Una posible solución a la tarea 2

10 de septiembre de 2015

Ejercicio. Sea

$$B^A = \{f : A \to B\}$$

y sea también la relación $\leq$ en B^A dada por $f \leq g$ si y sólo si $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ y para cada a en $\mathrm{dom}(f)$, debe suceder que $f(a) = g(a)$. Demuestra que $\leq$ es un orden parcial

Solución. Se debe probar que la relación es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Probemos primero que es reflexiva. Para lograr esto, basta notar que debemos tener $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(f)$ y que $f(a) = f(a)$ para cualquier $a \in \mathrm{dom}(f)$. Por lo que $f \leq f$.

Probemos ahora que la relación es transitiva. Supongamos que $f \leq g$ y que $g \leq h$. De la primera hipótesis podemos concluir que

$$\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g),$$

mientras de la segunda que

$$\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(h)$$

por lo que podemos concluir que

$$\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(h). \tag{1}$$

Ahora, de la primera hipótesis tenemos que

$$f(a) = g(a)$$

para cualquier $a \in \mathrm{dom}(f)$, de la segunda obtenemos que

$$g(a) = h(a)$$

para cualquier $a \in \mathrm{dom}(g)$ como

$$\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g),$$

en particular debemos tener que, si $a \in \mathrm{dom}(f)$ entonces

$$f(a) = g(a) = h(a). \tag{2}$$

De 1 y 2 sigue que $f \leq h$.

Por último basta probar la antisimetría, para esto recordemos que dos funciones son iguales si y sólo si sus dominios coinciden y sus reglas en sus dominios coinciden. Supongamos entonces $f \leq g$ y $g \leq f$, de la primera hipótesis podemos verificar que $\mathrm{dom}(f)\mathrm{dom}(g)$, mientras de la segunda $\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$ por lo que

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g). \tag{3}$$

Por lo que los dominios coinciden. Si coinciden y tomamos $a \in \mathrm{dom}(f)$, por hipótesis debemos tener que

$$f(a) = g(a); \tag{4}$$

por lo que de 3 y 4 se sigue que las funciones son iguales. Esto es que $f = g$.

Al ser $\leq$ reflexiva, transitiva y antisimétrica, entonces es un orden como afirmaba el enunciado del ejercicio. $\square$