О.В. Бесов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Москва, 2010

УДК 517
ББК 22.16
Б

О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу.

Учебник соответствует программе МФТИ и содержит теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций одного и нескольких переменных, числовые и функциональные ряды, тригонометрические ряды Фурье, преобразования Фурье, элементы нормированных и гильбертовых пространств и другие темы. Он написан на основе лекций, читаемых в течение многих лет в МФТИ автором (профессором МФТИ, чл.-корреспондентом РАН, зав. отделом теории функций Математического института им. В.А. Стеклова РАН).

Предназначен для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной подготовкой по математике.

Оглавление

Предисловие

Настоящий учебник написан на основе лекций автора, читаемых студентам Московского физико-технического института.

Отбор и порядок следования основных тем математического анализа и их содержание соответствуют Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования.

В ряде вопросов изложение несколько отличается от стандартного в сторону его упрощения, уточнения или доходчивости. В изложении доказательств теорем и лемм автор стремился к сравнительной краткости (не в ущерб завершённости), полагая, что необходимое внимательное обдумывание читаемого будет способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. При изучении курса настоятельно рекомендуется самостоятельное выполнение предлагаемых упражнений и внимательный разбор примеров.

Автор благодарит профессоров А.А. Абрамова, Б.И. Голубова, С.А. Теляковского за полезные обсуждения ряда вопросов, изложенных в книге, и Т.Е. Денисову, прочитавшую рукопись всей книги и сделавшую много полезных замечаний, способствовавших её улучшению, а также сотрудника кафедры высшей математики МФТИ А.В. Полозова, взявшего на себя нелегкий труд по подготовке рукописи к печати.

Обозначения

Для сокращения записи используются следующие обозначения:

$\forall$ — «для каждого», «для любого», «для всех» (от английского All);

$\exists$ — «существует», «найдется» (от англ. Exists);

$:$ — «такой, что», «такие, что»;

$:=$ — «по обозначению равно»;

$\to$ — «соответствует», «поставлено в соответствие»;

$\Rightarrow$ — «следует»; $\iff$ — «равносильно».

Множество является одним из исходных понятий в математике, оно не определяется. Вместо слова «множество» говорят «набор», «совокупность», «собрание». Множество состоит из объектов, которые принято называть его *элементами*. Вводится также пустое множество ($\varnothing$) как множество, не содержащее ни одного элемента. Множества часто обозначают прописными буквами A, B, C, $\ldots$, а элементы множеств — строчными. Запись $a \in A$, $A \ni a$ означает, что *элемент a содержится во множестве A, принадлежит A, множество A содержит элемент a*. Запись $a \notin A$ означает, что множество A не содержит элемент a.

Запись $A \subset B$, $B \supset A$ означает, что множество A является *подмножеством* множества B, т. е. что $a \in B \ \ \forall\, a \in A$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут $A = B$. Запись $a = b$ означает, что a и b — это один и тот же элемент.

Примеры множеств:

$$A = \{x \,:\, x^2 < 1\}, \quad A = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n,\, \ldots\}.$$

$A \cup B$ (*объединение* множеств A и B) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A, B;

$A \cap B$ (*пересечение* множеств A и B) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству A, так и множеству B.

Глава 1
МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1.1. Аксиоматика

Определение. Непустое множество $\mathbb{R}$ называется *множеством действительных* (*вещественных*) *чисел*, а его элементы — *действительными* (*вещественными*) *числами*, если на $\mathbb{R}$ определены операции сложения и умножения и отношение порядка, удовлетворяющие следующим аксиомам.

(I) Аксиомы сложения $(a, b \to a + b)$

1. $a + b = b + a \;\; \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (коммутативность);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c \;\; \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность);
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \exists\, (-a) \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0$, $(-a)$ называется *противоположным* числом для a.

(II) Аксиомы умножения $(a, b \to ab)$

1. $ab = ba \;\; \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (коммутативность);
2. $a(bc) = (ab)c \;\; \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность);
3. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$: $a1 = a \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists\, \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$: $a\,\frac{1}{a} = 1$, $\frac{1}{a}$ называется *обратным* числом для a.

(I–II) Связь сложения и умножения

1. $(a + b)c = ac + bc \;\; \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

(III) Аксиомы порядка (для любых $a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$)

1. $a \leqslant b$, $b \leqslant a \Rightarrow a = b \;\; \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;
2. $a \leqslant b$, $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c \;\; \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

   $a \leqslant b$ записывается также в виде $b \geqslant a$; $a \leqslant b$ при $a \neq b$ — в виде $a < b$ и $b > a$.

(I–III) Связь сложения и порядка

1. $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

(II–III) Связь умножения и порядка

1. $0 \leqslant a,\ 0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

(IV) Аксиома непрерывности IV_D (вариант *принципа Дедекинда*)

Пусть A, B — непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что

$$a \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

Тогда $\exists\, c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$a \leqslant c \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

Замечание 1. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел удовлетворяет аксиомам (I), (II), (III), (I–III), (II–III), но не удовлетворяет аксиоме (IV). Покажем последнее. Пусть $A = \{a\colon a \in \mathbb{Q},\ a > 0,\ a^2 < 2\}$, $B = \{b\colon b \in \mathbb{Q},\ b > 0,\ b^2 > 2\}$. Тогда во множестве $\mathbb{Q}$ не существует числа c $(\in \mathbb{Q})$ со свойством: $a \leqslant c \leqslant b \ \ \forall\, a \in A, \forall\, b \in B$.

Действительные числа часто будем называть *числами.*

Некоторые следствия аксиом множества действительных чисел

1. Число 0, число, противоположное к a, и решение уравнения $a + x = b$ единственны, $x = b - a \coloneqq b + (-a)$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. Число $b - a$ называется *разностью между* b *и* a.
2. Число $\frac{1}{a}$, обратное к a (при $a \neq 0$), и решение уравнения $ax = b$ (при $a \neq 0$) единственны, причём
$$x = \frac{b}{a} \coloneqq b\,\frac{1}{a} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$
Число $\frac{b}{a}$ называется *частным при делении* b *на* a.
3. $a\,0 = 0 \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.
4. $a, b \in \mathbb{R},\ ab = 0 \Rightarrow a = 0$ или $b = 0$.
5. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ всегда имеет место одно и только одно из соотношений $a < b$, $a = b$, $a > b$.

6. $0 < 1$. (У к а з а н и е: допустив, что $1 < 0$, придти к противоречию, использовав равенство $(-1)(-1) = 1$.)

Примеры числовых множеств.

Множество *натуральных* чисел $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}$, где $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $\ldots$

Множество $\mathbb{N}_0 \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Множество *целых* чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

Множество *рациональных* чисел

$$\mathbb{Q} = \Big\{x \colon x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Множество *иррациональных* чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Отрезок $[a, b]$, интервал (a, b), полуинтервалы $(a, b]$, $[a, b)$

$$[a, b] \coloneqq \{x\ :\ a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) \coloneqq \{x\ :\ a < x < b\},$$
$$(a, b] \coloneqq \{x\ :\ a < x \leqslant b\}, \quad [a, b) \coloneqq \{x\ :\ a \leqslant x < b\}.$$

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ часто называют *числовой прямой*, а числа — *точками числовой прямой*.

§ 1.2. Верхние и нижние грани

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число b (число a) такое, что $x \leqslant b \ \ \forall x \in X$ $(x \geqslant a \ \ \forall x \in X)$.

При этом говорят, что *число b (число a) ограничивает множество X сверху (снизу)*.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным* (*сверху*, *снизу*), если оно не является ограниченным (сверху, снизу).

Определение. *Верхней гранью* непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число b, удовлетворяющее условиям:

1° $x \leqslant b \ \ \forall x \in X$;

2° $\forall\, b' < b\ \exists\, x_{b'} \in X \colon\ x_{b'} > b'$ или иначе: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X \colon$ $x_\varepsilon > b - \varepsilon$.

Определение. *Нижней гранью* непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число a, удовлетворяющее условиям:

1°. $x \geqslant a \quad \forall\, x \in X$;

2°. $\forall\, a' > a\ \exists\, x_{a'} \in X\colon\ x_{a'} < a'$ или иначе: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in \in X\colon\ x_\varepsilon < a + \varepsilon$.

Верхняя и нижняя грани множества X обозначаются соответственно символами $\sup X$, $\inf X$.

Примеры.

$$\sup[a, b] = b, \quad \sup(a, b) = b.$$

Отметим, что верхняя грань множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству, ср. случаи $[a, b]$, (a, b).

Теорема 1 (единственности). *Числовое множество не может иметь больше одной верхней (нижней) грани.*

Доказательство проведём лишь для случая верхней грани. Допуская противное, предположим, что каждое из чисел b и b' $(b \neq b')$ является верхней гранью множества X. Пусть, для определённости, $b' < b$. Тогда, в силу того, что $b = \sup X$, из определения верхней грани следует, что для числа b' $\exists\, x_{b'}\colon x_{b'} \in X$, $x_{b'} > b'$. Но тогда b' не является верхней гранью X. Из полученного противоречия следует ошибочность предположения и утверждение теоремы.

Заметим, что в условиях теоремы не предполагается существование верхней (нижней) грани. Теорема утверждает, что если верхняя (нижняя) грань существует, то она единственна.

Значительно более глубокой является теорема о существовании верхней грани.

Теорема 2 (о существовании верхней грани). *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство проведём лишь для верхней грани. Пусть A — непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество B, элементами которого являются все числа b, ограничивающие множество A сверху.

Тогда

$$a \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

Из аксиомы непрерывности следует, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$a \leqslant c \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B. \tag{1}$$

Покажем, что $\exists \sup A = c$. Первое условие из определения верхней грани выполнено для c в силу левого из неравенств (1).

Покажем, что выполняется и второе. Пусть $c' < c$. Тогда $c' \notin B$, так как для каждого элемента из B выполняется правое из неравенств (1). Следовательно, c' не ограничивает множество A сверху, т. е.

$$\exists\, x_{c'} \in A \,:\, x_{c'} > c',$$

так что второе условие также выполнено.

Следовательно, $c = \sup A$, и теорема доказана.

Определение. *Расширенным множеством действительных чисел* $\overline{\mathbb{R}}$ называется

$$\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

т. е. элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$ являются все действительные числа и ещё два элемента: $-\infty$, $+\infty$.

Во множестве $\overline{\mathbb{R}}$ не введены сложение и умножение, но имеется отношение порядка. Для двух элементов $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ в случае $a, b \in \mathbb{R}$ отношение порядка то же, что в $\mathbb{R}$. В других же случаях оно определено так: $-\infty < a$, $a < +\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$.

Рассматривая множество $X \subset \mathbb{R}$ как подмножество расширенного множества действительных чисел ($X \subset \overline{\mathbb{R}}$), можно обобщить понятие $\sup X$ ($\inf X$). Это обобщающее определение будет отличаться от приведённых выше лишь тем, что в качестве b (a) можно брать не только число, но и элемент $+\infty$ ($-\infty$).

Тогда получим, что для непустого неограниченного сверху (снизу) числового множества X

$$\sup X = +\infty \qquad (\inf X = -\infty).$$

Учитывая теорему 2, приходим к выводу, что всякое непустое числовое множество имеет в расширенном множестве действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$ как верхнюю, так и нижнюю грани.

§ 1.3. Система вложенных отрезков

Определение. Множество отрезков

$$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} \coloneqq \{[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots\},$$
$$-\infty < a_n < b_n < +\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

называется *системой вложенных отрезков*, если $[a_n, b_n] \supset \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е. каждый отрезок содержит следующий за ним.

В следующей теореме формулируется свойство, называемое *непрерывностью множества действительных чисел по Кантору.*

Теорема 1. *Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.*

Доказательство. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ рассмотрим два непустых множества $A = = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \coloneqq \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \coloneqq \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Очевидно, что $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$

$$a_n \leqslant a_{n+m} \leqslant b_{n+m} \leqslant b_m.$$

В силу аксиомы непрерывности существует число c такое, что

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $m = n$ получаем, что

$$c \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

что и требовалось доказать.

Определение. Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *стягивающейся системой вложенных отрезков*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 2. *Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.*

Доказательство. По крайней мере, одна общая точка для отрезков рассматриваемой системы имеется в силу теоремы 1. Покажем, что общих точек не больше одной. Допуская противное, предположим, что каждая из двух различных точек c и c' является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определённости, $c' < c$, т. е. $\varepsilon := c - c' > 0$. По определению стягивающейся системы, $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leqslant c' < c \leqslant b_n$. Отсюда $c - c' \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, что противоречит выбору ε. Теорема доказана.

§ 1.4. Связь между различными принципами непрерывности

Теорема 1 (принцип Архимеда). $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: $n > a$.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Это значит, что $\exists\, a \in \mathbb{R}$: $n \leqslant a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, a ограничивает сверху множество $\mathbb{N}$ и по теореме 1.2.2 $\exists\, b \in \mathbb{R}$: $b = \sup \mathbb{N}$. Тогда по определению верхней грани для числа $b' := b - 1\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: $n > b - 1$. Но тогда $n + 1 > b$, $n + 1 \in \mathbb{N}$, что противоречит тому, что $b = \sup \mathbb{N}$. Теорема доказана.

В следующей диаграмме

$$\mathrm{IV}_D \Rightarrow \mathrm{IV}_{\sup} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \left. \begin{array}{c} \mathrm{IV}_K \\ (A) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathrm{IV}_D$$

приняты обозначения:

IV_D — вариант принципа Дедекинда,

$\mathrm{IV}_{\sup}$ — *принцип верхней грани*, т. е. утверждение теоремы 1.2.2,

IV_K — *принцип Кантора*, т. е. утверждение теоремы 1.3.1,

(A) — принцип Архимеда.

Эта диаграмма показывает, что перечисленные принципы эквивалентны. Любой из них (IV_K в сочетании с (A)) можно было бы взять в качестве аксиомы непрерывности при определении множества действительных чисел, а другие доказать в качестве теорем.

Два из указанных в диаграмме логических следствий уже установлены, другие два предлагается доказать читателю в качестве упражнения. Было доказано также, что $\mathrm{IV}_D \Rightarrow \mathrm{IV}_K$.

Теорема 2 (принцип математической индукции). *Пусть множество* $A \subset \mathbb{N}$ *обладает свойствами:*

1° $A \ni 1$;

2° $A \ni n \Rightarrow A \ni n+1$.

Тогда $A = \mathbb{N}$.

Доказательство. Последовательно убеждаемся, что $A \ni 2 := 1+1$, $A \ni 3 := 2+1$, ... Следовательно, $A \supset \mathbb{N}$. Отсюда и из $A \subset \mathbb{N}$ следует $A = \mathbb{N}$.

Замечание 1. Мы видим, что принцип математической индукции следует непосредственно из определения множества натуральных чисел. Существуют и другие построения теории действительных чисел, в которых этот принцип берется в качестве аксиомы.

§ 1.5. Счётные и несчётные множества

Определение. Будем говорить, что *между двумя множествами X и Y установлено взаимно однозначное соответствие*, и писать $X \leftrightarrow Y$, если

1° любому $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ $(x \to y)$;

2° если $x_1 \neq x_2$, $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, то $y_1 \neq y_2$;

3° $\forall y \in Y \ \exists x \in X$: $x \to y$.

Определение. Два множества X и Y называются *эквивалентными* (пишут $X \sim Y$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Эквивалентные множества называют также *равномощными*, и говорят, что они имеют одну и ту же мощность («одинаковое» количество элементов).

Пример. $\mathbb{N} \sim \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.

Определение. Множество называется *счётным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел, иначе говоря, если его можно занумеровать всеми натуральными числами.

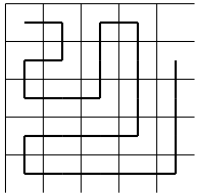
Упражнение 1. Доказать, что бесконечное подмножество счётного множества счётно.

Теорема 1. *Множество рациональных чисел счётно.*

Доказательство. Составим таблицу чисел (открытую снизу и справа), содержащую все рациональные числа.

$n \backslash m$	0	1	-1	2	-2	3	-3	$\ldots$
1	$0/1$	$1/1$	$-1/1$	$2/1$	$-2/1$	$3/1$	$-3/1$	$\ldots$
2	$0/2$	$1/2$	$-1/2$	$2/2$	$-2/2$	$3/2$	$-3/2$	$\ldots$
3	$0/3$	$1/3$	$-1/3$	$2/3$	$-2/3$	$3/3$	$-3/3$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла по пути вида



,

нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее по пути уже встречались. Очевидно, таким способом мы занумеруем все рациональные числа всеми натуральными, что и требовалось показать.

Упражнение 2. Доказать, что объединение счётного множества счётных множеств счётно.

Теорема 2 (Кантора). *Множество всех точек отрезка* $[0, 1]$ *несчётно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда все точки отрезка $[0, 1]$ можно занумеровать: x_1, x_2, x_3, $\ldots$ Поделим отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_1, b_1]$ один из них, свободный от точки x_1. Поделим $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ один из них, свободный от точки x_2. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам системы. Эта точка c не совпадает ни с одной из занумерованных точек x_1, x_2, x_3, $\ldots$, так как произвольная из них x_j не содержится в отрезке $[a_j, b_j]$, в то время как c содержится в этом отрезке.

Итак, допуская, что все точки отрезка $[0, 1]$ занумерованы, мы пришли к противоречию, найдя точку $c \in [0, 1]$, отличную от каждой из занумерованных. Это противоречие показывает, что наше допущение неверно. Теорема доказана.

Об изоморфизме различных множеств действительных чисел

Теорема 3. *Пусть имеются два множества* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$, *удовлетворяющие всем аксиомам множества действительных чисел. Тогда между ними можно установить взаимно однозначное соответствие* $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}'$, *при котором из того, что* $x, y \in \mathbb{R}$, $x', y' \in \mathbb{R}'$, $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$ *следует, что*

1° $x + y \to x' + y'$;

2° $xy \to x'y'$;

3° $x \leqslant y \Rightarrow x' \leqslant y'$.

В этом случае говорят, что множества $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$ действительных чисел изоморфны друг другу и что множество действительных чисел единственно с точностью до изоморфизма.

Глава 2
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 2.1. Определение предела последовательности

Определение. Пусть A — произвольное множество и пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a_n \in A$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots$$

со значениями из A, которая обозначается также символами $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Пара (n, a_n) называется *n-м элементом* последовательности, a_n — *значением n-го элемента* последовательности.

Всякая последовательность имеет счётное множество элементов. Множество значений элементов последовательности может быть конечным или счётным. Например, множество значений элементов последовательности

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ \ldots \tag{1}$$

состоит из двух элементов: 0 и 1.

Пока мы будем рассматривать лишь последовательности со значениями из $\mathbb{R}$ и называть их *числовыми последовательностями* или просто последовательностями.

З а м е ч а н и е 1. Часто вместо «значение элемента последовательности» говорят «элемент последовательности». Например, можно сказать: «Данный отрезок содержит бесконечно много элементов последовательности» и т.п.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Например, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Обобщим понятие предела (числовой) последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Для этого рассмотрим множества $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ и $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. *ε-окрестностью числа a* называется $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — интервал с центром в a; *ε-окрестностью элемента* $a = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, $a = \infty \in \hat{\mathbb{R}}$) называется множество $U_\varepsilon(+\infty) = \Big\{x : x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{\varepsilon}\Big\}$ ($U_\varepsilon(-\infty) = \Big\{x : x \in \mathbb{R}, x < -\frac{1}{\varepsilon}\Big\}$, $U_\varepsilon(-\infty) = \Big\{x : x \in \mathbb{R}, |x| > \frac{1}{\varepsilon}\Big\}$).

Через $U(a)$ при $a \in \hat{\mathbb{R}}$ обозначается произвольная ε-окрестность элемента a.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение. $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a_n \in U_\varepsilon(a)\ \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon$.

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

Определение. $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если в любой его окрестности $U(a)$ содержатся значения почти всех (т. е. всех, за исключением, быть может, конечного числа) элементов последовательности.

Определение. Последовательность называется *сходящейся* (говорят, что она *сходится*), если она имеет конечный (т. е. принадлежащий $\mathbb{R}$) предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся* (говорят, что она *расходится*).

Примерами расходящихся последовательностей являются $\{n\}$ и последовательность (1).

Определение. Последовательность называется *сходящейся в* $\overline{\mathbb{R}}$ (*в* $\hat{\mathbb{R}}$), если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ ($\hat{\mathbb{R}}$).

Расходящаяся последовательность $\{n\}$ является сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$ и сходящейся в $\hat{\mathbb{R}}$.

Расходящаяся последовательность $\{(-1)^n n\}$ сходится в $\hat{\mathbb{R}}$ к ∞.

Бывает полезна формулировка в позитивных терминах утверждения того, что число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$. Приведём её.

Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\exists\, \varepsilon_0 > 0$: $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$: $|a_n - a| \geqslant \varepsilon_0$.

Упражнение 1. Воспользовавшись этой формулировкой, показать, что последовательность (1) расходится.

Теорема 1 (единственности). *Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагая противное, допустим, что для данной последовательности $\{a_n\}$ каждый из двух различных элементов $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$. Тогда по определению предела $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ($\exists\, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$), при котором $a_n \in U_\varepsilon(a)\ \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon$ ($a_n \in U_\varepsilon(a')\ \ \forall\, n \geqslant n'_\varepsilon$).

Положив $\bar{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, получаем, что $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap$ $\cap\, U_\varepsilon(a')\ \ \forall\, n \geqslant \bar{n}$, а это невозможно, так как данное пересечение пусто. Теорема доказана.

§ 2.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* (*ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*), если множество значений её элементов ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу).

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* (*ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*), если

$$\exists\, b \in \mathbb{R}\ :\ |a_n| \leqslant b \quad (a_n \leqslant b,\ a_n \geqslant b) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Приведённые два определения, очевидно, эквивалентны (равносильны).

Теорема 1. *Сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тогда для $\varepsilon = 1\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}$: $|a - a_n| < 1\ \ \forall\, n \geqslant n_1$, так что

$$a - 1 < a_n < a + 1 \quad \forall\, n \geqslant n_1.$$

Пусть $b_1 \coloneqq \max\{a+1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}\}$. Очевидно, что $\{a_n\}$ ограничена сверху числом b_1. Аналогично показывается, что $\{a_n\}$ ограничена снизу. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в силу её ограниченности сверху и снизу.

Пример последовательности (2.1.1) показывает, что не всякая ограниченная последовательность сходится.

Следующие три свойства показывают связь между неравенствами и предельным переходом. В них $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1° $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a < b \Rightarrow \exists\, n_b \in \mathbb{N}$: $a_n < b\ \ \forall\, n \geqslant n_b$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \leqslant b\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leqslant b$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geqslant b\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geqslant b$).

Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $|a_n| \leqslant b \Rightarrow |a| \leqslant b$.

Упражнение 1. Показать, что свойство 3° не сохраняется при замене знаков $\leqslant$ на $<$.

§ 2.3. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

Теорема 1. *Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1° $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3° *если* $b_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство проведём лишь для свойства 3°. Положим $\alpha_n = a - a_n$, $\beta_n = b - b_n$. Тогда $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу свойства 1°. Оценим разность между $\frac{a_n}{b_n}$ и предполагаемым пределом $\frac{a}{b}$.

$$\Delta_n = \left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{ab_n - ba_n}{bb_n}\right| = \\ = \frac{|a(b-\beta_n) - b(a-\alpha_n)|}{|bb_n|} \leqslant \frac{|a|}{|bb_n|}|\beta_n| + \frac{1}{|b_n|}|\alpha_n|.$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такие, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ $\forall\, n \geqslant n'_\varepsilon$, $|\beta_n| < \varepsilon$ $\forall\, n \geqslant n''_\varepsilon$, $|b_n| = |b - \beta_n| > \frac{|b|}{2}$, $\forall\, n \geqslant n'''_\varepsilon$.

Положим $n^*_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon\}$. Тогда

$$\Delta_n \leqslant \frac{2|a|}{b^2}\varepsilon + \frac{2}{|b|}\varepsilon = M\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n^*_\varepsilon,$$

так что Δ_n не превосходит сколь угодно малого числа $M\varepsilon$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, а это означает, по определению предела последовательности, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Следствием арифметических свойств пределов последовательностей является

Лемма 1. *Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.*

Упражнение 1. Построить примеры бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ($\beta_n \neq 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$), для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ не существует.

Упражнение 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда $a_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Арифметические свойства пределов последовательностей не переносятся на бесконечно большие последовательности. Например: $\{a_n\} = \{n + (-1)^n\}$, $\{b_n\} = \{n\}$ — бесконечно большие последовательности, но $\{a_n - b_n\} = \{(-1)^n\}$ не сходится даже в $\hat{\mathbb{R}}$.

§ 2.4. Предел монотонной последовательности

Определение. *Верхней (нижней) гранью последовательности* называется верхняя (нижняя) грань множества значений её элементов. При этом используются обозначения соответственно $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$.

Каждая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхнюю и нижнюю грани.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(a_n \geqslant a_{n+1})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Символ $\{a_n\}\uparrow$ $(\{a_n\}\downarrow)$ означает, что последовательность $\{a_n\}$ возрастающая (убывающая).

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго возрастающей (строго убывающей)*, если $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

З а м е ч а н и е 1. Возрастающие последовательности называют также *неубывающими*, а убывающие — *невозрастающими*.

Теорема 1. *Всякая возрастающая последовательность $\{a_n\}$ имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. Этот предел конечен (т. е. является числом), если последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, и равен $+\infty$, если последовательность $\{a_n\}$ не ограничена сверху.*

Доказательство. Пусть $a \coloneqq \sup\{a_n\} \leqslant +\infty$. Тогда, по определению верхней грани, $a_n \leqslant a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a_{n_\varepsilon} \in U_\varepsilon(a)$. Поскольку $a_{n_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant a$ при $n \geqslant n_\varepsilon$, получаем, что

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, что и требовалось доказать.

Упражнение 1. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для убывающей последовательности.

Пример. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ — стягивающаяся система вложенных отрезков, ξ — (единственная) общая для всех отрезков точка.

Тогда $\{a_n\}$ — возрастающая, $\{b_n\}$ — убывающая последовательности. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, то с помощью доказанной теоремы заключаем, что $\sup\{a_n\} = \xi$.

Аналогично получаем, что $\inf\{b_n\} = \xi$.

§ 2.5. Число e

Определение. $e \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что этот предел существует и конечен. Будем пользоваться *неравенством Бернулли*:

$$(1+h)^n > 1 + nh \quad \text{при} \quad h > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2. \tag{1}$$

Упражнение 1. Доказать (1), используя метод математической индукции.

Рассмотрим вспомогательную последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + \dfrac{n+1}{n} > 2$. Как видим, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом 2. Покажем, что она является убывающей последовательностью:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right]^n =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{1}{n^2-1}\right]^n.$$

Используя неравенство Бернулли (1), получаем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} \geqslant \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{n}{n^2-1}\right] = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

На основании теоремы о сходимости монотонной последовательности заключаем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in [2, x_1] = [2, 4].$$

Но тогда существует и

$$e \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

что и требовалось показать.

Можно показать, что e — иррациональное число, десятичная запись которого

$$e = 2{,}718\ldots$$

§ 2.6. Подпоследовательности

Определение 1. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример. Последовательность 1, 3, 5, 7, ... является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел, а последовательность 1, 5, 3, 9, 7, ... не является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Лемма 1. *Отбрасывание конечного числа первых членов последовательности не влияет ни на сходимость, ни на величину предела (в случае её сходимости).*

Упражнение 1. Доказать лемму.

Определение 2. *Частичным пределом последовательности* называется предел какой-либо её подпоследовательности, сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 3. *Частичным пределом последовательности* называется элемент $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$, любая окрестность $U(\mu)$ которого содержит бесконечное множество элементов последовательности.

Доказательство эквивалентности определений 2 и 3.

Покажем сначала, что из определения 2 следует определение 3. Пусть μ является частичным пределом в смысле определения 2. Тогда, по определению предела, в любой окрестности $U(\mu)$ содержатся почти все элементы некоторой подпоследовательности. Следовательно, μ удовлетворяет определению 3.

Покажем теперь, что определение 2 следует из определения 3. Пусть μ является частичным пределом в смысле определения 3. Выберем какой-либо элемент последовательности $x_{n_1} \in U_1(\mu)$, затем выберем какой-либо элемент последовательности $x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\mu)$, удовлетворяющий условию $n_2 > n_1$. Это возможно, так как $U_{\frac{1}{2}}(\mu)$ содержит бесконечное множество элементов. Затем выберем $x_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\mu)$, $n_3 > n_2$. Продолжая процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся в $\overline{\mathbb{R}}$ к μ, так как $\forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(\mu)$ содержит все члены этой подпоследовательности, начиная с члена с номером k_ε, где $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$.

Пример. Последовательность (2.1.1) имеет в точности два частичных предела: 0 и 1.

Упражнение 2. Пусть $\{r_n\}$ — каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Описать множество её частичных пределов.

Лемма 2. *Последовательность имеет единственный в* $\overline{\mathbb{R}}$ *частичный предел тогда и только тогда, когда она сходится в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится в $\overline{\mathbb{R}}$ к a. Пусть $\{a_{n_k}\}$ — произвольная её подпоследовательность. По определению предела последовательности, любая окрестность $U(a)$ содержит значения почти всех элементов последовательности $\{a_n\}$, а следовательно, и почти все элементы подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет единственный частичный предел. Обозначим его через a и покажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Допустим противное, т. е. что a не является пределом последовательности. Тогда $\exists\, \varepsilon_0 > > 0$ такое, что вне $U_{\varepsilon_0}(a)$ находятся значения бесконечного числа элементов последовательности. Построим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, все элементы которой лежат вне $U_{\varepsilon_0}(a)$. Ниже мы докажем теорему (обобщающую теорему Больцано–Вейерштрасса), в силу которой последовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет частичный предел, являющийся частичным пределом последовательности $\{a_n\}$. Он не совпадает с a, так как $a_{n_k} \notin U_{\varepsilon_0}(a) \ \ \forall\, k$, что противоречит предположению о единственности частичного предела последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Определение 4. *Верхним* (*нижним*) *пределом последовательности* $\{a_n\}$ называется наибольший (наименьший) в $\overline{\mathbb{R}}$ из её частичных пределов.

Его обозначают символом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ($\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$).

Всякая последовательность имеет верхний и нижний пределы, что будет установлено в теореме 2.7.2.

Упражнение 3. Пусть $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{x_n\}$ сходится (т. е. имеет конечный предел), последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный верхний предел. Доказать, что тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

§ 2.7. Теорема Больцано–Вейерштрасса

Теорема 1 (Больцано–Вейерштрасса). *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

Другая её формулировка: *из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема Больцано–Вейерштрасса является следствием более общей и более сильной теоремы.

Теорема 2. *Всякая последовательность имеет (в $\overline{\mathbb{R}}$) верхний и нижний пределы.*

Доказательство (для верхнего предела). Пусть $\{a_n\}$ — произвольная последовательность. $X = \{x\colon x \in \mathbb{R}$, правее x бесконечно много элементов последовательности$\}$.

1 случай. $X = \varnothing$. Это значит, что любая окрестность $U(-\infty)$ содержит почти все элементы последовательности, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Следовательно, $-\infty$ — единственный частичный предел $\{a_n\}$, так что $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

2 случай. $X \neq \varnothing$. Тогда $\exists \sup X =: b$, $-\infty < b \leqslant +\infty$. Покажем, что $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $b'_\varepsilon \in U_\varepsilon(b)$, $b'_\varepsilon < b$. Тогда из определения верхней грани множества следует, что найдется $x'_\varepsilon \in X$: $b'_\varepsilon < x'_\varepsilon \leqslant b$. Поэтому правее b'_ε лежит бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$. Если $b'' > b$, то $b'' \notin X$, так что правее b'' не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $U_\varepsilon(b)$ содержит бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$ и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, b — частичный предел $\{a_n\}$.

Остаётся показать, что b — наибольший частичный предел $\{a_n\}$, т. е. $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Допуская противное, предположим, что существует частичный предел $b^* > b$. Тогда всякая окрестность $U(b^*)$ содержит бесконечно много элементов последовательности. Но это противоречит тому, что при $b < b'' < b^*$ правее b'' (как показано выше) не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Упражнение 1. Доказать теорему Больцано–Вейерштрасса с помощью стягивающейся системы вложенных отрезков.

У к а з а н и е. В качестве первого отрезка рассмотреть отрезок, содержащий все элементы последовательности. Каждый из следующих отрезков получить делением предыдущего отрезка пополам и выбора самой правой из половин, содержащей бесконечное число элементов последовательности.

§ 2.8. Критерий Коши

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для неё выполнено *условие Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon. \qquad (1)$$

Теорема 1 (критерий Коши). *Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Если теперь $n, m \geqslant n_\varepsilon$, то

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, т. е. удовлетворяет условию (1). Покажем, что она сходится.

Шаг 1. Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда из (1) следует, что

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \,:\, |a_n - a_{n_1}| < 1 \quad \forall\, n \geqslant n_1,$$

так что

$$|a_n| < 1 + |a_{n_1}| \quad \forall\, n \geqslant n_1.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ ограничена.

Шаг 2. По теореме Больцано–Вейерштрасса из $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Пусть $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Шаг 3. Покажем, что a является пределом $\{a_n\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (1)

$$\exists\, n_\varepsilon, k_\varepsilon \,:\, |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, k \geqslant k_\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем, что

$$|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

§ 2.9. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Определение. Полуинтервал

$$I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n}) = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}\right)$$

будем называть *десятичным полуинтервалом*, если $\underline{a_n} \geqslant 0$, $\underline{a_n} = \alpha_0,\, \alpha_1\alpha_2,\ \ldots,\, \alpha_n$ — n-значная десятичная дробь ($\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha_i \in \{0, 1,\ \ldots,\ 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$).

Символом $\{I_n\} = \{I_n\}_{n=0}^{\infty} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$ будем обозначать систему вложенных десятичных полуинтервалов. Очевидно, что $\underline{a_n} \uparrow$, $\overline{a_n} \downarrow$, $\overline{a_n} - \underline{a_n} = \frac{1}{10^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть задано $a \geqslant 0$. По принципу Архимеда $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \geqslant a$. Найдём $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$. Разобьём полуинтервал $I_0 \coloneqq [\alpha_0, \alpha_0 + 1)$ на десять равных полуинтервалов и обозначим через I_1 тот из них, который содержит a:

$$I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1;\ \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right) \ni a.$$

Разобьём I_1 на 10 равных полуинтервалов и обозначим через I_2 тот из них, который содержит a:

$$I_2 = \left[\alpha_0, \alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{100}\right) \ni a.$$

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$, $\underline{a_n} = \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ \ldots,\ \alpha_n$, $\overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}$, $I_n \ni a$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. При этом $\underline{a_n}$ ($\overline{a_n}$) называется *нижним* (*верхним*) *n-значным десятичным приближением* числа a.

Мы установили соответствие

$$a \to \{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}. \tag{1}$$

Множество всех систем вложенных десятичных полуинтервалов с непустым пересечением обозначим через Ω.

Легко проверить, что соответствие (1) является взаимно однозначным соответствием

$$\{a \in \mathbb{R} \,:\, a \geqslant 0\} \longleftrightarrow \Omega. \tag{2}$$

Определение. Символ $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ с $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$ называется *бесконечной десятичной дробью.*

Рассмотрим следующее соответствие:

$$\{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \qquad \{I_n\} \in \Omega, \tag{3}$$

если $I_n = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}\right)$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

В силу (1), (3) каждому действительному числу $a \geqslant 0$ поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь

$$a \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots \quad (a \geqslant 0) \tag{4}$$

по правилу

$$a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$$

Заметим, что при этом каждой конечной десятичной дроби a поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь, получающаяся из данной конечной приписыванием справа нулей.

Изучим подробнее соответствие (3).

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ правых концов системы вложенных десятичных полуинтервалов назовём *застойной*, если

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, \overline{a_{n_0}} = \overline{a_{n_0+1}} = \overline{a_{n_0+2}} = \ \ldots$$

Лемма 1. *Система вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ имеет общую точку (т. е. принадлежит Ω) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in I_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a < \overline{a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = a,$$

откуда видно, что последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не может быть застойной.

Пусть теперь последовательность $\{\overline{a_n}\}$ — не является застойной. Рассмотрим систему вложенных отрезков $\{\bar{I}_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}$. По теореме о вложенных отрезках $\exists\, a \in \bar{I}_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. При этом $a \leqslant \overline{a_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Если $\overline{a_{n_0}} = a$ при некотором n_0, то $\{\overline{a_n}\}$ — застойная последовательность. Следовательно, $a < \overline{a_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е. $a \in I_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Определение. Назовём бесконечную десятичную дробь *допустимой*, если она не содержит цифру 9 в периоде.

Лемма 2. *Соответствие* (3) *является взаимно однозначным соответствием между множеством* Ω *и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей:*

$$\Omega \longleftrightarrow \{\textit{допустимые бесконечные десятичные дроби}\} \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{I_n\} \in \Omega$. По лемме 1, последовательность $\{\overline{a_n}\}$ — незастойная. Допустим, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая $\{I_n\}$, в силу (3) содержит девятку в периоде. Это означает, что при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ для всех $n \geqslant n_0$ I_{n+1} является самым правым из 10 полуинтервалов, на которые разбивается I_n. Но тогда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ застойная, что противоречит предположению. Таким образом, при соответствии (3)

$$\Omega \to \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}.$$

Покажем, что это соответствие взаимно однозначное. В самом деле, различным $\{I_n\}$ и $\{I'_n\}$ соответствуют, очевидно, различные допустимые бесконечные десятичные дроби.

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдется последовательность

$\{I_n\}$, которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие. Пусть $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ — произвольная допустимая бесконечная десятичная дробь. Построим последовательность $\{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$, для которой $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{\overline{a_n}\}$ при этом не является застойной, так как иначе все десятичные знаки числа $\underline{a_n}$, начиная с некоторого n_0, были бы равны 9, что противоречит допустимости нашей бесконечной десятичной дроби. Следовательно, $\{I_n\} \in \Omega$ по лемме 1. Очевидно, что построенной последовательности $\{I_n\}$ соответствует в силу (3) именно наша допустимая бесконечная десятичная дробь.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Отображение* (4) *является взаимно однозначным соответствием между множеством всех неотрицательных чисел и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей:*

$$\{a \,:\, a \in \mathbb{R},\; a \geqslant 0\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{допустимые бесконечные} \\ \textit{десятичные дроби} \end{array} \right\}$$

Доказательство следует из (2) и (5).

Распространим отображение (4) на множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, доопределив его для отрицательных чисел $-a < 0$ $(a > 0)$ соответствием

$$-a \to -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots,$$

если $a \leftrightarrow \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ в (4).

При этом $\underline{(-a)_n} = -\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n - \frac{1}{10^n}$, $\overline{(-a)_n} = -\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ называются соответственно нижним и верхним n-значным приближением числа $-a$.

Отображение, доопределённое таким образом, является, очевидно, взаимно однозначным соответствием между множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и множеством всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Построенное взаимно однозначное соответствие дает возможность записывать (изображать) действительные числа в виде допустимых бесконечных десятичных дробей:

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$$

Это соответствие дает возможность также перенести операции сложения и умножения и отношение порядка на множество всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Эквивалентным способом их можно определить и в терминах нижних и верхних n-значных приближений и предельного перехода.

Глава 3
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 3.1. Понятие функции

Определение. Пусть X и Y — произвольные множества. Пусть каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Будем говорить, что *на множестве X задана функция со значениями в Y*. Обозначив эту функцию буквой f, можно записать $f : X \to Y$. Через $f(x)$ обозначают значение функции f на элементе x, т. е. тот элемент $y \in Y$, который поставлен в соответствие элементу $x \in X$, $y = f(x)$.

Элемент $x \in X$ называется *аргументом*, или *независимым переменным*, элемент $y = f(x) \in Y$ — *значением функции*, или *зависимым переменным*.

При этом X называют *областью определения функции* f, $Y_f = \{y : y = f(x),\ x \in X\} \subset Y$ — *областью значений функции* f.

Вместо термина «функция» употребляют равнозначные ему термины «соответствие», «отображение». Для обозначения функции наряду с f применяют также $f(x)$, $y = f(x)$. Таким образом, $f(x)$ может обозначать как значение функции f на элементе x, так и саму функцию f.

Говорят, что функция $f : X \to Y$ *определена на элементе x (в точке x)*, если $x \in X$, и что *функция f не определена на элементе x (в точке x)*, если $x \notin X$. При $E \subset X$ будем говорить, что *функция f определена на E*.

При $E \subset X$ $f(E) \coloneqq \{y\colon\ y = f(x),\ x \in E\}$ называется *образом* E, $f(X) = Y_f$.

При $D \subset Y$ $f^{-1}(D) \coloneqq \{x\colon\ x \in X,\ f(x) \in D\}$ называется *полным прообразом* D.

При $E \subset X$ функция $f_E\colon E \to Y$, $f_E(x) \coloneqq f(x)$ при $x \in E$ называется *сужением* (*ограничением*, *следом*) *функции* f на E.

Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество пар $\{(x, f(x))\colon\ x \in X\}$.

Пусть функция f определена на X, а функция φ — на T, причём $\varphi(T) \subset X$. Тогда *сложная функция* (*суперпозиция*, *композиция* функций f и φ) $f \circ \varphi$ определяется на T формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in T.$$

Функция называется *числовой*, если её значениями являются действительные числа.

Для числовых функций запись $f \leqslant g$ *на* E будет означать, что $f(x) \leqslant g(x)\ \ \forall\, x \in E$. Аналогичный смысл будут иметь записи $f < g$, $f = g$, $f \geqslant g$, $f > g$, $f > 0$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, $f = C$ *на* E.

Определение. Числовая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной* (*сверху*, *снизу*), если множество её значений $f(X)$ ограничено (сверху, снизу).

Определение. Пусть функция f определена на множестве E. Тогда $\sup\limits_E f \coloneqq \sup f(E)$ $(\inf\limits_E f \coloneqq \inf f(E))$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* числовой функции на множестве E.

В ближайших разделах будут изучаться лишь числовые функции, заданные на числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$.

§ 3.2. Элементарные функции и их классификация

Основными элементарными функциями называются функции: постоянная $y = c$ (c — константа), степенная x^α, показательная a^x $(a > 0)$, логарифмическая $\log_a x$ $(a > 0$, $a \neq 1)$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Элементарной функцией называется всякая функция, представимая с помощью конечного числа арифметических действий и композиций основных элементарных функций.

Элементарные функции разбивают на следующие классы.

(I) Многочлены (полиномы).

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

(II) Рациональные функции (рациональные дроби).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ где } P(x),\ Q(x) \text{ — многочлены}, \quad Q(x) \not\equiv 0.$$

(III) Иррациональные функции. *Иррациональной* называется функция, которая не является рациональной и может быть задана с помощью композиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырёх арифметических действий.

Пример. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{x + \frac{1}{x}}}.$

(IV) Трансцендентные функции. Элементарные функции, не являющиеся ни рациональными, ни иррациональными, называются *трансцендентными функциями.* Все тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными.

§ 3.3. Понятие предела функции

Как и раньше, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, $U_\varepsilon(a)$ — ε-окрестность a при $\varepsilon > 0$, $U(a)$ — окрестность a (т. е. $U_\varepsilon(a)$ при некотором $\varepsilon > 0$).

$$\mathring{U}_\varepsilon \coloneqq U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}, \quad \mathring{U}(a) \coloneqq U(a) \setminus \{a\} \tag{1}$$

называются *проколотыми окрестностями точки* a (точкой будем называть как число, так и любой из элементов $-\infty$, $+\infty$, ∞).

Определение 1′. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in R$ называется *пределом функции* f *при* $x \to x_0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; |f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{при } 0 < |x - x_0| < \delta. \qquad (2)$$

Более общим является

Определение 1″. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом функции* f *при* $x \to a$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; f(x) \in U_\varepsilon(A) \text{ при } x \in \mathring{U}_\delta(a).$$

В иной форме определение 1″ можно записать так:

Определение 1. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом* f *при* $x \to a$, если

$$\forall\, U(A) \quad \exists\, U(a) \;:\; f(\mathring{U}(a)) \subset U(A).$$

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Определения 1′, 1″, 1 сформулированы в терминах окрестностей. Приведём определение предела в терминах последовательностей.

Определение 2. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом* f *при* $x \to a$, если $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $\{x_n\}$: $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что $1 \Rightarrow 2$ (т. е. что если A является пределом f при $x \to a$ по определению 1, то A является пределом f при $x \to a$ по определению 2).

Пусть $f\colon \mathring{U}_{\delta_0}(a) \to \mathbb{R}$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле определения 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу определения 1 ($1''$) $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ $\ \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a)$.

В силу сходимости $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ для выбранного $\delta = \delta(\varepsilon)$ $\exists\, n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$: $x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}$ $\ \forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)}$. Но тогда $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ $\forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)}$, т. е. $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, что и требовалось показать.

Покажем теперь, что $2 \Rightarrow 1$. Пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле определения 2. Покажем, что $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле определения 1. Допустим противное, т. е. что

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ :\ \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ :\ f(x) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

В качестве δ будем брать $\delta = \frac{1}{n}$ и соответствующее значение x обозначать через x_n, т. е.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a) : f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

Но это означает, что для последовательности $\{x_n\}$ имеем

$$x_n \neq a, \quad x_n \to a \quad (n \to \infty), \quad f(x_n) \not\to A \quad (n \to \infty),$$

т. е. A не является пределом f при $x \to a$ в смысле определения 2, что противоречит исходному условию. Утверждение доказано.

Пример 1. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

Для этого рассмотрим две сходящиеся к нулю последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}$, $\{x'_n\} = \left\{\dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right\}$. Имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1$.

С помощью определения 2 заключаем, что никакая точка A не может быть пределом $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, т. е. что этот предел не существует.

§ 3.4. Свойства пределов функции

Теорема 1. *Пусть функции f, g, h определены на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $f\leqslant g\leqslant h$ на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$, $f(x)\to A$, $h(x)\to A$ при $x\to a$, $A\in\overline{\mathbb{R}}$. Тогда $g(x)\to A$ при $x\to a$.*

Доказательство. Убедимся, что $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$ с помощью определения 3.3.2. Рассмотрим для этого произвольную последовательность

$$\{x_n\}\ :\ x_n\in\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)\quad\forall\, n\in\mathbb{N},\quad x_n\to a\quad(n\to\infty).$$

Имеем

$$f(x_n)\leqslant g(x_n)\leqslant h(x_n).$$

Поскольку $f(x_n)\to A$, $h(x_n)\to A$ $(n\to\infty)$, то в силу соответствующего свойства последовательностей получаем, что

$$g(x_n)\to A\quad(n\to\infty).$$

В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ заключаем с помощью определения 3.3.2, что $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.

Теорема 2. *Пусть $a\in\overline{\mathbb{R}}$, функции f, g определены на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, $A,B\in\mathbb{R}$. Тогда*

1° $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;

2° $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=AB$;

3° *если дополнительно $g(x)\neq 0$ при $x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$ и $B\neq 0$, то*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

Доказательство всех свойств проводится по одной и той же схеме, поэтому приведём доказательство лишь для свойства 2°.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что

$$x_n\in\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)\quad\forall\, n\in\mathbb{N},\quad x_n\to a\quad(n\to\infty).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$ в силу определения 3.3.2. По свойству пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = AB$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ по определению 3.3.2 получаем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

§ 3.5. Критерий Коши

Теорема 1 (критерий Коши существования конечного предела функции). *Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*:*

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\;:\;|f(x') - f(x'')| < \varepsilon\;\forall\,x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда для $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x') - A| < \varepsilon$, $|f(x'') - A| < \varepsilon\;\;\forall\,x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$. Отсюда $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\;\;\forall\,x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, что и требовалось показать.

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Покажем, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Воспользуемся для этого определением 3.3.2 предела функции (т. е. определением в терминах последовательностей). Пусть $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взято из условия Коши. В силу определения предела последовательности найдется $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)\;\;\forall\,n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} = \overline{n_\varepsilon}$. Отсюда и из условия Коши имеем

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall\,n, m \geqslant \overline{n_\varepsilon}.$$

В силу критерия Коши для последовательностей последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Для завершения доказательства остаётся показать, что для любой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x'_n \to x_0$

$(n \to \infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ (существующий по уже доказанному) также равен A. Предположим противное: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = B \neq$ $\neq A$ для некоторой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x'_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Рассмотрим последовательность $f(x_1)$, $f(x'_2)$, $f(x_3)$, $f(x'_4)$, $\ldots$ Она, очевидно, расходится (имеет два различных частичных предела A и B). Это противоречит доказанной сходимости всякой последовательности значений функции для сходящейся к x_0 последовательности значений аргументов.

Теорема доказана.

§ 3.6. Односторонние пределы

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Множество $U_\delta(x_0 - 0) = (x_0 -$ $- \delta, x_0]$ называют *левой полуокрестностью точки* x_0 *радиуса* δ. Через $U(x_0 - 0)$ обозначают левую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.

Множество $U_\delta(x_0 + 0) = [x_0, x_0 + \delta)$ называется *правой полуокрестностью точки* x_0 *радиуса* δ. Через $U(x_0 + 0)$ обозначают правую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.

Проколотыми полуокрестностями называют соответственно

$$\begin{aligned}
\mathring{U}_\delta(x_0 - 0) &= U_\delta(x_0 - 0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0),\\
\mathring{U}(x_0 - 0) &= U(x_0 - 0) \setminus \{x_0\},\\
\mathring{U}_\delta(x_0 + 0) &= U_\delta(x_0 + 0) \setminus \{x_0\} = (x_0, x_0 + \delta),\\
\mathring{U}(x_0 + 0) &= U(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}.
\end{aligned}$$

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции* f *в точке* x_0 (пишут $f(x_0 - 0) \coloneqq \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$), если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall\, x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Аналогично определяется *предел справа функции* f *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0+0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Будем пользоваться также следующими обозначениями для пределов:

$$f(-\infty) := \lim_{x\to -\infty} f(x), \quad f(+\infty) := \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Упражнение 1. Сформулировать определения пределов слева и справа в терминах последовательностей.

Упражнение 2. Сформулировать и доказать критерий Коши существования конечного одностороннего предела функции.

З а м е ч а н и е 1. Можно расширить общее определение предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, считая в нём a либо числом, либо одним из символов $-\infty$, $+\infty$, ∞, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда это определение предела функции будет содержать и только что введённые понятия предела слева и предела справа.

Лемма 1. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}$, *функция* f *определена на* $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$. *Тогда для существования* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *необходимо и достаточно существования каждого из пределов* $f(x_0 - 0)$ *и* $f(x_0 + 0)$ *и их равенства* $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Упражнение 3. Доказать лемму.

§ 3.7. Пределы монотонных функций

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Если вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, то функцию называют *строго возрастающей* (*строго убывающей*).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными.* Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными.*

Теорема 1. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *функция* f *возрастает на* (a,b). *Тогда*

$$\exists \lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x).$$

З а м е ч а н и е 1. В случае $b = +\infty$ под $+\infty - 0$ понимается $+\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sup\limits_{(a,b)} f = B \leqslant +\infty$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения верхней грани функции следует $\exists\, x_\varepsilon \in (a,b)$: $f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$. Выберем $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ таким, что $x_\varepsilon \notin U_\delta(b)$ (т. е. $U_\delta(b)$ лежит правее x_ε). Тогда, в силу возрастания функции f, $f(\mathring{U}_\delta(b-0)) \subset U_\varepsilon(B)$. Следовательно, $\exists\, f(b-0) = B$.

Упражнение 1. Доказать соответствующую теорему для убывающей функции, а также для предела $f(a+0)$.

Следствие. *Пусть функция* f *монотонна на* $(a,b) \ni x_0$. *Тогда существуют конечные пределы* $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$.

§ 3.8. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$ или является одним из символов $-\infty$, $+\infty$, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Функция f: $U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) *при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$).

Упражнение 1. Показать, что произведение конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

Упражнение 2. Показать, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией.

Далее будем считать, что функции f, g определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, где $a \in \mathbb{R}$ либо является одним из символов: $-\infty$, $+\infty$, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ ($x_0 \in \in \mathbb{R}$).

Определение. Пусть существует постоянная $C > 0$ такая, что
$$|f(x)| \leqslant C|g(x)| \quad \forall\, x \in \mathring{U}(a).$$
Тогда пишут $f = O(g)$ при $x \to a$.

Определение. Функции f и g называются *функциями одного порядка при $x \to a$*, если
$$f = O(g), \quad g = O(f) \quad \text{при} \quad x \to a.$$
При этом пишут $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$.

Лемма 1. *Пусть $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Тогда f и g являются функциями одного порядка при $x \to a$.*

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{|g(x)|}{|f(x)|} = |K| > 0$. Следовательно, при некотором $\delta > 0$
$$\frac{1}{2}|K| \leqslant \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leqslant \frac{3}{2}|K|$$
$\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a)$. Отсюда
$$|g(x)| \leqslant \frac{3}{2}|K|\,|f(x)|, \quad |f(x)| \leqslant \frac{2}{|K|}|g(x)| \quad \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a),$$
т. е. f и g — функции одного порядка.

Определение. Функции f и g называются *эквивалентными* (*асимптотически равными*) *при $x \to a$* (записывается $f \sim g$ при $x \to a$), если $f(x) = \lambda(x)g(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$, причём $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1° $f \sim g$ при $x \to a \Rightarrow g \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);

2° $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a \Rightarrow f \sim h$ при $x \to a$ (транзитивность);

Упражнение 3. Доказать свойства 1°, 2°.

Лемма 2. *Пусть $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$. Тогда $f \sim g$ при $x \to a$.*

Примеры.

a) $x^2 = O(x)$ при $x \to 0$;
b) $x = O(x^2)$ при $x \to +\infty$;
c) $\dfrac{2x^4+1}{x^2-1} \asymp x^2$ при $x \to +\infty$;
d) $\dfrac{x}{x^2-1} \sim -x$ при $x \to 0$;
e) позднее будет показано, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Определение. Функция g называется *бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to a$* (записывается $g = o(f)$ при $x \to a$), если $g(x) = \varepsilon(x) f(x)$, $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, причём $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Если при этом функции f, g являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция g является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция f.

Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает согласно определению, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Примеры.

a) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$;
b) $x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$.

З а м е ч а н и е 1. Последние три определения наиболее содержательны, когда f и g — бесконечно малые или бесконечно большие функции.

Теорема. *Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to a$. Если существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно заметить, что

$$\frac{f}{g} = \frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_2 g_1}$$

и что

$$\lim_{x\to a} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} = 1.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Глава 4
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Непрерывность функции в точке

Будем считать, что функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определения. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняется какое-либо из следующих условий:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \equiv \lim\limits_{x \to x_0} \right)$;

(3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \ \forall x$: $|x - x_0| < \delta$;

(4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$;

(5) $\forall U(f(x_0))\ \exists U(x_0)$: $f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))$;

(6) $\forall \{x_n\}$: $x_n \in U(x_0)$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ имеет место $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

Эквивалентность определений (1) – (6) следует из эквивалентности соответствующих определений предела функции.

Обратим внимание на то, что в определении (3) не запрещается x совпадать с x_0, в определении (6) не запрещается x_n совпадать с x_0. При добавлении в определение (3) условия $x \neq x_0$ или в определение (6) условия $x_n \neq x_0$ они меняются на эквивалентные.

Теорема 1 (о сохранении знака). *Пусть f непрерывна в x_0, $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$. Тогда $\exists U(x_0)$: $f(x) > 0$ $(f(x_0) < 0)$ $\forall x \in U(x_0)$.*

Доказательство. Непрерывность функции f в точке x_0 означает, в частности, что f определена на некоторой окрестности точки x_0. Пусть, для определённости, $f(x_0) = d > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{d}{2} > 0$. Тогда, по определению (3) непрерывности, существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \frac{d}{2}$ при $|x - x_0| < \delta$, откуда следует, что

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0 \text{ при } x \in U_\delta(x_0).$$

Теорема 2 (свойства непрерывных функций). *Пусть функции f, g непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f+g$, $f-g$, fg, а при $g(x_0) \neq 0$ и $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке x_0.*

Доказательство. Напомним, что $(f \pm g)(x) \coloneqq f(x) \pm g(x)$. Аналогично определяются произведение и частное двух функций. Докажем лишь, что $\frac{f}{g}$ непрерывна в x_0 (для $f \pm g$ и fg доказательства аналогичны).

По предыдущей теореме, $\exists\, U(x_0)$: $\operatorname{sign} g(x) = \operatorname{sign} g(x_0)$, так что $g(x) \neq 0$ при $x \in U(x_0)$ и частное $\frac{f}{g}$ определено на $U(x_0)$. Имеем теперь, используя свойства пределов и непрерывность f, g:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0),$$

что и требовалось показать.

Упражнение 1. Доказать непрерывность многочленов и рациональных функций в каждой точке области их определения.

§ 4.2. Предел и непрерывность сложной функции

Пусть функция f определена на X, а функция φ — на T, причём $\varphi(T) \subset X$. Тогда сложная функция (суперпозиция, композиция функций f, φ) $f \circ \varphi$ определяется на T формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in T.$$

Теорема 1. *Пусть f непрерывна в точке x_0, φ непрерывна в точке t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда $f \circ \varphi$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $U(y_0)$ — произвольная окрестность y_0. В силу непрерывности f в x_0

$$\exists\, U(x_0)\ :\ f(U(x_0)) \subset U(y_0)$$

(это означает, в частности, что f определена на $U(x_0)$). В силу непрерывности φ в точке t_0 $\exists\, U(t_0)$: $\varphi(U(t_0)) \subset \subset U(x_0)$.

Последнее означает, в частности, что φ определена на $U(t_0)$ и её значения в точках $U(t_0)$ лежат в $U(x_0)$. Следовательно, на $U(t_0)$ определена сложная функция $f \circ \varphi$, причём

$$(f \circ \varphi)(U(t_0)) \subset U(y_0), \quad \text{где} \quad y_0 = (f \circ \varphi)(t_0).$$

В силу произвольности $U(y_0)$ это означает непрерывность $f \circ \varphi$ в точке t_0 (см. определение (5) непрерывности).

Установим теперь две теоремы о пределе сложной функции.

Теорема 2. *Пусть f непрерывна в точке x_0, φ определена на $\overset{\circ}{U}(t_0)$ и $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$.*

Тогда

$$\exists \lim_{t \to t_0} (f \circ \varphi)(t) = f(\lim_{t \to t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, приходим к тому, что $\forall\, U(y_0)$ $\exists\, U(t_0)$: $(f \circ \varphi)(\overset{\circ}{U}(t_0)) \subset U(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

В силу произвольности $U(y_0)$ это означает, что утверждение теоремы доказано.

Другое доказательство теоремы состоит в следующем. Доопределим функцию φ в точке t_0 (или переопределим её, если она изначально была определена в t_0), положив $\varphi(t_0) = = x_0$. Тогда φ становится непрерывной в точке t_0, и остаётся воспользоваться теоремой 1.

Теорема 3. *Пусть* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. *Пусть* φ *определена на* $\mathring{U}(t_0)$, $\varphi(\mathring{U}(t_0)) \not\ni x_0$ *и* $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$.

Тогда

$$\exists \lim_{t\to t_0} (f\circ\varphi)(t) = y_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим (переопределим) функцию f в точке x_0, положив $f(x_0) = y_0$. Остаётся воспользоваться теоремой 2.

Упражнение 1. Доказать теоремы 1, 2, 3, используя определение предела через последовательности.

§ 4.3. Односторонняя непрерывность и точки разрыва

Напомним, что $U(x_0+0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, означает полуинтервал $[x_0, x_0+\delta)$ при некотором $\delta > 0$.

Определение. Функция f, определённая на $U(x_0+0)$ ($U(x_0-0)$), называется *непрерывной справа* (*слева*) *в точке* x_0, если

$$\exists\, f(x_0+0) = f(x_0) \quad (\exists\, f(x_0-0) = f(x_0)).$$

Упражнение 1. Доказать, что функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в x_0 справа и слева.

Определение. Функция f, определённая на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или если определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение. Точка x_0 разрыва функции f называется *точкой разрыва I-го рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$. При этом разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется *скачком функции* f *в точке* x_0. Если при этом $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, т. е. скачок равен нулю, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I-го рода, называется *точкой разрыва II-го рода.*

Пример. Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

(sgn — произносится «сигнум») имеет в точке 0 разрыв I-го рода.

Упражнение 2. Доказать, что монотонная на отрезке функция имеет на этом отрезке не более чем счётное множество точек разрыва.

§ 4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 1. Функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на* этом *отрезке.* При этом под непрерывностью в точках a, b понимается соответственно непрерывность справа и слева.

Аналогично определяется непрерывность на интервале, на полуинтервале.

Определение 2. Будем говорить, что функция f, определённая на E, *достигает на E своей верхней* (*нижней*) *грани*, если

$$\exists\, x_0 \in E \ : \ f(x_0) = \sup_E f \quad \left(f(x_0) = \inf_E f\right).$$

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нём своих верхней и нижней граней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B \coloneqq \sup\limits_{[a,b]} f \leqslant +\infty$. По определению верхней грани

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a, b] \ : \ f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant \leqslant b \quad \forall n \in \mathbb{N}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить из неё сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$.

Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, получаем, что $x_0 \in [a, b]$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 имеем

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность сходящейся к B последовательности. Поэтому $f(x_{n_k}) \to B$ при $k \to \infty$.

Из последних двух соотношений получаем, что

$$\sup_{[a,b]} f = B = f(x_0).$$

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{[a,b]} f < +\infty$, т. е. что функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x_0.

Аналогично можно доказать, что функция f ограничена снизу и достигает своей нижней грани.

Теорема доказана.

Упражнение 1. Сохранится ли доказательство теоремы Вейерштрасса, если в её условиях отрезок $[a, b]$ заменить на интервал (a, b)? Останется ли верным её утверждение?

Следствие 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Тогда $\exists\, d > 0$: $f(x) \geqslant d \quad \forall x \in \in [a, b]$.*

Определение 3. Пусть функция f задана на E и для некоторой точки $x_0 \in E$ справедливо неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in E.$$

Тогда точка x_0 называется *точкой максимума* функции f на E. Значение $f(x_0)$ называется *максимумом* функции f на E и обозначается символом $\max\limits_E f$.

Аналогично определяются *точка минимума* функции f на E и *минимум* f на E, обозначаемый символом $\min\limits_E f$.

Теорема Вейерштрасса утверждает, в частности, что непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимум и минимум.

Теорема 2 (Коши о промежуточном значении функции). *Пусть функция непрерывна на отрезке* $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. *Пусть* C *находится между* A *и* B.

Тогда $\exists\, \xi \in [a, b]$: $f(\xi) = C$.

Доказательство. Пусть, для определённости, $A = f(a) \leqslant C \leqslant f(b) = B$. Поделим отрезок $[a, b]$ пополам и через $[a_1, b_1]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_1) \leqslant C \leqslant f(b_1)$. Поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_2) \leqslant C \leqslant f(b_2)$. Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, для которых

$$f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n).$$

Пусть $\xi \in [a_n, b_n]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда при $n \to \infty$ $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$ и (в силу непрерывности функции f в точке ξ)

$$f(a_n) \to f(\xi), \quad f(b_n) \to f(\xi) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$f(\xi) \leqslant C \leqslant f(\xi) \Rightarrow f(\xi) = C,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a, b]$ *и* $f(a)$ *и* $f(b)$ *имеют разные знаки. Тогда*

$$\exists\, \xi \in (a, b)\ :\ f(\xi) = 0.$$

Следствие 3. *Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$, $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Тогда функция f принимает все значения из $[m, M]$ и только эти значения.*

§ 4.5. Обратные функции

Рассмотрим (числовую) функцию $f : X \to Y_f$, заданную на (числовом) множестве X. Здесь Y_f означает область её значений. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция (отображение) f задает взаимно однозначное соответствие $X \leftrightarrow Y_f$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y_f$ именно то (единственное) значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, обозначим полученную функцию символом

$$f^{-1} \,:\, Y_f \to X.$$

Функция f^{-1} называется обратной по отношению к f. В силу этого определения

$$\begin{gathered} y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \\ f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in X, \\ f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in Y_f. \end{gathered}$$

Лемма. *Пусть функция $f\colon X \to Y_f$ строго монотонна на X. Тогда обратная функция $f^{-1}\colon Y_f \to X$ строго монотонна на множестве Y_f.*

Доказательство очевидно.

Упражнение 1. Показать, что графики f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема 1. *Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ задана на отрезке $[a,b]$, строго возрастает и непрерывна.*

Тогда обратная функция задана на отрезке $[A, B] = \left[\min\limits_{[a,b]} f, \max\limits_{[a,b]} f\right]$, строго возрастает и непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдём область значений Y_f функции f. Поскольку $A \leqslant f(x) \leqslant B \quad \forall x \in [a,b]$, то $Y_f \subset \subset [A,B]$. С другой стороны, по теореме Коши $\forall C \in [A,B]$ $\exists c \in [a,b]$: $f(c) = C$, так что $[A,B] \subset Y_f$. Следовательно, $Y_f = [A,B]$.

Строгое возрастание f^{-1} следует из леммы.

Установим непрерывность f^{-1}. Пусть сначала $y_0 \in \in (A,B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a,b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a,b].$$

Пусть $y_1 \coloneqq f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 \coloneqq f(x_0 + \varepsilon)$.

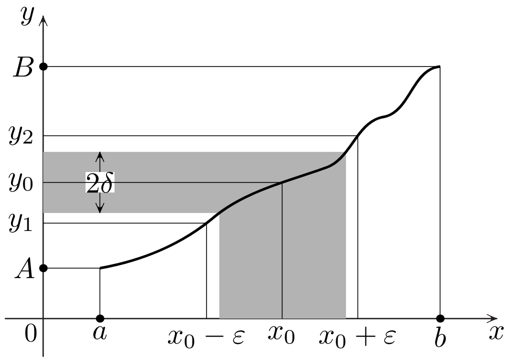


Рис. 4.5

Функция f устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ и отрезка $[y_1, y_2] \subset [A,B]$. При этом $y_1 < y_0 < y_2$. Возьмём $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1, y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, f^{-1} непрерывна в точке y_0.

Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда (односторонняя) непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично (с использованием односторонних окрестностей).

Теорема доказана.

Аналогично формулируется и доказывается теорема для непрерывной и строго на отрезке убывающей функции.

Теорема 2. *Пусть функция* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *задана на интервале* (a,b), *строго возрастает и непрерывна.*

Тогда обратная функция задана на интервале $(A,B) = \left(\inf\limits_{(a,b)} f, \sup\limits_{(a,b)} f\right)$, *строго возрастает и непрерывна.*

Доказательство. Найдём область значений Y_f функции f. Покажем, что

$$A < f(x) < B \quad \forall\, x \in (a,b). \tag{1}$$

В самом деле, допущение, например, того, что $f(x_0) \geqslant B$ при некотором $x_0 \in (a,b)$ означало бы в силу строгого возрастания f, что $f(x) > B$ $\forall\, x \in (x_0, b)$, что противоречит тому, что $B = \sup\limits_{(a,b)} f$.

Покажем теперь, что

$$\forall\, y_0 \in (A,B) \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \,:\, f(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a,b) \,:\, f(x_1) < y_0, \quad f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению $f_{[x_1,x_2]}$ функции f на отрезок $[x_1, x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists\, x_0 \in [x_1, x_2] \,:\, f(x_0) = y_0.$$

Таким образом, (2) установлено.

Из (1), (2) следует, что $f(a,b) = (A,B)$.

Остаётся показать, что обратная функция f^{-1} непрерывна в каждой точке $y_0 \in (A,B)$. Это делается так же, как в теореме 1. Теорема доказана.

Аналогично формулируется вариант теоремы 2 для строго убывающей функции, а также варианты теоремы об обратной функции для полуинтервалов.

§ 4.6. Показательная функция

В этом параграфе буквами r, ρ с индексами будем обозначать рациональные числа. Число $a > 0$.

Будем считать известными следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r.

1° $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;

2° $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;

3° $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

4° $a^0 = 1$;

5° $(ab)^r = a^r b^r$.

Из этих свойств следует, что

$$a^{-r} a^r = a^0 = 1 \;\Rightarrow\; a^{-r} = \frac{1}{a^r} \;\Rightarrow\; a^r > 0 \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Лемма (Бернулли). *Пусть* $a > 1$, r *— рациональное число,* $|r| \leqslant 1$. *Тогда*

$$|a^r - 1| \leqslant 2|r|(a - 1). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть сначала $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda \coloneqq a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Тогда $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \lambda$, $a \geqslant 1 + n\lambda$, откуда $\lambda \leqslant \frac{a-1}{n}$, т. е.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a - 1). \tag{3}$$

Пусть теперь $0 < r \leqslant 1$. Тогда при некотором $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n+1} < r \leqslant \frac{1}{n}$. С помощью (3) и монотонности a^r получаем

$$a^r - 1 \leqslant a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a-1) \leqslant \frac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1)$$

и неравенство (2) в этом случае установлено.

Пусть теперь $-1 \leqslant r < 0$. Тогда

$$|a^r - 1| = a^r |a^{-r} - 1| \leqslant a^r 2(-r)(a-1).$$

Учитывая, что $a^r < 1$, получаем отсюда (2).

Лемма доказана.

Определение. Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Тогда
$$a^x \coloneqq \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в следующем смысле:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ $(r_n \to x)$;
3) в случае $x = r$ значение a^r по этому определению совпадает с прежним.

Установим 1). Пусть $a > 1$, $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда $|r_n - r_m| \leqslant 1$ $\forall\, n, m \geqslant n_1$ в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью неравенства Бернулли имеем для $n, m \geqslant n_1$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leqslant a^{r_m} 2|r_n - r_m|(a-1). \qquad (4)$$

Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ ограничена (как всякая сходящаяся), поэтому при некотором $M > 0$

$$a^{r_m} \leqslant M \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для неё выполнено условие Коши:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \;:\; |r_n - r_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Отсюда и из (4) при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant M 2(a-1)\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполнено условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен. Из (1) и 1° следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} > 0$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда $a^{r_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$ и существование $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ следует из уже установленного существования положительного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}$.

Случай $a = 1$ тривиален.

Установим 2). Пусть $a > 1$, $r_n \to x$, $r'_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ при $n \to \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \leqslant M2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства $a^{r_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$.

Установим 3). Для этого достаточно рассмотреть последовательность $\{r_n\}$, где $r_n = r \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Определение. При $a > 0$ функция $x \to a^x$, $x \in \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной с основанием a*.

Теорема 1. *Показательная функция имеет следующие свойства:*

1° $a^x > 0 \ \ \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$;

2° a^x *при* $a > 1$ *строго возрастает, при* $0 < a < 1$ *строго убывает;*

3° $a^x a^y = a^{x+y}$;

4° $(bc)^x = b^x c^x$;

5° $(a^x)^y = a^{xy}$;

6° a^x *непрерывна на* $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. 1°. Следует из 2° и (1).

2°. Пусть $a > 1$, $x < y$. Пусть r, ρ — рациональные числа, причём $x < r < \rho < y$.

Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$, причём $r_n \leqslant r$, $\rho_n \geqslant \rho$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя монотонность показательной функции с рациональными показателями и предельный переход в неравенстве, получаем

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leqslant a^r < a^\rho \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = a^y,$$

откуда следует, что $a^x < a^y$.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

3°. Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$. Тогда

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} a^{\rho_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+\rho_n} = a^{x+y}.$$

В качестве следствия получаем отсюда, что $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

4°. Доказать в качестве упражнения.

В качестве следствия получаем, что

$$a^x > b^x \quad \text{при} \quad a > b, \quad x > 0,$$

для чего достаточно в 4° взять $c > 1$, $bc = a$.

5°. Символ $r_n \uparrow x$ $(r_n \downarrow x)$ для последовательности $\{r_n\}$ означает, что $r_n \to x$ и при этом она возрастает (убывает).

Пусть $a > 1$, $x > 0$, $y > 0$, $r'_n \uparrow x$, $r''_n \downarrow x$, $\rho'_n \uparrow y$, $\rho''_n \downarrow y$.

Тогда

$$a^{xy} \leftarrow a^{r'_n \rho'_n} = (a^{r'_n})^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^y \leqslant (a^x)^{\rho''_n} \leqslant (a^{r''_n})^{\rho''_n} = \\ = a^{r''_n \rho''_n} \to a^{xy},$$

откуда следует, что $(a^x)^y = a^{xy}$.

Случаи других знаков чисел x, y рассматриваются аналогично.

Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

6°. Заметим сначала, что неравенство Бернулли допускает следующее обобщение:

$$|a^x - 1| \leqslant 2|x|(a-1) \quad \text{при} \quad a > 1, \quad |x| \leqslant 1.$$

Его можно получить, записав неравенство (2) для r_n (вместо r), где $r_n \to x$ $(n \to \infty)$, и перейдя в этом неравенстве к пределу.

Установим непрерывность функции a^x в произвольной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. Пусть сначала $a > 1$. Тогда

$$|a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{\Delta x} - 1| \leqslant a^{x_0} 2|\Delta x|(a-1) \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

§ 4.7. Логарифмическая и степенная функции

Определение. Функция, обратная к функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$. В случае $a = e$ она обозначается $\ln x \coloneqq \log_e x$.

Теорема 1. *Логарифмическая функция*

$$\log_a x : \quad (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

строго монотонна и непрерывна на $(0, +\infty)$, *область её значений есть* $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $A = \inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $B = \sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$.

В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Остаётся воспользоваться теоремой об обратной функции.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.

1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

Сравним $a^{\log_a xy} = xy$ и $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$. Из их совпадения следует 1° (объяснить, почему).

2°. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Сравним $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$ и $a^{\alpha \cdot \log_\alpha x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$. Из их совпадения следует 2°.

3°. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Сравним $a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$ и $a^1 = a$. Из их совпадения следует 3°.

Определение. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \to x^\alpha$: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ называется *степенной функцией* с показателем степени α.

Степенную функцию можно представить в виде

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций степенная функция непрерывна на области определения $(0, +\infty)$.

При $\alpha > 0$ степенную функцию доопределяют в точке 0 значением 0. Тогда она становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

§ 4.8. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

Определение тригонометрических функций известно из школьного курса. Здесь будет установлена их непрерывность.

Лемма.

$$|\sin x| \leqslant |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим часть тригонометрического круга, лежащую в первом квадранте.

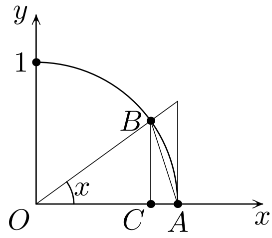


Рис. 4.8

Пусть радианная мера угла $\angle AOB$ равна x. Тогда длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ равна x, а $\sin x = |[BC]|$ — длине отрезка $[BC]$. Из геометрии известно, что

$$\sin x = |[B, C]| < |[B, A]| < x.$$

Этим оценка (1) установлена при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В силу чётности обеих частей (1) она верна и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Остаётся заметить, что (1) очевидно при $x = 0$ и при $|x| \geqslant 1$.

Теорема 1. *Функции* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *непрерывны на областях их определения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

В силу (1)

$$|\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|,$$

так что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что и доказывает непрерывность $\sin x$ в точке x_0.

Непрерывность функции $\cos x$ можно доказать аналогично или воспользоваться равенством $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

Функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны в точках, где знаменатели отличны от нуля, как частные непрерывных функций.

Определение. Символами

$$\arcsin x \ : \ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\arccos x \ : \ [-1,1] \to [0,\pi],$$
$$\operatorname{arctg} x \ : \ (-\infty,\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{arcctg} x \ : \ (-\infty,\infty) \to (0,\pi)$$

обозначаются функции, обратные соответственно к сужению $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, сужению $\cos x$ на $[0,\pi]$, сужению $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, сужению $\operatorname{ctg} x$ на $(0,\pi)$.

Теорема 2. *Функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны на областях их определений. При этом непрерывность* $\arcsin x$, $\arccos x$ *в концах отрезков — областей их определений, понимается как односторонняя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы об обратных функциях.

§ 4.9. Некоторые замечательные пределы

1°.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Рассматривая в тригонометрическом круге сектор с углом радианной меры x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и два треугольника с тем же углом (см. рис. 4.8) и сравнивая их площади, получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

В силу чётности функций $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ те же неравенства верны и при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Переходя в них к пределу при $x \to \to 0$ и учитывая, что $\cos x \to \cos 0 = 1$ в силу непрерывности функции $\cos x$, получаем (1).

2°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Из непрерывности функции $\cos x$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

Заметим, что $\dfrac{\arcsin x}{x} = \left.\dfrac{y}{\sin y}\right|_{y=\arcsin x}$, где вертикальная черта означает, что в дробь $\dfrac{y}{\sin y}$ вместо y следует подставить $\arcsin x$. Таким образом, функция $\dfrac{\arcsin x}{x}$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность $\arcsin x$ в точке $x = 0$, (1) и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

Видоизменённый вариант доказательства состоит в доопределении функции $\dfrac{y}{\sin y}$ единицей в точке $y = 0$ и использовании теоремы о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций.

4°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. Представив $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ в виде $\left.\dfrac{y}{\operatorname{tg} y}\right|_{y=\operatorname{arctg} x}$, повторяем рассуждения из доказательства 3°.

5°. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{2}$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено, что последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ убывающая.

Пусть $0 < x < 1$, $n_x \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n_x+1} < x \leqslant \dfrac{1}{n_x}$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-2}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+2} = \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leqslant$$
$$\leqslant (1+x)^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}. \tag{3}$$

Правая часть неравенства является, как легко проверить, монотонной функцией аргумента x. Поэтому

$$\exists \lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Обоснование первого из этих равенств состоит в том, что если функция f имеет предел $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, то он совпадает с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\}$: $x_n \to 0+0$ при $n\to\infty$. В нашем случае $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Итак, показано, что правая часть (3) стремится к e при $x \to 0+0$.

Аналогично показывается, что левая часть (3) также стремится к e.

Переходя к пределу в неравенствах (3), получаем (2).

Покажем, что

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{4}$$

Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y \coloneqq -x$, $z \coloneqq \frac{y}{1-y} = \frac{-x}{1+x} > 0$, имеем

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}\Big|_{z=\frac{-x}{1+x}}, \quad -1 < x < 0,$$

т. е. функция $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ представлена в виде суперпозиции двух функций $(f\circ\varphi)(x)$, где

$$f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad \varphi : (-1,0) \to (0,+\infty),$$

причём $\lim\limits_{x\to 0-0}\varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{z\to 0+0} f(z) = e$.

Применяя теорему о пределе суперпозиции, получаем, что

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{5}$$

Из (4), (5) следует 5°.

З а м е ч а н и е 1. Теорема о пределе суперпозиции $f\circ\varphi$ была установлена ранее для случая, когда функции f, φ определены в проколотых окрестностях предельных точек.

Упражнение 1. Перенести эту теорему на нужный нам случай односторонних пределов.

З а м е ч а н и е 2. Вместо теоремы о пределе суперпозиции можно воспользоваться доказанной теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций для $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$, где

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} e & \text{при } z \leqslant 0, \\ (1+z)^{\frac{1}{z}+1} & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{1+x} & \text{при } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

6°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \ (a > 0,\ a \neq 1)$.

Представив $\dfrac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, применяем теорему о пределе суперпозиции с учётом примера 5°.

7°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (частный случай 6°).

8°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a \ (a > 0,\ a \neq 1)$.

Пусть $y = a^x - 1$.

Тогда $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$, $\dfrac{a^{x-1}}{x} = \dfrac{y\ln a}{\ln(1+y)}\Big|_{y=a^x-1}$.

Остаётся воспользоваться теоремой о пределе суперпозиции и примером 7°.

9°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (частный случай 8°).

Из рассмотренных примеров следует, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

10°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (доказать самостоятельно, используя 9°, 7°).

Глава 5
ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 5.1. Производная

Определение. Пусть функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется *производной функции* f *в точке* x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$.

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием.*

Упражнение 1. Доказать, что функция, имеющая производную в данной точке, непрерывна в ней.

Примеры. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Теорема 1 (свойства производных, связанные с арифметическими операциями). *Пусть существуют* $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. *Тогда*

1° $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2° $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$, *в частности,* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;

3° *если* $g(x_0) \neq 0$, *то*

$$\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Доказательство приведём лишь для формулы дифференцирования дроби, т. к. другие формулы устанавливаются аналогично. Положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{(f(x_0) + \Delta f)g(x_0) - f(x_0)(g(x_0) + \Delta g)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\, g(x_0) - f(x_0)\,\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)} \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

при $x \to x_0$.

§ 5.2. Дифференциал

Определение. Пусть функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть её приращение в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (1)$$

при $\Delta x \to 0$, где $A \in \mathbb{R}$.

Тогда функцию f называют *дифференцируемой в точке* x_0, а линейную функцию

$$df(x_0) = A\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty, \qquad (2)$$

— *дифференциалом функции f в точке x_0.*

Теорема 1. *Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$. При этом $A = f'(x_0)$.*

Доказательство. 1°. Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо равенство (1).

Поделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что $\exists\, f'(x_0) = A$.

2°. Пусть теперь существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда $f'(x_0) - \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = o(1)$ при $\Delta x \to 0$.

Умножая последнее равенство почленно на Δx, получаем

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0. \qquad (3)$$

Это означает, что приращение функции f представлено в виде (1) с $A = f'(x_0)$, так что f дифференцируема в точке x_0.

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. По условию теоремы приращение $\Delta f(x_0)$ представимо в виде (1). Из (1) следует, что $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и означает непрерывность функции f в точке x_0.

Пример $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, показывает, что непрерывность функции в точке не влечёт за собой её дифференцируемости в этой точке.

Последние две теоремы показывают, что дифференцируемость функции в точке x_0 и существование производной $f'(x_0)$ — эквивалентные свойства и что каждое из них сильнее свойства непрерывности функции в точке x_0.

Представление (1), как показано, можно записать в виде (3). Выражение (2) дифференциала функции f в точке x_0 принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty.$$

В последней формуле переменное Δx часто (ради симметрии записи) обозначают через $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал $df(x_0)$ принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx, \quad -\infty < dx < +\infty.$$

При этом dx называют *дифференциалом независимого переменного*, а $df(x_0)$ — *дифференциалом функции.* Символом $\frac{df}{dx}$ часто обозначают производную f', но теперь видно, что на него можно смотреть как на частное двух дифференциалов.

Теорема 3 (арифметические свойства дифференциалов). *Пусть функции f, g дифференцируемы в точке*

x_0. *Тогда функции* $f \pm g$, fg, *и в случае* $g(x_0) \neq 0$ *также и* $\frac{f}{g}$ *дифференцируемы в точке* x_0, *причём в этой точке*

1° $d(f \pm g) = df \pm dg;$

2° $d(fg) = g\,df + f\,dg;$

3° $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$

Доказательство сразу следует из соответствующих формул для производных. Установим для примера лишь 2°. Формулу производной произведения $(fg)' = f'g + fg'$ умножим почленно на dx. Получим

$$d(fg) = (fg)'dx = g\,f'dx + f\,g'dx = g\,df + f\,dg.$$

§ 5.3. Геометрический смысл производной и дифференциала

Проведём секущую M_0M_h через точки $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ графика функции $y = f(x)$, $h \neq 0$ (см. рис. 5.3).

Уравнение секущей M_0M_h имеет вид

$$y = k(h)(x - x_0) + y_0,$$

$$\text{где} \quad y_0 = f(x_0), \quad k(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Устремим h к нулю. Тогда точка M_h будет стремиться к M_0, секущая — поворачиваться, меняя свой угловой коэффициент $k(h)$, который стремится к конечному пределу тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$: $k(h) \to k_0 = f'(x_0)$.

Прямую, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$ графика и являющуюся «предельным положением секущей», называют *касательной прямой*. Дадим точное определение.

Определение. Пусть существует $f'(x_0)$. *Касательной* к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ называется прямая

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \text{ где } y_0 = f(x_0).$$

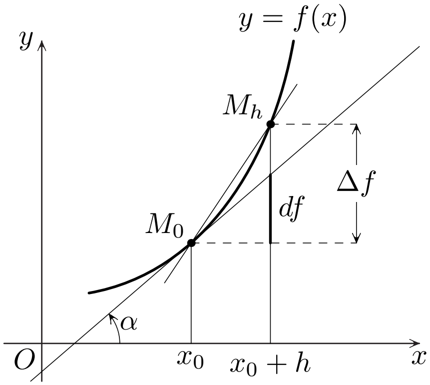


Рис. 5.3

Теорема 1. *Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и существует $f'(x_0)$. Тогда среди всех прямых, проходящих через точку $(x_0, f(x_0))$ ($y_{пр} = \lambda(x - x_0) + y_0$, $y_0 = f(x_0)$), касательная к графику функции f и только она обладает свойством*

$$f(x) - y_{пр} = o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку f дифференцируема в точке x_0, имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Отсюда

$$f(x) - y_{\text{пр}} = [f'(x_0) - \lambda](x - x_0) + o(x - x_0).$$

Правая часть равенства равна $o(x - x_0)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $\lambda = f'(x_0)$, т. е. когда прямая $y_{\text{пр}} = \lambda(x - x_0) + y_0$ является касательной.

Доказанная теорема показывает, что касательная в окрестности точки касания расположена «ближе» к графику функции, чем другие прямые.

Производная $f'(x_0)$, являясь угловым коэффициентом касательной, равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между осью абсцисс и касательной, отсчитываемый от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси ординат. Дифференциал функции $df(x_0) = f'(x)\Delta x$ при заданном Δx равен приращению ординаты касательной.

Определение. Пусть f непрерывна в точке x_0 и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to$ $\to +\infty$ $(-\infty,\ \infty)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда говорят, что f имеет *бесконечную производную* в точке x_0, $f'(x_0) = +\infty$ $(-\infty, \infty)$ и что график функции f имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ *вертикальную касательную* $x = x_0$.

Ранее рассмотренную касательную с конечным угловым коэффициентом $f'(x_0)$ называют часто *наклонной касательной.*

Определение. *Правой* (*левой*) *односторонней производной функции* f *в точке* x_0 называется число

$$f'_+(x_0) \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\left(f'_-(x_0) \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

если этот предел существует и конечен.

Слово «односторонняя» часто опускают и называют $f'_+(x_0)$ *правой*, а $f'_-(x_0)$ — *левой* производной.

Теорема 2. *Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0) =$ $= f'_-(x_0)$.*

Докажите в качестве упражнения.

Теорема 3. *Пусть существует $f'_+(x_0)$. Тогда функция f непрерывна справа в точке x_0.*

Докажите в качестве упражнения. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему о непрерывности слева.

З а м е ч а н и е 1. На основе односторонней производной можно ввести понятие односторонней касательной.

Упражнение 1. Рассмотрите с этой точки зрения пример $f(x) = |\sin x|$.

§ 5.4. Производная обратной функции

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $U(x_0)$, и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. По теореме об обратной функции f^{-1} определена, строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(y_0)$ точки y_0.

В силу дифференцируемости f в точке x_0 приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ связаны соотношением

$$\Delta y = (f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x))\Delta x,$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В силу строгой монотонности f каждое из приращений Δx, Δy однозначно определяется другим. Будем считать теперь Δy независимым, тогда $\Delta x = \varphi(\Delta y)$. При этом $\varphi(0) = 0$, φ строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(0)$ точки 0. Тогда

$$\Delta y = (f'(x_0) + \varepsilon(\varphi(\Delta y)))\Delta x.$$

По теореме о пределе суперпозиции $\varepsilon(\varphi(\Delta y)) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon(\varphi(\Delta y))} \to \frac{1}{f'(x_0)} \text{ при } \Delta y \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Другое доказательство той же теоремы можно провести так:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}\bigg|_{\Delta x = \varphi(\Delta y)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}(\varphi(\Delta y))} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)}\Bigg|_{\Delta x=\varphi(\Delta y)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Здесь запись $\frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)$ означает, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ рассматривается как функция Δx. Принципиально важным является предпоследнее равенство, которое написано на основании теоремы о пределе суперпозиции.

§ 5.5. Производная сложной функции

Теорема 1. *Пусть* $\exists\, f'(y_0), \varphi'(x_0)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. *Тогда* $\exists\,(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$.

Доказательство. Из существования $f'(y_0)$, $\varphi'(x_0)$ следует, что f, φ непрерывны соответственно в точках y_0, x_0. По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций суперпозиция

$$z = F(x) = f(\varphi(x))$$

определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Из условий теоремы следует, что приращения Δz и Δy соответственно функций f и φ представимы в виде

$$\Delta z = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \quad \varepsilon(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0,$$
$$\Delta y = \varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x, \quad \varepsilon_1(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Доопределим функцию ε в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.

Считая, что в первом из этих равенств приращение Δy вызвано приращением Δx, выразим Δz через Δx, подставляя Δy из второго равенства в первое.

$$\Delta z = \Delta F(x_0) = f'(y_0)[\varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x] + \varepsilon(\Delta y)\Delta y =$$
$$= f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Поделив это равенство почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\varphi'(x_0) + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$, и переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ дифференциал сложной функции $f(x)$, где функции $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ и $x\colon (\alpha,\beta) \to \to (a,b)$ имеют производные $f'(x_0)$, $x'(t_0)$, $x_0 = x(t_0)$. В силу теоремы о производной сложной функции

$$df(x)(t_0) = f'(x(t_0))x'(t_0)\,dt = f'(x(t_0))\,dx(t_0).$$

Опустим обозначение аргумента t_0:

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad \text{где} \quad x:\ (\alpha,\beta) \to (a,b).$$

Здесь dx — дифференциал функции. Мы видим, что дифференциал $df(x)$ имеет ту же форму, как если бы x было независимым переменным. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала.*

Пример. Найдём производную функции $y = x^\alpha$: $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Эту функцию можно представить в виде $y = e^{\alpha \ln x} = e^u$, $u = \alpha \ln x$.

Применяя теорему о производной сложной функции, имеем $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}\alpha\,\dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

З а м е ч а н и е. В теореме 1 функции f, φ определены на некоторых окрестностях $U(y_0)$, $U(x_0)$ соответственно. Это условие можно заменить более общим, потребовав, чтобы f или φ или обе функции были определены лишь на полуокрестностях соответственно точек y_0, x_0, но чтобы при этом сложная функция имела смысл. Тогда равенство $(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$ по-прежнему будет иметь место, если под производными понимать при необходимости односторонние производные.

Покажем это. Пусть, например, функция $f\colon U(y_0-0) \to \to \mathbb{R}$ имеет одностороннюю производную $f'_-(y_0)$. Доопределим f на $\mathring{U}(y_0+0)$, положив

$$f(y) = f(y_0) + f'_-(y_0)(y-y_0) \quad \text{при} \quad y > y_0.$$

Тогда $f\colon\ U(y_0) \to \mathbb{R}$ будет иметь обычную производную $f'(y_0) = f'_-(y_0)$.

Аналогично можно продолжить и функцию φ, если она задана лишь в полуокрестности точки x_0. После возможных доопределений функций f, φ указанным способом остаётся лишь применить к ним теорему 1.

Покажем, как находить производную *параметрически заданной функции*, т. е. функции $y(x)$, заданной в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Будем считать, что φ непрерывна и строго монотонна на $U(t_0)$, $x_0 = \varphi(t_0)$ и что существуют производные $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$, $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \psi'(t_0)\frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Рассмотрим теперь неявно заданную функцию. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее для каждого $x \in$ $\in U(x_0)$ решение $y = f(x)$, так что

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in U(x_0).$$

При этом говорят, что функция f *неявно задана* уравнением $F(x, y) = 0$.

Предполагая, что f дифференцируема на $U(x_0)$ и что левая часть тождества $F(x, f(x)) \equiv 0$ представляет собой дифференцируемую функцию, продифференцируем это тождество почленно. Иногда оказывается (это зависит от вида F), что продифференцированное тождество может быть разрешено относительно f'. Выразив f', мы найдём тем самым производную неявно заданной функции.

Пример. Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Пусть $y = f(x)$ — одно из решений уравнения $x^2 + y^2 - 1 = 0$ при $x \in (-1, 1)$. Тогда $x^2 + (f(x))^2 - 1 \equiv 0$ является тождеством на $(-1, 1)$.

Предполагая, что f дифференцируема на $(-1,1)$, продифференцируем это тождество. Получим $2x+2f(x)f'(x)=0$, т. е. $f'(x)=-\frac{x}{f(x)}$.

§ 5.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f'(x)$, $x\in U(x_0)$. Производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x. Если она в точке x_0 имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Вообще, *производная порядка n функции f* определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0)=(f^{(n-1)}(x))'\Big|_{x=x_0},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Из него видно, в частности, что если существует производная $f^{(n)}(x_0)$, то производная $f^{(n-1)}$ должна быть определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Производные порядка n обозначают символами $f^{(n)}(x_0)$ или $\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}$.

Удобно считать, что $f^{(0)}(x)\coloneqq f(x)$.

Теорема 1 (свойства производных высших порядков). *Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, $g^{(n)}(x_0)$. Тогда в точке x_0*

1° $\exists\,(f\pm g)^{(n)}=f^{(n)}\pm g^{(n)}$;

2° **(Формула Лейбница)**
$\exists\,(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+C_n^1f^{(n-1)}g^{(1)}+\ldots+fg^{(n)}=$
$=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kf^{(n-k)}g^{(k)}$, где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Следствие *из формулы Лейбница:*

$$(cf)^{(n)}(x_0)=cf^{(n)}(x_0),\ \text{если}\ \exists\,f^{(n)}(x_0).$$

Доказательство формулы Лейбница проведём по индукции. В случае $n = 1$ эта формула была установлена раньше. В предположении, что она верна для производной порядка n, установим её для производной порядка $n + 1$.

Имеем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(n+1-j)} g^{(j)} =$$

$$= C_n^0 f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n+1-k)} g^{(k)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

Осталось показать, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Имеем

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

Введём теперь понятие дифференциалов высших порядков.

Если функция f такова, что её производная f' существует на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, то её дифференциал

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad x \in U(x_0),$$

является функцией аргумента x (помимо этого дифференциал является линейной функцией аргумента dx, но в данном случае будем считать dx фиксированным). Если f' дифференцируема в точке x_0 (т. е. $\exists\, f''(x_0)$), то можно рассмотреть дифференциал от $df(x)$, т. е. $\delta(df(x))$. Этот дифференциал обозначается новым символом δ, чтобы отличить его от ранее построенного дифференциала df. Соответственно дифференциал независимого переменного в выражении дифференциала δ будем обозначать через δx.

Определение. *Вторым дифференциалом* функции f в точке x_0 называется

$$d^2f(x_0) \coloneqq \delta(df)(x_0)\Big|_{\delta x=dx} = \delta(f'(x)\,dx)(x_0)\Big|_{\delta x=dx} =$$
$$= (f'(x)\,dx)'(x_0)\delta x\Big|_{\delta x=dx} = f''(x_0)(dx)^2.$$

В этой цепочке равенств содержится не только определение второго дифференциала (первое равенство), но и его выражение через $f''(x_0)$.

Определение. *n-м дифференциалом функции f* в точке x_0 называется

$$d^nf(x_0) \coloneqq \delta(d^{n-1}f)(x_0)\Big|_{\delta x=dx}.$$

Легко убеждаемся, применяя метод математической индукции, что если существует $f^{(n)}(x_0)$, то существует

$$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n. \tag{1}$$

Последняя формула при $n \geqslant 2$ (в отличие от $n = 1$) верна лишь в случае, когда x — независимое переменное. Покажем это в случае $n = 2$. Найдём выражение второго дифференциала сложной функции $f(x)$, считая, что функция f дважды дифференцируема в точке x_0, а её аргумент x является дважды дифференцируемой в точке t_0 функцией $x = x(t)$ некоторого независимого переменного t, $x_0 = x(t_0)$. Имеем

$$d^2f(x) = (f(x))''_{tt}(dt)^2 = (f'(x)x')'_t(dt)^2 =$$
$$= (f''(x)(x')^2 + f'(x)x'')(dt)^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Итак, $d^2f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$.

Сравнивая полученное выражение с (1) при $n = 2$, убеждаемся, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы.

Упражнение 1. Используя формулы для производных $(f \pm g)^{(n)}$, $(fg)^{(n)}$, получить с помощью (1) формулы для дифференциалов $d^n(f \pm g)$, $d^n(fg)$.

В дальнейшем будет использоваться следующее

Определение. Функция f называется *непрерывно дифференцируемой в точке* (*на интервале*, *на отрезке*), если её производная f' непрерывна в этой точке (на интервале, на отрезке). При этом в концах отрезка производная и непрерывность понимаются как односторонние.

Если заменить в этом определении f' на $f^{(n)}$, $n \geqslant 1$, получим определение n раз *непрерывно дифференцируемой* функции.

Глава 6
СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 6.1. Теоремы о среднем

Теорема 1 (Ферма). *Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение среди её значений на $U(x_0)$. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть для определённости $f(x_0) = \min\limits_{U(x_0)} f$. Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$ при $\Delta x < 0$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to \to 0$, получаем соответственно $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$. Отсюда следует, что $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2 (Ролля). *Пусть функция f:*

1° *непрерывна на $[a, b]$;*

2° *дифференцируема на (a, b);*

3° *$f(a) = f(b)$.*

Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Случай $f \equiv \mathrm{const}$ тривиален. Будем считать далее, что $f \not\equiv \mathrm{const}$. По теореме Вейерштрасса в некоторых точках отрезка $[a, b]$ функция f принимает максимальное и минимальное значения. По крайней мере, одна из этих точек лежит на интервале (a, b), так как $\min\limits_{[a,b]} f < \max\limits_{[a,b]} f$. Но тогда по теореме Ферма производная f' в этой точке равна нулю, что и требовалось доказать.

Теорема 3 (Лагранжа о конечных приращениях). *Пусть функция f:*

1° *непрерывна на $[a, b]$,*

2° *дифференцируема на (a, b).*

Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства построим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, в которой число λ выберем так, чтобы F удовлетворяла условию 3° теоремы Ролля: $F(a) = F(b)$.

Тогда

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \text{ т. е. } \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (1)$$

Очевидно, для F выполнены и условия 1°, 2° теоремы Ролля. По теореме Ролля для функции F получаем, что

$$\exists\, \xi \in (a, b) \;:\; F'(\xi) = 0, \quad \text{т. е.} \quad f'(\xi) - \lambda = 0, \qquad (2)$$

где $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Отсюда и следует утверждение теоремы Лагранжа.

Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b), \qquad (3)$$

называют *формулой конечных приращений Лагранжа*. Перепишем её в виде

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \xi \in (a, b),$$

откуда легко увидеть геометрический смысл утверждения теоремы Лагранжа: найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что касательная к графику функции f в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Упражнение 1. Доказать, что если для непрерывной в точке x_0 функции f существует $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то существует $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Каков аналог этого утверждения для односторонних пределов? Может ли существующая на $U(x_0)$ производная f' иметь скачок в точке x_0?

Упражнение 2. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет производную на $(-\infty, +\infty)$, разрывную в точке $x_0 = 0$.

Теорема 4 (Коши). *Пусть функции f, g:*

1° *непрерывны на $[a, b]$;*

2° *дифференцируемы на (a, b);*

3° *$g' \neq 0$ на (a, b).*

Тогда справедлива формула конечных приращений Коши*:*

$$\exists \xi \in (a, b) \ : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля g' должна была бы обращаться в нуль в некоторой точке (a, b), что противоречит условию 3°.

Пусть $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in [a, b]$. Выберем λ так, чтобы $F(a) = F(b)$, т. е. $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

При выбранном таким образом λ, функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, $\exists \xi \in (a, b)$: $F'(\xi) = 0$. Последнее равенство переписывается в виде

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, когда $g(x) = x$.

Упражнение 3. Можно ли доказать теорему Коши, написав формулы конечных приращений Лагранжа для функции f и для функции g и поделив почленно первую формулу на вторую?

§ 6.2. Формула Тейлора

В этом параграфе будем считать, что $n \in \mathbb{N}$, хотя некоторые утверждения сохраняются и для $n = 0$.

Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(f,x) = P_n(f,x) + r_n(f,x), \tag{1}$$

которое называется *формулой Тейлора* функции f в точке x_0. При этом $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *k-м членом* формулы Тейлора, $P_n(f,x)$ — *многочленом Тейлора*, $r_n(f,x)$ — *остаточным членом* формулы Тейлора (после n-го члена).

Часто вместо $P_n(f,x)$, $r_n(f,x)$ пишут соответственно $P_n(x)$, $r_n(x)$.

Лемма. *Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, f' на $\mathring{U}(x_0)$. Тогда в $\mathring{U}(x_0)$*

$$(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x).$$

Доказательство.

$$(r_n(f,x))' = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)' =$$
$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = r_{n-1}(f',x).$$

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула (1), в которой $r_n(f,x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае функция f дифференцируема в точке x_0. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0,$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Предположим, что утверждение теоремы верно при $n - 1$ ($\geqslant 1$) вместо n и покажем, что оно верно в приведённой форме. Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях и лемму, имеем (считая, для определённости, что $x > x_0$)

$$r_n(f, x) = r_n(f, x) - r_n(f, x_0) = r_{n-1}(f', \xi)(x - x_0),$$

где $x_0 < \xi < x$.

По предположению индукции $r_{n-1}(f', \xi) = o((\xi - x_0)^{n-1}) = o((x - x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$. Следовательно,

$$r_n(f, x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

что и требовалось показать.

Теорема 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть* $x > x_0$ ($x < x_0$), $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ *непрерывна на отрезке* $[x_0, x]$ ($[x, x_0]$), *и пусть существует* $f^{(n+1)}$ *на интервале* (x_0, x) ((x, x_0)). *Тогда справедлива формула* (1), *в которой*

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \\ = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о будем проводить по индукции, считая для определённости $x > x_0$. При $n = 0$ теорема утверждает, что при некотором $\theta \in (0, 1)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0).$$

Это утверждение верно, так как оно совпадает с доказанной ранее формулой конечных приращений Лагранжа.

Предположим, что утверждение верно при $n - 1$ ($\geqslant 0$) вместо n и установим, что оно верно в приведённом виде.

Используя теорему Коши о среднем и лемму, имеем

$$\frac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f,x)-r_n(f,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} =$$
$$= \frac{r_{n-1}(f',\xi)}{(n+1)(\xi-x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(\eta)}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!},$$

где $x_0 < \eta < \xi < x$, а предпоследнее равенство написано в силу предположения индукции.

Теорема доказана.

Теорема 3 (единственности). *Пусть на* $\mathring{U}(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$
$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. *Тогда* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_n = b_n$.

Доказательство. Вычитая почленно одно представление функции f из другого, видим, что достаточно доказать, что из

$$c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n) \text{ при } x \to x_0 \quad (2)$$

следует, что $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Переходя в равенстве (2) к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_0 = 0$. Учитывая это, поделим (2) почленно на $x - x_0$. Получим для $x \in \mathring{U}(x_0)$

$$c_1+c_2(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^{n-1} = o((x-x_0)^{n-1}) \text{ при } x \to x_0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_1 = 0$.

Учитывая это и деля обе части последнего равенства на $x - x_0$, после перехода к пределу получаем, что $c_2 = 0$. Поступая так же и дальше, приходим к равенствам $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть существует* $f^{(n)}(x_0)$, *и пусть*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \quad (3)$$

Тогда (3) *является разложением* f *по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Доказательство. По теореме о разложении функции по формуле Тейлора с *остаточным членом в форме Пеано* имеет место равенство (1). В силу теоремы единственности (3) совпадает с (1).

Упражнение 1. Пусть для функции f выполняется (3) при $n = 3$. Выяснить, влечёт ли это за собой существование $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$.

Пример. При $|x| < 1$ $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, т. е. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + r_n(x)$, где $r_n(x) = \frac{-x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ при $x \to 0$. По следствию из теоремы единственности, полученное разложение функции $f(x) = \frac{1}{1-x}$ является формулой Тейлора.

Замечание 1. Доказанные в этом параграфе три теоремы и следствие справедливы и в случае, когда функция f задана в полуокрестности $U(x_0 + 0)$ или $U(x_0 - 0)$. При этом производные $f^{(k)}(x_0)$ понимаются как односторонние.

Примеры разложений функций по формуле Тейлора.

1°. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Имеем $f^{(k)}(x) = e^x$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

где при $0 < \theta < 1$ $r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = O(x^{n+1}) = o(x^n)$ при $x \to 0$.

2°. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Имеем

$$\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{\infty} = \{0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots\},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

при $x \to 0$. Здесь выписан остаточный член после равного нулю $(2n+2)$-го члена формулы Тейлора.

3° $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$. Аналогично разложению для $\sin x$ получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

при $x \to 0$, где $0 < \theta < 1$.

4° $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$
$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k},$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$
$$r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} = o(x^n) \text{ при } x \to 0.$$

5° $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $x_0 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0.$$

Упражнение 2. Получить формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k,$$

используя разложение $(1 + x)^n$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (или в форме Пеано и теорему единственности).

Упражнение 3. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right),$$

используя разложения функций по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

З а м е ч а н и е. Формулу Тейлора в случае $x_0 = 0$ называют ещё *формулой Маклорена.*

§ 6.3. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя

Пусть в задаче о нахождении предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ и числитель и знаменатель стремятся к нулю или оба стремятся к бесконечности. В этих случаях говорят, что мы имеем дело с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ соответственно. Нахождение этого предела (если он существует) называют *раскрытием неопределённости.* Одним из приёмов раскрытия неопределённости является выделение главных частей числителя и знаменателя (см. упр. 6.2.3). Здесь будет обоснован другой способ, называемый *правилом Лопиталя* и состоящий в том, что вычисление предела отношения функций заменяется вычислением предела отношения их производных.

Теорема 1. *Пусть функции f, g*

1° *дифференцируемы на интервале (a, b), $b - a < \infty$;*

2° $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$*;*

3° $g' \neq 0$ *на (a, b);*

4° *существует* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим f, g, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда f, g непрерывны на $[a, b)$. По теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < b.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \delta < b - a \ : \ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_\varepsilon(A)$$

при $a < x < a + \delta < b$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема 2. *Пусть функции f, g*

1° *дифференцируемы на $(c, +\infty)$, $c > 0$;*
2° $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
3° $g' \neq 0$ *на $(c, +\infty)$;*
4° *существует* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$. Тогда

$$\lim_{t\to0+0}\frac{\frac{d}{dt}\, f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{d}{dt}\, g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = A.$$

По теореме 1 $\exists \lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = A$.

Отсюда следует, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. Заметим, что в приведённом доказательстве два раза было использовано свойство предельного перехода в суперпозиции функций, причём в ситуации, не рассмотренной в § 4.2. Читателю предлагается обосновать соответствующие предельные переходы в качестве упражнения. Один из способов такого обоснования опирается на определение 3.3.2.

Теорема 3. *Пусть функции f, g*

1° *дифференцируемы на интервале (a, b), $-\infty < a < < b < \infty$;*

2° $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$;

3° $g' \neq 0$ *на* (a, b);

4° *существует* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon \in \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Выберем точку $x_\varepsilon \in (a, b)$ так, что

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A) \quad \forall\, x \in (a, x_\varepsilon).$$

При $a < x < x_\varepsilon$ по теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1}$$

Выберем теперь $\delta > 0$ столь малым, что при $a < x < a + + \delta < x_\varepsilon < b$,

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \left|\frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда (1), вынеся из левой части множитель $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \, \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < a + \delta. \tag{2}$$

Первый множитель правой части мало равенства (2) отличается от 1: его значение принадлежит интервалу $(1 -$

$-3\varepsilon, 1+3\varepsilon)$. Второй множитель правой части $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_\varepsilon(A)$. Следовательно, правая часть (2) и равная ей левая

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in U_\eta(A),$$

где $\eta = \eta(\varepsilon) = \eta(A, \varepsilon) > 0$ при $x \in U_\delta(a+0)$.

При этом при фиксированном A можно $\eta(\varepsilon)$ взять сколь угодно малым, если предварительно выбрать $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

В качестве некоторого пояснения к её доказательству покажем, как выбрать $\eta(A, \varepsilon)$ в зависимости от ε. Остановимся лишь на случае $0 < A < +\infty$. Тогда второй множитель правой части равенства (2) лежит в $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, а первый (как мы видели) в $(1-3\varepsilon, 1+3\varepsilon)$. Следовательно, их произведение лежит в интервале

$$(A - 3A\varepsilon - \varepsilon + 3\varepsilon^2,\ A + 3A\varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon^2) \subset U_\eta(A),$$

где $\eta = \eta(A, \varepsilon) = 3A\varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon^2$.

З а м е ч а н и е. Теоремы 1–3 остаются в силе в случаях предельных переходов $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to a$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ с соответствующими изменениями их формулировок.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

Здесь первое равенство написано при условии, что предел его правой части существует, и становится оправданным после доказательства существования этого предела.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \ \ldots$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0.$$

Теоремы 1–3 дают достаточные условия раскрытия неопределённостей. Эти условия не являются необходимыми.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x}$. Этот предел существует, но его нельзя найти с помощью правила Лопиталя.

Правило Лопиталя помогает раскрыть неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Встречаются и другие виды неопределённостей:

$$0\cdot\infty, \quad +\infty-(+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Первую и вторую их них преобразованием выражений сводят к неопределённости вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Выражения, представляющие каждую из трёх последних неопределённостей, полезно прологарифмировать.

Упражнение 1. Найти $\lim\limits_{x\to0+0} x^x$.

Глава 7
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 7.1. Монотонность и экстремумы функции

Теорема 1. *Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда*

1° *условие $f' \geqslant 0$ ($f' \leqslant 0$) на (a, b) необходимо и достаточно для того, чтобы функция f возрастала (убывала) на (a, b);*

2° *условие $f' > 0$ ($f' < 0$) на (a, b) достаточно, чтобы функция f строго возрастала (строго убывала) на (a, b).*

Доказательство. *Достаточность* следует из формулы конечных приращений Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad a < x_1 < \xi < x_2 < b.$$

Необходимость. Пусть f возрастает на (a, b), $x_0, x \in \in (a, b)$. Тогда $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) \geqslant 0$.

Заметим, что условие $f' > 0$ на (a, b) не является необходимым для строгого возрастания функции f на (a, b), как это видно на примере $f(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$.

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции f, если на некоторой окрестности $U(x_0)$ функция f определена и

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)) \quad \forall\, x \in \mathring{U}(x_0).$$

Если при этом нестрогие неравенства можно заменить на строгие, то точка x_0 называется *точкой строгого максимума* (*строгого минимума*) функции f.

Точки максимума (строгого максимума) и точки минимума (строгого минимума) называются точками *экстремума* (*строгого экстремума*).

Поскольку определение точки максимума связано с поведением функции в сколь угодно малой окрестности этой точки, часто вместо термина «максимум» употребляют термин «локальный максимум». Аналогично объясняются термины «локальный минимум», «строгий локальный максимум (минимум)», «локальный экстремум», «строгий локальный экстремум».

Теорема 2 (Ферма) (необходимые условия экстремума). *Пусть x_0 — точка экстремума функции f. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о было приведено в § 6.1.

Условие $f'(x_0) = 0$ не является достаточным для точки экстремума, как видно на примере функции $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть f непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на $\mathring{U}(x_0)$. Пусть f' меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда x_0 — точка строгого экстремума функции f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определённости $f' > 0$ на $\mathring{U}(x_0 - 0)$, $f' < 0$ на $\mathring{U}(x_0 + 0)$. Тогда из формулы конечных приращений Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ видно, что приращение функции f меняет знак с «$-$» на «$+$» при переходе через точку x_0. Следовательно, x_0 является точкой строгого максимума функции f.

Условия теоремы не являются необходимыми условиями экстремума, как это видно на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определение. Точка x_0 называется *точкой возрастания* (*убывания*) функции f, если в некоторых полуокрестностях точки x_0

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) < 0 \ (> 0) \ \text{ на } \mathring{U}(x_0 - 0), \\ f(x) - f(x_0) > 0 \ (< 0) \ \text{ на } \mathring{U}(x_0 + 0). \end{cases}$$

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Точка $x_0 = 0$ не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания функции f.

Упражнение 1. Показать, что если $f'(x_0) > 0$, то x_0 является точкой возрастания функции f.

Теорема 4 (достаточные условия точек строгого экстремума, точек возрастания и точек убывания в терминах производных высших порядков). *Пусть $f'(x_0) = \ \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда*

1° *при чётном $n = 2k$ x_0 — точка строгого экстремума (строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0) > 0$, строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0) < 0$) функции f;*

2° *при нечётном $n = 2k + 1$ x_0 — точка возрастания (точка убывания) функции f при $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ (при $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Тейлора при $x \in \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n =$$

$$= \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x - x_0) \right] (x - x_0)^n,$$

где $\varepsilon(x - x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Будем считать окрестность $\mathring{U}(x_0)$ столь малой, что $|\varepsilon(x- - x_0)| \leqslant \frac{1}{2} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|$. Тогда знак выражения в квадратных скобках совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, так что $\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0) \operatorname{sgn}(x - x_0)^n$. Сохранение или изменение знака $(x - x_0)^n$ при переходе через x_0 зависит от чётности n. Отсюда можно сделать вывод о знаке $f(x) - f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$, что и приводит к утверждению теоремы.

Следствие 1. *При $f'(x_0) > 0$ x_0 — точка возрастания, при $f'(x_0) < 0$ x_0 — точка убывания функции f.*

Следствие 2. *Пусть $f'(x_0) = 0$. Тогда при $f''(x_0) > 0$ x_0 — точка строгого минимума, при $f''(x_0) < 0$ x_0 — точка строгого максимума функции f.*

З а м е ч а н и е. В задаче об отыскании наибольшего (или наименьшего) значения функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ с помощью доказанных теорем можно найти точки экстремума, лежащие лишь на интервале (a, b). После этого следует сравнить значения функции f в них со значениями $f(a)$, $f(b)$.

§ 7.2. Выпуклость и точки перегиба

Пусть функция f определена на (a, b). Для каждого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ построим хорду графика f, соединяющую точки $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$. Пусть её уравнение

$$y = l_{\alpha,\beta}(x),\ x \in [\alpha, \beta],\ \text{где}\ l_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta).$$

Определение. Функция f называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) *на* (a, b), если для любых α, β: $a < \alpha < \beta < b$ $f(x) \geqslant l_{\alpha,\beta}(x)$ (соответственно $f(x) \leqslant l_{\alpha,\beta}(x)$) при $x \in (\alpha, \beta)$.

Если же вместо нестрогих неравенств в последнем определении можно написать строгие, то функция f называется *строго выпуклой вверх* (*строго выпуклой вниз*) на интервале (a, b).

Интервал (a, b) называется при этом соответственно *интервалом выпуклости вверх*, *выпуклости вниз*, *строгой выпуклости вверх*, *строгой выпуклости вниз* функции f.

Условие выпуклости вверх функции можно записать в виде

$$f(x) - l_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}(f(x) - f(\alpha)) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}(f(x) - f(\beta)) \geqslant 0 \tag{1}$$

и в виде

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geqslant \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}.$$

Последнее неравенство является соотношением между угловыми коэффициентами двух различных хорд с концами в точке $(x, f(x))$.

Упражнение 1. Сравнивая угловые коэффициенты различных хорд с концами в точке $(x_0, f(x_0))$, показать, что на интервале выпуклости вверх функция f непрерывна и в каждой точке имеет обе односторонние производные. Показать, что при этом каждая из односторонних производных монотонна и что

$$f'_-(x_0) \geqslant f'_+(x_0) \geqslant f'_-(x_0 + 0).$$

Вывести отсюда, что функция имеет производную в каждой точке интервала выпуклости вверх за исключением, быть может, не более чем счётного множества точек.

Пример функции $f(x) = 1 - |x|$, $x \in (-1, 1)$, показывает, что производная не обязана существовать во всех точках интервала выпуклости вверх.

З а м е ч а н и е. Нередко функцию, выпуклую вниз, называют выпуклой, а выпуклую вверх — вогнутой.

Теорема 1 (условия выпуклости функций). *Пусть функция f имеет вторую производную f'' на (a, b). Тогда*

1° *условие* $f'' \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) *на* (a, b) *необходимо и достаточно для выпуклости вверх (вниз) функции* f *на* (a, b);

2° *если* $f'' < 0$ (> 0) *на* (a, b), *то функция* f *строго выпукла вверх (вниз) на* (a, b).

Доказательство (для случая выпуклости вверх). *Достаточность.* При $a < \alpha < x < \beta < b$ имеем, используя (1) и формулу конечных приращений Лагранжа

$$f(x) - l_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\beta - x)f'(\xi)(x - \alpha) + (x - \alpha)f'(\eta)(x - \beta)}{\beta - \alpha} =$$

$$= \frac{(x - \alpha)(\beta - x)f''(\zeta)(\xi - \eta)}{\beta - \alpha} \geqslant 0 \quad (> 0 \text{ при } f''(\zeta) > 0),$$

где $a < \alpha < \xi < \zeta < \eta < \beta < b$.

Отсюда следует достаточность в утверждении теоремы 1° и утверждение 2°.

Упражнение 2. Доказать необходимость условия 1°. Можно использовать при этом анализ расположения кривой относительно касательной, который будет приведен ниже.

Определение. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, а точка $(x_0, f(x_0))$ — *точкой перегиба графика* функции f, если

1° существует производная $f'(x_0)$ (конечная или бесконечная);

2° точка x_0 является концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз.

Напомним, что при выполнении условия 1° функция f непрерывна в точке x_0.

Теорема 2 (необходимые условия точки перегиба). *Пусть* x_0 *— точка перегиба функции* f *и* f'' *непрерывна в точке* x_0. *Тогда* $f''(x_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведём от противного. Допустим, что $f''(x_0) \neq 0$ и для определённости $f''(x_0) > 0$. Тогда $f'' > 0$ на некоторой окрестности $U(x_0)$. По предыдущей теореме точка x_0 находится внутри интервала $U(x_0)$ строгой выпуклости вниз и не может быть точкой перегиба.

Теорема 3 (достаточные условия точки перегиба). *Пусть существует $f'(x_0)$, а f'' меняет знак при переходе через точку x_0.*

Тогда x_0 — точка перегиба функции f.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к проверке определения точки перегиба с помощью теоремы о достаточных условиях строгой выпуклости функции.

Следствие. *Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$.*
Тогда x_0 — точка перегиба функции f.

Теорема 4 (о расположении графика функции относительно касательной).

1° *Если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ лежит строго выше (строго ниже) касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$.*

2° *Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ переходит через касательную, т. е. при $x < x_0$ и при $x > x_0$ ($x \in \mathring{U}(x_0)$) лежит строго по разные стороны от касательной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. Тогда вопрос сводится к изучению расположения графика функции F при $x \in \mathring{U}(x_0)$ относительно прямой (касательной) $y = 0$ и решается применением теоремы 7.1.4.

§ 7.3. Асимптоты

Определение. Пусть функция f определена на $(a, +\infty)$. Прямая $y = kx + l$ называется *асимптотой* (или

наклонной асимптотой) графика функции f при $x \to +\infty$, если
$$f(x) = kx + l + o(1) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$
Аналогично определяется (наклонная) асимптота при $x \to \to -\infty$.

Теорема 1. *Для того чтобы график функции f имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + l$, необходимо и достаточно, чтобы*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = l.$$

Доказательство предлагается провести в качестве упражнения.

Аналогично формулируется теорема о существовании (наклонной) асимптоты при $x \to -\infty$.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции f, если хотя бы один из пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ существует и равен $+\infty$ или $-\infty$.

Упражнение 1. Выяснить наличие наклонных и вертикальных асимптот у графиков функций $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$, $f(x) = \ln(1 + x)$.

§ 7.4. Построение графика функции

Построение графика функции рекомендуется проводить по следующей схеме.

1°. Найти область определения функции, точки разрыва.

2°. Найти асимптоты, если они существуют.

3°. Приблизительно нарисовать график функции.

4°. Вычислить первую и вторую производные.

5°. Найти точки, в которых эти производные не существуют или равны нулю.

6°. Составить таблицу изменения знаков первой и второй производной.

7°. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.

8°. Найти интервалы выпуклости вверх (вниз) функции, точки перегиба.

9°. Найти точки пересечения графика функции с осью Ox, вычислить значения функции в точках экстремума и в точках перегиба.

10°. Уточнить и нарисовать график функции.

Пример 1. Построить график функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\left(f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2},\ f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}\right)$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	не сущ.	$+$	$+$	$+$
f	стр. возр.	стр. макс.	стр. убыв.	не сущ.	стр. убыв.	стр. мин.	стр. возр.
	выпуклость вверх			точка разр.	выпуклость вниз		

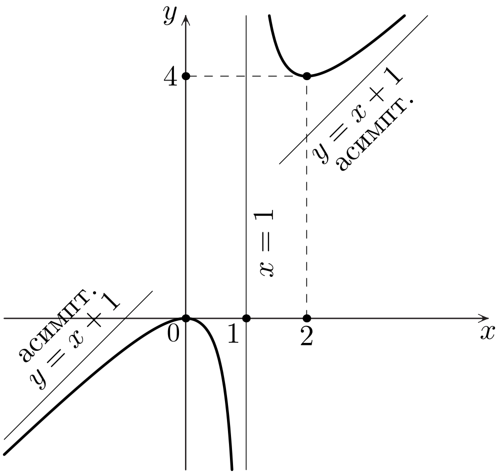


Рис. 7.4

Глава 8
КРИВЫЕ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 8.1. Векторнозначные функции

Определение. Пусть каждой точке $t \in T \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ трёхмерного пространства. Тогда будем говорить, что *на T задана вектор-функция* (или *векторная функция*) $\vec{r}$.

Пусть в трёхмерном пространстве зафиксирована прямоугольная декартова система координат. Тогда $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты (компоненты) вектора $\vec{r}(t)$. Таким образом, задание на T вектор-функции равносильно заданию на T трёх числовых функций.

Символом $|\vec{r}|$ обозначают длину вектора $\vec{r}$.

Определение. Вектор $\vec{r}_0$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$ (пишут $\vec{r}_0 = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$), если $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

Как видим, в этом определении предполагается, что вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на некоторой $\mathring{U}(t_0)$.

Определение предела вектор-функции сведено к известному определению предела числовой функции $f(t) = |\vec{r}(t) - \vec{r}_0|$. Написав последнее в ($\varepsilon$-$\delta$)-терминах, приходим к иной форме определения предела вектор-функции.

Определение. Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на $\mathring{U}(t_0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называется пределом $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| < \varepsilon \quad \forall t : \ 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Если $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}.$$

Из этого равенства видно, что существование предела $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ равносильно существованию трёх пределов числовых функций

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0.$$

Теорема 1. *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \quad \lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t), \quad \lim_{t\to t_0} f(t),$$

где f — числовая функция. Тогда существуют пределы

1° $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$;

2° $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}_1(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t)$;

3° $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right)$;

4° $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] = \left[\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right]$.

Доказательство. Эти свойства можно вывести из свойств числовых функций, перейдя к соответствующим равенствам для координат векторов.

Эти свойства можно доказать и непосредственно, опираясь на определение предела вектор-функции. Установим для примера свойство 4°. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{r}_{10}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{20}$. Тогда $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{10} + \vec{\alpha}(t)$, $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_{20} + \vec{\beta}(t)$, где $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t) \to \vec{0} = (0, 0, 0)$ при $t \to t_0$.

Имеем $\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) - \vec{r}_{10} \times \vec{r}_{20} = (\vec{r}_{10} + \vec{\alpha}(t)) \times (\vec{r}_{20} + \vec{\beta}(t)) - \vec{r}_{10} \times \vec{r}_{20} = \vec{r}_{10} \times \vec{\beta}(t) + \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}_{20} + \vec{\alpha}(t) \times \beta(t) \to \vec{0}$ при $t \to t_0$, так как

$$|\vec{r}_{10} \times \vec{\beta}(t)| \leqslant |\vec{r}_{10}|\,|\vec{\beta}(t)| \to 0, \quad |\vec{\alpha}(t) \times \vec{r}_{20}| \leqslant |\vec{\alpha}(t)|\,|\vec{r}_{20}| \to 0,$$
$$|\vec{\alpha}(t) \times \vec{\beta}(t)| \leqslant |\vec{\alpha}(t)|\,|\vec{\beta}(t)| \to 0,$$

Определение. Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $\mathring{U}(t_0 + 0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называют её *пределом справа* в точке t_0 и пишут

$$\vec{r}_0 = \lim_{t\to t_0+0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0 + 0),$$

если $\lim\limits_{t\to t_0+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

Аналогично определяется *предел слева* $\lim\limits_{t\to t_0-0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0 - 0)$.

Свойства 1°–4° верны и для односторонних пределов.

Определение. Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $U(t_0)$. Она называется *непрерывной в точке* t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Из свойств пределов вектор-функций следует, что непрерывность вектор-функции равносильна непрерывности трёх числовых функций — её координат.

Теорема 2. *Пусть вектор-функции $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и числовая функция f непрерывны в точке t_0. Тогда $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2$, $f\vec{r}_1$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ непрерывны в точке t_0.*

Доказательство следует из свойств пределов вектор-функций.

Аналогично определению непрерывности дается определение односторонней непрерывности. На этот случай переносятся свойства, указанные в последней теореме.

Производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определённой на $U(t_0)$, определяется как предел

$$\vec{r}'(t_0) \coloneqq \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}_0(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.

Если $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то, как легко видеть,

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Односторонние производные вектор-функции определяются как соответствующие односторонние пределы отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента.

Определение. Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определённая на $U(t_0)$, называется *дифференцируемой в точке* t_0, если при $t = t_0 + \Delta t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{A}\Delta t + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,$$

где $\vec{\varepsilon}(\Delta t) \to \vec{0}$ при $\Delta t \to 0$.

Как и в случае числовых функций, показывается, что существование производной $\vec{r}'(t_0)$ и дифференцируемость $\vec{r}$ в точке t_0 — эквивалентные свойства и что $\vec{A} = \vec{r}'(t_0)$.

Дифференцируемость $\vec{r}$ в точке t_0 (существование $\vec{r}'(t_0)$) влечёт, очевидно, непрерывность $\vec{r}$ в точке t_0.

Дифференциалом вектор-функции $\vec{r}$ в точке t_0 называется линейная функция

$$d\vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0)\,dt, \quad -\infty < dt < +\infty.$$

Теорема 3. *Пусть в точке t_0 существуют производные вектор-функций $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ и числовой функции f. Тогда в точке t_0 существуют производные*

1° $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$;
2° $(f\vec{r}_1)' = f'\vec{r}_1 + f\vec{r}_1'$;
3° $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2')$;
4° $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [\vec{r}_1', \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, \vec{r}_2']$.

Доказательство приведём лишь для свойства 4°.

$$\vec{r}_1(t_0 + \Delta t) \times \vec{r}_2(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2(t_0) =$$
$$= (\vec{r}_1(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_1(t_0)) \times r_2(t_0 + \Delta t) +$$
$$+ \vec{r}_1(t_0) \times (\vec{r}_2(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_2(t_0)).$$

Поделив обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем 4°.

Выведем правило дифференцирования сложной вектор-функции $\vec{r}(t(\tau))$, $\tau \in U(\tau_0)$.

Из равенства $\vec{r}(t(\tau)) = \big(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))\big)$ дифференцированием получаем

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau)) = \big(x'(t(\tau))t'(\tau), y'(t(\tau))t'(\tau), z'(t(\tau))t'(\tau)\big) =$$
$$= \vec{r}'(t(\tau))t'(\tau).$$

Из этой формулы получаем выражение для дифференциала сложной вектор-функции:

$$d\vec{r} = \vec{r}\,' t' \, d\tau = \vec{r}\,' \, dt.$$

Как видим, дифференциал $d\vec{r}$ записывается в том же виде $d\vec{r} = \vec{r}\,' \, dt$, как и в случае, когда t — независимое переменное. В этом состоит свойство инвариантности формы дифференциала первого порядка.

Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков вектор-функций определяются аналогично тому, как это было сделано для числовых функций. Именно, $\vec{r}\,''(t) = (\vec{r}\,'(t))'$ и вообще $\vec{r}^{\,(n)}(t) = (\vec{r}^{\,(n-1)}(t))'$,

$$d^2\vec{r}(t) = \delta(d\vec{r}(t))\big|_{\delta t = dt} = \delta(\vec{r}\,'(t)\,dt)\big|_{\delta t = dt} = \vec{r}\,''(t)dt^2,$$

и вообще

$$d^n\vec{r}(t) = \delta(d^{n-1}\vec{r}(t))\big|_{\delta t = dt} = \\ = \delta(\vec{r}^{\,(n-1)}(t)dt^{n-1})\big|_{\delta t = dt} = \vec{r}^{\,n}(t)dt^n.$$

Теорема 4 (формула Тейлора). *Пусть существует* $\vec{r}^{\,(n)}(t_0)$. *Тогда существует окрестность* $U(t_0)$ *такая, что при* $t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\vec{r}^{\,(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \vec{\varepsilon}(t - t_0)(t - t_0)^n,$$

где $\vec{\varepsilon}(t - t_0) \to \vec{0}$ *при* $t \to t_0$.

Доказательство. Каждую координату вектор-функции $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ заменим её разложением по формуле Тейлора. Полученное представление $\vec{r}(t)$ запишем в виде суммы векторов, стоящих в правой части доказываемой формулы Тейлора.

Замечание. Остаточный член доказанной формулы Тейлора есть, конечно, $\vec{o}((t - t_0)^n)$ при $t \to t_0$.

Определение. Вектор-функцию $\vec{r}$ называют *непрерывной* (*дифференцируемой*) на интервале или на отрезке, если она непрерывна (дифференцируема) в каждой точке интервала или соответственно отрезка. При этом непрерывность (дифференцируемость) в концах отрезка понимается как односторонняя.

Вектор-функцию называют *непрерывно дифференцируемой* в точке (на интервале, на отрезке), если $\vec{r}'$ непрерывна в точке (на интервале, на отрезке).

Мы видим, что многие свойства числовых функций переносятся на вектор-функции. Не так обстоит дело с формулой конечных приращений Лагранжа. В самом деле, пусть $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $|\vec{r}'(t)| = 1$ и

$$\vec{0} = \vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) \neq \vec{r}'(\xi)(2\pi - 0)$$

ни при каком значении ξ.

Справедлив, однако, векторный аналог оценки, вытекающей из теоремы Лагранжа.

Теорема 5. *Пусть вектор-функция $\vec{r}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$:*

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}'(\xi)|(b - a). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Считая, что $\vec{r}(b) \neq \vec{r}(a)$, положим $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}(b) - \vec{r}(a)}{|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)|}$. Тогда $|\vec{e}| = 1$ и

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b) - \vec{r}(b), \vec{e}) = (\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e}).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = (\vec{r}(t), \vec{e})$. Для неё выполнены условия теоремы Лагранжа. Поэтому

$$\exists\, \xi \in (a, b) \ : \ |\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = f(b) - f(a) = \\ = f'(\xi)(b - a) = (\vec{r}'(\xi), \vec{e})(b - a).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

§ 8.2. Кривая

Будем считать, что в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксирована прямоугольная декартова система координат.

Определение. Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где x, y, z — непрерывные функции на $[a, b]$, называется (*непрерывной*) *кривой*.

Говорят ещё, что кривой называется «непрерывное отображение отрезка в пространство $\mathbb{R}^3$». На разъяснении этого понятия здесь останавливаться не будем.

Подчеркнём, что кривая определяется не только положением множества точек в пространстве $\mathbb{R}^3$, но и способом его описания.

Ту же кривую Γ можно задать в виде

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\} \quad \text{или} \quad \Gamma = \{\hat{r}(t) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где $\vec{r}(t) := (x(t), y(t), z(t))$ — радиус-вектор точки $\hat{r}(t) := := (x(t), y(t), z(t))$. *Точкой кривой* Γ называют пару $\{t, \hat{r}(t)\}$.

Точка $M \in \mathbb{R}^3$ называется *кратной точкой* (*точкой самопересечения*) кривой Γ, если $\exists\, t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$: $\hat{r}(t_1) = \hat{r}(t_2) = M$.

Кривая без кратных точек называется *простой кривой* (или *простой дугой*).

Кривая Γ называется *замкнутой кривой*, или *контуром*, если $\hat{r}(a) = \hat{r}(b)$. Контур называется *простым контуром*, если из $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, $\hat{r}(t_1) = \hat{r}(t_2)$ следует $t_1 = a$, $t_2 = b$.

Возрастание параметра t определяет некоторое направление движения точки $\hat{r}(t)$ по кривой (некоторый порядок прохождения точек кривой).

Поэтому говорят, что *на кривой* Γ *задана ориентация*, рассматриваемую кривую называют *ориентированной кривой*, точку $\hat{r}(a)$ — *началом кривой*, а точку $\hat{r}(b)$ — *концом кривой*.

Введём понятие касательной к кривой Г. Пусть t_0, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Проведём секущую через точки $\hat{r}(t_0)$, $\hat{r}(t_0 + \Delta t)$, и пусть $\vec{l}(\Delta t)$ — единичный вектор секущей, так что $\vec{l}(\Delta t) = \pm \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|}$, где $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ (предполагаем, что $|\Delta \vec{r}| > 0$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$).

Определение. Пусть при всех достаточно малых $|\Delta t|$ можно выбрать $\vec{l}(\Delta t)$ так, что $\exists \lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{l}(\Delta t) =: \vec{t}$. Тогда прямая

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{t}\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

называется *касательной к кривой* Г в точке $(t_0, \hat{r}(t_0))$.

Как мы видим, касательная проходит через точку $\hat{r}(t_0)$ и $\vec{t}$ — её направляющий вектор.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $t_0 \in (a, b)$ *и* $\exists\, \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. *Тогда* Г *имеет касательную в точке* $(t_0, \hat{r}(t_0))$ *и вектор* $\vec{r}\,'(t_0)$ *коллинеарен касательной.*

Доказательство. Из того, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, следует, что $\Delta \vec{r} \neq \vec{0}$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$ и что $\left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| \to |\vec{r}\,'(t_0)|$ при $\Delta t \to 0$. Тогда при $\Delta t \to 0$

$$\vec{l}(\Delta t) := \frac{\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}{\left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|} =: \vec{t}.$$

Следовательно, касательная в точке $(t_0, \hat{r}(t_0))$ существует, а её уравнение можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Замечание. Вектор $\Delta \vec{r}$ при $\Delta t > 0$ направлен от точки $\hat{r}(t_0)$ к точке $\hat{r}(t_0 + \Delta t)$ с бóльшим значением параметра. Поэтому можно сказать, что векторы $\vec{r}\,'$, $\vec{t}$ *направлены в сторону возрастания параметра кривой.*

Вектор $\vec{t}$ называется *единичным вектором касательной* к кривой Г.

Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$ и в t_0 существует отличная от $\vec{0}$ односторонняя производная вектора $\vec{r}$, то существует и односторонняя касательная (которая определяется по аналогии с касательной).

Определение. Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *дифференцируемой* (*непрерывно дифференцируемой*), если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема (непрерывно дифференцируема) на $[a, b]$.

Определение. Точка $(t_0, \hat{r}(t_0))$ дифференцируемой кривой Γ называется *неособой* точкой, если $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, и называется *особой* точкой в противном случае.

В последней лемме показано, что дифференцируемая кривая в каждой неособой точке имеет касательную.

Определение. Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой.*

Определение. Пусть $\Gamma = \{\hat{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $c \in (a, b)$. Тогда каждая из кривых

$$\Gamma' = \{\hat{r}(t)\ :\ a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma'' = \{\hat{r}(t)\ :\ c \leqslant t \leqslant b\}$$

называется *дугой кривой* Γ.

Аналогичное определение можно дать и в случае, когда кривая Γ разбита на любое конечное число дуг.

При этом кривая Γ называется *кусочно непрерывно дифференцируемой* (*кусочно гладкой*), если каждая из её дуг является непрерывно дифференцируемой (гладкой).

Рассмотрим вопрос о преобразовании (замене) параметра на кривой.

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $t = g(\tau)$, $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau))$,

$$\tilde{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau)\ :\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\tilde{\Gamma}$ той же, что и Γ, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой.*

При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой

1° $g\colon$ $[\alpha,\beta] \leftrightarrow [a,b]$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha,\beta]$.

Обратим внимание, что при этом от $\tilde{\Gamma}$ можно перейти к Γ также с помощью непрерывной и строго монотонной замены параметра g^{-1} (обратной к g).

Понятие «допустимой» замены параметра определяется нашим желанием сохранить те или иные свойства кривой при такой замене. Так, например, если мы хотим сохранить ориентацию кривой, то к требованию 1° присоединяется требование

$1^{\circ\circ}$ g строго возрастает на $[\alpha,\beta]$.

Последнее равносильно, очевидно, условию $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Если Γ — дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая, то *допустимой* заменой параметра на Γ будем называть замену $t = g(\tau)$, удовлетворяющую, помимо условия 1°, ещё и условиям

2° g дифференцируема (непрерывно дифференцируема) на $[\alpha,\beta]$;

3° $g'(\tau) \neq 0$ при $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$.

При этом, очевидно, дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая Γ переходит в дифференцируемую (непрерывно дифференцируемую) кривую $\tilde{\Gamma}$.

При выполнении условий 1°, 2°, 3° обратная к g функция g^{-1} будет, очевидно, удовлетворять тем же условиям. Кривые Γ и $\tilde{\Gamma}$ при этом отождествляют (иначе говоря, их называют одной и той же кривой, различным образом параметризованной).

Упражнение 1. Показать, что при замене параметра, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, 3° (т. е. при допустимой замене параметра)

a) неособая точка переходит в неособую;

b) касательная в неособой точке сохраняется;

c) гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

Упражнение 2. Показать, что всякую гладкую кривую $\Gamma = \{\hat{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ можно разбить на конечное число гладких дуг $\Gamma_i = \{\hat{r}(t)\colon\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, так, что на каждой дуге Γ_i в качестве параметра (при допустимой замене параметра) можно взять либо x, либо y, либо z.

§ 8.3. Длина дуги кривой

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$. Систему точек $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ называют *разбиением отрезка* $[a, b]$, если $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i_\tau} = b$.

Соединив точки $\hat{r}(t_{i-1})$ и $\hat{r}(t_i)$ отрезками прямых ($i = 1, \ \ldots, i_\tau$), получим так называемую *вписанную ломаную* (обозначим её символом Λ_τ), длина которой

$$S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|.$$

Определение. *Длиной кривой* Γ называется

$$S_\Gamma \coloneqq \sup_\tau S_{\Lambda_\tau}.$$

Определение. Кривая Γ называется *спрямляемой*, если её длина конечна (т. е. $S_\Gamma < +\infty$).

Ясно, что длина кривой и её спрямляемость не меняются при допустимой замене параметра на кривой.

Упражнение 1. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — спрямляемая кривая, $c \in (a, b)$. Показать, что обе кривые

$$\Gamma' = \{\vec{r}(t)\ :\ a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma'' = \{\vec{r}(t)\ :\ c \leqslant t \leqslant b\}.$$

спрямляемы и сумма их длин равна длине кривой Γ.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда она спрямляема и её длина удовлетворяет условию*

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)|(b - a).$$

Доказательство. Функция $|\vec{r}\,'(t)|$ как непрерывная на отрезке $[a, b]$ достигает на нём своего максимума. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда с помощью (8.1.1) имеем

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)| \sum_{i=1}^{i_\tau} (t_i - t_{i-1}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)|(b - a).$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по τ, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть кривая* $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги* $s = s(t)$, *отсчитываемая от её начала* $(a, \hat{r}(a))$, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t, *причём*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Доказательство. Пусть $s = s(t)$ — длина дуги кривой

$$\Gamma_t = \{\vec{r}(u)\ :\ a \leqslant u \leqslant t\}, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

которая является дугой кривой Γ. Пусть $a \leqslant t_0 < t_0 + \Delta t \leqslant b$. Применяя предыдущую теорему к дуге $\{\vec{r}(t)\colon\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t\}$ длины $\Delta s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ (см. последнее упражнение), получаем

$$|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)| \leqslant \Delta s \leqslant \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t} |\vec{r}\,'(t)|\Delta t.$$

Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0 + 0$, получаем, что существует $s'_+(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$.

Аналогично устанавливается, что существует $s'_-(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$.

Отсюда следует, что $\exists\, s'(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$. Из неотрицательности $s'(t)$ следует, что $s(t)$ возрастает на $[a, b]$.

Следствие 1. *Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(s)\colon\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$ является длина её дуги s, то $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$.*

Геометрический смысл равенства $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ состоит в том, что предел отношения $\left|\dfrac{\Delta s}{\Delta \vec{r}}\right|$ длины дуги к длине стягивающей её хорды, когда один из концов дуги фиксирован, а длина дуги стремится к нулю, равен единице.

Следствие 2. *Для гладкой ориентированной кривой можно с помощью допустимой замены параметра перейти к параметру s, являющемуся переменной длиной дуги, отсчитываемой от начала кривой.*

Запишем равенство $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ в виде

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где α, β, γ — углы, образованные вектором $\frac{d\vec{r}}{ds}$ (а значит, и касательной) соответственно с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz. Отсюда

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

в чём и состоит геометрический смысл координат вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$.

§ 8.4. Кривизна, главная нормаль, соприкасающаяся плоскость

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $\vec{r}$ постоянна по модулю:*

$$|\vec{r}(t)| = C \quad \textit{при} \quad t \in U(t_0).$$

Пусть существует $\vec{r}'(t_0)$. *Тогда* $\vec{r}'(t_0) \perp \vec{r}(t_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя скалярное произведение $(\vec{r}(t), \vec{r}(t)) = |\vec{r}(t)|^2 = C^2$, получаем, что

$$(\vec{r}'(t_0), \vec{r}(t_0)) + (\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0)) = 2(\vec{r}'(t_0), \vec{r}(t_0)) = 0.$$

Определение. Пусть Γ — спрямляемая кривая,

$$\Gamma = \{\vec{r}(s) \,:\, 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

где s — переменная длина её дуги, $s_0 \in [0, S]$.

Пусть $\exists \vec{t} := \frac{d\vec{r}}{ds}$ на $U(s_0) \cap [0, S]$ и

$$\exists \, \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \text{ в точке } s_0.$$

Тогда $k = k(s_0) := \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\,(s_0)\right|$ называется *кривизной* кривой Γ в точке $(s_0, \hat{r}(s_0))$.

Если $s_0 = 0$ или $s_0 = S$, то производные понимаются как односторонние.

Геометрический смысл кривизны $k(s_0)$ состоит в том, что $k(s_0)$ является мгновенной угловой скоростью поворота касательной (если параметр s считать временем). В самом деле, поскольку $\vec{t}$ — единичный вектор, то $|\Delta\vec{t}| = |\vec{t}(s_0 + \Delta s) - \vec{t}(s_0)|$ характеризует величину его поворота при изменении параметра на Δs. Если величину угла между $\vec{t}(s_0 + \Delta s)$ и $\vec{t}(s_0)$, выраженную в радианах, обозначить через $\varphi = \varphi(\Delta s)$, то

$$|\Delta\vec{t}| = 2\sin\frac{\varphi}{2} \sim \varphi \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0+0$$

(в последнем равенстве легко убедиться, построив равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, совпадающими с векторами $\vec{t}(s_0 + \Delta s)$ и $\vec{t}(s_0)$, отложенными от одной точки). Тогда

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0+0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0+0}\frac{\varphi(\Delta s)}{\Delta s}.$$

Определение. Величина $R = \frac{1}{k} \leqslant +\infty$, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны.*

Упражнение 1. Проверить, что в каждой точке окружности её радиус кривизны совпадает с радиусом этой окружности.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — гладкая дважды дифференцируемая кривая. Тогда в каждой её точке существует кривизна.*

Доказательство.

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}\,'\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}\,'}{s'},$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}\,'}{s'}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3}. \tag{1}$$

Следовательно, $\exists\, k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{|s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'|}{s'^3}$.

Выведем другое выражение для кривизны k. Поскольку в силу леммы $\frac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t}$, имеем

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{t}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \\ = \left|\frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3} \times \frac{\vec{r}\,'}{s'}\right| = \frac{|\vec{r}\,'' \times \vec{r}\,'|}{s'^3},$$

т. е.

$$k = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix}\right\|}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^3}.$$

Если $k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$, то можно написать *формулу Френе*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \text{где} \quad |\vec{n}| = 1, \quad (\vec{t}, \vec{n}) = 0.$$

Вектор $\vec{n}$ называется *единичным вектором главной нормали.*

Определение. *Нормалью к кривой в данной точке* называется всякая прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в этой точке.

Нормаль к кривой, параллельная $\vec{n}$, называется *главной нормалью.*

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(s)\colon\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ и пусть в точке $(s_0, \hat{r}(s_0))$ существует $k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$. Тогда в силу формулы Тейлора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(s_0+\Delta s) - \vec{r}(s_0) = \frac{d\vec{r}(s_0)}{ds}\Delta s + \\ + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec{r}(s_0)}{ds^2}(\Delta s)^2 + \vec{o}((\Delta s)^2) \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0.$$

В иной записи эта формула имеет вид

$$\Delta\vec{r} = (\Delta s)\vec{t} + \frac{1}{2}k(\Delta s)^2\vec{n} + \vec{o}((\Delta s)^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Эта формула показывает, что в окрестности данной точки кривая отклоняется от своей касательной в сторону вектора $\vec{n}$ с точностью до $\vec{o}((\Delta s)^2)$.

Определение. Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется *соприкасающейся плоскостью.*

Последнюю формулу для $\Delta\vec{r}$ можно интерпретировать и так: в окрестности данной точки кривая лежит в соприкасающейся плоскости с точностью до $\vec{o}((\Delta s)^2)$.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости в такой точке гладкой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$, в которой кривизна $k \neq 0$. Эта плоскость проходит через точку $\hat{r}(t_0)$ и коллинеарна векторам $\vec{t} = \frac{\vec{r}\,'}{s'}$ и $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3}$ (см. (1)), а значит, и вектору $\vec{r}\,''$ $(s' = |\vec{r}\,'| \neq 0)$. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}\,'(t_0), \vec{r}\,''(t_0)) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Если в данной точке кривой $k = 0$, то всякая плоскость, содержащая касательную в этой точке, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Определение. Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной её точке и находящаяся на расстоянии $R = \frac{1}{k}$ от этой точки в направлении вектора $\vec{n}$ главной нормали, называется *центром кривизны кривой* в данной её точке.

Центр кривизны лежит в соприкасающейся плоскости.

Если $\vec{r}$ — радиус-вектор точки кривой, то радиус-вектор центра кривизны в этой точке

$$\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{n} = \vec{r} + \frac{1}{k^2}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Отсюда и из (1) имеем

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k^2}\frac{s'\vec{r}'' - s''\vec{r}'}{s'^3}, \quad \text{где} \quad s' = |\vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$
$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Определение. Кривая $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$, описывающая множество центров кривизны данной кривой Γ, называется её *эволютой*.

Сама кривая Γ по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Кривая Γ вида $\Gamma = \{(x(t), y(t), 0)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *плоской кривой*. Её уравнение записывают в виде

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \ :\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Будем считать плоскую кривую Γ гладкой. Радиус-вектор $\vec{r}$ кривой Γ лежит в плоскости xOy, как и векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{n}$.

Пусть α — угол между единичным вектором касательной к кривой и осью Ox. Тогда

$$\vec{t} = \vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\sin\alpha, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = (-i\sin\alpha + j\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds},$$

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = |-\vec{\imath}\sin\alpha + \vec{\jmath}\cos\alpha| \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \pm\frac{d\alpha}{ds} \geqslant 0,$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Радиус-вектор центра кривизны при $k > 0$

$$\vec{\rho} = (\xi, \eta), \qquad \begin{cases} \xi = x + R^2\,\dfrac{d^2x}{ds^2}\,, \\ \eta = y + R^2\,\dfrac{d^2y}{ds^2}\,, \end{cases}$$

$$\xi = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

В случае, когда кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + f'^2(x)\,dx^2,$$

$$ds = \sqrt{1 + f'^2}\,dx,$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad \text{уравнение эволюты при } k > 0\text{:} \quad \begin{cases} \xi = x - \dfrac{1 + y'^2}{y''}\,y', \\ \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}\,. \end{cases}$$

Глава 9
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 9.1. Первообразная и неопределённый интеграл

Символом $\langle a,b\rangle$ будем обозначать промежуток, т. е. либо отрезок $[a,b]$, либо полуинтервал $[a,b)$, либо полуинтервал $(a,b]$, либо интервал (a,b). При этом полуинтервал и интервал могут быть как конечными, так и бесконечными.

Определение. Пусть функции f и F определены на $\langle a,b\rangle$. Функция F называется *первообразной для* f *на* $\langle a,b\rangle$, если $F' = f$ на $\langle a,b\rangle$. При этом в случае $a \in \langle a,b\rangle$ или $b \in \langle a,b\rangle$ производные $F'(a)$, $F'(b)$ понимаются как односторонние.

Пусть F — первообразная для f на $\langle a,b\rangle$. Тогда $F + C$, где C — постоянная, также является первообразной для f на $\langle a,b\rangle$. В самом деле, $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

Верно и обратное утверждение: если F и $\varPhi$ — две первообразные функции f на $\langle a,b\rangle$, то $\varPhi(x) = F(x) + C$, где C — постоянная. В самом деле,

$$(F(x) - \varPhi(x))' = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Тогда с помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем, что

$$F(x) - \varPhi(x) = C.$$

Определение. Операция перехода от данной функции к её первообразной называется (*неопределённым*) *интегрированием.* При этом функции f ставится в соответствие некоторая конкретная произвольно выбранная первообразная. Эта первообразная называется *неопределённым интегралом функции* f и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, каждый неопределённый интеграл функции f является её первообразной, и наоборот, каждую первообразную можно выбрать в качестве неопределённого интеграла функции f.

Рассмотренные свойства первообразных дают возможность описать общий вид неопределённого интеграла для f на $\langle a, b\rangle$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где F — некоторая конкретная первообразная, а C — произвольная постоянная.

Будем пользоваться также следующими обозначениями:

$$\int dg(x) \coloneqq \int g'(x)\,dx, \qquad \int f(x)\,dg(x) \coloneqq \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Основные свойства неопределённого интеграла на промежутке:

1.° $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2.° $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где F — некоторая фиксированная первообразная для f. Это равенство можно переписать в виде

2.°° $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

3.° (Линейность неопределённого интеграла)
Пусть существует $\int f_1(x)\,dx$, $\int f_2(x)\,dx$. Тогда при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ существует

$$\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx + C.$$

Свойство 1° содержится в определении неопределённого интеграла, свойство 2° уже было установлено.

Для доказательства свойства 3° проверим, что $F(x) = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx$ является первообразной для

$\alpha f_1 + \beta f_2$. Это в самом деле так, поскольку

$$F'(x) = \left(\alpha \int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\beta \int f_2(x)\,dx\right)' = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x),$$

теперь остаётся сослаться на свойство 2°.

Свойства 1°, 2°° показывают, что операции дифференцирования и (неопределённого) интегрирования обратны друг другу.

В дальнейшем будет показано, что для любой непрерывной на промежутке функции f на этом промежутке существует неопределённый интеграл $\int f(x)\,dx$.

Каждую формулу для производной вида $F'(x) = f(x)$ можно истолковать как утверждение, что на соответствующем промежутке F является первообразной для f и, значит, в силу 2° $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Поэтому, переписывая таблицу производных основных элементарных функций, получим таблицу неопределённых интегралов, которая приводится в Приложении.

Каждая из формул таблицы рассматривается на тех промежутках, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Например, формулу

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

следует рассматривать отдельно на каждом из двух промежутков: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

§ 9.2. Методы интегрирования

Теорема 1 (интегрирование по частям). *Пусть на некотором промежутке функции u, v дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)\,dx$. Тогда на этом промежутке существует*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx + C.$$

Доказательство. Правая часть последнего равенства имеет вид $F(x)+C$. При этом

$$F' = \left(uv - \int u'v\,dx\right)' = u'v + uv' - u'v = uv',$$

так что функция F является первообразной для uv'. Остаётся сослаться на свойство 2°.

Теорема 2 (интегрирование заменой переменного). *Пусть функция f имеет на $\langle a,b\rangle$ первообразную, функция $\varphi\colon \langle\alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$ дифференцируема на $\langle\alpha,\beta\rangle$. Тогда на $\langle\alpha,\beta\rangle$ существует*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C. \qquad (1)$$

Доказательство. Дифференцируя стоящую в правой части равенства сложную функцию $F\circ\varphi$, где $F(x) = \int f(x)\,dx$, получаем

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

см. теорему 5.5.1 и замечание к ней. Остаётся сослаться на свойство 2°.

Формулу (1) удобно запомнить и в виде

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C.$$

Её называют формулой *интегрирования подстановкой* (в интеграл $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$ вместо $\varphi(t)$ подставляют x, находят $\int f(x)\,dx$ и затем возвращаются к переменному t).

Если в условиях доказанной теоремы дополнительно предположить, что функция φ строго монотонна, то на промежутке $\langle\xi,\eta\rangle := \varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ существует обратная функция φ^{-1}. Тогда из (1) следует, что на промежутке $\langle\xi,\eta\rangle$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C.$$

Эту формулу называют формулой *замены переменного в неопределённом интеграле.*

Пример интегрирования подстановкой.

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \int \frac{1}{2}\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \int \frac{1}{2}\frac{dx}{x}\Big|_{x=t^2+a^2} + C_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_{x=t^2+a^2} + C_2 = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C_2.$$

§ 9.3. Комплексные числа

Комплексными числами называются выражения вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, i — некоторый элемент, называемый *мнимой единицей.* Число x называется *действительной частью числа* z ($x = \operatorname{Re} z$), а число y — *мнимой частью числа* z ($y = \operatorname{Im} z$).

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексное число $z = x + i0$ отождествляется с действительным числом x. В этом случае пишут $z = x$.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное действительное число

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Для каждого комплексного числа $z = x + iy$ определено *сопряжённое* ему комплексное число

$$\bar{z} = x - iy.$$

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Произведением z_1z_2 двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

В частности, $i \cdot i = -1$.

Определение 1. Множество выражений вида (1), в котором описанным способом введены операции сложения и умножения, называется *множеством комплексных чисел* и обозначается через $\mathbb{C}$.

Во множестве $\mathbb{C}$ нет отношения порядка.

Легко проверить, что сумма и произведение комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и сумма и произведение вещественных чисел. В частности, существуют $0 = 0 + i0$ и $1 = 1 + i0$, для каждого $z \in \mathbb{C}$ существует противоположное комплексное число, для каждого $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, существует обратное комплексное число, определены разность двух комплексных чисел и частное двух комплексных чисел (если делитель не равен нулю).

Разность $z_2 - z_1$ двух комплексных чисел $z_2 = x_2 + iy_2$ и $z_1 = x_1 + iy_1$ вычисляется по правилу

$$z_2 - z_1 = x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1).$$

Частное $z := \frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 $(z_2 \neq 0)$ определяется как решение уравнения $zz_2 = z_1$ относительно $z = x + iy$. Практический приём нахождения частного состоит в умножении равенства $zz_2 = z_1$ на число $\bar{z}_2$, сопряжённое числу z_2, и нахождения $z = x + iy$ из уравнения $z|z_2|^2 = z_1\bar{z}_2$, где $|z_2|$ — модуль z_2, $|z_2| > 0$:

$$z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Для вычисления частного двух комплексных чисел удобно представить каждое из этих чисел в тригонометрической форме, с которой мы познакомимся позднее.

Для геометрического изображения комплексных чисел пользуются прямоугольной декартовой системой координат.

При этом комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой с координатами (x, y) или радиус-вектором этой точки. Сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению и вычитанию соответствующих векторов. Сопряжённые комплексные числа z и $\bar{z}$ изображаются точками, симметричными относительно вещественной оси.

Нам понадобятся следующие свойства сопряжённых чисел:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_1, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Эти свойства устанавливаются непосредственной проверкой.

§ 9.4. Разложение многочлена на множители

Многочленом степени $n \in \mathbb{N}_0$ называется функция

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0, \quad A_n \neq 0,$$

где $z \in \mathbb{C}$, $A_k \in \mathbb{C}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$.

Корнем многочлена P_n называется комплексное число z_0 такое, что $P_n(z_0) = 0$.

При произвольном $z_0 \in \mathbb{C}$ многочлен $P_n(z)$ можно разделить на одночлен $(z - z_0)$, т. е. представить $P_n(z)$ в виде

$$P_n(z) = (z - z_0) Q_{n-1}(z) + r,$$

где частное Q_{n-1} — многочлен степени $n - 1$, а остаток $r \in \in \mathbb{C}$.

Теорема 1 (Безу). *Число z_0 является корнем многочлена P_n тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится без остатка на $z - z_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Если многочлен P_n при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ представи́м в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

где Q_{n-k} — многочлен, то z_0 называют *корнем* многочлена P_n *кратности* k. При $k = 1$ z_0 называют *простым корнем.*

В курсе теории функций комплексного переменного будет доказано, что всякий многочлен имеет хотя бы один корень в $\mathbb{C}$. Отсюда сразу следует разложение многочлена P_n на множители

$$P_n(z) = A_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_r)^{k_r}, \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = n,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_r$ — корни многочлена P_n, кратности которых соответственно равны $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

В дальнейшем будем рассматривать многочлены P_n лишь с действительными коэффициентами.

Лемма 1. *Пусть P_n — многочлен с действительными коэффициентами, и пусть $z_0 = a + ib$, $b \neq 0$, — его корень кратности k. Тогда $\bar{z}_0 = a - ib$ также является его корнем кратности k.*

Доказательство. Имеем

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z).$$

Переходя в этом равенстве к сопряжённым значениям в его левой и правой частях, имеем

$$\overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k Q_{n-k}(z)}.$$

Отсюда на основании свойств сопряжённых чисел имеем

$$P_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(\bar{z}),$$

где коэффициенты многочлена $\overline{Q}_{n-k}$ являются сопряжёнными к соответствующим коэффициентам многочлена Q_{n-k}.

Заменив в последнем равенстве $\bar{z}$ на z, получаем, что

$$P_n(z) = (z - \bar{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(z).$$

Отсюда следует, что $\bar{z}_0$ — корень многочлена P_n, причём кратность корня $\bar{z}_0$ не меньше кратности корня z_0.

Аналогично показывается, что если $\bar{z}_0$ — корень многочлена P_n кратности k, то $\bar{\bar{z}}_0 = z_0$ является корнем P_n кратности не меньше k. Отсюда следует, что кратности корней z_0 и $\bar{z}_0$ совпадают.

З а м е ч а н и е. При $z_0 = a + ib$, $b \neq 0$,

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 + pz + q,$$

где p, q — действительные числа, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

В самом деле,

$$(z - a - bi)(z - a + bi) = (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2,$$

$$\frac{p^2}{4} - q = a^2 - (a^2 + b^2) = -b^2 < 0.$$

Учитывая лемму 1 и последнее замечание, приходим к выводу, что для многочлена P_n с действительными коэффициентами справедливо следующее разложение на множители

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i + 2\sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j = n$, $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0 \quad (j = 1, \ \ldots, \ s)$.

Здесь $A_n \in \mathbb{R}$, a_i — действительные корни многочлена P_n, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ — их кратности,

$$x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j), \quad \operatorname{Im} z_j \neq 0,$$

z_j, $\bar{z}_j$ — комплексные корни P_n ($\operatorname{Im} z_j \neq 0$), $\beta_j \in \mathbb{N}$ — их кратности.

§ 9.5. Разложение правильных рациональных дробей на простейшие

Рациональная дробь (т. е. частное двух многочленов) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена P меньше степени многочлена Q. Неправильную рациональную дробь (деля числитель на знаменатель по правилу деления многочленов) можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (второе слагаемое отсутствует, если деление произошло без остатка).

В этом параграфе все многочлены имеют лишь действительные коэффициенты.

Лемма 1. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь и* a *— действительный корень кратности* α *многочлена* Q*, т. е.*

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\tilde{Q}(x), \quad \tilde{Q}(a) \neq 0.$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\tilde{Q}(x)},$$

где $A \in \mathbb{R}$*, а рациональная дробь* $\dfrac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\tilde{Q}(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. При произвольном $A \in \mathbb{R}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} = \frac{P(x) - A\tilde{Q}(x)}{(x-a)^{\alpha}\tilde{Q}(x)}, \tag{1}$$

где правая часть — правильная рациональная дробь.

Выберем A из условия, чтобы a было корнем числителя правой части, т. е. $A = \dfrac{P(a)}{\tilde{Q}(a)}$. Тогда по теореме Безу

$$P(x) - A\tilde{Q}(x) = (x-a)\tilde{P}(x).$$

Сократив правую часть (1) на $x - a$, приходим к утверждению леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь,* $z_0 = a + ib$*,* $b \neq 0$*, — корень кратности* β *многочлена* Q*, т. е. при* $x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^{\beta}\tilde{Q}(x), \quad \tilde{Q}(a + ib) \neq 0.$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}\tilde{Q}(x)},$$

где $M, N \in \mathbb{R}$, *а рациональная дробь* $\dfrac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}\tilde{Q}(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. При произвольных $M, N \in \mathbb{R}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} = \frac{P(x)-(Mx+N)\tilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^\beta\tilde{Q}(x)}, \tag{2}$$

где правая часть — правильная рациональная дробь. Достаточно, очевидно, выбрать M, N так, чтобы числитель правой части (2) делился на x^2+px+q, т. е. чтобы число $a+ib$ являлось его корнем. Имеем

$$P(a+ib) - (M(a+ib)+N)\tilde{Q}(a+ib) = 0,$$

т. е.

$$M(a+ib)+N = \frac{P(a+ib)}{\tilde{Q}(a+ib)}.$$

Отсюда однозначно находятся M и N:

$$M = \operatorname{Im}\left(\frac{P(a+ib)}{b\tilde{Q}(a+ib)}\right), \quad N = \operatorname{Re}\left(\frac{P(a+ib)}{\tilde{Q}(a+ib)} - Ma\right).$$

Из лемм 1, 2 следует

Теорема 1. *Пусть* P, Q *— многочлены с действительными коэффициентами,* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь,*

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

где $a_1, \ldots, a_r$ *— попарно различные действительные корни* Q, $x^2+p_jx+q_j = (x-z_j)(x-\bar{z}_j)$, $\operatorname{Im} z_j > 0$, $z_1, \ldots, z_s$ *— попарно различные комплексные корни* Q.

Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^{\alpha_i - k}} + \\ + \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=0}^{\beta_i - 1} \frac{M_{jm}x + N_{jm}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j - m}}, \tag{3}$$

где A_{ik}, M_{jm}, N_{jm} *— некоторые действительные числа.*

Доказательство состоит в последовательном многократном применении лемм 1, 2. Именно, применяем лемму 1 сначала α_1 раз по отношению к корню a_1, затем α_2 раз по отношению к корню a_2 и т.д.

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad (A \neq 0) \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (M^2+N^2>0), \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{N}$, a, p, q, A, M, N — действительные числа и $\frac{p^2}{4} - q < 0$, называются *простейшими*, или *элементарными* рациональными дробями.

При нахождении коэффициентов A_{ik}, M_{jm}, N_{jm} в разложении (3) правильной рациональной дроби на простейшие в случае конкретной дроби $\frac{P}{Q}$ обычно применяют *метод неопределённых коэффициентов*. Он состоит в том, что записывают разложение (3) с неопределёнными коэффициентами A_{ik}, M_{jm}, N_{jm}, приводят все дроби к общему знаменателю и сравнивают числители. Из полученного равенства многочленов находят все нужные коэффициенты, сравнивая, например, коэффициенты при одинаковых степенях x или значения многочленов в некоторых точках.

§ 9.6. Интегрирование рациональных дробей

Всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, которую в свою очередь можно разложить на сумму простейших.

Поэтому вопрос интегрирования рациональных дробей сводится к вопросу интегрирования простейших дробей, т. е. дробей вида (9.5.4).

Интеграл $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx$ с помощью подстановки $t = x - a$ сводится к табличному интегралу.

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ представим квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ в виде $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и сделав в I_n подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}\,dt + C_1 = \\ &= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} + C_2 = \\ &= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_n + C_3. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Во всех интегралах этой цепочки, зависящих от t, после их нахождения вместо t следует подставить $t = x + \frac{p}{2}$. Ради краткости записи мы не отмечаем этого здесь и в последующем.

Первый из интегралов правой части сводится подстановкой к табличному. Остаётся найти интеграл J_n.

При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N - Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C_3 = \\ &= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C_3. \end{aligned}$$

Вычислим при $n \geqslant 2$ интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{((t^2+a^2)-t^2)\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_2.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям, считая $u = t$, $v' = \frac{2t}{(t^2+a^2)^n}$, $v = -\frac{1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$.

Получим

$$J_n = \frac{1}{a^2}J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}J_{n-1} + C_3.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C_3.$$

Зная

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} + C' = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

мы можем по рекуррентной формуле найти последовательно J_2, J_3, ...

§ 9.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Функция вида

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n\leqslant k} a_{k_1,\ldots,k_n} u_1^{k_1}\ldots u_n^{k_n},$$

называется *многочленом от переменных* $u_1, \ldots, u_n$.

Функция вида

$$R(u_1,\ldots,u_n) = \frac{P(u_1,\ldots,u_n)}{Q(u_1,\ldots,u_n)}, \quad k_i \in \mathbb{N}_0,$$

где P, Q — многочлены от переменных $u_1, \ \ldots, u_n$, называется *рациональной функцией от* $u_1, \ \ldots, u_n$.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ \ldots, \ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \ \ldots, r_s$ — рациональные числа.

Запишем r_i в виде $r_i = \frac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, p_i — целые числа $(i = 1, \ \ldots, s)$.

Введём новое переменное t равенством $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Тогда $x = \dfrac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$ — рациональная функция, $dx = \rho'(t)\,dt$. Производя замену переменного в интеграле I, получаем

$$I = \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, \ t^{p_1}, \ \ldots, \ t^{p_s}\right) \rho'(t)\,dt + C,$$

где под знаком интеграла стоит рациональная функция от t, интеграл от которой мы умеем находить.

2°. Интеграл вида $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера*.

Случай 1. $a > 0$. Можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t,$$

откуда $x = \dfrac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

Случай 2. $c > 0$. Применяется замена x на t, определяемая формулой

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + xt.$$

Случай 3. Корни x_1, x_2 трёхчлена ax^2+bx+c действительны.

Если $x_1 = x_2$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = |x - x_1|\sqrt{a}$.

Если $x_1 \neq x_2$, то можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)t.$$

3°. *Интегралом от биномиального дифференциала* называется

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p dx$$

($a \neq 0$, $b \neq 0$, m, n, p — рациональные). Применив замену $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}\,t^{\frac{1}{n}-1}dt$, получим

$$I = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1}dt + C,$$

так что вопрос сводится к нахождению интеграла вида

$$J = \int (a+bt)^p t^q dt \quad (p,\ q \text{ — рациональные, } q = \frac{m+1}{n} - 1).$$

Этот интеграл в трёх случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби:

Случай 1. p — целое число.

Случай 2. q — целое число.

Случай 3. $p+q$ — целое число.

В самом деле, в указанных случаях интеграл J имеет вид интеграла, рассмотренного в начале параграфа. В случае 3 это становится ясным после записи J в виде

$$J = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Итак, интеграл I сводится к интегралу от рациональных функций в случаях целых p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$.

В других случаях интеграл I не является элементарной функцией, что было доказано П.Л. Чебышёвым.

4°. Интеграл вида

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

сводится к интегралу от рациональной дроби универсальной тригонометрической подстановкой

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

В самом деле, тогда

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

так что

$$I = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2} + C.$$

Другие подстановки

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x$$

иногда приводят к нужной цели при менее громоздких вычислениях. Например, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (m, n — рациональны) подстановкой $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от биномиального дифференциала.

5°. Некоторые интегралы от трансцендентных функций вычисляются интегрированием по частям:

$$\int x^n\varphi(x)\,dx, \quad \int e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{Bmatrix}dx,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) = \cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $e^{\alpha x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$.

Например,

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx + C_1 =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx + C_2 =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I + C_2.$$

Из сравнения первой и последней частей равенства получаем

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + \beta^2 C_2}{\alpha^2 + \beta^2} = \\ = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C.$$

6°. Как уже упоминалось при интегрировании биномиальных дифференциалов, не все интегралы от элементарных функций являются элементарными функциями. К их числу относятся

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx$$

и эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\,d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Глава 10
ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 10.1. Многомерные евклидовы пространства

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *n-мерным арифметическим числовым пространством* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *точкой* и сокращённо обозначать через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. При этом числа $x_1, \ \ldots, x_n$ называются *координатами* точки x.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести *расстояние* между двумя точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1}$$

Определение 2. n-мерное арифметическое числовое пространство $\mathbb{R}^n$ с введённым по формуле (1) расстоянием называется *n-мерным арифметическим евклидовым пространством.*

В дальнейшем n-мерное арифметическое евклидово пространство всегда будет обозначаться символом $\mathbb{R}^n$.

Свойства расстояния (1):

1°. $\rho(x, y) \geqslant 0 \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$; $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$;
3°. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Свойства 1°, 2° очевидны. Свойство 3°, называемое *неравенством треугольника*, будет вскоре установлено.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести операции сложения $x + y$ и умножения λx, $\lambda \in \mathbb{R}$, следующим образом: при $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$x + y \coloneqq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\lambda x \coloneqq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\mathbb{R}^n$ превращается в линейное (векторное) пространство, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также *вектором*. Разность $x - y$ в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Определение линейного (векторного) пространства будет приведено в § 25.1. Структура векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в этой и ближайших главах не будет играть роли.

Введём понятие модуля вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$|x| \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма 1 (неравенство Коши–Буняковского).

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant |x|\,|y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Доказательство. При $n = 2$ и при 3 это неравенство является хорошо известным свойством скалярного произведения. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим лишь нетривиальный случай (2), когда $|x| > 0$, $|y| > 0$.

При $a, b \geqslant 0$ имеем

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Заменив a на $a\sqrt{t}$, b — на $\dfrac{b}{\sqrt{t}}$ при произвольном $t > 0$, имеем

$$ab \leqslant \frac{a^2 t}{2} + \frac{b^2}{2t} \quad (a, b \geqslant 0,\ t > 0).$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = \frac{|y|}{|x|}$, получаем (2).

Лемма 2 (неравенство Минковского).

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + |y|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем отсюда, что

$$|x + y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Неравенство (3) также называют *неравенством треугольника.*

Д о к а з а т е л ь с т в о свойства 3° расстояния.

Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x' = x - y$, $y' = y - z$. Тогда $x' + y' = x - z$. В силу (3)

$$|x' + y'| \leqslant |x'| + |y'|, \text{ т. е. } |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|,$$

что лишь обозначением отличается от неравенства

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Понятие расстояния в $\mathbb{R}^n$ дает возможность ввести понятие ε-окрестности точки и понятие предельного перехода в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. При $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - a| < \varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(a)$ называют ещё *шаром*, или *открытым шаром* в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a.

Определение 4. Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ *точек* $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ (или говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ сходится к a) и пишут $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ или $x^{(m)} \to a$ при $m \to \infty$, если

$$\lim_{m\to\infty} |x^{(m)} - a| = 0,$$

или, иначе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x^{(m)} - a| < \varepsilon \quad \forall\, m \geqslant m_\varepsilon.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$x^{(m)} \in U_\varepsilon(a) \quad \forall\, m \geqslant m_\varepsilon.$$

Теорема 1. *Последовательность* $\{x^{(m)}\}_1^\infty$ *точек из* $\mathbb{R}^n$ *сходится к точке* $a = \mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда при каждом* $k = 1, \ldots, n$

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k,$$

где $x_k^{(m)}$, a_k *— координаты точек* $x^{(m)}$, a *соответственно.*

Доказательство очевидно, если воспользоваться неравенством

$$|x_k^{(m)} - a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - a_i)^2} = |x^{(m)} - a|.$$

Определение 5. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists\, R > 0$: $E \subset U_R(\vec{0})$.

Определение 6. *Последовательность* $\{x^{(m)}\}$ называется *ограниченной*, если множество её значений ограничено, т. е. $\exists\, R > 0$: $|x^{(m)}| < R \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}$ — ограниченная последовательность. Тогда при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, числовая последовательность $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует такая подпоследовательность $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел, что последовательность $\{x_1^{(m_j^{(1)})}\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Рассмотрим последовательность $\{x_2^{(m_j^{(1)})}\}_{j=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{m_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что последовательность $\{x_2^{(m_j^{(2)})}\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Продолжая это рассуждение, получим n последовательностей натуральных чисел $\{m_j^{(1)}\}$, $\{m_j^{(2)}\}$, $\ldots$, $\{m_j^{(n)}\}$, причём каждая следующая является подпоследовательностью предшествующей, и последовательности $\{x_k^{(m_j^{(k)})}\}_{j=1}^{\infty}$ сходятся при $k = 1, \ldots, n$.

Но тогда сходятся и последовательности $\{x_k^{(m_j^{(n)})}\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, \ldots, n$, как подпоследовательности сходящихся последовательностей. Следовательно, по теореме 1 последовательность $\{x^{(m_j^{(n)})}\}_{j=1}^{\infty}$ сходится, что и требовалось показать.

§ 10.2. Открытые и замкнутые множества

Определение 1. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,:\, U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Примерами открытых множеств являются $\mathbb{R}^n$, $\varnothing$.

Лемма 1. *$U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r \coloneqq |x-a| < \varepsilon$ и $\delta \coloneqq \varepsilon - r > 0$. Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, т. е. что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$. Пусть $y \in U_\delta(x)$, т. е. $|y-x| < \delta$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|y-a| \leqslant |y-x| + |x-a| < \delta + r = \varepsilon,$$

т. е. $y \in U_\varepsilon(a)$, что и требовалось показать.

Упражнение 1. Доказать, что

1° пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;

2° объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством.

Определение 2. Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу леммы 1 ε-окрестность точки x является её окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Упражнение 2. Сформулировать определение предела последовательности $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$, используя окрестности $U(a)$ вместо ε-окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

В дальнейшем будут использоваться и обозначения проколотых окрестностей:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x) \coloneqq U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}, \quad \mathring{U}(x) \coloneqq U(x) \setminus \{x\}.$$

Определение 3. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty \,:\, a \neq x^{(m)} \in E \quad \forall m \in \mathbb{N}, \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение 3′. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$E \cap \mathring{U}_\varepsilon(a) \neq \varnothing \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Упражнение 3. Доказать эквивалентность определений 3 и 3′.

Определение 4. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Примерами замкнутых множеств являются $\mathbb{R}^n$, одноточечное множество, пустое множество $\varnothing$, замкнутый шар $\{x\colon |x-a| \leqslant r\}$ при $r > 0$, в т.ч. отрезок при $n = 1$.

Упражнение 4. Доказать, что

1° объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;

2° пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение 5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\overline{E} \coloneqq E \cup \{x \,:\, x \in \mathbb{R}^n, x \text{ — предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества* E.

Используя символ $\overline{E}$, определение замкнутого множества можно сформулировать в виде $E = \overline{E}$.

Лемма 2. *Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a — предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\} \,:\, a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m \coloneqq |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что a — предельная точка множества E (и, следовательно, $a \in \overline{E}$). Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\} \,:\, a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Если $y^{(m)} \in E$, то положим $x^{(m)} = y^{(m)}$. Если $y^{(m)} \notin$ $\notin E$, то $y^{(m)}$ — предельная точка множества E (поскольку $y^{(m)} \in \overline{E}$). В этом случае через $x^{(m)}$ обозначим такую точку множества E, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{2}\,\varepsilon_m$. Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{1}{2}\varepsilon_m \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant$$
$$\leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m.$$

Отсюда видно, что a — предельная точка множества E, что и требовалось показать.

Доказанную лемму можно сформулировать в виде:

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}.$$

Часто открытое множество обозначается буквой G, а замкнутое — буквой F.

Упражнение 5. Доказать, что если F — замкнутое, а G — открытое множества пространства $\mathbb{R}^n$, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.

Определение 6. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если $U_\varepsilon(a)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит как точки из E, так и точки не из E.

Границей ∂E *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество граничных точек E.

Граничная точка множества E может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E. Так,

$$\partial U_\varepsilon(a) = \{x \,:\, |x - a| = \varepsilon\}, \quad U_\varepsilon(a) \cap \partial U_\varepsilon(a) = \varnothing,$$
$$\partial\{x \,:\, |x - a| \leqslant \varepsilon\} = \{x \,:\, |x - a| = \varepsilon\} \subset \{x \,:\, |x - a| \leqslant \varepsilon\}.$$

Упражнение 6. Доказать, что

1° множество E открыто тогда и только тогда, когда $E \cap \partial E = \varnothing$;

2° множество E замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial E \subset E$;

3° множество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто.

При доказательстве 3° можно использовать равенство $\partial E = \partial(\mathbb{R}^n \setminus E)$.

Упражнение 7. Доказать, что для $E \subset \mathbb{R}^n$

1° ∂E — замкнутое множество ($\overline{\partial E} = \partial E$);

2° $\operatorname{int} E \coloneqq E \setminus \partial E$ (*внутренность* E)— открытое множество;

3° $E \cup \partial E = \overline{E}$.

Определение 7. *Диаметром* непустого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\operatorname{diam} E \coloneqq \sup_{x,y \in E} |x-y|.$$

Определение 8. *Расстоянием между двумя непустыми множествами* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{dist}(E,F) \coloneqq \inf_{x \in E, y \in F} |x-y|.$$

Определение 9. Непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ называется *компактом*.

Лемма 3. *Пусть E, F — компакты в $\mathbb{R}^n$, $E \cap F = \varnothing$. Тогда* $\operatorname{dist}(E,F) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\operatorname{dist}(E,F) = d$. Из определения расстояния между множествами следует, что существуют две последовательности

$$\{x^{(m)}\},\ \{y^{(m)}\}, \quad x^{(m)} \in E,\ y^{(m)} \in F \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

такие, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| \to d$ $(m \to \infty)$.

С помощью теоремы Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, а затем из $\{y^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_{k_j})}\}_{j=1}^{\infty}$ так, что

$$x^{(m_{k_j})} \to a, \quad y^{(m_{k_j})} \to b \text{ при } j \to \infty.$$

В силу замкнутости множеств E, F имеем $a \in E$, $b \in F$. Тогда

$$d \leqslant |a-b| \leqslant$$
$$\leqslant |a - x^{(m_{k_j})}| + |b - y^{(m_{k_j})}| + |x^{(m_{k_j})} - y^{(m_{k_j})}| \to 0 + 0 + d = d$$

при $j \to \infty$. Следовательно, $d = |a-b|$. Но $a \neq b$, так как $E \cap F = \varnothing$. Поэтому $d > 0$.

Упражнение 8. Обобщить лемму 3 на случай, когда E — замкнутое множество, F — компакт.

Определение 10. Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с конкретным его описанием

$$\Gamma = \{x(t) \,:\, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} =$$
$$= \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \,:\, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad (1)$$

где x_i — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции ($i = 1, \ldots, n$), называется (*непрерывной*) *кривой*.

При этом точка $x(\alpha)$ называется *началом кривой*, а точка $x(\beta)$ — *концом кривой*.

Определение 11. *Областью* в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество, т. е. такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для любых двух точек a, b которого существует кривая Γ вида (1), лежащая в G ($\Gamma \subset G$) и соединяющая точки a и b ($x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$).

Определение 12. Замыкание $\overline{G}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутой областью*.

Упражнение 9. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *связным*,если для любого его разбиения на два непустых непересекающихся множества X и Y ($E = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$) существует принадлежащая E точка, являющаяся граничной для X и для Y ($E \cap \partial X \cap \partial Y \neq \varnothing$). Доказать, что такое определение связности для открытого множества E эквивалентно определению 11.

Упражнение 10. Доказать следующую лемму.

Лемма 4 (Гейне–Бореля). *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Omega\subset\mathbb{R}^n}$ — покрытие K открытыми множествами G_α (т.е. $K\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega}G_\alpha$). Тогда из $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ можно выделить конечное покрытие $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$, $m\in\mathbb{N}$, компакта K.*

§ 10.3. Предел функции многих переменных

Будем рассматривать функции

$$f\,:\,X\to\mathbb{R},\quad X\subset\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

т. е. числовые функции, определённые на множестве X точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. Множество X называется *областью определения функции* f. Через $f(x) = f(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ обозначается значение функции f в точке $x=(x_1,\,\ldots,\,x_n)\in X$.

Графиком функции f (1) называется множество точек $\{(x,x_{n+1})\coloneqq(x_1,\,\ldots,\,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\colon x\in X,\, x_{n+1}=f(x)\}$.

Определение 1. Будем говорить, что функция f (1)

1° определена в точке x, если $x\in X$;

2° не определена в точке x, если $x\notin X$;

3° определена на множестве E, если $E\subset X$.

Определение 2. Пусть функция f (1) определена на множестве E и $x^{(0)}$ — предельная точка множества E. Число A называется *пределом функции f при $x\to x^{(0)}$ по множеству E* (пишется $\lim\limits_{E\ni x\to x^{(0)}}f(x)=A$), если

1) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$: $|f(x)-A|<\varepsilon\;\forall\,x\in E$, $0<|x-x^{(0)}|<\delta$, или

2) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,U(x^{(0)})$: $|f(x)-A|<\varepsilon\;\forall\,x\in E\cap\mathring{U}(x^{(0)})$, или

3) $\lim\limits_{m\to\infty}f(x^{(m)})=A\;\forall\,\{x^{(m)}\}$: $x^{(m)}\in E\setminus\{x^{(0)}\}$, $x^{(m)}\to x^{(0)}$ при $m\to\infty$.

Здесь дано три определения предела, их эквивалентность устанавливается так же, как в случае $n = 1$.

Упражнение 1. Сформулировать обобщение определения предела на случай $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, ориентируясь на соответствующее обобщение для случая $n = 1$.

З а м е ч а н и е. Если $E \supset \mathring{U}_\delta(x^{(0)})$ при некотором $\delta > 0$ или $E = X$, то вместо $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ пишут просто $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ и этот предел называют *предела функции f при $x \to x^{(0)}$*.

Теорема 1 (критерий Коши существования предела функции). *Пусть функция f (1) определена на множестве E и $x^{(0)}$ — предельная точка множества E. Для существования конечного предела $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о не отличается по существу от приведённого раньше для функций одного переменного.

Для пределов функций многих переменных по множеству выполняются арифметические свойства, аналогичные арифметическим свойствам пределов функций одного переменного. Их доказательства аналогичны доказательствам теоремы 3.4.2 для функций одного переменного.

Определение 3. Функция f, определённая на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *ограниченной на множестве E*, если множество $f(E)$ ограничено, т. е. если существует число $B > 0$ такое, что

$$|f(x)| \leqslant B \quad \forall x \in E.$$

Аналогично вводятся (ср. случай $n = 1$) понятия ограниченности сверху (снизу) функции f на E.

Теорема 2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)}$ — предельная точка множества E и существует конечный $\lim\limits_{E\ni x\to x^{(0)}} f(x)$. Тогда при некотором $\delta > 0$ функция f ограничена на $E \cap \mathring{U}_\delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о такое же, как в случае $n = 1$, $E = U(x_0)$.

Определение 4. Если в определении предела функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ по множеству $E \subset X$ в качестве множества E взято при некотором $\delta_0 > 0$ пересечение $\mathring{U}_{\delta_0}(x^{(0)})$ с некоторой кривой Γ (проходящей через $x^{(0)}$), либо с прямой L (проходящей через $x^{(0)}$), либо с лучом l (с вершиной в $x^{(0)}$), то $\lim\limits_{E\ni x\to x^{(0)}} f(x)$ называется *пределом функции f в точке $x^{(0)}$* соответственно *по кривой* Γ, *по прямой* L, *по направлению* e (если луч $l = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x = x^{(0)} + te,\ t \geqslant 0\}$, $|e| = 1$).

Очевидно, $\lim\limits_{l\ni x\to x^{(0)}} f(x)$ совпадает с $\lim\limits_{t\to 0+0} f(x_1^{(0)}+te_1,\ \ldots,\ x_n^{(0)} + te_n)$, где $e = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$.

Если функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, значения которых совпадают с этим пределом. Обратное неверно, что видно на примере функции двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = x^2,\\ 0 & \text{при } y \neq x^2,\end{cases}$$

которая в точке $(0,0)$ не имеет предела, но имеет равные нулю пределы по каждому направлению.

Упражнение 2. Показать, что функция двух переменных

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2 > 0)$$

имеет в точке $(0,0)$ предел по каждому направлению, значение которого зависит от направления.

Рассмотрим теперь на примере функций двух переменных иное понятие предельного перехода, состоящее в последовательном предельном переходе по различным переменным.

Определение 5. Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки (x_0, y_0). *Повторными пределами функции f в точке* (x_0, y_0) называют пределы

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right).$$

Покажем на примерах, что существование повторных пределов не связано с существованием обычного предела.

Пример 1.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0).$$

Оба повторных предела существуют и равны нулю, а $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует.

Пример 2.

$$g(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} g(x, y) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} (\lim\limits_{y \to 0} g(x, y)) = 0$, а повторный предел $\lim\limits_{y \to 0} (\lim\limits_{x \to 0} g(x, y))$ не существует.

Пример 3.

$$h(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0).$$

$\lim\limits_{x \to 0} (\lim\limits_{y \to 0} h(x, y)) = 0$, $\lim\limits_{y \to 0} (\lim\limits_{x \to 0} h(x, y)) = 1$.

Упражнение 3. Доказать, что если существует $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = A \in \mathbb{R}$ и при некотором $\delta > 0$ для любого $y \in \mathring{U}_\delta(0)$ существует $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$, то существует $\lim\limits_{y \to 0} (\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)) = A$.

§ 10.4. Функции, непрерывные в точке

Определение 1. Пусть функция

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$

определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ (т. е. $E \subset X$) и $x^{(0)} \in E$.

Говорят, что функция f *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E, если

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$ при $x \in E$, $|x - x^{(0)}| < \delta$ (в иной записи: $f(E \cap U_\delta(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(f(x^{(0)}))$), или
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(x^{(0)})$: $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon\ \forall x \in E \cap U(x^{(0)})$, (в иной записи: $f(E \cap U(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(f(x^{(0)}))$), или
3) $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = f(x^{(0)})\ \forall \{x^{(m)}\}$: $x^{(m)} \in E$, $x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty$.

Здесь дано три определения непрерывности функции в точке по множеству. Их эквивалентность вытекает из эквивалентности соответствующих определений предела функции в точке. Следует лишь учесть

З а м е ч а н и е.

1°. Если $x^{(0)}$ — предельная точка множества E, то непрерывность функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E равносильна тому, что $\lim\limits_{E\ni x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

2°. Если $x^{(0)}$ — изолированная точка множества E (т. е. $E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) = \varnothing$ при некотором $\delta > 0$), то всякая функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E, а понятие предела функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E не определено.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке $x^{(0)}$ по множеству E, и ограниченность f на $E \cap U_\delta(x^{(0)})$ при достаточно малом $\delta > 0$ очевидны, если $x^{(0)}$ — изолированная точка множества E, и вытекают непосредственно из соответствующих свойств пределов, если $x^{(0)}$ — предельная точка множества E.

Лемма 1 (о сохранении знака). *Пусть функция f непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, $f(x^{(0)}) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x^{(0)}) \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Доказательство такое же, как в случае $n = 1$.

Рассмотрим вопрос о непрерывности композиции (суперпозиции) функций (сложной функции).

Теорема 1. *Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$ и каждая из m функций $f_1, \ldots, f_m$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E. Пусть*

$$(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in F \subset \mathbb{R}^m \quad \forall\, x \in E$$

и функция g непрерывна в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$ по множеству F.

Тогда определённая на E сложная функция

$$h(x) \coloneqq g(f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad h : E \to \mathbb{R},$$

непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > > 0$:

$$|g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon \text{ при } y \in F \cap U_\eta(y^{(0)}).$$

Выберем теперь $\delta = \delta(\eta) = \delta(\eta(\varepsilon)) = \delta_\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$|f_1(x) - f_1(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{m}}, \ \ldots, \ |f_m(x) - f_m(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{m}}$$
$$\text{при} \quad x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Мы использовали непрерывность функций $g, f_1, \ldots, f_m$ в соответствующих точках. Из написанных соотношений, считая, что

$$y = (y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),$$

получаем, что при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$

$$|y - y^{(0)}| = \left\{\sum_{i=1}^{m}[f_i(x) - f_i(x^{(0)})]^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \eta,$$

$$|h(x) - h(x^{(0)})| = |g(f_1(x), \ldots, f_m(x))-$$
$$-g(f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))| = |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что h непрерывна в $x^{(0)}$ по множеству E.

Упражнение 1. Сформулировать и доказать теорему о пределе сложной функции, аналогичную доказанной теореме о непрерывности сложной функции. Сравнить с соответствующими теоремами для $n = m = 1$.

§ 10.5. Функции, непрерывные на множестве

Определение 1. *Верхней (нижней) гранью на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функции f*, определённой на E, называется

$$\sup_E f := \sup_{x\in E} f(x) \quad (\inf_E f := \inf_{x\in E} f(x)).$$

Определение 2. Функция f, непрерывная в каждой точке $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ по множеству E, называется *непрерывной на множестве E*.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на E и достигает на E своих верхней и нижней граней.*

Доказательство проведём лишь для случая верхней грани. Как увидим, оно повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса для случая $n = 1$, $E = [a, b]$. Пусть $B := \sup_E f \leqslant +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^{(m)}\}$, $x^{(m)} \in E$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = B$. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ ограничена в силу ограниченности E. На основании теоремы 10.1.2 Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x^{(0)} = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)}$. Точка $x^{(0)} \in E$ в силу замкнутости E. Следовательно, f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Теперь из соотношений

$$f(x^{(m_k)}) \to B, \quad f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty$$

вытекает, что $f(x^{(0)}) = B$, т. е. что верхняя грань f достигается в точке $x^{(0)} \in E$. Следовательно, верхняя грань $\sup\limits_E f$ конечна, а функция f ограничена сверху на E.

Аналогично доказывается, что функция f достигает своей нижней грани на E и ограничена снизу на E. Теорема доказана.

Определение 3. Функция f называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad \forall x', x'' \in E \ : \ |x' - x''| < \delta. \quad (1)$$

Если функция f равномерно непрерывна на E, то она и непрерывна на E (т. е. непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$). В этом сразу убеждаемся, положив в (1) $x'' = x^{(0)}$, $x' = x$.

Обратное неверно. Например, при $n = 1$ функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin\frac{1}{x}$, непрерывные на $E = (0, 1)$, не являются равномерно непрерывными на E.

Однако, если E — компакт, то непрерывность функции на E эквивалентна равномерной непрерывности этой функции на E в силу следующей теоремы.

Теорема 2 (Кантора). *Пусть функция f непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f равномерно непрерывна на E.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. что существует функция f, непрерывная, но не равномерно непрерывная на E. Тогда

$$\exists\,\varepsilon_0 > 0\;\forall\,\delta > 0\;\exists\,x, y \in E\;:\;|x - y| < \delta,\;|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Будем в качестве δ брать $\delta_m = \frac{1}{m}$ и соответствующую пару точек x, y обозначать через $x^{(m)}$, $y^{(m)}$.

Тогда имеем

$$x^{(m)}, y^{(m)} \in E,\;\; |x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{m},$$
$$|f(x^{(m)}) - f(y^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{m}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$. Точка $x^{(0)} \in E$, так как E замкнуто. В силу непрерывности f в точке $x^{(0)}$ по множеству E имеем

$$f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}), \quad f(y^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty,$$

так что

$$|f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \leqslant |f(x^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| +$$
$$+ |f(y^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Это противоречит тому, что

$$|f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\,k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Упражнение 1. Пусть функция $f\colon\ (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную производную на (a, b). Показать, что f равномерно непрерывна на (a, b).

Определение 4. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Её *модулем непрерывности* (на E) называется функция ω: $(0, +\infty) \to [0, +\infty)$, где

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \omega(\delta; f; E) = \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in E, \ |x - y| \leqslant \delta\}.$$

Очевидно, что ω — возрастающая функция и что для выпуклого множества E (т.е. для множества, вместе с каждыми двумя точками содержащего и отрезок, соединяющий эти две точки)

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \text{ при } \delta_1, \delta_2 > 0.$$

Теорема 3. *Пусть функция f определена на $E \subset \mathbb{R}$. Для её равномерной непрерывности на E необходимо и достаточно, чтобы*

$$\omega(0 + 0; f; E) = 0.$$

Доказательство.

1° Пусть f равномерно непрерывна на E. Тогда из (1) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ \omega(\delta; f) \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon \quad \text{при } 0 < \delta < \delta(\varepsilon).$$

Следовательно, $\omega(0 + 0; f) = 0$.

2° Пусть $\omega(0 + 0; f) = 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ \omega(\delta(\varepsilon); f) < \varepsilon.$$

Тогда выполняется (1), т. е. f равномерно непрерывна на E.

Теорема 4 (Коши о промежуточных значениях функции). *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, функция f непрерывна на G. Тогда если $a, b \in G$, $f(a) < f(b)$, то*

$$\forall C \in (f(a), f(b)) \quad \exists c \in G \ : \ f(c) = C.$$

Доказательство. Напомним, что область — это открытое связное множество, так что для точек $a, b \in G$ существует кривая

$$\Gamma = \{x = \varphi(t) \, : \, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad \varphi(\alpha) = a, \, \varphi(\beta) = b, \quad \Gamma \subset G.$$

Рассмотрим сложную функцию $g(t) = f(\varphi(t))$. Она непрерывна на $[\alpha, \beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Кроме того, $g(\alpha) = f(a)$, $g(\beta) = f(b)$. По теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции

$$\exists \, \xi \in [\alpha, \beta] \, : \, g(\xi) = f(\varphi(\xi)) = C.$$

Взяв $c = \varphi(\xi)$, приходим к утверждению теоремы.

Следствие 1. *Теорема Коши о промежуточных значениях сохранится, если в её формулировке заменить область G на замкнутую область $\overline{G}$.*

Доказательство. Напомним, что замкнутой областью называется замыкание области. Пусть $a, b \in \overline{G}$, $f(a) < C < f(b)$. Возьмём $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, что $f(a) + \varepsilon_0 < C < f(b) - \varepsilon_0$. В силу непрерывности f в точках a, b найдутся точки $a^{(0)}$, $b^{(0)} \in G$ такие, что

$$|f(a) - f(a^{(0)})| < \varepsilon_0, \quad |f(b) - f(b^{(0)})| < \varepsilon_0.$$

Тогда $f(a^{(0)}) < C < f(b^{(0)})$ и остаётся применить доказанную теорему.

Упражнение 2. Доказать, что теорема 4 останется верной, если в её формулировке заменить область G на произвольное связное множество (см. упр. 10.2.9).

Глава 11
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе изучаются дифференциальные свойства функций во внутренних точках их областей определения.

§ 11.1. Частные производные и дифференцируемость функций многих переменных

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Зафиксировав $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$, $\ldots$, $x_n = x_n^{(0)}$, получим функцию одного переменного $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Если она имеет производную в точке $x_1^{(0)}$, то эта производная называется *частной производной функции f по x_1 в точке $x^{(0)}$* и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}), \quad f'_{x_1}(x^{(0)}) \quad \text{или} \quad f_{x_1}(x^{(0)}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\Big|_{x_1 = x_1^{(0)}}.$$

Частные производные функции f в точке $x^{(0)}$ по другим переменным $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(0)})$, $\ldots$, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)})$ определяются аналогичным образом.

Сравнивая значения функции в точках x и $x^{(0)}$, символом Δx часто обозначают приращение аргумента: $\Delta x \coloneqq x - x^{(0)}$. Таким образом,

$$\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \coloneqq (x_1 - x_1^{(0)}, \ldots, x_n - x_n^{(0)}),$$

$$|\Delta x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Приращением функции f в точке $x^{(0)}$, соответствующим приращению аргумента Δx, называют

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Определение 1. Функция f называется *дифференцируемой в точке $x^{(0)}$*, если приращение функции f в точке $x^{(0)}$ можно представить в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}, \quad (1)$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые действительные числа, $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$.

В правой части (1) символ «o малое» имеет тот же смысл, что и в случае функций одного переменного, так что вместо $o(|\Delta x|)$ можно написать $\varepsilon(\Delta x)|\Delta x|$, где функция ε определена на $\mathring{U}(\vec{0})$, $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

З а м е ч а н и е 1. Определение 1 останется эквивалентным, если в правой части (1) вместо $o(|\Delta x|)$ написать $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\Delta x)\Delta x_i$, где функции ε_i определены на некоторой проколотой окрестности нуля $\mathring{U}(\vec{0})$, $\varepsilon_i(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$. В самом деле, $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\Delta x)\Delta x_i = o(|\Delta x|)$, а с другой стороны,

$$\varepsilon(\Delta x)|\Delta x| = \varepsilon(\Delta x) \frac{|\Delta x|}{\sum\limits_{i=1}^{n} |\Delta x_i|} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| =: \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\Delta x)\Delta x_i.$$

Теорема 1. *Пусть функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда в этой точке существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ и $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В (1) будем считать $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$, т. е. $\Delta x = (\Delta x_1, 0, \ldots, 0)$.

Тогда $f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) =$ $= A_1 \Delta x_1 + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x_1|$.

Поделив обе части равенства на Δx_1 и переходя к пределу при $\Delta x_1 \to 0$, получим, что $\exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = A_1$. Аналогично доказывается, что $\exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = A_i$ при $i = 2, \ \ldots, n$.

Доказанная теорема дает возможность записать формулу (1) в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Delta x_i + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}. \quad (2)$$

Определение 2. Линейная функция

$$df(x^{(0)}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Delta x_i, \quad \Delta x_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

называется *дифференциалом* функции f в точке $x^{(0)}$.

Формулу (1) можно переписать, очевидно, в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = df(x^{(0)}) + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Ради симметрии записи дифференциал функции часто записывают в виде

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \quad dx_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и dx_i называют *дифференциалами независимых переменных*.

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда f непрерывна в точке $x^{(0)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1) видно, что $\Delta f(x^{(0)}) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

Сравним три свойства функции многих переменных в точке: непрерывность, существование всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, дифференцируемость. Соотношения между ними не такие, как в случае функции одного переменного. Именно, для функций $n \geqslant 2$ переменных

1° дифференцируемость f в точке влечёт за собой существование частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ \ldots, n)$ и непрерывность f в этой точке (см. теоремы 1, 2);

2° из существования всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ и непрерывности функции f в точке не следует дифференцируемость функции f в этой точке;

3° из существования всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке не следует непрерывность функции f в этой точке.

Для обоснования 3° приведём пример функции двух переменных $(n = 2)$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = y \neq 0, \\ 0 & \text{при } x \neq y \text{ и при } x = y = 0, \end{cases}$$

имеющей частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, но не являющейся непрерывной в точке $(0, 0)$.

В силу теоремы 2 эта функция не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Тем самым данный пример показывает, что существование всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке $x^{(0)}$ не влечёт за собой дифференцируемость f в этой точке.

Для обоснования 2° приведем пример функции двух переменных

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|},$$

непрерывной в точке $(0, 0)$ и имеющей частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, но не дифференцируемой в точке $(0, 0)$. В самом деле, если допустить, что f дифференцируема в точке $(0,0)$, то согласно (2) было бы верно равенство

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = o(\sqrt{x^2+y^2}) \text{ при } (x,y) \to (0,0),$$

противоречащее тому, что при $x = y$

$$f(x,x) = |x| \neq o(|x|) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Для обоснования 2° подходит и функция

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

В следующей теореме устанавливаются *достаточные* условия дифференцируемости функции в точке в терминах частных производных.

Теорема 3. *Пусть в точке $x^{(0)}$ непрерывны все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ функции f. Тогда f дифференцируема в точке $x^{(0)}$.*

Доказательство ради простоты записи проведём для случая функции двух переменных $(n = 2)$. Непрерывность частных производных функции в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ включает в себя предположение об их существовании в некоторой окрестности $U_\delta((x_0, y_0))$.

Считая $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 < \delta^2$, рассмотрим приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \\ = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + \\ + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)].\end{aligned}$$

Правая часть равенства представляет собой сумму приращений функции по одному переменному при фиксированной другой. Применяя по соответствующему переменному теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y),$$

где ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Подставляя полученные выражения в $\Delta f(x_0, y_0)$, имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\Delta y + \\ + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

В силу замечания 1 последнее равенство означает , что функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Теорема доказана.

Упражнение 1. Показать, что непрерывность частных производных функции в данной точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в данной точке, рассмотрев пример функции двух переменных $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2}$ или функции

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Определение 3. Функцию f, имеющую в точке или на множестве непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ при всех $i = 1, \ldots, n$, называют *непрерывно дифференцируемой в этой точке* или *на этом множестве* соответственно.

Заметим, что эта точка или все точки этого множества должны быть внутренними точками области определения функции f в соответствии с определением частной производной.

Используя этот термин, последнюю теорему можно сформулировать так: *непрерывно дифференцируемая в точке функция дифференцируема в этой точке.*

§ 11.2. Геометрический смысл дифференциала функции и частных производных

Рассмотрим функцию $f\colon U_\delta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ двух переменных x, y, заданную на δ-окрестности точки (x_0, y_0).

Тогда $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0),\ z = f(x, y)\}$ — её график.

Определение 1. Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0). *Касательной плоскостью* к графику функции f в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ называется плоскость, уравнение которой

$$\begin{gathered} z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \\ z_0 = f(x_0, y_0). \end{gathered} \tag{1}$$

Эта плоскость проходит через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, а разность между значением $z = f(x, y)$ функции в точке (x, y) и аппликатой $z_{\text{кас}}$ точки $(x, y, z_{\text{кас}})$ касательной плоскости, как следует из (11.1.2) с $n = 2$ и из (1), равна

$$\begin{gathered} f(x, y) - z_{\text{кас}} = o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \\ \text{при } (x, y) \to (x_0, y_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Упражнение 1. Показать, что (2) является определяющим свойством касательной плоскости в том смысле, что никакая другая плоскость таким свойством не обладает. Можно рассуждать аналогично тому, как это делалось при изучении касательной к графику функции одного переменного.

Из (1) видно, что дифференциал функции f в точке (x_0, y_0) совпадает с приращением аппликаты касательной плоскости к графику функции f в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (ср. (1) и определение 11.1.2). В этом состоит геометрический смысл дифференциала функции.

Рассмотрим сечение $\Gamma := S\Big|_{y=y_0}$ графика S функции плоскостью $y = y_0$. Можно считать для простоты, что функция f непрерывна на $\overline{U}_\delta(x_0, y_0)$. Тогда

$$\Gamma = \{(x, y_0, f(x, y_0)) \,:\, |x - x_0| \leqslant \delta\}$$

— кривая, лежащая в плоскости $y = y_0$, а

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол между осью Ox и (лежащей в плоскости $y = y_0$) касательной к Γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси аппликат. В этом состоит геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Аналогично выявляется геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

§ 11.3. Дифференцируемость сложной функции

Теорема 1. *Пусть каждая из m функций $f_1, \ldots, f_m$ n переменных дифференцируема в точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Пусть функция g m переменных дифференцируема в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$.

Тогда сложная функция

$$h(x) := g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и для её частных производных справедливы равенства

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Доказательство. Из дифференцируемости функций f_k в точке $x^{(0)}$ и функции g в точке $y^{(0)}$ следует их непрерывность в этих точках. Поэтому по теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций функция h определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и непрерывна в точке $x^{(0)}$. В силу дифференцируемости функций g и f_k запишем

$$\Delta g(y^{(0)}) = g(y^{(0)} + \Delta y) - g(y^{(0)}) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)})\Delta y_k + \varepsilon_0(\Delta y)|\Delta y|,$$

$$\Delta f_k(x^{(0)}) = f_k(x^{(0)} + \Delta x) - f_k(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i + \varepsilon_k(\Delta x)|\Delta x|,$$

где функции $\varepsilon_0(\Delta y)$, $\varepsilon_k(\Delta x)$ можно считать непрерывными и равными нулю в точках $\Delta y = \vec{0}$ и $\Delta x = \vec{0}$ соответственно.

Мы получим приращение функции h, вызванное приращением аргумента Δx, если в приращение $\Delta g(y^{(0)})$ вместо Δy_k при $k = 1, \ldots, m$ подставим приращения $\Delta f_k(x^{(0)})$ функций f_k, вызванные приращением Δx их аргумента. Получим тогда, что при достаточно малых $|\Delta x|$

$$\Delta h(x^0) = h(x^{(0)} + \Delta x) - h(x^{(0)}) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i + \sigma(\Delta x), \qquad (2)$$

где $\sigma(\Delta x) = o(|\Delta x|)$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

В самом деле, здесь

$$\sigma(\Delta x) = \varepsilon_0(\Delta y)|\Delta y|\Big|_{\substack{\Delta y_1 = \Delta f_1, \\ \ldots \\ \Delta y_m = \Delta f_m}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)})\varepsilon_k(\Delta x)|\Delta x|,$$

причём при некотором $M > 0$

$$|\Delta y| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |\Delta y_k| = \sum_{k=1}^{m} |\Delta f_k| \leqslant \sum_{k=1}^{m} M|\Delta x| = mM|\Delta x|,$$

а

$$\varepsilon_0(\Delta y)\Big|_{\substack{\Delta y_1=\Delta f_1,\\ \dots\\ \Delta y_m=\Delta f_m}} \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0$$

по теореме о непрерывности сложной функции.

Равенство (2) показывает, что функция h дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и что её производная $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)})$ совпадает с коэффициентом при Δx_i в правой части (2), т. е. что справедливы формулы (1).

Следствие 1. *Пусть каждая из m функций $f_1, \dots, f_m$ n переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет непрерывные в точке $x^{(0)}$ частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$). Пусть функция g m переменных имеет непрерывные в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))$ частные производные $\frac{\partial g}{\partial y_k}$ ($k = 1, \dots, m$).*

Тогда сложная функция $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x))$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и для её частных производных $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)})$ справедливы равенства (1).

В качестве другого следствия доказанной теоремы можно получить свойство *инвариантности формы первого дифференциала.*

В условиях теоремы на основании (1) можно записать

$$dg(f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)})) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g(f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))\, dx_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i.$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i$ является дифференциалом функции $y_k = f_k(x)$. Поэтому дифференциал функции $g(y) = g(y_1, \dots, y_m)$, где

$y_k = f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$, можно записать в виде

$$dg(y^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g(y^{(0)})}{\partial y_k}\, dy_k, \tag{3}$$

где dy_k — *дифференциалы функций*. Мы видим, что дифференциал $dg(y)$ имеет ту же форму, как и в случае, когда $y_1, \ldots, y_m$ — независимые переменные и, следовательно, $dy_1, \ldots, dy_m$ — *дифференциалы независимых переменных*. В этом и состоит свойство инвариантности формы первого дифференциала.

Приведём пример его применения. Формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

для независимых переменных u, v следуют из выражения дифференциала функции через частные производные и дифференциалы независимых переменных. Эти формулы верны и в случае, когда u, v являются функциями $u = u(x)$, $v = v(x)$ переменного $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в силу инвариантности формы первого дифференциала.

Свойство инвариантности формы первого дифференциала можно использовать при нахождении дифференциалов и производных сложных функций, записывая сначала дифференциал в виде (3), а затем выражая dy_k через дифференциалы независимых переменных.

§ 11.4. Производная по направлению и градиент

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\vec{e} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ — единичный вектор, т. е. $|\vec{e}| = 1$. Его координаты называют *направляющими косинусами* вектора $\vec{e}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$.

Из точки $x^{(0)}$ проведём луч с направлением e:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{(0)} + t\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + t\cos\alpha_n), \ t \geqslant 0,$$

$$\text{или} \quad x = x^{(0)} + t\vec{e}, \quad t \geqslant 0.$$

Определение 1. *Производной функции f в точке $x^{(0)}$ по направлению e* называется число

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^{(0)}) \coloneqq \lim_{t\to 0+0} \frac{f(x^{(0)} + te) - f(x^{(0)})}{t},$$

если этот предел существует и конечен.

Если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cos\alpha_i.$$

В случае $n = 3$ $e = (\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы между направлением вектора $\vec{e}$ и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Для дифференцируемой в точке (x_0, y_0, z_0) функции f трёх переменных x, y, z

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.$$

Введём вектор

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) \coloneqq \\ \coloneqq \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right),$$

который называется *градиентом* функции f в точке (x_0, y_0, z_0).

Тогда, используя символ скалярного произведения, можно написать $\frac{\partial f}{\partial e} = (\operatorname{grad} f, e)$, т. е. *производная функции f по направлению вектора $\vec{e}$ совпадает с проекцией* $\operatorname{grad} f$ *на это направление.*

Из свойств скалярного произведения следует, что в точке (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{\partial f}{\partial e} \leqslant |\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Если вектор $\operatorname{grad} f$ ненулевой, то существует единственное направление e, производная по которому $\frac{\partial f}{\partial e} = |\operatorname{grad} f|$. Это направление $e = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$.

Отсюда вытекает геометрическая характеристика градиента: — это вектор, по направлению которого производная имеет максимальное значение.

На этом основании условно можно сказать, что *направление градиента — это направление быстрейшего роста функции.*

§ 11.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ функция f имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то в точке $x^{(0)}$ у этой производной может существовать частная производная $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Если $k \neq i$, то эту производную называют *смешанной частной производной второго порядка* функции f по переменным x_i и x_k и обозначают символом $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_k}(x^{(0)})$, а если $k = i$, то эту производную называют (*чистой*) *частной производной второго порядка* функции f по переменному x_i и обозначают символом $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_i}(x^{(0)})$.

Аналогично вводятся частные производные третьего, четвертого и вообще любого порядка, смешанные и чистые.

Частная производная функции f порядка m в точке $x^{(0)}$, вычисленная последовательным дифференцированием по $x_{i_1}, \ \ldots, x_{i_m}$, обозначается символом $\frac{\partial^m f(x^{(0)})}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}$.

Если в данной точке $x^{(0)}$ существуют смешанные производные
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1},$$
то они не обязательно равны, в чём можно убедиться на примере функции двух переменных x, y
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{при } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
который мы не будем разбирать.

Однако часто бывает, что смешанные производные, отличающиеся лишь порядком взятия частных производных, совпадают. В следующей теореме приводятся достаточные условия независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.

Теорема 1. *Пусть у функции f двух переменных x, y частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Тогда
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим символами $\Delta_x f$, $\Delta_y f$ приращения функции f в точке (x_0, y_0), вызванные приращением соответственно Δx аргумента x и Δy аргумента y при достаточно малых $|\Delta x|$, $|\Delta y|$. Легко убедиться, что
$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta_y(\Delta_x f(x_0, y_0))$$
(каждая из частей равенства совпадает с $f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$). Из условий теоремы следует существование частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ на некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Применяя к левой части равенства формулу конечных приращений Лагранжа по аргументу x, а к правой — эту же формулу Лагранжа по y, имеем

$$\Delta_y \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)\Delta x = \Delta_x \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства ту же формулу Лагранжа по аргументам y и x соответственно, имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y \Delta x = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

где $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Сократим последнее равенство на $\Delta x \Delta y$. Считая в полученном равенстве $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ сколь угодно малыми и учитывая непрерывность смешанных производных в точке (x_0, y_0), приходим к (1).

С помощью теоремы 1 можно доказать её обобщение, относящееся к функциям n переменных и к смешанным производным любого порядка $m \geqslant 2$.

Теорема 2. *Пусть у функции n переменных в точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ непрерывны все смешанные частные производные порядка $m \geqslant 2$, а в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ непрерывны все производные низших порядков.*

Тогда смешанные производные порядка m в этой точке, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают.

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы. Достаточно, очевидно, показать совпадение в точке $x^{(0)}$ двух смешанных производных: $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}$ и отличающейся от неё лишь порядком дифференцирования на $(k-1)$-м и k-м шаге при некотором и единственном k $(2 \leqslant k \leqslant m)$.

Если $k = m$, то указанные две производные совпадают в точке $x^{(0)}$ в силу теоремы 1, применённой к функции $\dfrac{\partial^{m-2} f}{\partial x_{i_{m-2}} \ldots \partial x_{i_1}}$.

Если $k < m$, то достаточно убедиться в совпадении смешанных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}}, \quad \text{где} \quad g = \frac{\partial^{k-2} f}{\partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}},$$

в окрестности точки $x^{(0)}$, что следует из теоремы 1, применённой к функции g.

В качестве пояснения напишем цепочку равенств для случая $n = 3$, $m = 3$. Пусть мы хотим сравнить значения $f'''_{zyx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ и $f'''_{xyz} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$. Тогда

$$f'''_{zyx} = (f'_z)''_{yx} = (f'_z)''_{xy} = (f''_{zx})'_y = \\ = (f''_{xz})'_y = (f'_x)''_{zy} = (f'_x)''_{yz} = f'''_{xyz}.$$

Заметим, что в дальнейшем мы почти всегда будем находиться в ситуации, когда смешанные производные непрерывны и, следовательно, не зависят от порядка дифференцирования.

Определение 1. Функция f называется *m раз непрерывно дифференцируемой в точке* (*на множестве*), если все её частные производные порядка m непрерывны в точке (на множестве). Заметим, что эта точка (каждая точка этого множества) считается внутренней точкой области определения функции f.

С помощью теорем 11.1.3 и 11.1.2 получаем, что m раз непрерывно дифференцируемая в точке (на открытом множестве) функция имеет непрерывные в точке (на открытом множестве) все частные производные порядков не выше m.

Введём теперь понятие *дифференциалов высших порядков*. Пусть функция f дифференцируема на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Её дифференциал, называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*, имеет вид

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \quad x \in G.$$

Будем изучать его как функцию точки x. Если все частные производные первого порядка функции f дифференцируемы на G, то существует дифференциал δ от первого дифференциала $\delta(df(x))$, при вычислении которого dx_i считаются постоянными. Имеем тогда

$$\delta(df(x)) = \sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\delta x_j\right) dx_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\, dx_i\, \delta x_j.$$

Значение дифференциала от первого дифференциала функции f в точке x при $\delta x_j = dx_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ называется *вторым дифференциалом*, или *дифференциалом второго порядка* функции f в точке x и обозначается $d^2 f(x)$. Итак,

$$d^2 f := \delta(df)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ (i=1,\,\ldots,\,n)}} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j\,.$$

Если все частные производные порядка $m - 1$ функции f дифференцируемы в точке x, то дифференциал порядка m функции f в точке x определяется как $d^m f(x) :=$ $:= \delta(d^{m-1} f(x))\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ (i=1,\,\ldots,\,n)}}$.

Следовательно,

$$d^m f(x) = \sum_{i_1,\,\ldots,\,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}.$$

Если функция f m раз непрерывно дифференцируема в точке x и $m - 1$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x, то в последней формуле слагаемые, частные производные в которых отличаются лишь порядком дифференцирования, совпадают, и саму формулу можно записать в более компактном виде.

Упорядоченный набор n целых неотрицательных чисел

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

называется *мультииндексом*, а $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ — его длиной. Полагают ещё $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $dx^\alpha = dx_1^{\alpha_1} \ldots dx_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$.

В этих обозначениях для функции f n переменных, m раз непрерывно дифференцируемой в точке x и $m-1$ раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки x

$$d^m f(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f(x)\, dx^\alpha.$$

В частности, для функции f двух переменных x, y

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k}\, dx^{m-k} dy^k.$$

Если же при этом $m = 2$, то для дважды непрерывно дифференцируемой в точке (x, y) функции f

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

в этой точке.

§ 11.6. Формула Тейлора

Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и все частные производные порядка m функции f непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.

При этом предположении (согласно сделанным ранее замечаниям) все её частные производные до порядка m включительно непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.

Рассмотрим функцию φ: $[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x), \quad \text{где} \quad \Delta x = x - x^{(0)}.$$

Функция φ имеет на отрезке $[0,1]$ непрерывные производные порядка m, что вытекает из теоремы о дифференцируемости сложной функции. Поэтому для φ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Выражая производные функции φ через частные производные функции f, получаем, что

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\,\dots,\,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x^{(0)})}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_k} + \\ + r_{m-1}(\Delta x), \quad (1)$$

где

$$r_m(\Delta x) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\,\dots,\,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(x^{(0)} + \theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}} \Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_m}.$$

Полученная формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.

В этой формуле при сделанных предположениях о функции f частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают. Поэтому формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно переписать в следующем виде:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x^{(0)})(\Delta x)^\alpha + \\ + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x^{(0)} + \theta\Delta x)(\Delta x)^\alpha. \quad (2)$$

Из этой формулы при предположениях, что функция f m раз непрерывно дифференцируема на $U_\delta(x^{(0)})$ и что

$|\Delta x| < \delta$, следует *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x^{(0)})(\Delta x)^\alpha + r_m(\Delta x), \qquad (3)$$

где

$$r_m(\Delta x) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!} \left[D^\alpha f(x^{(0)} + \theta \Delta x) - D^\alpha f(x^{(0)}) \right] (\Delta x)^\alpha =$$
$$= \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|^m, \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Из приведённых рассмотрений следует

Теорема 1. *Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на δ-окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда для функции f при $|\Delta x| < \delta$ справедлива формула Тейлора в каждой из форм* (2), (3).

Для получения разложения конкретных функций по формуле Тейлора без вычисления коэффициентов формулы с помощью дифференцирования используется

Теорема 2 (единственности). *Пусть $m \in \mathbb{N}_0$,*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0},$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} b_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Тогда $a_\alpha = b_\alpha$ $\forall\, \alpha$: $|\alpha| \leqslant m$.

Доказательство. После почленного вычитания приходим к требованию доказать, что из равенства

$$0 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}$$

следует, что $c_\alpha = 0$ $\forall\, \alpha$: $|\alpha| \leqslant m$.

Покажем это. Зафиксируем $y = (y_1, \ldots, y_n) \neq \vec{0}$ и при $\Delta x = ty$ получаем

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{|\alpha| = k} c_\alpha y^\alpha \right) t^k + o(|t|^m) \text{ при } t \to 0.$$

В силу ранее установленной теоремы единственности для случая $n = 1$ отсюда следует, что

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = 0 \quad \forall\, k = 0,\, \ldots,\, m, \quad \forall\, y \neq \vec{0}.$$

Но тогда, обозначив через $\beta = (\beta_1,\, \ldots,\, \beta_n)$ произвольный мультииндекс длины $|\beta| = k$, имеем

$$0 = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = \beta! c_\beta.$$

Отсюда следует, что

$$c_\beta = 0 \quad \forall\, \beta \,:\, |\beta| = k, \quad \forall\, k = 0,\, \ldots,\, m,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и*

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Тогда это равенство является формулой Тейлора (3) *функции f с остаточным членом в форме Пеано.*

Доказательство. Утверждение теоремы является непосредственным следствием теорем 1, 2.

Пример 1. Разложить по формуле Тейлора функцию $e^{x^2+y^2}$ двух переменных в окрестности точки $(0,0)$ с точностью до $o((x^2 + y^2)^2)$ при $(x,y) \to (0,0)$.

Воспользуемся известным разложением

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(|u|^2) \text{ при } u \to 0.$$

Подставив $u = x^2 + y^2$, получаем, что $e^{x^2+y^2} = 1 + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}\, x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}\, y^4 + o((x^2 + y^2)^2)$. В силу теоремы 3 это разложение и является искомым разложением функции по формуле Тейлора.

Глава 12
НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 12.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Под *прямым* (или *декартовым*) *произведением* множеств X и Y понимают множество пар точек (x, y):

$$X \times Y \coloneqq \{(x, y) \,:\, x \in X,\ y \in Y\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Кубической ε-окрестностью точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ называют множество

$$Q_\varepsilon(x^{(0)}) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x_i - x_i^{(0)}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

При $n = 1$ $Q_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)$.

Прямоугольной (δ, ε)-окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, где $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^m$, назовём множество

$$Q_{\delta,\varepsilon}(x^{(0)}, y^{(0)}) = Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\varepsilon(y^{(0)}).$$

В основной части этого параграфа мы будем иметь дело с точками (x, y) плоскости, на которой зафиксирована прямоугольная декартова система координат.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где F — функция двух переменных x, y, которые можно считать координатами точки плоскости.

Определение 1. Функция f: $X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *неявной* (или *неявно заданной*) *функцией*, определяемой уравнением (1), если

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Если же на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ уравнения (1) и $y = f(x)$ эквивалентны:

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

(т. е. их множества решений, принадлежащих E, совпадают), то говорят, что уравнение (1) разрешимо на E относительно переменного y.

Пусть для примера задано уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{2}$$

которое определяет на отрезке $[-1, 1]$ две непрерывные функции:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Будем рассматривать это же уравнение (2) не на всей плоскости, а только на некоторой прямоугольной окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), координаты которой удовлетворяют уравнению (2): $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$.

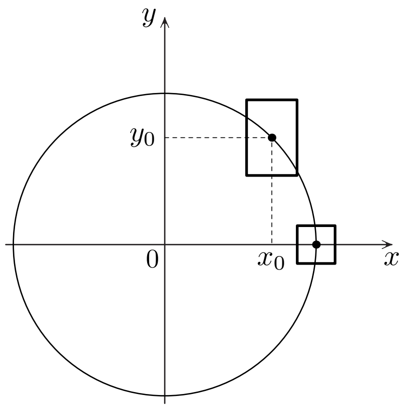


Рис. 12.1.1

Пусть сначала $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Тогда существуют столь малые $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, что на $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f_1(x).$$

Множество решений уравнения (2), принадлежащих $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, представляет собой часть графика функции f_1, лежащую в $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Эта часть графика f_1 совпадает с графиком сужения f_1 на $Q_\delta(x_0)$ (если $\delta > 0$ достаточно мало сравнительно с ε) или с графиком сужения f_1 на некоторый интервал $(a, b) \subset Q_\delta(x_0)$ (если $\varepsilon > 0$ слишком мало сравнительно с δ).

Если же в качестве (x_0, y_0) взять точку $(x_0, y_0) = (1, 0)$, то ни на какой её окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(1, 0)$ уравнение (2) не является разрешимым относительно переменного y (множество решений уравнения (2) из $Q_{\delta,\varepsilon}(1, 0)$ не является графиком никакой функции $y = f(x)$).

В следующей теореме приводятся достаточные условия, налагаемые на функцию F, при которых уравнение (1) разрешимо относительно переменного y на некоторой прямоугольной окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$.

Теорема 1. *Пусть функция F двух переменных удовлетворяет следующим условиям:*

1° *F непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0);*

2° *$F(x_0, y_0) = 0$;*

3° *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке (x_0, y_0).*

Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\varepsilon(y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция

$$f \ : \ Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$$

непрерывна на $Q_\delta(x_0)$, $f(x_0) = y_0$.

Если дополнительно считать, что

4° *F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то f дифференцируема в точке x_0 и*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Если же при этом частные производные F'_x, F'_y непрерывны на $U(x_0, y_0)$, то производная $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле утверждения теоремы верны, если её условие 3° заменить более общим:

3* F'_y существует и сохраняет знак на $U(x_0, y_0)$.

Мы будем проводить доказательство при условии 3* вместо 3°.

Пусть σ, $\varepsilon > 0$ настолько малы, что в замыкании прямоугольной окрестности $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$ функция F непрерывна, а F'_y сохраняет знак. Ради определённости будем считать, что $F'_y > 0$ на $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Поэтому $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in Q_\sigma(x_0)$ как функция переменного y строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Отсюда следует (поскольку $f(x_0, y_0) = 0$), что

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y + \varepsilon) > 0.$$

Функции $F(x, y_0 - \varepsilon)$, $F(x, y + \varepsilon)$ как функции переменного x непрерывны на $Q_\sigma(x_0)$ (и, следовательно, обладают свойством сохранения знака), так что найдется $\delta \in (0, \sigma]$ такое, что

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in Q_\delta(x_0).$$

Зафиксируем произвольное значение $x^* \in Q_\delta(x_0)$. Поскольку $F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0$, $F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0$, по теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции $F(x^*, y)$ найдется $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, при котором $F(x^*, y^*) = 0$. Такое значение y^* единственно в силу строгой монотонности $F(x^*, y)$. Обозначим $y^* = f(x^*)$. Таким образом, построена функция $f\colon Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ такая, что $f(x_0) = y_0$,

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x) \quad \text{на} \quad Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0).$$

Из последнего соотношения получаем, что

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ при } x \in Q_\delta(x_0).$$

Установим непрерывность функции f на $Q_\delta(x_0)$. Её непрерывность в точке x_0 следует из того, что в приведённых построениях число $\varepsilon > 0$ можно было взять сколь угодно

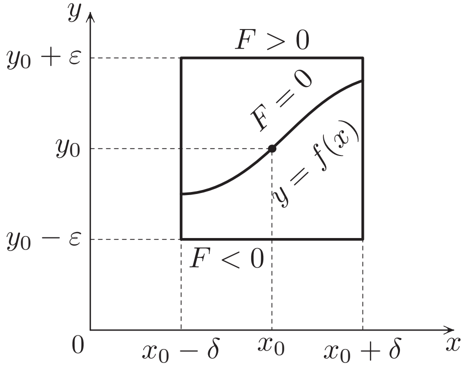


Рис. 12.1.2

малым, причём для каждого малого $\varepsilon > 0$ было указано $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(Q_\delta(x_0)) \subset Q_\varepsilon(y_0) = Q_\varepsilon(f(x_0))$.

Пусть теперь x^* — произвольная точка из $Q_\delta(x_0)$, $y^* = f(x^*)$. Очевидно, что если условия теоремы 1 с заменой 3° на 3^* выполнены, то они выполняются и после замены в них (x_0, y_0) на (x^*, y^*). Следовательно, по уже доказанному f непрерывна в точке x^*.

Предположим теперь, что выполнено условие 4°. В силу дифференцируемости F и замечания 11.1.1

$$\begin{aligned}F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - F(x_0, y_0) &= \\ = F'_x(x_0,y_0)\Delta x + F'_y(x_0,y_0)\Delta y &+ \\ +\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y&,\end{aligned}$$

где $\varepsilon_i(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, $i = 1, 2$. Будем считать здесь $|\Delta x|$ достаточно малым, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Тогда из последнего равенства получаем

$$0 = F'_x(x_0,y_0)\Delta x + F'_y(x_0,y_0)\Delta y + \\ +\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Считая $|\Delta x|$, а значит, и $|\Delta y| = |\Delta f|$ достаточно малыми, имеем

$$\Delta y = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}\Delta x = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}\Delta x + o(\Delta x)$$

при $\Delta x \to 0$. Следовательно, f дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))}.$$

Если функция F дифференцируема не только в точке (x_0, y_0), но и на окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, то последняя формула верна для любого $x \in Q_\delta(x_0)$:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad \forall\, x \in Q_\delta(x_0).$$

Из этой формулы вытекает последнее утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. В формулировке утверждения теоремы 1 можно отказаться от требования

$$f \;:\; Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0).$$

Тогда, уменьшив при необходимости ε или δ, можно взять $\varepsilon = \delta$. При этом сохранится свойство эквивалентности

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

на $Q_\delta(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\delta(y_0) \subset \mathbb{R}^2$, тождество $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x_0)$ и дополнительное утверждение теоремы 1.

Полученное утверждение равносильно, очевидно, утверждению теоремы 1.

Обобщим теорему 1 на случай неявной функции, заданной уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Это понятие вводится так же, как в случае $n = 1$.

Далее будем пользоваться обозначениями:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y), \quad (x^{(0)}, y_0) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0),$$

$$F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Теорема 2. *Пусть функция F переменных $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1° *F непрерывна на некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$;*

2° *$F(x^{(0)}, y_0) = 0$;*

3° *$F'_y(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке $(x^{(0)}, y_0)$.*

Тогда существует кубическая окрестность $Q_\delta(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$ такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция

$$f \,:\, Q_\delta(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$$

непрерывна на $Q_\delta(x^{(0)})$, $f(x^{(0)}) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x^{(0)})$.

Если же дополнительно считать, что

4° *F дифференцируема в точке $(x^{(0)}, y_0)$, то f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, и при $i = 1, \ldots, n$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = -\frac{F'_{x_i}(x^{(0)}, y_0)}{F'_y(x^{(0)}, y_0)}.$$

Если же при этом все частные производные первого порядка функции F непрерывны на $U(x^{(0)}, y_0)$, то при $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

непрерывны на $Q_\delta(x^{(0)})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

§ 12.2. Система неявных функций

Теоремы предыдущего параграфа дают достаточные условия разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$ относительно переменного y. Рассмотрим более общую задачу — о возможности разрешить систему m уравнений относительно m переменных.

Для системы m функций $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ переменного $t = (t_1, \ldots, t_m)$ определитель

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_m)}{\partial(t_1, \ldots, t_m)}(t) := \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial t_m}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial t_m}(t) \end{vmatrix}$$

называется её *якобианом.*

Будем использовать обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) = (\tilde{y}, y_m)$, $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{m-1})$, $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $(x, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_m)$, $F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$.

Теорема 1. *Пусть*

1° *Функции* $F_j(x, y) = F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *(*$j = 1, \ldots, m$*) непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности* $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ *точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$*;*

2° $F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ *(*$j = 1, \ldots, m$*);*

3° $J = \left.\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$

Тогда существует кубическая окрестность $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$*, на которой*

$$\{F_j(x, y) = 0\}_{j=1}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m,$$

где $(f_1, \ldots, f_m)\colon\ Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}^m$*, функции* f_j *непрерывно дифференцируемы на* $Q_\varepsilon(x^{(0)})$*,* $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ *(*$j = 1, \ldots, m$*). При этом*

$$F_j(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0 \ \forall\, x \in Q_\varepsilon(x^{(0)}) \ (j = 1, \ldots, m). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведём индукцией по m — числу уравнений системы

$$\text{(a)} \quad \{F_i(x, y) = 0\}_{j=1}^m.$$

При $m = 1$ теорема верна в силу теоремы 12.1.2 и замечания 12.1.1. Предположим, что теорема справедлива для $m - 1$ уравнений, и покажем, что тогда она верна и для случая m уравнений.

Разложив определитель J по элементам последнего столбца, видим, что, по крайней мере, для одного элемента этого столбца алгебраическое дополнение отлично от нуля. Ради определённости будем считать, что

$$J_{m-1} = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})}\bigg|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$$

В силу предположения индукции систему первых $m-1$ уравнений системы (a) можно разрешить относительно y_1, $\ldots$, y_{m-1}. Говоря точнее (см. теорему 12.1.2 и замечание 12.1.1), существуют число $\eta > 0$ и непрерывно дифференцируемые функции

$$\varphi_j : Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_j(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = y_j^{(0)}$$
$$(j = 1, \ldots, m-1)$$

такие, что (a) $\Longleftrightarrow$ (b) (т. е. системы уравнений (a) и (b) эквивалентны) на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset U(x^{(0)}, y^{(0)})$, где

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ F_m(x, y) = 0. \end{cases}$$

При этом

$$F_j(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0 \tag{2}$$
$$(j = 1, \ldots, m-1)$$

при $(x, y_m) \in Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$.

Очевидно, что (b) $\Longleftrightarrow$ (c) на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)})$, где

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ \varPhi(x, y_m) = 0. \end{cases}$$

$$\varPhi(x, y_m) = F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m),$$
$$\varPhi(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = F_m(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0.$$

Убедимся, что последнее уравнение системы (c) можно разрешить относительно y_m. В самом деле, $\varPhi$ непрерывно дифференцируема на $Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$ как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, $\varPhi(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = 0$.

Остаётся проверить, что $\dfrac{\partial\varPhi(x^{(0)}, y_m^{(0)})}{\partial y_m} \neq 0$, и сослаться на теорему 12.1.2. Осуществим эту проверку.

Заметим, что

$$\frac{\partial\varPhi}{\partial y_m} = \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}. \qquad (3)$$

В то же время результатом дифференцирования тождеств (2) по y_m являются тождества

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m-1. \qquad (4)$$

Но тогда

$$J = \left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} =$$
$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial\varPhi}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом последнее равенство получено прибавлением к последнему столбцу определителя суммы всех предшествующих столбцов, умноженных на $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial y_m}$ $(j = 1, \ldots, m-1)$ соответственно, и использованием равенств (3), (4).

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{\partial\varPhi}{\partial y_m}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0.$$

Разрешив последнее уравнение системы (c) относительно y_m в соответствии с теоремой 12.1.2, получаем, что на некоторой кубической окрестности $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y_m^{(0)}) \subset \subset Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$

$$\varPhi(x, y_m) = 0 \quad \iff \quad y_m = f_m(x),$$

где функция f_m: $Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $f_m(x^{(0)}) = y_m^{(0)}$,

$$\varPhi(x, f_m(x)) \quad \text{при} \quad x \in Q_\varepsilon(x^{(0)}). \tag{5}$$

Тогда (c) $\iff$ (d) $\iff$ (e) на $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$, где

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ y_m = f_m(x); \end{cases} \qquad \text{(e)} \quad \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m,$$

и

$$f_j(x) = \varphi_j(x, f_m(x)) \quad (i = 1, \ \ldots, \ m-1). \tag{6}$$

Следовательно, (a) $\iff$ (e) на $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$. При этом функции f_j: $Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы и $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Тождества (1) следуют из (2), (6) и (5).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Дифференцируя тождества (1) по x_k, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

относительно $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ с отличным от нуля определителем, из которой можно найти $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}$.

§ 12.3. Дифференцируемые отображения

Определение 1. Функция

$$f \, : \, G \to \mathbb{R}^m, \quad G \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

называется *отображением множества G в $\mathbb{R}^m$*. Представляя $f(x) \in \mathbb{R}^m$ при $x \in G$ через координаты:

$$f(x) = (f_1(x), \ \ldots, \ f_m(x)), \quad x \in G, \tag{2}$$

видим, что задание отображения f равносильно заданию на G m числовых функций

$$f_1(x),\ \ldots,\ f_m(x)\ :\ G \to \mathbb{R}, \tag{3}$$

называемых *координатными функциями.*

Множество

$$f(E) = \{y \in \mathbb{R}^m\ :\ y = f(x),\ x \in E\}, \quad E \subset G,$$

называется *образом множества* E, множество $f(G)$ — *областью значений* f, а множество

$$f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ f(x) \in D\}, \quad D \subset \mathbb{R}^m,$$

— *прообразом множества* D.

Определение 2. Отображение (1) называется *непрерывным в точке* $x^{(0)} \in G$, если

$$\forall\, U(f(x^{(0)})) \quad \exists\, U(x^{(0)})\ :\ f(G \cap U(x^{(0)})) \subset U(f(x^{(0)})).$$

З а м е ч а н и е. Если $x^{(0)}$ — внутренняя точка G, то в этом определении вместо $G \cap U(x^{(0)})$ можно писать $U(x^{(0)})$.

Лемма 1. *Отображение* (1) *непрерывно в точке* $x^{(0)} \in G$ *тогда и только тогда, когда в точке* $x^{(0)}$ *непрерывны все координатные функции* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично случаю $n = 1$, $m = 3$, с которым мы сталкивались при изучении вектор-функций.

Определение 3. Отображение (1) называется *непрерывным на множестве* G, если оно непрерывно в каждой точке множества G.

Теорема 1. *Отображение* (1) *открытого множества* G *непрерывно на* G *тогда и только тогда когда прообраз всякого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть f непрерывно на G, и пусть открытое множество $D \subset \mathbb{R}^m$. Покажем, что множество $f^{-1}(D)$ открыто. Пусть $x^{(0)} \in f^{-1}(D)$, т. е. $f(x^{(0)}) \in D$. Множество D является окрестностью точки $f(x^{(0)})$. Следовательно, по определению 2 $\exists\, U(x^{(0)}) \subset G$: $f(U(x^{(0)})) \subset D$. Последнее означает, что $U(x^{(0)}) \subset f^{-1}(D)$.

Мы получили, что каждая точка $x^{(0)} \in f^{-1}(D)$ принадлежит $f^{-1}(D)$ вместе с некоторой своей окрестностью, т. е. что множество $f^{-1}(D)$ открыто.

Пусть теперь дано, что прообраз каждого открытого множества открыт. Покажем, что f непрерывно на G. Пусть $x^{(0)} \in G$, $D = U(f(x^{(0)}))$ — произвольная окрестность точки $f(x^{(0)})$. Тогда $f^{-1}(D)$ — открытое множество, содержащее точку $x^{(0)}$, т. е. окрестность точки $x^{(0)}$. Обозначив её через $U(x^{(0)})$, имеем

$$f(U(x^{(0)})) = f(f^{-1}(D)) \subset D = U(f(x^{(0)})).$$

По определению 2 f непрерывно в точке $x^{(0)}$. В силу произвольности точки $x^{(0)} \in G$ f непрерывно на G.

Определение 4. Отображение (1) будем называть *непрерывно дифференцируемым в точке* $x^{(0)} \in G$ (*на* G), если все его координатные функции (3) непрерывно дифференцируемы в точке $x^{(0)}$ (на G).

Далее будем считать $m = n$.

Якобианом отображения (1) при $m = n$ назовём

$$J(x) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}.$$

Будем изучать непрерывно дифференцируемые отображения открытого множества с отличным от нуля якобианом. В одномерном случае ($n = 1$) это условие является достаточным условием взаимной однозначности отображения (см. теорему об обратной функции на интервале). В одномерном же случае отображение $y = x^2$ интервала $G = (-1, 1)$ с производной $y'(0) = 0$ не является взаимно однозначным.

В многомерном случае ($n \geqslant 2$) отличие якобиана отображения от нуля не гарантирует взаимной однозначности отображения, как показывает при $n = 2$ пример отображения $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ области

$$G = \{(r, \varphi) \ : \ 1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 4\pi\}$$

на область

$$\{(x, y) \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Однако, в последнем примере, очевидно, для всякой точки $(r_0, \varphi_0) \in G$ можно указать достаточно маленькую (шаровую) окрестность $U_\delta(r_0, \varphi_0)$, сужение рассматриваемого отображения на которую является взаимно однозначным.

Ниже будет установлена теорема 3, показывающая, что это свойство является общим.

Теорема 2. *Пусть открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на G и якобиан его $J \neq 0$ на G.*

Тогда $f(G)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3 (о локальной обратимости отображения). *Пусть в условиях теоремы 2 $x^{(0)} \in G$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Тогда существуют окрестности $U(x^{(0)})$, $U(y^{(0)})$, для которых*

1° *f осуществляет взаимно однозначное отображение $U(x^{(0)}) \leftrightarrow U(y^{(0)})$;*

2° *отображение $g : U(y^{(0)}) \to U(x^{(0)})$, обратное к f, непрерывно дифференцируемо на $U(y^{(0)})$;*

3° *якобиан отображения g отличен от нуля на $U(y^{(0)})$.*

Поясним, что если отображение $f\colon G \to D$ является взаимно однозначным, $G \leftrightarrow D$, то обратное отображение f^{-1}:

$D \leftrightarrow G$ определяется следующим образом:

$$f^{-1}(y) = x, \text{ если } f(x) = y \quad (y \in D,\ x \in G).$$

Доказательство теорем 2 и 3 будем проводить одновременно. Пусть $y^{(0)} \in f(G)$, $x^{(0)} \in G$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(x, y) \coloneqq f_i(x_1, \ldots, x_n) - y_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Имеем

$$\left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x^{(0)})} \neq 0.$$

По теореме о системе неявных функций на декартовом произведении некоторых окрестностей $U(y^{(0)}) \times V(x^{(0)})$

$$\begin{gathered} \{y_i = f_i(x)\}_1^n \iff \{x_i = g_i(y)\}_1^n, \\ \text{т. е.} \quad y = f(x) \iff x = g(y), \end{gathered} \tag{4}$$

где $g(y) = (g_1(y), \ldots, g_n(y))$, а отображение

$$g\ :\ U(y^{(0)}) \to V(x^{(0)}) \subset G$$

непрерывно дифференцируемо на $U(y^{(0)})$.

Следовательно,

$$U(y^{(0)}) \subset f(G),$$

так что $y^{(0)}$ — внутренняя точка $f(G)$. Поскольку в качестве $y^{(0)}$ можно взять любую точку из $f(G)$, то множество $f(G)$ является открытым. Теорема 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3.

Покажем, что якобиан отображения g отличен от нуля на $U(y^{(0)})$.

Из (4) имеем, что $y = f(g(y))$ при $y \in U(y^{(0)})$ или в координатной записи

$$y_i = f_i(g_1(y), \ldots, g_n(y)), \quad i = 1, \ldots, n, \quad y \in U(y^{(0)}).$$

Дифференцируя эти тождества по переменному y_j, получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

Отсюда и из теоремы об определителе произведения двух матриц следует, что

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = 1 \quad \text{при } x = g(y) \in U(x^{(0)}),\ y \in U(y^{(0)}). \tag{5}$$

Следовательно, $\dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$ на $U(y^{(0)})$.

Рассмотрим множество

$$U(x^{(0)}) \coloneqq g(U(y^{(0)})),$$

содержащее, очевидно, точку $x^{(0)}$ и открытое в силу теоремы 2, т. е. являющееся окрестностью точки $x^{(0)}$. Ясно, что f осуществляет взаимно однозначное отображение $U(x^{(0)}) \leftrightarrow U(y^{(0)})$.

Пример при $n = 1$ отображения $y = x^2$: $(-1, 1) \to [0, 1)$ показывает, что в теореме 2 условие отличия от нуля якобиана нельзя отбросить.

Теорема 4 (принцип сохранения области). *Образ области $G \subset \mathbb{R}^n$ при непрерывно дифференцируемом отображении $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ с отличным от нуля якобианом является областью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ и $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. По теореме 2 $f(G)$ — открытое множество. Покажем, что $f(G)$ связно и, следовательно, является областью.

Пусть $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ — две произвольные точки из $f(G)$. Пусть $x^{(1)}, x^{(2)} \in G$ — такие точки, что $f(x^{(1)}) = y^{(1)}$, $f(x^{(2)}) = y^{(2)}$. Пусть $\Gamma = \{x(t)\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ — такая кривая в $\mathbb{R}^n$, что $\Gamma \subset G$, $x^{(1)}$ — начало Γ, $x^{(2)}$ — конец Γ. Тогда кривая $f(\Gamma) = \{f(x(t))\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \subset f(G)$, $y^{(1)} = f(x^{(1)})$ — начало $f(\Gamma)$, $y^{(2)} = f(x^{(2)})$ — конец $f(\Gamma)$, что и требовалось показать.

Глава 13
ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе изучаются числовые функции многих переменных, определённые на некоторой окрестности $U(x^{(0)}) \subset \subset \mathbb{R}^n$.

§ 13.1. Локальный экстремум

Определение 1. Пусть функция f определена на некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Точка $x^{(0)}$ называется *точкой (локального) минимума функции* f, если

$$\exists\, U(x^{(0)}) \,:\, f(x^{(0)}) \leqslant f(x) \quad \forall\, x \in \mathring{U}(x^{(0)}).$$

Если же вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, то $x^{(0)}$ называется *точкой строгого (локального) минимума* функции f.

Аналогично определяются точки (локального) максимума и строгого (локального) максимума функции f.

Точки минимума и точки максимума функции называются её *точками (локального) экстремума.*

Аналогично определяются точки строгого экстремума функции.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). *Пусть функция f имеет в точке экстремума $x^{(0)}$ частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определённости, $i = = 1$. Рассмотрим функцию φ одного переменного x_1 $\varphi(x_1) \coloneqq f(x_1,\, x_2^{(0)},\, \ldots,\, x_n^{(0)})$. Она имеет, очевидно, экстремум в точке $x_1^{(0)}$. Тогда по теореме Ферма

$$0 = \varphi'(x_1^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}).$$

Определение 2. Точка $x^{(0)}$ называется *стационарной точкой* функции f, если f дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и $df(x^{(0)}) = 0$.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2 (необходимые условия экстремума). *Пусть функция f имеет экстремум в точке $x^{(0)}$. Если она дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ — стационарная точка функции f.*

Стационарная точка функции не обязательно является её точкой экстремума, что можно увидеть даже на примере функции одного переменного.

Достаточные условия наличия и отсутствия экстремума в стационарной точке можно сформулировать в терминах вторых производных.

Напомним в связи с этим некоторые сведения из алгебры.

Квадратичная форма

$$A(\xi) = A(\xi_1, \ldots, \xi_n) \coloneqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{1}$$

($a_{ij} = a_{ji}$ при $i, j = 1, \ldots, n$) называется
а) *положительно определённой*, если $A(\xi) > 0 \ \forall\, \xi \neq \vec{0}$,
б) *отрицательно определённой*, если $A(\xi) < 0 \ \forall\, \xi \neq \vec{0}$,
в) *определённой*, если она положительно определённа, или отрицательно определённа,
г) *неопределённой*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Лемма 1. *Пусть квадратичная форма $A(\xi)$ вида* (1) *положительно определённа. Тогда при некотором $\mu > 0$*

$$A(\xi) \geqslant \mu|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Доказательство. При $|\xi| = 0$ (2) очевидно. При $|\xi| > 0$, деля обе части (2) на $|\xi|^2$ и полагая $\eta = \frac{\xi}{|\xi|}$, сводим доказательство (2) к доказательству неравенства

$$\mu := \min_{\substack{\eta\in\mathbb{R}^n,\\ |\eta|=1}} A(\eta) > 0.$$

Последнее вытекает из теоремы 10.5.1 Вейерштрасса, в силу которой функция $A(\eta)$, непрерывная на единичной сфере $S := \{\eta \in \mathbb{R}^n\colon\ |\eta| = 1\}$ (являющейся компактом), достигает в некоторой точке $\eta^* \in S$ своего наименьшего значения $\mu = A(\eta^*) > 0$.

Для нас будут важны свойства второго дифференциала функции f

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)})\, dx_i\, dx_j, \tag{3}$$

представляющего собой квадратичную форму

$$d^2 f(x^{(0)}) = A(dx) = A(dx_1,\ \ldots,\ dx_n)$$

переменных $dx_1,\ \ldots, dx_n$.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Пусть второй дифференциал $d^2 f(x^{(0)})$ (3) функции f в точке $x^{(0)}$ является положительно определённой (отрицательно определённой) квадратичной формой. Тогда $x^{(0)}$ — точка строгого минимума (строгого максимума) функции f.

Если же квадратичная форма $d^2 f(x^{(0)})$ является неопределённой, то в точке $x^{(0)}$ у функции f нет экстремума.

Доказательство. Напишем разложение функции f по формуле Тейлора в окрестности стационарной точки

$x^{(0)}$ с остаточным членом в форме Пеано (11.6.3):

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|^2, \quad (4)$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

В этой формуле отсутствуют члены с первыми производными, т. к. $x^{(0)}$ — стационарная точка.

Пусть сначала $d^2 f(x^{(0)})$ из (3) является положительно определённой формой. Тогда из последнего равенства в силу леммы 1 следует, что

$$\Delta f(x^{(0)}) \geqslant \left[\frac{1}{2}\mu + \varepsilon(\Delta x)\right] |\Delta x|^2, \quad \mu > 0.$$

Поскольку $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\varepsilon(\Delta x)| < \frac{\mu}{4} \quad \forall\, x \,:\, 0 < |\Delta x| < \delta.$$

Следовательно,

$$\Delta f(x^{(0)}) \geqslant \frac{\mu}{4}|\Delta x|^2 > 0 \quad \forall\, \Delta x \,:\, 0 < |\Delta x| < \delta.$$

Неравенство $\Delta f(x^{(0)}) > 0$ означает, что $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума функции f.

Аналогичным образом доказывается, что если $d^2 f(x^{(0)})$ в формуле (3) является отрицательно определённой квадратичной формой, то $x^{(0)}$ — точка строгого максимума функции f.

Пусть теперь квадратичная форма $d^2 f(x^{(0)})$ из (3) является неопределённой квадратичной формой. Это значит, что существуют две точки ξ', $\xi'' \in \mathbb{R}^n$ такие, что $A(\xi') < 0$, $A(\xi'') > 0$. Полагая $\eta' = \frac{\xi'}{|\xi'|}$, $\eta'' = \frac{\xi''}{|\xi''|}$, получаем, что

$$\alpha = A(\eta') < 0, \quad \beta = A(\eta'') > 0, \quad |\eta'| = 1, \quad |\eta''| = 1.$$

Пусть $\Delta x = t\eta'$, $|\Delta x| = t$ $(t > 0)$. Тогда из (4) имеем

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \left[\frac{1}{2}\alpha + \varepsilon(t\eta')\right] t^2 \leqslant \frac{\alpha}{4}t^2 < 0$$

при всех достаточно малых $t = |\Delta x|$.

Если же взять $\Delta x = t\eta''$ $(t > 0)$, то аналогично получаем, что

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \left[\frac{1}{2}\beta + \varepsilon(t\eta'')\right] t^2 \geqslant \frac{\beta}{4}t^2 > 0$$

при всех достаточно малых $t = |\Delta x|$.

Мы видим, что в любой сколь угодно малой окрестности $U(x^{(0)})$ разность $f(x) - f(x^{(0)})$, $x \in U(x^{(0)})$, принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, точка $x^{(0)}$ не является точкой экстремума функции f.

Следствие (необходимые условия экстремума). *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Если функция f имеет экстремум в точке $x^{(0)}$, то либо $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0\ \forall\, dx \in \mathbb{R}^n$, либо $d^2f(x^{(0)}) \leqslant 0\ \forall\, dx \in \mathbb{R}^n$.*

З а м е ч а н и е. Если квадратичная форма $d^2f(x^{(0)})$ из (3) в стационарной точке $x^{(0)}$ функции f является *полуопределённой* (т. е. $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0$ либо $d^2f(x^{(0)}) \leqslant 0$), но не является определённой, то для изучения вопроса об экстремуме функции f в точке $x^{(0)}$ можно использовать её разложение по формуле Тейлора более высокого порядка, как это делалось в случае функции одного переменного.

Для выяснения, является или нет данная квадратичная форма положительно (отрицательно) определённой, часто используют

Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

Квадратичная форма (1) *положительно определённа тогда и только тогда, когда*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Очевидно, что квадратичная форма $A(\xi)$ вида (1) отрицательно определённа тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(\xi)$ положительно определённа. Следовательно, критерием отрицательной определённости формы (1) является условие

$$(-1)^k \Delta_k > 0 \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Сформулируем отдельно случай теоремы 3, относящийся к функции двух переменных.

Теорема 4. *Пусть функция f двух переменных дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки (x_0, y_0), так что*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

а) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0,$$

то точка (x_0, y_0) является точкой строгого экстремума (строгого минимума при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, строгого максимума при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$) функции f.
б) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0,$$

то в точке (x_0, y_0) экстремума у функции f нет.
в) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 0,$$

то в точке (x_0, y_0) экстремум функции f может быть, а может и не быть.

Доказательство. а) Определённость квадратичной формы (3) следует из критерия Сильвестра, т. к. $\Delta_1 > 0$ ($\Delta_1 < 0$), $\Delta_2 > 0$. Остаётся сослаться на теорему 3.

б) Подставляя во второй дифференциал

$$d^2 f(x_0, y_0) = \\ = f''_{xx}(x_0, y_0)\,dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\,dx\,dy + f''_{yy}(x_0, y_0)\,dy^2 \quad (5)$$

$dy = t\,dx$ (если $f''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$) или $dx = t\,dy$ (если $f''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$) и вынося dx^2 (или dy^2) за скобки, получаем в скобках квадратный трёхчлен относительно t с отрицательным дискриминантом. Поэтому значение этого трёхчлена может быть при различных t как положительным, так и отрицательным. Следовательно, квадратичная форма (5) является неопределённой.

Если же $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, то $f''_{xy} \neq 0$ и

$$d^2 f(x_0, y_0)\Big|_{dy = t\,dx} = 2f''_{xy}(x_0, y_0)t\,dx^2$$

принимает различные по знаку значения при $t = 1$ и при $t = -1$. Так что и в этом случае квадратичная форма (5) является неопределённой.

В силу теоремы 3 получаем, что в точке (x_0, y_0) нет экстремума функции f.

в) Достаточно рассмотреть две функции, определённые в окрестности точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$ формулами

$$f(x, y) = x^4 + y^4, \quad g(x, y) = x^4 - y^4.$$

Все производные первого и второго порядка этих функций в точке $(0, 0)$ равны нулю, однако в этой точке функция f имеет строгий минимум, а функция g не имеет экстремума.

§ 13.2. Условный локальный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы функции $f,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$ $(1 \leqslant m < n)$. Уравнения системы

$$\{\varphi_j(x) = 0\}_{j=1}^m \tag{1}$$

будем называть *уравнениями связи*. Пусть $E \coloneqq \{x\colon\ x \in G,\ \varphi_j(x) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$.

Определение 1. Точка $x^{(0)} \in E$ называется *точкой условного минимума* (*строго условного минимума*) функции f при связях (1), если

$$\exists \delta > 0:\ f(x^{(0)}) \leqslant f(x)\ (f(x^{(0)}) < f(x)) \quad \forall x \in\ E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}).$$

Аналогично определяется точка условного максимума (строго условного максимума), условного экстремума (строго условного экстремума).

З а м е ч а н и е о терминологии. Вместо термина «условный» употребляется также термин «относительный». Ради краткости вместо «при связях (1)» будем писать «при (1)».

Пример 1. $G = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $m = 1$, $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$. Найти точку условного экстремума функции f при $x_1 + x_2 - 1 = 0$.

На прямой $\varphi(x_1, x_2) = 0$ $f(x_1, x_2) = f(x_1, 1 - x_1) = 2x_1^2 - 2x_1 + 1 = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$. Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ является точкой строго условного минимума функции f при $\varphi_1 = 0$.

В дальнейшем будем считать, что функции $f,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы на G, $\operatorname{rang}\left\|\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\| = m$ на $G, x^{(0)} \in E$. Без ограничения общности предположим, что $\left.\dfrac{\partial(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m)}{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_m)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0$. Тогда по теореме о системе неявных функций в некоторой прямоугольной окрестности

$Q(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \times Q(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ (1) $\iff$ (1′), где

$$\{x_j = \mu_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)\}_{j=1}^{m}, \tag{1′}$$

причём функции μ_j непрерывно дифференцируемы на $Q(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$,

$$\{\varphi_j(\mu_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \mu_2(), \ldots, \\ \mu_m(), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0\}_{j=1}^{m}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию Φ,

$$\Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n) \coloneqq \\ \coloneqq f(\mu_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \mu_2(), \ldots, \mu_m(), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Очевидно, что точка $x^{(0)}$ тогда и только тогда является точкой условного экстремума f при (1), когда точка $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой локального экстремума функции Φ. Таким образом, вопрос о нахождении условного экстремума сведен к вопросу нахождения (локального) экстремума (который называют иногда *абсолютным экстремумом*, подчеркивая его отличие от условного экстремума). Однако такой подход малоэффективен в связи с трудностями получения в явном виде функций $\mu_1, \ldots, \mu_m$ и построения суперпозиции.

Отметим эквивалентность (3) $\iff$ (3′) систем линейных уравнений относительно дифференциалов, где

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx_i = 0\right\}_{j=1}^{m}, \tag{3}$$

$$\left\{dx_j = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} dx_i\right\}_{j=1}^{m}, \tag{3′}$$

с коэффициентами, взятыми в точке $x^{(0)}$. В самом деле, при любых фиксированных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ решение системы уравнений (3) единственно, так как её определитель отличен от нуля; решение (3′) также, очевидно, единственно. В то же время решение (3′) удовлетворяет (3), так как результат подстановки решения (3′) в (3) совпадает с системой продифференцированных тождеств (2).

Определение 2. Через $\widehat{dx_1}, \ldots, \widehat{dx_n}$ будем обозначать дифференциалы, удовлетворяющие системам уравнений (3), (3′).

Определение 3. Точка $x^{(0)} \in E$ называется *условно стационарной точкой* функции f при (1), если

$$\widehat{df}(x^{(0)}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \widehat{dx_i} = 0.$$

Теорема 1 (необходимое условие условного экстремума). *Точка $x^{(0)}$ условного экстремума f при* (1) *является условно стационарной точкой f при* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $[x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — точка условного экстремума f при (1)] $\Longleftrightarrow$ $[(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — точка (абсолютного) экстремума функции $\Phi]$ $\Rightarrow$ $[d\Phi(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0]$ $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $\left[0 = \sum\limits_1^n \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\, dx_i \right|_{(1')} = \sum\limits_1^n \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\, dx_i \Big|_{(3')} = \left. \sum\limits_1^n \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\, \widehat{dx_i} \eqqcolon \widehat{df}(x^{(0)})\right]$, что и требовалось доказать. Отметим, что при доказательстве была использована инвариантность формы первого дифференциала.

Теорема 2 (метод множителей Лагранжа). *Точка $x^{(0)} \in E$ является условно стационарной точкой функции f при* (1) *тогда и только тогда, когда существуют действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (называемые множителями Лагранжа) такие, что $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции Лагранжа*

$$L(x) \coloneqq f(x) - \sum_1^m \lambda_j \varphi_j(x).$$

При этом числа λ_j определяются однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему из $(m+1)$ уравнений

$$\left.\begin{array}{c}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx_i = 0\right\}_{j=1}^{m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = 0\end{array}\right\} . \qquad (3^*)$$

Эти и следующие соотношения написаны для значений производных и дифференциалов в точке $x^{(0)}$.

Имеем

$$[x^{(0)} \text{ — условно стационарная точка } f \text{ при } (1)] \iff$$

$$\iff [\widehat{df} = 0] \iff [(3) \Rightarrow (df = 0)] \iff$$

$$\iff [\operatorname{rang}(3^*) = \operatorname{rang}(3) = m] \iff$$

$$\iff \left[\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \right.$$

$$\left. = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right)\right] \Leftrightarrow \left[\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad} \varphi_j\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\operatorname{grad} L = 0] \Leftrightarrow [dL = 0].$$

Следствие 1 (необходимое условие условного экстремума). *Точка $x^{(0)}$ условного экстремума f при (1) является стационарной точкой функции Лагранжа L.*

Достаточные условия условного экстремума.

Дополнительно будем считать, что функции f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, где $x^{(0)}$ — условно стационарная точка f при (1), т. е. стационарная точка функции Лагранжа из E. Пусть $\delta > 0$ достаточно мало, $x = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$,

$$\varPhi(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(x)\big|_{(1')} =$$

$$= \left(f(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j(x)\right)\Bigg|_{(1')} =: L(x)\Bigg|_{(1')}.$$

Покажем, что точка $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является стационарной точкой функции Φ, и выразим $d^2\Phi$ в этой точке через d^2L.

Вычислим $d\Phi$, $d^2\Phi$ в точке $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, считая $x_{m+1}, \ldots, x_n$ независимыми переменными:

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i \Big|_{(1')}, d\Phi(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = dL(x^{(0)})\big|_{(1')} = 0,$$

так что точка $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является стационарной точкой функции Φ.

$$d^2\Phi(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_i\, dx_k \Big|_{(1')} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(x^{(0)})}{\partial x_i} d^2 x_i \Big|_{(1')} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k} \widetilde{dx_i} \widetilde{dx_k} =: \widetilde{d^2L}(x^{(0)}).$$

Итак, достаточные условия условного экстремума, которые, являясь достаточными условиями локального экстремума функции Φ, формулируются в терминах свойств квадратичной формы $d^2\Phi$, можно переформулировать в терминах квадратичной формы

$$\widetilde{d^2L}(x^{(0)}) := \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k} \widetilde{dx_i} \widetilde{dx_k}.$$

Теорема 3 (достаточные условия строгого условного экстремума). *Пусть функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in E$ функции Лагранжа L.*

Тогда:

1° $d^2L(x^{(0)}) > 0 (< 0)$ *при* $|dx| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ — *точка строгого условного минимума (максимума)* f *при* (1);

2° $\widetilde{d^2L}(x^{(0)}) > 0$ (< 0) *при* $|\widetilde{dx}| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ — *точка строгого условного минимума (максимума)* f *при* (1);

3° $d^2L(x^{(0)})$ — *неопределённая квадратичная форма* $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ *об условном экстремуме* f *при* (1) *ничего сказать нельзя;*

4° $\widetilde{d^2L}(x^{(0)})$ — *неопределённая квадратичная форма* $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ *в точке* $x^{(0)}$ *нет условного экстремума функции* f *при* (1).

План исследования функции на условный экстремум методом множителей Лагранжа. Пусть функции f, φ_1, $\ldots$, φ_m $(1 \leqslant m < n)$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rang} \left\| \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\| = m$ на G. Для нахождения точек условного экстремума функции f при связях (1) поступают так:

1°. Составляют функцию Лагранжа

$$L(x) \coloneqq f(x) - \sum_1^m \lambda_j \varphi_j(x).$$

2°. Находят стационарные точки функции Лагранжа, лежащие на E (только они могут являться точками условного экстремума), т. е. решают систему $n + m$ уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_i} L(x) = 0 \right\}_1^n \\ \{\varphi_j(x) = 0\}_1^m \end{array}\right\}$$

относительно $n+m$ неизвестных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m. В каждой из этих точек множители Лагранжа находятся однозначно.

Отметим, что система $\{\varphi_j(x) = 0\}_1^m$ формально может быть записана в виде $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_j} L(x) = 0 \right\}_1^m$.

3°. Для каждой стационарной точки $x^{(0)}$ функции Лагранжа, в окрестности которой f, φ_1, $\ldots$, φ_m дважды непрерывно дифференцируемы, составляют d^2L и, если по-требуется, $\widehat{d^2L}$. Применяют теорему 2 для выяснения типа условного экстремума.

4°. Находят значения функции f в точках условного экстремума.

Пример 2. Найдём точки условного экстремума функции $f(x,y,z) = xyz$, если $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

Здесь $\varphi_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $\varphi_2(x,y,z) = x+y+z$. В качестве G можно взять, например,

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\varphi_j(x,y,z)| < \frac{1}{2}, \quad j=1,2\right\}.$$

Для функции Лагранжа

$$L(x,y,z) = xyz - \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) - \lambda_2(x+y+z)$$

найдём стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи, решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} L'_x &\equiv yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0,\\ L'_y &\equiv xz - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0,\\ L'_z &\equiv xy - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0,\\ x^2+y^2&+z^2-1 = 0,\\ x+&y+z = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Сложив первые три уравнения, в силу последнего получим

$$yz + xz + xy - 3\lambda_2 = 0. \tag{5}$$

Но $2(yz+xz+xy) = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = 0-1$, и из (5) получаем $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$.

Разность первых двух уравнений (4) представляется в виде $(y-x)(z+2\lambda_1) = 0$. Аналогично получаем ещё два уравнения:

$$(z-y)(x+2\lambda_1) = 0, \quad (x-z)(y+2\lambda_1) = 0.$$

Из этих трёх уравнений следует (в силу последних двух уравнений из (4)), что

$$(y-x)(z-y)(x-z) = 0.$$

Рассмотрим для определённости лишь случай $y - x = 0$. Остальные два рассматриваются аналогично.

В рассматриваемом случае имеются две стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи:

$$x = y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}, z = \mp\frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \text{при этом} \quad \lambda_1 = \mp\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Будем исследовать их одновременно.

$$d^2L = -2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz +$$

$$+2x\,dy\,dz = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}[dx^2 + dy^2 + dz^2 - 4\,dx\,dy + 2\,dx\,dz + 2\,dy\,dz]$$

является неопределённой квадратичной формой, т. е. принимает положительные и отрицательные значения (ср. $dx = 1, dy = dz = 0$ и $dx = dy = 1, dz = 0$).

Построим $\widetilde{d^2L}$, связав в d^2L дифференциалы dx, dy, dz требованием (3):

$$\left.\begin{aligned} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

В каждой из рассматриваемых двух точек $x = y$, так что решение системы (6) $(\widetilde{dx}, \widetilde{dy}, \widetilde{dz})$ имеет вид $(\widetilde{dx}, -\widetilde{dx}, 0)$. Поэтому $\widetilde{d^2L} = \pm\sqrt{6}\widetilde{dx}^2$ является положительно (отрицательно) определённой квадратичной формой одного переменного.

С помощью теоремы 3 заключаем, что $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ является точкой строгого условного минимума, а точка $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ — точкой строгого условного максимума. Значение функции f в этих точках равны соответственно $\mp\frac{\sqrt{6}}{18}$.

Глава 14
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 14.1. Определённый интеграл

Определение 1. *Разбиением* τ *отрезка* $[a,b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ такая, что $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i_\tau-1}<x_{i_\tau}=b$.

Каждый из отрезков $[x_{i-1},x_i]$ называется *отрезком разбиения* τ, $\Delta x_i \coloneqq x_i-x_{i-1}$. Величина $|\tau| \coloneqq \max\limits_{1\leqslant i\leqslant i_\tau} \Delta x_i$ называется *мелкостью разбиения* τ.

Будем говорить, что разбиение τ' *следует за разбиением* τ, или *является измельчением* разбиения τ, и писать $\tau'\succ\tau$, если каждая точка разбиения τ является точкой разбиения τ'.

Разбиения данного отрезка обладают следующими свойствами:

1° Если $\tau_1\succ\tau_2$, $\tau_2\succ\tau_3$, то $\tau_1\succ\tau_3$;

2° Для любых τ_1, τ_2 $\exists\,\tau$: $\tau\succ\tau_1$, $\tau\succ\tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве τ взять разбиение, содержащее все точки разбиения τ_1 и все точки разбиения τ_2.

Пусть теперь на отрезке $[a,b]$ определена (числовая) функция f и $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение этого отрезка. Отметим в каждом отрезке разбиения $[x_{i-1},x_i]$ какую-либо точку ξ_i и составим сумму

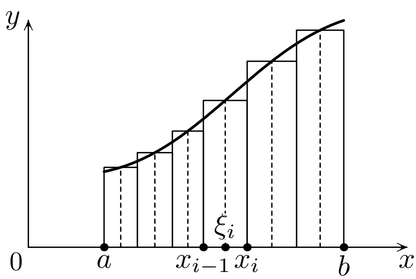


Рис. 14.1

$$S_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau})=\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

называемую *интегральной суммой Римана* функции f.

Если функция f неотрицательна, слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ суммы Римана равно площади прямоугольника с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, а вся сумма — площади ступенчатой фигуры, образованной объединением всех таких прямоугольников.

Определение 2. Число I называется *определённым интегралом Римана функции f на отрезке* $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

для любых τ с мелкостью $|\tau| < \delta$ и для любого набора отмеченных точек $\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}$.

Функцию f при этом называют *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$.

Кратко можно записать

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}),$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в (ε, δ)-терминах в определении 2 (это понятие отличается от изученных понятий предела последовательности и предела функции).

Поскольку дальше мы будем иметь дело лишь с определённым интегралом Римана, то будем называть его просто *определённым интегралом*, а функцию, интегрируемую по Риману, — просто *интегрируемой функцией*.

В следующей теореме показывается, что интеграл может существовать только для ограниченных функций.

Теорема 1. *Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f неограничена на отрезке $[a, b]$. Покажем, что она не интегрируема на $[a, b]$. Для произвольного разбиения τ отрезка представим сумму Римана функции f в виде

$$S_\tau(f) = S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ i \neq k}} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (1)$$

где $[x_{k-1}, x_k]$ — такой отрезок разбиения τ, на котором f неограничена. Выберем сначала каким-либо образом все отмеченные точки ξ_i, кроме одной из них с номером k. Тогда правую часть (1) можно сделать сколь угодно большой по модулю за счёт выбора ξ_k. Следовательно, при любом разбиении τ сумма Римана $S_\tau(f)$ может быть по модулю сколь угодно большой (например, $|S_\tau(f)| > \frac{1}{|\tau|}$) при соответствующем выборе отмеченных точек. Это противоречит существованию (конечного) предела $\lim\limits_{|\tau| \to 0} S_\tau(f)$. Значит, функция f не интегрируема на $[a, b]$.

Условие ограниченности функции, являясь необходимым, не является достаточным для интегрируемости функции, в чём можно убедиться на примере *функции Дирихле*:

$$f\ :\ [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Для этой функции и для произвольного разбиения τ $S_\tau(f) = 1$, если все отмеченные точки рациональны, и $S_\tau(f) = 0$, если все отмеченные точки иррациональны.

Следовательно, функция f не является интегрируемой на $[0, 1]$.

§ 14.2. Критерий интегрируемости функции

Определение 1. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Её *колебанием* на этом отрезке называется число

$$\omega(f; [a, b]) \coloneqq \sup_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$

Для f, определённой на отрезке $[a,b]$, и для разбиения $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ этого отрезка положим $\omega_i(f) = \omega(f;[x_{i-1},x_i])$.

Теорема 1 (критерий интегрируемости функции). *Для интегрируемости функции f на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon\ \ \forall\,\tau\ :\ |\tau| < \delta. \quad (1)$$

Критерий интегрируемости функции кратко можно записать так:

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = 0, \quad (2)$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в (ε,δ)-терминах в (1).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$, и пусть $\int_a^b f(x)\,dx = I$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ |S_\tau(f) - I| < \varepsilon$$
$$\forall\,\tau\ :\ |\tau| < \delta, \quad \forall\,\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{i_\tau}.$$

Зафиксируем ε, δ и τ. Пусть ξ_i', ξ_i'' — две такие точки интервала $[x_{i-1},x_i]$, что $\omega_i(f) \leqslant 2(f(\xi_i') - f(\xi_i''))$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant 2\sum_{i=1}^{i_\tau}(f(\xi_i') - f(\xi_i''))\Delta x_i \leqslant$$
$$\leqslant 2|I - S_\tau(f;\xi_1',\,\ldots,\,\xi_{i_\tau}')| + 2|I - S_\tau(f;\xi_1'',\,\ldots,\,\xi_{i_\tau}'')| < 4\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = 0.$$

Достаточность. Покажем, что при $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{k}$, $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{k^*} \succ \tau$

$$|S_\tau(f;\xi_1,\,\ldots,\,\xi_k) - S_{\tau^*}(f;\xi_1^*,\,\ldots,\,\xi_{k^*}^*)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega(f;[x_{i-1},x_i])\Delta x_i. \quad (3)$$

Пусть $x_i = x^*_{j_i}$ $\forall\, i = 0,\ \ldots,\ i_\tau$, т. е. $x_{i-1} = x^*_{j_{i-1}} < \ \ldots <$ $< x^*_{j_i} = x_i$. Тогда

$$\left| f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} f(\xi^*_j)\Delta x^*_j \right| \leqslant \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \omega_i(f)\Delta x^*_j = \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Отсюда следует (3).

Пусть теперь разбиения τ', τ'' отрезка $[a, b]$ произвольны. Возьмём разбиение τ^*: $\tau^* \succ \tau'$, $\tau^* \succ \tau''$ (это означает, что все точки разбиений τ' и τ'' являются точками разбиения τ^*). Тогда в силу (3) получаем

$$|S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| \leqslant |S_{\tau'}(f) - S_{\tau^*}(f)| + |S_{\tau''}(f) - S_{\tau^*}(f)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k'} \omega(f; [x'_{i-1}, x'_i])\Delta x'_i + \sum_{i=1}^{k''} \omega(f; [x''_{i-1}, x''_i])\Delta x''_i. \quad (4)$$

Из (1) и (4) следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ |S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| < \varepsilon,$$
$$\text{если } |\tau'|, \quad |\tau''| < \delta. \quad (5)$$

Исходя из свойства (5), проведём оставшуюся часть доказательства достаточности подобно тому, как при доказательстве критерия Коши для последовательности из фундаментальности последовательности была получена её сходимость.

Возьмём произвольную последовательность разбиений $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$, для которой $|\tau_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого разбиения $\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{k_n}$, отметив произвольно точки $\xi_1^{(n)}$, $\ldots$, $\xi_{k_n}^{(n)}$, составим сумму Римана $S_{\tau_n}(f)$. Рассмотрим числовую последовательность $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^\infty$. Она является фундаментальной (т. е. удовлетворяет условию Коши), так как в силу (5) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$: $|S_{\tau_n}(f) - S_{\tau_m}(f)| < \varepsilon$ для $\forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^\infty$ сходится. Пусть

$$I = \lim_{n\to\infty} S_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)},\ \ldots,\ \xi_{k_n}^{(n)}).$$

В силу (4) имеем

$$|S_{\tau_n}(f) - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \omega(f; [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}])\Delta x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$|I - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i. \tag{6}$$

На основании (2) получаем отсюда, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f) = I.$$

З а м е ч а н и е. Оценка (6) показывает, с какой точностью интеграл может быть приближен суммой Римана. Эта оценка может использоваться при приближённом вычислении интеграла.

Определение 2. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, и пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение $[a, b]$. Пусть

$$m_i \coloneqq \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad M_i \coloneqq \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x).$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i\Delta x_i, \quad \overline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i\Delta x_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции f, отвечающими разбиению τ.

Ясно, что для любой интегральной суммы Римана $S_\tau(f)$

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f).$$

Нетрудно показать (предоставим это читателю), что

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

С помощью последнего равенства можно перефразировать критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу:

для интегрируемости функции f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; : \; \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall \tau \; : \; |\tau| < \delta.$$

Упражнение 1. Выяснить геометрический смысл интегральных сумм Дарбу для неотрицательных функций.

Упражнение 2. С помощью теоремы 1 установить *критерий интегрируемости Римана*: *для интегрируемости функции f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \; : \; \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon.$$

Установим интегрируемость монотонных и непрерывных функций.

Теорема 2. *Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать для определённости, что функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \leqslant$$
$$\leqslant |\tau| \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = |\tau|(f(b) - f(a)).$$

Условие (1) для любого $\varepsilon > 0$ выполнено при $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, если $f(b) > f(a)$, и при любом $\delta > 0$, если $f(b) = f(a)$. Следовательно, f интегрируема в силу критерия интегрируемости (теоремы 1).

Теорема 3. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нём.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда в силу теоремы Кантора 10.5.2 она равномерно непрерывна на нём, так что при $a \leqslant c < d \leqslant b$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,:\, \omega(f; [c, d]) \leqslant \varepsilon, \text{ если } d - c < \delta.$$

Следовательно, при произвольном $\varepsilon > 0$ для разбиения τ отрезка $[a, b]$ с мелкостью $|\tau| < \delta$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

В силу критерия интегрируемости функция f интегрируема на $[a, b]$.

Теорема 4. *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на интервале (a, b).*

Тогда она интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a, b]$. Возьмём произвольное $\varepsilon \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$. Тогда при любом разбиении τ отрезка $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{[x_{i-1}, x_i] \not\subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \omega_i(f)\Delta x_i + \\ + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \omega_i(f)\Delta x_i = \Sigma' + \Sigma''.$$

Очевидно, что

$$\Sigma' \leqslant 4M(\varepsilon + |\tau|).$$

Поскольку функция f непрерывна и, следовательно, по теореме 3 интегрируема на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, то в силу критерия интегрируемости существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Sigma'' < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\tau| < \delta.$$

Будем считать, что $\delta \leqslant \varepsilon$. Тогда при $|\tau| < \delta \leqslant \varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \Sigma' + \Sigma'' < 8M\varepsilon + \varepsilon = (8M+1)\varepsilon.$$

Это означает, что выполнено условие (1) и в силу критерия интегрируемости функция f интегрируема на $[a, b]$.

Определение 3. Функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно непрерывной* на $[a, b]$, если существует разбиение $\tau = \{a_i\}_0^{i_\tau}$ такое, что при любом $i = 1, \ldots, i_\tau$ функция f либо является непрерывной на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, либо становится таковой после надлежащего переопределения её в одном или обоих концах этого отрезка. Это равносильно тому, что при любом $i = 1, \ldots, i_\tau$

1° функция f непрерывна на (a_{i-1}, a_i);

2° существуют конечные пределы $f(a_{i-1} + 0)$, $f(a_i - 0)$.

Так же, как теорема 4, доказывается и

Теорема 5. *Кусочно непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.*

§ 14.3. Свойства интегрируемых функций

1.° Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $[a^*, b^*] \subset \subset [a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a^*, b^*]$.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{x_i^*\}$ — произвольное разбиение $[a^*, b^*]$. Дополним его до разбиения $\tau = \{x_i\}$ отрезка $[a, b]$ с мелкостью $|\tau| = |\tau^*|$. Тогда

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant i_{\tau^*}} \omega_i^*(f) \Delta x_i^* \leqslant \sum_{1 \leqslant i \in i_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i,$$

где $\omega_i^*(f) = \omega(f; [x_{i-1}^*, x_i^*])$.

Для правой части неравенства выполнено (т. к. f интегрируема на $[a, b]$) условие (14.2.2). Следовательно, оно выполнено и для левой части. В силу критерия интегрируемости f интегрируема на $[a^*, b^*]$.

2.° (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования). Пусть $a < c < b$, функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Доказательство. Функция f как интегрируемая на $[a,c]$ и $[c,b]$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a,b]$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, τ_c — разбиение $[a,b]$, полученное дополнением разбиения τ точкой c (или совпадающее с τ, если $c \in \tau$). Пусть τ_c', τ_c'' — соответственно разбиения отрезков $[a,c]$, $[c,b]$, порождённые разбиением τ_c.

Сравним суммы Римана $S_\tau(f)$, $S_{\tau_c'}(f)$, $S_{\tau_c''}(f)$, считая отмеченные точки в первой из них произвольно выбранными, а во второй и третьей — выбранными по возможности совпадающими с отмеченными точками в $S_\tau(f)$.

Тогда

$$S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f) = 0, \text{ если } c \in \tau.$$

Если же $c \notin \tau$, $c \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$, то при ξ_{i_0}, ξ', $\xi'' \in$ $\in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$

$$S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f) = \\ = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} - f(\xi')(c - x_{i_0-1}) - f(\xi'')(x_{i_0} - c).$$

Отсюда получаем, что

$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f)\right| \leqslant 2M\Delta x_{i_0} \leqslant 2M|\tau|.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю и учитывая, что при этом

$$S_{\tau_c'}(f) \to \int_a^c f(x)\,dx, \quad S_{\tau_c''}(f) \to \int_c^b f(x)\,dx,$$

заключаем, что

$$\exists \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f) =: \int_a^b f(x)\,dx$$

и что выполняется равенство (1).

Замечание 1. Положим $\int_a^a f(x)\,dx := 0$ и $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$. Тогда равенство (1) справедливо при любом расположении точек a, b, c для функции f, интегрируемой на отрезке, содержащем эти точки.

3°. (Линейность интеграла). Если f, g интегрируемы на $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доказательство получается предельным переходом при $|\tau| \to 0$ из соответствующего равенства для интегральных сумм Римана.

4°. Если функции f, g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a, b]$.

Доказательство. Запишем $\Delta(fg)(x_0) = (fg)(x_0 + \Delta x) - (fg)(x_0) = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = \Delta f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)\Delta g(x_0)$.

Эта формула аналогична формуле Лейбница дифференцирования произведения двух функций.

Отсюда при условии ограниченности функций f, g имеем

$$\omega(fg; [c, d]) \leqslant M\,\omega(f; [c, d]) + M\,\omega(g; [c, d]),$$

если $|f|$, $|g| \leqslant M$ на $[a, b]$, $[c, d] \subset [a, b]$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant M \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i + M \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(g)\Delta x_i.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю и пользуясь критерием интегрируемости, получаем, что произведение fg интегрируемо на $[a, b]$.

5°. Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} f > 0$. Тогда функция $\frac{1}{f}$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство основывается на оценке колебания $\omega_i\left(\frac{1}{f}\right)$ через $\omega_i(f)$.

6.° Пусть функции f, g интегрируемы на $[a, b]$ и $f \leqslant g$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться предельным переходом при $|\tau| \to 0$ в неравенстве для интегральных сумм Римана:

$$S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) \leqslant S_\tau(g; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}).$$

7.° Если f интегрируема на $[a, b]$, то $|f|$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Интегрируемость $|f|$ следует из оценки

$$|f(\xi')| - |f(\xi'')| \leqslant |f(\xi') - f(\xi'')|,$$

откуда $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$ и

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Оценка (2) получается предельным переходом из соответствующей оценки для интегральных сумм Римана:

$$S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) \leqslant S_\tau(|f|; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}).$$

Замечание 2. Интегрируемость $|f|$ на $[a, b]$ не влечёт за собой интегрируемость f на $[a, b]$, что можно увидеть на примере функции ψ: $[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \text{ рациональном}, \\ -1 & \text{при } x \text{ иррациональном}. \end{cases}$$

8.° (Интеграл «не замечает» изменения функции в конечном числе точек).

Пусть f интегрируема на $[a,b]$, f^* отличается от f лишь значениями в конечном числе точек. Тогда f^* интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\varphi = f^* - f$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. Пусть φ отлична от нуля в N точках и $\max\limits_{[a,b]}|\varphi| = M$. Тогда

$$|S_\tau(\varphi)| \leqslant M2N|\tau|$$

и остаётся перейти в этом неравенстве к пределу при $|\tau| \to 0$.

Упражнение 1. Доказать теорему 14.2.5, пользуясь последовательно теоремой 14.2.4 и свойством 2°.

Теорема 1. *Пусть f непрерывна и $f \geqslant 0$ на $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) > 0$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доказательство. Пусть $f(x_0) = d > 0$. Тогда найдется отрезок $[a^*,b^*] \subset [a,b]$, $b^* - a^* > 0$, на котором $f \geqslant \frac{d}{2}$. В силу 5° имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a^*} f(x)\,dx + \int_{a^*}^{b^*} f(x)\,dx + \int_{b^*}^b f(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant 0 + \int_{a^*}^{b^*} \frac{d}{2}\,dx + 0 = \frac{d}{2}(b^* - a^*) > 0.$$

Теорема 2 (теорема о среднем для интеграла). *Пусть функции f, g интегрируемы на отрезке $[a,b]$,*

$$m \leqslant f \leqslant M \quad \text{на} \quad [a,b],$$

и пусть функция g не меняет знака на отрезке $[a,b]$.

Тогда

$$\exists\,\mu \in [m,M] \,:\, \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

При дополнительном предположении непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$

$$\exists \xi \in (a,b) \ : \ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть, для определённости, $g \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a,b].$$

Отсюда в силу свойства 6°

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (5)$$

Пусть сначала $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Тогда из (5) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и в качестве μ в (3) можно взять произвольное число.

Пусть теперь $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда из (5) получаем, что

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Взяв $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$, приходим к (3).

Установим (4). Будем рассматривать лишь нетривиальный случай, когда $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Считая $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$, рассмотрим три возможных случая: $m < \mu < M$, $\mu = m$, $\mu = M$. В первом из них по теореме о промежуточном значении непрерывной функции $\exists \xi \in (a,b)$: $f(\xi) = \mu$, и из (3) следует (4).

Случаи $\mu = m$ и $\mu = M$ рассматриваются одинаково. Поэтому рассмотрим лишь случай $\mu = M$.

Если максимум M функции f достигается в некоторой точке $\xi \in (a,b)$, то из (3) следует (4) с этим значением ξ.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\mu = M$, $f(x) < M$ при $x \in (a, b)$. Покажем, что этот случай неосуществим, что и завершит доказательство теоремы.

В условиях этого случая из (3) следовало бы, что

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx = 0.$$

Тогда при $\varepsilon \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$

$$0 = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant \alpha_\varepsilon \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx,$$

где $\alpha_\varepsilon = \min\limits_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} [M - f(x)] > 0$.

Отсюда

$$G(\varepsilon) \coloneqq \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx = 0 \quad \forall\, \varepsilon \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right).$$

Заметим, что

$$|G(0)| = |G(0) - G(\varepsilon)| \leqslant 2\varepsilon \sup_{[a,b]} g.$$

Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to$ $\to 0 + 0$, получаем, что

$$G(0) = \int_a^b g(x)\,dx = 0,$$

что противоречит предположению.

§ 14.4. Связь между определённым и неопределённым интегралами

Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

называемая *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 1. *Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда функция F непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть x_0, $x_0+\Delta x \in [a,b]$. Тогда

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Функция f ограничена на $[a,b]$ (поскольку она интегрируема), так что при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| \leqslant M \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Следовательно,

$$|F(x_0+\Delta x)-F(x_0)| \leqslant M|\Delta x| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

что и требовалось показать.

Теорема 2. *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0) \tag{2}$$

(под $F'(x_0)$ в случае $x_0 = a$ или $x_0 = b$ подразумевается односторонняя производная).

Доказательство. Вычитая из $\dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}$ предполагаемый предел $f(x_0)$, имеем при $x_0+\Delta x \in [a,b]$

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t)-f(x_0)]\,dt.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности f в точке x_0

$\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$, если $t \in [a,b]$, $|t-x_0| < \delta$.

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta$ (и $x_0+\Delta x \in [a,b]$)

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)-f(x_0)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1\,dt = \varepsilon.$$

Но это означает, что

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} \to f(x_0) \quad \text{при} \quad x_0+\Delta x \in [a,b],\ \Delta x \to 0,$$

что и требовалось показать.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad x \in [a, b],$$

называемая *интегралом с переменным нижним пределом.* Функция

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x).$$

Следовательно, G непрерывна на $[a, b]$. Если же f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то

$$\exists\, G'(x_0) = -F'(x_0) = -f(x_0). \tag{3}$$

Как и раньше, через $\langle a, b\rangle$ будем обозначать промежуток (т. е. отрезок, интервал или какой-либо из полуинтервалов) с концами a, b.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда она имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \quad \text{где} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle.$$

Доказательство следует из формулы (2) при $x \in \langle a, b\rangle$, $x \geqslant x_0$, или из формулы (3) при $x \in \langle a, b\rangle$, $x \leqslant x_0$, если учесть, что в последнем случае F можно представить в виде $F(x) = -\int_x^{x_0} f(t)\,dt$.

Теорема 4 (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ — её первообразная на этом отрезке. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{4}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница.*

Доказательство. Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции f на отрезке $[a,b]$. Поэтому

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Отсюда

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = (\Phi(x) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(x) - \Phi(a),$$
$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Последнее равенство при $x = b$ совпадает с (4).

Значение формулы Ньютона–Лейбница состоит в том, что она связывает два понятия: неопределённого и определённого интегралов, которые были введены и изучались независимо. Она дает возможность вычислить определённый интеграл, если найден неопределённый.

Упражнение 1. Пусть f интегрируема на $[a,b]$ и имеет на $[a,b]$ первообразную F. Доказать, что $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

§ 14.5. Замена переменного и интегрирование по частям

Теорема 1 (замена переменного). *Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha,\beta])$, $a \coloneqq \varphi(\alpha)$, $b \coloneqq \varphi(\beta)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть Φ — первообразная для f на отрезке $\varphi([\alpha,\beta])$. Тогда $\Phi(\varphi)$ — первообразная для $f(\varphi)\varphi'$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, поскольку $(\Phi(\varphi))'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, где производные при $t = \alpha, \beta$ понимаются как односторонние (см. теорему 5.5.1 и замечание к ней).

Дважды воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, получаем (при любом расположении точек a и b)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varPhi(b) - \varPhi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \varPhi(\varphi(\beta)) - \varPhi(\varphi(\alpha)) = \varPhi(b) - \varPhi(a).$$

Из этих двух равенств вытекает утверждение теоремы.

Упражнение 1. Доказать, что если функция φ' непрерывна на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то из существования одного из интегралов формулы (1) следует существование другого и равенство (1).

Теорема 2 (интегрирование по частям). *Пусть функции u, v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx, \tag{2}$$

где $u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

следует, что

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Остаётся заметить, что по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Определение 1. Функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой* (или *непрерывной и кусочно гладкой*) на $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и существует разбиение $\{a_i\}_0^k$ отрезка $[a, b]$, при котором производная f' непрерывна на каждом отрезке

$[a_{i-1}, a_i]$, если в его концах производную понимать как одностороннюю.

Обобщим понятие определённого интеграла.

Определение 2. *Интегралом по отрезку* $[a, b]$ *функции* f, определённой на отрезке $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, называется число

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx,$$

если стоящий справа интеграл существует, где $\tilde{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция f, каким-либо образом доопределённая в этих точках.

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определен здесь корректно, т. к. $\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$ не зависит от способа доопределения функции f, что следует из свойства 8° интеграла.

Теорема 3 (интегрирование по частям). *Пусть функции* u, v *непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$. *Тогда справедлива формула* (2).

Доказательство. В силу определения 1 существует разбиение $\{a_i\}_0^k$, при котором u, v непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, \ldots, k)$. Производные же u', v' в точках a_i $(i = 0, \ldots, k)$ могут не существовать. В силу определения 2 и свойства 8° интеграла

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(x)v'(x)\,dx.$$

Применяя к каждому слагаемому правой части теорему 2, получаем, что

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \sum_{i=1}^k \left(u(x)v(x)\Big|_{a_{i-1}}^{a_i} - \int_{a_{i-1}}^{a_i} u'(x)v(x)\,dx \right) =$$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

§ 14.6. Приложения определённого интеграла

В этом параграфе будет показано, как с помощью определённого интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции, объём тела вращения и другие величины. Фигуру в $\mathbb{R}^2$, имеющую площадь, называют *квадрируемой*, а тело в $\mathbb{R}^3$, имеющее объём, — *кубируемым*. Обобщением этих понятий являются измеримость и мера множеств в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Здесь же ограничимся лишь констатацией некоторых свойств измеримости (по Жордану) и (жордановой) меры, позволяющих вычислить меры плоских фигур и трёхмерных тел простых геометрических форм[1]. Меру множества $E \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом μE.

Перечислим свойства меры, которые будут использованы в этом параграфе:

a) если P — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, определяемый соотношениями
$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset P \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$
где $a_j \leqslant b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $\mu P = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$;

b) (монотонность меры) если множества E_1, E_2 измеримы, и $E_1 \subset E_2$, то $\mu E_1 \leqslant \mu E_2$;

c) (аддитивность меры) если множества E_1, E_2 измеримы, и $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, то $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2$.

Из a) и b) следует, что $\mu E \geqslant 0$ для всякого измеримого множества E (неотрицательность меры).

(1) Площадь криволинейной трапеции. *Криволинейной трапецией* называется множество $G \subset \mathbb{R}^2$ вида
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{1}$$
где функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau} = b$, $m_i = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$, $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$.

[1] Впоследствии будет показано, что такие множества измеримы (т. е. имеют меру).

Построим две ступенчатые фигуры $G_*(\tau)$, $G^*(\tau)$ следующим образом:

$$G_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} (x_{i-1}, x_i) \times (0, m_i),$$

$$G^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i].$$

Из $G_*(\tau) \subset G \subset G^*(\tau)$ следует, что

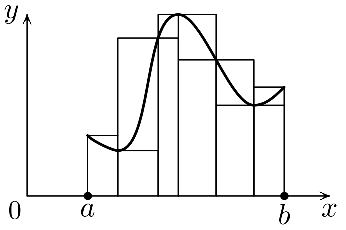


Рис. 14.6.1

$$\mu G_*(\tau) \leqslant \mu G \leqslant \mu G^*(\tau).$$

Но

$$\mu G_*(\tau) = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta x_i = \underline{S}_\tau,$$

$$\mu G^*(\tau) = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \Delta x_i = \overline{S}_\tau,$$

где $\underline{S}_\tau$, $\overline{S}_\tau$ — соответственно наименьшая и наибольшая интегральные суммы Римана функции f для разбиения τ. Следовательно,

$$\underline{S}_\tau \leqslant \mu G \leqslant \overline{S}_\tau.$$

Отсюда, устремляя мелкость $|\tau|$ разбиения τ к нулю, получаем, что

$$\mu G = \int_a^b f(x)\, dx.$$

З а м е ч а н и е 1. Аналогично показывается, что

$$\mu(\operatorname{int} G) = \int_a^b f(x)\, dx \quad (\operatorname{int} G = G \setminus \partial G).$$

Упражнение 1. Выяснить геометрический смысл интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$, где непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f отрицательна или меняет знак.

Упражнение 2. Вычислить площадь круга радиуса R и площадь его сектора.

(2) Площадь криволинейного сектора.

Пусть в полярной системе координат задана кривая

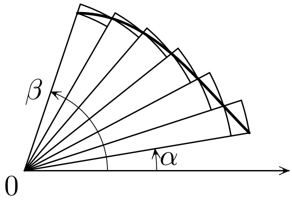


Рис. 14.6.2

$$\Gamma = \{(r,\theta) \,:\, r = r(\theta),\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\},$$

где $r = r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha,\beta] \subset [0,2\pi]$, $G = \{(r,\theta)\colon\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)\}$ — криволинейный сектор.

Пусть $\tau = \{\alpha_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, $m_i = \min\limits_{[\alpha_{i-1},\alpha_i]} r$, $M_i = \max\limits_{[\alpha_{i-1},\alpha_i]} r$.

Построим две фигуры $G_*(\tau)$, $G^*(\tau)$:

$$G_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau}\{(r,\theta) \,:\, \alpha_i < \theta < \beta_i,\ 0 < r < m_i\},$$

$$G^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau}\{(r,\theta) \,:\, \alpha_i \leqslant \theta \leqslant \beta_i,\ 0 \leqslant r \leqslant M_i\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i_\tau} m_i^2\Delta\alpha_i = \mu G_*(\tau) \leqslant \mu G \leqslant \mu G^*(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i_\tau} M_i^2\Delta\alpha_i.$$

При $|\tau| \to 0$ получаем отсюда, что

$$\mu G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta.$$

(3) Объём тела вращения. Множество $D \subset \mathbb{R}^3$, определяемое соотношением

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a < x < b,\ y^2 + z^2 < R\} \subset D \subset \\ \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leqslant x \leqslant b,\ y^2 + z^2 \leqslant R\},$$

называется *прямым круговым цилиндром.*

Упражнение 3. Вывести формулу $\mu D = \pi R^2(b-a)$.

Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на $[a,b]$, тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ образовано вращением криволинейной трапеции (1) вокруг оси Ox.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $m_i = \min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M_i = \max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$,

$$\Omega_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_{i-1} < x < x_i,\ y^2+z^2 < m_i^2\},$$

$$\Omega^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y^2+z^2 \leqslant M_i^2\}.$$

Тогда

$$\pi \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i^2 \Delta x_i = \mu\Omega_*(\tau) \leqslant \mu\Omega \leqslant \mu\Omega^*(\tau) = \pi \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i^2 \Delta x_i.$$

При $|\tau| \to 0$ получаем отсюда, что

$$\mu\Omega = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

(4) Вычисление длины кривой. Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема.

Ранее было установлено, что непрерывно дифференцируемая кривая спрямляема (имеет длину) и что производная переменной длины дуги $s(t)$ этой кривой

$$s'(t) = |\vec{r}\,'(t)|.$$

Пусть S — длина кривой Γ. Тогда

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)\,dt = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt =$$
$$= \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Если $\Gamma = \{(x, f(x)),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ — плоская кривая, то её длина

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

(5) Площадь поверхности вращения. Пусть f непрерывно дифференцируема и неотрицательна на $[a, b]$. Пусть S — поверхность, образованная вращением кривой $\Gamma = \{(x, f(x))\colon\ a \leqslant x \leqslant b\}$, т. е. графика функции f, вокруг оси Ox. Площадь поверхности S (определение которой будет дано ниже) обозначим символом $\operatorname{mes} S$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau} = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Построим вписанную в Γ ломаную $\Gamma(\tau)$, соединив последовательно точки $(x_i, f(x_i))$ кривой Γ отрезками, $i = 0, 1, \ldots, i_\tau$. Поверхность, образованную вращением ломаной $\Gamma(\tau)$ вокруг оси Ox, обозначим через $S(\tau)$. Она представляет собой объединение боковых поверхностей усечённых конусов или цилиндров, площади которых известны из курса элементарной геометрии. Поэтому площадь $S(\tau)$ равна

$$\operatorname{mes} S(\tau) = \pi \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) l_i,$$

где

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i, \qquad (2)$$

а точки $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ определяются формулой (6.1.3) конечных приращений Лагранжа.

Определение 1. *Площадью поверхности S* называется

$$\operatorname{mes} S = \lim_{|\tau| \to 0} \operatorname{mes} S(\tau), \qquad (3)$$

если этот предел существует.

Покажем, что в рассматриваемом случае площадь поверхности S существует, причём

$$\operatorname{mes} S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{4}$$

Обозначим через $\sigma_\tau(f;\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau})$ интегральную сумму Римана последнего интеграла, построенную по разбиению τ и по тем же самым, что и в (2), отмеченным точкам $\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}$. Тогда, полагая $M_1 = \max\limits_{[a,b]}|f'|$, имеем

$$|\operatorname{mes} S(\tau) - 2\pi\sigma_\tau| \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{i_\tau}\left[\frac{|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)|}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{|f(x_i) - f(\xi_i)|}{2}\right]\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{i_\tau} M_1|\tau|\sqrt{1+M_1^2}\Delta x_i =$$

$$= 2\pi M_1\sqrt{1+M_1^2}(b-a)|\tau| \to 0 \text{ при } |\tau| \to 0.$$

Следовательно, левая часть этой цепочки неравенств стремится к нулю при $|\tau| \to 0$.

Но

$$\sigma_\tau \to \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad \text{при} \quad |\tau| \to 0,$$

поскольку подынтегральная функция непрерывна на $[a,b]$. Следовательно, существует предел (3), и справедливо равенство (4).

§ 14.7. Несобственные интегралы

Определение 1. Пусть функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \leqslant +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$.

Символ

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

называется *несобственным интегралом* (*Римана*) по полуинтервалу $[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл (1) *сходится*, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx, \tag{2}$$

если указанный предел существует, и что несобственный интеграл (1) *расходится* — в противном случае (здесь и далее символ $+\infty - 0$ равнозначен символу $+\infty$).

Таким образом, в случае сходимости несобственным интегралом называют не только символ (1), но и число (2).

Сравним понятия интеграла Римана и несобственного интеграла Римана. Если $b = +\infty$, то функция f задана на бесконечном промежутке, для которого интеграл Римана не определен, в то время как несобственный интеграл (2) может существовать. Если же $b < +\infty$, а функция f неограничена на $[a, b)$, то интеграл Римана по $[a, b]$ не существует, в то время как несобственный интеграл (2) может существовать.

Если функция f интегрируема по Риману по отрезку $[a, b]$, то сходится и несобственный интеграл (2) по $[a, b)$ и эти интегралы равны. Это следует из непрерывности $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ как функции b' в силу теоремы 14.4.1.

Упражнение 1. Доказать, что если функция ограничена на отрезке $[a, b]$ и интегрируема по Риману на $\forall\,[a, b'] \subset$ $\subset [a, b)$, то она интегрируема по Риману по $[a, b]$, и, следовательно, её интеграл Римана по $[a, b]$ и несобственный интеграл по $[a, b)$ совпадают.

У к а з а н и е. Воспользоваться критерием интегрируемости функции.

Таким образом, понятие несобственного интеграла шире понятия интеграла Римана.

З а м е ч а н и е 1. Если верхний предел несобственного интеграла равен $+\infty$, то вместо символа $+\infty$ часто пишут ∞.

Пример 1. Несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Пусть функция f интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда для сходимости несобственного интеграла* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* условие Коши

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, b_\varepsilon \in [a, b)\ :\ \forall\, b', b'' \in [b_\varepsilon, b)\ \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Доказательство. Сходимость несобственного интеграла (1) по определению равносильна существованию предела функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при $x \to b - 0$, что равносильно выполнению условия Коши существования конечного предела функции F (см. теорему 3.5.1 и упражнение 3.6.3). Последнее же совпадает с (3).

Сходимость несобственного интеграла (1) равносильна сходимости несобственного интеграла $\int_{a^*}^b f(x)\,dx$ при каком-либо $a^* \in [a, b)$. Это сразу следует из теоремы 1, поскольку условия Коши для этих двух несобственных интегралов очевидным образом равносильны.

На несобственные интегралы с помощью предельного перехода при $b' \to b - 0$ переносится ряд свойств определённого интеграла.

1°. Пусть несобственный интеграл (1) сходится. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a^*} f(x)\,dx + \int_{a^*}^b f(x)\,dx \quad \forall\, a^* \in [a, b).$$

2°. (Линейность). Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся. Тогда при λ, $\mu \in \mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

3°. (Интегрирование неравенств). Пусть интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся и $f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4°. (Формула Ньютона–Лейбница). Пусть функция f непрерывна на $[a, b)$, Φ — первообразная для f на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b-0) - \Phi(a), \tag{4}$$

если конечна хотя бы одна из частей равенства (4).

5°. (Интегрирование по частям). Пусть функции u, v: $[a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx, \tag{5}$$

если оба слагаемых в правой части равенства (5) существуют и конечны.

6°. (Замена переменного). Пусть функция f непрерывна на $[a, b)$, функция φ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\beta \leqslant +\infty$, причём $a = \varphi(a) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы сходятся или расходятся одновременно.

Покажем лишь, как из сходимости интеграла, стоящего в правой части равенства, вытекает сходимость интеграла, стоящего в левой части. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \beta_\varepsilon \in [\alpha, \beta) \ : \ \left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| < \varepsilon \quad \forall\, \beta', \beta'' \in (\beta_\varepsilon, \beta).$$

Положим $b_\varepsilon \coloneqq \varphi(\beta_\varepsilon)$. Тогда по теореме Коши о промежуточном значении

$$\forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b) \quad \exists\, \beta', \beta'' \in (\beta_\varepsilon, \beta) \,:\, \varphi(\beta') = b',\ \varphi(\beta'') = b''.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \right| < \varepsilon \quad \forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b).$$

По критерию Коши $\int_a^b f(x)\, dx$ сходится.

Рассмотрим теперь несобственные интегралы от неотрицательных функций.

Теорема 2. *Пусть $f \geqslant 0$ на $[a, b)$. Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, \int_a^{b'} f(x)\, dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a, b).$$

Доказательство. Интеграл $\int_a^{b'} f(x)\, dx$ как функция b' возрастает. Поэтому сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$ (т. е. существование конечного предела этой функции при $b' \to b - 0$) равносильна ограниченности интеграла $\int_a^{b'} f(x)\, dx$ как функции b'.

Теорема 3 (сравнения). *Пусть функции f, g интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ и $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда*

1° *сходимость $\int_a^b g(x)\, dx$ влечёт за собой сходимость $\int_a^b f(x)\, dx$;*

2° *расходимость $\int_a^b f(x)\, dx$ влечёт за собой расходимость $\int_a^b g(x)\, dx$.*

Доказательство. 1°. Пусть сходится $\int_a^b g(x)\,dx$. Тогда по теореме 2

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b'} g(x)\,dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a,b).$$

По теореме 2 $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2°. Расходимость $\int_a^b g(x)\,dx$ легко доказывается от противного.

Следствие 1. *Пусть функции f, g интегрируемы $\forall\,[a,b'] \subset [a,b)$, и пусть $f > 0$, $g > 0$ на $[a,b)$. Пусть также*

$$\exists \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0,+\infty).$$

Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. В условиях теоремы $\exists\, a^* \in [a,b)$: $\frac{k}{2}\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant 2kg(x) \quad \forall\, x \in [a^*,b)$. В силу свойства 2° несобственных интегралов и теоремы 3 сходимость интегралов

$$\int_{a^*}^b g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a^*}^b f(x)\,dx$$

одновременная. Теперь остаётся учесть, что сходимость последних двух интегралов не зависит от выбора $a^* \in [a,b)$.

Упражнение 2. Обобщить теорему 3, заменив в её условии $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a,b)$ на

$$f \geqslant 0, \quad g \geqslant 0, \quad f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to b-0.$$

Определение 2. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 4. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится.*

Доказательство. Заметим, что из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ следует, что для него выполняется условие Коши (3). Но тогда условие (3) выполняется и для интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в силу оценки

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \quad \text{при} \quad a \leqslant b' < b'' < b.$$

Применяя критерий Коши к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, убеждаемся, что он сходится.

Из последнего неравенства следует, что в условиях теоремы 4 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Замечание 2. Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ не дает права написать символ $\int_a^b f(x)\,dx$, поскольку функция f может не быть интегрируемой на некотором отрезке $[a, b']$, в то время как её модуль интегрируем на этом отрезке. Пример такой функции был приведен в замечании 14.3.2.

Замечание 3. Сходящийся интеграл может не быть абсолютно сходящимся, как, например, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, который будет исследован ниже.

Определение 3. Пусть $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a', b] \subset (a, b]$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом (Римана) с особенностью в a* (или *с особенностью на нижнем пределе*). При этом говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{a' \to a+0} \int_{a'}^b f(x)\,dx,$$

если этот предел существует, и что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится* — в противном случае.

Пример 2. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Определение 4. Пусть функция $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a',b']\subset(a,b)$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом* (*Римана*) *с особенностью в точках* a *и* b (или *с особенностями на верхнем и нижнем пределах*).

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, если сходится каждый из интегралов

$$\int_a^c f(x)\,dx,\quad \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где c — какое-нибудь число интервала (a,b).

При этом полагают по определению, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Если же хотя бы один из интегралов (6) расходится, говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Сходимость интегралов (6) не зависит от выбора точки $c\in(a,b)$ (это установлено для второго из них и может быть аналогично показано для первого). Правая часть (7) также не зависит от выбора c, что следует при $a<c<c^*<b$ из равенств для определённых интегралов

$$\int_{a'}^c f(x)\,dx+\int_c^{b'} f(x)\,dx=$$
$$=\int_{a'}^c f(x)\,dx+\int_c^{c^*} f(x)\,dx+\int_{c^*}^{b'} f(x)\,dx=\int_{a'}^{c^*} f(x)\,dx+\int_{c^*}^{b'} f(x)\,dx.$$

З а м е ч а н и е 4. Равенство (7) можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{\substack{a'\to a+0\\ b'\to b-0}}\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx,$$

где стоящий справа предел является пределом функции двух переменных.

Дадим теперь определение несобственного интеграла с несколькими особенностями.

Определение 5. Пусть функция f определена на интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ с выколотыми точками $c_1, \ \ldots, c_{k-1}$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < c_k = b$. Пусть f интегрируема по Риману на каждом отрезке из (a, b), не содержащем ни одной из точек c_i $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом с особенностями в точках* $c_0, c_1, \ \ldots, c_k$.

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится* и при этом

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx,$$

если каждый из стоящих справа несобственных интегралов с особенностями в концах интервала (c_{i-1}, c_i) сходится. В противном случае говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится.*

До сих пор мы изучали свойства лишь несобственного интеграла (1). Эти свойства, как видно из определений 3, 4, 5, легко переносятся на несобственные интегралы с особенностью на нижнем пределе и на несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Упражнение 3. Пусть $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, и пусть сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с несколькими особенностями.

Доказать, что при $x_0 \in (a, b)$ функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ равномерно непрерывна на (a, b).

Установим два признака сходимости несобственного интеграла от произведения двух функций:

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx. \tag{8}$$

Теорема 5 (признак Дирихле). *Пусть*

1° *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$;*

2° *функция g непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, +\infty)$;*

3° $g(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$.

Тогда интеграл (8) *сходится.*

Доказательство. Пусть F — первообразная для f. Интегрируя по частям произведение fg на отрезке $[a, b]$, имеем

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \\ = \int_a^b F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \quad (9)$$

Уменьшаемое в правой части стремится, очевидно, к пределу при $b \to +\infty$. Вычитаемое стремится к абсолютно сходящемуся интегралу. В самом деле, положив $M = \sup\limits_{[a,\infty)} |F| < +\infty$, имеем

$$\int_a^\infty |F(f)g'(x)|\,dx \leqslant M \int_a^\infty |g'(x)|\,dx = M \left| \int_a^\infty g'(x)\,dx \right| = \\ = M \left| g(x)\Big|_a^{+\infty} \right| = M|g(a)|.$$

Поэтому правая часть (9), а вместе с ней и левая стремится к пределу при $b \to +\infty$. Это и означает, что интеграл (8) сходится.

Теорема 6 (признак Абеля). *Пусть*

1° *функция f непрерывна на $[a, +\infty)$ и интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится;*

2° *функция g непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна на $[a, +\infty)$;*

Тогда интеграл (8) *сходится.*

Доказательство. Покажем, что признак Абеля вытекает из признака Дирихле.

Заметим сначала, что функция f имеет на $[a, +\infty)$ первообразную $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ограниченность которой следует из её непрерывности и существования конечного предела $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \int_a^\infty f(t)\,dt$.

В силу монотонности и ограниченности функции g существует $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =: c$. Тогда функция $\tilde{g} := g - c$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,\infty)$ и $\tilde{g}(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Поэтому интеграл

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\tilde{g}(x)\,dx + \int_a^\infty cf(x)\,dx$$

сходится как сумма двух сходящихся интегралов (первый из них сходится по признаку Дирихле, а второй — по условию теоремы).

Пример 3. Покажем, что интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, но не абсолютно. Для доказательства его сходимости применим признак Дирихле, положив $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда f имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а g непрерывно дифференцируема, монотонна и $g(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Следовательно, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Установим, что он не сходится абсолютно. При $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$\int_{k\pi}^{2k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi} |\sin x|\,dx =$$
$$= \frac{1}{2k\pi}\sum_{m=0}^{k-1}\int_{(k+m)\pi}^{(k+m+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{k}{2k\pi}\int_0^\pi |\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, по критерию Коши интеграл $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится.

З а м е ч а н и е 5. При доказательстве признаков Дирихле и Абеля было применено интегрирование по частям, благодаря которому доказательство сходимости интеграла было сведено к доказательству абсолютной сходимости другого интеграла. Этот приём полезен и при изучении конкретных интегралов. Например,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Интеграл в левой части равенства сходится, но не абсолютно, в то время как интеграл в правой части сходится абсолютно. Принято говорить, что в подобных случаях интегрирование по частям «улучшает сходимость интеграла».

§ 14.8. Приближение интегрируемых функций ступенчатыми и непрерывными

Определение 1. Функция h: $[a,b] \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой* (*кусочно постоянной*) на $[a,b]$, если существует разбиение $\{a_i\}_0^k$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, такое, что f постоянна на каждом интервале (a_{i-1}, a_i).

Ступенчатые функции кусочно непрерывны и, следовательно, интегрируемы на $[a,b]$.

Теорема 1. *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая на $[a,b]$ функция $h = h_\varepsilon$, что*

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, и пусть $\sum\limits_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i$ — интегральная сумма Римана. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i) & \text{при } x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \ldots, i_\tau, \\ c_i & \text{при } x = x_i,\ i = 0, 1, \ldots, i_\tau, \end{cases}$$

где $c_i \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)|\,dx_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i,$$

где $w_i(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

В силу критерия интегрируемости правая часть последнего неравенства меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, если мелкость $|\tau|$ разбиения τ достаточно мала. Теорема доказана.

Левую часть неравенства (1) называют *приближением в среднем* функции f ступенчатой функцией h. Саму теорему 1 можно переформулировать так:

интегрируемую на отрезке функцию можно на этом отрезке с любой точностью приблизить в среднем ступенчатой функцией.

Теорема 2. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция φ, что*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Пусть h — ступенчатая на $[a, b]$ функция, для которой выполняется (1). Построим непрерывную на $[a, b]$ кусочно линейную функцию φ, для которой

$$\int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{2}$$

Это построение можно осуществить так. Ступенчатая функция h принимает постоянное значение на каждом из интервалов (x_{i-1}, x_i) разбиения τ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$. Построим функции φ_i, непрерывные и кусочно линейные на $[a, b]$ следующим образом. Взяв $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}|\tau|\right)$, положим

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in (x_{i-1} + \eta, x_i - \eta), \\ 0 & \text{при } x \notin (x_{i-1}, x_i), \\ \text{линейна} & \text{на } [x_{i-1}, x_{i-1} + \eta] \text{ и на } [x_i - \eta, x_i]. \end{cases}$$

Пусть $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i$. Тогда, если $|\varphi| \leqslant M$, то

$$\int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |h(x) - \varphi_i(x)|\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\eta} |h(x) - \varphi_i(x)|\,dx + \int_{x_i-\eta}^{x_i} |h(x) - \varphi_i(x)|\,dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant M2\eta k < \varepsilon,$$

если $\eta > 0$ достаточно мало.

Теперь из (1) и (2) следует, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx + \int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

и теорема доказана.

Теоремы 1, 2 обобщаются на случай функций f, интегрируемых в несобственном смысле.

Определение 2. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Функция f называется *абсолютно интегрируемой* на интервале (a, b), если существует конечное число точек $\{c_i\}_0^k$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ таких, что

1° функция f интегрируема по Риману на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, не содержащем точек $c_1, \ldots, c_{k-1}$;

2° сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, понимаемый как несобственный интеграл с особенностями в точках $c_0, c_1, \ldots, c_k$.

Заметим, что в силу теоремы 14.7.4 определение 2 перейдёт в эквивалентное, если условие 1° заменить условием сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Определение 3. Функция $f\colon (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если она равна нулю вне некоторого отрезка.

Определение 4. Функция $h\colon (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ называется *финитной ступенчатой* функцией, если существует такой отрезок $[a,b]$, что h — ступенчатая функция на $[a,b]$, и $h = 0$ вне $[a,b]$.

Теорема 3. *Пусть f абсолютно интегрируема на (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция h такая, что*

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $(a,b) = (-\infty,+\infty)$. В самом деле, если это не так, то функцию f можно доопределить нулём вне интервала (a,b), после чего она станет абсолютно интегрируемой на $(-\infty,+\infty)$.

Пусть несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ имеет особенности в точках c_i, $-\infty = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < c_k = +\infty$, и пусть функция f интегрируема по Риману на каждом отрезке, не содержащем точек c_i, $i = 1, \ldots, k-1$. Из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа A, B, η, где $-\infty < A < c_1$, $c_{k-1} < B < +\infty$, $\eta > 0$, что

$$\int_{-\infty}^{A} |f|\,dx + \sum_{i=1}^{k-2} \int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} |f|\,dx + \int_B^{+\infty} |f|\,dx < \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \in (-\infty, A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (c_i - \eta, c_i + \eta)\right) \cup \\ & \cup (B, +\infty), \\ f(x) & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда f_ε интегрируема на $[A, B]$, равна 0 вне $[A, B]$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{3}$$

В силу теоремы 1 существует ступенчатая на $[A, B]$ функция h_ε такая, что

$$\int_{A}^{B} |f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{4}$$

Будем считать функцию h_ε продолженной нулём на $(-\infty, A)$ и на $(B, +\infty)$. Тогда из (3), (4) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h_\varepsilon(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть f абсолютно интегрируема на (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная непрерывная на (a, b) функция φ такая, что*

$$\int_{a}^{b} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 4. *Каждая абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция является непрерывной в среднем относительно сдвига, т. е. обладает свойством*

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \eta) - f(x)|\, dx = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда существует финитная непрерывная функция φ, для которой при $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ выполняется (5). Пусть $\varphi = 0$ вне отрезка $[A, B]$. По теореме Кантора функция φ равномерно непрерывна на отрезке $[A - 1, B + 1]$, а значит, и на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, существует $\eta_\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$|\varphi(x+\eta) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{B - A + 2} \quad \forall\, \eta \in \mathbb{R} \, : \, |\eta| \leqslant \eta_\varepsilon.$$

Отсюда и из (5) следует, что при $|\eta| \leqslant \eta_\varepsilon$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\eta) - f(x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\eta) - \varphi(x+\eta)|\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+\eta) - \varphi(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Этим свойство (6) установлено.

Упражнение 1. Доказать теорему 4, опираясь на возможность приближения функции f финитной ступенчатой функцией h и на легко проверяемую непрерывность в среднем относительно сдвига функции h.

Глава 15
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 15.1. Сходимость числового ряда

Определение 1. Символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{1}$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, называется *числовым рядом*, a_k — его k-*ым членом* (или его *общим членом*, если a_k рассматривается как функция k). $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется n-*й частичной* (или *частной*) *суммой* этого *ряда*.

Ряд (1) называется *сходящимся* (к S), если последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ его частичных сумм сходится (к S).

В этом случае число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют *суммой ряда* и пишут

$$a_1 + a_2 + \ \ldots = S \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Таким образом, в этом случае под $a_1 + a_2 + \ \ldots$ $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k)$ понимают также число.

Если последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ расходится, то ряд (1) называют *расходящимся*. Пишут также $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, если $S_n \to +\infty$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$, если $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Из определения видно, что изучение сходимости и других свойств рядов сводится к изучению или переформулировке соответствующих свойств последовательностей.

Пример 1. Ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ \ldots$$

сходится.

Пример 2. Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ \ldots$$

расходится.

Теорема 1. *Необходимым условием сходимости ряда является стремление к нулю его общего члена.*

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится, и пусть его сумма равна S. Тогда

$$S_n \to S, \quad S_{n-1} \to S \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Стремление к нулю общего члена ряда, являясь необходимым, не является достаточным условием сходимости ряда, что можно увидеть на следующем примере.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (называемый *гармоническим рядом*) расходится. В самом деле,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что противоречит сходимости ряда, в случае которой последовательности $\{S_n\}$ и $\{S_{2n}\}$ сходились бы к одному и тому же числу (сумме ряда), а их разность — к нулю.

Теорема 2 (критерий Коши). *Для сходимости ряда* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : \; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant n_\varepsilon, \; \forall p \in \mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = S_{n+p} - S_n,$$

то теорема 2 сразу следует из критерия Коши сходимости последовательностей.

Упражнение 1. Доказать теорему 1 с помощью критерия Коши.

Упражнение 2. Доказать расходимость гармонического ряда с помощью критерия Коши.

Определение 2. Числовой ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ \dots \quad \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right)$$

называется *остатком ряда* (1) *после n-го члена.*

Сходимость ряда (1) *равносильна сходимости какого-либо из его остатков*, что сразу следует из критерия Коши.

Теорема 3. *Пусть сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Тогда при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ и его сумма равна*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из равенства для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$$

и предельного перехода в нём при $n \to \infty$.

§ 15.2. Числовые ряды с неотрицательными членами

Будем изучать числовые ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для сходимости ряда* (1) *необходима и достаточна ограниченность последовательности его частичных сумм.*

Доказательство. Заметим, что последовательность частичных сумм ряда (1) возрастает, так что её ограниченность эквивалентна её сходимости.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ $\forall\, k \geqslant k_0$. Тогда*

1° *сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ влечёт за собой сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;*

2° *расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ влечёт за собой расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Доказательство.

1° Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда последовательность его частичных сумм (как сходящаяся или по теореме 1) ограничена. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена. По теореме 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Если бы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходился, то по доказанному в первой части теоремы сходился бы и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Следствие 1. *Пусть $a_k > 0$, $b_k > 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, и пусть $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in (0, \infty)$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство.

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \,:\, \frac{1}{2} L b_k \leqslant a_k \leqslant 2 L b_k \quad \forall\, k \geqslant k_0.$$

Тогда из теоремы 15.1.3 при $\lambda = 0$ и из теоремы 2 следует, что ряды $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно. Остаётся учесть, что сходимость ряда равносильна сходимости какого-либо из его остатков.

Упражнение 1. Доказать, что если $a_k \geqslant 0$, $b_k \geqslant 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a_k = O(b_k)$ при $k \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 3 (интегральный признак сходимости ряда). *Пусть функция f убывает к нулю на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Из неравенства

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geqslant f(k+1)$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\, dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k). \qquad (2)$$

Поэтому (эквивалентная сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$) ограниченность последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ эквивалентна ограниченности последовательности интегралов $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$, которая в свою очередь эквивалентна (в силу неотрицательности f) ограниченности $\int_1^{b'} f(x)\,dx$ как функции b', что по теореме 14.7.2 эквивалентно сходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Неравенства (2) имеют простой геометрический смысл. Интеграл в (2) равен площади криволинейной трапеции с основанием $[1, n+1]$, ограниченной сверху графиком функции f.

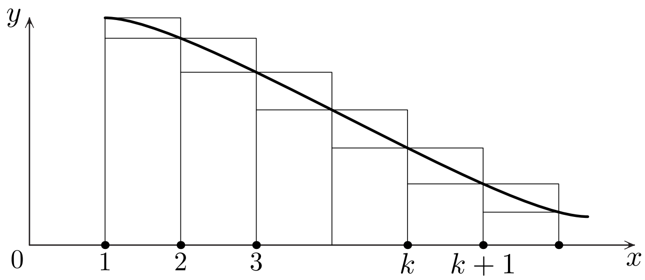


Рис. 15.2

Сумма в левой части (2) равна сумме площадей прямоугольников, покрывающих криволинейную трапецию, а сумма в правой части (2) — сумме площадей прямоугольников, содержащихся в этой криволинейной трапеции.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ расходится при $\alpha \leqslant 0$, т.к. его общий член не стремится к нулю. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$, что в силу интегрального признака следует из сходимости интеграла $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ при $\alpha > 1$ и его расходимости при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)$ расходится при $\alpha \leqslant 0$, т. к. его общий член не стремится к нулю. Этот ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. В самом деле, его сходимость при $\alpha > 0$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ в силу следствия из теоремы 2, т. к. для $\alpha > 0$ $\ln\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right) \sim \frac{1}{k^\alpha}$ при $k \to \infty$. Остаётся сослаться на пример 1.

Упражнение 2. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, и пусть его общий член a_k убывает: $a_k \geqslant a_{k+1}$. Доказать, что

$$a_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3}$$

Указание. Воспользоваться оценкой снизу для разности частичных сумм ряда:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant n a_{2n}.$$

Является ли условие (3) достаточным для сходимости ряда?

Пример 3. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{4}$$

сходится при $0 < q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$.

В самом деле, при $0 < q < 1$ $q^k \leqslant \frac{1}{k^2}$ $\forall\, k \geqslant k_0$. Тогда в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ и теоремы 2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится.

Если же $q \geqslant 1$, то ряд (4) расходится, т. к. его общий член не стремится к нулю.

Заметим, что сходимость ряда (4) можно изучить, записав его частичную сумму по формуле суммы первых n

членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Теорема 4 (признак Даламбера). *Пусть* $a_k > 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1° *если существует число* $q < 1$ *такое, что при некотором* k_0

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если при некотором* k_0

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. 1°. При $k \geqslant k_0$ из $a_{k+1} \leqslant qa_k$ следует, что

$$a_k \leqslant q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k =: b_k.$$

Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует в силу признака сравнения (теорема 2) из сходимости ряда (4).

2°. Из $a_{k+1} \geqslant a_k > 0$ следует, что общий член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не стремится к нулю. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Теорема 5 (признак Даламбера). *Пусть* $a_k > 0$ $\forall\, k \in$ $\in \mathbb{N}$ *и пусть*

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

1° *если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

3° *если* $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' := q + \varepsilon < 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} \leqslant q' a_k \ \forall\, k \geqslant k_0$. По теореме 4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Пусть $q > 1$. Тогда $a_k \geqslant 1 \ \forall\, k \geqslant k_0$. По теореме 4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, выполнено условие

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ расходится, а при $\alpha > 1$ — сходится.

Пример 4. Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \frac{k!}{k^k}$ имеем $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} \to e^{-1} < 1$ при $k \to \infty$. Следовательно, ряд сходится.

Теорема 6 (признак Коши). *Пусть* $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1° *если существует число* $q < 1$ *такое, что при некотором* $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если*

$$\forall\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geqslant k_0 \ : \ \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, и даже его общий член не стремится к нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ и оценки $a_k \leqslant q^k$ $(\forall\, k \geqslant k_0)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения (теорема 2).

2°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, т. к. его общий член не стремится к нулю.

Предельная форма признака Коши имеет вид

Теорема 7 (признак Коши). *Пусть* $a_k \geqslant 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ *и*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

1° *если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, и даже его общий член не стремится к нулю;*

3° *если* $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Следствие 2. *Утверждение теоремы* 7 *сохранится, если в ней условие* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$ *заменить на условие*

$$\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q_0 < 1\ \forall\, k \geqslant k_0$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по теореме 6.

2°. Из определения верхнего предела последовательности следует, что

$$\forall\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geqslant k_0 \ : \ \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1.$$

По теореме 6 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, хотя для каждого из них $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$.

Пример 5. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$, $a_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$, сходится по признаку Коши, т. к. $\sqrt[k]{a_k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \to e^{-1} < 1$ при $k \to \to \infty$.

Упражнение 3. Показать, что признак Коши сильнее признака Даламбера в том смысле, что если сходимость ряда можно установить с помощью признака Даламбера, то это можно сделать и с помощью признака Коши.

З а м е ч а н и е 1. Признаки Даламбера и Коши, как видно из их доказательств, основаны на сравнении рассматриваемого ряда с геометрической прогрессией $\{q^k\}_{k=0}^{\infty}$. Этим, в частности, можно объяснить, их непригодность для выяснения сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ при $\alpha > 0$. Как признаки расходимости эти признаки показывают, что общий член ряда не стремится к нулю, т. е. являются довольно грубыми.

Кроме рассмотренных, существует много других, более тонких признаков, дающих достаточные условия сходимости числового ряда.

§ 15.3. Абсолютно сходящиеся ряды

Определение 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема 1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ для него выполнено условие Коши. Поскольку

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| \quad \text{при} \quad m \leqslant n,$$

то условие Коши выполняется и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу критерия Коши 15.1.2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Заметим, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Это видно из примера ряда

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ \ldots \tag{1}$$

Следующие две теоремы показывают, что абсолютно сходящиеся ряды обладают некоторыми свойствами сумм конечного числа слагаемых.

Определение 2. Пусть заданы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и отображение $k \to n_k$, являющееся взаимно однозначным соответствием $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ называют *рядом с переставленными членами* (по отношению к ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$).

Теорема 2. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный перестановкой членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{2}$$

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, т. е. сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$, следует из ограниченности последовательности частичных сумм последнего:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^*| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Установим равенство (2).

Пусть $S \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^*$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, очевидно, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N. Тогда при $m \geqslant N$

$$|S_m - S_n^*| \leqslant |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \ \ldots \eqqcolon \rho_n^*,$$

где ρ_n^* — остаток после n-го члена ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|S - S_n^*| \leqslant \rho_n^* \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Но $\rho_n^* \to 0$ при $n \to 0$ как остаток сходящегося ряда. Следовательно, $S_n^* \to S$ при $n \to \infty$, что равносильно равенству (2).

Теорема 3. *Пусть ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся абсолютно.*

Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}, \tag{3}$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и его сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right). \tag{4}$$

Доказательство. Ряд (3) сходится абсолютно, поскольку последовательность частичных сумм ряда из абсолютных величин его членов ограничена:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k_j}||b_{m_j}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right).$$

Установим равенство (4). Поскольку сумма ряда (3) не зависит от перестановки его членов, будем считать, что члены ряда (3) расположены в таком порядке, что

$$S_{n^2} \coloneqq \sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что подпоследовательность $\{S_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда (3) сходится к числу $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\right)$. Так как ряд (3) сходящийся, то последовательность его частичных сумм сходится к тому же числу, и (4) установлено.

§ 15.4. Сходящиеся знакопеременные ряды

Как было показано на примере ряда (15.3.1), сходящийся ряд не обязательно абсолютно сходится.

Установим некоторые признаки сходимости таких рядов.

Теорема 1 (признак Лейбница). *Пусть $a_k \geqslant a_{k+1} > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ \ldots \tag{1}$$

сходится.

При этом остаток ряда $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого из его членов:

$$|r_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм чётного порядка $\{S_{2n}\}_1^\infty$ последовательности частичных сумм ряда (1):

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Ясно, что $\{S_{2n}\}_1^\infty$ возрастает и что $0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ сходится:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} =: S \in [0, a_1]. \tag{3}$$

Подпоследовательность $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ частичных сумм нечётного порядка последовательности $\{S_n\}_1^\infty$ также сходится и притом к тому же пределу S, поскольку $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \to S - 0 = S$ при $n \to \infty$. Из сходимости $\{S_{2n}\}_1^\infty$ и $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ к одному и тому же числу S следует, как нетрудно заметить, сходимость $S_n \to S$ при $n \to \infty$, т. е. сходимость ряда (1) к S.

Пусть теперь r_n — остаток ряда (1) после n-го члена:

$$(-1)^{n+1} r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots$$

Этот ряд также удовлетворяет условиям доказываемой теоремы. Оценивая его сумму в соответствии с (3), получаем (2).

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, сходится по признаку Лейбница.

Переходим к изложению признаков сходимости рядов вида $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k b_k$. Рассмотрим преобразование конечной суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Пусть

$$B_0 \in \mathbb{R}, \quad B_k \coloneqq B_0 + \sum_{j=1}^k b_j \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда $b_k = B_k - B_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1}.$$

Заменив в последней сумме индекс суммирования k на $k+1$, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k, \tag{5}$$

называемую *преобразованием Абеля* суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. Она является аналогом формулы интегрирования по частям и чаще всего используется при $B_0 = 0$.

Теорема 2 (признак Дирихле). *Пусть последовательность чисел $\{a_k\}_1^\infty$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничена.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. В обозначениях (4) при $B_0 = 0$ применим преобразование Абеля (5) к частичной сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Изучим поведение правой части равенства (5) при $n \to \infty$.

$a_n B_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ и условия $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Сумма в правой части (5) стремится к конечному пределу, поскольку она является частичной суммой сходящегося (и притом абсолютно) ряда.

В самом деле, если $M \coloneqq \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |B_k|$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(a_{k+1} - a_k) B_k| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| =$$

$$= M \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \right| = M|a_1|.$$

Следовательно, и левая часть (5) стремится к тому же пределу при $n \to \infty$, что и означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant |a_1| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|.$$

Теорема 3 (признак Абеля). *Пусть последовательность чисел* $\{a_k\}_1^\infty$ *монотонна и ограничена, а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится. Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Доказательство. Пусть $a_k \to a_0$ при $k \to \infty$. Тогда $\alpha_k \coloneqq a_k - a_0 \to 0$ при $k \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Первый из двух рядов правой части равенства сходится по признаку Дирихле, а второй — по условию. Следовательно, сходится и ряд, стоящий в левой части равенства.

Замечание 1. Признак Абеля можно сформулировать так: ряд, получаемый почленным умножением сходящегося ряда на члены монотонной ограниченной последовательности, сходится.

Пример 2. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Последовательность чисел $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ монотонно стремится к нулю. Покажем, что последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ ограничена.

Имеем при $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right],$$

так что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\,.$$

Следовательно, сходимость ряда (6) следует из признака Дирихле при $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Если же $x = 2m\pi$, то ряд (6) сходится, т. к. все его члены равны нулю.

Аналогично исследуется сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

При $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, и ряд (7) сходится по признаку Дирихле.

При $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, ряд (7) превращается в ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, сходимость которого зависит от α и исследована в примере 15.2.1.

Пример 3. Пусть $\{a_k\}$ — монотонная ограниченная последовательность.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

сходится по признаку Абеля, в котором $b_k = \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$.

Мы видели (теорема 15.3.2), что если ряд сходится абсолютно, то после любой перестановки его членов он останется абсолютно сходящимся и его сумма не изменится.

Если же ряд сходится, но не абсолютно, то после перестановки членов он может превратиться в расходящийся ряд или в сходящийся ряд, но имеющий другую сумму. Это утверждение (теорема Римана) будет установлено после некоторой подготовки.

Пусть задан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Положим

$$a_k^+ := \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a_k < 0, \end{cases} \qquad a_k^- := \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k < 0, \\ 0, & \text{если } a_k \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, $a_k^+ \geqslant 0$, $a_k^- \leqslant 0$, $a_k = a_k^+ + a_k^-$.

Лемма 1. *Пусть ряд $\sum a_k$ сходится, но не абсолютно. Тогда каждый из рядов $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ расходится.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть, например, ряд $\sum a_k^+$ сходится. Тогда сходится и ряд $\sum a_k^-$ (так как $a_k^- = a_k - a_k^+$). Тогда каждый из них сходится абсолютно, откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum a_k$, что противоречит условию.

Теорема 4 (Римана). *Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, но не абсолютно. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}$ можно так переставить его члены, что полученный ряд будет сходиться к A.*

Доказательство. Построим по ряду $\sum a_k$ ряды $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$. Исключим из ряда $\sum a_k^-$ равные нулю члены и полученный ряд обозначим через $\sum(-\beta_i)$. Исключим из ряда $\sum a_k^+$ те равные нулю члены, для которых $a_k < 0$, и полученный ряд обозначим через $\sum \alpha_i$. Таким образом, $\sum \alpha_i = \sum\limits_{a_k \geqslant 0} a_k$, $\sum(-\beta_i) = \sum\limits_{a_k < 0} a_k$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i > 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Ряды $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$ расходятся.

Теперь каждый член ряда $\sum a_k$ является членом одного из рядов $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$, а каждый член любого из этих рядов является членом ряда $\sum a_k$. Поэтому любой ряд, составленный из всех членов рядов $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$, является рядом с переставленными членами по отношению к ряду $\sum a_k$.

Зафиксируем $A \in \mathbb{R}$ и построим ряд

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m_1} - \beta_1 - \ldots - \beta_{n_1} + \alpha_{m_1+1} + \ldots \\ + \alpha_{m_2} - \beta_{n_1+1} - \ldots - \beta_{n_2} + \ldots, \quad (8)$$

где $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots$, $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ Ряд (8) строим по следующему правилу. На первом шаге переносим в него один за другим несколько первых членов ряда $\sum \alpha_i$, следя за возрастанием частичных сумм S_n ряда (8) и заканчивая тем членом α_{m_1}, при переносе которого в ряд (8) частичная сумма S_{m_1} впервые станет большей, чем A ($S_{m_1} > A$). Это осуществимо, поскольку ряд $\sum \alpha_i$ расходится, так что его частичные суммы не ограничены.

На втором шаге переносим в ряд (8) несколько первых членов ряда $\sum(-\beta_i)$, следя за убыванием частичных сумм S_n ряда (8) и заканчивая тем членом $-\beta_{n_1}$, при переносе которого частичная сумма $S_{m_1+n_1}$ впервые станет меньшей, чем A ($S_{m_1+n_1} < A$).

На третьем шаге переносим в ряд (8) несколько первых из оставшихся в ряде $\sum \alpha_i$ членов, следя за возрастанием частичной суммы ряда (8) и заканчивая тем членом α_{m_2}, при переносе которого частичная сумма $S_{n_1+m_2}$ впервые станет большей, чем A ($S_{n_1+m_2} > A$).

На четвертом шаге переносим в ряд (8) несколько первых из оставшихся членов ряда $\sum(-\beta_i)$, заканчивая тем членом $-\beta_{n_2}$, при переносе которого частичная сумма $S_{m_2+n_2}$ впервые станет меньшей, чем A ($S_{m_2+n_2} < A$).

Продолжая так и далее, построим ряд (8), отличающийся от $\sum a_k$ лишь перестановкой членов.

По построению отклонение частичной суммы ряда (8) от A, т. е. $|A - S_n|$, оценивается для номеров n второго шага построения через $\max\{\alpha_{m_1}, \beta_{n_1}\}$, для номеров n третьего шага — через $\max\{\beta_{n_1}, \alpha_{m_2}\}$, четвертого шага — через $\max\{\alpha_{m_2}, \beta_{n_2}\}$ и т.д.

Поскольку $\alpha_i \to 0$, $\beta_i \to 0$ при $i \to \infty$, то отсюда следует, что $S_n \to A$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать, что в условиях теоремы Римана можно построить ряды вида (8), для которых частичные суммы обладают любым из следующих свойств:

a) $S_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$;
b) $S_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$;
c) образуют ограниченную расходящуюся последовательность $\{S_n\}$.

§ 15.5. Последовательности и ряды с комплексными членами

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{z_k\} = \{x_k + iy_k\}$ называется *сходящейся*, если существует комплексное число $z_0 = x_0 + y_0$ такое, что

$$\lim_{k\to\infty} |z_k - z_0| = 0.$$

Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называют при этом *пределом последовательности* $\{z_k\}$ и пишут $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$ или $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$.

Поскольку

$$|z_k - z_0| = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2},$$

то сходимость $z_k \to z_0$ равносильна сходимости каждой из двух последовательностей действительных чисел $x_k \to \to x_0$ и $y_k \to y_0$ при $k \to \infty$. Это свойство (или повторение выводов) дает возможность перенести на последовательности комплексных чисел все теоремы о последовательностях действительных чисел, которые не связаны с отношением порядка (во множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел этого понятия нет).

Определение 2. Символ

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ \dots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad z_k \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

называется *числовым рядом.*

На ряд (1) переносятся все понятия ряда действительных чисел (член ряда, общий член ряда, частичная, или частная сумма ряда, остаток ряда, сходимость и сумма ряда, абсолютная сходимость ряда).

Очевидно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, где $z_k = x_k + iy_k$, сходится (абсолютно сходится) тогда и только тогда, когда сходится (абсолютно сходится) каждый из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

На ряды с комплексными членами переносятся все теоремы § 15.1 и § 15.3, а также признаки сходимости Дирихле и Абеля для рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, если числа a_k действительны $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Глава 16
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 16.1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

В этой главе будем изучать последовательности и ряды комплекснозначных функций, определённых на множестве точек евклидова d-мерного пространства точек $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\{f_n\}_1^\infty, \quad f_n \,:\, E \to \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Определение 1. Говорят, что последовательность (1) *сходится на множестве* E, если числовая последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится при каждом фиксированном $x \in$ $\in E$.

При этом говорят также, что последовательность (1) сходится на E *поточечно*.

Определение 2. Говорят, что последовательность (1) *сходится на* E *равномерно к функции* f: $E \to \mathbb{C}$, и пишут $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$, если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь допускается, что конечное число членов последовательности верхних граней может быть равно $+\infty$. Для такой последовательности определение предела то же, что и для числовой последовательности.

Говорят, что последовательность (1) *сходится на множестве* E *равномерно*, если

$$\exists\, f \,:\, E \to \mathbb{C} \quad \text{такая, что} \quad f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если последовательность (1) сходится на множестве E равномерно, то, очевидно, она сходится на E и поточечно, и притом к той же самой функции. Обратное неверно.

Пример 1. Пусть $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x < 1$. Последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится поточечно к нулю на $[0, 1)$. Однако она не сходится на $[0, 1)$ равномерно. В самом деле, предельной функцией может быть только $f(x) = 0$ $\forall\, x \in \in [0, 1)$. Но

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Та же последовательность сходится на отрезке $[0, q]$, $0 < q < < 1$, равномерно, т. к. $\sup\limits_{x\in[0,q]} |x^n - 0| = q^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 2. Пусть непрерывная функция $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \text{ и при } x \in \left[\frac{1}{n}\,, 1\right], \\ 1 & \text{при } x = \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

$$f_n \text{ линейна на } \left[0, \frac{1}{2n}\right] \text{ и на } \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right].$$

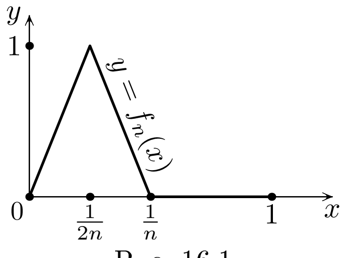


Рис. 16.1

Ясно, что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \to \infty$ $\forall\, x \in [0, 1]$, но

$$\sup_{[0,1)} |f_n - 0| = 1 \not\to 0$$

при $n \to \infty$, так что последовательность $\{f_n\}$ не сходится на $[0, 1]$ равномерно.

Следующее определение эквивалентно определению 2.

Определение 2′. Говорят, что последовательность (1) сходится на E *равномерно* к функции $f\colon E \to \mathbb{C}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n = n(\varepsilon) \; : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall\, x \in E, \;\; \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Подчеркнём, что в определении 2′ $n = n(\varepsilon)$ не зависит от $x \in E$. Если же в этом определении заменить $n(\varepsilon)$ на $n(x, \varepsilon)$, т. е. считать $n(\varepsilon)$ зависящим ещё и от x, то оно превращается в определение (поточечной) сходимости на множестве E.

З а м е ч а н и е 1. Понятие «равномерная сходимость» может быть пояснено как «в равной степени быстрая сходимость» для разных точек множества E. В случае равномерной сходимости существует стремящаяся к нулю мажоранта отклонений $f_n(x)$ от $f(x)$ — это $\varepsilon_n \coloneqq \sup\limits_E |f_n - f| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Заметим ещё, что равномерная сходимость $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ равносильна, очевидно, равномерной сходимости $f_n - f \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Последовательность $\{f_n\}$, f_n: $E \to \mathbb{C}$, сходится на E равномерно тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \sup_E |f_n - f_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \sup_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех n, $m \geqslant n_\varepsilon$

$$\sup_E |f_n - f_m| \leqslant \sup_E |f_n - f| + \sup_E |f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Тогда при каждом фиксированном $x \in E$ выполнено условие

$$\forall\, \varepsilon > 0 \, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \, \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon, \; \forall\, x \in E. \tag{2}$$

В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится $\forall\, x \in E$. Обозначим предел числовой последовательности$\{f_n(x)\}$ через

$f(x)$. Покажем, что $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$. Для этого в оценке (2) перейдём к пределу при $m \to \infty$. Получим, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, x \in E.$$

Переходя в последнем неравенстве к верхней грани по $x \in$ $\in E$, видим, что по определению 2 $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим *функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k \,:\, E \to \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Определение 3. Говорят, что ряд (3) *сходится на множестве* E, если числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E, \tag{4}$$

сходится при каждом фиксированном $x \in E$.

При этом говорят также, что ряд (3) сходится на E *поточечно.*

Таким образом, поточечная сходимость ряда (3) на E равносильна поточечной сходимости на E последовательности $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ его частичных сумм.

Если ряд (3) сходится на множестве E, то его *суммой* называется функция $S\colon\ E \to \mathbb{C}$ такая, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ $\forall\, x \in E$.

Определение 4. Говорят, что ряд (3) сходится на E *равномерно*, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится на E равномерно.

Следующее определение эквивалентно, очевидно, определению 4.

Определение 4′. Говорят, что ряд (3) сходится на E *равномерно*, если он сходится на E и если

$$\sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k+x^2}$ равномерно сходится на множестве $E = (-\infty, +\infty)$.

Ряд сходится для любого $x \in E$ по признаку Лейбница. По тому же признаку для остатка ряда справедлива оценка

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2} \right| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Следовательно, по определению 4′ ряд равномерно сходится на $(-\infty, +\infty)$.

Обратим внимание читателя на то, что этот ряд не сходится абсолютно ни при каком значении $x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 2 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Пусть ряд* (3) *равномерно сходится на* E. *Тогда его общий член*

$$u_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что $u_n = S_n - S_{n-1}$, $S_n \underset{E}{\rightrightarrows} S$, $S_{n-1} \underset{E}{\rightrightarrows} S$ при $n \to \infty$.

Понятия сходимости ряда, сходимости ряда на множестве, равномерной сходимости ряда на множестве определяются в терминах соответствующих понятий для последовательностей частичных сумм ряда. Поэтому многие свойства функциональных рядов являются перефразировкой соответствующих свойств функциональных последовательностей и наоборот. Так, например, простым следствием теоремы 1 является

Теорема 3 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Ряд* (3) *сходится на E равномерно тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ \sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon\ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon),\ \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Упражнение 1. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ равномерно сходятся на E, то при λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda u_k + {}$ $+ \mu v_k)$ равномерно сходится на E. Обобщить утверждение на случай, когда λ, μ — ограниченные на E функции.

Упражнение 2. Вывести теорему 2 из теоремы 3.

Упражнение 3. Определение $2'$ эквивалентно определению 2, но формулируется без привлечения понятия верхней грани. Сформулировать того же характера равносильные утверждения для условия Коши в теоремах 1, 3 и для определения $4'$.

§ 16.2. Признаки равномерной сходимости рядов

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть заданы функции u_k: $E \to \mathbb{C}$, v_k: $E \to [0, +\infty)$, $E \subset \mathbb{R}^d$, причём*

$$|u_k(x)| \leqslant v_k(x) \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится на E равномерно. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x).$$

В силу критерия Коши (теорема 16.1.3) из равномерной сходимости ряда $\sum v_k$ следует , что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ \sup_{x \in E} \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) < \varepsilon \ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \ \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Значит, для этих же ε и $n(\varepsilon)$

$$\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sup_{x \in E} \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| < \varepsilon \ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \ \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, в силу того же критерия Коши ряды $\sum u_k$ и $\sum |u_k|$ равномерно сходятся на E.

Частным случаем доказанной теоремы является

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). *Пусть* $u_k \colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, $a_k \in \mathbb{R} \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, *причём*

$$|u_k(x)| \leqslant a_k \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится на* E *абсолютно и равномерно.*

Определение 1. Последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n \colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, называется *равномерно ограниченной на* E, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \leqslant M \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Следующие два признака относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) u_k(x), \tag{1}$$

где $a_k \colon E \to \mathbb{R}$, $u_k \colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$.

Теорема 3 (признак Дирихле). *Пусть последовательность значений действительнозначных функций* $a_k(x)$ *при каждом* $x \in E$ *монотонна и* $a_k \underset{E}{\rightrightarrows} 0$ *при* $k \to \infty$. *Пусть* *частичные суммы ряда* $\sum\limits_1^\infty u_k$ *комплекснозначных функций* u_k *равномерно ограничены на* E.

Тогда ряд (1) *равномерно сходится на* E.

Доказательство. Применяя преобразование Абеля (15.4.5), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x) = \\ = a_{n+p}(x)\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}(x) - a_k(x))\sum_{j=n+1}^{k} u_j(x). \quad (2)$$

В силу равномерной ограниченности частичных сумм ряда $\sum u_k(x)$ при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда, используя монотонность последовательности $\{a_k(x)\}$ (по k), имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| \leqslant 2M|a_{n+p}(x)| + 2M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_{k+1}(x) - a_k(x)| = \\ = 2M|a_{n+p}(x)| + 2M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| = \\ = 4M|a_{n+p}(x)| + 2M|a_{n+1}(x)|.$$

Из этого неравенства в силу $a_k \underset{E}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$ получаем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| < \varepsilon \\ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Применяя критерий Коши (теорема 16.1.3), получаем, что ряд (1) сходится на E равномерно.

Теорема 4 (признак Абеля). *Пусть последовательность действительнозначных функций $a_k(x)$ равномерно ограничена на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$, и пусть при каждом $x \in E$ последовательность $\{a_k(x)\}$ монотонна. Пусть ряд $\sum u_k(x)$ равномерно сходится на E.*

Тогда ряд (1) *равномерно сходится на E.*

Доказательство. По определению равномерной ограниченности функций $a_k(x)$ при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$|a_k(x)| \leqslant M \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Из равномерной сходимости ряда $\sum u_k$ и критерия Коши (теорема 16.1.3) имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Отсюда и из (2), используя монотонность последовательности $\{a_k(x)\}$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) u_k(x)\right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| = $$
$$= M\varepsilon + \varepsilon \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| =$$
$$= M\varepsilon + \varepsilon |a_{n+p}(x) - a_{n+1}(x)| \leqslant M\varepsilon + 2M\varepsilon = 3M\varepsilon.$$

В силу критерия Коши (теорема 16.1.3) отсюда следует равномерная сходимость ряда (1) на множестве E.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$

1° при $\alpha > 1$ равномерно сходится на отрезке $[0, 2\pi]$;

2° при $0 < \alpha \leqslant 1$ на любом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ сходится равномерно;

3° при $0 < \alpha \leqslant 1$ на любом отрезке $[0, \delta]$, $\delta > 0$ сходится, но не равномерно.

Покажем это. 1° При $\alpha > 1$ $\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ равномерно сходится на $(-\infty, +\infty)$.

2° При $0 < \alpha \leqslant 1$ воспользуемся оценкой из примера 15.4.2:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},$$

показывающей, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin kx$ равномерно ограничены на каждом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$. Последовательность $\left\{\frac{1}{k^\alpha}\right\}$ монотонно стремится к нулю. По признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ на каждом отрезке $[a, b] \subset \subset (0, 2\pi)$ сходится равномерно.

3° При $0 < \alpha \leqslant 1$ и при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k^\alpha}\bigg|_{x=\frac{1}{n}}\right| \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin 1}{k^\alpha} \geqslant \sin 1 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{\sin 1}{2} > 0.$$

Следовательно, на отрезке $[0, \delta]$, $\delta > 0$ не выполняется условие Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$. По критерию Коши (теорема 16.1.3) на отрезке $[0, \delta]$ этот ряд не сходится равномерно.

§ 16.3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Определение 1. Комплекснозначная функция $f\colon E \to \to \mathbb{C}$, определённая на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$, называется *не-*

прерывной в точке $x^{(0)} \in E$ *по множеству* E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \,:\, |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon \qquad \forall x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}), \tag{1}$$

и называется *непрерывной на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке множества E по множеству E.

Комплекснозначную функцию f можно представить в виде $f = g + ih$, где g, h — действительнозначные функции. Очевидно, что непрерывность функции f в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E (на E) равносильна непрерывности каждой из функций g, h в точке $x^{(0)}$ по множеству E (на E).

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{f_n\}$ *комплекснозначных функций* f_n: $E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$ *равномерно сходится на* E *к функции* f, *т. е* $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ *при* $n \to \infty$. *Если все функции* f_n *непрерывны в точке* $x^{(0)} \in E$ *по множеству* E, *то и предельная функция* f *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,:\, |f(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E. \tag{2}$$

Тогда при $x \in E$

$$|f(x) - f(x^{(0)})| \leqslant |f(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| + |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| + \\ + |f(x^{(0)}) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| < 2\varepsilon + |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})|.$$

В силу непрерывности функции $f_{n(\varepsilon)}$ в точке $x^{(0)}$ по множеству E

$$\exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0 \,:\, |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| < \varepsilon \quad \forall x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < 3\varepsilon \quad \forall x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Следовательно, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Теорема 1′. *Пусть функциональный ряд* $\sum u_k$, *где* u_k: $E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, *равномерно сходится на* E. *Если все члены* u_k *ряда непрерывны в точке* $x^{(0)} \in E$ *по множеству* E, *то сумма ряда* $S = \sum u_k$ *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E.

Доказательство. Достаточно применить теорему 1 к функциям $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $f = S$.

В следующих теоремах функции будем считать действительнозначными, а $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть функции* f_n *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ *при* $n \to \infty$.

Тогда

$$\int_a^x f_n(t)\,dt \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)\,dt \text{ при } n \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство. По теореме 1 функция f непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости $\{f_n\}$ к функции f

$$\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,:\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [a, b], \quad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Следовательно, для всех $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \varepsilon(b - a),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *В условиях теоремы*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{4}$$

В связи с этим равенством теорему 2 называют *теоремой о переходе к пределу под знаком интеграла.*

Упражнение 1. Доказать следующее обобщение теоремы 2.

Пусть функции f_n интегрируемы на отрезке $[a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и пусть $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$. Тогда функция f интегрируема на $[a, b]$ и выполняются соотношения (3), (4).

Теорема 2′. (о почленном интегрировании ряда). *Пусть функции u_k непрерывны на отрезке $[a, b]$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\, dt$$

равномерно сходится на $[a, b]$ и

$$\int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\, dt \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Доказательство. Положим $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и применим теорему 2 и следствие 1 из неё.

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{f_n\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций сходится в точке $c \in [a, b]$, а последовательность производных $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции φ.*

Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функции f и $f' = \varphi$, так что $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ на $[a, b]$.

Доказательство. По теореме 1 функция φ непрерывна на $[a, b]$. В силу теоремы 2 и формулы Ньютона–Лейбница получаем, что

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f_n'(t)\, dt \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x \varphi(t)\, dt \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Числовую сходящуюся последовательность $\{f_n(c)\}$ можно считать, очевидно, функциональной последовательностью, равномерно сходящейся на $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ (см. упражнение 16.1.1) к некоторой функции f.

Переходя в левой части последней формулы к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$f(x) - f(c) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Правая часть этого равенства (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции) является дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функцией. Следовательно, таковой является и левая часть, а значит, и функция f. Дифференцируя равенство почленно, получаем, что $f'(x) = \varphi(x)\ \forall\, x \in [a, b]$.

Теорема доказана.

Теорема 3′. (о почленном дифференцировании ряда). *Пусть ряд $\sum u_k$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций сходится в точке $c \in [a, b]$, а ряд $\sum u'_k$ равномерно сходится на $[a, b]$.*

Тогда ряд $\sum u_k$ равномерно сходится на $[a, b]$, его сумма непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и

$$\left(\sum u_k\right)' = \sum u'_k \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Доказательство. Положим $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ и применим теорему 3.

Глава 17
СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В этой главе будем рассматривать функции $f(z) = f(x+ + iy)$ комплексного переменного $z = x + iy$. На этот случай переносятся понятия непрерывности функции в точке и на множестве, сходимости в точке и равномерной сходимости на множестве функциональной последовательности и функционального ряда.

Следует лишь в определениях 16.1.1, 16.1.2, 16.3.1 заменить $E \subset \mathbb{R}^d$ на $E \subset \mathbb{C}$, а x, $x^{(0)} \in E$ — на z, $z_0 \in E$. При этом сохраняются, очевидно, все теоремы § 16.1 и § 16.2 и теоремы 16.3.1, 16.3.1′.

§ 17.1. Свойства степенных рядов

Определение 1. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

где a_n и z_0 — комплексные числа, а z — комплексное переменное, называется *степенным рядом.*

Определение 2. *Радиусом сходимости степенного ряда* (1) называется число или $+\infty$:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad 0 \leqslant R \leqslant +\infty, \tag{2}$$

кругом сходимости ряда (1) называется круг

$$\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - z_0| < R\}. \tag{3}$$

Круг сходимости ряда является открытым множеством. При $R = +\infty$ он совпадает со всей комплексной плоскостью, а при $R = 0$ является пустым множеством.

Формула (2) называется *формулой Коши–Адамара.*

Вопросы сходимости рядов (1) достаточно изучить в случае $z_0 = 0$, т.е. для рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{4}$$

Напомним признак Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами.

Признак Коши. Пусть $\sum\limits_1^{\infty} b_n$ — ряд с неотрицательными членами, $q = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$. Тогда

1° при $q < 1$ ряд $\sum\limits_1^{\infty} b_n$ сходится;

2° при $q > 1$ ряд $\sum\limits_1^{\infty} b_n$ расходится и даже его общий член не стремится к нулю.

Применим признак Коши к изучению абсолютной сходимости ряда (4). Имеем

$$q = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R},$$

где R — радиус сходимости ряда (4). Сравнивая $q = \dfrac{|z|}{R}$ с единицей, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть R — радиус сходимости ряда* (4). *Тогда*

1° при $|z| < R$ ряд (4) *сходится и даже абсолютно;*

2° при $|z| > R$ ряд (4) *расходится и даже его общий член $a_n z^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.*

З а м е ч а н и е 1. При $|z| = R$, т.е. на границе круга сходимости, ряд (4) может как сходиться, так и расходиться.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 дает возможность находить радиус сходимости степенного ряда, не прибегая к формуле (2).

Упражнение 1. Доказать, что радиус сходимости (2) ряда (1) можно определить формулой

$$R = \sup\{r \,:\, r \geqslant 0, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0\}.$$

Примеры.

1. Ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n}$ с радиусом сходимости $R = 1$ расходится в точке $z = 1$ и сходится во всех остальных точках окружности $|z| = 1$. Его сходимость вытекает из сходимости рядов (15.4.6), (15.4.7), а в точке $z = -1$ устанавливается с помощью признака Лейбница (15.4.1).
2. Ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$, сходится в каждой точке границы круга сходимости.
3. Ряд $\sum\limits_1^\infty z^n$, $R = 1$, расходится в каждой точке границы круга сходимости.

Теорема 2 (о равномерной сходимости степенного ряда). *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда* (4), $0 < r < R$. *Тогда на замкнутом круге* $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant r\}$ *ряд* (4) *сходится равномерно.*

Доказательство. $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$ при $|z| \leqslant r$. Числовой ряд $\sum\limits_0^\infty |a_n| r^n$ сходится в силу теоремы 1. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (4) сходится равномерно на $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant r\}$.

Замечание 3. Степенной ряд на круге сходимости может сходиться равномерно (пример 2) или не сходиться равномерно (примеры 1, 3).

Теорема 3. *Сумма степенного ряда непрерывна на круге сходимости.*

Доказательство следует из теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами, применённой к ряду (4) на множестве $\{z \in$

$\in \mathbb{C}$: $|z| \leqslant r\}$, где $0 < r < R$, причём r может быть взято сколь угодно близким к R.

Теорема 4 (Абеля). *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < |z_2|$. Тогда*

1° *если ряд (4) сходится в точке z_2 (или если его общий член в точке z_2 стремится к нулю), то он сходится абсолютно в точке z_1;*

2° *если ряд (4) расходится в точке z_1, то он расходится в точке z_2 и его общий член в точке z_2 не стремится к нулю;*

3° *если ряд (4) сходится в точке z_2 (или его общий член в точке z_2 стремится к нулю), то он равномерно сходится на замкнутом круге $\{z\colon |z| \leqslant r\}$ при любом r, $0 < r < |z_2|$.*

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (4).

1°. $|z_2| \leqslant R$ в силу теоремы 1. Тогда $|z_1| < R$, и утверждение следует из теоремы 1.

2°. $|z_1| \geqslant R$ в силу теоремы 1. Тогда $|z_2| > R$, и утверждение следует из теоремы 1.

3°. $0 < r < |z_2| \leqslant R$ в силу теоремы 1, и утверждение следует из теоремы 2.

Изучим некоторые свойства вещественных степенных рядов, т.е. рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x_0,\ x,\ a_k \in \mathbb{R} \quad \forall\, k \geqslant 0. \tag{5}$$

Определение 3. *Радиус сходимости* ряда (5) определяется формулой (2).

Интервалом сходимости этого ряда называется интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$.

В качестве следствия из теорем 1, 2 получаем, что ряд (5) сходится абсолютно на интервале сходимости и расходится (и даже его общий член не стремится к нулю) вне замыкания интервала сходимости. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости.

Лемма 1 (о сохранении радиуса сходимости при почленном дифференцировании). *Радиусы сходимости рядов* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть R и R' — радиусы сходимости указанных рядов соответственно. Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^k$ сходится там же, где и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$, и, следовательно, имеет тот же радиус сходимости R'. В силу (2)

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|ka_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

Теорема 5 (о почленном дифференцировании и интегрировании). *Пусть* $R > 0$ *— радиус сходимости ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k =: f(x), \quad |x-x_0| < R, \tag{6}$$

$a_k \in \mathbb{R} \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$.

Тогда при $|x-x_0| < R$

1° f *имеет производные всех порядков, которые находятся почленным дифференцированием ряда* (6);

2° $\forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}, \tag{7}$$

так что по любому отрезку из интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;

3° *степенные ряды, полученные почленным дифференцированием или почленным интегрированием ряда* (6), *имеют тот же радиус сходимости* R.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 3° содержится в лемме 1. Утверждения 1° и 2° в силу утверждения 3° и равномерной сходимости ряда (6) на любом отрезке из интервала сходимости (следствие из теоремы 2) вытекают из соответствующих свойств общих функциональных рядов.

§ 17.2. Аналитические функции

Определение 1. Говорят, что на данном множестве *функция представима рядом* (*разложена в ряд*), если на этом множестве она равна сумме этого ряда.

Определение 2.

1° Функция f называется *аналитической в точке* $z_0 \in \in \mathbb{C}$, если при некотором $\rho > 0$ она представима рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| < \rho. \tag{1}$$

Множество всех аналитических в точке z_0 функций обозначим через $A(z_0)$.

2° Функция f называется *вещественной аналитической в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если при некотором $\rho > 0$ она представима рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{2}$$

с вещественными коэффициентами $a_k \; \forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Множество всех таких функций обозначим через $RA(x_0)$. (R — от англ. слова «Real»).

Определение 3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть комплекснозначная функция

$$f(x) = g(x) + ih(x), \quad x \in U(x_0), \quad g, h \, : \, U(x_0) \to \mathbb{R}.$$

Тогда

$$f^{(k)}(x_0) := g^{(k)}(x_0) + ih^{(k)}(x_0), \quad k \in \mathbb{N},$$

если производные $g^{(k)}(x_0)$, $h^{(k)}(x_0)$ существуют.

Теорема 1 (единственности для $\boldsymbol{RA(x_0)}$). *Пусть $f \in RA(x_0)$. Тогда представление функции f в виде* (2) *единственно. Более того,*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 17.1.1 и теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда производную $f^{(k)}(x_0)$ можно найти с помощью почленного дифференцирования ряда (2), что дает равенство

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

Ряд (2) с коэффициентами вида (3) называется *рядом Тейлора* функции f. Теорема 1 устанавливает, что если функция $f \in RA(x_0)$ представима степенным рядом (2) (разложена в степенной ряд), то этот ряд с необходимостью является её рядом Тейлора.

Теорема 2 (единственности для $\boldsymbol{A(z_0)}$). *Пусть $f \in A(z_0)$. Тогда представление функции f в виде* (1) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 2 является следствием теоремы 1. Покажем, что коэффициенты разложения (1) однозначно определяются функцией f.

Пусть для f имеется представление (1), в котором $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$. Рассмотрим (1) при $y = y_0$. Тогда

$$f(x + iy_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{4}$$

Пусть $f(x + iy_0) = g(x) + ih(x)$, $a_k = b_k + ic_k$, где функции g, h действительнозначны, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Разделяя действительную и мнимую части в равенстве (4), получаем, что при $|x - x_0| < \rho$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k. \tag{5}$$

При этом учтено, что радиусы сходимости рядов (5) не меньше радиуса сходимости ряда (4), как это видно из формулы Коши–Адамара. В силу теоремы 1 коэффициенты b_k, c_k однозначно определяются функциями g, h соответственно. Следовательно, коэффициенты $a_k = b_k + ic_k$ однозначно определяются функцией f.

§ 17.3. Разложение функций в ряд Тейлора

Если функция $f\colon\ U(x_0) \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и имеет в точке x_0 производные всех порядков (т. е. является бесконечно дифференцируемой в точке x_0), то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{1}$$

называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0*.

Будем изучать возможность представления функции $f\colon$ $U(x_0) \to \mathbb{R}$ степенным рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ в некоторой окрестности точки x_0. Из теоремы 17.2.1 следует, что это равносильно вопросу о представимости функции f в некоторой окрестности точки x_0 её рядом Тейлора (1).

Бесконечная дифференцируемость функции f в точке x_0 необходима для того, чтобы выписать ряд Тейлора (1), но не достаточна для представимости функции f этим рядом ни в какой окрестности точки x_0. Это можно подтвердить примером функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$ функция φ имеет производные всех порядков. Нетрудно убедиться, что каждая из них имеет вид $P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, где P — некоторый многочлен, так что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi^{(n)}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Покажем это сначала для $n = 1$. С помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем, что

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(\theta x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0, \quad \text{где} \quad 0 < \theta < 1,$$

так что $\varphi'(0) = 0$. Применяя метод математической индукции, получаем (2).

Итак, функция φ бесконечно дифференцируема в точке $x_0 = 0$. Все коэффициенты её ряда Тейлора в точке 0, а значит, и его сумма, равны нулю. Следовательно, $\varphi(x)$ совпадает с суммой своего ряда Тейлора только при $x = 0$.

Пусть $\exists\, f^{(n)}(x_0)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Запишем разложение f по формуле Тейлора:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{3}$$

где $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$ — многочлен Тейлора, $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора. Заметим, что $S_n(x)$ является также частичной суммой ряда Тейлора функции f. Поэтому для фиксированного x эквивалентны соотношения

$$\left[f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right] \iff$$

$$\Leftrightarrow [S_n(x) \to f(x) \text{ при } n \to \infty] \Leftrightarrow [r_n(x) \to 0 \text{ при } n \to \infty].$$

Таким образом, для доказательства возможности разложения функции f в степенной ряд (т. е. в ряд Тейлора) в данной точке x достаточно показать, что $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для этого нам понадобятся различные формы остаточного члена формулы Тейлора.

Теорема 1. *Пусть производная* $f^{(n+1)}$ *функции* f *непрерывна на отрезке с концами в* x_0 *и* x. *Тогда остаточный член формулы Тейлора* (3) *можно представить в интегральной форме:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{4}$$

в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0<\theta<1, \tag{5}$$

и в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \\ 0<\theta<1. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определённости, $x > x_0$. Установим сначала (4), т. е. равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{7}$$

Приме́ним метод математической индукции. При $n = 0$ формула (7) верна, т. к. совпадает с формулой Ньютона–Лейбница:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Предположим, что формула (7) верна при $n-1$ вместо n, т. е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt. \tag{8}$$

Преобразуем интеграл в правой части (8) с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt =$$
$$= \left(-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Подставляя это выражение в (8), приходим к (7).

Для доказательства (5) применим к интегралу (4) интегральную теорему о среднем (теорема 14.3.2), заметив, что множитель $(x-t)^n$ подынтегрального выражения не меняет знака. Тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Для доказательства (6) применим к интегралу (4) ту же интегральную теорему о среднем иначе, вынося за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции. Тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}[x-(x_0+\theta(x-x_0))]^n(x-x_0),$$

что совпадает с (6).

З а м е ч а н и е 1. Формула (5) уже была доказана раньше другим способом (теорема 6.2.2), причём при более общих предположениях относительно функции f. Достаточно было считать, что $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), а $f^{(n+1)}$ существует на интервале (x_0, x) (или (x, x_0)).

Перейдём к выводу разложений основных элементарных функций в ряд Тейлора (1), считая $x_0 = 0$ (в случае $x_0 = 0$

ряд Тейлора называют также рядом Маклорена). Иначе говоря, для каждой рассматриваемой ниже функции f выясним, на каком множестве $E \subset \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Пример 1. $f(x) = e^x$. Покажем, что

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \ldots \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty). \tag{9}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} e^{|x|} |x|^{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует (9). В силу теоремы 17.1.1 из (9) вытекает, что радиус сходимости степенного ряда (9) $R = +\infty$.

Пример 2. $f(x) = \sin x$. Покажем, что

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ \ldots \qquad \forall\, x \in (-\infty, +\infty). \tag{10}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \pm \frac{1}{(n+1)!} \left\{ \begin{matrix} \sin \theta x \\ \cos \theta x \end{matrix} \right\} x^{n+1},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует (10). В силу теоремы 17.1.1 из (10) вытекает, что радиус сходимости степенного ряда (10) $R = +\infty$.

Пример 3. $f(x) = \cos x$. Справедливость разложения

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \dots \qquad (11)$$
$$\forall\, x \in (-\infty, +\infty)$$

показывается так же, как это сделано для разложения (10). Из (11) вытекает, что радиус сходимости степенного ряда (11) $R = +\infty$.

Пример 4. $f(x) = \ln(1 + x)$. Тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Покажем, что

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall\, x \in (-1, +1]. \qquad (12)$$

Пусть сначала $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ |r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $r_n \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь $-1 < x < 0$. Остаточный член в форме Коши имеет вид

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Заметив, что

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1,$$

имеем

$$|r_n(x)| \leqslant \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{1}{1+\theta x}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Этим установлено разложение (12). В точке $x = -1$ функция $\ln(1+x)$ не определена, а ряд (12) расходится. Из сходимости ряда (12) при $x \in (-1, +1]$ и расходимости в точке $x = -1$ следует, что его радиус сходимости $R = 1$.

Из равномерной сходимости ряда (12) на отрезке $[0, 1]$ и равномерной сходимости этого ряда на любом отрезке $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, $\delta > 0$, по теореме 17.1.2 получаем, что ряд (12) сходится равномерно на любом отрезке $[a, 1] \subset (-1, 1]$.

Пример 5. $f(x) = (1+x)^\alpha$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ (так что функция f не является многочленом).

Производная $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{при} \quad |x| < 1. \tag{13}$$

Заметим, что радиус сходимости ряда (13) $R = 1$, что легко установить, применяя признак Даламбера для выяснения абсолютной сходимости этого ряда. Так что равенство (13) окажется справедливым на всём интервале сходимости ряда. При $x = 0$ разложение (13) очевидно.

Пусть $0 < |x| < 1$. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме имеет вид

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt = \\ = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt.$$

Отсюда

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1} \frac{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1}\, \frac{|x-t|}{1+t}\, dt\right|}{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt\right|}.$$

Заметим, что

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leqslant \frac{|x|-|t|}{1-|t|} = |x|\frac{1-\frac{|t|}{|x|}}{1-|t|} \leqslant |x|.$$

Следовательно, при фиксированном x и достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} \leqslant \frac{|n+1-\alpha|}{n+1}|x| \leqslant (1+\varepsilon)|x| = q < 1$$

при $n \geqslant n(\varepsilon)$.

Это означает, что при $n \to \infty$ $|r_n(x)|$ стремится к нулю не медленнее, чем член убывающей геометрической прогрессии. Таким образом, разложение (13) установлено.

Отметим важные частные случаи ($\alpha = -1$) формулы (13):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (|x| < 1).$$

Пример 6.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \tag{14}$$

Эти два разложения получены не вычислением коэффициентов ряда Тейлора, а почленным сложением двух сходящихся степенных рядов. Ряды в правых частях равенств являются рядами Тейлора соответственно для $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ в силу теоремы единственности 17.2.1.

Подобные приемы получения разложения функций в степенные ряды, основанные на использовании известных разложений (9) – (14), широко распространены. Среди таких приемов отметим, в частности, почленные интегрирование и дифференцирование ряда. Так, например, из формулы суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \ldots, \quad |x| < 1,$$

с помощью почленного интегрирования при $|x| < 1$ получаем формулу (12):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \ldots$$

Разложение в степенной ряд функции $\arcsin x$ можно получить почленным интегрированием разложения её производной $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, даваемого формулой (13) с заменой x на $-x^2$.

§ 17.4. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

Определение 1. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ \ldots \tag{1}$$

$$\sin z \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ \ldots \tag{2}$$

$$\cos z \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ \ldots \tag{3}$$

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ определены равенствами (1), (2), (3) на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, поскольку ряды сходятся, причём абсолютно для любого $z \in \mathbb{C}$, в чём можно убедиться с помощью признака Даламбера. Следовательно, для каждого из рядов (1), (2), (3) радиус сходимости $R = +\infty$ (это вытекает также из сходимости на $(-\infty, +\infty)$ рядов (1), (2), (3) при $z = x + i0$, см. формулы (17.3.9), (17.3.10), (17.3.11)).

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ при $z = x$ совпадают соответственно с e^x, $\sin x$, $\cos x$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Установим некоторые свойства введённых функций. Покажем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall\, z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Поскольку абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно (теорема 15.3.3), а сумма полученного в результате перемножения абсолютно сходящегося ряда не зависит от перестановки его членов (теорема 15.3.2), получаем, что

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{z_2^k}{k!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\,z_1^{n-k}z_2^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.$$

Из сравнения разложений в ряды следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Формулы (5), (6) называются *формулами Эйлера.*

Из (5), (6) при $z = 0 + iy$ видно, что в комплексной плоскости функции $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными функциями.

Из (6) и (4) легко получаются следующие обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},$$
$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

Из (4), (5) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{7}$$

В частности, при $x = 0$

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, видно, что функция e^z — периодическая с периодом $2\pi i$.

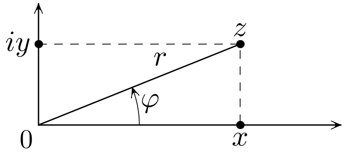


Рис. 17.4

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{9}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

— *модуль* z, а под φ при $z \neq 0$ можно понимать отсчитываемый против часовой стрелки угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z комплексной плоскости. При этом для $\varphi \in [0, 2\pi)$ вводится обозначение $\varphi \coloneqq \arg z$. В силу 2π-периодичности функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ в равенстве (9) в качестве φ можно взять $\varphi = \operatorname{Arg} z$, где

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$$

при произвольном фиксированном $k \in \mathbb{Z}$. При этом $\operatorname{Arg} z$ называется *аргументом* числа z, а $\arg z$ — *главным значением аргумента* числа z.

Формула (9) верна и при $z = 0$ при произвольном значении φ.

Формулу (9) называют *тригонометрической формой* комплексного числа z. С помощью (8) из неё можно получить *показательную форму* комплексного числа z:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z. \tag{10}$$

Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа удобны для нахождения произведения и частного двух комплексных чисел, возведения в степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа.

Пусть $z_j = r_j e^{i\varphi_j} = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $j = 1, 2$. Тогда из (4), (8) следует, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

При $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$ из (4) следует *формула Муавра*

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{11}$$

Получим, наконец, формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа z. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число w, что $w^n = z$. Если

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$w = \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то согласно (11) $r = \rho^n$, $\varphi = n\psi$. Поэтому

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Однако, если $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi_0 + 2k\pi$, то

$$\cos\frac{\varphi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad \sin\frac{\varphi}{n} = \sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

имеют при различных $k = 0, 1, \ldots, n-1$ различные значения. Поэтому для $z \neq 0$ существует n различных значений $\sqrt[n]{z}$. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ все эти значения располагаются на окружности с центром в точке 0 радиуса $\sqrt[n]{|z|}$, деля эту окружность на дуги.

Глава 18
МЕРА МНОЖЕСТВ В n-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Как и в § 10.1, символом $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) будем обозначать n-мерное арифметическое евклидово пространство, т. е. множество всевозможных упорядоченных наборов действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, называемых точками (с координатами $x_1, \ldots, x_n$), в котором введено расстояние:

$$|x - y| \coloneqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

§ 18.1. Определение меры по Жордану

Введём и изучим понятие меры в $\mathbb{R}^n$, обобщающее понятие длины ($n = 1$), площади ($n = 2$), объема ($n = 3$). Будет изложена теория меры множеств, предложенная Жорданом.

Из всех подмножеств $\mathbb{R}^n$ будет выделена совокупность измеримых множеств, каждому из которых будет приписана мера. При этом будут выполнены свойства, сформулированные в теоремах 18.2.2, 18.2.3.

Определение 1. Множество P, удовлетворяющее соотношению

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \subset P \subset \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leqslant b_i$ ($i = 1, \ldots, n$), будем называть *блоком.*

В случае $n = 1$ блок P представляет собой интервал, полуинтервал, отрезок, точку или пустое множество. В случае $n = 2$, $a_i < b_i$ ($i = 1, 2$) блок P — прямоугольник, содержащий произвольное множество своих граничных точек.

Меру *пустого множества* положим равной нулю ($\mu\varnothing = 0$).

Меру каждого из непустых блоков (1) определим равенством
$$\mu P := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i). \tag{2}$$

Таким образом, каждому блоку P вида (1) поставлено в соответствие число — его мера μP; при этом выполнены следующие условия:

1° (неотрицательность меры) $\mu P \geqslant 0$;

2° (аддитивность меры) если $P = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ (P, P_i — блоки) и $P_i \cap P_k = \varnothing$ при $i \neq k$, то
$$\mu P = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Определение 2. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовём *блочным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Отметим, что такого типа множества часто называют *элементарными*.

Лемма 1. *Совокупность блочных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т. е. объединение, пересечение и разность двух блочных множеств также являются блочными множествами.*

Доказательство. Ясно, что пересечение двух блоков является блоком. Поэтому пересечение двух блочных множеств является блочным множеством.

Разность двух блоков является, как легко проверить, блочным множеством. Отсюда следует, что разность двух блочных множеств также является блочным множеством.

Если A, B — блочные множества, то их объединение можно представить в виде
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B,$$

т. е. в виде объединения двух непересекающихся блочных множеств. Отсюда следует, что $A \cup B$ — блочное множество.

Определим теперь меру μA для блочного множества

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad P_i \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq k,$$

(где P_k — блоки) равенством

$$\mu A := \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Покажем, что это определение корректно, т. е. что мера μA не зависит от способа представления A в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков. Пусть

$$A = \bigcup_{k} P_k = \bigcup_{j} Q_j, \quad P_i \cap P_k = \varnothing, \quad Q_i \cap Q_k = \varnothing \text{ при } i \neq k,$$

где P_k и Q_j — блоки. Так как пересечение двух блоков является блоком, то в силу аддитивности меры для блоков

$$\sum_{k} \mu P_k = \sum_{k,j} \mu(P_k \cap Q_j) = \sum_{j} \mu Q_j.$$

В частности, если блок P из (1) представить в виде $P = \bigcup_{k=1}^{m} P_k$, то его мера как блочного множества совпадет с (2).

Упражнение 1. Пусть A — блочное множество. Доказать, что $\operatorname{int} A$ и $\overline{A}$ являются блочными множествами и что

$$\mu(\operatorname{int} A) = \mu\overline{A} = \mu A.$$

Лемма 2. *Пусть A, B — блочные множества. Тогда*

1° *(монотонность меры)*

$$0 \leqslant \mu A \leqslant \mu B, \quad \text{если } A \subset B; \tag{3}$$

2° *(полуаддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu A + \mu B; \tag{4}$$

3° *(аддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B, \quad \textit{если} \quad A \cap B = \varnothing. \tag{5}$$

$$\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B, \quad \textit{если} \quad B \subset A. \tag{6}$$

Доказательство. (3) очевидно. Установим (5). Множество $A \cup B$ блочное в силу леммы 1. Если

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad B = \bigcup_{j=1}^{r} Q_j, \quad P_k,\ Q_j \text{ — блоки},$$

$$P_i \cap P_k = \varnothing \text{ при } i \neq k, \quad Q_i \cap Q_k = \varnothing \text{ при } i \neq k,$$

то

$$A \cup B = \left(\bigcup_{k=1}^{m} P_k\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r} Q_j\right),$$

причём $P_k \cap Q_j = \varnothing \ \forall\, k, j$.

Тогда по определению меры блочного множества

$$\mu(A \cup B) = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k + \sum_{j=1}^{r} \mu Q_j,$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k, \quad \mu B = \sum_{j=1}^{r} \mu Q_j,$$

откуда следует (5). Из (5) и (3) следует (4):

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu B \leqslant \mu A + \mu B.$$

Из (5) следует (6).

Определение 3. Пусть ограниченное множество $E \subset \subset \mathbb{R}^n$. Числа

$$\mu_* E = \sup_{A \subset E} \mu A, \quad \mu^* E = \inf_{B \supset E} \mu B,$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем блочным множествам A, B ($A \subset E$, $B \supset E$), называются соответственно *нижней* (или *внутренней*) и *верхней* (или *внешней*) *мерой Жордана* множества E.

Определение 4. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $\mu_* E = \mu^* E$, т. е. если его нижняя и верхняя меры совпадают. Общее значение этих мер называется *мерой Жордана* множества E и обозначается μE.

Таким образом, для измеримого по Жордану множества E
$$\mu_* E = \mu^* E = \mu E.$$

З а м е ч а н и е 1. Множество, измеримое по Жордану, в случае $n = 2$ называют также *квадрируемым*, а в случае $n = 3$ — *кубируемым*.

Очевидно, что любое блочное множество измеримо по Жордану и его мера Жордана совпадает с его мерой как блочного множества.

З а м е ч а н и е 2. В дальнейшем вместо «измеримость по Жордану», «мера Жордана» будем говорить «измеримость», «мера», поскольку другие понятия измеримости и меры в данном курсе не изучаются.

Упражнение 2. Пусть E — измеримое множество. Показать, что $\mu E > 0$ тогда и только тогда, когда E имеет внутренние точки.

Пример 1. Всякое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру, равную нулю.

Пример 2. Множество в $\mathbb{R}$, состоящее из конечного числа точек, измеримо, и его мера равна нулю.

Пример 3. Множество $E \subset \mathbb{R}$ рациональных точек отрезка $[0, 1]$ неизмеримо, т. к. $\mu_* E = 0$, $\mu^* E = 1$.

Пример 4. Множество точек $E \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, где E то же, что и в примере 3, измеримо, и его двумерная мера равна нулю.

Пример 5 ограниченной неизмеримой области. Пусть $\{r_j\}_1^\infty$ — каким-либо образом занумерованная последовательность рациональных точек интервала $(0, 1)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(r_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, r_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \subset \mathbb{R}^1,$$

$$G = (D \times [0,1)) \cup ((0,1) \times (-1,0)) \subset \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что G является областью. Покажем, что G не измерима по Жордану. Достаточно установить неизмеримость $G^+ = D \times (0,1)$. Она следует из того, что

$$\mu^* G^+ = 1, \quad \mu_* G^+ \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon < 1.$$

При доказательстве первого неравенства можно воспользоваться леммой 10.2.4 Гейне–Бореля.

Упражнение 3. Доказать, что для измеримости множества $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такие два измеримых множества F_ε, G_ε, что $F_\varepsilon \subset E \subset G_\varepsilon$, $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

§ 18.2. Свойства множеств, измеримых по Жордану

Упражнение 1. Доказать, что если множества $E, F \subset \subset \mathbb{R}^n$ измеримы, то

1° измеримы множества $E \cup F$, $E \cap F$ и

$$\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu E + \mu F;$$

2° измеримо множество $E \setminus F$ и

$$\mu(E \setminus F) = \mu E - \mu F, \quad \text{если} \quad F \subset E.$$

У к а з а н и е. Получить сначала эти равенства для блочных множеств. Затем оценить снизу нижние и сверху верхние меры множеств из левых частей равенств.

Лемма 1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} \notin E$.*

Тогда на отрезке, соединяющем точки $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, найдется точка $z^{(0)} \in \partial E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о будем проводить путём последовательного деления пополам отрезка с концами в точках $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, отбирая на каждом шаге тот отрезок, для которого один конец принадлежит E, а другой — не принадлежит E. Пусть $z^{(0)}$ — общая точка для всех отрезков построенной стягивающейся системы вложенных отрезков. Тогда всякая окрестность $U(z^{(0)})$ содержит как точки из E, так и точки не из E. Следовательно, $z^{(0)} \in \partial E$.

Лемма 2. *Пусть ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$, блочное множество $D \subset \mathbb{R}^n$, $\partial E \subset D$.*

Тогда $B \coloneqq E \cup D$ — блочное множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть блок $Q \supset E \cup D$. Тогда блочное множество

$$Q \setminus D = \left(\bigcup_{k=1}^{l} P_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=l+1}^{m} P_k\right),$$

где P_k $(k = 1, \ \ldots, m)$ — попарно непересекающиеся блоки,

$$E \cap P_k \neq \varnothing \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant l,$$

$$E \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad l + 1 \leqslant k \leqslant m.$$

На самом деле $P_k \subset E$ при $1 \leqslant k \leqslant l$ в силу леммы 1.

Из $\bigcup\limits_{k=1}^{l} P_k \subset E$, $\left(\bigcup\limits_{k=l+1}^{m} P_k\right) \bigcap E = \varnothing$ следует, что

$$B = E \cup D = \left(\bigcup_{k=1}^{l} P_k\right) \bigcup D,$$

а значит, и утверждение леммы.

Теорема 1 (критерий измеримости ограниченного множества). *Для измеримости ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы мера его границы была равна нулю: $\mu\partial E = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть множество E измеримо. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют блочные множества A_ε, B_ε такие, что

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon - \mu A_\varepsilon < \varepsilon.$$

При этом множество A_ε можно считать открытым, а множество B_ε — замкнутым (см. упражнение 18.1.1)

Тогда $\partial E \subset B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon$. В силу определения верхней меры и равенства (18.1.6)

$$\mu^*\partial E \leqslant \mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) = \mu B_\varepsilon - \mu A_\varepsilon < \varepsilon.$$

Поэтому $\mu^*\partial E = 0$. Следовательно, множество ∂E измеримо и $\mu\partial E = 0$.

2°. Пусть множество E ограничено и $\mu\partial E = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует блочное множество D_ε такое, что $\partial E \subset D_\varepsilon$, $\mu D_\varepsilon < \varepsilon$. Построим множества

$$B_\varepsilon = E \cup D_\varepsilon, \quad A_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus D_\varepsilon.$$

Множества B_ε, A_ε — блочные в силу лемм 2 и 18.1.1. Кроме того,

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon,$$
$$\mu A_\varepsilon \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E \leqslant \mu B_\varepsilon = \mu A_\varepsilon + \mu D_\varepsilon < \mu A_\varepsilon + \varepsilon.$$

Отсюда

$$0 \leqslant \mu^* E - \mu_* E < \varepsilon.$$

Следовательно, $\mu_* E = \mu^* E$, т. е. множество E измеримо.

Теорема 2. *Совокупность измеримых множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т. е., если множества E, F измеримы, то измеримы и $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что

$$\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F, \ \partial(E \cap F) \subset \partial E \cup \partial F, \ \partial(E \setminus F) \subset \partial E \cup \partial F.$$

Сделаем это лишь в первом случае. Пусть $x^{(0)} \in \partial(E \cup F)$. Тогда в каждой окрестности $U(x^{(0)})$ находятся как точки из $E \cup F$, так и не из $E \cup F$. Следовательно, либо в каждой окрестности $U(x^{(0)})$ есть точки из E (и тогда $x^{(0)} \in \partial E$), либо в каждой окрестности есть точки из F (и тогда $x^{(0)} \in \in \partial F$). Поэтому $x^{(0)} \in \partial E \cup \partial F$, а значит, $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \cup \partial F$.

В силу критерия измеримости (теорема 1) $\mu\partial E = 0$, $\mu\partial F = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть B_1, B_2 такие блочные множества, что $\partial E \subset B_1$, $\mu B_1 < \varepsilon$, $\partial F \subset B_2$, $\mu B_2 < \varepsilon$. Тогда $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F \subset B_1 \cup B_2$. В силу леммы 18.1.2

$$\mu^*\partial(E \cup F) \leqslant \mu(B_1 \cup B_2) \leqslant \mu B_1 + \mu B_2 < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\mu\partial(E \cup F) = 0$ и в силу критерия измеримости объединение $E \cup F$ измеримо.

Аналогично устанавливается измеримость $E \cap F$ и $E \setminus F$.

Теорема 3. *Пусть множества $E, F \subset \mathbb{R}^n$ измеримы. Тогда*

1° *(монотонность меры)*

$$0 \leqslant \mu E \leqslant \mu F, \text{ если } E \subset F; \tag{1}$$

2° *(полуаддитивность меры)*

$$\mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F; \tag{2}$$

3° *(аддитивность меры)*

$$\mu(E \cup F) = \mu E + \mu F, \text{ если } E \cap F = \varnothing. \tag{3}$$

Доказательство. Измеримость $E \cup F$ установлена в теореме 2, свойства (1) и (2) следуют из леммы 18.1.2.

Установим (3). Пусть A_1, A_2 — блочные множества,

$$A_1 \subset E, \quad A_2 \subset F.$$

Тогда

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1 \cup A_2 \subset E \cup F.$$

В силу (18.1.5), (1), (2)

$$\mu A_1 + \mu A_2 = \mu(A_1 \cup A_2) \leqslant \mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F.$$

Переходя к верхним граням по $A_1 \subset E$, $A_2 \subset F$, получаем отсюда, что

$$\mu E + \mu F \leqslant \mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F,$$

откуда и следует (3).

Теорема 4. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Тогда измеримы его замыкание $\overline{E}$ и его внутренность $\operatorname{int} E$ и $\mu\overline{E} = \mu(\operatorname{int} E) = \mu E$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из измеримости E в силу критерия измеримости следует, что $\mu\partial E = 0$. Поскольку

$$\overline{E} = E \cup \partial E, \quad \operatorname{int} E = E \setminus \partial E,$$

остаётся воспользоваться теоремами 2, 3.

Для ряда важных применений критерия измеримости установим, что некоторые множества простого вида имеют меру нуль.

Теорема 5. *График непрерывной на компакте функции имеет меру нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\colon\ F \to \mathbb{R}$, где компакт $F \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $(x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$.

$$E = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ :\ x \in F, \quad x_{n+1} = f(x)\}$$

— график функции f. Покажем, что $(n+1)$-мерная мера $\mu_{n+1}E$ множества E равна нулю. Функция f, как непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нём. Следовательно,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0 \ :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{при } x, y \in E,\ |x - y| < \delta.$$

Пусть блок $\tilde{P} \supset F$, $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^n$. Разобьём его на попарно непересекающиеся блоки, диаметры которых меньше δ, и обозначим через $P_1, \ \ldots, P_m$ те из них, которые пересекаются с F. В каждом P_j возьмём какую-либо точку $x^{(j)} \in P_j$ и построим блок

$$Q_j \coloneqq P_j \times (f(x^{(j)}) - \varepsilon, f(x^{(j)}) + \varepsilon] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Очевидно, график сужения функции f на $F \cap P_j$ содержится в Q_j. Следовательно, $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ и в силу монотонности верхней меры

$$\mu^*_{n+1} E \leqslant \sum_{j=1}^{m} 2\varepsilon \mu P_j \leqslant 2\varepsilon \mu \tilde{P}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ $\mu^*_{n+1} E = 0$, так что $\mu_{n+1} E = 0$.

Теорема 6. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$, $\mu F = 0$. Тогда прямой цилиндр $E = F \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ измерим и его мера $\mu_{n+1} E = = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть B_ε — такое блочное множество в $\mathbb{R}^n$, что

$$F \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon < \varepsilon.$$

Тогда $B_\varepsilon \times (a-1, b]$ — блочное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$E \subset B_\varepsilon \times (a-1, b],$$

$$\mu^*_{n+1} E \leqslant \mu_{n+1}(B_\varepsilon \times (a-1, b]) < \varepsilon(b - a + 1).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ $\mu^*_{n+1} E = 0$, так что $\mu_{n+1} E = = 0$.

Пример 1. Криволинейная трапеция

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

где f — непрерывная на $[a, b]$ функция, $f \geqslant 0$ на $[a, b]$, является измеримым (квадрируемым) множеством в силу теоремы 5.

Лемма 3. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu E = 0$, и пусть*

$$U_\delta(E) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \inf_{y \in E} |x - y| < \delta\}$$

— δ-окрестность множества E $(\delta > 0)$.

Тогда $\mu^* U_\delta(E) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. Пусть $\mu E = 0$, $\varepsilon > 0$, и пусть $B_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{m} P_k$ — такое блочное множество, что

$$E \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon < \varepsilon.$$

Для каждого блока P_k обозначим через $\tilde{P}_k$ блок, получающийся из P_k преобразованием подобия с центром в центре P_k и коэффициентом подобия, равным двум. Тогда $\mu\tilde{P}_k = 2^n \mu P_k$ и $\mu\tilde{B}_\varepsilon < 2^n\varepsilon$, где $\tilde{B}_\varepsilon \coloneqq \bigcup_{k=1}^{m} \tilde{P}_k$. Ясно, что

$$\exists\, \delta(B_\varepsilon) > 0 \;:\; U_\delta(E) \subset \tilde{B}_\varepsilon \quad \forall\, \delta \;:\; 0 < \delta \leqslant \delta(B_\varepsilon),$$

так что $\mu^* U_\delta(E) \leqslant \mu\tilde{B}_\varepsilon < 2^n\varepsilon$, откуда и следует утверждение леммы.

Глава 19
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 19.1. Определение кратного интеграла и критерий интегрируемости функции

Определение 1. Пусть измеримое (по Жордану) множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Конечная система $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ непустых измеримых (по Жордану) множеств E_i называется *разбиением множества* E, если

1° $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ при $i \neq j$;

2° $\bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i = E$.

Число $|\tau| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \operatorname{diam}(E_i)$ называется *мелкостью разбиения* τ.

Для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i.$$

В самом деле, $\mu E \leqslant \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i$, а с другой стороны,

$$\mu E \geqslant \mu \bigcup (\operatorname{int} E_i) = \sum \mu(\operatorname{int} E_i) = \sum \mu E_i.$$

Определение 2. Пусть τ и τ' — два разбиения множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что τ' *следует* за τ или является *измельчением* разбиения τ, и писать $\tau' \succ \tau$, если для любого $E'_j \in \tau'$ существует $E_i \in \tau$: $E'_j \subset E_i$.

Разбиения данного множества E обладают следующими свойствами:

1° если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$;

2° для любых τ_1, τ_2 существует τ: $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве разбиения τ взять множество всевозможных непустых пересечений $E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)}$, где $E_i^{(1)} \in \tau_1$, $E_j^{(2)} \in \tau_2$.

Определение 3. Пусть на измеримом множестве $E \subset \subset \mathbb{R}^n$ определена (числовая) функция f и $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — разбиение E. Отметим в каждом множестве E_i какую-либо точку $\xi^{(i)} \in E_i$. Тогда сумма

$$S_\tau(f; \xi^{(1)}, \, \ldots, \, \xi^{(i_\tau)}) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)}) \mu E_i$$

называется *интегральной суммой Римана* функции f.

Определение 4. Число I называется *интегралом Римана* функции f по измеримому множеству $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, : \, \left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)}) \mu E_i - I \right| < \varepsilon$$

при любом разбиении τ множества E с мелкостью $|\tau| < \delta$ и при любом выборе отмеченных точек.

При этом функцию f называют *интегрируемой по Риману* на множестве E.

Интеграл от функции f по множеству E обозначается символами

$$\int_E f(x) \, dx \quad \text{или} \quad \iint\limits_E \ldots \int f(x_1, \, \ldots, \, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Кратко можно записать

$$\int_E f(x) \, dx \coloneqq \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau(f; \xi_1^{(1)}, \, \ldots, \, \xi^{(i_\tau)}),$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в (ε, δ)-терминах в определении 4.

Интеграл $\int_E f(x) \, dx$ называется *кратным интегралом* при $n \geqslant 2$, *двойным интегралом* при $n = 2$, *тройным интегралом* при $n = 3$.

Напомним, что в случае $n = 1$ необходимым условием интегрируемости функции на отрезке $[a, b]$ является ограниченность этой функции на отрезке $[a, b]$. Следующий пример показывает, что при $n \geqslant 2$ условие ограниченности функции не является необходимым для интегрируемости этой функции.

Пример 1. При $n = 2$ рассмотрим множество E, имеющее вид «шарика на нитке»:

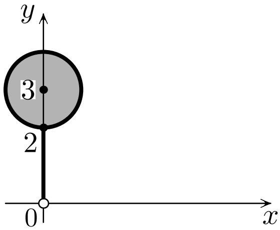


Рис. 19.1

$$E = \overline{U_1((0,3))} \cup (\{0\} \times (0,2])$$

и функцию $f\colon\ E \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Ясно, что f неограничена на E, но $\exists \iint_E f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Однако если функция интегрируема на множестве $E \subset \subset \mathbb{R}^n$, то она заведомо ограничена на внутренности E ($\operatorname{int} E$) (в частности, интегрируемая на открытом множестве функция ограничена на нём). Это утверждение вытекает из следующей теоремы, показывающей, что для измеримых множеств с некоторым дополнительным свойством интегрируемость функции влечёт за собой её ограниченность.

Теорема 1. *Пусть для множества E существует такая последовательность разбиений $\{\tau_k\}_1^\infty$ с $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$, для которой все элементы всех разбиений имеют положительную меру.*

Пусть функция f интегрируема на E.

Тогда она ограничена на E.

Доказательство по существу такое же, как в одномерном случае для $E = [a, b]$.

Упражнение 1. Пусть измеримое множество $E \subset \subset \overline{\operatorname{int} E}$. Доказать, что всякая интегрируемая на E функция ограничена на E.

Напомним, что колебанием функции f на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\omega(f; D) = \sup_{x,y \in D} |f(x) - f(y)| = \sup_D f - \inf_D f.$$

Теорема 2 (критерий интегрируемости функции). *Для интегрируемости функции f на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \; : \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ \mu E_i > 0}} \omega_i(f) \mu E_i < \varepsilon \;\; \forall \tau \; : \; |\tau| < \delta, \quad (1)$$

где $\omega_i(f) \coloneqq \omega(f; E_i)$.

Доказательство то же, что и для случая $n = 1$, $E = [a, b]$ в п. 14.2.1.

Критерий интегрируемости кратко можно записать так:

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ \mu E_i > 0}} \omega_i(f) \mu E_i = 0, \quad (2)$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в (ε, δ)-терминах в (1).

Определение 5. Пусть функция f ограничена на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — разбиение E. Пусть

$$m_i \coloneqq \inf_{E_i} f, \quad M_i \coloneqq \sup_{E_i} f.$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \mu E_i, \quad \overline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \mu E_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции f, отвечающими разбиению τ.

Ясно, что для любой интегральной суммы Римана $S_\tau(f)$ ограниченной функции f

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f).$$

Легко видеть, что

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\mu E_i.$$

С помощью последнего равенства и критерия интегрируемости (1) можно сформулировать критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу:

Теорема 3. *Для интегрируемости ограниченной функции f на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\, \tau\ :\ |\tau| < \delta.$$

Следствие 1. *Пусть ограниченная функция f интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \overline{S_\tau}(f),$$

причём

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\, \tau\ :\ |\tau| < \delta.$$

Покажем, что *функция, интегрируемая на отрезке* $[a, b]$ *в смысле определения* 14.1.2, *интегрируема на этом отрезке и в смысле определения* 4 ($n = 1$, $E = [a, b]$), так что эти два различных определения интегрируемости функции на отрезке эквивалентны.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле определения 14.1.2. Тогда она ограничена (по теореме 14.1.1), и в силу критерия интегрируемости 14.2.1 для заданного $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{[x_{j-1}, x_j]\}_1^k$ отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{k} \omega(f, [x_{j-1}, x_j])\Delta x_j < \varepsilon.$$

Пусть $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, τ_0 — совокупность тех множеств $E_i \in \tau$, которые имеют непустое пересечение больше, чем с одним отрезком $[x_{j-1}, x_j]$. Если $E_i \in \tau_0$, очевидно, $E_i \subset U_{2|\tau|}(E_0)$, где $E_0 = \{x_i\}_0^k$, $\mu E_0 = 0$. Теперь, считая, что $|f| \leqslant M$ на $[a, b]$, имеем

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f, E_i)\mu E_i = \sum_{i:E_i \in \tau \setminus \tau_0} \omega(f, E_i)\mu E_i + \sum_{i:E_i \in \tau_0} \omega(f, E_i)\mu E_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \omega(f, [x_{j-1}, x_j])\Delta x_j + 2M\mu^* U_{2|\tau|}(E_0) < \varepsilon + 2M\varepsilon,$$

причём последняя оценка имеет место для всех разбиений τ с достаточно малой мелкостью $|\tau|$ по лемме 18.2.3. В силу критерия интегрируемости (теорема 2) функция f интегрируема на $[a, b]$ в смысле определения 4.

Установим условия интегрируемости непрерывных функций.

Теорема 4. *Пусть функция f непрерывна на измеримом компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f интегрируема на E.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция f в силу теорем Вейерштрасса и Кантора ограничена и равномерно непрерывна на компакте E. Тогда её модуль непрерывности на E $\omega(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\mu E_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(|\tau|, f)\mu E_i = \omega(|\tau|, f)\mu E \to 0 \quad \text{при } |\tau| \to 0.$$

В силу критерия интегрируемости f интегрируема на E.

Теорема 5. *Функция, непрерывная и ограниченная на открытом измеримом множестве, интегрируема на нём.*

У к а з а н и е. Для доказательства можно воспользоваться леммой 18.2.3.

§ 19.2. Свойства кратного интеграла

1°. Пусть E — измеримое множество. Тогда

$$\int_E dx \coloneqq \int_E 1\,dx = \mu E.$$

2°. Пусть E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$, и пусть функция f интегрируема на E. Тогда она интегрируема и на E^*.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{E_i\}_1^{i_{\tau^*}}$ — разбиение множества E^* мелкости $|\tau^*|$. Дополним его до разбиения $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ множества E мелкости $|\tau| = |\tau^*|$. Это можно сделать, присоединив к $\{E_i\}_1^{i_{\tau^*}}$ все элементы разбиения множества $E \setminus E^*$ не превосходящей $|\tau^*|$ мелкости. Тогда

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_{\tau^*}\\ \mu E_i>0}} \omega_i(f)\mu E_i \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_\tau\\ \mu E_i>0}} \omega_i(f)\mu E_i.$$

В силу интегрируемости f на E и критерия интегрируемости правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Следовательно, и левая часть стремится к нулю при $|\tau^*| \to 0$. В силу критерия интегрируемости f интегрируема на E^*.

3°. (Аддитивность интеграла по множествам). Пусть измеримые множества F, $G \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $F \cap G = \varnothing$, $E \coloneqq$ $\coloneqq F \cup G$. Пусть функция $f\colon\ E \to \mathbb{R}$ ограничена и интегрируема на F и на G. Тогда f интегрируема на E и

$$\int_E f(x)\,dx = \int_F f(x)\,dx + \int_G f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{E_i\}$ — разбиение множества E, τ_0 — множество тех $E_i \in \tau$, для которых $E_i \cap F \neq \varnothing$, $E_i \cap G \neq \varnothing$,

$$\tau(F) = \{E_i \cap F \ :\ E_i \in \tau,\ E_i \cap F \neq \varnothing\},$$
$$\tau(G) = \{E_i \cap G \ :\ E_i \in \tau,\ E_i \cap G \neq \varnothing\}.$$

Пусть $S_\tau(f) = \sum f(x^{(i)})\mu E_i$ — произвольная интегральная сумма Римана для функции f и разбиения τ множества E

с отмеченными точками $x^{(i)}$, $i = 1, \ \ldots, i_\tau$. Пусть $S_{\tau(F)}(f)$, $S_{\tau(G)}(f)$ — интегральные суммы для сужений функции f на множества F и G соответственно, построенные по разбиениям $\tau(F)$ и $\tau(G)$ и (по возможности) по тем же отмеченным точкам, что и $S_\tau(f)$. Тогда, считая, что $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in E$, имеем

$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau(F)}(f) - S_{\tau(G)}(f)\right| \leqslant 2M \sum_{E_i \in \tau_0} \mu E_i = 2M\mu \bigcup_{E_i \in \tau_0} E_i. \quad (1)$$

Заметим, что если $E_i \in \tau_0$, то

$$E_i \subset U_{2|\tau|}(\partial F). \quad (2)$$

В самом деле, пусть $x \in E_i \cap F$, $y \in E_i \cap G$. Тогда на отрезке, соединяющем точки x и y, по лемме 18.2.1 найдется точка $z \in \partial F$. Тогда $|x - z| \leqslant |x - y| \leqslant |\tau|$.

Поскольку $\mu \partial F = 0$ в силу критерия измеримости, то из (2) и леммы 18.2.3 следует, что правая часть (1) стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Тогда и левая часть (1) стремится к нулю. Поскольку в ней

$$S_{\tau(F)}(f) \to \int_F f(x)\, dx, \quad S_{\tau(G)}(f) \to \int_G f(x)\, dx,$$

то заключаем, что $S_\tau(f) \to \int_F f(x)\, dx + \int_G f(x)\, dx$, откуда и следует утверждение 3°.

Упражнение 1. Показать, что требование ограниченности функции f на множестве E в формулировке свойства 3° нельзя отбросить.

4°. Пусть функция f интегрируема и ограничена на множестве E. При изменении её значений на подмножестве $E_0 \subset E$ меры нуль (с сохранением ограниченности) функция f остаётся интегрируемой и величина интеграла не изменяется.

Доказательство.

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{E \setminus E_0} f(x)\, dx + \int_{E_0} f(x)\, dx = \int_{E \setminus E_0} f(x)\, dx.$$

Следовательно, интегрируемость f и величина интеграла $\int_E f(x)\,dx$ не зависят от значений f на E_0.

Следствие 1. *Пусть функция f определена и ограничена на замыкании $\overline{E}$ измеримого множества E. Тогда интегралы*

$$\int_E f(x)\,dx, \quad \int_{\overline{E}} f(x)\,dx, \quad \int_{\operatorname{int} E} f(x)\,dx$$

существуют или не существуют одновременно и равны в случае их существования.

5°. (Линейность интеграла). Пусть функции f, g интегрируемы на множестве E, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда существует интеграл

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx.$$

6°. Пусть функции f, g интегрируемы и ограничены на E. Тогда их произведение fg, а если $\inf\limits_E |g| > 0$, то и частное $\dfrac{f}{g}$ интегрируемы на E.

7°. Пусть функция f интегрируема на E. Тогда и функция $|f|$ интегрируема на E и при этом

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx.$$

8°. (Интегрирование неравенств). Если функции f, g интегрируемы на E и $f \leqslant g$ на E, то

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E g(x)\,dx.$$

9°. (Полная (счётная) аддитивность интеграла по множествам). Пусть функция f интегрируема и ограничена на множестве E, а $\{E_k\}_1^\infty$ — последовательность измеримых множеств $E_k \subset E$ со свойством

$$\lim_{k\to\infty} \mu E_k = \mu E.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из оценки

$$\left|\int_E f(x)\,dx - \int_{E_k} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{E\setminus E_k} f(x)\,dx\right| \leqslant \sup_E |f|\mu(E\setminus E_k).$$

10°. Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на открытом множестве G. Пусть f непрерывна в точке $x^{(0)} \in G$ и $f(x^{(0)}) > 0$. Тогда $\int_G f(x)\,dx > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности f в точке $x^{(0)}$ существует окрестность $U_\delta(x^{(0)}) \subset G$ такая, что

$$f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2} \quad \forall\, x \in U_\delta(x^{(0)}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_{G\setminus U_\delta(x^{(0)})} f(x)\,dx + \int\limits_{U_\delta(x^{(0)})} f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x^{(0)})}{2}\mu U_\delta(x^{(0)}) > 0.$$

11°. (Теорема о среднем). Пусть функции f, g интегрируемы и ограничены на множестве E. Если функция g не меняет знака на E и $m \leqslant f \leqslant M$ на E, то существует такое число $\lambda \in [m, M]$, что

$$\int_E f(x)g(x)\,dx = \lambda \int_E g(x)\,dx.$$

Если при этом E — область или замкнутая область, а функция f непрерывна на E, то

$$\exists\, c \in E \;:\; \int_E f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_E g(x)\,dx.$$

В частности, при $g \equiv 1$

$$\int_E f(x)\,dx = f(c)\mu E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на использовании свойства 8°, теоремы Коши 10.5.4 о промежуточных значениях и следствия из неё.

§ 19.3. Сведение кратного интеграла к повторному

Теорема 1. *Пусть функция f интегрируема по прямоугольнику $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ и интеграл $F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ существует для каждого $y \in [c, d]$.*

Тогда функция F интегрируема по отрезку $[c, d]$ и справедливо равенство

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy. \tag{1}$$

Правая часть равенства (1) называется *повторным интегралом.*

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$, $\tau_1 = \{[x_{i-1}, x_i]\}_1^k$, $\tau_2 = \{[y_{j-1}, y_j]\}_1^m$ — разбиения отрезков соответственно $[a, b]$ и $[c, d]$ на отрезки. Тогда $\tau = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k, \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ — разбиение P на прямоугольники.

Введём обозначения

$$m_{ij} = \inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f, \quad M_{ij} = \sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f.$$

Тогда при $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$

$$\sum_{j=1}^m F(\eta_j)\Delta y_j = \sum_{j=1}^m \int_a^b f(x, \eta_j)\,dx\Delta y_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_j)\,dx\Delta y_j,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^m F(\eta_j)\Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j. \tag{2}$$

Левая и правая части неравенства (2) представляют собой соответственно нижнюю $\underline{S_\tau}(f)$ и верхнюю $\overline{S_\tau}(f)$ интегральные суммы Дарбу функции f. При $|\tau| \to 0$ каждая из них стремится к $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$ (см. следствие из теоремы 19.1.3). Следовательно, средняя часть неравенства (2), представляющая собой интегральную сумму Римана $S_{\tau_2}(F)$, имеет предел при $|\tau_2| \to 0$, являющийся по определению интегралом $\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$. Предельным переходом в неравенстве (2) получаем (1).

З а м е ч а н и е. Простой заменой обозначения переменных в теореме 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 1′. *Пусть функция f интегрируема по прямоугольнику $P = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ и интеграл $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ существует для каждого $x \in [a,b]$.*

Тогда функция F интегрируема по отрезку $[a,b]$ и справедливо равенство
$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx. \tag{3}$$

Если выполнены условия как теоремы 1, так и теоремы $1'$, то
$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$
Последняя формула справедлива, в частности, если функция f непрерывна на P.

Распространим результаты теорем 1, $1'$, полученные для прямоугольника P на области, которые назовем элементарными.

Определение 1. Множество
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}, \tag{4}$$
где функции φ, ψ непрерывны на $[a,b]$ и $\varphi \leqslant \psi$ на $[a,b]$, назовем *элементарным относительно оси Oy*. Заметим, что Ω — измеримое замкнутое множество.

Теорема 2. *Пусть множество Ω элементарно относительно оси Oy , функция f интегрируема на Ω и при каждом $x \in [a,b]$ существует интеграл $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$.*

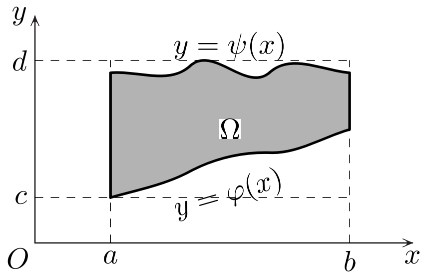


Рис. 19.3

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$c = \min_{[a,b]} \varphi, \quad d = \max_{[a,b]} \psi.$$

Тогда $\Omega \subset P = [a,b] \times [c,d]$.

Рассмотрим функцию $\tilde{f}\colon P \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{при } (x,y) \in \Omega, \\ 0 & \text{при } (x,y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Так как функция f интегрируема и ограничена на Ω, то функция $\tilde{f}$, интегрируемая на Ω и на $P \setminus \Omega$, интегрируема на P.

Аналогично для каждого $x \in [a,b]$ обосновывается существование интеграла $\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$.

По теореме $1'$

$$\int_P \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\,dx.$$

Подставляя в это равенство выражение $\tilde{f}$ через f, получаем (5).

Следствие 1. *Пусть функция f непрерывна на элементарном относительно оси Oy множестве Ω вида* (4). *Тогда справедливо равенство* (5).

З а м е ч а н и е. Пусть множество Ω вида (4) является элементарным не только относительно оси Oy, но и относительно оси Ox, т. е. наряду с описанием (4) имеет место ещё и описание

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \leqslant y \leqslant d, \quad \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}.$$

Тогда для непрерывной на Ω функции f справедливо равенство

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{6}$$

выражающее собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

Теорема 2 и следствие из неё могут быть распространены на n-кратные интегралы.

Определение 2. Множество

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n) \,:\, x' \in E,$$
$$\varphi(x') \leqslant x_n \leqslant \psi(x')\},$$

где $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — измеримое замкнутое множество, а функции φ, ψ непрерывны на E, называется *элементарным относительно оси Ox_n*.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на элементарном относительно оси Ox_n множестве Ω. Тогда*

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_E \int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} f(x', x_n)\, dx_n\, dx'.$$

§ 19.4. Геометрический смысл модуля якобиана отображения

В этом параграфе изучается отображение

$$\mathcal{F} \ : \ \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

открытого множества G двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое множество G^* евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$:

$$\mathbb{R}^2_{uv} \supset \underset{\text{откр.}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр.}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{xy}.$$

Отображение обладает следующими свойствами:

1° $\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает G на G^*;

2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на G;

3° $J(u,v) \coloneqq \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ на G.

Лемма 1.[1] *Пусть E — отрезок с концами в точках (u_1,v_1), (u_2,v_2), $E \subset G$,*

$$\max_E \max\left\{|x'_u|,\ |x'_v|,\ |y'_u|,\ |y'_v|\right\} \leqslant \varkappa.$$

Тогда

$$|\mathcal{F}(u_2,v_2) - \mathcal{F}(u_1,v_1)| \leqslant 2\varkappa|(u_2,v_2) - (u_1,v_1)| = \\ = 2\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x_i,y_i) = \mathcal{F}(u_i,v_i)$, $i = 1,2$. Тогда в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$|x_2 - x_1| = \left|x\ (u_1 + t(u_2-u_1),\ v_1 + t(v_2-v_1))\big|_{t=0}^1\,\right| = \\ = \left|x'_u(\tilde u,\tilde v)(u_2-u_1) + x'_v(\tilde u,\tilde v)(v_2-v_1)\right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}.$$

[1] Используется лишь при доказательстве необязательной теоремы 19.5.2.

Аналогично

$$|y_2 - y_1| \leqslant \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2}.$$

Из двух последних оценок следует (2).

Лемма 2. *Пусть ограниченное множество $E \subset \overline{E} \subset G$, и пусть*

$$Q \coloneqq \{(u,v) \in G \;:\; u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + h, \quad v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + h\}.$$

Тогда
1° $\partial\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(\partial E)$;
2° $\mathcal{F}(Q)$ *— замкнутое измеримое множество;*
3° *если $\mu E = 0$, то $\mu\mathcal{F}(E) = 0$;*
4° *если E измеримо, то $\mathcal{F}(E)$ измеримо.*

Доказательство. В силу теоремы о локальном взаимно однозначном соответствии для точек $(\bar{u},\bar{v}) \in G$ и $(\bar{x},\bar{y}) = \mathcal{F}(\bar{u},\bar{v})$ существуют их окрестности, находящиеся друг с другом во взаимно однозначном соответствии, причём эти окрестности можно брать сколь угодно малыми по диаметру. Следовательно, точки $(\bar{u},\bar{v})$ и $(\bar{x},\bar{y})$ для E и $\mathcal{F}(E)$ могут являться внутренними, или граничными, или предельными точками лишь одновременно. Отсюда следуют утверждение 1° леммы и замкнутость множества $\mathcal{F}(Q)$. Ограниченность $\mathcal{F}(Q)$ следует из теоремы Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции), применённой к $x(u,v)$, $y(u,v)$. Заметим, что $\partial\mathcal{F}(Q) = \mathcal{F}(\partial Q)$ состоит из четырёх гладких кривых. Поэтому $\mu\partial\mathcal{F}(Q) = 0$. В силу критерия измеримости множество $\mathcal{F}(Q)$ измеримо, и свойство 2° установлено.

Свойства 3° и 4° будут использованы лишь при доказательстве теоремы 19.5.2.

Установим свойство 3°. Покажем, что $\mu\mathcal{F}(E) = 0$.

Пусть $\rho > 0$ — такое число, что $\overline{U_\rho(E)} \subset G$. В качестве ρ можно взять $\rho = 1$, если $G = \mathbb{R}^2$, и $\rho = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{E}, \mathbb{R}^2 \setminus G)$, если $G \neq \mathbb{R}^2$. В последнем случае $\rho > 0$ в силу положительности расстояния между двумя замкнутыми непересекающимися множествами $\overline{E}$ и $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \bigcup_1^m P_k$ — блочное множество (т.е. составленное из конечного числа попарно непересекающихся блоков), $B_\varepsilon \supset E$, $\mu B_\varepsilon < \varepsilon$. Блок P, $(a, b) \times (c, d) \subset P \subset$ $\subset [a, b] \times [c, d]$, будем называть *регулярным*, если

$$\frac{1}{2}(b - a) \leqslant d - c \leqslant 2(b - a).$$

Можно считать, что в представлении $B_\varepsilon = \bigcup_1^m P_k$ все блоки P_k регулярны и $\operatorname{diam} P_k \leqslant \rho$ (если это не так с самого начала, то каждый из P_k можно разбить на регулярные блоки с диаметром, не превосходящим ρ, и отбросить те из них, которые не пересекаются с E). Тогда

$$B_\varepsilon \subset \overline{U_\rho(E)} \subset G.$$

Пусть $\varkappa = \max\limits_{\overline{U_\rho(E)}} \max\{|x'_u|,\ |x'_v|,\ |y'_u|,\ |y'_v|\}$.

В силу (2) образ каждого из блоков P_k с длиной меньшей стороны h_k содержится в некотором замкнутом квадрате (блоке) R_k с длиной стороны $2\sqrt{5}\varkappa h_k$, так что

$$\mathcal{F}(P_k) \subset R_k, \quad \mu R_k \leqslant 20\varkappa^2 \mu P_k.$$

Отсюда и из полуаддитивности меры следует, что

$$\mu^* \mathcal{F}(E) \leqslant \mu \bigcup_{k=1}^m R_k \leqslant \sum_{k=1}^m \mu R_k \leqslant 20\varkappa^2 \sum_{k=1}^m \mu P_k = \\ = 20\varkappa^2 \mu B_\varepsilon < 20\varkappa^2 \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\mu \mathcal{F}(E) = \mu^* \mathcal{F}(E) = 0.$$

Свойство 4° следует из ограниченности $\mathcal{F}(E) \subset \mathcal{F}(\overline{E})$, вытекающей из теоремы Вейерштрасса, свойств 1°, 3° и критерия измеримости.

Теорема 1 (геометрический смысл модуля якобиана отображения). *Пусть* $(u_0, v_0) \in G$, $h_0 > 0$,

$$G \supset Q_h \coloneqq \\ \coloneqq \{(u, v) : u_h \leqslant u \leqslant u_h + h,\ v_h \leqslant v \leqslant v_h + h\} \ni (u_0, v_0)$$

при всех $h \in (0, h_0]$.

Тогда

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{\mu\mathcal{F}(Q_h)}{\mu Q_h} = |J(u_0, v_0)|. \tag{3}$$

Доказательство будет дано ниже в виде следствия из теоремы 19.5.1 о замене переменных в интеграле. В конце § 19.5 будет приведено обобщение теоремы 1 на n-мерный случай. Частично геометрический смысл модуля якобиана отображения поясняет

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1 *при* $h \to 0$

$$\mu\mathcal{F}(Q_h) \leqslant |J(u_0, v_0)|\mu Q_h + o(h^2). \tag{4}$$

Доказательство. Подчеркнём, что точка (u_0, v_0) необязательно является центром Q_h. Отображение $\mathcal{F}$ дифференцируемо, поэтому

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \\ \qquad + \varepsilon_1(u - u_0,\ v - v_0)\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}, \\ y = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \\ \qquad + \varepsilon_2(u - u_0,\ v - v_0)\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}, \end{cases}$$

где $a_{11} = x'_u(u_0, v_0)$, $a_{12} = x'_v(u_0, v_0)$, $a_{21} = y'_u(u_0, v_0)$, $a_{22} = y'_v(u_0, v_0)$, $\varepsilon_i(u - u_0, v - v_0) \to 0$ при $(u, v) \to (u_0, v_0)$.

Сравним отображение $\mathcal{F}$ с линейным отображением

$$\hat{\mathcal{F}} : \begin{cases} x = \hat{x}(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ y = \hat{y}(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0). \end{cases}$$

Из курса аналитической геометрии известно, что

$$\frac{\mu\hat{\mathcal{F}}(Q_h)}{\mu Q_h} = \left| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right| = |J(u_0, v_0)|.$$

Сравним параллелограмм $\hat{\mathcal{F}}(Q_h)$ и криволинейный параллелограмм $\mathcal{F}(Q_h)$ (см. рис. 19.4). Положим

$$\varepsilon(h) \coloneqq \sup_{\substack{|u-u_0|\leqslant h,\\ |v-v_0|\leqslant h}} \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}, \quad \varepsilon(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Тогда для $(u, v) \in Q_h$ справедливы оценки

$$|x(u,v) - \hat{x}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}h, \quad |y(u,v) - \hat{y}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}h.$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\mathcal{F}(Q_h) \subset U_{3\varepsilon(h)h}\left(\hat{\mathcal{F}}(Q_h)\right). \tag{5}$$

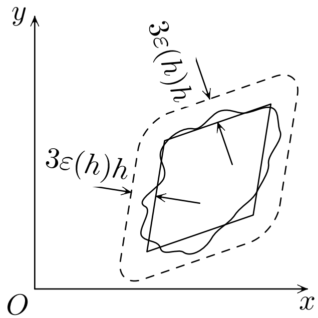


Рис. 19.4

Поэтому

$$\mu\mathcal{F}(Q_h) \leqslant \mu^* U_{3\varepsilon(h)h}\left(\hat{\mathcal{F}}(Q_h)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mu\hat{\mathcal{F}}(Q_h) + o(h^2) =$$
$$= |J(u_0, v_0)|h^2 + o(h^2),$$

и (4) установлено.

З а м е ч а н и е. Оценка (4) и её доказательство сохраняются и при $J(u_0, v_0) = 0$, если в левой части (4) вместо $\mu\mathcal{F}(Q_h)$ написать $\mu^*\mathcal{F}(Q_h)$.

§ 19.5. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 1. *Пусть*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

— отображение открытого измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое измеримое множество $G^* \subset \mathbb{R}^2_{xy}$:

$$\mathbb{R}^2_{u,v} \supset \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{x,y},$$

со свойствами:

1° *$\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает G на G^*;*

2° *$\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на G.*

3° $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ *на* G*;*

Пусть

4° *функция* f *непрерывна и ограничена на* G^**;*

5° *произведение* $f(\mathcal{F})J$ *ограничено на* G*, где*

$$f(\mathcal{F})(u,v) \coloneqq f(x(u,v), y(u,v)).$$

Тогда

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} f(x(u,v),\ y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \quad (1)$$

Доказательство. Обе части равенства (1) существуют в силу непрерывности и ограниченности подынтегральных выражений на открытых измеримых множествах интегрирования (см. теорему 19.1.5).

До конца доказательства будем считать, что $f > 0$ на G^*. Это ограничение не снижает общности. В самом деле, если

$$M > \sup_{G^*} |f|, \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = f(x) + M > 0, \quad f_2(x) = M > 0,$$

и если равенство (1) установлено для функций f_1 и f_2, то оно оказывается верным и для $f = f_1 - f_2$.

1-й шаг. Покажем, что

$$\iint\limits_{Q} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(Q)} f(x,y)\,dx\,dy, \quad (2)$$

где $Q = \{(u,v)\colon\ u_1 \leqslant u \leqslant u_1 + h,\ v_1 \leqslant v \leqslant v_1 + h\} \subset G$. Рассуждая от противного, предположим, что равенство (2) нарушено, т. е. при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$(1+\varepsilon_0)\iint\limits_{Q} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(Q)} f(x,y)\,dx\,dy. \quad (3)$$

Разобьём Q на четыре равных замкнутых квадрата. Обозначим через $Q^{(1)}$ тот из них, для которого (при $k = 1$)

$$(1+\varepsilon_0)\iint\limits_{Q^{(k)}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(Q^{(k)})} f(x,y)\,dx\,dy. \quad (4)$$

Такой квадрат $Q^{(1)}$ существует: предположив противное и сложив 4 неравенства, противоположных неравенству типа (4) при $k=1$, входим в противоречие с (3). Разобьём $Q^{(1)}$ на 4 равных замкнутых квадрата и обозначим через $Q^{(2)}$ тот из них, для которого выполняется (с $k=2$) неравенство (4). Продолжая деление, получим систему вложенных квадратов $\{Q^{(k)}\}_1^\infty$ со свойством (4). В силу теоремы 1.3.1 о вложенных отрезках (таковыми являются проекции $Q^{(k)}$) существует точка $(u_0,v_0)\in Q^{(k)}$ при всех $k\in\mathbb{N}$. Из (4) в силу теоремы о среднем для интеграла имеем

$$(1+\varepsilon_0)f(x(\bar u_k,\bar v_k),\ y(\bar u_k,\bar v_k))|J(\bar u_k,\bar v_k)|\mu Q^{(k)} \leqslant \\ \leqslant f(\tilde x_k,\tilde y_k)\mu\mathcal{F}(Q^{(k)})$$

при некоторых $(\tilde x_k,\tilde y_k)\in\mathcal{F}(Q^{(k)})$, $(\bar u_k,\bar v_k)\in Q^{(k)}$.

Оценивая $\mu\mathcal{F}(Q^{(k)})$ с помощью леммы 19.4.3, при $k\to\infty$ имеем

$$(1+\varepsilon_0)[f(x_0,y_0)+o(1)][|J(u_0,v_0)|+o(1)] \\ \leqslant [f(x_0,y_0)+o(1)]\,[|J(u_0,v_0)|+o(1)]\,,$$

что неверно при $f>0$, $|J|>0$. Таким образом, неравенство (2) установлено.

2-й шаг. Пусть A — блочное множество, составленное из попарно не пересекающихся квадратных блоков (см. определение 18.1.2), $\overline{A}\subset G$. В силу аддитивности интеграла по множествам интегрирования почленным сложением нескольких неравенств вида (2) получаем, что

$$\iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \\ \geqslant \iint\limits_A f(x(u,v),\ y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(A)} f(x,y)\,dx\,dy. \quad (5)$$

<u>3-й шаг.</u> Пусть A^* — блочное множество, причём $A^* \subset \subset \overline{A^*} \subset G^*$. Покажем, что

$$\iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{A^*} f(x,y)\,dx\,dy. \quad (6)$$

В силу (5) достаточно установить, что найдется такое составленное из квадратных блоков блочное множество $A \subset \subset \overline{A} \subset G$, что

$$\mathcal{F}(A) \supset \overline{A^*}, \quad \text{т.е.} \quad \mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*}) \subset A \subset G. \quad (7)$$

Покажем это. Множество $\mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*})$ замкнуто по лемме 19.4.2. Следовательно,

$$\operatorname{dist}(\mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*}),\ \mathbb{R}^2_{u,v} \setminus G) = \rho > 0.$$

Построим множество A следующим образом. Разобьём плоскость $\mathbb{R}^2_{u,v}$ с помощью координатной сетки на квадраты (блоки) с диагональю, не превосходящей $\frac{\rho}{2}$, и в качестве A возьмём объединение всех таких блоков, имеющих непустое пересечение с $\mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*})$. Соотношение (7), очевидно, выполнено.

<u>4-й шаг.</u> Установим неравенство

$$\iint\limits_G f(x(u,v),\ y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy. \quad (8)$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ легко можно построить блочное множество A^*_k со свойствами

$$A^*_k \subset \overline{A^*_k} \subset G^*, \quad \mu(G^* \setminus A^*_k) < \frac{1}{k}.$$

Поскольку $0 < f \leqslant M$, то

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{A^*_k} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G^* \setminus A^*_k} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant M\frac{1}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \quad (9)$$

Подставив в (6) A^*_k вместо A^* и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем в силу (9) оценку (8).

<u>5-й шаг.</u> Установим равенство (1). Применим доказанное неравенство (8) к обратному отображению $\mathcal{F}^{-1}$ (якобиан которого $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{J(u,v)}$ непрерывен на $\mathcal{F}(G)$) и к функции $g(u,v) \coloneqq f(x(u,v),\, y(u,v))|J(u,v)|$. Получим

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{G} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \tag{10}$$

Неравенство (10) противоположно неравенству (8). Из него и из (8) следует (1). Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 19.4.1

$$\mu G^* = \iint\limits_{G^*} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{G} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 19.4.1. Применим (11) к $\operatorname{int} Q_h$. По теореме о среднем для интеграла имеем

$$\mu\mathcal{F}(Q_h) = |J(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)|\,\mu Q_h,$$
$$Q_h \ni (\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) \to (u_0, v_0) \text{ при } h \to 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 19.4.1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3° *теоремы* 1 *и, кроме того, функция* f *ограничена на* G^*, *а произведение*

$$f(x(u,v),\, y(u,v))J(u,v) \text{ ограничено на } G.$$

Тогда, если существует один из интегралов в (1), *то существует и другой, и справедливо равенство* (1).

Доказательство. Рассмотрим для определённости лишь случай, когда существует интеграл из правой части (1).

Будем считать, что $f \geqslant 0$, так как общий случай функции f произвольного знака немедленно сводится к этому с помощью представления $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \geqslant 0$ и $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f) \geqslant 0$. Пусть Q — тот же квадрат, что и в (2).

Покажем, что существует интеграл из правой части (2) и что справедливо неравенство (2). Из ограниченности $|J|^{-1}$ на Q и существования интеграла в левой части (2) следует существование интеграла $\iint_Q \tilde{f}(u,v)\,du\,dv$, где

$$\tilde{f}(u,v) \coloneqq f(x(u,v),\ y(u,v)) = \tilde{f}|J| \cdot \frac{1}{|J|}.$$

Пусть $Q^* = \mathcal{F}(Q)$,

$$\tau = \tau(Q) = \{E_i\}_1^{i_\tau},\ \tau^* = \tau^*(Q^*) = \{E_i^*\}_1^{i_\tau} = \{\mathcal{F}(E_i)\}_{i=1}^{i_\tau} \quad (12)$$

— разбиения Q и Q^* соответственно. В силу леммы 19.4.1, применённой к отображению $\mathcal{F}^{-1}$, $\operatorname{diam} E_i \leqslant K \operatorname{diam} E_i^*$ при некоторой постоянной K, откуда

$$|\tau| \leqslant K|\tau^*|. \quad (13)$$

Пусть, $\omega(\tilde{f}, E_i)$, $\omega(f, E_i^*)$ — колебания функций $\tilde{f}$, f на E_i, E_i^* соответственно. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f, E_i^*)\mu E_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\tilde{f}, E_i) \iint\limits_{E_i} |J(u,v)|\,du\,dv \leqslant$$
$$\leqslant \max_Q |J| \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\tilde{f}, E_i)\mu E_i \to 0 \quad \text{при} \quad |\tau^*| \to 0,$$

поскольку при этом (см. (13)) $|\tau| \to 0$.

В силу критерия интегрируемости существует интеграл в правой части (2). Установим теперь само неравенство (2). Воспользуемся разбиениями (12), в которых множества E_i будем считать замкнутыми. Пусть в точке (u_i, v_i) достигается $\max\limits_{E_i} |J| = |J(u_i, v_i)|$, $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i, y_i)\mu E_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i, y_i) \iint\limits_{E_i} |J(u,v)|\,du\,dv \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J(u_i, v_i)|\mu E_i.$$

Переходя в этом неравенстве для сумм Римана к пределу при $|\tau| \to 0$ (а значит, и при $|\tau^*| \to 0$), приходим к неравенству (2).

Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 1, если использовать свойство полной аддитивности интеграла по множествам в более общей форме, чем в свойстве 9° § 19.2. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть G, G_i — измеримые множества n-мерного евклидова пространства, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$, $\mu(G \setminus G_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть функция f ограничена на G и интегрируема на любом G_i.*

Тогда f интегрируема на G и

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{G_i} f\,dx = \int\limits_G f\,dx.$$

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Приведём обобщения теорем 19.4.1, 1, 2 на n-мерный случай.

Через $\mathcal{F}$: $(x = x(t))$ обозначим отображение

$$\mathbb{R}^n_t \supset \underset{\text{откр.}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр.}}{G^*} \subset \mathbb{R}^n_x$$

открытого множества G евклидова пространства $\mathbb{R}^n_t$ на открытое множество $G^* \subset \mathbb{R}^n_x$ со свойствами:

1° $\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает G на G^*;

2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на G;

3° $J(t) = \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)} \neq 0$ на G.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, *и пусть $t^{(0)} \in G$, $G \supset Q_h = \{t\colon t_i^{(h)} \leqslant t_i \leqslant t_i^{(h)} + h,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \ni$ $\ni t^{(0)}$ при всех $h \in (0, h_0]$.*

Тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu\mathcal{F}(Q_h)}{\mu Q_h}=|J(t^{(0)})|.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, G, G^* *— открытые измеримые множества, функция* f *непрерывна и ограничена на* G^*, *произведение* $f(x(t))J(t)$ *ограничено на* G.

Тогда

$$\int_{G^*} f(x)\,dx=\int_G f(x(t))|J(t)|\,dt.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, G, G^* *— открытые измеримые множества, якобиан* J *ограничен на* G. *Тогда*

$$\mu G^*=\int_{G^*} dx=\int_G |J(t)|\,dt.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, G, G^* *— открытые измеримые множества, функция* f *ограничена на* G, *произведение* $f(x(t))J(t)$ *ограничено на* G.

Тогда

$$\int_{G^*} f(x)\,dx=\int_G f(x(t))|J(t)|\,dt,$$

если хотя бы один из этих интегралов существует.

Доказательства теорем аналогичны приведённым выше для случая $n=2$.

Глава 20
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 20.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана гладкая кривая

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) \,:\, a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t)) \,:\, a \leqslant t \leqslant b\}, \quad (1)$$

т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек (последнее условие означает, что $|r'(t)|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 \ \forall\, t \in [a, b]$).

Определение 1. Пусть числовая функция F определена на множестве Γ. Тогда

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds \coloneqq \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}\,'(t)|\, dt \qquad (2)$$

называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции F по кривой Γ.

С помощью криволинейных интегралов первого рода можно найти массу материальной кривой по её линейной плотности, координаты центра тяжести кривой, моменты инерции.

Установим некоторые свойства криволинейного интеграла (2).

1°. Для существования интеграла $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x(t), y(t), z(t))$ (как функция переменного t) была интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В частности, если F непрерывна на Γ (см. определение 10.5.2), то $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$ существует.

Доказательство очевидно.

2°. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации гладкой кривой Γ.

Доказательство. Пусть $t = t(\tau)$ — допустимая замена параметра на Γ (см. § 8.2), т.е. t: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a, b]$, функция t непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $t' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ ($t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$ при $t' > 0$; $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$ при $t' < 0$), $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(t(\tau))$. Тогда

$$\Gamma = \{\vec{\rho}(\tau) \,:\, \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Сделав замену переменного в интеграле, получаем

$$\int_\alpha^\beta F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))|\vec{\rho}\,'(\tau)|\, d\tau =$$
$$= \int_\alpha^\beta F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t(\tau))\right| |t'(\tau)|\, d\tau =$$
$$= (\operatorname{sgn} t') \int_\alpha^\beta F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t(\tau))\right| t'(\tau)\, d\tau =$$
$$= (\operatorname{sgn} t') \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} F(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|\, dt =$$
$$= \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|\, dt.$$

Замечание. Последняя замена переменного обоснована ранее лишь для непрерывной функции F (теорема 14.5.1). Для обоснования этой замены переменного для интегрируемой функции $F(x(t), y(t), z(t))$ достаточно сослаться на следующее обобщение специального случая теоремы 14.5.1.

Теорема 1. *Пусть функция φ' непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.*

Тогда из существования интеграла в одной из частей равенства

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \tag{3}$$

следует существование интеграла в другой его части и справедливость равенства (3).

Эта теорема формально содержится в теореме 19.5.2, её доказательство можно получить непосредственно в виде упрощённого аналога доказательства теоремы 19.5.2.

Следствие. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.*

В самом деле, если Γ из (1) не только гладкая, а гладкая ориентированная кривая (её ориентация определяется возрастанием параметра t), то замена параметра $t = t(\tau) = -\tau$ ($-b \leqslant \tau \leqslant -a$) меняет на ней ориентацию на противоположную. В силу свойства 2° величина криволинейного интеграла, вычисленного с помощью параметра τ, та же, что и вычисленного с помощью исходного параметра t.

Заметим, что гладкая кривая является спрямляемой, и в качестве допустимого параметра можно взять переменную длину её дуги S, отсчитываемую от $\hat{r}(a)$. Тогда Γ задаётся следующим образом:

$$\Gamma = \{\vec{r}(s) \,:\, 0 \leqslant s \leqslant S\} = \{(x(s), y(s), z(s)) \,:\, 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

где S — длина кривой, а интеграл (2) принимает вид

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \int_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds. \tag{4}$$

3° *$\int_\Gamma ds = S$, где S — длина дуги Γ.*

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (4) при $F = 1$.

4° *$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} F(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\Delta s_i$, где $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[0, S]$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ — длина дуги кривой Γ от точки $\hat{r}(s_{i-1})$ до точки $\hat{r}(s_i)$, $s_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant s_i$.*

Для доказательства заметим, что под знаком предела стоит интегральная сумма Римана интеграла из правой части (4), так что по определению определённого интеграла этот предел равен интегралу из правой части (4).

З а м е ч а н и е. Часто криволинейный интеграл первого рода определяют формулой (4). В этом случае от кривой Γ требуется лишь свойство быть спрямляемой.

§ 20.2. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t)\ :\ a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t))\ :\ a \leqslant t \leqslant b\} \quad (1)$$

— гладкая *ориентированная* кривая в трёхмерном пространстве, $A = \hat{r}(a)$ — её начало, $B = \hat{r}(b)$ — её конец. Часто такую кривую обозначают символом $\overset{\frown}{AB}$. Её единичный вектор касательной

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \qquad (2)$$

(направленный в сторону возрастания параметра на кривой) непрерывно зависит от параметра t.

Определение 1. Пусть в $\mathbb{R}^3$ фиксирована прямоугольная декартова система координат и на множестве Γ задано векторное поле (т. е. вектор-функция) $\vec{a} = (P, Q, R)$. Тогда

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \coloneqq$$

$$\coloneqq \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt = \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}')\,dt \quad (3)$$

называется *криволинейным интегралом второго рода* от векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ по кривой Γ. Интеграл (3) часто обозначают также символом $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$.

В частности, когда лишь одна компонента векторного поля $\vec{a}$ отлична от нуля, получаем следующие криволинейные интегралы второго рода от функций (соответственно P, Q, R):

$$\int_\Gamma P\,dx \coloneqq \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt, \qquad (4)$$

$$\int_{\Gamma} Q\,dy := \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\int_{\Gamma} R\,dz := \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt. \tag{6}$$

С помощью криволинейных интегралов второго рода можно вычислить работу силы при движении точки по кривой в силовом поле.

Установим некоторые свойства криволинейного интеграла второго рода.

1°. Для существования интеграла (3) достаточно, чтобы функции $P(x(t),\ y(t),\ z(t))$, $Q(x(t),\ y(t),\ z(t))$, $R(x(t),\ y(t),\ z(t))$ (как функции переменного t) были интегрируемы на отрезке $[a,b]$.

В частности, если поле $\vec{a} = (P,Q,R)$ непрерывно на Γ, то $\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ существует.

2°. (Выражение криволинейного интеграла второго рода через криволинейный интеграл первого рода).

$$\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_{\Gamma}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\,ds. \tag{7}$$

Для обоснования достаточно в (3) заменить $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ на равные им величины:

$$x' = \frac{dx}{ds}|\vec{r}\,'| = \cos\alpha|\vec{r}\,'|,$$
$$y' = \frac{dy}{ds}|\vec{r}\,'| = \cos\beta|\vec{r}\,'|,$$
$$z' = \frac{dz}{ds}|\vec{r}\,'| = \cos\gamma|\vec{r}\,'|,$$

где штрих означает взятие производной по t, и сравнить полученный интеграл с криволинейным интегралом (20.1.2).

3°. Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации гладкой кривой с фиксированной ориентацией.

Доказательство такое же, как для криволинейного интеграла первого рода. Следует лишь учесть дополнительное требование $t'(\tau) > 0$ на допустимую замену параметра $t = t(\tau)$, означающее сохранение ориентации кривой вида (1) при переходе к её параметрическому заданию с помощью параметра τ.

4° Криволинейный интеграл второго рода меняет знак на противоположный при изменении ориентации кривой Γ на противоположную.

Для обоснования воспользуемся равенством (7). Напомним, что интеграл первого рода не меняется при изменении ориентации кривой. В то же время в (7) множители $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, а значит, и все подынтегральное выражение, меняют знак на противоположный.

Следовательно, и интеграл в правой части (7) меняет знак на противоположный.

5° Если $A = (x(a), y(a), z(a))$, $B = (x(b), y(b), z(b))$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dx = x(b) - x(a), \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dy = y(b) - y(a), \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dz = z(b) - z(a).$$

6° Криволинейные интегралы как первого, так и второго рода обладают свойством *аддитивности относительно кривой интегрирования.*

Поясним это свойство на примере интеграла второго рода. Пусть Γ — кривая (1), $a < c < b$,

$$\Gamma_1 = \{\vec{r}(t) \, : \, a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma_2 = \{\vec{r}(t) \, : \, c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Тогда

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\Gamma_1} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} (\vec{a}, d\vec{r}),$$

если интеграл слева или оба интеграла справа существуют.

Это свойство следует из выражения (3) криволинейного интеграла второго рода через определённый интеграл и аддитивности определённого интеграла относительно отрезков интегрирования.

Обобщим понятие криволинейных интегралов первого и второго рода на случай интегрирования по кусочно гладким кривым.

Определение 2. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кусочно гладкая (ориентированная) кривая, $a = a_0 < a_1 < \ \ldots < < a_k = b$, $\Gamma_i = \{\vec{r}(t)\colon\ a_{i-1} \leqslant t \leqslant a_i\}$ $(i = 1,\ \ldots, k)$ — гладкие (ориентированные) кривые.

Тогда

$$\int_\Gamma F\,ds \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F\,ds$$

$$\left(\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} (\vec{a}, d\vec{r})\right),$$

если каждый из интегралов в правой части равенств существует.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана ориентированная кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $|\tau| = = \max(t_i - t_{i-1})$ — мелкость разбиения. Пусть Λ_τ — ломаная с вершинами в точках $\hat{r}(t_i)$, последовательно соединённых её звеньями. Такая ломаная называется *вписанной* в кривую Γ. Ломаную Λ_τ также будем считать ориентированной (при движении точки по ней её вершины проходятся в порядке возрастания чисел i, $\hat{r}(a)$ — начало ломаной, $\hat{r}(b)$ — её конец).

Лемма 1 (об аппроксимации криволинейного интеграла). *Пусть* $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *— гладкая ориентированная кривая в* $\mathbb{R}^3$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ *— разбиение отрезка* $[a, b]$, Λ_τ *— вписанная в* Γ *ломаная.*

Пусть E — компакт в $\mathbb{R}^3$ (т. е. ограниченное замкнутое множество), содержащий Γ и Λ_τ при всех достаточно малых $|\tau|$.

Пусть на E заданы непрерывные функции P, Q, R. Тогда

$$\lim_{|\tau|\to 0}\int_{\Lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Доказательство проведём лишь для случая $Q \equiv \equiv R \equiv 0$. Положим $A_i = \hat{r}(t_i)$, $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i} = \{\vec{r}(t)\colon t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, через $\overline{A_{i-1}A_i}$ обозначим звено вписанной ломаной с началом в A_{i-1} и с концом в A_i. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на $[a, b]$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при произвольном разбиении τ, $|\tau| < \delta$, $\Lambda_\tau \subset E$,

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_i)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [t_{i-1}, t_i], \quad \forall\, i = 1, \ldots, i_\tau, \tag{8}$$

так что кривые $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ и хорды $\overline{A_{i-1}A_i}$ лежат в $E \cap U_\varepsilon(A_{i-1})$.

Зададим произвольно $\eta > 0$. В силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности P на E существует $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ такое, что

$$|P(M) - P(A_i)| < \eta, \qquad \text{если} \quad M \in E \cap U_\varepsilon(A_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, i_\tau. \tag{9}$$

Будем считать, что $|\tau| < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбрано по $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$, так что выполняются оценки (8), (9). Оценим разность интегралов

$$\Delta_i \coloneqq \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}} P\,dx - \int\limits_{\overline{A_{i-1}A_i}} P\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}} P\,dx =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}} (P(x,y,z) - P(A_i))\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}} P(A_i)\,dx,$$

где $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_{i-1}A_i}$ означает контур, составленный из дуги $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ и её хорды.

Последний интеграл равен нулю в силу свойства 5° криволинейных интегралов второго рода.

В силу (9), (7) и свойства 3° из § 20.1

$$|\Delta_i| < \eta 2(s(t_i) - s(t_{i-1})),$$

где $s(t)$ — переменная длина дуги Г, отсчитываемая от её начала. Следовательно,

$$\left|\int_{\Lambda_\tau} P\,dx - \int_\Gamma P\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta_i\right| < 2\eta S,$$

где S — длина дуги Г.

В силу произвольности $\eta > 0$ приходим к утверждению леммы.

§ 20.3. Формула Грина

При изучении криволинейных интегралов рассматривались интегралы по кривой, лежащей в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. В частности, кривая может лежать в плоскости (такая кривая называется *плоской кривой*). В этом случае удобно считать эту плоскость координатной, имеющей уравнение $z = 0$. Тогда кривая Г имеет в этой плоскости описание

$$\Gamma = \{(x = x(t),\ y = y(t))\ :\ a \leqslant t \leqslant b\},$$

а криволинейный интеграл первого рода записывается в виде $\int_\Gamma F(x, y)\,ds$.

Если на ориентированной кривой Г задано векторное поле $\vec{a}(x, y) = P(x, y)\vec{\imath} + Q(x, y)\vec{\jmath}$, то криволинейный интеграл второго рода имеет вид

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Все рассмотренные свойства криволинейных интегралов верны, разумеется, и в плоском случае.

Пусть D — плоская область в $\mathbb{R}^2$ и пусть простой кусочно гладкий ориентированный контур $\Gamma \subset \partial D$. Контур Γ будем называть *ориентированным положительно относительно области* D и обозначать через Γ^+, если при движении по нему в направлении заданной ориентации ближайшая часть области D остаётся слева. В противном случае контур Γ будем называть *ориентированным отрицательно относительно области* D и обозначать символом Γ^-.

Если граница ∂D области D состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_i ($\partial D = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$), каждый из которых ориентирован положительно относительно D, то ∂D будем обозначать символом ∂D^+ ($\partial D^+ = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^+$).

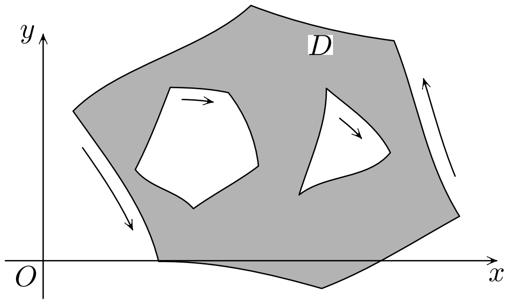


Рис. 20.3.1

Определение 1. Плоскую область D назовём *простой относительно оси* Oy, если она имеет вид

$$D = \{(x, y) \,:\, a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}, \qquad (1)$$

где φ, ψ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ и $\varphi < \psi$ на (a, b).

Плоскую область D назовём *простой относительно оси* Ox, если она имеет вид

$$D = \{(x, y) \,:\, \varphi(y) < x < \psi(y),\ c < y < d\}, \tag{2}$$

где φ, ψ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$ и $\varphi < \psi$ на (c, d).

Плоскую область D назовём *простой*, если она является простой относительно хотя бы одной из координатных осей.

Будем говорить, что ограниченная плоская область D *разрезана* на конечное число простых областей $\{D_i\}_{i=1}^{I}$, если

1° $\bigcup_{i=1}^{I} D_i \subset D$;

2° $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

3° $\bigcup_{i=1}^{I} \overline{D}_i = \overline{D}$;

4° $(\partial D_i \cap \partial D_j) \cap D$ при $i \neq j$ является либо пустым множеством, либо точкой, либо отрезком, интервалом, полуинтервалом прямой.

В этом параграфе будут рассматриваться лишь такие плоские области, которые можно разрезать на конечное число простых.

Теорема 1 (формула Грина). *Пусть D — ограниченная плоская область, граница ∂D которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_i ($\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$), ориентированных положительно относительно области D ($\partial D^+ = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i^+$).*

Пусть на замкнутой области $\overline{D}$ задано векторное поле $\vec{a}(x, y) = P(x, y)\vec{\imath} + Q(x, y)\vec{\jmath}$, причём P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{D}$ (подразумевается, что $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D и непрерывно продолжены на $\overline{D}$).

Тогда справедлива формула Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D^+} (\vec{a}, d\vec{r}). \tag{3}$$

Доказательство. Мы докажем эту теорему сначала при **дополнительном предположении**, что область D может быть разрезана на конечное число простых областей. Затем снимем это предположение (см. ниже лемму 1).

Достаточно установить (3) при $Q \equiv 0$, т. е. в виде

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D^+} P\,dx, \tag{4}$$

т. к. случай $P \equiv 0$ рассматривается аналогично и вместе они приводят к формуле (3) общего вида.

<u>1-й шаг.</u> Установим (4) в случае, когда область D — простая относительно оси Oy, т. е. имеет вид (1) (см. рис. 20.3.2). Сводя двойной интеграл к повторному и ис-

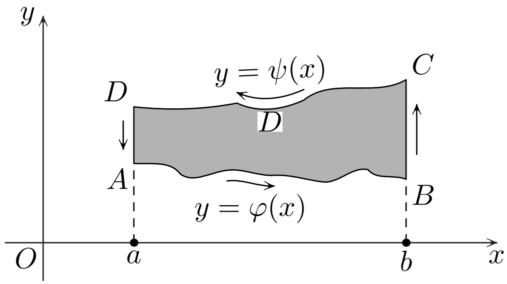


Рис. 20.3.2

пользуя формулу Ньютона–Лейбница, имеем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx =$$
$$= \int_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx =$$
$$= \int_{\overset{\frown}{DC}} P(x,y)\,dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx =$$
$$= -\int_{\overset{\frown}{CD}} P\,dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx = -\int_{\partial D^+} P\,dx,$$

т. е. равенство (4).

При получении последнего равенства были добавлены равные нулю слагаемые $\int_{\widehat{\mathcal{BC}}} P\,dx = 0$, $\int_{\widehat{\mathcal{DA}}} P\,dx = 0$.

2-й шаг. Установим (4) в случае, когда область D — простая относительно оси Ox, т. е. имеет вид (2), причём кривые

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(\varphi(y), y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\},\\ \Gamma_2 &= \{(\psi(y), y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\}\end{aligned} \tag{5}$$

являются ломаными. Тогда при некотором разбиении $\{c_i\}_{i=0}^k$ отрезка $[c, d]$ функции φ, ψ линейны на каждом отрезке $[c_{i-1}, c_i]$. При этом замкнутая область $\overline{D}$ представляется в виде $\overline{D} = \bigcup_{i=1}^k \overline{D}_i$, где D_i — трапеции

$$D_i \coloneqq \{(x, y) \,:\, \varphi(y) < x < \psi(y),\ c_{i-1} < y < c_i\},$$

каждая из которых является простой областью относительно оси Oy.

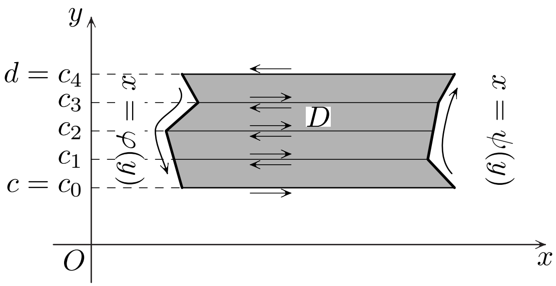


Рис. 20.3.3

По доказанному на первом шаге

$$\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_i^+} P\,dx, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Сложим полученные равенства почленно. Тогда в силу аддитивности двойного интеграла относительно областей интегрирования в левой части получим

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

В правой же части получим

$$\sum_{i=1}^{k}\left(-\int_{\partial D_i} P\,dx\right) = -\int_{\partial D^+} P\,dx,$$

поскольку при сложении криволинейных интегралов по ∂D_i^+ и ∂D_{i+1}^+ их части по отрезку

$$\{(x,y) \,:\, \varphi(c_i) \leqslant x \leqslant \psi(c_i),\ y = c_i\}$$

взаимно уничтожаются как криволинейные интегралы второго рода, отличающиеся лишь ориентацией кривой. Таким образом, формула (4) установлена.

3-й шаг. Установим (4) в случае, когда область D — простая относительно оси Ox, т. е. имеющая вид (2), причём при некотором $h_0 > 0$ $\psi - \varphi \geqslant 3h_0$ на $[c, d]$. Пусть $0 < h < h_0$,

$$D_h \coloneqq \{(x,y) \,:\, \varphi(y) + h < x < \psi(y) - h,\ c < y < d\} \subset D,$$
$$\Gamma_{1h} = \{(\varphi(y) + h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\Gamma_{2h} = \{(\psi(y) - h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Пусть

$$\Lambda_{1h\tau} = \{(\varphi_\tau(y) + h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\Lambda_{2h\tau} = \{(\psi_\tau(y) - h, y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d\}$$

— ломаные, вписанные соответственно в кривые Γ_{1h}, Γ_{2h} и построенные с помощью разбиения τ отрезка $[c, d]$ изменения параметра y (см. § 8.1). Мелкость $|\tau|$ разбиения τ будем считать достаточно малой. Пусть

$$D_{h,\tau} \coloneqq \{(x,y) \,:\, \varphi_\tau(y) + h < x < \psi_\tau(y) - h,\ c < y < d\} \subset D.$$

В силу результата шага 2

$$\iint_{D_{h,\tau}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_{h,\tau}^+} P\,dx.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю, приходим к формуле

$$\iint_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_h^+} P\,dx. \tag{6}$$

В самом деле, при $M = \max\{\max\limits_{[c,d]}|\varphi'|,\ \max\limits_{[c,d]}|\psi'|\}$ мера криволинейной трапеции высоты $2M|\tau|$ со «средней линией» Γ_{1h} (Γ_{2h}) равна $2M|\tau|(d-c)$. Следовательно,

$$\left|\iint\limits_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy - \iint\limits_{D_{h,\tau}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_{(D_h\setminus D_{h,\tau})\cup(D_{h,\tau}\setminus D_h)} \left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| 4M|\tau|(d-c) \to 0 \quad (|\tau|\to 0).$$

$$\int_{\Lambda_{ih\tau}} P\,dx - \int_{\Gamma_{ih}} P\,dx \to 0 \quad (|\tau|\to 0,\ i=1,2)$$

по лемме 20.2.1.

При $h \to 0$ левая часть (6) стремится к $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, т. к.

$$\left|\iint_{D\setminus D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right| \leqslant \max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| \mu(D\setminus D_h) = \max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| h(d-c).$$

Остаётся показать, что правая часть (6) стремится к $\int_{\partial D^+} P\,dx$ при $h \to 0$, и перейти в (6) к пределу. Для этого достаточно установить, что

$$\int_{\Gamma_{ih}} P\,dx \to \int_{\Gamma_i} P\,dx \quad \text{при} \quad h\to 0 \quad (i=1,2), \tag{7}$$

поскольку очевидно, что при $h \to 0$

$$\left(\int_{\varphi(c)}^{\varphi(c)+h} + \int_{\psi(c)-h}^{\psi(c)}\right)|P(x,c)|\,dx +$$

$$+\left(\int_{\varphi(d)}^{\varphi(d)+h} + \int_{\psi(d)-h}^{\psi(d)}\right)|P(x,d)|\,dx \to 0.$$

Для доказательства (7) при $i = 1$ выберем y в качестве параметра на Γ_1 и на Γ_{1h}. Тогда, используя модуль непрерывности функции P на $\overline{D}$, имеем

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1} P\,dx - \int\limits_{\Gamma_{1h}} P\,dx \right| \leqslant \int\limits_c^d |P(\varphi(y), y) - P(\varphi(y) + h, y)|\,|\varphi'(y)|\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \omega(h, P, \overline{D}) \max_{[c,d]} |\varphi'|(d - c) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Аналогично устанавливается (7) при $i = 2$.

Утверждение шага 3 установлено.

4-й шаг. Установим (4) для области D, простой относительно Ox, т. е. имеющей вид (2) с кусочно гладкими кривыми (5). Здесь не исключаются случаи, когда $\varphi(c) = \psi(c)$ и (или) $\varphi(d) = \psi(d)$. Пусть $\varepsilon > 0$,

$$D_\varepsilon \coloneqq \{(x, y) \,:\, \varphi(y) < x < \psi(y),\ c + \varepsilon < y < d - \varepsilon\}.$$

Формула (4) верна для области D_ε в силу результата шага 3. Остаётся перейти в ней к пределу при $\varepsilon \to 0$.

5-й шаг. Установим (4) в условиях теоремы 1 при дополнительном предположении, что область D может быть разрезана на конечное число простых областей $\{D_i\}_{i=1}^I$.

Напишем формулу (4) для каждой простой области D_i:

$$\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_i^+} P\,dx \quad (i = 1,\, \ldots,\, I) \tag{8}$$

и сложим почленно эти равенства. В силу аддитивности двойного интеграла относительно областей интегрирования и равенства нулю интеграла по множеству нулевой меры

$$\sum_{i=1}^I \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy. \tag{9}$$

При сложении правых частей (8) учтём, что

$$\partial D_i^+ = \partial' D_i^+ \cup \partial'' D_i^+,$$

где $\partial' D_i = \overline{D \cap \partial D_i}$, $\partial'' D_i = \partial D \cap \partial D_i$ — соответственно «внутренняя» и «внешняя» части границы ∂D_i. Ясно, что $\bigcup_{i=1}^I \partial'' D_i = \partial D$.

Пусть при $j \neq i$ множество $E_{ij} \coloneqq \partial' D_i \cap \partial' D_j$ содержит более одной точки. Тогда оно представляет собой отрезок (интервал, полуинтервал), наделённый противоположными ориентациями (положительной относительно D_i и положительной относительно D_j). Поэтому при сложении правых частей (8) «части» криволинейных интегралов по ∂D_i^+ и ∂D_j^+ (интегралы по отрезкам E_{ij}) взаимно уничтожатся. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{I} \int_{\partial D_i^+} P\,dx = \sum_{i=1}^{I} \int_{\partial'' D_i^+} P\,dx = \int_{\partial D^+} P\,dx. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) следует (4).

Итак, теорема 1 (формула (3)) установлена при дополнительном предположении, что область D можно разрезать на конечное число простых областей.

Примерами таких областей являются, очевидно, круг и кольцо.

6-й шаг. Для доказательства теоремы 1 в приведённой формулировке достаточно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 1. *Ограниченная плоская область D с границей ∂D, состоящей из конечного числа попарно не пересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_i ($\partial D = \bigcup_{i=1}^I \Gamma_i$), может быть разрезана на конечное число простых областей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Идея состоит в том, чтобы покрыть область D некоторым семейством замкнутых прямоугольников с попарно не пересекающимися внутренностями и требуемые простые области получить в качестве пересечения внутренности каждого из этих прямоугольников с D либо в качестве такого пересечения с одним дополнительным разрезом.

До конца доказательства под прямоугольниками будем понимать замкнутые прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям.

1-й ш а г. Сначала построим покрытие границы $\partial D = \bigcup_{i=1}^{I} \Gamma_i$. Будем брать только прямоугольники, по диаметру меньшие достаточно малого числа $\delta > 0$. Тогда покрытия различных кривых Γ_i, Γ_j $(i \neq j)$ не пересекаются.

Точку границы ∂D назовём *угловой*, если единичный касательный вектор контура Γ_i, проходящего через эту точку, не является в ней непрерывным. Граница ∂D может либо не содержать угловых точек, либо иметь их в конечном числе. При наличии угловых точек покроем каждую из них прямоугольником (квадратом по форме) с центром в ней. Мы получим покрытие $\bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ множества угловых точек. Без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{dist}(Q_i, Q_j) > \delta$ при $i \neq j$. Прямоугольники Q_i построенного покрытия $\bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ назовём *угловыми*. Вблизи центра Q_i граница ∂D представляет собой кривую, составленную из двух простых дуг, имеющих в центре Q_i односторонние касательные и отклоняющихся от этих касательных на величину, бесконечно малую по сравнению с расстоянием до центра. Будем считать Q_i столь малыми по диаметру, что каждая из этих дуг пересекает под ненулевым углом ту же сторону Q_i, что и односторонняя касательная к ней в центре Q_i, и что

$$D_i = D \cap \operatorname{int} Q_i \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

либо является простой областью, либо может быть разрезана (удалением интервала с концом в центре Q_i) на две простые области.

2-й шаг. Часть границы $\partial' D := \partial D \setminus \operatorname{int} \bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ представляет собой конечное множество простых гладких кривых или простых гладких контуров. Для построения покрытия $\partial' D$ построим покрытие для каждой кривой или контура в отдельности и объединим их. Пусть, например, сначала

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{11}$$

— простой гладкий контур и $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — единичный вектор его касательной, где $\alpha = \alpha(t)$ — угол между $\vec{\tau}$ и положительным направлением оси Ox. Координаты $\vec{\tau}$, т. е. $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ непрерывно зависят от t.

Разобьём отрезок $[a, b]$ точками $\{t_j\}_{j=0}^{j^*}$ на конечное число отрезков так, чтобы для каждой дуги

$$\Gamma^{(j)} := \{\vec{r}(t) \ : \ t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j\}, \quad j = 1, \ldots, j^* \tag{12}$$

выполнялось либо неравенство

$$|\operatorname{tg}\alpha| < 2 \quad \text{на} \quad [t_{j-1}, t_j]$$

(такую дугу будем называть дугой *горизонтального типа*), либо неравенство

$$|\operatorname{ctg}\alpha| < 2 \quad \text{на} \quad [t_{j-1}, t_j]$$

(такую дугу будем называть дугой *вертикального типа*).

Такое разбиение отрезка $[a, b]$ нетрудно построить, используя равномерную непрерывность $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Заметим, что в качестве параметра на дуге горизонтального типа можно взять координату x, а на дуге вертикального типа — координату y точки.

Дополнительно будем считать, что дуги горизонтального и вертикального типов чередуются (если это не так с самого начала, то придём к этому, объединяя соседние дуги совпадающих типов). За счёт сдвига параметра можем считать, что первая и последняя дуга в (12) имеют разные типы.

Так, например, окружность $\{(x = \cos\theta, y = \sin\theta)\colon 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ разбивается на 5 дуг. При её параметризации:

$$\left\{(x = \cos\theta, y = \sin\theta)\ :\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$$

будет выполнено и последнее требование.

Точки $\hat{r}(t_j)$, $(0 \leqslant j \leqslant j^* - 1)$, каждая из которых принадлежит двум дугам разного типа, будем называть *переходными* точками. Так, например, для рассмотренной окружности в качестве переходных можно взять четыре точки с параметрами $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$.

Точки $\hat{r}(t_{j-1})$, $\hat{r}(t_j)$ дуги $\Gamma^{(j)}$ из (12) будем называть *концевыми*, а прямоугольник, граница которого содержит концевую точку, — *концевым*.

Построим для каждой дуги $\Gamma^{(j)}$ из (12) покрытие семейством замкнутых прямоугольников $\{P_{ji}\}_{i=1}^{i_j}$ со свойствами:

1° $\bigcup_{i=1}^{i_j} P_{ji} \supset \Gamma^{(j)}$;

2° $P_{ji} \cap \operatorname{int} P_{jk} = \varnothing$ при $i \neq k$;

3° пересечение $D_{ji} \coloneqq D \cap \operatorname{int} P_{ji}$ $(1 \leqslant i \leqslant i_j)$ является простой областью;

4° каждая из концевых точек дуги $\Gamma^{(j)}$ находится в вершине (единственного) концевого прямоугольника этого семейства.

Покажем, как осуществить это построение, например, в случае, когда $\Gamma^{(j)}$ из (12) — дуга горизонтального типа. Переходя к параметру x, запишем дугу $\Gamma^{(j)}$ из (12) в виде

$$\Gamma^{(j)} = \{(x, \psi(x))\ :\ x_* \leqslant x \leqslant x^*\}, \quad |\psi'| \leqslant 2.$$

Пусть $\tau^* = \{x_i\}_0^{i_j}$ — разбиение отрезка $[x_*, x^*]$ на равные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть P_{ji} — прямоугольник, проекция которого на Ox есть $[x_{i-1}, x_i]$, центр находится в точке $\left(\dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}, \psi\left(\dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\right)$, а вертикальная сторона вдвое больше горизонтальной. При этом мелкость $|\tau^*|$ разбиения

τ^*, а значит, и $\operatorname{diam} P_{ji}$ мы можем взять сколь угодно малыми.

Выполнение свойств 1°, 2°, 3° очевидно. Если для построенного покрытия свойство 4° в точке $\hat{r}(t_{j-1})$ $(\hat{r}(t_j))$ не выполняется, то прямоугольник P_{j1} (P_{ji_j}) можно сдвинуть параллельно оси Oy, чтобы добиться выполнения этого свойства. Такая возможность основана на том, что в переходных точках $\frac{1}{2} \leqslant |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 2$, так что на $[x_0, x_1]$ и на $[x_{i_j-1}, x_{i_j}]$ можно считать выполненной оценку $\frac{1}{4} \leqslant |\psi'| \leqslant 4$.

Пусть теперь кривая (11) не является контуром. Это означает, что её начало и конец лежат на сторонах угловых прямоугольников (различных или одного и того же). Рассуждая так же, как в случае, когда кривая является контуром, построим для каждой её дуги из (12) покрытие семейством прямоугольников $\{P_{ji}\}_{i=1}^{i_j}$ со свойствами 1°, 2°, 3° и 4°°, 5°, где последние два из них формулируются следующим образом:

4°° каждая из концевых точек $\hat{r}(t_{j-1})$, $\hat{r}(t_j)$ совпадает с вершиной одного из концевых прямоугольников, если касательная $\Gamma^{(j)}$ в ней не параллельна ни одной из осей координат, и совпадает с серединой стороны одного из концевых прямоугольников, если касательная в ней параллельна одной из координатных осей;

5° $\operatorname{int} P_{ji}$ не пересекается ни с одним из угловых прямоугольников Q_k.

Перенумеровав заново все построенные прямоугольники P_{ji} для всех простых гладких дуг из $\partial' D$, получим семейство $\{P_j\}_{j=1}^m$ прямоугольников, попарно не имеющих общих внутренних точек, и таких, что

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} Q_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) \supset \partial D.$$

Проведём прямые, содержащие все стороны всех прямоугольников Q_i и P_j. Из образовавшихся таким образом (замкнутых) прямоугольников занумеруем и обозначим через R_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ те, которые пересекаются с D, но не имеют общих внутренних точек ни с одним из прямоугольников Q_i и P_j. Тогда $R_k \subset \overline{D}$. В самом деле, допустив, что в R_k имеются точки из D и из $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, на соединяющем их отрезке получим точку $(x^*, y^*) \in (\partial D) \cap \operatorname{int} R_k$. Следовательно, R_k имеет общую внутреннюю точку с тем прямоугольником Q_i или P_j, который содержит точку (x^*, y^*), а это противоречит построению R_k. Следовательно, $D \cap \operatorname{int} R_k = \operatorname{int} R_k$ — простая область.

Итак, показано, что

$$D \subset \left(\bigcup_{i=1}^{l} Q_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{r} R_k\right),$$

где $l + m + r$ прямоугольников попарно не имеют общих внутренних точек, пересечения $D \cap \operatorname{int} P_j$ и $D \cap \operatorname{int} R_k$ являются простыми областями, пересечение $D \cap \operatorname{int} Q_i$ либо является простой областью, либо может быть разрезано на две простые области.

Лемма доказана.

Заметим, что формула Грина имеет определённую аналогию с формулой Ньютона–Лейбница: интеграл от производных по области интегрирования выражается через значения функции на границе этой области.

Формулу Грина можно использовать для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла по её границе. Для этого возьмём в качестве $(P(x, y), Q(x, y))$

$$(0, x), \quad \text{или} \quad \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right), \quad \text{или} \quad (-y, 0).$$

Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ и по формуле Грина

$$\mu D = \int_{\partial D^+} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -y\,dx + x\,dy = -\int_{\partial D^+} y\,dx. \quad (13)$$

§ 20.4. Геометрический смысл знака якобиана плоского отображения

Изложим два подхода к выяснению геометрического смысла знака якобиана плоского отображения.

Первый подход

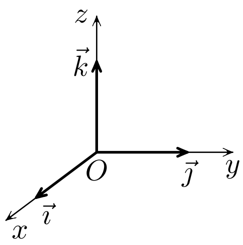


Рис. 20.4.1

Для двух векторов

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + 0\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

из формулы

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (\vec{\imath} \times \vec{\jmath})$$

видно, что знак определителя

$$\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

показывает направление кратчайшего поворота от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$. Именно, при

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (< 0)$$

кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ производится в плоскости Oxy против (по) часовой стрелки.

Пусть задано взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение

$$\mathcal{F} \ : \ \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

области G плоскости Ouv, содержащей две пересекающиеся гладкие ориентированные кривые, на область в плоскости Oxy (см. рис. 20.4.2):

$$\gamma_1 = \{(u,v) : u = u_1(t), v = v_1(t)\},$$
$$\gamma_2 = \{(u,v) : u = u_2(t), v = v_2(t)\},$$
$$\mathcal{F}\gamma_1 = \{(x,y) : x = x_1(t), y = y_1(t)\},$$
$$\mathcal{F}\gamma_2 = \{(x,y) : x = x_2(t), y = y_2(t)\},$$

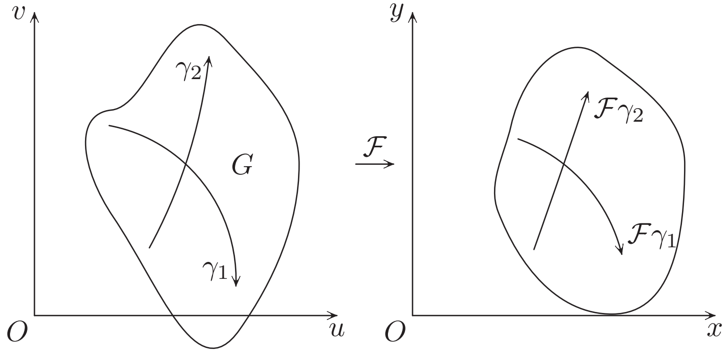


Рис. 20.4.2

где

$$x_1(t) \coloneqq x(u_1(t), v_1(t)), y_1(t) \coloneqq y(u_1(t), v_1(t)),$$
$$x_2(t) \coloneqq x(u_2(t), v_2(t)), y_2(t) \coloneqq y(u_2(t), v_2(t)).$$

Сравним направление кратчайшего поворота от касательного вектора к γ_1 до касательного вектора к γ_2 в точке пересечения кривых с соответствующим направлением для их образов $\mathcal{F}\gamma_1$, $\mathcal{F}\gamma_2$. Как мы видели, для этого достаточно сравнить знаки определителей, составленных из координат соответствующих касательных векторов. Имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u u'_1 + x'_v v'_1 & x'_u u'_2 + x'_v v'_2 \\ y'_u u'_1 + y'_v v'_1 & y'_u u'_2 + y'_v v'_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix}.$$

По столбцам определителей стоят координаты касательных векторов к γ_1 и γ_2 (правый определитель) и к $\mathcal{F}\gamma_1$ и $\mathcal{F}\gamma_2$ (левый определитель). Сравнивая знаки этих определителей, приходим к выводу: при $J(u,v) \coloneqq \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ (< 0) направление кратчайшего поворота от первого касательного вектора ко второму после отображения *сохраняется* (*меняется на противоположное*).

Пусть теперь гладкая кривая γ_1 является частью границы некоторой области D, замыкание которой содержится в G. Пусть γ_1 ориентирована положительно относительно D. Сравним ориентацию γ_1 относительно D и ориентацию $\Gamma_1 = \mathcal{F}(\gamma_1)$ относительно $\mathcal{F}(D)$. Возьмём кривую γ_2, пересекающую γ_1, с касательным вектором в точке пересечения, направленным по нормали к γ_1 внутрь области D. Из предыдущего видно, что возможны случаи ($\Gamma_2 = \mathcal{F}(\gamma_2)$):

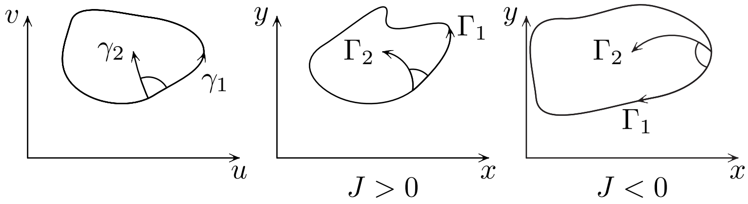


Рис. 20.4.3

Таким образом, приходим к окончательной формулировке геометрического смысла знака якобиана плоского отображения.

При положительном якобиане после отображения сохраняется направление кратчайшего поворота от одной из пересекающихся кривых до другой, а также ориентация кривой, являющейся частью границы области D, относительно D.

При отрицательном якобиане указанные направления кратчайшего поворота и ориентация относительно области меняются на противоположные.

Второй подход

Этот подход основан на использовании формулы Грина. Пусть снова

$$\mathcal{F} \; : \; \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

— взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение некоторой области G плоскости Ouv.

Пусть ограниченная область $D \subset \overline{D} \subset G$ и пусть якобиан

$$J(u,v) \coloneqq \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \text{на} \quad \overline{D}.$$

Тогда $J(u,v)$ сохраняет знак на D, т. е. является либо положительным на G, либо отрицательным на G (см. теорему 10.5.4). Следовательно, $D^* \coloneqq \mathcal{F}(D)$ также является ограниченной областью плоскости Oxy (теорема 12.3.4).

Пусть $\Gamma \coloneqq \partial D$ является простым кусочно гладким контуром. Тогда

$$\Gamma^* \coloneqq \mathcal{F}(\Gamma) = \mathcal{F}(\partial D) = \partial D^*$$

(доказательство последнего равенства совпадает с доказательством утверждения 1° леммы 19.4.2) также является простым кусочно гладким контуром. В самом деле, пусть

$$\Gamma_i = \{(u(t), v(t)) \ : \ a_{i-1} \leqslant t \leqslant a_i\}$$

— гладкая кривая, $\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i = \Gamma$. Тогда

$$\Gamma_i^* \coloneqq \mathcal{F}(\Gamma_i) = \{(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t))),\ a_{i-1} \leqslant t \leqslant a_i\}$$

является непрерывно дифференцируемой кривой по теореме о дифференцируемости сложной функции. Кроме того,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u \frac{du}{dt} + x'_v \frac{dv}{dt} \\ y'_u \frac{du}{dt} + y'_v \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix},$$

причём определитель этой системы уравнений $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Поэтому из неравенства $\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 > 0$ следует, что

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 > 0$, т. е. что Γ_i^* не имеет особых точек, т. е. является гладкой. Предполагая для определённости, что ориентация контура $\Gamma \coloneqq \{(u(t), v(t))\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$, определяемая возрастанием параметра t, является положительной относительно области D, ориентированный таким образом контур Γ обозначим через Γ^+. При этом ориентация контура Γ^*, наследуемая от ориентации контура Γ^+, может оказаться как положительной, так и отрицательной относительно области D^*. Контур Γ^* с такой ориентацией относительно области D^* обозначим через $\Gamma^{*\pm}$. В силу (20.3.13) имеем

$$\mu D^* = \pm \int_{\Gamma^{*\pm}} x\, dy = \pm \int_a^b x y_t'\, dt =$$
$$= \pm \int_a^b x \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt = \pm \int_{\Gamma^+} x \frac{\partial y}{\partial u}\, du + x \frac{\partial y}{\partial v}\, dv.$$

Положим $x\,\frac{\partial y}{\partial u} = P$, $x\,\frac{\partial y}{\partial v} = Q$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + x \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}.$$

Дополнительно будем предполагать, что на области G непрерывны, а следовательно, и равны, производные $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$. Применяя к последнему интегралу формулу Грина (20.3.3), получаем, что в зависимости от ориентации контура $\Gamma^{*\pm}$

$$\mu D^* = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du\, dv = \pm \iint_D \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv. \quad (1)$$

В силу положительности левой части этой цепочки равенств положительна и правая часть, так что в области G

$$\pm \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| > 0.$$

Рассматривая отдельно случаи различной ориентации контура Γ^* (т. е. Γ^{*+} и Γ^{*-}) и соответственно этому беря знаки в (1), приходим к следующему выводу.

В случае положительного якобиана отображения ориентация граничного контура относительно области сохраняется, а в случае отрицательного якобиана — меняется на противоположную.

Отметим ещё, что равенство (1) можно переписать в виде $\mu D^* = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$. Таким образом, при иных (сделанных здесь) предположениях получено новое доказательство формулы (19.5.11), из которой с помощью теоремы о среднем вытекает и формула (19.4.3) (геометрический смысл модуля якобиана отображения).

§ 20.5. Потенциальные векторные поля

Определение 1. Векторное поле $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, заданное на области $G \subset \mathbb{R}^3$, называется *потенциальным* в области G, если существует непрерывно дифференцируемая функция $U\colon G \to \mathbb{R}$ такая, что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{на} \quad G. \tag{1}$$

Функцию U называют при этом *потенциальной функцией* поля $\vec{a}$, или *потенциалом* поля $\vec{a}$.

Если функция U является потенциалом поля $\vec{a}$, то функция $U + C$, где C — произвольная постоянная, также является потенциалом поля $\vec{a}$.

Упражнение 1. Показать, что верно и обратное (это будет ясно и из дальнейшего): если U, V — два потенциала поля $\vec{a}$ в области G, то $V = U + C$ на G, где C — некоторая постоянная.

Равенства (1) иначе можно записать так:

$$\vec{a} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} U = \nabla U, \tag{2}$$

$$\text{или} \quad dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где ∇ — символический вектор

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

называемый *набла.*

Интеграл $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$ по контуру Γ называют *циркуляцией* векторного поля $\vec{a}$ по контуру Γ.

Теорема 1. *Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)$ — непрерывное поле в области G. Тогда следующие условия эквивалентны.*

I. *Поле $\vec{a}$ потенциально в области G.*

II$'$. *Для любого кусочно гладкого контура $\Gamma \subset G$*

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

II$''$. *Для любых двух фиксированных точек A, $B \in G$ значение интеграла*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}),$$

где $\overset{\frown}{AB}$ — произвольная кусочно гладкая кривая, лежащая в области G и соединяющая точки A и B, не зависит от кривой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала, что II$'$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$II$''$. Пусть выполнено II$'$, и пусть Γ_1^+, Γ_2^+ — две кривые, лежащие в G, начала которых находятся в точке A, а концы — в точке B. Тогда $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ является ориентированным контуром и в силу II$'$

$$\int_{\Gamma_1^+} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{\Gamma_2^-} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

Заменив во втором интеграле ориентацию кривой Γ_2^- на противоположную, получаем

$$\int_{\Gamma_1^+}(\vec{a}, d\vec{r}) - \int_{\Gamma_2^+}(\vec{a}, d\vec{r}) = 0,$$

т. е. утверждение II$''$.

Пусть выполнено II$''$, и пусть произвольный кусочно гладкий контур $\Gamma^+ \subset G$. Пусть $A, B \in \Gamma$ и кривые $\Gamma_1^+ := \overset{\frown}{AB}$, $\Gamma_2^+ := \overset{\frown}{BA}$ являются дугами контура Γ^+, причём ориентация каждой из них совпадает с ориентацией контура Γ^+.

Тогда Γ_1^+ и Γ_2^- — две кусочно гладкие кривые с началами в A и концами в B. В силу II$''$

$$\int_{\Gamma^+}(\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\Gamma_1^+}(\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{\Gamma_2^+}(\vec{a}, d\vec{r}) = \\ = \int_{\Gamma_1^+}(\vec{a}, d\vec{r}) - \int_{\Gamma_2^-}(\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

Покажем, что I $\Rightarrow$ II$''$. Пусть U — потенциал, $\overset{\frown}{AB} = \{(x(t), y(t), z(t))\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кусочно гладкая кривая, лежащая в области G. Тогда

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt = \\ = \int_a^b \frac{d}{dt}U(x(t), y(t), z(t))\,dt = U(x(t), y(t), z(t))\Big|_a^b = \\ = U(B) - U(A).$$

Покажем, наконец, что II$''$ $\Rightarrow$I. Пусть A_0 — фиксированная, а $B(x, y, z)$ — произвольная точка области G. Рассмотрим функцию

$$U(B) = U(x, y, z) := \int_{\overset{\frown}{A_0B}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (3)$$

где $\overset{\frown}{A_0B}$ — кусочно гладкая кривая, лежащая в G. Такое определение функции U корректно, т. к. правая часть (3) в силу II$''$ зависит лишь от $B(x,y,z)$, т. е. от переменных x, y, z. Поэтому правую часть (3) нередко записывают в виде $\int_{A_0}^{B} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Покажем, что U является потенциалом поля $\vec{a}$, т. е. выполняются равенства (1), из которых докажем лишь первое. Пусть $B_0 = B_0(x_0, y_0, z_0) \in G$. Установим равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, z_0) \tag{4}$$

непосредственным вычислением производной $\frac{\partial U}{\partial x}$. Пусть $U(x_0, y_0, z_0)$ и $U(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ представлены в виде (3) соответственно с помощью кривых $\overset{\frown}{A_0B_0}$ и $\overset{\frown}{A_0B} \coloneqq \overset{\frown}{A_0B_0} \cup \cup \overline{B_0B}$, где $\overline{B_0B}$ — отрезок, соединяющий точки B_0 и B. Тогда

$$\Delta U \coloneqq U(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \int_{\overline{BB_0}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x, y_0, z_0)\,dx.$$

При получении последнего равенства использовано определение криволинейного интеграла через определённый интеграл по параметру, в качестве которого выбран x (так что $x'_x = 1$, $y'_x = 0$, $z'_x = 0$). Тогда

$$\left|\frac{\Delta U}{\Delta x}(x_0, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x} [P(x_0 + \xi, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)]\,d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|\xi| \leqslant |\Delta x|} |P(x_0 + \xi, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

поскольку функция P непрерывна в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, установлено равенство (4) и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. При доказательстве потенциальности поля $\vec{a}$ в условиях II$''$ было не только доказано существование потенциала, но и указано его выражение через $\vec{a}$ в виде формулы (3).

Представляет интерес найти простые (в отличие от II$'$ или II$''$) условия потенциальности поля $\vec{a}$. Введём в рассмотрение *ротор* (или *вихрь*) поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} \coloneqq \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \quad (5)$$

Определение 2. Определённое в области G векторное поле $\vec{a}$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в G.

Теорема 2. *Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)$ — непрерывно дифференцируемое в области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле. Тогда*

1° *если поле $\vec{a}$ потенциально, то $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$;*

2° *если область G поверхностно односвязна, а в плоском случае ($G \subset \mathbb{R}^2$, $R \equiv 0$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$) — односвязна, и $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ на области G, то поле $\vec{a}$ потенциально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем 1°, т. е. равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0.$$

Для его обоснования достаточно сослаться на теорему о независимости второй смешанной производной от порядка дифференцирования, если каждая из вторых производных непрерывна.

Аналогично устанавливаются и два других равенства в (6).

Доказательство утверждения 2° (после разъяснения встречающихся в нём понятий) будет приведено для плоского случая в теореме 3, а для трёхмерного случая будет получено позднее как следствие из формулы Стокса.

Следующий пример показывает, что без каких-либо предположений о геометрических свойствах области G безвихревое поле не обязательно является потенциальным.

Пример 1. Пусть поле

$$\vec{a} = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

задано во всех точках плоскости, кроме начала координат. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{при} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

так что $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$. Однако поле не является потенциальным, так как отлична от нуля его циркуляция по окружности:

$$C_R = \{(x = R\cos\theta, y = R\sin\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} :$$

$$\int_{C_R} (\vec{a}, d\vec{r}) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{R\sin\theta}{R^2}R(-\sin\theta) + \frac{R\cos\theta}{R^2}R\cos\theta\right] d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Определение 3. Плоская область G называется *односвязной*, если для всякой ограниченной плоской области D, границей ∂D которой является простой кусочно гладкий контур, из условия $\partial D \subset G$ следует $D \subset G$.

Односвязность G означает, грубо говоря, что область G не имеет дыр.

Теорема 3. *Пусть в плоской односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = (P, Q)$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ в G.*

Тогда поле $\vec{a}$ потенциально в G.

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 1) показать, что $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ для любого простого кусочно гладкого контура $\Gamma \subset G$. Пусть такой контур Γ является границей ограниченной области D ($\partial D = \Gamma$). По формуле Грина

$$\int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Везде в этом параграфе вместо кусочно гладких кривых можно было бы брать лишь ломаные. В силу леммы 20.2.1 об аппроксимации криволинейного интеграла все определения и полученные при этом утверждения оказались бы эквивалентны приведённым.

Глава 21
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 21.1. Гладкие поверхности

Для описания и изучения поверхностей будем пользоваться вектор-функциями двух переменных. В соответствии с общим определением функции (отображения) будем говорить, что на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ задана вектор-функция $\vec{r}\colon E \to \mathbb{R}^3$, если каждой точке $(u, v) \in E$ поставлен в соответствие трёхмерный вектор

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ — евклидовы пространства. Числовые функции x, y, z называют *координатными функциями.*

Аналогично соответствующим понятиям вектор-функции одного переменного и числовой функции двух переменных вводятся понятия предела, непрерывности, дифференцируемости вектор-функции двух переменных и др.

Вектор $\vec{a}$ называется *пределом* вектор-функции $\vec{r}$ (1) при $(u, v) \to (u_0, v_0)$ по множеству E, если (u_0, v_0) — предельная точка множества E и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; |\vec{r}(u, v) - \vec{a}| < \varepsilon \qquad \forall\, (u, v) \in E \cap \mathring{U}_\delta(u_0, v_0).$$

При этом пишут

$$\lim_{E \ni (u,v) \to (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a},$$

а если при этом $\mathring{U}_\delta(u_0, v_0) \subset E$ при некотором $\delta > 0$, то пишут

$$\lim_{(u,v) \to (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a}.$$

Функцию $\vec{r}$ называют *непрерывной в предельной точке* $(u_0, v_0) \in E$, если

$$\lim_{E \ni (u,v) \to (u_0,v_0)} \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u_0,v_0).$$

Частная производная $\vec{r}\,'_u(u_0,v_0)$ определяется равенством

$$\vec{r}\,'_u(u_0,v_0) \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) = \left.\frac{d\vec{r}(u,v_0)}{du}\right|_{u=u_0}.$$

Аналогично определяются частная производная $\vec{r}\,'_v \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ и частные производные высших порядков.

Понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и другие можно сформулировать эквивалентным образом в терминах координатных функций (ср. § 8.1).

Часто в качестве области определения $E \subset \mathbb{R}^2$ векторфункции (1) будем брать замкнутую область (т. е. замыкание области). В этом случае будем говорить, что производная $\vec{r}\,'_u$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ области D, если она непрерывна на области D и функция $\vec{r}\,'_u$ после подходящего доопределения на границе ∂D становится непрерывной на $\overline{D}$. То же относится и к другим производным векторфункции $\vec{r}$.

Определение 1. Множество точек $S \subset \mathbb{R}^3$ вместе с конкретным его описанием

$$S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \,:\, (u,v) \in \overline{D}\}, \tag{2}$$

где замкнутая область $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, а функции x, y, z непрерывно дифференцируемы на $\overline{D}$ и

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \text{ на } \overline{D}, \tag{3}$$

будем называть (*параметрически заданной*) *гладкой поверхностью*[1)].

[1)] С общей точки зрения естественнее было бы (2) называть (*параметрически заданным*) *куском поверхности*, оставив термин «(пара-

Переменные u, v называются *параметрами* поверхности (2), или её *координатами.*

Ту же поверхность можно задать в виде

$$S = \{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}\} \quad \text{или} \quad S = \{\hat{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}\},$$

где $\vec{r}(u,v) \coloneqq (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Пару $\{(u,v),\ \hat{r}(u,v)\}$ называют *точкой поверхности* S, а (u,v) — *координатами* этой *точки.* Ради краткости точку $\hat{r}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ часто также называют *точкой поверхности* S.

В определении 1 не исключается, что через некоторую точку $M \in \mathbb{R}^3$ поверхность «проходит» не один раз, т. е. что при некоторых $(u_1,v_1), (u_2,v_2) \in \overline{D}$

$$\hat{r}(u_1,v_1) = \hat{r}(u_2,v_2) = M.$$

Поверхность S вида (2) называется *простой*, если отображение $\hat{r}(u,v)$: $\overline{D} \to S$ является взаимно однозначным.

Пусть

$$S = \{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}\} \tag{4}$$

— гладкая поверхность, $(u_0,v_0) \in \overline{D}$. Заметим, что пересечение $\overline{D}$ с прямой $v = v_0$ содержит, во всяком случае при $(u_0,v_0) \in D$, некоторый интервал, которому принадлежит точка (u_0,v_0).

Множество

$$\{\vec{r}(u,v_0) \ : \ (u,v_0) \in \overline{D}\}$$

называется *координатной линией* $v = v_0$. Вектор $\vec{r}\,'_u = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u} = (x'_u, y'_u, z'_u)$ является её *касательным вектором.* Аналогично определяется *координатная линия*

$$\{\vec{r}(u_0,v) \ : \ (u_0,v) \in \overline{D}\}$$

метрически заданная) поверхность» за множеством, формально отличающимся от (2) лишь заменой замкнутой области $\overline{D}$ на область D. Мы будем придерживаться предложенной терминологии ради простоты записи.

с касательным вектором

$$\vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (x'_v, y'_v, z'_v).$$

З а м е ч а н и е 1. Поскольку

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}, \qquad (5)$$

где

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

то условие (3) можно записать в виде $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ или в виде $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq \vec{0}$.

Пример 1. Поверхность

$$S_\varepsilon = \{(R\cos\varphi\cos\psi, R\sin\varphi\cos\psi, R\sin\psi) \ : \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}, \ R > 0, \ 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

(сферический пояс) является гладкой параметрически заданной поверхностью.

Мы будем рассматривать далее гладкие параметрически заданные поверхности или поверхности, составленные из конечного числа таких поверхностей.

§ 21.2. Касательная плоскость и нормальная прямая

Определение 1. Плоскость, проходящая через точку $\{(u_0, v_0), \hat{r}(u_0, v_0)\}$ гладкой поверхности (21.1.4) параллельно векторам $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$, называется *касательной плоскостью* к поверхности в этой точке.

Пусть $(u_0, v_0) \in D$, $\{(u(t), v(t))\colon \ a \leqslant t \leqslant b\}$ — гладкая кривая, $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ при некотором t_0, $a < t_0 < b$. Тогда

$$\{\vec{r}(u(t), v(t)) \ : \ (u(t), v(t)) \in D, \ a \leqslant t \leqslant b\} \qquad (1)$$

— гладкая кривая, лежащая на поверхности и проходящая через данную точку $\{(u_0, v_0),\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$ поверхности. Касательный вектор этой кривой в точке $\{t_0,\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$ имеет вид

$$\vec{r}\,'_t(t_0) = \vec{r}\,'_u(u_0, v_0)u'_t(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'_t(t_0),$$

т. е. является линейной комбинацией векторов $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$, а значит, параллелен касательной плоскости.

Следовательно, касательные по всем таким кривым (1) в точке $\{t_0,\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$ лежат в касательной плоскости к поверхности в точке $\{(u_0, v_0),\ \hat{r}(u_0, v_0)\}$.

Исходя из определения касательной плоскости к поверхности, можно написать её уравнение в векторной форме с помощью смешанного произведения векторов:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — радиус-вектор точки касания, $\vec{r} = (x, y, z)$ — текущий радиус-вектор точки на касательной плоскости. В координатной форме уравнение (2) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{r}\,'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$, $\vec{r}\,'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$.

Определение 2. Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормальной прямой к поверхности* в указанной точке.

Определение 3. Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется *нормалью* к поверхности в этой точке.

Нормалью к гладкой поверхности (21.1.4) в данной точке является, например, вектор $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ (см. (21.1.5)).

Поэтому уравнения нормальной прямой имеют вид

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C},$$

или в подробной записи

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, а производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v вычислены в точке (u_0, v_0).

Поверхность

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \, : \, (x, y) \in \overline{D}\}, \tag{5}$$

где функция f непрерывно дифференцируема на замкнутой области $\overline{D}$, называется *гладкой явно заданной поверхностью.* Это важный частный случай гладкой параметрически заданной поверхности (21.1.2).

Гладкая явно заданная поверхность является, очевидно, простой.

Для $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

$$\vec{r}\,'_x = (1, 0, f'_x), \quad \vec{r}\,'_y = (0, 1, f'_y),$$

$$\vec{r}\,'_x \times \vec{r}\,'_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x\vec{\imath} - f'_y\vec{\jmath} + \vec{k} \neq \vec{0}. \tag{6}$$

Уравнение (3) касательной плоскости в точке $(x_0,\ y_0,$ $f(x_0, y_0))$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = 0,$$

или иначе

$$z - z_0 = (x-x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y-y_0) f'_y(x_0, y_0), \tag{7}$$

а уравнения нормальной прямой в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ — вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = -(z - z_0). \tag{8}$$

Определение гладкой явно заданной поверхности очевидным образом распространяется на случай, когда параметрами поверхности служат (y, z) или (z, x).

§ 21.3. Преобразование параметров гладкой поверхности

Изучим вопрос о преобразовании (замене) параметров на гладкой поверхности. Пусть D — плоская область,

$$S = \{\vec{r}(u, v) \ : \ (u, v) \in \overline{D}\} \tag{1}$$

— гладкая параметрически заданная поверхность, так что вектор-функция $\vec{r}$ непрерывно дифференцируема на $\overline{D}$ и $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$.

Рассмотрим отображение (замену параметров)

$$\mathcal{F} \left\{ \begin{array}{c} u = \varphi(u_1, v_1), \\ v = \psi(u_1, v_1) \end{array} \right\} \ : \ \overline{D}_1 \to \overline{D}, \tag{2}$$

где D_1 — область, и параметрически заданную поверхность

$$\tilde{S} = \{\vec{\rho}(u_1, v_1) \ : \ (u_1, v_1) \in \overline{D}_1\},$$

где $\vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1))$.

Будем считать поверхность $\tilde{S}$ той же, что и S, но иначе параметризованной, если замена параметров (2) является *допустимой*, т. е. обладает свойствами:

1° $\mathcal{F}$ устанавливает взаимно однозначные отображения $\overline{D}_1 \leftrightarrow \overline{D}$, $D_1 \leftrightarrow D$, $(\Rightarrow \partial D_1 \leftrightarrow \partial D)$;

2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}_1$ (т. е. φ, ψ непрерывно дифференцируемы на $\overline{D}_1$), обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}$;

3° $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \neq 0$ на D_1, ($\Rightarrow \dfrac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} \neq 0$ на D).

Замечая, что

$$\vec{\rho}\,'_{u_1} = \vec{r}\,'_u \varphi'_{u_1} + \vec{r}\,'_v \psi'_{u_1}, \quad \vec{\rho}\,'_{v_1} = \vec{r}\,'_u \varphi'_{v_1} + \vec{r}\,'_v \psi'_{v_1},$$

имеем

$$\vec{\rho}\,'_{u_1} \times \vec{\rho}\,'_{v_1} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}. \tag{3}$$

Поскольку каждый из якобианов в 3° ограничен, а их произведение $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \cdot \dfrac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} = 1$ (см. (12.3.5)), то якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \neq 0$ на $\overline{D}_1$. Подчеркнём ещё, что отображение, обратное допустимому, также, очевидно, является допустимым. Из (3) следует, что при допустимом преобразовании параметров

a) гладкая параметрически заданная поверхность переходит в гладкую параметрически заданную поверхность,
b) нормальная прямая и касательная плоскость сохраняются.

Заметим, что не всякую параметрически заданную гладкую поверхность (1) можно представить в виде гладкой явно заданной поверхности с помощью замены параметров (u,v) на (x,y), или на (y,z), или на (z,x). Это невозможно сделать, в частности, для поверхности S_ε, $\varepsilon > 0$, из примера 21.1.1, которая не проектируется взаимно однозначно ни на одну из координатных плоскостей.

Однако *локально* такое преобразование параметров можно осуществить. В самом деле, поскольку на D

$$|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|^2 = A^2 + B^2 + C^2 = \\ = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 > 0,$$

то в произвольной точке $(u_0, v_0) \in D$ один из трёх якобианов отличен от нуля. Пусть, например, $\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \neq$ $\neq 0$. Тогда по теореме 12.3.3 о локальной обратимости отображения найдутся две окрестности $U(u_0, v_0)$ и $U(x_0, y_0)$ (где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$) такие, что отображение $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ является взаимно однозначным отображением $U(u_0, v_0) \leftrightarrow U(x_0, y_0)$, причём обратное отображение $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{U}(x_0, y_0)$ и его якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ на $\overline{U}(x_0, y_0)$. Сужая при необходимости указанные окрестности, можем каждую из них считать областью (см. теорему 12.3.4). Тогда часть

$$S^{(0)} = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \,:\, (u,v) \in \overline{U}(u_0, v_0)\}$$

поверхности (1) после замены параметров (u, v) на (x, y) имеет представление

$$S^{(0)} = \{(x, y, f(x,y)) \,:\, (x,y) \in \overline{U}(x_0, y_0)\},$$

где $f(x,y) = z(u(x,y), v(x,y))$.

§ 21.4. Ориентация гладкой поверхности

Пусть S — гладкая параметрически заданная поверхность (21.3.1). Тогда единичный нормальный вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \tag{1}$$

является непрерывной функцией на $\overline{D}$, равно как и вектор $-\vec{n}$.

Вектор-функцию $\vec{n}$ (и $-\vec{n}$) называют непрерывным *полем единичных нормалей* поверхности S.

Определение 1. Всякое непрерывное поле единичных нормалей гладкой поверхности S называется *ориентацией* (или *стороной*) поверхности S.

Поверхность S (21.3.1), как имеющая две различные ориентации (стороны) $\pm\vec{n}$, называется *двусторонней* поверхностью.

Одна из этих двух ориентаций называется *положительной*, а другая — *отрицательной*. Для определённости за положительную ориентацию гладкой поверхности (21.3.1) (если не оговорено противное) примем поле нормалей (1).

Поверхность S (21.3.1), у которой фиксирована одна из её ориентаций, называется *ориентированной* поверхностью. Ориентированную поверхность S (21.3.1) с положительной ориентацией будем обозначать через S^+, а с отрицательной ориентацией — через S^-.

При замене параметров гладкой ориентированной поверхности в понятие допустимой замены параметров наряду с требованиями 1°, 2°, 3° включим ещё требование

4° $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} > 0$ на D_1.

Тогда, как видно из (21.3.3), при замене параметров гладкой поверхности выполняются не только свойства a), b), но ещё и свойство

c) сохраняется ориентация поверхности (т. е. положительно ориентированная поверхность при новом её представлении остаётся положительно ориентированной, а отрицательно ориентированная остаётся отрицательно ориентированной).

§ 21.5. Первая квадратичная форма гладкой поверхности

Пусть

$$S = \{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}\}$$

— гладкая параметрически заданная поверхность. Это означает по определению, что $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$ непрерывны на замкнутой области $\overline{D}$ и $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ на $\overline{D}$.

Рассмотрим дифференциал вектор-функции $\vec{r}$:

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'_u\,du + \vec{r}\,'_v\,dv.$$

Тогда

$$|d\vec{r}|^2 = |\vec{r}\,'_u\,du + \vec{r}\,'_v\,dv|^2 = |\vec{r}\,'_u|^2 du^2 + 2(\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v)\,du\,dv + |\vec{r}\,'_v|^2 dv^2.$$

В обозначениях

$$E = |\vec{r}\,'_u|^2, \quad F = (\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v), \quad G = |\vec{r}\,'_v|^2, \tag{1}$$

$$|d\vec{r}|^2 = |\vec{r}\,'_u\,du + \vec{r}\,'_v\,dv|^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{2}$$

Определение 1. Квадратичная форма $Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2$ называется *первой квадратичной формой поверхности*, E, F, G — её коэффициентами.

Первая квадратичная форма положительно определённа, т. к. $|d\vec{r}|^2 = 0$ только при $du = 0$, $dv = 0$. Следовательно, её дискриминант $EG - F^2 > 0$.

Кроме того, $E > 0$, $G > 0$.

Заметим, что

$$EG - F^2 = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|^2, \tag{3}$$

т. к. если ω — угол между $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$, то

$$EG - F^2 = |\vec{r}\,'_u|^2|\vec{r}\,'_v|^2 - |\vec{r}\,'_u|^2|\vec{r}\,'_v|^2\cos^2\omega = \\ = |\vec{r}\,'_u|^2|\vec{r}\,'_v|^2\sin^2\omega = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|^2.$$

С помощью коэффициентов квадратичной формы поверхности можно вычислять площадь поверхности, длины кривых на поверхности и углы между такими кривыми.

§ 21.6. Неявно заданные гладкие поверхности

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$, функция $F\colon\ G \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на G, и пусть $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 > 0$ на G. Тогда множество точек

$$S = \{(x, y, z)\ :\ (x, y, z) \in G,\ F(x, y, z) = 0\}$$

будем называть *неявно заданной гладкой поверхностью.*

Примером такой поверхности является сфера, определяемая уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$.

Поверхность S локально можно представить как явно заданную гладкую поверхность. В самом деле, пусть, например, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности $U((x_0, y_0)) \times U(z_0)$ и уравнение $F(x, y, z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U((x_0, y_0)),$$

где f — непрерывно дифференцируемая на $U((x_0, y_0))$ функция,

$$f_x' = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad f_y' = -\frac{F_y'}{F_z'}.$$

В качестве нормали (см. (21.2.6)) удобно взять вектор

$$\operatorname{grad} F = F_x'\vec{\imath} + F_y'\vec{\jmath} + F_z'\vec{k}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$(x - x_0)F_x'(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y'(x_0, y_0, z_0) + \\ + (z - z_0)F_z'(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

а уравнения нормальной прямой — вид

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}.$$

Если рассмотреть *поверхность уровня* функции F, т. е. поверхность, определяемую уравнением $F(x,y,z) = c$, то из предшествующего следует, что $\operatorname{grad} F$ ортогонален поверхности уровня. Последнее свойство согласуется, конечно, с тем, что $\operatorname{grad} F$ указывает направление быстрейшего роста функции F.

§ 21.7. Кусочно гладкие поверхности

В дальнейшем будет использовано понятие кусочно гладкой поверхности, которое приведём здесь для простейшего случая.

Определение 1. Гладкую параметрически заданную поверхность

$$S = \{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}\} \tag{1}$$

назовём *элементарным гладким куском* поверхности (сокращённо — *гладким куском*, или *куском* поверхности), если граница ∂D представляет собой простой кусочно гладкий контур.

Краем ∂S куска поверхности S вида (1) назовём

$$\partial S := \{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \partial D\}. \tag{2}$$

Можно показать, что край ∂S куска поверхности представляет собой кусочно гладкий контур в $\mathbb{R}^3$, если его параметризация индуцирована параметризацией контура ∂D. Это очевидно, если вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности $\overline{D}$.

Два куска поверхности

$$S_i = \{\vec{r}_i(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}_i\}, \quad i = 1,2,$$

назовём *соседними*, если пересечение их краев $\partial S_1 \cap \partial S_2 = S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ представляет собой объединение конечного числа кусочно гладких кривых и, быть может, конечного числа точек.

Определение 2. Объединение $S = \bigcup\limits_{i=1}^{I} S_i$ кусков поверхности S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$ называется *кусочно гладкой поверхностью* при выполнении следующих условий:

1° для любых двух кусков поверхности S_i и S_j существует такой набор кусков поверхности $S_i = S_{i_1}$, S_{i_2}, …, $S_{i_j} = S_j$, что любые два стоящие в нём рядом куска поверхности являются соседними;

2° если при $i \neq j$ пересечение $\partial S_i \cap \partial S_j$ содержит более чем конечное множество точек, то куски поверхности S_i и S_j являются соседними;

3° пересечение краев $\partial S_i \cap \partial S_j \cap \partial S_k$ любых трёх различных кусков поверхности состоит не более чем из конечного числа точек.

Для каждого куска S_j кусочно гладкой поверхности S обозначим через $\partial^{(i)} S_j$ часть его края ∂S_j, состоящую из объединения всех кусочно гладких кривых из $\bigcup\limits_{k \neq j} (\partial S_k \cap \partial S_j)$. Назовём $\partial^{(i)} S_j$ *внутренней частью края* ∂S_j, а $\partial^{(e)} S_j \coloneqq$ $\coloneqq \overline{\partial S_j \setminus \partial^{(i)} S_j}$ — *внешней частью края* ∂S_j.

Краем кусочно гладкой поверхности S назовём множество $\partial S \coloneqq \bigcup\limits_{i=1}^{I} \partial^{(e)} S_i$. Край ∂S является либо пустым множеством (в этом случае S называется *поверхностью без края*), либо состоит из конечного числа кусочно гладких контуров (в этом случае S называется *поверхностью с краем*).

Так, например, край боковой поверхности пирамиды совпадает с краем её основания, а поверхность куба является кусочно гладкой поверхностью без края.

З а м е ч а н и е. Понятия кусочно гладкой поверхности S и края ∂S кусочно гладкой поверхности можно было бы обобщить, если считать, что соседние куски S_i и S_j поверхности «склеиваются» не по всем кривым из $\partial S_i \cap \partial S_j$

(как в нашем случае), а лишь по некоторым избранным (и не называются соседними, если в $\partial S_i \cap \partial S_j$ нет кривых «склейки»). При таком подходе краем ∂S лежащего в плоскости $z = 0$ кольца с разрезом по радиусу можно считать объединение двух окружностей и этого разреза по радиусу, а у последнего различать два берега. Однако для наших дальнейших целей достаточно приведённых менее сложных определений соседних кусков поверхностей и края кусочно гладкой поверхности.

Рассмотрим пример другой поверхности, называемой *листом Мёбиуса.* Он получится, если, взяв полоску бумаги прямоугольной формы, повернуть один из её концов вокруг средней линии на 180° и склеить оба конца. На листе Мёбиуса нельзя задать непрерывное поле нормалей. Такая поверхность называется *неориентируемой*, или *односторонней.* Разрезав же лист Мёбиуса по месту склейки бумаги, можно представить его как ориентируемый, т. е. двусторонний, кусок поверхности.

Обсудим связь между ориентацией гладкого куска поверхности S вида (1) и ориентацией его края ∂S.

Определение 3. Пусть контур ∂D ориентирован положительно относительно плоской области D. Тогда его ориентация индуцирует *ориентацию края* ∂S (который как образ ∂D является кусочно гладким контуром в $\mathbb{R}^3$). Эта ориентация края ∂S называется *согласованной с ориентацией* $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|}$ гладкого куска поверхности. Противоположная же ориентация края ∂S называется *согласованной с ориентацией* $-\vec{n}$ гладкого куска поверхности S.

Выясним геометрический смысл этого понятия согласованности. Пусть S — явно заданный кусок поверхности вида (21.2.5), причём D — круг малого радиуса, ∂D — окружность, функция f непрерывно дифференцируема на $\overline{D}$. При положительной ориентации контура (окружности)

∂D относительно D эта окружность проходится против часовой стрелки.

Край ∂S лежит на боковой поверхности кругового цилиндра с осью, параллельной оси Oz, и проекцией ∂S на плоскость $z = 0$ является ∂D. Ориентация ∂S определяется тем, что при движении точки по ∂S в направлении, задаваемом этой ориентацией, проекция этой точки движется по ∂D против часовой стрелки.

В то же время нормаль $\vec{n} = \dfrac{-f'_x\vec{\imath} - f'_y\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}$ составляет острый угол с положительным направлением оси Oz.

Таким образом, ориентация $\vec{n}$ куска поверхности S согласована с ориентацией ∂S по *правилу штопора* (штопор движется в направлении $\vec{n}$, если его ручку вращать в соответствии с ориентацией ∂S).

Это же согласование ориентаций можно выразить иначе: если мы движемся по контуру ∂S в направлении его ориентации так, что нормаль $\vec{n}$ пронизывает нас с ног до головы, то ближайшая часть куска поверхности S остаётся слева. Последняя формулировка носит более общий характер, т. к. применима к произвольному явно заданному куску поверхности, а значит, и к произвольному параметрически заданному куску поверхности, т. к. каждый такой кусок поверхности локально можно представить в виде явно заданного куска поверхности (см. ниже лемму 1).

Лемма 1. *Пусть S — ориентированный гладкий кусок поверхности* (1). *Тогда ориентация ∂S, согласованная с ориентацией S, является согласованной и по правилу штопора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы для явно заданного гладкого куска поверхности только что установлено. Общий случай рассмотрим лишь в предположении, что вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ в (1) непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности множества $\overline{D}$. Пусть ориентация S задана нормалью $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$. Вопрос согласованности ориентаций достаточно решить локально, т.е. в сколь угодно малой окрестности произвольной точки $\hat{r}(u_0, v_0) \in \partial S$ $((u_0, v_0) \in \partial D)$.

Для определённости будем считать, что $(\vec{n}, \vec{k})(u_0, v_0) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} > 0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Привлекая теорему 12.3.3 о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения, можно показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

1° отображение $\mathcal{F} : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ является взаимно однозначным отображением $\overline{D}_\varepsilon \coloneqq \overline{D} \cap \overline{U_\varepsilon(u_0, v_0)} \leftrightarrow \overline{D_\varepsilon^*}$, $\partial D_\varepsilon \leftrightarrow \partial D_\varepsilon^*$, где D_ε^* — область в плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$ с кусочно гладкой границей ∂D_ε^*;

2° $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ на $\overline{D_\varepsilon}$, $\quad \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$ на $\overline{D_\varepsilon^*}$.

Рассмотрим гладкий кусок поверхности

$$S_\varepsilon \coloneqq \{\vec{r}(u,v) \,:\, (u,v) \in \overline{D_\varepsilon}\} \subset S.$$

Замена параметров (u,v) на параметры (x,y) является допустимой для S_ε (см. § 21.3), и S_ε можно представить в виде

$$S_\varepsilon = \{(x, y, f(x,y)) \,:\, (x,y) \in \overline{D_\varepsilon^*}\}, \tag{3}$$

где $(x, y, f(x,y)) = \hat{r}(u(x,y), v(x,y)) = \hat{\rho}(x,y)$.

Единичная нормаль к куску S_ε, вычисленная по формуле (21.2.6), совпадает с исходной единичной нормалью $\vec{n}$ в силу (21.3.3) и 2°.

Ориентация ∂D_ε^*, индуцированная ориентацией ∂D_ε, является положительной относительно D_ε^* в силу 2° и геометрического смысла знака якобиана отображения $\mathcal{F}$: $D_\varepsilon \leftrightarrow D_\varepsilon^*$ (см. конец § 20.4).

Таким образом, утверждение о согласованности ориентаций S и ∂S по правилу штопора сведено к случаю явно заданной поверхности, в котором оно уже установлено.

Задание ориентации куска поверхности S (1) равносильно заданию (согласованной с ней) ориентации его края ∂S (являющегося кусочно гладким контуром). Поэтому ориентацию края ∂S также будем называть *ориентацией* S.

Пусть теперь $S_1^{\vec{\nu}_1}$ и $S_2^{\vec{\nu}_2}$ — два соседних куска поверхности, каждый из которых ориентирован каким-либо способом (одним из двух). Их *ориентации* $\vec{\nu}_1$, $\vec{\nu}_2$ будем называть *согласованными*, если каждая из них на любой кусочно гладкой кривой из $\partial S_1 \cap \partial S_2$ порождает противоположные ориентации.

Определение 4. Кусочно гладкая поверхность $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ называется *ориентируемой*, если существуют такие ориентации $\vec{\nu}_1, \ \ldots, \vec{\nu}_I$ кусков поверхности $S_1, \ \ldots, S_I$, что ориентации $\vec{\nu}_i$ и $\vec{\nu}_j$ любых двух соседних кусков поверхности S_i и S_j согласованы.

Совокупность $\vec{\nu} = \{\vec{\nu}_i\}$ таких ориентаций кусков поверхности S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$, если она существует, называется *ориентацией* $\vec{\nu}$ поверхности S. Совокупность противоположных ориентаций $(-\vec{\nu}_i)$ кусков S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$ называется при этом *противоположной ориентацией* поверхности S.

Ориентируемая кусочно гладкая поверхность S, у которой фиксирована одна (из двух) её ориентаций $\vec{\nu}$, называется *ориентированной*; обозначим её через $S^{\vec{\nu}}$.

Край ∂S ориентированной кусочно гладкой поверхности S (с краем) состоит из конечного числа контуров. Любой из этих контуров представляет собой объединение конечного числа кривых, каждая из которых является частью одного из ориентированных контуров ∂S_i (его ориентация согласована с ориентацией S_i) и потому сама имеет ориентацию.

Совокупность ориентаций всех таких кривых определяет ориентацию всех контуров края ∂S. Совокупность этих ориентаций контуров из ∂S называется *ориентацией края* ∂S, *порождённой* заданной *ориентацией поверхности* $S^{\vec{\nu}}$.

Глава 22
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 22.1. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве задана гладкая поверхность

$$S = \{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$

где D — плоская измеримая область, так что вектор-функции $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$ непрерывны на $\overline{D}$, $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ на $\overline{D}$.

В определение *допустимой* замены параметров (u,v) поверхности (1) ($u = u(u_1,v_1)$, $v = v(u_1,v_1)$, $(u_1,v_1) \in \overline{D}_1$) теперь будем включать ещё дополнительное требование *измеримости* области D_1.

Определение 1. Пусть числовая функция F: $E \to \mathbb{R}$ задана на S. Тогда интеграл

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS := \\ := \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\,du\,dv \tag{2}$$

называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции F по поверхности S.

Установим некоторые свойства поверхностного интеграла (2).

1°. Для существования интеграла $\iint_S F(z,y,z)\,dS$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v))$ (как функция переменных u, v) была интегрируемой на D.

В частности, если F непрерывна на S (см. определение 10.5.2), то интеграл $\iint_S F(z,y,z)\,dS$ существует.

2°. Поверхностный интеграл первого рода (2) не зависит от параметризации гладкой поверхности (1) (при которой область изменения параметров измерима).

Пусть гладкая поверхность S (1) имеет другое представление

$$S = \{\vec{\rho}(u_1, v_1) \;:\; (u_1, v_1) \in \overline{D}_1\},$$

где D_1 — измеримая область,

$$\vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1)) = \\ = (\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)),$$

$\begin{cases} u = u(u_1, v_1), \\ v = v(u_1, v_1) \end{cases}$ — допустимая замена параметров на S.

Тогда с помощью формулы (21.3.3) и теоремы 19.5.2 получаем, что

$$\iint\limits_{D_1} F(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) |\vec{\rho}\,'_{u_1} \times \vec{\rho}\,'_{v_1}|\, du_1\, dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D_1} F(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) \times \\ \times |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \right| du_1 dv_1 = \\ = \iint\limits_{D} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv.$$

Определение 2. *Площадью гладкой поверхности* S (1) называется число

$$\mu S \coloneqq \iint_S dS = \iint_D |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv. \tag{3}$$

В силу свойств 1° и 2° площадь гладкой поверхности S существует и не зависит от параметризации поверхности (при допустимой замене параметров).

Приведём соображения в пользу естественности определения площади поверхности формулой (3). Рассмотрим разбиение плоскости Ouv на квадраты ранга $m \in \mathbb{N}$:

$$Q^{(m)}_{j,k} = \left\{(u, v) : \; \frac{j-1}{2^m} \leqslant u \leqslant \frac{j}{2^m}, \; \frac{k-1}{2^m} \leqslant v \leqslant \frac{k}{2^m}\right\}, \; j, k \in \mathbb{Z}.$$

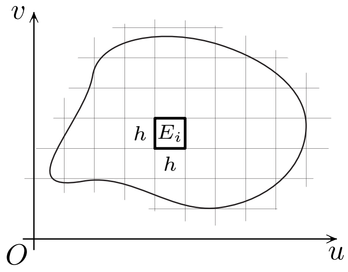


Рис. 22.1.1

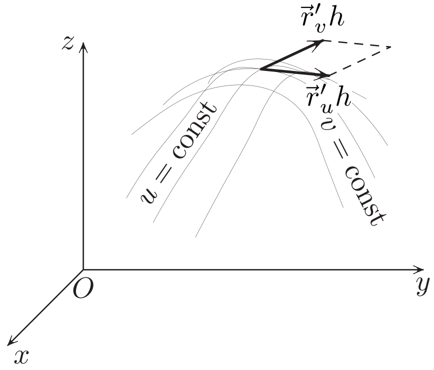


Рис. 22.1.2

Перенумеруем непустые пересечения $D \cap Q_{j,k}^{(m)}$ и обозначим их через E_i, $i = 1, \ \ldots, i_m$. Получим разбиение $\tau_m = \{E_i\}_{i=1}^{i_m}$ области D. Пусть m достаточно велико и пусть $\overline{E}_i \cap \partial D = \varnothing$. Тогда E_i представляет собой квадрат вида

$$E_i = \{(u, v) \, : \, u_i \leqslant u \leqslant u_i + h, \ v_i \leqslant v \leqslant v_i + h\} \subset D.$$

При переходе от вершины (u_i, v_i) к соседним вершинам E_i радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$ получит приращения

$$\vec{r}(u_i + h, v_i) - \vec{r}(u_i, v_i) = \vec{r}'_u(u_i, v_i)h + \vec{o}(h),$$
$$\vec{r}(u_i, v_i + h) - \vec{r}(u_i, v_i) = \vec{r}'_v(u_i, v_i)h + \vec{o}(h).$$

Заменим образ квадрата E_i «близким» ему параллелограммом, лежащим в касательной плоскости к поверхности S в точке $\hat{r}(u_i, v_i)$ и построенным на векторах $\vec{r}'_u(u_i, v_i)h$, $\vec{r}'_v(u_i, v_i)h$ и имеющим площадь $|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|_{(u_i, v_i)} \mu E_i$.

Если же $\overline{E}_i \cap \partial D \neq \varnothing$, то $E_i \subset U_{2^{-m+1}}(\partial D)$ и через (u_i, v_i) обозначим произвольную точку из E_i. Поскольку $\mu^* U_{2^{-m+1}}(\partial D) \to 0$ при $m \to \infty$ (лемма 18.2.3), получаем в силу сходимости сумм Римана к интегралу, что при $m \to \infty$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_m \\ E_i \not\subset U_{2^{-m+1}}(\partial G)}} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|_{(u_i, v_i)} \mu E_i \to \iint_S |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du \, dv.$$

Выражение $|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\,du\,dv$ часто называют *элементом площади* и обозначают символом dS. Учитывая ещё формулы (21.1.5), (21.5.3), получаем различные виды записи dS:

$$dS = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\,du\,dv = \\ = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} du\,dv = \\ = \sqrt{EG - F^2} du\,dv,$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы.

Поверхностный интеграл первого рода по кусочно гладкой поверхности $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ (см. § 21.7) определяется как сумма поверхностных интегралов по каждому из кусков S_i $(1 \leqslant i \leqslant I)$.

Аналогично площадь кусочно гладкой поверхности $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ определяется как сумма $\sum\limits_{i=1}^{I} \mu S_i$ площадей каждого из кусков.

§ 22.2. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана гладкая поверхность

$$S = \{\vec{r}(u,v) \,:\, (u,v) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$

где D — измеримая область.

По определению вектор-функции $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$ непрерывны на $\overline{D}$, $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v \neq \vec{0}$ на $\overline{D}$.

Пусть

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v}{|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{2}$$

Ориентируем поверхность S с помощью выбора непрерывного векторного поля единичных нормалей $\vec{\nu} = \pm\vec{n}$ и обозначим получившуюся ориентированную поверхность через $S^{\vec{\nu}}$.

В случае $\vec{\nu} = \vec{n}$ поверхность $S^{\vec{n}}$ будем называть *ориентированной положительно* и обозначать также через S^+, в случае $\vec{\nu} = -\vec{n}$ поверхность $S^{-\vec{n}}$ будем называть *ориентированной отрицательно* и обозначать также через S^-.

Пусть на поверхности S задано векторное поле

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Определение 1. *Потоком вектор-функции* $\vec{a}$ через гладкую ориентированную поверхность $S^{\vec{\nu}}$ (говорят также: через поверхность S в направлении нормали $\vec{\nu}$) называется поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{\nu})\, dS. \tag{3}$$

В силу свойств поверхностных интегралов первого рода этот интеграл существует, если функции $P(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$, $Q(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$, $R(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$ как функции переменных u, v интегрируемы на D, в частности, если P, Q, R непрерывны на S.

Интеграл (3) меняет знак при замене ориентации $\vec{\nu}$ на $-\vec{\nu}$, т. е. на противоположную.

Интеграл (3), вычисляемый через двойной интеграл по области D изменения параметров, *не зависит* от допустимой замены параметров, сохраняющей ориентацию поверхности.

Определение 2. Интеграл (3) называют *поверхностным интегралом второго рода* от вектор-функции $\vec{a}$ по ориентированной поверхности $S^{\vec{\nu}}$.

В случае положительно ориентированной поверхности S^+ $(\vec{\nu} = \vec{n})$ поверхностный интеграл второго рода по S^+ обозначается символом

$$\iint_{S^+} P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dz\, dx + R(x, y, z)\, dx\, dy \coloneqq$$

$$\coloneqq \iint_S (\vec{a}, \vec{n})\, dS. \tag{4}$$

В силу определения 22.1.1 поверхностного интеграла первого рода и (2) имеем

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \iint_{S} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,dS =$$
$$= \iint_{S} \Big[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} +$$
$$+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} +$$
$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv. \quad (5)$$

Поверхностный интеграл второго рода по ориентированной кусочно гладкой поверхности определяется как сумма поверхностных интегралов по соответственно ориентированным гладким кускам этой поверхности.

Глава 23
СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

§ 23.1. Скалярные и векторные поля

Здесь будут рассматриваться числовые или векторные функции, заданные на двумерных или трёхмерных областях. При этом будем говорить, что на данной области задано *скалярное* или *векторное поле* соответственно. Если заданные функции непрерывны, дифференцируемы и т. п., будем говорить, что скалярное или векторное поле соответственно непрерывно, дифференцируемо и т. п.

Введём в рассмотрение символический вектор, называемый *оператором Гамильтона*, или оператором *набла*:

$$\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда *градиент* числовой функции u можно записать в виде

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

если правую часть понимать как «произведение» вектора набла на числовую функцию u.

Пусть задано векторное поле $\vec{a}\colon G \to \mathbb{R}^3$, $G \subset \mathbb{R}^3$.

Его *производной по направлению* $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в точке $(x_0, y_0, z_0) \in G$ называется

$$\frac{\partial \vec{a}(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{e}} := \frac{d}{dt}\vec{a}(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0},$$

если производная в правой части существует.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \vec{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}\cos\gamma = (\vec{e}, \nabla)\vec{a},$$

где скалярное произведение

$$(\vec{e}, \nabla) = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial z}.$$

Если $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный фиксированный вектор, то вектор

$$(\vec{b}, \nabla)\vec{a} \coloneqq b_x \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}$$

называется *градиентом вектора* $\vec{a}$ *по вектору* $\vec{b}$.

Если поле $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в некоторой точке, то число

$$\operatorname{div} \vec{a} \coloneqq \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией* или *расходимостью* поля $\vec{a}$ в этой точке.

Символически можно записать

$$\operatorname{div} \vec{a} = (\nabla, \vec{a}).$$

Ротором, или *вихрем* векторного поля $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в данной точке называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a} \coloneqq \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \coloneqq$$

$$\coloneqq \vec{\imath} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{\jmath} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Пусть Γ — кусочно гладкий контур в области G. Интеграл

$$\int_\Gamma a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz \eqqcolon \int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r})$$

называется *циркуляцией векторного поля* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по контуру Γ.

Ни градиент скалярного поля, ни дивергенция, ни ротор векторного поля не зависят от сдвига и поворота прямоугольной декартовой системы координат. Это утверждение можно доказать как непосредственными вычислениями, так и на основе геометрических соображений. Например, градиент функции, как известно, направлен в сторону быстрейшего роста функции и по величине равен производной по этому направлению. Обсуждаемая независимость дивергенции и ротора векторного поля от сдвига и поворота системы координат будут получены в качестве следствий из теоремы Остроградского–Гаусса и теоремы Стокса соответственно.

Оператор ∇, применяемый к скалярному или векторному полю, действует, с одной стороны, как оператор дифференцирования, а с другой — как обычный вектор. Выработаны формальные правила преобразований выражений, содержащих ∇, основанные на разделении этих ролей. Приведём пример таких преобразований, разъяснения к которому будут даны вслед за ним:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(f\vec{a}) = \nabla \times (f\vec{a}) = \\
&\qquad = \overset{\uparrow}{\nabla} \times (\overset{\downarrow}{f}\vec{a}) + \overset{\uparrow}{\nabla} \times (f\overset{\downarrow}{\vec{a}}) = (\overset{\uparrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{f}) \times \vec{a} + f(\overset{\uparrow}{\nabla} \times \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = \\
&\qquad\qquad = (\nabla f) \times \vec{a} + f(\nabla \times \vec{a}) = \operatorname{grad} f \times \vec{a} + f \operatorname{rot} \vec{a}.
\end{aligned}$$

Здесь f — скалярная, $\vec{a}$ — векторная функции. Стрелка $\uparrow$ означает, что мы «снимаем» операцию дифференцирования с ∇, перенося её (что показывается стрелкой $\downarrow$) на объект действия оператора ∇, т. е. на произведение $f\vec{a}$. Дифференцирование $\downarrow$ произведения проводится по формуле Лейбница. Применяем правила действия с обычными векторами (перенос числового множителя $\overset{\downarrow}{f}$ или f), стараясь сблизить $\overset{\uparrow}{\nabla}$ с множителем, снабжённым стрелкой $\downarrow$. Снимаем все стрелки.

Обоснование этих преобразований можно получить на следующем пути. Представим ∇ в виде $\nabla = \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3$, где $\nabla_1 = \vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}$, $\nabla_2 = \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla_3 = \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$. Такое представление означает, что результат действия ∇ на числовую или векторную функцию равен сумме результатов действий на эту функцию ∇_1, ∇_2 и ∇_3. Приведённые же формальные операции, если заменить в них ∇ на ∇_1, или на ∇_2, или на ∇_3, превращаются в неформальные и хорошо известные. Остаётся провести их и записать результат в желаемой форме.

§ 23.2. Формула Остроградского–Гаусса

Нам понадобится выражение потока векторного поля через гладкую поверхность, которая имеет явное описание более общего вида, чем данное в определении 21.7.1. Приведём в связи с этим

Определение 1. Поверхность

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \,:\, (x, y) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$

где D — ограниченная плоская область, ∂D — простой кусочно гладкий контур, назовём *явно заданным почти гладким куском поверхности*, если функция f непрерывна на $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируема на D.

Почти гладкий кусок поверхности является гладким куском поверхности (определение 21.7.1), если f непрерывно дифференцируема не только на D, но и на $\overline{D}$.

Примером почти гладкого куска поверхности является полусфера

$$\{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}.$$

Определение 2. *Потоком* непрерывного векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$ через почти гладкий кусок поверхности (1) в направлении нормали $-f'_x\vec{\imath} - f'_y\vec{\jmath} + \vec{k}$ называется интеграл

$$\iint_D R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy. \tag{2}$$

Это определение обобщает определение потока данного векторного поля, введённое в случае явно заданного гладкого куска поверхности (см. (22.2.5) при $P \equiv Q \equiv 0$, $(u, v) = (x, y)$).

Довод в пользу естественности такого обобщения (2) состоит в следующем. Пусть S_ε — часть поверхности (1)

$$S_\varepsilon = \{(x, y, f(x, y)) \ : \ (x, y) \in \overline{D}_\varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{(x, y) \in D\colon \operatorname{dist}((x, y), \partial D) > \varepsilon\}$ — область в $\mathbb{R}^2$.

Тогда S_ε — гладкий кусок поверхности и поток вектора $R\vec{k}$ через S_ε в направлении той же нормали равен (согласно определению 22.2.1):

$$\iint_{D_\varepsilon} R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

Последний интеграл при $\varepsilon \to 0$ стремится к (2) в силу непрерывности $R(x, y, f(x, y))$ на $\overline{D}$ и $\mu(D \setminus D_\varepsilon) \to 0$.

Наряду с определениями 22.2.1, 22.2.2 будем считать принятыми аналогичные определения почти гладких кусков поверхности, заданных в явном виде формулами $x = g(y, z)$ или $y = h(z, x)$, и соответственно потоков непрерывных векторных полей $P(x, y, z)\vec{\imath}$, $Q(x, y, z)\vec{\jmath}$.

Определение 3. Расширим понятие кусочно гладкой поверхности, понимая под куском поверхности в определении 21.7.2 либо гладкий кусок, либо явно заданный почти гладкий кусок.

Определение 4. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ вида

$$G = \{(x, y, z) \ : \ \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), \ (x, y) \in D\} \tag{3}$$

назовём *простой относительно оси Oz* (короче: *Oz-простой*), если D — ограниченная плоская область, ∂D — простой кусочно гладкий контур, функции φ, ψ непрерывны на $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемы на D, $\varphi < \psi$ на D.

Будем считать принятыми также аналогичные определения *Ox-простой* и *Oy-простой* области.

Как видим, граница $\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0$ Oz-простой области G состоит из нижней S_1, верхней S_2 и боковой S_0 частей, причём нижняя и верхняя части являются явно заданными почти гладкими кусками поверхности, а боковая часть — частью цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz и направляющей ∂D. Боковую часть S_0 можно представить как объединение конечного числа гладких поверхностей, явно заданных с помощью параметров (y, z) или (z, x) .

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана измеримая область G, граница ∂G которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся кусочно гладких поверхностей, и пусть $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G.

Пусть на замыкании $\overline{G}$ области G задано непрерывное векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$, для которого $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$.

Теорема 1 (Остроградского–Гаусса). *Пусть для замкнутой области $\overline{G}$ существуют три разбиения: $\tau_x = \{\overline{G}_{x,m}\}_{m=1}^{m_x}$, $\tau_y = \{\overline{G}_{y,m}\}_{m=1}^{m_y}$, $\tau_z = \{\overline{G}_{z,m}\}_{m=1}^{m_z}$, где $G_{x,m}$, $G_{y,m}$, $G_{z,m}$ — Ox-простые, Oy-простые и Oz-простые области соответственно.*

Пусть $\vec{a} = P\vec{\imath}+Q\vec{\jmath}+R\vec{k}$ — непрерывное векторное поле на $\overline{G}$, функции $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G.

Тогда справедлива формула

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial G} (\vec{a}, \vec{n})\, dS \tag{4}$$

Это равенство называется формулой Остроградского–Гаусса.

Доказательство. Будем рассматривать лишь поле вида $\vec{a} = R\vec{k}$, т. к. случаи полей $P\vec{\imath}$, $Q\vec{\jmath}$ рассматриваются аналогично, а из доказательства формулы (4) во всех трёх случаях следует утверждение теоремы.

1-й шаг. Пусть область G является Oz-простой (см. определение 4). Тогда, сводя тройной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \\ = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy = \\ = \iint_D R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy - \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy.$$

Пусть S_1 — нижняя, S_2 — верхняя, S_0 — боковая сторона поверхности ∂G. Ориентируем их с помощью единичного вектора $\vec{n}$ внешней (по отношению к G) нормали.

Тогда из последней цепочки равенств получаем, что

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \\ = \iint_{S_2^{\vec{n}}} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{S_1^{\vec{n}}} R(x,y,z)\,dx\,dy = \\ = \iint_{S_2} (\vec{a},\vec{n})\,dS + \iint_{S_1} (\vec{a},\vec{n})\,dS + \iint_{S_0} (\vec{a},\vec{n})\,dS,$$

поскольку последнее слагаемое равно нулю, т. к. $(\vec{a},\vec{n}) = 0$ на S_0. Следовательно, в условиях шага 1 формула (4) справедлива.

2-й шаг. Пусть условия теоремы выполнены при $\vec{a} = R\vec{k}$, и пусть $\tau_z = \{\overline{G}_{z,m}\}_{m=1}^{m_z}$ — разбиение $\overline{G}$ из условия теоремы. Тогда, используя результат шага 1, имеем

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \sum_{m=1}^{m_z}\iiint_{G_{z,m}} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \sum_{m=1}^{m_z}\iint_{\partial G_{z,m}} (\vec{a},\vec{n}^{(m)})\,dS = \iint_{\partial G} (\vec{a},\vec{n})\,dS.$$

Здесь $\vec{n}^{(m)}$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial G_{z,m}$ области $G_{z,m}$. При получении последнего равенства учтено, что на общей части $\partial G_{z,m}\cap\partial G_{z,p}$ границ двух Oz-простых областей $G_{z,m}$ и $G_{z,p}$ $(m\neq p)$ внешние нормали $\vec{n}^{(m)}$ и $\vec{n}^{(p)}$ противоположны. Поэтому сумма потоков вектора $\vec{a}$ через эту общую часть границы в направлениях $\vec{n}^{(m)}$ и $\vec{n}^{(p)}$ равна нулю.

Следовательно, в последней сумме интегралы по $\partial G_{z,m}$ можно заменить интегралами по $\partial G\cap\partial G_{z,m}$. Поскольку $\bigcup_{m=1}^{m_z}(\partial G\cap G_{z,m}) = \partial G$, мы приходим к последнему равенству последней цепочки.

Таким образом, утверждение теоремы для поля $\vec{a}=R\vec{k}$, а вместе с ним и для общего случая векторного поля $\vec{a}$, установлено.

Получим одно следствие формулы Остроградского–Гаусса. Пусть векторное поле $\vec{a}=P\vec{\imath}+Q\vec{\jmath}+R\vec{k}$ непрерывно вместе с производными P'_x, Q'_y, R'_z в некоторой окрестности $U(M)$ точки $M\in\mathbb{R}^3$. Пусть B_ε — шар радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке M, ∂B_ε — поверхность шара (сферы), $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂B_ε. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon>0$

$$\iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{a},\vec{n})\,dS.$$

В силу теоремы о среднем для некоторой точки $M_\varepsilon\in B_\varepsilon$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_\varepsilon) = \frac{1}{\mu B_\varepsilon}\iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{a},\vec{n})\,dS,$$

а в силу непрерывности $\operatorname{div}\vec{a}$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\mu B_\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{a}, \vec{n})\, dS. \tag{5}$$

Интеграл в правой части (5) не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат в $\mathbb{R}^3$, так что и дивергенция векторного поля не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат. Формула (5) может служить определением дивергенции. Такое определение дивергенции называют *геометрическим.*

Упражнение 1. Выразить меру области $G \subset \subset \mathbb{R}^3$ через поверхностные интегралы, применив формулу Остроградского–Гаусса к каждому из векторных полей: $\vec{a} = x\vec{\imath}$, $\vec{a} = y\vec{\jmath}$, $\vec{a} = z\vec{k}$, $\vec{a} = \frac{1}{3}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$.

Определение 5. Ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условиям теоремы Остроградского–Гаусса, будем называть *допустимой.*

Определение 6. Непрерывно дифференцируемое в области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ называется *соленоидальным*,если

$$\operatorname{div}\vec{a} = 0 \quad \text{на} \quad G.$$

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю его поток в направлении внешней нормали через границу любой допустимой области D, замыкание $\overline{D}$ которой лежит в области G.*

Доказательство достаточности следует из формулы (5), а необходимости — из формулы Остроградского–Гаусса (4).

Определение 7. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *объемно односвязной*, если для любой допустимой области $D \subset \mathbb{R}^3$ из условия $\partial D \subset G$ следует, что $D \subset G$.

Можно сказать условно, что объемно односвязная область не имеет «дыр», «пустот».

З а м е ч а н и е 1. Дают и отличное от определения 6 определение соленоидального поля в области $G \subset \mathbb{R}^3$, называя соленоидальным такое непрерывно дифференцируемое векторное поле, для которого равен нулю поток в направлении внешней нормали через границу ∂D любой допустимой области D с границей $\partial D \subset G$.

Ясно, что оба этих определения совпадают, если область G объемно односвязна.

§ 23.3. Формула Стокса

Пусть дважды непрерывно дифференцируемый (элементарный гладкий) кусок поверхности

$$S = \{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v) \in \overline{D}\} \subset G \subset \mathbb{R}^3,$$

где G — область в $\mathbb{R}^3$, D — плоская ограниченная область с границей

$$\partial D = \{(u(t), v(t)) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\}, \qquad (1)$$

представляющей собой простой кусочно гладкий контур;

$$\partial S = \Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\}. \qquad (2)$$

Говорят, что контур Γ *ограничивает* поверхность S, а также, что поверхность S *натянута* на контур Γ.

Будем считать контур ∂D ориентированным положительно относительно D.

Пусть

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

— ориентация поверхности S. При этом ориентации S и ∂S оказываются согласованными (по правилу штопора) (см. определение 21.7.4 и лемму 21.7.1).

Теорема 1 (Стокса). *Пусть на области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ и описанного типа поверхность $S \subset G$. Тогда, если ориентации S и Γ согласованы, то*

$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\, dS = \int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}), \tag{3}$$

т. е. поток вихря векторного поля через поверхность S равен циркуляции векторного поля по контуру, ограничивающему эту поверхность.

Формула (3) называется *формулой Стокса.*

В координатной форме формула (3) имеет вид

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS =$$
$$= \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим лишь случай векторного поля $\vec{a} = P\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, так как случаи полей $Q\vec{\jmath}$ и $R\vec{k}$ рассматриваются аналогично и все вместе приводят к формуле (4) общего вида. Итак,

$$\int_\Gamma P(x, y, z) dx =$$
$$= \int_a^b P\big(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))\big)\times$$
$$\times [x'_u(u(t), v(t))u'_t + x'_v(u(t), v(t))v'_t]\, dt =$$
$$= \int_{\partial D} P\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)[x'_u(u, v)\, du + x'_v(u, v)\, dv].$$

Применив формулу Грина к последнему интегралу, получаем, что

$$\int_\Gamma P\,dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] du\,dv =$$
$$= \iint_D \Bigg[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} -$$
$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\Bigg] du\,dv =$$
$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\,dv =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS,$$

что и требовалось показать.

З а м е ч а н и е 1. Справедливость теоремы (формулы) Стокса сохранится, если в её условиях требования к поверхности S уменьшить, сняв условие непрерывности вторых производных (которое является лишь «техническим», т. е. нужным лишь для проведения приведённого доказательства).

Таким образом, теорема Стокса остаётся верной, если под S понимать произвольный параметрически заданный (элементарный гладкий) кусок поверхности (терминологию см. в § 21.5). План доказательства такого обобщения теоремы Стокса может состоять в аппроксимации гладкого куска поверхности гладким дважды непрерывно дифференцируемым куском, применением к последнему доказанной теоремы Стокса и предельном переходе по последовательности аппроксимирующих гладких дважды непрерывно дифференцируемых кусков.

Не приводя самого доказательства, будем считать, что теорема (формула) Стокса верна в указанной более общей формулировке.

Формула Стокса (3) остаётся справедливой и при одновременной замене ориентаций куска поверхности S и его края $\partial S = \Gamma$ на противоположные, т. к. при этом обе части равенства (3) поменяют знаки на противоположные. Ориентации S и $\partial S = \Gamma$ после смены на противоположные также окажутся взаимно согласованными (по правилу штопора).

Теорему Стокса можно обобщить на случай ориентированной кусочно гладкой поверхности S.

Теорема 2 (Стокса). *Пусть $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ — ориентированная полем $\vec{\nu} = \{\vec{\nu}_i\}_{i=1}^{I}$ единичных нормалей кусочно гладкая поверхность, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^3$, ∂S — её край с ориентацией, порождённой заданной ориентацией поверхности S. Тогда для непрерывно дифференцируемого в области G векторного поля $\vec{a}$ справедлива формула Стокса*

$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\, dS = \sum_{i=1}^{I} \iint_{S_i} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu}_i)\, dS = \int_{\partial S} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в применении формулы Стокса (3) к каждому куску поверхности S_i и сложении полученных равенств. При этом части контурных интегралов по общей части $\partial S_i \cap \partial S_j$ $(i \neq j)$ соседних кусков S_i и S_j взаимно уничтожаются, поскольку они отличаются лишь ориентацией кривых, входящих в $\partial S_i \cap \partial S_j$. Эта ориентация определяется ориентацией S_i и S_j.

Теорема Стокса дает возможность подойти к понятию вихря поля с геометрической точки зрения. Пусть $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемое в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) векторное поле, $\vec{\nu}$ — единичный вектор, D_ε — круг радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке (x_0, y_0, z_0), лежащий в плоскости, ортогональной $\vec{\nu}$. Тогда по формуле Стокса и теореме о среднем

$$\int_{\partial D_\varepsilon} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{D_\varepsilon} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\, dS = (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\Big|_{(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)} \mu D_\varepsilon,$$

где ориентация окружности ∂D_ε согласована с $\vec{\nu}$ по правилу штопора; $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in D_\varepsilon$. Отсюда

$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\mu D_\varepsilon} \int_{\partial D_\varepsilon} (\vec{a}, d\vec{r}). \tag{5}$$

Поскольку криволинейный интеграл второго рода не зависит от сдвига и поворота прямоугольной декартовой системы координат, то и $(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})$ не зависит от сдвига и поворота этой системы координат. То же относится, следовательно, и к $\operatorname{rot}\vec{a}$ в силу произвольности вектора $\vec{\nu}$.

Правая часть (5) может быть принята за определение проекции $\operatorname{rot}\vec{a}$ на $\vec{\nu}$.

§ 23.4. Потенциальные векторные поля (продолжение)

Напомним определение 20.5.1 потенциального поля.

Определение 1. Непрерывное на области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ называется *потенциальным в области* G, если существует непрерывно дифференцируемая функция (*потенциал*) $U\colon G \to \mathbb{R}$ такая, что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{на} \quad G. \tag{1}$$

В силу теоремы 20.5.1 необходимым и достаточным условием потенциальности *непрерывного* на области G векторного поля $\vec{a}$ является условие равенства нулю его циркуляции

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0 \tag{2}$$

по любому кусочно гладкому контуру $\Gamma \subset G$.

Выясним связь между потенциальностью непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ и условием

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= (R'_y - Q'_z)\vec{\imath} + (P'_z - R'_x)\vec{\jmath} + (Q'_x - P'_y)\vec{k} = \vec{0}, \qquad (3)$$

при выполнении которого векторное поле $\vec{a}$ называется *безвихревым.*

Теорема 1. *Пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле в области $G \subset \mathbb{R}^3$ потенциально.*

Тогда оно является безвихревым.

Эта теорема содержится как часть в теореме 20.5.2.

Условие (3), являясь необходимым условием потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$, не является достаточным в случае произвольной области $G \subset \mathbb{R}^3$.

Пример 1. Пусть $G = \mathbb{R}^3 \setminus Oz$, $\vec{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, $(x, y, z) \in G$.

Тогда $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в области G. Однако поле $\vec{a}$ не является потенциальным, в чём можно убедиться, вспомнив, что его циркуляция по окружности $C_R = \{(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\colon 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ радиуса R равна

$$\int_{C_R} (\vec{a}, d\vec{r}) = 2\pi \neq 0,$$

см. пример 20.5.1.

Условие (3) оказывается необходимым и достаточным условием (критерием) потенциальности поля для области $G \subset \mathbb{R}^3$ с некоторым геометрическим свойством, называемым *поверхностной односвязностью.*

Определение 2. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностно односвязной*, если для любой простой замкнутой ломаной $\Lambda \subset G$ существует поверхность $S \subset G$, удовлетворяющая условиям теоремы Стокса и натянутая на Λ.

Пример 2. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит отрезок с концами в этих точках.

Выпуклая область является поверхностно односвязной. В самом деле, пусть простая замкнутая ломаная $\Lambda \subset \subset G$. Покажем, что на неё можно натянуть лежащую в области G поверхность S, удовлетворяющую условиям теоремы Стокса. Пусть

$$\Lambda = \{\vec{\rho}(u) \,:\, 0 \leqslant u \leqslant 2\pi\},$$

$0 = u_0 < u_1 < \ \ldots < u_I = 2\pi$, $A_i = \hat{\rho}(u_i)$ — последовательно занумерованные её вершины ($A_I = A_0$). Выберем произвольную точку $B \in G$, не лежащую ни на одной прямой, соединяющей точки A_{i-1} и A_i ($i = 1, \ \ldots, I$). Рассмотрим кусочно гладкую поверхность $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$, гладкие куски S_i которой являются треугольниками с вершинами A_{i-1}, A_i, B. Очевидно, что S и является искомой поверхностью.

Пример 3. Область G из примера 1 не является поверхностно односвязной, т. к., например, на ломаную Λ, лежащую в плоскости $z = 0$ и «охватывающую» ось Oz, нельзя натянуть требуемую поверхность S, лежащую в области G, т. е. не пересекающую ось Oz. В качестве такой ломаной Λ можно взять, например, ломаную, вписанную в окружность C_R из примера 1, в частности, равносторонний треугольник в плоскости $z = 0$ с центром в точке $(0, 0, 0)$.

Пример 4. Область, образованная вращением вокруг оси Oz открытого круга плоскости Oxz, не пересекающего оси Oz, и называемая *тором*, не является поверхностно односвязной.

Теорема 2. *Пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ задано в поверхностно односвязной области G.*

Тогда для его потенциальности необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Доказательство. Необходимость установлена в теореме 20.5.2. Для доказательства достаточности покажем, что для произвольного кусочно гладкого контура $\Gamma \subset \subset G$ выполняется условие (2). В силу леммы 20.3.1 об аппроксимации криволинейного интеграла второго рода достаточно убедиться в выполнении условия

$$\int_{\Lambda} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0 \tag{4}$$

для любой замкнутой ломаной $\Lambda \subset G$. Достаточно установить (4) для любой простой замкнутой ломаной Λ. Натянем на Λ поверхность $S \subset G$, удовлетворяющую условиям теоремы Стокса, что можно сделать в силу поверхностной односвязности области G. Тогда по теореме Стокса

$$\int_{\Lambda} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\nu})\, dS = \iint_S (\vec{0}, \vec{\nu})\, dS = 0.$$

Следовательно, условие (4) выполняется, и теорема доказана.

Замечание 1. Сравним характер условий (1), (2), (3) потенциальности непрерывно дифференцируемого поля $\vec{a}$.

Условие (3) является *локальным* (для его проверки в данной точке достаточно знать поведение поля $\vec{a}$ в сколь угодно малой окрестности этой точки). Условия (1), (2) называют *интегральными* (для их проверки требуется знание поведения поля $\vec{a}$ «в целом»). Мы видели (теорема 1), что из интегрального условия вытекает локальное для произвольной области G, т. к. для доказательства привлекаются свойства поля $\vec{a}$ в лежащем в области малом шаре с центром в данной точке.

Интегральные условия (1) или (2) вытекает из локального условия (3) лишь при некотором специальном геометрическом условии (поверхностная односвязность) на область (см. теорему 2 и пример 1).

Глава 24
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 24.1. Определение ряда Фурье и принцип локализации

Определение 1. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (a_k,\ b_k \in \mathbb{R})$$

называется *тригонометрическим* рядом.

Множество функций

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \sin 3x,\ \ldots\right\}$$

называется *тригонометрической системой.*

Тригонометрическая система функций является *ортогональной* системой в том смысле, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx\, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

и этот ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Функция f непрерывна на $[-\pi,\pi]$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Умножим равенство (1) почленно на $\cos nx$ или на $\sin nx$ ($n\in\mathbb{N}$). Полученные ряды также будут сходиться равномерно и их почленное интегрирование с использованием свойства ортогональности функций системы дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin^2 nx\,dx = \pi b_n,$$

откуда получаем вторую и третью формулы из (2). Первая из формул (2) получается почленным интегрированием ряда (1).

Заметим, что члены тригонометрического ряда являются определёнными на действительной оси 2π-периодическими функциями. Поэтому и сумма тригонометрического ряда (если этот ряд сходится) также является 2π-периодической функцией.

Определение 2. Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тригонометрический ряд с коэффициентами a_k, b_k, определёнными формулами (2), называется (*тригонометрическим*) *рядом Фурье* функции f, а коэффициенты a_k, b_k — *коэффициентами Фурье* функции f.

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{3}$$

понимая под такой записью, что функции f поставлен в соответствие её ряд Фурье.

Лемму 1 можно переформулировать так: *равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

Упражнение 1. Показать, что тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, является рядом Фурье.

Заметим, что если 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на каком-либо отрезке $[a, a+2\pi]$ длины 2π, то она будет абсолютно интегрируемой и на любом отрезке $[b, b+2\pi]$ и при этом

$$\int_b^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx.$$

Это свойство, очевидное с геометрической точки зрения, без труда можно доказать аналитически. В частности, коэффициенты Фурье 2π-периодической функции f можно вычислять, заменив в формулах (2) интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ на интеграл по любому отрезку $[a, a+2\pi]$.

С другой стороны, каждую заданную на $[a-\pi, a+\pi]$ абсолютно интегрируемую функцию можно (изменив при необходимости её значение в точке $a-\pi$ или в точке $a+\pi$, или и в той и в другой точке) продолжить до определённой на всей оси 2π-периодической функции. При этом изменение её значения в одной или двух точках не изменит коэффициентов Фурье (2) её 2π-периодического продолжения, а значит, и ряда Фурье (3). Поэтому сходимость и другие свойства ряда Фурье можно изучать, считая, что функция f задана лишь на отрезке длиной 2π, например, на $[-\pi, \pi]$.

Мы будем изучать в первую очередь вопросы сходимости ряда Фурье в данной точке и на отрезке, равномерной сходимости на всей числовой оси и т. п. Наибольший интерес представляет случай, когда ряд Фурье функции f сходится к функции f в том или ином смысле. В этом случае говорят, что функция f *разложена в ряд Фурье.*

Теорема 1 (Римана об осцилляции). *Пусть функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности будем считать, что $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ (если это не так, то функцию f можно доопределить нулём на $(-\infty, +\infty)\setminus(a, b)$). По теореме 14.8.4 функция f является непрерывной в среднем, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{4}$$

Заменив переменное x на $x + \frac{\pi}{\lambda}$ в следующем интеграле, получаем

$$I(\lambda) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right]\cos\lambda x\,dx.$$

В силу (4)

$$|I(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right|dx \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to\infty.$$

Для интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$ доказательство аналогично.

Следствие 1. *Коэффициенты Фурье* (2) *абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции стремятся к нулю при* $k \to \infty$.

Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Частичная сумма ряда Фурье

$$S_n(x; f) \coloneqq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется *суммой Фурье порядка* $n \in \mathbb{N}$ функции f. Приведём её к компактному виду, удобному для дальнейших исследований.

Назовём *ядром Дирихле* функцию

$$D_n(x) \coloneqq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{5}$$

Последнее равенство (при $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, правая часть понимается как предел частного при $x \to 2m\pi$) устанавливается следующим образом. При $x \neq 2m\pi$

$$D_n(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) x \right) \right) =$$

$$= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Ядро Дирихле (5) является, очевидно, 2π-периодической чётной непрерывной функцией и

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |D_n(x)| = D_n(0) = n + \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1. \tag{6}$$

Преобразуем сумму Фурье $S_n(x; f)$, подставив в неё вместо коэффициентов Фурье их выражения (2). Получим

$$\begin{aligned}
&S_n(x; f) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\,dt = \\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] dt = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{7}$$

Сделав в последнем интеграле (называемом *интегралом Дирихле*) замену переменного t на $t + x$ и сдвиг отрезка интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) D_n(t) f(x+t)\,dt = \\
= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]\,dt.
\end{aligned} \tag{8}$$

При произвольном $\delta \in (0, \pi)$ представим последний интеграл в виде

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt.$$

Во втором из этих интегралов знаменатель дроби $2\sin\frac{t}{2} \geqslant 2\sin\frac{\delta}{2} > 0$, поэтому сама дробь абсолютно интегрируема как функция переменного t.

Следовательно, второй интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$ по теореме Римана об осцилляции. Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Пределы*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0; f),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt$$

существуют или не существуют одновременно и совпадают в случае их существования.

Следствием теоремы 2 является

Принцип локализации: *сходимость ряда Фурье функции f в точке x_0 и величина его суммы в случае сходимости определяются поведением функции f на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, т. е. в сколь угодно малой окрестности точки x_0.*

§ 24.2. Сходимость ряда Фурье

Пусть x_0 — точка разрыва первого рода функции f. Введём следующие обобщения односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}.$$

Определение 1. Точку x_0 назовём *почти регулярной* точкой функции f, если существуют $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Если при этом $f(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то x_0 назовём *регулярной* точкой функции f.

Если в почти регулярной точке функция f непрерывна справа (слева), то она имеет в этой точке правую (левую) производную.

Если функция f непрерывна в точке x_0 и имеет в ней правую и левую производные, то x_0 — регулярная точка функции f.

Теорема 1. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и пусть x_0 — её почти регулярная точка.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$. Если же при этом x_0 — регулярная точка f (в частности, если f непрерывна в точке x_0), то ряд Фурье в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть x_0 — почти регулярная точка функции f. Из формулы (24.1.8) с помощью (24.1.6) получаем

$$S_n(x_0; f) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt -$$

$$-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right]\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \quad (1)$$

Дробь $\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$, доопределённая единицей при $t = 0$, является непрерывной функцией на отрезке $[0, \pi]$. Дробь $\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ является абсолютно интегрируемой на $[0, \pi]$ функцией, поскольку таковой является её числитель, и при $t \to 0+0$ она имеет конечный предел. То же утверждение относится и ко второй дроби в квадратных скобках. Следовательно, в подынтегральном выражении последнего интеграла множитель при $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ представляет собой абсолютно интегрируемую на $[0,\pi]$ функцию. По теореме Римана об осцилляции, последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$S_n(x_0; f) \to \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. В условии теоремы требование существования $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ можно заменить (как это видно из доказательства) более слабым требованием, например, требованием выполнения неравенств

$$\begin{aligned} &|f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)| \leqslant Mh^\alpha, \quad \forall\, h \in (0, \delta), \\ &|f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)| \leqslant Mh^\alpha, \quad \forall\, h \in (0, \delta) \end{aligned} \tag{2}$$

при некоторых $\alpha \in (0, 1]$, $\delta > 0$, $M > 0$. Условия (2) называются *односторонними условиями Гёльдера степени* α, а при $\alpha = 1$ ещё и *односторонними условиями Липшица.*

Следствие 1. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и пусть существует $f'(x_0)$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.*

З а м е ч а н и е 2. Непрерывность на $\mathbb{R}$ 2π-периодической функции не является достаточным условием сходимости её ряда Фурье в данной точке x_0. Существуют примеры 2π-периодических непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, ряды Фурье которых расходятся в каждой рациональной точке.

В теореме 1, замечании 1 и следствии 1 приводятся достаточные условия сходимости ряда Фурье в данной точке. Существуют и значительно более общие достаточные условия такой сходимости, например, признак Дини, который рекомендуется доказать в качестве упражнения.

Признак Дини.Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и пусть для некоторых x_0, $A \in \mathbb{R}$ сходится интеграл

$$\int_0^\pi |f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2A| \frac{dt}{t}.$$

Тогда ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к A.

З а м е ч а н и е 3. Пусть функция f задана и абсолютно интегрируема на отрезке длиной 2π, например, на $[-\pi, \pi]$. Для выяснения сходимости её ряда Фурье в концах отрезка можно применить теорему 1, продолжив предварительно функцию f до 2π-периодической функции (изменив при необходимости её значения на одном или обоих концах отрезка). После такого продолжения точка $x = -\pi$ будет почти регулярной тогда и только тогда, когда существуют $f'_+(-\pi)$, $f'_-(\pi)$. В этом случае ряд Фурье функции f сходится в точке $x_0 = -\pi$ к $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Аналогично решается вопрос о сходимости ряда Фурье в точке $x_0 = \pi$.

Пример 1. Найдём ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

Пусть $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $0 < x < 2\pi$, $\tilde{f}(0) = 0$. Как мы знаем, коэффициенты Фурье функции $\tilde{f}$ можно вычислить по формулам (24.1.2) либо по формулам, отличающимся от них сдвигом отрезка интегрирования. В силу нечётности $\tilde{f}$ $a_k = 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Интегрируя по частям, получаем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}(\pi - x)\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx = \frac{1}{k}.$$

Заметим, что всякая точка $x \in \mathbb{R}$ является регулярной точкой функции $\tilde{f}$. Следовательно,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Итак, сумма ряда Фурье $\tilde{f}$ функции f совпадает с f на интервале $(0, 2\pi)$ и отличается от f в концах интервала.

Определение 2. Функцию f называют *непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой* на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и если существует такое разбиение $\{a_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b$), что производная f' непрерывна на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, если в его концах производную понимать как одностороннюю.

2π-периодическую функцию будем называть *кусочно непрерывной* (*непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой*), если она кусочно непрерывна (непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 2. *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая функция.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leqslant C\frac{\ln n}{n} \quad \textit{при} \quad n \geqslant 2,$$

где C не зависит от n.

Доказательство. Пусть $0 < \delta = \delta_n < \pi$. Перепишем формулу (1) в виде

$$S_n(x; f) - f(x) = \\ = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) g_x(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = I_n + J_n, \quad (4)$$

$$g_x(t) \coloneqq \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Пусть $M_1 = \max|f'|$. С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем, что при $0 < t \leqslant \pi$

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2M_1 t.$$

Следовательно, при $0 < t \leqslant \pi$

$$|g_x(t)| \leqslant \frac{2M_1 t}{2\sin\frac{t}{2}} \leqslant \pi M_1$$

и (за исключением, быть может, конечного числа значений t)

$$\left|\frac{d}{dt}g_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t) - f'(x-t)|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} +$$

$$+|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi M_1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{2\pi M_1}{t}.$$

Очевидно, что $|I_n| \leqslant \delta M_1$.

С помощью интегрирования по частям имеем

$$J_n = -\frac{1}{\pi}g_x(t)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_\delta^\pi + \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi\left(\frac{d}{dt}g_x(t)\right)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\,dt.$$

Отсюда

$$|J_n| \leqslant \frac{M_1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2M_1\ln\frac{1}{\delta}}{n+\frac{1}{2}} = \left(1+2\ln\frac{1}{\delta}\right)M_1\frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

Полагая $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, получаем, что при $n \geqslant 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|S_n(x;f) - f(x)| \leqslant |I_n| + |J_n| \leqslant \frac{C\ln n}{n},$$

где C не зависит от n. Теорема доказана.

Другое доказательство теоремы 2 совпадает с доказательством случая $\alpha = 1$ теоремы 3.

Подчеркнём, что теорема 2 не только устанавливает равномерную сходимость ряда Фурье, но и дает оценку скорости стремления к нулю остатка этого ряда.

Равномерная сходимость ряда Фурье периодической функции может быть установлена и при условиях более общих, чем в теореме 2, например, для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Определение 3. Пусть $E = R$ или $E = [a,b]$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Говорят, что функция $f\colon\ E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Гёльдера степени* α, (или *условию Липшица* в случае $\alpha = 1$), если $\exists\, M_\alpha > 0$:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M_\alpha |x-y|^\alpha \quad \forall\, x,y \in E.$$

Заметим, что функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, непрерывны и что класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера степени α, сужается при увеличении α.

Если функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то она удовлетворяет условию Липшица на $[a,b]$.

Следующая теорема обобщает теорему 2.

Теорема 3. *Пусть 2π-периодическая функция f удовлетворяет на $\mathbb{R}$ условию Гёльдера степени α, $0<\alpha\leqslant 1$.*

Тогда её ряд Фурье сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x;f)-f(x)| \leqslant C_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall\, n \geqslant 2,$$

где C_α не зависит от n.

Доказательство. Воспользуемся формулой (4) в виде

$$S_n(x;f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt.$$

Положим

$$h_x(t) \coloneqq \frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad \lambda=\lambda_n=n+\frac{1}{2}, \quad \frac{2\pi}{\lambda}\leqslant\delta<\pi.$$

Так же, как при доказательстве теоремы Римана об осцилляции, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_x(t)\sin\lambda t\,dt = -\int_{-\pi-\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi-\frac{\pi}{\lambda}} h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda t\,dt =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[h_x(t)-h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]\sin\lambda t\,dt.$$

Следовательно,

$$|S_n(x;f)-f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-h_x(t)\right|\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\ldots dt + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)\ldots dt = I_{\delta,n}(x)+J_{\delta,n}(x). \quad (5)$$

Напомним, что $\frac{2}{\pi}t < \sin t < t$ при $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Поэтому при $|t| \leqslant 2\delta$

$$|h_x(t)| \leqslant \frac{\pi M_\alpha |t|^\alpha}{2|t|} = \frac{\pi}{2} M_\alpha |t|^{\alpha-1},$$

так что

$$I_{\delta,n}(x) \leqslant M_\alpha \int_0^{2\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{\alpha} M_\alpha 2^\alpha \delta^\alpha. \tag{6}$$

Для оценки $J_{\delta,n}(x)$ при $\frac{2\pi}{\lambda} \leqslant \delta < |t| < \pi$ воспользуемся равенством

$$h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - h_x(t) =$$
$$= \frac{f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)}{2\sin\frac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x+t)}{2\sin\frac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)(f(x+t)-f(x)),$$

так что

$$\left|h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - h_x(t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_1\left|f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x+t)\right|}{|t|} + \frac{C_2|f(x+t)-f(x)|}{t^2\lambda} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_1 M_\alpha \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^\alpha}{|t|} + \frac{C_2 M_\alpha |t|^\alpha}{t^2\lambda} \leqslant \frac{CM_\alpha}{|t|\lambda^\alpha}, \tag{7}$$

$$J_{\delta,n}(x) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{CM_\alpha}{\lambda^\alpha}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{CM_\alpha}{\pi\lambda^\alpha}\ln\frac{\pi}{\delta}. \tag{8}$$

Полагая $\delta = \frac{7}{n}$ и собирая оценки, приходим к утверждению теоремы.

Часть теоремы 2, касающаяся факта равномерной сходимости ряда Фурье, допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Пусть на некотором отрезке $[a', b']$ функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема.*

Тогда ряд Фурье функции f равномерно сходится к f на любом отрезке $[a, b] \subset (a', b')$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \lambda_n = n + \frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{\lambda} \leqslant \delta$, $[a-2\delta, b+2\delta] \subset [a', b']$, $x \in [a, b]$. Воспользуемся оценкой (5). В силу (6) при $\alpha = 1$

$$I_{\delta,n}(x) \leqslant 2\delta \max_{[a',b']} |f'|. \tag{9}$$

Для получения оценки $J_{\delta,n}$ используем первую из оценок (7). Тогда

$$J_{\delta,n}(x) \leqslant \frac{C_1}{\pi\delta} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(u) \right| du + \\ + \frac{C_2}{2\pi\delta^2\lambda} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|\, du + 2\pi \max_{[a,b]} |f| \right).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, что $\sup\limits_{[a,b]} I_{\delta,n} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant \frac{2\pi}{\delta}$. При выбранном δ

$$\exists\, n_\delta \in \mathbb{N} \ : \ \sup_{[a,b]} J_{\delta,n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\delta. \tag{10}$$

Тогда из оценок (5), (9), (10) следует, что

$$\sup_{x\in[a,b]} |S_n(x; f) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

и теорема доказана.

Отметим, что теорема 4 расширяет сформулированный ранее принцип локализации, показывая, что для утверждения о равномерной сходимости ряда Фурье функции f на отрезке $[a, b]$ достаточно знать поведение этой функции лишь на ε-окрестности $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ этого отрезка при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Из теоремы 4 следует, например, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ из примера 1 на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, равномерно сходится к функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

Теорему 4 можно обобщить, заменив условие кусочно непрерывной дифференцируемости функции на условие Гёльдера степени $\alpha > 0$ на $[a', b']$.

§ 24.3. Приближение непрерывных функций многочленами

Определение 1. Функция вида

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad (A_n^2 + B_n^2 > 0)$$

называется *тригонометрическим многочленом* (*тригонометрическим полиномом*) степени n.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T, что*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{J}$ — разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$, $x_j = -\pi + j\,\frac{2\pi}{J}$. Построим ломаную (вписанную в график функции f), соединив последовательно точки $(x_j, f(x_j))$ графика f отрезками. Обозначим через $\Lambda_J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-периодическую непрерывную функцию, график которой совпадает на $[-\pi, \pi]$

с построенной ломаной. Очевидно, Λ_J — кусочно линейная на $[-\pi,\pi]$ функция, а значит, и непрерывная кусочно непрерывно дифференцируемая функция.

Непрерывная на отрезке функция f является равномерно непрерывной. Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad |x' - x''| \leqslant \frac{2\pi}{J},$$

если $J = J(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Тогда

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \Lambda_J(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция Λ_J удовлетворяет условиям теоремы 24.2.1, поэтому её ряд Фурье сходится к Λ_J равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, существует такое $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |\Lambda_j(x) - S_n(x;\Lambda_J)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x;\Lambda_J)| < \varepsilon,$$

т. е. утверждение теоремы при

$$T(x) = S_n(x;\Lambda_J).$$

Теорему 1 в эквивалентной форме можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1′. (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, и пусть $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T, что*

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Упражнение 1. Показать, что последняя теорема перестаёт быть верной, если отбросить условие $f(-\pi) = f(\pi)$.

Заметим, что в теореме 1 в качестве тригонометрического многочлена T нельзя (вообще говоря) взять $S_n(x; f)$ (частичную сумму ряда Фурье функции f), поскольку ряд Фурье непрерывной функции не обязан равномерно сходиться (не обязан даже и поточечно сходиться) к функции f. Однако в качестве T можно взять $\sigma_n(x; f)$ (*сумму Фейера* функции f) при достаточно большом n, где

$$\sigma_n(x; f) = \frac{S_0(x; f) + S_1(x; f) + \ \ldots + S_n(x; f)}{n+1}$$

— среднее арифметическое сумм Фурье, как это следует из теоремы Фейера.

Теорема 2 (Фейера). *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция. Тогда*

$$\sigma_n(x; f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Оставим эту теорему без доказательства.

Факт сходимости последовательности сумм Фейера в теореме Фейера выражают ещё и следующим образом.

Ряд Фурье 2π-периодической непрерывной функции f суммируем к $f(x)$ методом средних арифметических.

Метод суммирования ряда средними арифметическими (последовательности его частичных сумм) дает возможность для некоторых расходящихся рядов определить понятие их суммы как предела последовательности этих средних арифметических. Для сходящегося ряда это понятие совпадает с понятием суммы ряда.

Пример 1. Расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ \ldots$ суммируем методом средних арифметических к числу $\frac{1}{2}$.

С помощью теоремы 1 (Вейерштрасса) доказывается возможность приближения с любой точностью непрерывной на отрезке функции подходящим алгебраическим многочленом P.

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен P, что

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Отобразим линейно отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и положим $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Продолжим f^* чётным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, а затем на всю ось с периодом 2π, сохранив обозначение f^*. Полученная функция $f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является 2π-периодической и непрерывной на $\mathbb{R}$. По теореме 1 для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен T, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |f^*(t) - T(t)| \leqslant \max_{t \in \mathbb{R}} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функции $\cos kt$, $\sin kt$ (а значит, и $T(t)$) раскладываются в степенные ряды с радиусом сходимости $R = +\infty$. Следовательно, эти ряды равномерно сходятся на каждом отрезке. Поэтому существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где P_n — многочлен Тейлора функции T.

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |f^*(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

или (возвращаясь к переменному x)

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)-P_n\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорему 3 можно переформулировать следующим образом.

Всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является равномерным пределом некоторой последовательности алгебраических многочленов.

§ 24.4. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье

Лемма 1. *Пусть f — 2π-периодическая и кусочно непрерывная функция, a_k, b_k — её коэффициенты Фурье.*

Тогда справедливо неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала f является 2π-периодической непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой функцией. По теореме 24.2.2, она раскладывается в равномерно сходящийся на $\mathbb{R}$ ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx. \tag{2}$$

Умножим обе части равенства (2) на $f(x)$ и проинтегрируем полученный ряд (также равномерно сходящийся) почленно.

В силу формул (24.1.2) для коэффициентов Фурье получим *равенство Парсеваля*:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx, \tag{3}$$

следствием которого является (1).

Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям леммы, и пусть $\Lambda_J\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая непрерывная функция, кусочно линейная на $[-\pi,\pi]$, построенная при доказательстве теоремы Вейерштрасса 24.3.1 (график Λ_J представляет собой вписанную в график f ломаную). Обозначим через $a_k(f)$, $b_k(f)$ коэффициенты Фурье функции f.

Используя неравенство (1) в уже доказанном случае, получаем

$$\frac{a_0^2(\Lambda_J)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2(\Lambda_J)+b_k^2(\Lambda_J))\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda_J^2(x)\,dx\ \forall\,n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Пусть $n\in\mathbb{N}$ фиксировано, а $J\to\infty$. Тогда, как легко видеть,

$$a_k(\Lambda_J)\to a_k(f),\quad b_k(\Lambda_J)\to b_k(f),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda_J^2(x)\,dx\to\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Переходя к пределу в неравенстве (4), получаем, что

$$\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2(f)+b_k^2(f))\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\to\infty$, приходим к утверждению леммы.

З а м е ч а н и е 1. Равенство Парсеваля (3) и (следовательно) неравенство Бесселя (1) будут распространены в § 25.4 на абсолютно интегрируемые на $(-\pi,\pi)$ функции со сходящимися интегралами в правых частях (3), (1).

Теорема 1 (о почленном дифференцировании ряда Фурье). *Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема, и пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— её разложение в ряд Фурье.

Тогда

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx,$$

т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье функции почленным дифференцированием.

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Тогда

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx = kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = -ka_k.$$

Лемма 2. *Пусть 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка $m \in \mathbb{N}$.*

Тогда для коэффициентов Фурье функции f выполняется оценка

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть

$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Применяя m раз теорему 1, получаем, что

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m(|a_k| + |b_k|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку коэффициенты Фурье α_k, $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$, то из последнего равенства получаем (5).

Лемма 2 показывает, что коэффициенты Фурье функции f тем быстрее стремятся к нулю, чем лучше дифференциальные качества функции f.

Утверждение леммы 2 можно несколько усилить, если применить неравенство Бесселя (1) к производной $f^{(m)}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{(m)}(x))^2 dx < \infty.$$

Установим оценки скорости приближения функции её суммами Фурье, зависящие от дифференциальных свойств функции. Для этого изучим характер сходимости ряда, *сопряжённого с рядом Фурье* 2π-периодической непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой функции f, т. е. ряда

$$\tilde{S}(x; f) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx, \tag{6}$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Сопряжённым ядром Дирихле называется функция

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Последнее равенство устанавливается так же, как (24.1.5). Так же, как (24.1.8), показывается, что частичную сумму

$$\tilde{S}_n(x; f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx - b_k \cos kx$$

ряда (6) можно представить в виде

$$\tilde{S}_n(x; f) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{D}_n(t)[f(x+t) - f(x-t)]\,dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h_x(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt + \tilde{f}(x),$$

где

$$h_x(t) \coloneqq \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$\tilde{f}(x) \coloneqq -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Лемма 3. *Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема, a_k, b_k — её коэффициенты Фурье.*

Тогда ряд (6) сходится равномерно и при некотором $C >$ > 0 и при всех $n \geqslant 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx \right| \leqslant C\frac{\ln n}{n}. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $M_1 \coloneqq \max_{\mathbb{R}} |f'|$. С помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leqslant 2M_1 t, \quad 0 < t \leqslant \pi,$$

откуда следует, в частности, что для каждого x существует $\tilde{f}(x)$ (как интеграл от непрерывной и ограниченной на $(0, \pi]$ функции) и что ряд (6) сходится. При $2 \leqslant n < p$ оценим

$$\tilde{S}_p(x, f) - \tilde{S}_n(x; f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_x(t) \cos\left(p + \frac{1}{2}\right) t\, dt -$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_x(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt,$$

используя оценки

$$|h_x(t)| \leqslant \pi M_1,$$
$$\left|\frac{d}{dt} h_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t) + f'(x-t)| \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} +$$
$$+ |f(x+h) - f(x-h)| \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi M_1}{2 \operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{2\pi M_1}{t}.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 24.1.2, получаем оценку

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{S}_p(x; f) - \tilde{S}_n(x; f)| \leqslant C \frac{\ln n}{n} + C \frac{\ln p}{p} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant n < p,$$

которая при $p \to \infty$ влечёт за собой (7).

Напомним, что в теореме 15.4.2 (признак Дирихле сходимости числового ряда) установлена сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ и оценка его суммы

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant |a_1| \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \tag{8}$$

при выполнении условий:

1° последовательность $\{a_k\}$ монотонно стремится к нулю;

2° правая часть (8) конечна (т. е. последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена).

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и пусть 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно и при любом $\varepsilon > 0$

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; f)| = O\left(\frac{\ln n}{n^m}\right) = \\ = o\left(\frac{1}{n^{m-\varepsilon}}\right) \text{ при } n \to \infty. \quad (9)$$

Доказательство. Случай $m = 1$ совпадает с теоремой 24.2.2. Пусть $\varphi := f^{(m-1)}$ и α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции φ. По теореме 24.2.2

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right| \leqslant C\frac{\ln n}{n} \quad \forall\, n \geqslant 2. \qquad (10)$$

Пусть a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f. Пусть сначала $m-1$ чётно. Тогда в силу $m-1$ раз применённой теоремы 1 при $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|r_n(x; f)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = \\ = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right|.$$

В силу (8), (10)

$$|r_n(x;f)| \leqslant C\frac{\ln n}{n}\frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leqslant C\frac{\ln n}{n^m},$$

и (9) в этом случае установлено.

Пусть теперь $m-1$ нечётно. Тогда

$$|r_n(x;f)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| = \\ = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}}(\alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx)\right|.$$

Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx$ сходится по лемме 3. В силу (7), (8)

$$|r_n(x;f)| \leqslant C\frac{\ln n}{n}\frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leqslant C\frac{\ln n}{n^m},$$

и теорема доказана.

Теорема 2 показывает, что чем больше производных имеет функция f, тем с большей скоростью сходится её ряд Фурье.

З а м е ч а н и е 2. Лемму 2 и теорему 2 можно переформулировать для функции f, заданной лишь на отрезке $[-\pi,\pi]$, добавив условия на концах отрезка, гарантирующие выполнение для её 2π-периодического продолжения условий леммы 2 и теоремы 2 соответственно. Именно, для функции $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ следует считать выполненными следующие дополнительные условия на односторонние производные:

$$f_+{}^{(j)}(-\pi) = f_-{}^{(j)}(\pi) \quad \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

При соответствующей переформулировке теоремы 24.2.2 и теоремы 1 для функции $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ следует считать выполненным равенство $f(-\pi) = f(\pi)$.

Наряду с теоремой 2 докажем и теорему $2'$, хотя и менее сильную, но также устанавливающую связь между дифференциальными свойствами 2π-периодической функции и скоростью сходимости её ряда Фурье.

Доказательство теоремы $2'$ в отличие от доказательства теоремы 2 опирается не на анализ сходимости сопряжённого с рядом Фурье ряда, а на неравенство Бесселя (1).

Читатель может по своему усмотрению ограничиться изучением одной из этих двух теорем.

Теорема $2'$. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x;f)| = o\left(\frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}}\right) \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная сходимость к функции f её ряда Фурье установлена в теореме 24.2.2. Оценим остаток её ряда Фурье.

$$|r_n(x;f)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\alpha_k| + |\beta_k|)\frac{1}{k^m},$$

где α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции $f^{(m)}$, а последнее неравенство получено m-кратным применением теоремы 1. В силу неравенства Коши–Буняковского (10.1.2)

$$\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)\frac{1}{k^m} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2}\sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{2m}}}.$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $N \to \to \infty$ показывает, что оно остаётся верным, если в нём вместо N поставить ∞. Используя получившееся неравенство, имеем

$$|r_n(x;f)| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2\sum_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2)}\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}} = \varepsilon_n\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}}, \qquad (12)$$

причём $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + + \beta_k^2)$, вытекающей из неравенства Бесселя для функции $f^{(m)}$. Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^{2m}} \leqslant \int_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)n^{2m-1}}.$$

Отсюда и из (12) следует (11).

Теорема 3 (о почленном интегрировании ряда Фурье). *Пусть f — кусочно непрерывная на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция и*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

— её ряд Фурье. Тогда

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{a_0\,dt}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\,dt = \\ = \frac{a_0x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1-\cos kx), \qquad (13)$$

причём ряд в правой части равенства сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt.$$

Функция F непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt - \pi a_0 = 0.$$

Кроме того, её производная $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$ кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$. В силу теоремы 2 и замечания к ней ряд Фурье функции F сходится к функции F равномерно на $[-\pi, \pi]$:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx. \tag{14}$$

Найдём связь между коэффициентами Фурье A_k, B_k функции F и коэффициентами Фурье функции f.

Интегрируя по частям, получаем

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin kx}{k} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \sin kx\, dx = -\frac{b_k}{k}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично $B_k = \frac{a_k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Для нахождения A_0 положим в (14) $x = 0$. Получим

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx),$$

что совпадает с (13).

§ 24.5. Ряды Фурье $2l$-периодических функций. Комплексная форма рядов Фурье

Пусть $l > 0$, и пусть f — $2l$-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-l, l]$. Положим $f_l(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$. Тогда f_l — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Построив для f_l ряд Фурье и произведя обратную замену переменного x на $\frac{\pi x}{l}$, для функции f получаем ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx,$$

который называется *тригонометрическим рядом Фурье функции f периода $2l$.*

Подобным же образом на случай $2l$-периодических функций переносится и вся теория тригонометрических рядов Фурье.

Вместо такого способа перенесения теории рядов Фурье на случай $2l$-периодических функций можно было бы с самого начала рассмотреть ортогональную на $[-l, l]$ систему тригонометрических функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{l}x, \quad \sin\frac{\pi}{l}x, \quad \cos\frac{2\pi}{l}x, \quad \sin\frac{2\pi}{l}x, \quad \ldots$$

и на её основе построить теорию тригонометрических рядов Фурье, повторяющую все полученные при $l = \pi$ результаты и выкладки.

Оба указанных подхода приводят к одним и тем же результатам.

Для рядов Фурье существует комплексная форма записи.

Пусть
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Заменим в членах этого ряда $\cos kx$, $\sin kx$, воспользовавшись формулами Эйлера:
$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Получим
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_k - b_k i)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + b_k i)e^{-ikx} \right].$$

Полагая
$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - b_k i), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + b_k i),$$
получаем
$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Здесь *частичной суммой ряда* называется $S_n(x; f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, а ряд называется *сходящимся*, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x; f)$, который называется *суммой ряда*.

Заметим, что мы пришли бы к тому же ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, если бы, исходя из системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, ортогональной в том смысле, что
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{isx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-isx} dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq s,$$
начали строить такую же теорию рядов Фурье, как для тригонометрической системы.

Глава 25
МЕТРИЧЕСКИЕ, НОРМИРОВАННЫЕ И ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 25.1. Метрические и нормированные пространства

Определение 1. Множество R называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* (или *метрикой*) между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1° $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3° $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Элементы метрического пространства называют также *точками*.

Примером метрического пространства является n-мерное арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Другим примером является множество $C([a, b])$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|.$$

С помощью расстояния можно ввести понятия сходящейся последовательности точек метрического пространства, фундаментальной последовательности, полноты метрического пространства, ε-окрестности точки, открытого и замкнутого множества, замыкания множества и другие. С этими понятиями мы познакомимся на примере линейных нормированных пространств, входящих в класс метрических пространств. Перенос этих понятий и установленных на их основе свойств множеств на случай произвольного метрического пространства не составляет труда.

Определение 2. Множество R называется *действительным* (или *вещественным*) *линейным* (или *векторным*) *пространством*, если для каждых двух его элементов $x, y \in R$ определена их *сумма* $x + y \in R$ и для каждого элемента $x \in R$ и любого вещественного числа λ определено *произведение* $\lambda x \in R$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1° $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in R$;
2° $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in R$;
3° в R существует такой элемент $\vec{0}$, что $x + \vec{0} = x \quad \forall\, x \in R$;
4° для каждого $x \in R$ существует противоположный элемент, обозначаемый через $-x$ такой, что $x + (-x) = \vec{0}$;
5° $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
6° $1x = x \quad \forall\, x \in R$;
7° $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
8° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x \quad \forall\, x, y \in R,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Вычитанием называется операция, обратная сложению. Под *разностью* $x - y$ понимают $x - y \coloneqq x + (-y)$.

Если в этом определении множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел заменить на множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), то получим определение *комплексного линейного* (*векторного*) *пространства*.

Элементы линейного (векторного) пространства называют также *векторами.*

Определение 3. Если в линейном пространстве можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что линейное пространство *имеет размерность* n.

Если же в линейном пространстве можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что линейное пространство *бесконечномерно.*

Бесконечная система элементов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любое конечное число её элементов линейно независимо.

Определение 4. Линейное пространство R называется *нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\|x\| \geqslant 0$, называемое *нормой* элемента x и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1° $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$;

2° $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall\, x \in R,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$;

3° $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \ \forall\, x, y \in R$ (аксиома треугольника).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника.*

Всякое нормированное пространство является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho(x, y) \coloneqq \|x - y\|.$$

Обратное неверно уже потому, что произвольное метрическое пространство не обязательно линейно (в нём не обязательно введены понятия суммы элементов и произведения элемента на число). Даже в линейном метрическом пространстве R $\rho(x, 0)$ не обязательно является нормой элемента $x \in R$. В последнем можно убедиться на примере линейного метрического пространства числовых последовательностей

$$x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \xi_i \in \mathbb{R},$$

в котором для $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x + y \coloneqq \{\xi_i + \eta_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \lambda x \coloneqq \{\lambda \xi_i\}_{i=1}^{\infty},$$
$$\rho(x, y) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}.$$

Приведём примеры нормированных пространств.

Пример 1. Пространства $\mathbb{R}$ (действительных чисел), $\mathbb{C}$ (комплексных чисел) с нормой

$$\|x\| = |x|.$$

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ (см. § 10.1) с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad (x = (x_1, \ldots, x_n)),$$

или

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

или

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Говоря о линейных пространствах функций, определённых на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, всегда будем предполагать, что операции сложения и умножения на число введены в них естественным образом, т. е.

$$(x + y)(t) \coloneqq x(t) + y(t) \quad \forall\, t \in E,$$
$$(\lambda x)(t) \coloneqq \lambda x(t) \quad \forall\, t \in E.$$

Пример 3. $C([a, b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{C([a,b])} \coloneqq \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

Все аксиомы нормы в примерах 1–3 проверяются элементарно.

Изучим некоторые понятия и свойства нормированных пространств, связанные с понятием расстояния и обобщающие известные понятия и свойства числовых последовательностей и множеств. До конца параграфа символом R будем обозначать нормированное пространство. Его элементы будем называть также *точками.*

При $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью* точки $x_0 \in R$ в нормированном пространстве R называется множество

$$U_\varepsilon(x_0) \coloneqq \{x \,:\, x \in R, \quad \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Точка x_0 называется *центром* этой окрестности, а ε — её *радиусом.*

Множество $E \subset R$ называется *ограниченным*, если $\exists\, M > 0$: $E \subset U_M(\vec{0})$.

Точка $a \in R$ называется *предельной* точкой множества $E \subset R$, если любая ε-окрестность точки a содержит бесконечно много точек множества E.

Предельная точка множества E может принадлежать, а может и не принадлежать множеству E.

Объединение множества $E \subset R$ и множества всех предельных точек множества E называется *замыканием* множества E и обозначается символом $\overline{E}$.

Операцией замыкания (*замыканием*) множества $E \subset R$ называется переход от множества E к его замыканию $\overline{E}$.

Множество $E \subset R$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $\overline{E} = E$.

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}$ является замкнутым множеством (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств суть замкнутые множества (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Точка x называется *внутренней* точкой множества $E \subset \subset R$, если существует окрестность $U_\varepsilon(x)$ этой точки, содержащаяся в E.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым.*

Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств суть открытые множества (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Для того чтобы множество E было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R \setminus E$ до всего пространства R было замкнутым (доказать в качестве упражнения).

Определение 5. Говорят, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек R *сходится* к точке $x_0 \in R$, если

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0.$$

Точку x_0 называют при этом *пределом* последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и пишут $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Такую сходимость часто называют *сходимостью по норме.*

Это определение можно сформулировать ещё и следующим образом: последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ x_n \in U_\varepsilon(x_0)\ (\text{т. е. } \|x_n - x_0\| < \varepsilon)\ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Из определения предела следует, что никакая последовательность не может иметь двух различных пределов и что если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке x_0, то и всякая её подпоследовательность сходится к x_0.

Используя понятие предела последовательности, можно дать эквивалентное определение предельной точки множества: точка $a \in R$ называется предельной точкой множества $E \subset R$, если существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in E$, $x_k \neq a$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, сходящаяся к a (доказать в качестве упражнения).

Определение 6. Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек R называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \|x_k - x_j\| < \varepsilon \quad \forall k, j \geqslant n_\varepsilon.$$

Всякая сходящаяся последовательность является, очевидно, фундаментальной, но не наоборот.

Определение 7. Нормированное пространство R называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его точек является сходящейся, т. е. имеет в R предел.

Ранее было установлено (критерий Коши), что линейные нормированные пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ из примеров 1, 2 являются полными.

Из теоремы 16.1.1 и теоремы 16.3.1 следует, что пространство $C([a, b])$ из примера 3 является полным.

Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

Определение 8. Пусть $A \subset B \subset R$. Множество A называется *плотным* в B, если $\overline{A} \supset B$.

Теорему 24.3.3 (Вейерштрасса) можно переформулировать следующим образом: множество всех алгебраических многочленов плотно в пространстве $C([a, b])$.

Если пространство R не полно, то его всегда можно *пополнить*, т. е. «экономно» включить некоторым (и, по существу, единственным) способом в некоторое полное пространство.

Определение 9. Пусть R — нормированное пространство. Полное нормированное пространство R^* называется *пополнением* пространства R, если

1° R является подпространством пространства R^*, т. е. $R \subset R^*$ и определения суммы, произведения элемента на число и нормы в пространствах R и R^* совпадают для элементов из R;

2° $\overline{R} = R^*$, т. е. R плотно в R^*.

Определение пополнения метрического пространства аналогично; при этом вместо 1° требуется, чтобы $R \subset R^*$ и чтобы расстояния в R и в R^* совпадали.

Теорема 1. *Каждое метрическое пространство и каждое нормированное пространство имеет пополнение.*

Не приводя доказательства, укажем лишь его идею на примере метрического пространства R с расстоянием $\rho(x, y)$.

Задача состоит прежде всего в том, чтобы «экономно» присоединить к R некоторые новые («идеальные») элементы и распространить на полученное расширенное множество понятие расстояния. Рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, не являющиеся сходящимися в R. Расстоянием между двумя последовательностями $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ назовём

$$\rho(\{x_k\}, \{y_k\}) \coloneqq \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k).$$

Этот предел существует в силу фундаментальности числовой последовательности $\{\rho(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и полноты $\mathbb{R}$.

Расстоянием между такой последовательностью и элементом $x_0 \in R$ назовём

$$\rho(\{x_k\}, x_0) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0).$$

Две не сходящиеся в R фундаментальные последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ назовём эквивалентными, если $\rho(\{x_k\}, \{y_k\}) = 0$. Все фундаментальные последовательности, не сходящиеся в R, разбиваются на классы эквивалентных последовательностей. Каждый такой класс назовём «идеальным» элементом. Расстояние между двумя «идеальными» элементами определим как расстояние между какими-либо двумя представителями соответствующих классов эквивалентных последовательностей. Аналогично введём понятие расстояния между «идеальным» элементом и элементом $x_0 \in R$.

Объединение R и множества полученных «идеальных» элементов обозначим через R^*. Наделённое введённым расстоянием, оно является искомым пополнением метрического пространства R.

Определение 10. Пусть R — нормированное пространство, $x, x_k \in R \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится* к x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = x$, где предел понимается в смысле сходимости по норме, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

§ 25.2. Пространства CL_1, CL_2, RL_1, RL_2, L_1, L_2

Если в аксиомах нормы из определения 25.1.3 снять требование $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \overline{0}$, то $\|x\|$ будет называться *полунормой* элемента x, а определение нормированного пространства превратится в определение *полунормированного* пространства. На полунормированные пространства дословно переносятся понятия предельного перехода, замыкания множества, плотности множества, полноты пространства и другие.

Рассмотрим примеры нормированных и полунормированных пространств, норма (полунорма) которых задается с помощью интегралов.

Пример 1. $CL([a,b]) = CL_1([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L([a,b])} \coloneqq \int_a^b |x(t)|\, dt.$$

Пример 2. $CL_2([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_2([a,b])} \coloneqq \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt}.$$

Все аксиомы нормы в примерах 1, 2 проверяются элементарно, за исключением неравенства треугольника в примере 2. Последнее будет выведено позднее из свойств скалярного произведения.

Определение 1. Пусть $(a,b) \subset (-\infty,\infty)$. Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *финитной на* (a,b), если $f = 0$ вне некоторого отрезка $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

Пример 3. $C_0L_p((a,b))$, $p \in \{1,2\}$, — линейное пространство непрерывных и финитных на (a,b) функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_p((a,b))} \coloneqq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пример 4. $RL((a,b)) = RL_1((a,b))$ — полунормированное пространство абсолютно интегрируемых на интервале $(a,b) \subset (-\infty,\infty)$ функций $x\colon (a,b) \to R$, т. е. функций со сходящимся интегралом $\int_a^b |x(t)|\,dt$, понимаемым как несобственный с конечным числом особенностей, и интегрируемых по Риману на каждом отрезке из интервала (a,b), не содержащем особенностей (см. определение 14.8.2). При этом

$$\|x\| = \|x\|_{L_1((a,b))} \coloneqq \int_a^b |x(t)|\,dt. \tag{1}$$

Эта полунорма не является нормой на линейном пространстве $RL_1((a,b))$, т. к. из равенства $\|\theta\| = \int_a^b |\theta(t)|\,dt = 0$ не следует, что $\theta = 0$ (а ведь именно тождественно равная нулю функция является нулевым элементом рассматриваемого линейного пространства). В самом деле, равенство

$\|\theta\| = 0$ выполняется, например, и для функции θ, принимающей нулевые значения всюду на (a, b), за исключением конечного числа точек, в которых она отлична от нуля.

З а м е ч а н и е 1. Отметим без доказательства следующие два свойства интегрируемой по Риману функции:

1° ограниченная функция θ: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет лебегову меру нуль, т. е. может быть покрыто объединением счётного числа интервалов сколь угодно малой суммарной длины;

2° для интегрируемой по Риману на $[\alpha, \beta]$ функции θ условие $\int_\alpha^\beta |\theta(t)|\,dt = 0$ эквивалентно тому, что $\theta(t) = 0$ в каждой точке t непрерывности функции θ.

Для множества функций $RL_1((a, b))$ можно построить другое линейное пространство $\widetilde{RL_1}((a, b))$, которое уже окажется нормированным с помощью интеграла (1).

Две функции $x, y \in RL_1((a, b))$ назовём *эквивалентными*, если $\int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt = 0$. Таким образом, линейное пространство $RL_1((a, b))$ разбивается на классы эквивалентных функций. В силу замечания 1 две эквивалентные функции «мало» отличаются друг от друга: их значения могут быть различны лишь на множестве точек нулевой лебеговой меры.

Совокупность всех таких классов обозначим через $\widetilde{RL_1}((a, b))$. Превратим его в линейное пространство, введя операции сложения и умножения на действительное число следующим образом. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — два класса из $\widetilde{RL_1}((a, b))$, а x $(\in \tilde{x})$, y $(\in \tilde{y})$ — два каких-либо их представителя. *Суммой* $\tilde{x} + \tilde{y}$ классов $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ назовём тот класс $\tilde{z}$, который содержит $x + y$, а *произведением* $\lambda\tilde{x}$ класса $\tilde{x}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ — тот класс, который содержит λx. Легко проверить независимость суммы и произведения от выбора представителей и выполнения для $\widetilde{RL_1}([a,b])$ всех аксиом линейного пространства. Линейное пространство $\widetilde{RL_1}([a,b])$.

Нулевым элементом $\vec{0}$ пространства $\widetilde{RL_1}((a,b))$ является множество абсолютно интегрируемых на (a,b) функций θ, для которых $\int_a^b |\theta(t)|\,dt = 0$.

Положим

$$\|\tilde{x}\|_{\widetilde{L}_1([a,b])} \coloneqq \|x\|_{L_1([a,b])} = \int_a^b |x(t)|\,dt,$$

где $x \in \tilde{x}$. Нетрудно проверить, что $\|\tilde{x}\|_{\widetilde{L}_1([a,b])}$ является нормой в $\widetilde{RL_1}([a,b])$.

Пример 5. $RL_2((a,b))$ — полунормированное пространство определённых на интервале $(a,b) \subset (-\infty,+\infty)$ функций $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ со сходящимся интегралом $\int_a^b |x(t)|^2 dt$, понимаемым как несобственный с конечным числом особенностей, и интегрируемых по Риману на каждом отрезке из (a,b), не содержащем особенностей. При этом

$$\|x\| = \|x\|_{L_2((a,b))} \coloneqq \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}. \tag{2}$$

Аналогично тому, как это сделано при рассмотрении примера 4, можно построить фактор-пространство $\widetilde{RL_2}((a,b))$ пространства $RL_2((a,b))$, состоящее из классов функций, причём две функции x, y входят в один и тот же класс (называются *эквивалентными*, *отождествляются*, *не различаются*), если

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt = 0.$$

Операции сложения и умножения на число $\lambda \in \mathbb{R}$ вводятся в $\widetilde{RL_2}([a,b])$ так же, как в примере 4. Построенное фактор-пространство является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\tilde{x}\|_{\widetilde{L}_2((a,b))} \coloneqq \|x\|_{L_2((a,b))} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt},$$

где x — произвольная функция из класса $\tilde{x}$ ($x \in \tilde{x}$). Нулевым элементом $\vec{0}$ пространства $\widetilde{RL_2}((a,b))$ является множество функций $\theta \in RL_2((a,b))$, для которых $\int_a^b |\theta(t)|^2 dt = 0$.

Пространства $CL_p([a,b])$, $C_0L_p((a,b))$, $p = 1, 2$, из примеров 1–3 не являются полными. Покажем это на примере пространства $CL_1([-1,1])$. Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1,1]$ функций

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ kt & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{k}, \\ 1 & \text{при } \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $CL_1([-1,1])$, т. к.

$$\|f_m - f_k\|_{L_1([-1,1])} \leqslant \int_0^{\max\{\frac{1}{m},\frac{1}{k}\}} 2\,dt = 2\max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{k}\right\}.$$

Однако в $CL_1([-1,1])$ не существует функции, являющейся пределом этой последовательности по норме $CL_1([-1,1])$. В самом деле, предполагая противное, обозначим предельную функцию через φ. Она непрерывна на $[-1,1]$ как функция из $CL_1([-1,1])$, и

$$\int_{-1}^{1} |\varphi(t) - f_k(t)|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Тогда при $k \to \infty$

$$\int_{-1}^{0} |\varphi(t) - f_k(t)|\,dt = \int_{-1}^{0} |\varphi(t)|\,dt \to 0,$$

так что

$$\int_{-1}^{0} |\varphi(t)|\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0 \text{ при } -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leqslant t \leqslant 1 \quad \forall\, \delta \in (0, 1).$$

Как видим, функция φ разрывна в точке $t = 0$, что противоречит предположению о существовании в $CL_1([-1,1])$ предела последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, пространство $CL_1([a,b])$ не полно.

Лемма 1. *Множество $C_0((a,b))$ непрерывных и финитных на (a,b) функций плотно как в $RL_1((a,b))$, так и в $RL_2((a,b))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы представляет собой переформулировку следствия 14.8.1. Установим второе утверждение. Пусть $f \in RL_2((a,b))$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $f_\varepsilon \in RL_2((a,b))$ такая, что $f_\varepsilon = 0$ вне некоторого отрезка $[A,B] \subset (a,b)$, f_ε интегрируема по Риману на $[A,B]$,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_2((a,b))} < \varepsilon.$$

Функция f_ε строится так же, как при доказательстве теоремы 14.8.3.

Пусть $M \coloneqq \sup\limits_{(a,b)} |f_\varepsilon|$. В силу следствия 14.8.1 существует функция $\varphi \in C_0((a,b))$ такая, что

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{2M}.$$

При этом, как видно из построения, можно считать, что $|\varphi| \leqslant M$.

Тогда

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x)-\varphi(x)|^2 dx \leqslant 2M\int_a^b |f_\varepsilon(x)-\varphi(x)|\,dx < \varepsilon^2,$$
$$\|f-\varphi\|_{L_2((a,b))} \leqslant \|f-f_\varepsilon\|_{L_2((a,b))} + \|f_\varepsilon-\varphi\|_{L_2((a,b))} < 2\varepsilon.$$

Можно показать, что пространства $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ не являются полными (см., например, § 19.7 учебника С.М. Никольского «Курс математического анализа»; Т. 2. М.: Наука, 1973). Мы не будем приводить доказательства, поскольку оно требует привлечения теории интеграла Лебега. Укажем лишь последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ функций, фундаментальную в $RL_1((0,1))$, но не имеющую предела в $RL_1((0,1))$.

Перенумеруем все рациональные точки интервала $(0,1)$ и покроем k-ю из них интервалом $I_k \subset (0,1)$ с центром в этой точке и длиной $\mu I_k < \varepsilon 2^{-k}$ $(0<\varepsilon<1,\ k=1,\ 2,\ \ldots)$. Пусть

$$f_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j, \\ 0, & t \in (0,1)\setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j. \end{cases}$$

Очевидно, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна в $RL_1((0,1))$. Можно показать, что она не имеет предела в $RL_1((0,1))$.

Упражнение 1. Показать, что в пространствах $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ счётное множество финитных ступенчатых функций с рациональными параметрами (начало и конец ступени, высота ступени) является плотным.

У к а з а н и е. Использовать теорему 14.8.3.

Для описания пополнений пространств $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ необходимо ввести понятия меры и интеграла Лебега. Мы лишь коснемся этих понятий, избегая точных определений. Понятие измеримости множества по Лебегу шире понятия измеримости множества по Жордану: всякое множество, измеримое по Жордану, является измеримым по Лебегу и его мера Лебега совпадает с мерой Жордана.

Множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$ измеримо по Лебегу (и имеет лебегову меру нуль, т.е. может быть покрыто счётной системой интервалов сколь угодно малой суммарной длины), но не измеримо по Жордану.

Рассмотрим для примера определённую на отрезке $[a, b]$ функцию f со значениями, лежащими на отрезке $[A, B]$. Эту функцию будем считать *измеримой по Лебегу*, т. е. такой, что множество $\{x \in [a, b]\colon\ f(x) \leqslant \alpha\}$ измеримо по Лебегу $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Поделим отрезок $[A, B]$ на k равных частей точками $A = y_0 < y_1 < \ldots < y_k = B$ и составим *интегральную сумму*

$$\sum_{j=1}^{k} y_j \operatorname{mes} e_j, \quad e_j = \{x\ :\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_{j-1} < f(x) \leqslant y_j\}, \quad (3)$$

где $\operatorname{mes} e_k$ — мера Лебега множества e_k.

Тогда число

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} y_j \operatorname{mes} e_j$$

называется *интегралом Лебега* функции f по отрезку $[a, b]$.

Как видим, при построении интегральной суммы (3) в качестве «представителя» функции f на множестве e_j выступает число y_j, близкое к значениям функции f в любой точке e_j. В то же время при построении интегральной суммы Римана

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

представителем функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выступает число $f(\xi_i)$ — значение функции f в одной из точек отрезка. Такой представитель может считаться удачным, если

f мало меняется на отрезке разбиения (например, если f непрерывна на $[a, b]$).

В общем же случае, число $f(\xi_i)$ не обязательно является удачным представителем значений функции f на $[x_{i-1}, x_i]$.

Естественно ожидать (и легко показывается), что функция, интегрируемая по Риману на отрезке, интегрируема и по Лебегу, и её интегралы Римана и Лебега совпадают.

С другой стороны, функция Дирихле f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу (и её интеграл Лебега равен нулю), но не интегрируема по Риману. Таким образом, понятие интеграла Лебега шире понятия интеграла Римана.

Пример 6. Обозначим через $L((a, b)) = L_1((a, b))$ полунормированное пространство интегрируемых по Лебегу на $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$ функций с полунормой (1), где интеграл понимается как интеграл Лебега. Тогда можно показать, что пространство $L_1((a, b))$ является полным и что $RL_1((a, b))$, а значит, в силу леммы 1, и $C_0L_1((a, b))$ плотны в нём. Согласно определению пополнения, пространство $L_1((a, b))$ является пополнением как пространства $RL_1((a, b))$, так и пространства $C_0L_1((a, b))$.

Пример 7. Обозначим через $L_2((a, b))$ полунормированное пространство измеримых по Лебегу на $(a, b) \subset \subset (-\infty, +\infty)$ функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу. Полунорму в нём зададим равенством (2), где интеграл понимается как интеграл Лебега. Можно показать, что пространство $L_2((a, b))$ является полным и что $RL_2((a, b))$, а значит (в силу леммы 1), и $C_0L_2((a, b))$ плотны в нём. Согласно определению пополнения, пространство $L_2((a, b))$ является пополнением как пространства $RL_2((a, b))$, так и пространства $C_0L_2((a, b))$.

З а м е ч а н и е 2. В случае конечных a, b вместо $L_p((a,b))$ можно писать $L_p([a,b])$, $p = 1, 2$.

З а м е ч а н и е 3. Часто, допуская некоторую вольность, пространства $L_1((a,b))$, $L_2((a,b))$ называют нормированными пространствами функций, в которых отождествлены функции, отличающиеся между собой лишь на множестве лебеговой меры нуль.

Придерживаясь точных формулировок, следовало бы говорить о нормированных пространствах $\tilde{L}_1((a,b))$ и $\tilde{L}_2((a,b))$, элементами которых являются классы эквивалентных (т. е. попарно отличающихся лишь на множестве лебеговой меры нуль) функций с соответственно введёнными операциями сложения и умножения на число и нормой (ср. пространства $\widetilde{RL}_1$, $\widetilde{RL}_2$ из примеров 4, 5).

§ 25.3. Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение 1. *Скалярным произведением* в действительном линейном пространстве R называется вещественная функция (x, y), определённая для каждой пары элементов $x, y \in R$ и удовлетворяющая условиям:

1° $(x,x) \geqslant 0$, $(x,x) = 0 \iff x = \vec{0}$,

2° $(x,y) = (y,x)$,

3° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

4° $(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Действительное линейное пространство с фиксированным скалярным произведением называется *евклидовым* пространством.

В евклидовом пространстве можно ввести норму

$$\|x\| \coloneqq \sqrt{(x,x)}. \tag{1}$$

Выполнение для $\|x\|$ всех аксиом нормы очевидно, за исключением неравенства треугольника. Установим его, доказав предварительно *неравенство Коши–Буняковского*:

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{2}$$

Считая $\|x\| > 0$, рассмотрим квадратный трёхчлен

$$(tx + y, tx + y) = (x, x)t^2 + 2(x, y)t + (y, y) = \\ = \|x\|^2 t^2 + 2(x, y)t + \|y\|^2.$$

Так как он неотрицателен (по свойству 1° скалярного произведения), то его дискриминант $4|(x, y)|^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leqslant 0$, откуда и следует (2).

С помощью (2) получаем неравенство

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

равносильное неравенству треугольника:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Приведём примеры евклидовых пространств.

Пример 1. Действительное m-мерное арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Так называется линейное пространство $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с вещественными координатами (см. начало гл. 18) и скалярным произведением

$$(x, y) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{где } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Пример 2. $CL_2([a, b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением $(f, g) \coloneqq \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, где $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

Вводя норму

$$\|f\| = \|f\|_{L_2([a,b])} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt},$$

получаем, что $CL_2([a, b])$ совпадает с линейным нормированным пространством $CL_2([a, b])$ из примера 25.2.2.

Пример 3. $RL_2((a,b))$ — линейное пространство из примера 25.2.5. Введём скалярное произведение

$$(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \quad f,g \in RL_2((a,b)).$$

Для вещественной функции (f,g) выполняются все свойства скалярного произведения, за исключением свойства $(f,f) = 0 \Rightarrow f = \vec{0}$ (т. е. $f(t) = 0\ \forall\, t \in (a,b)$). Такую функцию (f,g) называют *полускалярным произведением.* Полунорма определяется как

$$\|f\|_{L_2((a,b))} = \sqrt{(f,f)}.$$

З а м е ч а н и е 1. В евклидовом пространстве для нормы, определённой равенством (1), выполняется, как нетрудно проверить, равенство

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \tag{3}$$

выражающее свойство: *сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Свойство (3) является также и достаточным для того, чтобы нормированное пространство было евклидовым.

Упражнение 1. Убедиться с помощью (3), что нормы в пространствах $C([a,b])$, $CL_1([a,b])$ из примеров 25.1.3, 25.2.1 нельзя задать с помощью какого бы то ни было скалярного произведения.

Наряду с действительным евклидовым пространством рассматривают и комплексное линейное пространство со скалярным произведением, называемое *комплексным евклидовым пространством* (*унитарным пространством*, *эрмитовым пространством*). При этом *скалярным произведением* называется комплексная функция (x,y) с условиями

1° $(x,x) \geqslant 0$, $(x,x) = 0 \iff x = \vec{0}$,

2° $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
3° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
4° $(\lambda x, y) = \lambda(y, x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.

Норма в комплексном евклидовом пространстве определяется, как и в действительном, формулой (1).

Приведём примеры комплексных евклидовых пространств.

Пример 4. $\mathbb{C}^n$ — линейное пространство, представляющее собой совокупность систем $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n комплексных чисел со сложением и умножением на комплексное число, определёнными по тем же правилам, что и для $\mathbb{R}^n$, и скалярным произведением

$$(x, y) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Пример 5. Комплексное пространство $CL_2([a, b])$ — комплексное линейное пространство комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) \coloneqq \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Определение 3. Бесконечномерное евклидово (комплексное евклидово) пространство называется *предгильбертовым.*

Полное бесконечномерное евклидово (комплексное евклидово) пространство (т. е. полное предгильбертово пространство) называется *гильбертовым.*

Всякое предгильбертово пространство, будучи пополненным по его норме, превращается в гильбертово, если скалярное произведение распространить на это пополнение по непрерывности. В связи с этим важна следующая

Лемма 1. *Скалярное произведение (x, y) в предгильбертовом пространстве непрерывно зависит от x, y.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\|x_0 - x\| < \delta < 1$, $\|y_0 - y\| < \delta < 1$. Тогда с помощью неравенства Коши–Буняковского (2) имеем

$$
\begin{aligned}
|(x_0, y_0) - (x, y)| \leqslant |(x_0 - x, y_0)| + |(x, y_0 - y)| \leqslant \\
\leqslant \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x\|\,\|y_0 - y\| \leqslant \\
\leqslant \delta\|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\delta \leqslant \delta(\|x_0\| + \|y_0\| + 1).
\end{aligned}
$$

Следствие 1. *Пусть R — предгильбертово пространство, x_k, x, $a \in R$. Тогда*

1° $x_k \to x \Rightarrow (x_k, a) \to (x, a)$ *при* $k \to \infty$,

2° $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j = x \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_j, a) = (x, a)$.

Мы будем рассматривать лишь *сепарабельные* предгильбертовы и гильбертовы пространства, т. е. такие, в которых существует счётное плотное множество.

Пример 6. Пространство l_2 с элементами

$$
x = (x_1, x_2, \ldots), \qquad \text{где } x_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,
$$

и скалярным произведением

$$
(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i
$$

является сепарабельным гильбертовым.

Сходимость последнего ряда (даже его абсолютная сходимость) следует из оценки

$$
\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \right).
$$

Аксиомы гильбертова пространства проверяются непосредственно. Плотным в l_2 является счётное множество его элементов x с рациональными координатами x_i.

Пример 7. Пространство $CL_2([a, b])$ из примера 2 является сепарабельным предгильбертовым пространством.

Упражнение 2. Доказать, что плотным множеством в $CL_2([a, b])$ является множество многочленов с рациональными коэффициентами. Это можно сделать с помощью теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами.

Пример 8. Пространство $L_2((a, b))$, $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, из примера 25.2.7 является гильбертовым, если под элементами $L_2((a, b))$ понимать функции и не различать две функции, отличающиеся лишь на множестве лебеговой меры нуль (см. замечание 25.2.3).

Счётным плотным множеством в $L_2((a, b))$ является множество финитных ступенчатых функций с рациональными параметрами.

§ 25.4. Ортогональные системы и ряды Фурье по ним

В этом параграфе R будет обозначать предгильбертово пространство.

Определение 1. Элементы $x, y \in R$ называют *ортогональными* (друг другу), если $(x, y) = 0$.

Последовательность ненулевых элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ пространства R называют *ортогональной системой*, или *ортогональной последовательностью*, если

$$(e_j, e_k) = 0 \quad \forall\, j, k \in \mathbb{N}, \quad j \neq k.$$

Если при этом $\|e_j\| = 1 \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$, то ортогональная система (последовательность) называется *ортонормированной.*

Поделив каждый элемент ортогональной системы на его норму, получим ортонормированную систему. Если $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональная система, то $\|e_j\| > 0 \ \forall\, j$ (согласно определению), и при любом $k \in \mathbb{N}$ векторы $e_1, \ \ldots, \ e_k$ линейно независимы.

Установим последнее. Допустив противное, имеем при некотором $k \in \mathbb{N}$ и при некоторых $\lambda_j \in \mathbb{R}$, не всех равных нулю, что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j = \vec{0}.$$

Если при этом $\lambda_s \neq 0$, то, умножая последнее равенство скалярно на e_s и пользуясь ортогональностью системы, получаем, что $\lambda_s \|e_s\|^2 = 0$. Отсюда $e_s = \vec{0}$, что противоречит принадлежности e_s ортогональной последовательности элементов.

Приведём примеры ортогональных систем.

Пример 1. Последовательность $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ \ldots\}$ ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

Пример 2. Последовательность комплекснозначных функций $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{0}^{2\pi} f(x) \bar{g}(x)\, dx.$$

Пример 3. Многочлены $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$, называются *многочленами Лежандра*. Последовательность $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ многочленов Лежандра ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx.$$

Покажем, что полином Лежандра P_n ортогонален любому многочлену Q_m степени $m < n$.

Учитывая, что $((x^2-1)^n)^{(k)}$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ обращается в нуль в точках $x = \pm 1$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\, dx = -\int_{-1}^{1} Q_m'(x) \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} Q_m''(x) \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx = \ldots =$$
$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Big|_{-1}^{1} = 0. \quad (1)$$

В частности, $\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0$ при $0 \leqslant m < n$.

Вычислим норму многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x),$$

где Q_{n-1} — многочлен степени не выше $n-1$. Используя (1) и интегрируя несколько раз по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{(2n-1)!!}{n!} \int_{-1}^{1} P_n(x) x^n\, dx =$$
$$= \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} x^n\, dx = \ldots =$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^n)' x\, dx =$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} x^2\, dx =$$
$$= (-1)^{n-2} \frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!3} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-2} x^4\, dx = \ldots =$$
$$\ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n}\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Следовательно, $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Далее через R обозначаем предгильбертово пространство, через $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ — норму его элемента x, через $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональную последовательность в R. Напомним, что по определению $\|e_j\| > 0 \ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть* $x \in R$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. *Тогда*

$$\alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 25.3.1 сходящийся в R ряд можно скалярно умножать почленно. Используя свойство ортогональности, имеем

$$(x, e_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_s) = \alpha_s (e_s, e_s),$$

откуда и следует (2).

Определение 2. Пусть $x \in R$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная последовательность в R. Тогда $\alpha_k = \dfrac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ — *рядом Фурье* элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $S_n = S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ — *n-й суммой Фурье* элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Таким образом, каждому элементу $x \in R$ ставится в соответствие его ряд Фурье:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k. \tag{3}$$

Говорят, что элемент *x разложен в ряд Фурье*, и пишут $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, если ряд в (3) сходится к x в R, т. е.

$$\|x - S_n(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Очевидны следующие свойства частичных сумм ряда Фурье:

$$S_n(e_k) = e_k \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

откуда

$$S_n(T_n) = T_n, \quad \text{если} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k. \tag{4}$$

$$(x - S_n(x), e_k) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Лемма 1 (об ортогональном разложении).

$$x = S_n(x) + (x - S_n(x)), \quad (S_n(x), x - S_n(x)) = 0. \tag{5}$$

Лемма 2 (аналог теоремы Пифагора).

$$\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2. \tag{6}$$

Доказательство. Используя (5), имеем

$$\|x\|^2 = \|(x - S_n) + S_n\|^2 = ((x - S_n) + S_n, (x - S_n) + S_n) = \\ = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2.$$

Теорема 2 (минимальное свойство коэффициентов Фурье).

$$\min_{c_1, \ldots, c_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| = \|x - S_n(x)\|.$$

Доказательство. Пусть $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. С помощью леммы 2 и (4) получаем, что

$$\|x - T_n\|^2 = \|(x - T_n) - S_n(x - T_n)\|^2 + \|S_n(x - T_n)\|^2 = \\ = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x) - T_n\|^2 \geqslant \|x - S_n(x)\|^2.$$

Следствие 1.

$$\|x - S_n(x)\| \leqslant \|x - S_m(x)\| \quad \textit{при} \quad n \geqslant m.$$

Теорема 3 (неравенство Бесселя). *Пусть $x \in R$, α_k — коэффициенты Фурье элемента x по ортогональной системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.*

Тогда справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7}$$

Доказательство. Из ортогональности системы $\{e_k\}$ и из (6) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|S_n\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Следствие 2. *Коэффициенты Фурье обладают свойством*

$$\alpha_k \|e_k\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

а если система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированная, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad \alpha_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная последовательность в R. Тогда для каждого элемента $x \in R$ следующие утверждения эквивалентны (α_k — коэффициент Фурье элемента x):*

1° *для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которого*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

2° $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, 3° *справедливо* равенство Парсеваля*:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $1^\circ \iff 2^\circ$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье 1° эквивалентно тому, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \|x - S_{n_\varepsilon}(x)\| < \varepsilon,$$

а значит, в силу следствия 1, тому, что

$$\|x - S_n(x)\| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Последнее эквивалентно 2°.

Эквивалентность $2^\circ \iff 3^\circ$ становится очевидной, если переписать (6) в виде

$$\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2.$$

З а м е ч а н и е 1. Равенство Парсеваля (8) является бесконечномерным аналогом теоремы Пифагора.

Упражнение 1. В условиях теоремы 4 доказать, что $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$, с помощью почленного скалярного умножения ряда из 2° на x.

Определение 3. Система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов предгильбертова (или линейного нормированного) пространства R называется *полной* в R, если множество (конечных) линейных комбинаций её элементов плотно в R.

Теорема 5 (критерий полноты ортогональной последовательности). *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— ортогональная последовательность в* R*. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1° $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ полна в R,

2° $x = \sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k e_k \quad \forall\, x \in R$,

3° $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \quad \forall\, x \in R$

(α_k — коэффициенты Фурье элемента x).

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 4 для каждого $x \in R$.

Теорема 6 (Рисса–Фишера). *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве H, и пусть действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ \ldots$ таковы, что ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \tag{9}$$

сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k e_k$ сходится в H к некоторому элементу $x \in H$:

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k = x.$$

Доказательство. В силу сходимости ряда (9) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, p \in \mathbb{N},$$

см. теорему 15.1.2 (критерий Коши сходимости числового ряда). Это значит, что последовательность $\left\{ \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\}_{n=1}^\infty$ является фундаментальной в H, а значит, и сходящейся в H (в силу полноты H) к некоторому элементу $x \in H$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k e_k = x$ по определению суммы ряда в H.

Лемма 3. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— ортогональная система в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для любого* $x \in H$ *сходится (в* H*) его ряд Фурье по этой системе:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} e_k = x_0,$$

причём $(x - x_0, e_j) = 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$ сходится в силу неравенства Бесселя (7). Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится по теореме 6 (Рисса–Фишера). Имеем далее при $j \in \mathbb{N}$

$$(x - x_0, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_j) =$$
$$= (x, e_j) - \alpha_j \|e_j\|^2 = (x, e_j) - (x, e_j) = 0.$$

Определение 4. Ортогональная последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в предгильбертовом пространстве R называется *замкнутой*, если для любого $x \in R$

$$(x, e_j) = 0 \quad (\forall\, j \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = \vec{0},$$

т. е. если не существует ненулевого элемента $x \in R$, ортогонального всем элементам системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 7. *В гильбертовом пространстве* H *ортогональная система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. 1. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в H и пусть $x \in H$. Тогда в силу равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}.$$

Поэтому, если $(x, e_k) = 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, то $\|x\| = 0$, т. е. $x = \vec{0}$.

Следовательно, система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута.

2. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в H, $x \in H$ и α_k — коэффициенты Фурье элемента x. Тогда по лемме 3 ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} e_k = x_0 \in H$$

сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$, причём

$$(x - x_0, e_k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

В силу замкнутости системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ отсюда следует, что $x - x_0 = 0$, т. е. $x = x_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Из теоремы 5 следует теперь, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Обратимся к конкретным примерам.

Пример 4. Последовательность одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в нормированном пространстве функций $C([a, b])$:

$$C([a, b]) = \{f \ : \ f \text{ — непрерывна на } [a, b],\ \|f\| = \max_{[a,b]} |f|\}$$

в силу теоремы 24.3.3 Вейерштрасса о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами.

Пример 5. Тригонометрическая система

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t;\ \sin 2t,\ \cos 3t,\ \sin 3t,\ \ldots\right\} \tag{10}$$

полна в нормированном пространстве функций:

$$C_{per} = \{f \ : \ f \text{ — } 2\pi\text{-периодическая непрерывная функция}, \quad \|f\| = \max_{(-\infty, +\infty)} |f|\}$$

в силу теоремы 24.3.1 Вейерштрасса о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами.

Пример 6. Тригонометрическая система (10) полна в пространстве функций

$$C^*([-\pi,\pi]) = \{f \;:\; f \text{ — непрерывна на } [-\pi,\pi], \\ f(-\pi) = f(\pi)\}$$

в силу теоремы 24.3.1$'$ Вейерштрасса.

Пример 7. Тригонометрическая система (10) не является полной в пространстве $C([-\pi,\pi])$. Например, никакую непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию f при $f(-\pi) \neq f(\pi)$ с высокой точностью нельзя приблизить никаким тригонометрическим многочленом, т. к. для всякого тригонометрического многочлена T_n выполнено условие $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$.

Пример 8. Последовательность одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространствах $CL_1([a,b])$, $CL_2([a,b])$, $RL_1([a,b])$, $RL_2([a,b])$, $L_1([a,b])$, $L_2([a,b])$ в силу примера 4 и плотности множества непрерывных на $[a,b]$ функций в указанных пространствах (см. лемму 25.2.1 и примеры 25.2.6, 25.2.7).

Пример 9. Тригонометрическая система функций (10) полна в пространствах $CL_1([-\pi,\pi])$, $CL_2([-\pi,\pi])$, $RL_1((-\pi,\pi))$, $RL_2((-\pi,\pi))$, $L_1([-\pi,\pi])$, $L_2([-\pi,\pi])$ в силу примера 6 и плотности множества

$$C_0([-\pi,\pi]) = \{f \;:\; f \text{ — непрерывна на } [-\pi,\pi], \\ f(-\pi) = f(\pi) = 0\}$$

в указанных пространствах.

Упражнение 2. Показать, что система (10) не полна в $RL_1((-\pi,\pi+\delta))$ при $\delta > 0$.

Пример 10. Пусть $f \in L_2([-\pi,\pi])$. Тогда f раскладывается в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(сходящийся к f по норме в $L_2([-\pi,\pi])$, т. е. в смысле среднего квадратичного), и справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Здесь a_k, b_k — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, вычисляемые по формулам (24.1.2), где интегралы понимаются как интегралы Лебега.

Утверждение вытекает из полноты системы (10) в $L_2([-\pi,\pi])$ (см. пример 9) и из теоремы 5.

В частности, сформулированные свойства верны для произвольной непрерывной или кусочно непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции f.

Пример 11. Пусть $f \in L_2([-1,1])$. Тогда f раскладывается в ряд Фурье по полиномам Лежандра:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n, \quad \alpha_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$$

(ряд сходится по норме в $L_2([-1,1])$, т. е. в смысле среднего квадратичного), и справедливо равенство Парсеваля.

Сказанное верно, в частности, для произвольной непрерывной или кусочно непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции f.

Обоснование то же, что в примере 10.

Определение 5. Пусть R — нормированное пространство. Последовательность $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, $e_j \in R\ \ \forall j \in \mathbb{N}$, называется *базисом* в R, если

1° для любого $x \in R$ справедливо представление

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R};$$

2° указанное представление единственно.

Упражнение 3. Показать, что система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов базиса линейно независима.

Базис является, очевидно, полной системой в R. Обратное не верно. Например, система одночленов $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, являясь полной в $C([-1,1])$ (см. пример 4), не является в этом пространстве базисом. В самом деле, если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k x^k$, причём этот степенной ряд сходится в $C([-1,1])$, т. е. равномерно на $[-1,1]$, то его сумма f является бесконечно дифференцируемой на $(-1,1)$, но не произвольной функцией из $C([-1,1])$.

Известно, что тригонометрическая система (10) не является базисом в $C^*([-\pi,\pi])$, являясь в этом пространстве полной системой (пример 6).

Теорема 8. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ортогональная система в предгильбертовом пространстве* R. *Если* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *полная система, то она является базисом в* R.

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система в предгильбертовом пространстве R, и пусть $x \in R$. Тогда в силу теоремы 5

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2},$$

т. е. x совпадает с суммой своего ряда Фурье. Такое представление единственно по теореме 1. Следовательно, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в R.

Теорема 9 (об ортогонализации). *Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *линейно независимая система элементов в предгильбертовом пространстве* R. *Тогда в* R *существует система элементов* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1° $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ортогональная и нормированная система,*

2° *при каждом* $n \in \mathbb{N}$

$$e_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \quad a_{nn} \neq 0.$$

Каждый элемент системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *определяется условиями* 1°, 2° *однозначно с точностью до множителя* ± 1.

Доказательство. Элемент e_1 ищется в виде $e_1 = a_{11}x_1$; при этом a_{11} определяется из условия

$$(e_1, e_1) = a_{11}^2 (x_1, x_1) = 1, \quad \text{т. е.} \quad a_{11} = \frac{\pm 1}{\|x_1\|}.$$

Пусть элементы e_k $(k = 1, \ldots, n-1)$, удовлетворяющие условиям 1°, 2°, уже построены.

Ищем элемент e_n в виде

$$e_n = a_{nn}(x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{n\,n-1}e_{n-1}).$$

Здесь виден геометрический смысл выражения

$$x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{nn-1}e_{n-1},$$

состоящий в том, что из элемента x_n вычитается его проекция на подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Из требований ортогональности $(e_n, e_k) = 0$ при $k < n$ получаем, что

$$b_{nk} = (x_n, e_k) \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Из требования нормированности получаем, что

$$(e_n, e_n) = a_{nn}^2 \|x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{nn-1}e_{n-1}\|^2 = 1,$$

откуда a_{nn} (а значит, и e_n) определяется с точностью до множителя ± 1.

Переход от системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ к системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, называется *процессом ортогонализации.* Ясно, что системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полны или не полны в R одновременно.

Глава 26
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 26.1. Интегралы Римана, зависящие от параметра

Интегралы Римана вида

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \quad J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

называются *интегралами, зависящими от параметра.* Здесь будут установлены условия непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости таких интегралов по параметру y.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a,b] \times \times [c,d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывен на $[c,d]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y, y+\Delta y \in [c,d]$. Тогда

$$|I(y+\Delta y) - I(y)| = \left|\int_a^b f(x,y+\Delta y)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|\,dx \leqslant (b-a)\omega(|\Delta y|, f),$$

где $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции f. Так как $\omega(\delta; f) \to 0$ при $\delta \to 0$ в силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности функции f на $[a,b] \times [c,d]$, отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть функции φ, ψ непрерывны на $[c,d]$, $\varphi \leqslant \psi$ на $[c,d]$, $\overline{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Пусть f непрерывна на $\overline{G}$. Тогда интеграл $J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$ непрерывен на $[c,d]$.*

Доказательство. С помощью замены переменного получаем, что

$$J(y) = \int_0^1 f(\varphi(y) + t(\psi(y) - \varphi(y)), y)(\psi(y) - \varphi(y))\, dt =: \\ =: \int_0^1 g(t, y)\, dt.$$

Подынтегральная функция g непрерывна на $[0, 1] \times \times [c, d]$ по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций. По теореме 1 интеграл $J(y)$ непрерывен на $[c, d]$.

Теорема 3 (об интегрировании под знаком интеграла). *Пусть*

1° *функция f интегрируема на $[a, b] \times [c, d]$,*

2° *интеграл $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ существует при каждом $y \in [c, d]$,*

3° *интеграл $\int_c^d f(x, y)\, dy$ существует при каждом $x \in \in [a, b]$.*

Тогда существуют оба повторных интеграла и

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Эта теорема вытекает из теорем 19.3.1, 19.3.1$'$.

Последняя формула справедлива, в частности, если функция f непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$.

Теорема 4 (правило Лейбница). *Пусть f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$. Тогда функция*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

дифференцируема на $[c, d]$ и

$$\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx.$$

Доказательство. Пусть y, $y+\Delta y \in [c,d]$. Тогда, используя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем

$$\left|\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx\right| =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| dx \leqslant (b-a)\omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

где $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ — модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на $[a,b]\times[c,d]$. В силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ на $[a,b]\times[c,d]$

$$\omega\left(|\Delta y|, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta y| \to 0.$$

Из приведённых оценок получаем теперь, что существует

$$\frac{dI(y)}{dy} := \lim_{\Delta y\to 0} \frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$, функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$, $a \leqslant \varphi \leqslant \psi \leqslant b$ на $[c,d]$.*

Тогда на отрезке $[c,d]$ существует производная

$$\frac{dJ(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx =$$
$$= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(\psi(y),y)\frac{d\psi}{dy}(y) - f(\varphi(y),y)\frac{d\varphi}{dy}(y). \quad (1)$$

Доказательство. Определим на $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]$ функцию

$$F(y,u,v) \coloneqq \int_u^v f(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$J(y) = F(y,\varphi(y),\psi(y)).$$

Формула (1) получается, очевидно, при дифференцировании последнего равенства в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции и дифференцирования интеграла с переменным верхним (нижним) пределом. Для обоснования первого достаточно убедиться в непрерывности на $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]$ производных

$$F'_u(y,u,v) = -f(u,y), \quad F'_v(y,u,v) = f(v,y),$$
$$F'_y(y,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Производные F'_u, F'_v непрерывны в силу непрерывности функции f.

Производная F'_y, вычисленная по правилу Лейбница (теорема 4), с помощью замены переменного в интеграле записывается в виде

$$F'_y(y,u,v) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(u+(v-u)t,y)(v-u)\,dt \eqqcolon$$
$$\eqqcolon \int_0^1 h(y,u,v,t)\,dt. \quad (2)$$

По теореме о непрерывности композиции непрерывных функций подынтегральная функция h непрерывна на $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]\times[0,1]$. Отсюда следует, что интеграл

$\int_0^1 h(y,u,v,t)\,dt$ непрерывен на $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]$. Последнее свойство можно установить с помощью непосредственной оценки

$$\left|\int_0^1 h(y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v, t)\,dt - \int_0^1 h(y,u,v,t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |h(y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v, t) - h(y,u,v,t)|\,dt \leqslant \omega(\delta; h),$$

где $\omega(\delta; h)$ — модуль непрерывности функции h, $(\Delta y)^2 + (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \leqslant \delta^2$.

§ 26.2. Равномерная сходимость функции на множестве

Определение 1. Пусть $X\subset\mathbb{R}$, $Y\subset\mathbb{R}$, y_0 — предельная точка множества Y (не исключаются случаи $y_0=-\infty$, $+\infty$, ∞).

Пусть заданы функции $f\colon\ X\times Y\to\mathbb{R}$, $\varphi\colon\ X\to\mathbb{R}$. Говорят, что функция f *равномерно на* X *стремится* к φ при $Y\ni y\to y_0$, и пишут

$$f(x,y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y\ni y\to y_0,$$

если

$$\sup_{x\in X} |f(x,y)-\varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad Y\ni y\to y_0. \qquad (1)$$

Можно сформулировать эквивалентное определению 1 определение равномерного стремления f к φ, если вместо условия (1) написать:

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,U(y_0)\ :\ |f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon \quad \forall\,y\in Y\cap \mathring{U}(y_0).$$

В последней формулировке вместо $U(y_0)$ можно написать $U_\delta(y_0)$, где $\delta=\delta(\varepsilon)>0$.

Пример 1. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, $y_0 \in [c,d]$. Тогда

$$f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x,y_0) \quad \text{при} \quad [c,d] \ni y \to y_0.$$

В самом деле, из равномерной непрерывности функции f на $[a,b]\times[c,d]$ следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ |f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon \text{ при } |y - y_0| < \delta.$$

В случае $Y = \mathbb{N}$, $y_0 = +\infty$ значения функции f на $X\times Y$ можно записать как $f_n(x) \coloneqq f(x,n)$. Тогда понятие равномерного стремления $f(x,n) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$ совпадает с изученным понятием равномерной на X сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. Введём в рассмотрение нормированное пространство ограниченных на X функций:

$$M(X) = \{g\ :\ g \text{ — ограниченная на } X \text{ функция}, \\ \|g\|_M = \sup_X |g|\}.$$

Тогда равномерное стремление $f(x,y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $Y \ni$ $\ni y \to y_0$ совпадает, очевидно, с понятием сходимости по норме:

$$\|f(\cdot,y) - \varphi(\cdot)\|_M \to 0 \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0,$$

а понятие равномерной сходимости последовательности $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ — с понятием сходимости этой последовательности по норме:

$$\|f_n - \varphi\|_M \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если же $X = [a,b]$, и $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]$ как функция x при каждом $y \in Y$, то вместо $M([a,b])$ можно взять $C([a,b])$.

Так же, как для случая равномерной сходимости последовательности функций, доказываются следующие три теоремы.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости). *Для того чтобы заданная на $X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция f равномерно на X стремилась к какой-либо функции при $Y \ni y \to y_0$, необходимо и достаточно выполнения* условия Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \ : \ \sup_{x \in X} |f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon \quad \forall y',\ y'' \in Y \cap \mathring{U}_\delta(y_0).$$

Теорема 2. *Пусть заданная на $X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция f при каждом фиксированном $y \in Y$ непрерывна как функция от x в точке $x_0 \in X$ (по X),*

$$f(x,y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Тогда φ непрерывна в точке x_0 (по X).

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$ при каждом $y \in Y$ непрерывна на $[a,b]$ как функция x.*

Пусть

$$f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x,y)\,dx \to \int_a^b \varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Теорему 3 называют *теоремой о предельном переходе под знаком интеграла*, поскольку она утверждает, что

$$\lim_{Y \ni y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{Y \ni y \to y_0} f(x, y)\, dx.$$

Упражнение 1. Получить в качестве следствия из теоремы 3 теорему 26.1.1.

Упражнение 2. Сравнить теоремы 1, 2, 3 соответственно с теоремами 16.1.1, 16.3.1, 16.3.2.

Упражнение 3. Сформулировать и доказать аналог теоремы 16.3.3 о дифференцировании предела последовательности.

§ 26.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Будем рассматривать несобственные интегралы

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y \tag{1}$$

с особенностью на верхнем пределе, где

$$f \,:\, [a, b) \times Y \to \mathbb{R}, \quad [a, b) \subset \mathbb{R}, \quad Y \subset \mathbb{R}^m.$$

Чаще всего будем считать, что $m = 1$ и $Y = [c, d]$.

Напомним, что при написании символа $\int_a^b f(x, y)\, dx$ предполагается, что функция $f(x, y)$ интегрируема по x по Риману на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$, т. е. что интеграл

$$I(y, \eta) \coloneqq \int_a^\eta f(x, y)\, dx, \quad \forall\, [a, \eta] \subset [a, b) \tag{2}$$

существует как интеграл Римана.

Напомним, что несобственный интеграл $I(y)$ при фиксированном $y \in Y$ называется *сходящимся* и что

$$I(y) = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x, y)\, dx,$$

если последний предел существует и, следовательно, конечен. В противном случае несобственный интеграл $I(y)$ называется *расходящимся*.

Определение 1. Говорят, что несобственный интеграл $I(y)$ (1) *сходится равномерно* на Y, если

1° $I(y)$ сходится на Y (т. е. $\forall\, y \in Y$),

2° $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right| \to 0$ при $\eta \to b-0$.

Поясним, что при выполнении условия 1°

$$\left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to b-0 \quad \forall\, y \in Y, \tag{3}$$

однако скорость этого стремления к нулю может существенно зависеть от y. Условие же 2° показывает, что стремление к нулю интеграла в (3) «в равной мере быстрое» на множестве точек из Y (точнее говоря, имеется стремящаяся к нулю мажоранта модуля этого интеграла).

Пример 1.

$$I(y) = \int_0^\infty y\,e^{-xy}\,dx, \quad Y = (\delta, +\infty) \subset (0, +\infty).$$

Здесь

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_\eta^\infty y\,e^{-xy}\,dx\right| = \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta y}^\infty e^{-u}\,du\right| = e^{-\eta\delta}.$$

При $\delta > 0$ $\lim\limits_{\eta\to+\infty} e^{-\eta\delta} = 0$, так что $I(y)$ сходится равномерно на $(\delta, +\infty)$.

При $\delta = 0$ $e^{-\eta 0} \not\to 0$ $(\eta \to +\infty)$, так что $I(y)$ не сходится равномерно на $(0, +\infty)$.

З а м е ч а н и е 1. Условие 2° определения 1 можно переписать в виде

$$I(y,\eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} I(y) \quad \text{при} \quad \eta \to b-0.$$

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла). *Для того чтобы несобственный интеграл* (1) *сходился равномерно на* Y, *необходимо и достаточно выполнения* условия Коши*:*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\eta_\varepsilon \in [a,b)\ :\ \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon\ \forall\,\eta',\eta'' \in [\eta_\varepsilon, b). \tag{4}$$

Доказательство необходимости основывается на равенстве

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx = \int_{\eta'}^{b} f(x,y)\,dx - \int_{\eta''}^{b} f(x,y)\,dx,$$

а достаточности — на критерии Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 14.7.1) и на предельном переходе в неравенстве $|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx| < \varepsilon$ при $\eta'' \to b-0$.

Замечание 2. Доказательство теоремы 1 можно получить в качестве следствия теоремы 26.2.1, используя замечание 1.

Упражнение 1. Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx, \quad Y = Y_\delta = (\delta, +\infty)$$

а) сходится равномерно на множестве Y_δ при $\delta > 0$;

б) сходится, но не равномерно на Y_0.

Упражнение 2. Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad y \geqslant 0,$$

сходится равномерно на $Y = [0, +\infty)$.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть для функций* $f, g\colon [a,b)\times Y \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ *и некоторого* $M > 0$ $|f(x,y)| \leqslant Mg(x,y)$ *при* $(x,y) \in [a,b)\times Y$, *и пусть несобственный интеграл*

$$J(y) = \int_a^b g(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на Y.

Тогда несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на Y.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости $J(y)$ и критерия Коши

$$\exists\, \eta_\varepsilon \in [a,b) \ :\ \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{\eta''} g(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall\, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b).$$

Тогда

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right| < M\varepsilon \quad \forall\, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b).$$

В силу критерия Коши несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно на Y.

Частным случаем признака сравнения (теоремы 2) является

Теорема 3 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла). *Пусть* $f\colon [a,b)\times Y \to \mathbb{R}$, $\varphi\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, $|f(x,y)| \leqslant \varphi(x)$ *при* $(x,y) \in$ $\in [a,b)\times Y$.

Пусть несобственный интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *сходится.*

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y.

Упражнение 3. Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1+x^2}\,dx$$

сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$.

Установим достаточные условия непрерывности несобственного интеграла $I(y)$ вида (1), возможности его интегрирования и дифференцирования по параметру под знаком интеграла.

Теорема 4. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b) \times \Pi$, $\Pi = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_m, d_m]$, и пусть интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \quad y \in \Pi, \tag{5}$$

сходится равномерно на Π.

Тогда $I(y)$ непрерывен на Π.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $\eta_\varepsilon \in [a, b)$ таково, что

$$\sup_{\Pi} \left| \int_{\eta_\varepsilon}^b f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Пусть y, $y + \Delta y \in \Pi$. Тогда

$$|I(y+\Delta y) - I(y)| \leqslant \int_a^{\eta_\varepsilon} |f(x, y+\Delta y) - f(x, y)|\,dx + \\ + \left| \int_{\eta_\varepsilon}^b f(x, y+\Delta y)\,dx \right| + \left| \int_{\eta_\varepsilon}^b f(x, y)\,dx \right| \leqslant \\ \leqslant (\eta_\varepsilon - a)\omega(|\Delta y|; f; \Pi_\varepsilon) + \varepsilon + \varepsilon,$$

где $\omega(\delta; f; \Pi_\varepsilon)$ — модуль непрерывности функции f на замкнутом прямоугольнике $\Pi_\varepsilon \coloneqq [a, \eta_\varepsilon] \times \Pi$, причём $\omega(\delta; f; \Pi_\varepsilon)$ (при фиксированном $\varepsilon > 0$) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Следовательно, существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что $|I(y + \Delta y) - I(y)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$, если $|\Delta y| \leqslant \delta_\varepsilon$, что и означает непрерывность $I(y)$ при любом $y \in \Pi$, т. е. непрерывность I на Π.

Упражнение 4. Доказать следующую теорему о предельном переходе под знаком несобственного интеграла.

Теорема 5. *Пусть $y^{(0)}$ — предельная точка множества $Y \subset \mathbb{R}^m$ (при $m = 1$ не исключаются значения $y^{(0)} = -\infty$, $+\infty$, ∞). Пусть функция $f\colon [a,b) \times Y \to \mathbb{R}$, $[a,b) \subset \mathbb{R}$, при каждом $y \in Y$ непрерывна на $[a,b)$ как функция аргумента x и пусть*

$$f(x,y) \underset{[a,\eta]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y^{(0)}.$$

на любом отрезке $[a,\eta] \subset [a,b)$.

Пусть интеграл $I(y)$ (1) сходится равномерно на Y.

Тогда сходится $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ и

$$\lim_{Y \ni y \to y^{(0)}} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорема 6 (об интегрировании под знаком интеграла). *В условиях теоремы* 4 *при* $m = 1$, $\Pi = [c,d]$

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx. \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности функции f на $[a,\eta] \times [c,d]$ при $a < \eta < b$

$$\int_c^d \int_a^\eta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\eta \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx. \quad (7)$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $\eta \to b - 0$. Левая часть (7) имеет конечный предел

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d I(y)\,dy$$

— интеграл от функции, непрерывной на $[c, d]$ в силу теоремы 4.

В самом деле,

$$\left|\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy - \int_c^d \int_a^\eta f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant (d-c) \sup_{y\in[c,d]} \left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right| \to 0$$

при $\eta \to b-0$ в силу равномерной сходимости $I(y)$. Следовательно, и правая часть (7) имеет конечный предел, который по определению несобственного интеграла есть правая часть (6).

Переходя в равенстве (7) к пределу при $\eta \to b-0$, получаем равенство (6).

Упражнение 5. Получить теоремы 4 (при $m = 1$), 6 в качестве следствий из теорем 26.2.2, 26.2.3. Сравнить с доказательством теорем 16.3.1′, 16.3.2′.

Теорема 7 (о дифференцировании под знаком интеграла). *Пусть* $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, *и пусть функции* f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны на* $[a, b) \times [c, d]$. *Пусть для некоторого* $y_0 \in \in [c, d]$ *сходится интеграл* $I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\,dx$, *а интеграл* $\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[c, d]$.

Тогда функция $I(y)$ *дифференцируема и*

$$\frac{d}{dy} I(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 6 при $y \in [c, d]$

$$\int_{y_0}^y \int_a^b f'_y(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx =$$
$$= \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx.$$

Первый из интегралов в правой части сходится в силу сходимости второго интеграла и интеграла в средней части равенства. Дифференцируя полученное тождество, имеем

$$\int_a^b f'_y(x,y)\,dx = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

что и требовалось получить.

Упражнение 6. Доказать, что

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

У к а з а н и е. Предварительно вычислить вспомогательный интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,$$

найдя его производную $\frac{d}{d\alpha}I(\alpha)$ с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Затем воспользоваться упражнением 2.

Иногда для доказательства равномерной сходимости несобственного интеграла бывает полезно применить интегрирование по частям, «улучшающее» сходимость интеграла.

Пример 2.

$$I(y) = \int_1^\infty \frac{1}{x}\cos yx\,dx, \quad Y = (y_0, +\infty), \quad y_0 > 0.$$

Этот интеграл сходится, но не абсолютно (ср. с примером 14.7.3). После интегрирования по частям возникает интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\frac{\sin yx}{y}\,dx$, сходящийся абсолютно и (по признаку Вейерштрасса) равномерно на Y.

Приведём точные рассуждения. В соответствии с определением 1 следует оценить

$$\sup_{y\geqslant y_0}\left|\int_\eta^\infty \frac{1}{x}\cos yx\,dx\right| =$$
$$= \sup_{y\geqslant y_0}\left|\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin yx}{y}\Big|_{x=\eta}^\infty + \int_\eta^\infty \frac{1}{x^2}\frac{\sin yx}{y}\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y\geqslant y_0}\frac{2}{\eta y} = \frac{2}{\eta y_0} \to 0 \quad \text{при} \quad \eta\to+\infty.$$

Следовательно, $I(y)$ сходится равномерно на Y.

Приведём два признака (признаки Дирихле и Абеля) равномерной сходимости интеграла

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)g(x,y)\,dx, \quad y\in Y, \quad a\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Теорема 8 (признак Дирихле). *Пусть функции* $f, g\colon [a,+\infty)\times Y\to\mathbb{R}$, f *и* $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны по* x *при любом* $y\in Y$, *функция* g *монотонна по* x *при любом* $\forall\, y\in Y$. *Пусть*

1° *интегралы*

$$\int_a^\eta f(x,y)\,dx$$

равномерно ограничены на Y, *т. е. существует число* $M>0$ *такое, что*

$$\left|\int_a^\eta f(x,y)\,dx\right| \leqslant M \quad \forall\,\eta\in[a,+\infty), \quad \forall\, y\in Y,$$

2° $g(x,y)\underset{Y}{\rightrightarrows} 0$ *при* $x\to+\infty$.

Тогда интеграл $I(y)$ *из* (9) *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости несобственного интеграла (теорема 1). Для этого при $a < \eta' < \eta'' < \infty$ оценим интеграл

$$I(\eta', \eta'', y) := \int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)g(x,y)\,dx =$$
$$= \left(g(x,y)\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)\,d\xi\right)\Bigg|_{x=\eta'}^{\eta''} - \int_{\eta'}^{\eta''}\left(\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)\,d\xi\right) g'_x(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$|I(\eta',\eta'',y)| \leqslant |g(\eta'',y)|2M + 2M\int_{\eta'}^{\eta''} |g'_x(x,y)|\,dx =$$
$$= 2M\left[|g(\eta'',y)| + \left|\int_{\eta'}^{\eta''} g'_x(x,y)\,dx\right|\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2M[2|g(\eta'',y)| + |g(\eta',y)|].$$

Следовательно, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\eta_\varepsilon \in [a,\infty)$:

$$\sup_{y\in Y} |I(\eta',\eta'',y)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \eta',\ \eta'' > \eta_\varepsilon,$$

и теорема доказана.

Теорема 9 (признак Абеля). *Пусть функции f, g: $[a,+\infty)\times Y \to \mathbb{R}$, f и $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ непрерывны по x при любом $y \in \in Y$, функция g монотонна по x при любом $y \in Y$. Пусть*

1° *интеграл*
$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$
сходится равномерно на Y,

2° *функция g равномерно ограничена, т. е. $\exists\,M > 0$ такое, что*
$$|g(x,y)| \leqslant M \quad \text{при} \quad x \in [a,\infty), \quad y \in Y.$$

Тогда интеграл $I(y)$ из (9) сходится равномерно на Y.

Доказательство предлагается провести самостоятельно, оценив (как и при доказательстве признака Дирихле) $I(\eta', \eta'', y)$ в условиях теоремы.

Упражнение 7. Установить равномерную сходимость интеграла из примера 2 с помощью признака Дирихле.

Упражнение 8. С помощью признака Абеля доказать утверждение из упражнения 2, воспользовавшись примером 14.7.3.

До сих пор в этом параграфе рассматривались несобственные интегралы с особенностью на верхнем пределе. Аналогично изучаются зависящие от параметра несобственные интегралы с особенностью на нижнем пределе (см. определение 14.7.3) и зависящие от параметра несобственные интегралы с несколькими особенностями (см. определение 14.7.5). В последнем случае интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y,$$

с несколькими особенностями представляется в виде суммы интегралов

$$I(y) = \sum_{i=1}^{k} I_i(y) = \sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x, y)\, dy,$$
$$-\infty \leqslant a = c_0 < c_1 < \ \ldots < c_k = b \leqslant +\infty,$$

где каждый из интегралов $I_i(y)$ является несобственным с одной особенностью на верхнем либо на нижнем пределе. При этом интеграл $I(y)$ называется *равномерно сходящимся на* Y, если каждый из интегралов $I_i(y)$ равномерно сходится на Y.

Пример 3. *Гамма-функция Эйлера.*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx, \quad s > 0. \tag{10}$$

Интеграл имеет две особенности на нижнем и на верхнем пределах. Представим $\Gamma(s)$ в виде

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx. \qquad (11)$$

Легко видеть, что первый интеграл сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$, а второй сходится при $s > 0$. Следовательно, интеграл (10) сходится при $s > 0$.

Интеграл (10) сходится равномерно на любом отрезке $[s_0, s_1] \subset (0, +\infty)$, т. к. на таком отрезке равномерно сходятся оба интеграла в (11), что устанавливается с помощью признака Вейерштрасса с мажорантами $\varphi_0(x) = x^{s_0-1}$, $\varphi_1(x) = x^{s_1-1}e^{-x}$ соответственно. Следовательно, гамма-функция $\Gamma(s)$ непрерывна при $s > 0$ по теореме 4.

При $s > 0$ с помощью интегрирования по частям имеем

$$\Gamma(s+1) = \\ = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x}\,dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\Gamma(s).$$

Следовательно, при $s > 0$

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1)\ldots(s+1)s\Gamma(s).$$

Из этой формулы видно, что по значениям гамма-функции на полуинтервале $(0, 1]$ можно вычислить её значения для любого аргумента $s > 1$.

Поскольку $\Gamma(1) = 1$, из последнего соотношения получаем, что

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. что функция $\Gamma(s+1)$ является продолжением функции $s!$ с множества целых неотрицательных чисел n на полуось $\{s\colon s > -1\}$.

Пример 4. *Бета-функция Эйлера*

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{12}$$

зависит от двух параметров p, q. Интеграл имеет две особенности на нижнем и на верхнем пределах интегрирования. Поэтому представим его в виде

$$B(p,q)=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{13}$$

Первый из интегралов в (13) сходится при $p>0$ и расходится при $p\leqslant 0$, а второй сходится при $q>0$ и расходится при $q\leqslant 0$. Следовательно, бета-функция $B(p,q)$ определена на первом квадранте $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Интеграл (12) равномерно сходится на множестве

$$\{(p,q)\ :\ p\geqslant p_0,\quad q\geqslant q_0\}\quad \text{при}\quad p_0,\ q_0>1,$$

т. к. на этом множестве равномерно сходится каждый из интегралов (13), что легко установить, применив признак Вейерштрасса с мажорантой $\varphi(x)=x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$. Следовательно, по теореме 4 бета-функция $B(p,q)$ непрерывна на первом квадранте:

$$\{(p,q)\ :\ p>0,\quad q>0\}=(0,+\infty)\times(0,+\infty).$$

Функции $B(p,q)$ и $\Gamma(s)$ связаны между собой *формулой Эйлера*:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,\quad q>0.$$

Существуют программы, позволяющие находить значения бета- и гамма-функций.

Они используются при численном вычислении интегралов, сводящихся к этим функциям.

Глава 27
ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 27.1. Интеграл Фурье

Напомним определение 14.8.2.

При $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *функция* f *называется абсолютно интегрируемой* *на интервале* (a, b), *если существует конечное число точек* $\{c_i\}$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ *таких, что*

1° *функция* f *интегрируема по Риману на любом отрезке* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, *не содержащем точек* c_i;

2° *сходится несобственный интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$, *понимаемый как несобственный интеграл с особенностями в точках* c_0, c_1, $\ldots$, c_k.

Множество всех абсолютно интегрируемых на (a, b) функций образует полунормированное пространство $RL((a, b))$ с полунормой $\int_a^b |f(x)|\,dx$, см. пример 25.2.4.

Лемма 1. *Пусть функция* f *абсолютно интегрируема на* (a, b), *функция* φ *непрерывна и ограничена на* $(a, b) \times [c, d]$.

Тогда

1° *несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x)\varphi(x, y)\,dx$$

непрерывен на $[c, d]$,

2° $$\int_c^d \int_a^b f(x)\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x)\varphi(x, y)\,dy\,dx.$$

Доказательство. 1°. Пусть $|\varphi| \leqslant M$ на $(a, b) \times \times [c, d]$. Пусть $\varepsilon > 0$, $a < \xi < \eta < b$, причём $\xi = \xi(\varepsilon)$ и $\eta = \eta(\varepsilon)$ таковы, что

$$\int_a^\xi |f(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \int_\eta^b |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Тогда при y, $y + \Delta y \in [c, d]$

$$\Delta I := I(y + \Delta y) - I(y) = \\ = \left(\int_a^\xi + \int_\xi^\eta + \int_\eta^b\right) f(x)[\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)]\,dx,$$

$$|\Delta I| \leqslant 2M\varepsilon + \omega(\Delta y; \varphi; \Pi) \int_a^b |f(x)|\,dx + 2M\varepsilon, \qquad (1)$$

где $\omega(\delta; \varphi; \Pi)$ — модуль непрерывности функции φ на замкнутом прямоугольнике $\Pi = [\xi, \eta] \times [c, d]$.

Поскольку φ равномерно непрерывна на Π, то можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\omega(\delta_\varepsilon; \varphi; \Pi) < \varepsilon$.

Тогда из (1) получаем, что

$$|\Delta I| \leqslant 4M\varepsilon + \varepsilon \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Следовательно, интеграл $I(y)$ непрерывен на $[c, d]$.

2°. При $\varepsilon > 0$ через $f_\varepsilon\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ обозначим непрерывную финитную (т. е. равную нулю вне некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$) функцию такую, что

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ такая функция f_ε существует в силу следствия 14.8.1.

Тогда

$$\int_c^d \int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b f_\varepsilon(x) \int_c^d \varphi(x, y)\,dy\,dx. \qquad (2)$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим утверждение 2° теоремы.

Предельный переход в левой части равенства (2) обосновывается с помощью оценок

$$\left| \int_c^d \int_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]\varphi(x,y)\,dx\,dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant M(d-c) \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant M(d-c)\varepsilon.$$

Обоснование предельного перехода в правой части (2) аналогично.

Определение 1. Пусть f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. *Интегралом Фурье* функции f называется интеграл

$$S(x) = S(x, f) \coloneqq \int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy, \qquad (3)$$

где

$$\begin{Bmatrix} a(y) \\ b(y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \begin{Bmatrix} \cos yt \\ \sin yt \end{Bmatrix} dt. \qquad (4)$$

Лемма 2. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$.*

Тогда

1° *функции $a(y)$, $b(y)$ из (4) непрерывны на $[0, +\infty)$;*

2° *$a(y)$, $b(y) \to 0$ при $y \to +\infty$.*

Доказательство следует из леммы 1 и теоремы 24.1.1 Римана об осцилляции.

Из леммы 2 следует, что интеграл $S(x)$ из (3) является несобственным интегралом с одной особенностью на верхнем пределе.

Как видим, правая часть (3) является аналогом ряда Фурье, а $a(y)$, $b(y)$ из (4) — аналогами коэффициентов Фурье.

Перепишем интеграл Фурье $S(x, f)$ в виде

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty \cos xy + \sin ty \sin xy)\, dt\, dy =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt\, dy.$$

Изучим сходимость интеграла Фурье (т. е. внешнего интеграла в правой части последнего равенства). Для этого рассмотрим интеграл

$$S_\eta(x) \coloneqq \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt\, dy, \quad \eta > 0,$$

(являющийся аналогом суммы Фурье).

Применяя лемму 1, имеем

$$S_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_0^{\eta} \cos y(x-t)\, dy\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \eta(x-t)}{x-t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x) \frac{\sin \eta u}{u}\, du =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty} \right) f(u+x) \frac{\sin \eta u}{u}\, du,$$

$$S_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \eta t}{t}\, dt. \tag{5}$$

Лемма 3.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \eta t}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \quad \forall\, \eta > 0. \tag{6}$$

Доказательство этого равенства предлагается провести самостоятельно, используя указание к упражнению 26.3.6.

Напомним определение 24.2.1. Точка x_0 называется *почти регулярной* точкой функции f, если существуют $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$,

$$
\begin{aligned}
f'_+(x_0) &\coloneqq \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}, \\
f'_-(x_0) &\coloneqq \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}.
\end{aligned}
$$

Если при этом $f(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то точка x_0 называется *регулярной* точкой функции f.

Если функция f имеет в точке x_0 правую и левую односторонние производные, то f непрерывна в точке x_0 и x_0 — регулярная точка функции f.

Теорема 1 (достаточные условия сходимости интеграла Фурье в точке). *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty,+\infty)$, и пусть $a(y)$, $b(y)$ определены формулой* (4)*. Тогда*

1° *если x_0 — почти регулярная точка функции f, то*

$$
S(x_0) = S(x_0, f) = \int_0^\infty [a(y)\cos x_0 y + b(y)\sin x_0 y]\,dy = \\
= \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2};
$$

2° *если же x_0 — регулярная точка функции f, то*

$$
S(x_0, f) = f(x_0).
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (5) и (6), получим

$$S_\eta(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+t)-f(x_0+0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0-t)-f(x_0-0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}J^+(\eta) + \frac{1}{\pi}J^-(\eta).$$

Представим $J^+(\eta)$ при $\eta > 0$ в виде

$$J^+(\eta) = \int_0^1 \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\eta t\,dt +$$
$$+\int_1^\infty \frac{f(x_0+t)}{t}\sin\eta t\,dt - f(x_0+0)\int_\eta^\infty \frac{\sin u}{u}\,du =$$
$$= J_1^+(\eta) + J_2^+(\eta) - f(x_0+0)J_3^+(\eta).$$

Интегралы $J_1^+(\eta)$, $J_2^+(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$ по теореме 24.1.1 Римана об осцилляции. Интеграл $J_3^+(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$ в силу сходимости интеграла $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$. Следовательно, $J^+(\eta) \to 0$ и аналогично $J^-(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Многие свойства интегралов Фурье аналогичны соответствующим свойствам рядов Фурье по тригонометрической системе. В качестве примера можно сравнить формулировки теорем 1 и 24.2.1. Для интегралов Фурье, как и для рядов Фурье, справедлив принцип локализации, аналогично формулируются различные условия сходимости в точке (например, в терминах условий Гёльдера) и равномерной сходимости, одинаково влияние гладкости функции на скорость сходимости рядов Фурье и интегралов Фурье, имеется аналог равенства Парсеваля и т. п.

Напомним, что для комплекснозначной функции действительного аргумента t

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad u(t),\ v(t) \in \mathbb{R} \quad \forall\, t \in \langle a, b\rangle,$$

интеграл Римана и несобственный интеграл Римана определяются так же, как для действительнозначной функции. При этом

$$\int_a^b w(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt,$$

если два последних интеграла существуют, и

$$\left| \int_a^b w(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |w(t)|\, dt,$$

если интеграл в левой части существует как интеграл Римана или абсолютно сходится как несобственный интеграл с несколькими особенностями.

Определение 2. Пусть функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[-\eta, \eta]$, $\eta > 0$. Тогда

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \coloneqq \lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x)\, dx.$$

Пусть функция $\varphi\colon [a, b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, интегрируема по Риману на любом множестве $[a, b] \setminus U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\text{v.p.} \int_a^b \varphi(x)\, dx \coloneqq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(x_0)} \varphi(x)\, dx.$$

Каждая из введённых конструкций называется *главным значением* (valeur principale) интеграла.

Если интеграл сходится как несобственный, то он имеет, очевидно, и главное значение, совпадающее с несобственным интегралом. Обратное неверно. Например, главные значения интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, dx$, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ существуют и равны нулю, но сами интегралы расходятся как несобственные.

Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и в каждой точке имеет обе односторонние производные (а значит, и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$). Тогда по теореме 1 для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt\, dy = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt\, dy.$$

В то же время вследствие нечётности функции $\sin x$

$$0 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt\, dy.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\frac{i}{2\pi}$ и сложив с предыдущим, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\, \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)}\, dt\, dy. \qquad (7)$$

Последняя формула называется *комплексной формой интеграла Фурье.*

§ 27.2. Преобразование Фурье

Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и в каждой точке x имеет односторонние производные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ (а значит, и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$). Тогда она может быть разложена в интеграл Фурье. Это разложение, имеющее в комплексной форме вид (27.1.7), можно переписать так:

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \right) e^{ixy}\, dy. \quad (1)$$

Правая часть (1) представляет собой результат двух последовательно применённых интегральных преобразований.

Определение 1. Пусть (комплекснозначная) функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[-\eta, \eta] \subset (-\infty, +\infty)$.

Преобразование Фурье функции f определяется формулой

$$\hat{f}(y) = F[f](y) \coloneqq \text{v.p. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx. \tag{2}$$

Обратное преобразование Фурье функции f определяется формулой

$$\tilde{f}(y) = F^{-1}[f](y) \coloneqq \text{v.p. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iyx}\, dx. \tag{3}$$

В частности, если f — комплекснозначная абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция, то

$$\begin{aligned} F[f](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx, \\ F^{-1}[f](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iyx}\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и имеет в каждой точке обе односторонние производные. Тогда*

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая из формул (5) совпадает с ранее установленной формулой (1). Вторая получается применением первой к функции $f^*(x) \coloneqq f(-x)$.

Формулы (5) называют *формулами обращения*.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 установлена для действительнозначных функций f. Она справедлива и для комплекснозначных функций f действительного аргумента ($f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$), поскольку каждую такую функцию можно представить в виде $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g, h\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, и воспользоваться теоремой 1 для функций g и h.

Эти же соображения применимы и при выводе ряда других свойств преобразований F и F^{-1}. Поэтому при их формулировке и доказательстве можно ограничиться рассмотрением лишь действительнозначных функций.

Установим некоторые свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Пусть функции f_1, f_2, f абсолютно интегрируемы на $(-\infty, \infty)$.

Тогда

1° (линейность)

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2] \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C};$$

2° $\hat{f} = F[f]$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$,

$$\hat{f}(y) \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \pm\infty;$$

3° $\hat{f}$ — ограничена на $(-\infty, +\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Линейность преобразования Фурье следует из линейности несобственного интеграла.

2° следует из леммы 27.1.2, т. к. $\sqrt{2\pi}\hat{f}(y) = a(y) - ib(y)$.

3° является следствием 2° или устанавливается простой оценкой

$$\sup_{-\infty<y<+\infty} |\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Изучим преобразование Фурье производных и производные преобразования Фурье.

Теорема 2. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и производная f' непрерывна и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$.*

Тогда

$$F[f'](y) = (iy)F[f](y), \quad y \in (-\infty, +\infty).$$

Доказательство. Представим функцию f в виде

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ следует существование пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ixy}\Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dy = iyF[f](y).$$

Следствие 1. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ вместе со своими производными до порядка n включительно, и пусть $f^{(n)}$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.*

Тогда

$$F[f^{(n)}](y) = (iy)^n F[f](y) \quad \textit{при} \quad y \in (-\infty, +\infty), \tag{6}$$

$$|F[f](y)| \leqslant \frac{M}{|y|^n}, \quad \text{где} \quad M = \sup_{(-\infty,+\infty)} |F[f^{(n)}]|. \tag{7}$$

Доказательство равенства (6) сводится к последовательному применению n раз теоремы 2. Оценка (7) следует из равенства (6).

Теорема 3. *Пусть на* $(-\infty, +\infty)$ *функция* f *непрерывна, а функция* f_1 $(f_1(x) = xf(x))$ *абсолютно интегрируема.*

Тогда на $(-\infty, +\infty)$ *существует*

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = F[-if_1](y) = F[-ixf(x)](y).$$

Доказательство. Дифференцируя первый из интегралов (4) по параметру y, получаем на основании теоремы 26.3.7

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-iyx}\,dx.$$

Заметим, что последний интеграл сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса с мажорантой $\varphi(x) = |xf(x)|$.

Следствие 2. *Пусть на* $(-\infty, +\infty)$ *функция* f *непрерывна, а функция* f_n $(f_n(x) = x^n f(x))$ *при некотором* $n \in \mathbb{N}$ *абсолютно интегрируема.*

Тогда на $(-\infty, +\infty)$ *существует*

$$\frac{d^n}{dy^n}F[f](y) = F[(-i)^n f_n](y) = F[(-ix)^n f(x)](y).$$

Глава 28
ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 28.1. Пространства D и D' основных и обобщённых функций

Понятие обобщённой функции расширяет классическое понятие функции и дает возможность выразить в математической форме такие понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда, интенсивность мгновенного точечного источника и т. п. Реально можно измерить лишь среднюю плотность вещества в данной точке. Обобщённая функция отражает эту ситуацию: она определяется своими средними значениями в окрестности каждой точки. Возьмём, например, стержень, совпадающий с отрезком $[-1, 1]$ действительной прямой. Пусть требуется охарактеризовать его плотность, создаваемую материальной точкой массы 1, расположенной в точке $x = 0$. Сначала будем считать, что эта масса равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, где $\varepsilon > 0$ мало. Тогда плотность стержня $\delta_\varepsilon(x)$ задается формулой

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } |x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Как видим, масса стержня

$$m = \int_{-1}^{1} \delta_\varepsilon(x)\, dx = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \delta_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда получим «функцию»

$$\delta(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

В то же время было бы желательно иметь равенство

$$\int_{-1}^{1} \delta(x)\, dx = 1.$$

Как видим, наши требования к предельной «функции» $\delta(x)$ противоречивы, если понимать их в классических математических терминах. Этот (в частности) вопрос разрешим в рамках теории обобщённых функций, созданной С.Л. Соболевым и Л. Шварцем.

В рассмотренном примере использованное понятие поточечного предельного перехода можно заменить другим. Если φ — произвольная непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция, то существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Формально это записывают так:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Отображение, которое каждой функции некоторого класса ставит в соответствие число, называется *функционалом.* Последнее равенство означает, что $\delta(x)$ — функционал, определённый на множестве всех непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ функций и ставящий в соответствие каждой непрерывной функции её значение в точке 0. Функционал $\delta(x)$ называют *δ-функцией Дирака.* Функцию $\delta_\varepsilon(x)$ также можно рассматривать как функционал на множестве всех непрерывных функций, действующий по формуле

$$\varphi \to \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx,$$

в которой интеграл можно понимать как интеграл Римана по отрезку $\left[-\frac{\varepsilon}{2}\,,\ \frac{\varepsilon}{2}\right]$, а предельный переход $\delta_\varepsilon \to \delta$ (называемый *слабой сходимостью*) понимать как предельный переход на множестве функционалов.

Перейдём к точным формулировкам. Будем далее рассматривать лишь одномерный случай.

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если $f = 0$ вне некоторого отрезка.

Носителем функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}$, в которых $f(x) \neq 0$. Он обозначается $\operatorname{supp} f$.

В силу данных определений функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ финитна тогда и только тогда, когда её носитель компактен (т. е. является замкнутым ограниченным множеством).

Символом C_0^∞ обозначается множество бесконечно дифференцируемых финитных функций. Множество C_0^∞ является линейным пространством при естественном определении операций сложения функций и умножения функции на число.

Введём в C_0^∞ понятие сходимости.

Определение 1. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ функций $\varphi_k \in C_0^\infty$ называется *сходящейся к функции* $\varphi \in C_0^\infty$, если

1° $\exists\,[a, b]\colon \operatorname{supp} \varphi_k \subset [a, b]\ \forall\, k \in \mathbb{N}$,

2° $\sup |\varphi_k^{(s)} - \varphi^{(s)}| \to 0$ при $k \to \infty$, $\forall\, s \in \mathbb{N}_0$.

Определение 2. Линейное пространство C_0^∞ с введённым понятием сходимости называется *пространством D основных функций.*

Пусть f — функционал на пространстве D основных функций. Значение f на $\varphi \in D$ обозначается через (f, φ).

Определение 3. Функционал f на D называется *линейным*, если

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi) \quad \forall\, \varphi, \psi \in D, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Определение 4. Функционал f на D называется *непрерывным*, если при $k \to \infty$

$$\text{из} \quad \varphi_k \to \varphi \quad \text{в} \quad D \quad \text{следует} \quad (f, \varphi_k) \to (f, \varphi).$$

Определение 5. Всякий линейный непрерывный функционал на D называется *обобщённой функцией.*

Определение 6. *Пространством обобщённых функций* D' называется множество (линейное пространство) всех обобщённых функций с введёнными в нём операциями сложения, умножения на число, а также сходимостью по следующим правилам:

1° $(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)$, $f, g \in D'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi \in D$;

2° последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in D'$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, называется сходящейся в D' к $f \in D'$ при $k \to \infty$, если

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, \varphi \in D.$$

Сходимость в D' записывается в виде

$$f_k \to f \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Приведём некоторые примеры.

Пример 1. При любом $a > 0$ функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{a^2}{x^2 - a^2}} & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant a \end{cases}$$

принадлежит пространству C_0^{∞} (ср. с примером функции φ из начала § 17.3).

Этот пример показывает, что C_0^{∞} содержит функции, отличные от тождественного нуля.

Пример 2. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *локально абсолютно интегрируема* (т.е абсолютно интегрируема на каждом отрезке $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$). Тогда функционал, определённый равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{1}$$

является обобщённой функцией, т. е. элементом D'.

Определение 7. Обобщённая функция называется *регулярной*, если её значения на любой функции $\varphi \in D$ представимы в виде (1) с некоторой локально абсолютно интегрируемой функцией f.

В противном случае обобщённая функция называется *сингулярной.*

Регулярная обобщённая функция, определяемая формулой (1), обозначается тем же символом f и отождествляется с локально абсолютно интегрируемой функцией f. Можно сказать, таким образом, что D' содержит все локально абсолютно интегрируемые функции.

Пример 3. δ-функция, определяемая формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in D,$$

является сингулярной обобщённой функцией. Покажем это. Допустив противное, предположим, что при некоторой локально абсолютно интегрируемой функции f

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in D.$$

Тогда для функции φ из примера 1

$$\int_{-a}^{a} f(x) e^{\frac{a^2}{x^2-a^2}}\, dx = \varphi(0) = e^{-1} \quad \forall\, a \in (0,1).$$

Но это равенство не выполняется при малых значениях a, т. к. его левая часть ограничена интегралом

$$\int_{-a}^{a} |f(x)|\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0+0.$$

Следовательно, δ-функция является сингулярной обобщённой функцией.

Пример 4. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных абсолютно интегрируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций называется *δ-образной последовательностью*, если

1° $\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,dx = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$;

2° $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_k(x)\,dx = 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0$.

Примером δ-образной последовательности функций является последовательность функций

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{1}{k}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Упражнение 1. Показать, что если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — δ-образная последовательность, то

$$f_k \to \delta \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

т. е. (в соответствии с определением сходимости в D')

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, \varphi \in D.$$

§ 28.2. Дифференцирование обобщённых функций

Если функция f непрерывно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$, то для любой функции $\varphi \in D$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Это соотношение делает естественным следующее

Определение 1. Пусть $f \in D'$. Обобщённая функция f', задаваемая формулой

$$(f', \varphi) \coloneqq -(f, \varphi') \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{1}$$

называется *производной* обобщённой функции f.

Читателю предлагается проверить, что функционал, стоящий в правой части (1), является линейным и непрерывным на D, т. е. обобщённой функцией.

Переход от обобщённой функции к её производной называется операцией дифференцирования.

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства операции дифференцирования:*

1° *(линейность)*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \forall\, f, g \in D', \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

2° *(непрерывность) при* $k \to \infty$

$$f_k \to f \quad \text{в} \quad D' \Rightarrow f_k' \to f' \text{ в } D'.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Для любой функции $\varphi \in D$ имеем

$$((\alpha f + \beta g)', \varphi) = -(\alpha f + \beta g, \varphi') = -\alpha(f, \varphi') - \beta(g, \varphi') = \\ = \alpha(f', \varphi) + \beta(g', \varphi) = (\alpha f' + \beta g', \varphi).$$

2°. Пусть $f_k \to f$ в D' при $k \to \infty$. Тогда $\forall\, \varphi \in D$

$$(f_k', \varphi) = -(f_k, \varphi') \to -(f, \varphi') = (f', \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Пример 1. Пусть θ — *функция Хевисайда*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Рассматривая θ как обобщённую функцию, найдём её производную. Пусть $\varphi \in D$. Тогда

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Следовательно, $\theta' = \delta$.

Определение 2. Пусть $f \in D'$, $n \in \mathbb{N}$. Обобщённая функция $f^{(n)}$, задаваемая формулой

$$(f^{(n)}, \varphi) \coloneqq (-1)^n (f, \varphi^{(n)}) \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{2}$$

называется *производной порядка* n от обобщённой функции f.

Так же, как в случае $n = 1$, проверяется, что функционал $(f, \varphi^{(n)})$ из правой части (2) является линейным и непрерывным на D, т. е. обобщённой функцией.

Упражнение 1. Вычислить вторую производную функции $f(x) = |x|$.

Мы видим, что каждую обобщённую функцию f ($\in D'$) можно дифференцировать и притом сколько угодно раз, а её производная $f^{(n)}$ любого порядка n также является обобщённой функцией (элементом D').

Определение 3. Пусть $f_k \in D'$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ называется *рядом обобщённых функций*. Этот ряд называется *сходящимся* в D' к $f \in D'$, если

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k \to f \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При этом пишут

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f. \tag{3}$$

Из непрерывности операции дифференцирования (свойство 2° теоремы 1) следует, что всякий сходящийся в D' ряд обобщённых функций (3) можно почленно дифференцировать:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k' = f',$$

и полученный ряд также будет сходиться в D'.

Определение 4. Пусть $f \in D'$ и функция λ бесконечно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$. *Произведением* λf называется обобщённая функция, задаваемая формулой

$$(\lambda f, \varphi) \coloneqq (f, \lambda\varphi) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty.$$

Упражнение 2. Показать, что λf — линейный непрерывный функционал на D, т. е. обобщённая функция из D'.

§ 28.3. Пространства S и S' основных и обобщённых функций

Наряду с парой D и D' основных и обобщённых функций важнейшей в математическом анализе и теории дифференциальных уравнений в частных производных является пара пространств S, S' (называемых *пространствами Шварца*) основных и обобщённых функций. Эти пространства замечательны тем, что они инвариантны относительно преобразования Фурье:

$$\varphi \in S \Rightarrow F[\varphi] \in S, \quad f \in S' \Rightarrow F[f] \in S'.$$

Определение 1. *Линейным пространством* S называется множество комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций φ, для которых конечна каждая из полунорм

$$\|\varphi\|_{n,m} \coloneqq \sup_{-\infty<x<+\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| < \infty \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0, \qquad (1)$$

при естественном определении сложения функций и умножения функции на комплексное число.

При $x \to \pm\infty$ функция $\varphi \in S$ и каждая из её производных убывает быстрее любой степени функции $\frac{1}{|x|}$. Такую функцию называют *быстро убывающей.*

Заметим, что $C_0^\infty \subset S$, однако S не совпадает с C_0^∞. Так, функция $\varphi(x) = e^{-x^2}$ принадлежит S, но не C_0^∞.

Введём в S понятие сходимости.

Определение 2. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ функций $\varphi_k \in S$ называется *сходящейся* к функции $\varphi \in S$, если

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{n,m} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

В других терминах сходимость (2) означает, что для любых $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$x^n \varphi_k^{(m)}(x) \rightrightarrows x^n \varphi^{(m)}(x) \quad \text{на} \quad (-\infty, +\infty) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Определение 3. Линейное пространство S с введённой сходимостью (2) называется *пространством S основных функций.*

Определение 4. Линейный непрерывный функционал на S называется обобщённой функцией *медленного роста.*

Пример 1. Пусть функция f локально абсолютно интегрируема и при некоторых $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x)| \leqslant A(1 + |x|^n), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Тогда

$$(f, \varphi) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in S$$

является обобщённой функцией медленного роста.

Определение 5. *Пространством S' обобщённых функций* (медленного роста) называется множество (линейное пространство) всех обобщённых функций медленного роста с введёнными в нём операциями сложения, умножения на комплексное число, а также сходимостью по следующим правилам:

1° $(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)$, $f, g \in S'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\varphi \in S$;

2° последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in S'$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, называется сходящейся в S' к $f \in S'$ при $k \to \infty$, если

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, \varphi \in S.$$

В пространстве S' определена операция дифференцирования равенством

$$(f', \varphi) \coloneqq -(f, \varphi') \quad \forall\, \varphi \in S.$$

Эта операция является непрерывной в S' в том смысле, что (при $k \to \infty$) $f_k \to f$ в $S' \Rightarrow f_k' \to f'$ в S'.

Отсюда следует, что при f_k, $f \in S'$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{S'}{=} f \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \overset{S'}{=} f'.$$

В пространстве S' определена операция умножения на многочлен $p(x)$ формулой

$$(pf, \varphi) \coloneqq (f, p\varphi) \quad \forall\, \varphi \in S, \quad \forall\, f \in S'.$$

Преобразование Фурье $F[\varphi]$ и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[\varphi]$ для $\varphi \in S$ записываются в виде

$$F[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy,$$
$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ixy} dy.$$

Упражнение 1. Установить следующие свойства преобразования Фурье:

1° $\varphi \in S \Rightarrow F[\varphi],\ F^{-1}[\varphi] \in S$;

2° преобразование Фурье взаимно однозначно отображает S на S;

3° операции преобразования Фурье $F[\varphi]$ (и обратного преобразования Фурье $F^{-1}[\varphi]$) непрерывны в S в том смысле, что при $k \to \infty$

$$\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow F[\varphi_k] \xrightarrow{S} F[\varphi] \quad (F^{-1}[\varphi_k] \xrightarrow{S} F^{-1}[\varphi]).$$

Равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right) \varphi(x)\, dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-iyx} dx \right) f(y)\, dy$$

для функции $\varphi \in S$ и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$ функции f делает естественным

Определение 6. *Преобразованием* (*обратным преобразованием*) *Фурье* обобщённой функции $f \in S'$ называется обобщённая функция $F[f]$ $(F^{-1}[f])$, определённая равенством

$$(F[f], \varphi) \coloneqq (f, F[\varphi]) \quad ((F^{-1}[f], \varphi) \coloneqq (f, F^{-1}[\varphi])) \quad \forall\, \varphi \in S.$$

Упражнение 2. Установить следующие свойства преобразования Фурье обобщённых функций:

1° $f \in S' \Rightarrow F[f] \in S'$, $F^{-1}[f] \in S$;

2° $S' \overset{F}{\leftrightarrow} S'$;

3° (непрерывность) при $k \to \infty$

$$f_k \to f \text{ в } S' \Rightarrow F[f_k] \to F[f] \text{ в } S',\ F^{-1}[f_k] \to F^{-1}[f] \text{ в } S';$$

4° $F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f] \quad \forall\, f \in S'$;

5° $(F[f])^{(n)} = F[(-ix)^n f] \quad \forall\, f \in S'$.

Приложение

Таблица производных

$(C)' = 0$ (C — постоянная);

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x, \quad a > 0$;

$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad x > 0$;

$(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$;

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$;

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$.

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Таблица интегралов

$$\int 0\,dx = C;$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Формулы Тейлора для основных элементарных функций

При $x \to 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

Предметный указатель

Учебное издание

БЕСОВ Олег Владимирович

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ