Semana 2: Definiciones en conjuntos

1. Conjuntos

En nuestra experiencia, *un conjunto* es un ente formado por objetos que satisfacen una condición dada, como el conjunto de puntos en el plano o el conjunto de los números pares. De manera precisa, un conjunto es un término no definido al que se le da significado a través de axiomas. Para el objetivo de este texto, sin embargo, bastará considerar la idea intuitiva de conjunto. Por esta razón, los términos *conjunto*, *elemento* y *pertenece a* se consideran primitivos y podrán ser usados en la forma intuitiva usual.

Usaremos como sinónimos las palabras *conjunto*, *familia* y *colección* y en general, utilizaremos las letras mayúsculas A, B, C, etc., para denotarlos. Para indicar que un objeto a es un elemento de un conjunto A, escribiremos $a \in A$. La negación de este enunciado se escribe simplemente como $a \notin A$. Supondremos que si $x \in A$, entonces $A \notin x$ y en consecuencia para cada conjunto A debemos tener $A \notin A$. La igualdad entre conjuntos se define por su extensión. Es decir, diremos que A y B son *iguales*, en símbolos $A = B$, si están compuestos por exactamente los mismos elementos. En caso de ser lo anterior falso, escribiremos $A \neq B$.

Para especificar los elementos de un conjunto usaremos la escritura entre llaves. Por ejemplo, si A es un conjunto que contiene exclusivamente a los números 1, 2 y 3, escribimos

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Es importante mencionar que bajo esta notación, el orden en que se listan los elementos es irrelevante y lo mismo lo es el número de veces que un elemento es mencionado. Esto es consecuencia de la igualdad entre conjuntos.

Hay varios conjuntos muy importantes en matemáticas que resultan sumamente interesantes y que resultarán de mucha utilidad en nuestro desarrollo:

- *El conjunto de los números naturales*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

- *El conjunto de los números enteros*:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

La descripción que se da de estos conjuntos es, de nueva cuenta, primitiva y debe sobreentenderse su significado, asumiendo por supuesto, que existen dichos conjuntos. Más adelante, tendremos oportunidad de describir estos conjuntos abundando en algunos detalles.

2. Subconjuntos

Si A y B son conjuntos y cada elemento de B es también un elemento de A, entonces diremos que *B es un subconjunto de A*. En símbolos esto se escribe $B \subseteq A$. Sinónimos para este fenómeno son las expresiones *B está contenido en A* y *B está incluido en A*. De la igualdad entre conjuntos podemos observar que dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Es importante notar que $A \subseteq A$ es siempre cierto; por esta razón diremos que *B es un subconjunto propio de A*, en símbolos $B \subset A$, si $B \subseteq A$ pero $A \neq B$.

Ejemplo. Cade elementos del conjunto de los números naturales pertenece también al conjunto de los números enteros. Sin embargo, no todo elemento del conjunto de los enteros es un natural, e.g., el número entero -2. Todo esto nos permite afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Si A es un conjunto y α una propiedad, entonces todos los elementos de A que satisfacen α forman un conjunto, el cual resulta en particular un subconjunto de A. A este conjunto lo escribimos como

$$\{x \in A \mid \alpha(x)\}.$$

Lo anterior se lee como «todos los elementos de A que satisfacen α»

Ejemplo. Usando la notación anterior, es posible especificar el *conjunto de los enteros negativos* como

$$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin \mathbb{N}\}.$$

En todas las situaciones que abordaremos, todos los conjuntos considerados serán subconjuntos de un conjunto fijo. A tal conjunto se le denomina *conjunto universal* y aunque pocas veces se mencionará explícitamente, su existencia se asumirá en contexto. Usando esta convención, para una propiedad α, el conjunto

$$\{x \mid \alpha(x)\}$$

indica la colección de todos los elementos x del conjunto universal que satisfacen $\alpha(x)$. Esto indica que los subconjuntos del conjunto universal pueden ser especificados sin hacer una mención explícita de éste.

Ejemplo. Afirmaremos que existe un único conjunto que carece de elementos, el cual recibe el nombre de *conjunto vacío* y que denotaremos por el símbolo $\varnothing$. A este conjunto podemos especificarlo como

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

En otras palabras, para cualquier elemento a, debemos tener $a \notin \varnothing$. Esta descripción nos permite afirmar para cualquier conjunto A que

$$\varnothing \subseteq A.$$

3. Operaciones en conjuntos

Usando el proceso de especificación descrito en la sección anterior, podemos pensar a los conjuntos como enunciados lógicos. Como en los enunciados lógicos, los conjuntos vienen equipados con algunas operaciones básicas.

Definición 2.1. Sean A y B conjuntos. *La unión de los conjuntos A y B* es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Bajo la definición anterior, $a \in A \cup B$ si y sólo si $a \in A$ o $a \in B$. Debemos recordar que en matemáticas, la disyunción, *o*, tiene un significado inclusivo a diferencia de nuestro lenguaje común, donde es interpretada con un sentido exclusivo. En el sentido exclusivo del término, el conjunto $A \cup B$ está formado por elementos que pertenecen al conjunto A, al conjunto B o ambos.

Ejemplo. Consideramos los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{c, d, e\}$. La unión de éstos resulta simplemente el conjunto

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}.$$

Debe notarse que el elemento c que pertenece a ambos conjuntos está listado.

Proposición 2.1. *Para conjuntos A, B y C:*

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. $A \subseteq A \cup B$ *y* $B \subseteq A \cup B$.

Demostración. Los cuatro enunciados deben ser inmediatos de las reglas lógicas asociadas a la disyunción. ■

Las reglas expuestas en la proposición son las mismas que gobiernan la disyunción en lógica proposicional. De hecho, la prueba de los enunciados se recarga completamente en el comportamiento de la disyunción. Si existiera alguna duda acerca del porqué la proposición debe ser cierta, es importante realizar todos los pasos en ella.

Definición 2.2. Sean A y B conjuntos. *La intersección de los conjuntos A y B* es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Podemos describir de manera coloquial a la intersección de dos conjuntos como el proceso de tomar los elementos que tiene en común. Esto simplemente resulta de observar que existen dos condiciones que definen al conjunto y las cuales se deben cumplir simultáneamente.

Ejemplo. Considerando los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, c, e, g\}$, la intersección queda descrita como

$$A \cap B = \{a, c\}.$$

Proposición 2.2. *Para conjuntos A, B y C:*

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

4. $A \cap B \subseteq A$ *y* $A \cap B \subseteq B$.

Demostración. Los cuatro enunciados son inmediatos de las reglas lógicas asociadas a la conjunción. ∎

Como en el caso de la unión, las reglas para la intersección son las mismas que gobiernan la conjunción y su prueba se recarga completamente en el comportamiento de la conjunción. No debe sorprender que las leyes distributivas de la lógica proposicional hagan su aparición en las operaciones que hemos definido.

Proposición 2.3. *Para conjuntos A, B y C:*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demostración. Se probará solamente 1., 2. se puede obtener por analogía. Si $a \in A \cap (B \cup C)$, entonces $a \in A$ y $a \in B \cup C$; además, si $a \in B \cup C$, entonces $a \in B$ o $a \in C$. En suma, $a \in A$ y $a \in B$ o $a \in C$. Como la conjunción distribuye sobre la disyunción, entonces $a \in A$ y $a \in B$ o $a \in A$ y $a \in C$ por lo que $a \in A \cap B$ o $a \in A \cap C$, lo cual implica que $a \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Esto significa que

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

La otra contención se obtiene por analogía, obteniendo el resultado que buscamos. ∎

Definición 2.3. Sean A y B dos conjuntos. *La diferencia entre A y B*, es el conjunto

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Si $B \subset A$ entonces a $A \backslash B$ se dice *el complemento de B relativo a A*. En particular, el complemento de A relativo al conjunto universal, al que se le denomina simplemente *el complemento de A*, se denota con el símbolo A^c.

Ejemplo. Ya hemos definido el conjunto de los enteros negativos especificándolo. Bajo la definición anterior podemos argumentar de manera muy sencilla que

$$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}.$$

Para comprobar esto, basta observar la especificación del conjunto $\mathbb{Z}^-$ y la especificación del conjunto $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ y verificar que son idénticas.

Aunque la definición no da una expresión explícita del complemento de A, es sencillo encontrarla usando nuestra convención acerca del conjunto universal:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}.$$

De nueva cuenta, este conjunto está asociado con una operación utilizada en lógica, la negación, y se comporta de manera similar.

Ejemplo. Tomando $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ como el conjunto universal, el conjunto $A = \{x \mid x \text{ es par}\}$ tiene como su complemento al conjunto $A^c = \{x \mid x \text{ es impar}\}$.

Proposición 2.4. *Sea U el conjunto universal y sea A un conjunto cualquiera. Entonces:*

1. $(A^c)^c = A$.
2. $A \cup A^c = U$.
3. $A \cap A^c = \varnothing$.

Demostración. El primer enunciado es inmediato de la doble negación de un enunciado. El segundo del principio del medio excluido que nos permite obtener tautologías. El tercer enunciado es resultado del principio de no contradicción. ■

Como en el caso de la conjunción, disyunción y negación, las operaciones de unión, intersección y complemento, interactúan a través de las denominadas *leyes de De Morgan*.

Proposición 2.5 (Leyes de De Morgan)**.** *Para cualesquiera conjuntos A y B, son válidas:*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demostración. Es directa a partir de las leyes de DeMorgan aplicadas en los enunciados que definen a cada conjunto. ■

La diferencia entre conjuntos, aunque en apariencia diferente, representa también una versión de la negación en lógica y no está exenta de un comportamiento parecido.

Proposición 2.6. *Para cualesquiera conjuntos A, B y C, son válidas las igualdades:*

1. $A \backslash B = A \cap B^c$.
2. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.
3. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Demostración. Para probar 1, es necesario observar que $a \in A \backslash B$ si y sólo si $a \in A$ y $a \notin B$. Como $a \notin B$ si y sólo si $a \in B^c$, es posible concluir que $a \in A \backslash B$ si y sólo si $a \in A \cup B^c$. En otras palabras,

$$A \backslash B = A \cap B^c.$$

Para probar 2, usaremos 1 y las leyes de DeMorgan:

$$\begin{aligned} A \backslash (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= (A \backslash B) \cap (A \backslash C). \end{aligned}$$

El enunciado en 3, se prueba de manera similar a 2. ■

Hasta ahora, ninguno de nuestros conceptos asociados a conjuntos, excluye la posibilidad de tener un conjunto cuyos elementos sean otros conjuntos. Conjuntos de esta naturaleza constituyen una clase muy peculiar y uno muy importante define una operación sobre conjuntos.

Definición 2.4. Sea A un conjunto. Se define *el conjunto potencia de A* como el conjunto

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

El conjunto 2^A, colecciona todos todos los subconjuntos de A. Es decir, $B \in 2^A$ si y sólo si $B \subseteq A$. En particular, los conjuntos $\varnothing$ y A son miembros de 2^A, mostrando con esto que 2^A no es vacío, sin importar cual conjunto A tomemos. Esto puede ser interpretado de manera alegórica, afirmando que el conjunto potencia de A es más grande en comparación con A.

Ejemplo. Si $A = \varnothing$, la situación resulta bastante sencilla al obtener $2^\varnothing = \{\varnothing\}$. Tampoco es difícil calcular el conjunto potencia de *un conjunto unitario*, i.e., un conjunto con un solo elemento,

$$2^{\{a\}} = \{\varnothing, \{a\}\};$$

o el conjunto potencia de un conjunto con dos elementos,

$$2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

A pesar de parecer sencillo, incrementar el número de elementos del conjunto, vuelve muy pronto inmanejable el conjunto potencia. Por ejemplo, el conjunto potencia de un conjunto con seis elementos, está formado por sesenta y cuatro conjuntos.

Proposición 2.7. *Sean A y B conjuntos. Entonces se cumplen:*

1. $2^A \cap 2^B = 2^{A\cap B}$.
2. $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A\cup B}$.
3. $B \subseteq A$ *implica* $2^B \subseteq 2^A$.

Demostración. Para probar 1, debemos notar que $S \in 2^A \cap 2^B$ si y sólo si $S \in 2^A$ y $S \in 2^B$ lo que sucede si y sólo si $S \subseteq A$ y $S \subseteq B$ lo que de igual forma sucede si y sólo si $S \subseteq A \cap B$ y por último esto sucede si y sólo si $S \in 2^{A\cap B}$. En otras palabras

$$2^A \cap 2^B = 2^{A\cap B}.$$

Para mostrar 2, suponemos que $S \in 2^A \cup 2^B$, esto quiere decir que $S \in 2^A$ o $S \in 2^B$ lo que implica que $S \subseteq A$ o $S \subseteq B$. De cualquiera de las posibilidades podemos concluir que $S \subseteq A \cup B$ por lo que $S \in 2^{A\cup B}$. En conclusión,

$$2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A\cup B}.$$

Por último, para mostrar 3, suponemos que $B \subseteq A$ y $S \in 2^B$. Entonces, si$S \subseteq B$ debemos también tener $S \subseteq A$. En otras palabras $S \in 2^A$. Luego

$$2^B \subseteq 2^B.$$ ∎

4. Producto cartesiano

Como hemos mencionado, el orden en que se describe un conjunto es irrelevante. Por ejemplo, el conjunto $\{1,2\}$ resulta idéntico al conjunto $\{2,1\}$. Sin embargo, en algunas situaciones es importante distinguir el orden en que se presentan los elementos.

Definición 2.5. Sean a y b elementos del conjunto universal. Se llama *la pareja ordenada de a y b*, al conjunto

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}\,.$$

Proposición 2.8. *Sean a, b, c y d elementos del conjunto universal. Entonces,*

$$(a,b) = (c,d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d.$$

Demostración. Si suponemos primero que $a = c$ y $b = d$ es inmediato admitir que las parejas (a,b) y (c,d) son iguales desde el punto de vista de conjuntos.

Supongamos ahora que $(a,b) = (c,d)$, entonces

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}\,.$$

Debemos notar que el conjunto al lado izquierdo de la igualdad contiene a los conjuntos $\{a\}$ y $\{a,b\}$ los cuales tienen en común solamente al elemento a; de la misma forma, el conjunto a la derecha de la igualdad contiene dos conjuntos que tienen en común solamente al elemento c. Usando la definición para la igualdad de conjuntos, lo anterior nos permite afirmar que $a = c$ y en consecuencia

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}\,.$$

Para probar $b = d$, distinguiremos dos casos:

- Supongamos primero que $b = a$. Entonces, $\{a\} = \{a,b\}$ por lo que tenemos

  $$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\}\}$$

  y por tanto

  $$\{\{a\},\{a,d\}\} = \{\{a\}\}\,.$$

  Ahora, por igualdad de conjuntos, debemos tener $\{a\} = \{a,d\}$ y por tanto $a = d$; en otras palabras $b = a = d$ tal como deseábamos.

- Supongamos ahora lo contrario, $b \neq a$. Entonces, b sólo pertenece a $\{a,b\}$ pero no al conjunto $\{a\}$. En ese caso, b es un miembro de $\{a,d\}$ y como $b \neq a$ debe ser $b = d$, justo como buscábamos.

En resumen, $a = c$ y $b = d$ como buscábamos. ■

La proposición anterior, describe la clase de cosas que esperaríamos de una pareja ordenada y a pesar de esto, es imposible leer la definición sin sentir desconfianza de su significado. El problema reside en descubrir propiedades accidentales de la definición, por ejemplo, al tener $\{a\} \in (a,b)$. Estas excentricidades son el precio a pagar por describir una pareja ordenada en el marco de la teoría de conjuntos y podrán ser ignoradas a conveniencia. Realmente la única propiedad que nos interesará es la descrita en la proposición y bien prodríamos haber usado ésta como la propiedad que define a las parejas ordenadas.

Definición 2.6. Sean A y B conjuntos. Definimos *el producto cartesiano de A y B* como el conjunto

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Ejemplo. Para los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$, el producto cartesiano es un conjunto formado por parejas ordenadas y descrito en su totalidad por

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

En una pareja ordenada (a,b), al elemento a se le denomina *primer componente de la pareja* o *primera coordenada de la pareja* y de manera similar al elemento b se le denomina *segundo componente de la pareja* o *segunda coordenada de la pareja*. De esta forma, podemos describir al conjunto $A \times B$ como aquel formado por todas las parejas ordenadas donde su primer componente es miembro de A y su segundo componente es miembro de B.

Proposición 2.9. *Sean A y B conjuntos cualquiera. Entonces, $A \times B = \varnothing$ si y sólo si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.*

Demostración. Supongamos primero que A o B son el conjunto vacío. En ese caso, si $(a,b) \in A \times B$, se debe cumplir $a \in A$ o $b \in B$. Lo anterior es imposible pues hemos dado como hipótesis que al menos uno de los dos es vacío, debemos entonces concluir que $A \times B$ no puede tener elementos. Supongamos ahora que tanto A como B son no vacíos, eso quiere decir que existen $a \in A$ y $b \in B$ de forma que $(a,b) \in A \times B$ mostrando con esto que $A \times B$ no es vacío. El resultado sigue entonces por contraposición. ∎

Proposición 2.10. *Para cualesquiera conjuntos A, B y C,*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Demostración. Mostraremos el resultado usando dos contenciones. La primera igualdad se deduce como sigue: Si $(a,b) \in A \times (B \cup C)$ entonces $a \in A$ y $b \in B \cup C$. La segunda pertenencia, indica que $b \in B$ o $b \in C$, esto indica que $(a,b) \in A \times B$ o $(a,c) \in A \times C$, lo cual lleva a la definición de unión. Entonces,

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C).$$

Para mostrar la otra contención, supongamos $(a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C$, esto implica que $(a,b) \in A \times B$ o $(a,b) \in A \times C$. Por definición, lo anterior significa que $a \in A$ y, $b \in B$ o $binC$. Esto último se puede interpretar afirmando que $b \in B \cup C$ y en ese caso $(a,b) \in A \times (B \cup C)$. La segunda igualdad se puede mostrar usando un argumento análogo (inténtalo). ∎

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Sea $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ el universo y sean $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{1,3,4,5,6\}$ y $C = \{2,4,6,7,8\}$. Encuentra:

1. La unión de $A \cup B$.
2. La intersección $A \cap C$.
3. La diferencia $B \backslash C$.
4. El complemento A^c.

Ejercicio 2.2. Para los conjuntos del ejercicio anterior, encuentra:

1. $(A \cup B) \backslash C$.
2. $(A \cup B)^c$.
3. $(A \cup C) \backslash (C \cap A)$.
4. $(A) \backslash (B \cup C)^c$.

Ejercicio 2.3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales? $A = \{a, b, a, b, a, c\}$, $B = \{a, a, a, a, b, c, c\}$, $C = \{a, a, a, c\}$, $D = \{a, a\}$, $E = \{a\}$, $F = \{c, a\}$.

Ejercicio 2.4. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Determina la validez de las siguiente afirmaciones.

1. $A \subset B$
2. $A \neq B$
3. $1 \in A$
4. $A \in B$
5. $1 \subset A$
6. $1 \subset B$

Ejercicio 2.5. Determina la validez de las siguientes afirmaciones:

1. $\varnothing \in \varnothing$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $\varnothing \subset \varnothing$
4. $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
5. $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
6. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 2.6. Para los conjuntos $A = \{3, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$ encuentra:

1. $A \times A$.
2. $A \times B$.
3. $B \times A$.
4. $B \times B$.

Ejercicio 2.7. Usando como referencia el ejercicio anterior, determina si es lo mismo $A \times B$ y $B \times A$.

Ejercicio 2.8. Usando los conjunto del ejercicio 2.6, encuentra:

1. $(A \times A) \cup (A \times B)$.
2. $A \cup (A \times B)$.

Ejercicio 2.9. Si dos conjuntos A y B son tal que su uníon y su intersección son iguales, ¿qué se puede decir que ellos?

Ejercicio 2.10. Sean A y B conjuntos cualquiera y sea $S \subseteq A$ y $S \subseteq B$. Demuestra que $S \subseteq A \cap B$.

Ejercicio 2.11. Encuentra una pareja de conjuntos A y B de forma que

$$2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}.$$

Ejercicio 2.12. Si para dos conjuntos A y B se tiene $2^A = 2^B$, demuestra que $A = B$.

Referencias

[Bal96] Balakrishnan, V. K.: *Introductory discrete mathematics*. Dover publications, 1996.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.

[Rot05] Rotman, Joseph J.: *A first course in abstract algebra*. Pearson, 3ª edición, 2005.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos textos que han sido usados para preparar el curso de «Matemáticas discretas» impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y sea sujeto a cambios constantes.