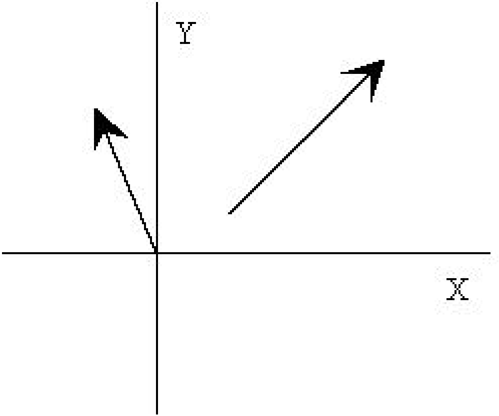
ÁLGEBRA LINEAL

VECTORES

Vectores

¿Qué es un vector?

En matemáticas se define **vector** como un elemento de un espacio vectorial, y normalmente los vectores en el plano o en el espacio de tres dimensiones se suelen representar mediante segmentos acabados en una punta de flecha en uno de sus dos extremos.



¿Qué es un vector?

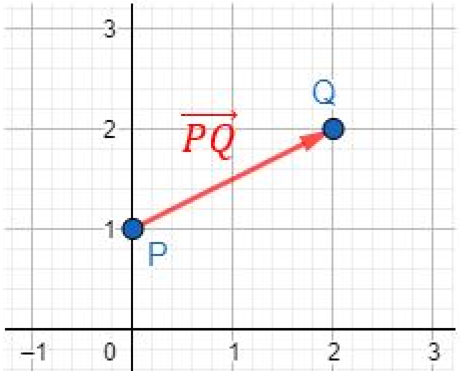
Caracterización de un vector.

- **Módulo.** Longitud del segmento
- **Dirección.** Dirección de la recta a la cual pertenece el vector
- **Sentido.** Lo determina la punta de la flecha del vector

Vector como unión de dos puntos en el plano

Si definimos el vector $\vec{PQ}$ como unión de los punto $P = (p_x, p_y)$ y $Q = (q_x, q_y)$, entonces las componentes del vector $\vec{PQ}$ se obtienen restando las coordenadas del punto extremo Q al punto de origen P :

$$\vec{PQ} = (q_x - p_x, q_y - p_y)$$



Vector como unión de dos puntos en el plano

Ejemplo

Si

$$P = (p_x, p_y) = (1, 1), Q = (q_x, q_y) = (3, 1)$$

entonces el vector $\vec{PQ}$ se obtiene restando las coordenadas del punto extremo Q al punto de origen P

$$\vec{PQ} = (q_x - p_x, q_y - p_y) = (3 - 1, 1 - 1)$$

$$\vec{PQ} = (2, 0)$$

Vector como unión de dos puntos en el espacio

Si definimos el vector $\vec{PQ}$ como unión de los punto

$$P = (p_x, p_y, p_z), Q = (q_x, q_y, q_z)$$

entonces las componentes del vector $\vec{PQ}$ se obtienen restando las coordenadas del punto extremo Q al punto de origen P

$$\vec{PQ} = (q_x - p_x, q_y - p_y, q_z - p_z)$$

Vector como unión de dos puntos en el espacio

Ejemplo Si

$$P = (p_x, p_y, p_z) = (1, 0, 1), Q = (q_x, q_y, q_z) = (1, 1, 0)$$

entonces el vector $\vec{PQ}$ se obtienen restando las coordenadas del punto extremo Q al punto de origen P

$$\vec{PQ} = (q_x - p_x, q_y - p_y, q_z - p_z) = (1 - 1, 1 - 0, 0 - 1)$$

$$\vec{PQ} = (0, 1, -1)$$

Operaciones con vectores

Suma de vectores

Suma de vectores.

Dados los vectores

$$\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n), \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

la suma se hace componente a componente

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

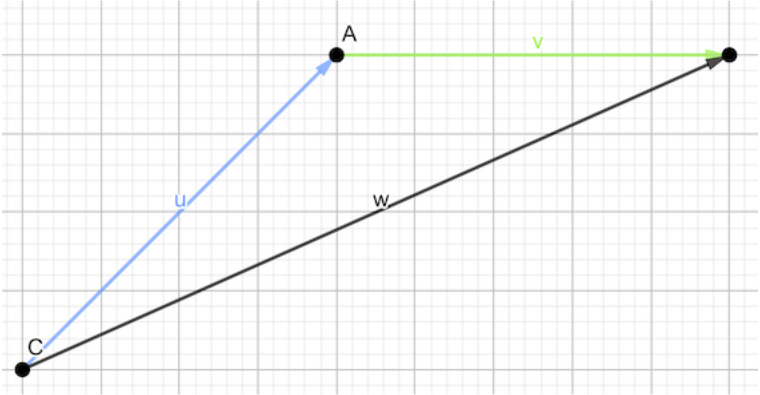
Ejemplo.

Si $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, su suma es

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (1 + 0, 2 + 3) = (1, 5)$$

Suma de vectores

Geométricamente es el vector que une el origen del primer vector con el extremo del segundo, habiendo colocado el origen del segundo vector sobre el extremo del primero:



Resta de vectores

Resta de vectores.

Dados los vectores

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n), \vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

su resta se hace componente a componente

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$$

Ejemplo.

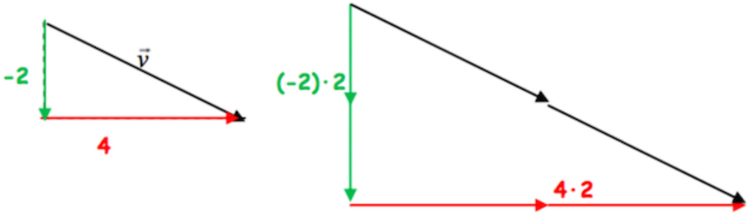
Si $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, la resta

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - 0, 2 - 3) = (1, -1)$$

Multiplicar un número y un vector

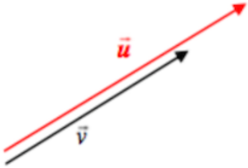
Producto por escalar. Dados $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, su producto es

$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)$$



Multiplicar un número y un vector

El resultado de multiplicar un escalar $\lambda \neq 0$ por un vector $\vec{u}$ es otro vector $\vec{v}$ de la misma dirección que $\vec{u}$, de sentido igual o contrario dependiendo del signo del escalar (positivo o negativo, respectivamente) y de módulo igual a λ veces el de $\vec{u}$.



Multiplicar un número y un vector

Ejemplo.

Dados

$$\vec{u} = (2, 5) \in \mathbb{R}^2, \lambda = 3 \in \mathbb{R}$$

el producto $\vec{w}$ es:

$$\vec{w} = \lambda \vec{u}$$

$$\vec{w} = 3\vec{u} = (3 \cdot 2, 3 \cdot 5) = (6, 15)$$

Y entonces, en este caso, el módulo del vector resultante, de $\vec{w}$, será 3 veces mayor que el módulo de $\vec{u}$; Además los dos vectores serán paralelos.

Producto escalar

Producto escalar.

Sean $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ o $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ como el número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ejemplo

Sean $\vec{u} = (2, 3, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

Su producto escalar será

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 7$$

Módulo/ Norma de un vector

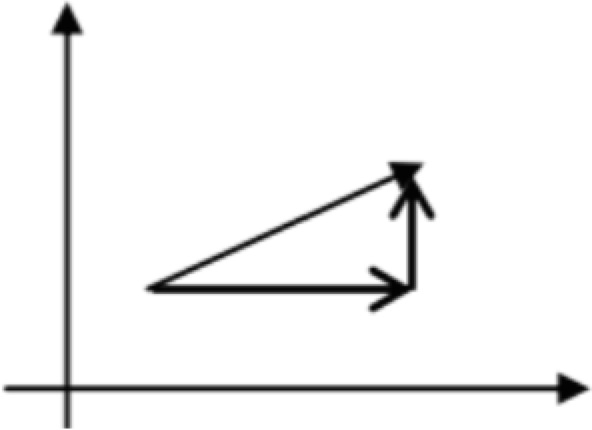
Norma.

Dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ su norma o longitud viene dada por la raíz cuadrada del producto escalar del vector con sí mismo.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Módulo/ Norma de un vector

El valor absoluto de las componentes del vector coincide con la de los catetos del triángulo rectángulo formado, tal que la longitud del vector es la hipotenusa del triangulo.



Ejemplo.

Norma

Vector unitario.

Un vector $\vec{e}$ es unitario si tiene norma 1. Es decir, si

$$||\vec{e}|| = 1$$

Ejemplo

El vector $\vec{u} = (-1, 0)$ es unitario porque su norma es 1:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos.

Dados dos puntos A y B, se define la distancia entre ambos como la norma del vector que une los dos puntos, es decir:

$$\mathrm{d}(A,B) = ||\vec{AB}|| = \sqrt{\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle}$$

Distancia entre dos puntos

Ejemplo

Dados dos puntos $A = (0, 1)$ y $B = (3, 0)$. Primero calculamos el vector que une los dos puntos:

$$\vec{AB} = B - A = (3, 5) - (0, 1) = (3, 4)$$

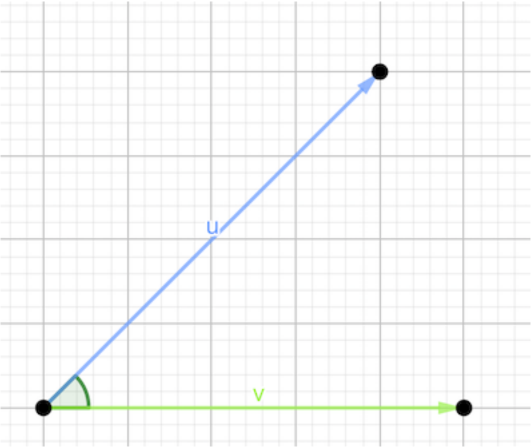
A continuación calculamos la norma del vector:

$$\mathrm{d}(A, B) = ||\vec{AB}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Ángulo entre dos vectores

Teorema. Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y α el ángulo que forman ambos, entonces se cumple que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\alpha)$$



Ángulo entre dos vectores

Ángulo entre dos vectores. Se define el ángulo que forman dos vectores como el valor real α tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Ángulo entre dos vectores

Ejemplo

Siendo $\vec{u} = (2,\vec{\,}0)$ y $\vec{v} = (3,\vec{\,}3)$, primero calculamos el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 6$$

A continuación calculamos la norma de cada vector:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2, ||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

Ángulo entre dos vectores

Ejemplo

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{6}{2 \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

entonces el ángulo (en grados) que forman estos vectores

$$\alpha = arcos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

Vectores ortogonales

Vectores ortogonales. Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo

Los vectores $\vec{u} = (1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 4)$ son ortogonales porque el producto escalar es 0:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$$

Vectores ortonormales

Vectores ortonormales.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortonormales si son ortogonales y la norma de cada vector es 1.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$||\vec{u}|| = 1$$

$$||\vec{v}|| = 1$$

Vectores ortonormales

Ejemplo

Los vectores $\vec{u} = \vec{(1,0)}$ y $\vec{v} = \vec{(0,1)}$ son ortonormales porque el producto escalar es 0:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Y la norma de cada vector es 1:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$