Principios de conteo

Álgebra Superior I / Actuaría 2016-I

1. Conceptos básicos

1.1. Ordenaciones

Definición 1.1. Sea A un conjunto cualquiera. *Una ordenación con repetición de m elementos del conjunto A* es cualquier función $f\colon m \to A$. Denotaremos al conjunto de las ordenaciones con repetición de m elementos del conjunto A como $R(A, m)$.

A pesar que hemos introducido una notación para el conjunto de las funciones de un conjunto a otro, para eso introducimos otra notación para hacer énfasis en los objetos que estudiaremos.

Teorema 1.1. *Sea A un conjunto con n elementos. Entonces, el número de ordenaciones con repetición de tamaño m del conjunto A es exactamente*

$$|R(A, m)| = n^m$$

.

Demostración. Basta notar que el tamaño de las todas las funciones de m a n coincide con el conjunto en cuestión. Por tanto

$$|R(A, m)| = |A^m| = n^m.$$

□

Definición 1.2. Sea A un conjunto cualquiera. *Una ordenación de m elementos del conjunto A* es cualquier función inyectiva $f\colon m \to A$. Denotaremos al conjunto de las ordenaciones de m elementos del conjunto A como $O(A, m)$.

Lo que se intenta explorar ahora es la cardinalidad del conjunto de funciones inyectivas. Para estimar este valor podemos usar un argumento simplificado que tendremos que formalizar por supuesto. Pensemos en una función de m en n como una secuencia de m contenedores y en cada contenedor podemos elegir un elemento de n. Si pedimos que una vez tomado un elemento de n este no se pueda volver a tomar, cada que avancemos de un contenedor al siguiente tendremos una posibilidad menos. En ese caso los posibles valores a elegir en el contenedor 0 corresponden a n, mientras que en 1 $n-1$ y así sucesivamente.

Esto querrá decir que las posibilidades del último contenedor, el contenedor $m-1$, debe corresponder a $n-(m-1)=n-m+1$. Entonces, para explorar la totalidad de posibilidades de ordenar m elementos de un conjunto con tamaño n basta multiplicar los valores posibles en cada contenedor. Entonces estimar el número de ordenaciones con repetición resulta

$$n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

A continuación, presentamos un argumento formal para esta forma de razonar.

Lema 1.2. *Para cualesquiera m y n naturales, si $m+1 \leq n$ entonces*

$$O(n, m+1) \cong (n-m) \times O(n, m+1).$$

Demostración. Mostraremos que existe una función biyectiva

$$G\colon (n-m) \times O(n, m) \to O(n, m+1).$$

Para esto debemos observar primero que $(n-m) \cong n \backslash m$ y tomar una función $s\colon (n-m) \to n \backslash m$. Supongamos ahora que f es una función inyectiva de m en n, en ese caso es posible verificar que $\operatorname{ran}(f) \cong m$ por lo que, $n \backslash \operatorname{ran}(f) \cong n \backslash m$. Con esto en mente podemos ahora definir G de la siguiente manera

$$G(i, f) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i < m \\ s(i) & \text{si } i = m, \end{cases}$$

por lo que $G(i, f)\colon m+1 \to n$. G es por un lado inyectiva al ser ambas funciones que la componen inyectivas. Por otro lado, debe ser suprayectiva pues si tuviéramos una función $g\colon m+1 \to n$, basta tomar la pareja $(s^{-1}(g(m)), g|_m)$ para verificar que

$$G(s^{-1}(g(m)), g\,|_m) = g.$$

Lo anterior prueba que G es una biyección de lo que sigue la afirmación. □

Lema 1.3. *Para cualesquiera m y n naturales, si $m \leq n$ entonces*

$$O(n, m) = \prod_{i=1}^{m} n-(m-i)$$

Demostración. Probaremos el resultado por inducción sobre m. Para $m=0$ el resultado sigue de manera inmediata. Supongamos entonces que si $m \leq n$ entonces

$$O(n, m) = \prod_{i=1}^{m} n-(m-i);$$

si tenemos que $m+1 \leq n$, el lema 1.2 implica

$$\begin{aligned} |O(n,m+1)| &= |(n-m) \times O(n,m)| \\ &= (n-m) \cdot |O(n,m)| \\ &= (n-m) \cdot \prod_{i=1}^{m} n-(m-i) \\ &= \prod_{i=1}^{m+1} n-(m+1-i). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 1.4. *Sea A un conjunto de n elementos. Entonces, el número de ordenaciones de tamaño m del conjunto A es exactamente*

$$|O(A,m)| = \prod_{i=1}^{m} n-(m-i)$$

Demostración. El resultado es una consecuencia directa del lema y sigue al notar que

$$|O(A,m)| = |O(n,m)|.$$

$\square$

El teorema anterior no permite formular una expresión más sencilla de memorizar acerca del tamaño de $O(A,m)$ usando cocientes que resultan naturales:

$$O(A,n) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Definición 1.3. Sea A un conjunto cualquiera. *Una permutación de los elementos de A es una biyección de A en A.* Denotaremos al conjunto de permutaciones de los elementos del conjunto A como $P(A)$.

Como lo hemos hecho con las ordenaciones queremos conocer el tamaño de dicho conjunto. Sin embargo, esto resulta una tarea sencilla al notar que para un conjunto finito A con n elementos, entonces $P(A) = O(A,n)$ por lo que

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} n-(n-i) = n!.$$

Este argumento lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Sea A es un conjunto con n elementos. Entonces,*

$$|P(A)| = n!.$$

1.2. Combinaciones

Definición 1.4. Sea A un conjunto cualquiera. *Una combinación de m elementos de A es un subconjunto de A de tamaño m.* Al conjunto de combinaciones de tamaño m de A la denotaremos por $C(A, m)$.

Lema 1.6. *Para cualesquiera números naturales m y n, si $m \leq n$ entonces*

$$O(n, m) \cong P(m) \times C(n, m).$$

Demostración. Vamos a mostrar que existe una función biyectiva

$$G \colon P(m) \times C(n, m) \to O(n, m).$$

Si S es un subconjunto de n de forma que $S \cong m$, entonces podemos encontrar una función biyectiva $g_S \colon m \to S$ o lo que es lo mismo una función inyectiva $g_S \colon m \to n$; con esto establecido, estamos listo para definir G como sigue

$$G(f, S) = g_S \circ f.$$

Como ambas $g_S \circ f$ son inyectivas, $G(f, S)$ es de igual forma inyectiva por lo que es una ordenación. Basta comprobar que G es en verdad biyectiva.

Si $g \colon m \to n$ es una función inyectiva, entonces $\bar{g} \colon m \to \operatorname{ran}(g)$ definida por $\bar{g}(i) = g(i)$ es una función biyectiva, entonces

$$G(\bar{g}, \operatorname{ran}(g)) = g,$$

Por lo que la función G es suprayectiva. Por otro lado, si $f \neq f'$ y $S \neq T$, debemos tener que $G(f, S) \neq G(f', T)$, por lo que la función G es inyectiva y en consecuencia biyectiva. Esto es lo que buscábamos concluir. □

Teorema 1.7. *Sea A un conjunto con n elementos. Entonces, las combinaciones de m elementos de A son exactamente*

$$|C(A, m)| = \frac{n!}{m!(n - m!)}.$$

Demostración. El resultado es una consecuencia directa del lema pues sólo basta notar que

$$\begin{aligned} |C(A, m)| \cdot |P(m)| &= |C(n, m)| \cdot |P(m)| \\ &= |C(n, m) \times P(m)| \\ &= |O(n, m)|. \end{aligned}$$

En ese caso debemos tener que

$$|C(A, m)| \cdot m! = \frac{n!}{(n - m)!}.$$

De esto sigue el resultado que se afirma. □

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Para dos naturales cualquiera m y n, si $m < n$ y $f\colon m \to n$ es una función inyectiva cualquiera demuestra que $\operatorname{ran}(f) \cong m$.

Ejercicio 1.2. En una liga con diez equipos, ¿en cuántas formas puede terminar la tabla de clasificación al final de la temporada?

Ejercicio 1.3. Nueve escuelas organizan un torneo de baloncesto entre sus equipos. ¿Cuántos juegos habrá si cada equipo juega contra otro exactamente una vez?

Ejercicio 1.4. ¿En cuántas formas se puede elegir un comité conformado por un presidente, secretario y tesorero, entre un grupo de veinte personas?

Ejercicio 1.5. Un número hexadecimal es un número que puede tomar dieciséis valores por dígito. ¿Cuántas números hexadecimales se pueden forman que tengan ocho dígitos?

Ejercicio 1.6. ¿Cuántas posibilidades hay de tomar una mano de cuatro cartas de un mazo de cincuenta y dos?

Ejercicio 1.7. Considerando que el código Morse usa sólo dos símbolos, ¿cuántas palabras de hasta tamaño diez se pueden formar?

Ejercicio 1.8. ¿Cuántas formas hay de arreglar la palabra TUYO si ninguna letra se usa más de una vez?

Ejercicio 1.9. ¿Cuántas placas de automóvil hay que consten de dos letras y tres cifras? (Considérense 27 letras).

Ejercicio 1.10. En una bolsa hay ocho canicas, tres rojas y cinco blancas.

1. ¿De cuántas formas posibles se pueden sacar tres canicas?
2. ¿De cuántas formas posibles se pueden sacar tres canicas rojas?

Ejercicio 1.11. ¿Cuántos números de teléfono de seis cifras hay que comiencen con 1, 2, 3 o 4?

Ejercicio 1.12. ¿De cuántas formas puedes ordenar tu librero si tienes siete libros?

Ejercicio 1.13. De un grupo de quince estudiantes, cinco de ellos deben realizar exposiciones

Ejercicio 1.14. Un candado requiere cinco dígitos para abrirse. ¿De cuántas formas puedes intentar abrirlo?

Referencias

[CLRT90] Cárdenas, Humberto, Luis, Emilio, Raggi, Francisco y Tomás, Francisco: *Álgebra Superior.* Editorial Trillas, 1990.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan mediocremente proponer algo nuevo. El único objectivo al que sirven es preparar el curso de Álgebra Superior I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.