Semana 5: Límites

1. Definición de límite

Definición 5.1. Sea f una función. Se dice que *la función f tiende hacia el límite L en a* si: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo. Considerando la función $f(x) = 2x$, su límite en 1 debe ser 2. Para probar esta afirmación, tomaremos $\varepsilon > 0$ de manera arbitraria. Observemos primero que

$$|f(x) - L| = |2x - 2| = 2|x - 1|.$$

La anterior igualdad nos permite observar que debemos elegir $\delta = \varepsilon/2$ pues si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= 2|x - 1| \\ &< 2\delta \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Esto garantiza que el límite de la función es 2 al aproximarse a 1, como se afirmó.

Ejemplo. Demostraremos que el límite de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

en 2 es 4. Para esto usaremos simplemente la definición de límite. Supongamos $\varepsilon > 0$, entonces si tomamos $\delta = \varepsilon$ y suponemos $0 < |x - 2| < \delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| \\ &= \left| \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} - 4 \right| \\ &= |x + 2 - 4| \\ &= |x - 2| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo que hemos probado lo que deseábamos.

Ejemplo. Probemos que el limite de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en 3 es 10. Sea $\varepsilon > 0$, entonces podemos tomar $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/11)$. Si asumimos que $0 < |x - 3| < \delta$, en particular tenemos que $|x - 3| < 1$ y en consecuencia $2 < x < 4$ y entonces $7 < 2x + 3 < 11$ de lo que podemos concluir que el número $2x + 3$ es positivo y en consecuencia tenemos que $|2x + 3| < 11$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
|2x^2 - 3x + 1 - 10| &= |2x^2 - 3x - 9| \\
&= |2x + 3||x - 3| \\
&< 11|x - 3| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por lo que la definición sigue y podemos afirmar que el límite es precisamente 10.

Ejemplo. El límite para la función $f(x) = x^2 + x + 1$ es 7 en 2. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/6)$, en ese caso si $|x - 2| < \delta$, debemos tener por un lado que $|x - 2| < 1$ por lo que $1 < x + 3 < 6$ y en consecuencia $|x + 3| < 6$. También

$$
\begin{aligned}
|x^2 + x + 1 - 7| &= |x^2 + x - 6| \\
&= |x + 3||x - 2| \\
&< 6|x - 2| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que el límite es el que afirmamos.

Ejemplo. Para la función $I(x) = x$ el límite en a es a. Para probar esto procedemos siguiendo como siempre la definición. Sea $\varepsilon > 0$, en ese caso tomamos $\delta = \varepsilon$ y en consecuencia si $0 < |x - a| < \delta$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|f(x) - a| &= |x - a| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Probando la afirmación que pretendíamos.

Ejemplo. Para la función $f(x) = 1/x$, para cualquier número $a \neq 0$, $f(x)$ tiende a $1/a$. Primero debemos notar que

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| &= \left| \frac{a - x}{ax} \right| \\
&= \frac{1}{|a|} \frac{1}{|x|} |x - a|
\end{aligned}
$$

Debemos conseguir entonces acotar $1/|x|$, para esto propondremos

$$|x - a| < \frac{|a|}{2}$$

o en otras palabras

$$-\frac{|a|}{2} + a < x < \frac{|a|}{2} + a.$$

Afirmamos ahora que $|x| > |a|/2 > 0$ y para mostrarlo analizaremos dos casos:

- Si por un lado $a > 0$, la primera de las desigualdades garantiza

$$0 < \frac{a}{2} < x$$

y como los números involucrados son positivos, la afirmación realizada sigue.

- Si por otro lado $a < 0$, la segunda de las desigualdades garantiza que

$$x < \frac{a}{2} < 0$$

o de manera equivalente

$$0 < -\frac{a}{2} < -x$$

y como los números involucrados son negativos, la afirmación realizada sigue.

De la afirmación anterior, se desprende de inmediato la desigualdad

$$\frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|},$$

lo que acota el termino que buscamos. Si ahora proponemos

$$\delta = \text{mín}\left(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right),$$

entonces, para cualquier número x que satisface $0 < |x-a| < \delta$, se tendrá

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| &= \frac{1}{|a|}\frac{1}{|x|}|x-a| \\ &< \frac{2}{|a|^2}|x-a| \\ &< \frac{2}{|a|^2}\frac{|a|^2}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo que de acuerdo a la definición, f tiende hacia a $1/a$ en a.

Vamos a presentar ahora un ejemplo de un caso en el que es imposible encontrar un número que sea el límite de una función. Para conseguir esto es necesario interpretar la negación de la definición de límite. Cuando sea falso que el límite de f es L en el punto a, debe verificarse lo siguiente:

> Existe *algún* $\varepsilon > 0$ tal que para *todo* $\delta > 0$ existe *algún* x que satisface $0 < |x-a| < \delta$ pero es falso que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Debe notarse que la expresión anterior resulta de analizar los negados de los cuatificadores involucrados en la definición de límite, además de la negación de una implicación.

Ejemplo. Ya hemos mostrado que el límite de la función $f(x) = x$ es a en a. Vamos, sin embargo, a ignorar esto por un momento para ilustrar como se deja de satisfacer la definición probando que límite de la función identidad no es 3 en 1. Tomemos $\epsilon = 2$ (existe algún ϵ). Si $\delta > 0$ (para todo δ), elegimos $x = 1 - \delta/2$ (existe algún x) por lo que

$$|x - 1| = |-\delta/2| = |\delta/2| < \delta$$

pero con este valor

$$|f(x) - 3| = |x - 3| = |-\delta/2 - 2| = |2 + \delta/2| > 2 = \varepsilon.$$

Esto quiere decir que el enunciado que define el límite es falso y podemos concluir que f no tiene a 3 como límite en 1.

Ejemplo. Mostraremos que la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

no tiene un límite en 0. Usaremos la negación que acabamos de presentar para mostrar este hecho. Supongamos L como un número cualquiera. Podemos comenzar nuestro análisis como aparece en la figura 1.

Si $L \geq 0$, tomemos $\varepsilon = 1$, entonces para cualquier $\delta > 0$ elegimos $x = -\delta/2$ de lo que $|x - \delta| = \delta/2 < \delta$ y como $|x| = -x$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |-1 - L| \\ &= L + 1 \\ &> \varepsilon. \end{aligned}$$

Si ahora $L < 0$, tomamos de igual forma $\varepsilon = 1$, y para todo $\delta > 0$ podemos elegir $x = \delta/2$, por lo que $|x - \delta| = \delta/2 < \delta$ y como $1 - L > 1$ y $|x| = x$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |1 - L| \\ &= 1 - L \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

Por la propiedad de tricotomía, $L \geq 0$ y $L < 0$ son los únicos casos posibles y, como en cualquiera de ellos hemos probado que L no puede ser el límite de la función, podemos concluír que el límite de f en 0 no existe.

Propondremos ahora una notación para los límites, sin embargo antes debemos verificar que estos son únicos cuando es posible encontrar el valor L que es el límite.

Lema 5.1. *Si $|a| \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.*

Demostración. Probaremos el resultado por contraposición, esto quiere decir que debemos mostrar que si $a \neq 0$, entonces podremos encontrar algún $\varepsilon > 0$ de forma que $\epsilon < |a|$. Supongamos entonces que tenemos $a \neq 0$, en ese caso $\frac{1}{2}|a| > 0$ y como $\frac{1}{2}|a| < |a|$, podemos afirmar que existe $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$ de forma que $\varepsilon < |a|$. De esto sigue el resultado. ■

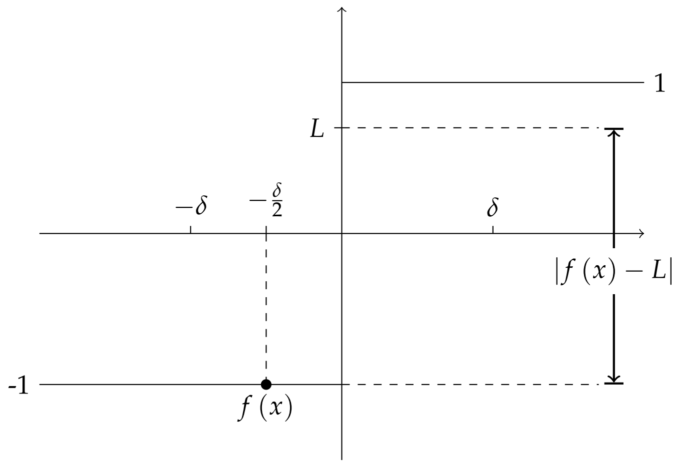

Figura 1: Para la función $1/x$, si tomamos $L > 0$ y $x = -\delta/2$ obtenemos $|f(x) - L| > 1$.

Teorema 5.2. *Sea f una función cualquiera. Si f tiende hacia L_1 en a y f tiende hacia L_2 en a, entonces $L_1 = L_2$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f tiende hacia L_1 en a, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que, si

$$0 < |x - a| < \delta_1,$$

entonces se tiene

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$$

y como f tiende hacia L_2 en a, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que, si

$$0 < |x - a| < \delta_2$$

se tiene que

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon/2.$$

En ese caso, si $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$ entonces

$$0 < |x - a| < \delta$$

implicará las desigualdades

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon/2.$$

Tomemos entonces $x_0 = a + \delta/2$, en ese caso

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x_0) + f(x_0) - L_2| \\ &\leq |f(x_0) - L_1| + |f(x_0) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

En conclusión, para todo $\varepsilon > 0$, se obtiene $|L_1 - L_2| < \varepsilon$. Por el lema anterior podemos concluir

$$L_1 = L_2. \qquad \blacksquare$$

Definición 5.2. Cuando una función f tienda hacia L en el punto a, escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Cuando sea falso que la función f tiende hacia L en el punto a escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq L.$$

Definición 5.3. Afirmaremos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} g(x)$$

cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to b} g(x) = L.$$

Ejemplo. Probaremos lo siguiente:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(2x).$$

Según la definición que hemos dado de la igualdad entre límites, para que esta se cumpla se debe mostrar dos implicaciones:

Supongamos, primero, que $\lim_{x \to 0} f(x) = L$ y sea $\epsilon > 0$. Por la suposición que hemos hecho, debe existir $\delta_0 > 0$ de forma que, si $0 < |x| < \delta_0$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. En ese caso, si elegimos $\delta = \delta_0/2$ entonces para cualquier número x de forma que $0 < |x| < \delta$ se cumple de igual forma que

$$0 < |2x| < 2\delta = \delta_0$$

y por la forma en que tomamos δ_0,

$$|f(2x) - L| < \epsilon.$$

Esto quiere decir que

$$\lim_{x \to 0} f(2x) = L.$$

Supongamos ahora que $\lim_{x \to 0} f(2x) = L$ y sea $\epsilon > 0$. Por la suposición anterior, debe existir $\delta_0 > 0$ de forma que $0 < |x| < \delta_0$ implica $|f(2x) - l| < \epsilon$. En es caso, podemos elegir $\delta = 2\delta_0$ pues si $0 < |x| < \delta$, tenemos

$$0 < |x/2| < \delta/2 = \delta_0$$

y en consecuencia,

$$|f(x) - L| = |f(2(x/2)) - L| < \epsilon.$$

Esto significa que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L.$$

Definición 5.4. Diremos que $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*, si podemos encontrar un número L de forma que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Por el contrario, diremos que $\lim_{x \to a} f(x)$ *no existe*, si para todo número L, se tiene $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$.

Ejemplo. Afirmamos que el límite de la función $f(x) = 1/x$ en 0, no existe y para mostrarlo tomaremos dos casos.

Si $L = 0$ podemos tomar $\varepsilon = 1$ pues si δ es cualquier número mayor que 0, bastará proponer cualquier número

$$0 < x \leq \text{mín}\left(1, \frac{\delta}{2}\right),$$

para garantizar que $|x| < \delta$ y además que $1/|x| \geq 1$; en ese caso

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - L\right| &\geq \frac{1}{|x|}\\ &\geq 1\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Un caso particular de esto puede observarse en la figura 2.

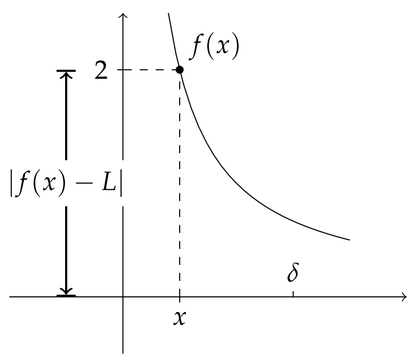

Figura 2: Cuando $L = 0$ podemos tomar $x = \text{mín}(1/2, \delta/2)$ para verificar que $|f(x) - L| > 1$ para cualquiera que sea el valor de δ.

Observemos ahora el caso general. Si L es cualquier número, elegimos $\varepsilon = 1$ entonces para todo $\delta > 0$ podemos elegir alguno de los números

$$x \leq \text{mín}\left(\frac{1}{|L|+1}, \frac{\delta}{2}\right),$$

para tener que

$$\frac{1}{|x|} \geq |L| + 1;$$

además de $|x| < \delta$ y por tanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - L\right| &\geq \frac{1}{|x|} - |L|\\ &\geq |L| + 1 - |L|\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Un caso particular se ilustra en la figura 3, donde podemos ver la razón de elegir x de esa manera.

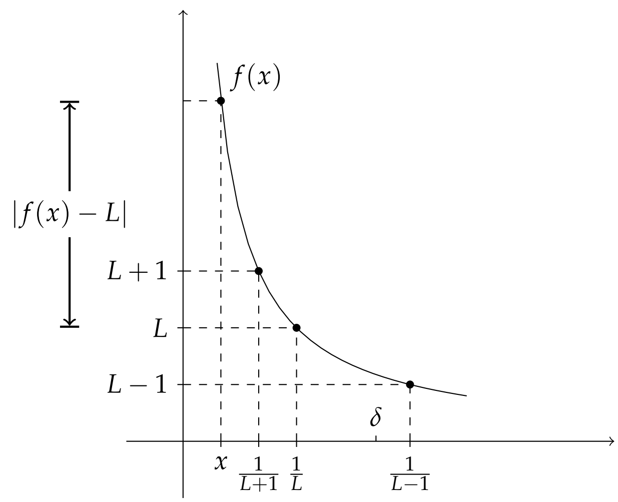

Figura 3: Cuando L toma cualquier valor podemos tomar $x = 1/2(|L|+1)$ el cual es menor que $\min(1/(|L|+1), \delta/2)$ y verificar$|f(x) - L| > 1$ para cualquiera que sea el valor de δ.

2. Algunos teoremas fundamentales

Existen algunas formas alternativas de evaluar límites sin recurrir a la definición. Los siguientes teoremas nos permiten dar ese paso. Este tipo de resultados nos permite manipular de manera mecánica algunos de los resultados más sencillos. Veremos algunos resultados de este tipo en esta sección.

Teorema 5.3. *Sea f una función. Entonces,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h).$$

Demostración. Supongamos primero que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ para algún número L. Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que para cualquier $0 < |x-a| < \delta$, debemos tener $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si $0 < |h| < \delta$, en particular podemos tomar $x = h + a$ por lo que debemos tener $|f(h+a) - L| < \varepsilon$ y por definición debemos tener que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L$ como deseábamos.

Supongamos ahora que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L$ para algún número L. Sea $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que para cualquier $0 < |h| < \delta$ debemos tener que $|f(a+h) - L| < \varepsilon$. Ahora si $0 < |x-a| < \delta$, lo anterior debe ser válido para $h = x - a$ por lo que debemos tener que $|f(x) - L| = |f(a + x - a) - L)| < \varepsilon$ por lo que podemos afirmar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ que es lo que queríamos probar. ■

Los siguientes ejemplos ilustran como usar el teorema anterior, usando algunos ejemplos que ya hemos probado.

Ejemplo. Afirmamos que

$$\lim_{h\to 0} (h+2)^2 + h + 3 = 7.$$

En efecto, en un ejemplo anterior hemos calculado ya

$$\lim_{x\to 2} x^2 + x + 1 = 7.$$

Ademas,

$$f(h+2) = (h+2)^2 + (h+2) + 1 = (h+2)^2 + h + 3,$$

por lo que el teorema anterior nos indica

$$\lim_{h\to 0}(h+2)^2 + h + 3 = \lim_{x\to 2} x^2 + x + 1 = 7.$$

Podemos sin embargo proceder siguiendo simplemente la definición, para esto suponemos cualquier $\varepsilon > 0$, en ese caso debemos notar que si $|h| < 1$, entonces $|h+5| < 6$. Elegimos $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/6)$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} |(h+2)^2 + h + 3 - 7| &= |h^2 + 5h| \\ &= |h+5||h| \\ &< 6|h| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que la definición implica el límite que buscamos. Podemos observar que la elección en ambos casos para δ es la misma. Si observamos la demostración del teorema, ésta nos indica como hacer la elección adecuada.

Teorema 5.4 (Teorema de intercalación). *Sean f, g y h funciones cualquiera y sea también $x_0 \in (a,b)$. Si para todo $x \in (a,b)$ con $x \neq x_0$, se tiene*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

y

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por hipótesis sobre los límites de f y h, podemos encontrar $\delta_1, \delta_2 > 0$ de forma que si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ tenemos

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

y si $0 < |x - x_0| < \delta_2$, tenemos

$$|h(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomemos $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$, en ese caso si $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon;$$

lo anterior implica que

$$|g(x) - L| < \varepsilon.$$

Todo lo anterior significa

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L. \qquad \blacksquare$$

Teorema 5.5. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $a < L < b$*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $|x - x_0| < \delta$*,*

$$a < f(x) < b$$

Demostración. Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ para $\varepsilon = \min(b - L, L - a)$, podemos elegir el número $\delta > 0$ de forma que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

o en otras palabras

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Ahora, por la forma en que hemos tomado ε, se debe cumplir $\varepsilon \leq b - L$ y por la misma razón $\varepsilon \leq L - a$ o en otras palabras $a - L \leq -\varepsilon$. En ese caso

$$\begin{aligned} a &= L + a - L \\ &\leq L - \varepsilon \\ &< f(x) \\ &< L + \varepsilon \\ &\leq L + b - L \\ &= b. \end{aligned}$$

Resumiendo la anterior secuencia de desigualdades da por válida la desigualdad

$$a < f(x) < b.$$ ■

Comenzaremos ahora con tres teoremas que involucran límites de funciones que involucran las operaciones que hemos definido en funciones. Estos resultados nos ayudarán a calcular algunos límites sin tener que recurrir a las definición de límite, particular gobernarán los límites que involucran las operaciones de funciones.

Lema 5.6. *Sea* $\varepsilon > 0$ *y sean* x*,* y*,* x_0 *y* y_0 *números cualesquiera. Si*

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad y \qquad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon.$$

Demostración. Basta observar lo siguiente

$$\begin{aligned} |(x + y) - (x_0 - y_0)| &= |(x - x_0) - (y - y_0)| \\ &\leq |x - x_0| + |y - y_0| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es lo que queríamos probar. ■

Teorema 5.7. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *entonces*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L + M.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2};$$

también podemos encontrar $\delta_2 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En ese caso, si $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, y tomamos $0 < |x-a| < \delta$ se verificarán simultáneamente las desigualdades

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y del lema anterior se sigue que

$$|f(x) + g(x) - (L+M)| < \varepsilon.$$

Por lo que el límite existe y es igual al valor que buscábamos. ∎

Lema 5.8. *Sea* $\varepsilon > 0$ *y sean* x, y, x_0 *y* y_0 *números cualesquiera. Si*

$$|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right) \qquad y \qquad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$

entonces

$$|xy - x_0y_0| < \varepsilon.$$

Demostración. Al tener

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1,$$

obtenemos la desigualdad,

$$|x| < 1 + |x_0|,$$

además,

$$\frac{|y_0|}{|y_0|+1} < 1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \\ &\leq |x|\cdot|y-y_0| + |y_0|\cdot|x-x_0| \\ &< (1+|x_0|)\,\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)} + |y_0|\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es el resultado que buscábamos. ∎

Teorema 5.9. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = L\cdot M.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces

$$|f(x) - L| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}\right);$$

también podemos encontrar $\delta_2 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}.$$

Si entonces tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ y suponemos $0 < |x-a| < \delta$, se satisfacen simultáneamente

$$|f(x) - L| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}.$$

Por el lema anterior, este par de desigualdades implican

$$|(f\cdot g)(x) - L\cdot M| < \varepsilon.$$

Lo anterior indica que el límite existe y es igual al valor que buscábamos. ∎

Lema 5.10. *Sea* $\varepsilon > 0$ *y sean* y *e* y_0 *números cualesquiera. Si* $y_0 \neq 0$ *y*

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right)$$

entonces $y \neq 0$*, además de*

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Demostración. Por una lado tenemos que

$$|y_0| - |y| \leq |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

y por tanto

$$0 < \frac{|y_0|}{2} < |y|,$$

por lo que $y \neq 0$ y además

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Agregando todo lo anterior

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| &= \frac{|y_0 - y|}{|y|\cdot|y_0|}\\ &< \frac{2}{|y_0|}\frac{1}{|y_0|}\frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto es lo que buscábamos probar. ∎

Teorema 5.11. *Si $L \neq 0$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L| < \text{mín}\left(\frac{|L|}{2}, \frac{\varepsilon |L|^2}{2}\right);$$

por el lema anterior debemos tener que $f(x) \neq 0$ y además,

$$\left|\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon.$$

Esto significa que el límite existe y le corresponde el valor que buscábamos. ■

Uno de los usos frecuentes de los anteriores teoremas es por supuesto encontrar el límite de cualquier polinomio. Gracias a estos podemos calcularlo de manera inmediata ahora. No sólo eso, uno de sus usos más interesantes es la posibilidad de evaluar funciones en donde exista el límite pero sea imposible obtener una evaluación directa. Esto lo ilustraremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Probemos ahora que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2 - h}{h} = 2a - 1.$$

Procedamos usando la definición. Supongamos primero que $h \neq 0$ para determinar la primer expresión

$$\begin{aligned}
(a+h)^2 - a^2 - h &= a^2 + 2ah + h^2 - a^2 - h \\
&= 2ah - h + h^2 \\
&= (2a-1)h + h^2 \\
&= (2a - 1 + h)h.
\end{aligned}$$

Tomemos ahora $\varepsilon > 0$, proponemos $\delta = \varepsilon$. En ese caso si $0 < |h| < \delta$ debemos tener que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(a+h)^2 - a^2 - h}{h} - (2a-1)\right| &= |2a - 1 + h - (2a-1)| \\
&= |h| \\
&< \delta \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podemos sin embargo usar los anteriores teoremas notando que,

$$(a+h)^2 - a^2 - h = h^2 + h(2a-1) = h\left[h + (2a-1)\right],$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2 - h}{h} &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} h + 2a + 1\right) \\
&= \lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} 2a + 1 \\
&= 2a + 1
\end{aligned}$$

Ejercicios

Ejercicio 5.1. Usando el límite L propuesto, demuestra o refuta que efectivamente se trata del límite hallando $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

1. $\lim_{x\to 0} 1 = 1$.
2. $\lim_{x\to 2} 3 - x = 2$.
3. $\lim_{x\to 7} 2x + 1 = 15$.
4. $\lim_{x\to 0} 2x + 1 = 1$.
5. $\lim_{x\to 2} x^2 - x = 2$.
6. $\lim_{x\to 2} x^2 + x = 12$.
7. $\lim_{x\to 5} x^3 + x^2 - 2x = 140$.
8. $\lim_{x\to 0} x^3 + 2x + 3 = 3$.

Ejercicio 5.2. Demuestra que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Ejercicio 5.3. Demuestra que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.

Ejercicio 5.4. Prueba que, si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Ejercicio 5.5. Suponga las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x > 0 \\ x-5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -5 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestra que ni $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$ existen, pero $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = 0$.

Ejercicio 5.6. En este ejercicio se probará que el límite en $1/2$ de la función $f(x) = 1/(2x-1)$ no existe.

1. Para un número L cualquiera, demuestra que existe un número K tal que
$$|L| + 1 = \frac{1}{2K - 1}.$$
2. Demuestra que $x \leq K$ implica $|f(x)| \geq |L| + 1$.
3. Exhibe un número x tal que $|x - 1/2| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq 1$.
4. Concluye que el límite de la función no existe eligiendo $\varepsilon = 1$.

Ejercicio 5.7. Demuestra que el límite en 0 de la función $f(x) = 1/x^2$ no existe.

Ejercicio 5.8. Da un ejemplo de una función f para la cual sea falsa la afirmación: si $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x - a| < \delta/2$.

Ejercicio 5.9. Da un ejemplo de una función f de forma que $\lim_{x\to a} |f(x)|$ exista pero no $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejercicio 5.10. Demuestra que si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ para algún número L entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Ejercicio 5.11. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x - a).$$

Ejercicio 5.12. Demuestra $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

Ejercicio 5.13. Construye un ejemplo para el cual $\lim_{x\to a} f(x^2)$ existe pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejercicio 5.14. Suponga que $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Demuestra que

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x),$$

siempre que los límites involucrados existan.

Ejercicio 5.15. Sea $a < x_0 < b$ y sea f una función de forma que

$$c < f(x) < d$$

para todo $a < x < b$ con $x \neq x_0$. Si existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$, prueba que

$$c \leq \lim_{x\to x_0} f(x) \leq d.$$

Ejercicio 5.16. Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones de forma que para cada $1 \leq i \leq n$ el $\lim_{x\to x_o} f_i(x)$ existe. Demuestra que

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_i(x)$$

y de manera similar

$$\lim_{x\to x_0} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_i(x)$$

Para entregar: Ejercicios 5.6 y 5.7

Referencias

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1.* Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencia e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.