Una Breve Construcción de los Números Naturales en la Teoría de Conjuntos

Álgebra Superior I
FES Acatlán
2015

Introducción

Por mucho tiempo, los números naturales fueron considerados como un concepto primitivo en matemáticas, llegando incluso a interpretarlos como consecuencia de la mente humana. Sin embargo, durante el siglo XIX comenzó un activo interés en los fundamentos de la matemática, lo cual afecto esta descripción e inicio una búsqueda por describir la naturaleza exacta de los números naturales.

Opuestos a la posición tradicional, los constructivistas creyeron necesario establecer con rigor el significado de los números. Gottlob Frege por un lado, propuso utilizar la teoría de conjuntos como base para construir los números naturales, sin embargo, mientras se imprimía el segundo volumen de su trabajo «*Die Grundlagen der Arithmetik*» Bertrand Russell le envió una carta donde le comunicaba algunas paradojas que la teoría de conjuntos presentaba.

Otra intentó que se realizó fue axiomatizar la aritmética. En 1889 Peano publicó una axiomatización de los números naturales mucho más precisa que las propuestas por Richard Dedekind y Charles Sanders. Dicha axiomatización fue usada en el agresivo programa que David Hilbert presentó a principios del siglo XX, en donde se contemplaba la búsqueda de una prueba que mostrara la consistencia de la aritmética. Sin embargo Kürt Gödel, en 1931, probaría en su segundo teorema de incompletitud que es imposible formalizar la consistencia dentro de la aritmética.

La alternativa a la que la matemática recurrió, fue resolver las paradojas en la teoría de conjuntos, y retomando el trabajo de Frege, definir los números naturales en este contexto. Este camino ha sido hasta ahora mucho más exitoso que los anteriores y sin embargo, el trabajo de Frege fue frecuentemente ignorado cuando se publicó originalmente.

En las notas siguientes, se pretende describir sin ser minuciosos, el proceso por el cual se describe un conjunto con todas las propiedades que nuestra noción primitiva de números naturales presenta.

1. Números Naturales y Axioma de Infinitud

Para comenzar nuestra dicusión de la contrucción de los números naturales en el marco de la teoría de conjuntos, debemos intentar empatar el concepto al que identificamos como número natural, como un conjunto. Intentemos primero explicar la idea intuitiva que tenemos de los números naturales.

Una de las primeras funciones que aprendemos de los números es el contar. Y no es esta cualidad menor, esta capacidad de abstracción nos ha permitido explorar, explicar y transmitir fenómenos que nos rodean. Intentemos explicar nuestro método de conteo: Supongamos que tenemos cinco naranjas y deseamos conseguir la misma cantidad de manzanas, para garantizar que tomamos cinco manzanas, podemos tomar una manzana por cada naranja que tengamos con nosotros. Sin embargo, el proceso anterior no es el método por el contamos habitualmente, en lugar de naranjas, tenemos una secuencia de símbolos que podemos memorizar y usamos la naturaleza secuencial de nuestros símbolos para cerciorarnos que obtenemos la cantidad que deseamos de manzanas. A pesar de esto, el ejemplo anterior tiene el propósito de ilustrar la capacidad que tienen determinadas colecciones para capturar el significado de número a pesar que este último concepto es completamente abstracto.

De lo anterior podemos hacer nuestro objectivo encontrar dichas colecciones y, debido a que la teoría de conjuntos nos permite hablar de colecciones, esto sería suficiente para definir los números naturales en la teoría de conjuntos.

El primer problema al que nos enfrentamos es que no conocemos conjuntos concretos además del vacío, sin embargo, por el axioma de la paridad, podemos construir lo que primitivamente podemos considerar una cantidad infinita de conjuntos de la siguiente manera: $\emptyset$ es un conjunto. Luego $\{\emptyset\}$ es un conjunto también el cual además es distinto de $\emptyset$. Enseguida, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es igualmente un conjunto que es distinto de los dos anteriores. Y así sucesivamente. Además, el conjunto $\emptyset$ no contiene elementos, el conjunto $\{\emptyset\}$ tiene exactamente un elemento, el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ dos elementos. Como este proceso continua no debe haber sorpresa si definimos

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

pues como se ha discutido, dichos conjuntos logran capturar nuestra idea abstracta de número. Existe, sin embargo, un problema fundamental: no conocemos conjunto alguno que nos permita afirmar que la colección de estos elementos es un conjunto o siquiera una clase; de hecho, su construcción misma es algo defectuosa al ser dependiente de un proceso que continúa indefinidamente.

Para resolver lo anteior se debe proponer el axioma de infinitud, que explicado de manera simplificada, afirma que existe al menos un conjunto infinito.

Axioma de Infinitud. *Existe un conjunto* $\mathbb{F}$ *tal que* $\emptyset \in \mathbb{F}$ *y para todo conjunto* A*, si* $A \in \mathbb{F}$*, entonces* $A \cup \{X\} \in \mathbb{F}$.

El conjunto $\mathbb{F}$, a pesar de lo que puede aparecer, es más *grande* de lo que deseamos. Por ejemplo, bien podría contener al conjunto $\{\{\emptyset\}\}$ con lo que tendríamos tentativamente dos elementos distintos representando al número 1, esto es por supuesto indeseable.

Para poder resolver este problema, debemos identificar con claridad a los integrantes de la *secuencia*

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}.$$

Definición 1.1. Por *número natural*, entenderemos un conjunto A que satisfaga las siguientes propiedades:

1. Siempre que $a \in A$, entonces $a \subset A$.
2. El conjunto $<_A = \{(x, y) \in A \times A \mid x \in y\}$ es un orden total estricto en A.
3. Cada subconjunto no vacío de A tiene mínimo y máximo en A bajo $<_A$.

La definición anterior captura de manera precisa los elementos que deseamos extraer del conjunto $\mathbb{F}$, además, las propiedades que definen a un número natural se pueden expresar a través de fórmulas en la teoría de cojuntos. Por lo anterior, podemos afirmar que existe una fórmula, Nat, tal que A es un número natural si y sólo si es cierto $\mathrm{Nat}(A)$. Por el axioma de comprensión,

$$\mathbb{N} = \{X \in \mathbb{F} \mid \mathrm{Nat}(X)\}$$

es un conjunto y es éste al que llamaremos el *conjunto de los números naturales*.

2. Sistemas de Peano

Para poder comparar el conjunto de los números naturales necesitamos un marco formal conocido. Históricamente se considera que los axiomas de Peano constituyen una definición axiomática adecuada para los número naturales. Sin embargo, sus predicados no existen en la teoría de conjuntos, por lo que nos vemos en la necesidad de definir una estructura en la teoría de conjuntos que modele las propiedades que dichos axiomas presentan.

Definición 2.1. Un *sistema de Peano* es una tercia (N, s, n_0), donde N es un conjunto, $s \colon N \to N$ es una función y n_0 es un elemento de N, de forma que satisface:

- $n_0 \notin \mathrm{Im}(s)$.
- La función s es inyectiva.
- Para cada T subconjunto de N, si $n_0 \in T$ y para toda $n \in N$, tenemos $n \in T$ implica que $s(n) \in T$; entonces, $T = N$.

En ese caso, a N lo llamaremos el *conjunto base*, a s la *función de sucesión* y a n_0 el *elemento distinguido*.

La anterior definición no define los números naturales en la teoría de conjuntos, sino propone una estructura que, en términos de la teoría de conjuntos, interpreta los enunciados propuestos por los axiomas de Peano. Esto es importante de notar, pues, a pesar de contar con una definición adecuada, si no somos capaces de mostrar un conjunto que exhiba dicha estructura, entregamos una carta en blanco para la existencia de contradicciones. Nuestro primer paso es entonces mostrar que al menos existe un sistema de Peano.

Lema 2.1. *Sea A un número natural. Entonces $A \cup \{A\}$ es también un número natural.*

Demostración. Supongamos primero que $a \in A \cup \{A\}$, entonces, $a \in A$ o $a = A$. Como A es un número natural, por hipótesis, si $a \in A$ entonces $a \subset A$ y por otro lado, si $a = A$, entonces $a \subset A$; de cualquier forma $a \subset A$, y en ese caso debemos tener que $a \subset A \cup \{A\}$. Esto implica la primer propiedad de un número natural.

Para probar la segunda propiedad debemos mostrar primero que la relación $\in_{A\cup\{A\}}$ es un orden estricto y segundo que este orden es total. Comencemos probando que es un orden estricto. Es inmediatamente irreflexivo debido a que, por el axioma de fundación, $a \in a$ es siempre falso. Este orden es además simétrico. En efecto, supongamos que a, b y c son elementos de $A \cup \{A\}$, tales que $a \in b$ y $b \in c$, deseamos concluir que $a \in c$. En ese caso, tanto a como b pueden ser un elementos de A o iguales a A, pero si $a = A$, entonces $b \notin A$, pues si perteneciera, tendríamos al mismo tiempo que $a \in b$ y $b \in a$, lo cual es imposible por el axioma de fundación; lo anterior nos dejaría con $b = A$, pero hemos supuesto que $a = A$, entonces $A \in A$, lo cual es de nueva cuenta imposible por el axioma de fundación. En cualquier caso suponer $a \neq A$ deriva en contradicción, en consecuencia, $a \in A$. Con un argumento similar podemos concluir que $b \in A$. Podemos condensar lo anterior diciendo que $a \in A$, $b \in A$ y que $c \in A$ o $c = A$, además de $a \in b$ y $b \in c$. Supongamos, entonces, que $c \in A$, como a y b son elementos de A, entonces $a \leq_A b$, y como b y c también lo son $b \leq_A c$; como A es un número natural, entonces $a \leq_A c$ y esto en particular significa que $a \in c$ como deseábamos. Analicemos ahora el caso en que $c = A$: como A es natural, como $b \in A$, entonces $b \subset A = c$, en ese caso, como $a \in b$, debemos tener que $a \in c$, como deseábamos. Concluimos, entonces, que la relación es transitiva. Al ser la relación $\in_{A\cup\{A\}}$ irreflexiva y transitiva, ésta es un orden parcial estricto como deseábamos.

Probaremos ahora que este orden es total. Si a y b son elementos de $A \cup \{A\}$, entonces se presentan cuatro casos. El primero sucede si $a \in A$ y $b \in A$; entonces, como A es un número natural, a y b son comparables. El segundo sucede cuando $a = A$ y $b \in A$; entonces $b \in a$ implicando que a y b son comparables. De manera similar sucede en el tercer caso, cuando $a \in A$ y $b = A$. Resta solamente el cuarto caso, en que $a = A$ y $b = A$; entonces $a = b$ de lo que resulta que a y b son también comparables. En cualquiera de estos casos, a y b resultan comparables por lo que el orden es total.

Para satisfacer la tercera propiedad de un número natural, mostramos primero que cualquier subconjunto no vacío $B \subset A \cup \{A\}$ tiene un mínimo. Si $B = \{A\}$. entonces, A es un mínimo de$B$. Supongamos que $B \neq \{A\}$, entonces $B \backslash \{A\} \neq \emptyset$, como ademñas $B \backslash \{A\} \subset A$, B debe tener un mínimo bajo $<_A$ por hipótesis. Sea b_0 el mínimo de $B \backslash \{A\}$, afirmamos que b_0 es un mínimo de B bajo $<_{A \cup \{A\}}$. En efecto, si $b \in B$, tenemos dos posibilidades, $b = A$ o $b \in A$. De la primera, al ser $a_0 \in B \backslash \{A\} \subset A$, obtenemos $a_0 \in A = b$, y como a_0 y b son elementos de $A \cup \backslash \{A\}$, $a_0 \leq_{A \cup \{A\}} b$. Continuamos suponiendo que $b \in A$. Como a_0 es por hipótesis un mínimo en A, $a_0 \leq_A b$, lo que por definición implica que $a_0 = b$ o $a_0 \in b$, de la segunda posibilidad concluímos que, al ser a_0 y b elementos de $A \cup \{A\}$, $a_0 <_{A \cup \{A\}} b$. En consecuencia, $a_0 \leq_{A \cup \{A\}} b$. En conclusión, para cada $b \in B$, tenemos que $a_0 \leq_{A \cup \{A\}} b$, por lo que b es en verdad un mínimo de B bajo $<_{A \cup \{A\}}$. En conclusión, B posee un mínimo.

Probaremos por último que cualquier subconjunto no vacío $B \subset A \cup \{A\}$ tiene un máximo. Como en párrafo anterior si $B = \{A\}$, entonces A es un máximo de B. Supongamos que $B \neq \{A\}$, en ese caso tenemos dos posibilidades: $A \in B$ o $A \notin B$. Si $A \in B$, entonces A es el máximo de B bajo $<_{A \cup \{A\}}$. En efecto, para cualquier $b \in B$ distinto de A, tenemos que $b \in A$, por lo que $b <_{A \cup \{A\}} A$. Ahora, supongamos que $A \notin B$, entonces $B \subset A$; en ese caso, como A es un número natural, B tiene un máximo bajo $<_A$. Sea b_1 ese máximo, afirmamos que b_1 es un máximo de B bajo $<_{A \cup \{A\}}$. En efecto, para cada $b \in B$, tenemos que $b \leq b_1$, por lo que o $b = b_1$ o $b \in b_1$. De la segunda opción, al ser b y b_1 elementos de $A \cup \{A\}$, obtenemos que $b <_{A \cup \{A\}}$, por lo que en verdad b_1 es un máximo de B bajo $<_{A\{A\}}$. En conclusión, B posee un máximo. $\square$

Teorema 2.2. *Sea s la relación $\{(X, Y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid Y = X \cup \{X\}\}$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Entonces, s es una función. Además, $(\mathbb{N}, s, \emptyset)$ es un sistema de Peano.*

Demostración. Comenzamos probando que s es una función. Evidentemente, si $(A, B) \in s$ y $(A, B') \in s$, entonces $B = A \cup \{A\} = B'$ y por tanto s es una función. Nuestra convención acerca de una función exige que s sea total. Para probar esto, debemos mostrar que para cada $A \in \mathbb{N}$, el conjunto $A \cup \{A\}$ es también un elemento de $\mathbb{N}$. En efecto, por el axioma de infinitud, debemos tener que $A \cup \{A\} \in \mathbb{F}$ y por el lema 2.1, $A \cup \{A\}$ es también un número natural, entonces $A \cup \{A\} \in \mathbb{N}$ como deseábamos. De lo anterior concluimos que s es en verdad una función.

Continuaremos probando que el vacío no está en la imagen de s. Procederemos por contradicción, supongamos que $\emptyset \in \mathrm{Im}(s)$, entonces existe $A \in \mathbb{N}$ tal que $A \cup \{A\} = s(A) = \emptyset$ por lo que $A \in \emptyset$, lo que contradice la definición del vacío. Por tanto, $\emptyset \notin \mathrm{Im}(s)$.

Probaremos ahora que s es inyectiva. Para esto supondremos elementos A y B en el conjuntos de los números naturales tal que $s(A) = s(B)$ o en otras palabras, $A \cup \{A\} = B \cup \{B\}$. Como $A \in A \cup \{A\}$, entonces $A \in B \cup \{B\}$ y de la misma forma $B \in A \cup \{A\}$; lo anterior quiere decir que

$$A \in B \vee A = B \wedge B \in A \vee A = B$$

o en otras palabras

$$(A \in B \wedge B \in A) \vee A = B.$$

Basta entonces probar que $A \in B$ y $B \in A$ implican que $A = B$. En efecto, como ambos conjuntos son números naturales, debemos tener que $A \subset B$ y $B \subset A$, por tanto $A = B$, lo que implica que la función s es inyectiva.

Supongamos ahora un subconjunto $T \subset \mathbb{N}$ que satisfaga las condiciones descritas en la última propiedad de un sistema de Peano. Probaremos que $T = \mathbb{N}$ procediendo por contradicción. Para esto supondremos un conjunto $A \in \mathbb{N}$ pero $A \notin T$. Consideremos el subconjunto de $A \cup \{A\}$ dado por

$$\{X \in A \cup \{A\} \mid X \notin T\};$$

por definición, el conjunto anterior es no vacío pues $A \notin T$ y $A \in A \cup \{A\}$. Por el lema 2.1, sabemos que $A \cup \{A\}$ es un número natural, y esto implica que el conjunto descrito anteriormente presenta un mínimo, supongamos que dicho mínimo es A_0. Evidentemente $A_0 \notin T$ y como por hipótesis $\emptyset \in T$, A_0 es distinto del vacío. En particular, esto implica que A_0 está en la imagen de s o, en otras palabras, existe un elemento B en $\mathbb{N}$ tal que

$$B \cup \{B\} = A_0;$$

el elemento B no puede pertenecer a $\{X \in A \cup \{A\} \mid X \notin T\}$ pues si lo hiciera, al ser $B \in B \cup \{B\} = A_0$, tendriamos a B como un mínimo del conjunto. Que B no pertenezca al conjunto en cuestion implica que $B \in T$, pero por hipótesis sobre T debemos tener que $A_0 = s(B) \in T$ lo que es una contradicción con la definición de A_0. Debemos tener entonces que $T = \mathbb{N}$.

De todo lo anterior, podemos conlcuir que la tercia $(\mathbb{N}, s, \emptyset)$ es un sistema de Peano como se afirmó. $\square$

El teorema anterior otorga consistencia a la definición de un sistema de Peano, y, una vez establecido que el conjunto $\mathbb{N}$ resulta un sistema de Peano, podemos usar los resultados acerca de los sistemas de Peano para presentar las propiedades del conjunto $\mathbb{N}$.

3. Teorema de Recursión

El teorema de recursión es un resultado crítico en nuestra construcción. A través de él, presentaremos los principales los resultados que derivarán en la estructura que comúnmente asociamos con los números naturales. Con el teorema de recursión afirmaremos que todos los sistemas de Peano son isomorfos, para después presentar las operaciones de suma y multiplicación como funciones únicas derivadas del sistema, al final introduciremos un orden sobre los sistemas de Peano usando esta función de suma. Estos conceptos resultarán compatibles con nuestra idea intuitiva de los números naturales.

Teorema 3.1 (Teorema de Recursión). *Sea (N, s, n_0) un sistema de Peano. y sean A un conjunto, $\phi\colon A \to A$ una función y a_0 un elemento de A. Entonces, existe una única función $F\colon N \to A$ tal que $F(n_0) = a_0$ y para todo $n \in N$,*

$$F(s(n)) = \phi(F(n)).$$

Definición 3.1. Dos sistemas de Peano (N, s, n_0) y (N', s', n_0') se dicen *isomorfos* si existe una función biyectiva $f\colon N \to N'$ tal que $f(n_0) = n_0'$ y para toda todo $n \in N$, $f(s(n)) = s'(f(n))$.

Teorema 3.2. *Existe un isomorfismo para cualesquiera dos sistemas de Peano.*

El teorema anterior nos deja ver como hay cuando mucho, un sistema de Peano bajo isomorfismo. Esto quiere decir que al ser $(\mathbb{N}, s, \emptyset)$ un sistema de Peano, cualquier otro se comporta exactamente como este último y en última lo podemos decir que se trata del conjunto de los número naturales. Lo anterior es importante, pues hemos afirmado que existe un sistema de Peano y, bajo isomorfismo, solamente existe uno de estos sistemas: el conjunto de los números naturales.

Teorema 3.3. *Sea (N, s, n_0) un sistema de Peano. Entonces, existe una única función $\psi\colon N \times N \to N$ tal que para cada m y n en N, $\psi(m, n_0) = m$ y $\psi(m, s(n)) = s\left(\psi(m, n)\right)$.*

La función descrita en el teorema anterior la denotaremos de la siguiente manera:

$$m + n = \psi(m, n).$$

Esto intenta identificar que la función en cuestión es la suma que comúnmente asociamos con los números naturales. Debemos verificar que las propiedades de esta suma son precisamente las que de manera intuitiva nos otorgan los naturales.

Corolario 3.4. *$s(n) = n + s(n_0)$, para toda $n \in N$.*

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned} n + s(n_0) &= s(n + n_0) \\ &= s(n). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.5. *La suma en un sistema de Peano (N, s, n_0), satisface, para todas m, n y r en N las siguientes propiedades:*

- *$(m + n) + r = m + (n + r)$. (Asociatividad).*
- *$m + n = n + m$. (Conmutatividad).*
- *$m + n_0 = m$. (Elemento neutro).*

- *Si $n + r = m + r$, entonces $n = m$. (Cancelación).*

Teorema 3.6. *Sea (N, s, n_0) un sistema de Peano. Entonces, existe una única función $\Psi\colon N \times N \to N$ tal que para cada m y n en N, $\Psi(m, n_0) = n_0$ y $\Psi(m, s(n)) = \Psi(m, n) + n$.*

Como en el caso de la suma, la función descrita en el teorema, se trata de la multiplicación que conocemos. Asi, denotaremos

$$n \cdot m = \Psi(n, m).$$

De nueva cuenta, debemos presentar que esta función se comporta como la multiplicación de los naturales.

Teorema 3.7. *La suma en un sistema de Peano (N, s, n_0), satisface, para todas m, n y r en N las siguientes propiedades:*

- *$(m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$. (Asociatividad).*
- *$m \cdot n = n \cdot m$. (Conmutatividad).*
- *$m \cdot s(n_0) = m$. (Elemento neutro).*
- *$r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$. (Distributividad del producto sobre la suma).*
- *Si $r \neq n_0$ y $m \cdot r = n \cdot r$, entonces $m = n$. (Cancelación).*

Estos últimos teoremas afirman que las operaciones de suma y multiplicación suceden exactamente como esperariamos de manera intuitiva. Además, en cada operación podemos distinguir un elemento, en el caso de la suma es n_0 y en el de la multiplicación $s(n_0)$. Hemos probado también que el conjunto de los número naturales es un sistema de Peano, por lo que esas operaciones están implícitas en su estructura, así, cuando hablemos de $\mathbb{N}$, estaremos hablando implícitamente de la estrucutra que acarrea como sistema de Peano, en particular denotaremos como 0 al elemento distinguido de $\mathbb{N}$, mientras que denotaremos por 1 al sucesor de 0.

Definición 3.2. Dados m y n en $\mathbb{N}$, definimos $n < m$ si existe un elemento r distinto de 0 en $\mathbb{N}$ tal que $m = n + r$.

En realidad, es posible definir un orden en $\mathbb{N}$ sin necesidad de toda la estructura que tiene al ser un sistema de Peano. Sin embargo, una vez que tenemos nuestras herramientas listas, resulta más natural construir el orden usando la suma. Este orden presenta una serie de propiedades usualmente vínculadas a los naturales.

Teorema 3.8. *La relación $<$ definida en $\mathbb{N}$ es un orden parcial estricto.*

Teorema 3.9. *El orden definido en $\mathbb{N}$ es total.*

Teorema 3.10. *El orden $\leq$ en $\mathbb{N}$ es un buen orden.*

Estos teoremas terminan de confirmar lo que la suma y multiplicación ya insinuaban, que la construcción aunque completamente formal que hemos dado de los números naturales, coincide con la idea intuitiva que tenemos de ellos. En realidad, este hecho es notable, pues la teoría de conjuntos es suficiente para contener la aritmética, lo que hace a la teoría de conjuntos de importancia fundamental para la matemática.

Referencias

[1] Hernández Hernández, Fernando: *Teoría de conjuntos. Una introducción.* Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[2] Laveaga Gómez, Carmen: *Introducción a la Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Las prensas de Ciencias, 2007.

Comentario. Las notas anteriores no tienen un objetivo editorial, intentan pobremente resumir lo que se ha presentando en el curso de Álgebra Superior I en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es susceptible a cambios sin previo aviso.

.