Ejercicios para Cálculo Diferencial e Integral I

Actuaría 2016-I
FES Acatlán

1. Prólogo de [Spi92]

1.1. Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1.1. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Ejercicio 1.1.2 (de [?]). Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$.
- $A \subset B$.
- $A \in C$.
- $A \subset C$.
- $A \subset D$.
- $B \subset C$.
- $B \subset D$.
- $B \in D$.
- $A \in D$.

Ejercicio 1.1.3. Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$.
- $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.

Ejercicio 1.1.4. Demuestra que, si $X \subset \varnothing$ entonces $X = \varnothing$.

Ejercicio 1.1.5. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.1.6 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.1.7 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.1.8 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.1.9. Demuestra que $A \backslash B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.10. Demuestra que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.11. Demostrar que

- $\varnothing \cup A = A$.
- $A \cup B = \varnothing$ implica que $A = \varnothing$ $B = \varnothing$.
- $A = A \cap A$.
- $A = A \cup A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$.
- $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

Ejercicio 1.1.12. Demuestra que $A \backslash B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

Ejercicio 1.1.13. Demuestra que $A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Sea A un subconjunto de un conjunto universo $\mathcal{U}$. Se define el complemento de A como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A.$$

Ejercicio 1.1.14. Determinar los conjuntos $\varnothing^c$ y $\mathcal{U}^c$.

Ejercicio 1.1.15. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

Ejercicio 1.1.16. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$

Ejercicio 1.1.17. Demuestra que $A \subset B$ implica $B^c \subset A^c$.

1.2. Propiedades fundamentales de los números

Ejercicio 1.2.1. ¿Qué número es el inverso aditivo del cero?

Ejercicio 1.2.2. ¿Qué número es el inverso multiplicativo del uno?

Ejercicio 1.2.3. Demuestra lo siguiente:

1. Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, $x = 1$.
2. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
3. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
4. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Ejercicio 1.2.4. ¿Dónde esta el fallo en el siguiente argumento? Sea $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y) \\ x + y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.5. Demuestra lo siguiente:

1. Si $b, c \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

2. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

3. Si $a, b \neq 0$, entonces
$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

4. Si $b \neq 0$, entonces
$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

5. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

6. Si $b, c, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

Ejercicio 1.2.6. Demuestra que los inversos aditivos y multiplicativos son únicos.

Ejercicio 1.2.7. Sean a y b un par de números. Demuestra que se cumple uno y sólo uno de los siguientes enunciados:

- $a = b$.
- $a > b$.
- $a < b$.

Ejercicio 1.2.8. Demuestra lo siguiente:

1. Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.
2. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.
3. Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$.
4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
5. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
6. Si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.
7. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
8. Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.
9. Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.
10. Si $a, b \geq 0$, entonces $a^2 < b^2$ implica que $a < b$.

Ejercicio 1.2.9. Demostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Ejercicio 1.2.10. Demuestra lo siguiente:

1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Si $x \neq 0$, entonces
$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$
3. Si $y \neq 0$, entonces
$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|.$$
4. $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

Ejercicio 1.2.11. Demuestra que

$$\text{máx}(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}$$

y

$$\text{mín}(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

Intenta ahora deducir una fórmula para el mínimo y el máximo de tres números.

1.3. Distintas clases de números

Ejercicio 1.3.1. Qué propiedades fundamentales de los números no son válidas para los números naturales.

Ejercicio 1.3.2. Para números $a_1, \ldots, a_n$ y b, demuestre que es válida la siguiente igualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b.$$

Ejercicio 1.3.3. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

(Sugerencia: Recuerde a que es igual la suma de los n primero números).

Ejercicio 1.3.4. Para número enteros n y a cualesquiera, demuestra que es válida la fórmula

$$n \cdot a = \sum_{i=1}^{n} a.$$

Ejercicio 1.3.5. Encuentra una fórmula para $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$.

Ejercicio 1.3.6. Demuestra la validez de la siguiente desigualdad para todo número $n > 1$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i - 1} < n.$$

Ejercicio 1.3.7. Podemos definir el exponente de un número real bajo un número natural de forma recursiva como sigue

- $a^1 = a$,
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Demuestra que

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}.$$

(Sugerencia: Cuidado. Realiza inducción sobre n o m pero no los dos a vez.)

Ejercicio 1.3.8. Definase el producto de los números $a_1, \ldots, a_n$ de manera recursiva como

- $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$,
- $\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1}\right) \cdot a_n$.

Demuestra que

$$\prod_{i=1}^{n} m = m^n.$$

Ejercicio 1.3.9. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números no negativos con la particularidad que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{2}.$$

Demuestra que

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \geq \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 1.3.10. Sea $r \neq 1$ un número real cualquiera. Demuestra por inducción

$$\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r}$$

Ejercicio 1.3.11. Suponga se conocen las propiedades 1 y 4 de los números naturales, pero no se ha hablado de la multiplicación. Se puede definir la multiplicación de manera recursiva como sigue

- $1 \cdot b = b$,

- $(a+1) \cdot b = a \cdot b + b$.

Demuestra que
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ejercicio 1.3.12. Qué propiedades fundamentales de los números no son válidas para los números enteros.

Ejercicio 1.3.13. Qué propiedades fundamentales de los números no son válidas para los números racionales.

Ejercicio 1.3.14. Demuestra que los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ son irracionales.

Ejercicio 1.3.15. Demuestra la validez de la siguiente desigualdad para todo número $n > 1$.
$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} < n.$$

2. Intermezzo: Algunas pruebas por inducción

2.1. Tres desigualdades notables

Ejercicio 2.1.1. En este ejercicio nos convenceremos que el primer paso en la prueba de la desigualdad de las medias es verdadero. Demuestra por inducción sobre n que
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = 1.$$

Ejercicio 2.1.2. En este ejercicios nos convenceremos de uno de los pasos en la prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

1. Sean a, b c y d números cualesquiera. Demuestra que
$$(ac+bd)^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

2. Demuestra que la anterior desigualdad implica que
$$ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}.$$
(Cuidado, hay un paso que puede perderse con facilidad. Recuerda que para cualquier número se tiene que $\sqrt{a^2} = |a|$).

3. Sean $x_1, \ldots, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1}$ números reales. Usa el inciso anterior para concluir que
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2} + |x_{k+1}| \cdot |y_{k+1}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + x_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2 + y_{k+1}^2}$$

2.2. Coeficientes binomiales

Ejercicio 2.2.1. Demuestra que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ejercicio 2.2.2. Usando el teorema del binomio demuestra que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Ejercicio 2.2.3. Usando el teorema del binomio demuestra que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i} = 0$$

3. Fundamentos de [Spi92] (Parte 1)

3.1. Funciones

Ejercicio 3.1.1. Sea $\phi(x) = |x-3| + |x-1|$. Calcula los valores $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(-1)$ y $\phi(-2)$. Determina los valores para los cuales $\phi(t+2) = \phi(t)$.

Ejercicio 3.1.2. Sea $f(x) = x^2$. Determine en cada caso los conjuntos de números reales para los cuales la fórmula es válida.

1. $f(-x) = f(x)$.
2. $f(y) - f(x) = (y-x)(x-y)$.
3. $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$.
4. $f(2y) = 4f(y)$.
5. $f(t^2) = f(t)^2$.
6. $\sqrt{f(a)} = |a|$.

Ejercicio 3.1.3. Sea $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las siguientes fórmulas y determinar para que valores son válidas.

1. $g(-x) = g(x)$.
2. $g(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$.
3. $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$
4. $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$.
5. $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$.
6. $\frac{1}{2+g(x)} = \frac{2-g(x)}{x^2}$.

Ejercicio 3.1.4. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales cualquiera y sea

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

una función. Demuestra que f es un polinomio de grado n de forma tal que $f(a_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 3.1.5. Sea

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

un polinomio de grado $n \geq 1$. Demuestra las siguientes propiedades.

1. Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, entonces $f(x) = x \cdot g(x)$ para algún polinomio g de grado $n - 1$.
2. Para real a, la función dado por $p(x) = f(x + a)$.
3. Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para algún número real a, entonces $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$ para algún g de grado $n - 1$ (Sugerencia: considérese $p(x) = f(x + a)$).

Ejercicio 3.1.6. Encuentra el polinomio p de grado 2 que para el cual se satisface $p(-1) = 3$, $p(1) = 7$ y $p(2) = 15$.

Ejercicio 3.1.7. ¿Para que números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

Ejercicio 3.1.8. Sea A un conjunto de los números reales, define la función

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Encuentre expresiones para $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$ y $\chi_{\mathbb{R}\setminus A}$.

Ejercicio 3.1.9. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$ e impar si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo f es par si $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$, mientras que es impar si $f(x) = x$ o $f(x) = \sin(x)$.

1. ¿Cuándo es $f + g$ una función par? ¿Cuándo es impar?
2. ¿Cuándo es $f \cdot g$ una función par? ¿Cuándo es impar?
3. ¿Cuándo es $f \circ g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

Ejercicio 3.1.10. Demuestre que, si $f \circ g = I$, entonces

1. si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$.
2. cada número b puede escribirse como $b = f(a)$ para algún número a.

Ejercicio 3.1.11. Si f es una función, defina una nueva función $|f|$ mediante la regla $|f|(x) = |f(x)|$, por supuesto el dominio de la nueva función el dominio de f. Si g es otra función, podemos definir las funciones $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ como sigue:

$$\text{máx}(f, g)(x) = \text{máx}(f(x), g(x)),$$
$$\text{mín}(f, g)(x) = \text{mín}(f(x), g(x)).$$

Halla una expresión para $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ en términos de la función derivada $|\cdot|$.

Ejercicio 3.1.12. Encuentra en cada caso polinomios que satisface las condiciones dadas

1. $p(0) = p(1) = p(2) = 1$
2. $p(0) = p(1) = 1$ y $p(2) = 2$.
3. $p(-1) = 3p(0) = 1$ y $p(1) = 3$.
4. $p(-1) = p(0) = p(1)$.

3.2. Gráficas

Ejercicio 3.2.1. Existe una forma muy útil de descrbir a los puntos del intervalo cerrado $[a, b]$ (suponemos que $a < b$).

1. Considere el intervalo $[0, b]$, siendo $b > 0$. Demuestra que si $x \in [0, b]$, entonces $x = tb$ para algún t con $0 \leq t \leq 1$. ¿Cúal es el significado del número t?¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo $[0, b]$?
2. Demuestra que si $x \in [a, b]$ existe un número t con $0 \leq t \leq 1$ tal que $x = (1-t)a + tb$.¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo (a, b)? ¿Cuál es el punto situado a 3/4 del intervalo $[a, b]$?
3. Demuestra recíprocamente, si $0 \leq t \leq 1$, entonces $(1 - t)a + tb \in [a, b]$.
4. Demuestra que los puntos del intervalo abierto (a, b) son aquellos números que se pueden expresar por $(1 - t)a + tb$ con $0 < t < 1$.

Ejercicio 3.2.2. Usa el teorema de aproximación de Lagrange para obtener el polinomio de grado cuando menos 2 que que pasa por los puntos (a, b) y (c, d) con $a \neq c$. Compara el resultado con la construcción visual que se realizó.

Ejercicio 3.2.3. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |x|$. ¿En qué puntos se cruza con la gráfica de la función $g(x) = x^2$.

Ejercicio 3.2.4. El símbolo $\lfloor x \rfloor$ denomina al entero más grande menor que x, por ejemplo $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$, $\lfloor 1{,}1 \rfloor = 1$ $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$. De manera similar , el símbolo $\lceil x \rceil$ denomina al entero más pequeño mayor que x, por ejemplo $\lceil 5{,}5 \rceil = 5$, $\lceil \frac{4}{3} \rceil = 2$ o $\lceil \sqrt{5} \rceil = 3$. Dibuja las gráficas de

1. $f(x) = \lceil x \rceil$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
2. $f(x) = x - \lceil x \rceil$ y $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
3. $f(x) = \lceil \frac{1}{x} \rceil$ y $g(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

Ejercicio 3.2.5. Las gráficas de los polinomios $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibuja una parte suficiente de su gráfica para ver donde se cortan.

Ejercicio 3.2.6. Las gráficas de los polinomios $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ se cortan en dos puntos. Dibuja una parte suficiente de sus gráficas para observar donde se cortan. ¿Puedes determinar en que puntos se cortan?

Ejercicio 3.2.7.

1. Los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2$ son de la forma (x, x^2). Demuestra que cada uno de tales puntos equidista del punto $(0, \frac{1}{4})$ y de la gráfica de la función $g(x) = -\frac{1}{4}$.

2. Dada una recta horizontal L, que es la gŕafica de la función constante $g(x) = c$, y un punto $P = (a, b)$ fuera de de la recta L, de manera que $c \neq b$, demuestra que el conjunto de todos los puntos (x, y) equidistantes a P y a L es la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ejercicio 3.2.8. Para un número $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto

$$B(x : \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}.$$

Demuestra que, si $a < x < b$, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x : e) \subset (a, b).$$

Ejercicio 3.2.9. Sea $f(x) = mx + c$ una función lineal que pasa por los puntos (a, b) y (a', b) con $a \neq a'$. Demuestra que f es una función constante.

Ejercicio 3.2.10. Sean a, b, c y d números tales que $a \neq c$.

1. Calcule el polinomio de Lagrange de grado cuando más 1, que pase por los puntos (a, b) y (c, d).

2. Determine bajo que condiciones el polinomio anterior resulta un polinomio de grado 1.

3. Compare la función que resulta con la función lineal que pasa por los mismos puntos.

Ejercicio 3.2.11. Determina las condiciones para las cuales las gráficas de las funciones $f(x) = mx + b$ y $g(x) = m'x + b'$, resultan en rectas paralelas.

Ejercicio 3.2.12. Sea $n \geq 1$ un número natural. Demuestre que las gŕaficas de las funciones poentenciales $f(x) = x^n$ y $g(x) = x^{n-1}$, son distintas.

Ejercicio 3.2.13. Construye las gŕaficas de las siguientes funciones:

1. $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$.
2. $x + 1/x$.
3. $x^2 + 1/x$.
4. $f(x) = (x-c)^2$ con $c = 1$ y $c = 2$.
5. $2x/(1 + x^2)$.
6. $|x|$.

4. Fundamentos de [Spi12] (Parte 2)

4.1. Límites

Ejercicio 4.1.1. Usando el límite L propuesto, demuestra o refuta que efectivamente se trata del límite hallando $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

1. $\lim_{x\to 0} 1 = 1$.
2. $\lim_{x\to 2} 3 - x = 2$.
3. $\lim_{x\to 7} 2x + 1 = 15$.
4. $\lim_{x\to 0} 2x + 1 = 1$.
5. $\lim_{x\to 2} x^2 - x = 2$.
6. $\lim_{x\to 2} x^2 + x = 12$.
7. $\lim_{x\to 5} x^3 + x^2 - 2x = 140$.
8. $\lim_{x\to 0} x^3 + 2x + 3 = 3$.

Ejercicio 4.1.2. Demuestra que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Ejercicio 4.1.3. Demuestra que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.

Ejercicio 4.1.4. Prueba que, si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Ejercicio 4.1.5. Suponga las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x > 0 \\ x - 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -5 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestra que ni $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$ existen, pero $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x)$ existe y es 0.

Ejercicio 4.1.6. Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(2x)$.

Ejercicio 4.1.7. Demuestra que el límite en 0 de la función $f(x) = 1/x^2$ no existe.

Ejercicio 4.1.8. En este ejercicio se probará que el límite en $1/2$ de la función $f(x) = 1/(2x - 1)$ no existe.

1. Para un número L cualquiera, demuestra que existe un número K tal que
$$|L| + 1 = \frac{1}{2K - 1}.$$
2. Demuestra que $x \leq K$ implica $|f(x)| \geq |L| + 1$.
3. Exhibe un número x tal que $|x - 1/2| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq 1$.
4. Concluye que el límite de la función no existe eligiendo $\varepsilon = 1$.

Ejercicio 4.1.9. Da un ejemplo de una función f para la cual sea falsa la afirmación: si $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x - a| < \delta/2$.

Ejercicio 4.1.10. Da un ejemplo de una función f de forma que $\lim_{x\to a} |f(x)|$ exista pero no $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejercicio 4.1.11. Demuestra que si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ para algún número L entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Ejercicio 4.1.12. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x-a).$$

Ejercicio 4.1.13. Demuestra $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

Ejercicio 4.1.14. Construye un ejemplo para el cual $\lim_{x\to a} f(x^2)$ existe pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejercicio 4.1.15. Suponga que $f(x) \le g(x)$ para todo x. Demuestra que

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x),$$

siempre que los límites involucrados existan.

Ejercicio 4.1.16. Demuestrese que si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces el

$$\lim_{x\to 0} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Podemos generalizar lo anterior. Suponga que para una función h existe un número M tal que

$$|h(x)| \le M,$$

si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, demuestra que

$$\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0.$$

Ejercicio 4.1.17. Sea c un número distinto de 0. Demuestra que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(cx)}{x} = c.$$

Ejercicio 4.1.18. Sea c un número cualquiera. Demuestra que, siempre que exista algunos los límites,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(cx).$$

Ejercicio 4.1.19. Sea c un número distinto de 0. Demuestra que, siempre que exista alguno de los límites,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a/c} f(cx).$$

Ejercicio 4.1.20. Sea $x_0 \in (a,b)$. Si

$$c < f(x) < d$$

para todo $x \ne x_0$ en (a,b) y si existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$, prueba que

$$c \le \lim_{x\to x_0} f(x) \le d.$$

Ejercicio 4.1.21. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.
2. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.
3. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.
4. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.
7. $\lim_{x\to a} \frac{x^3-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.
8. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.
9. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

Ejercicio 4.1.22. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$$

Ejercicio 4.1.23. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$.

Ejercicio 4.1.24. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 3} \frac{4}{(x-3)^2}$.
2. $\lim_{x\to 4} \frac{x+3}{x^2-16}$.
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x+3}$.
4. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$.
5. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2+3}$.
6. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^3}$.
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.
8. $\lim_{h\to \infty} \frac{3x+2}{x^2+3x+1}$.
9. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{3x^2+2}$.
10. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x+1}$.

Ejercicio 4.1.25. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

existe si y sólo si $m \geq n$. (Sugerencia: El límite fácil es

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0;$$

realiza las operaciones necesarias para mostrar que esta es la única posibilidad).

Ejercicio 4.1.26. Demuestra que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h^2)$$

.

Ejercicio 4.1.27. Demuestra que
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x)$$
.

Ejercicio 4.1.28. Demuestra que
$$\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0^+} f(-x)$$
.

Ejercicio 4.1.29. Demuestra que
$$\lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$
.

Ejercicio 4.1.30. Demuestra que
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Ejercicio 4.1.31. Demuestra que
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Ejercicio 4.1.32. Proporciona una definición para las expresiones

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
2. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.
3. $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.
4. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$.

Ejercicio 4.1.33. Demuestra que
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \infty.$$

Ejercicio 4.1.34. Demuestra que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(-x).$$

4.2. Continuidad

Ejercicio 4.2.1. Sea f una función continua en a de forma que $f(a) < 0$. Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $|x - a| < \delta$ entonces $f(x) < 0$.

Ejercicio 4.2.2. Demuestra que las siguiente funciones son continuas en $(-\infty, \infty)$.

1. $f(x) = \text{sen}(ax + b)$.
2. $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$.

Ejercicio 4.2.3. Encuentra los puntos (si es que lo hay) donde las funciones no son continuas.

1. $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3-4x^2+4x}$.

2. $f(x) = x^5 - x + 1$.

3. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x+1}$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \in (-\infty, 3] \\ 2x + 1 & \text{si } x \in (3, \infty) \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (\infty, 0] \\ x & \text{si } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$

Ejercicio 4.2.4. Suponga que una función $|f(x)| < |x|$ para todo x. Demuestra que es continua en 0.

Ejercicio 4.2.5. Suponga que g es continua en 0, $g(0) = 0$ y que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x. Demuestra que f es continua en 0

Ejercicio 4.2.6. Suponga que f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y que f es continua en 0. Demuestra que f es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.2.7. Suponga que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demuestra que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de cero en algún intervalo abierto de a.

Ejercicio 4.2.8. Demuestra que si f es continua en a, entonces $|f|$ es continua en a.

Ejercicio 4.2.9. Demuestra que si f es continua en $\mathbb{R}$ entonces puede escribirse como $f = E + O$ donde E es una función par continua y O es una función impar continua.

Ejercicio 4.2.10. Si f y g son continuas en a, demuestra que $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son funciones continuas en a.

Ejercicio 4.2.11. Si $\lim_{x \to a} g(x) = L$, pero f no es continua en L, demuestra que en lo general es falso

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Sugerencia: considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq L \\ 1 & x = L \end{cases}.$$

Ejercicio 4.2.12. Demuestra que si f es continua en a entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que, si $|x-a| < \delta$ y $|y-a| < \delta$ entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Ejercicio 4.2.13. Suponga que g y h son continuas en a y que $g(a) = h(a)$. Demuestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq a \\ h(x) & \text{si } x < a \end{cases}$$

es continua en a.

Ejercicio 4.2.14. Sean g continua en $[a, b]$ y h continua en $[b, c]$ tales que $g(b) = h(b)$. Demuestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ h(x) & \text{si } x \in (b, c] \end{cases},$$

es continua en $[a, c]$.

4.3. Tres teoremas fuertes

Ejercicio 4.3.1. Para cada uno de los siguientes funciones polinómicas encuentra un entero n tal que $f(x) = 0$ para $n \leq x < n + 1$.

1. $x^3 - x + 3$.
2. $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
3. $x^5 + x + 1$.
4. $4x^2 - 4x + 1$.

Ejercicio 4.3.2. Suponga que f es continua en $[-1, 1]$ y que $x^2 + f(x)^2 = 1$ para todo x. Demuestra que o $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Ejercicio 4.3.3. Suponga que f y g son continuas y que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demuestra que sólo habrá dos posibilidades que $f = -g$ o que $f = g$.

Ejercicio 4.3.4. Sea f el polinomio,

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0.$$

Muestra que para cada número c, existe b de forma que $f(b) > c$ (Sugerencia: ¿Qué pasa con los números $x > \max(1, 2|c|)$?).

Ejercicio 4.3.5. Suponga que f y g es continua en $[a, b]$ y $f(a) < g(b)$ pero $g(b) < f(b)$. Demuestra que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

Ejercicio 4.3.6. Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y que $f(x) \in [0, 1]$ para cada x. Demuestra que $f(x) = x$ para algún x.

Ejercicio 4.3.7. Sea f el polinomio,

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0.$$

Muestra que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Ejercicio 4.3.8. Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y que $f(0) = f(1)$. Sea n un número natural. Encuentra un número x tal que

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Sugerencia: Considere la función

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

4.4. Cotas superiores

Ejercicio 4.4.1. Encuentra la cota superior mínima (si existe) de los siguiente conjuntos

1. $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\left\{x \mid x^2 + x + 1 \geq 0\right\}$.
3. $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\}$.
4. $\left\{x \mid x^2 + x + 1 < 0\right\}$.

Ejercicio 4.4.2. Prueba que el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene una cota superior.

Ejercicio 4.4.3. Prueba que el conjunto $\mathbb{R}$ no tiene una cota superior.

Ejercicio 4.4.4. Define, en analogía con el concepto de cota superior, el concepto de cota inferior de un conjunto de números reales. De igual manera, define el concepto de máximo de un conjunto de número reales.

Ejercicio 4.4.5. Comprueba si el siguiente conjunto tiene máximo

$$\left\{x \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \text{ racional}\right\}.$$

Ejercicio 4.4.6. Podríamos pensar se requiere una propiedad adicional para garantizar la existencia de una máxima cota inferior para cualquier conjunto no vacío de números reales. Muestra que esto no es necesario usando el conjunto

$$-A = \{-a \mid a \in A\},$$

para mostrar que cualquier conjunto A no vacío y acotado inferiormente tiene un cota inferior.

Ejercicio 4.4.7. Supongamos A y B son conjuntos de números reales. Si $x \leq y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$, demuestra que $\sup A \leq \sup B$.

Ejercicio 4.4.8. Supongamos A y B son conjuntos de números reales acotados y no vacíos de números reales. Definamos el conjunto

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Demuestra que

$$\sup A + B = \sup A + \sup B.$$

Ejercicio 4.4.9. Suponga que f está acotada superiormente en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Demuestra que f está acotada superiormente en $[a, c]$.

Ejercicio 4.4.10. Sea f una función continua de forma que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y $f(a) > 0$. Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $x \in [a, a + \delta)$ entonces $f(x) > 0$. ¿Qué sucede si $f(a) < 0$?

Ejercicio 4.4.11. Sea f una función continua de forma que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

y $f(a) > 0$. Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $x \in (a - \delta, a]$ entonces $f(x) > 0$. ¿Qué sucede si $f(a) < 0$?

Ejercicio 4.4.12. Demuestra que si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en $[a, a + \delta)$.

Ejercicio 4.4.13. Demuestra que si $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en $(b - \delta, b]$.

Ejercicio 4.4.14. Supongamos que la función f está definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Si f está acotada superiormente en A, entonces para cualquier $B \subset A$, demuestra que f está acotada superiormente en B.

5. Intermezzo 2: Funciones trigonométricas

5.1. Funciones trigonométricas

Ejercicio 5.1.1. Construye las gráficas de las funciones:

1. $\operatorname{sen}(x^2)$.
2. $\operatorname{sen}(1/x)$.
3. $3 + 2\cos(3x)$.
4. $\operatorname{sen}(x)/(1 + x^2)$.
5. $|\operatorname{sen}(x)|$.
6. $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$.

Ejercicio 5.1.2. Demuestra las siguientes identidades trigonomtricas:

1. $\cos(x - \pi) = \operatorname{sen}(x)$.
2. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.
3. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.

5.2. Coordenadas polares

Ejercicio 5.2.1. Construye las gráficas en coordenadas polares de las siguientes funciones.

1. $f(\theta) = \theta$.
2. $f(\theta) = \pi/\theta$.
3. $f(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))$.
4. $f(\theta) = 10\operatorname{sen}(3\theta)$.
5. $f(\theta) = 36\operatorname{sen}(2\theta)$.
6. $f(\theta) = 2\operatorname{sen}(4\theta)$.

Ejercicio 5.2.2. Comprueba que la gráfica en coordenadas polares de la función $f(\theta) = 1$ es la circunferencia de radio 1.

Ejercicio 5.2.3. Construye una expresión para la distancia en coordenadas polares. En otras palabras, para dos puntos en coordenadas polares (r_0, θ_0) y (r_1, θ_1), defina la distancia entre ellos de manera que esta noción corresponda con la que hemos definido en coordenadas cartesianas.

Ejercicio 5.2.4. Construye una función de forma que su gráfica en coordenadas polares resulta la elipse con focos $(-c, 0)$ $(c, 0)$ y excentricidad $2a$.

6. Derivadas e Integrales de [Spi12]

6.1. Derivadas

Ejercicio 6.1.1. Demuestra que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}.$$

Ejercicio 6.1.2. Sea $L = \{(x, y) \mid y = mx + b\}$. Si $(x_0, y_0) \in L$, demuestra que $(x_0 + 1, y_0 + m) \in L$.

Ejercicio 6.1.3. Calcula la derivada de $f(x) = x^3$. ¿En qué puntos es diferenciable?

Ejercicio 6.1.4. Demuestra que, si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ para $x \neq 0$. Además muestra que la recta tangente a f en $a \neq 0$ sólo corta a la gráfica de f en ese punto.

Ejercicio 6.1.5. Demuestra que, si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(x) = -2/x^3$ para $x \neq 0$.

Ejercicio 6.1.6. Sea $S_n(x) = x^n$. Deduciremos una fórmula para S_n'.

1. Encuentra $S_3'(x)$.
2. Observa que $S_1'(x) = 1$, $S_2'(x) = 2x$ y el resultado obtenido para S_3'. Encuentra una fórmula para S_n'.
3. Recuerda que

   $$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} y^i.$$

   Usa este hecho para calcular $(x+h)^n - x^n$ y comprobar la fórmula obtenida en el paso anterior.

Ejercicio 6.1.7. Encuentra f' si $f(x) = \lceil x \rceil$.

Ejercicio 6.1.8. Supongamos que f es diferenciable en todo punto. Si tomamos $g(x) = f(x + c)$, demuestra que $g'(x) = f'(x + c)$. En contraste, si $g(x) = f(cx)$ demuestra que $g'(x) = c \cdot f'(cx)$.

Ejercicio 6.1.9. Sea f diferenciable en a y sea L la recta tangente de f en a. ¿Es posible encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - L(x)| > 0$?

Ejercicio 6.1.10. Encuentra f'' para las funciones:

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = (x-3)^3$

Ejercicio 6.1.11. Sea $S_n(x)$. Encontraremos una fórmula para las derivadas de orden superior de S_n, para $0 \leq k \leq n$ demuestra que

$$S_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Ejercicio 6.1.12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Demuestra que $f^{(n-1)}$ existe pero que $f^{(n)}(0)$ no existe.

6.2. Diferenciabilidad

Ejercicio 6.2.1.

6.3. Significado de la derivada

Ejercicio 6.3.1. Hallar los extremos (máximos y mínimos), si es que los hay, de las siguientes funciones.

1. $x^2 - 2x + 3$.
2. $(1/3)x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.
3. $(x-2)(3-x)/x^2$.
4. $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.
5. $\operatorname{sen}(x) - 2x$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.
6. $x/(1+x^2)$.
7. $\operatorname{sen}(3x) - 3\operatorname{sen}(x)$.
8. $(x-1)/(x+1)$.

Ejercicio 6.3.2. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

1. $x + 1/x$.
2. $x + 3/x^2$.
3. $x^2/(x^2-1)$.
4. $1/(1+x^2)$.

Ejercicio 6.3.3. Hallar el triángulo rectángulo con área máxima cuya hipótenusa es h.

Ejercicio 6.3.4. Sea (x_0, y_0) una pareja de números reales de forma que ambos sean positivos. Encuentra una recta que pase por este punto y que cruce ambos ejes formando un triángulo con área mínima.

Ejercicio 6.3.5. Sea (x_0, x_1) un punto en el plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$.

1. Encuentra el número y tal que la distancia de (x_0, x_1) a $(y, f(y))$ sea la mínima posible. Ten en cuenta hacer mínima esta distancia es lo mismo que hacer mínimo el cuadrado de ésta.

2. Concluye que la recta que pasa por los puntos (x_0, x_1) y $(y, f(y)))$ es perpedicular a L. Sugerencia: Compara las pendientes.

3. Encuentra la distancia de (x_0, x_1) a L, i.e., la distancia de (x_0, x_1) a $(y, f(y)))$.

Ejercicio 6.3.6. Demostrar que la suma de un número positivo y su inverso multiplicativo es por lo menos 2.

Ejercicio 6.3.7. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, encuentra el de menor superficie.

Ejercicio 6.3.8. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales. Demuestra que el número x para el que la suma de los cuadrados de los errores

$$(x_1 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2$$

es el mínimo, resulta ser

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Ejercicio 6.3.9. Demuestra que si $f'(x) \geq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.

Ejercicio 6.3.10. Hallar todas las funciones tales que

1. $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$.

2. $f''(x) = x^3$.

3. $f'''(x) = x + x^2$.

Ejercicio 6.3.11. Supóngase que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demostrar que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

Ejercicio 6.3.12. Demostrar que si

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces existe un número $c \in [0, 1]$

$$a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n = 0.$$

Ejercicio 6.3.13. Supóngase que f es $n-$diferenciable y que $f(x) = 0$ para $n+1$ diferentes valores de x. Demuestra que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x.

Ejercicio 6.3.14. Sean $a_1, \ldots, a_{n+1}$ puntos arbitrarios de $[a, b]$ y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - a_i).$$

Supóngase que f es $n+1$-diferenciable y que p es un polinomio de grado menor o igual que n tal que $p(a_i) = f(a_i)$. Demostrar que para todo x de $[a, b]$ existe un número c de $[a, b]$ tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Sugerencia: Considera la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)]$$

y aplica el ejercicio anterior mostrando que ésta anula en $n+2$ puntos distintos de $[a, b]$.

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* Editorial Reverté, 1984.

[Dem66] Demidovich, B., et. al.: *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Editorial MIR, 1ª edición, 1966.

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1.* Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[KKCS89] Kudriávtsev, L. D., Kutásov, A. D., Chejlov, V. I. y Shabunin, M. I.: *Problemas de análisis matemático.* Editorial Mir, Moscú, 1989.

[Spi92] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 2ª edición, 1992.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.