

## Глава 3 Исследование сопла Лавала

### §1 Теоретическая справка

#### §1.1 Введение

Сопло Лавала – техническое приспособление, которое служит для ускорения газового потока проходящего по нему до скоростей, превышающих скорость звука. Широко используется на некоторых типах паровых турбин и является важной частью современных ракетных двигателей и сверхзвуковых реактивных авиационных двигателей.

Сопло представляет собой канал, суженный в середине. В простейшем случае такое сопло может состоять из пары усечённых конусов, сопряжённых узкими концами. Эффективные сопла современных ракетных двигателей профилируются на основании специальных газодинамических расчётов. (рис. 3.1.1)

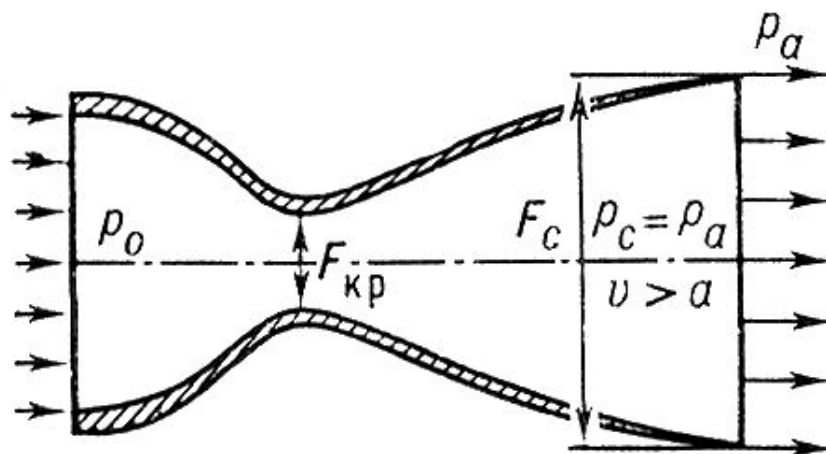


Рисунок 3.1.1

Сопло было предложено в 1890 г. шведским изобретателем Густафом де Лавалем для паровых турбин. В ракетном двигателе сопло Лавала впервые было использовано генералом М. М. Поморцевым в 1915 г.

Феномен ускорения газа до сверхзвуковых скоростей в сопле Лавала был обнаружен в конце XIX в. экспериментальным

путём. Позже это явление нашло теоретическое объяснение в рамках газовой динамики.

## **§1.2 Вывод характеристик сопла Лавала**

При анализе течения газа в сопле Лавала принимаются следующие допущения:

- газ считается идеальным;
- газовый поток является изоэнтропным (то есть имеет постоянную энтропию, силы трения и диссипативные потери не учитываются) и адиабатическим (то есть теплота не подводится и не отводится);
- газовое течение является стационарным и одномерным, то есть в любой фиксированной точке сопла все параметры потока постоянны во времени и меняются только вдоль оси сопла, причём во всех точках выбранного поперечного сечения параметры потока одинаковы, а вектор скорости газа всюду параллелен оси симметрии сопла;
- массовый расход газа одинаков во всех поперечных сечениях потока;
- влиянием всех внешних сил и полей (в том числе гравитационного) пренебрегается;
- ось симметрии сопла является пространственной координатой.

Отношение локальной скорости к локальной скорости звука обозначается числом Маха ( $M$  – число Маха), которое также понимается местным, то есть зависимым от координаты:

$$M = v / c \quad (1)$$

Из уравнения состояния идеального газа следует:  $c^2 = \partial p / \partial \rho$ , где  $\rho$  – локальная плотность газа,  $p$  – локальное давление. С учётом этого, а также с учётом стационарности и одномерности потока уравнение Эйлера принимает вид:

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

что, учитывая (1), преобразуется в

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = -M^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Уравнение (2) является ключевым в данном рассуждении.

Рассмотрим его в следующей форме:

$$\left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) / \left( \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -M^2 \quad (2.1)$$

Величины  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$  и  $\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x}$  характеризуют относительную

степень изменяемости по координате плотности газа и его скорости соответственно. Причем уравнение (2.1) показывает, что соотношение между этими величинами равно квадрату числа Маха (знак минус означает противоположную направленность изменений: при возрастании скорости плотность убывает). Таким образом, на дозвуковых скоростях плотность меняется в меньшей степени, чем скорость, а на сверхзвуковых – наоборот. Как будет видно дальше, это и определяет сужающуюся-расширяющуюся форму сопла.

Поскольку массовый расход газа постоянен:  $\rho v S = const$ , где  $S$  – площадь местного сечения сопла, то  $\ln \rho + \ln v + \ln S = +\ln(const)$ .

Дифференцируя обе части этого уравнения по  $x$ , получаем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

После подстановки из (2) в это уравнение, получаем окончательно:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{S}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (M^2 - 1). \quad (3)$$

Заметим, что при увеличении скорости газа в сопле знак выражения  $\frac{S}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$  положителен и, следовательно, знак производной  $\frac{\partial S}{\partial x}$  определяется знаком выражения  $(M^2 - 1)$ .

На рисунке 3.1.2 представлено качественное распределение газовых макропараметров на оси сопла как функций от координаты  $X$ . По мере движения газа по соплу, его абсолютная температура  $T$  и давление  $P$  снижаются, а скорость  $V$  возрастает.

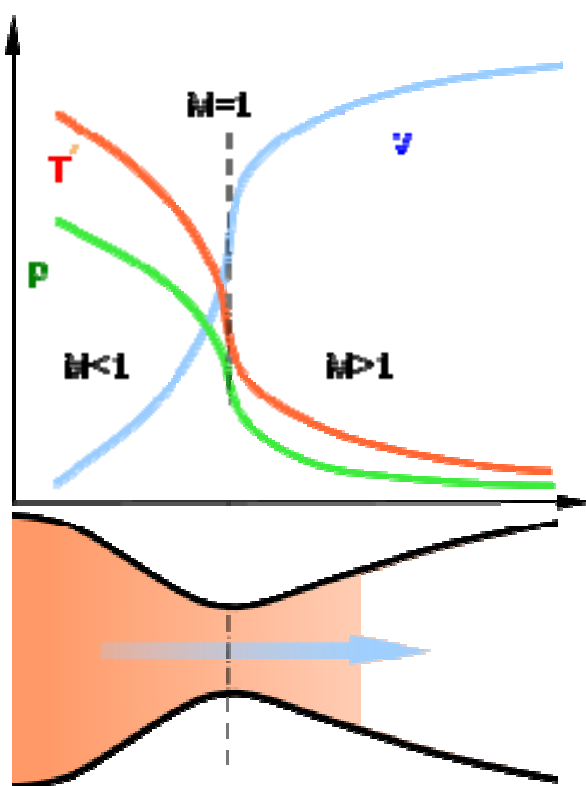


Рисунок 3.1.2

Из анализа представленного графика можно сделать следующие выводы:

1. При дозвуковой скорости движения газа  $(M^2 - 1) < 0$ , производная  $\frac{\partial S}{\partial x} < 0 \Rightarrow$  сопло сужается.
2. При сверхзвуковой скорости движения газа  $(M^2 - 1) > 0$ , производная  $\frac{\partial S}{\partial x} > 0 \Rightarrow$  сопло расширяется.

3. При движении газа **со скоростью звука**  $(M^2 - 1) = 0$ , производная  $\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \Rightarrow$  площадь поперечного сечения достигает **экстремума**, то есть имеет место **самое узкое сечение** сопла, называемое **критическим**.

Итак, на сужающемся, **докритическом** участке сопла движение газа происходит с дозвуковыми скоростями. В самом узком, **критическом** сечении сопла локальная скорость газа достигает скорости звука. На расширяющемся, **закритическом** участке, газовый поток движется со сверхзвуковыми скоростями.

Перемещаясь по соплу, газ расширяется, его температура и давление падают, а скорость возрастает. Внутренняя энергия газа преобразуется в кинетическую энергию его направленного движения. КПД этого преобразования в некоторых случаях (например, в соплах современных ракетных двигателей) может превышать 70 %, что значительно превосходит КПД реальных тепловых двигателей всех других типов. Это объясняется тем, что рабочее тело не передаёт механическую энергию никакому посреднику (поршню или лопастям турбины). В других тепловых двигателях на этой передаче имеют место значительные потери. Кроме того, газ, проходя через сопло на значительной скорости, не успевает передать его стенкам заметное количество своей тепловой энергии, что позволяет считать процесс адиабатическим.

В рамках данного занятия будем определять скорость истечения газов из выходного сечения сопла. Из уравнения состояния идеального газа и баланса энергии в газовом потоке скорость истечения газа из сопла Лаваля в линейном приближении определяется по формуле:

$$v_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{TR}{M} \cdot \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p_{\text{вых}}}{p_{\text{вх}}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (4)$$

Здесь  $T$  – температура газа на входе,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $M$  – молярная масса газа,  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,  $p_{вых}$  и  $p_{вх}$  – абсолютное давление на выходе и входе в сопло соответственно.

## §2 Подготовительные задачи. Моделирование течения жидкости в сужающемся канале

Для начала рассмотрим течение газа в сужающемся канале. Для этого построим Эскиз в плоскости Сверху. (рис. 3.2.1)

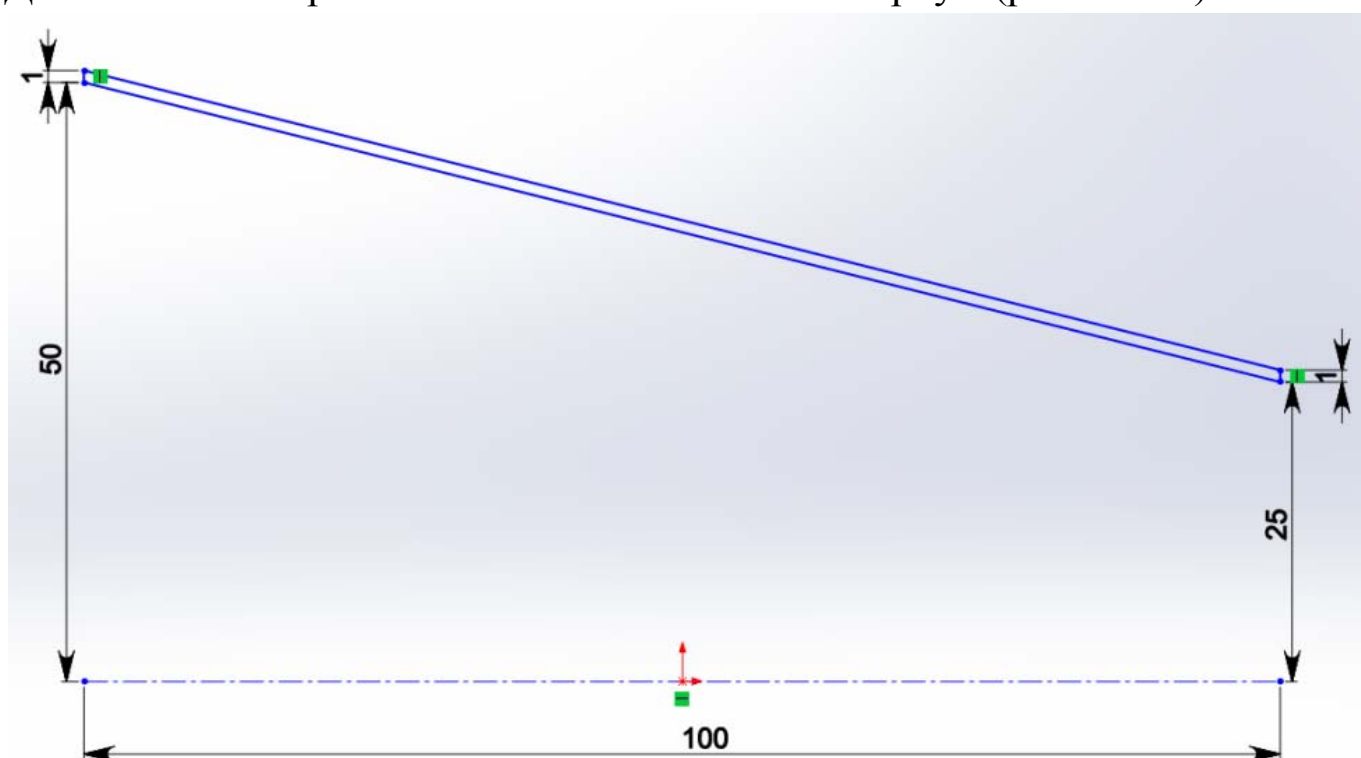


Рисунок 3.2.1

Создаем тело вращения (рис. 3.2.2)

На следующем этапе создаем заглушки в проточном канале. Для этого на Вкладке Flow Simulation необходимо кликнуть по кнопке «Создание заглушек» и по очереди выбрать торцевые грани канала (рис. 3.2.3)

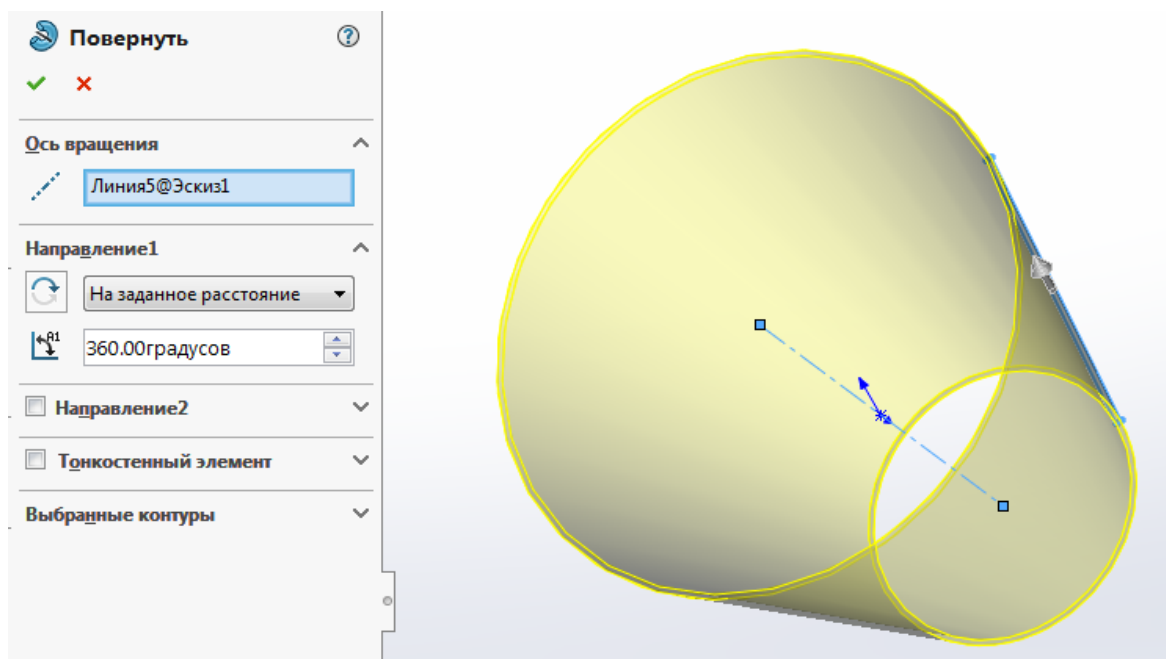


Рисунок 3.2.2

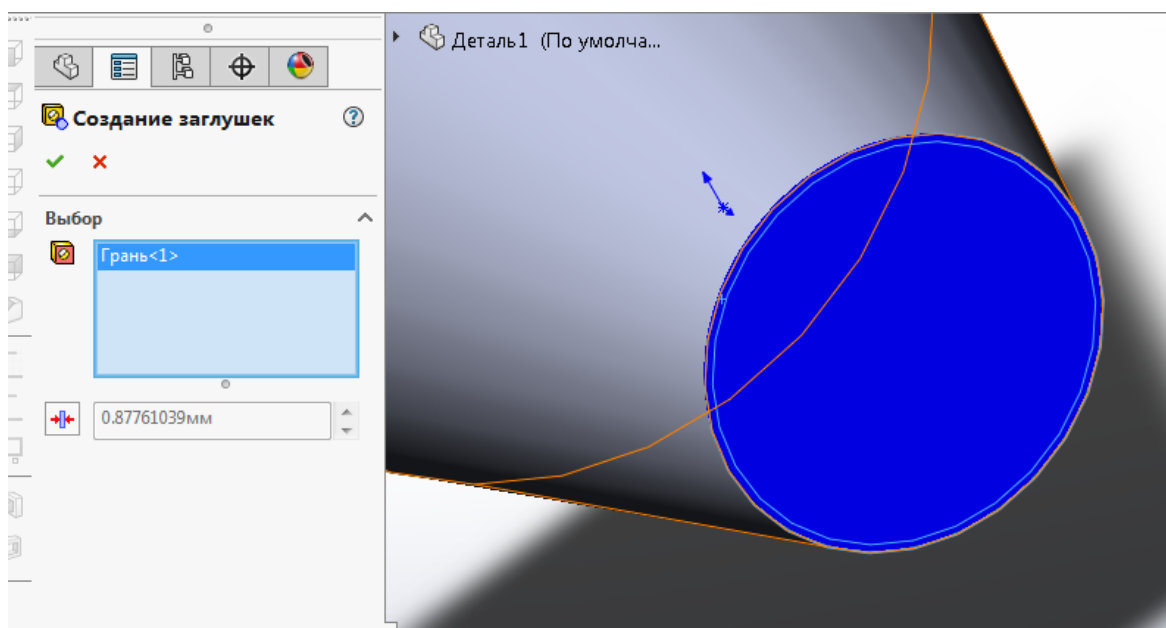


Рисунок 3.2.3

Если всё сделано правильно, то в дереве конструирования должны находиться тело вращения и две заглушки (рис. 3.2.4)

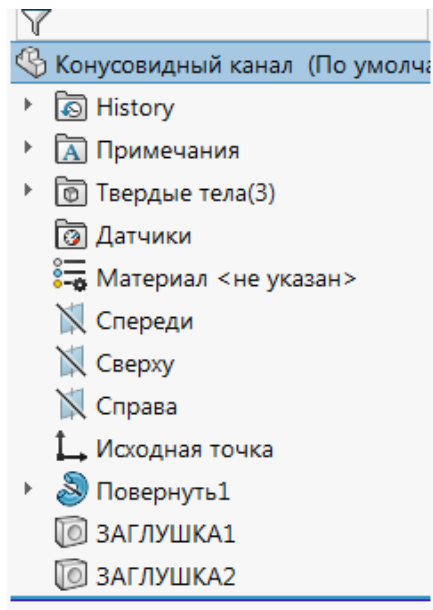


Рисунок 3.2.4

Теперь построим прямую линию, проходящую через ось нашего тела в плоскости «Спереди», как показано на рисунке 3.2.5.

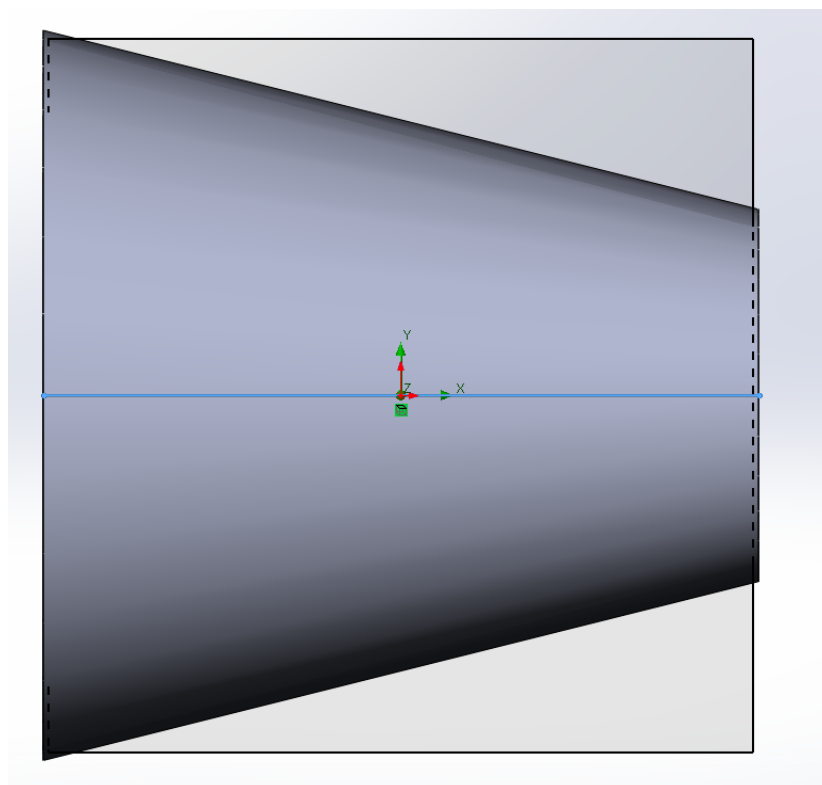
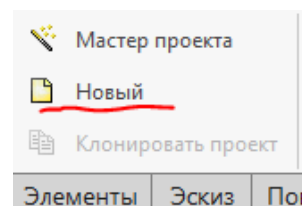


Рисунок 3.2.5



Построение геометрии закончено. Перед созданием расчетной модели необходимо сохранить проект.

Для создания нового проекта Flow Simulation надо нажать на кнопку нового проекта. В появившемся меню нового проекта задаем название проекту, например, «Канал» и нажимаем галочку.



В появившемся меню Солвера ПКМ на пункте «Входные данные» и выбираем пункт «Общие настройки». В этот раз будет решаться внутренняя задача течения идеального газа в канале. Поэтому переходим во вкладку «Текучая среда», удаляем текущую среду проекта (Воду) и находим из предложенного списка в разделе «Газы» Воздух (Air) и выбираем его двойным ЛКМ. Помимо этого необходимо добавить характеристику течения: «Течение с большим числом Маха». Нажимаем кнопку ОК. (рис. 3.2.6)

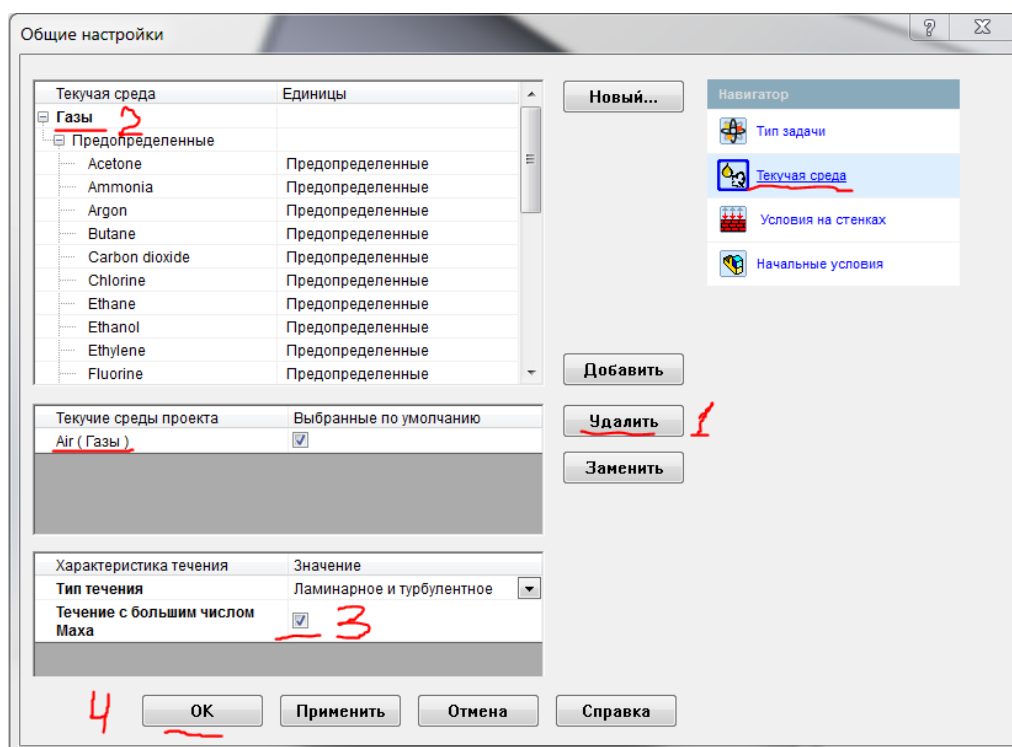


Рисунок 3.2.6

Следующим шагом будет выделение расчетной области. Для этого ПКМ по пункту меню «Расчетная область» -> Изменить.

Выбираем 2D моделирование и в качестве базовой плоскости оставляем плоскость XY. ЛКМ Галочка.

Теперь пришло время расставить граничные условия. В данной задаче нам необходимо зафиксировать скорость в 200 м/с на входе в канал, а на выходе будут параметры атмосферы. Входом в канал будем считать более широкое сечение, а выходом, соответственно, более узкое. Для этого ПКМ по меню «Граничные условия» -> «Добавить граничное условие».

В появившемся меню в поле Выбор выбираем Заглушку, которая закрывает сечение большего диаметра. Появятся три грани. Две из них (крайние верхняя и нижняя) не лежат в расчетной области, поэтому их удаляем. В качестве Тип фиксируем скорость на входе. В Параметрах потока Выставляем скорость в 200 м/с. ЛКМ галочку. (рис. 3.2.7)

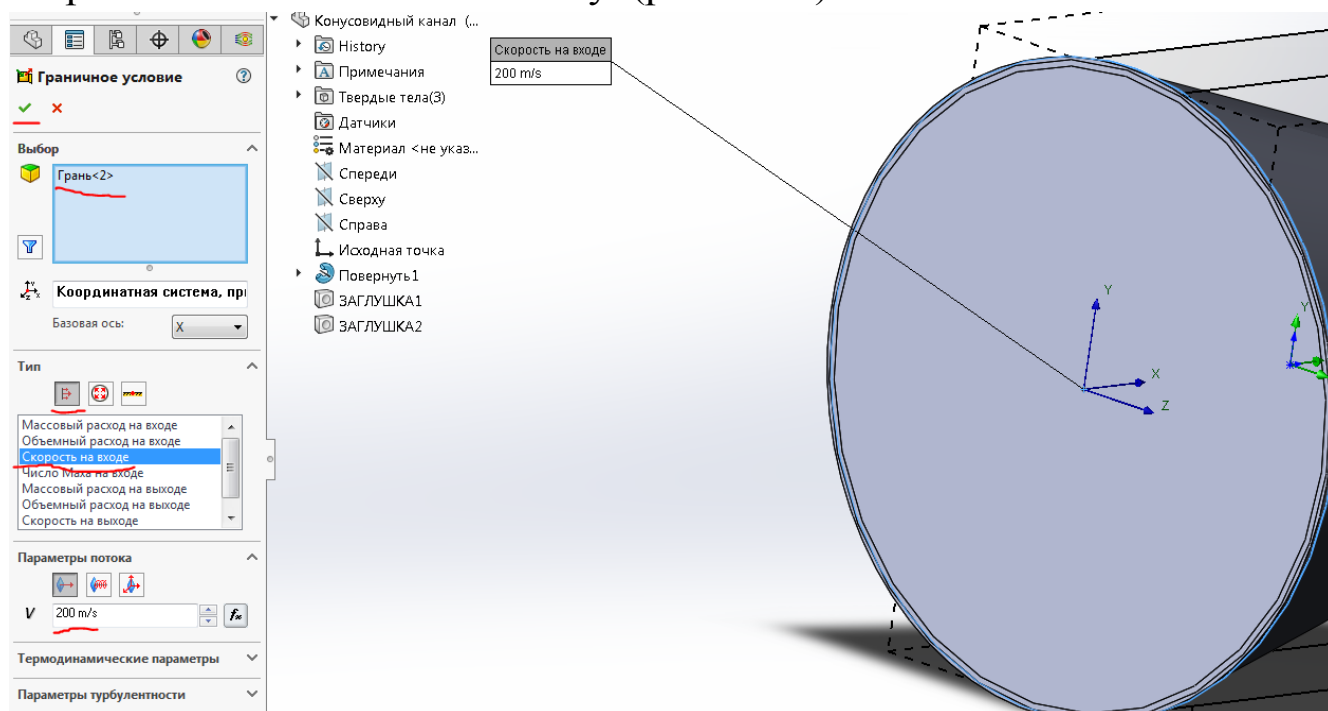


Рисунок 3.2.7

Повторяем то же для второй заглушки, в меню Тип ГУ выбираем фиксацию Давления и выбираем «Давление окружающей среды». Значения термодинамических параметров оставляем без изменения. ЛКМ галочку. (рис 3.2.8) Если при выходе выдается ошибка, что данная граница не лежит в расчетной области, значит удалите её и выберите другую границу той же заглушки.

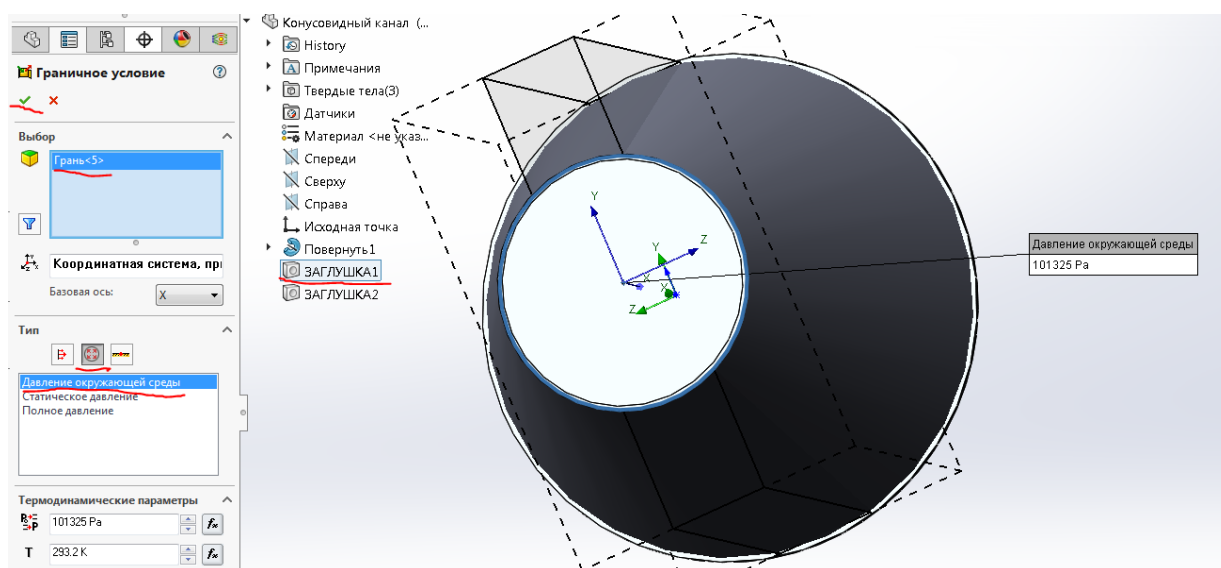


Рисунок 3.2.8

Теперь перейдем к заданию параметров расчетной сетки. Раскрываем пункт меню Сетка нажатием на значок «+» и ПКМ «Глобальная сетка» -> Изменить. Перейдем в ручной режим построения сетки, нажав соответствующую кнопку.

Оставим количество узлов базовой сетки неизменным, но в подпункте «Дробление ячеек» поставим уровень дробления ячеек в текучей среде 2, а уровень дробления частичных ячеек – 3. В подпункте «Каналы» поставим значение 15, а подпункт «Дополнительные параметры дробления» отключим, убрав галочку напротив соответствующего названия (рис. 3.2.9). ЛКМ галочка.

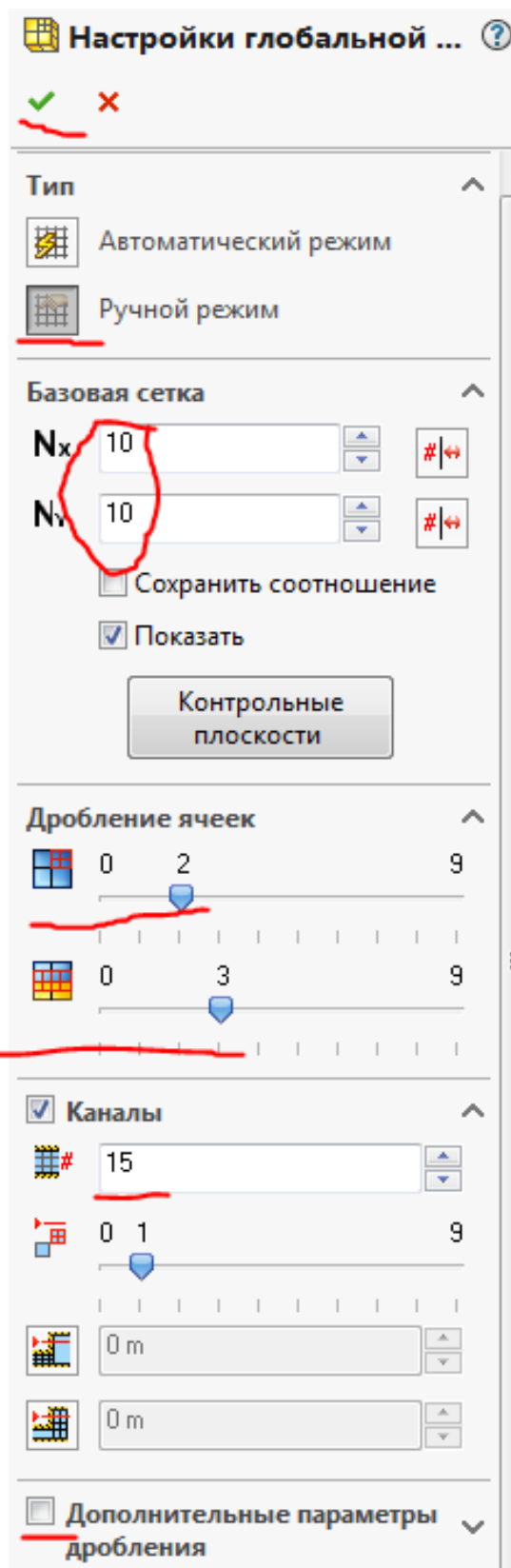


Рисунок 3.2.9

На следующем шаге выберем цели для анализа и визуализации в постпроцессоре. ПКМ «Цели» -> «Добавить глобальные цели...». В появившейся вкладке выбираем минимальные, средние и максимальные значения (то есть галочку надо ставить в первый, второй и третий слева квадратики) Статического, Полного, Динамического давления. Также выбираем среднее значение Плотности и Температуры (текучая среда) и среднее и максимальное значения Скорости. ЛКМ (рис. 3.2.10)

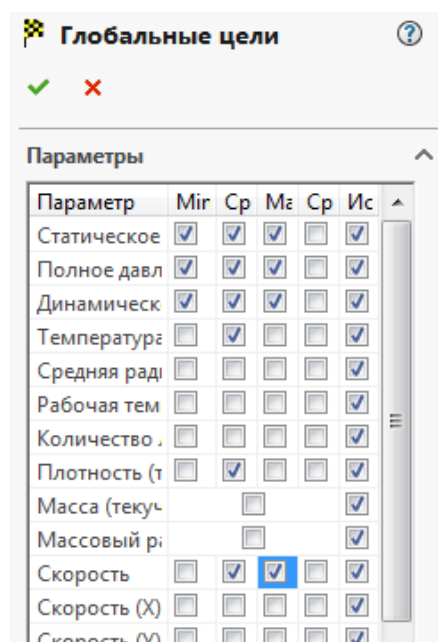
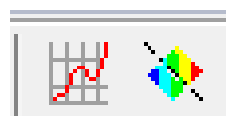


Рисунок 2.2.10

Сохраняем проект и запускаем расчет нажатием ПКМ по названию проекта «Запустить».

После нажатия кнопки «Запустить» появится новое окно Солвера. В нем отображена вся необходимая информация о расчете: статус, количество ячеек расчетной сетки, количество сделанных итераций, время общее, время на одну итерацию и т. д. Снизу отображен список выбранных целей, их текущее значение и прогресс сходимости решения.

Когда расчет начался, станут доступны кнопки отображения графика зависимости значения целевой функции от итерации (левая кнопка) и визуализации картины течения в сечении (правая кнопка).



Теперь можно визуализировать поле давления в расчете. Для этого ЛКП по правой кнопке в появившемся окне выбираем Плоскость «Спереди», «Авто определение min/max», видно отображения «Заливка». В меню «Настройки» выбираем параметр «Давление». В меню «Свойства картинки» можно задать желаемое разрешение изображения. В меню «Опции» имеются следующие параметры:

1. «Авто обновление» - отвечает за то, что картинка будет показывать определенный шаг по времени или обновляться сразу, как только будет посчитана следующая итерация.

2. «Авто заголовок» отвечает за наличие заголовка с названием переменной.

3. «Авто сохранение» сохраняет каждую картинку как отдельный файл в папке с проектом (не рекомендуется)

4. «Запись видео» - сохраняет avi файл в папку с проектом (данная функция доступна для версии Солвера не ниже 2017)

5. «Показать границы» - обводит черной линией границы расчетной области

6. «Показать сетку» отображает расчетную сетку поверх картины течения.

7. «Интерполировать результаты» - сглаживает картину течения, интерполирую результаты на всё пространство. При отключении данной функции будут отображаться значения в каждом узле сетки без сглаживания.

В меню «Область» можно вручную задать размеры отображаемой части расчетной области.

Нажав на кнопку «Справка» можно детально ознакомиться с функционалом каждой кнопки и каждого параметра.

В рамках данной задачи добавляем опцию «Показать сетку». Появится соответствующее изображение. В случае, если необходимо поменять настройки картинки достаточно ПКМ по рисунку и выбрать пункт меню «Свойства».

**Задание:** отключить сетку, построить картины течения с заливкой по Скорости, Числу Маха, Плотности и Температуре (текучая среда). Также построить картину течения с видом отображения «Вектора скорости»

На Рисунке давления видно, что имеется численная ошибка на входе в расчетную область в крайних точках, где образуются зоны постоянно повышающегося давления, поэтому Цели, связанные с давлением сойтись не смогут. Ничего страшного. Расчет остановится, когда количество продувок достигнет значения 4. Когда расчет окончится, закрываем окно Солвера.

**Задание:** Построить графики вдоль Эскиза 2 по Скорости, Температуре, Плотности и Давлению. Объяснить причину повышения скорости к выходу из канала.

Теперь поменяйте направление потока, поменяв местами условия на границах и выставив значение скорости на входе, равное **200** м/с. Также постройте графики и объясните полученный результат.

На этом решение подготовительных задач окончено. Сохраните проект и закройте.

### §3 Решение задачи течения в сопле Лавала во FloEFD

Для начала необходимо создать эскиз на плоскости «Сверху» по заданным параметрам (рис. 3.3.1).

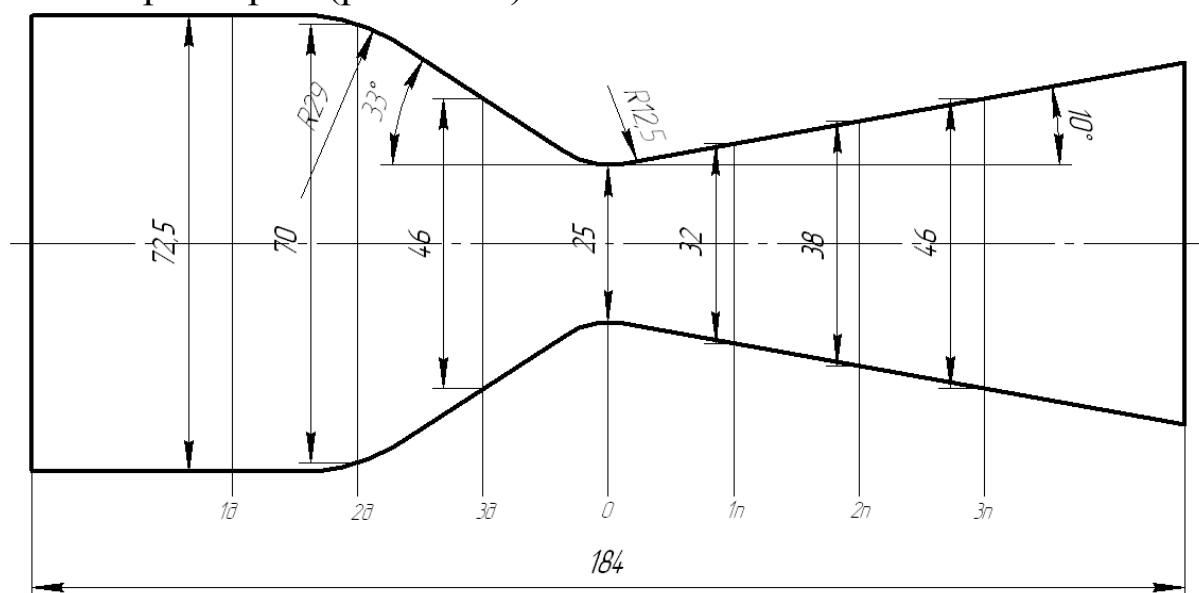


Рисунок 3.3.1

Должен получиться примерно такой Эскиз (рисунок 3.3.2)

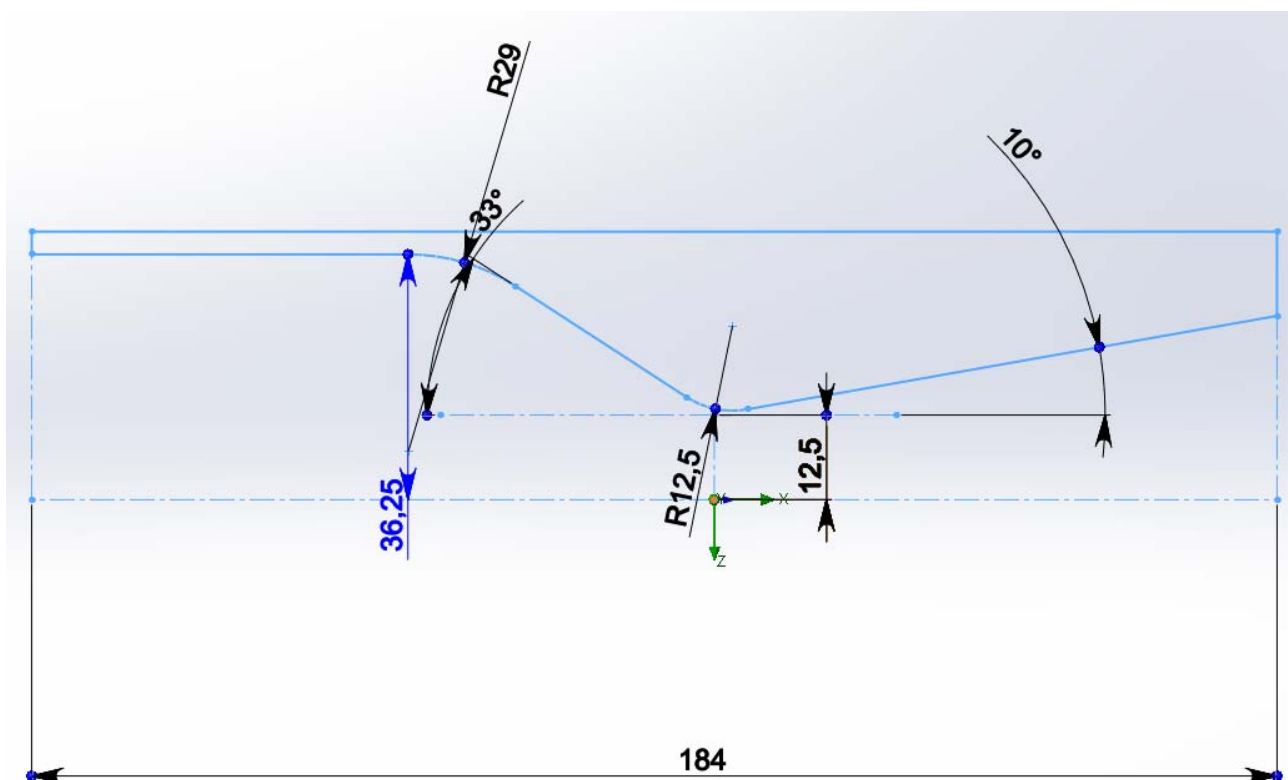


Рисунок 3.3.2

С помощью команды «Повернутая бобышка/основание» создается модель сопла (Рисунок 3.3.3).

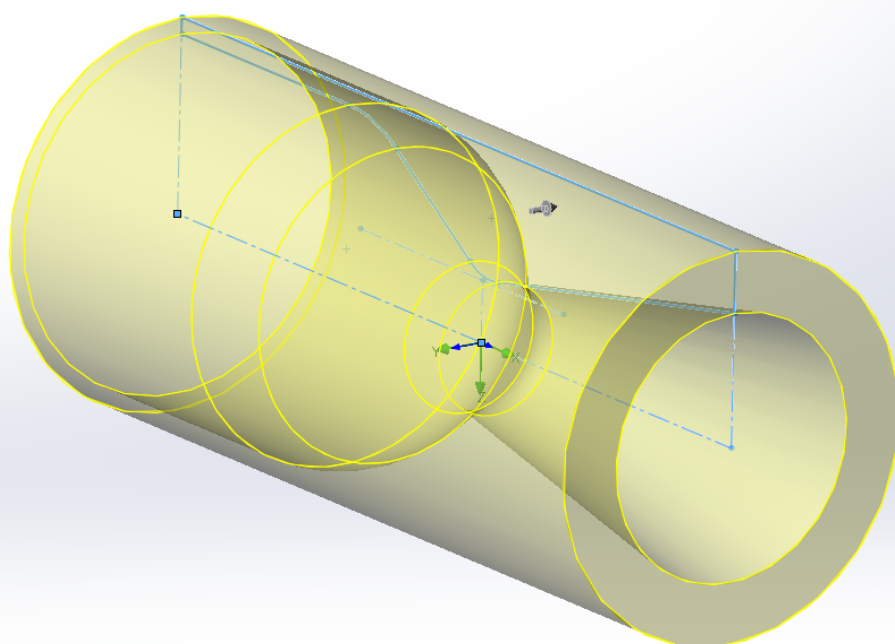
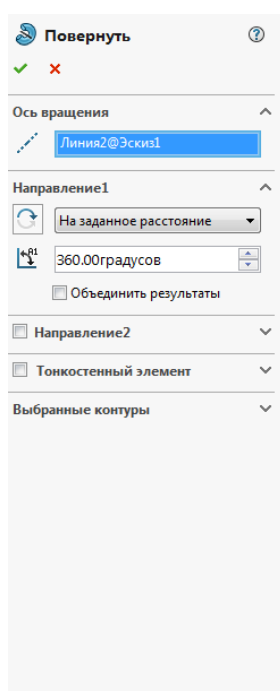



Рисунок 3.3.3



С помощью команды «Создание заглушек»  с вкладки Flow Simulation поставьте заглушки с обеих сторон сопла.

Помимо этого, создайте Эскиз прямой, проходящей через ось Сопла (рис 3.3.4).

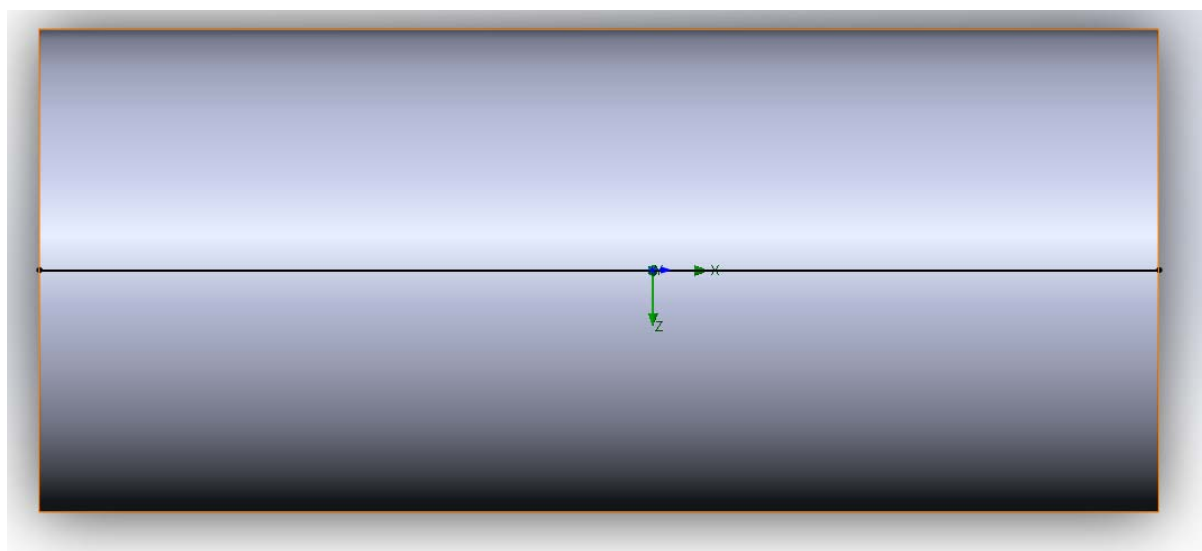


Рисунок 3.3.4

Сохраните проект и настройте проект расчета так же, как в подготовительной задаче.

В настройках ГУ на входе поставьте значение полного давления 2200000 Па измените температуру газа, сделав её равной 1000 К. В Настройке Глобальной сетки задайте Количество ячеек вдоль оси Oх 37, а вдоль оси Oz – 15. Дробление частичных ячеек и ячеек в текучей среде отключим (т. е. выставим положения ползунков на 0). В меню «Каналы» поставьте цифру 20 и выставьте Максимальный уровень дробления каналов на 1. Включите функцию «Дополнительные параметры дробления» и поставьте оба ползунка на значение 3. Они отвечают за Разрешение сеткой мелких деталей твердого тела и Уровень разрешения сеткой кривизны поверхности. Ниже необходимо будет выбрать критерий разрешения сеткой кривизны поверхности. Поставьте значение 0.0003 rad. Уровень разрешения выступов поверхности оставьте на 1 и поставьте критерий также

0.0003 м. В итоге меню настройки Глобальной сетки у Вас должна выглядеть следующим образом (рис. 3.3.5).

Сохраните проект и запустите расчет.

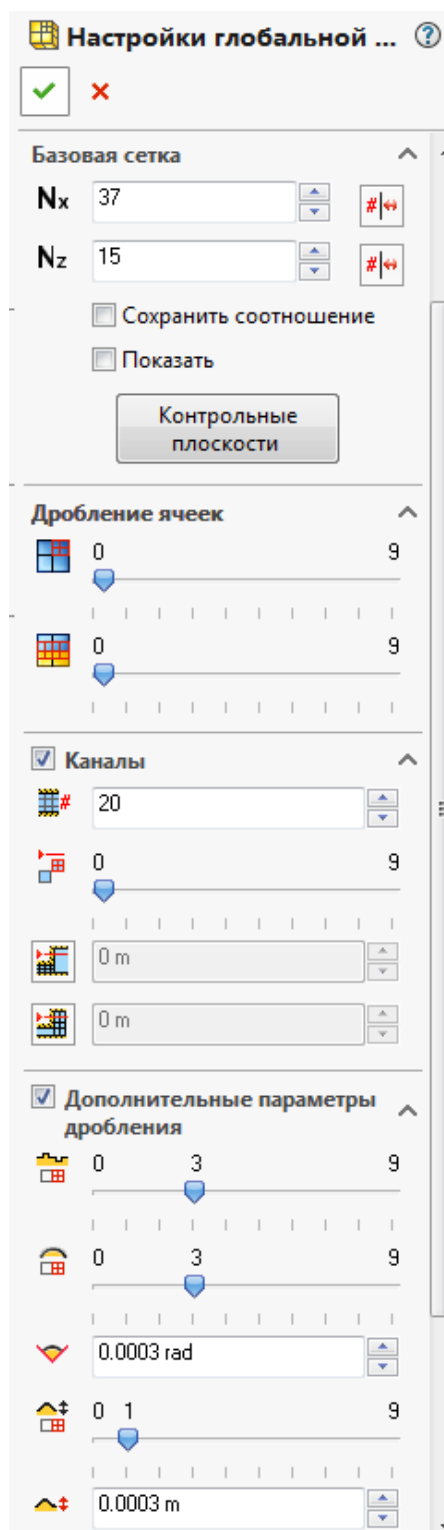


Рисунок 3.3.5

Когда видно, что картины в сечении не меняются, значит решение установилось. Чтобы не ждать окончания расчета, останавливаем его принудительно нажатием на кнопку «Остановить расчет» (черный квадрат в верхнем левом углу окна Солвера. (рис. 3.3.6).

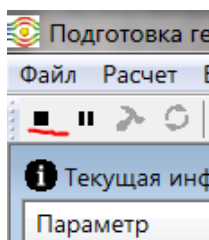


Рисунок 3.3.6

В появившемся окне нажимаем кнопку «Да».

### §3.1 Анализ полученных результатов

Для анализа полученных результатов постройте картины течения в сечении по Скорости, Давлению, Температуре, Числу Маха и Плотности. Для этого в меню Результаты ПКМ по подменю «Картины в сечении» -> «Добавить». В появившейся вкладке выбираем в качестве вида плоскость «Сверху». В пункте «Показать» выбираем Заливка. В качестве переменной выбираем необходимый параметр. ЛКМ Галочка.

Затем постройте графики этих же параметров вдоль осевой линии (Эскиз 2). Смотрите на них и сравните их качественно с рис.3.1.2. Объясните полученные результаты.

Теперь сравним полученную скорость на выходе сопла с теоретическим значением (формула 4). Для этого определите по графику значения давления на входе в сопло и на выходе. В качестве молярной массы воздуха возьмите 0,029 кг/моль,  $\gamma = 1.4$  для воздуха.  $R = 8.31$ .  $T = 1000$ .

#### §4 Индивидуальное задание по теме

Провести расчет, построить графики и проанализировать результаты, сравнив их с теорией, для индивидуальной формы сопла. (рис. 3.4.1)

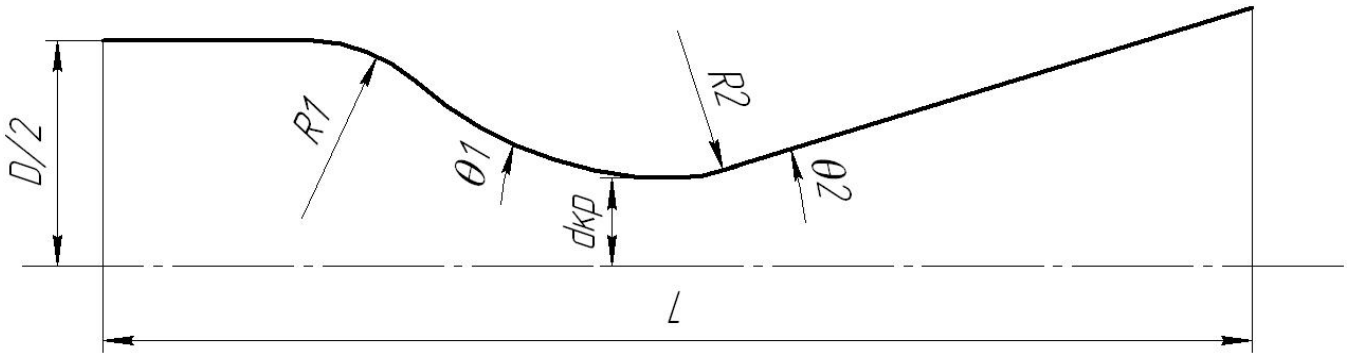


Рис.3.4.1 – геометрия сопла Лавалья

$$d_{кр} = 10 + n;$$

$$D = (2 + 0,06 \cdot n) d_{кр};$$

$$L = (1,5 + 0,07 \cdot n) D;$$

$$r_1 = 0,4D; \quad r_2 = 0,5d_{кр};$$

$$\theta_1 = (30 + 0,2 \cdot n)^{\circ}; \quad \theta_2 = 10^{\circ}$$

$$p_{ex} = (2 + 0,1 \cdot n) \text{ МПа};$$

$$T_{ex} = (500 + 14 \cdot n) \text{ К}.$$

где  $n$  – порядковый номер студента в группе.