Probabilidad

Introducción a la Estadística

DVM

Contenidos

La probabilidad y la incertidumbre

¿Para qué es útil la probabilidad en el análisis estadístico?

Ilustración 1

Imagina que preguntamos a un conjunto de individuos cuántas veces se han presentado al examen práctico del carnet de conducir hasta que lo aprobaron.

1. Cuales son los posibles valores?
2. Ante qué tipo de variable estamos?
3. Son todos los posibles valores igual de presumibles?

La probabilidad y la incertidumbre

¿Para qué es útil la probabilidad en el análisis estadístico?

Ilustración 1

Imagina que preguntamos a un conjunto de individuos cuántas veces se han presentado al examen práctico del carnet de conducir hasta que lo aprobaron.

1. Cuales son los posibles valores? *[0, 1, 2, 3, 4, 5,. . . . . . . , 50,. . . . .100,. . .]*
2. Ante qué tipo de variable estamos?
3. Son todos los posibles valores igual de presumibles?

La probabilidad y la incertidumbre

¿Para qué es útil la probabilidad en el análisis estadístico?

Ilustración 1

Imagina que preguntamos a un conjunto de individuos cuántas veces se han presentado al examen práctico del carnet de conducir hasta que lo aprobaron.

1. Cuales son los posibles valores? *[0, 1, 2, 3, 4, 5,. . . . . . , 50,. . . ..100,. . .]*
2. Ante qué tipo de variable estamos? *Variable discreta*
3. Son todos los posibles valores igual de presumibles?

La probabilidad y la incertidumbre

¿Para qué es útil la probabilidad en el análisis estadístico?

Ilustración 2

Esta vez, preguntamos a un conjunto de individuos cuántos caramelos ha podido comer a lo largo de su vida.

1. Cuales son los posibles valores?
2. Ante qué tipo de variable estamos?
3. Son todos los posibles valores igual de presumibles?

Ilustración 2

Esta vez, preguntamos a un conjunto de individuos cuántos caramelos ha podido comer a lo largo de su vida.

1. Cuales son los posibles valores? *[0, 1, 2, 3, 4, 5,. . . . . . , 50,. . . ..100,. . .]*
2. Ante qué tipo de variable estamos?
3. Son todos los posibles valores igual de presumibles?

La probabilidad y la incertidumbre

¿Para qué es útil la probabilidad en el análisis estadístico?

Ilustración 2

Esta vez, preguntamos a un conjunto de individuos cuántos caramelos ha podido comer a lo largo de su vida.

1. Cuales son los posibles valores? *[0, 1, 2, 3, 4, 5,. . . . . . , 50,. . . ..100,. . .]*
2. Ante qué tipo de variable estamos? *Variable Discreta*
3. Son todos los posibles valores igual de presumibles?

La probabilidad y la incertidumbre

¿Para qué es útil la probabilidad en el análisis estadístico?

La probabilidad y la incertidumbre

¿Para qué es útil la probabilidad en el análisis estadístico?

- Por tanto, si obtenemos una muestra con los valores: 2, 5, 6, 5, 25, 15 ,12 ,4, ¿de que población procede? ¿de la población sana o de la población enferma de diabetes?
- La única manera de determinarlo es calculando la posibilidad de aparición de cada uno de los valores del rango de V.E.

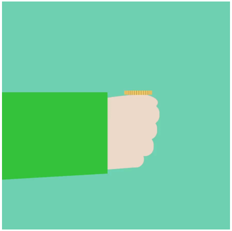
Contenidos

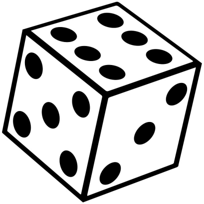
Experimento Aleatorio

Experimento Aleatorio

Cualquier **proceso** que se puede repetir gran número de veces bajo las mismas condiciones y que da lugar a resultados identificables. Estos resultados son conocidos antes de la realización del experimento PERO no se sabe cual de ellos aparecerá al realizarlo.

- Lanzar dados
- Lanzar una moneda





Espacio Muestral

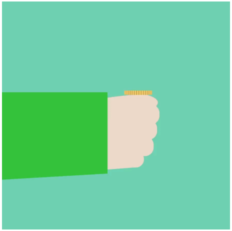
Espacio Muestral (E)

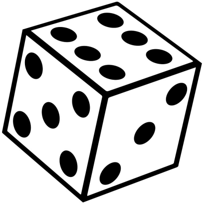
El espacio muestral asociado a un experimento es el conjunto de todos los posibles resultados del mismo.

- Lo denotamos por E.
- Lo representamos de la siguiente manera:

Espacio Muestral

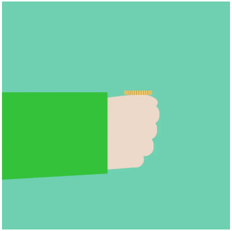
- ¿Cuál sería el espacio muestral de los siguientes procesos?

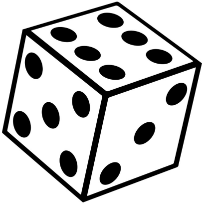




Espacio Muestral

$E = \{Cara, Cruz\}$ $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $E = \{10, 2, 50, 25, 100, 1, 5\}$





Tipos de Espacios Muestrales segun el numero de resultados

1. **Finito** : Contiene un conjunto finito de resultados e.g., lanzar un dado una vez pues $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. **Infinito numerable**: Contiene infinitos resultados pero se pueden ordenar como los números naturales e.g., lanzar una moneda repetidas veces hasta que aparezca cara pues $E = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
3. **Infinito no numerable (o continuo)**: El espacio muestral contiene infinitos resultados e.g., el tiempo de duración de una bombilla pues los resultados posibles serían el conjunto de números reales no negativos $E = (0, +\inf)$

Suceso

Suceso

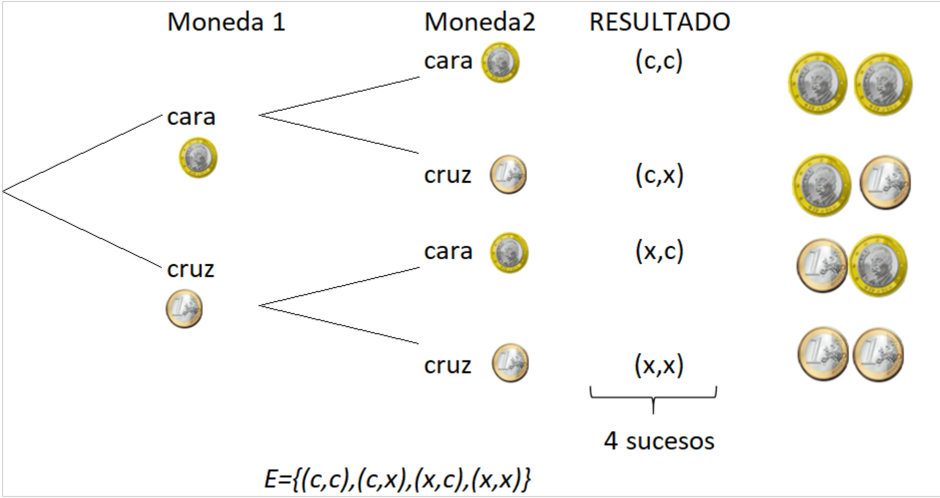
Cualquier "acontecimiento o resultado" directo o no directo, que pueda darse al realizar un experimento. Un suceso es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: Observemos el experimento de lanzar una moneda dos veces y anotar los resultados.

- El espacio muestral será: $E = \{(c, c); (x, x); (c, x); (x, c)\}$
- Cada uno de los paréntesis (-,-) es un suceso o posible resultado.
- Nos referimos a cada uno de los posibles sucesos con letras mayusculas. Por ejemplo, suceso $A = (c, c) = \backslash doscaras$".

Suceso

Una manera sencilla (para los casos mas simples)de evaluar el espacio muestral es usando un diagrama de arbol .



Tipos de sucesos

SIMPLES

cualquier resultado directo e individual perteneciente al Espacio muestral E. En el experimento anterior habia 4 sucesos simples.

IGUALES

el suceso “obtener solo una cruz al tirar dos veces” nos lleva a dos sucesos formados por una cara y una cruz y, que al no importar el orden en que aparecen, se considerarían sucesos iguales.OJO sucesos iguales tb son los que tiene la misma prob de ocurrir

COMPLEMENTARIO

Un suceso A es complementario de otro suceso y lo llamaremos A^c o $\bar{A}$ cuando su unión constituye el espacio muestral E.

Tipos de sucesos

Ejemplo de sucesos complementarios

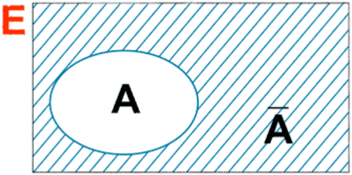
Si consideramos que al lanzar un dado, el suceso ""sacar un numero par" se denomina P, ¿cuál sería P^c ?

Tipos de sucesos

Ejemplo de sucesos complementarios

Si consideramos que al lanzar un dado, el suceso ""sacar un numero par" se denomina P, ¿cuál sería P^c ?

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$P = \{2, 4, 6\} \text{ y } P^{\complement} = \{1, 3, 5\}$$



Tipos de Sucesos (continuación)

EXCLUYENTES o DISJUNTOS

Dos sucesos, A y B, son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultaneament. Por ejemplo: al lanzar un dado, el suceso $A =$"Que salga un numero par" y el suceso $B =$"Que salga un numero impar" son mutuamente exxcluyentes.

COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO

Dos sucesos se llamarán así cuando uno de ellos debe ocurrir al realizar el experimento (constituten el espacio muestral). No todos los sucesos excluyentes son colectivamente exhaustivos. Por ejemplo, al lanzar una moneda, el "suceso cara" y el "suceso cruz" son sucesos de este tipo.

Tipos de Sucesos (continuación)

COMPUESTOS

Se constituye a partir de sucesos simples de E. Por ejemplo, el suceso lanzar dos veces una moneda y obtener "al menos una cara". Este suceso se formará a partir de tres sucesos concretos contemplados de forma conjunta: (c,c) ó (c,x) ó (x,c). Este tipo de sucesos surgen fundamentalmente de considerar los sucesos como conjuntos de resultados con los cuales se puede operar (operaciones de conjuntos)

Contenidos

Operaciones entre conjuntos

Cuando realicemos un experimento vamos a contemplar el espacio muestral. A partir de él, realizaremos operaciones de conjuntos para calcular probabilidades de los conjuntos resultantes.
A continuación, veremos las operaciones más habituales (considerando dos conjuntos):

- Union $A \cup B$
- Intersección $A \cap B$
- Complementación $A^{\complement}$
- Diferencia $A - B$

Unión

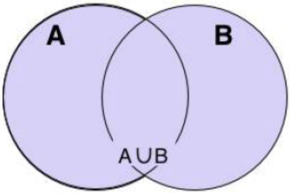


Figure: $A \cup B$

Intersección

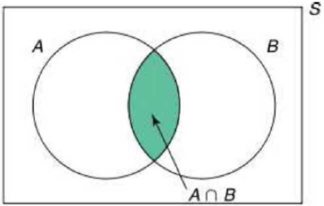


Figure: $A \cap B$

Complementareidad

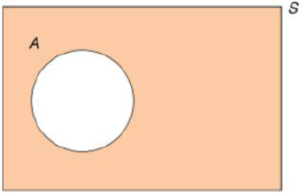


Figure: $A^{\complement}$

Diferencia

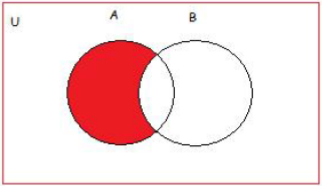


Figure: $A - B$

Propiedades de los conjuntos

a) Conmutativa: $(A \cup B) = (B \cup A)$ ó $(A \cap B) = (B \cap A)$

b) Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ó $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ó

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) U (A \cap C)$$

d) Complementaria:$A \cup A^{\complement} = E$; $A \cap A^{\complement} = \emptyset$

$$E^{\complement} = \emptyset; \emptyset^{\complement} = E$$

e) Involutiva: $(A^{\complement})^{\complement} = A$

f) Idempotente: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

g) Elemento universal: $A \cup \emptyset = A$; $A \cup E = E$
$A \cap \emptyset = \emptyset; A \cap E = A$

h) Leyes de Morgan:

- $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
- $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

Contenidos

Enfoques al concepto de probabilidad

Veremos tres:

1. Enfoque clásico o a priori (Laplace)
2. Enfoque frecuencialista o a posteriori
3. Enfoque moderno (Kolmogorov)

Probabilidad clásica (Laplace)

Enfoque Clásico de Laplace (1812) o a priori.

Laplace define la probabilidad de un suceso S como el cociente entre el número de casos o sucesos favorables a S y el número total de casos posibles, siempre que todos sean igualmente posibles (principio de simetría).

$$P(S) = \frac{Numero\ \ de\ \ casos\ \ favorables}{Numero\ \ de\ \ casos\ \ posibles}$$

Probabilidad clásica (Laplace)

Propiedades

Esta definición cumple las siguientes propiedades :

1. No negatividad $P(S) \geq 0$
2. Certeza $P(S) \leq 1$
3. Aditividad o Regla de adición: Sean A y B dos sucesos disjuntos. La probabilidad de la unión o $P(A \cup B)$ será:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Se utiliza cuando el espacio muestral es finito.
- Su aplicación es muy limitada por exigir que se cumpla el principio de simetría (equiprobabilidad).

Probabilidad clásica (Laplace)

Ilustración

Consideremos el lanzamiento de un dado. Con A= "obtener un número par" y B="caras de un dado menores o iguales a 4". ¿Cuál es la probabilidad de A?

$$Numero\ \ de\ \ sucesos\ \ favorables = 3$$

$$Numero\ \ de\ \ sucesos\ \ posibles = 6$$

$$P(A) = \frac{Numero\ \ de\ \ casos\ \ favorables}{Numero\ \ de\ \ casos\ \ posibles} = \frac{3}{6}$$

Es decir, hay un 50% de probabilidad para el suceso A.

Probabilidad clásica (Laplace)

Ilustración

Calculemos la probabilidad, siguiendo el mismo ejemplo del suceso:

a) $P(A \cap B)$
b) $P(A \cup B)$
c) $P(A^{\complement})$
d) $P(B^{\complement})$

Probabilidad clásica (Laplace)

Ilustración

Calculemos la probabilidad, siguiendo el mismo ejemplo del suceso:

a) $P(A \cap B)$:"probabilidad de cualquier cara diferente a 5"
$\frac{5}{6} = 0,83 = 83\%$

b) $P(A \cup B)$: "probabilidad de las caras de un dado que son pares y menores o iguales a 4"
$\frac{1}{3}$=0,33=33%

c) $P(A^{\complement})$: "probabilidad de caras impares"
$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

d) $P(B^{\complement})$sería: "probabilidad de caras mayores que 4"
$\frac{1}{3} = 0,33 = 33\%$

Técnicas de Recuento

Para facilitar el recuento de resultados vamos a comentar la forma de realizar recuentos mediante la fórmula de multiplicación y el número combinatorio.

Regla de multiplicación

Regla del producto o fórmula de la multiplicacion

Tambien conocido como el principio fundamental del conteo: Establece que si hay m formas de hacer una cosa, y n formas de hacer otra cosa, entonces hay $m \times n$ formas de hacer ambas cosas.

- Si se lanzan 3 dados regulares e iguales al unísono, ¿cuántas veces resulta que dos dados presenten el mismo número y en el tercero un número distinto?

Regla de multiplicación

Las opciones posibles serían las siguientes si las escribimos todas desglosando la información del enunciado:

Dos caras iguales	1 diferente	Opciones totales por fila
1,1, (1 opción)	2 o 3 o 4 o 5 o 6	5 opciones
2,2, (1 opción)	1 o 3 o 4 o 5 o 6	5 opciones
3,3, (1 opción)	1 o 2 o 4 o 5 o 6	5 opciones
4,4, (1 opción)	1 o 2 o 3 o 5 o 6	5 opciones
5,5, (1 opción)	1 o 2 o 3 o 4 o 6	5 opciones
6,6, (1 opción)	1 o 2 o 3 o 4 o 5	5 opciones
	TOTAL	30 resultados posibles

Regla de multiplicación

Otro ejemplo

Nora asiste a una comida y tiene que elegir un menu antes: el menú consiste en 4 entrantes, 5 platos principales, 4 bebidas y 3 postres. ¿Cuántos menus diferentes se pueden hacer si ella elige un plato de cada uno?

Regla de multiplicación

Otro ejemplo

Nora asiste a una comida y tiene que elegir un menu antes: el menú consiste en 4 entrantes, 5 platos principales, 4 bebidas y 3 postres. ¿Cuántos menus diferentes se pueden hacer si ella elige un plato de cada uno?

____ ____ ____ ____

Número combinatorio

El numero combinatorio viene dado por:

$$\binom{n}{k} = {}^{n}C_{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Donde $n!$ es el numero factorial (i.e., $n! = n * (n-1) * (n-2)...$)

Veamos el siguiente ejemplo.

- De un lote de 10 artículos guardados en un cajón se sabe que 3 son defectuosos.Extraemos del cajón 5 de ellos de golpe y observamos cuántas piezas defectuosas han salido.
- Calcular todas las formas posibles de recuento en los que se encuentren un número de 2 piezas defectuosas identificables.

$$^{3}C_{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3 \ ; \ ^{7}C_{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$
$$35 * 3 = 105 \ \textit{formas posibles}$$

Número combinatorio

Más ejemplos

- En una prueba de atletismo en la que participan 8 atletas se pueden clasificar sólo 3 para la final. ¿Cuantos grupos distintos de finalistas se pueden formar?
- ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer con dos elementos tomados del conjunto $C = \{a, b, c, d, e, f\}$?
- Calcula el número de boletos de Lotería Primitiva que es necesario rellenar para que te toque el primer premio con toda probabilidad (Hay que acertar 6 números de un total de 49).

2. Probabilidad frecuencialista

RECAP: frecuencias relativas y absolutas

15 alumnos contestan a la pregunta de cuantos hermanos tienen. Las respuestas son:

$$1, 1, 2, 0, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 1, 0, 0, 1, 2$$

A continuación construimos una tabla de frecuencias

Hermanos	Frecuencia absoluta (F_i)	Frecuencia relativa (f_i)
0	3	$3/15$
1	5	$5/15$
2	4	$4/15$
3	2	$2/15$
4	1	$1/15$
Total (N)	15	1

2. Probabilidad frecuencialista

Enfoque Frecuentista de la probabilidad o a priori.

La probabilidad frecuencial de un suceso se define como el límite de su frecuencia relativa cuando el número de repeticiones del experimento crece indefinidamente.

- No es una definición matemática, se basa en los resultados empíricos obtenidos al repetir el experimento.
- Identifica la frecuencia relativa de un suceso como medida aproximada de la probabilidad de ocurrencia de dicho suceso
- Así, debe cumplir las propiedades de las frecuencias relativas.

2. Probabilidad frecuencialista

Enfoque Frecuentista de la probabilidad o a priori (continuación)

Si F_i es la frecuencia absoluta de un suceso S y N el número total de veces que se repite el experimento aleatorio entonces:

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{F_i}{N}\right) = P(S) \text{ donde } \frac{F_i}{N} = f_r$$

Propiedades

1. $0 \geq f_r \geq 1$
2. Siendo S la unión de un número finito de sucesos disjuntos ($S_1, S_2 ...... S_k$) y N la suma de frecuencias absolutas de cada uno de los sucesos, $N = \sum F_i$, expresándolo en frecuencias relativas tenemos:

$$f(S) = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i}{N} = \frac{F_1}{N} + \frac{F_2}{N} + ... + \frac{F_k}{N} = f(S_1) + f(S_2) + ... + f(S_k)$$

2. Probabilidad frecuencialista

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

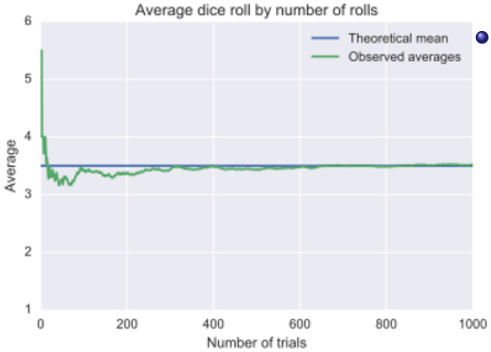
Con un amplio número de repeticiones de un experimento, la probabilidad empírica de un suceso se acercará a su verdadera probabilidad.

Ejemplo a partir del experimento de una moneda: Si lanzo una moneda al aire 10 veces y anoto las veces que ha salido cara; y repito el experimento 100 veces; luego 1000 veces, ... tendremos la siguiente tabla:

n	F_i	f_i	F_i que debería	f_i
10	2	0,2	5	0,5
10^2	60	0,6	50	0,5
10^3	591	0,591	500	0,5
10^4	5510	0,5510	5000	0,5
10^5	49180	0,49180	50000	0,5

2. Probabilidad frecuencialista

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

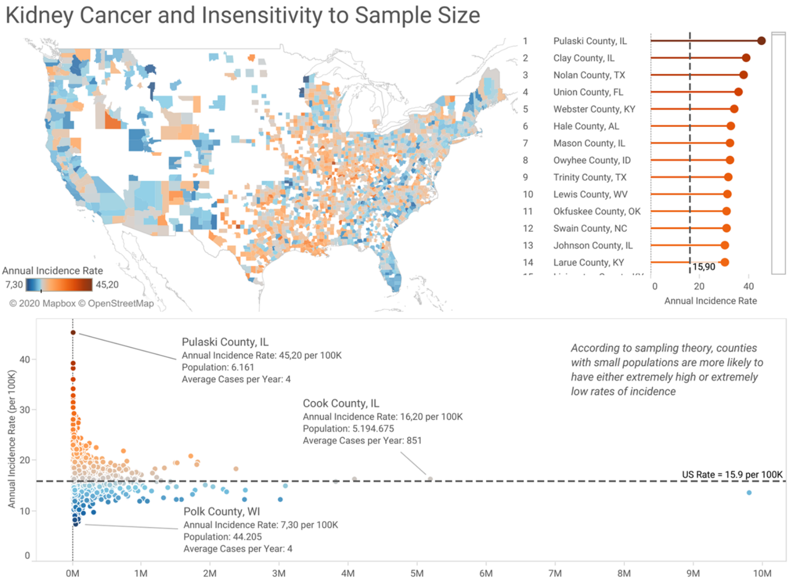


- Garantiza resultados estables para las medias de algunos eventos aleatorios (pensemos en la moneda anteior o el casino: la casa siempre gana)

- La Ley de los Grandes Numeros establece que conforme crece el tamaño de la muestra, su media se acerca a la media real de la poblacion.

2. Probabilidad frecuencialista

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.



2. Probabilidad frecuencialista

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

- ¿Qué pasaría si Kahneman se mudara a Los Rubios o a Buford ?
- ¿Qué pensarías respecto de la probabilidad de ganar un premio Nobel allí?

3.Probabilidad Subjetiva

Una probabilidad subjetiva es un grado de creencia que tenemos respecto de la posibilidad de ocurrencia de un suceso. Esta basada en la intuicion y en la opinion del sujeto.
Una manera de especificar estas probabilidades de manera más precisa es calibrarlas o ponderarlas.

Ejemplo Consideremos que nos preguntamos algo sencillo:

¿Con qué probabilidad crees que estaremos en confinamiento todo mayo por la pandemia actual?

Una manera de hacer esto es calibrar las creencias respecto de otro evento con probabilidades claras. Por ejemplo, respecto del evento "sacar una bola roja de una urna".

3.Probabilidad Subjetiva

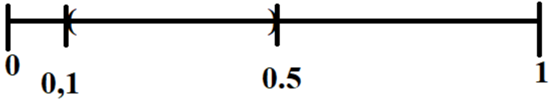
Entonces responde:

- Qué prefieres: A. \$1000 si se produce el confinamiento en mayo ó B. \$1000 si seleccionas una canica roja de una urna que contiene 5 canicas rojas y 5 blancas.

Si prefieres B, significa que asignas menos de un 50% de probabilidad a que estemos en confinamiento todo mayo.

- Qué prefieres: A. \$1000 si se produce el confinamiento en mayo ó B. \$1000 si seleccionas una canica roja de la urna que contiene 1 canicas rojas y 9 blancas.

Si prefieres A.,significa que asignas más de un 10% de probabilidad a que estemos en confinamiento todo mayo.

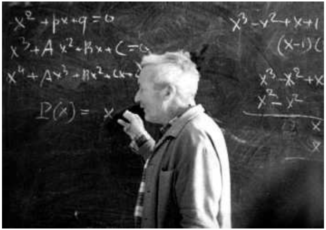


4. Probabilidad Axiomatica (Kolgomorov)

Probabilidad Axiomatica

El concepto moderno de probabilidad intenta dar una definición matemática, mediante la formulación de un conjunto de **axiomas** que expliquen las regularidades observadas en los sucesos asociados a un experimento aleatorio, cuando se realizan sucesivas repeticiones.

Andrey Kolmogorov (Rusia 1903-1987)



"La teoría de la probabilidad como disciplina matemática puede ser desarrollada en la misma forma que la geometría o el álgebra"

4. Probabilidad Axiomatica (Kolgomorov)

Axiomas

Se identifica la probabilidad con el de una aplicación/ley que relaciona un espacio muestral, E , con el intervalo $[0,1]$ de manera que a cada suceso se le hace corresponder un número de dicho intervalo verificando:

- A1 Si S es un elemento de la colección de subconjuntos resultantes de operar con la unión, intersección y complementariedad existe un número tal que: $P(S) \geq 0$
- A2 $P(E) = 1$
- A3 Dada una sucesión infinita numerable de sucesos disjuntos: $S_1 S_2 ...$ se verifica que:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$$

4. Probabilidad Axiomatica (Kolgomorov)

Propiedades de la probabilidad

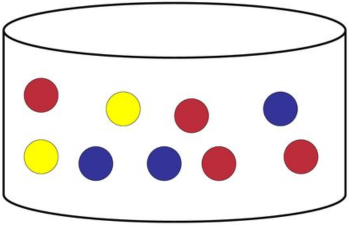
Desde lo anterior, se deduce lo siguinte:

1. La probabilidad del suceso imposible es cero.
   $P(\emptyset) = 0$
2. La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera:
   $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$
3. Si un suceso está contenido en otro su probabilidad es menor,
   $S_1 \in S_2$ *entonces* $P(S_1) \leq P(S_2)$
4. La probabilidad de un suceso A y su complementario $A^c omplement$ suman 1.
   $P(A) + P(A^{\complement}) = 1$

Contenidos

Probabilidad condicionada

Imaginaos que tenemos una urna con bolas de colores: 2 amarillas, 3 azules y 4 rojas.



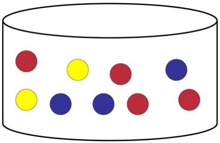
Si extraemos dos bolas con reemplazamiento:

1. A = "Sacar dos bolas de un mismo color"
2. B = "Extraer una bola amarilla y una azul"

Probabilidad condicionada

1. A = "Sacar dos bolas de un mismo color"

Es decir, sacar **o** dos bolas amarillas **o** dos azules **o** dos rojas



- Dos bolas amarillas:
$P(Am_1 \cap Am_2) =$
$P(Am_1) * P(Am_2) = 2/9 * 2/9 = 4/81$
- Dos bolas azules: $P(Az_1 \cap Az_2) =$
$P(AZ_1) * P(AZ_2)3/9 * 3/9 = 9/81$
- Dos bolas rojos: $P(R_1 \cap R_2) =$
$P(R_1) * P(R_2) = 4/9 * 4/9 = 16/81$

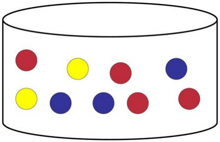
Entonces, $P(Am_1 \cap Am_2 \cup Az_1 \cap Az_2 \cup R_1 \cap R_2)$

Que como son sucesos disjutnos es :

$P(Am_1 \cap Am_2) + P(Az_1 \cap Az_2) + P(R_1 \cap R_2) = 29/81$ ó $35'8\%$

Probabilidad condicionada

2. B = "Extraer una bola amarilla y una azul"
Es decir, sacar **o** una bola amarillas y una azul **o** una bola azul y una amarilla

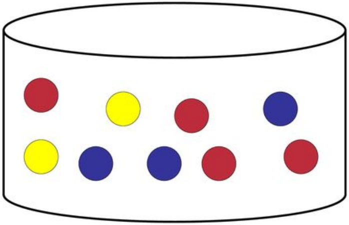


- Una bola amarilla y una azul:
$P(Am_1 \cap Az_2) = 2/9 * 3/9 = 6/81$
- Una bola azul y una amarilla:
$P(Az_1 \cap Am_2) = 2/9 * 3/9 = 6/81$

Entonces, $P(Am_1 \cap Az_2 \cup Az_1 \cap Am_2)$
Que como son sucesos disjutnos es :
$P(Am_1 \cap Az_2) + P(Az_1 \cap Am_2) = 12/81 ó 14'81\%$

Probabilidad condicionada

Imaginaos que tenemos una urna con bolas de colores: 2 amarillas, 3 azules y 4 rojas.



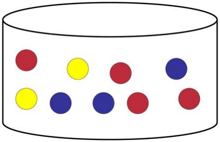
Si extraemos dos bolas **SIN** reemplazamiento:

1. A = "Sacar dos bolas de un mismo color"
2. B = "Extraer una bola amarilla y una azul"

Probabilidad condicionada

1. A = "Sacar dos bolas de un mismo color"

Es decir, sacar **o** dos bolas amarillas **o** dos azules **o** dos rojas



- Dos bolas amarillas: $P(Am_1 \cap Am_2) = P(Am_1) * P(Am_2|Am_1) = 2/9 * 1/8 = 2/72$
- Dos bolas azules: $P(Az_1 \cap Az_2) = P(Az_1) * P(Az_2|Az_1) = 3/9 * 2/8 = 6/72$
- Dos bolas rojos: $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) * P(R_2|R_1) = 4/9 * 3/8 = 12/72$

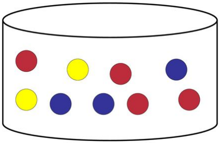
Entonces, $P(Am_1 \cap Am_2 \cup Az_1 \cap Az_2 \cup R_1 \cap R_2)$

Que como son sucesos disjutnos es :

$P(Am_1 \cap Am_2) + P(Az_1 \cap Az_2) + P(R_1 \cap R_2) = 20/72$ *ó* $27'78\%$

Probabilidad condicionada

2. B = "Extraer una bola amarilla y una azul"
Es decir, sacar **o** una bola amarillas y una azul **o** una bola azul y una amarilla



- Una bola amarilla y una azul:
$P(Am_1 \cap Az_2) = P(Am_1) * P(Az_2|Am_1) = 2/9 * 3/8 = 6/72$
- Una bola azul y una amarilla:
$P(Az_1 \cap Am_2) = P(Az_1) * P(AM_2|Az_1) = 3/9 * 2/8 = 6/72$

Entonces, $P(Am_1 \cap Az_2 \cup Az_1 \cap Am_2)$
Que como son sucesos disjutnos es :
$P(Am_1 \cap Az_2) + P(Az_1 \cap Am_2) = 12/72$ ó $16'67\%$

Probabilidad condicionada

Como vemos, cuando la ocurrencia de un suceso en el experimento cambia el espacio muestral las probabilidades de ocurrencia tambien se ven alteradas. Por tanto, para el calculo de probabilidades hay que incorporar la información de sucesos previos.

Probabilidad condicionada de$A$ dado B

La probabilidad de que ocurra el suceso A si ha ocurrido el suceso B se denomina probabilidad condicionada y se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad condicionada

Ejemplo

En una feria de Máquina-herramienta celebrada en Navarra nos hemos encontrado con la siguiente información:

	Fuera de Navarra	Navarra	
Hombres	**38**	**341**	**379**
Mujeres	**12**	**78**	**90**
	50	**419**	**469**

¿Cuál es laprobabilidad de elegir de entre todos los participantes a uno que sea varón y navarro? Es decir, $P(var\acute{o}n \cap Navarro)$

$P(var\acute{o}n \cap navarro) = P(varon) * P(varon|navarro) = \frac{379}{469} * \frac{371}{379} = \frac{341}{469}$

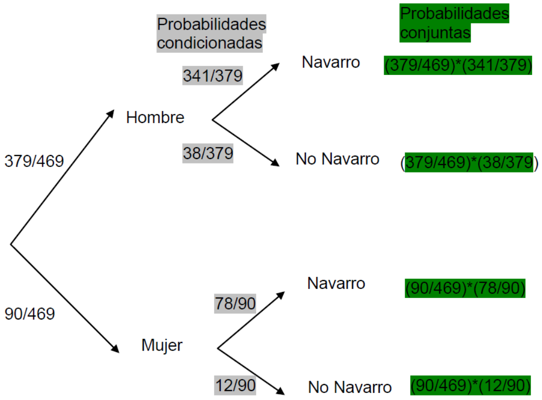
o igualmente:

$P(navarro \cap varon) = P(navarro)^* P(navarro|var\acute{o}n) = \frac{341/419}{419/469} = \frac{341}{469}$

Probabilidad condicionada

Ejemplo

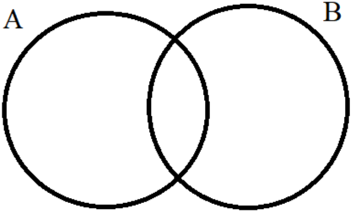
Si consideramos la situación a través de un diagrama de arbol tenemos que:



Sucesos disjuntos o mutuamente excluyentes

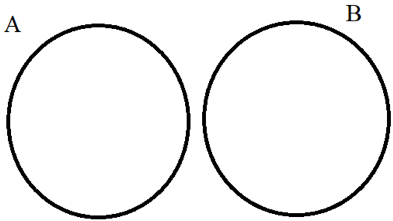
Recordad que dijimos que: "La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera es:

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) \text{ "}$$



Sucesos disjuntos o mutuamente excluyentes

Sin embargo, si los sucesos son disjuntos, entonces $P(S_1 \cap S_2) = 0$
Por lo que la probabilidad de la unión es:
$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2)$ "



Sucesos independientes

Los sucesos $A, B \in E$ son independientes sí $P(B|A) = P(B)$ Es decir,
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
Esta última se toma como definición de independencia.