Дифференциальные уравнения. Лекция 1

Дубинская Вера Юльевна

14 сентября 2019 г.

Рассмотрим функцию $y(x)$, определённую вместе с n производными на промежутке I. Также рассмотрим функцию $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$, определённую и непрерывную на некотором $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$.

Определение. Уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

называется *дифференциальным уравнением n-го порядка.*

Определение. Функция $\varphi(x)$, определённая на I вместе со своими n производными, называется *решением уравнения* (1), если:

1. φ и все её n производных непрерывны на I.
2. $\forall x \in I \ ((x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega)$.
3. $\forall x \in I \ (F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0)$

Определение. $y' = f(x, y)$ — *уравнение, разрешённое относительно производной.*

Определение. $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ — *уравнение в дифференциалах.* Подмножество его решений:

$$\left[\begin{aligned} y'_x &= -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \\ x'_y &= -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \end{aligned}\right.$$

Уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = f(x)\, g(y)$$

($f(x)$ непрерывна на I_1, $g(y)$ непрерывна на I_2)

Рассмотрим уравнение $g(y) = 0$. Если $y_k \in I_2$ — решение этого уравнения, то $y \equiv y_k$ — решение дифференциального уравнения.

Если же $y(x)$ нигде не принимает значение y_k, то $g(y) \neq 0$, а потому мы можем переписать уравнение:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Проинтегрируем обе части по x:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{y'\,dx}{g(y)} &= \int f(x)\,dx \\
\int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)\,dx \\
H(y) &= F(x) + C \\
y &= H^{-1}(F(x) + C)
\end{aligned}
$$

Поскольку $g(y)$ знакопостоянна, то $H(y)$ строго монотонна, а следовательно, обратима.

Линейные уравнения

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

($a(x)$, $b(x)$ непрерывны на I)

Данные уравнения получили такое название, потому что $\mathcal{L}(y) = y' + a(x)\,y$ является линейной функцией.

Если $b \equiv 0$, то уравнение называется *однородным.* Любая линейная комбинация его решений является решением; соответственно, разность решений произвольного линейного уравнения является решением соответствующего однородного уравнения.

Покажем, что однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (далее подразумевается, что $y \neq 0$):

$$
\begin{aligned}
y' + a(x)\,y &= 0 \\
\frac{y'}{y} &= -a(x) \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int a(x)\,dx \\
\ln|y| &= -\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt + C \\
|y| &= e^C \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt}
\end{aligned}
$$

Объединяя все решения, получаем *общее решение*:

$$y = C\,\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)$$

Будем искать частное решение исходного (линейного) уравнения в виде

$$y = C(x)\,\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)$$

Подставим его в левую часть уравнения:

$$
\begin{aligned}
y' + a(x)\,y &= \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)\left(C'(x) - C(x)\,a(x) + C(x)\,a(x)\right) \\
&= C'(x)\,\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \\
C'(x) &= b(x)\,\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \\
C(x) &= \int\limits_{x_1}^{x} b(t)\,\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)\,dt + C \\
y &= \underbrace{\left(\int\limits_{x_1}^{x} b(t)\,\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)\,dt\right)\cdot\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)}_{\text{частного решение линейного}} + \underbrace{C\,\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)}_{\text{общее решение однородного}}
\end{aligned}
$$

Пример. $y' + y = 4x$
Решение однородного: $y = Ce^{-x}$
После подстановки: $C'(x)\,e^{-x} = 4x$

$$
\begin{gathered}
C(x) = 4(x-1)e^{x} + C \\
y = 4(x-1) + Ce^{-x}
\end{gathered}
$$

Задача Коши для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной:

$$
\begin{cases}
y' = f(x,y) \\
y(x_0) = y_0
\end{cases}
$$

Дифференциальные уравнения. Лекция 2

Дубинская Вера Юльевна

21 сентября 2019 г.

Задача Коши

Рассмотрим уравнение $y' = \sqrt[3]{y^2}$. Её решения состоят из ветвей парабол $y = (x-a)^3$ и отрезков прямой $y = 0$. Заметим, что все решения, проходящие через точки, не лежащие на прямой $y = 0$, попарно совпадают в некоторых окрестностях, а для точек на вышеуказанной прямой это неверно.

Определение. Линейное пространство L называется *нормированным*, если каждому $x \in L$ поставлено в соответствие неотрицательное действительно число, называемое *нормой* x (обозначение: $\|x\|$) и обладающее следующими свойствами:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_L$
2. $\forall x \in L\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|)$
3. $\forall x, y \in L\ (\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ в L называется *сходящейся к $x \in L$ по норме*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ в L называется *фундаментальной*, если $\|x_n - x_k\| \to 0$ при $n, k \to \infty$.

Определение. Нормы 1 и 2 называются *эквивалентными*, если

$$\exists C_1, C_2 > 0\ \forall x \in L\ (C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1)$$

Пример. Пространство функций, непрерывных на $[a, b]$, является линейным. Введём две нормы:

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L_1} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$$

Отметим, что равномерная сходимость является сходимостью по первой норме, причём предел также непрерывен, а значит, принадлежит пространству.

Рассмотрим следующую последовательность на $[-1,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le -1/n \\ nx, & -1/n < x < 1/n \\ 1, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

Поточечный предел данной последовательности равен $\operatorname{sgn}(x)$. Заметим, что эта последовательность не сходится к $\operatorname{sgn}(x)$ по первой норме (т. е. не сходится равномерно), но сходится по второй норме.

Определение. Нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность является сходящейся, называется *полным.*

Определение. Полное линейное нормированное пространство называется *ба́наховым* (в честь Сте́фана Ба́наха).

Три эквивалентные между собой нормы в $\mathbb{R}^n$:

- Сферическая: $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Кубическая: $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$
- Цилиндрическая: $\|x\| = \max \left\{ |x_j|, \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - x_j^2} \right\}$ при фиксированном j

Определения. Открытый шар: $\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in L \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$. Замкнутый шар: $\overline{\mathcal{U}}_\varepsilon(a) = \{x \in L \mid \|x - a\| \le \varepsilon\}$

Теорема Банаха о неподвижной точке. Пусть $\overline{\mathcal{U}}_r(x_0) \subset L$, и $\Phi : \overline{\mathcal{U}}_r(x_0) \to L$ является сжимающим отображением с коэффициентом $q \in (0,1)$. Если $\|\Phi(x_0) - x_0\| \le (1-q)r$ (т. е. $\Phi(\overline{\mathcal{U}}_r(x_0)) \subseteq \overline{\mathcal{U}}_r(x_0)$), то $\exists! x^* \in \overline{\mathcal{U}}_r(x_0)$ $(\Phi(x^*) = x^*)$.

`[Все необходимые определения и доказательство имеются в курсе мат.анализа.]`

Определение. Пусть $n \ge 2$, и $f_1, \ldots, f_n$ — непрерывные функции, $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, причём область её определения $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{(x,\vec{y})}$. Система

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1}$$

называется *нормальной системой дифференциальных уравнений.*

Определение. Вектор-функция $\vec{y}(x) = \vec{\varphi}(x)$ называется *решением системы* (1) на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, если:

1. $\vec{\varphi}(x) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ (т. е. она непрерывно дифференцируема, и её значения — n-мерные векторы)

2. $\forall x \in I\ ((x, \vec{\varphi}(x)) \in G)$

3. $\forall x \in I\ (\vec{\varphi}'(x) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x)))$

График функции $\vec{\varphi}(x)$ в $\mathbb{R}^{n+1}_{(x,\vec{y})}$ называется *интегральной кривой* данного решения.

Определение. *Задача Коши* — сочетание нормальной системы и начального условия:

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \tag{2}$$

Если предположить, что решение задачи Коши существует, то интегрирование уравнения приведёт к следующему результату:

$$\vec{y}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\, d\tau + y_0 \tag{3}$$

Определение. *Решение интегрального уравнения* (3) на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$ — вектор-функция $\vec{\varphi}(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. $\vec{\varphi}(x) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$

2. $\forall x \in I\ ((x, \vec{\varphi}(x)) \in G)$

3. $\forall x \in I\ (\vec{\varphi}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\, d\tau)$

Лемма об эквивалентности. Вектор-функция $\vec{\varphi}(x)$ является решением задачи Коши (2) на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения (3) на том же промежутке.

Доказательство.

- ($\Rightarrow$) Пусть $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ — решение (2), тогда, интегрируя тождество $\vec{\varphi}'(x) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$, получаем (3).
- ($\Leftarrow$) Пусть $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ — решение (3), тогда, дифференцируя тождество $\vec{\varphi}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\, d\tau$, получаем (2).

Дифференциальные уравнения. Лекция 3

Дубинская Вера Юльевна

28 сентября 2019 г.

Пусть $\vec{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{f}(x, \vec{y}) = (f^1, \ldots, f^n)^T$. Выпишем ещё раз задачу Коши:

$$\begin{cases} \vec{y}' = f(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Определение. Вектор-функция $f(x, \vec{y})$, определённая в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, называется *удовлетворяющей условию Ли́пшица относительно $\vec{y}$ равномерно по x*, если

$$\exists L > 0\ \forall (x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in G\ (|f(x, \vec{y}_1) - f(x, \vec{y}_2)| \leq L|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|)$$

(Здесь $|\vec{y}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |y^i|$ — кубическая норма[1].)

Лемма. Пусть выполняются следующие условия:

1. G — выпуклая область в $\mathbb{R}^{n+1}$
2. $\vec{f}(x, \vec{y}) \in \mathcal{C}(G)$, и $\forall i, j \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in \mathcal{C}(G)\right)$
3. $\exists K > 0\ \forall i, j\ \forall (x, \vec{y}) \in G\ \left(\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \leq K\right)$

Тогда $f(x, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица относительно $\vec{y}$ равномерно по x.

Доказательство. Зафиксируем i от 1 до n и рассмотрим $|f^i(x, \vec{y}_1) - f^i(x, \vec{y}_2)|$:

$$\begin{aligned} |f^i(x, \vec{y}_1) - f^i(x, \vec{y}_2)| &= \left| f^i(x, \vec{y}_2 + \theta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2))\Big|_0^1 \right| \\ &= \left| \int\limits_0^1 \left(\frac{d}{d\theta} f^i(x, \vec{y}_2 + \theta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2))\right) d\theta \right| \\ &= \left| \int\limits_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i(x, \vec{y}_2 + \theta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2))}{\partial y_j} (y_1^j - y_2^j)\right) d\theta \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial f^i}{\partial y_j}\right| |y_1^j - y_2^j|\, d\theta \\ &\leq nK|\vec{y}_1 - \vec{y}_2| \end{aligned}$$

[1]…потому что нам так удобно. :)

Полагая $L = nK$, получаем искомое.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (для системы уравнений n-го порядка в нормальной форме). Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в G вместе со всеми производными по y^j, и $(x_0, \vec{y}_0) \in G$, тогда задача Коши *локально разрешима* единственным образом:

1. Существует замкнутая δ-окрестность точки x_0, в которой решение задачи Коши существует.
2. Это решение единственно в следующем смысле:

   Если $\vec{y}_1 \equiv \varphi(x)$ — решение в δ_1-окрестности, а $\vec{y}_2 \equiv \psi(x)$ — решение в δ_2-окрестности, то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ в $\min\{\delta_1, \delta_2\}$-окрестности.

Доказательство. Введём следующее множество:

$$\overline{H}_{\delta,r}(x_0) = \{(x, \vec{y}) \in G \mid x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \wedge |\vec{y} - \vec{y}_0| \le r\}$$

Заметим, что в силу компактности $\overline{H}_{\delta,r}(x_0)$ (что следует из ограниченности и замкнутости) применима теорема Вейерштрасса:

$$\exists M > 0\ \forall (x, \vec{y}) \in \overline{H}_{\delta,r}(x_0)\ \left(|\vec{f}(x, \vec{y})| \le M \wedge \forall j\ \left(\left|\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, \vec{y})\right| \le M\right)\right)$$

Отсюда следует, что $\vec{f}$ на $\overline{H}_{\delta,r}(x_0)$ удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\, d\tau$$

Обозначим правую часть как $\Phi(\vec{y})$, тогда уравнение перепишется в виде $\vec{y} = \Phi(\vec{y})$ — следовательно, решение является неподвижной точкой Φ.

Рассмотрим замкнутый шар

$$\overline{\mathcal{D}}_{\delta,r}(\vec{y}_0) = \{\vec{y} \in \mathcal{C}[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mid \|\vec{y} - \vec{y}_0\|_{\mathcal{C}} \le r\}$$

(Здесь $\|\vec{y}\|_{\mathcal{C}} = \max\limits_{1 \le i \le n} \sup\limits_{|x - x_0| \le \delta} |y^i(x)|$)

Докажем, что существуют такие δ и r, что оператор Φ:

1. является сжимающим
2. отображает $\mathcal{D}_{\delta,r}(\vec{y}_0)$ в себя

Рассмотрим $\|\Phi(\vec{y}) - \Phi(\vec{z})\|$:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\vec{y}) - \Phi(\vec{z})\| &= \max_{1 \le i \le n} \sup_{|x - x_0| \le \delta} \left| \int\limits_{x_0}^{x} (f^i(\tau, \vec{y}(\tau)) - f^i(\tau, \vec{z}(\tau)))\, d\tau \right| \\
&\le \sup_{|x - x_0| \le \delta} \int\limits_{x_0}^{x} L\, |\vec{y}(\tau) - \vec{z}(\tau)|\, d\tau \\
&\le \delta L\, \|\vec{y} - \vec{z}\|_{\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $\|\Phi(\vec{y_0}) - \vec{y_0}\|$:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\vec{y_0}) - \vec{y_0}\| &= \max_{1\le i\le n} \sup_{|x-x_0|\le\delta} \left| \int_{x_0}^{x} f^i(\tau, \vec{y_0})\, d\tau \right| \\
&\le \int_{x_0}^{x} \left(\max_{1\le i\le n} \sup_{|x-x_0|\le\delta} |f^i(\tau, \vec{y_0})| \right) d\tau \\
&= \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(\tau, \vec{y_0})\|_{\mathcal{C}}\, d\tau \\
&\le \delta M = r(1-q)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили два условия на параметры:

$$\begin{cases} q = \delta L \\ r(1-q) = \delta M \end{cases}$$

Преобразуем их:

$$\begin{aligned}
r &= \delta L r + \delta M \\
\delta_r &= \frac{r}{M + Lr}
\end{aligned}$$

Следовательно, нам достаточно выбрать такое r, чтобы $\overline{H}_{\delta_r,r} \subseteq G$. В таком случае отображение $\vec{y} \mapsto \Phi(\vec{y})$ является сжимающим, причём шар $\overline{\mathcal{D}}_{\delta_r,r}$ отображается в себя. Отсюда следует, что существует единственная неподвижная точка отображения $\Leftrightarrow$ единственное решение интегрального уравнения $\Leftrightarrow$ единственное решение задачи Коши. ■

Дифференциальные уравнения. Лекция 4

Дубинская Вера Юльевна

5 октября 2019 г.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (для уравнения n-го порядка, разрешённого относительно старшей производной):

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Пусть функция $f(x, y, p_1, \dots, p_{n-1})$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным y, p_1, $\dots$, p_{n-1} в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, и $(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in G$, тогда существует замкнутая δ-окрестность точки x_0, в которой существует единственное (в ранее указанном смысле) решение задачи Коши.

Доказательство. Пусть $\vec{z} = \left(y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)^T$ — вектор-функция. Запишем:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\dots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = f(x, \vec{z}) \end{aligned}$$

Введём обозначение: $\vec{g}(x, \vec{z}) = (z_2, z_3, \dots, z_n, f(x, \vec{z}))^T$. Перепишем задачу Коши:

$$\begin{cases} (\vec{z})' = \vec{g}(x, \vec{z}) \\ \vec{z}(x_0) = \vec{z}_0 \end{cases}$$

Согласно предыдущей теореме, существует единственное решение полученной задачи Коши в некоторой замкнутой δ-окрестности точки x_0; эта же окрестность подходит и для исходной задачи Коши.

Интегральная кривая для данной задачи определяется как множество точек вида

$$\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

Задача Коши для уравнений первого порядка, не разрешённых относительно производной

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = p_0 \end{cases}$$

Теорема. Пусть функция $F(x, y, p)$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по y и p в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^3$, и в точке $(x_0, y_0, p_0) \in G$ справедливо утверждение $\partial F/\partial p\,(x_0, y_0, p_0) \neq 0$, тогда существует замкнутая δ-окрестность точки x_0, в которой существует единственное решение задачи Коши.

Доказательство. Так как $\partial F/\partial p \neq 0$, то по теореме о неявной функции существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$, определённая в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), для которой выполнены равенства $f(x_0, y_0) = p_0$ и $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Запишем новую задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Её решение существует и единственно, причём оно является решением исходной задачи.

Определения. Точка области G называется *особой точкой уравнения*, если в произвольной её окрестности решение задачи Коши не существует или не единственно.

Если для особой точки существует более одного решения, то она называется *точкой локальной неединственности.*

Из доказанной теоремы следует, что $\partial F/\partial p = 0$ во всех особых точках. Множество точек, в которых $F = 0$ и $\partial F/\partial p = 0$, называется *$p$-дискриминантным.* (Это множество может не быть решением какой-либо задачи Коши.)

Решение называется *особым*, если каждая точка его интегральной кривой является точкой локальной неединственности.

Дифференциальные уравнения. Лекция 5

Дубинская Вера Юльевна

12 октября 2019 г.

Продолжение решений задачи Коши

Теорема о продолжении до границы ограниченной области. Пусть $\vec{f}(x, \vec{y})$ определена и удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши на замыкании ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда любое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

можно продолжить в обе стороны до выхода на $\Gamma = \partial G$, т. е. можно доопределить $\vec{y}(x)$ на $[a, b] \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, причём $(a, \vec{y}(a)), (b, \vec{y}(b)) \in \Gamma$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы о существовании и единственности (а также цилиндрической нормой):

$$H_r = \{(x, \vec{y}) \in G \mid |x - x_0| \leq \delta_r \wedge |\vec{y} - \vec{y}_0| \leq r\}$$
$$\delta_r = \frac{r}{M + Lr}$$
$$\rho((x_1, \vec{y}_1), (x_2, \vec{y}_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|\}$$

Введём также *расстояние от точки до множества:* $\rho(p, M) = \inf\limits_{q \in M} \rho(p, q)$.

Наконец, определим δ_0 и r_0 как значения δ_r и r для точки $p_0 = (x_0, \vec{y}_0)$, для которых выполнено $\max\{\delta_0, r_0\} = \rho(p_0, \Gamma)$. (Это возможно, поскольку $\delta(r)$ и $r(\delta)$ являются строго возрастающими непрерывными функциями.)

Рассмотрим $x_1 = x_0 + \delta_0$ и $\vec{y}_1 = \vec{y}(x_1)$; если $p_1 = (x_1, \vec{y}_1) \notin \Gamma$, то p_1 — внутренняя точка, а значит, в ней существует единственное решение задачи Коши, причём оно совпадает с решением для p_0 на $[x_0, x_0 + \delta_0] \cap [x_1 - \delta_1, x_1]$ (δ_1 и r_1, опять же, берутся из теоремы и условия на расстояние до границы); аналогично определяем p_2, и т. д.

Полученная последовательность $\{p_k\}$ монотонно возрастает по x и ограничена точками из Γ; следовательно, существует $b = \lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k$. Объединение решений задач Коши является функцией, определённой на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [x_0, x_k] = [x_0, b)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\alpha, \beta \in [b - \varepsilon, b)$; заметим, что

$$|\vec{y}(\beta) - \vec{y}(\alpha)| = \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\, d\tau \right| \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))|\, d\tau < M\varepsilon$$

Значит, по критерию Коши существует $y^* = \lim\limits_{x\to b-0} \vec{y}(x)$. Пусть $p^* = (b, y^*)$; поскольку $0 \le \rho(p_k, \Gamma) \le \max\{\delta_k, r_k\} \to 0$ (т. к. $\delta_k \to 0$, и $r(\delta)$ строго возрастает), то $\rho(p^*, \Gamma) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(p_k, \Gamma) = 0$, т. е. $p^* \in \Gamma$.

Чтобы показать, что $\vec{y}'(b) = \vec{f}(b, \vec{y}(b))$, запишем теорему Лагранжа для отрезка $[b-\varepsilon, b]$ и устремим ε к нулю.

Следствие. Пусть G — замкнутая неограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$, для которой выполнено $\forall c, d \in \mathbb{R}$ ($c < d \Rightarrow G_{cd}$ ограниченно), где $G_{cd} = \{(x, \vec{y}) \in G \mid x \in [c, d]\}$, и $\vec{f}(x, \vec{y})$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши в G, тогда решение в любой точке из G можно продолжить до границы G или сколь угодно большого (по модулю) значения x.

Доказательство. Заметим, что для произвольного отрезка $[c, d] \ni x_0$ решение задачи Коши на этом отрезке существует по предыдущей теореме. Если интегральная кривая решения не "дошла" до границы G, то увеличиваем d и повторяем процесс.

Если условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши выполняются всюду на $\mathbb{R}^2$, то отсюда не следует продолжимость решения:

$$\begin{aligned} y' &= y^2 + 1 \\ \frac{dy}{y^2+1} &= dx \\ \operatorname{arctg} y &= x \\ y &= \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

Лемма Гронуо́лла (усиленная). Пусть на промежутке I функция $\varphi(x)$ неотрицательна, непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x) \le A + B\left|\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(\tau)\, d\tau\right| + C|x - x_0|$$

...где $A, C \ge 0$, $B > 0$, $x, x_0 \in I$ и $x \ne x_0$, тогда

$$\forall x \in I \ \left(\varphi(x) \le Ae^{B|x-x_0|} + \frac{C}{B}\left(e^{B|x-x_0|} - 1\right)\right)$$

Доказательство. Пусть $x > x_0$ (второй случай технически аналогичен). Введём $\Phi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(\tau)\, d\tau$, тогда

$$0 \le \Phi'(x) = \varphi(x) \le A + B\Phi(x) + C(x - x_0)$$

Следовательно,

$$\Phi'(x)\,e^{-B(x-x_0)} \le Ae^{-B(x-x_0)} + B\Phi(x)\,e^{-B(x-x_0)} + C(x-x_0)\,e^{-B(x-x_0)}$$
$$\Phi'(x)\,e^{-B(x-x_0)} - B\Phi(x)\,e^{-B(x-x_0)} \le Ae^{-B(x-x_0)} + C(x-x_0)\,e^{-B(x-x_0)}$$
$$\Big(\Phi(x)\,e^{-B(x-x_0)}\Big)' \le Ae^{-B(x-x_0)} + C(x-x_0)\,e^{-B(x-x_0)}$$
$$\int\limits_{x_0}^{x} \Big(\Phi(\tau)\,e^{-B(\tau-x_0)}\Big)'\,d\tau \le \int\limits_{x_0}^{x} \Big(Ae^{-B(\tau-x_0)} + C(\tau-x_0)\,e^{-B(\tau-x_0)}\Big)\,d\tau$$
$$\Phi(x)\,e^{-B(x-x_0)} \le \frac{A}{B} - \frac{A}{B}\,e^{-B(x-x_0)} - \frac{C}{B}(x-x_0)\,e^{-B(x-x_0)} + \frac{C}{B^2} - \frac{C}{B^2}e^{-B(x-x_0)}$$
$$\Phi(x) \le \frac{A}{B}\,e^{B(x-x_0)} - \frac{A}{B} - \frac{C}{B}(x-x_0) + \frac{C}{B^2}\,e^{B(x-x_0)} - \frac{C}{B^2}$$
$$\varphi(x) \le A + B\Phi(x) + C(x-x_0)$$
$$\varphi(x) \le A\,e^{B(x-x_0)} + \frac{C}{B}\Big(e^{B(x-x_0)} - 1\Big)$$

Дифференциальные уравнения. Лекция 6

Дубинская Вера Юльевна

19 октября 2019 г.

Теорема о продолжении на весь заданный интервал. Пусть вектор-функция $\vec{f}(x,\vec{y})$ удовлетворяет условию теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши на области G, $\alpha < x < \beta$, и $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (α и β могут быть бесконечными); кроме того, $|\vec{f}(x,\vec{y})| \le b(x)\,|\vec{y}| + c(x)$, где $b(x)$ и $c(x)$ — непрерывные на (α,β) функции. В таком случае каждое решение системы $\vec{y}'(x) = \vec{f}(x,\vec{y})$, проходящее в области G, можно продолжить на весь интервал (α,β).

Доказательство. Пусть решение определено на $[\alpha_1,\beta_1]$. Определим $B = \max\limits_{[\alpha_1,\beta_1]} b(x)$ и $C = \max\limits_{[\alpha_1,\beta_1]} c(x)$, тогда $|\vec{y}'(x)| = |\vec{f}(x,\vec{y})| \le B|\vec{y}| + C$, и

$$\begin{aligned} |\vec{y}(x)| &\le |\vec{y}_0| + \left|\int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\tau,\vec{y})\,d\tau\right| \\ &\le |\vec{y}_0| + \int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau,\vec{y})|\,d\tau \\ &\le |\vec{y}_0| + B\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{y}|\,d\tau + c(x-x_0) \end{aligned}$$

По лемме Гронуолла получаем

$$|\vec{y}(x)| \le |\vec{y}_0|\,e^{B(x-x_0)} + \frac{C}{B}(e^{B(x-x_0)} - 1)$$

Пусть $G_1 = \{(x,\vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \alpha_1 \le x \le \beta_1 \wedge |\vec{y}| \le M+1\}$, где $M = \max\limits_{[\alpha_1,\beta_1]}(|\vec{y}_0|\,e^{B(x-x_0)} + \frac{C}{B}(e^{B(x-x_0)} - 1))$. По ранее доказанной теореме продолжим решение до границы G_1.

Повторяя данный процесс, получим последовательность $\{[\alpha_i,\beta_i]\}$, для которой верно $\bigcup[\alpha_i,\beta_i] = (\alpha,\beta)$. Искомое решение также получается объединением.

Системы линейных дифференциальных уравнений

$$\vec{y}' = A(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x) \tag{1}$$

($A(x) = (a_{ij}(x))$ — матрица-функция)

(все функции могут быть комплекснозначными)

Определим $L(\vec{y}) = \vec{y}' - A(x)\,\vec{y}$ (заметим, что $\vec{f} = L \circ \vec{y}$). Если $L(\vec{y}) = \vec{0}$, то уравнение называется *однородным*:

$$\vec{y}' = A(x)\,\vec{y} \tag{2}$$

Комплекснозначное уравнение можно свести к паре действительнозначных уравнений, поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только второй вид уравнений.

Теорема. Если функции $A(x)$ и $\vec{f}(x)$ определены на $[\alpha, \beta]$, то решение следующей задачи Коши существует, единственно и продолжимо на (α, β):

$$\begin{cases} \vec{y}' = A(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Лемма 1 (принцип суперпозиции). Если $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ — решения уравнения (2), то $\vec{y} = \lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2$ также является решением (2) для произвольных $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Лемма 2. Если $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ — решения (1), то $\vec{y} = \vec{y}_1 = \vec{y}_2$ — решение (2).

Определение. Вектор-функции $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_k(x)$, определённые на промежутке I, называются *линейно зависимыми*, если

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \ \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i(x) \equiv \vec{0} \right)$$

Определение. Пусть $\vec{y}_1(\vec{x}), \ldots, \vec{y}_n(\vec{x})$ — вектор-функции с n компонентами. Функция

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \ldots & y_n^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вро́нского (вронскиа́ном)* для заданных вектор-функций.

Лемма 3. Если вронскиан системы $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке, то все эти функции линейно независимы.
Доказательство. Пусть эти функции линейно зависимы, тогда векторы $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ линейно зависимы в каждой точке x_0, а значит, определитель матрицы, составленной из векторов (то есть, значение вронскиана в точке x_0), равен нулю.
Следствие. Если вектор-функции линейно зависимы на I, то их вронскиан тождественно равен нулю на I.

Дифференциальные уравнения. Лекция 7

Дубинская Вера Юльевна

26 октября 2019 г.

Определение. *Фундаментальная система решений (ФСР)* для СЛДУ — набор n линейно независимых решений системы (здесь n — кол-во уравнений).

Лемма. ФСР существует.

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$, и $\vec{y}_{01}, \ldots, \vec{y}_{0n}$ — числовые линейно независимые векторы. Составим систему задач Коши:

$$\begin{cases} \vec{y}' = A(x)\,\vec{y} \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Пусть $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ — решения этих задач, тогда их вронскиан равен определителю матрицы, составленной из $\vec{y}_{0i}$, следовательно, он не равен нулю, и ФСР существует.

Лемма 2. Любое решение СЛДУ единственным образом представимо в виде линейной комбинации векторов ФСР.

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$, $\vec{y}$ — решение системы, и $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ — ФСР, тогда $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ линейно независимы, и $\vec{y}(x_0)$ единственным образом выражается через них. В силу единственности решения задачи Коши коэффициенты линейной комбинации окажутся одними и теми же для всех точек отрезка.

Определение. *Фундаментальная матрица СЛДУ* — квадратная матрица порядка n, столбцы которой являются элементами некоторой ФСР этой системы.

Лемма 3. Если $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ — фундаментальные матрицы одной системы, то существует такая невырожденная числовая матрица C, что $Y_1 = Y_2 C$.

Пусть $A(x) = B(x) \times C(x)$ — матрица-функция, тогда $A'(x) = B'(x) \times C(x) + B(x) \times C'(x)$.

Метод вариации постоянной для СЛДУ

1. Найти ФСР однородной системы (и фундаментальную матрицу Y).

2. Продифференцировать вектор-функцию $\vec{y}(x) = Y(x)\,\vec{C}(x)$, где $\vec{C}(x)$ — вектор-функция:

$$\vec{y}' = Y'\vec{C} + Y\vec{C}' = AY\vec{C} + f$$

3. Выразить и проинтегрировать $\vec{C}'$, после чего выразить частное решение неоднородной

системы:

$$Y\vec{C}' = f$$
$$\vec{C}' = Y^{-1} f$$
$$\vec{C} = \int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt + \vec{C}_0$$
$$\vec{y}(x) = Y(x)\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt + Y(x)\,\vec{C}_0$$

Линейные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

($a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $y, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Существование и единственность решения следуют из таковых для системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f - a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \dots - a_1 y_n \end{cases}$$

(здесь $y_1 = y$)

Для уравнения (1) можно определить вронскиан, равный вронскиану написанной выше системы.

Однородное уравнение:

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2}$$

Найдём решение системы (2) в виде $y = e^{\lambda x}$:

$$M(\lambda) = a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$
$$L(e^{\lambda x}) = M(\lambda)\,e^{\lambda x} = 0$$

Поскольку экспонента никогда не обнуляется (даже в поле комплексных чисел), то единственный возможный вариант — это $M(\lambda) = 0$. Уравнение $M(\lambda) = 0$ называется *характеристическим*, как и многочлен в его левой части.

Утверждение. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — однократные корни $M(\lambda)$, тогда решения $y_i = e^{\lambda_i x}$ линейно независимы.

Доказательство. Запишем вронскиан:

$$W(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Получившийся *определитель Вандермóнда* не равен нулю, поскольку все λ_i различны.

Если все $a_i \in \mathbb{R}$, то все комплексные корни $M(\lambda)$ разбиваются на пары сопряжённых между собой комплексных чисел. Мнимая и действительная части решений, соответствующих таким корням, сами являются решениями:

$$\begin{gathered}
\lambda = \alpha + i\beta,\ \bar{\lambda} = \alpha - i\beta \\
y_1 = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\
\bar{y}_1 = e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\
z_1 = \frac{y_1 + \bar{y}_1}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\
z_2 = \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{gathered}$$

Замена y_1 и $\bar{y}_1$ на z_1 и z_2 является корректным переходом в другой базис (проверяется построением матрицы перехода и подсчётом определителя), а потому линейная оболочка не изменится.

Дифференциальные уравнения. Лекция 8

Дубинская Вера Юльевна

2 ноября 2019 г.

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

Утверждение. Пусть λ — корень $M(\lambda)$ кратности ℓ, тогда функции $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $\dots$, $x^{\ell-1}e^{\lambda x}$ являются решениями (1).

Лемма. Пусть $y = x^s e^{\lambda x}$, где λ — корень характеристического уравнения кратности ℓ, тогда

$$L(x^s e^{\lambda x}) = \begin{cases} 0, & s < \ell \\ (b_0 x^{s-\ell} + b_1 x^{s-\ell-1} + \dots + b_{s-\ell}) e^{\lambda x}, & s \geq \ell \end{cases}$$

Доказательство. Пусть z и λ — комплексные числа; сначала докажем, что

$$\left(\left(e^{\lambda z} \right)^{(s)}_{\lambda} \right)^{(p)}_{z} = \left(\left(e^{\lambda z} \right)^{(p)}_{z} \right)^{(s)}_{\lambda},$$

или же

$$\left(z^s e^{\lambda z} \right)^{(p)}_{z} = \left(\lambda^p e^{\lambda z} \right)^{(s)}_{\lambda}$$

Рассмотрим некую формальную операцию $\cdot'_x$ $(\cdot'_\lambda)$, для которой верны следующие соотношения:

$$\begin{gathered} (x^s)'_x = s x^{s-1} \\ (a)'_x = 0 \\ (e^{\lambda x})_x = \lambda e^{\lambda x} \\ (\alpha f_1 + \beta f_2)'_x = \alpha f_{1x} + \beta f_{2x} \\ (f_1 \cdot f_2)'_x = f'_{1x} \cdot f_2 + f_1 \cdot f'_{2x} \end{gathered}$$

Приступим к доказательству:

$$\begin{aligned} \left(z^s e^{\lambda z} \right)^{(p)}_{z} &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k (z^s)^{(k)}_z (e^{\lambda z})^{(p-k)}_z \\ &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, s(s-1)\dots(s-(k-1)) \, z^{s-k} \lambda^{p-k} e^{\lambda z} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(p,s)} C_p^k C_s^k k! \, z^{s-k} \lambda^{p-k} e^{\lambda z} \end{aligned}$$

Заметим, что $\left(\lambda^p e^{\lambda z}\right)^{(s)}_\lambda$ раскроется в такое же выражение ввиду "структурной симметрии".

Найдём $L(x^s e^{\lambda x})$:

$$\begin{aligned}
L(x^s e^{\lambda x}) &= a_0 \left(x^s e^{\lambda x}\right)^{(n)}_x + a_1 \left(x^s e^{\lambda x}\right)^{(n-1)}_x + \dots + a_n x^s e^{\lambda x} \\
&= a_0 \left(\left(e^{\lambda x}\right)^{(s)}_\lambda\right)^{(n)}_x + a_1 \left(\left(e^{\lambda x}\right)^{(s)}_\lambda\right)^{(n-1)}_x + \dots + a_n \left(e^{\lambda x}\right)^{(s)}_\lambda \\
&= a_0 \left(\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)}_x\right)^{(s)}_\lambda + a_1 \left(\left(e^{\lambda x}\right)^{(n-1)}_x\right)^{(s)}_\lambda + \dots + a_n \left(e^{\lambda x}\right)^{(s)}_\lambda \\
&= \Big(a_0 \left(e^{\lambda x}\right)^{(n)}_x + a_1 \left(e^{\lambda x}\right)^{(n-1)}_x + \dots + a_n e^{\lambda x}\Big)^{(s)}_\lambda \\
&= \left(e^{\lambda x} M(\lambda)\right)^{(s)}_\lambda = \sum_{k=0}^{s} C^k_s (M(\lambda))^{(k)}_\lambda \left(e^{\lambda x}\right)^{(s-k)}_\lambda \\
&= \sum_{k=\ell}^{s} C^k_s (M(\lambda))^{(k)}_\lambda \left(e^{\lambda x}\right)^{(s-k)}_\lambda
\end{aligned}$$

Следовательно, $b_i = C^k_s (M(\lambda))^{(k)}_\lambda$, и лемма доказана. ■

Исходное утверждение выводится из леммы применением того факта, что корень кратности s многочлена $P(x)$ является корнем P, P', …, $P^{(s-1)}$.

Определение. *Квазимногочлен* — произведение многочлена на экспоненту с линейной функцией в показателе.

Замечание. $(P_m(x)\, e^{\lambda x})'_x = Q_m(x)\, e^{\lambda x}$.

Доказательство. $((p_0 x^m + \dots)\, e^{\lambda x})' = p_0 x^m \cdot \lambda e^{\lambda x} + \dots$, где все оставшиеся слагаемые имеют степень не более m (равенство достигается при $\lambda = 0$).

Теорема. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — корни $M(\lambda)$ кратностей $\ell_1, \dots, \ell_k$ (заметим, что $\sum \ell_i = n$), тогда набор функций вида $x^s e^{\lambda_i x}$, где $s = 0, \dots, \ell_i - 1$ и $i = 1, \dots, k$, является ФСР для уравнения (1).

Доказательство. Указанный набор состоит из n функций, поэтому осталось показать их линейную независимость.

Предположим, что это не так, т. е. существует нетривиальная всюду нулевая линейная комбинация с коэффициентами $c_1, \dots, c_n$. Сгруппировав слагаемые с одинаковой экспонентой, получим нулевую сумму k квазимногочленов, хотя бы один которых отличен от тождественного нуля. Без потери общности предположим, что последний квазимногочлен $(P^k(x)\, e^{\lambda_k x})$ отличен от нуля.

Домножим линейную комбинацию на $e^{-\lambda_1 x}$ и продифференцируем результат ℓ_1 раз — получим сумму $(k-1)$ квазимногочленов, последний из которых по-прежнему отличен от тождественного нуля. Повторив данную процедуру $(k-2)$ раз, получим некоторый квазимногочлен $R^k(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_{k-1})x}$, который должен быть тождественно равен нулю — противоречие.

О вещественнозначной ФСР

Для уравнения с вещественнозначными коэффициентами комплексные корни $M(\lambda)$ распадаются на сопряжённые пары одинаковой кратности. Соответствующие им решения легко заменяются на вещественные функции (по аналогии с однократными действительными корнями $M(\lambda)$):

$$
\begin{gathered}
y_1 = x^s e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\
y_2 = x^s e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\
x^s e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{y_1 + y_2}{2} \\
x^s e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{y_1 - y_2}{2i}
\end{gathered}
$$

Дифференциальные уравнения. Лекция 9

Дубинская Вера Юльевна

9 ноября 2019 г.

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

$(a_0 \neq 0)$

Если $y_i(x)$ — ФСР для однородного уравнения $L(y) = 0$, то частное решение общего уравнения представимо как

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x)$$

Вывод. Коэффициенты $c_i(x)$ являются решениями системы

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x)/a_0 \end{Vmatrix}$$

Теорема. Если $f(x) = P_m(x)\, e^{\gamma x}$ — квазимногочлен степени m, то уравнение (1) имеет частное решение вида $y(x) = x^{\ell}\, Q_m(x)\, e^{\gamma x}$, где ℓ — кратность γ как корня многочлена $M(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $y_1(x) = q_0 x^{m+\ell} e^{\gamma x}$, тогда $L(y_1) = (q_0 \cdot b_0 x^m + R_{<m}(x))\, e^{\gamma x}$, где $b_0 \neq 0$.

Если $m = 0$, то $R(x) \equiv 0$, и $q_0 b_0 x^m = p_0 x^m$, отсюда $q_0 = p_0/b_0$.

Если же $m \geq 1$, то рассмотрим $y(x) = y_1(x) + z(x) = \frac{p_0}{b_0} e^{\gamma x} + z(x)$:

$$L(y) = L(y_1) + L(z) = (p_0 x^m + R_{<M}(x))\, e^{\gamma x} + L(z) = (p_0 x^m + \underbrace{p_1 x^{m-1} + \dots}_{\widetilde{P}_{<m}(x)})\, e^{\gamma x}$$

$$L(z) = (\widetilde{P}_{<m}(x) - R(x))\, e^{\gamma x}$$

…и мы свели задачу к меньшей степени.

При наличии в правой части уравнения тригонометрических функций необходимо заменить их на комплекснозначную экспоненту.

Системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A_{n\times n} = (a_{ij}), \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t) \tag{1}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{$1'$}$$

Построение ФСР

Теорема. Если $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$ — базис из собственных векторов матрицы A, то $\vec{x}^i = e^{\lambda_i t}\vec{h}_i$ — ФСР для уравнения $(1')$.

Доказательство. Заметим, что $A(e^{\lambda t}\vec{h}) = e^{\lambda t}(A\vec{h}) = e^{\lambda t}\lambda\vec{h} = (e^{\lambda t}\vec{h})'$, значит, собственный вектор является решением $(1')$. Их линейная независимость следует из того, что их вронскиан в точке $t = 0$ равен определителю из координатных столбцов этого базиса, а значит, не равен нулю.

Замечание. Если λ — комплексное собственное значение действительнозначной матрицы A, то $\bar{\lambda}$, и соответствующие им собственные векторы покомпонентно сопряжены. Это позволяет нам перейти в базис, содержащий только действительнозначные функции (экспонента, синус, косинус).

Жорда́нова нормальная форма

Определения. Пусть $\vec{h}_1$ — собственный вектор матрицы A для собственного значения λ:

$$(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}$$

Последовательность $\{\vec{h}_i\}_{i=1}^k$, определяемая соотношением $(A - \lambda E)\,\vec{h}_{i+1} = \vec{h}_i$, причём уравнение $(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{h}_k$ не имеет решений, называется *жорда́новой цепочкой*, а её элементы (кроме $\vec{h}_1$) — *присоединёнными (к $\vec{h}_1$) векторами.*

Матрица следующего вида называется *жордановой клеткой*:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

Блочно-диагональная матрица, на диагонали которая стоят жордановы клетки, называется *жордановой.*

Пусть S — (числовая) матрица перехода, переводящая A в жорданову матрицу J. Соответствующий базис называется *жордановым*, а произведение SJS^{-1} — *жордановой нормальной формой.*

Лемма. Пусть $S(t)$ — матрица-функция размера $n \times n$, $\vec{x}(t)$ — n-мерная вектор-функция, тогда

$$\frac{d}{dt}(S(t)\,\vec{x}(t)) = \frac{dS}{dt}\vec{x} + S\dot{\vec{x}}$$

Доказательство.

$$(S(t)\,\dot{\vec{x}}(t))'_i = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{ik}(t)\,x_k(t)\right)' = \sum_{k=1}^{n} \dot{s}_{ik}(t)\,x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} s_{ik}(t)\,\dot{x}_k(t)$$

Введём $\vec{y}$ следующим образом: $\vec{x} = S\vec{y}$. Заметим, что $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ можно преобразовать в $S\dot{\vec{y}} = AS\vec{y}$, а затем (в силу невырожденности S) в

$$\dot{\vec{y}} = J\vec{y}$$

Полученная система уравнений решается “поблочно”.

Дифференциальные уравнения. Лекция 10

Дубинская Вера Юльевна

16 ноября 2019 г.

Рассмотрим один блок системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{k-1} = \lambda y_{k-1} + y_k \\ \dot{y}_k = \lambda y_k \end{cases}$$

Выполним следующую замену: $y_i = e^{\lambda t} z_i$

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda t} z_i + e^{\lambda t} \dot{z}_i = \lambda e^{\lambda t} z_i + e^{\lambda t} z_{i+1} \\ \dots \\ \lambda e^{\lambda t} z_k + e^{\lambda t} \dot{z}_k = \lambda e^{\lambda t} z_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \dots \\ \dot{z}_k = 0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$z_i = \sum_{j=i}^{k} c_j \frac{t^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$y_i = z_i e^{\lambda t}$$

Объединим все компоненты в вектор и перейдём в исходный базис:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} y_i \vec{h}_i$$

Частное решение неоднородной системы в общем случае

Воспользуемся методом вариации постоянных (здесь $X(t)$ — ФСР):

$$\begin{aligned}\vec{x} &= X(t)\,\vec{c}(t)\\ \dot{X}(t)\,\vec{c}(t) + X(t)\,\dot{\vec{c}}(t) &= A\,X(t)\,\vec{c}(t) + \vec{f}(t)\\ X(t)\,\dot{\vec{c}}(t) &= \vec{f}(t)\\ \dot{\vec{c}}(t) &= X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\\ \vec{c}(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\,\vec{f}(\tau)\,d\tau + \vec{c}\end{aligned}$$

($X^{-1}(t)$ определена для всех t, поскольку определитель $X(t)$ является вронскианом базиса, а потому всюду отличен от нуля.)

Частное решение неоднородной системы в случае, когда правая часть — вектор-квазимногочлен

Определение. *Вектор-квазимногочлен* размерности n и степени m — это n-мерный вектор, компонентами которого являются квазимногочлены, и максимальная степень компоненты равна m.

Утверждение. Для любого n-мерного вектор-квазимногочлена $\vec{P}_m(t)$ степени m и жорданова базиса $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$ найдётся вектор-квазимногочлен $\vec{\mathcal{P}}_m(t)$, для которого выполнено следующее:

$$\vec{P}_m(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}^i_m(t)\,\vec{h}_i$$

Лемма. Пусть λ — собственное значение матрицы A, и $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_k$ — жорданова цепочка для λ. Если в системе $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ функция $\vec{f}$ имеет следующий вид (здесь $P^i_m(t)$ — квазимногочлены):

$$\vec{f}(t) = e^{\mu t}\sum_{i=1}^{k} P^i_m(t)\,\vec{h}_i$$

... то существует единственное решение вида

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} e^{\mu t}\,\vec{Q}_m(t), & \mu \neq \lambda\\ e^{\mu t} t\,\vec{Q}_{m+k-1}(t), & \mu = \lambda\\ (e^{\mu t}\,\vec{Q}_{m+k}(t), & \mu = \lambda) \end{cases}$$

Доказательство. Будем искать решение в виде

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(t)\,\vec{h}_i$$

Подставим это выражение в систему:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \dot{\varphi}_i(t)\,\vec{h}_i &= A\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(t)\,\vec{h}_i + \vec{f}(t) \\
&= \varphi_1(t)\,\lambda\vec{h}_1 + \sum_{i=2}^{k} \varphi_i(t)\,(\lambda\vec{h}_i + \vec{h}_{i-1}) + e^{\mu t}\sum_{i=1}^{k} P_m^i(t)\,\vec{h}_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda\varphi_i + \varphi_{i+1})\,\vec{h}_i + \lambda\varphi_k\vec{h}_k + e^{\mu t}\sum_{i=1}^{k} P_m^i(t)\,\vec{h}_i
\end{aligned}$$

Составим новую систему:

$$\begin{cases}
\dot{\varphi}_1 = \lambda\varphi_1 + \varphi_2 + e^{\mu t}P_m^1 \\
\dot{\varphi}_2 = \lambda\varphi_2 + \varphi_3 + e^{\mu t}P_m^2 \\
\dots \\
\dot{\varphi}_{k-1} = \lambda\varphi_{k-1} + \varphi_k + e^{\mu t}P_m^{k-1} \\
\dot{\varphi}_k = \lambda\varphi_k + e^{\mu t}P_m^k
\end{cases}$$

Если $\mu \neq \lambda$, то последнее уравнение имеет решение вида $\varphi_k = e^{\mu t}Q_m^k$. Подставляя полученное решение в предыдущее уравнение, получим уравнение в аналогичной форме, и т. д.

Если же $\mu = \lambda$, то последнее уравнение имеет решение вида $\varphi_k = t\,e^{\lambda t}Q_m^k$. При подстановке данного решения в предыдущее уравнение степень решения может повыситься на 1. Такое повышение может произойти не более $(k-1)$ раз.

Теорема. Если в системе $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ функция f имеет вид $\vec{f}(t) = e^{\mu t}\vec{P}_m(t)$, то существует решение вида

$$x(t) = e^{\mu t}\vec{Q}_{m+\ell}(t)$$

…где $\ell = 0$, если μ не является собственным значением A, в противном случае ℓ не превосходит длину жордановой цепочки для μ.

Дифференциальные уравнения. Лекция 11

Дубинская Вера Юльевна

23 ноября 2019 г.

Пусть t — действительнозначная переменная, $A_{n\times n}$ — комплекснозначная квадратная матрица. Рассмотрим следующий ряд:

$$E_{n\times n} + \frac{t^1}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots \tag{1}$$

Обозначим элементы матриц следующим образом: $A^m = \|a_{ij}^m\|$. Заметим, что

$$a_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{k-1} a_{\ell j}$$

Введём обозначение для частичных сумм:

$$S_k = E + \sum_{\ell=1}^k \frac{t^\ell A^\ell}{\ell!}$$

$$(S_k)_{ij} = s_{ij}^k = \delta_{ij} + \sum_{\ell=1}^k \frac{t^k a_{ij}^\ell}{\ell!} \tag{2}$$

Определение. Матричный ряд (1) называется *сходящимся* при $t_0 \in \mathbb{R}$, если степенной ряд (2) сходится при $t = t_0$ для всех i и j.

(Остальные определения, связанные со сходимостью, вводятся аналогично.)

Лемма 1. Для любой квадратной матрицы A и любого $t \in \mathbb{R}$ ряд (1) сходится абсолютно.

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$. Из определения получаем, что $|a_{ij}^2| \le nM^2$; отсюда по индукции выводим оценку $|a_{ij}^k| \le n^{k-1}M^k$. Следовательно, для всех i и j ряд (2) мажорируется по модулю рядом

$$\delta_{ij} + \sum_{\ell=1}^k \frac{|t|^\ell n^{\ell-1} M^\ell}{\ell!} = \delta_{ij} + \sum_{\ell=1}^k |t|^\ell b_\ell$$

Воспользуемся признаком Д'Аламбера:

$$\frac{|t|^{\ell+1} b_{\ell+1}}{|t|^\ell b_\ell} = \frac{|t| n^\ell M^{\ell+1} \ell!}{(\ell+1)! n^{\ell-1} M^\ell} = \frac{|t| nM}{\ell+1} \to 0$$

Определение. Сумма абсолютно сходящегося ряда (1) называется *матричной экспонентой.*

Обозначение: e^{At}

Примеры:

$$e^{Et} = E \cdot e^t$$

Определение. Ряд (1) *равномерно сходится на множестве* $X \subset \mathbb{R}$, если ряд (2) равномерно сходится на этом же множестве.

Утверждение. Ряд (1) равномерно сходится на любом отрезке.

Доказательство. Пусть $t \in [\alpha, \beta]$, тогда $|t| \le T$, отсюда

$$\left| \frac{a_{ij}^\ell t^\ell}{\ell!} \right| \le \frac{n^{\ell-1} M^\ell T^\ell}{\ell!}$$

...и по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно.

Лемма 2. Если квадратные матрицы A и B перестановочны (т. е. $AB = BA$), то для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено $e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{tB} \cdot e^{tA} = e^{t(A+B)}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
(A+B)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = n! \sum_{k+m=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!} \\
e^{t(A+B)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^k A^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\
&= e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{tB} \cdot e^{tA}
\end{aligned}$$

Следствие. $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$

Доказательство. Заметим, что $e^{tA} \cdot e^{-tA} = e^{0_{n \times n}} = E$, а значит, $\det e^{tA} \ne 0$. Домножив обе части слева на $(e^{tA})^{-1}$, получаем искомое.

Лемма 3.

1. Если $A = SBS^{-1}$, то $e^{tA} = S e^{tB} S^{-1}$.
2. $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} = e^{tA} \cdot A$

Доказательство.

1. С помощью индукции можно показать, что $(SAS^{-1})^n = SA^nS^{-1}$. Выписав частичные суммы ряда (1) и вынеся S и S^{-1} за скобки, получим искомое.
2. Продифференцируем ряд почленно (это возможно ввиду равномерной сходимости):

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell t^{\ell-1} A^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell A^{\ell+1}}{\ell!} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell A^\ell}{\ell!} = A e^{tA}$$

Теорема. Матрица e^{tA} является фундаментальной матрицей для системы линейных уравнений $\dot{x} = Ax$.

Доказательство. $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, следовательно, каждый столбец матрицы e^{tA} является решением системы. Поскольку $\det e^{tA} \neq 0$ при любом t, то e^{tA} фундаментальна.

Общее решение данной системы: $\vec{x} = e^{tA}\vec{c}$, где $\vec{c}$ — вектор-констант.

Следствие. Общим решением системы уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + f(t)$ задаётся следующей формулой:

$$\vec{x} = e^{tA}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)\,d\tau + \vec{c}_0\right) \tag{3}$$

Доказательство. Метод вариации постоянных:

$$\vec{x} = e^{tA}\vec{c}(t)$$
$$(e^{tA}\vec{c}(t))' = Ae^{tA}\vec{c}(t) + e^{tA}\dot{\vec{c}}(t) = Ae^{tA}\vec{c}(t) + \vec{f}(t)$$
$$e^{tA}\dot{\vec{c}}(t) = \vec{f}(t)$$
$$\dot{\vec{c}}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t)$$
$$\vec{c}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)\,d\tau + \vec{c}_0$$

Следствие. Решение задачи Коши

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t)\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

выражается в следующем виде:

$$\vec{x} = e^{tA}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)\,d\tau + e^{-t_0 A}\vec{x}_0\right) = e^{tA}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)\,d\tau + e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (3); положив $t = t_0$, получим $\vec{c}_0 = e^{-t_0 A}\vec{x}_0$.

Пример. Если $t_0 = 0$ и $\vec{f}(t) \equiv \vec{0}$, то $\vec{x} = e^{tA}\vec{x}_0$.

Дифференциальные уравнения. Лекция 12

Дубинская Вера Юльевна

30 ноября 2019 г.

Задача.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2z \\ \dot{y} = -6x + y + 5z \\ \dot{z} = -3x + 2y - 4z \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 1$$

Решение.

$$A - \lambda E = A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\lambda t} e^{A - \lambda E}$$

$$J - \lambda E = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^3 = 0 \Rightarrow A^3 = 0$$

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2} A^2$$

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 1$$

Задача.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 3$$

$$e^{tA} = ?$$

Решение.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - 3E)^2 = 0 \Rightarrow e^{tA} = e^{3t}(E + tA)$$

Уравнения Эйлера

$$a_o x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

Способ решения: при $x > 0$ выполнить замену $x = e^t$, при $x < 0$ выполнить замену $x = -e^t$, после чего преобразовать производные по схеме

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}$$

Индукцией по порядку производной можно показать, что

$$y_x^{(k)} = e^{-kt}(y_t^{(k)} + b_{k1} y_t^{(k-1)} + \cdots + b_{k,k-1} y'_t + b_{k,k} y)$$

Полученное уравнение является уравнением с постоянными коэффициентами.

(Если кратных корней нет, то полученное уравнение имеет решения вида $y = e^{\lambda t}$. Подставим данное решение в исходное уравнение — получится *характеристическое уравнение* для λ.)

Пример.

$$x^2 y'' + x y' - y = \ln x$$
$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0$$
$$\lambda = \pm 1$$
$$y_1 = x; \quad y_2 = 1/x$$
$$y = c_1 x + c_2 / x$$
$$\ldots$$

[АААА! НЕ ПОНИМАЮ (ИЛИ НЕ ПОМНЮ), КАК РЕШАТЬ УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ БЕЗ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ.]

Дифференциальные уравнения. Лекция 13

Дубинская Вера Юльевна

7 декабря 2019 г.

Операционный метод

Определение. *Оригинал* — комплекснозначная функция действительного переменного $f(t)$, обладающая следующими свойствами:

1. $\forall t < 0\ (f(t) = 0)$
2. При $t \geq 0$ функция всюду непрерывна, за исключением конечного (в т. ч. пустого) множества точек разрыва I рода.
3. $\exists M > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall t \geq 0\ (|f(t)| \leq Me^{\alpha t})$

Определение. *Преобразование Лапла́са* функции $f(t)$ — функция $F(p)$, определённая следующим образом:

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt, \quad p = s + i\tau$$

Заметим, что

$$\left| \int\limits_0^N e^{-pt} f(t)\, dt \right| \leq \int\limits_0^N |e^{-pt}|\, |f(t)|\, dt \leq M \int\limits_0^N e^{(\alpha - s)t}\, dt$$

...следовательно, при $s \geq \alpha$ интеграл сходится.

Свойства.

1. Линейность
2. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall k = 0, \ldots, n\ (|f^{(k)}(t)| < Me^{\alpha t})$, тогда если $f(t)$ преобразовывается в $F(p)$, то $f^{(n)}(t)$ преобразовывается в

$$p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \cdots - p\, f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$$

Доказательство. Индукция по n:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,df(t) \\
&= e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \\
&= p\,F(p) - f(+0) \\
\int_0^{+\infty} e^{-pt} f^{(n)}(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,df^{(n-1)}(t) \\
&= e^{-pt} f^{(n-1)}(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n-1)}(t)\,dt \\
&= p\,(p^{n-1}F(p) - p^{n-2}f(+0) - \dots - p\,f^{(n-3)}(+0) - f^{(n-2)}(+0)) - f^{(n-1)}(+0) \\
&= p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - p\,f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)
\end{aligned}$$

3. Существует обратное преобразование.

Пример.

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 4 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

Применим преобразование Лапласа:

$$(p^2\,Y(p) - p\cdot 0 - 2) - 5\,(p\,Y(p) - 0) + 4\,Y(p) = \frac{4}{p}$$

Выразим $Y(p)$:

$$(p^2 - 5p + 4)\,Y(p) = \frac{4}{p} + 2$$

$$Y(p) = \frac{2p+4}{p(p-1)(p-4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-4}$$

Отсюда (по таблицам обратного преобразования) получаем

$$y(t) = A + Be^t + Ce^{4t}$$

Дифференциальные уравнения. Лекция 14

Дубинская Вера Юльевна

14 декабря 2019 г.

Рассмотрим задачу Коши (здесь $\vec{y}, \vec{f}$ — n-мерные векторы, λ — m-мерный вектор):

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\lambda}) \\ \vec{y}(x_0, \vec{\lambda}) = \vec{y}_0(\vec{\lambda}) \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть $\vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\lambda})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменным $\vec{y}$ равномерно по x и $\vec{\lambda}$ при всех $(x, \vec{y}) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (здесь G — область), и всех $\vec{\lambda}$, для которых выполнено неравенство $|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0| \leq r$, тогда существует $\delta > 0$, при котором решение задачи Коши $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{\lambda})$ непрерывно при $|x - x_0| \leq \delta$ и $|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0| \leq r$.

Теорема 2. Если при $(x, y) \in G$ и $|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0| \leq r$ функции $f(x, y, \vec{\lambda})$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ непрерывны, а также $(x_0, y_0) \in G$, то найдётся такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$ и $|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0| \leq r$ для решения задачи Коши $y = \varphi(x, \vec{\lambda})$ верно следующее:

1. $z_i(x, \vec{\lambda}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}$ непрерывны для указанных x и $\vec{\lambda}$.

2. Смешанные производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial \lambda_i}$ непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования.

3. Частные производные z_i удовлетворяют *уравнениям в вариациях по параметру* $\vec{\lambda}$:

   $$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \varphi(x, \vec{\lambda}), \vec{\lambda})}{\partial y} \cdot z_i + \frac{\partial f(x, \varphi(x, \vec{\lambda}), \vec{\lambda})}{\partial \lambda_i}$$

   и начальным условиям $z_i(x_0, \vec{\lambda}) = 0$.

   (Уравнение в вариациях получается дифференцированием обеих частей исходного уравнения по λ_i.)

Задача.

$$\begin{cases} y' = y + \mu(x + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Найти $y(x, \mu)$ и $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

Решение. Нужно найти $z(x, 0)$.

$$(y'_x)'_\mu = y'_\mu + (x + y^2) + \mu \cdot 2yy'_\mu$$
$$(y'_\mu)'_x = z'_x = (1 + 2\mu y) \cdot z + (x + y^2)$$

Дифференцируя начальное условие по μ, получаем $z(0,\mu) = 0$.

Положим $\mu = 0$:

$$\begin{cases} z'_x(x,0) = z(x,0) + x + y^2(x,0) \\ z(0,0) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\tilde{y} = y(x,0)$, тогда

$$\begin{cases} \tilde{y}' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Отсюда $\tilde{y} = e^x$, и

$$\begin{cases} z'_x(x,0) = z(x,0) + x + e^{2x} \\ z(0,0) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\tilde{z} = z(x,0)$, тогда

$$\begin{cases} \tilde{z}' = \tilde{z} + x + e^{2x} \\ \tilde{z}(0) = 0 \end{cases}$$

Отсюда $\tilde{z} = e^{2x} - x - 1$, и задача решена.

Альтернативное решение. Разложим $y(x,\mu)$ в ряд Маклорена по μ:

$$y(x,\mu) = \underbrace{y(x,0)}_{y_0(x)} + \underbrace{\mu \left.\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}}_{y_1(x)} + o(\mu)$$

Подставим разложение в уравнение:

$$\begin{cases} y_0' + \mu y_1' + \dots = y_0 + \mu y_1 + \dots + \mu(x + (y_0 + \mu y_1 + \dots)^2) \\ y_0(0) + \mu y_1(0) + \dots = 1 \end{cases}$$

Найдём коэффициенты многочлена от μ:

$$\mu^0 : \begin{cases} y_0' = y_0 \\ y_0(0) = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad y_0(x) = e^x$$

$$\mu^1 : \begin{cases} y_1' = y_1 + x + y_0^2 \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad y_1(x) = e^{2x} - x - 1$$