Semana 4: Funciones polinomio y trigonométricas

1. Definiciones

Vamos a tomar una dirección contraria a [Spi12]. En el texto, se presenta una noción primitiva de función la cual se usa para exhibir algunas de sus propiedades elementales, siguiendo con una basta cantindad de ejemplos y finalizando con la definición formal. Aquí conseguiremos transitar de una definición formal a la intuición. Esto no quiere decir que no se deba leer el capítulo 4 de [Spi12]. Comenzamos con la definiciones presentadas en dicho capítulo.

Definición 4.1 (versión intuitiva)**.** Una función es una regla que asigna a cada elemento de un cierto conjunto de números reales otro número real.

Definición 4.2 (versión formal)**.** Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a la colección, entonces $b = c$.

En ningún punto del texto se aclara cual es el significado de una pareja ordenada. Vamos a explicar con cierta precisión a que se refiere.

Definición 4.3. Sea a y b números reales cualesquiera. Definimos *la pareja ordenada de a y b* como el conjunto

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Proposición 4.1. *Sean a, b, c y d números reales cualesquiera. Entonces, $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*

Demostración. Comencemos suponiendo que $(a, b) = (c, d)$, entonces

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Debemos notar que el conjunto al lado izquierdo de la igualdad contiene a los conjuntos $\{a\}$ y $\{a, b\}$ los cuales tienen como único elemento en común al número a; de la misma forma, el conjunto a la derecha de la igualdad contiene dos conjuntos que contiene como único elemento en común al número c, una vez establecida la igualdad, el argumento anterior nos permite afirmar que $a = c$ y concluimos que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}.$$

Para probar $b = d$, distinguiremos dos casos. Supongamos primero que $b = a$. Si esto esto es cierto, entonces $\{a\} = \{a, b\}$ por lo que tenemos que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$$

y por tanto

$$\{\{a\},\{a,d\}\} = \{\{a\}\}.$$

Por igualdad de conjuntos, debemos tener que $\{a\} = \{a,d\}$ y por tanto $a = d$, en otras palabras $b = a = d$ tal como deseábamos. Supongamos ahora lo contrario, i.e. $b \neq a$, entonces b sólo pertenece a $\{a,b\}$ pero no a $\{a\}$. Debemos tener en ese caso que b pertenece a $\{a,d\}$ y como $b \neq a$ debe ser $b = d$, justo como buscábamos.

Si suponemos que $a = c$ y $b = d$ es inmediato admitir que las parejas (a,b) y (c,d) son iguales desde el punto de vista de conjuntos. ■

Debe preocuparnos poco si se entiende del todo el concepto de pareja ordenada en conjuntos. Lo importante es entender el significado de las parejas ordenadas y éste se encuentra explicado en el enunciado de la proposición 4.1: Son objetos que tienen dos elementos, primero y segundo componente, y su igualdad está determinada cuando el primer componente de una pareja coincide con el primero de otra y el segundo de una con el segundo de otra.

Desde el punto de vista de conjuntos, podríamos coleccionar todas las parejas de números reales. De este proceso resulta el conjunto de todas la parejas ordenadas de números reales al cual se le denota como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o, de manera simplificada como $\mathbb{R}^2$. Estamos ahora en posición de aclarar que una pareja de números (a,b) es simplemente un elemento del conjunto $\mathbb{R}^2$, en ese caso una función f será simplemente un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. La definición 4.2 puede ser entonces precisada como sigue.

Definición 4.4. Por función, entenderemos un subconjunto $f \subset \mathbb{R}^2$ de forma que, si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$.

Definiremos ahora dos conjuntos asociados a una función que resultan muy informativos en el marco de la teoría de funciones: el dominio y el rango de una función.

Definición 4.5. Sea f una función. *El dominio de f* es el conjunto de todos los números reales x tales que $(x,y) \in f$ para algún número real y. A este conjunto lo denotaremos por $\mathrm{dom}(f)$. Por otro lado, *el rango de f* es el conjunto de todos los números reales y tales que $(x,y) \in f$ para algún número real x. A este conjunto lo denotaremos por $\mathrm{ran}(f)$.

Es interesante ahora notar que siempre x esté en el dominio de la función f, x estará acompañado de un único número y en dicha función. Es por eso, que para indicar a dicho elemento y escribiremos $f(x)$ y dicha notación no presentará ambigüedad alguna. Esta notación presenta una caracterización interesante sobre funciones, está caracterización es en realidad un resultado en el marco de la teoría de conjuntos, sin embargo aquí se usará sin más como una definición.

Definición 4.6. Sean f y g funciones. Se dice que las funciones son *iguales* (en símbolos $f = g$), si $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ y para cada número $x \in \mathrm{dom}(f)$,

$$f(x) = g(x).$$

Como la definición propone, será suficiente para definir una función proporcionar un dominio y una regla de asociación (¡tal como la definición intuitiva propone!). Es quizá importante mencionar una notación muy común para funciones, si $f \subset \mathbb{R}^2$ es una función, se escribe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para hacer esto patente. Es interesante aclarar que de momento no tendremos necesidad de usar dicha notación tan aparatosa, esto a razón de tampoco haber presentado un concepto más general de función. Sin embargo, reservamos la posibilidad de usarla cuando sea conveniente.

Comencemos entonces proponiendo, a manera de ejemplo, una función muy sencilla: La función identidad. La función identidad es la función cuyo dominio son todos los reales y cuya regla esta dada por

$$I(x) = x.$$

Esta función presenta propiedades muy peculiares, por eso hemos tenido la osadía de asignarle un símbolo para distinguirla de las otras. De manera genérica (y como ya hemos hecho a lo largo de estas notas) usaremos las letras f, g y h para denotar funciones.

Una lista mucho más elaborada de ejemplos de funciones puede encontrarse en [Spi12]. En el texto existen un número considerable de ellos y van de lo sencillo a lo complejo y es de igual forma interesante usar estas como ejemplos de la definición actual.

2. Operaciones con funciones

En [Spi12], se menciona como extender las operaciones de los reales a funciones.

Definición 4.7. Sean f y g funciones. Definimos la función $f + g$, como la función con dominio

$$\mathrm{dom}(f + g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$

y para cada $x \in \mathrm{dom}(f + g)$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Definición 4.8. Sean f y g funciones. Definimos la función $f - g$, como la función con dominio

$$\mathrm{dom}(f - g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$

y para cada $x \in \mathrm{dom}(f - g)$,

$$(f - g)(x) = f(x) + (-g(x)).$$

Definición 4.9. Sean f y g funciones. Definimos la función $f \cdot g$, como la función con dominio

$$\mathrm{dom}(f \cdot g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$

y para cada $x \in \mathrm{dom}(f \cdot g)$,

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Definición 4.10. Sean f y g funciones. Definimos la función f/g, como la función con dominio

$$\mathrm{dom}(f/g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \cap \{x \mid g(x) \neq 0\}$$

y para cada $x \in \mathrm{dom}(f/g)$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Una vez establecidas estas operaciones, podemos comenzar a jugar con estas ideas. Por ejemplo, podemos definir sin más trámite una función κ_c, *constante en* c, como la función con dominio $\mathrm{dom}(\kappa_c) = \mathbb{R}$ y para cada real x la regla está dada $f(x) = c$. Entonces, podemos definir la multiplicación de una función f por el número real c como

$$c \cdot g = \kappa_c \cdot g.$$

Según las definiciones esta nueva función tendrá el mismo dominio que g y regla

$$(c \cdot g)(x) = (\kappa_c \cdot g)(x) = \kappa_c(x) \cdot g(x) = c \cdot g(x)$$

Estamos ahora en posición de definir una operación más fuera del marco de los resultado que hemos establecido para números.

Definición 4.11. Sean f y g funciones cualesquiera. Entonces, definimos la función $f \circ g$, se lee *la composición de f con g*, como la función con dominio

$$\mathrm{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{dom}(g) \mid g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}$$

dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Como hemos hecho con los números, podemos generalizar las sumas y productos de funciones usando definiciones recursivas. Para esto proponemos lo siguiente. Sea una sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$. Definimos entonces *la suma de la sucesión* como

$$\sum_{i=1}^{1} f_i = f_1$$

y

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1}.$$

Y de igual forma *el producto de la sucesión* como

$$\prod_{i=1}^{1} f_i = f_1$$

y

$$\prod_{i=1}^{n+1} f_i = \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) \cdot f_{n+1}.$$

Es importante notar que los elementos aquí definimos resultan funciones legítimas y tienen como dominio al conjunto

$$\mathrm{dom}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) = \mathrm{dom}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) = \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2) \cap \cdots \cap \mathrm{dom}(f_n)$$

y para un número x en el dominio anterior, las reglas de estas funciones están dadas por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

y

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

Debemos notar que las expresiones anteriores resultan ser números al ser únicamente funciones evaluadas en el número x en su dominio. Usaremos este hecho para desprender el concepto de una función polinomio.

Ejemplo. Con estas definiciones podemos realizar las potencias de la función identidad de manera recursiva. A esta la escribiremos de las siguiente manera

$$I_n = \prod_{i=1}^{n} I.$$

Por ejemplo, $I_2(x) = x^2$ y $I_{42}(x) = x^{42}$. De manera general

$$I_n(x) = x^n.$$

3. Funciones polinomio

Definición 4.12. Una función f de forma que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$ se dice *un polinomio* si sucede alguna de las siguientes posibilidades:

- La función f es *la función nula*, i.e., para todo número x, se tiene $f(x) = 0$.
- Existen números reales $a_1, \ldots, a_n$ tales que $a_n \neq 0$ y

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

  En este caso, se dice que el polinomio *tiene grado* n.

Además, a los números $a_1, \ldots, a_n$ les llamamos *los coeficientes del polinomio*. En particular, a_n se denomina *el coeficiente principal de* f.

Los polinomios son funciones relativamente sencillas, quizá el único comentario pertienente es resaltar que el polinomio nulo no tiene grado definido. Además, al ser funciones, tenemos la posibilidad de evaluar el comportamiento de las operaciones definidas en la sección anterior.

Sean

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

y

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

polinomios de grado m y n, respectivamente, de forma que $m \leq n$. Por comodidad, si $k > n$, asumiremos que $a_k = b_k = 0$. Analizaremos ahora la suma, producto y composición entre polinomios usando estas consideraciones.

La suma de los polinomios f y g resulta en la regla $f + g$ con la siguiente expresión

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k.\end{aligned}$$

De lo que podemos concluir que $f+g$ es también un polinomio. Resumimos esto en el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Sean $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ y $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ polinomios de grado m y n, respectivamente, con $m \leq n$. Entonces, $f+g$ tiene la siguiente regla de correspondencia*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k.$$

De manera similar, podemos expresar la regla del producto como

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{m} b_l \cdot x^l \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i.\end{aligned}$$

Por lo que debemos concluir que $f \cdot g$ es también un polinomio. Resumimos esto en el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Sean $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ y $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ polinomios de grado m y n, respectivamente. Entonces, $f \cdot g$ es un polinomio de grado $m+n$ que tiene regla de correspondencia dada por*

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k,$$

donde

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Para probar que la composición de polinomios es un polinomio, usaremos una consecuencia del teorema anterior: Para un polinomio g cualquiera,

$$g^k = \underbrace{g \cdot g \cdot \cdots \cdot g}_{k \text{ veces}}$$

es también un polinomio. Con esto en mente, la composición entre polinomios tiene como regla

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(g(x)\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(g^k\right)(x).\end{aligned}$$

Observando la regla, debemos notar que la composición entre polinimios es simplemente la suma de polinomios por lo que debe resultar en un polinomio también.

Teorema 4.4. *Sean $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ y $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ polinomios de grado m y n, respectivamente. Entonces, $f \circ g$ es un polinomio de grado $m \cdot n$ que tiene regla de correspondencia dada por*

$$(f \circ g)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (g(x))^n .$$

En la práctica, es muy útil conocer los grados de la suma y producto. Con estos resultados, terminamos esta sección.

Teorema 4.5. *Sean f y g polinomios no nulos con grados m y n, respectivamente, con $m \leq n$. Entonces tenemos una y sólo una de las siguientes posibilidades:*

- $(f+g)(x) = 0$ *para todo* x.
- *El grado de $f+g$ es a lo más n.*

Demostración. Supongamos que $a_1, \ldots, a_m$ son los coeficientes del polinomio f y que $b_1, \ldots, b_n$ son los coeficientes del polinomio g. Se ha probado anteriormente que el polinomio $f+g$ se puede expresar por

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^i.$$

Entonces, si $f+g$ es distinto de cero, al menos unos de sus coeficientes es distinto cero. Tomemos, entonces el número natural más grande k tal que $a_k + b_k \neq 0$ por lo que k es el grado de la suma de los polinomios f y g. Esto debe verificar que $k \leq n$ pues de los contrario (i.e., con $k > n$) se verifica $a_k + b_k = 0$ lo cual es una contradicción. Esto es suficiente para terminar la prueba. ■

Teorema 4.6. *Sean f y g polinomios no nulos con grado m y n respectivamente. Entonces el grado de $f \cdot g$ es $m+n$.*

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_m$ los coeficientes del polinomio f y $b_1, \ldots b_n$ los coeficientes del polinomio g. Como en el caso anterior usamos la expresión que hemos dado para verificar que el producto es una polinomio:

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k,$$

donde

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Deseamos probar que $c_{m+n} \neq 0$. Para esto necesitamos tomar en cuenta dos consideraciones acerca del producto. La primera de ellas, resulta en observar que si $0 \leq j < m$, el número $b_{m+n-j} = 0$; mientras la segunda resulta en observar que si $m < j \leq m+n$, entonces $a_j = 0$. Ahora por definición del grado de un polinomio debemos tener que$a_m \cdot b_n \neq 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
c_{m+n} &= \sum_{j=0}^{m+n} a_j b_{m+n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m+n-j} + a_m b_n + \sum_{j=m+1}^{m+n} a_j b_{m+n-j} \\
&= a_m b_n \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Lo que prueba que el grado del producto $f \cdot g$ es precisamente $m+n$. ■

4. Funciones racionales

Aunque las funciones polinomio parecen idílicas (y quizá lo son), cabe preguntarnos si existen funciones fuera de los polinomios. La respuesta es por supuesto sí. Ahora, sí vale o no la pena explorarlas es un tema diferente. Pero uno puede buscar sentirse emocionado por descrubrir una clase completamente diferente de funciones.

Definición 4.13. Una función f se dice *racional* si existen polinomios p y q tales que

$$f = \frac{p}{q}.$$

Por supuesto, lo primero que debemos preguntarnos es si estas funciones no acabarán siendo solamente polinomios de nueva cuenta. Por supuesto, la respuesta es no, al menos no de manera general. Consideremos por ejemplo el polinomio

$$x^2 - 1,$$

este polinomio se anula en 1 y -1 por lo que al tomarlo como el denominador de otra función, por ejemplo en

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1},$$

el dominio de la función queda restringido a todos los reales menos 1 y -1, sin embargo, un polinomio tiene como dominio a todos los números reales. Este hecho, al considerar la definición que hemos proveído para la igualdad de funciones, resulta en afirmar precisamente que la función f no puede ser un polinomio por el simple hecho que su dominio está restringido.

Que el dominio no coincida no parecería una razón lo suficientemente fuerte para que algo no resultara ya no en un polinomio, sino que se comportara como uno. Por ejemplo, en la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 25}{x - 5},$$

el dominio queda restringido a todos los reales sin contar el 5, sin embargo en todos los otros valores se comporta idéntica a la función

$$g(x) = x + 5$$

y a pesar de esto, la definición de igualdad entre funciones prohíbe que sean iguales. Podríamos proponer sin embargo la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5. \end{cases}$$

En ese caso ¡la función h resulta igual a la función g! Esto tendría que abrir pregunta sobre pregunta: ¿Cuándo es posible "arreglar" el dominio de una función para que sea igual a otra? ¿Qué significa "arreglar" el dominio? ¿Bajo qué circunstancias obtendríamos algo que, dejando el dominio de lado, no se comporta como un polinomio? ¿Existen funciones de este tipo? Estas preguntas son fundamentales en análisis y motivan prácticamente todo el desarrollo teórico que presentaremos.

5. Funciones trigonométricas

Tradicionalmente, las funciones seno y coseno se introducen formalmente a través de la integral. Sin embargo, nos vemos en la necesidad de presentar ejemplos sencillos donde tener a la mano estas funciones resulta muy ilustrativo, es por ello que resulta importante dar un presentación que posteriormente puede ser justificada. Para esto se introducen las siguientes propiedades, entendiendo de antemano que ésta es una construcción artificial y sólo tendrá sentido cuando justifiquemos que existen un par funciones con las propiedades que planteamos.

Definición 4.14. Las funciones sen y cos se definen bajo las siguientes propiedades:

- Su dominio consiste en todos los números reales, i.e.

$$\operatorname{dom}(\operatorname{sen}) = \operatorname{dom}(\cos) = \mathbb{R} \tag{A1}$$

- Presentan los siguientes valores especiales,

$$\cos(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 \text{ y } \cos(\pi) = -1 \tag{A2}$$

- Para cualesquiera x y y números reales,

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x) \tag{A3}$$

- Para un número x, tal que $0 < x < \frac{1}{2}\pi$,

$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} \tag{A4}$$

- Para cualquier número x,

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq |x| \tag{A5}$$

Probaremos ahora algunas identidades notables del seno y coseno, sin embargo existen muchas más. Concluiremos con una muy peculiar que nos dejará ver el comportamiento de dichas funciones.

Proposición 4.7. *Para cualquier número x,*

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1.$$

Demostración. Basta notar que para todo x,

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(0) \\ &= \cos(x - x) \\ &= \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x). \end{aligned}$$

Esta es exactamente la igualdad que buscamos. ■

Proposición 4.8. *Las funciones seno y coseno exhiben los sigueinte valores especiales*

- $\operatorname{sen}(0) = 0.$
- $\cos(\pi/2) = 0.$
- $\operatorname{sen}(\pi) = 0.$

Demostración. La proposiciónn 4.7, resuelve las igualdades planteadas usando los siguientes valores especiales:

- Para $x = 0$ se cumple
$$\begin{gathered} \cos^2(0) + \operatorname{sen}^2(0) = 1 \\ \operatorname{sen}^2(0) = 0 \\ \operatorname{sen}(0) = 0. \end{gathered}$$
- Para $x = \pi/2$ se cumple
$$\begin{gathered} \cos^2(\pi/2) + \operatorname{sen}^2(\pi/2) = 1 \\ \cos^2(\pi/2) = 0 \\ \cos(\pi/2) = 0. \end{gathered}$$
- Para $x = \pi$ se cumple
$$\begin{gathered} \cos^2(\pi) + \operatorname{sen}^2(\pi) = 1 \\ \operatorname{sen}^2(\pi) = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi) = 0. \end{gathered}$$ ■

Lema 4.9. *Para cualquier número x,*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x).$$

Demostración. Es consecuencia de la proposición anterior, A1 y A2:

$$\cos(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2)\cos(x) + \operatorname{sen}(\pi/2)\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x).$$ ■

Proposición 4.10. *Para cualquier número x,*

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

y

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x).$$

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(0 - x) \\
&= \cos(x)\cos(0) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(0) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

y de acuerdo al lema anterior

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-x) &= \cos(\pi/2 + x) \\
&= \cos\left[\pi - (\pi/2 - x)\right] \\
&= \cos(\pi)\cos(\pi/2 - x) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\pi/2 - x) \\
&= -\cos(\pi/2 - x) \\
&= -\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Estas son la igualdades que buscamos. ■

Proposición 4.11. *Para cualquier número x,*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen}(x).$$

Demostración. Basta observar

$$\operatorname{sen}(\pi/2 + x) = \cos(\pi/2 - (\pi/2 + x)) = \cos(-x) = \cos(x).$$

y

$$\cos(\pi/2 + x) = \cos(\pi/2 - (-x)) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$$ ■

Proposición 4.12. *Para cualquier número x,*

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$$

y

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Demostración. Sólo se debe observar

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+2\pi) &= \operatorname{sen}\left(x+3\pi/2+\pi/2\right) \\
&= \cos(x+3\pi/2) \\
&= \cos\left((x+\pi)+\pi/2\right) \\
&= -\operatorname{sen}(x+\pi) \\
&= -\operatorname{sen}((x+\pi/2)+\pi/2) \\
&= -\cos(x+\pi/2) \\
&= \operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= -\operatorname{sen}(x+3\pi/2) \\
&= -\cos(x+\pi) \\
&= \operatorname{sen}(x+\pi/2) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

■

Proposición 4.13. *Para cualquiera números x y y,*

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(y)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(y),$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x),$$

y

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y).$$

Demostración. Siguen de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y) &= -\cos(x+y+\pi/2) \\
&= -\cos(x)\cos(y+\pi/2) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y+\pi/2) \\
&= \operatorname{sen}(y)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}(x+(-y)) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cos(-y) + \operatorname{sen}(-y)\cos(x) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x+(-y)) \\
&= \cos(x)\cos(-y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(-y) \\
&= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y).
\end{aligned}$$

■

Proposición 4.14. *Para cualquier número x,*

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

y

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x).$$

Demostración. La primer fórmula se puede calcular directamente, a través del seno de la suma, i.e.,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) &= \operatorname{sen}(x+x)\\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x).\end{aligned}$$

Para la segunda usaremos la identidad

$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x),$$

y calculamos el coseno de la suma

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &= \cos^2 - \operatorname{sen}^2(x)\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

■

Proposición 4.15. *Para cualesquiera números a y b, son ciertas:*

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

y

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Demostración. Con la proposición 4.13, se comprueba que para cualesquiera números x y y,

$$\operatorname{sen}(y+x) - \operatorname{sen}(y-x) = 2\cos(y)\operatorname{sen}(x)$$

y

$$\cos(y+x) - \cos(y-x) = -2\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x).$$

En particular lo anterior debe ser cierto para $y = (a+b)/2$ y $x = (a-b)/2$; en ese caso $a = y + x$ y $b = y - x$, por lo que

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

y

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

■

Proposición 4.16. *Para cualesquiera números* $0 < b < a < \pi/2$,

$$\operatorname{sen}(b) < \operatorname{sen}(a)$$

y

$$\cos(a) < \cos(b).$$

Demostración. Por A4, si $0 < x < \pi/2$ debemos tener que $\operatorname{sen}(x) > 0$ y $\cos(x) > 0$, además los números $(a+b)/2$ y $(a-b)/2$ están ambos en $(0, \pi/2)$. Entonces, por 4.15,

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0$$

y

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) < 0.$$

En otras palabras $\operatorname{sen}(b) < \operatorname{sen}(a)$ y $\cos(a) < \cos(b)$ como buscábamos. ∎

Corolario 4.17. *La función* sen *es estrictamente creciente en* $(-\pi/2, \pi/2)$.

Demostración. Basta probar que para un par de números $-\pi/2 < a < b < 0$,

$$\operatorname{sen}(a) < \operatorname{sen}(b).$$

En efecto, debemos tener que $-b < -a < \pi/2$ y el teorema implica que

$$\operatorname{sen}(-b) < \operatorname{sen}(-a)$$

y como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ para cualquier número, lo anterior implica que

$$\operatorname{sen}(a) < \operatorname{sen}(b)$$

como buscábamos. ∎

Corolario 4.18. *La función* cos *es estrictamente decreciente en* $(0, \pi)$.

Demostración. Basta probar que para cualesquiera $\pi/2 < b < a < \pi$ tenemos

$$\cos(a) < \cos(b).$$

En efecto, debemos notar solamente que $b' = b - \pi/2$ y $a' = a - \pi/2$ cumplen $0 < b' < a' < \pi/2$. En ese caso, por el teorema anterior

$$\operatorname{sen}\left(b - \frac{\pi}{2}\right) < \operatorname{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$$

En otras palabras

$$-\cos(b) < -\cos(a),$$

por lo que obtenemos lo que deseábamos, i.e.,

$$\cos(a) < \cos(b).$$ ∎

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea $\phi(x) = |x-3| + |x-1|$. Calcula los valores $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(-1)$ y $\phi(-2)$. Determina los valores para los cuales $\phi(t+2) = \phi(t)$.

Ejercicio 4.2. Sea $f(x) = x^2$. Determine en cada caso los conjuntos de números reales para los cuales la fórmula es válida.

1. $f(-x) = f(x)$.
2. $f(y) - f(x) = (y-x)(x-y)$.
3. $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$.
4. $f(2y) = 4f(y)$.
5. $f(t^2) = f(t)^2$.
6. $\sqrt{f(a)} = |a|$.

Ejercicio 4.3. Sea $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las siguientes fórmulas y determinar para que valores son válidas.

1. $g(-x) = g(x)$.
2. $g(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$.
3. $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$
4. $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$.
5. $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$.
6. $\frac{1}{2+g(x)} = \frac{2-g(x)}{x^2}$.

Ejercicio 4.4. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales cualquiera y sea

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

una función. Demuestra que f es un polinomio de grado n de forma tal que $f(a_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 4.5. Sea

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

un polinomio de grado $n \geq 1$. Demuestra las siguientes propiedades.

1. Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, entonces $f(x) = x \cdot g(x)$ para algún polinomio g de grado $n-1$.
2. Para un real a, la función defina por $p(x) = f(x+a)$, es un polinomio de grado n.
3. Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para algún número real a, entonces $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$ para algún g de grado $n-1$ (Sugerencia: considérese $p(x) = f(x+a)$).

Ejercicio 4.6. ¿Para que números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

Ejercicio 4.7. Sea A un conjunto de los números reales, define la función

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Encuentre expresiones para $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$ y $\chi_{\mathbb{R}\setminus A}$.

Ejercicio 4.8. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$ e impar si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo f es par si $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$, mientras que es impar si $f(x) = x$ o $f(x) = \sin(x)$.

1. ¿Cuándo es $f + g$ una función par? ¿Cuándo es impar?
2. ¿Cuándo es $f \cdot g$ una función par? ¿Cuándo es impar?
3. ¿Cuándo es $f \circ g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

Ejercicio 4.9. Demuestre que, si $f \circ g = I$, entonces

1. Si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$.
2. Cada número y puede escribirse como $y = f(x)$ para algún número x.

Ejercicio 4.10. Si f es una función, defina una nueva función $|f|$ mediante la regla $|f|(x) = |f(x)|$, por supuesto el dominio de la nueva función, es el dominio de f. Si g es otra función, podemos definir las funciones $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ como sigue:

$$\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$

$$\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Halla una expresión para $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ en términos de la función $|\cdot|$.

Ejercicio 4.11. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |x|$. ¿En qué puntos se cruza con la gráfica de la función $g(x) = x^2$.

Ejercicio 4.12. El símbolo $\lfloor x \rfloor$ denomina al entero más grande menor que x, por ejemplo $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$, $\lfloor 1{,}1 \rfloor = 1$ $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$. De manera similar , el símbolo $\lceil x \rceil$ denomina al entero más pequeño mayor que x, por ejemplo $\lceil 5{,}5 \rceil = 5$, $\lceil \frac{4}{3} \rceil = 2$ o $\lceil \sqrt{5} \rceil = 3$. Dibuja las gráficas de

1. $f(x) = \lceil x \rceil$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
2. $f(x) = x - \lceil x \rceil$ y $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
3. $f(x) = \lceil \frac{1}{x} \rceil$ y $g(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

Ejercicio 4.13. Las gráficas de los polinomios $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibuja una parte suficiente de su gráfica para ver donde se cortan.

Ejercicio 4.14. Las gráficas de los polinomios $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ se cortan en dos puntos. Dibuja una parte suficiente de sus gráficas para observar donde se cortan. ¿Puedes determinar en que puntos se cortan?

Ejercicio 4.15. Los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2$ son de la forma (x, x^2). Demuestra que cada uno de tales puntos equidista del punto $(0, \frac{1}{4})$ y de la gráfica de la función $g(x) = -\frac{1}{4}$.

Ejercicio 4.16. Dada una recta horizontal L, que es la gŕafica de la función constante $g(x) = c$, y un punto $P = (a, b)$ fuera de de la recta L, de manera que $c \neq b$, demuestra que el conjunto de todos los puntos (x, y) equidistantes a P y a L es la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ejercicio 4.17. Sea $f(x) = mx + c$ una función lineal que pasa por los puntos (a, b) y (a', b) con $a \neq a'$. Demuestra que f es una función constante.

Ejercicio 4.18. Determina las condiciones para las cuales las gráficas de las funciones $f(x) = mx + b$ y $g(x) = m'x + b'$, resultan en rectas paralelas.

Ejercicio 4.19. Sea $n \geq 1$ un número natural. Demuestre que las gŕaficas de las funciones poenten-ciales $I_n(x) = x^n$ y $I_{n-1}(x) = x^{n-1}$, son distintas.

Ejercicio 4.20. Construye las gŕaficas de las siguientes funciones:

1. $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$.
2. $x + 1/x$.
3. $x^2 + 1/x$.
4. $f(x) = (x - c)^2$ con $c = 1$ y $c = 2$.
5. $2x/(1 + x^2)$.
6. $|x|$.

Ejercicio 4.21. Construye las gráficas de las funciones:

1. $\operatorname{sen}(x^2)$.
2. $\operatorname{sen}(1/x)$.
3. $3 + 2\cos(3x)$.
4. $\operatorname{sen}(x)/(1 + x^2)$.
5. $|\operatorname{sen}(x)|$.
6. $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$.

Ejercicio 4.22. Demuestra las siguientes identidades trigonomtricas:

1. $\cos(x - \pi) = \operatorname{sen}(x)$.
2. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.
3. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.

Para entregar: Ejercicio 4.5

Referencias

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencia e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.