ÁLGEBRA LINEAL

ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ecuación lineal

Ecuación lineal. Una ecuación lineal (o de primer grado) es una igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia.

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \end{cases}$$

donde $a_i, b \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, n$

Incógnitas. $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Coeficientes de la ecuación. $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Término independiente. b

Ecuación lineal

Ejemplo: 1 ecuación de 2 incógnitas.

$$x_1 - x_2 = 0$$

Ejemplo: 1 ecuación de 3 incógnitas.

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3$$

Ejemplo: 1 ecuación de 4 incógnitas.

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 9$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Es un sistema de la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$

Incógnitas. $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Coeficientes del sistema. $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Términos independientes. b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo Sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Ejemplo Sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 & = & 3 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 & = & -1 \end{cases}$$

Discusión de un sistema de ecuaciones lineales

Según el número de soluciones clasificaremos los sistemas de ecuaciones lineales de la siguiente forma:

Sistema compatible. Si el sistema tiene solución

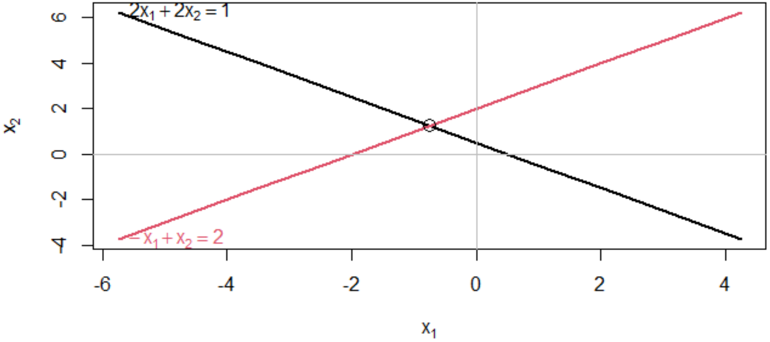
- Sistema compatible determinado. Si la solución es única
- Sistema compatible indeterminado. Si tiene infinitas soluciones

Sistema incompatible. Si el sistema no tiene solución

Representación gráfica de un sistema lineal

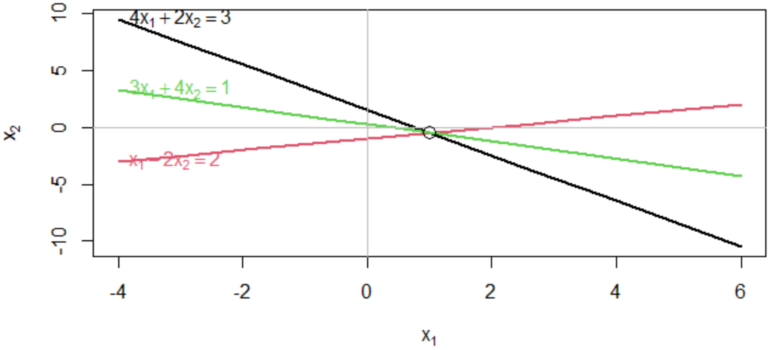
Dos incógnitas. Si el sistema tiene dos incógnitas cada ecuación representa una recta y cada recta está situada en el PLANO (2D).

-Sistema compatible determinado de 2 ecuaciones:



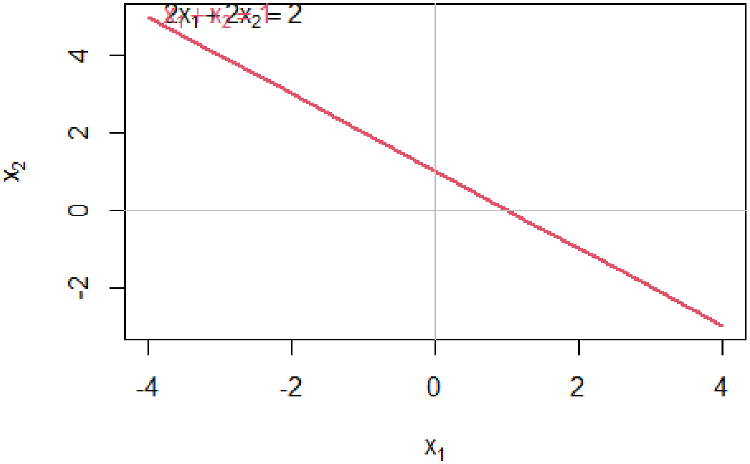
Representación gráfica de un sistema lineal

-Sistema compatible determinado de 3 ecuaciones:



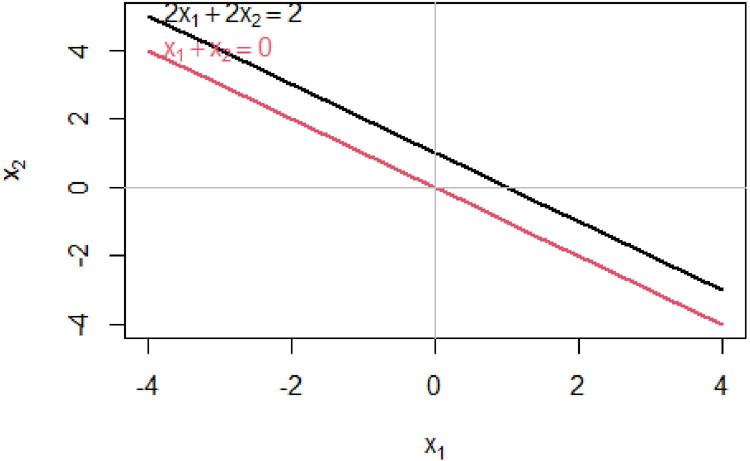
Representación gráfica de un sistema lineal

-Sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones:



Representación gráfica de un sistema lineal

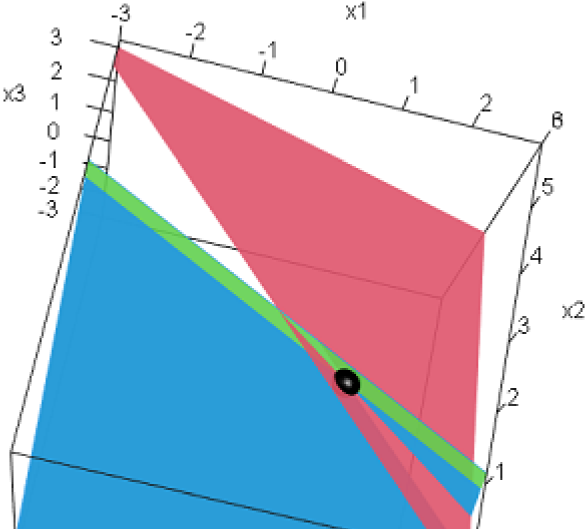
-Sistema incompatible de 2 ecuaciones:



Representación gráfica de un sistema lineal

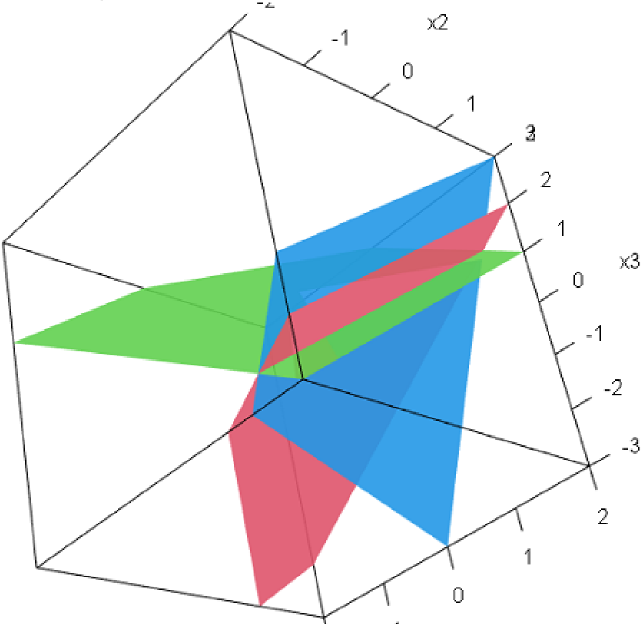
Tres incógnitas. Si el sistema tiene tres incógnitas cada ecuación representa un plano y cada plano está situada en el ESPACIO (3D).

-Sistema compatible determinado de 3 ecuaciones:



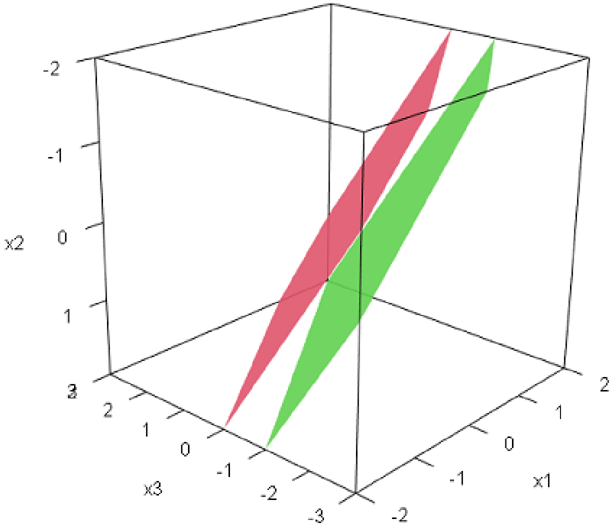
Representación gráfica de un sistema lineal

-Sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones:



Representación gráfica de un sistema lineal

-Sistema incompatible de 2 ecuaciones:



Ecuación matricial

Ecuación matricial. Ecuación donde la incógnita es una matriz.

Ejemplo 1:

$$2X = B$$

donde B es una matriz conocida y X es la matriz incógnita.

Ejemplo 2:

$$PX + C + QX = BX + D$$

donde P, C, Q, B, D son matrices conocidas y X es la matriz incógnita.

Forma matricial

Dado un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Forma matricial del sistema: $AX = B$

Forma matricial

Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales. $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes. A

Matriz de términos independientes. B

Matriz de incógnitas. X

Forma matricial

Ejemplo

Dado un sistema de 2 ecuaciones lineales y 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde se cumple que $AX = B$.

Matriz ampliada

Matriz ampliada del sistema. Dado el sistema matricial $AX = B$, se define la matriz ampliada del sistema como $(A|B)$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

Ejemplo Para el sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 & = & 3 \end{cases}$$

las respectivas matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema

Teorema de Rouché-Frobenius. Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, $AX = B$, se verifica:

- Si rg(A) =rg($A|B$), entonces el sistema es compatible.
  - Si rg(A) =rg($A|B$)$= n$, entonces el sistema es compatible determinado.
- Si rg(A)$\neq$rg($A|B$), entonces el sistema es incompatible.

Resolución del sistema con el método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

A partir de un sistema dado, el método consiste en conseguir otro sistema equivalente y más simple, es decir, otro sistema con las mismas soluciones, y resolver este último. Trasladando esta información a un sistema matricial, el método consiste en obtener la matriz escalonada reducida equivalente de la matriz ampliada. Y de esta manera las soluciones del sistema son inmediatas. Para obtener esa matriz reducida se aplican las transformaciones elementales a nuestra matriz ampliada hasta obtener la escalonada reducida.

Ejemplo: El método de Gauss-Jordan

Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 & = & 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 12x_3 & = & 23 \\ \quad 2x_2 + 5x_3 & = & 11 \end{cases}$$

Extraemos del sistema la matriz de coeficientes A y la matriz de términos independientes B:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & | & 18 \\ 2 & 3 & 12 & | & 23 \\ 0 & 2 & 5 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: El método de Gauss-Jordan

Empezamos a aplicar las transformaciones elementales. Dividimos la primera fila por 2 (equivalente a multiplicarla por $1/2$) y así conseguimos el primer pivote ($a_{11} = 1$):

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & | & 18 \\ 2 & 3 & 12 & | & 23 \\ 0 & 2 & 5 & | & 11 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 9 \\ 2 & 3 & 12 & | & 23 \\ 0 & 2 & 5 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: El método de Gauss-Jordan

Restamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por 2, y así conseguimos un 0 debajo del pivote $a_{11} = 1$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 9 \\ 2 & 3 & 12 & | & 23 \\ 0 & 2 & 5 & | & 11 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 2 & 5 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: El método de Gauss-Jordan

Restamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 2:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 2 & 5 & | & 11 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: El método de Gauss-Jordan

Restamos a la segunda ecuación la tercera multiplicada por 2,y restamos a la primera ecuación la tercera multiplicada por 5:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: El método de Gauss-Jordan

Finalmente restamos la segunda ecuación a la primera:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: El método de Gauss-Jordan

Y de aquí obtenemos directamente la solución del sistema

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Discusión y resolución de sistemas escalonados reducidos.

Tres casos.

Caso 1: sistema incompatible.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b_m \neq 0 \end{pmatrix}$$

Tres casos.

Caso 2: sistema compatible determinado.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & b_m \end{pmatrix}$$

Tres casos.

Caso 3: sistema compatible indeterminado.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$