法首先将物品按体积从大到小排序，然后用首次适宜法装箱。

例如，有 10 个物品，其体积分别为 $S=(4, 2, 7, 3, 5, 4, 2, 3, 6, 2)$，若干个容量为 10 的箱子，采用最适宜降序法得到的装箱结果如图 11.5 所示。

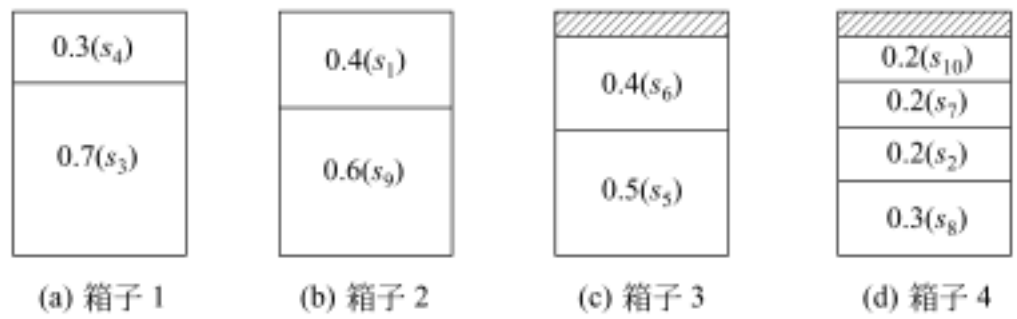


图 11 .5　首次适宜降序法求解装箱问题示例(阴影表示闲置部分)

4 .最适宜降序法

最适宜降序法将物品按体积从大到小排序,然后用最适宜法装箱。

例如,有 10 个物品,其体积分别为 S = (4, 2, 7, 3, 5, 4, 2, 3, 6, 2),若干个容量为 10 的箱子,采用最适宜降序法得到的装箱结果如图 11 .6 所示。

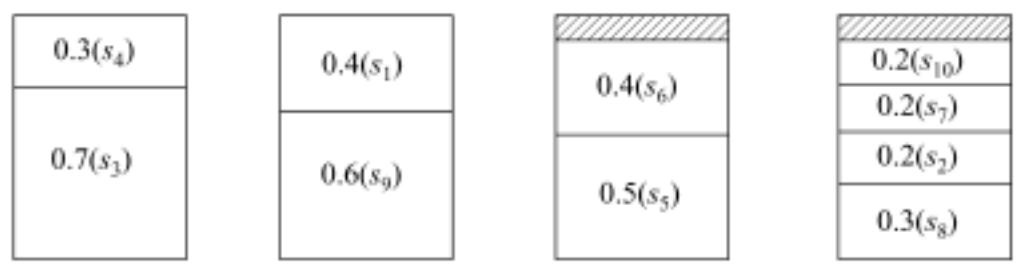


图 11 .6　最适宜降序法求解装箱问题示例(阴影表示闲置部分)

11.3.2　子集和问题

令 S = {s_1, s_2, …, s_n}是一个正整数的集合,子集和问题要求在这个正整数集合中,找出其和不超过正整数 C 的最大和数的子集。

考虑蛮力法求解子集和问题,为了求得集合{s_1, s_2, …, s_n}的所有子集和,先将所有子集和的集合初始化为 L_0 = {0},然后求得子集和中包含 s_1 的情况,即 L_0 中的每一个元素加上 s_1,用 $L_0 + s_1$ 表示对集合 L_0 中的每个元素加上 s_1 后得到的新集合,则所有子集和的集合为 $L_1 = L_0 + (L_0 + s_1) = \{0, s_1\}$;再求得子集和中包含 s_2 的情况,即 L_1 中的每一个元素加上 s_2,所有子集和的集合为 $L_2 = L_1 + (L_1 + s_2) = \{0, s_1, s_2, s_1 + s_2\}$;依此类推,一般情况下,为求得子集和中包含 s_i ($1 \leq i \leq n$)的情况,即 L_{i-1} 中的每一个元素加上 s_i,所有子集和的集合为 $L_i = L_{i-1} + (L_{i-1} + s_i)$。因为子集和问题要求不超过正整数 C,所以,每次合并后都要在 L_i 中删除所有大于 C 的元素。例如,若 S = {104, 102, 201, 101}, C = 308,利用上述算法求解子集和问题的过程如图 11 .7 所示。

设集合 L_i 以数组 L[i]的形式存储,n 个元素的正整数集合 S 用数组 s[n]存储且下标从 1 开始,两个集合的合并操作与 4 .3 .1 中介绍的归并排序的合并算法类似,蛮力法求解子集和问题的算法如下:

$L_0 = \{0\}$

$L_1 = L_0 + (L_0 + 104) = \{0\} + \{104\} = \{0, 104\}$

$L_2 = L_1 + (L_1 + 102) = \{0, 104\} + \{102, 206\} = \{0, 102, 104, 206\}$

$L_3 = L_2 + (L_2 + 201) = \{0, 102, 104, 206\} + \{201, 303, 305, 407\}$
$= \{0, 102, 104, 201, 206, 303, 305\}$

$L_4 = L_3 + (L_2 + 101) = \{0, 102, 104, 201, 206, 303, 305\} + \{101, 203, 205, 302, 307, 404, 406\}$
$= \{0, 101, 102, 104, 201, 203, 205, 206, 302, 303, 305, 307\}$

图 11.7　蛮力法求解子集和问题示例

伪代码

算法 11.5——子集和问题

```
int SubsetSum1(int n, int s[ ], int C)
{
    L[0] = {0};
    for (i = 1; i< = n; i ++ )        //依次计算子集和中包含元素 s[i]
    {
      L[i] = Merge(L[i - 1], L[i - 1] + s[i]);
      删去 L[i]中超过 C 的元素;
    }
    return max(L[n]);
}
```

算法 SubsetSum1 中的数组 L[i]是一个包含了不超过 C 的所有可能的(s_1, s_2, …, s_i)的子集和,在最坏情况下(即 L[i]中的元素各不相同),L[i]中的元素个数为 2^i,所以,算法 SubsetSum1 的时间复杂性为 $O(2^n)$。

基于算法 SubsetSum1 的近似算法的基本思想是,在迭代过程中,对数组 L[i]进行适当的修整,使得在子集和不超过一定误差的前提下,尽可能减少数组 L[i]中的元素个数,从而获得算法时间性能的提高。具体方法是:用一个修整参数 $\delta(0 < \delta < 1)$,从数组 L[i]中删去尽可能多的元素,得到一个数组 L1[i],使得每一个从 L[i]中删去的元素 y,在数组 L1[i]中都有一个修整后的元素 z 满足 $(1 - \delta) \times y \leq z \leq y$,可以将 z 看作是被删去元素 y 在修整后的数组 L1[i]中的代表。

例如,若 $\delta = 0.1$,且 $L = \{10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 29\}$,则用 δ 对 L 进行修整后得到 $L1 = \{10, 12, 15, 20, 23, 29\}$。其中被删去的元素 11 由 10 来代表,21 和 22 由 20 来代表,24 由 23 来代表。

给定一个修整参数 δ,对有序数组 L 的修整算法如下:

伪代码

算法 11.6——有序数组的修整

```
int [ ] Trim(int m, int L[ ], int L1[ ], double δ)
{ //数组 L 的长度为 m,下标从 1 开始,
  //对数组 L 修整后存储在数组 L1 中
```

```
        L1[1] = L[1];                    //数组 L1 中一定包含数组 L 的最小元素,并作为修整的基础
        last = L[1];
        for (i = 2; i<= m; i++)
        {
          if (last < (1 - δ)3 L[i]) {//将所有与 last 相差 δ 的元素删去
            将 L[i]加入表 L1 的尾部;
            last = L[i];
          }
      }
      return L1;
    }
```

算法 Trim 的基本语句是 for 循环中的条件语句,显然,其时间复杂性为 $O(m)$。

子集和问题的近似算法与蛮力法求解子集和问题的算法类似。不同的是,近似算法在每次合并结束并且删除所有大于 C 的元素后,在子集和不超过近似误差 ε 的前提下,以 $\delta = \varepsilon / n$ 作为修整参数对合并结果 L_i 进行修整,尽可能减少下次参与迭代的元素个数。例如,设正整数的集合 $S = \{104, 102, 201, 101\}$, $C = 308$,给定近似参数 $\varepsilon = 0.2$,则修整参数为 $\delta = \varepsilon / n = 0.05$,利用近似算法求解子集和问题的过程如图 11.8 所示。算法最后返回 302 作为子集和问题的近似解,而最优解为 104 + 102 + 101 = 307,所以,近似解的相对误差不超过预先给定的近似参数 0.02。

$L_0 = \{0\}$

$L_1 = L_0 + (L_0 + 104) = \{0\} + \{104\} = \{0, 104\}$

对 L_1 进行修整: $L_1 = \{0, 104\}$

$L_2 = L_1 + (L_1 + 102) = \{0, 104\} + \{102, 206\} = \{0, 102, 104, 206\}$

对 L_2 进行修整: $L_2 = \{0, 102, 206\}$

$L_3 = L_2 + (L_2 + 201) = \{0, 102, 206\} + \{201, 303, 407\} = \{0, 102, 201, 206, 303\}$

对 L_3 进行修整: $L_3 = \{0, 102, 201, 303\}$

$L_4 = L_3 + (L_2 + 101) = \{0, 102, 201, 303\} + \{101, 203, 302, 404\}$

$= \{0, 101, 102, 201, 203, 302, 303\}$

对 L_4 进行修整: $L_4 = \{0, 101, 201, 302\}$

图 11.8　近似算法求解子集和问题示例

给定一个近似参数 ε,子集和问题的近似算法如下:

伪代码

算法 11.7——子集和问题

```
int SubsetSum2(int n, int s[ ], int C, double ε)
{
   L[0] = {0};
   for (i = 1; i< = n; i ++ )
   {
      L[i] = Merge(L[i - 1], L[i - 1] + s[i]);
      删去 L[i]中超过 C 的元素;
      L[i] = Trim(L[i], ε/ n);
   }
   return max(L[n]);
}
```

在算法 SubsetSum2 中,每次对数组 L[i]进行合并、删除超过 C 的元素和修整操作的计算时间为 $O(|L[i]|)$。因此,整个算法的计算时间不会超过 $O(n\times|L[i]|)$。注意到,算法对数组 L[i]进行修整后,L[i]中相继的两个元素 a 和 b 满足:

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{1-\varepsilon/n}$$

也就是说,数组 L[i]中相继的元素之间至少相差一个比例因子 $\frac{1}{1-\varepsilon/n}$,而数组 L[i]中的最大元素不会超过 C,因此,算法完成了对数组 L[i]的合并、删除超过 C 的元素和修整操作后,L[i]的元素个数不超过

$$\frac{\ln(C)}{\ln(1/(1-\varepsilon/n))} = \frac{\ln(C)}{-\ln(1-\varepsilon/n)} \le \frac{C}{\varepsilon/n} = \frac{nC}{\varepsilon}$$

所以,算法 SubsetSum2 的时间复杂性为 $O(n^2/\varepsilon)$。

下面考察算法 SubsetSum2 的近似比。设子集和问题的最优解为 c^3,算法 SubsetSum2 得到的近似最优解为 c,则算法 SubsetSum2 的相对近似比为

$$\frac{c^3-c}{c^3} = 1-\frac{c}{c^3}$$

下面证明这个相对误差不超过 ε,即

$$1-\frac{c}{c^3} < \varepsilon$$

注意到,在对数组 L[i]进行修整时,被删除元素与其代表元素的相对误差不超过 ε/n。设子集和问题的最优解为 c^3,应用近似算法求得的近似最优解为 c,求解最优解产生的子集和的集合序列为(P_1, P_2, …, P_n),对修整次数 i 用数学归纳法可以证明,对于 P_i 中任一不超过 C 的元素 y,有 L[i]中的一个元素 x,使得 $(1-\varepsilon/n)^i y \le x \le y$。由于最优解 $c^3 \in P_n$,故存在 $x\in L[n]$,使得 $(1-\varepsilon/n)^n c^3 \le x \le c^3$。又因为算法返回的是 L[n]中的最大元素,所以,有 $x \le c \le c^3$。因此,$(1-\varepsilon/n)^n c^3 \le c \le c^3$。最后,由于 $(1-\varepsilon/n)^n$ 是 n 的递增函数,所以,当 $n>1$ 时,有 $(1-\varepsilon) \le (1-\varepsilon/n)^n$。由此可得,$(1-\varepsilon)c^3 \le c \le c^3$。从而,算法 SubsetSum2 求得的近似解与最优解的相对误差不超过 ε。

11.4　实验项目——TSP 问题的近似算法

1.实验题目

求解 TSP 问题的近似算法。

2.实验目的

(1) 了解近似算法的局限性;
(2) 掌握求解 NP 完全问题的一种方法: 只对问题的特殊实例求解。

3.实验要求

(1) 理解满足三角不等式的 TSP 问题的特点及应用实例;
(2) 设计近似算法求解满足三角不等式的 TSP 问题,并求出近似比;
(3) 将求解满足三角不等式的 TSP 问题的近似算法应用于一般的 TSP 问题,考察它的近似性能,理解为什么说 TSP 问题是 NP 问题中最难的一个问题。

4.实现提示

具有三角不等式性质的 TSP 问题的近似算法的思想请参见 11.2.2 节,求解最小生成树的 Prim 算法请参见 7.2.3 节。设数组 visited[n]作为顶点的访问标志,visited[i] = 0 表示顶点 i 未被访问,visited[i] = 1 表示顶点 i 已被访问,从顶点 v 出发深度优先遍历图的算法如下:

伪代码

算法 11.8——深度优先遍历图

```
1. 访问顶点 v; visited[v] = 1;
2. w = 顶点 v 的第一个邻接点;
3. while (w 存在)
   3.1  if (w 未被访问) 从顶点 w 出发递归执行该算法;
   3.2  w = 顶点 v 的下一个邻接点;
```

满足三角不等式的 TSP 问题的近似算法可以应用于一般的 TSP 问题,但不能保证其近似比。实际上,对于一般的 TSP 问题,除非 NP = P,否则,不存在近似比 $\rho < \infty$ 的多项式时间的近似算法。

阅读材料——量子密码技术

密码学包括两部分内容: 一是密码编码,就是加密算法的设计和研究,研究各种加密方案的学科称为密码编码学,而加密方案则称为密码体制;二是密码分析,就是密码破译技术,研究破译密码的学科称为密码分析学。密码编码学和密码分析学统称密码学。

密码学的出现虽然可以追溯至遥远的古代,但直到 20 世纪 40 年代前,密码技术可以说还是一门艺术而不是一门科学,那时的密码专家常凭着直觉和信念来进行密码设计和分析,而不是靠推理证明。1949 年,Claude E . Shannon 发表了“保密系统的信息理论”,该论文标志着密码学成为了一门科学,此后,密码学得到了迅速的发展。现在密码学的应用已不再局限于军事、政治和外交领域,其商用价值和社会价值已得到了充分肯定。

目前常用的加密算法主要可分为两类:以 DES(digital encryption standard)算法为代表的密钥算法和以 RSA(rivest shamir adleman)为代表的公开密钥算法。DES 密码的保密性是建立在一定长度的密钥基础之上的,RSA 密码的保密性则是建立在分解有大素数因子的合数的基础之上。目前人们还无法从理论上证明这两种算法的不可破解性,换言之,它们是基于难解的数学问题而不是无法解的问题。事实上,早在 Shannon 给出完善保密系统的证明之前,已有实际应用的 Vernam 密码就是完善保密的,即是不可破解的密码。这种密码需要一个与所传递的消息一样长的密钥,并且此密钥不再用于另一条消息的传递。这正是 Shannon 所证明的:密钥必须为一长度不少于待加密的明文长度的随机序列,且任何密钥仅使用一次。这就是所谓的一次一密码体制,理论上它是不可破解的。但在实际应用中,密钥的分配是一个很脆弱的环节,因此未能得到广泛的应用。而且,从数学角度看,若掌握恰当的方法,且尝试的次数足够多,在现有各种密码技术中,没有哪种密码是解不开的。近年来出现的量子密码技术(quantum cryptography)突破了传统加密方法的束缚,以量子状态作为加密方法具有不可复制性,可以说是“绝对安全”的。

量子密码学是一门新兴的物理学和密码学的边缘学科,它利用物理学的基本原理,保证了密钥传递(保存)的安全性。众所周知,保密通信中的关键是密钥,通信安全在于保证密钥的安全,以量子理论为基础的量子加密技术依靠绝对安全的密钥来加密和解密,从而在国际上引起轰动。量子密码装置一般采用单个光子实现,根据海森堡的测不准原理,测量这一量子系统会对该系统产生干扰并且会产生出关于该系统测量前状态的不完整信息。因此,窃听量子通信信道就会产生不可避免的干扰,合法的通信双方可由此而察觉到有人在窃听。量子密码技术利用这一效应,使从未见过面且事先没有共享秘密信息的通信双方建立通信密钥,然后再采用 Shannon 已证明的完善保密的一次一密钥密码通信,即可确保双方的秘密不泄漏。这样,量子密码学达到了经典密码学所无法达到的最终目的:一是合法的通信双方可察觉潜在的窃听者并采取相应的措施;二是使窃听者无法破解量子密码,无论企图破译者有多么强大的计算能力。量子密码学的出现是对经典密码学的重大突破,可以毫不夸张地说,我们正处在信息时代即将发生深刻变化的前夜。

1969 年,哥伦比亚大学的 S . Wiesne 首先提出利用量子物理性质对信息进行加密。十几年以后,C . H . Bennett 和 G . Brassard 在此基础上提出量子密码的概念,并于 1984 年提出第一个量子密钥分发(QKD)协议,用单光子偏振态编码,现在称之为 BB84 协议,开创量子密码技术新时期。1992 年,Bennett 提出一种与 BB84 协议类似而更简单,但效率减半的方案,称之为 B92 协议。基于量子 Einstein - Podolsky - Rosen (EPR) 现象,Ekert 于 1991 年提出用双量子纠缠态实现量子密码技术,称为 EPR 粒子协议。后来也出现了不少其他协议,但都可归纳为以上 3 种类型。

在光纤上进行的试验证明,这种加密方法在卫星通信中也是可行的。但是量子加密技术有很高的维护要求。普通的铜缆(这种媒介只以电子方式而不是量子方式传送信号)无法使用这种技术,而在宽带光纤通信中就可以进行量子密钥的发送。

目前量子密码技术正致力于以下几方面的研究:

(1) 将量子密钥分发协议应用到计算机网络中。信息发送方随机发送一串二进制序列,至于单光子通过分光计进入那条输出端口,则纯粹是概率上的结果,是无法预先确定的。因此,用户可以轻易建立起惟一的专有密钥,可以采用任意有关量子密钥的协议,这会极大促进未来新一代光纤网络的发展。

(2) 研究在量子通信协议中应用更为精确的误差检测和校验技术。

(3) 研究在一般噪声信道环境下,如何区分由于非法侵入和信道噪声所引入的误差,在有关理论和设计上寻求解决方案。

(4) 针对非法侵入设计更优异的检测算法,不管侵入者采取何种窃听策略(非透明 - 截断重发或者半透明 - 中途探测方案等),都能很好地发挥其用途。目前所有有关的检测算法均建立在对侵入者进行一定假设的前提下。

(5) 发展基于量子密码的量子认证协议。目前量子密钥分发协议还不能检测通信双方的真实性,有关这方面的研究仍需要作进一步深入的探讨。

毫无疑问,量子密码技术对未来的网络安全性将会形成极大的冲击,AT&T 实验室的彼得·肖已经证实了量子机理可以用于攻击今天广泛使用的某些加密体系,并且他已设计了一种面向量子计算机的算法,该算法在高阶数量级因式分解方面的运算远远超出了传统计算机。尽管技术上的实现还需要时日,但这不啻给公钥密码体制的前途重重地抹上了一层阴影,至少仅就目前理论水平而言,只有量子密码技术才能应付未来量子计算机问世所带来的潜在威胁。

习　题　11

1.求解 TSP 问题有很多近似算法,其中最简单的一种叫做 2 - 最优算法(参见图 11.9),先生成 n 个城市的一个随机排列 T,然后交换这个路径 T 中不相邻的两条边(称为 T 的邻域)得到新的路径 T'。如果 T' 的代价比 T 的代价小,则用 T' 去替换 T;如果 T 的邻域中找不到比 T 更好的解,则算法结束。设计这个近似算法并考查它的近似比。

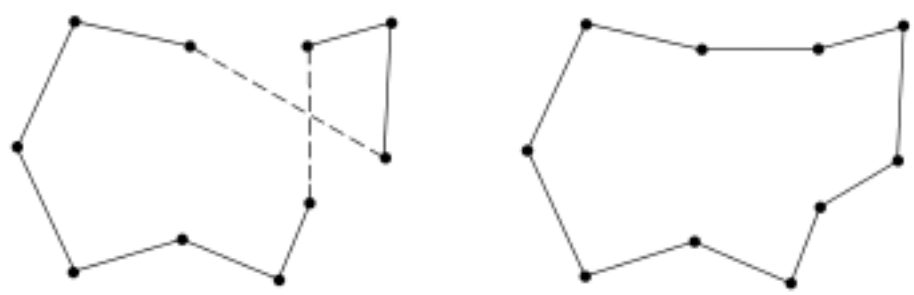


图 11.9　第 1 题图

2. 证明：TSP 问题不存在 c 近似算法(c 为某个常数)，除非 $P = NP$。

3. 给出符合欧几里得条件的 TSP 问题的一个实例，对于该问题实例用算法 11.2 求得的近似比为 2。

4. 设计求解 0/1 背包问题的近似算法，并考察近似算法的近似比。

5. 令 $G = (V, E)$ 是一个无向图，考虑如下求解顶点覆盖问题的近似算法：首先把图 G 的顶点按度从大到小排序，然后，执行下列操作，直到把所有的边都覆盖为止：在图中挑选至少关联于一条边且度最大的顶点，把它加入顶点覆盖集合中，并删除与这个顶点相关联的所有边。请设计这个近似算法，并与算法 11.1 进行对比。

6. 设计求解多机调度问题的近似算法并考察算法的近似比。(提示：参见 7.3.3 节)

7. 令 $G = (V, E)$ 是一个无向图，考虑如下求解最大团问题的近似算法：置 $V' = \{\}$，向 V' 中添加一个顶点，该顶点不在 V' 中且和 V' 中每个顶点相邻接。重复上述过程，直到 V 中没有不在 V' 中的顶点，或没有与 V' 中每个顶点都相邻接的顶点。请设计这个近似算法，并考察这个近似算法可能达到的近似比。

8. 设 α 是一个含有 n 个变量和 m 个合取项的合取范式。合取范式 α 的最大可满足问题要求确定 α 的最多个数的合取项使这些合取项可同时满足。设 k 是 α 的所有合取项中因子个数的最小值，设计近似算法求解最大可满足问题并使其相对误差为 $\frac{1}{k+1}$。

第12章 计算复杂性理论

CHAPTER

计算复杂性理论有两个基本的论题：Church - Turing 论题和 Cook - Karp 论题，前者利用图灵机指出了哪些问题是可计算的，后者则指出在可计算的问题中，只有在多项式时间内可计算的问题才是实际可计算的。

哪些问题是计算机可计算的，这是计算机科学的一个基本问题。20 世纪 30 年代，Turing 在提出图灵机计算模型的基础上，对于“可计算问题”的含义给出了一个具体的描述，称为 Church - Turing 论题或 Turing 论题。

Church - Turing 论题　一个问题是可计算的当且仅当它在图灵机上经过有限次计算得到正确的结果。

这个论题把人类面临的所有问题划分成两类，一类是可计算的，另一类是不可计算的。但是，论题中“有限次计算”是一个相当宽松的条件，即使需要计算几个世纪的问题，在理论上也都是可计算的。因此，Church - Turing 论题界定出的可计算问题类是一个很大的类，几乎包括了人类遇到的所有问题。

计算复杂性理论的主要研究成果出现在 20 世纪 70 年代，Cook 对“实际可计算问题”的含义给出了一个具体的描述，称为 Cook - Karp 论题或 Cook 论题。

Cook - Karp 论题　一个问题是实际可计算的当且仅当它在图灵机上经过多项式时间(步数)计算得到正确的结果。

Cook - Karp 论题将可计算问题类进一步划分成两类，一类是实际可计算的，另一类是实际不可计算的。实际可计算问题类就是 P 类问题，它是可计算问题类的一个子类。

12.1 计算模型

在对问题进行计算复杂性分析之前，首先必须建立求解问题所用的计算模型，以便在对问题的计算复杂性进行分析时，有一个共同的尺度。人们提出了几种计算模型，其中最重要的是随机存取机(random access machine,

RAM)、随机存取存储程序机(random access stored program machine, RASP)以及图灵机(Turing machine)。在不同的计算模型下,对问题的计算复杂性进行分析,所得的结果基本上是一致的。下面的讨论中主要使用图灵机作为计算模型。

12.1.1 图灵机的基本模型

图灵机可以用来识别语言。

定义 12.1 设字母表 $\sum$ 是任意符号的有穷集合,$\sum^*$ 是由 $\sum$ 中的符号组成的所有符号串的集合,若 L 是 $\sum^*$ 的子集,则称 L 是字母表 $\sum$ 上的语言(language)。

例如,对于图 $G=(V, E)$,可以用下面的符号串来描述图 G 中顶点 $V=(1, 2, \cdots, n)$ 之间的边:

$$\omega(G) = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n})(x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n})\cdots(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn})$$

其中,如果$(i, j)\in E(1\leq i, j\leq n)$,则 $x_{ij}=1$;否则 $x_{ij}=0$。则符号串 $\omega(G)$ 中所使用的字母表为 $\sum=\{0, 1, (,)\}$,符号串 $\omega(G)$ 构成了字母表 $\sum$ 上的一个语言。

在计算复杂性理论中,经常考虑的是判定问题,因为判定问题可以很容易地表达为语言的识别问题,从而方便地在某种计算模型上进行求解。

定义 12.2 一个判定问题(decision problem)是仅仅要求回答 yes 或 no 的问题。一个判定问题对应的语言识别过程为:已知字母表 $\sum$,L 是字母表 $\sum$ 上的语言,对于 $\sum$ 上的一个符号串 ω,若 $\omega\in L$,则给出解答 yes,否则,给出解答 no。

图灵机是一个结构简单并且计算能力很强的计算模型,是普通计算机的一种抽象模型。标准的图灵机由一个有限状态控制器和一条无限长的工作带组成,如图 12.1 所示。工作带从左到右被划分为许多单元,每个单元可以存放一个带符号,带符号的总数是有限的。控制器具有有穷个内部状态和一个读写头,在计算的每一步,控制器处于某个内部状态,使读写头扫描工作带的某个单元,并根据它的状态和被扫描单元的内容,决定下一步的执行动作:把当前单元的内容改写成空白符或字母表中的一个符号;使读写头停止不动、向左或向右移动一个单元;使控制器转移到某一个状态等。计算开始时,将输入符号串放在工作带上,从最左单元起每个单元放一个输入符号,其余单元都是空白符,控制器处于初始状态 q_0,读写头扫描工作带左端的第一个符号,控制器决定下一步的动作。如果对于当前的状态和所扫描的符号,没有下一步的动作,则图灵机就停止计算,处于终止状态 q_f。

图 12.1 单带图灵机示意图

定义 12.3　标准的图灵机是一个 6 元组，即 $M=(Q, I, T, q_0, q_f, \delta)$，其中：

(1) Q: 有限个状态的集合。

(2) I: 输入符号的集合，即字母表。

(3) T: 有限个带符号的集合，包括字母表和空白符 B，即 $T=I+\{B\}$。

(4) q_0: 初始状态。

(5) q_f: 终止(或接受)状态。

(6) δ: 转移函数，它把 $Q\times T$ 的某一个元素映射为 $Q\times(T\times\{L, R, S\})$中的一个元素，其中，$\{L, R, S\}$为读写头的动作，$L$ 表示左移一个单元，R 表示右移一个单元，S 表示停止不动。

标准的图灵机只有一个工作带，读写头每一步只能移动一个单元，要移动 n 个单元，就需要移动 n 步。许多情况下，在这种计算模型上的语言识别过程太繁琐。因此，需要把单带图灵机扩展到 k 带图灵机。

12.1.2　k带图灵机和时间复杂性

k 带图灵机由一个有限状态控制器和 k 条无限长的工作带($k\geq 1$)组成，每个工作带都有一个由控制器操纵的可以独立移动的读写头，控制器在某一时刻处于某种状态，且状态总数是有限的。图 12.2 是 k 带图灵机的示意图。

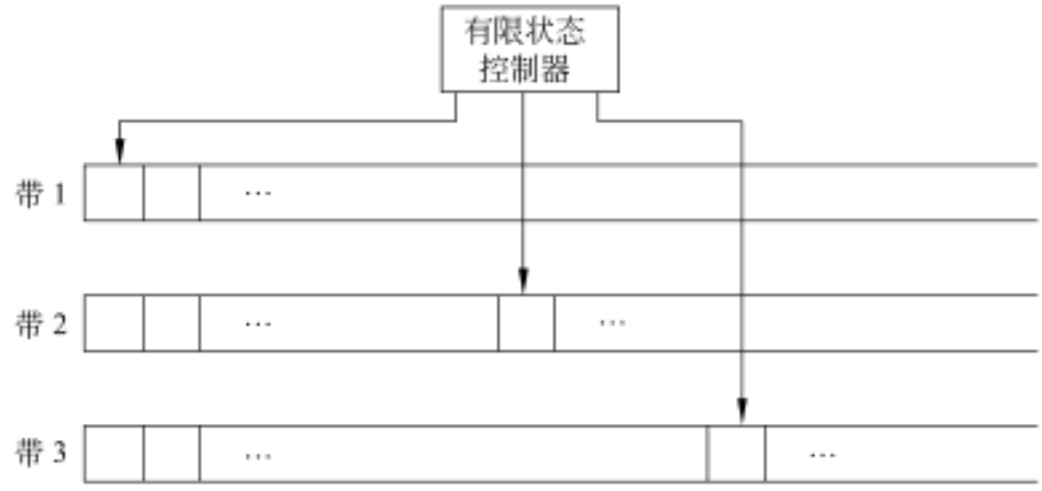


图 12.2　k带图灵机示意图

定义 12.4　k 带图灵机是一个 6 元组，即 $M=(Q, I, T, q_0, q_f, \delta)$，其中：

(1) Q: 有限个状态的集合。

(2) I: 输入符号的集合，即字母表。

(3) T: 有限个带符号的集合，包括字母表和空白符 B，即 $T=I+\{B\}$。

(4) q_0: 初始状态。

(5) q_f: 终止(或接受)状态。

(6) δ: 转移函数，它是从 $Q\times T^k$ 的某一子集映射到 $Q\times(T\times\{L, R, S\})^k$ 的函数。其中，$\{L, R, S\}$为读写头的动作，L 表示左移一个单元，R 表示右移一个单元，S 表示停止不动。$Q\times T^k$ 的某一子集是包含一个状态和 k 个工作带的单元符号的 $k+1$ 元组，它完整地描绘了 k 带图灵机的瞬间图像，称为瞬像。对于某个瞬像，移动函数 δ 将给出一个新的

瞬像,新的瞬像对应一个状态和 k 个序偶,每个序偶由一个单元符号及读写头的移动方向组成,形式上可表示为:

$$\delta(q,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k) = (q',\ (a_1',\ d_1),\ (a_2',\ d_2),\ \cdots,\ (a_k',\ d_k))$$

当图灵机处于状态 q 且第 i 条$(1\leq i\leq k)$工作带的读写头扫描的当前单元中的符号为 a_i 时,图灵机就按照移动函数 δ 所规定的内容进行如下工作:

(1) 将图灵机的状态 q 转移到状态 q';

(2) 把第 i 个$(1\leq i\leq k)$读写头指向的单元中的符号 a_i 改写成新的符号 a_i';

(3) 按 d_i $(1\leq i\leq k)$指出的方向移动各带的读写头,这里 $d_i = L$ 表示读写头左移一个单元,$d_i = R$ 表示读写头右移一个单元,$d_i = S$ 表示读写头不动。

一台图灵机可用来识别语言。这样一台图灵机带符号的集合 T 应当包括这个语言的字母表中的全体符号和一个空白符 B,也许还有其他符号(例如某种标记符)。开始时,第一条带上放有一个输入符号串,从最左的单元起每个单元放一个输入符号,其余单元都是空白符,其他各带上也都是空白符,所有读写头都处于各带左端的第一个单元。当且仅当图灵机从指定的初始状态 q_0 开始,经过一系列的计算步骤后,最终进入终止状态(或接受状态)q_f 时,称图灵机接受这个输入符号串。这台图灵机所能接受的所有输入符号串的集合,称为这台图灵机识别的一个语言。

定义 12.5 令 $M=(Q,\ I,\ T,\ q_0,\ q_f,\ \delta)$是一个 k 带图灵机,M 的格局是一个 $k+1$ 元组:

$$\rho = (q,\ \omega_1 \uparrow \omega_2,\ \omega_1 \uparrow \omega_2,\ \cdots,\ \omega_1 \uparrow \omega_2)$$

其中,$q\in Q$,表示图灵机在此格局下的状态,$\omega_1 \uparrow \omega_2$ 是第 i 个$(1\leq i\leq k)$工作带上的内容,$\uparrow$ 表示读写头的位置,即第 i 个$(1\leq i\leq k)$读写头指向符号串 ω_2 的第一个符号,如果 ω_1 为空,则第 i 个读写头指向第 i 个工作带上第一个非空的符号;如果 ω_2 为空,则第 i 个读写头指向符号串 ω_1 之后的第一个空白符;当 ω_1 和 ω_2 都为空,表明第 i 个工作带是空的。所以,在计算开始时的初始格局为:

$$\rho = (q_0,\ \ \omega,\ \uparrow B,\ \cdots,\ \uparrow B)$$

其中,ω 是输入符号串。

设 $\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n$ 是一个格局序列,它可以是有穷的,也可以是无穷的。如果每一个 ρ_{i+1} 都由 ρ_i 经过转移函数 δ 一步得到,则称这个序列是一个计算。对于任意一个给定的输入符号串 $\omega\in\sum^*$,从初始格局 $\rho_0 = (q_0,\ \uparrow\omega,\ \uparrow B,\ \cdots,\ \uparrow B)$开始,图灵机 M 在 ω 上的计算有 3 种可能:

(1) 计算是一个有穷序列 $\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n$,其中 ρ_n 是一个可接受的停机格局,则称计算停机在接受状态;

(2) 计算是一个有穷序列 $\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n$,其中 ρ_n 是一个停机格局,但不是可接受格局,则称计算停机在拒绝状态;

(3) 计算是一个无穷序列 $\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n$,则称计算永不停机。

定义 12.6 设$(\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n)$是一个格局序列,它是图灵机 M 对输入符号串 ω 的一个计算。如果 ρ_n 是一个可接受的停机格局,则称这个计算是可接受的计算,t 称为这个计

算的长度。

定义 12.7　图灵机 M 对输入符号串 ω 进行计算的执行时间 $T_M(\omega)$ 定义为:

(1) 如果 M 对输入符号串 ω 有一个可接受的计算,则 $T_M(\omega)$ 是最短的可接受的计算长度;

(2) 如果 M 对输入符号串 ω 没有一个可接受的计算,则 $T_M(\omega)=\infty$。

定义 12.8　设 L 是一个语言, f 是从非负整数集到非负整数集的函数,如果存在一个图灵机 M,使得对于输入符号串 ω,若 $\omega\in L$,则 $T_M(\omega)\leq f(|\omega|)$;否则 $T_M(\omega)=\infty$,则称 L 是属于 $DTIME(f)$ 中的。

例 12.1　构造一个识别语言 $L=\{a^nb^n\mid n\geq 1\}$ 的图灵机。

构造这个图灵机的思想是使读写头往返移动,每往返移动一次,就成对地对输入符号串 ω 左端的一个 a 和右端的一个 b 匹配并做标记 x。如果恰好把输入符号串 ω 的所有符号都做了标记,说明左端的符号 a 和右端的符号 b 的个数相等,则 $\omega\in L$;否则,说明左端的符号 a 和右端的符号 b 的个数不相等,或者符号 a 和 b 交互出现,则 $\omega\notin L$。

假定 $n=2$,输入符号串 $\omega=aabb$,图灵机的工作过程如下:

(1) 开始时,初始格局是 $\rho_1=(q_1, B\uparrow aabbB)$,图灵机处于初始状态 q_1。在此状态下,有两种情况: ① 若读写头扫描到符号 a,则继续往右走;② 若读写头扫描到 b,则把 b 改为标记 x,使读写头往左走。因此,在开始时,图灵机执行第①种情况,直到扫描到符号 b,使图灵机的格局变为 $\rho=(q_1, Baa\uparrow xbB)$,并使读写头往左走,转移到状态 q_1。

(2) 在状态 q_1,有 3 种情况: ① 若读写头扫描到标记 x,则继续往左走;② 若读写头扫描到符号 a,则把 a 改为标记 x,并使读写头往右走,转移到状态 q_2;③ 若读写头扫描到空白符 B,则把状态改为 q_N,这是一个拒绝状态,说明符号 a 和 b 未成对标记(例如输入符号串 $\omega=bb$ 或 $\omega=abb$),所以,$\omega\notin L$。对于输入符号串 $\omega=aabb$,图灵机执行第②种情况,从而使图灵机的格局变为 $\rho_2=(q_1, Ba\uparrow xxbB)$,并使读写头往右走,转移到状态 q_1。

(3) 在状态 q_1,有 3 种情况: ① 若读写头扫描到标记 x,则继续往右走;② 若读写头扫描到符号 b,则把 b 改为标记 x,并使读写头往左走;③ 若读写头扫描到空白符 B,说明符号 b 已处理完毕,则把状态改为 q_3,并使读写头往左走,继续检查左端的符号 a 是否与符号 b 配对。对于输入符号串 $\omega=aabb$,图灵机首先执行第①种情况,读写头继续往右走,然后执行第②种情况,从而使图灵机的格局变为 $\rho_3=(q_1, Baxx\uparrow xB)$,并使读写头往左走,进入状态 q_1。

(4) 在状态 q_1,图灵机首先执行第①种情况,读写头继续往左走,然后执行第②种情况,使图灵机的格局变为 $\rho_4=(q_2, B\uparrow xxxxB)$,并使读写头往右走,转移到状态 q_2。

(5) 在状态 q_2,图灵机首先执行第①种情况,读写头继续往右走,然后执行第③种情况,使图灵机的格局变为 $\rho=(q_3, Bxxxx\uparrow B)$,并使读写头往左走,转移到状态 q_3。

(6) 在状态 q_3,有 3 种情况: ① 若读写头扫描到标记 x,则继续往左走;② 若读写头扫描到符号 a,说明符号 a 和 b 未成对标记(例如输入符号串 $\omega=aaabb$),所以,$\omega\notin L$;③ 若读写头扫描到空白符 B,说明符号 a 和 b 已成对标记,所以,$\omega\in L$,转移到状态 q_4,这是接受状态。对于输入符号串 $\omega=aabb$,图灵机首先执行第①种情况,读写头继续往左

走,然后执行第③种情况,转移到状态 q_4,图灵机处于接受状态而停机。

由此,构造如下图灵机 $M=(Q, I, T, q_0, q_f, \delta)$,使得

$$Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_N\}$$

$$I=\{a, b\}$$

$$T=\{a, b, x, B\}$$

$$q_f=\{q_4, q_N\}$$

转移函数 δ表如表 12 .1 所示。

表 12 .1 转移函数 δ表

	a	b	x	B
q_0	(q_0, a, R)	(q_1, x, L)		
q_1	(q_2, x, R)		(q_1, x, L)	(q_N, B, R)
q_2		(q_1, x, L)	(q_2, x, R)	(q_3, B, L)
q_3	(q_N, a, R)		(q_3, x, L)	(q_4, B, R)
q_4				
q_N				

在例 12 .1 中,如果输入符号串 ω是可接受的,对某个常数 $c>0$,读写头的移动次数将小于或等于 cn^2。所以,语言 $L=\{a^n b^n \mid n\geq 1\}$是属于 $DTIME(n^2)$的。

12.1.3 离线图灵机和空间复杂性

存放输入输出数据的存储空间是问题所固有的,存放程序的存储空间涉及到各种不同的编译系统,程序运行时需要的辅助存储空间则涉及到各种不同的计算机运行系统。因此,在考虑问题的空间复杂性时,把算法在执行过程中需要的工作空间分离出来加以分析,便于空间复杂性的分析,也更切合问题的实质。

为了把算法所需要的工作空间分离出来加以分析,需要另外一种形式的图灵机计算模型,它有两个工作带,一个用于存放输入符号串的只读输入带,另一个用于存放工作数据的可读写工作带。通常把这种图灵机称为离线图灵机(off - line Turing machine)。

定义 12 .9 离线图灵机是一个六元组,即 $M=(Q, I, T, q_0, q_f, \delta)$,其中:

(1) Q: 有限个状态的集合。

(2) I: 输入符号的集合,即字母表,它还包含两个特殊符号——# 和 $,分别表示左端标记符和右端标记符。

(3) T: 有限个带符号的集合,包括字母表和空白符 B,即 $T=I+\{B\}$。

(4) q_0: 初始状态。

(5) q_f: 终止(或接受)状态。

(6) δ: 转移函数,它是从 $Q\times T$ 的某一子集映射到 $Q\times\{L, R, S\}\times(T-\{B\})\times\{L, R, S\}$的函数。其中,$\{L, R, S\}$为读写头的动作,$L$ 表示左移一个单元,R 表示右移

一个单元，S 表示停止不动。

离线图灵机在只读输入带上将输入符号串用左、右端标记符括起来，离线图灵机的格局用一个三元组来定义：

$$\rho = (q,\ i,\ \omega\ \uparrow\ \omega)$$

其中，q 是当前状态，i 是输入带上的读写头所指向的单元号，$\omega\ \uparrow\ \omega$ 是工作带的内容，工作带的读写头指向符号串 ω 的第一个符号。

定义 12.10　离线图灵机 M 对输入符号串 ω 进行计算所使用的工作单元 $S_M(\omega)$ 定义为：

(1) 如果 M 对输入符号串 ω 有一个可接受的计算，则 $S_M(\omega)$ 是可接受的计算中至少使用的工作带单元数；

(2) 如果 M 对输入符号串 ω 没有一个可接受的计算，则 $S_M(\omega) = \infty$。

定义 12.11　设 L 是一个语言，f 是从非负整数集到非负整数集的函数，如果存在一个离线图灵机 M，使得对输入符号串 ω，若 $\omega \in L$，则 $S_M(\omega) \leq f(|\omega|)$；否则 $S_M(\omega) = \infty$，则称 L 是属于 $DSPACE(f)$ 中的。

例如，在例 12.1 中，用离线图灵机 M 来识别语言 $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$，对任意的输入符号串 $\omega \in L$，若 $|\omega| = n$，则为了识别 ω，需要 $\lceil \log_2(n/2) + 1 \rceil$ 个工作带单元。因此，语言 L 是属于 $DSPACE(\log_2 n)$ 中的。

12.2　P 类问题和 NP 类问题

Cook - Karp 论题将可计算问题类进一步划分成两类，一类是实际可计算的，称为易解问题，另一类是实际不可计算的，称为难解问题。易解问题在图灵机计算模型下，经过多项式时间计算可以得到正确的结果。但是，对于难解问题，人们至今没有找到多项式时间算法，在图灵机计算模型下，这类问题的计算复杂性至今未知。为了研究这类问题的计算复杂性，人们提出了另一个能力更强的计算模型——非确定性图灵机，在这个计算模型下，许多难解问题可以在多项式时间内求解。

12.2.1　非确定性图灵机

在图灵机计算模型中，移动函数 δ 是单值的，即对于 $Q \times T^k$ 中的每一个值，当它属于 δ 的定义域时，$Q \times (T \times \{L,\ R,\ S\})^k$ 中只有惟一的值与之对应，称这种图灵机为确定性图灵机(deterministic Turing machine, DTM)。

一个 k 带的非确定性图灵机(non deterministic Turing machine, NDTM)也是一个六元组 $(Q,\ I,\ T,\ q_0,\ q_f,\ \delta)$，与确定性图灵机不同的是非确定性图灵机允许移动函数 δ 具有不确定性，即对于 $Q \times T^k$ 中的每一个值 $(q,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$，当它属于 δ 的定义域时，$Q \times (T \times \{L,\ R,\ S\})^k$ 中有惟一的一个子集 $\delta(q,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$ 与之对应，可以在 $\delta(q,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$ 中随意选定一个值作为它的函数值。这个不确定性的函数 δ 仍称为转移函数。

设非确定性图灵机 $M = (Q,\ I,\ T,\ q_0,\ q_f,\ \delta)$ 处于状态 q，且第 i 个 $(1 \leq i \leq k)$ 读写头

扫描的单元符号为 a_i,若有$(q', (a_1', d_1), (a_2', d_2), \cdots, (a_k', d_k)) \in \delta(q, a_1, a_2, \cdots, a_k)$,则称瞬像$(q, a_1, a_2, \cdots, a_k)$经过一步计算到达$(q', (a_1', d_1), (a_2', d_2), \cdots, (a_k', d_k))$表示的瞬像$(q', a_1', a_2', \cdots, a_k')$。

如果对于任意一个输入长度为 n 的可接受输入符号串 ω,接受 ω的非确定性图灵机 M 的计算路径长至多为 $T(n)$,则称 M 的时间复杂性为 $T(n)$。如果有某个导致接受状态的动作序列,在这个序列中,每一条带上至多扫描了 $S(n)$个不同的单元,则称 M 的空间复杂性为 $S(n)$。

如前所述,图灵机和非确定性图灵机的区别就在于,确定性图灵机的每一步只有一种选择,而非确定性图灵机却可以有多种选择。由此可见,非确定性图灵机的计算能力比确定性图灵机的计算能力强得多。对于一台时间复杂性为 $O(T(n))$的非确定性图灵机,可以用一台时间复杂性为 $O(C^{T(n)})$的确定性图灵机模拟,其中 C 为一常数。也就是说,如果 $T(n)$是一个合理的时间复杂性函数,M 是一台时间复杂性为 $O(T(n))$的非确定性图灵机,可以找到一个常数 C和一台确定性图灵机 M',使得它们可接受的语言相同,且 M'的时间复杂性为 $O(C^{T(n)})$。

12.2.2 P类语言和 NP类语言

下面定义两个重要的语言类。

定义 12.12 P = {L| L 是一个能在多项式时间内被一台 DTM 所接受的语言}。

定义 12.13 NP = {L| L 是一个能在多项式时间内被一台 NDTM 所接受的语言}。

由于一台确定性图灵机可以看作是非确定性图灵机的特例,所以,可在多项式时间内被确定性图灵机接受的语言也可在多项式时间内被非确定性图灵机接受,故 $P \subseteq NP$。

虽然 P 和 NP 是借助图灵机来定义的,但也可以用其他计算模型定义这两个语言,直观上,可以认为 P 类语言是在多项式时间内的可识别的语言类。

NP 类语言是计算机应用要解决的主要问题领域。下面考察 NP 类语言的一个例子:无向图的团问题。该问题的输入是一个具有 n 个顶点的无向图 $G = (V, E)$和一个正整数 k,要求判定图 G 是否包含一个具有 k 个顶点的完全子图(称为团),即判定是否存在 $V' \subseteq V$,$|V'| = k$,且对于所有的 $u, v \in V'$,有$(u, v) \in E$。

若用邻接矩阵表示图 G,用二进制表示整数 k,则团问题的一个输入实例可以用长度为 $n^2 + \log k + 1$ 的二进制位串表示。因此,团问题可表示为语言:

CLIQUE = {$w \# v$ | $w, v \in \{0, 1\}^3$,以 w 为邻接矩阵的图 G 有一个 k 顶点的团,其中 v 是 k 的二进制表示}

接受该语言 CLIQUE 的非确定性算法如下:

用非确定性选择指令选出包含 k 个顶点的候选顶点子集 V',然后确定性地检查该子集是否是团问题的一个解。算法分 3 个阶段:

(1) 将输入串 $w \# v$ 分解,并计算出 $n = \sqrt{|w|}$,以及用 v 表示的整数 k。若输入不具有形式 $w \# v$ 或$|w|$不是一个平方数,就拒绝该输入。显然,该阶段可以在 $O(n^2)$时间完成。

(2) 非确定性地选择 V 的一个 k 元子集 V',用序列$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$表示该子集,$a_i = 1$

当且仅当 $i \in V'(1 \leq i \leq n)$。显然,该阶段可以在 $O(n)$ 时间完成。

(3) 确定性地检查子集 V' 的团性质。若 V' 是一个团则接受输入,否则拒绝输入。显然,该阶段可以在 $O(n^4)$ 时间完成。因此,整个算法的时间复杂性为 $O(n^4)$。

若图 $G=(V, E)$ 不包含一个 k 团,则在阶段(2)产生的任何 k 元子集不具有团性质,因此,算法没有导致接受状态的计算路径。反之,若图 G 含有一个 k 团,则在阶段(2)一定有一个计算路径产生子集 V',使得在算法的阶段(3)导致接受状态。所以,上面的非确定性算法在多项式时间内接受语言 CLIQUE,即 CLIQUE$\in NP$。

12.3　NP 完全问题

从 P 类语言和 NP 类语言的定义可知 $P \subseteq NP$。直观上看,P 类问题是确定性计算模型下的易解问题类,而 NP 类问题是非确定性计算模型下的易验证问题类。通常情况下,解一个问题要比验证一个问题困难得多,因此,大多数计算机科学家认为 NP 类中包含了不属于 P 类的语言,即 $P \neq NP$,但这个问题至今没有获得明确的解答。也许使大多数计算机科学家相信 $P \neq NP$ 的最令人信服的理由是存在一类 NP 完全问题,这类问题有一个特性:如果一个 NP 完全问题能用多项式时间的确定性算法进行求解,那么,NP 完全问题中的所有问题都可以用多项式时间的确定性算法进行求解。尽管已进行了多年研究,目前还没有一个 NP 完全问题找到多项式时间的确定性算法。

12.3.1　多项式时间变换

第 2 章已讨论过问题变换的概念,对于语言来说,变换的概念是一样的。

定义 12.14　设 $L_1 \subseteq \sum_1^3$,$L_2 \subseteq \sum_2^3$ 是两个语言,语言 L_1 能在多项式时间内变换为语言 L_2(记做 $L_1 \propto_p L_2$)当且仅当存在映射 f: $\sum_1^3 \to \sum_2^3$,且 f 满足:

(1) 有一个计算 f 的多项式时间的确定性图灵机;

(2) 对于所有 $x \in \sum_1^3$,$x \in L_1$ 当且仅当 $f(x) \in L_2$。

定义 12.15　语言 L 是 NP 完全的当且仅当

(1) $L \in NP$;

(2) 对于所有的 $L' \in NP$,有 $L' \propto_p L$。

所有的 NP 完全语言构成的语言类称为 NP 完全语言类,记为 NPC 。

如果有一个语言 L 满足上述性质(2),但不一定满足性质(1),则称该语言是 NP 难的。

定理 12.1　设 L 是 NP 完全的,则 $L \in P$ 当且仅当 $P = NP$。

证明:若 $P = NP$,则显然 $L \in P$;反之,设 $L \in P$,而 $L_1 \in NP$,则 L 可在多项式时间 p_1 内被确定性图灵机 M 所接受。又由 L 的 NP 完全性可知 $L_1 \propto_p L$,即存在映射 f,使得 $L = f(L_1)$。

设 N 是在多项式时间 p_2 内计算 f 的确定性图灵机,用图灵机 M 和 N 构造识别语言 L_1 的算法如下:

(1) 对于输入 x,用 N 在 $p_2(|x|)$时间内计算出 $f(x)$;

(2) 在时间$|f(x)|$内将读写头移动到 $f(x)$的第一个符号处;

(3) 用 M在时间 $p_1(f|x|)$内判定 $f(x)\in L$,若 $f(x)\in L$,则接受 x,否则拒绝 x。

上述算法显然可接受语言 L_1,其计算时间为: $p_2(|x|)+|f(x)|+p_1(f|x|)$。由于图灵机一次只能在一个单元中写入一个符号,故$|f(x)|\leq|x|+p_2(|x|)$。因此,存在多项式 r 使得 $p_2(|x|)+|f(x)|+p_1(f|x|)\leq r(x)$。因此,$L_1\in P$。由 L_1的任意性即知 $P=NP$。

定理 12.1 说明,如果任意一个 NP 完全问题可在多项式时间内求解,则所有的 NP 完全问题都可以在多项式时间内求解。反之,若 $P\neq NP$,则所有的 NP 完全问题都不可能在多项式时间内求解。

定理 12.2 设 L 是 NP 完全的,若 $L\propto_p L_1$,且 $L_1\in NP$,则 L_1 是 NP 完全的。

证明: 只需证明对任意的 $L'\in NP$,有 $L'\propto_p L_1$。由于 L 是 NP 完全的,故存在多项式时间变换 f 使得 $L=f(L')$。又由于 $L\propto_p L_1$,故存在多项式时间变换 g 使得 $L_1=g(L)$。因此,若取 f 和 g 的符合函数 $h=g(f)$,则 $L_1=h(L')$。易知 h 为一个多项式,因此 $L'\propto_p L_1$。由 L'的任意性即知 L_1 是 NP 完全的 。

定理 12.2 实际上是证明问题 L 的 NP 完全性的有力工具。一旦建立了问题 L 的 NP 完全性后,对于 $L_1\in NP$,只要证明问题 L 可在多项式时间内变换为问题 L_1,即 $L\propto_p L_1$,就可证明 L_1 也是 NP 完全的。

12.3.2 Cook定理

获得第一个 NP 完全问题称号的是布尔表达式的可满足问题,这就是著名的 Cook 定理。

Cook 定理 布尔表达式的可满足性问题 SAT 是 NP 完全的。

证明: SAT 的一个实例是 k 个布尔变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的 m 个布尔表达式 $A_1, A_2, \cdots, A_m$,若存在各布尔变量 $x_i(1\leq i\leq k)$的 0,1 赋值,使每个布尔表达式 $A_i(1\leq i\leq m)$都取值 1,则称布尔表达式 $A_1 A_2 \cdots A_m$ 是可满足的。

SAT$\in NP$ 是显然的。对于任意的布尔变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的 0,1 赋值,容易在多项式时间内验证相应的 $A_1 A_2 \cdots A_m$ 的取值是否为 1。因此,SAT$\in NP$。

现在只要证明对任意的 $L\in NP$ 有 $L\propto_p$SAT 即可。设 M 是一台能在多项式时间内识别 L 的非确定性图灵机,而 W 是 M 的一个输入。由 M 和 W 能在多项式时间内构造一个布尔表达式 W_0,使得 W_0 是可满足的,当且仅当 M 接受 W。

不难证明,属于 NP 的任何语言能由一台单带的非确定性图灵机在多项式时间内识别。因此,不妨假定 M 是一台单带图灵机。设 M 有 s 个状态 $q_0, q_1, \cdots, q_{s-1}$ 和 m 个带符号 $X_1, X_2, \cdots, X_m$, $P(n)$是 M 的计算复杂性。设 W 是 M 的一个长度为 n 的输入,若 M 接受 W,只需要不多于 $P(n)$次移动。也就是说,存在 M 的一个瞬像序列 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_r$,其中 Q_0 是初始瞬像,Q_r 是接受瞬像,$r\leq P(n)$。由于读写头每次最多移动一个单元,因此,任一接受 W 的瞬像序列不会使用多于 $P(n)$个单元。不失一般性,假定 M 到达接受状态后将继续运行下去,但以后的计算将不移动读写头,也不改变已进入的接受状态,直到 $P(n)$个动作为止。也就是说,用一些空动作填补计算路径,使它的长度为 $P(n)$,即恒

有 $r = P(n)$。

判断 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{P(n)}$ 为一条接受 W 的计算路径等价于判断下述 7 个事实:

(1) 在每一瞬像中,读写头只扫描一个单元;

(2) 在每一瞬像中,每个单元中的带符号是惟一确定的;

(3) 在每一瞬像中只有一个状态;

(4) 在该计算路径中,从一个瞬像到下一个瞬像每次最多有一个单元(被读写头扫描着的那个单元)的符号被修改;

(5) 相继的瞬像之间是根据移动函数 δ来改变状态、读写头位置和单元中符号的;

(6) Q_0 是 M 在输入 W 时的初始瞬像;

(7) 最后一个瞬像 $Q_{P(n)}$ 中的状态是可接受状态。

为了确切地表达上述 7 个事实,需要引进和使用以下几种命题变量:

(1) $C<i, j, t>=1$,当且仅当在时刻 t, M 的工作带的第 i 个单元中的带符号是 X_j,其中 $1 \leq i \leq P(n), 1 \leq j \leq m, 0 \leq t \leq P(n)$。

(2) $S<k, t>=1$,当且仅当在时刻 t, M 的状态为 q_k,其中 $1 \leq k \leq s, 0 \leq t \leq P(n)$。

(3) $H<i, t>=1$,当且仅当在时刻 t,读写头扫描第 i 个单元,其中 $1 \leq i \leq P(n), 0 \leq t \leq P(n)$。

这里总共最多有 $O(P^2(n))$ 个变量,它们可以由长不超过 $c\log_2 n$ 的二进制数表示,其中 c 是一个常数。为了叙述方便,假定每个变量仍表示为单个符号而不是 $c\log_2 n$ 个符号。这样做减少了一个因子 $c\log_2 n$,但不影响对问题的讨论。

现在可以用上面定义的这些变量,通过模拟瞬像序列 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{P(n)}$ 构造布尔表达式 W_0,在构造时还要用到一个谓词 $U(x_1, x_2, \cdots, x_r)$。当且仅当各变量 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 中只有一个变量取值 1 时,谓词 $U(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 才取值 1。因此,U 的布尔表达式可以写成如下形式:

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_r) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r) \prod_{i \neq j} (\overline{X}_i + \overline{X}_j)$$

上式的第一个因子断言至少有一个 x_i 取值 1,而后面的 $r(r-1)/2$ 个因子断言没有两个变量同时取值 1。

现在构造与判断(1)～(7)相应的布尔表达式 A, B, C, D, E, F, G。

(1) A 断言在 M 的每一时间单位中,读写头恰好扫描着一个单元。设 A_t 表示在时刻 t 时, M 的读写头恰好扫描着的单元,则

$$A = A_0 A_1 \cdots A_{P(n)}$$

其中 $A_t = U(H<1, t>, H<2, t>, \cdots, H<P(n), t>), 1 \leq t \leq P(n)$。

注意,由于用一个符号表示一个命题变量 $H<i, t>$,故 A 的长度为 $O(P^3(n))$,而且,可以用一台确定性图灵机在 $O(P^3(n))$ 内写出这个表达式。

(2) B 断言在每一个时间单位内,每一个单元中只有一个带符号。设 B_{it} 表示在时刻 t,第 i 个单元中含有的带符号,则

$$B = \prod_{0 \leq i, t \leq P(n)} B_{it}$$

其中, $B_{it} = U(C<i, 1, t>, C<i, 2, t>, \cdots, C<i, m, t>), 0 \leq i, t \leq P(n)$。

由于 m 是 M 的带符号集中带符号数,故 B_{it} 的长度与 n 无关。因而 B 的长度是

$O(P^2(n))$。

(3) C断言在每个时刻 t, M 只有一个确定的状态,则

$$C = \prod_{0 \le t \le P(n)} U(S<0,t>, S<1,t>, \cdots, S<s-1,t>)$$

因为 s是 M 的状态数,它是一个常数,所以, C的长度为 $O(P(n))$。

(4) D断言在时刻 t 最多只有一个单元的内容被修改,则

$$D = \prod_{i,j,t} (c<i,j,t> \equiv c<i,j,t+1> + H<i,t>)$$

这里, $x \equiv y$ 是 $xy + \overline{x}\overline{y}$的缩写,表示 x 当且仅当 y。

表达式($C<i,j,t> \equiv C<i,j,t+1> + H<i,t>$)断言下面二者之一:

① 在时刻 t 读写头扫描着第 i 个单元;

② 在时刻 $t+1$,第 i 个单元中的符号仍是时刻 t 的符号。

因为 A 和 B 断言在时刻 t 读写头扫描着单元 i(这里的符号可能被修改),或者单元 i 的符号不变。即使不使用缩写"≡",表达式 D 的长度也是 $O(P^2(n))$。

(5) E 断言根据 M 的移动函数 δ,可以从一个瞬像转到下一个瞬像。设 E_{ijkt} 表示下列 4 种情形之一:

① 在时刻 t 第 i 个单元中的符号不是 X_j;

② 在时刻 t 读写头没有扫描着单元 i;

③ 在时刻 t, M 的状态不是 q_k;

④ M 的下一瞬像是根据移动函数 δ 从上一瞬像得到的。

由此可得 $E = \prod_{i,j,k,t} E_{ijkt}$。其中

$$E_{ijkt} = \overline{C<i,j,t>} + \overline{H<i,t>} + \overline{S<k,t>} + \sum_l (C<i,j_l,t+1> S<k_l,t+1> H<i_l,t+1>)$$

其中 l 遍取当 M 处于状态 q_k 且扫描 X_j 时所有可能的移动,即 l 遍取使得 $(q_{kl}, X_{jl}, d_{il}) \in \delta(q_k, X_j)$ 的一切值。

因为 M 是非确定性图灵机, (q, X, d)的个数可能不止一个。但在任何情况下,都只能有有限个,且不超过某一常数。故 E_{ijkt} 的长度与 n 无关。所以, E 的长度是 $O(P^2(n))$。

(6) F 断言满足初始条件,即:

$$F = S<1,0> H<1,0> \prod_{1 \le i \le n} C<i,j,0> \prod_{n < i \le P(n)} C<i,1,0>$$

其中, $S<1,0>$ 断言在时刻 $t=0$, M 处于初始状态 q_0。 $H<1,0>$ 断言在时刻 $t=0$, M 的读写头扫描着最左边的单元。$\prod_{1 \le i \le n} C<i,j_i,0>$ 断言在时刻 $t=0$,带上最前面的 n 个单元中放有串 W 的 n 个符号,而 $\prod_{n \le i \le P(n)} C<i,1,0>$ 断言带上其余单元中开始时都是空白符,这里不妨假定 X_1 就是空白符。显然, F 的长度是 $O(P(n))$。

(7) G 断言 M 最终将进入接受状态。因为已对 M 做了修改,一旦 M 在某个时刻 t 进入接受状态($1 \le t \le P(n)$),它将始终停在这个状态,所以,有 $G = S<s-1, P(n)>$。不妨取 q_{s-1} 为 M 的接受状态。

最后,令 $W_0 = ABCDEFG$。它就是所要构造的布尔表达式。给定可接受的瞬像序列

Q_0，Q_1，…，Q_r，显然可找到变量 $C<i, j, t>$、$S<k, t>$ 和 $H<i, t>$ 的某个 0、1 赋值，使 W_0 取值为 1。反之，若有一个使 W_0 被满足的赋值，则可根据其变量赋值相应地找到可接受计算路径 Q_0，Q_1，…，Q_r。因此，W_0 是可满足的，当且仅当 M 接受 W。

因为 W_0 的每一个因子最多需要长度为 $O(P^3(n))$ 个符号，它一共有 7 个因子，从而 W_0 的符号长度是 $O(P^3(n))$。即使用长度为 $c\log_2 n$ 的符号串取代描述各个变量的简单符号，W_0 的长度也不过是 $O(P^3(n)\log_2 n)$。也就是说，存在一个常数 c，W_0 的长度不超过 $cnP^3(n)$，这仍是一个多项式。

上述构造中并没有对语言 L 加任何限制。也就是说，对属于 NP 的任何语言，都能在多项式时间内将其变换为布尔表达式的可满足问题 SAT。因此，SAT 是 NP 完全的。

1971 年，Cook 通过 Cook 定理证明了可满足问题(SAT 问题)是 NP 完全的，第 2 年，Karp 证明了十几个问题都是 NP 完全的，这使得人们的认识又进了一步。当时提出 NP 完全的概念是要在 NP 类问题中寻找难度最大的问题，但现在看来这种“最难”的问题不是一个而是一个问题集合。目前，NP 类问题中的 NP 完全问题已有几千个，这类问题属于计算机难解问题。对于这类问题，一方面它们已经被证明是计算机难解的，另一方面又是人们经常遇到的问题，所以，实际上是无法避免的。因此，对这类问题的计算机处理的研究具有更为重要的意义。

12.4　实验项目——NP 完全问题树

1. 实验题目

NP 完全问题类以 SAT 问题为树根构成了一棵 NP 完全问题树。目前这棵 NP 完全问题树上已有几千个结点(NP 完全问题)，并且还在继续生长。请尽可能列出 NP 完全问题树中的问题，并考察这些问题在现实世界中的应用。

2. 实验目的

(1) 了解 NP 完全问题时间复杂性的特点。
(2) 掌握 NP 完全问题的证明方法。
(3) 理解这样一个观点：NP 类问题是计算机应用要解决的主要问题领域。

3. 实验要求

(1) 上网查找 Church - Turing 论题和 Cook - Karp 论题以及这两个论题的背景资料；
(2) 尽可能列出 NP 完全问题树中的问题，并考察这些问题在现实世界中的应用；
(3) 证明其中一些问题的 NP 完全性。

阅读材料——算法优化策略

优化问题是人们在实际应用中经常会遇到的一类普遍问题，人们在日常生活工作中

对自己行为的指导实际上就是对利益的最大化过程。直观地,一个优化问题的目标就是求得最好的可能解,也就是最优解。解决一个现实的优化问题,实际上是由两个独立的步骤组成:其一创建问题的模型;其二应用该模型求得问题的最优解。

在创建问题的模型和对模型求解的过程中,存在着模型创建的技巧和问题求解的优化技巧。当处理某个问题时可能设计出若干个解决该问题的算法。如何评价这些算法,可以采用事先估计的方法,通常从两个方面来考虑,一个是时间复杂性,另一个是空间复杂性。下面通过最大字段和问题讨论算法优化的一些策略。

给定由 n 个整数(可能为负整数)组成的序列 a_1, a_2, …, a_n,求该序列形如 $\sum_{k=1}^{j} a_k$ 的子段和的最大值。当所有整数均为负整数时定义其最大子段和为 0。依此定义,所求的最优值为

$$\max\left\{0, \max_{1\le i\le j\le n}\sum_{k=i}^{j} a_k\right\}$$

例如当(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (- 2, 11, - 4, 13, - 5, - 2)时,最大子段和为 $\sum_{k=2}^{4} a_k = 20$。

用数组 a[n]存储给定的 n 个整数,则可以设计一个蛮力算法求最大子段和。

```
int MaxSum1(int a[ ], int n)
{
  int sum = 0;
  for (int i = 1; i < = n; i++ )
    for (int j = i; j < = n; j ++ )
    {
      int thissum = 0;
      for (int k = i; k < = j; k ++ )
        thissum = thissum + a[k];
      if (thissum > sum) {
        sum = thissum;
        besti = i;
        bestj = j;
      }
    }
  return sum;
}
```

该算法的时间复杂度是 $O(n^3)$。

进一步分析该问题,可得到 $\sum_{k=i}^{j} a_k = a_j + \sum_{k=i}^{j-1} a_k$,于是上述算法可以改进。

```
int MaxSum2(int a[ ], int n)
{
  int sum = 0;
```

```
    for (int i = 1; i < = n; i++ )
    {
       int thissum = 0;
       for (int j = i;j < = n;j ++ )
          thissum = thissum + a[j] ;
       if (thissum > sum) {
           sum = thissum;
           besti = i;
           bestj = j;
       }
    }
    return sum;
}
```

改进后算法的时间复杂度为 $O(n^2)$。

上述改进是在算法设计技巧上的一种改进。针对最大子段和这个具体问题，进一步分析时会发现还可以从算法设计的策略进一步改进。

如果将所给序列$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$分为长度相等的两个子序列$(a_1, \cdots, a_{\lfloor n/2 \rfloor})$和$(a_{\lfloor n/2 \rfloor+1}, \cdots, a_n)$，则会出现以下三种情况：

① $a_1, \cdots, a_n$的最大子段和 = $a_1, \cdots, a_{\lfloor n/2 \rfloor}$的最大子段和；

② $a_1, \cdots, a_n$的最大子段和 = $a_{\lfloor n/2 \rfloor+1}, \cdots, a_n$的最大子段和；

③ $a_1, \cdots, a_n$的最大子段和 = $\sum_{k=i}^{j} a_k$，且 $1 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor$，$\lfloor n/2 \rfloor + 1 \le j \le n$。

对于情况①和②可递归求解，情况③需要分别计算 $s1 = \max\left\{\sum_{k=i}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_k \mid 1 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor\right\}$，$s2 = \max\left\{\sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{j} a_k \mid \lfloor n/2 \rfloor + 1 \le j \le n\right\}$，则 $s1 + s2$ 为情况③的最大子段和。据此可设计出求最大子段和的分治算法(具体算法请参见 2.3 节)，该算法的时间复杂度为 $O(n\log_2 n)$。

对分治算法的进一步分析可以得到：若记 $b[j] = \max\limits_{1 \le i \le j}\left\{\sum_{k=i}^{j} a[k]\right\} (1 \le j \le n)$，则最大子段和为

$$\max_{1 \le i \le j \le n} \sum_{k=i}^{j} a[k] = \max_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le j} \sum_{k=i}^{j} a[k] = \max_{1 \le j \le n}\{b[j]\}$$

当 b[j - 1] > 0 时，b[j] = b[j - 1] + a[j]，否则 b[j] = a[j]。由此可得计算 b[j]的动态规划递归式：

$$b[j] = \max\{b[j-1] + a[j], a[j]\} \quad (1 < j \le n)$$

则可设计出求最大子段和的动态规划算法。

```
int MaxSum3(int a[ ], int n)
{
   int sum = 0; b = 0;
   for (int i = 1;i < = n;i ++ )
```

```
    {
      if (b > 0)  b = b + a[i];
      else b = a[i];
      if (b > sum)  sum = b;
    }
    return sum;
}
```

显然算法 MaxSum3 的时间复杂度为 $O(n)$。

通过上述案例可以看到,可以通过算法设计技巧进行算法的优化,也可以通过采用求解问题策略来进行优化。

习 题 12

1. 设问题 Π_1 是将一个表示有向图的邻接矩阵转化为二进制串,设问题 Π_2 是将一个表示有向图的邻接表转化成二进制串,证明这两个问题可以在多项式时间内相互归约。

2. 设计一个多项式时间算法求解 2 - 着色问题。

3. 设 I 是图着色问题的一个实例,s 是 I 的一个可能解,设计一个确定性算法来验证 s 是否是 I 的一个解。

4. 证明: 多项式问题变换是可传递的,即设 Π、Π'和 Π''是 3 个判定问题,若 $\Pi \propto_p \Pi'$ 并且 $\Pi' \propto_p \Pi''$,则 $\Pi \propto_p \Pi''$。

5. 构造一个识别语言 $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ 的图灵机,假定输入符号串 $\omega = aabab$,说明图灵机的工作过程。

6. 说明基于比较的排序算法的时间复杂性是 $DTIME(n\log_2 n)$。

7. 如果可以设计一个求解 SAT 问题的确定性多项式时间算法,则 $NP = P$。

8. 设有单带图灵机 $M = (Q, I, T, q_0, q_f, \delta)$,其中 $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_y, q_n\}$, $I = \{0, 1\}$, $T = \{0, 1, \#\}$, $q_f = \{q_y, q_n\}$,转移函数如表 12.2 所示,写出图灵机 M 对于输入 $\omega = 101000\#$ 的运行过程。

表 12.2 转移函数

	0	1	#
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, \#, L)$
q_1	$(q_2, \#, S)$	$(q_3, \#, S)$	$(q_y, \#, S)$
q_2	$(q_3, \#, S)$	$(q_n, \#, S)$	$(q_2, \#, L)$
q_3	$(q_y, \#, S)$	$(q_n, \#, S)$	$(q_y, \#, L)$

9. 证明: 图着色问题可多项式变换为 SAT 问题。

10. 证明: 哈密顿回路问题属于 NP 完全问题。

参考文献

REFERENCES

[1] D .E .Knuth . 计算机程序设计艺术 . 第一卷: 基本算法(第 3 版中译本) .北京: 国防工业出版社,2002

[2] Anany Levitim 著 .潘彦译 .算法设计与分析基础 .北京: 清华大学出版社,2004

[3] Gilles Brassard, Paul Bratley 著 .邱仲潘等译 .算法基础 .北京: 清华大学出版社,2005

[4] M .H .Alsuwaiyel .Algorithm Design Techniques and Analysis(影印本) .北京: 电子工业出版社,2003

[5] Zbigniew Michalewicz, David B Fogel 著 .曹宏庆等译 .如何求解问题——现代启发式方法 .北京: 中国水利水电出版社,2003

[6] 王晓东 .算法设计与分析 .北京: 清华大学出版社,2003

[7] 王红梅等 .数据结构(C ++ 版) .北京: 清华大学出版社,2005

[8] 刘璟 .计算机算法引论——设计与分析技术 .北京: 科学出版社,2003

[9] 卢开澄 .计算机算法导引——设计与分析 .北京: 清华大学出版社,1996

[10] 王红梅等 .递归函数时间复杂度的分析 .东北师范大学学报自然科学版,长春: 2001(4)