

# Semana 11: Conjuntos finitos y contables

## 1. Definiciones

Una vez que hemos presentado la suficiente teoría de números naturales, podemos comenzar a explorar algunas ideas respecto a lo finito. Una idea interesante para abrir es la llamada paradoja de Galileo que se encuentra publicada en el texto *Discurso y demostración matemática, en torno a dos nuevas ciencias*<sup>1</sup> Galileo presenta el siguiente razonamiento en él:

«Existen números que son cuadrado de un entero y otros que no lo son, esto quiere decir que la colección de todos los números es *más grande* que el conjunto de los números que son cuadrados como de los que no lo son. A pesar de esto, cualquier cuadrado se le puede asociar un entero y a cualquier entero se le puede asociar un cuadrado, por lo que no puede haber más de un tipo que de otro.»

La paradoja reside en el hecho que las partes no puede ser igual al todo. Sin embargo, Galileo mismo respondió a la paradoja que el mismo planteó, agregando: «Esta noción es válida sólo para colecciones finitas». Galileo se adelantó a su tiempo habiendo encontrado una noción que caracteriza a las colecciones infinitas.

Aunque el comentario anterior es anecdótico, hay una idea interesante en la manera que Galileo compara las dos colecciones de números asociando a cada miembro de una, un elemento de otra. Esto, en realidad, es algo que nos debe parecer conocido pues ya hemos explorado la idea con anterioridad. En la siguiente definición tomaremos esta idea para comparar dos conjuntos.

**Definición 11.1.** Para conjuntos  $A$  y  $B$  diremos que *son equivalentes* si existe al menos una función biyectiva  $f: A \rightarrow B$ .

Como un ejemplo de esto, puede pensarse en los conjuntos  $\mathcal{E}[A]$  y  $\mathcal{P}[A]$ , los conjuntos de las clases de equivalencia y de las particiones sobre  $A$ , respectivamente. Uno de los teoremas más importantes (y elaborados) del que hemos presentado en el curso, garantiza que estos conjuntos son equivalentes. De hecho, la afirmación de ese teorema es parecida a la conclusión a la que llega Galileo acerca de los cuadrados perfectos.

**Definición 11.2.** Para cualquier natural  $n$ , definimos el conjunto

$$[n] = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\}.$$

Es importante observar que el conjunto  $[n]$  está perfectamente definido para todo natural sin existir problema alguno, el único caso que puede parecer extraño es cuando tomamos  $n = 0$ . Sin

---

<sup>1</sup>Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze.

embargo, no es difícil resolverlo. Basta observar que no existe un número natural  $m$  que satisfice al mismo tiempo  $1 \leq m$  y  $m \leq 0$  por lo que

$$[0] = \emptyset.$$

Tampoco es complicado encontrar los otros conjuntos, por ejemplo,

$$[1] = \{1\},$$

$$[2] = \{1, 2\},$$

$$[3] = \{1, 2, 3\}$$

y en general podemos representar al conjunto como

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Es importante observar que el conjunto  $[n]$  tiene exactamente  $n$  elementos y estos conjuntos servirán como una base adecuada para construir nuestros conceptos de finitud pues en esencia un conjunto tiene  $n$  elementos si *se parece lo suficiente* al conjunto  $[n]$ . Explicamos como es que se parecen lo suficiente en la siguiente definición.

**Definición 11.3.** Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Diremos que  $A$  es *un conjunto finito* si existe un número natural  $n$  de forma que  $A$  y  $[n]$  son equivalentes. Un conjunto que no es finito, se dirá *un conjunto infinito*.

**Ejemplo.** El conjunto  $A = \{3, 79, 123, 345, 768\}$  es un conjunto finito pues la función  $f: [5] \rightarrow A$  definida como  $f(1) = 3, f(2) = 79, f(3) = 123, f(4) = 345$  y  $f(5) = 768$ .

**Ejemplo.** El conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$  es un conjunto finito pues no es difícil ver que la función  $h: [8] \rightarrow A$  definida como  $f(1) = a, f(2) = b, \dots, f(8) = z$  lo cual muestra nuestra afirmación.

Los ejemplos anteriores, muestran como la definición de conjunto finito captura nuestra intuición. Sin embargo, también muestra que no todos los conjuntos finitos están cortados con la misma tijera. El primero es un conjunto que tiene 5 elementos mientras el segundo 8 y aunque reunidos poseen una propiedad en común nos gustaría distinguir su *número de elementos*. Para llevar la teoría a esa posición necesitamos mostrar un par de lemas que nos permitan presentar una noción intuitiva la teoría que hemos estado desarrollando.

**Lema 11.1.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Para cualquier subconjunto propio  $S \subset [n]$ , existe un número natural  $m < n$  de forma que  $S$  y  $[m]$  son equivalentes.

*Demostración.* Usaremos inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$ , por vacuidad el resultado debe ser cierto pues no existe subconjunto propio del conjunto vacío. Supongamos ahora que cada subconjunto propio de  $[n]$  es equivalente con  $[m]$  para algún  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m < n$ . Queremos probar el mismo resultado para  $n + 1$ , para esto supongamos  $S \subset [n + 1]$ . Tenemos solamente dos posibilidades:

- Si por un lado  $n + 1 \notin S$ , entonces  $S \subseteq [n]$  y si es un subconjunto propio, entonces por hipótesis de inducción, existe  $m$  tal que  $S$  es equivalente con  $[m]$  y además  $m < n < n + 1$  de lo que el resultado sigue. Si por el contrario,  $S = [n]$ , entonces a través de la identidad tenemos que  $S$  es equivalente con  $[n]$  y como  $n < n + 1$ , el resultado sigue de igual forma.

- Supongamos ahora que  $n + 1 \in S$ . Como  $S$  es un subconjunto propio de  $[n + 1]$ , entonces existe  $k \in [n + 1]$  tal que  $k \notin S$ , como  $n + 1 \in S$ , entonces  $k \neq n + 1$  y por tanto debemos tener que  $k \in [n]$ . Definimos entonces una función  $f: S \rightarrow [n]$  como

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \neq n + 1 \\ k & \text{si } i = n + 1 \end{cases}.$$

Basta observar que si  $i \neq j$  entonces  $f(i) \neq f(j)$ , por lo que debemos concluir la función es inyectiva. Por otro lado sabemos que  $f[S] \subseteq [n]$ . Si resultara  $f[S] = [n]$  entonces  $f$  es biyectiva y  $S$  sería equivalente con  $[n]$  siendo  $n < n + 1$  de lo que sigue el resultado. Por otro lado, si  $f[S] \subset [n]$ , entonces podemos utilizar la hipótesis de inducción para encontrar  $m$  tal que  $f[S]$  es equivalente con  $[m]$  con  $m < n < n + 1$ . Esto anterior afirma que existe una función biyectiva  $g: f[S] \rightarrow [m]$ . Afirmamos que  $g \circ f$  es una biyección entre  $S$  y  $[m]$ . En efecto,  $g \circ f$  es inyectiva pues tanto  $f$  como  $g$  lo son; también, al ser  $g$  sobreyectiva, si  $j \in [m]$  entonces existe  $s \in f[S]$  de forma que  $g(s) = j$ . Como  $s \in f[S]$  entonces existe  $i \in S$  de forma que  $s = f(i)$  conectando estas igualdades, podemos concluir que  $j = g(s) = g(f(i))$  por lo que  $g \circ f$  es sobreyectiva. En ese caso, la composición enunciada es una biyección mostrando que  $S$  es equivalente con  $[m]$ .

■

**Lema 11.2.** Sea  $n$  un número natural. Si  $S \subset [n]$ , entonces  $S$  y  $[n]$  no son equivalentes.

*Demostración.* Usaremos inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  el resultado debe ser cierto al no existir subconjunto propio del conjunto vacío. Supongamos que cualquier subconjunto propio de  $[n]$  no es equivalente a  $[n]$ . Queremos probar lo mismo para  $n + 1$  para lo cual procedemos por contradicción. Supongamos entonces que  $S \subset [n + 1]$  y que  $S$  es equivalente a  $[n + 1]$ , i.e., existe una función biyectiva  $f: [n + 1] \rightarrow S$ . Tenemos que analizar dos posibilidades:

- Si  $n + 1 \notin S$ , entonces  $S \subseteq [n]$ . En ese caso, podemos tomar el conjunto  $T = S \setminus \{f(n + 1)\}$  y considerar que la restricción de  $f$  al conjunto  $[n]$  es una función  $f|_{[n]}: [n] \rightarrow T$  la cual debe ser biyectiva. En ese caso,  $T$  es equivalente a  $[n]$  lo que deriva en una contradicción con la hipótesis de inducción pues  $T \subset [n]$ .
- Si  $n + 1 \in S$ , como  $S$  es un subconjunto propio, entonces existe  $1 \leq k \leq n$  de forma que  $k \notin S$ . Esto significa que  $S \setminus \{n + 1\} \subset [n]$ . Como hemos supuesto que  $S$  es equivalente con  $[n + 1]$ , lo anterior implica que  $S \setminus \{n + 1\}$  es equivalente con  $[n + 1] \setminus \{n + 1\} = [n]$ . En ese caso,  $[n]$  sería equivalente a uno de sus subconjuntos propios lo que contradice, de nueva cuenta, la hipótesis de inducción.

Con los casos anteriores, debemos concluir que  $S$  no puede ser equivalente a  $n + 1$  si  $S$  es un subconjunto propio de  $n + 1$ . De esto sigue el resultado. ■

Es importante observar que los lemas anteriores podrían parecer resultados extremadamente obvios. Sin embargo, nuestra teoría debe ser desarrollada de manera clínica de modo que ningún detalle escape de nuestro entendimiento. A pesar de esto, una vez plateado este resultado podemos comenzar a usarlo de a poco como nuestra intuición nos dicta sin olvidar, claro, que el resultado admite prueba.

**Lema 11.3.** Si  $[m]$  y  $[n]$  son equivalentes, entonces  $m = n$ .

*Demostración.* Proccemos por contraposición. Si  $m \neq n$ , solo existen dos posibilidades o  $m < n$  o  $n < m$ . Si  $m < n$ , entonces  $[m] \subset [n]$  consiguiendo que este sea un subconjunto propio de  $[n]$ . Según el lema, esto indica que  $[m]$  no puede ser equivalente a  $[n]$ . El caso en que  $n < m$  se prueba de manera similar. ■

**Comentario.** El lema anterior muestra hay a lo más un número  $n$  para el cual un conjunto es equivalente. Esto se debe a que si  $f: [m] \rightarrow A$  y  $g: [n] \rightarrow A$  son funciones biyectivas, entonces  $g^{-1} \circ f: [m] \rightarrow [n]$  es también una biyección y según el lema anterior  $m = n$ . Esto nos permite clasificar a ese único número de una manera muy particular en el caso en exista.

**Definición 11.4.** Para un conjunto finito  $A$ , al único número  $n$  de forma que sea posible obtener una función biyectiva  $f: [n] \rightarrow A$  se le denomina *la cardinalidad de  $A$* . En general, denotamos esto como

$$|A| = n.$$

**Ejemplo.** Debemos recordar que  $[0] = \emptyset$  y por lo que existe una única función  $[0] \rightarrow \emptyset$ . Esta función, por vacuidad, es biyectiva por lo que el vacío es finito y tiene cardinalidad 0, i.e.,

$$|\emptyset| = 0.$$

**Ejemplo.** Tampoco es difícil convencernos que los conjuntos  $[n]$  tiene todos cardinalidad  $n$ , i.e.,

$$|[n]| = n.$$

**Teorema 11.4.** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos y existe una función inyectiva  $f: A \rightarrow B$  entonces,

$$|A| \leq |B|.$$

*Demostración.* En ese caso,  $f[A] \subseteq B$  y distinguimos dos casos. Si  $f[A] = B$ , entonces  $f$  es biyectiva y por el ejercicio 11.4 se tiene  $|A| = |B|$ . Si por otro lado,  $f[A] \subset B$  entonces  $|A| < |B|$ . Esto prueba el resultado. ■

**Teorema 11.5.** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos y existe una función sobreyectiva  $f: A \rightarrow B$  entonces,

$$|B| \leq |A|.$$

*Demostración.* Como la función  $f$  es sobreyectiva, admite inversa por la derecha  $g: B \rightarrow A$ . La función  $g$  debe ser inyectiva pues ésta admite inversa por la izquierda. Según el lema anterior eso implica que  $|B| \leq |A|$  como buscábamos. ■

Es importante notar que los lemas afirman que los conjuntos  $[n]$  no admiten subconjuntos propios equivalentes a ellos. Esto es en fondo resume la idea «el todo no es igual a las partes». Como afirma Galileo, esto sólo se cumple si hablamos de objetos finitos y en realidad esto es lo que motiva a usar los conjuntos  $[n]$  como la base de nuestra idea de conjunto finito pues podemos transferir a través de la funciones biyectivas dicha propiedad. Sin embargo, debemos preguntarnos ahora que sucede si un conjunto no es finito. El siguiente teorema es una caracterización propuesta por el famoso matemático alemán Richard Dedekind en 1888. En realidad, Dedekind propuso el enunciado del siguiente teorema como *la definición* de conjunto infinito con la ventaja que esta última no depende de los números naturales para ser formulada.

**Teorema 11.6.** *Un conjunto  $S$  es infinito si es equivalente a un subconjunto propio de sí mismo.*

*Demostración.* Supongamos que  $S$  fuera equivalente a  $n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , en ese caso existe una función biyectiva  $f: S \rightarrow [n]$ . Si  $T \subset S$  es un subconjunto propio, entonces  $f[T] \subset [n]$  es un subconjunto propio, por lo que  $f[T]$  no puede ser equivalente a  $n$  y en consecuencia tampoco puede ser equivalente a  $S$ . Hemos probado ya que, si  $S$  es finito, entonces no es equivalente a un subconjunto propio de sí mismo. Por contraposición, de esto sigue el resultado. ■

Es interesante notar que el teorema anterior, es precisamente la manera en que Galileo resolvió la paradoja que el mismo encontró: El problema es que, en los conjuntos infinitos, el todo puede ser igual a las partes. Finalmente, podemos dar un ejemplo de un conjunto infinito, el cual no debería ser una sorpresa.

**Teorema 11.7.** *El conjunto  $\mathbb{N}$  es infinito.*

*Demostración.* Basta observar que la función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  definida como  $f(n) = n + 1$  es biyectiva. Luego  $\mathbb{N}$  es equivalente con un subconjunto propio de sí mismo. ■

A pesar de que el tema ha salido a la luz ya, estudiaremos primero con detalle los conjuntos finitos y presentaremos algunos resultados que serán útiles para resolver algunos problemas de corte aplicado.

## 2. Uniones y productos de conjuntos finitos

**Lema 11.8.** *Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos tales que  $A \cap B = \emptyset$  entonces,  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .*

*Demostración.* Por ser finitos  $A$  y  $B$  es posible encontrar funciones  $f: A \rightarrow [m]$  y  $g: B \rightarrow [n]$ , ambas biyectivas, donde  $m$  y  $n$  son las cardinalidades de  $A$  y  $B$  respectivamente. Sea  $h: A \cup B \rightarrow [m + n]$  la función definida como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) + m & \text{si } x \in B \setminus A \end{cases}$$

Como  $A \cap B = \emptyset$ ,  $h(x) = h(y)$  implica que ambos están o en  $A$  o en  $B$  pero no ambos. En ese caso,  $f(x) = f(y)$  o  $g(x) = g(y)$  por lo que en cualquier caso  $x = y$ , mostrando con esto que  $h$  es inyectiva. Más aún, debe ser sobreyectiva pues si  $i \in [m + n]$  entonces,  $1 \leq i \leq m$  o  $m + 1 \leq i \leq m + n$ . En el primer caso, usamos la función  $f$  para encontrar un elemento  $a \in A$  de forma que  $h(a) = f(a) = i$  y el segundo, expresamos  $i = m + k$  y usando la función  $g$  encontramos  $b \in B$  de forma que  $g(b) = k$  por lo que  $h(b) = g(b) + m = m + k = i$ . Lo anterior muestra que  $h$  es sobreyectiva. En ese caso, la cardinalidad de  $A \cup B$  se encuentra descrita por el número  $m + n$ . ■

**Corolario 11.9.** *Para conjuntos finitos  $A$  y  $B$ , se cumple*

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|.$$

*Demostración.* Sólo debemos mostrar que existe una función sobreyectiva  $f: A \cup B \rightarrow [m + n]$  donde  $m$  y  $n$  son las cardinalidades de  $A$  y  $B$  respectivamente. En realidad es la misma que se usa en el lema anterior la cual era sobreyectiva. En ese caso, se cumple de inmediato lo que buscamos. ■

**Teorema 11.10** (Principio de Adición). Sean  $A_1, \dots, A_n$  conjuntos finitos disjuntos por pares. Entonces,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ . Cuando  $n = 1$  la igualdad se cumple, además Para un natural cualquier  $n$ , debemos suponer que la igualdad se cumple para  $n$  conjuntos finitos disjuntos por pares. Entonces, para conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  finitos y disjuntos por pares, se cumple lo siguiente:

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1}.$$

Es importante notar que los conjuntos a la derecha de la igualdad son disjuntos al ser la colección disjunta por pares, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^n |A_i| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_{n+1}|. \quad \blacksquare$$

**Corolario 11.11** (Principio de Sustracción). Sea  $A$  un conjunto finito y sea  $B \subseteq A$  entonces,

$$|A \setminus B| + |B| = |A|$$

*Demostración.* Como  $A \setminus B$  y  $B$  son conjuntos disjuntos, por el principio de adición sabemos que  $|A \setminus B| + |B| = |(A \setminus B) \cup B|$ . Además, dado que  $B \subseteq A$ , tenemos que  $A \setminus B \cup B = A$ . Lo anterior es suficiente para encontrar el resultado que buscamos.  $\blacksquare$

**Lema 11.12.** Para conjuntos finitos  $A$  y  $B$ , el producto cartesiano satisface

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

*Demostración.* Es sencillo concluir que para un elemento de  $b \in B$ , se satisface

$$|A \times \{b\}| = |A|.$$

Si tomamos  $m$  y  $n$  como las cardinalidades de  $A$  y  $B$  respectivamente, y suponemos que  $g: [n] \rightarrow B$  es una biyección, entonces

$$A \times B = \bigcup_{i=1}^n A \times \{f(i)\}.$$

Según el principio de adición debemos tener

$$|A \times B| = \sum_{i=1}^n |A \times \{f(i)\}| = \sum_{i=1}^n m = mn. \quad \blacksquare$$

Debemos recordar que el producto cartesiano no es asociativo, i.e., en general no se cumple

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Esto puede ser un poco problemático, sin embargo la equivalencia entre conjuntos resuelve este problema sin mucho trabajo. Por ejemplo, si transformamos  $(a, (b, c)) \mapsto ((a, b), c)$  estamos definiendo una función  $A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$  que resulta biyectiva. Esto quiere decir que aunque los conjuntos en cuestión no son iguales, sí resultan equivalentes. Es por esta razón, que nosotros convendremos definir *el producto de los conjuntos*  $A_1, A_2, \dots, A_n$  usando recursión de la siguiente manera:

$$\bigtimes_{i=1}^1 A_i = A_1$$

y

$$\bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i = \left( \bigtimes_{i=1}^n A_i \right) \times A_{n+1}.$$

Es importante notar que la forma en que se define este producto asocia de una manera en particular. Por ejemplo, el producto de los conjuntos  $A_1, A_2$  y  $A_3$  resulta  $(A_1 \times A_2) \times A_3$ . Sin embargo, no nos interesa distinguir todas las asociaciones y es por esta razón que los elementos del conjunto  $\bigtimes_{i=1}^n A_i$  se escribirán como

$$(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Abusando de esta notación, consideraremos al producto como el conjunto

$$\bigtimes_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Vamos ahora a determinar el tamaño de este conjunto cuando los componentes son finitos.

**Teorema 11.13** (Principio del producto). *Sean  $A_1, \dots, A_n$  conjuntos finitos. Entonces,*

$$\left| \bigtimes_{i=1}^n A_i \right| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

*Demostración.* Es parecido al principio de adición, y de igual forma se prueba por inducción basando el paso inductivo en nuestra convención para el producto cartesiano:

$$\bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i = \left( \bigtimes_{i=1}^n A_i \right) \times A_{n+1}$$

por lo que

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \left| \bigtimes_{i=1}^n A_i \right| |A_{n+1}| = \left( \prod_{i=1}^n |A_i| \right) |A_{n+1}| = \prod_{i=1}^{n+1} |A_{n+1}|. \quad \blacksquare$$

### 3. Aplicaciones

Los principios definidos en la sección anterior, pueden ser pensados de manera intuitiva. Estos nos permitirá mostrar que nuestra teoría puede realizar predicciones siguiendo las interpretaciones adecuadas de ellos. Vamos primero a describir los teoremas como si de reglas se tratara para

poder usarlos sin necesidad de hacer referencia a la teoría sin olvidarnos, por supuesto, que provienen de ella. Las versiones de estos (y algunos ejemplos que los ilustran) son tomadas íntegras del texto [Gri97] el cual puede ser interesante revisar para obtener una idea intuitiva de como manipularlos.

**Principio de adición:** Si una primera tarea puede realizarse de  $m$  formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de  $n$  forma, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas puede utilizarse cualquiera de  $m + n$  formas.

**Ejemplo.** En una tienda de electrónicos, venden 10 modelos de la marca A de computadoras y 30 modelos de la marca B. Por el principio de adición, un cliente puede elegir entre 40 modelos distintos de computadora en la tienda.

**Ejemplo.** En la terminal de autobuses hay dos líneas que llegan a la ciudad de Puebla. La primera ofrece salidas a las 11:00, 15:00 y 21:00 hrs mientras la segunda ofrece salidas a las 12:00 y 17:00 hrs. Según el principio de la adición, podemos elegir  $3 + 2 = 5$  horarios distintos del autobús.

Realmente el principio de adición está formulado con el lema 11.8 pero puede formularse como el teorema 11.10 involucrando tantas tareas como sea necesario.

**Ejemplo.** En un juego de cartas, una mano incluye tres cincos, dos reyes y dos reinas. En el siguiente turno se debe elegir una carta para jugar y según el principio de adición, podemos elegir de  $3 + 2 + 2 = 7$  formas distintas la siguiente jugada.

**Principio del producto:** Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, y si existen  $m$  resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen  $n$  resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de  $mn$  formas.

Así como el lema 11.12 donde se origina el principio del producto, el principio admite un resultado más general como el que aparece en el teorema 11.13 el cual extendiendo dicho principio a cualquier número etapas.

**Ejemplo.** En la memoria principal de un computador la información se almacena en celdas de memoria. Para identificar las celdas de memoria principal de un computador, cada celda tiene asignado un nombre único conocido como su *dirección*. En algunos computadores, una dirección se presenta mediante una lista ordenada de ocho símbolos en la cada símbolo es uno de los bits (de *binary digits*, dígitos binarios) 0 ó 1. Esta lista de ocho bits se denomina *byte*. Mediante la regla del producto, vemos que existen

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$

de esos bytes. Por lo tanto, tenemos 256 direcciones para las celdas de memoria en las cuales es posible almacenar información.

**Ejemplo.** Un vendedor desea recorrer 50 ciudades y desea conocer de cuantas formas las puede recorrer sin importar en que orden las recorra siempre que las recorra todas. Debemos observar que puede empezar en cualquier ciudad por lo que en la primera etapa puede elegir entre 50 ciudades. En la segunda etapa, al haber estado ya en una ciudad, puede elegir entre las 49 restantes.



En la tercera, habrá estado ya en dos ciudades por lo que podrá elegir entre las 48 ciudades restantes. Continuando este proceso, el principio del producto nos permite afirmar que tendrá en total  $50!$  formas de recorrer todas las ciudades.

**Ejemplo.** Supongamos que un conjunto  $A$  tiene 5 elementos, entonces cada subconjunto  $B \subseteq A$  se puede describir a través de afirmar si un elemento pertenece o no a éste. El principio del producto afirma que deben existir

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

Es posible combinar ambos principios para obtener diferentes tipos de resultados. En esencia, se trata de identificar siempre uniones de conjuntos disjuntos y  $n$ -tuplas en un proceso creativo.

**Ejemplo.** En el lenguaje de programación C, se recomienda que las variables sean solamente letras o letras seguidas de un sólo dígito. El lenguaje es sensible a mayúsculas, por lo que las variables  $a5$  y  $A5$  se consideran distintas. Vamos a estudiar primero la colección de variables que constan de una letra y un dígito: Como hay  $26 + 26 = 52$  letras a elegir (26 mayúsculas y 26 minúsculas) y 10 dígitos, habrá  $52 \cdot 10 = 520$  formas de elegir una variable que tenga una letra y un dígito. Además, como hay 52 formas de elegir una variable que sólo contenga una letra, en total hay  $520 + 52 = 572$  formas distintas de definir una variable de manera en que se recomienda.

**Ejemplo.** Para entrar a un evento en el centro de la ciudad, se requiere recibir una invitación con un código que contiene 5 símbolos de los cuales el primero debe ser un dígito y el resto dígitos o letras minúsculas. Esto quiere decir que el primer símbolo se puede elegir de 10 manera distintas. Como el resto se pueden elegir entre dígitos o letras, entonces se pueden elegir de  $10 + 26 = 36$  maneras distintas. En ese caso, el total de códigos que se pueden emitir es

$$10 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 16,796,160.$$

## Ejercicios

*Ejercicio 11.1.* Demuestra que  $|A| = 0$  si y sólo si  $A = \emptyset$ .

*Ejercicio 11.2.* Sean  $A$  y  $B$  conjuntos y sea  $f: A \rightarrow B$  una función biyectiva. Si  $a \in A$  y tomamos  $g: A \setminus \{a\} \rightarrow B \setminus \{f(a)\}$  como una función definida por  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in A \setminus \{a\}$ , demuestra que  $g$  es también una función biyectiva.

*Ejercicio 11.3.* Sea  $A$  y  $B$  conjunto de forma que son equivalentes y sea también  $a \in A \cap B$ . Demuestra que los conjuntos  $A \setminus \{a\}$  y  $B \setminus \{a\}$  son equivalentes.

*Ejercicio 11.4.* Sea  $f: A \rightarrow B$  una función biyectiva entre conjuntos finitos. Demuestra que

$$|A| = |B|.$$

*Ejercicio 11.5.* Sean  $A$  y  $B$  conjunto cualquiera. Si  $B$  y  $S$  son equivalentes, demuestra que son equivalentes los conjuntos

$$\bigcup_{b \in B} A \times \{b\} \quad \text{y} \quad \bigcup_{s \in S} A \times \{s\},$$

*Ejercicio 11.6.* Para un conjunto  $A$  finito cualquiera, demuestra que

$$|A \times \{b\}| = |A|.$$

*Ejercicio 11.7.* Sea  $f: A \rightarrow B$  una función inyectiva. Si  $S \subset A$  es un subconjunto propio, demuestra que  $f[S] \subset B$ .

*Ejercicio 11.8.* Demuestra que si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

*Ejercicio 11.9.* Vamos revisitar un problema de otra semana, ahora con nuestra terminología de conjuntos finitos. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos finitos. Para una función  $f: A \rightarrow B$  demuestra que son equivalentes los enunciados:

- $f$  es biyectiva.
- $f$  es inyectiva.
- $f$  es sobreyectiva.

*Ejercicio 11.10.* Sea  $A$  un conjunto finito y sea  $f: A \rightarrow [n]$  una función. Demuestra que

$$|A| = \sum_{i=1}^n |f^{-1}[\{i\}]|$$

*Ejercicio 11.11.* Para conjuntos  $A, B$  y  $C$ , demuestra que son equivalentes los conjuntos

$$(C^B)^A \quad \text{y} \quad C^{A \times B}$$

*Ejercicio 11.12.* Sea  $p: A \rightarrow A$  una función de forma que  $p \circ p = p$ . Demuestra que existe un conjunto  $B \subset A$  de forma que:

- (a)  $p$  transforma cada elemento a sí mismo, i.e.,  $p(b) = b$ .
- (b)  $p$  transforma cada elemento fuera de  $B$ , en un elemento en  $B$ , i.e., si  $a \in A$  pero  $a \notin B$ , entonces  $p(a) \in B$ .

*Ejercicio 11.13.* Los automóviles Buick se fabrican en 4 modelos, 12 colores, 3 tamaños de motor y 2 tipos de transmisión. Responde:

- (a) ¿Cuántos Buick distintos se puede fabricar?
- (b) Si uno de los colores disponibles es azul, ¿cuántos Buick azules diferentes se pueden fabricar?

*Ejercicio 11.14.* El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, vicepresidente, un secretario y un tesorero, puede representar el consejo a los accionistas para su aprobación?

*Ejercicio 11.15.* El número 2014 tiene cuatro dígitos, 3 de ellos pares y 1 impar. ¿Cuántos números de 4 dígitos tienen esta propiedad?

*Ejercicio 11.16.* Un sábado, cuando iban de compras, Juana y Teresa vieron a dos hombres alejarse en automóvil de la fachada de una joyería, justo antes de que sonara una alarma contra robos. Aquella todo ocurrió muy rápido, cuando fueron interrogadas las dos jóvenes, pudieron dar a la policía la siguiente información acerca de la placa (que constaba de dos letras seguidas de cuatro dígitos) del automóvil que huyó. Teresa estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q, y que el último dígito era un 3 o un 8. Juana dijo que la primera letra de la placa era una C o una G y que el primer dígito era definitivamente un 7. ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía?

|                                       |
|---------------------------------------|
| <b>Para entregar:</b> Ejercicio 11.10 |
|---------------------------------------|

## Referencias

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objetivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.

El contenido original que aparezca en estas notas (si es que lo hay), se distribuye bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). ©Eduardo Antonio Gomezcaña Alanis.