Intermezzo 2:
Funciones Trigonométricas

Cálculo Diferencial e Integral I
Actuaría 2016-I

1. Funciones trigonométricas

1.1. Presentación axiomática

Tradicionalmente, las funciones seno y coseno se introducen formalmente a través de la integral. Sin embargo, nos vemos en la necesidad de presentar ejemplos sencillos donde tener a la mano estas funciones resulta muy ilustrativo, es por ello que resulta importante dar un presentación que posteriormente puede ser justificada. Para esto se introducen las siguientes propiedades, entendiendo de antemano que ésta es una construcción artificial y sólo tendrá sentido cuando justifiquemos que existen un par funciones con las propiedades que planteamos.

Definición 1.1. Las funciones sin y cos se definen bajo las siguientes propiedades:

- Su dominio consiste en todos los números reales, i.e.

$$\mathrm{dom}(\sin) = \mathrm{dom}(\cos) = \mathbb{R} \tag{A1}$$

- Presentan los siguientes valores especiales,

$$\cos(0) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 \text{ y } \cos(\pi) = -1 \tag{A2}$$

- Para cualesquiera x y y números reales,

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x) \tag{A3}$$

- Para un número x, tal que $0 < x < \frac{1}{2}\pi$,

$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} \tag{A4}$$

- Para cualquier número x,

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq |x| \tag{A5}$$

Probaremos ahora algunas identidades notables del seno y coseno, sin embargo existen muchas más. Concluiremos con una muy peculiar que nos dejará ver el comportamiento de dichas funciones.

Proposición 1.1. *Para cualquier número x,*

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1.$$

Lema 1.2. *Para cualquier número x,*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x).$$

Proposición 1.3. *Además de los valores dados por A2, también* $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}(\pi) = 0$ *y* $\cos(\pi/2) = 0$.

Proposición 1.4. *Para cualquier número x,*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen}(x).$$

Proposición 1.5. *Para cualquier número x,*

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

y

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x).$$

Proposición 1.6. *Para cualquier número x,*

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$$

y

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Proposición 1.7. *Para cualquiera números x y y,*

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x),$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x),$$

y

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y).$$

Proposición 1.8. *Para cualquier número x,*

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

y

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x).$$

Demostración. La primer fórmula se puede calcular directamente, a través del seno de la suma, i.e.,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x) &= \operatorname{sen}(x+x) \\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x). \end{aligned}$$

Para la segunda usaremos la identidad

$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x),$$

y calculamos el coseno de la suma

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x+x) \\ &= \cos^2 - \operatorname{sen}^2(x) \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2(x). \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.9. *Para cualesquiera números a y b, son ciertas:*

$$\operatorname{sen}(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

y

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Demostración. Con la proposición 1.7, se comprueba que para cualesquiera números x y y,

$$\sin(y+x) - \sin(y-x) = 2\cos(y)\sin(x)$$

y

$$\cos(y+x) - \cos(y-x) = -2\sin(y)\sin(x).$$

En particular lo anterior debe ser cierto para $y = (a+b)/2$ y $x = (a-b)/2$; en ese caso $a = y + x$ y $b = y - x$, por lo que

$$\operatorname{sen}(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

y

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

$\square$

Proposición 1.10. *Para cualesquiera números $0 < b < a < \pi/2$,*

$$\operatorname{sen}(b) < \operatorname{sen}(a)$$

y

$$\cos(a) < \cos(b).$$

Demostración. Por A4, si $0 < x < \pi/2$ debemos tener que $\operatorname{sen}(x) > 0$ y $\cos(x) > 0$, además los números $(a+b)/2$ y $(a-b)/2$ están ambos en $(0, \pi/2)$. Entonces, por 1.9,

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0$$

y

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) < 0.$$

En otras palabras $\operatorname{sen}(b) < \operatorname{sen}(a)$ y $\cos(a) < \cos(b)$ como buscábamos. $\square$

Corolario 1. *La función* sen *es estrictamente creciente en* $(-\pi/2, \pi/2)$.

Demostración. Basta probar que para un par de números $-\pi/2 < a < b < 0$,

$$\operatorname{sen}(a) < \operatorname{sen}(b).$$

En efecto, debemos tener que $-b < -a < \pi/2$ y el teorema implica que

$$\operatorname{sen}(-b) < \operatorname{sen}(-a)$$

y como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ para cualquier número, lo anterior implica que

$$\operatorname{sen}(a) < \operatorname{sen}(b)$$

como buscábamos. $\square$

Corolario 2. *La función* cos *es estrictamente decreciente en* $(0, \pi)$.

Demostración. Basta probar que para cualesquiera $\pi/2 < b < a < \pi$ tenemos

$$\cos(a) < \cos(b).$$

En efecto, debemos notar solamente que $b' = b - \pi/2$ y $a' = a - \pi/2$ cumplen $0 < b' < a' < \pi/2$. En ese caso, por el teorema anterior

$$\operatorname{sen}\left(b - \frac{\pi}{2}\right) < \operatorname{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$$

En otras palabras

$$-\cos(b) < -\cos(a),$$

por lo que obtenemos lo que deseábamos, i.e.,

$$\cos(a) < \cos(b). \qquad \square$$

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* Editorial Reverté, 1984.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Cálculo Integral y Diferencial I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.