

Semana 5: La composición como una operación

1. Tipos de funciones

De manera intuitiva, nos referimos por inversa de una función a otra función que deshace los cambios hechos por la función original, a condición que esto sea posible. Se pueden caracterizar completamente las funciones que poseen determinadas inversas con tres tipos de funciones relativamente simples

Definición 5.1. Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Diremos que f es *inyectiva* si para cualesquiera elementos $a \in A$ y $a' \in A$, la igualdad $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.

Es posible interpretar la definición de una función inyectiva expresando por contraposición la definición, i.e., si $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$. Esto nos permite afirmar que una función es inyectiva si y sólo si a elementos distintos les corresponden imágenes distintas.

Ejemplo. Sea $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ una función. Si definimos f por $f(n) = n + 1$, entonces $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 4$. Al ser todas las imágenes distintas, la función f , así definida, resulta inyectiva. En contraste, si definimos $f(n) = (n - 2)^2$, entonces $f(1) = 1 = f(3)$ lo que permite concluir que f no es inyectiva pues al menos a un par de elementos distintos les corresponde la misma imagen.

Definición 5.2. Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Diremos que f es *sobreyectiva* si para cada elemento $b \in B$, existe $a \in A$ de forma que $f(a) = b$.

De acuerdo con la definición del rango de una función, $\text{im}(f) \subseteq B$ sin importar cual función f tengamos. Si además f es sobreyectiva, debemos notar que todo elemento $b \in B$ resulta un elemento del rango, implicando entonces la contención $B \subseteq \text{im}(f)$. En otras palabras, una función f es sobreyectiva si y sólo si $\text{im}(f) = B$. Esto nos permite interpretar las funciones sobreyectivas como aquellas en que ningún elemento del contradominio escapa del rango.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n + 1$. Es sencillo afirmar que la función f es sobreyectiva: Para cada entero m , el entero $m - 1$ satisface $f(m - 1) = m$. En contraste, si tomamos la función $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida con la misma regla, su rango resulta $\text{im}(g) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mostrando que hay un elemento en su contradominio fuera del rango. En consecuencia, g no es sobreyectiva.

Es importante mencionar que las condiciones impuestas a las funciones inyectivas y sobreyectivas son independientes una de otra. Esto quiere decir que existen funciones inyectivas que no son sobreyectivas y viceversa.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ una función definida por $f(n) = |n|$, donde $|n|$ es el valor absoluto de n . Es inmediato verificar que f es sobreyectiva, pues para cada natural n , $|n| = n$. Por otro lado, la función satisface $f(-1) = 1 = f(1)$ mostrando con esto que no es inyectiva. La función f constituye un ejemplo de una función sobreyectiva pero no inyectiva.

Ejemplo. Sea $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función definida por $g(n) = n + 1$. Hemos mostrado ya, que g no es sobreyectiva. Sin embargo, g resulta inyectiva pues si $g(n) = g(m)$, entonces $n + 1 = m + 1$ con lo cual $n = m$. En ese caso, la función g constituye un ejemplo de una función que es inyectiva pero no sobreyectiva.

Teorema 5.1. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones.

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
2. Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.
3. Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Demostración. Para probar la primer parte del teorema supondremos f y g inyectivas. Ahora, supongamos que a y a' son elementos de A que satisfacen

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a').$$

Lo anterior, sabemos que es lo mismo que $g(f(a)) = g(f(a'))$. Pero al ser g inyectiva, entonces $f(a) = f(a')$; y de la misma forma al ser f inyectiva, tenemos $a = a'$. Lo anterior prueba que $g \circ f$ es también inyectiva como se deseaba.

Para la segunda parte, supondremos f y g suprayectivas. Deseamos mostrar que para todo $c \in C$, existe un elemento a dentro de $\text{dom}(g \circ f)$ de forma que $c = (g \circ f)(a)$. En efecto, como g es suprayectiva, existe un elemento b dentro de $\text{dom}(g)$, de forma que $c = g(b)$. También, al ser f suprayectiva, existe un elemento a dentro de $\text{dom}(f)$, de forma que $b = f(a)$. Basta entonces afirmar que

$$\begin{aligned} c &= g(b) \\ &= g(f(a)) \\ &= (g \circ f)(a), \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $g \circ f$ es suprayectiva como se deseaba.

La tercera parte es un resultado inmediato de las anteriores. ■

2. Inversas laterales

Recordemos ahora que hemos interpretado a las funciones inyectivas como aquellas que no repiten elementos. En ese sentido, parece natural que podamos deshacer los cambios que una función realiza a un conjunto observando el único elemento del cual provienen. Esta idea intuitiva es la base del siguiente teorema.

Teorema 5.2. Sea $f: A \rightarrow B$ una función con $B \neq \emptyset$. Entonces, f es inyectiva si y sólo si existe una función $g: B \rightarrow A$ de forma que $g \circ f = 1_A$.

Demostración. Supongamos que la función f es inyectiva y supongamos que B es un conjunto no vacío con $b_0 \in B$. Para un elemento b de la imagen de f , existe al menos un elemento a en el conjunto A de forma que $f(a) = b$, además, como f es una función inyectiva, para cualquier elemento a' que cumpla $f(a') = b$, se debe tener $a' = a$. En otras palabras para cada b existe un único elemento a de forma que $f(a) = b$. Definimos entonces la función $h: \text{im}(f) \rightarrow A$ tomando $h(b) = a$ de forma que $f(a) = b$. Podemos extender esta regla a todo el conjunto B definiendo la función $g: B \rightarrow A$ como

$$g(b) = \begin{cases} h(b) & \text{si } b \in \text{im}(f) \\ b_0 & \text{si } b \notin \text{im}(f) \end{cases}.$$

En ese caso es inmediato que $g(f(a)) = a$ por lo que $g \circ f = 1_A$.

Supongamos ahora que existe una función $g: B \rightarrow A$ de forma que $g \circ f = 1_A$. Si $f(a) = f(a')$ entonces

$$a = g(f(a)) = g(f(a')) = a',$$

de lo que podemos concluir que f es una función inyectiva como deseábamos. ■

El teorema anterior revela un tipo de inversa asociada a las funciones inyectivas. Precisamos ahora en que sentido las funciones inyectivas son invertibles.

Definición 5.3. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$ funciones. La función g se dice *una inversa por la izquierda de f* si $g \circ f = 1_A$.

Bajo la anterior definición, las funciones inyectivas son aquellas que poseen una inversa por la izquierda y esta propiedad caracteriza por completo este tipo de funciones. Sin embargo, la existencia de una inversa por la izquierda no garantiza su unicidad.

Ejemplo. Ya hemos mostrado que la función $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(n) = n + 1$ es inyectiva. Siguiendo la prueba del teorema anterior, podemos definir la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

mostrando que $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$. Podemos de igual forma definir $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como

$$h(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

de manera que satisface $h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$. Sin embargo, $f \neq h$, mostrando que las inversas por la izquierda no son necesariamente únicas.

De manera similar a las funciones inyectivas, las funciones suprayectivas resultan la operación que deshace la acción de otra función. Precisemos esta observación en el siguiente teorema.

Teorema 5.3. Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Entonces, f es suprayectiva si y sólo si existe una función $g: B \rightarrow A$ de forma que $g \circ f = 1_A$

Demostración. Supongamos que f es suprayectiva. Entonces, para cada elemento b , la imagen inversa $f^{-1}[\{b\}]$ es no vacía. Con esto en mente, definimos $g: B \rightarrow A$ de forma que para cada b elegimos $g(b)$ como un elemento en el conjunto $f^{-1}[\{b\}]$. En ese caso, $f(g(b)) = b$ lo cual implica $f \circ g = 1_B$.

Supongamos ahora que existe una función $g: B \rightarrow A$ de forma que $f \circ g = 1_B$. Entonces para cada elemento b del conjunto B tomamos $a = g(b)$ el cual cumple que

$$f(a) = f(g(b)) = b.$$

Lo anterior implica que la función f es suprayectiva como buscábamos. ■

Como en el caso de las funciones inyectivas, el teorema anterior advierte sobre un tipo especial de inversas asociado a las funciones suprayectivas.

Definición 5.4. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$ funciones. La función g se dice *una inversa por la derecha de f* si $f \circ g = 1_B$.

Ejemplo. Hemos mostrado ya que la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(n) = |n|$ es suprayectiva. Usando la prueba del teorema anterior, podemos proponer una función $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ que resulte su inversa tomando $g(n) = -n$. De igual forma podemos tomar $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiendo $h(n) = n$. Ambas cumplen $f \circ h = 1_A = f \circ g$ pero $g \neq h$, mostrando con esto que las inversas por la derecha no son únicas.

3. Inversas bilaterales

En ese punto, podemos notar que las funciones que admiten inversa por la izquierda o por la derecha no son las funciones que buscamos llamar invertibles. Ambas presentan al menos una deficiencia insuperable (la unicidad) por lo que debemos presentar una alternativa.

Lema 5.4. Sean $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ y $h: B \rightarrow A$ funciones. Si $g \circ f = 1_A$ y $f \circ h = 1_B$, entonces se cumple la igualdad $g = h$.

Demostración. La prueba es una simple observación,

$$\begin{aligned} g &= g \circ 1_B \\ &= g \circ (f \circ h) \\ &= (g \circ f) \circ h \\ &= 1_A \circ h \\ &= h. \end{aligned}$$

Esto muestra la igualdad entre las funciones indicadas. ■

El lema anterior, descubre una interesante propiedad acerca de funciones que admiten al mismo tiempo una inversa por la izquierda y una por la derecha: Las inversas coinciden. Además, para una función de este tipo no pueden existir dos inversas izquierdas o dos inversas derechas distintas. Esto vuelve a este tipo de funciones nuestros candidatos a funciones invertibles.

Definición 5.5. Una función $f: A \rightarrow B$ se dice *invertible* si existe una función $g: B \rightarrow A$ de forma que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Toda nuestra discusión anterior puede ser resumida en el siguiente teorema que es probablemente uno de los más importantes resultados en la teoría de funciones.

Teorema 5.5. *Una función es biyectiva si y sólo si es invertible.*

Demostración. Sea $f: A \rightarrow B$ una función cualquiera y supongamos que es biyectiva. En ese caso, existen funciones $g: B \rightarrow A$ y $h: B \rightarrow A$ de forma que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ h = 1_B$. Según el lema anterior $g = h$ y debemos concluir entonces que f es invertible. Si suponemos ahora que f es invertible, entonces f admite inversa tanto por la izquierda como por la derecha f debe ser tanto inyectiva como suprayectiva y en consecuencia biyectiva. Esto termina la prueba. ■

Podemos volver sobre nuestros pasos para observar lo natural del resultado anterior. Si interpretamos a una función biyectiva como una función que no repite valores y que agota su contradominio entonces es posible deshacer los cambios efectuados por f , esa posibilidad es lo que indica la definición de función invertible.

Ejemplo. Sea a un número entero cualquiera. Definimos la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como $f(n) = n + a$. En ese caso, la función $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $g(n) = n - a$ resulta la inversa de f . Esto prueba en particular que f es invertible y por tanto biyectiva.

Terminamos esta sección realizando una aclaración que debe parecer en este punto exageradamente obvia pero de la que no hemos hecho mención.

Definición 5.6. Sea $f: A \rightarrow B$ una función invertible. La inversa de f es entonces la única función $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Ejercicios

Ejercicio 5.1. Para cada una de las siguientes funciones $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, determina si es inyectiva o sobreyectiva. En caso de ser ambas (biyectiva), calcula su inversa.

- $f(m) = 2m.$
- $f(m) = m^3 - m.$
- $f(m) = 2m + 1.$
- $f(m) = m^{m+1}.$

Ejercicio 5.2. Encuentra dos funciones f y g de forma que $g \circ f$ es inyectiva pero g no lo es.

Ejercicio 5.3. Encuentra dos funciones f y g de forma que $g \circ f$ es sobreyectiva pero f no lo es.

Ejercicio 5.4. Sean f y g funciones de forma que $g \circ f$ es inyectiva. Demuestra que f es inyectiva.

Ejercicio 5.5. Sean f y g funciones de forma que $g \circ f$ es sobreyectiva. Demuestra que f es sobreyectiva.

Ejercicio 5.6. Sea $f: A \rightarrow B$ una función y sean además $F, G: 2^A \rightarrow 2^B$ las funciones definidas por $F(S) = f[S]$ y $G(U) = f^{-1}[U]$. Demuestra que

1. Si f es sobreyectiva, entonces $F \circ G = 1_{2^B}$.
2. Si f es inyectiva, entonces $G \circ F = 1_{2^A}$.

Ejercicio 5.7. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Demuestra que una función $f: A \rightarrow A$ es biyectiva si es o inyectiva o sobreyectiva.

Ejercicio 5.8. Sea $f: A \rightarrow B$ y sean S y U subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar

- $f^{-1}[B \setminus U] = A \setminus f^{-1}[U]$.
- f es sobreyectiva si y sólo si $B \setminus f[S] \subseteq f[A \setminus S]$.
- f es inyectiva si y sólo si $f[A \setminus S] \subseteq B \setminus f[S]$.

Para entregar: Ejercicios 5.2 y 5.3
--

Referencias

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objetivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.

El contenido original que aparezca en estas notas (si es que lo hay), se distribuye bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). ©Eduardo Antonio Gomezcaña Alanis.