# Ejercicios para Matemáticas Discretas

Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

## 1. Preliminares

### 1.1. Teoría de conjuntos

*Ejercicio* 1.1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

*Ejercicio* 1.1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

*Ejercicio* 1.1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto $A = 1, 2, 3$

*Ejercicio* 1.1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

*Ejercicio* 1.1.5. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

*Ejercicio* 1.1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

*Ejercicio* 1.1.7. Sea $A$ un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

*Ejercicio* 1.1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos $A$ y $B$, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

*Ejercicio* 1.1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos $A$, $B$ y $C$, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

*Ejercicio* 1.1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos $A$, $B$ y $C$, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*Ejercicio* 1.1.11. Demuestra que para cualquier conjunto $A$,

$$A \in \mathcal{P}(A) \qquad \text{y} \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(A)$$

*Ejercicio* 1.1.12. Sea $A$ un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

## 1.2. Relaciones

*Ejercicio* 1.2.1. Suponga que $A$ es el conjunto de las personas en el mundo. Si $R$ la relación

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ están casados}\},$$

determina el dominio y rango de $R$

*Ejercicio* 1.2.2. Se realiza un experimento de la siguiente manera: Se tira un dado y se anota el resultado; después se lanza una moneda al aire y se anota el resultado. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{\circ, +\}$. Entonces, $A \times B$ será el conjunto de posibles resultados del experimento, supongase que el experimento se realiza $n$ veces; denotando $\mathcal{E}_i \in A \times B$ como el resultado de la $i$-ésima realización del experimento. Definimos entonces la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \exists i.(a, b) = E_i\}.$$

- Determine el dominio e imagen de $R$.
- ¿Cómo interpretarías la imagen de «1» (i.e. $R[\{1\}]$)?.
- ¿Cómo interpretarías la preimagen de «$\circ$» (i.e. $R^{-1}[\{\circ, +\}]$)?

*Ejercicio* 1.2.3. Consideremos una base de datos relacional pero interpretada en el marco de la teoría de conjuntos. Sea entonces $A$ un conjunto de números naturales en donde cada elemento representa un cliente, sea también $B$ un conjunto de números naturales en el cada elemento representa un producto que vende la tienda y finalmente, sea $R$ un subconjunto de $A \times \mathcal{P}(B)$ que representa una compra realizada en la tienda. Los conjuntos $A$, $B$ y $R$ son las tablas de la base de datos, nótese sin embargo que $R$ es en realidad una relación.

- Establezca una relación entre un cliente y un producto.
- ¿Se podrá describir un conjunto de forma tal que sus elementos sean los productos que jamás han sido adquiridos?
- ¿Qué significado se le podrá dar al dominio de $R$?
- Nótese que la imagen de $R$ es un subconjunto del conjunto potencia de $B$, por lo que ésta es una familia de conjuntos. Qué significado podrá tener el conjunto
$$\bigcup \mathrm{im}(R).$$
- Suponga que $n$, $m$ y $l$ son elementos de $A$. ¿Qué conjunto describiría los productos adquiridos por cualquiera de estos tres clientes?

*Ejercicio* 1.2.4. Explica a que se refiere la siguiente relación

$$\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\right\}$$

*Ejercicio* 1.2.5. Sean $A$ y $B$ conjuntos. Definimos

$$\langle a, b\rangle = \{\{a, \varnothing\}, \{b, \{\varnothing\}\}\}.$$

Demuestra que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = b$ y $c = d$.

*Ejercicio* 1.2.6. Para conjuntos $A$, $B$, $C$ y $D$ demuestra que $A \times B \subset C \times D$ si y sólo si $A \subset C$ y $B \subset D$.

*Ejercicio* 1.2.7. Demuestra que

$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$$

# 2. Tres tipos de relaciones

## 2.1. Funciones

*Ejercicio* 2.1.1. Sea $\{R_i\}_{i \in I}$ una familia de relaciones de $A$ a $B$ y sea $R$ una relación de $B$ a $C$. Probar que

$$R \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \bigcup_{i \in I} (R \circ R_i).$$

*Ejercicio* 2.1.2. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea inyectiva y $g$ no lo sea.

*Ejercicio* 2.1.3. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea suprayectiva y $f$ no lo sea.

*Ejercicio* 2.1.4 (Notación de la inversa I). Sea $f$ una función de $A$ a $B$. Al ser $f$ una relación, hemos definido la relación inversa de $f$ como

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A | (x, y) \in f\}.$$

Esta relación no es necesariamente una función. Si $f$ es biyectiva, demuestre que la relación inversa es $f^{-1}$ es una función total de $B$ a $A$ y que en verdad $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$. Este hecho justifica la notación $f^{-1}$ para la función inversa de $f$.

*Ejercicio* 2.1.5 (Notación de la inversa II). Sea $f\colon A \to B$ una función invertible y sea $g\colon B \to A$ la inversa de $f$. Si $B' \subset B$, demuestra que

$$f^{-1}[B'] = g[B'].$$

Esto es, que la imagen inversa del conjunto $B'$ bajo $f$ coincide con la imagen del conjunto $B'$ bajo la inversa de $f$. El hecho que estos conjuntos coincidan, nos permite escribir sin ambiguedad $f^{-1}[B']$ aun cuando $f$ es invertible.

*Ejercicio* 2.1.6. Probar que si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ son funciones biyectivas, entonces $g \circ f$ es también biyectiva con inversa dada por

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

*Ejercicio* 2.1.7. Sea $f\colon A \to B$. Desmuestra que

- Si $S \subset T \subset A$, entonces $f[S] \subset f[T]$.
- Si $U \subset V \subset B$, entonces $f^{-1}[U] \subset f^{-1}[V]$.

*Ejercicio* 2.1.8. Sea $f\colon A \to B$ una función y sean además $F, G\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ las funciones definidas por

$$F(S) = f[S]$$

y

$$G(U) = f^{-1}[U].$$

Demuestra que

- Si $f$ es suprayectiva, entonces $F \circ G = 1_{\mathcal{P}(B)}$.
- Si $f$ es inyectiva, entonces $G \circ F = 1_{\mathcal{P}(A)}$.

*Ejercicio* 2.1.9. Sea $f\colon A \to B$ una función, sean también $S$ y $T$ subconjuntos de $A$ y, $U$ y $V$ subconjuntos de $B$. Demuestra

- $f[S \cup T] = f[S] \cup f[T]$.
- $f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.
- $f[S \cap T] \subset f[S] \cap f[T]$.
- $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$

Recuerda que si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indicada de conjuntos, la unión e intersección de estos están dados por las expresiones

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I . x \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I . x \in A_i\}.$$

*Ejercicio* 2.1.10. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indicada de subconjuntos de $A$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ es una familia indicada de subconjuntos de $B$, demuestra que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcup_{j\in J} B_j\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_j)$$

*Ejercicio* 2.1.11. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indicada de subconjuntos de $A$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ es una familia indicada de subconjuntos de $B$, demuestra que

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcap_{j\in J} B_j\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_j)$$

*Ejercicio* 2.1.12. Sea $f\colon A \to B$ y sean $S$ y $U$ subconjuntos de $A$ y $B$ respectivamente. Demostrar

- $f^{-1}[B \backslash U] = A \backslash f^{-1}[U]$.
- $f$ es suprayectiva si y sólo si $B \backslash f[S] \subset f[A \backslash S]$.
- $f$ es inyectiva si y sólo si $f[A \backslash S] \subset B \backslash f[S]$.

*Ejercicio* 2.1.13. Sea $A$ un conjunto y sea $a$ un elemento de $A$. Si $\kappa_a\colon A \to A$ es la función constante de $a$, demostrar que $\kappa_a \circ g = \kappa_a$ para cualquier función $g\colon A \to A$. Recíprocamente, si $f\colon A \to A$ es una función tal que $f \circ g = f$ para cualquier función $g\colon A \to A$, demostrar que existe un elemento $b \in A$ de forma que $f = \kappa_b$, i.e., que $f$ es una función constante. (Sugerencia: Una función $f$ es constante si y sólo si existe $a \in A$ de forma que para toda $b \in A$, $f(b) = a$. Usa contraposición afirmando que $f$ no es constante y concluye $f \circ g \neq f$ para alguna función $g$).

Recuerda que hemos definido las proyecciones del conjunto $A \times B$ a $A$ y $B$ como las funciones $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$, respectivamente, dadas por $\pi_1(a,b) = a$ y $\pi_2(a,b) = b$.

*Ejercicio* 2.1.14. Sea $h \colon C \to A \times B$. Demuestra que para toda $c \in C$,

$$h(c) = ((\pi_1 \circ h)(c), (\pi_2 \circ h)(c))$$

*Ejercicio* 2.1.15. Sean $A$ y $B$ conjuntos y sean $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$ las proyecciones de $A \times B$ en $A$ y $B$ respectivamente. Demuestra que para cualquier conjunto $C$ y para cualesquiera funciones $f \colon C \to A$ y $g \colon C \to B$ existe una única función $h \colon C \to A \times B$ de forma que $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$. (Sugerencia: Para probar la unicidad usa el ejercicio anterior).

*Ejercicio* 2.1.16. Sean $f \colon A \to C$ y $g \colon B \to D$ funciones. Demuestra que existe una función $h \colon A \times B \to C \times D$ de forma que, si $f$ y $g$ son biyectivas, entonces $h$ es biyectiva.

*Ejercicio* 2.1.17. Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones de $A$ a $B$ no necesariamente totales. Si para cualesquiera $i$ y $j$ en $I$, tenemos que

$$f_i(a) = f_j(a),$$

para cualquier $a \in \mathrm{Dom}(f_i) \cap \mathrm{Dom}(f_j)$, demuestra que existe una función $f \colon A \to B$ no necesariamente total de forma que,

$$\mathrm{Dom}(f) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Dom}(f_i)$$

y, para cada $i$ en el índice y cada $a \in \mathrm{Dom}(f_i)$,

$$f(a) = f_i(a).$$

*Ejercicio* 2.1.18. Sea $R$ una relación en $A$. Demuestra que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a $R$, i.e., si $S$ es una relación simétrica tal que $R \subset S$, entonces $R \cup R^{-1} \subset S$.

*Ejercicio* 2.1.19. Sea $R$ una relación en $A$. Demuestra que $R \cap R^{-1}$ es la relación simétrica más grande contenida en $R$, i.e., si $S$ es una relación simétrica tal que $S \subset R$, entonces $S \subset R \cap R^{-1}$.

*Ejercicio* 2.1.20. Sea $R$ una relación reflexiva y transitiva en un conjunto $A$. Probar que $R \circ R = R$.

*Ejercicio* 2.1.21. Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones de equivalencia en $A$. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es una relación de equivalencia si y sólo si $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

*Ejercicio* 2.1.22. Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones de equivalencia en un conjunto $A$ tal que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es la intersección del conjunto de todas las relaciones de equivalencia en $A$ que contienen $R_1$ y $R_2$, i.e.

$$R_2 \circ R_1 = \bigcap \{X \in \mathfrak{R}_A \mid R_1 \subset X \land R_2 \subset X\}.$$

Recuerda que para una relación de equivalencia en un conjunto $A$, hemos definido el conjunto cociente de $A$ respecto de $R$ como

$$A/R = \{[a] \in \mathcal{P}(A) \mid a \in A\}$$

y la función canónica $\pi\colon A \to A/R$ como

$$\pi(a) = [a].$$

*Ejercicio* 2.1.23. Sea $R$ una relación de equivalencia en un conjunto $A$. Sea $S \subset R$ tal que la imagen de la proyección $\pi_1$ en $S$ es $A$. Demostrar que $R \circ S = R$ y que si $T$ es una relación cualquiera en $A$, entonces $(R \cap T) \circ S = R \cap (T \circ S)$.

*Ejercicio* 2.1.24. Sea $f\colon A \to B$ una función y sea

$$R_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

Demuestra que $R_f$ es una relación de equivalencia y que si

$$F = \{(a, f(a)) \mid a \in A\},$$

entonces $R_f = F^{-1} \circ F$. A la relación $R_f$ se le conoce como la *relación de equivalencia asociada a* $f$.

*Ejercicio* 2.1.25. Sea $R$ una relación de equivalencia en $A$ y sea $\pi\colon A \to A/R$ la función canónica de $A$ a $A/R$. Probar que $R$ es la relación de equivalencia asociada a $\pi$.

*Ejercicio* 2.1.26. Sean $f\colon A \to B$ una función, $R$ una relación de equivalencia en $A$ y $S$ una relación de equivalencia en $B$, sean también $\pi_R\colon A \to A/R$ y $\pi_S\colon B \to B/S$ las funciones canónicas de $A$ a $A/R$ y $B$ a $B/S$ respectivamente. Demostrar que existe una función $h\colon A/R \to B/S$ tal que $h \circ \pi_R = \pi_S \circ f$ si sólo si para todo $(a, a') \in R$ tenemos que $(f(a), f(a')) \in S$.

## 2.2. Relaciones de orden

*Ejercicio* 2.2.1. Sea $A$ un conjunto y sea $<$ una relación en $A$ de forma que

- para cada $a \in A$, $a < a$ es falso y
- si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demuestra que si definimos la relación $\leq$ en $A$ como $x \leq y$ si y sólo si $x < y$ o $x = y$, entonces $\leq$ es un orden parcial[1]

*Ejercicio* 2.2.2. Sea $P = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$. Dibuja el diagrama de$P$ ordenado con las siguientes reglas. $v < a$, $v < b$, $v < c$, $v < d$, $v < e$, $v < f$, $v < u$, $a < c$, $a < d$, $a < e$, $a < f$, $a < u$, $b < c$, $b < d$, $b < e$, $b < f$, $b < u$, $c < d$, $c < e$, $c < f$, $c < u$, $d < e$, $d < f$, $d < u$, $e < u$ y $f < u$.

[1]Una relación binaria $<$ con esas propiedades se le conoce como orden parcial estricto.

*Ejercicio* 2.2.3. Sea $A$ un conjunto cualquiera. Demuestra que la pareja

$$(\mathcal{P}(A), \subset)$$

es un conjunto parcialmente ordenado.

*Ejercicio* 2.2.4. Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y sea

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{u \colon \mathbb{N} \to \Sigma \mid u \text{ es total}\}.$$

Definiremos ahora un orden en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $u \leq v$ si y sólo si $u = v$ o $u$ es finita de forma que para $0 \leq n < l(u)$,

$$u(n) = v(n).$$

1. Demuestra que $\leq$ es un orden parcial en $\Sigma^*$.
2. Demuestra que si $\mathbf{O}(n) = 0$ para todo $n$, entonces $\mathbf{O} \leq u$ si $u \in \Sigma^*$.
3. Sea $u \in \Sigma^*$, determine que elementos $v \in \Sigma^*$ satisfacen $u \ll v$.
4. Demuestra que para una cadena binaria no finita $u$, no existe elemento $v$ tal que $u \ll v$.

*Ejercicio* 2.2.5. Tomemos el conjunto de todas las funciones de $A$ a $B$ por

$$B^A = \{f \mid f \colon A \to B\}.$$

Definiremos un orden en $B^A$ como sigue: diremos que $f \leq g$ para elementos de $B^A$, siempre que $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ y para cada elemento $x \in \mathrm{dom}(f)$

$$f(a) = g(a).$$

1. Demuestra que $(B^A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
2. Demuestra que $\varnothing \leq f$ para cada $f \in B^A$.
3. Encuentra un cadena en $B^A$.

*Ejercicio* 2.2.6. Para el orden que conocemos para $\mathbb{N}$, demuestra que $m \ll n$ si y sólo si $n = m + 1$.

*Ejercicio* 2.2.7. Para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subset)$, demuestra que $S \ll T$ si y sólo si existe $b \in A \backslash S$ tal que $T = S \cup \{b\}$.

# 3. De la teoría del orden a la teoría de retículas

## 3.1. Elementos de la teoría del orden

*Ejercicio* 3.1.1. Sea $A$ un conjunto parcialmente ordenado con order $\leq$. Demuestra que la relación $<$ asociada a $\leq$ satisface

1. Para todo $x$, $x < x$ es falso.
2. Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

Supongamos ahora una relación con las dos propiedades anteriores y asociemos la relación $\leq$ definida por $x \leq y$ si y sólo si $x < y$ o $x = y$. Prueba que esta última es un orden parcial. Esto quiere decir que cualquier orden parcial proviene de una relación $<$ que satisface 1) y 2) (a una relación de este tipo se le llama orden estricto).

*Ejercicio* 3.1.2. Comprueba que la suma lineal de dos conjuntos parcialmente ordenados resulta en un conjunto parcialmente ordenado.

*Ejercicio* 3.1.3. Comprueba que el producto de dos conjuntos parcialmente ordenados resulta en un conjunto parcialmente ordenado.

*Ejercicio* 3.1.4. Sean $A$ y $B$ conjuntos parcialmente ordenados. Demuestra que $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2)$ si y sólo si

- $a_1 = a_2$ y $b_1 \ll b_2$ en $B$ o
- $b_1 = b_2$ y $a_1 \ll a_2$.

*Ejercicio* 3.1.5. Sean $A$ y $B$ conjuntos parcialmente ordenados. Demuestra que si $a$ es un elemento maximal de $A$ y $b$ es un elemento minimal de $B$, entoncs $a \ll b$ en $A \oplus B$.

*Ejercicio* 3.1.6. Sean $A$ y $B$ conjuntos parcialmente ordenados. Demuestra que si $a \in A$, $b \in B$ y $a \ll b$ en $A \oplus B$, entonces $a$ es un maximal de $A$ y $b$ es un minimal de $B$.

*Ejercicio* 3.1.7. Demuestra que

$$P \oplus (Q \oplus R) \cong (P \oplus Q) \oplus R.$$

*Ejercicio* 3.1.8. Demuestra que

$$A_\perp \cong \mathbf{1} \oplus A$$

*Ejercicio* 3.1.9. Demuestre que $\downarrow S$ es el conjunto decreciente mśa pequeño que contiene a $S$, i.e., si $T$ es un conjunto decreciente tal que $S \subset T$, entonces $\downarrow S \subset T$.

*Ejercicio* 3.1.10. Verifica que $\mathcal{O}(A)$ para un conjunto parcialmente ordenado $A$ es en verdad un conjunto parcialmente ordenado bajo la inclusión.

*Ejercicio* 3.1.11. Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones monótonas. Demuestra que $g \circ f$ es tambin monótona.

*Ejercicio* 3.1.12. Sea $\phi\colon A \hookrightarrow B$ una inmersión de orden. Demuestra que

$$\operatorname{ran}(\phi) \cong A.$$

*Ejercicio* 3.1.13. Demuestre que para un conjuntos parcialmente ordenado $A$,

$$\mathcal{O}(A)^\partial \cong \mathcal{O}(A^\partial).$$

## 3.2. Un teorema estructural

*Ejercicio* 3.2.1. Sean $(V, E)$, $(W, F)$ y $(Z, G)$ gráficas y sean $f: V \to W$ y $g: W \to Z$ homomorfismos entre las gráficas correspondientes. Demuestra que $g \circ f$ es también un homomorfismo.

*Ejercicio* 3.2.2. Demuestra que si $f$ es un isomorfismo entre las gráficas $(V, E)$ y $(W, F)$, debemos tener que $(x, y) \in E$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in F$.

*Ejercicio* 3.2.3. Sean $R$ y $S$ relaciones en un conjunto finito $A$. Calcule la matriz de adyacencia de la composición $R \circ S$.

*Ejercicio* 3.2.4. Sea $R$ una relación. La matriz de adyacencia de la relación se puede usar para demostrar algunas propiedades de las relaciones. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto con $n$ elementos y sea $R$ una relacion en $A$. Si $M(R)$ es la matriz de adyacencia de la relación, demuestra que

1. $R$ es reflexiva si y sólo si $I_n \leq M(R)$.
2. $R$ es simétrica si y sólo si $(M(R))^t = M(R)$.
3. $R$ es transitiva si y sólo si $M(R) \cdot M(R) \leq M(R)$.
4. $R$ es antisimetrica si y sólo si $M(R) \odot M(R) \leq I_n$.

*Ejercicio* 3.2.5. Desarrolle un programa usando la matriz de adyacencia que reconozca relaciones de orden sobre un conjunto finito.

*Ejercicio* 3.2.6. En una gráfica $(V, E)$, un subconjunto de $S$ de $V$ se dice *una cuenca* si $(x, y) \in E$ y $x \in S$ implica que $y \in S$. es vacío. ¿Cómo prodríamos usar la matriz de adyacencia para deducir si un subconjunto es una cuenca?

*Ejercicio* 3.2.7. Sea $\mathcal{G}(A)$ la gráfica asociada a un conjunto finito parcialmente ordenado $A$. Demuestra que si $S$ es una cuenca en $\mathcal{G}(A)$ entonces $S$ es un conjunto creciente en $A$.

*Ejercicio* 3.2.8. Sea $A$ un conjunto parcialmente ordenado. Si $M(A)$ es la matriz de incidencia de la gráfica asociada de $A$, ¿cómo sería posible reconocer a un elemento maximal de $A$? ¿cómo sería posible reconocer a un elemento minimal de $A$?

*Ejercicio* 3.2.9. Sean $A$ y $B$ conjuntos parcialmente ordenado. Si $M(A)$ y $M(B)$ son las matrices de incidencia de las gráficas asociadas a los conjuntos $A$ y $B$ respectivamente, calcule $M(A \dot{\cup} B)$, usando $M(A)$ y $M(B)$.

*Ejercicio* 3.2.10. Sean $A$ y $B$ conjuntos parcialmente ordenado. Si $M(A)$ y $M(B)$ son las matrices de incidencia de las gráficas asociadas a los conjuntos $A$ y $B$ respectivamente, calcule $M(A \oplus B)$, siendo esta la matriz asociada al conjunto parcialmente ordenado $A \oplus B$ usando $M(A)$ y $M(B)$.

## 3.3. Retículas

*Ejercicio* 3.3.1. Demuestra que $S^u$ es un conjunto creciente y que $S^l$ es un conjunto decreciente

*Ejercicio* 3.3.2. Sea $S \subset \mathcal{P}(A)$ y considérese $(\mathcal{P}(A), \subset)$ como conjunto parcialmente ordenado. Demuestra que $\bigcap S$ es una cota inferior de $S$ y también $\bigcup S$ es una cota superior de $S$.

*Ejercicio* 3.3.3. Sea $S \subset \mathcal{P}(A)$ y considérese $(\mathcal{P}(A), \subset)$ como conjunto parcialmente ordenado. Demuestra que $\bigcap S$ es la máxima cota inferior de $S$ y que también $\bigcup S$ es la mínima cota superior de $S$.

*Ejercicio* 3.3.4. Sea $S \subset \mathcal{O}(A)$ donde $A$ es un conjunto parcialmente ordenado. Entonces $\bigcup S$ y $\bigcap S$ son también conjuntos decrecientes. Esto en particular prueba que $(\mathcal{O}(A), \subset)$ es una retícula.

*Ejercicio* 3.3.5. Sea $(L, \wedge, \vee)$ una retícula. Demuestra que la relación definida por $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = a$, es un orden parcial.

*Ejercicio* 3.3.6. Demuestra que si $L$ y $K$ son retícuas, el conjunto $L \times K$ puede resultar de igual forma en retícula definiendo

$$(l_1, k_1) \wedge (l_2, k_2) = (l_1 \wedge l_2, k_1 \wedge k_2)$$

y

$$(l_1, k_1) \vee (l_2, k_2) = (l_1 \vee l_2, k_1 \vee k_2).$$

En los siguientes ejercicios probaremos que $(\mathbb{N}_0, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm})$ resulta en una retícula desarrollando conceptos de divisibilidad. Comencemos con las definiciones.

**Definición.** Para números $m$ y $n$ en $\mathbb{N}_0$, decimos que $n$ divide a $m$ o $m$ es un múltiplo de $n$, en símbolos $m|n$, si existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $km = n$.

**Definición.** Sean $m$, $n$ y $s$ números en $\mathbb{N}_0$. Decimos que $s$ es *un divisor común de $n$ y $m$* si $s|n$ y $s|m$. Decimos también que $s$ es *un mútiplo común de $n$ y $m$* si $n|s$ y $m|s$.

*Ejercicio* 3.3.7. Sean $m$ y $n$ números en $\mathbb{N}_0$. Demuestra que los siguiente conjuntos son no vacíos.

$$D(m,n) = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ es divisor común de } m \text{ y } n\}$$

$$M(m,n) = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ es múltiplo común de } m \text{ y } n\}$$

*Ejercicio* 3.3.8. Sean $m$ y $n$ números. Demuestra que existe un número $K$ tal que para todo $s \in D(m,n)$ se tiene que $s \leq K$. En otras palabras, demuestra que $D(m,n)$ está acotado.

*Ejercicio* 3.3.9. De estos últimos ejercicios concluye a través del principio de buen orden, que existe máximo común divisor y el mínimo común múltiplo para cualesquiera dos números en $\mathbb{N}_0$.

**Definición.** Sean $m$ y $n$ números cualesquiera. Definimos $\mathrm{mcd}(m,n)$ como el máximo común divisor de $m$ y $n$, y $\mathrm{mcm}(m,n)$ como el mínimo común mútiplo de $m$ y $n$.

*Ejercicio* 3.3.10. Para cualesquiera $n$, $m$ y $l$, demuestra que

$$\operatorname{mcd}(\operatorname{mcd}(m,n),l) = \operatorname{mcd}(m,\operatorname{mcd}(n,l))$$

$$\operatorname{mcm}(\operatorname{mcm}(m,n),l) = \operatorname{mcm}(m,\operatorname{mcm}(n,l))$$

*Ejercicio* 3.3.11. Para cualquier $n$ demuestra que

$$\operatorname{mcd}(n,n) = n$$

$$\operatorname{mcm}(n,n) = n$$

*Ejercicio* 3.3.12. Para cualesquiera $n$ y $m$, demuestra que

$$\operatorname{mcd}(n,\operatorname{mcm}(m,n)) = n$$

$$\operatorname{mcm}(n,\operatorname{mcd}(m,n)) = n$$

*Ejercicio* 3.3.13. Convencete con lo anterior que $(\mathbb{N}_0, \operatorname{mcd}, \operatorname{mcm})$ es una retícula. No ya desde el punto de vista de orden, sino desde la definición algebraica.

*Ejercicio* 3.3.14. Demuestra que la retícula $(\mathbb{N}_0, \operatorname{mcd}, \operatorname{mcm})$ posee una cima con $\top = 0$ y un fondo con $\bot = 1$.

# 4. Algunos tipos de retículas

## 4.1. Retículas completas

*Ejercicio* 4.1.1. Sea $A$ un conjunto parcialmente ordenado. Si $A$ tiene cima, demuestra que $P^u = \{\top\}$, en caso constrario muestra que $P^u = \varnothing$. Si $A$ tiene fondo, muestra que $P^l = \{\bot\}$, en caso contrario muestra que $P^l = \varnothing$.

*Ejercicio* 4.1.2. Sea $A$ un conjunto parcialmente ordenado.

1. Usando un argumento por vacuidad, muestra que $\varnothing^u = A$.
2. Usando un argumento por vacuidad, muestra que $\varnothing^l = A$.
3. Muestra que $A$ tiene un fondo si y sólo si $\sup \varnothing$ existe.
4. Muestra que $A$ tiene una cima si y sólo si $\operatorname{ínf} \varnothing$ existe.

*Ejercicio* 4.1.3. Dibuja el producto de las retículas $\mathbf{3}$ y $\mathbf{2}^2 \oplus \mathbf{1}$ y encuentra una subretícula isomorfa a $\mathbf{1} \oplus (\mathbf{2} \times \mathbf{3})$.

*Ejercicio* 4.1.4. Sean $L$ y $K$ retículas con 0 y 1 y sea $M = L \times K$. Demuestra que existen $a$ y $b$ elementos de $M$ tal que

1. $\downarrow a \cong L$ y $\downarrow b \cong K$
2. $a \wedge b = (0,0)$ y $a \vee b = (1,1)$.

## 4.2. Retículas distributivas y modulares

*Ejercicio* 4.2.1. Sea $L$ una retícula y sean $a$, $b$ y $c$ elementos de $L$. Demuestra que

1. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

*Ejercicio* 4.2.2. Sea $L$ una retícula y sean $a$, $b$ y $c$ elementos de $L$. Demuestra que

1. $a \geq c$ implica $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c$.
2. $a \leq c$ implica $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

*Ejercicio* 4.2.3. Sean $L$ y $K$ retículas. Si $L$ y $K$ son distributivas, demuestra que $L \times K$ es distributiva.

# Referencias


[Fra87] Fraleigh, John B.: *Álgebra abstracta: primer curso*. Addison Wesley, 1987.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.