Semana 6: Familias de conjuntos

1. Familias y operaciones extendidas

Ya hemos discutido la posibilidad de tener un conjunto como un elemento de otro conjunto, terminando esto en la existencia de conjuntos que están formados exclusivamente por conjuntos. Vamos ahora a considerar esta posibilidad y sus consecuencias.

Definición 6.1. Un conjunto $\mathcal{F}$ se dice *una familia de conjuntos* si todos sus elementos son conjuntos.

Ejemplo. Sea a un número real cualquiera. Consideremos el conjunto de todos los intervalos abiertos de forma que a sea un elemento, i.e.,

$$\{I \subseteq \mathbb{R} \mid I \text{ es un intervalo abierto y } a \in I\}.$$

En ese caso, el conjunto anterior es una familia de conjuntos de números reales.

Ejemplo. Para un conjunto A, el conjunto potencia es una familia de conjuntos. En general, si $\mathcal{F} \subseteq 2^A$ decimos que dicho conjunto $\mathcal{F}$, es *una familia de subconjuntos de A*.

Ejemplo. Recordemos que hemos tratado a las funciones como un conjunto. Eso implica que el conjunto que colecciona a todas las funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ es una familia, i.e, es una familia el conjunto

$$\{f \mid f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}.$$

Una familia en la que todos sus elementos son funciones se denomina *una familia de funciones*, en particular es común llamar al conjunto anterior *la familia de todas las funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$*. En general, para conjuntos A y B cualquiera, podemos tomar *la familia de todas las funciones de A en B*, i.e., el conjunto

$$B^A = \{f \mid f\colon A \to B\}.$$

Vamos ahora a extender las dos operaciones básicas en conjuntos a familias, el proceso será análogo al que ya hemos visto salvo que ahora se involucrarán uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos las cuales pueden ser finitas o no[1].

Definición 6.2. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Se define *la unión de los elementos de $\mathcal{F}$* como el conjunto

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = \{x \mid \exists S \in \mathcal{F}. x \in S\}$$

[1]Más adelante daremos significado a este concepto.

Ejemplo. Considérense los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces, la familia

$$\mathcal{F} = \{A, B\}$$

tiene como unión al conjunto

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = \{1, 2, 3, a, b\}.$$

Es importante observar que el cuantificador existencial de la definición es una forma de generalizar la disyunción. En efecto, consideremos dos conjuntos A y B y la familia $\{A, B\}$ que sólo contiene a estos dos conjuntos como elementos. En ese caso, la unión de dicha familia resulta en todos los elementos x de forma que $x \in S$ para algún $S \in \{A, B\}$, esto quiere decir que colecciona todos los elementos x tales que $x \in A$ o $x \in B$. En otras palabras,

$$\bigcup_{S \in \{A,B\}} S = A \cup B.$$

Ejemplo. Consideremos los conjuntos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{2, 3, 4, 5\}$ y $A_4 = \{1, 5\}$ y la familia

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

entonces la unión de esta es simplemente el conjunto

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Como el ejemplo anterior sugiere, si A_1, A_2, $\ldots$, A_n son conjuntos, entonces la familia

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

tendrá como unión al conjunto

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Sin embargo, una familia puede estar formada por muchos más elementos y este no es el caso más general posible. La definición sin embargo, es capaz de tratar cualquier caso.

Ejemplo. Sea $\delta > 0$ un número cualquiera y sea $[0, 1]$ el intervalo cerrado de 0 a 1. Para cada elemento $x \in [0, 1]$ definimos el intervalo abierto

$$I_x = (x - \delta, x + \delta).$$

En ese caso, consideramos a la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{I} = \{I_x \mid x \in [0, 1]\}.$$

La unión de esta familia es muy particular por satisfacer[2]

$$[0, 1] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I.$$

[2] En un curso de cálculo, una familia de intervalos de esta naturaleza es un ejemplo de *un recubrimiento abierto de [0,1]*. Bajo la misma idea, es siempre posible obtener *un recubrimiento abierto de [a,b]* para cualquier intervalo.

Definición 6.3. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Se define *la intersección de los elementos de $\mathcal{F}$* como el conjunto

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S = \{x \mid \forall S \in \mathcal{F}.x \in S\}$$

Es importante aclarar que una familia puede ser el conjunto vacío sin problema alguno. Sin embargo, siguiendo la definición para ese caso, se deben buscar los elementos del universo que estén en todos los elementos de la familia vacía pero esto resultará cierto para cada elemento del universo. En otras palabras:

$$\bigcap_{S\in\varnothing} S = \mathcal{U}.$$

En general, si no hubiera un universo, una intersección de una familia vacía sería demasiado grande y por esta razón no es deseable siquiera considerar un caso de esta naturaleza. Nosotros lo evitaremos en la medida de lo posible y siempre consideraremos que las intersecciones se realizarán sobre familias no vacías.

Ejemplo. Consideremos los conjuntos de números $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 4\}$, $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A_4 = \{1, 2, 5\}$, junto a la familia

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}.$$

Entonces la intersección de ésta es simplemente el conjunto

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S = \{1, 2\}.$$

De nueva cuenta, si tomamos A_1, A_2, $\ldots$, A_n entonces la familia

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

tiene como intersección al conjunto

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Ejemplo. Para un número real a, consideremos la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{I} = \left\{ \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

En ese caso,

$$\bigcap_{I\in\mathcal{I}} I = \{a\},$$

pues si x pertenece a dicha intersección, entonces

$$x \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero esto significaría que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|x - a| < \frac{1}{n}$$

lo cual sería imposible si $x \neq a$, luego $x = a$. Esto permite concluir que el único elemento de la intersección es el elemento a como afirmamos.

2. Algunas propiedades básicas

Las operaciones sobre familias de conjuntos en realidad se comportan idéntico a las operaciones que involucran un par de conjuntos. Vamos a mostrar que las propiedades son similares aunque no haremos esto de manera exhaustiva dejando algunas de éstas sin mención. El objetivo de la sección es simplemente mostrar el proceso de manipulación en abstracto de una familia de conjuntos. En lo ejercicios, sin embargo, se encuentran propiedades adicionales las cuales es importante conocer..

Teorema 6.1. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Entonces, para cada conjunto $A \in \mathcal{F}$, se cumplen*

$$A \subseteq \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S \qquad y \qquad \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S \subseteq A$$

Demostración. Sólo mostraremos la primera contención, la segunda puede ser probada por analogía. Para mostrarla consideremos un elemento $x \in A$. Como $A \in \mathcal{F}$ esto es suficiente para argumentar que existe un elemento $S = A \in \mathcal{F}$ de forma que $x \in S$, luego por definición,

$$x \in \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S.$$

Esto es suficiente para mostrar la contención que bucábamos. ■

Teorema 6.2. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto cualquiera. Si $A \subseteq B$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces*

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S \subseteq B.$$

Además, si $B \subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$B \subseteq \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S.$$

Demostración. De nueva cuenta sólo mostraremos sólo la primer parte. Supongamos entonces que

$$x \in \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S$$

entonces existe un elemento $A \in \mathcal{F}$ de forma que $x \in A$, por hipótesis se tiene que $A \subseteq B$ al estar en la familia, luego $x \in B$, lo cual es suficiente para mostrar la contención que bucábamos. ■

Teorema 6.3. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Entonces, se satisfacen las igualdades*

$$\left(\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S\right)^c = \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S^c \qquad y \qquad \left(\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S\right)^c = \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S^c.$$

Demostración. Una vez más sólo mostraremos el primer resultado para el cual exhibiremos las dos contenciones. De la primer igualdad debemos observar que la unión a la izquierda es sobre la familia $\mathcal{F}$ pero al lado derecho, la intersección se realiza sobre la familia

$$\mathcal{F}' = \{S^c \mid S \in \mathcal{F}\}.$$

Con esto en mente supongamos que

$$x \in \left(\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \right)^c$$

entonces x no pertenece a dicha unión. En otras palabras, no es cierto que exista un elemento $A \in \mathcal{F}$ de forma que $x \in A$ o, lo que es lo mismo, para todo $A \in \mathcal{F}$ se cumple que $x \notin A$. Esto quiere decir que $x \in A^c$ para todo elemento $A \in \mathcal{F}$ lo cual implica que está presente en todos los elementos de la familia $\mathcal{F}'$ indicando con esto que

$$x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S^c.$$

Esto muestra que,

$$\left(\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \right)^c \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S^c.$$

Supongamos ahora que

$$x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S^c.$$

Entonces, para todo $A \in \mathcal{F}$, se tiene $x \in A^c$ o en otras palabras $x \notin A$. Esto quiere decir que es falso que $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{F}$ lo cual implica, por definición, que se debe tener

$$x \in \left(\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \right)^c.$$

Luego,

$$\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S^c \subseteq \left(\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \right)^c. \qquad \blacksquare$$

3. Índices y familias

Hemos ya considerado la posibilidad de tener conjuntos que sus elementos son otros conjuntos y hemos tenido a bien llamarlos *familias de conjuntos*. Estos conjuntos son especiales y ahora que hemos desarrollado una teoría de funciones, podemos dar un tratamiento simplificado a un conjunto que contiene conjuntos través de introducir el concepto de índices.

Definición 6.4. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Por *una indicación de* $\mathcal{F}$ entenderemos una función sobreyectiva $A\colon I \to \mathcal{F}$. Al conjunto I se le denomina *el índice de la indicación*.

Ejemplo. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{\dots, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \dots\}.$$

Entonces, la función $A\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{F}$, definida por $A(n) = \{n\}$, es sobreyectiva. Esto quiere decir que A es una indicación y su índice es el conjunto de los enteros.

Para simplificar la notación y dejar patente el concepto de índice, nosotros convendremos que en lugar de $A(i)$, escribiremos A_i. Esto nos permite denotar a una familia $\mathcal{F}$ que admita una indicación $A\colon I \to A$ como

$$\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}.$$

La pregunta ahora es si es posible obtener familias no indicadas. Por fortuna esto es imposible: Para cada familia $\mathcal{F}$, la función identidad $1_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es una función sobreyectiva (de entre muchas otras cosas) por lo que resulta en una indicación de $\mathcal{F}$ usando a $\mathcal{F}$ misma como índice. Cuando usemos a la familia misma como índice, podremos expresar a dicha familia como

$$\{A\}_{A\in\mathcal{F}}.$$

Por todo lo anterior, preferiremos expresar a una familia a través de un índice. Sin embargo, habrá ocasiones en que será más sencillo no hacerlo y esto dependerá mucho del contexto.

Ejemplo. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{[1],[2],[3],[4],\dots\}$$

donde $[n] = \{1,2,3,\dots,n\}$. No es difícil verificar que la función $n \mapsto [n]$ es sobreyectiva y por lo tanto podemos considerar al conjunto de números naturales positivos como un índice para la familia. Bajo la representación que hemos dado, la familia se podrá escribir usando el índice como

$$\{[n]\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ejemplo. Podemos considerar a la familia de todas las funciones constantes en $\mathbb{R}$, i.e.,

$$\mathcal{F} = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ es constante}\}.$$

Entonces, podemos definir la función $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{F}$ como $a \mapsto \kappa_a$ donde $\kappa_a(x) = a$ para todo x. No es difícil convencernos que dicha función es sobreyectiva por lo que resulta una indicación de la familia. Usando al conjunto de números reales como índice, podemos entonces represetar a dicha familia de funciones como

$$\{\kappa_a\}_{a\in\mathbb{R}}.$$

4. Operaciones con familias indicadas

Una de las enormes ventajas de tener familias indicadas es que podemos formular las operaciones entre familias citando al índice. Estas operaciones, se pretende, sean extensiones naturales de las operaciones base en conjuntos que involucran siempre dos conjuntos. Aquí, sin embargo, involucrarán tantos conjuntos como se quiera.

Definición 6.5. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. La unión de ésta puede será expresada através del índice utilizando la siguiente notación

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I. x \in A_i\}.$$

De manera similar, la intersección de ésta puede expresarse utilizando la notación

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I. x \in A_i\}.$$

Debe observarse que los índices sólo buscan reformular la notación para familias de conjuntos y los resultados válidos para éstas pueden ser formulados para familias indicadas y como hemos comentado, ésta será nuestra preferencia. Para mostrar como se manipulan las familias indicadas, mostraremos un resultado que ya hemos trabajado para uniones e intersecciones de dos conjuntos.

Teorema 6.4. *Sea $f\colon A \to B$ una función y sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de B. Entonces, son ciertas las igualdades*

$$f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i] \qquad y \qquad f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} B_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Demostración. Mostraremos sólo la primera igualdad usando dos contenciones. Supongamos primero que

$$x \in f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right]$$

entonces,

$$f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$$

lo cual quiere decir que $f(x) \in B_i$ para algún $i \in I$. Esto en particular indica que $x \in f^{-1}[B_i]$ y en consecuencia

$$x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Luego,

$$f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Supongamos ahora que

$$x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Entonces, existe $i \in I$ de forma que $x \in f^{-1}[B_i]$ y por tanto $f(x) \in B_i$. Lo anterior indica que

$$f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$$

lo cual nos lleva directamente a tener

$$x \in f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right].$$

Luego,

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i] \subseteq f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right]. \qquad \blacksquare$$

5. Un ejemplo importante: Particiones de conjuntos

Vamos ahora a considerar un importante ejemplo de una familia de conjuntos e ilustrarlo con diversos ejemplos. Debemos advertir que formularemos este concepto usando familias indicadas, sin embargo, podríamos definirlo sin hacer uso de éstas.

Definición 6.6. Sea A un conjunto cualquiera. Una familia $\{P_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de A se dice *una partición de* A si cumple con las siguientes propiedades:

- $P_i \neq \varnothing$ para cada $i \in I$.
- $P_i \cap P_j = \varnothing$ para cualesquiera $i, j \in I$ con $i \neq j$.
- $\bigcup_{i\in I} P_i = A$.

Ejemplo. Considerando el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, las siguientes familias de subconjuntos de A son particiones de A:

- $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$
- $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$
- $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$
- $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

Esto, por ser todos sus miembros conjuntos no vacíos, no tener elementos en común y resultar la unión de sus elementos el conjunto A. En contraste, las siguientes familias de subconjuntos de A no son particiones:

- $\{\varnothing,\{1,2,3,4\}\}$
- $\{\{1,2,3\},\{3,4\}\}$
- $\{\{1\},\{2,3\}\}$

La primera por contener al menos un elemento vacío, la segunda por existir una pareja con un elemento en común y la tercera al ser su unión diferente al conjunto A.

Ejemplo. Consideremos $P \subset \mathbb{Z}$ el conjunto de los números pares e $I \subset \mathbb{Z}$ el conjunto de los números impares. Entonces la familia

$$\{P, I\}$$

constituye una partición de $\mathbb{Z}$ pues ambos conjuntos son no vacíos, $P \cap I = \varnothing$ al ser todo entero o par o impar pero no ambos y por último, al tener $\mathbb{Z} = P \cup I$.

Ejemplo. La familia de intervalos semi abiertos indicada por $\mathbb{Z}$ y definida como

$$\{[n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

constituye una partición de $\mathbb{R}$. Esto se debe a que ninguno de los intervalos puede ser vacío, además de tener $[n, n+1) \cap [m, m+1) = \varnothing$ siempre que $n \neq m$ y, finalmente, al satisfacer la uníon de dichos intervalos la siguiente igualadad (ejercicio 6.7)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1) = \mathbb{R}.$$

Ejemplo. Para un conjunto A cualquiera, la familia formada por todos los subconjuntos unitarios de A es una partición. En otras palabras, es una partición de A la familia la familia

$$\{\{x\} \mid x \in A\}.$$

De la misma manera, la familia que como único elemento tiene al conjunto A, $\{A\}$, es una partición. Ésta es comúnmente llamada *la partición trivial de* A. Por último, si $S \subset A$ entonces la familia $\{A, A \backslash S\}$ es una partición de A. Lo anterior constituye una prueba que cada conjunto admite al menos una partición, incluso si el conjunto es vacío.

Ejercicios

Ejercicio 6.1. Considera los siguientes conjuntos:

- $A_1 = \{1, 2, 3\}$
- $A_2 = \{2, 3, 4\}$
- $A_3 = \{7, 8, 9, 10\}$
- $A_4 = \{6, 7, 8, 9\}$

Encuentra la intersección y la unión de los elementos en las siguientes familias:

- $\{A_3\}$
- $\{A_1, A_4\}$
- $\{A_1, A_3, A_4\}$
- $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

Ejercicio 6.2. Considera $[n] = \{1, \ldots, n\}$ y la familia indicada por $\mathbb{Z}^+$ definida como

$$\{[n]\}_{n \in \mathbb{Z}^+}.$$

Encuentra la unión y la intersección de dicha familia.

Ejercicio 6.3. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea la familia de intervalos semi abiertos

$$\{[a, a + \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

Encuentra la unión e intersección de dicha familia.

Ejercicio 6.4. Retomando uno de los ejemplos, considera la familia

$$\mathcal{I}_\delta = \{I_x \mid x \in [0, 1]\}$$

donde $\delta > 0$ es un número cualquiera y para un número real x, definimos

$$I_x = (x - \delta, x + \delta).$$

Encuentra la unión e intersección de dicha familia.

Ejercicio 6.5. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. Encuentra una familia de intervalos abiertos, $\mathcal{I}$, de forma que

$$[a, b] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$$

Ejercicio 6.6. Formula el concepto de partición de un conjunto para una familia sin usar índices.

Ejercicio 6.7. Considera la familia de intervalos semi abiertos de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{P} = \{[i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Demuestra que

$$\bigcup_{I \in \mathcal{P}} I = \mathbb{R}.$$

Ejercicio 6.8. Una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ se dice estar *totalmente ordenada* si para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ se cumple que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Demuestra que si $\mathcal{F}$ es una familia totalmente ordenada entonces también lo está la familia

$$\mathcal{F}' = \{S^c \mid S \in \mathcal{F}\}$$

Ejercicio 6.9. Para un conjunto A, el conjunto potencia es una familia de conjuntos. Considerando esto, demuestra que

$$\bigcup_{S \in 2^A} S = A.$$

Ejercicio 6.10. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto cualquiera. Si $B \cap A = \varnothing$ para todo $A \in \mathcal{F}$, demuestra que

$$B \cap \left(\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \right) = \varnothing.$$

Ejercicio 6.11. Termina las pruebas de los teoremas 6.1, 6.2 y 6.3 y reformulalos para familias indicadas de conjuntos. Convéncete que las pruebas no cambian drásticamente y que por ello, podemos darlos por válidos sin mayor problema.

Ejercicio 6.12. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Demuestra las siguientes igualdades

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

y

$$B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i)$$

Ejercicio 6.13. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto cualquiera. Demuestra las siguientes igualdades

$$B \backslash \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \backslash A_i)$$

y

$$B \backslash \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \backslash A_i).$$

Ejercicio 6.14. Termina la prueba del teorema 6.4.

Ejercicio 6.15. Sea $f\colon A \to B$ una función y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de A. Demuestra que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$$

y

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i].$$

Ejercicio 6.16. Usando el contexto del ejercicio anterior, demuestra que si f es inyectiva entonces

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] = \bigcap_{i\in I} f[A_i].$$

Ejercicio 6.17. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias indicadas de conjuntos. Prueba que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

y

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$

Ejercicio 6.18. Sea $\{f_i\colon A_i \to B\}_{i\in I}$ una familia de funciones. Si para todos los $i, j \in I$, tenemos que

$$f_i(a) = f_j(a),$$

para cualquier $a \in A_i \cap A_j$, demuestra que existe una función

$$f\colon \bigcup_{i\in I} A_i \to B$$

de forma que para cada $i \in I$ y cada $a \in A_i$, se cumple $f(a) = f_i(a)$.

Ejercicio 6.19. Sea $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de relaciones de A en B y sea S una relación de B en C. Demuestra que

$$S \circ \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) = \bigcup_{i\in I} (R_i \circ X).$$

Para entregar: Ejercicio 6.9

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[CLRT90] Cárdenas, Humberto, Luis, Emilio, Raggi, Francisco y Tomás, Francisco: *Álgebra Superior*. Editorial Trillas, 1990.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.