Semana 12: Significado de la derivada

1. Máximos y mínimos

En esta sección, se explorarán algunas de las consecuencias de la existencia de derivada en una función, en particular se probarán resultados importantes que permiten el cálculo de máximos y mínimos. Primero aclaremos algunos términos.

Definición 12.1. Sea f una función y sea A un conjunto en donde f está definida. Decimos que:

- Un elemento $x \in A$ es *un punto máximo de f en A* si para todo $y \in A$ se tiene
$$f(y) \leq f(x).$$
- Para un punto máximo x de f en A, en valor $f(x)$ es *el valor máximo de la función en A*.
- Un elemento $x \in A$ es *un punto mínimo de f en A* si para todo $y \in A$ se tiene
$$f(x) \leq f(y).$$
- Para un punto mínimo x de f en A, en valor $f(x)$ se dice *el valor mínimo de la función en A*.

Teorema 12.1. *Sea f una función definida en (a, b). Si c es un punto máximo o mínimo de f en (a, b) y f es diferenciable en c, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f esta definida en todo (a, b) y $c \in (a, b)$, entonces debe existir δ de forma que $|h| < \delta$ implica $c + h \in (a, b)$. Supongamos que c es un máximo en el intervalo, en ese caso tenemos
$$f(c) \geq f(c + h).$$
Por un lado, si $0 < h < \delta$, entonces debemos tener
$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0,$$
lo que implica que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$
Por otro lado, si $-\delta < h < 0$, entonces
$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Estos dos límites deben coincidir, por lo que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= f'(c) \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Resumiendo $0 \leq f'(c) \leq 0$ o en otras palabras $f'(c) = 0$. El caso en que c es un mínimo, resulta completamente análogo. ■

Ejemplo. Para dar una instancia del teorema anterior, podemos considerar la función $\operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. Sabemos que la función tiene un máximo en $\pi/2$ y según el teorema su derivada se debe anular, en efecto, la derivada de dicha función es $\cos(x)$ y en particular $\cos(\pi/2) = 0$. Esto es precisamente lo que afirma el teorema.

Definición 12.2. Sea f una función y sea A un conjunto en donde la función está definida. Definimos lo siguiente:

- Un elemento $c \in A$ se dice *un máximo local de f en A*, si existe $\delta > 0$ de forma que c es un punto máximo de f en $A \cap (c - \delta, c + \delta)$.
- Un elemento $c \in A$ se dice *un mínimo local de f en A*, si existe $\delta > 0$ de forma que c es un punto mínimo de f en $A \cap (c - \delta, c + \delta)$.

Teorema 12.2. *Sea f defnida en (a, b). Entonces, si f es diferenciable en c y c es máximo o mínimo local de f en (a, b), entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. La prueba es una consecuencia directa del teorema anterior, al estar definida la función en el intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ en donde c es una máximo o mínimo local. ■

Ejemplo. Sea $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. No es difícil convencernos que el polinomio p no tiene ni máximo ni mínimo. Sin embargo, en el intervalo $(0, 2)$ el punto $c = 1$ es un máximo lo que muestra que f admite un máximo local. Además, en el intervalo $(2, 4)$ el valor $c = 3$ es un mínimo por lo que la función admite un mínimo local. Para verificar el enunciado del teorema calculamos la derivada $p'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, la cual satisface $p'(1) = 0$ y $p'(3) = 0$ tal cual predice el teorema.

Ejemplo. Consideremos ahora la función $f(x) = \cos(x) + x$ la cual está definida para todo número real. Es importante observar que esta función no tiene ni máximo ni mínimo y sin embargo, admite máximos y mínimos locales en diversos intervalos.

A pesar que podría parecernos ideal, que la derivada de una función se anule en un punto no garantiza la existencia de un máximo o un mínimo. Puede de hecho suceder que no sea ninguno de los dos. Para ilustrar esto, consideremos para el siguiente ejemplo, que por supuesto, motiva la definición que le sigue.

Ejemplo. Para la función $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$, sabemos que alcanza su máximo en 1 y su mínimo en -1; además $f'(x) = 3x^2$ por lo que $f'(0) = 0$. Sin embargo, no es difícil observar que 0 no es ni máximo ni mínimo pues la función no alcanza ni su mínimo ni su máximo en el intervalo $(-1, 1)$.

Definición 12.3. *Un punto crítico de una función f* es un número x tal que $f'(x) = 0$. A la vez, $f(x)$ se dice *el valor crítico de f*. Un punto crítico que no es ni un máximo local ni un mínimo local de f se le denomina *punto de inflexión de f*.

2. Teorema del valor medio

Esta sección está destinada a presentar y probar el teorema del valor medio y sus corolarios inmediatos. Estos están relacionados con el comportamiento de la derivada de una función y sus consecuencias. Comenzaremos con un famoso teorema que toma su nombre del matemático francés Michel Rolle, quien probó el resultado para para polinomios sin usar métodos del cálculo diferencial en 1691. La versión más general de dicho teorema, ya en términos diferenciales, fue demostrada por otro matemático francés, Augustin Louis Cauchy, en 1893 como un corolario al teorema del valor medio. En esta exposición, procederemos de modo inverso mostrando el teorema del valor medio usando el teorema de Rolle.

Teorema 12.3 (de Rolle)**.** *Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) de forma que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$ entonces existen elementos x e y en $[a, b]$ de forma que x es un punto máximo e y un punto mínimo de f en $[a, b]$. Entonces, o $x \in (a, b)$ o $x \in \{a, b\}$; si por un lado $x \in (a, b)$ entonces por el teorema 12.1 debemos tener $f'(x) = 0$, por lo que basta tomar $c = x$. Ahora, si $x \in \{a, b\}$, entonces tenemos dos posibilidades o $y \in (a, b)$ o $y \in \{a, b\}$; si $y \in (a, b)$ entonces por el teorema 12.1 debemos tener que $f'(y) = 0$ por lo que basta tomar $c = y$. Por otro lado si $y \in \{a, b\}$, como $x \in \{a, b\}$, debemos entonces tener que $f(x) = f(y)$ por hipótesis. Probaremos que f en este caso es constante, en efecto si $z \in [a, b]$, entonces $f(y) \leq f(z) \leq f(x)$ por lo que el valor de $f(z)$ es siempre el mismo; basta entonces tomar cualquier $c \in (a, b)$ y como la función es constante, tenemos $f'(c) = 0$. Como esto agota todos los casos, el resultado sigue. ■

Ejemplo. Consideremos el polinomio $p(x) = x^2 + 2x + 1$. En particular tenemos que $f(0) = 1 = f(-2)$ y como además es diferenciable en el intervalo $[-2, 0]$ entonces el teorema de Rolle, debe existir un punto en el intervalo $-2, 1$ de forma que $p'(c) = 0$. Para encontrarlo, al saber que existe, podemos plantear la ecuación $2c + 2 = p'(c) = 0$, por lo que $c = -1$. Además de lo que afirma el teorema de Rolle, no es difícil observar que ese punto es también un mínimo de la función.

Ejemplo. Para la función $cos(x)$, como $\cos(1) = \cos(-1)$ y ésta es diferenciable en el intervalo $[-1, 1]$, el teorema de Rolle garantiza que existe un número $c \in () - 1, 1)$ de forma anula la derivada del coseno, i.e., $-\operatorname{sen}(c) = 0$. En efecto, $c = 0$ tiene la propiedad que buscamos. También, $\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2)$ por lo que el teorema de Rolle garantiza que existe un número $c \in (\pi/2, 3\pi/2)$ de modo que $-\operatorname{sen}(c) = 0$ lo cual sabemos que es cierto para $c = \pi$. En general, si k es un entero se satisface $\cos((k-1)\pi/2) = \cos((k+1)\pi/2)$ por lo que en el intervalo $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$ debe existir un número c de forma que $-\operatorname{sen}(c) = 0$ lo cual es cierto para $c = k\pi$.

El teorema de Rolle es una expresión particular del teorema del valor medio, sin embargo, se puede usar para demostrarlo de manera muy sencilla notando precisamente que la restricción $f(a) = f(b)$ implica vincular los extremos de la función sobre una recta horizontal. El teorema del valor medio, lo hace sobre la recta que une los extremos sin importar si sus imagenes coinciden o no.

Teorema 12.4 (del valor medio)**.** *Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ de forma que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Demostración. Usaremos el teorema de Rolle sobre una función muy peculiar,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Se deben notar varias cosas sobre esta función. La primera resulta en observar que h es continua en $[a, b]$; en efecto, f es continua en $[a, b]$ por hipótesis y $x - a$ lo es también en todo intervalo. Lo segundo es notar que h es diferenciable en (a, b) y de nueva cuenta esto resulta de observar que f es diferenciable en (a, b), por hipótesis, y $x - a$ lo es de igual forma en todo intervalo. Por último,

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - (f(b) - f(a)) \\ &= f(a) \\ &= h(a). \end{aligned}$$

De lo anterior podemos aplicar el teorema de Rolle a la función h para obtener algún $c \in (a, b)$ de forma que $h'(c) = 0$. Calculando ahora la derivada de h,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

nos damos cuenta que

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esto implica directamente el resultado que se afirma en el teorema. ■

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x - 2}$ en el intervalo $[2, 6]$. Como es continua y diferenciables en todos los números positivos mayores que 2, entonces satisface las hipótesis del teorema de valor medio. En ese caso, por lo menos existe un número $c \in (a, b)$ de forma que

$$f'(c) = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como la derivada es simplemente la función $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ entonces, como $f'(c) = 1/2$ esto significa que

$$2 = 2\sqrt{c - 2}$$

de lo que podemos concluir que $c = 3$ es la única solución.

Ejemplo. Consideremos ahora una aplicación del teorema de valor medio para una función f de forma que sea diferenciable en cada punto y además, para $\alpha \neq \beta$, se cumple $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Vamos a mostrar que existe al menos un punto donde la derivada se anula. En efecto, como f es continua y diferenciable en $[\alpha, \beta]$, según el teorema de valor medio existe $c \in [\alpha, \beta]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0.$$

En general, podemos probar que si f se anula en n puntos diferentes, entonces f' se anula en al menos $n-1$ puntos diferentes, f'' en $n-2$ puntos diferentes y así sucesivamente.

El par de corolarios que sigue más que utilidad práctica (describen comportamientos de la derivada que ya conocemos) tiene una importancia teórica al resaltar que basta observar la derivada de una función para determinar que clase de comportamiento presenta la función original.

Corolario 12.5. *Si f es diferenciable en (a, b) de forma que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b)*

Demostración. Sean a_0 y b_0 elementos del intervalo (a, b) de forma que $a_0 < b_0$; en ese caso, la función f es continua en $[a_0, b_0]$ y diferenciable en (a_0, b_0). Por el teorema del valor medio existe $c \in (a_0, b_0)$ de forma que

$$\frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} = f'(c),$$

pero $f'(c) = 0$ por hipótesis. En ese caso,

$$f(b_0) - f(a_0) = 0,$$

por lo que $f(b_0) = f(a_0)$. Esto implica que en todo el intervalo el valor de la función no cambia por lo que podemos concluir que la función es constante. ■

Corolario 12.6. *Si f y g son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) de forma que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe una constante c tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Basta notar que $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, por lo que la función $f - g$ cumple las hipótesis del corolario anterior. En ese caso, esta función es constante, digamos con valor c, por lo que, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(x) = g(x) + c.$$

■

Definición 12.4. Sea f una función definida en un intervalo I y sean a y b números en dicho intervalo. Decimos que:

- f es creciente en I si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$.
- f es decreciente en I si $a < b$ implica $f(b) > f(a)$.

Es interesante notar que una función que no es creciente, no es necesariamente decreciente al tener la posibilidad ser constante, situación en la cual la función no crece ni decrece. De manera análoga, si una función no es decreciente no es necesariamente creciente. Ahora estamos en una mejor posición para formular el corolario.

Corolario 12.7. *Sea f una función diferenciable en un intervalo I. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I; por el contrario si $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.*

Demostración. Sea a_0 y b_0 elementos del intervalo de forma que $a_0 < b_0$. En ese caso, f debe ser continua en $[a_0, b_0]$ y diferenciable en (a_0, b_0). Según el teorema del valor medio, para algún elemento $c \in (a_0, b_0)$, se cumple

$$f'(c) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}.$$

Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces debemos tener $f'(c) > 0$ pues $c \in (a, b)$. Esto implica a su vez que

$$\frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} > 0$$

y como $b_0 - a_0 > 0$ entonces $f(b_0) - f(a_0) > 0$. Esto quiere decir que $a_0 < b_0$ implica $f(a_0) < f(b_0)$ por lo que función es creciente en el intervalo (a, b). La prueba para el caso en que $f'(x) < 0$ es análoga. ■

Debe observarse que este último corolario nos provee de información suficiente para garantizar cuál es el comportamiento de cualquier función diferenciable. En particular determina si sus puntos críticos resultan máximo, mínimos o de inflexión lo cual no debe ser difícil de imaginar resultando esto de la siguiente manera: Si f es diferenciable en c con $f'(c) = 0$, entonces

- Si f es decreciente antes de c y creciente después, entonces c es un punto mínimo.
- Si f es creciente antes de c y decreciente después, entonces c es un punto máximo.
- Si f es creciente antes y después de c o es decreciente antes y después de c, entonces c es un punto de inflexión.

Ejemplo. La función $f(x) = x + 1/x^2$ puede ser estudiada en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ al ser en ambos continnua y diferenciable. Al calcular su derivada obtenemos:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}.$$

Consideremos primero los números positivos y encontremos para que valores $f'(x) > 0$, i.e., $1 - 2/x^3 > 0$. No es difícil determinar que esto sucede cuando $x^3 > 2$. Procediendo de la misma manera, determinamos cuando $f'(x) < 0$, i.e., $1 - 2/x^3 < 0$. Tampoco es difícil determinar que esto debe suceder si $x^3 < 2$. En resumen, se tiene:

- f es decreciente en $(0, \sqrt[3]{2})$.
- f es creciente en $(\sqrt[3]{2}, \infty)$.

Además, como $f(\sqrt[3]{(2)}) = 0$, lo anterior asegura que ese punto debe ser un mínimo local. De manera análoga, podemos concluir para $x < 0$ se debe cumplir de igual manera que $x^3 < 0$ por lo que $-2/x^3 > 0$ y en consecuencia $1 - 2/x^3 > 1 > 0$. Eso quiere decir que $f'(x) > 0$ si $x < 0$. El corolario anterior indica que f es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Este último corolario nos proporciona un criterio bastante sencillo con el cual decidir cuándo obtenemos un máximo o un mínimo de un punto crítico de una función. De hecho, estudiando si la función crece o decrece en los intervalos a la derecha e izquierda de un punto crítico, somos capaces de decidir si dicho punto es máximo, mínimo o ninguno de ellos. Existe sin embargo una manera más fácil (aunque no absolutamente segura) de decidir este mismo resultado. Esto permite explorar la gráfica de algunas funciones que podrían parecer bastante complicadas.

3. Criterio de la segunda derivada

Teorema 12.8. *Supongamos que f es 2-diferenciable en a y que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f. Además si $f''(a) < 0$ entonces a es un máximo local de f.*

Demostración. Comenzamos utilizando la definición de la segunda derivada, i.e.,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Si $f''(a) > 0$, entonces podemos encontrar δ de forma que, si $0 < |h| < \delta$, se tiene

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$$

y como $f'(a) = 0$, debemos tener simplemente que

$$\frac{f'(a+h)}{h} > 0.$$

Tenemos dos posibilidades: para todo h tal que $0 < h < \delta$, debemos tener $f'(a+h) > 0$, en ese caso, de acuerdo con el corolario 12.7, la función debe ser creciente en el intervalo $(a, a+\delta)$; también para todo h tal que $-\delta < h < 0$, debemos tener $f'(a+h) < 0$, otra vez, de acuerdo al corolario 12.7, la función debe ser creciente en el intervalo $(a-\delta, a)$. Lo anterior quiere decir que a es un mínimo en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ por lo que a resulta un mínimo local como se buscaba. El caso en que $f''(a) < 0$ es completamente análogo. ∎

Teorema 12.9. *Supongamos que f es 2-diferenciable en a. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$; por otro lado si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Procedemos por contradicción, si $f''(a) < 0$, entonces por el el teorema 12.8 tenemos que a es un máximo local en a. Eso quiere decir que f es constante en el intervalo en donde a es tanto un máximo como mínimo. Pero esto quiere decir que ese intervalo la segunda derivada es también cero, en particular $f''(a) = 0$, lo que es una contradicción. Entonces, $f''(a) \geq 0$ como buscábamos. El caso en que a es un máximo local es análogo. ∎

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x + 2\cos(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ la cual admite todas las derivadas, en particular la segunda. Su derivada en ese caso resulta $f'(x) = 1 - 2\operatorname{sen}(x)$ por lo que sus puntos críticos son aquellos que satifacen $\operatorname{sen}(x) = 1/2$. Sabemos que en intervalo que hemos tomado la función dichos puntos deben ser $c_1 = \pi/6$ y $c_2 = 5\pi/6$. Para determinar si éstos resultan máximos o mínimos podríamos proceder analizando cómo son los alrededores de dichos puntos, sin embargo, es más sencillo obtener la segunda derivada de f, $f''(x) = -2\cos(x)$, y recordar que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ por lo que $f''(c_1) < 0$ concluyendo que c_1 es un máximo local. Por otro lado, como $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, tenemos $f''(c_2) > 0$ lo que nos permite concluir que c_2 es un mínimo local.

Se debe notar que usar este criterio puede simplificar el problema de decidir si los puntos críticos son en verdad máximos o mínimos. Sin embargo, no es concluyente al ser incapaz de responder qué sucede en caso de tener $f''(a) = 0$. En ninguno de los teoremas se muestra como decidir esto. Esto sucede porque es posible tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión con la segunda derivada nula.

Ejemplo. Sean $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ y $h(x) = x^3$. Debemos notar que las tres funciones tienen un punto crítico en $x = 0$, pues su derivada se anula. Además, en $x = 0$ su segunda derivada en todos los tres casos se anula de igual forma. Sin embargo, $x = 0$ es un mínimo local de f, $x = 0$ un máximo local de g y $x = 0$ un punto inflexión de h.

4. Dos consecuencias del teorema del valor medio

Teorema 12.10. *Sea I un intervalo cualquiera de forma que $a \in I$. Supongamos que f es continua en a y diferenciable en cada $x \in I$ tal que $x \neq a$. Supongamos además que existe*

$$\lim_{x \to a} f'(x).$$

Entonces, existe también $f'(a)$ y además

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

Demostración. Tomemos t de forma que $(a - t, a + t) \subset I$. Definiremos una función α_h en el intervalo $(-t, t)$ usando el teorema del valor medio. Para un número h tal que $0 < |h| < t$, si $h > 0$, entonces f será continua en $[a, a + h]$ y diferenciable en $(a, a + h)$ por hipótesis; usando el teorema del valor medio elegimos α_h de forma que $a < \alpha_h < a + h$ y

$$f'(\alpha_h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Si por otro lado $h < 0$, entonces f es continua en $[a + h, a]$ y diferenciable en $(a + h, a)$ de forma que tomamos α_h tal que $a + h < \alpha_h < a$ y

$$f'(\alpha_h) = \frac{f(a) - f(a + h)}{-h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Podemos resumir las propiedades que tiene α_h: Para cada $0 < |h| < t$, se deben satisfacer

$$0 < |\alpha_h - a| < |h|$$

y

$$f'(\alpha_h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Probaremos ahora que
$$\lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x\to a} f'(x) = L.$$
Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que, para cada x, si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f'(x) - L| < \varepsilon$. En ese caso, si tomamos $0 < |h| < \text{mín}(\delta, t)$, por la discusión del párrafo anterior
$$0 < |\alpha_h - a| < |h| < \delta$$
por lo que $|f'(\alpha_h) - L| < \varepsilon$ lo cual implica que
$$\lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = L.$$

Por último, sólo basta notar lo siguiente
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{x\to a} f'(\alpha_h) \\ &= \lim_{x\to a} f'(x). \end{aligned}$$

■

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ si $x \neq 0$ y $f(x) = 1$ si $x = 0$. Entonces, la función es continua en 0 y por la forma en que la definimos, resulta también diferenciable en todos los números distintos de 0. El teorema anterior, es capaz de explicar la diferenciabilidad de f en 0 de manera afirmativa. Debemos observar que la derivada de f para valores $x \neq 0$ es
$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$$
Por lo que
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = 0.$$
Lo anterior es lo que se afirma en el enunciado del teorema, por tanto podemos derivar la conclusión para la función f, es decir, f es diferenciable en 0 y además $f'(0) = 0$. De manera aún más sorprendente lo anterior indica que la función presenta un máximo local en 0.

Teorema 12.11 (del valor medio de Cauchy). *Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que*
$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

Demostración. De la misma forma en que se probó el teorema del valor medio a través del teorema de Rolle, usaremos una función auxiliar para probar este teorema. Sea
$$h(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x),$$
entonces por hipótesis, h es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), además
$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$

y también
$$h'(x) = (g(b) - g(a))\, f'(x) - (f(b) - f(a))\, g'(x).$$
Ahora, por el teorema del Rolle, debe existir $c \in (a, b)$ de forma que $h'(c) = 0$, en otras palabras
$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c),$$
que es lo que afirma el teorema. ∎

Ejercicios

Ejercicio 12.1. Hallar los extremos (máximos y mínimos), si es que los hay, de las siguientes funciones.

a) $x^2 - 2x + 3$.

b) $(1/3)x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

c) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

d) $x^3 - 4x^2 + 3x + 4$.

e) $x^4 - x^3 - 2$.

f) $x^5 - 5x^4 + 3$.

g) $(x - 2)(3 - x)/x^2$.

h) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.

i) $\operatorname{sen}(x) - 2x$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.

j) $x/(1 + x^2)$.

k) $\operatorname{sen}(3x) - 3\operatorname{sen}(x)$.

l) $(x - 1)/(x + 1)$.

Ejercicio 12.2. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $x + 1/x$.

b) $x + 3/x^2$.

c) $x^2/(x^2 - 1)$.

d) $1/(1 + x^2)$.

e) $x^2/(x^4 - 1)$.

f) $x^3/(x^2 - 2)$.

g) $x^2/(x^2 - 4)$.

h) $(x + 2)/(x - 3)$.

i) $x^2/(1 - x^2)$.

j) $x/(\sqrt{x - 9})$.

k) $|x|/(x^2 + 4)$.

l) $x^2/\sqrt{x^2 - 9}$.

m) $x/(x + 2)(x - 3)^2$.

n) $x(x - 2)/(x^2 - 9)$.

Ejercicio 12.3. Hallar el triángulo rectángulo con área máxima cuya hipótenusa es h.

Ejercicio 12.4. Sea (x_0, y_0) una pareja de números reales de forma que ambos sean positivos. Encuentra una recta que pase por este punto y que cruce ambos ejes formando un triángulo con área mínima.

Ejercicio 12.5. Sea (x_0, x_1) un punto en el plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$.

(a) Encuentra el número y tal que la distancia de (x_0, x_1) a $(y, f(y))$ sea la mínima posible. Ten en cuenta hacer mínima esta distancia es lo mismo que hacer mínimo el cuadrado de ésta.

(b) Concluye que la recta que pasa por los puntos (x_0, x_1) y $(y, f(y)))$ es perpedicular a L. Sugerencia: Compara las pendientes.

(c) Encuentra la distancia de (x_0, x_1) a L, i.e., la distancia de (x_0, x_1) a $(y, f(y)))$.

Ejercicio 12.6. Demostrar que la suma de un número positivo y su inverso multiplicativo es por lo menos 2.

Ejercicio 12.7. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, encuentra el de menor superficie.

Ejercicio 12.8. Hallar el trapecio de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio a con una de sus bases apoyada sobre el diámetro.

Ejercicio 12.9. Un impresor necesita producir 1000 circulares o menos, al precio de 1 peso por cada ciento. Por cada ciento, reducirá su precio por ciento sobre el costo total en 2 centavos. ¿Qué número de circulares maximiza el número del trabajo?

Ejercicio 12.10. Encuentra la distancia más corta del punto $(5, -7/2)$ a la parábola definida por la función $f(x) = 2x^2/3$.

Ejercicio 12.11. Encuentra la distancia mínima de un punto (x, y) a la recta que tiene la ecuación $ax + by = c$.

Ejercicio 12.12. Si la suma de dos números ha de ser 12, encuentra los números tales que su producto sea un máximo.

Ejercicio 12.13. Si la suma de dos números ha de ser 12, encuentra los números tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

Ejercicio 12.14. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales. Demuestra que el número x para el que la suma de los cuadrados de los errores

$$(x_1 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2$$

es el mínimo, resulta ser

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Ejercicio 12.15. Sea $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

Ejercicio 12.16. Probar que $x^2 = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ se verifica exactamente para dos valores. Sugerencia: Ubica una sección en estas notas que te pueda ser útil y no intentes nada extravagante.

Ejercicio 12.17. Sea f una función continua en $[a, b]$ y 2-diferenciable en el intervalo (a, b). Si el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ corta a la función en un tercer punto $(c, f(c)))$, siendo $c \in (a, b)$, demuestra que $f''(t) = 0$ para algún punto $t \in (a, b)$.

Ejercicio 12.18. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

(a) Dibujar la gráfica de $f(x)$ para x en el intervalo $(0, 2)$.

(b) Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

Ejercicio 12.19. Demuestra que si $f'(x) \geq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.

Ejercicio 12.20. Hallar todas las funciones tales que

(a) $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$.

(b) $f''(x) = x^3$.

(c) $f'''(x) = x + x^2$.

Ejercicio 12.21. Supóngase que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demostrar que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

Ejercicio 12.22. Demostrar que si

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces existe un número $c \in [0,1]$

$$a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n = 0.$$

Ejercicio 12.23. Sea f una función diferenciable en todo punto tal que $f(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que existe una cantidad infinita de puntos x tales que $f'(x) = \cos(x)$.

Ejercicio 12.24. Supóngase que f es $n-$diferenciable y que $f(x) = 0$ para $n+1$ diferentes valores de x. Demuestra que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x.

Ejercicio 12.25. Sea f una función impar y diferenciable en todo punto. Demuestra que para cada número real positivo b, existe un número $c \in (-b, b)$ de forma que

$$f'(c) = \frac{f(b)}{b}$$

Ejercicio 12.26. Sean $a_1, \ldots, a_{n+1}$ puntos arbitrarios de $[a,b]$ y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - a_i).$$

Supóngase que f es $n+1$-diferenciable y que p es un polinomio de grado menor o igual que n tal que $p(a_i) = f(a_i)$. Demostrar que para todo x de $[a,b]$ existe un número c de $[a,b]$ tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Sugerencia: Considera la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)]$$

y aplica el ejercicio anterior mostrando que ésta anula en $n+2$ puntos distintos de $[a,b]$.

Ejercicio 12.27. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hallar el valor mínimo de la función

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$

Para entregar: Ejercicio 12.16

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencial e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.