

Semana 13: Conjuntos finitos y contables III

1. Funciones inyectivas

Definición 13.1. Para conjuntos A y B , definimos el conjunto $H_{A,B}$ como el conjunto de todas las funciones inyectivas de A en B . En particular, denotaremos $H_{m,n}$ como el conjunto de todas las funciones inyectivas del conjunto $[m]$ al conjunto $[n]$.

Según la anterior definición debemos tener $H_{A,B} \subseteq B^A$ por lo que debemos de esperar que, si tomamos conjuntos finitos, la cardinalidad resulte menor. En particular, si $|B| < |A|$, entonces el conjunto $H_{A,B} = \emptyset$ pues si existiera una función inyectiva $f: A \rightarrow B$ entonces $|A| \leq |B|$ por lo que para probar esto, mostraremos que este es el caso usando de nueva cuenta una equivalencia de conjuntos.

Lema 13.1. Sean m y n números naturales de forma que $m \leq n$. Entonces, son equivalentes los siguientes conjuntos

$$H_{m+1,n} \quad y \quad H_{m,n} \times [n - m]$$

Demostración. Para conseguir mostrar el resultado, tomamos una función $f: [m+1] \rightarrow [n]$ y la transformamos en su restricción, junto a al elemento $f(m+1)$. Si ahora tomamos una función $g: [m] \rightarrow [n]$ y un elemento del conjunto $a \in [n] \setminus \text{im}(g)$ (este último conjunto es equivalente al conjunto $[n - m]$, ejercicio 13.2), podemos formar la función

$$g_a(i) = \begin{cases} g(i) & i \in [m] \\ a & i = m+1 \end{cases}$$

la cual es inyectiva pues sólo extiende la regla de g tomando un elemento fuera de la imagen de g . No es difícil observar que estos procesos son inversos uno con otro, mostrando el resultado. ■

Teorema 13.2. Para naturales de la forma $m \leq n$, se tiene

$$|H_{m,n}| = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Demostración. La prueba se realizará por inducción sobre m . Para el caso en que $m = 0$, consideramos el conjunto de funciones inyectivas $f: \emptyset \rightarrow [n]$ de las cuales solo puede existir una función, la cual debe ser inyectiva por tener al vacío como su dominio, luego

$$|H_{0,n}| = 1 = \frac{n!}{n!}.$$

Suongamos ahora que el resultado sigue para el conjunto $H_{m,n}$. Entonces, según el lema anterior,

$$\begin{aligned} |H_{m+1,n}| &= |[n-m]| \cdot |H_{m,n}| \\ &= (n-m) \cdot \frac{n!}{(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(n-m-1)!}. \end{aligned}$$

Esto último es precisamente lo que se espera del resultado para el conjunto $H_{m+1,n}$. El enunciado del teorema sigue entonces por inducción. ■

Corolario 13.3. Para conjuntos finitos A y B , de forma que $|A| \leq |B|$, se tiene

$$|H_{A,B}| = \frac{|B|}{(|B| - |A|)!}.$$

Además, si $|B| < |A|$, se tiene $|H_{A,B}| = 0$.

2. Permutaciones

Definición 13.2. Sea A un conjunto cualquiera. Por una *permutación sobre A* entenderemos una función biyectiva $f: A \rightarrow A$. Al conjunto de las permutaciones sobre el conjunto A lo denotaremos por S_A y en particular al conjunto de permutaciones sobre el conjunto $[n]$ lo denotaremos simplemente como S_n .

Es común interpretar las permutaciones como un listado de los elementos de un conjunto, por ejemplo, para el conjunto $[n]$ una permutación f sobre este genera una lista que contiene a todos los elementos de $[n]$:

$$i_1 = f(1), i_2 = f(2), \dots, i_{n-1} = f(n-1) \text{ y } i_n = f(n)$$

En esta lista aparecen todos los elementos de $[n]$ y ninguno está repetido por eso, se acostumbra escribir una permutación en *notación de dos filas*:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & \dots & n \\ f(1) & \dots & f(j) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Una ventaja de esta notación, es que la composición de permutaciones se puede realizar de modo visual, eliminando un poco el nivel de abstracción con el que comúnmente se discuten las funciones (aunque no siempre se puede encontrar una notación de este tipo). Lo anterior, tiene sólo una intención informativa y que puede resultar interesante en algunos ejercicios pues el objetivo de esta resulta determinar el número de elementos que existen en el conjunto S_n y usaremos este caso para encontrar el número de permutaciones de un conjunto finito cualquiera.

Teorema 13.4. Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|S_n| = n!$$

Demostración. Sabemos ya que para conjuntos finitos una función es biyectiva si y sólo si es inyectiva. Por lo que el conjunto S_n debe coincidir con el conjunto de funciones inyectivas $H_{n,n}$ por lo que $|S_n| = n!/(n-n)! = n!$ que es lo que queríamos probar. ■

3. Subconjuntos finitos

Así como en el caso de las funciones inyectivas, podemos comenzar a realizar preguntas acerca de subconjunto particulares de un conjunto finito.

Definición 13.3. Para un conjunto A , el conjunto de todos los subconjuntos de A con cardinalidad m se denota como $C_{m,A}$. En particular, el conjunto de todos los subconjuntos de cardinalidad m del conjunto $[n]$ se denotan como $C_{m,n}$.

La definición anterior nos muestra que en general $C_{m,A} \subseteq 2^A$ y además, si tomamos $n < m$, entonces $C_{m,n} = \emptyset$ y esto se debe a que, si tomamos $S \subseteq [n]$, entonces $|S| \leq n$. El caso contrario admite una clasificación interesante. Explorando el resultado de manera nos podemos dar cuenta que un subconjunto de $[n]$ con m elementos se puede *ordenar* y esta ordenación se consigue tomando una permutación del conjunto S_m . Así, existen $m!$ formas distintas de presentar cada subconjunto con m elementos. Precisamos a continuación esta idea.

Lema 13.5. Sean m y n naturales tales que $m \leq n$. Entonces, son equivalentes los conjuntos

$$C_{m,n} \times S_m \quad \text{y} \quad H_{m,n}$$

Demostración. Si consideramos una función inyectiva $h: [m] \rightarrow [n]$ es posible tomar $\text{im}(h) \subseteq [n]$ para definir una función $H_{m,n} \rightarrow C_{m,n}$ la cual se puede probar sobreyectiva de manera muy sencilla. Además, la preimagen bajo dicha función de un único conjunto $T \in C_{m,n}$ es un conjunto equivalente a S_m pues cada permutación define una forma de presentar *de manera ordenada* al conjunto T . Lo anterior es suficiente para probar que los conjuntos en cuestión son equivalentes. ■

Teorema 13.6. Sean m y n naturales de forma que $m \leq n$. Entonces,

$$|C_{m,n}| = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Demostración. Es una consecuencia del lema anterior pues

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-m)!} &= |H_{m,n}| \\ &= |C_{m,n}| |S_m| \\ &= |C_{m,n}| \cdot m!. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior sigue el resultado ■

Definición 13.4. Al número de subconjuntos de cardinalidad m de un conjunto con n elementos, se le denomina *el coeficiente binomial de m en n* y se denota como

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Corolario 13.7. Para un conjunto finito A y un natural m , se tiene

$$|C_{m,A}| = \binom{|A|}{m}.$$

4. Aplicaciones

Como en otras ocasiones presentaremos como principios los resultados que hemos proveído como teoremas. Para el primero de ellos, es necesario entender una *ordenación de m elementos del conjunto A* como una función inyectiva $[m] \rightarrow A$. En ese sentido, es posible formular el siguiente principio como consecuencia de uno de nuestros resultados.

Principio de las ordenaciones sin repetición: En general, para n objetos distintos y m es un número natural $m \leq n$, una selección de m elementos, considerando el orden, se puede realizar de $\frac{n!}{(n-m)!}$ maneras distintas.

El concepto de permutación que hemos visto debe también entenderse de manera intuitiva pues cuando tenemos una función biyectiva $[n] \rightarrow [n]$, lo único que realizamos es cambiar el orden de aparición de cada uno y lo mismo aplica para un conjunto en general. Lo anterior justifica el siguiente principio.

Principio de las permutaciones: En general, existe $n!$ formas distintas de ordenar un conjunto con n objetos.

Finalmente cuando hablamos de *una combinación de m elementos de un conjunto con n elementos* nos referimos simplemente a subconjunto de cardinalidad m . Bajo este significado, uno de los resultados que hemos mostrado puede formularse de la siguiente manera.

Principio de las combinaciones: En general, si partimos de n objetos distintos, cada selección de m de estos objetos, sin hacer referencia al orden, corresponde a una de las $m!$ permutaciones. Así, el número de selecciones de tamaño m de los n objetos es

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejercicios

Ejercicio 13.1. Demuestra que si $f: [m+1] \rightarrow [n]$ es inyectiva, entonces $f|_{[m]}$ es también inyectiva.

Ejercicio 13.2. Sean m y n números naturales de forma que $m \leq n$ y sea $g: [m] \rightarrow [n]$ una función inyectiva. Demuestra que los conjuntos $[n-m]$ y $[n] \setminus \text{im}(g)$ tienen la misma cardinalidad. Sugerencia: No busques una función biyectiva, calcula la cardinalidad del primero expresándolo como una diferencia de conjuntos.

Ejercicio 13.3. Sea $h: [m] \rightarrow [n]$ una función inyectiva. Demuestra que $\text{im}(h)$ es un conjunto de cardinalidad m .

Ejercicio 13.4. Tomando la función $G: H_{m,n} \rightarrow C_{m,n}$ como $G(h) = \text{im}(h)$, responde lo siguiente:

- Prueba que G es sobreyectiva.
- Para cada $T \in C_{m,n}$, demuestra que el conjunto $G^{-1}[\{T\}]$ es equivalente a S_n .
- Concluye que los conjuntos $C_{m,n} \times S_m$ y $H_{m,n}$ son equivalentes.

Ejercicio 13.5. Supongamos que tenemos una mesa cuadrada de forma que cada lado puede disponer de dos sillas. Responde lo siguiente:

- a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar ocho personas en dicha mesa?
- b) Si dos de las ocho personas no se llevan bien, ¿cuántas formas hay de sentarlos de manera que éstos no se sienten en el mismo lado de la mesa?

Ejercicio 13.6. Enumera todas las permutaciones que involucren a las letras a, b y c.

Ejercicio 13.7. Responde:

- a) ¿Cuántas permutaciones existen de las letras a, b, c, d, e, f y g?
- b) ¿Cuántas de las permutaciones anteriores empiezan con la letra f?
- c) ¿Cuántas de las permutaciones anteriores empiezan con la letra g y terminan con la letra b?

Ejercicio 13.8. En un polígono regular de n lados, ¿Cuántas diagonales pueden inscribirse dentro del polígono?

Ejercicio 13.9. En una implementación del lenguaje de programación Pascal, un identificador consta de una sola letra, o de una letra seguida hasta de siete símbolos, que pueden ser letras o dígitos para las cuales no se distingue entre mayúsculas o minúsculas. Sin embargo, ciertas palabras están reservadas para los comandos; en consecuencia, estas palabras clave no puede usarse como identificadores. Si esta implementación tiene treinta y seis palabras reservadas, ¿cuántos identificadores diferentes son posibles en esta versión de Pascal?

Ejercicio 13.10. La serie de letras abcba, es una expresión en la que la palabra no cambia al invertir su orden. Esto es un ejemplo de *palíndromo* formado con cinco letras. ¿Cuántos palíndromos se pueden formar con cinco letras si ninguna se puede repetir?

Ejercicio 13.11. ¿De cuántas formas se pueden colocar las letras de la palabra VISITING?

Ejercicio 13.12. ¿Cuántas trayectorias distintas hay del punto $(0,0)$ al punto $(7,7)$ en el plano si una trayectoria se construye paso a paso, yendo ya sea un espacio a la derecha o un espacio hacia arriba? ¿Cuántas trayectorias hay de $(2,7)$ a $(9,14)$? ¿Puede hacerse un enunciado general?

Ejercicio 13.13. ¿De cuántas formas se puede formar un equipo de baloncesto de cinco personas con doce posibles jugadores? ¿Cuántas incluyen al jugador más débil y al más fuerte?

Para entregar: Ejercicio 13.8

Referencias

- [CLRT90] Cárdenas, Humberto, Luis, Emilio, Raggi, Francisco y Tomás, Francisco: *Álgebra Superior*. Editorial Trillas, 1990.
- [Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.
- [G607] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Las prensas de Ciencias, 2007.
- [Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Compañía Editorial Continental, 1966.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objetivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.

El contenido original que aparezca en estas notas (si es que lo hay), se distribuye bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). ©Eduardo Antonio Gomezcaña Alanis.