ÁLGEBRA LINEAL

MATRICES

¿Qué es una matriz?

¿Qué es una matriz?

Matriz. Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una 'tabla' formada por elementos de $\mathbb{K}$ distribuidos en m filas y n columnas de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

¿Qué es una matriz?

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

A es una matriz de orden 2×3 (esto es: tiene 2 filas y 3 columnas) y a_{12} es el elemento que se encuentra en la primera fila, segunda columna, es decir $a_{12} = 2$.

Conjunto de todas las matrices

Conjunto de matrices. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Para el caso $m = n$ escribiremos simplemente $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y las matrices pertenecientes a este conjunto se dice que son de orden n en vez de $n \times n$.

¿Cuándo dos matrices son iguales?

Igualdad de matrices. Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden e iguales elementos en cada una de las posiciones.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A y C son las únicas matrices que son iguales

Tipos de matrices

Tipos de matrices

Matriz fila. Se denomina matriz fila a toda matriz que consta de una única fila

$$A = (a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; \cdots \; a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 5}(\mathbb{R})$$

Tipos de matrices

Matriz columna. Se denomina matriz columna a toda matriz que consta de una única columna

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Tipos de matrices

Matriz cuadrada. Se denomina matriz cuadrada de orden n a toda matriz que consta de n filas y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Tipos de matrices cuadradas

Diagonal principal. Dada una matriz cuadrada A, los elementos a_{ii} con $i = 1, \ldots, n$ constituyen su diagonal principal:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Tipos de matrices cuadradas

Matriz diagonal. Dada una matriz cuadrada A, se dice que es una matriz diagonal si todos los elementos fuera de su diagonal principal son 0, es decir, $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Tipos de matrices cuadradas

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Tipos de matrices cuadradas

Matriz identidad. Se denomina matriz identidad de orden n, y se denota como I_n, la matriz diagonal en la que tiene todos los elementos de la diagonal son 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ejemplo

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices cuadradas

Matriz triangular superior. A es triangular superior si $a_{ij} = 0,\ \forall i > j$, es decir, si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Tipos de matrices cuadradas

Matriz triangular inferior. A es triangular inferior si $a_{ij} = 0, \ \forall i < j$, es decir, si todos los elementos por encima de la diagonal principal son 0

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Tipos de matrices cuadradas

Ejemplo

Matriz triangular superior de orden 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices cuadradas

Matriz triangular inferior de orden 3:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de cualquier orden

En general, se mantiene la denominación de matriz triangular superior cuando $a_{ij} = 0, \forall\ i > j$.

Las matrices triangulares superiores, si no son cuadradas, se corresponden con los siguientes casos, dependiendo de si tenemos más filas que columnas o mas columnas que filas: $n < m$ o $m < n$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices escalonadas por filas

Matrices escalonadas por filas

Matriz escalonada por filas. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es escalonada por filas si verifica las siguientes condiciones:

- El primer elemento no nulo de cada fila, denominado pivote, está a la derecha del pivote de la fila superior
- Si contiene filas nulas, éstas están en la parte inferior de la matriz.

Matrices escalonadas por filas

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices escalonadas reducidas por filas

Matriz escalonada reducida por filas. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es escalonada reducida por filas si es escalonada y además cumple los siguientes requisitos:

- Los pivotes son todos 1-s.
- Todos los elementos que están en la misma columna del pivote son nulos.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Operaciones con matrices

Suma/resta de matrices. La suma/resta de dos matrices A y B solo es posible si ambas son del mismo orden $m \times n$. Cuando el orden es el mismo la suma/resta se hace elemento a elemento.

Operaciones con matrices

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -7 & -2 \\ -3 & -1 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Producto por un escalar. El producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, es otra matriz de orden $m \times n$ y se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar.

Ejemplo

Dados $\lambda = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, entonces

$$\lambda A = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Producto de matrices. Para poder realizar el producto entre dos matrices, A y B, el número de columnas de A(1.matriz) y el número de filas de B(2.matriz) tienen que ser iguales. Cada elemento ij de la matriz resultante se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B y sumando los números resultantes. La matriz resultante tendrá el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B.

Operaciones con matrices

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, el producto de A por B es

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Propiedades

Propiedades

Traza. La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

la traza de A es

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propiedades

Elemento neutro del producto.

El elemento neutro del producto es la matriz identidad. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matriz de m filas y n columnas,entonces, se verifica que

$$AI_n = A \qquad \text{y} \qquad I_m A = A.$$

Propiedades

Ejemplo Si tenemos la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplicaremos por la derecha la identidad de orden 2, es decir:

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = A$$

Excepciones

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

No se cumple la igualdad.

Matriz traspuesta

Matriz traspuesta

Traspuesta de una matriz. Sea A una matriz con m filas y n columnas, $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.La matriz traspuesta de la matriz A se denota como A^t y se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$A^t = (a_{ji})_{n\times m} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades matriz traspuesta

Propiedad involutiva. Para toda matriz A, $(A^t)^t = A$.

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Y volviendo a hacer la traspuesta de A^t, obtenemos

$$(A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Matrices cuadradas

Matriz invertible/regular A es invertible o regular si existe otra matriz cuadrada $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. En caso de la existencia de esta matriz A^{-1} es siempre única y se llama matriz inversa de A.

Observación. La matriz inversa cumple las siguientes dos condiciones:

$$AA^{-1} = I_n$$

$$A^{-1}A = I_n$$

Transformaciones elementales

Transformaciones elementales por filas.

- Multiplicar una fila por un escalar no nulo, es decir, $\lambda \in \mathbb{K}, \ \lambda \neq 0$.
- Intercambiar la posicion de dos filas.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar.

De manera análoga se pueden definir las transformaciones elementales por columnas.

Transformaciones elementales

Ejemplo transformación elemental.

Multiplicar la primera fila por un escalar no nulo: $\lambda = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Transformaciones elementales

Ejemplo transformación elemental.

Sumar a la 2.fila la 3.fila multiplicada por un escalar $\lambda = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 & 0 \\ 0 + 3 \cdot 3 & 1 + 2 \cdot 3 & 2 + 7 \cdot 3 & -1 + 4 \cdot 3 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrices equivalentes

Matrices equivalentes por filas. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes por filas si se puede pasar de una a otra mediante una sucesion de transformaciones elementales por filas.

Teorema Cada matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida por filas.

Rango de una matriz

Rango de una matriz

Rango. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llamaremos rango de A y lo denotaremos como $\mathrm{rg}(A)$, al número de filas no nulas que tiene su equivalente y única matriz escalonada reducida por filas.

Proposicion. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces, $\mathrm{rg}(A) \leq$ minm,n

Matriz inversa

Caracterización de las matrices invertibles

Teorema de caracterización. Sea A una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces son equivalentes:

- A es invertible
- $rg(A) = n$
- La matriz escalonada reducida por filas equivalente a A es la matriz identidad I_n

Teorema de caracterización

La tercera equivalencia aporta un método para calcular la matriz inversa de una matriz invertible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

-Escribimos la matriz identidad I_n a la derecha de la matriz, $(A|I_n)$.

-Calculamos la matriz escalonada reducida que será de la forma $(I_n|B)$.

-La matriz B resultante será la inversa de A.

Determinante

Determinante de una matriz cuadrada

Determinante. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamaremos determinante de la matriz A y lo denotaremos por $\det(A)$ o $|A|$ a un elemento del cuerpo $\mathbb{K}$ que se define por inducción del siguiente modo:

- si $n = 1$, $A = (a_{11})$ y entonces $\det(A) = a_{11}$
- si $n > 1$, $\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\alpha_{1n}$

donde α_{1i} es el determinante de la matriz de orden $n-1$ que se obtiene en suprimir la primera fila y la columna i-ésima de la matriz A.

Determinante de una matriz cuadrada.

Dada la matriz cuadrada de orden 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\alpha_{11} = \det(a_{22}) = a_{22}$$

$$\alpha_{12} = \det(a_{21}) = a_{21}$$

Así pues, el determinante es

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de una matriz cuadrada.

Dada la matriz cuadrada de orden 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante de A es

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

Determinante de una matriz cuadrada.

Tenemos que calcular los valores de α_{ij}:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Con lo cual,

$\alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}; \quad \alpha_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}; \quad \alpha_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

Determinante de una matriz cuadrada. Ejemplo:

Dada la matriz cuadrada de orden 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es

$$\det(A) = 1\alpha_{11} - 1\alpha_{12} + 3\alpha_{13}$$

Determinante de una matriz cuadrada. Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Determinante de una matriz cuadrada. Ejemplo:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Con lo cual,

$$\alpha_{11} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2; \quad \alpha_{12} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 3; \quad \alpha_{13} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3$$

$$\alpha_{11} = -6; \quad \alpha_{12} = -7; \quad \alpha_{13} = 1$$

Determinante de una matriz cuadrada. Ejemplo:

$$\det(A) = 1\alpha_{11} - 1\alpha_{12} + 3\alpha_{13}$$

$$\alpha_{11} = -6; \quad \alpha_{12} = -7; \quad \alpha_{13} = 1$$

por tanto,

$$\det(A) = 1(-6) - 1(-7) + 3(1) = 4$$

Determinante de una matriz cuadrada

En la práctica, para nosotros el determinante de una matriz será un número real.

Determinante de una matriz cuadrada

Propiedad. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada.

$$A \text{ es invertible} \Longleftrightarrow det(A) \neq 0.$$