

Semana 1: Lógica proposicional

Ejercicios

Estos ejercicios, aunque algunos se han tomado prestados de otros textos, están basados en los temas expuestos en los capítulos 1 y 2 del libro [SH92].

Ejercicio 1.1. Determina cuales de las siguientes oraciones son proposiciones.

- En 1990, George Bush era el presidente de Estados Unidos.
- $x + 3$ es un entero positivo.
- ¡Si todas las mañanas fueran soleadas y despejadas como ésta!
- Quince es un número par.
- Si José tarda en llegar, su primo podría enojarse.
- ¿Qué hora es?
- De la corte de Moctezuma a las playas de Trípoli.

Ejercicio 1.2. Identificar las siguientes proposiciones como atómicas o moleculares

- El tiempo atmosférico es la situación de la atmósfera en un momento particular y el clima es la variación de la situación del tiempo atmosférico en un periodo largo de tiempo.
- Las bacterias en el agua o se destruyen hirviendo el agua o se destruyen por cloración.
- Este libro tiene más páginas que el otro.
- Si la sentencia es contra el defensor, él apelará el caso.
- La guerra no puede explicarse totalmente por una causa.
- Un elemento tiene propiedades físicas y propiedades químicas.

Ejercicio 1.3. Simboliza los enunciados del ejercicio anterior.

Ejercicio 1.4. Considérense las siguientes proposiciones:

- P = Termino de escribir mi programa de computadora antes de la comida.
- Q = Jugaré fútbol en la tarde.

- R = El sol está brillando.
- S = La humedad es baja.

Simboliza las siguientes proposiciones.

- Para jugar fútbol esta tarde, es necesario que termine mis programa de computadora antes de la comida.
- La humedad baja y el sol brillante son suficientes para que juegue fútbol esta tarde.
- Si el sol está brillando, jugaré fútbol esta tarde.

Ejercicio 1.5. Considérense las siguientes proposiciones:

- P = El triángulo A es isósceles.
- Q = El triángulo A es equilátero.
- R = El triángulo A es equiángulo.

Escribe las siguientes proposiciones como una frase en español.

- $Q \wedge P$.
- $\neg P \rightarrow \neg Q$.
- $P \vee \neg Q$.
- $R \wedge \neg P$.

Ejercicio 1.6. Vuelva a escribir cada una la siguientes proposiciones como implicaciones.

- La práctica diaria de su servicio es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo.
- Arregle mi aire acondicionado o no pagaré la renta.
- María puede subir a la motocicleta de Luis sólo si usa el casco.

Ejercicio 1.7. Sean P y Q proposiciones. Determina cuales de las siguientes proposiciones pueden derivarse como conclusión de la premisa $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $P \wedge Q$.
- $Q \rightarrow P$.
- $\neg P \vee Q$.
- $\neg Q \wedge P$.

Ejercicio 1.8. Para cada uno de los siguientes argumentos, simboliza las proposiciones e indica las reglas de inferencia necesarias para dar por válido el argumento (una por línea).

- Si no nos despedimos ahora, entonces no cumpliremos nuestro plan. Si dedicamos tiempo al trabajo, entonces cumpliremos nuestro plan. Dedicamos tiempo al trabajo. Por tanto, nos despedimos ahora.
- Si el reloj está adelantado, entonces Juan llegó antes de las diez y vio partir el coche de Andrés. Si Andrés dice la verdad, entonces Juan no vio partir el coche de Andrés. O Andrés dice la verdad o estaba en el edificio en el momento del crimen. El reloj está adelantado. Por lo tanto, Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen.

- Esta ley será aprobada en esta sesión si y sólo si es apoyada por la mayoría. O es apoyada por la mayoría o el gobernador se opone a ella. Si el gobernador se opone a ella, entonces será pospuesta en las deliberaciones del comité. Por tanto, o esa ley será aprobada en sesión o será pospuesta en las deliberaciones del comité.
- Si no ocurre que si un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua, entonces se puede caminar sobre el agua. Pero no se puede caminar sobre el agua. Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso. Si puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso, entonces el objeto flotará en el agua. Por tanto, un objeto flotará en el agua si y sólo si es menos denso que el agua.
- Si el palo empieza a golpear al perro, entonces el perro empieza a morder al cerdo. Si el perro empieza a morder al cerdo, entonces el cerdo saltará sobre el portillo. El palo empieza a golpear al perro. Por tanto, el cerdo saltará sobre el portillo.
- Si el freno falla o el camino está helado, entonces el coche no parará. Si el coche se revisó, entonces no fallarán los frenos. Pero el coche no se revisó. Por tanto el coche no parará.
- Si se ha construido una presa para suministrar potencia hidroeléctrica, entonces la industria fabril aumentará considerablemente. Si no se ha construido una presa para suministrar potencia hidroeléctrica, entonces la economía se ha de basar totalmente en productos agrícolas. Por tanto, o la industria fabril aumentará considerablemente o la economía se ha de basar totalmente en productos agrícolas.
- O no hay muchos gatos o hay pocos ratones. Hay muchas flores. Si hay pocos ratones y hay muchos flores habrá muchos abejorros. Por tanto, hay muchos gatos o habrá muchos abejorros.
- Si el punto de una recta representa un entero, entonces el número se puede definir por un decimal infinito o por un par de decimales infinitos. O el número se puede definir por un decimal finito o el número puede ser definido o bien por un decimal infinito o por un par de decimales infinitos. El número no puede ser definido por un decimal finito. Por tanto el puntos en la recta representa un entero.
- Un gas denso (clorhídrico) se introduce en un frasco y sobre él se coloca un frasco que contenga un gas de menor densidad (amoníaco). Si los gases se mezclan por difusión, entonces el clorhídrico ha subido y el amoníaco descendido. Si el clorhídrico ha subido y el amoníaco ha descendido, entonces el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad. Si el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad, entonces el movimiento ha ser debido al movimiento molecular. Por tanto, el movimiento ha de ser al movimiento molecular.

Ejercicio 1.9. Simbolizando cada una de las siguientes listas de proposiciones, encuentra una conclusión que se derive de éstas usando los métodos de inferencia vistos.

- Si el número de representantes en el Senado está en en relación con la población, entonces la ciudad de México tiene más senadores que Colima. Si la ciudad de México tiene más senadores que Colima, entonces la ciudad tiene más de dos senadores.

- Si dos es mayor que uno, entonces tres es mayor que uno. Si tres es mayor que uno, entonces tres es mayor que cero. Dos es mayor que uno
- O la planta es una planta verde o es una planta no verde. Si es una planta verde, entonces fabrica su propio alimento. Si es una planta no verde, entonces depende de las materias de otras plantas para su alimento.
- Si esa figura tiene tres lados, entonces es un triángulo. Si esa figura tiene tres ángulos, entonces es un triángulo. Esa figura cerrada tiene o tres lado o tiene tres ángulos.
- O la energía interna de un átomo puede cambiar con continuidad o cambia sólo a saltos. La energía interna de un átomo no puede cambiar con continuidad.
- Si la luz fuera simplemente un movimiento ondulatorio continuo, entonces la luz más brillante daría lugar siempre a una emisión de electrones con mayor energía que los originados por la luz más tenue. La luz más brillante no siempre emite electrones con mayor energía que los originados por la luz más tenue.
- El terreno puede ser cultivado si y sólo si se provee de un sistema de riego. Si el terreno puede ser cultivado, entonces triplicará su valor actual.
- Si no ocurre que si un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua, entonces se puede caminar sobre el agua, entonces se puede caminar sobre el agua. Pero no se puede caminar sobre el agua. Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso. Si puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso, entonces el objeto flotará en el agua.

Ejercicio 1.10. Considerando las listas de premisas, infiere la proposición indicada en cada caso, listando paso a paso los métodos usados para llegar a ésta.

1. Demostrar $x = 3$ usando las premisas

- $x - 2 = 1 \wedge 2 - x \neq 1$
- $x = 1 \rightarrow 2 - x = 1$
- $x = 1 \vee x + 2 = 5$
- $x + 2 = 5 \vee x - 2 = 1 \rightarrow x = 3$

2. Demostrar $y = 1$ usando las premisas

- $2x + y = 7 \rightarrow 2x = 4$
- $2x + y = 5 \rightarrow y = 1$
- $2x + y = 7 \vee 2x + y = 5$
- $2x \neq 4$

3. Demostrar $x - y \neq 2$ usando las premisas

- $\neg(x > y \wedge x + y > 7)$
- $x \not> y \rightarrow x < 4$

- $x + y \not> 7 \rightarrow x < 4$
- $x - y = 2 \rightarrow x \not< 4$

4. Demostrar $x > 6$ usando las premisas

- $x > 5 \rightarrow x = 6 \vee x > 6$
- $x \neq 5 \wedge x \not< 5 \rightarrow x > 5$
- $x < 5 \rightarrow x \neq 3 + 4$
- $x = 3 + 4 \wedge x \neq 6$
- $x = 3 + 4 \rightarrow x \neq 5$

Ejercicio 1.11. Considerando las siguientes listas de premisas, infiere la proposición indicada en cada caso, listando paso a paso las reglas de inferencia usadas.

1. Demostrar: **C**

- $W \rightarrow F$
- $F \wedge C \leftrightarrow W$
- $\neg C \rightarrow W$

2. Demostrar: $\neg B \rightarrow \neg Q$

- $R \rightarrow N$
- $K \rightarrow B \vee R$
- $Q \vee M \rightarrow K$
- $\neg N$

3. Demostrar: $C \wedge \neg D$

- $A \wedge C \rightarrow B$
- $\neg A \vee (C \vee D)$
- $A \wedge B$

4. Demostrar: **P**

- $R \vee Q \rightarrow \neg P$
- $S \rightarrow \neg Q$
- $\neg R \wedge S$

5. Demostrar $P \wedge Q$

- $P \leftrightarrow Q$
- $P \vee Q$

6. Demostrar $B \vee C$

- $A \rightarrow B$

- $C \rightarrow D$

- $A \vee D$

7. Demostrar $M \leftrightarrow N$

- $M \vee N$

- $N \leftrightarrow (M \rightarrow P)$

- $P \vee (N \wedge Q)$

- $Q \leftrightarrow (P \rightarrow N)$

Para entregar: Ejercicio 1.10, inciso 4.

Referencias

- [Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.
- [SH92] Suppes, Patrick y Hill, Shirley: *Introducción a la Lógica Matemática*. Editorial Reverté, 1992.