ÁLGEBRA LINEAL

CUERPOS

Cuerpos

Estructura

Cuerpo. Sea $\mathbb{K}$ un conjunto dotado de dos operaciones, adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$. Diremos que $\mathbb{K}$ es un cuerpo si para todo $a, b \in \mathbb{K}$ se cumplen las condiciones siguientes:

- $(+)$ y $(\cdot)$ son operaciones internas sobre $\mathbb{K}$: $a + b \in \mathbb{K}$ y $a \cdot b \in \mathbb{K}$
- $(+)$ y $(\cdot)$ son operaciones conmutativas: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
- $(+)$ y $(\cdot)$ son operaciones asociativas: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Existe un elemento neutro para la adición: $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$
- Existe un elemento neutro para la multiplicación: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$

Estructura

- Elemento opuesto: $\forall a \in \mathbb{K}$ existe otro elemento $-a \in \mathbb{K}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- Elemento inverso: $\forall a \in \mathbb{K},\ a \neq 0$ existe elemento $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
- La operación $(\cdot)$ es distributiva respecto $(+)$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplos

Cuerpos conocidos

- $\mathbb{Q}$: Los números racionales
  - suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
  - producto: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}$: Los números reales
- $\mathbb{C}$: Los números complejos
  - suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
    $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
  - producto: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
    $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Números complejos

Números complejos

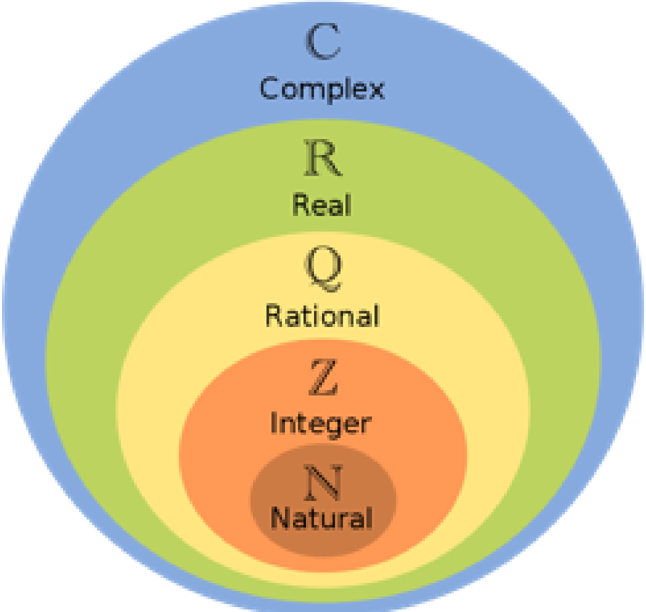
Definición. Los números complejos, designados con la notación $\mathbb{C}$, son una extensión de los números reales $\mathbb{R}$ y forman un cuerpo algebraicamente cerrado. Entre ambos conjuntos de números se cumple que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Todo número complejo, z, puede representarse como la suma de un número real (a), y un múltiplo real (b) de la unidad imaginaria (i):

$$z = a + bi$$

Historia. Los números complejos aparecieron en el siglo XVI como producto derivado de la solución de ecuaciones polinomiales del tipo:

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Clasificación de los números complejos



Números complejos

Conjunto. $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Operaciones:

- suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$
- producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Forma de Tupla. $z = (a, b)$

Forma Binómica. $z = a + bi$ donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria

Forma polar. $z = re^{i\varphi}$ donde $r = |z|$ y $\varphi = \arg(z)$

Números complejos

Parte Real: $\text{Re}(z) = a$ donde $z = a + bi$

Parte Imaginaria: $\text{Im}(z) = b$ donde $z = a + bi$

Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

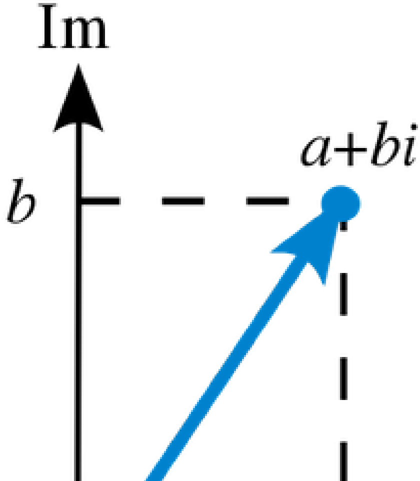
Argumento (en radianes): $\text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ donde $z = a + bi$

Argumento principal. $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Conjugado de z. Si $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$

Plano Complejo

El plano complejo es una forma de visualizar y ordenar el conjunto de los números complejos. Puede entenderse como un plano cartesiano modificado, en el que la parte real está representada en el eje horizontal y la parte imaginaria en el eje vertical.



Plano Complejo