Preliminares

Matemáticas Discretas
Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

1. Teoría de Conjuntos

1.1. Conjuntos

Uno de los pilares en los que descansa la matemática moderna es la teoría de conjuntos. Pero no sólo es ésta un tema fundamental, en el estudio de todas las ramas de la matemática podemos encontrar un uso frecuente e inequívoco de ésta; fue incluso capaz de unificar ideas aparentemente inconexas y contribuido a reducir conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos. Nosotros no realizaremos un estudio minucioso de dicha teoría, intentaremos simplemente aclarar los conceptos básicos con el objecto de avanzar en la teoría matemática que nos atañe.

Consideraremos de entrada los términos «conjunto», «elemento» y la relación de «pertenencia» como conceptos primitivos, i.e., tomaremos estos conceptos de forma tal que correspondan al uso ordinario que les damos. Por ejemplo, por conjunto entenderemos una colección de elementos distinguidos de alguna forma.

Por lo general, denotaremos a los conjuntos con letras mayúsculas mientras que a los elementos con letras minúsculas. Si un objeto a pertenece a un conjunto A, escribiremos $a \in A$; si el objeto a, por el contrario, no pertenece a A, escribiremos $a \notin A$.

Para especificar los elementos de un conjunto, usaremos la escritura entre llaves; por ejemplo, si A es el conjunto que consta exactamente de los elementos a, b y c, escribiremos

$$A = \{a, b, c\} .$$

Bajo este argumento, se pueden pensar conjuntos en los que sus elementos son conjuntos; por ejemplo, $\{A\}$ sería el conjunto cuyo único elemento es el conjunto A. Es importante notar la diferencia conceptual que existe entre A y $\{A\}$; el primero es un conjunto que contiene elementos, el segundo es un conjunto que tiene un único elemento: el conjunto A.

Existe también otra posibilidad al describir conjuntos de esta forma: un conjunto sin elementos, éste es llamado *conjunto vacío* o *nulo* y lo denotaremos por el símbolo $\varnothing$. Hay quien imagina a los conjuntos como alguna clase de contenedores, como una bolsa o una caja, en ese sentido el conjunto vacío sería una bolsa o caja vacía.

1.2. Subconjuntos

Cuando pensamos en una colección de objetos o elementos, dentro de ella podemos pensar en colección más pequeñas. Un subconjunto captura esta idea de forma precisa.

Definición 1.1. Sean A y B conjuntos. B se dice *subconjunto de* A, si cada elemento de B es también un elemento de A. Este hecho se denota por $B \subset A$.

Con base en esta definición, podemos afirmar que $B \subset A$ si y sólo si, $x \in B$ implica que $x \in A$. De la afirmación anterior, debemos notar que, al ser el vacío el conjunto sin elementos, el conjunto $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto.

Debemos notar también que la relación de subconjunto $B \subset A$ no excluye la posibilidad que $A \subset B$. En realidad, se pueden tener esas dos relaciones al mismo tiempo y si ese fuera el caso, los conjuntos A y B tendrían exactamente los mismos elementos, de hecho, este resultado se puede usar para definir la igualdad de conjuntos.

Definición 1.2. Sean A y B conjuntos. Decimos que A y B son iguales, y escribimos $A = B$, si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Como para cada conjunto, el vacío y el conjunto mismo son subconjuntos por definición, es deseable distinguir aquellos subconjuntos de un conjunto que no son triviales.

Definición 1.3. Sean A y B conjuntos. B se dice *subconjunto propio de A, si $B \neq \varnothing$, $B \neq A$ y $B \subset A$.*

1.3. Universos y Propiedades

En cualquier aplicación que tengamos de la teoría de conjuntos, siempre existirá un conjunto fijo, ya sea explícita o implícitamente, que recibe el nombre de *conjunto universo* al cual escribiremos usando la letra en cursiva $\mathcal{U}$. Todos los conjuntos que usemos dentro de nuestra desarrollos teóricos serán siempre subconjuntos del conjunto $\mathcal{U}$.

Como indicamos, del conjunto universo deseamos especificar subconjuntos y la manera en que lo realizaremos es indicando alguna propiedad que describa a ese subconjunto. Para indicar de manera abstracta una propiedad usaremos letras Griegas. Por ejemplo, sea α una propiedad, indicaremos que *un elemento x satisface la propiedad α* escribiendo $\alpha(x)$. Por supuesto, el elemento x que se indica, hace referencia a un elemento del conjunto universo y las propiedades deben describir elementos del conjunto universo dado. Lo anterior hace posible introducir una notación relativamente cómoda que permita describir un conjunto A (subconjunto del conjunto universo) como

$$A = \{x \mid \alpha(x)\}\,;$$

lo anterior se debe leer: «A es el conjunto de todos los elementos en el universo $\mathcal{U}$ que satisfacen la propiedad α». Es importante notar que el conjunto universo queda especificado en contexto y no aparece de manera explícita en la notación que hemos introducido.

Esta notación nos permite describir al conjunto vacío en términos de una propiedad, a decir

$$x \neq x.$$

Es de notar que esta propiedad es cierta para cualquier elemento, sin importar realmente en universo que tomemos, así, podemos simplemente definir

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

Esta idea no entra en conflicto con pensar al conjunto vacío como una colección sin elementos, al contrario, especifica en que universo y como es que existe el conjunto vacío.

1.4. Operaciones con conjuntos

Podemos crear nuevos conjuntos a partir de otros conjuntos dados usando determinadas operaciones lógicas, en esta sección presentaremos sólo tres de estas operaciones reconociendo que se pueden definir muchas más. Estas son la unión, intersección y diferencia de conjuntos.

Comenzaremos con la unión de los conjuntos A y B. Primero propondremos la propiedad:

$$x \in A \text{ o } x \in B;$$

debemos aclarar que en matemáticas a la disyunción, se le da un significado inclusivo, esto quiere decir que la interpretaremos como «lo uno, lo otro o los dos». El enunciado anterior entonces se leerá como: «x está en A, x está en B o x está en A y B». Una vez aclarado esto, definimos entonces la unión de A y B.

Definición 1.4. Sean A y B conjuntos. La *unión de A con B* es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

La expresión $A \cup B$, se lee «A unión B» y este conjunto contiene a todos los elementos que pertenezcan al menos a uno de los conjuntos A y B.

Con la unión formamos un conjunto, de manera coloquial, «más grande» de los conjuntos de donde hemos partido partido, podemos pensar en hacer algo similar para tener uno más «pequeño» usando la contrapartida lógica de la disyunción: la conjunción. De esta forma proponemos para dos conjuntos A y B, y la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \in B;$$

ésta se satisface únicamente cuando x está al mismo tiempo tanto en$A$ como en B, lo que nos lleva a poder definir la intersección de A y B.

Definición 1.5. Sean A y B conjuntos. La *intersección de A y B* es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

La expresión $A \cap B$ se lee «A intersección B» y este conjunto contiene a todos los elementos que están al mismo tiempo, tanto en A como B. Podría ser el caso, por supuesto, que los conjuntos en cuestión no tengan elementos en común. En ese caso tenemos $A \cap B = \varnothing$ y diremos que los conjuntos son *disjuntos*.

Otra operación consiste en excluir elementos de un conjunto dado. Para clarificar esto, consideremos los conjuntos A y B; y analicemos la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \notin B.$$

Esta propiedad será cierta para un elemento x dado, cuando ese x esté en A pero no sea un miembro de B. Esto quiere decir que excluiremos a todos los elementos de A que estén B, esto es precisamente lo que se intenta realizar en la diferencia de conjuntos

Definición 1.6. Sean A y B conjuntos. La *diferencia de A con B* es el conjunto

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

La expresión $A \backslash B$ se lee «A menos B» y simplemente es el conjunto A donde los elementos que tiene en común con B han sido removidos.

1.5. Operaciones con familias de conjuntos

Como se mencionó al principio de la sección, un conjunto puede tener como elementos a otros conjuntos. Una *familia de conjuntos* será entonces este caso particular, i.e., un conjunto $\mathcal{F}$ tal que todos sus elementos sean conjuntos.

Por ejemplo, si A es un conjunto, podemos considerar la familia con un único elemento

$$\{A\}.$$

Es importante notar que conceptualmente son distintos el conjunto A y el conjunto que contiene como único elemento a dicho conjunto, este es A. Es más, para cualquier conjunto A, es cierto que $A \in \{A\}$; en otras palabras, A es un elemento (el único) que pertenece al conjunto $\{A\}$.

De manera similar a como hemos definido la unión y la intersección entre conjuntos, podemos definir la unión e intersección de una familia de conjuntos. Esto, aunque parecería abstracto en principio, es una generalización relativamente sencilla de lo anterior. Pensemos por ejemplo en la familia de conjuntos con dos elementos, i.e.,

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos reunir los elementos de los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos entonces simplemente tomar

$$\bigcup \mathcal{F} = A \cup B;$$

esto querría decir que a es un elemento de $\bigcup \mathcal{F}$, si a pertenece al menos a uno de los conjuntos A, B. Expresarlo de esta manera, nos ayuda a tener una idea más general de como tratar con una familia de conjuntos. Consideremos ahora una familia $\mathcal{F}$ arbitraria, con ella podemos formar la siguiente propiedad

$$\text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X.$$

Si un elemento satisface esta propiedad, dicho elemento debe pertenecer por lo menos a uno de los conjuntos que constituyen la familia $\mathcal{F}$, entonces podemos definir lo siguiente.

Definición 1.7. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *unión de los elementos de* $\mathcal{F}$, como el conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X\}.$$

La expresión $\bigcup \mathcal{F}$ se lee «la unión de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión anterior, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen por lo menos a uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

De manera muy similar podemos proceder para definir la intersección de una familia de conjuntos. Consideremos de nueva la familia

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos encontrar los elementos que comparten todos los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos simplemente tomar

$$\bigcap \mathcal{F} = A \cap B;$$

podemos expresar esto de una manera ligeramente distinta, lo anterior querría decir que un elemento pertenece a $\bigcap \mathcal{F}$, si es miembro de los conjuntos A, B. De nueva cuenta esto nos presenta una forma cómoda de presentar la idea de intersección, para esto tomamos una familia $\mathcal{F}$ arbitraria de conjuntos y presentamos la propiedad

$$x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}.$$

Los elementos que satisfacen esta propiedad son aquellos que comparten los conjuntos en la familia $\mathcal{F}$, esto es una sugerencia para proponer la siguiente definición.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *intersección de los elementos de* $\mathcal{F}$, como el conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}\}.$$

La expresión $\bigcap \mathcal{F}$ se lee «la intersección de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión que se presentó, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen a todos y cada uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

1.6. Conjunto Potencia

Consideremos ahora un conjunto A. Como hemos definido, un conjunto B es un subconjunto de A cuando todos los elementos de B son al mismo tiempo elementos de A. Debemos notar que esta definición compara dos conjuntos con la siguiente propiedad:

$$\text{Para todo } x, \text{ si } x \in B \text{ entonces } x \in A.$$

Recordemos que hemos acordado escribir lo anterior simplemente como

$$B \subset A,$$

así, hemos asignado al símbolo $\subset$ un significado muy particular. De esta forma, podemos formar una familia importante de conjuntos, a decir la colección de conjuntos que son subconjuntos de A.

Definición 1.9. Sea A un conjunto. Entenderemos por *el conjunto potencia de* A como el conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

Recordemos que, $\varnothing \subset A$ y $A \subset A$, para cualquier conjunto A. Esto implica por definición que

$$\{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(A),$$

por lo que el conjunto potencia de cualquier conjunto debe ser no vacío, ¡incluso el conjunto potencia del vacío debe ser no vacío! Específicamente,

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

A partir de resolver el ejercicio 1.4, seremos capaces de observar este hecho simplemente siguiendo las definiciones que se han proporcionado.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

Ejercicio 1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto $A = 1, 2, 3$

Ejercicio 1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

Ejercicio 1.5. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset B$
- $A \in C$
- $A \subset C$
- $A \subset D$
- $B \subset C$
- $B \subset D$
- $B \in D$
- $A \in D$

Ejercicio 1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

Ejercicio 1.7. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.11. Demuestra que para cualquier conjunto A,

$$A \in \mathcal{P}(A) \qquad \text{y} \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(A)$$

Ejercicio 1.12. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

2. Relaciones y funciones

2.1. Ideas generales

Hasta ahora nuestra discusión se ha centrado en operar conjuntos y elementos de manera aislada. Sin embargo, hemos estado trabajando con un concepto de relación cuando hablamos de pertenencia. Debemos comenzar a preguntarnos qué es entonces una relación entre dos elementos. Para contestar esto por supuesto, haremos un pequeño viaje a la manera natural en la que interpretamos una relación en busca de ejemplos que ilustren la manera en que pensamos este concepto.

De manera coloquial, relacionamos a dos cosas cuando comparten algo; por ejemplo, para dos personas, podríamos vincularlas con alguna oración, digamos

«Juan y María se conocen».

De esta manera podríamos afirmar que Juan y María están *relacionados*. Podemos ir incluso más lejos usando enunciados para establecer vínculos entre más personas, por ejemplo

«Juan presentó a María con Pedro»,

donde de nueva cuenta establece una relación entre Juan, María y Pedro. Podemos usar notación lógica para capturar estas ideas con precisión. Tomemos entonces

$$\alpha(x, y) : x \text{ y } y \text{ se conocen}$$

y

$$\beta(x, y, z) : x \text{ presentó a } y \text{ con } z,$$

denotemos también como j, m y p a Juan, María y Pedro, respectivamente; en ese caso, nuestras oraciones se convertirán sencillamente en $\alpha(j, m)$ y $\beta(j, m, p)$. Existe algo que resulta interesante de resaltar al usar esta notación, si $\alpha(j, m)$, debemos concluir que $\alpha(m, j)$, por lo que en la relación α el orden no tiene importancia (de manera técnica a una relación de este tipo se le llama reflexiva). Sin embargo, los enunciados $\beta(j, m, p)$ y $\beta(j, p, m)$ no siguen necesariamente uno de otro, por lo que vemos que el orden en que se presenten los términos tiene un impacto en el significado. Esto nos dice que no todas las relaciones son creadas iguales y habrá algunas que posean determinadas propiedades que otra no poseerán.

Ahora, las relaciones descritas en el párrafo anterior son relaciones que vinculan dos objetos del mismo tipo, o lo que debería ser los mismo, dos objetos del mismo conjunto. Sin embargo, no es difícil pensar en ejemplos de relaciones que emparejen dos objetos de distintos tipos, por ejemplo un usuario y su cuenta de correo. En este caso, por una lado tomamos a una persona y por otro una cuenta de correo electrónico y establecemos una relación entre ellos

$$\gamma(x, y) : x \text{ es dueño de la cuenta } y,$$

en este caso cuando sustituimos las variables x y y tomamos valores de la primera en las personas y de la segunda en las cuentas de correo electrónico. Esto nos da la primer deficiencia de tomar una relación como un enunciado lógico, pues en lógica no segregamos variables sino uniformamos las cosas especificando toda variable

Quizá un ejemplo mucho más técnico resida en el concepto de bases de datos. Una base de datos relacional es una colección de tablas, mientras una tabla es a su vez una colección de registros. Un registro de nueva cuenta es una colección de datos, colección que regularmente es identificada de manera única para referencia (entonces, ¡una base de datos es una colección de colecciones de colecciones de datos!). Pongamos un ejemplo, una base de datos de las compras en una tienda. Podríamos pensar que una base de datos así contiene tres tablas, la de clientes, la de compras y la de productos. Un registro de la tabla de compras contendrá obligatoriamente el identificador único asociado a un registro de la tabla de usuarios. Esto es simplemente una relación: a cada compra está asociado un único cliente (¡una relación uno a uno!). Por otro lado, cada compra debe incluir una lista de productos, por lo que a cada compra podemos asociar los productos, lo que constituye otra relación (¡una relación uno a muchos!). Basta observar una posibilidad más de relacionar los datos en las tablas propuestas: a un producto podemos asociar las compras en las que aparece. Esta última relación exhibe una peculiaridad, ¿qué sucede si el producto no ha sido comprado ni una sola vez? Simplemente ese producto no está asociado con ninguna compra, o en otras palabras, no está emparejado.

Nuestra definición de relación debe ser lo suficientemente amplia para reflejar todas las posibilidades que hemos discutido, quizá no es tan dañino momentáneamente pensar una relación como un enunciado lógico que conecta dos o más términos a partir de su certeza. Es lo que la intuición aparentemente manda. A pesar de esto, existen algunos problemas de ambigüedad que necesitamos solucionar y casos que necesitamos incluir, para esto usaremos la posibilidad de definir un conjunto a través de enunciados lógicos, debe ser entonces natural preguntarnos si las relaciones resultan en conjuntos y si resultan, en cuáles. En las secciones siguientes exploraremos la idea de relación desde el punto de vista conjuntista.

2.2. Producto cartesiano

Una de las ideas que se aparecen de manera implícita o explícita en nuestra discusión de la idea de relaciones es el emparejamiento. En teoría de conjuntos no tiene sentido hasta el momento está idea. Sin embargo, de manera intuitiva podemos establecer cierto concepto que conocemos como *pareja*.

Definición 2.1 (Idea provisional de pareja)**.** Una *pareja de elementos de conjuntos* será un objeto escrito de la forma (a, b) que tiene la siguiente propiedad. Dos parejas (a, b) y (c, d) serán iguales si y sólo si $a = c$ y $c = d$.

Vamos a argumentar ahora, que dichos objetos serán suficiente para manipular cualquier número de elementos de conjuntos con un orden dado, o una n-tupla. Si aceptamos por un momento que existe un concepto de emparejamiento, estaríamos en posición de coleccionarlos como cualquier otro conjunto. Intentemos definir ahora una terna. Una terna de alguna manera es una pareja emparejada con algún otro elemento, entonces definimos

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Esta expresión para la terna cuenta con una propiedad análoga que define a las parejas, a decir que,

$$(a, b, c) = (d, e, f) \text{ si y sólo si } a = d$$

, $b = e$ y $c = f$. Es fácil convencernos que este hecho puede continuar indefinidamente, proponemos entonces una definición recursiva de una n-tupla:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

Dediquemos entonces nuestra discusión en intentar proveer un concepto de parejas en la teoría de conjuntos. Sabemos por un lado que un conjunto el orden en que se presentan los elementos no tiene importancia. Por otro lado, la definición de pareja que presentamos implica que el orden en que se presenten es relevante, de hecho definitorio, por lo que debemos buscar una forma de establecer este hecho. Propongamos entonces lo siguiente: Sean A y B conjuntos. Construimos con elementos a y b de A y B, respectivamente, el conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Este conjunto por supuesto no tiene a los elementos propuestos como elementos, pero tiene una propiedad interesante, a decir que,

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\},$$

si y sólo si $a = c$ y $b = d$. El lector por supuesto tendrá oportunidad de probar este hecho (Ejercicio). Una vez establecido lo anterior, estamos en posibilidad de proponer lo siguiente:

Definición 2.2. Sean A y B conjuntos y sean $a \in A$ y $b \in B$. Un *par ordenado formado con a y b*, se refiere al conjunto

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Basta entonces formular esto en teoría conjuntos, para esto usaremos la siguiente definición.

Definición 2.3. Sean A y B conjuntos. Se define el producto cartesiano de A y B como el conjunto $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

El producto cartesiano de A con B es en efecto, la colección de todas las parejas en cuyo primer componente aparece un elemento de A y en su segundo uno de B. Habrá que convencernos que (y basta observar con la mirada adecuada la definición anterior) que $B \times A \neq A \times B$. Además, esto nos permite alcanzar ternas, cuartetos, etc. de manera simple, basta tomar

$$(A \times B) \times C$$

para ternas por ejemplo (¡Cuidado! Habrá que convencernos que $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$). De manera inductiva una n-tupla sería un elemento del conjunto

$$(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n,$$

por convención los elementos del conjunto anterior se escribirán simplemente como

$$(a_1, \ldots, a_n).$$

De igual forma, se indicará el producto cartesiano de un conjunto con sigo mismo expresando

$$A^n$$

donde la n indica el número de veces que el producto a sido operado.

2.3. Relaciones

Nuestra discusión está ahora lo suficientemente madura para presentar una definición adecuada de relación en la teoría de conjuntos.

Definición 2.4. Sean A y B dos conjuntos. Por una *relación de A a B* entenderemos un subconjunto R del conjunto $A \times B$.

No debe parecernos extraño el concepto anterior. Hemos discutido con cierta amplitud que una relación entre los conjuntos A y B debería poder expresarse de la forma

$$\{(x, y) \in A \times B \mid \alpha(x, y)\},$$

lo cual constituye un subconjunto $A \times B$. De igual forma no debe resultar difícil convencernos que cualquier subconjunto puede ser descrito de manera lógica. Observemos ahora ejemplos algo más técnicos de relaciones.

Ejemplo. Sabemos que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, en particular, para conjuntos A y B, lo anterior implica que $\emptyset \subset A \times B$, por lo que $R = \emptyset$ es una relación de A a B. Esta relación es por supuesto peculiar y se le conoce como la *relación vacía*.

Ejemplo. Para un conjunto A, el conjunto

$$\{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$$

es una relación. A esta relación se conoce como la *relación identidad de A* la cual denotaremos por 1_A.

Ejemplo. Sea A un conjunto. Entonces el siguiente conjunto es una relación de A a $\mathcal{P}(A)$,

$$\{(x, y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in y\}.$$

Una vez establecido, ejemplificado y medianamente esclarecido el concepto de relación podemos comenzar a presentar determinadas definiciones que nos ayudarán a extraer determinada información de esta abstracción.

Definición 2.5. Sea R una relación de A a B. Definimos los conjuntos

$$\operatorname{dom}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B.(x, y) \in B\}$$

$$\operatorname{im}(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A.(x, y) \in B\}$$

Al conjunto $\operatorname{dom}(R)$ lo llamaremos el *dominio de R*, mientras al conjunto $\operatorname{im}(R)$ la *imagen de R*.

Definición 2.6. Sea R una relación de A a B. La *relación inversa de R* se define como el conjunto

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Debemos notar que dada una relación R de A a B, la relación inversa de R es una relación de B a A. Esta es una sutil diferencia, pero importante, debido a que $A \times B$ es diferente conceptualmente a $B \times A$.

Definición 2.7. Sea R una relación de A a B y sean A' y B', subconjuntos de A y B respectivamente. Entonces, al conjunto

$$R[A'] = \{y \in B \mid \exists x \in A'.(x, y) \in R\},$$

lo llamaremos la imagen de A' sobre R, mientras al conjunto

$$R^{-1}[B'] = \{x \in A \mid \exists y \in B'.(x, y) \in R\},$$

lo llamaremos la imagen inversa de B' sobre R.

Definición 2.8. Sean R_1 y R_2 relaciones de A a B y de B a C respectivamente. Definimos la *composición de R_1 con R_2* por el conjunto

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B.(x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

Teorema 2.1. *Sean $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset B \times C$ y $R_3 \subset C \times D$. Entonces,*

1. $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$.
2. $(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.
3. $R_1 \circ 1_A = R_1$ *y* $1_B \circ R_1 = R_1$

Demostración. Probaremos primero que $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. Para esto notamos que tanto $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ como $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ son relaciones A en D, por lo que lo anterior tiene sentido. Ahora siguiendo la definición de composición, $(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ si existe un elemento c de C tal que $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ y $(c, d) \in R_3$. De nueva cuenta por la definición, como $(a, c) \in R_2 \circ R_1$, entonces existe un elemento b del conjunto B tal que $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$. Ahora, como c es un elemento tal que $(b, c) \in R_2$ y $(c, d) \in R_3$, entonces $(b, d) \in R_3 \circ R_2$. De la misma forma, como b es un elemento tal que $(a, b) \in R_1$ y $(b, d) \in R_3 \circ R_2$, entonces $(a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. En ese caso $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subset (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. La otra contención se puede probar de manera similar.

Probaremos ahora $(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$. Notamos primero que ambos términos de la igualdad son relaciones de C a A. Además siguiendo la definición de composición, si $(c, a) \in (R_2 \circ R_1)^{-1}$ entonces $(a, c) \in R_2 \circ R_1$, en ese caso debe existir un elemento b del conjunto B, de forma que $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$. Por definición de la inversa de la relación, lo anterior significa que $(c, b) \in R_2^{-1}$ y $(b, a) \in R_1^{-1}$; de lo anterior tenemos que $(c, a) \in R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$. En ese caso $(R_2 \circ R_1)^{-1} \subset R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$. De manera análoga, podemos probar la otra contención.

El último inciso no debe presentar problema alguno y se recomienda al lector que lo pruebe. $\square$

Todas estas definiciones corren el peligro de parecer obscuras, sin embargo, en los ejercicios se tendrá oportunidad de experimentar con ellas, primero de manera concreta con algunos ejemplos coloquiales, para después observar algunos otros ejemplos más técnicos. Finalmente, deberemos sentirnos lo suficientemente cómodo para manipularlas y así resolver ejercicios que son puramente técnicos.

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Suponga que A es el conjunto de las personas en el mundo. Si R la relación

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ están casados}\},$$

determina el dominio y rango de R

Ejercicio 2.2. Se realiza un experimento de la siguiente manera: Se tira un dado y se anota el resultado; después se lanza una moneda al aire y se anota el resultado. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{\circ, +\}$. Entonces, $A \times B$ será el conjunto de posibles resultados del experimento, supongase que el experimento se realiza n veces; denotando $\mathcal{E}_i \in A \times B$ como el resultado de la i-ésima realización del experimento. Definimos entonces la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \exists i.(a, b) = E_i\}.$$

- Determine el dominio e imagen de R.
- ¿Cómo interpretarías la imagen de «1» (i.e. $R[\{1\}]$)?.
- ¿Cómo interpretarías la preimagen de «$\circ$» (i.e. $R^{-1}[\{\circ, +\}]$)?

Ejercicio 2.3. Consideremos una base de datos relacional pero interpretada en el marco de la teoría de conjuntos. Sea entonces A un conjunto de números naturales en donde cada elemento representa un cliente, sea también B un conjunto de números naturales en el cada elemento representa un producto que vende la tienda y finalmente, sea R un subconjunto de $A \times \mathcal{P}(B)$ que representa una compra realizada en la tienda. Los conjuntos A, B y R son las tablas de la base de datos, nótese sin embargo que R es en realidad una relación.

- Establezca una relación entre un cliente y un producto.
- ¿Se podrá describir un conjunto de forma tal que sus elementos sean los productos que jamás han sido adquiridos?
- ¿Qué significado se le podrá dar al dominio de R?
- Nótese que la imagen de R es un subconjunto del conjunto potencia de B, por lo que ésta es una familia de conjuntos. Qué significado podrá tener el conjunto
$$\bigcup \operatorname{im}(R).$$
- Suponga que n, m y l son elementos de A. ¿Qué conjunto describiría los productos adquiridos por cualquiera de estos tres clientes?

Ejercicio 2.4. Explica a que se refiere la siguiente relación

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\right\}$$

Ejercicio 2.5. Sean A y B conjuntos. Definimos

$$\langle a,b\rangle = \{\{a,\varnothing\},\{b,\{\varnothing\}\}\}.$$

Demuestra que $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ si y sólo si $a=b$ y $c=d$.

Ejercicio 2.6. Para conjuntos A, B, C y D demuestra que $A \times B \subset C \times D$ si y sólo si $A \subset C$ y $B \subset D$.

Ejercicio 2.7. Demuestra que

$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$$

Referencias

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria.* Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos.* Las Prensas de Ciencias, 2007.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Matemáticas Discretas impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.