传感器数据处理I：

轮式里程计运动模型及标定

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人
电子科技大学硕士

课程内容

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

课程内容

轮式里程计模型

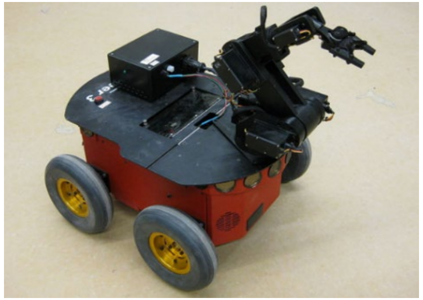
- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

两轮差速底盘的运动学模型

应用实例



优点

- 结构简单
- 便宜(2个电机)
- 模型简单

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算

已知

ω_R, ω_L： 两轮的角速度

v_R, v_L： 两轮的线速度

d： 轮子离底盘中心的距离

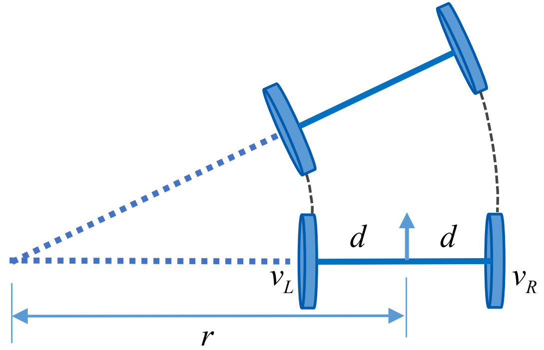
$b = 2d$：两轮之间的距离

未知

v： 底盘中心的线速度

w： 底盘中心的角速度

r： 底盘中心圆弧运动的半径



注：

直线运动可以看作圆周运动的特殊情况，即$r \to +\infty$。

直线运动时，$v_R = v_L$。

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算

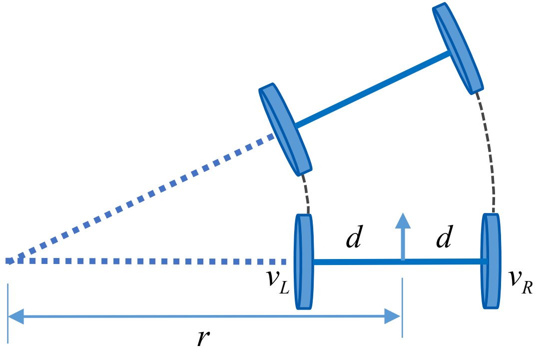
已知

ω_R, ω_L： 两轮的角速度

v_R, v_L： 两轮的线速度

d： 轮子离底盘中心的距离

$b = 2d$: 两轮之间的距离



$$\omega = \omega_l = \omega_r \Rightarrow \frac{v_L}{r-d} = \frac{v_R}{r+d}$$

$$\Rightarrow v_L(\mathrm{r}+\mathrm{d}) = v_R(r-d)$$

$$\Rightarrow (v_R - v_L)r = (v_R + v_L)d$$

$$\Rightarrow r = \frac{(v_R + v_L)d}{(v_R - v_L)}$$

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算

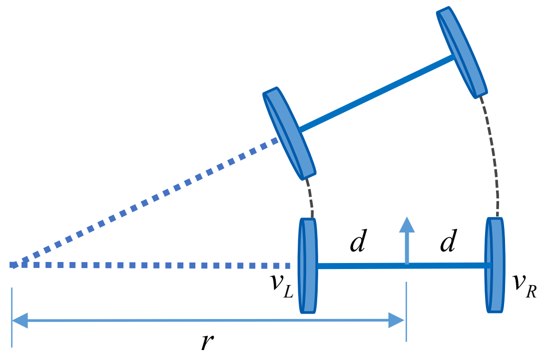
已知

ω_R, ω_L：　两轮的角速度

v_R, v_L：　两轮的线速度

d：　轮子离底盘中心的距离

$b = 2d$: 两轮之间的距离



$$\omega = \frac{v_R}{r+d}$$

$$r + d = \frac{(v_R + v_L)d}{(v_R - v_L)} + \frac{(v_R - v_L)d}{(v_R - v_L)} = \frac{2v_R d}{(v_R - v_L)}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v_R - v_L}{2d}$$

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算

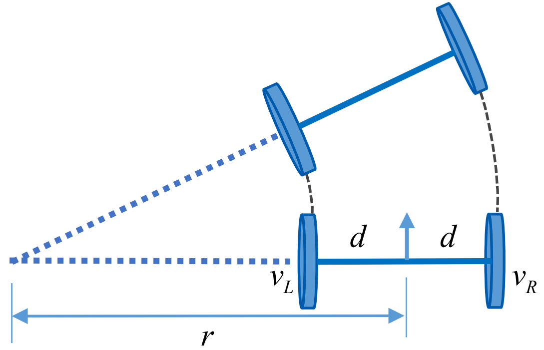
已知

ω_R, ω_L ： 两轮的角速度

v_R, v_L ： 两轮的线速度

d ： 轮子离底盘中心的距离

$b = 2d$: 两轮之间的距离



$$\omega = \frac{v_R - v_L}{2d}$$

$$v = \omega * r = \frac{v_R - v_L}{2d} \frac{(v_R + v_L)d}{v_R - v_L} = \frac{v_R + v_L}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{v_R - v_L}{2d} \\ v = \dfrac{v_R + v_L}{2} \end{array}\right\} \xRightarrow[v_L = w_L \cdot r_L]{v_R = w_R \cdot r_R} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r_L}{2} & \dfrac{r_R}{2} \\ -\dfrac{r_L}{b} & \dfrac{r_R}{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$

里程计模型

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

航迹推算

递推公式

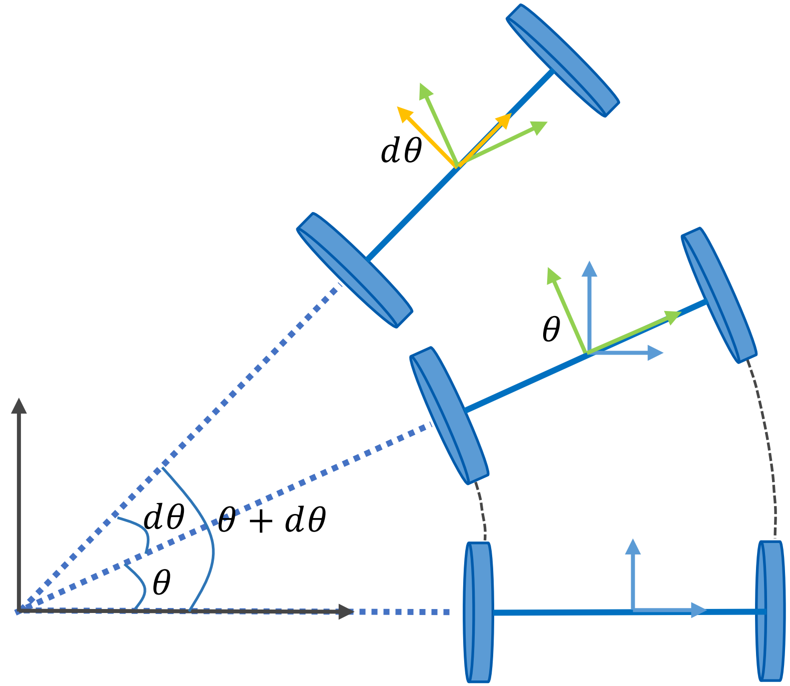
- $(x^{'}, y^{'}, \theta^{'})$ 为当前时刻位姿--世界坐标系
- (x, y, θ) 为上一时刻位姿--世界坐标系
- $(dx, dy, d\theta)$ 为运动增量--机器人坐标系

增量从机器人坐标系转换到世界坐标系：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{bmatrix}$$

加入噪声：

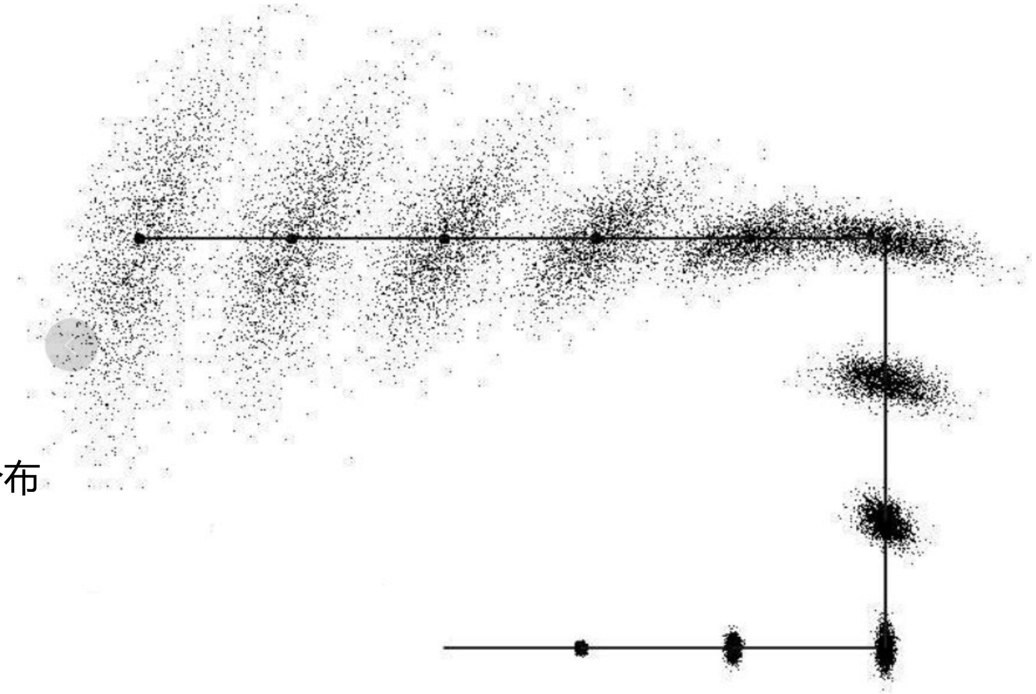
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx + \varepsilon_x \\ dy + \varepsilon_y \\ d\theta + \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$



航迹推算

里程计数据递推

- 里程计积分的累计误差无法消除
- 误差随着积分增大
- 时间趋于无穷时，位姿分布趋于均匀分布



课程内容

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

线性方程组

$$Ax = b$$

其中，A为$m \times n$的矩阵，x为$n \times 1$的向量；
m表示约束个数，n表示自变量个数。

- 当$m = n$时，适定方程组，方程组有唯一解
- 当$m < n$时，欠定方程组，方程组有无穷多解
- 当$m > n$时，超定方程组，方程组有通常无解

最小二乘解

- 绝大多数情况为m>n，超定方程组
- 多数约束自相矛盾，无解！
- 无解但是有最小二乘解
- 通解: $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$

线性最小二乘

最小二乘的求解—线性空间的角度

S 表示A的列向量张成的线性空间

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \cdot x_3$$

- 无解：表示$Ax = b$对于任意的x均不成立，即b不在S中。
- 最小二乘解：线性空间S中，离b最近的向量。

向量b在线性空间S中的投影

线性最小二乘

最小二乘的求解—线性空间的角度

设：Ax^*为向量b在空间S中的投影，显然$(b-Ax^*)$垂直于空间S。

则：$(b-Ax^*)$跟矩阵A的每一个列向量都垂直。

令$A=[a_1,a_2,\cdots a_n]$，a_i表示矩阵A的第i个列向量，

可得：$a_i^T(b-Ax^*)=0$

$$\Rightarrow A^T(b-Ax^*)=0$$

$$\Rightarrow A^Tb=A^T\mathrm{A}x^*$$

$$\Rightarrow \boxed{x^*=(A^TA)^{-1}A^Tb}$$

课程内容

轮式里程计模型

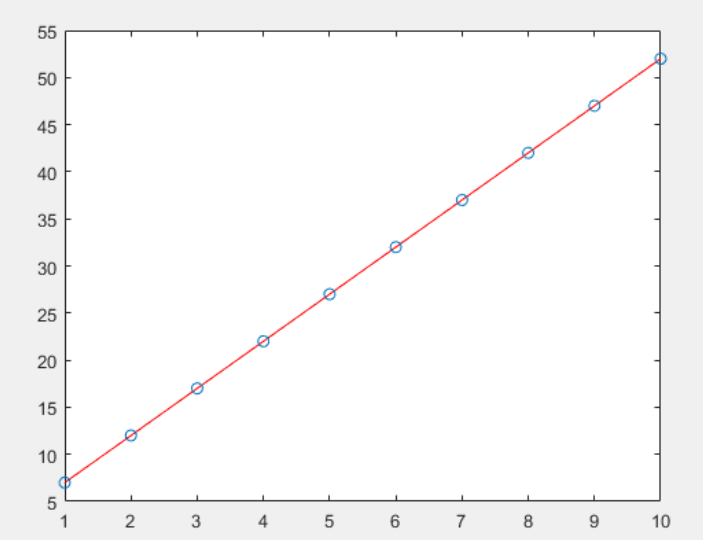
- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

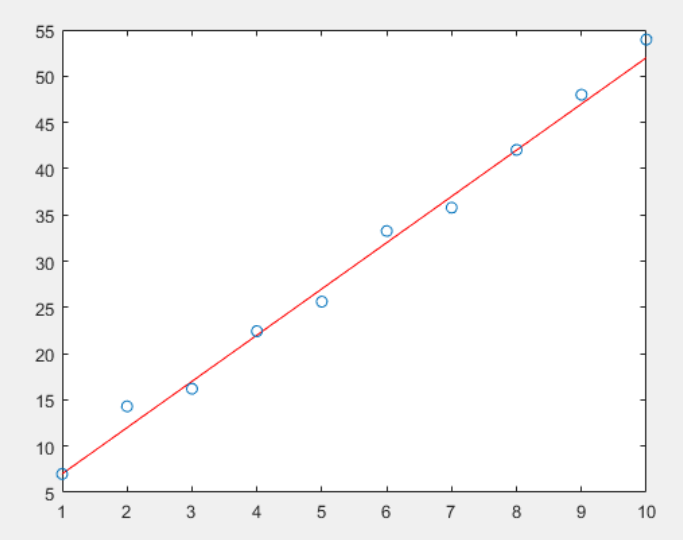
- 线性最小二乘的基本原理
- **线性最小二乘的直线拟合**
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

直线拟合



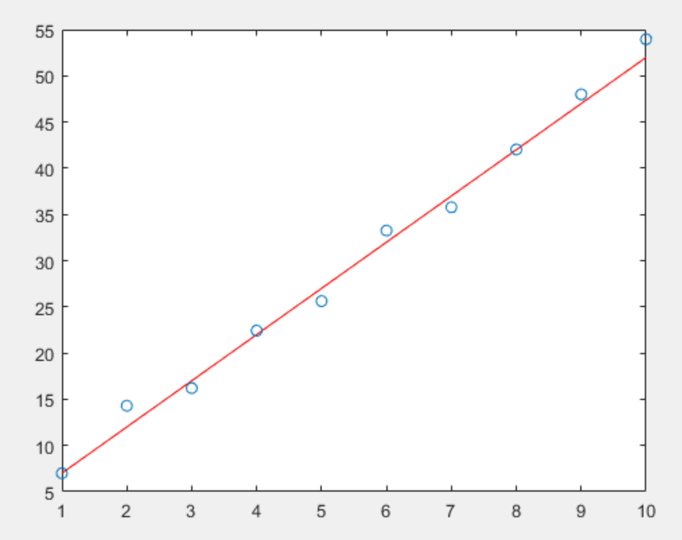
理想情况



混入采样噪声

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



混入采样噪声

- 采样数据：

  x=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

  y = (6.9918 , 14.2987, 16.2019, 22.4263, 25.6191, 33.2563, 35.7755, 42.0298, 47.9954, 53.9545)

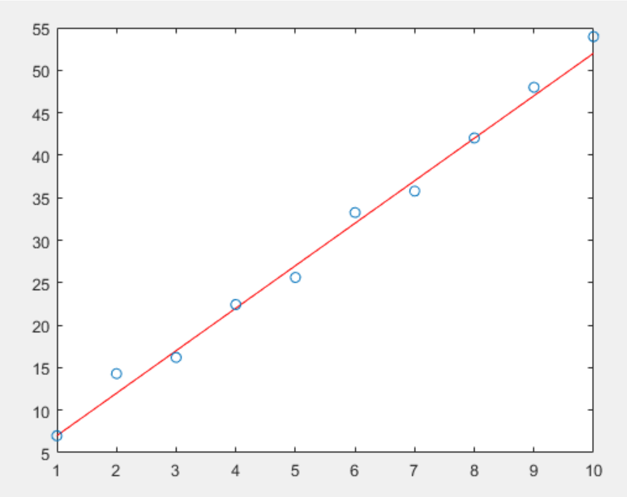
- 假设直线方程：$y = ax + b$，带入数据可得

$$
\begin{aligned}
ax_1 + b &= y_1 \\
ax_2 + b &= y_2 \\
&\vdots \\
ax_n + b &= y_n
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

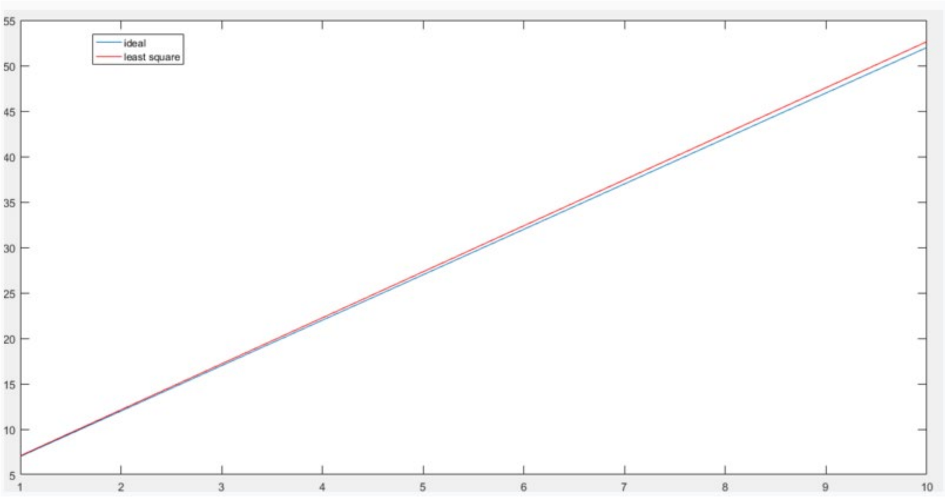
$$Ax = b$$

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



混入采样噪声



拟合对比

课程内容

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- **线性最小二乘在里程计标定中的应用**

里程计标定

直接线性方法

- 通用性强
- 实现简单
- 精度不高

基于模型的方法

- 精度高
- 实现复杂
- 特异性高

根据不同的传感器模型，比如激光、相机、各种轮速计，实际过程中要根据各自的物理模型来进行标定。以两轮差分底盘为例，需要计算其运动模型。

在已知传感器物理模型时，采用基于模型的方法（白盒标定）；

在不知道传感器物理模型时，可尝试直接线性方法（黑盒标定）。

里程计标定

直接线性方法

u_i^*：激光雷达的scan-match数据作为真值

u_i：里程计测量得到的数据

假设成线性关系$u_i^* = X * u_i$

其中：

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

对于第 i 组数据，可得：

$$u_{ix} * x_{11} + u_{iy} * x_{12} + u_{i\theta} * x_{13} = u_{ix}^*$$
$$u_{ix} * x_{21} + u_{iy} * x_{22} + u_{i\theta} * x_{23} = u_{iy}^*$$
$$u_{ix} * x_{31} + u_{iy} * x_{32} + u_{i\theta} * x_{33} = u_{i\theta}^*$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc} A_i & \vec{X} & & b_i \\ \begin{bmatrix} u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{33} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \\ u_{i\theta}^* \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

里程计标定

基于模型的方法

- 运动学模型

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{b} & \frac{r_R}{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt$$

$$\mathrm{x}(t) = \int v(t)\cos(\theta(t))dt$$

$$\mathrm{y}(t) = \int v(t)\sin(\theta(t))dt$$

标定的Δt时间内，假设匀速运动，则

$$\omega(t) = \omega = J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R$$

$$v(t) = v = J_{11}\omega_L + J_{12}\omega_R$$

因为 $J_{11} = -\frac{b}{2} \cdot J_{21} \quad J_{12} = \frac{b}{2} \cdot J_{22}$

所以 $v(t) = v = \frac{b}{2}(-J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R)$

因此，已知两个轮子的角速度ω_L和ω_R，需要求解两个轮子的半径 r_L和 r_R，以及两轮之间的距离b。

里程计标定

基于模型的方法

- 假设激光雷达位于车体的正中心
- 激光雷达的匹配值作为观测值
- 里程计的积分值作为预测值
- 通过最小化预测值和观测值的差，即可得到里程计的参数
- r_x, r_y, r_θ： 里程计的积分值
- s_x, s_y, s_θ： 激光雷达的匹配值

a

角度积分表达式

$$r_\theta(t) = \int \omega(t)\mathrm{dt} = \int J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R dt$$

$$r_\theta(t) = \begin{pmatrix}\omega_L \cdot \Delta T & \omega_R \cdot \Delta T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_{21} \\ J_{22}\end{pmatrix}$$

由n组数据，得到线性方程组：

$$\begin{bmatrix}\omega_{L0} \cdot \Delta T_0 & \omega_{R0} \cdot \Delta T_0 \\ \omega_{L1} \cdot \Delta T_1 & \omega_{R1} \cdot \Delta T_1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{Ln} \cdot \Delta T_\mathrm{n} & \omega_{Rn} \cdot \Delta T_\mathrm{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{21} \\ J_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{\theta 0} \\ S_{\theta 1} \\ \vdots \\ S_{\theta n}\end{bmatrix}$$

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

基于模型的方法

利用线性最小二乘，求得：$\begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$ （公式1）

在已知J_{21}和J_{22}的情况下，里程计的位置积分和参数b呈线性关系，推导过程如下：

$$r_x(t) = \int v(t)\cos(\theta(t))dt = \frac{b}{2}(-J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R)\int \cos(\theta(t))dt = c_x b$$

$$r_y(t) = \int v(t)\sin(\theta(t))dt = \frac{b}{2}(-J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R)\int \sin(\theta(t))dt = c_y b$$

由n组数据，得到线性方程组：$\begin{bmatrix} c_{x0} \\ c_{y0} \\ \vdots \\ c_{xn} \\ c_{yn} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} s_{x0} \\ s_{y0} \\ \vdots \\ s_{xn} \\ s_{yn} \end{bmatrix} \Rightarrow$ 求得 b （公式2）

基于模型的方法

已知参数b，J_{21} 和J_{22}，因此：

$$J_{21} = -\frac{r_L}{b} \qquad J_{22} = \frac{r_R}{b} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} r_L &= -J_{21} \cdot b \\ r_R &= J_{22} \cdot b \end{aligned} \qquad \text{（公式3）}$$

至此，两轮直径和轮间距都已知，求解完毕。

里程计标定

基于模型的方法总结

收集n段数据，每段数据包含两个轮子的角速度ω_L和ω_R，该段数据持续的时间Δt以及激光雷达的匹配值s_x, s_y, s_θ

按照公式1，计算中间变量J_{21}和J_{22}；

按照公式2，计算轮间距b；

按照公式3，计算两个轮子的半径。

参考资料

[1] Simultaneous calibration of odometry and sensor parameters for mobile Robots

作业

详细见说明文档

结语

感谢聆听！

Thanks for Listing