Lectura 6: Números complejos

6.1. Ecuaciones y números imaginarios

En 1545, Gerolamo Cardano, un célebre matemático italiano del renacimiento, pública un importante e influyente libro en matemáticas: «*Ars Magna*». El texto recopila métodos de solución no sólo de ecuaciones cúbicas sino cuadráticas. El impacto sobre el álgebra es tal, que 1545 es frecuentemente tomado como el inicio de la matemática moderna. Previo a la publicación de del *Ars Magna*, no existía necesidad alguna de reconocer la existencia de números de la forma

$$2 + 1\sqrt{-1},$$

simplemente se tomaba una clásica posición de tomar ecuaciones en las cuales las soluciones no existen; los griegos, por ejemplo, para negar la existencia de los números negativos e irracionales, afirmaban que las ecuaciones

$$x + 2 = 0$$

y

$$x^2 = 2$$

no tenían solución y la misma aproximación se usaba para afirmar que era imposible obtener soluciones para la ecuación

$$x^2 + 1 = 0.$$

Con las ecuaciones cúbicas, la situación es marcadamente diferente pues cuando las tres raíces de una ecuación cúbica son reales y distintas de cero, el método de Tartaglia-Cardano inevitablemente lleva a raíces cuadradas de números negativos. Aunque el objetivo eran las raíces reales, éstas no podían ser alcanzadas sin entender algo de «*números imaginarios*». Lo imaginario ahora requería ser reconocido, incluso si nuestro único interés eran las raíces reales, pero ¿cómo manipularlo? Recordemos que el bien conocido hecho, que en los números reales se cumple $x^2 \geq 0$, sin importar que número sea x. ¿Cómo entonces es que se reconcilia la idea de un número que resuelva la ecuación $x^2 + 1 = 0$? De manera intuitiva, debemos pasar a la admisión de la existencia de un número «*imaginario*» i que satisfaga $i^2 = -1$. Este nuevo número debe tener interacción con los números reales, por ejemplo, una solución de la ecuación

$$x^2 + 2x + 10 = 0$$

resultaría el número $-1 + 3i$. Esto pide no sólo que reconozcamos la existencia de i, sino de números de la forma

$$a + bi.$$

Al observar con detalle esta forma de números, vemos que está compuesta por dos reales a y b, los cuales existen en "diferentes reinos": el real y el imaginario. Estos números se comportan idéntico a los reales, con el agregado que $i^2 = -1$ por lo que se pueden sumar y multiplicar de la manera típica. Nuestro objetivo se vuelve entonces proveer una descripción completa de estos números, que explique los fenómenos asociados a ellos y por supuesto que haga uso de los objetos conocidos en la teoría de conjuntos.

6.2. Construcción compleja

Para comenzar nuestro estudio de los números complejos, necesitamos definir que es un número complejo con absoluta precisión, lo cual tomará algunas definiciones como preludio a la presentación de un número complejo, el cual, de acuerdo a la sección anterior debe tener algo en común con las parejas de números reales.

Definición 6.1. Sea $\mathbb{R}^2$ el conjunto de todas las parejas de números reales. Sobre este conjunto definimos las operaciones:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

La suma de elementos de $\mathbb{R}^2$ no parece para nada descabellada, es simplemente la suma componente a componente pero el producto parece tener la intención de agobiarnos. Uno podría preguntarse acerca de la razón de no definirla componente a componente. De momento, habrá que aceptarla pese a su falta de atractivo pues nos permite considerar a $\mathbb{R}^2$ como un anillo conmutativo. La prueba del siguiente teorema, como ya es costumbre cuando aparecen expresiones suficientemente malsanas, debe ser proveída en el ejercicio 6.2.

Teorema 6.1. *El conjunto $\mathbb{R}^2$ junto a las operaciones $+$ y $\cdot$ es un anillo conmutativo.*

Definición 6.2. Al conjunto $\mathbb{R}^2$ cuando viene acompañado de la suma y el producto antes descrito se le denota $\mathbb{C}$ y se dice que es *el conjunto de los números complejos*, mientras sus elementos serán llamados *números complejos*.

Vamos realizar ahora una identificación del conjunto de los reales en los números complejos, para esto usaremos el concepto de inmersión descrito en la lectura anterior.

Proposición 6.2. *El conjunto de los números reales se puede sumergir en el conjunto de los números complejos.*

Demostración. Para mostrar la afirmación debemos mostrar que existe al menos una función inyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que además es un homomorfismo. Definamos entonces

$$f(a) = (a, 0).$$

Por su definición y su uso de parejas ordenadas, no es difícil ver que es una función inyectiva. Probaremos entonces que es un homomorfismo, para lo cual se deben cumplir tres cosas.

- $f(1) = (1, 0)$: Lo cual es cierto por la definición de f.

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$: Lo cual es cierto, pues
$$f(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b).$$
- $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$: Lo cual sigue de manera sencilla al tener
$$f(a) \cdot f(b) = (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0) = f(ab).$$

Lo anterior establece a f como una inmersión de anillos y en consecuencia $\mathbb{R}$ se puede sumergir en $\mathbb{C}$ como se afirmó. ∎

El resultado anterior parece extremadamente abstracto, pero en realidad nos faculta a realizar un procedimiento de identificación importante. Lo que estamos definiendo como números complejos, resulta completamente distinto al concepto de números reales, sin embargo existe una copia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, a decir, la imagen de la función descrita en la prueba: $f(a) = (a, 0)$. Es importante notar que no solamente podemos identificar a cada real en dicha imagen, sino que en la imagen, las operaciones de $\mathbb{R}$ se preservan. Visto de otra forma, esto quiere decir que cualquier manipulación que hagamos en $\mathbb{R}$, se puede realizar de igual forma en dicha imagen. Para el álgebra, el conjunto $\mathbb{R}$ y la imagen de f no son distintos en absoluto. Esto nos lleva a dar la siguiente identificación en un proceso llamado *abuso de notación*: Cuando hagamos referencia a un real a, nos referiremos en realidad a la pareja $(a, 0)$ en los complejos, de está forma estableceremos una identidad artificial dada por
$$a = (a, 0).$$
Esto quiere decir por ejemplo que escribiremos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$, solamente no debemos olvidarnos que estas igualdades son artificiales y no caer en el juego de la recursión sin fin. Vamos a establecer ahora *la unidad imaginaria*, definimos
$$i = (0, 1).$$
Presentada de esta forma todo el misticismo del que pueden estar rodeados los «*numeri ficti*» de Cardano desaparece, la unidad imaginaria solo tiene de imaginario el nombre y resulta perfectamente concebible. No sólo eso, volviendo un poco sobre nuestro pasos y usando la identificación anterior,
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$
Lo anterior nos permite describir al conjunto de los números complejos de la siguiente manera:
$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Además, basados en la interpretación como parejas, dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Por último, el ejercicio 6.15 contiene un importante resultado que nos permite ser en extremo pragmáticos al usar la siguiente contención de conjuntos
$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

6.3. Algunas propiedades

Vamos ahora a distinguir algunas propiedades de los números complejos. De a poco vamos a comenzar a hablar de ellos como si de un número conocido se tratara.

Definición 6.3. Para un número complejo $z = a + bi$, definimos *la parte real de z* como

$$\mathrm{Re}(z) = a$$

y *la parte imaginaria de z*

$$\mathrm{Im}(z) = b.$$

La definición anterior nos librará muchas veces de expresar los componentes de un complejo, lo que se traduce en ecuaciones mucho más limpias.

Definición 6.4. Sea $z = a + bi$ un número complejo cualquiera. *El conjugado de z* es el complejo

$$\bar{z} = a - bi.$$

Hay varias cosas que afirmar acerca de los conjugados, la primera resulta en calcular el producto de un complejo con su conjugado:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Si observamos con atención la expresión anterior, podemos darnos cuenta que es un número real positivo y además corresponde la longitud de un vector en $\mathbb{R}^2$; en virtud que los complejos son en realidad $\mathbb{R}^2$ con un poco más de estructura, la siguiente definición cobra sentido.

Definición 6.5. Para un complejo $z = a + bi$, definimos *el módulo de z* como el número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposición 6.3. *Para cualquier complejo z, se tiene*

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Ahora, sabemos también que $\mathbb{C}$ es un anillo, ¿será un campo? En efecto, no es difícil construir un complejo que sea su inverso: si z es un complejo distinto de 0, entonces $|z|$ es también distinto de 0, en ese caso afirmamos que el complejo

$$w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

es el inverso de z, en efecto

$$zw = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

Teorema 6.4. *Cualquier complejo $z \neq 0$ es una unidad y su inverso es*

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

6.4. Una interpretación geométrica

Como hemos propuesto a los complejos como parejas de números reales y hemos proveído definiciones que tienen una naturaleza geométrica, parece un natural dar una interpretación geométrica de estos números. La figura 1 muestra que las partes real e imaginaria corresponden a las coordenadas de un punto en el plano. Esta interpretación es inmediata al ser un complejo una pareja de reales.

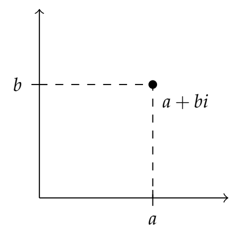

Figura 1: Ejemplo de complejo como un punto del plano.

Es muy natural interpretar el módulo de un complejo como la distancia del origen al punto que representa en el plano y de hecho ésta es la razón por la que el módulo se define de esta forma. Hacemos esto patente en la figura 2.

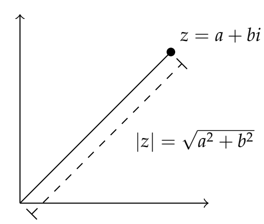

Figura 2: El módulo de un complejo

Por otro lado, los complejos cargan con cierta estructura, por ejemplo los conjugados se pueden ver como la transformación

$$z \mapsto \bar{z}$$

que representa la reflexión sobre el eje real del punto en cuestión. Ésta por supuesto mantiene el módulo del complejo, esto quiere decir que $|z| = |\bar{z}|$, por lo que se puede ver como una transformación rígida. Una ilustración de esto se puede observar en la figura 3.

Una vez interpretados como puntos, podríamos considerar presentar un complejo en coordenadas polares. Sabemos que dado una pareja de números reales (a, b), podemos expresarlos como la pareja (r, θ) de forma que $a = r\cos(\theta)$ y $b = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Esto sugiere que un complejo puede ser descrito también como

$$z = r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta)i.$$

Además, el cambio de coordenadas cartesianas a polares, indica que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$. Por otro lado, los ángulos pueden no ser únicos pero podemos establecer que $\arg(z) = 0$ si $z = 0$ y $\arg(z) = \theta$ siendo θ el unico ángulo con $0 \leq \theta < 2\pi$ que representa a la parejas en coordenadas polares. Lo anterior queda ilustrado en la figura 4.

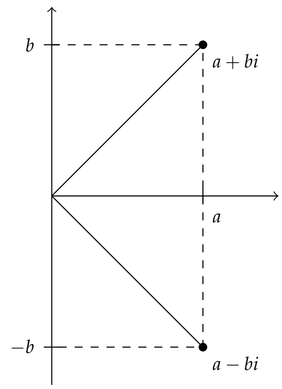

Figura 3: Interpretación geométrica del conjugado

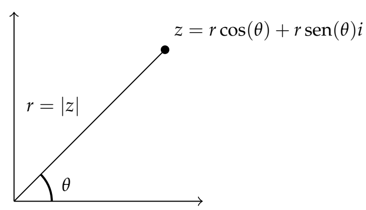

Figura 4: Un complejo en coordenadas polares

Podemos ir un paso adelante y notar que la suma de complejos es idéntica a la suma de vectores, por lo que su interpretación geométrica coincide. El producto, por su definición, es más escurridizo escapando una interpretación similar. Sin embargo, la representación en coordenadas polares resulta bastante útil para mostrar darle un significado: Tomemos $z = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\text{sen}(\theta_1))$ $w = r_2(\cos(\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_2))$ como algunos números complejos distintos de 0, el producto entonces es distinto de 0 y se puede calcular notando que

$$\begin{aligned}\text{Re}(zw) &= r_1r_2\cos(\theta_1)\cos(\theta_1) - r_1r_2\,\text{sen}(\theta_2)\,\text{sen}(\theta_2)\\ &= r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\text{Im}(zw) &= r_1r_2\cos(\theta_1)\,\text{sen}(\theta_2) + r_1r_2\cos(\theta_2)\,\text{sen}(\theta_1)\\ &= r_1r_2\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2).\end{aligned}$$

De estas igualdades podemos concluir que el módulo de zw es r_1r_2 mientras que su argumento es $\theta_1+\theta_2$; en otras palabras, tenemos que

$$zw = r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2) + ir_1r_2\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2).$$

Esto nos permite dar la interpretación mostrada en la figura 5, que indica que el producto de dos complejos, resulta en tener el producto de sus módulos y la suma de sus ángulos.

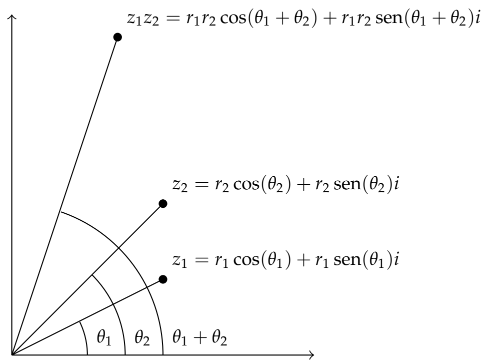

Figura 5: Interpretación del producto complejo.

6.5. Raíces cuadradas

Uno de los resultados más importante acerca de los números reales, por intrascendente que parezca, es la existencia de las raíces cuadradas para cualquier número real no negativo. De hecho, existían al menos dos número reales x tales que $x^2 = a$ para un real no negativo a, sin embargo, bastaba que a fuera negativo para no existiera ni una posibilidad. En los complejos, la situación cambia radicalmente pues para cualquier complejo z existe otro complejo w tal que $w^2 = z$. En particular, y el origen de la discusión, es el caso en que $z = -1$ el cual puede ser resulto tomando $x = i$ pues $i^2 = -1$.

Vamos ahora a dar un método general para obtener las raíces cuadradas de cualquier complejo $z = a + ib$. Supongamos que $w = x + iy$ es una raíz, i.e., $w^2 = z$, entonces

$$(x + iy)^2 = a + ib.$$

Esto se traduce en satisfacer dos ecuaciones:

$$x^2 - y^2 = a$$

y

$$2xy = b,$$

elevando al cuadrado ambas y sumándolas, tenemos

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2$$

de lo que se desprende que la única posibilidad es tener

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

De esto podemos obtener dos ecuaciones más:

$$2x^2 = |z| + a \geq 0$$

y

$$2y^2 = |z| - a \geq 0,$$

de las que debemos concluir que

$$x = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}}$$

y

$$y = \pm\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}.$$

En este punto tenemos cuatro posibilidades de las cuales descartaremos dos, como $2xy = b$, los signos de x y y dependen directamente de b: Si $b \geq 0$, entonces o ambos son no negativos o ambos no positivos, por el contrario si $b < 0$ entonces al menos uno de ellos es negativo. De esta forma, de las cuatro posibilidades originales, obtenemos siempre dos dependiendo del signo de b. Esto en particular quiere decir que cada complejo posee exactamente dos raíces cuadradas.

Un caso particular y que nos debe parecer interesante, resultan los complejos en los que su parte imaginaria es 0 y que su parte real es negativa, i.e, $-a + i0$ para algún a no negativo. Según el procedimiento anterior, si $x + iy$ es una raíz de un número real negativo, debemos tener que $2xy = 0$ esto quiere decir que hay dos opciones o $x = 0$ o $y = 0$, si $y = 0$ estaríamos obligados a tener

$$x^2 = x^2 - y^2 = -a$$

lo cual es ciertamente imposible al asumir x como un real, permitiéndonos concluir que $x = 0$. En ese caso, tenemos la ecuación

$$-y^2 = -a$$

la cual es posible resolver tomando $y = \sqrt{a}$ y $y = -\sqrt{a}$, con los cuales, las raíces son los números complejos $i\sqrt{a}$ y $-i\sqrt{a}$. En muchas ocasiones podemos encontrar escrito $\sqrt{-a}$ para la primera de estas opciones, lo que se traduce en la identidad $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ pero esta notación resulta un poco peligrosa pues asociamos a ésta propiedades y significado que no tienen. Un ejemplo de esto puede encontrarse en el ejercicio 6.13.

El caso de las raíces cuadras es un caso particular de una ecuación cuadrática mucho más general, a decir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

del cual hay una conocida fórmula general para darle solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se nos decía que si el discriminante $d = b^2 - 4ac$ era negativo, la ecuación carecía de solución. Sin embargo, ¡ahora sabemos como lidiar con raíces de reales negativos!, si el discriminante es negativo, digamos $d = -|d|$, entonces las soluciones estarán dadas por

$$x = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|d|}}{2a}.$$

Esto permite concluir que cualquier ecuación cuadrática tendrá a lo más dos soluciones distintas las cuales pueden ser calculadas de manera directa usando el método general que ya conocíamos.

Ejercicios

Ejercicio 6.1. Comprueba que $-1+3i$ y $-1-3i$ son soluciones de la ecuación $x^2+2x+10=0$.

Ejercicio 6.2. Muestra que $\mathbb{R}^2$ junto a las operaciones definidas en 6.1 es un anillo conmutativo.

Ejercicio 6.3. Comprueba que $(a,0)\cdot(b,c)=(ab,ac)$.

Ejercicio 6.4. Demuestra que $i^2=-1$.

Ejercicio 6.5. Realiza las siguiente operaciones :

1. $(3-2i)+(6-4i)$.
2. $(-i)(i)$.
3. $(1+2i)^{-1}$.
4. $(1+i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.
5. $(1+i)/i$.

Ejercicio 6.6. Si $u=1-2i$, $v=-2+3i$ y $w=-1+4i$, calcula lo siguiente:

1. $\overline{uv}-\bar{v}\bar{u}$.
2. $u\bar{v}-\bar{u}\bar{v}+\bar{\bar{w}}$.
3. $(\overline{u+v})w-(u-\bar{v})$.
4. $(\overline{u+v})(\bar{u}+\bar{v})$.

Ejercicio 6.7. Si $x=(a-b)-(a+b)i$ y $y=(a+b)+(a-b)i$ con números reales a y b, calcula xy.

Ejercicio 6.8. Demuestra lo siguiente

1. $\bar{\bar{z}}=z$.
2. $\overline{z^{-1}}=(\overline{z})^{-1}$.
3. $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$.
4. $z-\overline{z}=2\mathrm{Im}(z)i$.

Ejercicio 6.9. Sean z y w números complejos cualquiera. Demuestra que $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ y $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$.

Ejercicio 6.10. Sea $a+bi$ un complejo cualquiera. Encuentra un par de números reales x y y de forma que $z^{-1}=x+yi$. Sugerencia: Ya sabemos como calcular los inversos, basta hacer explícita la fórmula.

Ejercicio 6.11. Sea z un número complejo cualquiera. Muestra que $\mathrm{Im}(z)=0$ si y sólo si $z=\bar{z}$.

Ejercicio 6.12. Sean $a+bi$ y $c+di\neq 0$ números complejos cualquiera. Encuentra un par de números reales x y y de forma que

$$\frac{a+bi}{c+di}=x+yi.$$

Ejercicio 6.13. Considera la siguiente «demostración»:

$$\begin{aligned}
1 &= \sqrt{1}\\
&= \sqrt{(-1)(-1)}\\
&= \sqrt{-1}\sqrt{-1}\\
&= (\sqrt{-1})^2\\
&= -1.
\end{aligned}$$

Ciertamente $-1\neq 1$, ¿Qué salió mal en la prueba?

Ejercicio 6.14. Comprueba que si el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es negativo, entonces los complejos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$$

son ambos soluciones de la ecuación.

Ejercicio 6.15. Considera el conjunto $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}$ definido como

$$\mathbb{R}^* = \{(a, 0) \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestra que:

1. $\mathbb{R}^*$ es cerrado bajo la suma y el producto de $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{R}^*$ es un anillo conmutativo con esas operaciones.
3. $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^*$ son isomorfos.

Referencias

[MB11] Merzbach, Uta C. y Boyer, Carl B.: *A history of mathematics*. John Wiley and Sons, 3ª edición, 2011.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo real al que sirven, es preparar el curso de Álgebra Superior II impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.