Semana 14: Usos y desusos de la derivada

1. Cálculo de límites indeterminados: Límites finitos

Teorema 14.1 (Regla de L'Hôpital para límites finitos)**.** *Supongamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

y supongamos también que existe el

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración. Por hipótesis, $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe, lo cual implica que, al menos alrededor de a, la expresión $f'(x)/g'(x)$ tiene sentido. Esto quiere decir que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen y además $g'(x) \neq 0$ al rededor de a. Supongamos, entonces, que $t > 0$ es un número de forma que, para cada $x \in (a-t, a+t)$ con $x \neq a$, los números $f'(x)$ y $g'(x)$ existen y además $g'(x) \neq 0$.

No tenemos información acerca de si las funciones f y g están definidas en a, pero podemos definir funciones que las extiendan de manera continua:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

y

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Debemos notar una consecuencia de la forma en que hemos definido esta última función, por un lado, si $x \in (a, a+t)$, entonces las función G es continua en $[a, x]$ y diferenciable en (a, x). Además, podemos afirmamos que $G(x) \neq 0$ en el mismo intervalo. En efecto, si $G(x) = 0$, podemos utilizar el teorema del valor medio sobre G, para garantizar que existe $x_1 \in (a, x)$ de forma que

$$g'(x_1) = G'(x_1) = \frac{G(x) - G(a)}{x - a} = 0,$$

pero esto entra en contradicción con lo que se afirma en el primero párrafo, i. e., que la función g' no se anula en ningún punto del intervalo $(a-t, a+t)$ salvo quizá en a. En ese caso, $G(x) \neq 0$

para cada $x \in (a, a+t)$. Un argumento similar nos permite probar también que $G(x) \neq 0$ para todo $x \in (a-t, a)$ por lo que la función G se comporta como g alrededor de a.

Definimos ahora una función sobre los intervalos $(a-t, a)$ y $(a, a+t)$ de la siguiente manera: Si $x \in (a, a+t)$, entonces F y G son funciones continuas en $[a, x]$ y diferenciables en (a, x), por lo que podemos utilizar el teorema del valor medio de Cauchy para encontrar el número α_x de forma que $a < \alpha_x < x$ y

$$F'(\alpha_x)\left(G(x) - G(a)\right) = G'(\alpha_x)\left(F(x) - F(a)\right).$$

Por la manera en que se definieron las funciones F y G, lo anterior se traduce en la igualdad

$$f'(\alpha_x)g(x) = g'(\alpha_x)f(x)$$

y por la discusión del párrafo anterior, esto se puede escribir como

$$\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Con un argumento análogo es posible concluir lo mismo si $x \in (a-t, a)$ a condición que el número α_x, satisface $a - t < \alpha_x < a$. En resumen, si $x \in (a-t, a+t)$ con $x \neq a$, entonces

$$0 < |\alpha_x - a| < |x - a|$$

y

$$\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Afirmamos ahora la siguiente igualdad de límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(\alpha_x)}{g(\alpha_x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Para probarlo, sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ de forma que $0 < |y - a| < \delta$ implica que

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \varepsilon$$

y en ese caso, si tomamos $0 < |x - a| < \min(\delta, t)$, por la discusión en el párrafo anterior, podemos entonces concluir que

$$0 < |\alpha_x - a| < |x - a| < \delta$$

lo que además implica

$$\left| \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L \right| < \varepsilon.$$

De la desigualdad anterior, podemos concluir la afirmación que buscábamos y utilizarla para calcular finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo. No es difícil probar que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(3x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0,$$

lo que nos permite realizar la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 3\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(x)}\\ &= 3\frac{(-1)}{1}\\ &= -3.\end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$$

el cual satisface las hipótesis de la regla de L'Hôpital. Por un lado, la derivada del numerador es

$$-x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) - \cos(x) = -x\operatorname{sen}(x)$$

y la del denominador es simplemente $2x$, luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen}(x)}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$$

Ejemplo. Considerando el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

observamos que satisface las hipótesis de la regla de L'Hôpital por lo que podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}$$

El límite a la derecha de nueva cuenta satisface las hipótesis de la regla por lo que podemos volver a aplicarla y obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esto indica simplemente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo. Para calcular el

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$$

podemos utilizar algún artificio algebraico para cancelar el numerador y calcular una suma en el denominador. Sin embargo, podemos utilizar de manera directa la regla de L'Hôpital observando que las funciones involucradas cumplen con las hipótesis por lo que el cálculo del límite se reduce a obtener

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

En realidad, el teorema anterior es una expresión bastante general. Los siguientes corolarios pretenden ilustrar como otras versiones de la regla de L'Hôpital siguen sin mucho esfuerzo. Algunas formulaciones adicionales aparecen en el ejercicio 14.5 y es una práctica demostrarlas.

Corolario 14.2. *Supongamos que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$$

y supongamos también que existe el

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración. Es en realidad una serie de manipulaciones algebraicas que dependen de observar que debemos tener

$$\lim_{h\to 0} f(a+h^2) = \lim_{h\to 0} g(a+h^2) = 0$$

y en consecuencia, utilizando la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)}{g(a+h^2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h^2)2h}{g'(a+h^2)2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h^2)}{g'(a+h^2)} \\
&= \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

■

Corolario 14.3. *Supongamos que*

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = 0$$

y supongamos también que existe el

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración. Es otra sencilla manipulación algebraica: Debemos tener, por hipótesis,

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} g\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Entonces, basta usar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

■

2. Cálculo de límites indeterminados: Límites infinitos

Teorema 14.4 (Regla de L'Hôpital para límites infinitos). *Supongamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

y supongamos también que existe el

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración. Vamos a probar la existencia del límite a través de la definición y vamos a necesitar establecer algunas estimaciones que resultarán importantes para determinarlo. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Tenemos lo siguiente:

1. Por hipótesis, existe L de forma que

   $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

   Esto quiere decir que existe $\delta_0 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_0$, entonces

   $$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

2. Elegimos ahora $b = a - \delta_0/2$ y $c = a + \delta_0/2$ de forma que $|b-a| < \delta_0$ y de igual forma $|c-a| < \delta_0$. Además, $x \neq a$ y $b < x < c$ si y sólo si

   $$0 < |x-a| < \frac{\delta_0}{2}.$$

3. Al tener
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$
debe existir $\delta_1 > 0$ de forma que $0 < |x - a| < \delta_1$ implica que $f(x) > 1$ y $g(x) > 1$, por lo que $f(x)$ y $g(x)$ son ambos distintos de cero.

4. De nueva cuenta como
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$
existe $\delta_2 > 0$ de forma que, si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces
$$g(x) > \text{máx}(|g(b)|, |g(c)|) + 1.$$
Esto quiere decir que $g(x) \neq g(b)$ y $g(x) \neq g(c)$, cuando x satisface la desigualdad planteada.

5. La función
$$S(x) = \begin{cases} \frac{1-g(b)/g(x)}{1-f(b)/f(x)} & \text{si } x < a \\ \frac{1-g(c)/g(x)}{1-f(c)/f(x)} & \text{si } a < x \end{cases}$$
queda perfectamente definida para todos los números x que satisfacen $0 < |x - a| < \delta_1$; además por la hipótesis sobre los límites de f y g,
$$\lim_{x \to a} S(x) = 1$$
por lo que existe $\delta_3 > 0$ de forma que $0 < |x - a| < \delta_3$ implica
$$|S(x) - 1| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)}\right).$$

Como hemos hecho en la prueba de la regla de L'Hôpital, definimos ahora una función para cada elemento $x \neq a$ que satisface $b < x < c$ de la siguiente manera: Si $b < x < a$,por la forma en que se eligió b, f y g deben ser continuas en $[b, x]$ y diferenciables en (b, x); podemos entonces usar el teorema del valor medio de Cauchy y encontrar el número $\alpha_x \in (b, x)$ de forma que
$$f'(\alpha_x)\,(g(x) - g(b)) = g'(\alpha_x)\,(f(x) - f(b)).$$
De la misma forma podemos argumentar para un número $x \neq a$ que satisface $a < x < c$, la existencia del número $\alpha_x \in (x, c)$ que cumple
$$f'(\alpha_x)\,(g(x) - g(c)) = g'(\alpha_x)\,(f(x) - f(c)).$$
Basta notar que el número α_x debe cumplir, siempre que este definido,
$$\left|\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
al tener satisfacer $0 < |\alpha_x - a| < |b - a| < \delta_0$.

Notaremos ahora que si $0 < |x-a| < \delta_1$, $0 < |x-a| < \delta_2$ y $b < x < a$, entonces

$$\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{1-\frac{f(b)}{f(x)}}{1-\frac{g(b)}{g(x)}} \cdot \frac{f(x)}{g(x)},$$

o en otras palabras

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\frac{g(b)}{g(x)}}{1-\frac{f(b)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = S(x) \cdot \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

La misma igualdad se puede concluir si cambiamos $b < x < a$ por $a < x < c$.

Estamos ahora listos para concluir lo que deseamos, para esto haremos uso de un lema acerca de límites. Si $\delta = \text{mín}(\delta_0/2, \delta_1, \delta_2)$ entonces $0 < |x-a| < \delta$ implica que

$$|S(x)-1| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right),$$

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$\frac{f(\alpha_x)}{g(\alpha_x)} = S(x) \cdot \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Podemos entonces concluir que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|S(x) \cdot \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■

Uno puede extender este par de resultados, para resolver muchos límites problemáticos. Por ejemplo, cuando los límites tienden a $-\infty$ o son iguales a $-\infty$. De igual forman los límites pueden presentar alguna combinación de ambos casos y las reglas de L'Hôpital funcionan de la misma forma. Para ilustrar esto, considera el caso en que uno de los límites resulta 0 y otro ∞. Como referencia, es interesante consultar el ejercicio 56 del capítulo 11 en [Spi12] (en la segunda ed. es el ejercicio 53 del mismo capítulo).

Ejemplo. Para calcular el

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+6}$$

usaremos una de las variantes de la la regla de L'Hôpital expuesta en los ejercicios (¡identifícala!). Calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{8x} = \frac{1}{4}$$

por lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+6} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo. Considerando las reglas que hemos discutido, podemos calcular el siguiente límite con relativa facilidad:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2-d}$$

observando simplemente que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2-d} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

Existen tambíen algunas advertencias sobre el uso de estas reglas. La existencia del límite de $f(x)/g(x)$ sigue de la existencia del límite para $f'(x)/g'(x)$, sin embargo esta condición no es necesaria, i. e., puede suceder que el límite $f'(x)/g'(x)$ no exista pero que el límite $f(x)/g(x)$ exista. Como ejemplo de esto, presentamos el siguiente caso.

Ejemplo. No es difícil calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Sin embargo, si intentamos calcular las expresiones asociadas a la regla de L'Hôpital, obviando garantizar las hipótesis, deberíamos calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\operatorname{sen}(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} 1+\cos(x)$$

el cual no existe cuando $x \to \infty$. De hecho, la función oscila entre 0 y 2. Esto en particular muestra que el límite $f(x)/g(x)$ puede existir sin que el límite $f'(x)/g'(x)$ exista por lo que el vínculo solamente queda establecido bajo las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

Ejercicios

Ejercicio 14.1. Usa la regla de L'Hôpital para calcular el siguiente limite (¡qué sencillo es ahora!)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Ejercicio 14.2. Calcula los siguiente límites.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x-5}{2x}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x-5}{2x}$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{x^2}$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$.

e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^n-1}$.

f) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$.

g) $\lim_{x\to 0} x/\tan(x)$

h) $\lim_{x\to 0} (\cos^2(x)-1)/x^2$

Ejercicio 14.3. Vamos a revisitar un problema, pero ahora se intentará resolver con nuestras nuevas y flamantes técnicas. Demuestra que $n \leq m$ si y sólo si el siguiente límite existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Además, encuentra su valor cuando $n \leq m$. Sugerencia: Separa los casos en que $m = n$ y $m \neq n$.

Ejercicio 14.4. ¿Dónde está el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Ejercicio 14.5. En este ejercicio se exploran algunas otras formas de la regla de L'Hôpital pero ninguna de ellas requiere de un argumento tan elaborado como el que presentamos durante las notas sino algunas sencillas manipulaciones algebraicas.

a) Si existen los límites

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

demuestra que

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

b) Si se satisfacen las igualdades

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty,$$

demuestra que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

c) Si se satisfacen las igualdades

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty,$$

demuestra que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

d) Si se satisfacen las igualdades

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

e) Si se satisfacen las igualdades

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Para entregar: Ejercicio 14.3

Referencias

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Pis77] Piskunov, N.: *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir, Moscú, 1977.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencial e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.