ÁLGEBRA LINEAL

Mínimos cuadrados

Sistemas de ecuaciones. Mínimos cuadrados

Matrices de rango pleno

Definicion. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que A es de **rango pleno por filas** si

$$rg(A) = m$$

Definicion. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que A es de **rango pleno por columnas** si

$$rg(A) = n$$

Ejemplos: Matriz de rango pleno por filas.

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

como $rg(A) = 2$ y $m = 2$, entonces A es de *rango pleno por filas.*
Y no es de rango pleno por columnas porque $n = 3$.

Ejemplos: Matriz de rango pleno por columnas.

Ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

como $rg(A) = 3$ y $n = 3$, entonces A es de *rango pleno por columnas.* Y no es de rango pleno por filas porque $m = 4$.

Inversas laterales

Inversa a derecha Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, una **inversa a derecha** de A es una matriz $A^R \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ de forma que

$$AA^R = I_m$$

Inversa a izquierda Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, una **inversa a izquierda** de A es una matriz $A^L \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^L A = I_n$$

Existencia de inversas laterales

Proposicion. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se verifica:

- A tiene inversa a izquierda $\iff$ A es de rango pleno por columnas
- A tiene inversa a derecha $\iff$ A es de rango pleno por filas

Ejemplos.

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

como $rg(A) = 2$ y $m = 2$, entonces A es de *rango pleno por filas*, y aplicando la proposicion anterior sabemos que A tiene inversa a derecha.

Ejemplos.

Ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

como $rg(A) = 3$ y $n = 3$, entonces A es de *rango pleno por columnas*, y aplicando la proposicion anterior sabemos que A tiene inversa a izquierda.

Cálculo de inversas laterales

Teorema Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se verifica:

- Si A tiene inversa a izquierda entonces,

$$A^L = (A^T A)^{-1} A^T$$

- Si A tiene inversa a derecha entonces,

$$A^R = A^T (A A^T)^{-1}$$

Ejemplo: cálculo de inversa a izquierda.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

A es de rango pleno por columnas y por eso tiene inversa a izquierda: $A^L = (A^T A)^{-1} A^T$

Ejemplo: cálculo de inversa a izquierda.

Paso 1: Calculamos la traspuesta de A: A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Ejemplo: cálculo de inversa a izquierda.

Paso 2: Multiplicamos la traspuesta y la matriz:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 18 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: cálculo de inversa a izquierda.

Paso 3: Calculamos la inversa del resultado obtenido:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 18 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 2.2 \end{pmatrix}$$

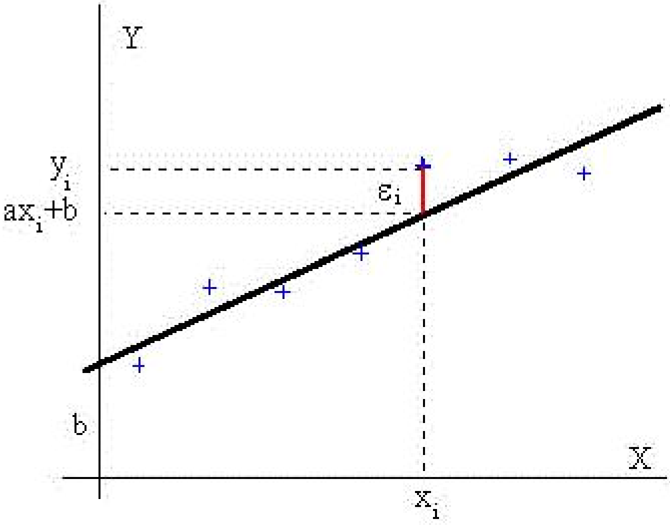
Ejemplo: cálculo de inversa a izquierda.

Paso 4: Multiplicamos el resultado anterior por la traspuesta de la matriz:

$$(A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 18 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.2 & -0.4 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluciones mínimo-cuadráticas de un sistema incompatible



Soluciones mínimo-cuadráticas de un sistema incompatible

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

y su expresión matricial:

$$AX = B$$

Soluciones mínimo-cuadráticas de un sistema incompatible

$$AX = B$$

$$AX - B = \vec{0}$$

Aplicamos la función norma en ambas partes de la ecuación:

$$||AX - B|| = ||\vec{0}||$$

$$||AX - B|| = 0$$

Soluciones mínimo-cuadráticas de un sistema incompatible

Si el sistema es INCOMPATIBLE, interesa buscar un valor de X que aproxime la solución. Llamaremos **solución mínimo cuadrática** del sistema a cada vector que haga mínima la norma $||AX - B||$.

Teorema Para el sistema incompatible $AX = B$, si A es de rango pleno por columnas, existe una única solución mínimo-cuadrática dada por

$$X = A^L B$$

donde A^L es la inversa a la izquierda de A.

Problemas de mínimos cuadrados

Planteamiento. Partiendo de datos empíricos de una variable y a partir de otra variable x:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ... (x_n, y_n)$$

queremos encontrar una recta $y = ax + b$, es decir, queremos determinar los valores de a y b, de forma que la suma de las distancias entre la recta y los puntos sea mínima. O equivalentemente, que sea mínima la suma de cuadrados:

$$min \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Problemas de mínimos cuadrados

Este problema se reduce entonces a determinar la solución mínimo-cuadrática del sistema

$$\begin{cases} ax_1 + b & = & y_1 \\ ax_2 + b & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ ax_n + b & = & y_n \end{cases}$$

donde las incógnitas son a y b y el resto son los datos del punto de partida.

Problemas de mínimos cuadrados

$$\begin{cases} ax_1 + b & = & y_1 \\ ax_2 + b & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ ax_n + b & = & y_n \end{cases}$$

La expresión matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Problemas de mínimos cuadrados

En el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

si denotamos la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

Problemas de mínimos cuadrados

entonces, el sistema anterior podemos escribirlo:

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Y en este sistema matricial calculamos la inversa de A, A^L, de manera que la solución vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad = A^L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Problema de mínimos cuadrados

Planteamiento. Partimos de datos sobre la **estatura media en centrimetros** (variable y) de niños de 0,1,2,3 y 4 **semestres de vida** (variable x):

$$(x_1 = 0, y_1 = 50), (x_2 = 1, y_2 = 66.5), (x_3 = 2, y_3 = 75),$$

$$(x_4 = 3, y_{=}81), (x_5 = 4, y_5 = 86.5)$$

queremos encontrar una recta $y = ax + b$, es decir, queremos determinar los valores de a y b, de forma que la suma de las distancias entre la recta y los puntos sea mínima. O equivalentemente, que sea mínima la suma de cuadrados:

$$min \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Ejemplo. Problema de mínimos cuadrados

$$y = ax + b \iff ax + b = y$$

$$\begin{cases} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ ax_3 + b &= y_3 \\ ax_4 + b &= y_4 \\ ax_5 + b &= y_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \cdot 0 + b &= 50 \\ a \cdot 1 + b &= 66.5 \\ a \cdot 2 + b &= 75 \\ a \cdot 3 + b &= 81 \\ a \cdot 4 + b &= 86.5 \end{cases}$$

Ejemplo. Problema de mínimos cuadrados

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 66.5 \\ 75 \\ 81 \\ 86.5 \end{pmatrix}$$

donde la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Problema de mínimos cuadrados

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 66.5 \\ 75 \\ 81 \\ 86.5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de A, A^L, de manera que la solución vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^L \begin{pmatrix} 50 \\ 66.5 \\ 75 \\ 81 \\ 86.5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Problema de mínimos cuadrados

Comprobamos que A tiene inversa a izquierda y la calculamos:

$$A^L = (A^T A)^{-1} A^T$$

$$A^L = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.1 & 0 & 0.1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^L \begin{pmatrix} 50 \\ 66.5 \\ 75 \\ 81 \\ 86.5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Problema de mínimos cuadrados

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.1 & 0 & 0.1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 66.5 \\ 75 \\ 81 \\ 86.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.75 \\ 54.3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Problema de mínimos cuadrados

$$y = ax + b \iff y = 8.75x + 54.3$$