Modelos de Distribución Continua I

Introducción a la Estadística

DVM

Contenidos

1. Variable Aleatoria Continua
   - Funcion de probabilidad (PDF)
   - Funcion de probabilidad acumulada (CDF)
   - Esperanza, Varianza y Desviación Típica
2. Distribución Uniforme
3. Distribución Exponencial
4. Variable Aleatoria Bidimensional Continua

Variable Aleatoria Continua

Variable aleatoria (Definición anteriormente) cuyo dominio es toda la recta real o un subconjunto de él, definido por un intervalo.Es decir, su espacio muestral es infinito no numerable (o continuo):

$$E'x_i \text{ con } a \leq i \leq b \text{ ó } -\infty \leq x \leq \infty$$

Ejemplos:

- Tiempo y duración de una bombilla
- Precio de una acción
- Peso y altura de un colectivo

Función de probabilidad (PDF)

Densidad de masa

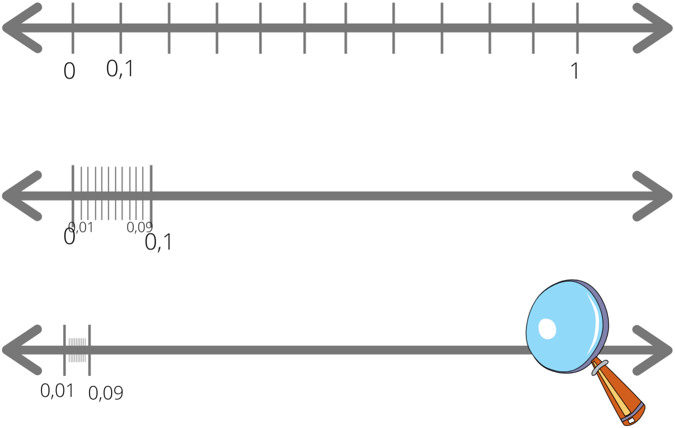
Como hemos visto anteriormente, una variable aleatoria queda definida entonces cuando conocemos su rango de posibles valores y el conjunto de probabilidades asociadas.

Para el cálculo de la probabilidad de una variable aleatoria de naturaleza continua tenemos que hablar del concepto de *densidad de masa*:

Función de probabilidad (PDF)

Densidad de masa

¿Cómo repartimos el total de masa de probabilidad que va desde 0 a 1 entre ∞ valores no posibles de numerar?



Función de probabilidad (PDF)

Densidad de masa

Imaginemos un dado ‘continuo’: al tirarlo podemos obtener cualquier número real comprendido en el intervalo [0,6]. Todos los números son equiprobables.

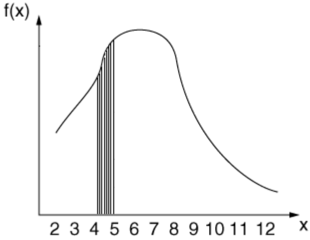
- Por Laplace, sabemos que si el dado fuera "discreto", $P(X = x) = \frac{1}{6}$
- Ahora, $P(X = x) = \frac{1}{\infty} = 0!!$

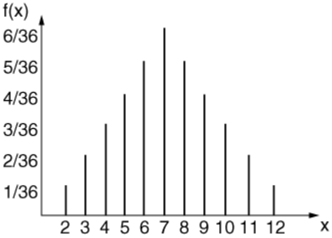
En general, para toda v.a. continua X, la probabilidad de que tome un determinado valor, P(X = x), es simpre igual a cero. Por esto, se consideran las probabilidades en un rango de valores, agrupados en un intervalo que contiene infinitos valores posibles y cuya agregación de probabilidades constituye una masa de probabilidad distinta de 0.

Función de probabilidad (PDF)

Densidad de masa

Si dibujaramos gráficamente las probabilidades individuales de cada uno de los infinitos valores que puede asumir la v.a. continua, las barras acabarían estando tan pegadas una de otras que conformarían un área.





La función de densidad/función de probabilidad f(x) es esa función matematica que recoge debajo de sí en un area toda la masa de probabilidad.

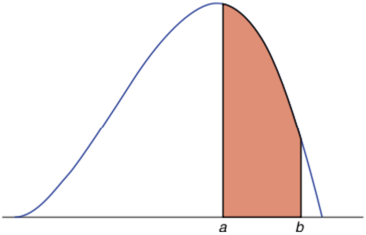
Función de probabilidad (PDF)

La probabilidad de la v.a. viene dada por areas y para obtenerla se integra.

$$x \rightarrow f(x)(= P(a < X < b))$$

A f(x) se le exige los mismos criterios de cualquier función de probabilidad:

1. No negatividad: $f(x) \geq 0$
2. Aditividad: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$



$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) =$
$P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$
$\int_a^b f(x)dx$

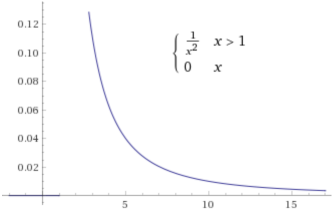
Función de probabilidad (PDF)
Ejemplo 1

Tenemos la variable aleatoria X con la siguiente función de probabilidad:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Comprueba que es una funcion de probabilidad

b) Calcula $P(X > 10)$



Función de probabilidad (PDF)

Ejemplo 1

Tenemos la variable aleatoria X con la siguiente función de probabilidad:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Comprueba que es una funcion de probabilidad
   - $P(X > 1) = 1$ y $f(x) \geq 0$ ✓;
     $P(X > 1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$ ✓

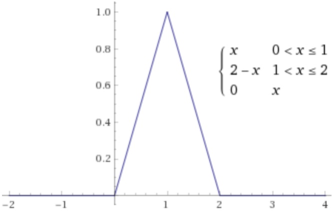
b) Calcula $P(X > 10)$
   $P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]_{10}^{\infty} = 0 - (-1/10) = 1/10$

Función de probabilidad (PDF)

Ejemplo 2

Una variable aleatoria tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \textit{resto} \end{cases}$$



OJO! en el cálculo de la integral

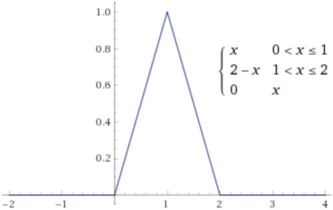
a) Comprueba que es una funcion de probabilidad

Función de probabilidad (PDF)

Ejemplo 2

Una variable aleatoria tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$



OJO! en el cálculo de la integral

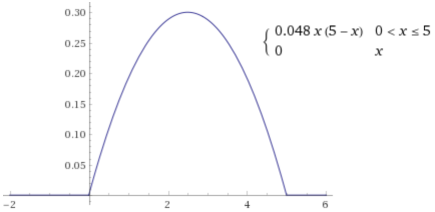
a) Comprueba que es una funcion de probabilidad

- $P(X > 0) = 1$ y $f(x) \geq 0$ ✓; $P(0 < X \leq 2) = 1$ ✓

Función de probabilidad (PDF)

Ejemplo 3

Una variable aleatoria tiene la siguiente función de densidad:$f(x) = 0,048x(5 - x)$

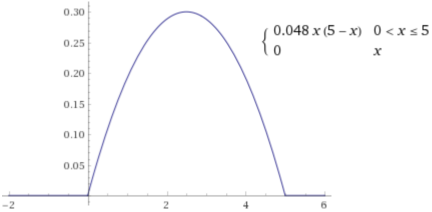


- ¿Cuáles son las condiciones que tiene que cumplir para que se verifique que es una funcion de densidad?

Función de probabilidad (PDF)

Ejemplo 3

Una variable aleatoria tiene la siguiente función de densidad:$f(x) = 0,048x(5 - x)$



- ¿Cuáles son las condiciones que tiene que cumplir para que se verifique que es una funcion de densidad?

a) $f(x) \geq 0$

$f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 5$

b)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ *o en este caso* :

$P(X > 0) = 1;$

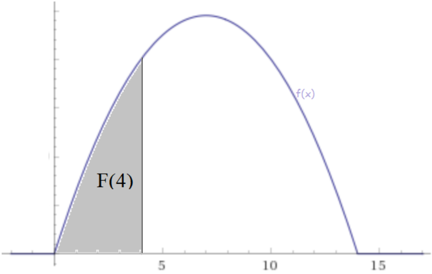
entonces,

$P(X > 0) = \int_0^5 0,048x(5 - x) = 1$

Funcion de probabilidad Acumulada (CDF)

La función de probabilidad acumulada, F(x) se puede calcular a partir de f(x):

$$F(x_0) = F(X \leq x_0) = F(-\infty < X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$



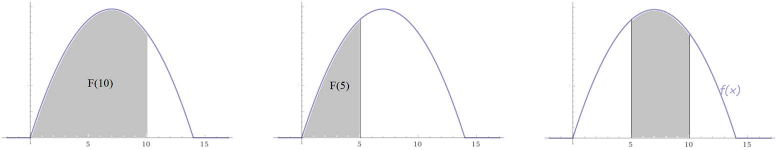
$$F(4) = F(X \leq 4)$$
$$= \text{F(-}\ \infty < X \leq 4)$$
$$= \int_{-\infty}^{4} f(x)dx$$

Además, las funciones de pdf y cdf se relacionan de la siguiente manera:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Funcion de probabilidad Acumulada (CDF)

Por ejemplo, para calcular $P(5 \leq X \leq 10)$:

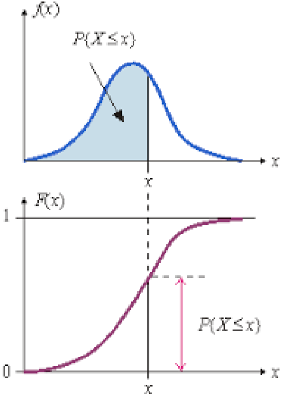


$$P(5 \leq X \leq 10) = \int_5^{10} f(x)dx = F(10) - F(5)$$

Funcion de probabilidad Acumulada (CDF)

Propiedades

- No puede ser negativa: $0 \leq F(x) \leq 1$
  Por definición, si $X \to (-\infty, \infty)$ entonces:
  $P(X \leq -\infty) = 0$ y $P(X \leq \infty) = 1$
- $F(x)$ es monótona creciente por su carácter acumulativo.
  Para que una función sea monótona creciente si, $x_1 < x_2$ se ha de verificar) que $F(x_1) \leq F(x_2)$, por lo que:
  $P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_1) - F(x_1) \geq 0$
- La probabilidad de un intervalo se resuelve en el caso de v.a. continua como se ha visto en la definición.
- Es continua por la derecha y por la izquierda.

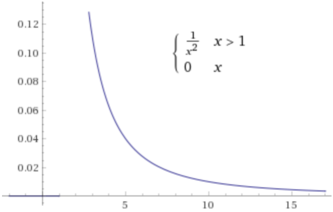


Funcion de probabilidad Acumulada (CDF)

Ejemplo 1

¿Cuál es la distribución de probabilidad acumulada del Ejemplo 1?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

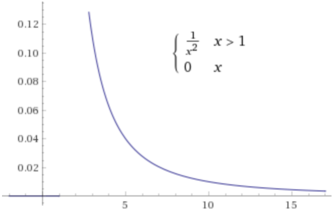


Funcion de probabilidad Acumulada (CDF)

Ejemplo 1

¿Cuál es la distribución de probabilidad acumulada del Ejemplo 1?

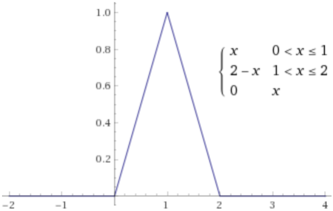
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$



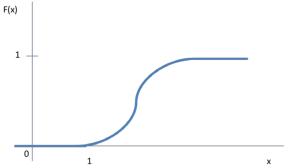
Funcion de probabilidad Acumulada (CDF)

Ejemplo 2

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$



$$F(x_0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^{x_0} x \; dx & 0 < x < 1 \; (*) \\ 1\text{-}\int_{x_0}^{2} (2-x) dx & 1 < x < 2 \; (**) \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



(*) $\int_0^{x_0} x dx = [\frac{x^2}{2}]_0^{x_0} = \frac{x_0^2}{2}$

(**)

$1 - \int_{x_0}^{2} (2-x) dx = 1 - [2x - \frac{x^2}{2}]_{x_0}^{2} = 1 - [2 - 2x_0 + \frac{x_0^2}{2}]$

Funcion de probabilidad Acumulada (CDF)

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(X)$$

Esperanza de v.a. continua

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$$

Ejemplo: Teniendo, f(x) $= \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & resto \end{cases}$

La media sería:
$\mu = E(X) = \int_0^1 x * x\ dx + \int_1^2 x * (2 - x)\ dx = [\frac{c^3}{3}]_0^1 + [x^2 - \frac{x^3}{3}]_1^2 = 1$

Esperanza de v.a. continua

Propiedades

Recordando que las propiedades de la media o valor esperado son las mismas que ya vimos en el tema 3:

Varianza y desviación de v.a. continua

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) * f(x)\ dx$$

Ejemplo: Teniendo, f(x) $= \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & resto \end{cases}$

La varianza, usando el hecho de que $E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu$ vendría dada por: $\sigma^2 = 1,16 - 1 = 0,16 y \sigma = \sqrt{0,16} = 0,4$
Dado que:
•$\mu = 1$
•E(X^2) $= \int_0^1 x^2 * x + \int_1^2 x^2 * (2-x)\ dx = [\frac{x^4}{4}]_0^1 + [2 * \frac{x^3}{3} - x^4 4]_1^2 = 1,16$

Varianza de v.a. continua
Propiedades

Recordando nuevamente que las propiedades de la varianza vistas en el tema anterior son:

Contenidos

1 Variable Aleatoria Continua
- Funcion de probabilidad (PDF)
- Funcion de probabilidad acumulada (CDF)
- Esperanza, Varianza y Desviación Típica

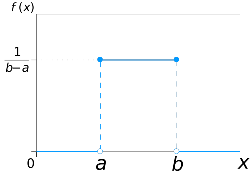
2 Distribución Uniforme

3 Distribución Exponencial

4 Variable Aleatoria Bidimensional Continua

Distribución uniforme

Una v.a. X, que sólo toma valores comprendidos en el intervalo (a, b) de tal manera que todos los intervalos de una misma longitud dentro del mismo sean equiprobables, esta uniformemente distribuida: $X \to U(a, b)$



$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ para } x \in (a, b)$$

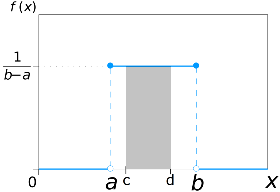
- Ejemplos son los generadores de numeros aleatorios...

Distribución uniforme

- Su función de densidad viene dado por :

$$\text{f(x)}= \begin{cases} 1/(a-b) & a \leq x \leq b \\ 0 & o \end{cases}$$

El cálculo de las probabilidades de una v.a. X distribuida uniformemente es sencillísimo pues podemos aplicar la geometría básica.



$$P(c \leq X \leq d) = (d-c)*(1/(b-a))$$

Además,

- Su esp $E(X) = (b+a)/2$
- Su varianza, $Var(X) = (ba)^2/12$

Distribución Uniforme

Ejemplo

Los trenes de cierta línea de subterráneos corren cada media hora entre la medianoche y las seis de la mañana. ¿ Cuál es la probabilidad de que un hombre que entra a la estación a una hora al azar, durante ese período tenga que esperar por lo menos 20 minutos?

Contenidos

1. Variable Aleatoria Continua
   - Funcion de probabilidad (PDF)
   - Funcion de probabilidad acumulada (CDF)
   - Esperanza, Varianza y Desviación Típica
2. Distribución Uniforme
3. Distribución Exponencial
4. Variable Aleatoria Bidimensional Continua

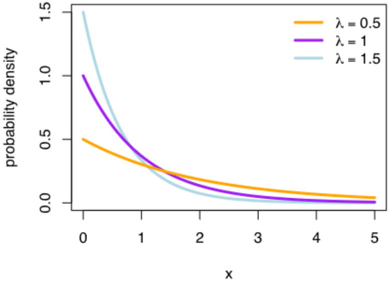
Distribución Exponencial

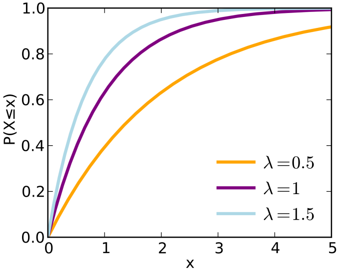
Dentro de la familia de distribuciones exponenciales (donde también incluímos la dist. de Poisson que ya vimos y la normal, que veremos en la siguiente clase) tenemos en específico la distribución exponencial.
Esta es la distribución de probabilidad del tiempo entre eventos en un proceso de Poisson. Puede verse como ese "tiempo de espera" a que suceda el siguiente evento.
La variable continua X, distribuida exponencialmente ($X \rightarrow exp(\lambda)$) tiene:

$$\text{f(x)}=\begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

- Ejemplos son:tiempo que tarde una particula radiactiva en desintegrarse, en general para tiempos de supervivencia, el tiempo hasta que suceda un terremoto, el tiempo que dura una bateria de automovil.... Se aplica mucho en bioestadística.

Distribución Exponencial





$$f(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

- Esperanza: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- Varianza: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Distribución Exponencial

Una carácterística de la distribución exponencial es que "no tiene memoria": el proceso exponencial no recuerda lo que ha pasado hasta el momento presente. Esta propieda restinge mucho su uso.

$$P(X > t + s | x > t) = P(X > s) s, t \geq 0$$

Por ejemplo, la probabilidad de que un virus de edad t sobreviva x años más, hasta la edad x+t, es la misma que tiene un recién nacido de sobrevivir hasta la edad x.

Distribución Exponencial

Ejemplo 1

Supongamos que X es el intervalo entre partos en un hospital rural donde el tiempo medio entre partos es de 7 días. Asumimos que la distribución del tiempo entre partos sigue una distribución exponencial. La unidad de tiempo es "dia" y la media correspondiente es de 1 parto cada 7 dias, es decir, $\lambda = 1/7$.

$$\text{f(x)}=\begin{cases} \frac{1}{7}e^{\left(\frac{1}{7}x\right)} & x > 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Se pide:

- $\mu = E(X)$?
- $var(X)$?
- $desv.std(X)$?

¿Cuál es la probabilidad de que haya un nacimiento en los siguientes 7 días? ¿y en las siguientes diez horas?¿ y en los siguientes 10 minutos?

Distribución Exponencial
Ejemplo 1

$$\text{f(x)}=\begin{cases} \frac{1}{7}e^{(}-\frac{1}{7}x) & x>0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Tenemos que:

- $\mu = E(X) = 7 días$
- $var(X) = 49$
- $desv.std(X) = 7$

La probabilidad de que haya un parto en los siguiente siete dias viene dada por $P(X \leq 10) = 1 - e^{(} - 1/7) * 10 = 10.240 = 0.760$
10 horas equivalen a 5/12 días y 10 minutos a 1/144 días y las probabilidades correspodnientes son : 0.058 y 0.00099

Distribución Exponencial

Ejemplo 2

Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 14 años.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 20 años?

b) Si el marcapasos lleva funcionando correctamente 5 años en un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25 años?[1]

[1] oat 4: Ayuda de Distribuciones de probabilidad. Octubre 2014

Distribución Exponencial

Ejemplo 2

X: "tiempo de vida del marcapasos" sigue una distribución exponencial de parámetro $= 1/14$

$$\text{f(x)=} \begin{cases} 1/14e^{(\frac{-1}{14}} * x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$\mu = E(X) = 14$; $var(X) = 226$

a) $P(X < 20) = 1 - e^{(} - \frac{1}{14} 20)$

b) Si ya han pasado cinco años, entonces quedan 20 años para que sean 25 y como el proceso exponencial no tiene memoria (da igual que hayan pasado 5) nos queda la misma solución que en el apartado anterior.

Contenidos

1 Variable Aleatoria Continua
- Funcion de probabilidad (PDF)
- Funcion de probabilidad acumulada (CDF)
- Esperanza, Varianza y Desviación Típica

2 Distribución Uniforme

3 Distribución Exponencial

4 Variable Aleatoria Bidimensional Continua

Variable Aleatoria Bidimensional Continua

Función de densidad conjunta

Las dos variables que la integran son continuas. Su **funcion de densidad conjunta**, f(x,y), cumple los requisitos usuales:

f(x,y) no negativa

$$\int_{-\infty_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty_2} f(x,y)\ dxdy = 1$$

La función de densidad representa la masa de probabilidad por unidad de area en un rectangulo infinitesimal alrededor de (x,y).
La probabilidad de ocurrencia de un suceso se obtiene:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2; y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\ dxdy$$

Como en el caso de la v.a. discreta, tenemos las **funciones de probabilidad marginal** pero esta vez dadas por:

$$f_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$
$$f_y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Ejemplo: Una variable aleatoria continua bidimensional tiene la siguiente f(x,y):

$f(x) = \frac{2}{7} * (x + 6y)$ si $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$

a) Encontrar las funciones marginales de probabilidad para X e Y .

b) Calcular $P(0,4 \leq X \leq 0,5)$

Variable Aleatoria Bidimensional Continua

Ejemplo

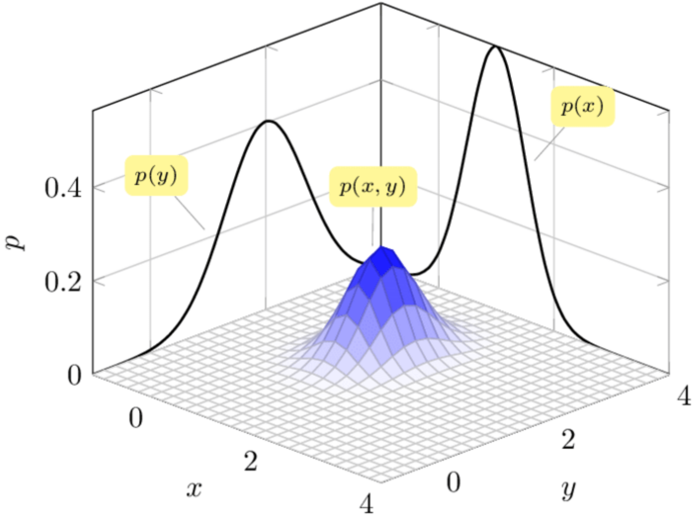
Ejemplo: Una variable aleatoria continua bidimensional tiene la siguiente f(x,y):
$f(x) = \frac{2}{7} * (x + 6y)$ si $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$

a) Encontrar las funciones marginales de probabilidad para X e Y .
$\int_0^1 \frac{2}{7}(x + 6y)dy = [\frac{2}{7}xy + 3y^2]_0^1 = \frac{2}{7}(x + 3)$

b) Calcular $P(0,4 \leq X \leq 0,5)$
$P(0,4 \leq X \leq 0,5) = \int_{0,4}^{0,5} \frac{2}{7}(x + 3) = [\frac{2}{7}(x + 3)]_{0,4}^{0,5} = 0,1$

Variable Aleatoria Bidimensional Continua

Ejemplo



Variable Aleatoria Bidimensional Continua

Ejemplo