# Notas a [Hal66] (Parte 2: Relaciones y funciones)*

Álgebra Superior I / Actuaría 2016-I

## 1. Relaciones

### 1.1. Definiciones

Hasta ahora nuestra discusión se ha centrado en operar conjuntos y elementos de manera aislada. Sin embargo, hemos estado trabajando con un concepto de relación cuando hablamos de pertenencia. Debemos comenzar a preguntarnos qué es entonces una relación entre dos elementos. Para contestar esto por supuesto, haremos un pequeño viaje a la manera natural en la que interpretamos una relación en busca de ejemplos que ilustren la manera en que pensamos este concepto.

De manera coloquial, relacionamos a dos cosas cuando comparten algo; por ejemplo, para dos personas, podríamos vincularlas con alguna oración, digamos

> «Juan y María se conocen».

De esta manera podríamos afirmar que Juan y María están *relacionados*. Existe algo que resulta interesante a resaltar de la relación anterior, si

> «Juan conoce a María.»

entonces

> «María conoce a Juan.»

Por lo que debemos concluir que en dicha relación el orden no tiene importancia (de manera técnica a una relación de este tipo se le llama simétrica).

Podemos ir incluso más lejos usando enunciados para establecer vínculos entre más personas, por ejemplo

> «Juan presentó a María con Pedro.»,

donde se establece una relación entre Juan, María y Pedro. En este caso no se sigue necesariamente que

*Secciones 7, 8, 9 y 10 de [Hal66]

«María presentó a Pedro con Juan.»

siempre que

«Juan presento a María con Juan.»

Esto nos dice que no todas las relaciones son creadas iguales y habrá algunas que posean determinadas propiedades que otra no poseerán.

Ahora, las relaciones descritas en el párrafo anterior son relaciones que vinculan dos objetos del mismo tipo, o lo que debería ser los mismo, dos objetos del mismo conjunto. Sin embargo, no es difícil pensar en ejemplos de relaciones que emparejen dos objetos de distintos tipos, por ejemplo un usuario y su cuenta de correo. En este caso, por una lado tomamos a una persona y por otro una cuenta de correo electrónico y establecemos una relación entre ellos

$$x \text{ es dueño de la cuenta } y,$$

en este caso cuando sustituimos las variables $x$ y $y$ tomamos valores de la primera en las personas y de la segunda en las cuentas de correo electrónico. Esto nos da la primer deficiencia de tomar una relación como un enunciado lógico, pues en lógica no segregamos variables sino uniformamos las cosas especificando toda variable.

Nuestra definición de relación debe ser lo suficientemente amplia para reflejar todas las posibilidades que hemos discutido, quizá no es tan dañino momentáneamente pensar una relación como un enunciado lógico que conecta dos o más términos a partir de su certeza. Es lo que la intuición aparentemente manda. A pesar de esto, existen algunos problemas de ambigüedad que necesitamos solucionar y casos que necesitamos incluir, para esto usaremos la posibilidad de definir un conjunto a través de enunciados lógicos, debe ser entonces natural preguntarnos si las relaciones resultan en conjuntos y si resultan, en cuáles. Presentamos ahora la idea de relación en matemáticas esperando que bajo la discusión anterior parezca lo más natural posible.

**Definición 1.1.** Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Por una *relación de $A$ en $B$* entenderemos un subconjunto $R$ del conjunto $A \times B$. Cuando tengamos el caso particular en que $B = A$, nos limitaremos a decir que *$R$ es una relación en $A$*.

**Ejemplo.** Sabemos que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, en particular, para conjuntos $A$ y $B$, lo anterior implica que $\emptyset \subset A \times B$, por lo que $R = \emptyset$ es una relación de $A$ en $B$. Esta relación es por supuesto peculiar y se le conoce como la *relación vacía*.

**Ejemplo.** Para un conjunto $A$, el conjunto

$$\{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$$

es una relación. A esta relación se conoce como la *relación identidad en $A$* la cual denotaremos por $1_A$. Es de notar, que lo anterior es un conjunto por el axioma de especificación.

**Ejemplo.** Sea $A$ un conjunto. Entonces el conjunto

$$R_{\in} = \{(x, y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in y\}$$

es una relación, llamada la relación de pertenencia. Basta notar para verificar esto, que lo anterior es un conjunto definido de manera adecuada por el axioma de especificación.

Durante la discusión de pares ordenados en **[Hal1]**, encontramos que un conjunto de pares ordenados puede ser reconstruido tomando los conjuntos mínimos de forma tal que el conjunto de pares fuera subconjunto de un par de conjuntos. Ese par de conjuntos en la teoría matemática de relaciones toman un nombre peculiar: el dominio y el rango.

**Definición 1.2.** Sea $R$ una relación de $A$ a $B$. Definimos los conjuntos

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \in A \mid \text{existe } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in B\}$$

$$\mathrm{ran}(R) = \{y \in B \mid \text{existe } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in B\}$$

Al conjunto $\mathrm{dom}(R)$ lo llamaremos el *dominio de* $R$, mientras al conjunto $\mathrm{ran}(R)$ la *rango de* $R$.

Podemos calcular el dominio y el rango de la relación vacía de manera relativamente sencilla pues estos son simplemente el vacío de nueva cuenta. Ahora, sin más podemos verificar que

$$\mathrm{dom}(1_A) = \mathrm{ran}(1_A) = A.$$

Por último, el dominio de la relación de pertenencia es simplemente $A$, pues para cualquier $x \in A$,

$$(x, \{x\}) \in R_{\in}.$$

También, debemos tener que el rango de dicha relación es el conjunto $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$, pues siempre que tomemos $S \in \mathcal{P}(A)$ de forma que $S \neq \varnothing$, existirá un elemento $x \in S$ para el cual,

$$(x, S) \in R_{\in}.$$

De manera análoga al dominio y al rango podemos definir imágenes e imágenes inversas de conjuntos dados. Esto se expone en la siguiente definición.

**Definición 1.3.** Sea $R$ una relación de $A$ en $B$ y sean $S$ y $T$, subconjuntos de $A$ y $B$ respectivamente. Entonces, al conjunto

$$R[S] = \{y \in B \mid \text{ existe } x \in S \text{ tal que } (x, y) \in R\},$$

lo llamaremos *la imagen de* $S$ *sobre* $R$, mientras al conjunto

$$R^{-1}[T] = \{x \in A \mid \text{ existe } y \in T \text{ tal que } (x, y) \in R\}$$

lo llamaremos *la imagen inversa de* $T$ *sobre* $R$.

La utilidad de los anteriores conceptos quedará establecida una vez que caminemos un poco en la sección subsecuente donde daremos un tratamiento conjuntista a las funciones.

**Definición 1.4.** Sea $R$ una relación de $A$ en $B$. La *relación inversa de* $R$ se define como el conjunto

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Debemos notar que dada una relación $R$ de $A$ a $B$, la relación inversa de $R$ es una relación de $B$ a $A$. Esta es una sutil diferencia, pero importante, debido a que $A \times B$ es diferente conceptualmente a $B \times A$.

**Definición 1.5.** Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones de $A$ a $B$ y de $B$ a $C$ respectivamente. Definimos la *composición de* $R_1$ *con* $R_2$ por el conjunto

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R_1 \text{ y } (y, z) \in R_2\}.$$

**Teorema 1.1.** *Sean $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset B \times C$ y $R_3 \subset C \times D$. Entonces,*

1. $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$.
2. $(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.

*Demostración.* Probaremos primero que $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. Para esto notamos que tanto $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ como $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ son relaciones $A$ en $D$, por lo que lo anterior tiene sentido. Ahora siguiendo la definición de composición, $(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ si existe un elemento $c$ de $C$ tal que $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ y $(c, d) \in R_3$. De nueva cuenta por la definición, como $(a, c) \in R_2 \circ R_1$, entonces existe un elemento $b$ del conjunto $B$ tal que $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$. Ahora, como $c$ es un elemento tal que $(b, c) \in R_2$ y $(c, d) \in R_3$, entonces $(b, d) \in R_3 \circ R_2$. De la misma forma, como $b$ es un elemento tal que $(a, b) \in R_1$ y $(b, d) \in R_3 \circ R_2$, entonces $(a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. En ese caso $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subset (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. La otra contención se puede probar de manera similar.

Probaremos ahora $(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$. Notamos primero que ambos términos de la igualdad son relaciones de $C$ a $A$. Además siguiendo la definición de composición, si $(c, a) \in (R_2 \circ R_1)^{-1}$ entonces $(a, c) \in R_2 \circ R_1$, en ese caso debe existir un elemento $b$ del conjunto $B$, de forma que $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$. Por definición de la inversa de la relación, lo anterior significa que $(c, b) \in R_2^{-1}$ y $(b, a) \in R_1^{-1}$; de lo anterior tenemos que $(c, a) \in R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$. En ese caso $(R_2 \circ R_1)^{-1} \subset R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$. De manera análoga, podemos probar la otra contención. □

Terminamos esta sección con una lista de propiedades que una relación puede satisfacer y que son de relevancia en muchas aplicaciones de la teoría de relaciones. Estos conceptos serán utilizados durante los ejercicios y quizá es importante que se lean detenidamente para entender su significado. Más recomendable es obtener algunos ejemplos (y mejor si son reales) donde las propiedades queden establecidas.

**Definición 1.6.** Una relación $R$ en $A$ se dice:

- Reflexiva si y sólo si para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.
- Irreflexiva si y sólo si para todo $x \in A$, $(x, x) \notin R$.
- Transitiva si y sólo si para cualesquiera parejas $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.
- Intransitiva si y sólo si para cualesquiera parejas $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \notin R$.
- Simétrica si y sólo si $(x, y) \in R$ implica que $(y, x) \in R$.
- Antisimétrica si y sólo si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ implica $x = y$.

## Ejercicios

*Ejercicio* 1.1. Encuentra todas las relaciones de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{s\}$.

*Ejercicio* 1.2. Sea $R$ una relación en $A$. Prueba que $R \circ 1_A = 1_A \circ R = R$.

*Ejercicio* 1.3. Sea $R$ una relación de $A$ en $B$. Prueba que $R \circ 1_A = 1_B \circ R = R$

*Ejercicio* 1.4. Sean $S$ y $T$ relaciones de $A$ en $B$. Demuestra que

1. $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$.
2. $(S \cup T)^{-1} = S^{-1} \cup T^{-1}$.

*Ejercicio* 1.5. Demuestra que una relación $S$ en $A$ es:

1. Reflexiva si y sólo si $1_A \subset S$.
2. Irreflexiva si y sólo si $1_A \cap S = \varnothing$.
3. Transitiva si y sólo si $S \circ S \subset S$.
4. Intransitiva si y sólo si $(S \circ S) \cap S = \varnothing$.
5. Simétrica si y sólo si $S = S^{-1}$.
6. Antisimétrica si y sólo si $S \cap S^{-1} \subset 1_A$.

*Ejercicio* 1.6. Sea $\mathcal{F}$ una familia de relaciones de $A$ en $B$ y sea $R$ una relación de $B$ en $C$. Probar que

$$R \circ \left( \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \right) = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} (R \circ X).$$

*Ejercicio* 1.7. Sea $R$ una relación en $A$. Demuestra que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a $R$, i.e., si $S$ es una relación simétrica tal que $R \subset S$, entonces $R \cup R^{-1} \subset S$.

*Ejercicio* 1.8. Sea $R$ una relación en $A$. Demuestra que $R \cap R^{-1}$ es la relación simétrica más grande contenida en $R$, i.e., si $S$ es una relación simétrica tal que $S \subset R$, entonces $S \subset R \cap R^{-1}$.

*Ejercicio* 1.9. Sea $R$ una relación reflexiva y transitiva en un conjunto $A$. Probar que $R \circ R = R$.

# 2. Funciones

**Definición 2.1.** Sea $f$ una relación de $A$ en $B$. Decimos que $f$ es una *función* si para todo $a$ en $A$ y, $b$ y $b'$ en $B$, $f$ satisface: $b = b'$ siempre que $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$. Adicionalmente, llamaremos a una función *total* si se cumple que $\mathrm{dom}(f) = A$, en caso contrario la función se dirá *parcial*.

**Ejemplo** (función vacía)**.** Sea $A$ un conjunto. Podemos considerar una función de $\emptyset$ en $A$. Por definición está debe ser un subconjunto de $\emptyset \times A$. Al ser este último conjunto el conjunto vacío, el único subconjunto posible es $f =$. Así, existe sólo una función de $\emptyset$ a $A$, la *función vacía*.

**Ejemplo.** Sea $A$ un conjunto. La relación identidad, $1_A$ es una función total de $A$ en $A$. Esta función tiene un rol importante en la teoría de funciones al satsifacer, para una función $f \colon A \to B$, las igualdades $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$ (para convencerse de este hecho, uno puede resolver el ejercicio 1.3).

**Ejemplo.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. Las relaciones

$$\pi_1 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times A \mid x = z\}$$

y

$$\pi_2 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times B \mid y = z\},$$

constituyen ejemplos de funciones. A éstas se les conoce como las *proyecciones del producto cartesiano* $A \times B$.

**Teorema 2.1.** *Sea $f$ una función de $A$ en $B$ y sea $g$ una función de $B$ en $C$. La composición de $f$ con $g$ es una función de $A$ en $C$.*

*Demostración.* La composición de funciones está definida al ser $f$ y $g$ relaciones. Consideremos la realación $g \circ f$, y supongamos que $(a, c) \in g \circ f$ y $(a, c') \in g \circ f$. En ese caso, existen elementos $b$ y $b'$ del conjunto $B$ de forma que $(a, b) \in f$, $(b, c) \in g$, $(a, b') \in f$ y $(b', c') \in g$. Como asumimos que $f$ era una función, entonces tenemos que $b = b'$ y en ese caso, tenemos que $(b, c) \in g$ y $(b, c') \in g$. Como $g$ es una función, también por hipótesis, debemos tener que $c = c'$. Por tanto, $g \circ f$ es una función. □

**Corolario 2.2.** *Se tiene que* $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) \cap f^{-1}[\mathrm{dom}(g)]$

*Demostración.* Supogamos que $a \in \operatorname{dom}(g \circ f)$, por definición debe existir un elemento $c \in C$, de forma que $(a, c) \in g \circ f$. Por la definición de composición esto sucede cuando existe un elemento $b \in B$ de forma que $(a, b) \in f$ y $(b, c) \in g$. Que ese elemento $b$ exista, significa que $a \in \operatorname{dom}(f)$. Por otro lado, al tener $(b, c) \in g$, tenemos que $b \in \operatorname{dom}(g)$ y como $(a, b) \in f$, también $a \in f^{-1}(\operatorname{dom}(g))$. De lo anterior concluimos que $\operatorname{dom}(g \circ f) \subset \operatorname{dom}(f) \cap f^{-1}(\operatorname{dom}(g))$. La otra contención se puede probar de manera análoga. □

La definición de función, nos permite tomar de manera unívoca al elemento $b$ de una pareja $(a, b) \in f$; así, este es el único elemento que acompaña al elemento $a$ y podemos distinguirlo, escribiremos $b = f(a)$. Así, $f(a)$ será el único elemento tal que $(a, f(a) \in f)$. Lo anterior nos faculta a describir de una manera explícita dominio de $g \circ f$:

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in A \mid x \in \operatorname{dom}(f) \text{ y } f(x) \in \operatorname{dom}(g)\}.$$

**Corolario 2.3.** *Para todo $a \in \operatorname{dom}(g \circ f)$, se cumple que*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

*Demostración.* Por definición, para un elemento $a \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$, tenemos que $(g \circ f)(a)$ es el único elemento tal que $(a, (g \circ f)(a)) \in g \circ f$; como $f$ es una función, esto implica que $(a, f(a)) \in f$ mientras que $(f(a), (g \circ f)(a)) \in g$. Como además $(f(a), g(f(a))) \in g$ y al ser $g$ una función, debemos tener $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. □

Debemos notar de este último corolario, que cada lado de la fórmula es conceptualmente distinto, nuestras definiciones bastan para asegurar su igualdad. No sólo eso, el teorema y los corolarios describen en su totalidad la función composición pues una vez descrito el dominio y su regla de correspondencia, una función queda completamente determinada como afirma el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.** *Sean $f$ y $g$ funciones de $A$ a $B$. Entonces, $f = g$ si y sólo si $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g)$ y para cualquier $a \in \operatorname{dom}(f)$, $f(a) = g(a)$.*

*Demostración.* Si suponemos primero $f = g$, el resultado debe ser inmediato. Supongamos entonces que $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g)$ y supongamos también que $a \in \operatorname{dom}(f)$ implica que $f(a) = g(a)$. Tomamos $(a, b) \in f$; al ser $f$ una función debe ser el caso $b = f(a)$, y bajo nuestra suposición, esto significa que $b = g(a)$, al ser $a$ un elemento del dominio de $f$. Pero por definición $(a, g(a)) \in g$ al ser los dominios de $f$ y $g$ iguales, de lo que obtenemos $(a, b) \in g$. Esto prueba que $f \subset g$. De manera análoga podemos probar que $g \subset f$ y esto será suficiente para probar el resultado. □

Introducimos ahora una notación nueva para funciones: para indicar que $f$ es una función de $A$ en $B$, escribimos

$$f \colon A \to B.$$

Diremos entonces que $A$ es el dominio de definición de $f$ y $B$ es el contradominio de $f$. Debemos notar que el dominio de $f$ y el dominio de definición son conceptos distintos y no necesariamente coinciden.

## Ejercicios

*Ejercicio* 2.1. Demuestra que las proyecciones $\pi_1$ y $\pi_2$ del producto cartesiano de $A \times B$ son en verdad funciones. Determine la regla de correspondencia que define a dichas proyecciones

*Ejercicio* 2.2. Sea $h \colon C \to A \times B$. Demuestra que para toda $c \in C$,

$$h(c) = ((\pi_1 \circ h)(c), (\pi_2 \circ h)(c))$$

*Ejercicio* 2.3. Sean $A$ y $B$ conjuntos y sean $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$ las proyecciones de $A \times B$ en $A$ y $B$ respectivamente. Demuestra que para cualquier conjunto $C$ y para cualesquiera funciones $f \colon C \to A$ y $g \colon C \to B$ existe una única función $h \colon C \to A \times B$ de forma que $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$. (Sugerencia: Para probar la unicidad usa el ejercicio anterior).

*Ejercicio* 2.4. Sea $f$ una función de $A$ en $B$. Si $S \subset A$ definimos la relación

$$g = f \cap (S \times B).$$

Demuestra que $g$ es una función es una función. A esta función se le conoce como *la restricción de $f$ sobre $S$* y se denota $f|_S$

*Ejercicio* 2.5. Supongamos la colección de números reales es un conjunto y denotemos este por $\mathbb{R}$. Sean entonces las funciones $f(x) = -x$ $g(x) = x^2$ y $h(x) = 1/x$, determine los siguiente conjuntos

- $\operatorname{dom}(h)$.
- $f^{-1}[\mathbb{R}^+]$ donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- $g^{-1}\left[\mathbb{R}^-\right]$ donde $\mathbb{R}^{-1} \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.
- $h\left[\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}\right]$.

*Ejercicio* 2.6. Sea $f \colon A \to B$. Desmuestra que

- Si $S \subset T \subset A$, entonces $f[S] \subset f[T]$.
- Si $U \subset V \subset B$, entonces $f^{-1}[U] \subset f^{-1}[V]$.

*Ejercicio* 2.7. Sea $f \colon A \to B$ una función, sean también $S$ y $T$ subconjuntos de $A$ y, $U$ y $V$ subconjuntos de $B$. Demuestra

- $f\left[S \cup T\right] = f[S] \cup f[T]$.
- $f^{-1}\left[U \cup V\right] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.
- $f\left[S \cap T\right] \subset f[S] \cap f[T]$.
- $f^{-1}\left[U \cap V\right] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$

*Ejercicio* 2.8. Sea $A$ un conjunto y sea $a$ un elemento de $A$. Si $\kappa_a\colon A \to A$ es la función constante de $a$, demostrar que $\kappa_a \circ g = \kappa_a$ para cualquier función $g\colon A \to A$. Recíprocamente, si $f\colon A \to A$ es una función tal que $f \circ g = f$ para cualquier función $g\colon A \to A$, demostrar que existe un elemento $b \in A$ de forma que $f = \kappa_b$, i.e., que $f$ es una función constante. (Sugerencia: Una función $f$ es constante si y sólo si existe $a \in A$ de forma que para toda $b \in A$, $f(b) = a$. Usa contraposición afirmando que $f$ no es constante y concluye $f \circ g \neq f$ para alguna función $g$).

*Ejercicio* 2.9. Sea $f\colon A \to A$ una función. Prueba que si $f \subset 1_A$, entonces $f = 1_A$.

*Ejercicio* 2.10. Sea $f\colon A \to A$ una funciòn. Prueba que si $1_A \subset f$, entonces $f = 1_A$.

*Ejercicio* 2.11. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de $A$ y $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos de $B$, demuestra que

$$f\left[\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S\right] = \bigcup_{S\in\mathcal{F}} f(S)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcup_{T\in\mathcal{G}} T\right] = \bigcup_{T\in\mathcal{G}} f^{-1}(T)$$

*Ejercicio* 2.12. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de $A$ y $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos de $B$, demuestra que

$$f\left[\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S\right] \subset \bigcap_{S\in\mathcal{F}} f(S)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcap_{T\in\mathcal{G}} T\right] = \bigcap_{T\in\mathcal{G}} f^{-1}(T)$$

# 3. Inversas

## 3.1. Definiciones

Antes de presentar el concepto de inversa de una función, es necesario presentar algunos tipos de funciones que las caracterizarán de manera precisa. En particular esta sección está destinada a presentar un teorema por demás importante para la teoría de funciones.

**Definición 3.1.** Sea $f\colon A \to B$ una función. Diremos que

- $f$ es *inyectiva* si y sólo si para todo $a$ y $a'$ en $\mathrm{dom}(f)$, $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$.

- $f$ es *suprayectiva* siempre que $\operatorname{ran}(f) = B$.
- $f$ es *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Es de remarcar que una función es inyectiva si expresamos la definición contrapositivamente, i.e. siempre que $a$ y $a'$ pertenezcan a $\operatorname{Dom}(f)$ y se cumpla que $a \neq a'$, debemos tener $f(a) \neq f(a')$. También, la definición de función suprayectiva nos permite afirmar que para cada $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ de forma que $b = f(a)$, esto sigue simplemente de la definición que hemos dado para la imagen de $f$ y afirmar que no existen elementos de $B$ fuera de ella.

**Teorema 3.1.** *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones. Entonces:*

1. *Si $f$ y $g$ son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.*
2. *Si $f$ y $g$ son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.*
3. *Si $f$ y $g$ son biyectivas, entonces $g \circ f$.*

*Demostración.* Para probar la primer parte del teorema supondremos $f$ y $g$ inyectivas. Ahora, si $a$ y $a'$ son elementos del dominio de $g \circ f$ de tales que

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a');$$

por el corolario 2.3, tenemos que $g(f(a)) = g(f(a'))$. Pero al ser $g$ inyectiva, entonces $f(a) = f(a')$; y de la misma forma al ser $f$ inyectiva, tenemos $a = a'$. Lo anterior prueba que $g \circ f$ es también inyectiva como se deseaba.

Para la segunda parte, supondremos $f$ y $g$ suprayectivas. Deseamos mostrar que para todo $c \in C$, existe un elemento $a$ dentro de $\operatorname{dom}(g \circ f)$ de forma que $c = (g \circ f)(a)$. En efecto, como $g$ es suprayectiva, existe un elemento $b$ dentro de $\operatorname{dom}(g)$, de forma que $c = g(b)$. También, al ser $f$ suprayectiva, existe un elemento $a$ dentro de $\operatorname{dom}(f)$, de forma que $b = f(a)$. Entonces, de acuerdo al corolario 2.2, como $f(a)$ pertenece al dominio de $g$ y $a$ es también parte del dominio de $f$, $a$ debe ser un elemento del dominio de $g \circ f$. En ese caso basta afirmar que

$$\begin{aligned} c &= g(b) \\ &= g(f(a)) \\ &= (g \circ f)(a), \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $g \circ f$ es suprayectiva como se deseaba.

La tercera parte sigue es un resultado inmediato de las anteriores. Esto termina la prueba. □

## 3.2. Comportamiento de la inversa

Debemos notar que dada una función $f$, como ésta es una relación, la relación $f^{-1}$ no es necesariamente una función. Sin embargo podemos caracterizar a aquellas funciones en las que su relación inversa resulta ser una función.

**Definición 3.2.** Sea $f\colon A \to B$ una función. Diremos que $f$ es invertible si su relación inversa $f^{-1}$ es una función.

**Teorema 3.2.** *Sea $f\colon A \to B$ una función cualquiera. Entonces $f^{-1}$ es una función si y sólo si $f$ es inyectiva.*

*Demostración.* Supongamos primero que $f$ es una función inyectiva. Sean entonces $(b, a)$ y $(b, a')$ parejas pertenecientes a $f^{-1}$. Por definición, $(a, b)$ y $(a', b)$ son parejas de la función $f$. En ese caso podemos escribir $b = f(a)$ y además $b = f(a')$ por lo que $f(a') = f(a)$. Ahora, como $f$ es una función inyectiva, entonces $a = a'$. Lo que implica que $f^{-1}$ es en verdad una función como se deseaba.

Supongamos ahora que $f^{-1}$ es una función. Sean $a$ y $a'$ elementos del dominio de $f$ de forma que $f(a) = f(a')$. La suposición entonces implica que $(a, f(a) \in f)$ y $(a', f(a)) \in f$, por definición de relación inversa, sigue $(f(a), a) \in f^{-1}$ y $(f(a), a') \in f^{-1}$, basta observar que el hecho de ser $f^{-1}$ una función basta para garantizar que $a = a'$. Entonces, $f$ es en verdad inyectiva. $\square$

Antes de continuar es necesario realizar un par de observaciones acerca de $f^{-1}$ como una función. La primera consiste en notar que el dominio de $f^{-1} \circ f$ es simplemente el dominio de $f$ al ser por definición $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{ran}(f)$, de lo cual podemos concluir que, si $a$ es un elemento del dominio de $f$, entonces $f(a)$ es un elemento del rango de $f$ y por tanto un elemento del dominio de $f^{-1}$. Lo anterior significa que

$$\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(f^{-1} \circ f).$$

La segunda observación consiste en notar que el dominio de $f \circ f^{-1}$ es el rango de $f$, en efecto si $b$ está en el rango de $f$, existirá una $a$ en el dominio tal que $b = f(a)$, de manera que $(b, a) \in f^{-1}$ de lo que podemos concluir que $b$ está en el dominio de $f^{-1}$, además como $a = f^{-1}(b)$ y $(a, b) \in f$, se tiene que $f^{-1}(b)$ está en el dominio de $f$. Lo anterior significa que

$$\mathrm{ran}(f) \subset \mathrm{dom}(f \circ f^{-1}).$$

Condensamos estas observaciones y agreguemos por supuesto que las contenciones contrarias a lo observado, se cumplen debido al corolario 2.2. Esto se presenta en siguiente lema.

**Lema 3.3.** *Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $f^{-1}$ es una función, entonces*

$$\mathrm{dom}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{dom}(f)$$

*y*

$$\mathrm{dom}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{ran}(f).$$

**Lema 3.4.** *Sea $f\colon A \to B$ una función inyectiva. Entonces, para cada $a$ en el dominio de $f$,*

$$(f^{-1} \circ f)(a) = a$$

*y para cada $b$ en el rango de $f$,*

$$(f \circ f^{-1})(b) = b.$$

*Demostración.* Sea $a$ un elemento en el dominio de $f$, entonces definimos, por ser $f^{-1}$ una función, $a' = f^{-1}(f(a))$, el cual por definición debe satisfacer

$$(f(a), a') \in f^{-1}$$

o en otras palabras

$$(a', f(a)) \in f,$$

en ese caso debemos tener que $f(a') = f(a)$ y como $f$ es inyectiva, $a = a'$. Lo que significa simplemente que

$$a = f^{-1}(f(a)).$$

Supongamos ahora que $b$ es un elemento del rango de $f$, entonces existe $a$ en el dominio de $f$ tal que $b = f(a)$, o en otras palabras $(a, b) \in f$. En ese caso $(b, a) \in f^{-1}$ y al ser $f^{-1}$ una función podemos escribir $a = f^{-1}(b)$ pero $b = f(a)$ por lo que

$$b = f\left(f^{-1}(b)\right).$$

Como deseábamos. Esto prueba el teorema. $\square$

## 3.3. Inversas de funciones totales

Hemos caracterizado hasta ahora funciones en general, en donde su dominio es posiblemente un subconjunto del dominio de definición. Ahora, uno de los casos más interesantes resulta en donde estos conjuntos coinciden, i.e., en una función total. En el caso de funciones totales contamos con mucha más estructura en nuestra función, sin embargo no debemos perder de vista que cada función parcial puede ser asociada a una función total restringiendo su dominio por lo que el hecho de trabajar solamente con funciones totales no deteriora nuestra tratamiento general. Es por esto que la caracterización de estas funciones es de particular importancia el teoría de conjuntos pues de manera encubierta no ayuda a catalogar diversos casos.

**Teorema 3.5.** *Sea $f\colon A \to B$ una función total. Entonces, $f$ es biyectiva si y sólo si $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$.*

*Demostración.* Supongamos que $f$ es biyectiva por lo que podemos aplicar el lema anterior. Notemos primero que el dominio de $f^{-1} \circ f$ coincide con el de $f$ y este es simplemente $A$, por lo que

$$\mathrm{dom}(f^{-1} \circ f) = A = \mathrm{dom}(1_A).$$

Ahora, por el lema anterior tenemos que para cualquier $a$ en $A$

$$1_A(a) = a = (f^{-1} \circ f)(a),$$

por lo que $f^{-1} \circ f = 1_A$. Esto prueba la primera identidad del teorema. Para probar la segunda notemos que el dominio de $f \circ f^{-1}$ coincide con el rango de $f$, como $f$ es suprayectiva su rango es el conjunto $B$, debemos tener que

$$\mathrm{dom}(f \circ f^{-1}) = B = \mathrm{dom}(1_B);$$

y por el lema anterior, siempre que $b$ sea un elemento de $B$,

$$1_B(b) = b = f \circ f^{-1}(b),$$

por lo que $1_B = f \circ f^{-1}$. Con lo que las igualdades entre funciones dadas por el teorema se cumplen.

Supongamos ahora que las funciones satisfacen las igualdades dadas. Probemos primero que $f$ es inyectiva. Sean $a$ y $a'$ elementos en $A$ tal que $f(a) = f(a')$. Entonces,

$$\begin{aligned} a &= (f^{-1} \circ f)(a) \\ &= (f^{-1} \circ f)(a') \\ &= a', \end{aligned}$$

lo que implica que la función es inyectiva. Para probar que la función es suprayectiva, usaremos el hecho que el dominio de la función $f \circ f^{-1}$ coincide con el rango de $f$, sin embargo el hecho de que el dominio de la función $1_B$ sea el conjunto $B$ implicará por hipótesis que el rango de $f$ es precisamente el conjunto $B$ de lo que concluimos que $f$ es suprayectiva. La función $f$ resulta biyectiva como deseábamos y con las dos implicaciones probadas, esto termina la prueba. □

El siguiente corolario basta de notar que $f = (f^{-1})^{-1}$ por lo que las igualdades en el teorema implican también que $f^{-1}$ es biyectiva.

**Corolario 3.6.** *La función $f$ es biyectiva si y sólo si $f^{-1}$ es biyectiva.*

Proponemos ahora una serie de definiciones que abren la posibilidad en las funciones totales para la existencia de inversos. De entrada no sabemos si estos inversos constituyen nuevas funciones, sin embargo mostraremos que estas funciones coinciden precisamente con la inversa de la función en muchos casos.

**Definición 3.3.** Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ funciones totales.

- $g$ se dice una *función inversa por la izquierda de $f$* si $g \circ f = 1_A$.
- $g$ se dice u na *función inversa por la derecha de $f$* si $f \circ g = 1_B$.

Existirán por supuesto funciones que posean sólo inversas por la derecha o sólo por la izquierda, sin embargo, si poseen inversas tanto por la izquierda como por la derecha, estas no tienen posibilidad alguna de ser distintas, tal como se afirma en el siguiente lema.

**Lema 3.7.** *Sea $f\colon A \to B$ una función total. Si $g\colon B \to A$ es una inversa por la izquierda de $f$ y $g'\colon B \to A$ una inversa por la derecha de $f$, entonces $g = g'$.*

*Demostración.* Como $g'$ es una una inversa por la derecha de $f$, debemos tener que $f \circ g' = 1_B$ y de la misma forma, como $g$ es una inversa por la izquierda de

$f$, $g \circ f = 1_A$. Entonces,

$$\begin{aligned} g' &= 1_A \circ g' \\ &= (g \circ f) \circ g' \\ &= g \circ (f \circ g') \\ &= g \circ 1_B \\ &= g, \end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

**Teorema 3.8.** *Sea $A \neq \emptyset$ y sea $f\colon A \to B$ una función total. Son equivalentes*

1. *$f$ es inyectiva.*
2. *Existe una función que es inversa por la izquierda de $f$.*
3. *Para funciones $h, h'\colon C \to A$, si $f \circ h = f \circ h'$, entonces $h = h'$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $f$ es inyectiva. Entonces $f^{-1}$ es una función por el teorema 3.2, además por el lema 3.4, debemos tener que

$$f^{-1} \circ f = 1_A,$$

por lo que $f^{-1}$ es una inversa por la izquierda de $f$. Esto demuestra que 1 implica 2.

Supongamos ahora que $g\colon B \to A$ es una función inversa por la izquierda de $f$, i.e., $g \circ f = 1_A$. Si $f \circ h = f \circ h'$, entonces

$$\begin{aligned} h &= 1_A \circ h \\ &= (g \circ f) \circ h \\ &= g \circ (f \circ h) \\ &= g \circ (f \circ h') \\ &= (g \circ f) \circ h' \\ &= 1_A \circ h' \\ &= h'. \end{aligned}$$

Esto demuestra que 2 implica 3.

Asumimos ahora la propiedad descrita en 3. Supongamos también que $a$ y $a'$ son elementos de $A$ de forma que $f(a) = f(a')$. Utilizando estos elementos, definimos las funciones constantes $\kappa_a, \kappa_{a'}\colon A \to A$, notando que, por la forma en que hemos tomado $a$ y $a'$, tenemos que $f \circ \kappa_a = f \circ \kappa_{a'}$. En consecuencia, debemos tener que $\kappa_a = \kappa_{a'}$, pero al ser éstas funciones constantes, concluimos que $a = a'$. Lo anterior prueba que $f$ es inyectiva y demuestra que 3 implica 1. Por lo que los tres enunciados son equivalentes como se deseaba probar. □

**Proposición 3.9.** *Sea $f\colon A \to B$ una función total. Si $f$ tiene inversa por la derecha entonces la función $f$ es suprayectiva.*

*Demostración.* Sea $g\colon B \to A$ la inversa por la derecha de $f$. Tomemos un elemento $b$ en $B$, entonces con el elemento $g(b)$ de $A$ podemos notar que $f(g(b)) = b$ esto simplemente por la definición de inversa por la derecha. En ese caso, hemos encontrado un elemento en $A$ de forma que su evaluación en $f$ resulta $b$. Debemos concluir que la función $f$ es suprayectiva. □

**Teorema 3.10.** *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ funciones totales. Entonces, si $g$ es inversa por la derecha y por la izquierda de $f$, se tiene que $g = f^{-1}$.*

*Demostración.* Si $g$ es inversa por la izquierda de $f$ entonces, por el lema 3.8 $f$ es una función inyectiva. Ahora por la proposición 3.9 y el hecho de ser $g$ una inversa por la izquierda de $f$, la función $f$ será suprayectiva. En resumen $f$ es una función biyectiva por lo que podemos usar el resultado del teorema 3.5:

$$\begin{aligned} g &= g \circ 1_B \\ &= g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \\ &= (g \circ f) \circ f^{-1} \\ &= 1_A \circ f^{-1} \\ &= f^{-1}. \end{aligned}$$

Que es simplemente lo que queríamos demostrar. □

Este último teorema resulta profundamente interesante, esto se debe a que una función con inversa por la izquierda y por la derecha deberá ser biyectiva. Además la relación inversa de $f$ resulta en una función y esta función juega el rol de la inversa por la izquierda y por la derecha de $f$. Esto querrá decir que una función total que además es biyectiva trae en su estructura a una función que nos permite, de manera alegórica, ir y regresar de un conjunto a otro. Por ejemplo, si $f\colon A \to B$ fuera una biyección, podríamos decir que $A$ y $B$ son el mismo conjunto pues para cualquier cosa que hagamos en $B$ podemos "regresar" a $A$ y viceversa. Podemos afirmar que si entre dos conjuntos existe una biyección, estos conjuntos son esencialmente el mismo.

## Ejercicios

*Ejercicio* 3.1. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea inyectiva y $g$ no lo sea.

*Ejercicio* 3.2. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea suprayectiva y $f$ no lo sea.

*Ejercicio* 3.3 (Notación de la inversa). Existe un nicho de ambigüedad que acarreamos desde la definición de relación inversa y en el marco de la teoría de funciones puede causar confusión. ¿Qué significa el símbolo $R^{-1}[T]$ para una relación $R$ de $A$ en $B$ con $T \subset B$? ¿La imagen inversa de $T$ bajo $R$ o la imagen de $T$ bajo $R^{-1}$? Intentaremos argumentar que estos dos conjuntos coinciden por lo que cualquiera que sea la forma que queramos responder, no importará elimininado así la ambigüedad. Sea entonces $R$ una relación de $A$ en $B$ y sea $T \subset B$. Si tomamos $S = R^{-1}$, demuestra que $R^{-1}[T]$, la imagen inversa de $T$ bajo $R$, coincide con el conjunto $S[T]$, la imagen de $T$ bajo $S$. En otras palabras demuestra que $R^{-1}[T] = S[T]$.

*Ejercicio* 3.4. Sea $f : A \to B$ una función total y sean además $F, G : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ las funciones definidas por

$$F(S) = f[S]$$

y

$$G(U) = f^{-1}[U].$$

Demuestra que

- Si $f$ es suprayectiva, entonces $F \circ G = 1_{\mathcal{P}(B)}$.
- Si $f$ es inyectiva, entonces $G \circ F = 1_{\mathcal{P}(A)}$.

*Ejercicio* 3.5. Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ funciones totales. Demuestra que existe una función $h : A \times B \to C \times D$ de forma que, si $f$ y $g$ son biyectivas, entonces $h$ es biyectiva.

# 4. Relaciones de equivalencia

## 4.1. Definiciones

**Definición 4.1.** Sea $R$ una relación de $A$ a $A$. La relación se dice de *equivalencia* en $A$ si es reflexiva, simétrica y transitiva.

**Proposición 4.1.** *Si $R$ es una relación de equivalencia en $A$, entonces* $\operatorname{dom}(R) = A$ *y* $\operatorname{ran}(R) = A$

*Demostración.* Para cualquier $a$ en el conjunto $A$, al ser la relación reflexiva, $(a, a) \in R$, lo que implica la conjunción en la proposición. □

**Definición 4.2.** Sea $R$ una relación de equivalencia en $A$ y sea $a$ un elemento de $A$. La *clase de equivalencia de $a$ respecto de $R$*, es el subconjunto de $A$ definido por

$$[a]_R = \{x \in A \mid (x, a) \in R\}.$$

Si $R$ es una relación de equivalencia en $A$, escribiremos, en lugar de $(a, b) \in R$,

$$a \sim_R b.$$

Lo anterior se lee «$a$ es equivalente a $b$ bajo la relación $R$». Si en contexto la relación está implícita, escribiremos simplemente

$$a \sim b.$$

En ese caso, también podremos escribir $[a]$ en lugar de $[a]_R$.

Sin importar que relación de equivalencia tengamos, el conjunto $[a]$ es no vacío al tener por definición $a \sim a$ para cada elemento de $A$. Veremos ahora que no sólo el conjunto no es vacío sino extrae información relevante del conjunto donde se define la relación.

**Teorema 4.2.** *Para una relación de equivalencia $R$ en $A$, son equivalentes*

1. $[a]_R = [b]_R$
2. $a \sim_R b$
3. $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

*Demostración.* Supongamos que $[a]_R = [b]_R$. Entonces, como $a \in [a]_R = [b]_R$, debemos tener que $a \sim_R b$.

Si ahora suponemos que $a \sim_R b$, entonces $a \in [a]_R$ y al mismo tiempo $a \in [b]_R$, o en otras palabras, $a \in [a]_R \cap [b]_R$, por lo que este último es no vacío.

Finalmente, si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, es posible tomar un elemento $s \in [a]_R \cap [b]_R$. Esto significa que $s \sim_R a$ y $s \sim_R b$, y, por simetría y transitividad, tenemos que $a \sim_R b$. Tomemos ahora $c \in [a]_R$, entonces $c \sim_R a$, por transitividad, esto implica que $c \sim_R b$, y en consecuencia $c \in [b]_R$. Lo anterior prueba que $[a]_R \subset [b]_R$. De manera análoga se prueba que $[b]_R \subset [a]_R$, por lo que $[a]_R = [b]_R$, haciendo los tres enunciados equivalentes. $\square$

**Corolario 4.3.** *Una de dos, o $[a]_R = [b]_R$ o $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.*

Este corolario es notable al afirmar que las clases de equivalencia descomponen un conjunto en subconjuntos que no tienen elementos en común. Pareciera que lo simplifican. Esta propiedad de las clases de equivalencia es bastante notable y a menudo aparece en muchas ramas de la matemática. Esta descomposición sin embargo se puede ver con otra perspectiva, mucho más ligada a la teoría de conjuntos. Mostraremos que esta nueva perspectiva es simplemente un atuendo distinto que presentan las relaciones de equivalencia.

**Definición 4.3.** Sea $A$ un conjunto y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$. Diremos que $\mathcal{F}$ es una *partición de $A$* si

- $A \neq \emptyset$ para cada $A$ en $\mathcal{F}$.
- $A \cap B = \emptyset$ para cada $A \neq B$ en $\mathcal{F}$.
- $\bigcup \mathcal{F} = A$.

Lo primero que habrá que notar que es una partición es algo en concepto distinto a las relaciones de equivalencia, éstas por un lado son un subconjunto de $A \times A$, mientras las particiones son subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$. A pesar de esta notoria diferencia conceptual, ambos conceptos guardar una importante relación: Las clases de equivalencia resultan en una partición.

**Lema 4.4.** *Sea $R$ una relación de equivalencia. Entonces, el conjunto*

$$\mathcal{F}_R = \{[a] \mid a \in A\}$$

*es una partición.*

*Demostración.* Para cada $a$ en $A$, el conjunto $[a]$ es no vacío. Además, por el teorema 4.2, si $[a] \neq [b]$, tendremos que $[a] \cap [b] = \emptyset$. Finalmente como $\{a\} \subset [a]$, y $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$, debemos tener que

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A.$$

Esto prueba que $\mathcal{F}_R$ es una partición. $\square$

Hemos explicado con este lema, como una relación de equivalencia resulta en una partición. Basta tomar sus clases de equivalencia para obtener un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ de forma que este cumpla con las características que definen a una partición. Podemos sin embargo proponer el recíproco: Dada una partición, obtener una relación de equivalencia.

**Lema 4.5.** *Sea $\mathcal{F}$ una partición de $A$. Entonces, la relación $R_{\mathcal{F}}$, definida por $(a, b) \in R_{\mathcal{F}}$ si y sólo si existe un elemento $P \in \mathcal{F}$ tal que $a \in P$ y $b \in P$, es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* Como $\bigcup \mathcal{F} = A$, la relación $R_{\mathcal{F}}$ es reflexiva. La relación es también simétrica pues tan pronto como notemos que el orden en que se presenta $a$ y $b$ como elemento de $P$ es indistinto. Basta entonces probar que es transitiva.

Supongamos para esto que $a \sim b$ y que $b \sim c$ bajo $R_{\mathcal{F}}$. En ese caso existen conjuntos $P$ y $P'$ de forma que $a$ y $b$ pertenecen a $P$, mientras que $b$ y $c$ pertenecen a $P'$. En ese caso $b$ debe pertenecer a la intersección de $P$ con $P'$. Por definición de partición, esto sólo es posible si $P = P'$, si ese es el caso, $a$ y $c$ son elementos de $P$. En otras palabras $a \sim c$. De aquí que la relación $R_{\mathcal{F}}$ sea transitiva. $\square$

Los dos lemas anteriores nos permiten construir una partición de una relación de equivalencia y viceversa. Esto es una asignación entre estos dos conceptos. Si podemos caracterizar a los conceptos por conjuntos, podremos usar estos lemas para construir una función. En efecto, para que una relación $R$ en $A$ sea de equivalencia, debe satisfacer que

$$\mathrm{E}_1(A, R)\colon \forall x \in A.(x, x) \in R,$$

$$\mathrm{E}_2(A, R)\colon \forall x, y \in A.(x, y) \in R \to (y, x) \in R$$

y

$$\mathrm{E}_3(A, R)\colon \forall x, y, z \in A.(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \to (x, z) \in R.$$

Las fórmulas $\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_2$ y $\mathrm{E}_3$ pertenecen a la teoría de conjuntos por lo que de igual forma lo hará

$$\mathrm{Equiv}(A, R)\colon \mathrm{E}_1(A, R) \wedge \mathrm{E}_2(A, R) \wedge \mathrm{E}_3(A, R).$$

Ahora, por el axioma de comprensión,

$$\mathbf{R}_A = \{R \in \mathcal{P}(A \times A) \mid \mathrm{Equiv}(A, R)\}$$

es ciertamente un conjunto, el conjunto de las relaciones de equivalencia en $A$.

Ahora codificaremos como conjunto a las particiones. Para esto emplearemos las fórmulas

$$\mathrm{P}_1(\mathcal{F})\colon \forall X \in \mathcal{F}. X \neq \emptyset,$$

$$\mathrm{P}_2(\mathcal{F})\colon \forall X, Y \in \mathcal{F}. X \neq Y \to X \cap Y = \emptyset$$

y

$$\mathrm{P}_3(A, \mathcal{F})\colon \forall x \in A \exists X \in \mathcal{F}. x \in X,$$

para construir la fórmula

$$\mathrm{Part}(A, \mathcal{F})\colon \mathrm{P}_1(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{P}_2(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{P}_3(A, \mathcal{F}).$$

Debe ser evidente que si $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, entonces $\mathcal{F}$ es una partición si y sólo si es cierto $\mathrm{Part}(A, \mathcal{F})$. En ese caso, por el axioma de comprensión

$$\mathbf{P}_A = \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid \mathrm{Part}(A, \mathcal{F})\},$$

es un conjunto, el conjunto de las particiones de $A$.

**Teorema 4.6.** *Sea $A$ un conjunto. Entonces, existe una biyección entre los conjuntos $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{P}_A$.*

*Demostración.* Definimos primero a $\phi\colon \mathbf{R}_A \to \mathbf{P}_A$ como la función

$$\phi(R) = \mathcal{F}_R,$$

mientras que $\psi\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{R}_A$ será la función

$$\psi(\mathcal{F}) = R_{\mathcal{F}}.$$

Estas expresiones son funciones totales entre los conjuntos especificados a partir de los resultados de los lemas 4.4 y 4.5. Mostraremos que $\psi \circ \phi = 1_{\mathbf{R}_A}$ y que $\phi \circ \psi = 1_{\mathbf{P}_A}$ por lo que el teorema 3.5 garantizará que $\phi$ es la biyección que buscamos.

Probaremos primero que, dada una partición $\mathcal{F}$ de $A$,

$$(\phi \circ \psi)(\mathcal{F}) = \mathcal{F},$$

o en otras palabras,

$$\phi(R_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}.$$

Para esto tomamos primero $P \in \phi(R_{\mathcal{F}})$, en ese caso, debe existir $a \in A$ de forma que $P = [a]_{R_{\mathcal{F}}}$. Como $\bigcup \mathcal{F} = A$, debe existir un elemento $Q \in \mathcal{F}$ de forma que $a \in Q$. Afirmamos que $P = Q$. En efecto, $b \in [a]_{R_{\mathcal{F}}}$ si y sólo si $b \sim_{R_{\mathcal{F}}} a$ lo que sucede si y sólo si existe un elemento $Q' \in \mathcal{F}$ de forma que $a$ y $b$

pertenezcan a $Q'$, pero en ese caso $a \in Q$ y $a \in Q'$ por lo que la intersección es no vacía, debido a la definición de partición, debemos tener que $Q' = Q$. De lo anterior podemos concluir que $b \in [a]_{R_\mathcal{F}}$ si y sólo si $b \in Q$ como afirmamos con anterioridad. Como $P = Q$ y $Q \in \mathcal{F}$, podemos simplemente afirmar que $P \in \mathcal{F}$ y así $\phi(R_\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Supongamos ahora que $P \in \mathcal{F}$. $P$ debe ser no vacío por la definición de partición, tomamos entonces $a \in P$. En ese caso, debemos tener $P = [a]_{R_\mathcal{F}}$ y, de manera análoga a la prueba de una afirmación anterior, como $[a]_{R_\mathcal{F}} \in \phi(R_\mathcal{F})$, se tiene que $P \in \phi(R_\mathcal{F})$ y en consecuencia $\phi(R_\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Estas dos contenciones implican la igualdad de los conjuntos dados.

Probaremos ahora que dada una relación de equivalencia $R$ en $A$, tenemos que

$$(\psi \circ \phi)(R) = R$$

o en otras palabras

$$\psi\left(\mathcal{F}_R\right) = R.$$

Supongamos primero que $(a, b) \in \psi(\mathcal{F}_R)$. En ese caso debe existir un conjunto $P \in \mathcal{F}_R$ de forma que $a \in P$ y $b \in P$. Por definición $P = [c]_R$ para algún $c \in A$, de lo anterior debemos entonces tener que $a \sim_R c$ y $b \sim_R c$, por transitividad y simetría, $a \sim_R b$, lo anterior significa simplemente que $(a, b) \in R$ y en consecuencia $\psi(\mathcal{F}_R) \subset R$. Supongamos ahora que $(a, b) \in R$. De lo anterior podemos afirmar que $a \in [b]_R$ y $b \in [b]_R$. Como por definición $[b]_R \in \mathcal{F}_R$, entonces existe $P = [b]_R$ de forma que $a \in P$ y $b \in P$. En ese caso debemos tener $(a, b) \in \psi(\mathcal{F}_R)$. Por tanto $\psi(\mathcal{F}_R) \subset R$. De las contenciones es posible concluir con la igualdad.

Hemos entonces demostrado que $\phi$ es una biyección entre $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{P}_A$, como afirma el teorema. □

Introducimos ahora algunos conceptos adicionales acerca de las relaciones de equivalencia de mucha utilidad en diversas aplicaciones.

**Definición 4.4.** Dada una relación de equivalencia $R$ en $A$, al conjunto

$$A/R = \{[a] \in \mathcal{P}(A) \mid a \in A\},$$

lo llamaremos el *conjunto cociente de $A$ respecto de $R$*. También, a la función $\pi\colon A \to A/R$ definida por $\pi(a) = [a]$ la llamaremos la función canónica de $A$ en el cociente $A/R$.

Esta función $\pi$, satisface una propiedad destacable que es muy interesante (aunque no difícil) de probar:

$$\pi(a) = \pi(b) \text{ si y sólo si } a \sim b.$$

En los ejercicios se pedirá probar que esta función exhibe muchas otras propiedades notables, por ejemplo ser la función asociada a una relación.

Podemos ahora comenzar a mostrar un poco de la estructura que presenta $\mathbf{R}_A$. Por ejemplo podemos establecer una relación en el conjunto, introduciendo la siguiente relación.

**Definición 4.5.** Sean $R$ y $S$ relaciones de equivalencia en $A$. Diremos que $R$ *es más fina que* $S$, cuando $a \sim_R b$ implica $a \sim_S b$.

**Definición 4.6.** Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ particiones de un conjunto $A$. Decimos que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{G}$ si para cada $P \in \mathcal{F}$ existe $Q \in \mathcal{G}$ tal que $P \subset Q$.

**Proposición 4.7.** *Para relaciones de equivalencia $R$ y $S$ en $A$, son equivalentes:*

- *$R$ es más fina que $S$.*
- *Para todo $a$, $[a]_R \subset [a]_S$.*
- *$\{[a]_R \mid a \in A\}$ es un refinamiento de $\{[a]_S \mid a \in A\}$.*

**Teorema 4.8.** *La relación en $\mathbf{R}_A$, definida por $R \cong S$ si y sólo si $R$ es más fina que $S$, es reflexiva, transitiva y antisimétrica.*

## Ejercicios

*Ejercicio* 4.1. Sea $R$ una relación en $A$. Demuestra que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a $R$, i.e., si $S$ es una relación simétrica tal que $R \subset S$, entonces $R \cup R^{-1} \subset S$.

*Ejercicio* 4.2. Sea $R$ una relación en $A$. Demuestra que $R \cap R^{-1}$ es la relación simétrica más grande contenida en $R$, i.e., si $S$ es una relación simétrica tal que $S \subset R$, entonces $S \subset R \cap R^{-1}$.

*Ejercicio* 4.3. Sea $R$ una relación reflexiva y transitiva en un conjunto $A$. Probar que $R \circ R = R$.

*Ejercicio* 4.4. Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones de equivalencia en $A$. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es una relación de equivalencia si y sólo si $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

*Ejercicio* 4.5. Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones de equivalencia en un conjunto $A$ tal que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es la intersección del conjunto de todas las relaciones de equivalencia en $A$ que contienen $R_1$ y $R_2$, i.e.

$$R_2 \circ R_1 = \bigcap \{X \in \mathbf{R}_A \mid R_1 \subset X \wedge R_2 \subset X\}.$$

*Ejercicio* 4.6. Sea $R$ una relación de equivalencia en un conjunto $A$. Sea $S \subset R$ tal que la imagen de la proyección $\pi_1$ en $S$ es $A$. Demostrar que $R \circ S = R$ y que si $T$ es una relación cualquiera en $A$, entonces $(R \cap T) \circ S = R \cap (T \circ S)$.

*Ejercicio* 4.7. Sea $f\colon A \to B$ una función y sea

$$R_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

Demuestra que $R_f$ es una relación de equivalencia y que si

$$F = \{(a, f(a)) \mid a \in A\},$$

entonces $R_f = F^{-1} \circ F$. A la relación $R_f$ se le conoce como la *relación de equivalencia asociada a $f$*.

*Ejercicio* 4.8. Sea $R$ una relación de equivalencia en $A$ y sea $\pi\colon A \to A/R$ la función canónica de $A$ a $A/R$. Probar que $R$ es la relación de equivalencia asociada a $\pi$.

*Ejercicio* 4.9. Sean $f\colon A \to B$ una función, $R$ una relación de equivalencia en $A$ y $S$ una relación de equivalencia en $B$, sean también $\pi_R\colon A \to A/R$ y $\pi_S\colon B \to B/S$ las funciones canónicas de $A$ a $A/R$ y $B$ a $B/S$ respectivamente. Demostrar que existe una función $h\colon A/R \to B/S$ tal que $h \circ \pi_R = \pi_S \circ f$ si sólo si para todo $(a, a') \in R$ tenemos que $(f(a), f(a')) \in S$.

*Ejercicio* 4.10. Sea $m \in \mathbb{R}$. Definimos la relación $R$ en $\mathbb{R}^2$ por $(x_1, y_1) \sim_R (x_2, y_2)$ si y sólo si $y_1 + mx_2 = y_2 + mx_1$. Demuestra que la relación $R$ es una relación de equivalencia y encuentra la clase de equivalencia del punto $(1, 0)$. Calcula además el conjunto cociente.

*Ejercicio* 4.11. En $\mathbb{R}$ se define la relación $R$ como $a \sim_R b$ si y solo si $a^2 - b^2 = a - b$. Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia y determina la clase de equivalencia de 5.

*Ejercicio* 4.12. En $\mathbb{R}$ se define la relación $R$ como $a \sim_R b$ si y sólo si $|x| = |y|$. Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia y calcula su conjunto cociente.

*Ejercicio* 4.13. En el conjunto $\mathbb{N}^2$ se define la relación $(a, b) \sim_R (c, d)$ si y sólo si $a + b = c + d$. Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento $(3, 1)$.

*Ejercicio* 4.14. En el conjunto $\mathbb{N}^2$ se define la relación $(a, b) \sim_R (c, d)$ si y sólo si $ad = bc$. Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento $(3, 7)$.

*Ejercicio* 4.15. Demuestra que $\pi(a) = \pi(b)$ si y sólo si $a = b$.

# Referencias

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Las prensas de Ciencias, 2007.

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Compañia Editorial Continental, 1966.

*Comentario.* Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan mediocremente proponer algo nuevo. El único objectivo al que sirven es preparar el curso de Álgebra Superior I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.