Semana 10: Derivadas

1. Definiciones

Exploramos la idea directamente de las definiciones de la derivada.

Definición 10.1. La función f se dice *diferenciable en a* si existe el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, dicho límite se representa por $f'(a)$ y se le denomina *la derivada de f en a*.

Por lo regular, se afirma llanamente que *f es diferenciable* y esto significará que f es diferenciable en todos los elementos del dominio de f. Además, podemos formular una función asociada a una función que capture su derivada. Para esto definiremos la función *derivada de f*, en símbolos f', que tendrá como dominio al conjunto de puntos para los cuales existe el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y cuyo valor en esos puntos está dado por el límite. Eso quiere decir que f' contiene parejas ordenadas de forma que

$$\left(a, \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right).$$

En otras palabras, a condición que límite exista, la derivada de f tiene como regla de correspondencia

$$f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Comentario. En muchas ocasiones la derivada de una función se denota por

$$\frac{df(a)}{dx}$$

o de manera más concreta,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}.$$

De la misma forma, es común encontrarse con la notación

$$\frac{df}{dx}$$

para denotar la derivada de f como función.

2. Derivadas elementales

Calcularemos algunas derivadas de funciones que hemos explorado con anterioridad y que resultarán interesantes en ésta primer exploración.

Ejemplo. Supongamos que f es una función constante, i.e., $f(x) = c$ para todo x. Tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Esto quiere decir que $f'(x) = 0$ para todo x.

Ejemplo. Supongamos que $f(x) = ax + b$ para todo real x. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} \\
&= a
\end{aligned}$$

Por lo que $f'(x) = a$ para todo x.

Ejemplo. Proponemos $f(x) = x^2$ para todo real x. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $f'(x) = 2x$ para todo x.

Ejemplo. Debemos notar un par de cosas antes de proponer la derivada del seno:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(x + h/2\right).$$

Por un lado,

$$\lim_{h \to 0} \cos(x + h/2) = \lim_{h \to 0} \cos(x+h) = \cos(x)$$

y por otro

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = 1.$$

Por lo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \cos(x),$$

por lo que la derivada de la función sen es la función cos.

Ejemplo. Al igual que con el seno, debemos notar primero

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\operatorname{sen}\left(x+h/2\right).$$

De manera similar tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x+h/2) = \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen}(x)$$

y en consecuencia

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\operatorname{sen}(x),$$

por lo que la derivada de la función cos es la función $-$ sen.

Ejemplo. Proponemos la función $f(x) = |x|$ y queremos buscar la derivada en 0. En ese caso

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Como sabemos, el límite anterior no existe por lo que la función no es diferenciable en 0. Podemos afirmar simplemente: $0 \notin \operatorname{dom}(f')$.

Podemos también estudiar la idea de las derivadas por la derecha e izquierda observando los límites

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

y

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

con los cuales podemos afirmar que una función es diferenciable en a si ambas derivadas, por la izquierda y por la derecha, existen y son iguales. En el ejemplo anterior, $f(x) = |x|$, podemos concluir que la derivada no existe al verificar que las derivadas por la izquierda y por la derecha no coinciden.

Ejemplo. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Para calcular la derivada observemos primero que, para $a > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\cdot\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\ &= \frac{a+h-a}{h\cdot\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Es de notarse que para $a > 0$, lo anterior implica que $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$. Esto contrasta cuando intentamos obtener la derivada por la derecha para $a = 0$ lo cual implicaría encontrar el

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}};$$

éste, sin embargo, no existe. Este es un ejemplo, de una función que es continua en un punto pero no diferenciable.

Ejemplo. Sea $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Para calcular su derivada, observemos primero la expresión

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt[n]{a+h}-\sqrt[n]{a}}{h}$$

La cual podemos simplificar tomando $u = \sqrt[n]{a+h}$ y $v = \sqrt[n]{a}$, lo cual nos lleva a tener $h = u^n - v^n$. Entonces, lo anterior resulta

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u-v}{u^n-v^n} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} u^{n-1-i}v^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}(\sqrt[n]{a+h})^{n-1-i}(\sqrt[n]{a})^i}$$

entonces,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}(\sqrt[n]{a})^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}} = \frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}.$$

Podemos usar los conceptos de derivada por la izquierda y por la derecha para definir el significado de una función diferenciable en un intervalo dado en analogía con el mismo concepto en continuidad.

Definición 10.2. Sea f un función. Decimos que f *es diferenciable en* (a,b) si es diferenciable en cada elemento de (a,b). Decimos también que es diferenciable en $[a,b]$ si es diferenciable en (a,b) y es diferenciable por la derecha en a y diferenciable por la izquierda en b.

Es quizá interesante ahora que hemos formalizado el concepto de derivada, intentar conciliar éste con la idea subyacente que lo origina: La recta tangente. Hemos interpretado los conjuntos de parejas como gráficas y es en ese sentido que le daremos forma a la recta tangente, esto con la única intención de tener una herramienta visual para entender el concepto de derivada. No es difícil establecer que una recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_0, y_0), también pasa por el punto (x_0+1, y_0+m). Con lo anterior podemos afirmar que si f es una función diferenciable en a entonces el conjunto de puntos

$$L = \{(a, f(a)) + t(1, f'(a)) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

representa a la recta tangente de la función f en el punto a, por lo que podemos encontrar una expresión analítica de manera sencilla:

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Por la forma en que hemos propuesto este conjunto, su gráfica cruza el punto $(a, f(a))$, como deseamos de la recta tangente; sin embargo no es necesariamente el único punto en las gráficas presentan una intersección. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^3$, su derivada está dada por $f'(x) = 3x^2$, por lo que la expresión de la recta tangente de f en $a \neq 0$, es

$$L(x) = 3a^2(x-a) + a^3;$$

es inmediato verificar que $L(a) = f(a)$, pero también que $L(-2a) = f(-2a)$. Esto sin embargo, no es problemático (Ejercicio 10.12).

Teorema 10.1. *Si f es diferenciable en a, entonces es continua en a.*

Demostración. La prueba es realmente una observación de la definición de derivada. Como f es diferenciable en a,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(a) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos deducir que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$ ■

3. Derivadas de orden superior

Hemos discutido que las funciones continuas constituyen entidades deseables desde el punto del estudio de funciones con valores reales. Hemos incluso presentado una forma de resolver problemas de continuidad en algunas funciones (discontinuidades evitables). Sin embargo, el teorema anterior afirma que las funciones diferenciables *se comportan mejor* que las funciones continuas, al tener funciones continuas que no son diferenciables. Comenzaremos explorando algunos ejemplos para intentar aclarar el significado de un comportamiento mejor.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

No es dificil ver que esta función es continua. Es sin embargo no diferenciable en 0. Esto se debe a que

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} h & h > 0 \\ 1 & h < 0 \end{cases}$$

Esto indica que las derivadas por la izquierda y por la derecha de la expresión anterior no coinciden. Este ejemplo abunda en la falsedad del inverso del teorema 10.1. Es, sin embargo, muy ilustrativo observar cuan atractiva parecía la función antes de presentar el concepto de derivada.

Ejemplo. Recordemos que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es diferenciable en el intervalo $(0, \infty)$ donde $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$. En particular, para $a = 0$ era imposible encotnrar su derivada pues era imposible encontrar el

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}.$$

Este ejemplo resulta algo extraño pues esperaríamos que una función que no definimos a pedazos fuera un candidato adecuado a no presentar comportamientos extraños en su derivada. El problema en este caso, es que la pendiente de la función crece indefinidamente cuando nos acercamos a 0. Podríamos culpar de esto a que la función f no está definida en los negativos; para nuestra sorpresa la función $\sqrt[3]{x}$ presenta el mismo comportamiento en 0 por lo que la razón debe ser intrínseca.

Ahora exploraremos dos ejemplos que hemos presentado con anterioridad al explorar el concepto de discontinuidades evitables, mostraremos que uno de ellos está condenado al fracaso, tanto o más como los dos ejemplos anteriores.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Entonces, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

pero sabemos que no existe el

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right).$$

Por lo que la función resulta no diferenciable en 0.

A pesar que la anterior función no presenta desde el punto de vista de su derivada un comportamiento deseable, podemos preguntar que pasa con otra función muy parecida.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Entonces, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

pero sabemos que el

$$\lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Por lo que la función es diferenciable en 0.

Lo que muestra el anterior ejemplo es sorprendente; no parece que existiera realmente diferencia en extender continuamente $x \operatorname{sen}(x)$ o $x^2 \operatorname{sen}(x)$, pero la segunda tiene derivada y la primera no. Por supuesto, cualquier aceptación de algún comportamiento adecuado en una debe implicar lo mismo para la otra función. Para resolver el problema pensaremos en restringir más la funciones. Podemos de hecho observar que, al ser f' una función, es susceptible de ser analizada a través de su derivada, i.e., estudiar f'', la segunda derivada. Observemos que pasa en el ejemplo anterior si usamos este nuevo tratamiento.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Podemos calcular la derivada de esta función de manera sencilla,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

Obteniendo simplemente que $f'(x) = 2|x|$, en consecuencia $0 \notin \operatorname{dom}(f'')$. Este es un ejemplo en el que la primera derivada existe, pero no la segunda.

El ejemplo anterior presenta una función que debería ser adecuada y aceptable, pero el criterio que pedimos al agregar que no sólo sea diferenciables si no que su derivada sea de igual forma diferenciable es mucho más restrictivo. Veremos, una vez que tengamos algunos resultado respecto a derivadas, que la extensión de $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ resulta tan insatisfactoria que la de $x \operatorname{sen}(1/x)$.

Definición 10.3. Para una función f presentamos la siguiente definición recursiva para *la derivada de orden superior*:

$$f^{(1)} = f'$$
$$f^{(n+1)} = (f^n)'.$$

En caso en que $f^n(a)$ exista diremos que f es n-diferenciable en a y llamaremos a la función $f^{(n)}$, *la n-ésima derivada de f*. Diremos que f es *∞-diferenciable en a*, si para todo natural n, f es n-diferenciable en a.

Nos hemos dedicado a desquebrajar nuestra idea intuitiva de un comportamiento deseable en funciones y hemos proveído una críptica definición para derivadas de orden superior. Esta definición parece en extremo fuerte de podríamos preguntarnos si tales funciones existen. En esta sección hemos presentado únicamente funciones que no admiten todas sus derivadas sino solamente algunas. Vamos ahora a mostrar que este tipo de funciones existen.

Ejemplo. Consideremos la función $f = \operatorname{sen}$. Hemos calculado ya su primer derivada la cual resultaba la función cos. de ésta última función también hemos calculado su derivada por lo que podemos dar por hecho lo siguiente:

$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x).$$

Es bastante interesante obtener que $f = f^{(4)}$ pues eso indica que podemos seguir derivando f indefinidamente y además podemos calcular fácilmente el resultado del proceso. Una de las tantas formas de indicarlo es observar que cada número n puede ser expresado como $n = 4q + r(n)$ donde $0 \leq r(n) < 4$; en ese caso

$$f^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } r(n) = 0 \\ \cos(x) & \text{si } r(n) = 1 \\ -\operatorname{sen}(x) & \text{si } r(n) = 2 \\ -\cos(x) & \text{si } r(n) = 3 \end{cases}$$

Podemos concluir que la función sen es ∞-diferenciable en todo punto pues admite todas las derivadas.

Ejercicios

Ejercicio 10.1. Si $f(x) = 2 + x - x^2$, calcula, usando la definición de derivada, los siguiente valores: $f'(0)$, $f'(1/2)$, $f'(1)$ y $f'(-3)$.

Ejercicio 10.2. Para $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x$, encontrar todos los valores a para los cuales: $f'(a) = 0$, $f'(a) = -2$ y $f'(a) = -10$.

Ejercicio 10.3. Demuestra que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}.$$

Ejercicio 10.4. Sea $L = \{(x, y) \mid y = mx + b\}$. Si $(x_0, y_0) \in L$, demuestra que $(x_0 + 1, y_0 + m) \in L$.

Ejercicio 10.5. Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$. ¿En qué puntos es diferenciable?

Ejercicio 10.6. Demuestra que, si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ para $x \neq 0$. Además muestra que la recta tangente a f en $a \neq 0$ sólo corta a la gráfica de f en ese punto.

Ejercicio 10.7. Demuestra que, si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(x) = -2/x^3$ para $x \neq 0$.

Ejercicio 10.8. Sea $S_n(x) = x^n$. Deduciremos una fórmula para S_n'.

1. Encuentra $S_3'(x)$.
2. Observa que $S_1'(x) = 1$, $S_2'(x) = 2x$ y el resultado obtenido para S_3'. Encuentra una fórmula para S_n'.
3. Recuerda que

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} y^i.$$

   Usa este hecho para calcular $(x + h)^n - x^n$ y comprobar la fórmula obtenida en el paso anterior.

Ejercicio 10.9. Encuentra la derivada de las funciones $\lceil x \rceil$ y $\lfloor x \rfloor$ y dibuja la gráfica de cada una.

Ejercicio 10.10. Supongamos que f es diferenciable en todo punto. Si tomamos $g(x) = f(x + c)$, demuestra que $g'(x) = f'(x + c)$. En contraste, si $g(x) = f(cx)$ demuestra que $g'(x) = c \cdot f'(cx)$.

Ejercicio 10.11. Supongamos que g es diferenciable en todo punto. Hallar $f'(x)$ si $f(x) = g(t + x)$ y si $f(t) = g(t + x)$. Sugerencia: Las soluciones no serán las mismas.

Ejercicio 10.12. Sea f diferenciable en a y sea L la recta tangente de f en a. ¿Es posible encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - L(x)| > 0$?

Ejercicio 10.13. Encuentra f'' para las funciones:

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = (x - 3)^3$

Ejercicio 10.14. Supongamos que $f(a) = g(a)$ y que la derivada de por la izquierda de f en a es igual a la derivada por derecha de g en a. Demuestra que la función h es diferenciable en a si ésta queda definida como:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq a \\ g(x) & x > a. \end{cases}$$

Ejercicio 10.15. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ es racional} \\ 0 & x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Demuestra que f es diferenciable en 0. Sugerencia: Escribe la definición de $f'(0)$.

Ejercicio 10.16. Sea $S_n(x) = x^n$. En este ejercicio encontraremos una fórmula para las derivadas de orden superior de S_n. Para $0 \leq k \leq n$ demuestra que

$$S_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Ejercicio 10.17. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Demuestra que $f^{(n-1)}(0)$ existe pero que $f^{(n)}(0)$ no existe.

Para entregar: Ejercicio 10.9

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencial e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.