De una (y sólo una) demostración

18 de agosto de 2015

El ejercicio

He aquí la "notable" prueba del ejercicio 1.1.7 del curso. Un buen momento para describir que esperamos que sea una demostración y repetir (incluso hasta el cansancio) los detalles que conforman dicha demostración. Comencemos con el enunciado del ejercicio.

Ejercicio. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

La primera acotación proviene del lenguaje en uso, el enunciado anterior contiene la frase «demuestra». Cuando algo se pide como demostración, no se pregunta si el hecho es cierto o falso, sino se da por verdadero y se exige proveer la razón de su veracidad (sí, «demuestra» es bastante autoritario). En otras palabras se nos pide mostrar la secuencia de pasos lógicos que forzosamente harán el enunciado cierto. En nuestro caso, el enunciado que debemos mostrar incondicionalmente cierto es:

> «Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$».

El primer paso antes de demostrar algo, es identificar qué se debe demostrar. En esta ocasión, esto corresponde a una implicación. Para mostrar una implicación debemos asumir como cierto el antecedente de la proposición; así, en nuestro caso particular debemos asumir como cierto lo siguiente:

$$A \in \mathcal{F}.$$

Damos entonces como hipótesis que el conjunto A es uno de los miembros de la familia de conjuntos $\mathcal{F}$. Sólo por comodidad llamemos a esto *hipótesis 1.* Ahora, lo que perseguimos es afirmar como verdadero (por supuesto considerando la hipótesis 1) al enunciado

$$A \subset \bigcup \mathcal{F}.$$

Usando la definición de subconjunto, mostrar lo anterior como verdadero significa mostrar para cualquier elemento x, que éste satisface

$$x \in A \to x \in \bigcup \mathcal{F}.$$

De nueva cuenta perseguimos mostrar una implicación. Para demostrarla, comenzaremos simplemente asumiendo que $x \in A$, uno cualquiera, sin restricción alguna. Llamemos a esto *hipótesis 2*.

Intentemos decidir ahora a que conjunto debe pertenecer x para obtener un resultado satisfactorio. Debido a la implicación, debemos intentar mostrar que x pertenece a la unión de la familia $\mathcal{F}$. Pero x pertenecerá a la unión de la familia $\mathcal{F}$ si y sólo si x satisface

$$\exists Y. Y \in \mathcal{F} \wedge x \in Y.$$

Lo anterior es simplemente consecuencia de la definición de la unión de una familia, la cual afirma que

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists Y. Y \in \mathcal{F} \wedge x \in Y\}.$$

Por tanto debemos encontrar un conjunto en la familia $\mathcal{F}$ de forma que ese conjunto contenga como elemento a x. Una pregunta muy natural debe ser: «¿Qué conjuntos conocemos son parte de $\mathcal{F}$?» Por un lado la familia se toma de manera arbitraria, sin embargo la hipótesis 1 nos describe un conjunto que forma parte de esta familia: El conjunto A (¡de manera explícita no conocemos a ningún otro conjunto en $\mathcal{F}$!)

Con esta información podemos proceder a preguntar si A será un conjunto que puede resolver nuestro problema. Veamos. Por hipótesis 1, $A \in \mathcal{F}$; y por hipótesis 2, $x \in A$. Esto simplemente quiere decir que el elemento x satisface

$$A \in \mathcal{F} \wedge x \in A.$$

¡Entonces la proposición que resulta de sustituir Y por A en la expresión

$$Y \in \mathcal{F} \wedge x \in Y$$

es cierta! Esto afirma que, en efecto, x satisface

$$\exists Y. Y \in \mathcal{F} \wedge x \in Y$$

pues al menos una sustitución de Y por un conjunto (¡el conjunto A!) resulta cierta. Debemos entonces convencernos (de nuevo, por definición) que lo anterior implica

$$x \in \bigcup \mathcal{F}.$$

Esto prueba que en verdad, para cualquier $x \in A$, $x \in \bigcup \mathcal{F}$. Así, por la definición de subconjunto, estaremos facultados a concluir que $A \subset \bigcup \mathcal{F}$; lo cual se logró asumiendo que $A \in \mathcal{F}$. Basta entonces notar que lo anterior significa sencillamente que

$$A \in \mathcal{F} \rightarrow A \subset \bigcup \mathcal{F}.$$

Lo cual es exactamente lo que deseábamos demostrar. $\square$

Algunos comentarios

No se puede dar, sin abstraer de manera visceral la lógica, un concepto general de demostración. Sin embargo, la experiencia nos enseña a obtener y distinguir demostraciones de determinados enunciados. Una demostración, por un lado no admite particularidades a menos que éstas se den como hipótesis, por otro es un conglomerado de pasos donde se desarman postulados y definiciones. En este curso, no propondremos teoría axiomática alguna por lo que no tendremos oportunidad de postular nada; librados de esto, deben aprenderse (¡con precisión absoluta!) todas las definiciones que se presenten, pues de ellas dependerá en mucha mayor medida el "aprender a demostrar".