Semana 12: Elementos de la teoría del orden

1. Definiciones

Otra de las importantes clasificaciones en la teoría de relaciones resultan las relaciones de orden. La palabra orden, a diferencia de otras que hemos ya usado, es común en nuestro vocabulario y tiene un significado intuitivo y habrá que tener cuidado de distinguir que la definición que se presenta a continuación es el significado que le daremos en las presentes notas.

Definición 12.1. Sea A un conjunto cualquiera. Una relación $\leq$ se dice *un orden parcial* si es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Para describir una relación de orden se preferirá siempre la notación $a \leq b$; además, debe resultar natural que afirmar $b \geq a$ es simplemente una manera alternativa de escribir $a \leq b$.

Ejemplo. Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ vienen todos acompañados de un orden. Éste por supuesto se puede ver como una relación y en todos los casos anteriores el orden asociado define un orden parcial.

El ejemplo anterior menciona las relaciones que motivan la definición de orden. En la perspectiva correcta, un orden parcial es una generalización de las ordenaciones que presentan los naturales, los enteros, los racionales y los reales.

Definición 12.2. Sea A un conjunto cualquiera y sea $\leq$ un orden parcial. *El orden parcial estricto inducido por* $\leq$ es la relación $<$ definida en A de la siguiente manera: $a < b$ si y sólo $a \leq b$ pero $a \neq b$.

No es difícil probar que el orden parcial estricto inducido por un orden parcial debe resultar una relación irreflexiva e intransitiva (ejercicio 12.3). Esta discusión podría sugerir que un orden parcial se comporta de la misma forma en que se comportan los naturales, enteros, racionales y reales. Esto, sin embargo, sería equivocado, pues no tenemos garantía para decidir si $a \leq b$ o $b \leq a$ para un orden parcial en general.

Definición 12.3. Sea A un conjunto y sea $\leq$ un orden en A. Si para los elementos a y b de A es cierto que $a \leq b$ o $b \leq a$, entonces decimos que *a y b son comparables*, en caso contrario decimos que *a y b no son comparables* y escribimos $a \parallel b$.

Ejemplo. Para dos números enteros m y n decimos que m divide a n si existe un entero q tal que $n = qm$. En ese caso la relación en $\mathbb{N}$ definida como $m \preceq n$ si y sólo si m divide a n es un orden parcial. Además, $2 \parallel 3$, i.e., 2 y 3 no son comparables al ser imposible que 3 divida a 2 o que 2 divida a 3.

El ejemplo anterior pone de manifiesto que un orden parcial es un concepto mucho más general que el orden definimos en los conjuntos de números. Sin embargo, nos permite identificar a estos ejemplos como un caso particular.

Definición 12.4. Un orden parcial en un conjunto A se dice *un orden lineal* o *un orden total* si cada par de elementos en A es comparable.

Por supuesto, el orden en los conjuntos de números que conocemos son todos lineales pues en todos se cumple la ley de tricotomía. Sin embargo, hemos visto que en el orden $\preceq$ definido en $\mathbb{N}$ no es un orden lineal. Este ejemplo, motiva expresar al orden como una estructura asociada a un conjunto consiguiendo que un cambio de orden puede cambiar por completo la naturaleza del objeto.

Definición 12.5. A la pareja $(A, \leq)$ donde A es un conjunto y $\leq$ un orden parcial, se le denomina *un conjunto parcialmente ordenado*.

Con esta definición, ahora podemos distinguir que $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, \preceq)$ son conjuntos parcialmente ordenados distintos a pesar que tienen al conjunto $\mathbb{N}$ como base. De manera intuitiva, lo anterior permite afirmar que los conjuntos parcialmente ordenados son sensibles a un cambio de orden.

Definición 12.6. Para un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, si la relación $\leq$ es un orden lineal, $(A, \leq)$ se dice *un conjunto linealmente ordenado* o *un conjunto totalmente ordenado*.

Por supuesto, los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ son todos cadenas, pero es posible construir un ejemplo igual de natural usando el conjunto $[n]$.

Ejemplo. Sea $[n] = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$. Denotaremos por $\mathbf{n}$ al conjunto $[n]$ parcialmente ordenado como $1 < 2 < \cdots < n$. Es fácil notar que $\mathbf{n}$ es un conjunto linealmente ordenado. En contraste, detonamos por $\overline{\mathbf{n}}$ al conjunto $[n]$ parcialmente ordenado por la igualdad. En este conjunto parcialmente ordenado, ninguna pareja de elementos distintos es comparable y constituye un ejemplo de un orden no lineal.

Definición 12.7. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $B \subseteq A$. El conjunto B se dice *una cadena en* $(A, \leq)$ si todos sus elementos son comparables entre sí. En contraste, B se dice *una anticadena en* $(A, \leq)$ si ninguno de sus elementos es comparable entre sí.

En particular, si $(A, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado, entonces A es un cadena. En general, cualquier subconjunto de A debe ser una cadena también. Sin embargo, es interesante explorar casos en los que esto no es cierto.

Ejemplo. Consideremos los naturales ordenados por divisibilidad y tomemos P como el conjunto de todos los números primos. Si tenemos $p \preceq q$ para un par de primos p y q, entonces $p = 1$ o $p = q$, pero el primer caso es imposible, luego $p = q$. Esto implica que, si $p \neq q$, entonces $p \parallel q$ por lo que el conjunto de primos es una anticadena.

Definición 12.8. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $B \subset A$. Definimos

- Un elemento $s \in B$ se dice *un máximo en* B, si para todo $t \in B$, tenemos $t \leq s$.
- Un elemento $s \in B$ se dice *un mínimo en* B, si para todo $t \in B$, tenemos $s \leq t$.

Ejemplo. Sea $(\mathbb{N}, \preceq)$ el conjunto de los naturales ordenado por divisibilidad. En este orden, $m \preceq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ en contraste con el orden original donde $0 \leq m$. En otras palabras, 0 es un máximo de $\mathbb{N}$ para $(\mathbb{N}, \preceq)$ pero es un mínimo de $\mathbb{N}$ para $(\mathbb{N}, \leq)$.

Se debe notar en la definición de máximo y mínimo el uso del pronombre indefinido «un», su aparición admite la posibilidad, a priori, de la existencia de uno o más. Sin embargo, esto es sólo es un pragmatismo técnico al ser imposible que exista más de uno de ellos como muestra la siguiente proposición.

Proposición 12.1. *En un conjunto parcialmente ordenado, si un máximo o un mínimo de un subconjunto existen, entonces son únicos.*

Demostración. Supongamos que a y b son mínimos de un subconjunto B en un conjunto parcialmente ordenado. Por definición a es menor o igual que cualquier otro elemento en B, en particular lo es de b, en ese caso $a \leq b$. De la misma forma, debemos tener que $b \leq a$. Como $\leq$ es antisimétrica, tenemos que $a = b$. Por tanto, si B tiene un mínimo, éste es único. De manera análoga, podemos probar que si B tiene un máximo, éste es también único. ∎

Los conceptos de máximo y mínimo requieren de ser elementos comparables con todo elemento del conjunto. Esto quiere decir que para decidir si un elemento es el máximo o mínimo debemos poder compararlo con todos los elementos del conjunto en cuestión. Podemos definir un concepto más débil para la comparación.

Definición 12.9. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $B \subset A$. Definimos

- Un elemento b del conjunto B, se dice *un minimal de B para $(A, \leq)$*, si para cualquier elemento b' en B con $b' \leq b$ se cumple que $b = b'$. En otras palabras, si $b < b'$ para todo elemento b' distinto de B del conjunto B.
- Un elemento b del conjunto B, se dice *un maximal de B para $(A, \leq)$*, si para cualquier elemento b' en B con $b \leq b'$ se cumple que $b = b'$. En otras palabras, si $b < b'$ para todo elemento b' distinto de b del conjunto B.

Es importante identificar de las definiciones que todo máximo (mínimo) es maximal (minimal), pero lo contrario es falso, i.e., no todo elemento maximal (minimal) es máximo (mínimo). Debe ponerse especial atención en esta sutil diferencia.

Ejemplo. Sea $(\mathbb{N}, \preceq)$ el conjunto de los naturales ordenados parcialmente por divisibilidad. Si consideramos el conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x\}$ entonces $m \preceq 2$ implica que m es un divisor de 2 pero los únicos divisores de 2 resultan 1 y 2. De éstas posibilidades sólo 2 pertenece a B; luego $m \preceq 2$ y $m \in B$ implican que $m = 2$ por lo que 2 es un elemento minimal de B. Sin embargo, 2 no es un mínimo de B pues es imposible compararlo con cualquier número impar que sea un elemento de B.

El ejemplo anterior es en realidad una instancia de una propiedad de los maximales y minimales para ciertos conjuntos. En particular, es una propiedad de los conjuntos finitos.

Proposición 12.2. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado donde A es finito. Entonces cualquier subconjunto no vacío de A tiene un minimal y un maximal.*

Demostración. Sea B un subconjunto no vacío de A y tomamos b en dicho conjunto de forma que el conjunto $L_b = \{x \in B \mid x \leq b\}$ tenga el menor número de elementos posibles. Si $|L_b| = 1$, se cumple que $L_b = \{b\}$ y b sería un elemento minimal de B. Probaremos entonces que $\{b\} \subset L_b$ es imposible. Si este fuera el caso, entonces existe $a \neq b$ siendo a un elemento de L_b. Esto quiere decir que $a < b$, lo cual nos permite concluir $|L_a| < |L_b|$, siendo esto una contradicción con la elección de b. Por lo tanto $L_b = \{b\}$, lo que implica que b es un elemento minimal de B. La prueba de la existencia del maximal es análoga a la anterior. ■

Es común encontrar los conceptos de cota superior y cota inferior cuando se discuten la existencia de máximos y mínimos en los números reales. Estas definiciones pueden ser fácilmente generalizadas en el marco de los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 12.10. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$. Un elemento $a \in A$ se dice *una cota superior de* B, si para cada $s \in B$ se tiene $s \leq a$. Recíprocamente, un elemento de $a \in A$ se dice *una cota inferior de* B, si para cada $b \in B$ en B, se tiene $a \leq b$.

Es importante contrastar las cotas superiores con los máximos pues, aunque parezcan semejantes sus definiciones, delinean conceptos distintos. Por un lado, ambos están obligados a ser comparables con todos los objetos del conjunto y por otro, los máximos deben ser miembros del conjunto en cuestión mientras una cota superior puede ser cualquier elemento en conjunto parcialmente ordenado. Lo anterior aplica de la misma manera al comparar las cotas inferiores con los mínimos.

Ejemplo. Sea $(\mathbb{N}, \preceq)$ el conjunto de los naturales ordenados por divisibilidad. Si volvemos a considerar el conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x\}$ entonces no es difícil ver que 1 es una cota inferior pues $1 \preceq m$ para todo $m \in B$ y de manera similar 0 es una cota superior de B pues $m \preceq 0$. Sin embargo, ni 1 es el mínimo ni 0 el es el máximo de B.

En los números reales, para cualquier subconjunto acotado superiormente se puede obtener una mínima cota superior. Esta propiedad de $\mathbb{R}$ es muy peculiar y un muchos textos introductorios de cálculo se le denomina «el axioma del supremo». Aunque en general los conjuntos parcialmente ordenados no presentan esta propiedad, es importante distinguir instancias que sí lo hacen.

Definición 12.11. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $B \subset A$. Entonces, si el conjunto de cotas superiores de B tiene mínimo, a éste mínimo lo llamaremos *el supremo de* B y lo denotaremos como $\sup B$. Recíprocamente, si el conjunto de cotas inferiores de B tiene máximo, a éste lo llamaremos *el ínfimo de* B y lo denotaremos como $\operatorname{ínf} B$.

Por último, comentaremos una generalización de una importante propiedad que poseen los números naturales: El principio de buen orden. Esta propiedad es una consecuencia directa del principio de inducción y es tan particular que ni $\mathbb{Z}$, ni $\mathbb{Q}$, ni $\mathbb{R}$ la poseen en sus ordenes implícitos.

Definición 12.12. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden $\leq$ se dice que es *un buen orden* si cada subconjunto no vacío de A tiene mínimo, en este caso diremos que $(A, \leq)$ es *un conjunto bien ordenado*.

No debe confundirse el significado de buen orden con orden total. La siguiente proposición muestra que todo buen orden es total, pero es posible tener un orden total, que no sea un buen orden. Para ilustrar esto, basta considerar el orden de $\mathbb{R}$ que ya hemos mencionado no es un buen orden aunque sabemos, es un orden total.

Proposición 12.3. *Todo buen orden es un orden total.*

Demostración. Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Deseamos concluir que dos elementos cualquiera a y b en A son comparables. Para esto consideremos el subconjunto de A $\{a, b\}$. Al estar el conjunto bien ordenado, dicho conjunto debe tener un mínimo, sea c el mínimo. Esto quiere decir por definición que $c \in \{a, b\}$, en otras palabras, $c = a$ o $c = b$; por un lado, si $c = a$, entonces $c \leq b$, mientras que si $c = b$ entonces $c \leq a$. De cualquier forma a y b resultan comprables como se deseaba. ∎

2. Diagramas y la relación de cobertura

Comenzaremos presentando dos herramientas fundamentales de la teoría que nos permite descomponer el orden de manera que podremos incluso dar una representación gráfica de éste, al menos para el caso finito.

Definición 12.13. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sean a y b elementos de A. Diremos que *b cubre al elemento a* o que *a está cubierto por b*, en símbolos $a \prec b$, si $a < b$ y $a \leq s < b$ implica $s = a$. A la relación $\prec$ se le denomina *la relación de cobertura de $\leq$*.

Teorema 12.4. *Sea $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde A es un conjunto finito. Entonces, $a < b$ si y sólo si existe una secuencia finita $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de elementos de A tales que $a = a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_{n-1} \prec a_n = b$.*

Demostración. Comenzamos definiendo el conjunto

$$S_1 = \{x \in A \mid a < x < b\}.$$

Si este conjunto es vacío, entonces a está cubierto por b y la secuencia que buscamos es simplemente $a \prec b$. Por el contrario, si S_1 es no vacío, al ser un subconjunto de un conjunto finito debe tener un minimal; sea entonces a_1 dicho minimal. En ese caso, $a \prec a_1$ y tomamos el conjunto

$$S_2 = \{x \in A \mid a_1 < x < b\},$$

observando que $S_2 \subset S_1$. Si dicho conjunto es vacío, entonces la secuencia que buscamos es simplemente $a \prec a_1 \prec b$. Por el contrario, si es no vacío, tomamos un elemento minimal a_2 en S_2 para obtener $a \prec a_1 \prec a_2$. Podemos repetir este proceso para a_2 si es necesario, considerando que esta situación no puede continuar indefinidamente pues en cada paso el conjunto S_{i+1} que se define tiene menos elementos que S_i, de esta forma existirá algún natural n de manera que S_n es vacío. En ese paso, habremos encontrado una secuencia de elementos de A que satisfacen $a \prec a_1 \prec \cdots \prec a_{n-1} \prec b$ probando con esto el resultado. ∎

Podemos resumir el anterior teorema afirmando que en el caso finito, un conjunto parcialmente ordenado determina y está determinado por la relación de cobertura. El siguiente corolario es inmediato del teorema anterior. Con esta información, podemos ilustrar la relación de cobertura de diferentes maneras y en múltiples conjunto parcialmente ordenados. Presentamos algunos ejemplos que ilustran este hecho.

Ejemplo. Para el conjunto de los números naturales ordenados de la manera habitual, tenemos $m \lessdot n$ si y sólo si $n = m + 1$. Esto se debe a que si $m \leq s < m + 1$ con s un natural cualquiera, entonces $s = m$ y por tanto $m \lessdot n$. Por otro lado si $m \lessdot n$, en particular se cumple $m < n$, por lo que existe un natural k distinto de 0 tal que $n = m + k$, si asumimos que $k > 1$, entonces $m < m + k - 1 < m + k$, en contradicción con la definición de $m \lessdot n$, de esta forma $k = 1$ y por tanto $n = m + 1$.

Ejemplo. En los números reales ordenados de manera habitual, es imposible tener $a \lessdot b$, pues para cada par de reales que satisfacen $a < b$, es posible encontrar c de forma que $a < c < b$.

Un uso muy interesante de la relación de cobertura es el proceso de conseguir un diagrama que represente el orden. Dichos diagramas son comúnmente denominados *de Hasse* en honor al matemático alemán Helmut Hasse (1898–1979). Aunque no fue él el primero en usarlos, sí fue el primero en popularizarlos al hacer un uso extensivo de ellos.

Definición 12.14. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Representamos al conjunto parcialmente ordenado por *un diagrama de Hasse* construido de la siguiente manera:

1. A cada punto a le asignamos un punto $p(a)$ en el plano euclidiano.
2. Para cada par a y b en A tales que $a \lessdot b$, dibujaremos una linea uniendo los puntos $p(a)$ y $p(b)$ en el plano.
3. Los pasos anteriores se desarrollan siguiendo las siguientes directrices:
   a) Si $a \lessdot b$, el punto $p(a)$ se dibuja abajo de $p(b)$.
   b) El punto $p(c)$ no atraviesa ninguna linea entre $p(a)$ y $p(b)$ si $c \neq a$ y $c \neq b$.

Ejemplo. Recordemos que hemos definido **n** como un conjunto linealmente ordenado con n elementos. El diagrama de Hasse de este conjunto puede encontrarse en la figura 1. De hecho, el diagrama justifica de manera visual la razón de llamar cadenas a los conjuntos linealmente ordenados.

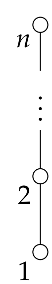

Figura 1: El conjunto linealmente ordenado **n**.

Ejemplo. Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 6\}$ como un subconjunto de los naturales ordenados por divisibilidad. Basta observar la relación de cobertura en A para garantizar que su diagrama de Hasse está determinado por la figura 2.

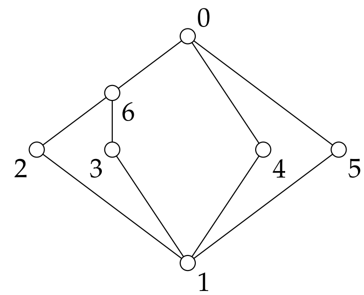

Figura 2: Un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ ordenado por divisibilidad.

Como los conjuntos parcialmente ordenados que son finitos quedan completamente determinados por su relación de cobertura, un diagrama de Hasse permite también describir un orden sin hacer mención explícita de la relación que guardan los elementos. Por ejemplo, si tomamos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, podemos afirmar que éste queda ordenado por el diagrama de Hasse de la figura 3. De esta forma, el orden queda determinado por las siguientes relaciones: $a < e$, $b < e$, $e < f$, $b < d$, $c < d$ y $d < f$. El diagrama nos permite afirmar, por ejemplo, que el conjunto contiene tres elementos minimales: a, b y c, y un sólo un maximal: f. Además, permite comprobar que e y d no son comparables. Es importante seguir construyendo diversos ejemplos que identifiquen los conceptos de orden que hemos presentado hasta ahora. Lo anterior, tiene dos objetivos en mente: el primero es dar una representación visual de ellos y el segundo reafirmar sus definiciones.

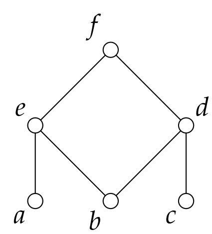

Figura 3: Un conjunto parcialmente ordenado con tres minimales y un maximal.

3. Ordenaciones de información

Hasta ahora, hemos presentado únicamente ejemplos de orden en el marco de conjuntos de números. Sin embargo, existen múltiples instancia en las cuales podemos hablar de orden sin hacer uso de conjuntos exclusivamente formados por números. En esta sección presentaremos tres ejemplos que son no sólo de importancia teórica sino que juegan un rol interesante en muchas aplicaciones.

Definición 12.15. Sea A como un conjunto cualquiera. *La relación de contención sobre* 2^A, está definida como $S \leq T$ si y sólo si $S \subseteq T$.

No es difícil observar con la exposición realizada de la teoría de conjuntos, que la relación de contención definida sobre el conjunto potencia, es un orden parcial. Es un buen ejercicio mostrar la validez de todas las propiedades.

Teorema 12.5. *El conjunto potencia de un conjunto cualquiera junto a relación de contención, es un conjunto parcialmente ordenado.*

Sea $\prec$ la relación de cobertura de asociada a la contención sobre 2^A. Si $S \prec T$, entonces existe un elemento a de forma que $T = S \cup \{a\}$ (ejercicio 12.10). Esto permite afirmar que una familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de A que satisface $A_i \prec A_j$ para $i < j$, se puede interpretar como una aproximación «paso a paso» del conjunto A. Si el conjunto A es finito, este se puede alcanzar eventualmente y si no lo es, será posible encontrar una familia de subconjuntos que se aproxime a A sin alcanzarlo nunca. Podemos ilustrar esto obteniendo el diagrama de Hasse del conjunto potencia de un conjunto con tres elementos, el cual está ilustrado enla figura 4.

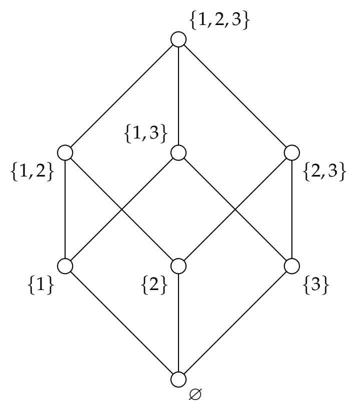

Figura 4: El conjunto potencia de $\{1,2,3\}$ ordenado por contención.

Un ejemplo relacionado pero con una apariencia mucho más computacional se consigue estableciendo con precisión el concepto de cadenas binarias las cuales juegan un importante rol en la representación de la información.

Definición 12.16. Sea $\Sigma = \{0,1\}$. Definimos *el conjunto de las cadenas binarias finitas* como

$$\Sigma^* = \{u \mid u\colon [n] \to \Sigma \text{ donde } n \in \mathbb{N}\}.$$

Es importante notar que existe sólo una función $u\colon [0] \to \Sigma$ pues $[0] = \varnothing$, a esta función se le denomina *la cadena vacía*. Podemos también formar *el conjunto de las cadenas binarias no finitas* como

$$\Sigma^\omega = \{u \mid u\colon \mathbb{Z}^+ \to \Sigma\}.$$

A la unión $\Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ se le denomina *el conjunto de las cadenas binarias*.

Es convencional denotar a una cadena binaria u anteponiendo los elementos de Σ por el orden indicado por u. Por ejemplo, la cadena binaria $u\colon [4] \to \Sigma$ con $u(1) = 1$, $u(2) = 1$, $u(3) = 0$ y $u(4) = 1$, se representa como 1101. El caso en que la cadena sea no finita, se puede denotar haciendo clara su progresión; por ejemplo, la cadena constante en 1, se puede denotar como $111\ldots$ sin caer en ambigüedad alguna.

Definición 12.17. Para dos elementos u y v en el conjunto $\Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ decimos que *u es un prefijo de v* si $u\colon [n] \to \Sigma$ es una cadena finita de forma que $[n] \subset \operatorname{dom}(v)$ y, para todo $1 \leq i \leq n$,

$$u(i) = v(i).$$

La convención sobre la representación de las cadenas binarias permite observar que 1010 es un prefijo de 1010111, 10 no es prefijo de 1111 y 11 es prefijo de $111\cdots$, entre otro ejemplos. Esto sugiere cómo ordenar el conjunto de cadenas binarias.

Teorema 12.6. *El conjunto de las cadenas binarias junto a la relación $u \leq v$ si y sólo $u = v$ o u es un prefijo de v, es un conjunto parcialmente ordenado. A este conjunto parcialmente ordenado se le denotará como Σ^∞.*

Demostración. Basta observar que la relación de de prefijo es irreflexiva y transitiva. En ese caso, es imposible tener que u es prefijo de u pues $\operatorname{dom}(u) \not\subset \operatorname{dom}(u)$. Además, si u es prefijo de v y v es prefijo de w, entonces $u\colon [n] \to \Sigma$ y $v\colon [m] \to \Sigma$ con $[n] \subset [m] \subset \operatorname{dom}(w)$ y además para todo $i \in [n]$,

$$u(i) = v(i) = w(i).$$

En otras palabras, u es un prefijo de w, por lo que la relación es transitiva. En ese caso, $\leq$ es un orden parcial como se afirma en el enunciado. ■

Por supuesto, se puede pensar una cadena binaria como una codificación de información: para dos cadenas que cumplan $u < v$, podemos afirmar que u se aproxima a v. Además, las cadenas no finitas son objetos idealizados a los que podemos aproximarnos tanto como queramos pero nunca alcanzarlos; de hecho, una observación adecuada de este orden nos permite concluir que toda cadena binaria no finita es un elemento maximal del conjunto Σ^∞, esto se debe a que es imposible que una de ellas sea el prefijo de otra cadena.

Aunque es técnicamente imposible realizar el diagrama de Hasse del conjunto de cadenas binarias al ser no finito, podemos ilustrar el conjunto usando un un subconjunto finito. Uno de tales posibilidades, se puede observar en la figura 5.

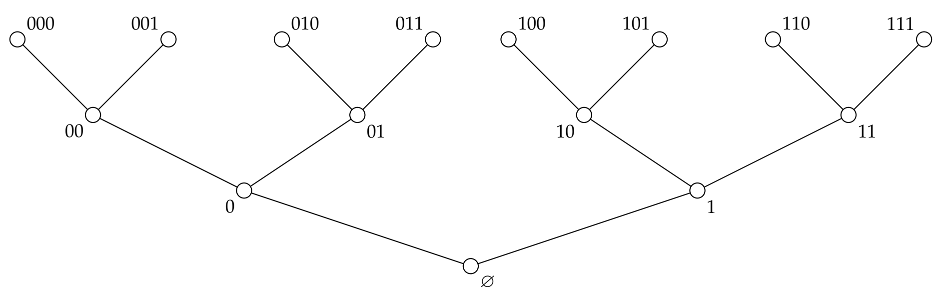

Figura 5: Un subconjunto finito de las cadenas binarias

Definición 12.18. Sean A y B conjuntos no vacíos cualquiera. Definimos *el conjunto de funciones de parciales de A en B* como

$$B^A = \{f \mid f\colon C \to B \text{ donde } C \subseteq A\}.$$

Es importante notar que los objetos de B^A son todos funciones en las que su dominio es un subconjunto de A. Esto implica que la función vacía es un elemento de B^A. Ir agregando uno por uno elementos al dominio y decidir qué valores toman, es una manera constructiva de presentar una función y que permite decidir como ordenar B^A.

Teorema 12.7. *El conjunto de las funciones parciales de A en B junto a la relación definida como $f \leq g$ si y sólo si que $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ y para cada elemento del dominio de f se tiene $f(a) = g(a)$, es un conjunto parcialmente ordenado*

La prueba del teorema es relativamente sencilla en el marco de la teoría de funciones que se expuso con anterioridad y debe ser realizada en el ejercicio 12.14.

Definición 12.19. Al conjunto parcialmente ordenado compuesto por las funciones parciales de A en B se le denota como $(A \longrightarrow B)$.

En el caso de las funciones parciales, los objetos ideales son las funciones definidas en la totalidad del conjunto A y estas pueden ser aproximadas «paso a paso» como en los ejemplos anteriores. De igual forma, la caracterización de la relación de cobertura no es difícil de obtener sin embargo los diagramas de Hasse asociados son algo más elaborado.

Ejercicios

Ejercicio 12.1. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$. Dibuja el diagrama de A ordenado con las siguientes reglas: $v < a$, $v < b$, $v < c$, $v < d$, $v < e$, $v < f$, $v < u$, $a < c$, $a < d$, $a < e$, $a < f$, $a < u$, $b < c$, $b < d$, $b < e$, $b < f$, $b < u$, $c < d$, $c < e$, $c < f$, $c < u$, $d < e$, $d < f$, $d < u$, $e < u$ y $f < u$.

Ejercicio 12.2. Dibuja el diagrama de Hasse de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$ ordenados por divisibilidad.

1. $\{1, 2, 3, 5, 30\}$.
2. $\{1, 2, 3, 4, 12\}$.
3. $\{0, 2, 3, 12, 18\}$.
4. $\{0, 1, 2, 3, 12, 18\}$.
5. $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.
6. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 12.3. Demuestra que la relación $<$ inducida por un orden parcial $\leq$ es irreflexiva y transitiva.

Ejercicio 12.4. Sea $\prec$ una relación irreflexiva y transitiva en A. Si definimos la relación $\preceq$ en A como $a \preceq b$ si y sólo si $a \prec b$ o $a = b$, demuestra que $\preceq$ es un orden parcial.

Ejercicio 12.5. Sea O una relación cualquiera en A y sea

$$P = \{(x, y) \mid (x, y) \in O \text{ y } x \neq y\}.$$

Demuestra que O es un orden pacial si y sólo si P es irreflexiva y transitiva.

Ejercicio 12.6. Sea $\leq$ un orden parcial en el conjunto A y sea $B \subseteq A$. Demuestra que la relación $\{(x, y) \in B \times B \mid x \leq y\}$ es un orden parcial en B. Concluye que la restricción de un orden parcial a un subconjunto es un orden parcial, i.e., si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$, entonces $(B, \leq)$ es también un conjunto parcialmente ordenado.

Ejercicio 12.7. Prueba que un subconjunto de un conjunto finito y parcialmente ordenado tiene un maximal.

Ejercicio 12.8. Para el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, existen 16 formas distintas de dar un orden parcial. Encuentra todos estos ordenes parciales, dibujando los 16 posibles diagramas de Hasse para el conjunto A.

Ejercicio 12.9. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que el conjunto potencia de A junto a la relación de contención forman un conjunto parcialmente ordenado.

Ejercicio 12.10. Sea $\multimap$ la relación de cobertura para el conjunto potencia de A ordenado por contención. Demuestra que si $S \multimap T$, entonces existe un elemento a de forma que $T = S \cup \{a\}$.

Ejercicio 12.11. Muestra que cada familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de un conjunto A, tiene a la unión como supremo y a la intersección como el ínfimo.

Ejercicio 12.12. Muestra que la cadena vacía es un mínimo de Σ^∞.

Ejercicio 12.13. Sea $\multimap$ la relación de cobertura en Σ^∞. Demuestra que para una cadena binaria no finita u, no existe una cadena binaria v tal que $u \multimap v$.

Ejercicio 12.14. Demuestra que la relación en B^A, definida como $f \leq g$ siempre que $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ y para cada elemento a en el dominio de f se tiene $f(a) = g(a)$, es un orden parcial.

Ejercicio 12.15. Encuentra una cadena en $(\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N})$.

Para entregar: Ejercicio 12.10

Referencias

[DP02] Davey, Brian A. y Priestley, Hilary A.: *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, 2002.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos textos que han sido usados para preparar el curso de «Matemáticas discretas» impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y sea sujeto a cambios constantes.