# Semana 3: Teoría de conjuntos

## 1. Conjuntos

En nuestra experiencia, *un conjunto* es un ente formado por objetos que satisfacen una condición dada, como el conjunto de puntos en el plano o el conjunto de los números pares. De manera precisa, un conjunto es un término no definido al que se le da significado a través de axiomas. Para el objetivo de este texto, sin embargo, bastará considerar la idea intuitiva de conjunto. Por esta razón, los términos *conjunto*, *elemento* y *pertenece a* se consideran primitivos y podrán ser usados en la forma intuitiva usual.

Usaremos como sinónimos las palabras *conjunto*, *familia* y *colección* y en general, utilizaremos las letras mayúsculas $A$, $B$, $C$, etc., para denotarlos. Para indicar que un objeto $a$ es un elemento de un conjunto $A$, escribiremos $a \in A$. La negación de este enunciado se escribe simplemente como $a \notin A$. Supondremos que si $x \in A$, entonces $A \notin x$ y en consecuencia para cada conjunto $A$ debemos tener $A \notin A$. La igualdad entre conjuntos se define por su extensión. Es decir, diremos que $A$ y $B$ son *iguales*, en símbolos $A = B$, si están compuestos por exactamente los mismos elementos. En caso de ser lo anterior falso, escribiremos $A \neq B$.

Para especificar los elementos de un conjunto usaremos la escritura entre llaves. Por ejemplo, si $A$ es un conjunto que contiene exclusivamente a los números 1, 2 y 3, escribimos

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Es importante mencionar que bajo esta notación, el orden en que se listan los elementos es irrelevante y lo mismo lo es el número de veces que un elemento es mencionado. Esto es consecuencia de la igualdad entre conjuntos.

Hay varios conjuntos muy importantes en matemáticas que resultan sumamente interesantes y que resultarán de mucha utilidad en nuestro desarrollo:

- *El conjunto de los números naturales*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

- *El conjunto de los números enteros*:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

La descripción que se da de estos conjuntos es, de nueva cuenta, primitiva y debe sobreentenderse su significado, asumiendo por supuesto, que existen dichos conjuntos. Más adelante, tendremos oportunidad de describir estos conjuntos abundando en algunos detalles.

## 2. Subconjuntos

Si $A$ y $B$ son conjuntos y cada elemento de $B$ es también un elemento de $A$, entonces diremos que $B$ *es un subconjunto de* $A$. En símbolos esto se escribe $B \subseteq A$. Sinónimos para este fenómeno son las expresiones $B$ *está contenido en* $A$ y $B$ *está incluido en* $A$. De la igualdad entre conjuntos podemos observar que dos conjuntos $A$ y $B$ son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Es importante notar que $A \subseteq A$ es siempre cierto; por esta razón diremos que $B$ *es un subconjunto propio de* $A$, en símbolos $B \subset A$, si $B \subseteq A$ pero $A \neq B$.

**Ejemplo.** Cade elementos del conjunto de los números naturales pertenece también al conjunto de los números enteros. Sin embargo, no todo elemento del conjunto de los enteros es un natural, e.g., el número entero -2. Todo esto nos permite afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Si $A$ es un conjunto y $\alpha$ una propiedad, entonces todos los elementos de $A$ que satisfacen $\alpha$ forman un conjunto, el cual resulta en particular un subconjunto de $A$. A este conjunto lo escribimos como

$$\{x \in A \mid \alpha(x)\}.$$

Lo anterior se lee como «todos los elementos de $A$ que satisfacen $\alpha$»

**Ejemplo.** Usando la notación anterior, es posible especificar el *conjunto de los enteros negativos* como

$$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin \mathbb{N}\}.$$

En todas las situaciones que abordaremos, todos los conjuntos considerados serán subconjuntos de un conjunto fijo. A tal conjunto se le denomina *conjunto universal* y aunque pocas veces se mencionará explícitamente, su existencia se asumirá en contexto. Usando esta convención, para una propiedad $\alpha$, el conjunto

$$\{x \mid \alpha(x)\}$$

indica la colección de todos los elementos $x$ del conjunto universal que satisfacen $\alpha(x)$. Esto indica que los subconjuntos del conjunto universal pueden ser especificados sin hacer una mención explícita de éste.

**Ejemplo.** Afirmaremos que existe un único conjunto que carece de elementos, el cual recibe el nombre de *conjunto vacío* y que denotaremos por el símbolo $\varnothing$. A este conjunto podemos especificarlo como

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

En otras palabras, para cualquier elemento $a$, debemos tener $a \notin \varnothing$. Esta descripción nos permite afirmar para cualquier conjunto $A$ que

$$\varnothing \subseteq A.$$

## 3. Operaciones en conjuntos

Usando el proceso de especificación descrito en la sección anterior, podemos pensar a los conjuntos como enunciados lógicos. Como en los enunciados lógicos, los conjuntos vienen equipados con algunas operaciones básicas.

**Definición 3.1.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. *La unión de los conjuntos $A$ y $B$* es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Bajo la definición anterior, $a \in A \cup B$ si y sólo si $a \in A$ o $a \in B$. Debemos recordar que en matemáticas, la disyunción, *o*, tiene un significado inclusivo a diferencia de nuestro lenguaje común, donde es interpretada con un sentido exclusivo. En el sentido exclusivo del término, el conjunto $A \cup B$ está formado por elementos que pertenecen al conjunto $A$, al conjunto $B$ o ambos.

**Ejemplo.** Consideramos los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{c, d, e\}$. La unión de éstos resulta simplemente el conjunto

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}.$$

Debe notarse que el elemento $c$ que pertenece a ambos conjuntos está listado.

**Proposición 3.1.** *Para conjuntos $A$, $B$ y $C$:*

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. $A \subseteq A \cup B$ *y* $B \subseteq A \cup B$.

*Demostración.* Los cuatro enunciados deben ser inmediatos de las reglas lógicas asociadas a la disyunción. ■

Las reglas expuestas en la proposición son las mismas que gobiernan la disyunción en lógica proposicional. De hecho, la prueba de los enunciados se recarga completamente en el comportamiento de la disyunción. Si existiera alguna duda acerca del porqué la proposición debe ser cierta, es importante realizar todos los pasos en ella.

**Definición 3.2.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. *La intersección de los conjuntos $A$ y $B$* es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Podemos describir de manera coloquial a la intersección de dos conjuntos como el proceso de tomar los elementos que tiene en común. Esto simplemente resulta de observar que existen dos condiciones que definen al conjunto y las cuales se deben cumplir simultáneamente.

**Ejemplo.** Considerando los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, c, e, g\}$, la intersección queda descrita como

$$A \cap B = \{a, c\}.$$

**Proposición 3.2.** *Para conjuntos $A$, $B$ y $C$:*

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

4. $A \cap B \subseteq A$ *y* $A \cap B \subseteq B$.

*Demostración.* Los cuatro enunciados son inmediatos de las reglas lógicas asociadas a la conjunción. ■

Como en el caso de la unión, las reglas para la intersección son las mismas que gobiernan la conjunción y su prueba se recarga completamente en el comportamiento de la conjunción. No debe sorprender que las leyes distributivas de la lógica proposicional hagan su aparición en las operaciones que hemos definido.

**Proposición 3.3.** *Para conjuntos $A$, $B$ y $C$:*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

*Demostración.* Se probará solamente 1., 2. se puede obtener por analogía. Si $a \in A \cap (B \cup C)$, entonces $a \in A$ y $a \in B \cup C$; además, si $a \in B \cup C$, entonces $a \in B$ o $a \in C$. En suma, $a \in A$ y $a \in B$ o $a \in C$. Como la conjunción distribuye sobre la disyunción, entonces $a \in A$ y $a \in B$ o $a \in A$ y $a \in C$ por lo que $a \in A \cap B$ o $a \in A \cap C$, lo cual implica que $a \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Esto significa que

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

La otra contención se obtiene por analogía, obteniendo el resultado que buscamos. ■

**Definición 3.3.** Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. *La diferencia entre $A$ y $B$*, es el conjunto

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Si $B \subset A$ entonces a $A \backslash B$ se dice *el complemento de $B$ relativo a $A$*. En particular, el complemento de $A$ relativo al conjunto universal, al que se le denomina simplemente *el complemento de $A$*, se denota con el símbolo $A^c$.

**Ejemplo.** Ya hemos definido el conjunto de los enteros negativos especificándolo. Bajo la definición anterior podemos argumentar de manera muy sencilla que

$$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}.$$

Para comprobar esto, basta observar la especificación del conjunto $\mathbb{Z}^-$ y la especificación del conjunto $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ y verificar que son idénticas.

Aunque la definición no da una expresión explícita del complemento de $A$, es sencillo encontrarla usando nuestra convención acerca del conjunto universal:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}.$$

De nueva cuenta, este conjunto está asociado con una operación utilizada en lógica, la negación, y se comporta de manera similar.

**Ejemplo.** Tomando $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ como el conjunto universal, el conjunto $A = \{x \mid x \text{ es par}\}$ tiene como su complemento al conjunto $A^c = \{x \mid x \text{ es impar}\}$.

**Proposición 3.4.** *Sea $U$ el conjunto universal y sea $A$ un conjunto cualquiera. Entonces:*

1. $(A^c)^c = A$.
2. $A \cup A^c = U$.
3. $A \cap A^c = \varnothing$.

*Demostración.* El primer enunciado es inmediato de la doble negación de un enunciado. El segundo del principio del medio excluido que nos permite obtener tautologías. El tercer enunciado es resultado del principio de no contradicción. ∎

Como en el caso de la conjunción, disyunción y negación, las operaciones de unión, intersección y complemento, interactúan a través de las denominadas *leyes de De Morgan*.

**Proposición 3.5** (Leyes de De Morgan)**.** *Para cualesquiera conjuntos $A$ y $B$, son válidas:*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

*Demostración.* Es directa a partir de las leyes de DeMorgan aplicadas en los enunciados que definen a cada conjunto. ∎

La diferencia entre conjuntos, aunque en apariencia diferente, representa también una versión de la negación en lógica y no está exenta de un comportamiento parecido.

**Proposición 3.6.** *Para cualesquiera conjuntos $A$, $B$ y $C$, son válidas las igualdades:*

1. $A \backslash B = A \cap B^c$.
2. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.
3. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

*Demostración.* Para probar 1, es necesario observar que $a \in A \backslash B$ si y sólo si $a \in A$ y $a \notin B$. Como $a \notin B$ si y sólo si $a \in B^c$, es posible concluir que $a \in A \backslash B$ si y sólo si $a \in A \cup B^c$. En otras palabras,

$$A \backslash B = A \cap B^c.$$

Para probar 2, usaremos 1 y las leyes de DeMorgan:

$$\begin{aligned} A \backslash (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= (A \backslash B) \cap (A \backslash C). \end{aligned}$$

El enunciado en 3, se prueba de manera similar a 2. ∎

# Ejercicios

*Ejercicio* 3.1. Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ el universo y sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{2, 4, 6, 7, 8\}$. Encuentra:

1. La unión de $A \cup B$.
2. La intersección $A \cap C$.
3. La diferencia $B \backslash C$.
4. El complemento $A^c$.

*Ejercicio* 3.2. Para los conjuntos del ejercicio anterior, encuentra:

1. $(A \cup B) \backslash C$ .
2. $(A \cup B)^c$.
3. $(A \cup C) \backslash (C \cap A)$.
4. $(A) \backslash (B \cup C)^c$.

*Ejercicio* 3.3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales? $A = \{a, b, a, b, a, c\}$, $B = \{a, a, a, a, b, c, c\}$, $C = \{a, a, a, c\}$, $D = \{a, a\}$, $E = \{a\}$, $F = \{c, a\}$.

*Ejercicio* 3.4. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Determina la validez de las siguiente afirmaciones.

1. $A \subset B$
2. $A \neq B$
3. $1 \in A$
4. $A \in B$
5. $1 \subset A$
6. $1 \subset B$

*Ejercicio* 3.5. Determina la validez de las siguientes afirmaciones:

1. $\varnothing \in \varnothing$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $\varnothing \subset \varnothing$
4. $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
5. $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
6. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

*Ejercicio* 3.6. Si dos conjuntos $A$ y $B$ son tal que su uníon y su intersección son iguales, ¿qué se puede decir que ellos?

*Ejercicio* 3.7. Sean $A$ y $B$ conjuntos cualquiera y sea $S \subseteq A$ y $S \subseteq B$. Demuestra que $S \subseteq A \cap B$.

| **Para entregar**: Ejercicio 3.7 |
| --- |

# Referencias

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.