Semana 8: El axioma del supremo

1. El axioma

Definición 8.1. Sea A un conjunto de números reales. Decimos que un número real M es *una cota superior de A* si para todo $x \in A$, se tiene $x \leq M$. Si un conjunto tiene un cota superior decimos que está *acotado superiormente*. Denotamos al conjunto cotas superiores de A por el símbolo A^u.

Ejemplo. Para el intervalo $[0,1]$, cualquer número $x \geq 1$ es una cota superior. Esto quiere decir que

$$[0,1]^u = \{x \mid x \geq 1\} = [1,\infty).$$

De manera general, una cota superior del intervalo $[a,b]$ es cualquier número $x \geq b$ por lo que

$$[a,b]^u = [b,\infty).$$

Ejemplo. Consdirando el conjunto $\mathbb{R}$ como un subconjunto de sí mismo, podemos concluir que este no está acotado superiormente. Esto se debe a que para cualquier número $a \in \mathbb{R}$, es cierta la desigualdad $a < a+1$. En otras palabras $\mathbb{R}^u = \varnothing$.

Debemos notar que esta definición no obliga a que el número M sea un elemento del conjunto original y que el conjunto A puede ser vacío. Por otra parte, siempre que el conjunto admita una cota superior, podríamos evaluar si entre éstas es posible elegir *un mínimo*. Tendremos primero que definir qué es un mínimo.

Definición 8.2. Sea A un conjunto de números reales. *Un mínimo de A* es un número $a \in A$ de forma que, para todo $x \in A$, tenemos $a \leq x$.

Proposición 8.1. *Los elementos mínimos si existen, son únicos.*

Demostración. Supongamos que A tiene como elementos mínimos a los números s y t. Debemos notar que tanto s como t deben ser por definición elementos de A. Como s es mínimo eso significa que $s \leq t$ y por la misma razón $t \leq s$, por la propiedad de tricotomía de los números reales, la única posibilidad entonces tener $s = t$. En ese caso no es posible tener dos elementos mínimo en un conjunto. ∎

Comentario. Debemos preguntarnos en que casos existen estas cotas. Por ejemplo, cuando un conjunto no tenga al menos una cota superior no podemos hablar de un mínimo así que para hablar de una mínima cota superior el conjunto debe estar acotado superiormente. Sin embargo, debemos notar que usando un argumento por vacuidad, podemos afirmar

$$\varnothing^u = \mathbb{R},$$

por lo que tampoco tendríamos garantía que un conjunto acotado superiormente tenga una mínima cota superior; a pesar de esto no es difícil convencernos que en el caso de los números reales cualquier conjunto acotado y no vacío, debería admitir una mínima cota superior.

Axioma del Supremo. *Para cualquier conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente, existe un número real que es una mínima cota superior de éste.*

Definición 8.3. A la mínima cota superior de un conjunto A, lo llamamos *el supremo de A* y la denotamos por $\sup A$.

Ejemplo. Considérese un intervalo cerrado $[a,b]$. Este conjunto por definición es acotado y no vacío. Según el axioma, debe poseer un supremo. El candidato más natural es el número b pues es una cota superior y si x es otra cota superior de $[a,b]$ entonces se debe cumplir en particular que $b \leq x$, luego b es la mínima cota superior del intervalo.

Ejemplo. Si ahora consideramos el intervalo abierto (a,b), el conjunto tendrá también como supremo al número b y esto se debe a una razón similar: b es una cota superior de dicho intervalo y además cualquier número $x < b$ no puede ser una cota superior del intervalo pues es siempre posible encontrar un elemento $y \in (a,b)$ de forma que $x < y < b$. Lo anterior es suficiente para afirmar que b es el supremo del intervalo.

Ejemplo. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

No es difícil notar que $\sup S = 1$. Esto se debe a dos cosas, la primera es que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $1/n \leq 1$. Además, si $a < 1$, entonces a no podría ser una cota superior de S al ser $1 \in S$. Luego, 1 es la mínima cota supeior de S y por tanto el supremo.

Ejemplo. Consideremos el conjunto

$$A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

No es difícil notar que S no es vacío, no difícil verificar que los números 2, $9/4$ y $64/27$ son todos elementos de A. Tampoco es difícil probar que si $a \in S$, entonces $a \geq 2$. Además, el conjunto está acotado superiormente, basta desarrolllar un poco la expresión que define al conjunto usando el teorema del binomio para obtener

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right), \end{aligned}$$

debemos observar también que para naturales $1 \leq j \leq n-1$ cualquiera,

$$\left(1 - \frac{j}{n}\right) < 1,$$

eso implica

$$\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)<1.$$

En ese caso, la igualdad que obtuvimos para los elementos del conjunto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!},$$

considerando también que

$$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}},$$

lo anterior se traduce en

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Por último, la suma al lado derecho de la igualdad, es una suma geométrica de la cual ya hemos calculado su valor, con esto podemos obtener

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1.$$

Esto quiere decir que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

de lo que podemos concluir que A está acotado superiormente. Como es no vacío y acotado, debe tener supremo por lo que podemos tomar $e=\sup A$. El número e es un importante número irracional conocido *el número de Euler*. Este número jugará un rol importante en la teoría de integración y aquí se presenta como una bonita curiosidad.

Teorema 8.2. *El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración. Para observar esto, supongamos que lo está; como $\mathbb{N}\neq\varnothing$, entonces debe tener una cota superior mínima. Supongamos que $s=\sup\mathbb{N}$. Entonces, $n\leq s$ para todo $n\in\mathbb{N}$. En particular, $n+1\leq s$ para todo $n\in\mathbb{N}$ lo cual implica que $s-1\leq n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ lo cual indica que $s-1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ la cual satisface $s-1<s$ contradiciendo que s sea la menor de ellas. ∎

Corolario 8.3. *Si $x\geq 0$, entonces existe un natural n de forma que $n>x$.*

Demostración. Si no existiera un entero positivo con esa propiedad, entonces x sería una cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual contradice al resultado en el teorema. ∎

Corolario 8.4. *Para cualquier número $x>0$ e y un número cualquiera, existe un natural n, tal que*

$$nx>y.$$

Demostración. Es directa por contradicción del corolario anterior. ∎

Teorema 8.5. *Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo n natural, tenemos $1/n \geq \varepsilon$. Por tanto $n \leq 1/\varepsilon$ para todo natural n. Pero esto significaría que $1/\varepsilon$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ lo que es una contradicción. ■

Comentario. El axioma del supremo es una propiedad que logra diferenciar a los números reales de los números racionales. Recordemos que ambos satisfacen los axiomas que denominamos de campo y orden. Sin embargo, los racionales no tiene esa propiedad la cual debe ser interpretada como sigue:

> *Existen conjuntos no vacios y acotados superiormente de números racionales para los cuales no es posible encontrar un número racional que sea una mínima cota superior.*

Ejemplo. Consideremos el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$

el cual está obivamente acotado superiormente (3 es una cota superior en $\mathbb{Q}$). Sin embargo, si $q \in \mathbb{Q}$ es cualquier elemento $q < \sqrt{2}$, según el ejercicio 8.4, es siempre posible encontrar un número $r \in \mathbb{Q}$ de forma que $q < r < \sqrt{2}$ por lo que q no puede resultar una cota superior de S. Entonces, si q es una cota superior, debe satisfacer $\sqrt{2} \leq q$ pero al ser $\sqrt{2}$ un número irracional se debe cumplir en particular $\sqrt{2} < p$. De esta desigualdad, el ejercicio 8.4) indica que es posible encontrar $r \in \mathbb{Q}$ de forma que $\sqrt{2} < r < p$ lo cual establece que es imposible elegir una mínima cota superior (en $\mathbb{Q}$) para el conjunto S pues para cada una de ellas siempre habrá una más pequeña racional.

2. Propiedades de los supremos

Lema 8.6. *Sea $h > 0$ y sea A un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, entonces existe $x_0 \in A$ tal que*

$$x_0 > \sup A - h.$$

Demostración. Procedemos por contradicción, si para todo $x \in A$, tenemos $x \leq \sup A - h$ entonces $\sup A - h$ es una cota superior con $\sup A - h < \sup A$ lo que es una contradicción. En ese caso debe existir un elemento $x_0 \in A$ de forma que $x_0 > \sup A - h$. ■

Teorema 8.7. *Sean A y B conjuntos no vacíos y acotados de números reales y sea también*

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Entonces,

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Demostración. Sean $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$, los cuales existen por ser conjuntos no vacíos y acotados. Si $c \in A + B$, entonces $c = a + b$ para algunos $a \in A$ y $b \in B$, por la forma en que elegimos α y β debemos tener que $c \leq \alpha + \beta$ por lo que podemos concluir que $\alpha + \beta$ es una cota superior de $A + B$ mostrando que éste es un conjunto acotado superiormente.

Supongamos que $\gamma = \sup(A + B)$. Entonces, para cualquier natural $n \geq 1$, podemos aplicar el lema 8.6 tomando $h = 1/2n$ y garantizar la existencia de número $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ de forma que

$$a_0 > \alpha - \frac{1}{2n} \quad \text{y} \quad b_0 > \beta - \frac{1}{2n}$$

de esta forma,

$$a_0 + b_0 > \alpha + \beta - \frac{1}{n}$$

o en otras palabras

$$\alpha + \beta < a_0 + b_0 + \frac{1}{n}$$

Debemos observar que $a_0 + b_0 \leq \gamma$ y como $\alpha + \beta$ es una cota superior de $A + B$, entonces

$$\gamma \leq \alpha + \beta < \gamma + \frac{1}{n}.$$

Basta observar, que esta última desigualdad sucede para todo natural $n > 1$ y según el ejercicio 8.5, eso es suficiente para garantizar que $\gamma = \alpha + \beta$ como afirma el resultado. ■

Definición 8.4. Sea A un conjunto de números reales. Decimos que un número real M es *una cota inferior de A* si para todo $x \in A$, se tiene $M \leq x$. Si un conjunto tiene una cota inferior decimos que está *acotado inferiormente*. Denotamos al conjunto cotas inferiores de A por el símbolo A^l.

Comentario. Según el ejercicio 8.10, el axioma del supremo garantiza también la existencia de una cota inferior máxima para cada conjunto de números reales ya esta se le denomina *el ínfimo de A* y se denota como $\inf A$. Es interesante, por ejemplo, explorar que forma tiene el lema 8.6 usando el ínfimo el lugar del supremo.

Teorema 8.8. *Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales de forma que, si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a \leq b$. En ese caso, si A está acotado superiormente y B lo está inferiormente, entonces*

$$\sup A \leq \inf B.$$

Demostración. Debemos notar que cada elemento $b \in B$ es una cota superior de A y en ese caso $\sup A \leq b$ para todo $b \in B$. Eso quiere decir también que $\sup A$ es una cota inferior de B y como el ínfimos es la máxima de entre éstas, entonces $\sup A \leq \inf B$. Esto es lo que buscábamos. ■

3. Demostraciones a los teoremas fuertes...

Teorema fuerte 1. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $x \in (a, b)$ con $f(x) = 0$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\},$$

obviamente A es no vacío y además debe estar acotado al ser un subconjunto de una intervalo cerrado. Entonces, existe una mínima cota superior y definimos $\alpha = \sup A$. Primero debemos notar, al ser f continua en $[a,b]$ y tener $f(a) < 0$, que debe existir δ_1 de forma que, si $x \in [a, a+\delta_1)$, entonces $f(x) < 0$. De manera similar, como $f(b) > 0$, debe existir δ_2 de forma que si $x \in (b-\delta_2, b]$ entonces $f(x) > 0$. Conjugando éste par de observaciones, podemos concluir que $\alpha \in (a,b)$ pues

$$a + \delta_1 \leq \alpha \leq b - \delta_2.$$

El número que buscamos es en realidad α y para garantizar esto debemos mostrar que $f(\alpha) = 0$. Para conseguir esto, descartaremos las desigualdades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$ mostrando que ambas conducen a una contradicción:

- Si $f(\alpha) > 0$, debe existir un número $\delta > 0$ para el cual $f(x) < 0$ siempre que

  $$x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq [a,b].$$

  Si tomamos $y = \alpha + \delta/2$ entonces $y \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ y en consecuencia $f(y) < 0$. En ese caso, $y \in A$ y como α es una cota superior de dicho conjunto, entonces $y \leq \alpha$ pero por definición $\alpha < y$ lo cual es evidentemente una contradicción.

- Si $f(\alpha) > 0$, debe existir un número $\delta > 0$ para el cual $f(x) > 0$ siempre que

  $$x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq [a,b].$$

  Ahora, de acuerdo al lema 8.6, debe existir un número $y \in A$ tal que $\alpha - \delta < y \leq \alpha$. Esto implica que $y \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ y en consecuencia $f(y) > 0$. Pero, como $y \in A$, entonces $f(y) < 0$ y como no podemos tener ambas situaciones, hemos llegado a una constradicción.

Por la propiedad de tricotomía, la única posibilidad es tener $f(\alpha) = 0$ como buscábamos por lo que α es el número que el enunciado afirma que existe. ■

Lema 8.9. *Si f es continua en a, entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$.*

Demostración. Por hipótesis, debe existir $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta)$ entonces se cumple $|f(x) - f(a)| < 1$. Se sigue entonces que $f(x) < f(a) + 1$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$. De lo anterior podemos afirmar el resultado. ■

Teorema fuerte 2. *Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces f está acotada superiormente en dicho intervalo.*

Demostración. Sea

$$A = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ está acotada superiormente en } [a,x]\}.$$

Primero debemos notar que $a \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Además $A \subseteq [a,b]$ por lo que debe estar acotado. Vamos a tomar $\alpha = \sup A$ y mostraremos primero que $\alpha = b$ usando contradicción. Si suponemos que $\alpha < b$ entonces pueden suceder solamente dos cosas o $a < \alpha$ o $a = \alpha$:

- Si $a < \alpha$, por el lema 8.9, existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Además, por el lema 8.6, debe existir $y_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < y_0 \leq \alpha$, y si también tomamos algún $\alpha < y_1 < \alpha + \delta$, podemos afirmar dos cosas: primero, que f está acotada en $[a, y_0]$ y segundo que f está acotada en $[y_0, y_1] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Esto implica que f debe estar acotada en $[a, y_1]$, lo que a su vez permite concluir que $y_1 \in A$. Esto indicaría que $y_1 \leq \alpha$ pero esto resulta una contradicción con la manera que se eligió y_1.
- Si $a = \alpha$, entonces debe existir $\delta > 0$ tal que f está acotada en $[a, a + \delta)$ (ejercicio **??**). Basta entonces tomar $y_1 \in (a, a + \delta)$ para concluir que $y_1 \in A$ lo que de nueva cuenta deriva en una contradicción.

Como $a < \alpha$ y $a = \alpha$ son las únicas posibilidades para tener $\alpha < b$ y ambas derivan en contradicción podemos concluir que $\alpha = b$ como afirmamos. Ahora, debe existir $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(b - \delta, b]$; por el lema 8.6 debe existir $b - \delta < y \leq b$ de manera que f está acotada en $[a, y]$ y también en $[y, b]$ por tanto f está acotada en $[a, b]$. ∎

Teorema fuerte 3. *Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Definimos el conjunto A como

$$A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Por el teorema fuerte 2, debemos tener que f está acotada en $[a, b]$. Entonces, A está acotado y además debe ser también diferente del vacío. Sea $\alpha = \sup A$. Queremos mostrar que $\alpha = f(y)$ para algún $y \in [a, b]$ y conseguiremos esto por contradicción.

Supongamos que para todo $y \in [a, b]$ se tiene $\alpha \neq f(y)$. Entonces, la función definida como

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$$

es continua en $[a, b]$. Vamos a mostrar que g no está acotada en $[a, b]$ contradiciendo el resultado del teorema anterior. Sea $M > 0$ un número cualquiera, según el lema 8.6 debe existir un número $f(x_0) \in A$ tal que $f(x_0) > \alpha - 1/M$ en otras palabras $g(x_0) > M$ por lo que g no está acotada pues para cualquier número podemos encontrar otro en la imagen de g más grande que éste. Si g en verdad fuera continua lo anterior es imposible, alcanzando con esto la contradicción que deseábamos. Esto quiere decir que debe existir $y \in [a, b]$ de forma que $\alpha = f(y)$. ∎

4. ... y al teorema de continuidad uniforme

De los teoremas fuertes que hemos presentado, éste es quizá el que más grado de sofisticación requiere. A pesar de su dificultad, una vez establecidas las definiciones adecuadas, el resultado aparecerá rápidamente.

Definición 8.5. Sea $A \subset \mathbb{R}$ diremos que una colección de intervalos abiertos $\mathcal{O} = \{I_i\}_{i \in I}$ se dice *un recubrimiento abierto de A*, si cada elemento $x \in A$ pertenece a algún intervalo de $\mathcal{O}$. De manera similar, si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$, diremos que $\mathcal{P}$ es *un subrecubrimiento de $\mathcal{O}$ para A* si cada elemento $x \in A$ pertence a un intervalo de $\mathcal{P}$, i.e., si $\mathcal{P}$ es también un recubriento de A.

Ejemplo. Sea $\delta > 0$ un número cualquiera y sea $[0,1]$ el intervalo cerrado de 0 a 1. Para cada elemento $x \in [0,1]$ definimos el intervalo abierto

$$I_x = (x-\delta, x+\delta).$$

En ese caso, consideramos a la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{I} = \{I_x \mid x \in [0,1]\}.$$

La unión de esta familia es muy particular por satisfacer

$$[0,1] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Esto quiere decir que $\mathcal{I}$ es un recubrimiento de $[0,1]$.

Ejemplo. Consideremos el intervalo $(0,1]$. Entonces, la colección de intervalos abierto, definida como,

$$\mathcal{O} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2} \right) \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

es un recubrimiento abierto del intervalo indicado. En efecto, si $x \in (0,1]$, sabemos que existe un entero positivo n de forma que $1/n < x$. Esto quiere decir que

$$x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2} \right)$$

y ese caso,

$$x \in \bigcup_{I \in \mathcal{O}} I.$$

Definición 8.6. Un subrecubrimiento de un recubrimiento se dice *finito*, si contiene un número finito de intervalos abiertos del recubrimiento original.

Ejemplo. Consideremos el recubrimiento abierto de $[0,1]$ formado por los intervalos

$$I_x = \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right).$$

Entonces, $\left\{ I_0, I_{\frac{1}{2}}, I_1 \right\}$ es un subrecubrimiento finito del original.

Definición 8.7. Diremos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto *compacto*, si cada recubrimiento abierto de A admite un subrecubrimiento finito.

Teorema 8.10 (Heine-Borel). *El intervalo $[a,b]$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Debemos mostrar que cualquier recubrimiento, admite un subrecubrimiento finito y para esto tomaremos $\mathcal{O}$ de forma que éste sea un recubrimiento abierto de $[a,b]$. Para mostrar que existe un subrecubrimiento finito, consideremos el conjunto

$$S = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ y } [a,x] \text{ tiene un subrecubrimiento finito de } \mathcal{O}\},$$

el cual es acotado (una cota superior es b) y además es no vacío pues, al estar $a \in [a, b]$, entonces para algún $I \in \mathcal{O}$, se cumple $a \in I$. Luego, $\{I\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{O}$ para $[a, a]$ y por tanto $a \in S$. Por el axioma del supremo, lo anterior garantiza que S tiene supremo, digamos $\alpha = \sup S$. Vamos a mostrar que dos cosas, la primera es que $\alpha \in S$ y la segunda $\alpha = b$. Como $\alpha \leq b$, mostraremos simplemente $\alpha < b$ conduce a una contradicción.

Como $a \leq \alpha \leq b$, entonces existe un intervalo I en el recubrimiento de forma que $\alpha \in I_\alpha$. Esto implica que hay un intervalo $(\alpha - \delta, \alpha] \subset I_\alpha$ para algún $\delta > 0$. Como α es el supremo, según el lema 8.6 existe $x \in S$ de forma que $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$. Así, el intervalo $[a, x]$ está cubierto por un subrecubrimiento finito de $\mathcal{O}$, digamos $\mathcal{P}$, y el intervalo $[x, \alpha]$ está completamente contenido en el intervalo I. De esta forma, $\mathcal{P} \cup \{I_\alpha\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{O}$ para el intervalo $[a, \alpha]$ y con esto podemos garantizar que $\alpha \in S$.

Supongamos que $\alpha < b$. En ese caso, existe x de forma que $\alpha < x < b$ y además $x \in I_\alpha$. Como ya hemos probardo, $\alpha \in S$ por lo que $[a, \alpha]$ se puede cubrir por un subreubrimiento finito de $\mathcal{O}$, digamos $\mathcal{Q}$, mientras que $[\alpha, x] \subset I_\alpha$, luego $Q \cup \{I_\alpha\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{O}$ para $[a, x]$ por lo que $x \in S$. Esto último sin embargo, implicaría que $x \leq \alpha$ al ser α el supremo lo cual es contradictorio pues hemos tomado $\alpha < x$. En ese caso debemos tener que $\alpha = b$ como afirmamos. ■

Teorema fuerte 4. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ un número cualquiera. En ese caso para cada $x \in [a, b]$ existe $\delta(x)$ de forma que para todo $y \in [a, b]$ se tiene

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que

$$0 < |y - x| < \delta(x).$$

Definimos para cada $x \in [a, b]$, el intervalo

$$I_x = \left(x - \frac{\delta(x)}{2}, x + \frac{\delta(x)}{2}\right)$$

Entonces $\mathcal{O} = (I_x)_{x \in [a,b]}$ es un recubrimiento abierto de $[a, b]$ y por Heine-Borel, existe un subrecubrimiento abierto y finito de O dado por los elementos $x_1, \ldots, x_k$

$$\mathcal{P} = \{I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}\}$$

con los cuales definimos

$$\delta = \text{mín}\left(\frac{\delta(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\delta(x_n)}{2}\right).$$

Ahora, supongamos un par de elementos x e y en $[a, b]$ que satisfacen $|x - y| < \delta$. Como P cubre $[a, b]$, entonces $x \in I_{x_k}$ para algún x_k y en ese caso

$$\begin{aligned}
|y - x_k| &= |y - x + x - x_k| \\
&\leq |y - x| + |x - x_k| \\
&< \delta + \frac{\delta(x_k)}{2} \\
&< \delta(x_k);
\end{aligned}$$

esto quiere decir que también $y \in I_k$. Por la elección que hicimos de $\delta(x_k)$ debemos tener

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(x_k) + f(x_k) + f(y)| \\
&\leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) + f(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que la función f es uniformemente continua en $[a, b]$. ∎

Ejercicios

Ejercicio 8.1. Encuentra la cota superior mínima (si existe) de los siguiente conjuntos

1. $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\left\{x \mid x^2 + x + 1 \geq 0\right\}$.
3. $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\}$.
4. $\left\{x \mid x^2 + x + 1 < 0\right\}$.

Ejercicio 8.2. Prueba que el conjunto $\mathbb{R}$ no tiene una cota superior.

Ejercicio 8.3. Determinar para que valores de un natural n, el siguiente conjunto tiene mínima cota superior en los números racionales

$$\left\{x \mid 0 \leq x \leq \sqrt{n} \text{ y } x \text{ racional}\right\}.$$

Ejercicio 8.4. Resuelve lo siguiente:

- Sean x e y números tales que $y - x > 1$. Demuestra que existe un entero k de forma que $x < k < y$. Sugerencia: Considérese el máximo entero n de forma que $n \leq x$, ¿qué sucede con $n + 1$?
- Sean x e y números tales que $x < y$. Demuestra que existe un racional r de forma que $x < r < y$. Sugerencia: Si $1/n < y - x$, entonces $ny - nx > 1$.

Ejercicio 8.5. Supóngase que a y b son dos números relaes. Demuestra que $a = b$ siempre que, para todo natural $n > 1$, se satisface

$$b \leq a \leq b + \frac{1}{n}.$$

Ejercicio 8.6. Supongamos A y B son conjuntos de números reales. Si $x \leq y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$, demuestra que $\sup A \leq \sup B$.

Ejercicio 8.7. Condiremos una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ de forma que $a_n \leq a_{n+1}$ y $b_{n+1} \leq b_n$. Demuestra que existe un número x que pertenece a todos los intervalos I_n.

Ejercicio 8.8. Define, en analogía con el concepto de cota superior, el concepto de cota inferior de un conjunto de números reales. De igual manera, define el concepto de máximo de un conjunto de número reales

Ejercicio 8.9. Consideremos A como un conjunto no vacío y acotado inferiormente usando la definición encontrada en el ejercicio anterior. Demuestra que el conjunto $-A$, definido a continuación, es no vaćio y acotado superiormente.

$$-A = \{-a \mid a \in A\}.$$

Ejercicio 8.10. Demuestra que un conjunto A no vacío y acotado inferiormente tiene una máxima cota inferior. A esta cota inferior se le denomina *el ínfimo de* A y se denota por $\text{ínf}\, A$.

Ejercicio 8.11. Sea A un conjunto que admite una máxima cota inferior. Demuestra que para cada $h > 0$, existe un número $x \in A$ de forma que

$$x < \text{ínf}\, A + h$$

Ejercicio 8.12. Supongamos A y B son conjuntos de números reales acotados y no vacíos de números reales. Tomando el conjunto

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Demuestra que

$$\text{ínf}\, A + B = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B.$$

Ejercicio 8.13. Suponga que f está acotada superiormente en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Demuestra que f está acotada superiormente en $[a, c]$.

Ejercicio 8.14. Demuestra que si $\text{lím}_{x \to a^+} f(x)$ existe, entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en $[a, a + \delta)$.

Ejercicio 8.15. Demuestra que si $\text{lím}_{x \to b^-} f(x)$ existe, entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en $(b - \delta, b]$.

Ejercicio 8.16. Supongamos que la función f está definida en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Si f está acotada superiormente en A, entonces para cualquier $B \subseteq A$, demuestra que f está acotada superiormente en B.

Ejercicio 8.17. Demostrar que si f y g son uniformemente continuas en A, también lo es $f + g$.

Ejercicio 8.18. Demostrar que si f y g son uniformemente continuas y acotadas en A, entoncesfg es uniformemente continua en A.

Ejercicio 8.19. Provee un ejemplo que la conclusión del ejercicio anterior es falsa si alguna de las funciones no resulta acotada.

Ejercicio 8.20. Si f es uniformente continua en A, g es uniformemente continua en B y $f(x) \in B$ para todo $x \in A$, demuestra que $g \circ f$ es uniformemente continua en A.

Para entregar: Ejercicio 8.7

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Spi88] Spivak, Michael: *Cálculo en variedades*. Editorial Reverté, 3ª edición, 1988.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencia e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.