Semana 9: Números naturales

1. Axiomas de Peano

Para introducir a los números naturales por axiomas, necesitamos dar por hecho la existencia de algunos objetos *primitivos*. El siguiente axioma establece con precisión a que nos referimos.

Axioma 9.1. Se cumplen las siguientes nociones de existencia:

- $\mathbb{N}$ es un conjunto.
- $\mathbb{N}$ es no vacío con $0 \in \mathbb{N}$.
- $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función.

A $\mathbb{N}$ se le denomina *el conjunto de los números naturales* y a sus elementos se les conoce como *números naturales*. A la función S en el axioma, se le denomina *función de sucesión* o *función sucesor*. En particular, llamaremos al natural $S(n)$, *el sucesor de* n. Con lo anterior podemos afirmar que el sucesor de un natural, es también un natural. Esto nos permite afirmar que no sólo 0 es un natural, sino que lo es también $S(0)$, $S(S(0))$, etc. Comúnmente escribimos

$$\begin{gathered} 1 = S(0), \\ 2 = S(1), \\ 3 = S(2), \\ \vdots \end{gathered}$$

Una vez que hemos descrito los conceptos primitivos, es momento de explicar su comportamiento.

Axioma 9.2. La imagen de S no contiene a 0. En otras palabras, el 0 no es sucesor de ningún número natural.

Axioma 9.3. La función S es inyectiva. En otras palabras, números naturales disintos tienen sucesores distintos.

Axioma 9.4 (Principio de inducción)**.** Sea $\alpha(n)$ un enunciado acerca de números naturales. Si $\alpha(0)$ es cierto y si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(n)$ implica $\alpha(S(n))$, entonces $\alpha(n)$ es válido para todo natural.

En un planteamiento axiomático como el que presentaremos, debemos ser escépticos de los resultados indicados intuitivamente, entendiendo que la única certeza se dará bajo existencia de una demostración para cualquier postulado que se haga. Para ilustrar el uso de los axiomas de esta manera, presentamos algunos resultados primigenios.

Definición 9.1. Diremos que el número natural m es *un antecesor de n* si $S(m) = n$.

Proposición 9.1. *Cada natural tiene a lo más un antecesor.*

Demostración. El número 0 no puede tener antecesor, pues si lo tuviera pertenecería a la imagen de S contradiciendo el axioma 9.2. Supongamos entonces que $n \neq 0$ es un número natural. Por el axioma 9.2, n está en la imagen de S por lo que existe un natural m de forma que $S(m) = n$. Ahora, si existiera otro natural m' de forma que $S(m') = n = S(m)$, por el axioma 9.3 debemos tener que $m' = m$ por lo que cada número natural $n \neq 0$ tiene uno y sólo un antecesor. ∎

Corolario 9.2. *Todo número, excepto el 0, tiene un antecesor.*

El último axioma es también conocido como *el principio de inducción* y a estas alturas, no debería parecer un enunciado tan descabellado. Sin embargo, para abrir otra forma de entenderlo, mostramos una de sus consecuencias (en realidad, otra de sus versiones) la cual ilustra qué efecto tiene éste sobre subconjuntos de números naturales.

Definición 9.2. Sea $I \subseteq \mathbb{N}$. Decimos que S es *inductivo* si

- $0 \in I$.
- Si $n \in I$, entonces $S(n) \in I$.

Teorema 9.3. *Si I es un conjunto inductivo, entonces $I = \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea I un conjunto inductivo cualquiera. Como $I \subseteq \mathbb{N}$, basta probar que $\mathbb{N} \subseteq I$. Para conseguir esto, tomaremos el enunciado

$$\alpha(n) \leftrightarrow n \in I$$

y exhibiremos que es válido para todo natural usando inducción. Primero, $\alpha(0)$ pues por definición de conjunto inductivo $0 \in I$. Supongamos ahora que $\alpha(n)$ es cierto; esto significa que $k \in I$ y por definición de conjunto inductivo, esto nos lleva a tener $S(k) \in I$ por lo que $\alpha(S(k))$ es cierto. Según el axioma 9.4, $\alpha(n)$ debe ser cierto para todo n. Eso es sólo una forma de afirmar que $\mathbb{N} \subseteq I$ y el resultado sigue. ∎

En muchas ocasiones, preferiremos este método al propuesto en el axioma 9.4. Nos interesa mucho más realizar el planteamiento desde el punto de vista de conjuntos y en muchas ocasiones es más sencillo hablar de conjuntos que de enunciados. En realidad, el anterior teorema justifica que en la teoría de números naturales, es posible intercambiar el concepto de enunciado de números naturales por subconjunto de números naturales sin consecuencias inesperadas.

2. Funciones en los naturales

El aceptar el principio de inducción, abre la posibilidad de definir funciones cuyo dominio sea $\mathbb{N}$. Vamos tomar como un hecho que una función cuyo dominio sean los naturales se puede definir por *recursión*. Aunque esto se puede probar usando algunos axiomas de teoría de conjuntos o algunas hipótesis lógicas, nosotros prescindiremos de tal desarrollo. De manera alternativa, estableceremos esto como sí de un axioma se tratara[1].

[1]Debe parecer curioso que se denomine entonces axioma y se escriba como teorema. Para aquel curioso que no pueda vivir aceptando el enunciado como hecho axiomático, puede encontrarse una prueba en la siguiente dirección *http://egomezcana.github.io/recursion.html*

Teorema 9.4 (Recursión). *Sea A un conjunto y sea $g\colon \mathbb{N} \times A \to A$. Si $a \in A$, entonces existe una única función $f\colon \mathbb{N} \to A$ que satisface las siguientes propiedades:*

- $f(0) = a$.
- $f(S(n)) = g(n, f(n))$.

No debe preocuparnos lo críptico que pueda parecer el axioma. La idea de fondo es muy sencilla: Si podemos definir el caso $f(0)$ y el caso $f(S(n))$ depende de n y de $f(n)$ entonces la función quedá completamente definida.

Ejemplo. Consideremos por ejemplo la función factorial la cual podemos definir por recursión para todo natural de la siguiente manera:

- $0! = 1$.
- $(S(n))! = n! \cdot n$.

Por supuesto, debe notarse que el producto entre naturales no ha sido definido, sin embargo, si admitimos de momento que lo está, la construcción por recursión es suficiente para definir a la función factorial $(\cdot)!\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Esta versión no es ni la más fuerte ni la más general del teorema de recursión, pero es, quizá, la mas ilustrativa. Aunque no entraremos en detalles con las otras versiones para mantener el presente texto sencillo, la usaremos para definir algunas funciones. De cualquier forma, cuando se presente una definición por recursión no será difícil admitir que una de tales funciones se puede construir de esta manera.

Ejemplo. Consideremos la función $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $F(0) = 1$, $F(1) = 1$ y para $n \geq 2$,

$$F(S(S(n))) = F(S(n)) + F(n).$$

A esta función se le conoce como *la sucesión de Fibonacci*. De igual manera al ejemplo anterior, debe considerarse que la suma no ha sido definida, pero si admitimos de momento que lo está, no debe existir dificultad en admitir que esa expresión define en verdad una función. La definición debe constrastarse con el ejemplo anterior.

3. Suma entre naturales

Vamos a definir ahora usando recursión las dos operaciones que conocemos en los naturales y alcanzaremos la noción intuitiva de éstas.

Definición 9.3. Definimos la función $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, para la cual escribiremos $m + n$ en lugar de $+(m, n)$, de la siguiente forma: Para cada natural m,

- $m + 0 = m$.
- $m + S(n) = S(m + n)$.

Debemos ahora establecer algunas de las propiedades que intuitivamente tenemos que obedece la suma entre naturales. Aunque intuitivas, estas ideas deben ser establecidas a través de una demostración.

Teorema 9.5 (Existencia del neutro aditivo)**.** *La suma entre números naturales satisface*

$$m + 0 = m = 0 + m.$$

Demostración. Tener $m + 0 = m$ sigue de la definición y lo único que resta probar es la segunda igualdad $0 + m = m + 0$. Para mostrarla, usaremos inducción directamente sobre dicha igualdad. Debemos observar primero que, si $m = 0$, se tiene $0 + m = 0 + 0 = m + 0$ y la igualdad es válida. Supongamos ahora que $0 + m = m + 0$, en ese caso

$$0 + S(m) = S(0 + m) = S(m + 0) = S(m) = S(m) + 0.$$

Por inducción la igualdad que buscábamos sigue y con esto el resultado. ∎

Lema 9.6. *La suma entre números naturales satisface*

$$S(m) + n = S(m + n).$$

Demostración. Sea m un natural cualquiera y tomemos

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} \mid S(m) + n = S(m + n)\}.$$

Afirmamos que I_m es inductivo. En efecto, como

$$\begin{aligned} S(m) + 0 &= S(m) \\ &= S(m + 0) \end{aligned}$$

podemos garantizar $0 \in I_m$. Si suponemos $n \in I_m$, debemos tener que $S(m) + n = S(m + n)$, por lo que

$$\begin{aligned} S(m) + S(n) &= S\left(S(m) + n\right) \\ &= S\left(S(m + n)\right) \\ &= S\left(m + S(n)\right), \end{aligned}$$

por lo que $S(n)$ pertenece a I_m. En ese caso, I_m es inductivo como afirmamos y $I_m = \mathbb{N}$. Como se eligió m arbitrario, el resultado sigue. ∎

Teorema 9.7 (Ley conmutativa para la suma)**.** *La suma entre números naturales satisface*

$$m + n = n + m.$$

Demostración. Sea un número natural m cualquiera y tomemos

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n = n + m\}.$$

Afirmamos que I_m es inductivo. En efecto, $0 \in I_m$ al tener $m + 0 = 0 + m$. Ahora, si $n \in \mathbb{N}$, debemos tener $m + n = n + m$ y en ese caso el lema anterior y la definición de suma garantizan que

$$\begin{aligned} m + S(n) &= S(m + n) \\ &= S(n + m) \\ &= S(n) + m. \end{aligned}$$

En consecuencia $S(n) \in I_m$ logrando concluir que I_m es inductivo como buscábamos y obtener $I_m = \mathbb{N}$. Como m fue elegido de manera arbitraria, podemos concluir el resultado. ∎

Teorema 9.8 (Ley asociativa para la suma)**.** *La suma entre números naturales satisface*

$$(m+n)+k = m+(n+k).$$

Demostración. Sean m y n números naturales cualesquiera y tomemos el conjunto

$$I_{m,n} = \{k \in \mathbb{N} \mid (m+n)+k = m+(n+k)\}.$$

Afirmamos que este conjunto es inductivo. En efecto, debemos verificar $0 \in I_{m,k}$ al tener

$$(m+n)+0 = m+n = m+(n+0).$$

Ahora, si $k \in I_{m,n}$, debemos tener $(m+n)+k = m+(n+k)$, tenemos

$$\begin{aligned}(m+n)+S(k) &= S((m+n)+k)\\ &= S(m+(n+k))\\ &= m+S(n+k)\\ &= m+(n+S(k)).\end{aligned}$$

Por lo que $S(k) \in I_{m,n}$. Entonces, S es inductivo como afirmamos y $I_{m,n} = \mathbb{N}$. Como la elección de m y n se hizo de manera arbitraria, el resultado sigue. ∎

Estas son en realidad las propiedades principales de la suma entre naturales. Sin embargo, hay una más que consiste en interpretar el sucesor como si de una suma se tratara. Nuestra idea intuitva del sucesor de un número está dada por sumar 1 a éste. Aunque aún no usaremos este hecho de momento, sí lo usaremos para olvidarnos eventualmente de la función sucesor.

Proposición 9.9. *Para todo natural m se cumple $S(m) = m+1$.*

Demostración. Según esta definición, debemos tener

$$S(m) = S(m+0) = m+S(0) = m+1.$$ ∎

4. Producto entre naturales

Definición 9.4. Definimos la función $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, para la cual escribiremos $m \cdot n$ en lugar de $\cdot(m,n)$, de la siguiente forma: Para cada natural m,

- $m \cdot 0 = 0$.
- $m \cdot S(n) = m \cdot n + m$.

A la función $\cdot$ se le denomina *el producto entre números naturales*.

Teorema 9.10 (Existencia del neutro multiplicativo)**.** *El producto entre números naturales satisface*

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$$

Demostración. Es una simple observación de las definiciones

$$m \cdot 1 = m \cdot S(0) = m \cdot 0 + m = 0 + m = m.$$ ∎

Lema 9.11. *El producto entre naturales satisface*

$$m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$$

Demostración. La primera igualdad se obtiene por definición por lo que basta mostrar que $0 \cdot m = 0$ lo cual haremos por inducción. Para $m = 0$, el resultado es válido pues

$$0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot m.$$

Supongamos ahora que $0 \cdot m = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \cdot S(m) &= 0 \cdot m + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por inducción, el resultado sigue. ■

Lema 9.12. *El producto entre naturales satisface*

$$S(m) \cdot n = m \cdot n + n.$$

Demostración. Sea m un natural cualquiera y tomemos el conjunto

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} \mid S(m) + n = m \cdot n + n\}.$$

Mostraremos que I_m es inductivo. Primero

$$S(m) \cdot 0 = 0 = m \cdot 0 + 0$$

por lo que $0 \in I_m$. Supongamos ahora que $n \in I_m$ por lo que $S(m) \cdot n = m \cdot n + n$ y en ese caso

$$\begin{aligned} S(m) \cdot S(n) &= S(m) \cdot n + S(m) \\ &= (m \cdot n + n) \\ &= m \cdot n + S(n + m) \\ &= (m \cdot n + m) + S(n) \\ &= m \cdot S(n) + S(n), \end{aligned}$$

por lo que $S(n) \in I_m$ y en consecuencia I_m es inductivo. Por último basta observar que m fue elegido de manera arbitraria por lo que el resultado sigue. ■

Teorema 9.13 (Ley conmutativa para el producto)**.** *El producto entre números naturales satisface*

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Demostración. Sea m un número natural cualquiera y tomemos

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m\}.$$

Afirmamos que I_m es inductivo. Comenzamos observando

$$m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$$

por lo que $0 \in I_m$. Ahora, si $n \in I_m$, entonces $m \cdot n = n \cdot m$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} m \cdot S(n) &= m \cdot n + m \\ &= n \cdot m + m \\ &= m \cdot n + m \\ &= S(n) \cdot m \end{aligned}$$

por lo que $S(n) \in I_m$, permitiendo concluir que I_m es inductivo y como m es arbitrario el enunciado sigue. ■

Teorema 9.14 (Ley asociativa para el producto)**.** *El producto entre números naturales satisface*

$$(m \cdot n) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Demostración. Ejercicio 9.2. ■

Teorema 9.15 (Ley distributiva)**.** *La suma y producto entre naturales satisface*

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n.$$

Demostración. Ejercicio 9.3. ■

5. Orden en los naturales

Definición 9.5. Para números naturales m y n diremos que *m es más pequeño o igual que n* o que *n es más pequeño que m* , en símbolos $m \leq n$, si existe un natural k de forma que $n = m + k$.

Teorema 9.16. *El orden antes definido en $\mathbb{N}$ es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica.*

Demostración. Ejercicio 9.4. ■

Proposición 9.17. *Para todo natural m, se tiene $0 \leq m$.*

Demostración. Es una simple observación de la definición. Como $0 + m = m$ entonces $0 \leq m$ tomando como m el número que exige la definición. ■

Proposición 9.18. *La suma y el orden entre naturales satisfacen lo siguiente: Si $m \leq n$ y $k \leq l$ entonces $m + k \leq n + l$.*

Demostración. Por hipótesis, existen números r_0 y r_1 de forma que $n = m + r_0$ y $l = k + r_1$ por lo que

$$n + l = (m + k) + (r_0 + r_1).$$ ■

Proposición 9.19. *La suma y el orden entre naturales satisfacen lo siguiete: Si $m \leq n$ y $k \leq l$ entonces $m \cdot k \leq n \cdot l$.*

Demostración. Por hipótesis, existen números r_0 y r_1 de forma que $n = m + r_0$ y $l = k + r_1$ por lo que

$$n \cdot l = (m + r_0) \cdot (k + r_1) = (m \cdot k) + (m \cdot r_1 + k \cdot r_0 + r_0 \cdot r_1)$$ ■

Definición 9.6. Diremos que $m < n$ si $m \leq n$ pero $m \neq n$.

Esto puede leerse de manera muy simple afirmando que $m < n$ si y sólo si existe $0 < k$ de forma que $n = m + k$. Cualquiera de las dos interpretaciones será igualmente válida. Las dos proposiciones anteriores, pueden formularse y probarse usando $<$ en lugar de $\leq$ (ejercicio 9.8).

Lema 9.20. *Si $m < n$, entonces $m + 1 \leq n$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $k \neq 0$ de forma que $n = m + k$. Como $k \neq 0$, tiene antecesor, supongamos que r es su antecesor, i.e., $k = r + 1$. En ese caso,

$$n = m + k = m + (r + 1) = (m + 1) + r$$

de lo que podemos sencillamente concluir que $m + 1 \leq n$. ■

Lema 9.21. *Para cada par de naturales m y n se cumple $m = n$ o $m < n$ o $n < m$.*

Demostración. Sea m un número cualquiera y tomemos

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m = n \text{ o } m < n \text{ o } n < m\}.$$

Según la proposición 9.17, $0 \in I_m$ al satisfacer $0 \leq m$. Supongamos ahora que $n \in I_m$ eso quiere decir que satisface alguna de las tres posibilidades descritas en I_m:

- Si $m = n$, entonces $m < m + 1 = n + 1$ por lo que $n \in I_m$.
- Si $m < n$, entonces $m < n < n + 1$ por lo que de nueva cuenta $n \in I_m$.
- Si $n < m$, entonces $n + 1 \leq m$ y ese caso $n \in I_m$.

Al ser la elección de m arbitraria e I_m resultar inductivo podemos concluir el resultado. ■

Teorema 9.22 (Ley de tricotomía)**.** *Para cualesquiera naturales m y n se cumple una y sólo una de las siguientes posibilidades:*

- $m = n$
- $m < n$
- $n < m.$

Demostración. El lema anterior, indica que debe cumplirse al menos una de la propiedades descritas. Basta entonces probar que no pueden pasar dos de ellas simultaneamente. Observamos que, si $k \neq 0$, entonces $r + k \neq r$ para todo r. Con esto podemos concluir que si $m < n$ o $n < m$ entonces $m \neq n$. Nos falta mostar que es imposible tener $m < n$ y $n < m$, para mostrarlo procedemos por contradicción suponiendo que es posible. En ese caso, existen $k, r \neq 0$ de forma que $n = m + k$ y $m = n + r$ y en consecuencia

$$n = m + k = n + (r + k)$$

notando que $r + k \neq 0$. Esto es una contradicción pues habríamos obtenido que $n \neq n$. De aquí, el resultado sigue. ■

6. Leyes de cancelación

Es importante notar que los inversos aditivos no existen en los naturales. Por inverso aditivo de a nos referimos a un número b de forma que $a + b = 0$. De hecho, el único número que lo posee es el 0. Esto sin embargo, no limita que podamos realizar cancelaciones

Teorema 9.23 (Ley de cancelación para la suma)**.** *La suma entre números naturales satisface lo siguiente: Si $m + k = n + k$, entonces $m = n$.*

Demostración. Vamos a usar inducción sobre k en el enunciado. Para el caso base $k = 0$, si suponemos $m + k = n + k$, entonces

$$m = m + 0 = m + k = n + k = n + 0 = n.$$

Supongamos ahora el resultado para un número k, i.e., $m + k = n + k$ implica que $m = n$. Supongamos también que $m + S(k) = n + S(k)$. De lo anterior podemos concluir que $S(m + k) = S(n + k)$ y como la función sucesor es inyectiva, entonces $m + k = n + k$. Por la hipótesis que hemos hecho, $m = n$ como buscábamos. Por inducción, el resultado sigue. ■

Teorema 9.24. *Si m es un natural de forma que $n \leq m \leq n + 1$, entonces $m = n$ o $m = n + 1$.*

Demostración. Supongamos que $n \neq m$ y en ese caso, existe $k \neq 0$ de forma que $m = n + k$. Como $m \leq n + 1$ entonces existe r de forma que $n + 1 = m + r$. Conjungando las igualdades, tenemos que $n + 1 = m + r = n + k$. Por la ley de cancelación, $k = 1$ por lo que $m = n + 1$. Esto es suficiente para asegurar el resultado. ■

Lo anterior, en la retorcida mente del autor, motiva la siguiente definición.

Definición 9.7. Si $m \leq n$, *la resta de n menos m*, en símbolos $n - m$, es el único número natural k de forma que $m + k = n$.

De manera similar a la suma, no existen los inversos multiplicativos en lo naturales. Por inverso multiplicativo de a nos referimos a un número b de forma que $a \cdot b = 1$. De hecho, el único natural con inverso es el 1. Esto no limita tampoco la capacidad de cancelar en una igualdad.

Teorema 9.25 (Ley de cancelación para el producto)**.** *El producto entre números naturales satisface lo siguiente: Si $m \cdot k = n \cdot k$ con $k \neq 0$, entonces $m = n$.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Si $m \neq n$, entonces $m < n$ o $n < m$ por tricotomía. Si $m < n$, entonces $m \cdot k < n \cdot k$ por lo que $m \cdot k \neq n \cdot k$. El caso en que $n < m$ se prueba de manera similar. ■

Definición 9.8. Diremos que *m divide a n*, en símbolos $m \mid n$, si existe $k \in \mathbb{N}$ de forma que $n = m \cdot k$. Si $m \mid n$, llamamos *la división de n entre m*, en símbolos n/m, al único k de forma que $n = m \cdot k$.

Ejercicios

Ejercicio 9.1. Prueba que $n \neq S(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9.2. Prueba la ley asociativa del producto. Sugerencia: Usa el caso de la suma para encontrar inspiración.

Ejercicio 9.3. Prueba la ley distributiva. Sugerencia: Encuentra inspiración en los resultado probados con anterioridad.

Ejercicio 9.4. Prueba que la relación de orden en $\mathbb{N}$ es reflexica, transitiva y antisimétrica.

Ejercicio 9.5. Prueba que $n < n + 1$.

Ejercicio 9.6. Muestra que si $k \neq 0$, entonces $m + k \neq 0$ para todo m

Ejercicio 9.7. Demuestra que para $k \neq 0$, se tiene $m + k \neq m$ para todo m.

Ejercicio 9.8. Considera $m < n$ y $k < l$. Demuestra que $m + k < n + l$ y que $m \cdot k < n \cdot l$.

Ejercicio 9.9. Define $n^2 = n \cdot n$. Si $m < n$, demuestra $m^2 < n^2$.

Ejercicio 9.10. Si $m < n$, demuestra $n^2 - m^2 = (n + m)(n - m)$.

Ejercicio 9.11. Si $m \mid n$, demuestra que $m \leq n$.

Ejercicio 9.12. Si $m \mid n$, $m \mid k$ y $n/m = k/m$ demuestra que $n = k$.

Referencias

[CLRT90] Cárdenas, Humberto, Luis, Emilio, Raggi, Francisco y Tomás, Francisco: *Álgebra Superior*. Editorial Trillas, 1990.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.