Semana 15: Usos y desusos de la deriva II

1. Polinomio de Taylor

Nos interesa ahora estudiar el comportamiento de la derivada para reconstruir una función por sus valores. Supongamos para esto una función f que sea n-diferenciable en a. Deseamos encontrar un polinomio $P_{n,a}$ de grado no superior a n de forma que

$$P_{n,a}(a) = f(a),\ P'_{n,a}(a) = f'(a),\ \ldots,\ P^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

De forma más concisa, para $0 \leq k \leq n$,

$$P^{(k)}_{n,a}(a) = f^{(k)}(a).$$

Proponemos con este objetivo que el polinomio tenga la siguiente forma

$$P_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

sus derivadas en a están dadas por las siguiente expresiones

$$\begin{aligned} P_{n,a}(a) &= a_0, \\ P'_{n,a}(a) &= a_1, \\ P'_{n,a}(a) &= 2a_2, \\ &\vdots \\ P^{(n)}_{n,a} &= n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1 \cdot a_n, \end{aligned}$$

o de forma concisa para $0 \leq k \leq n$,

$$P^{(k)}_{n,a}(a) = k! a_k.$$

Esto nos permite expresar al polinomio $P_{n,a}$ como

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Es sencillo notar que cualquier otro polinomio que contenga la misma propiedad coincidirá con $P_{n,a}$. Formulamos la discusión anterior como un teorema.

Teorema 15.1. *Sea f una función n-diferenciable. Entonces, existe un único polinomio $P_{n,a}$ tal que*

$$P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Definición 15.1. Al polinomio $P_{n,a}$ del teorema anterior se le denomina *el polinomio de Taylor de grado n para f con centro en a*.

Ejemplo. Para calcular el polinomio de Taylor de grado 4 con centro en 0 para la función $f(x) = \cos(2x)$ debemos obtener primero sus derivadas:

$$f'(x) = -2\,\text{sen}(2x),\ f''(x) = -4\cos(2x),\ f'''(x) = 8\,\text{sen}(2x) \text{ y } f^{(4)}(x) = 16\cos(2x)$$

Con ellas, podemos calcular los coeficientes del polinomio:

$$\begin{aligned} P_{4,0}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 \\ &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 \end{aligned}$$

Ejemplo. Vamos a calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en 4 de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Para esto, obtenemos las derivada de f:

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = 1/(1-x)$. Para calcular el polinomio de Taylor de grado n en 0 de dicha función necesitamos obtener sus derivadas en 0. No es difícil observar que

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

lo cual nos permite afirmar

$$f^{(k)}(0) = k!$$

y en consecuencia el polinomio que buscamos resulta

$$P_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Ejemplo. El polinomio de Taylor de la función coseno alrededor del 0 se puede calcular de manera muy sencilla pues conocemos ya sus derivadas. Observamos que

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos'(0) &= -\,\text{sen}(0) = 0 \\ \cos''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ \cos'''(0) &= \text{sen}(0) = 0 \end{aligned}$$

Como las derivadas se repiten, lo anterior nos entrega la secuencia que buscamos. Debemos observar que solamente los términos pares son diferentes de 0 por lo que el polinomio de Taylor de grado $2n$ se puede representar por la expresión

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Designemos ahora $R_{n,a}$ como la diferencia entre los valores de la función y su polinomio de Taylor de grado n en a, i. e.,

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x).$$

Podemos entonces escribir

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Teorema 15.2. *Sea f una función n-diferenciable en a. Entonces,*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración. Vamos a expresar primero el residuo de una forma explícita:

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Definimos entonces las funciones

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

y

$$g(x) = (x-a)^n$$

de modo que

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - q(x)}{g(x)} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

La expresión anterior nos permite obtener el limite que buscamos calculando

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - q(x)}{g(x)}.$$

Existe un modo muy simple de realizar esto utilizando la regla de L'Hôpital. Obtenemos primero las derivadas de las funciones q y g: Para $1 \leq k \leq n-1$,

$$q^{(k)}(a) = f^k(a)$$

y

$$g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}.$$

Ahora, para $1 \leq k \leq n-2$ las funciones f^k y q^k son continuas en a al ser éstas diferenciables, se debe tener

$$\lim_{x \to a} f^{(k)}(x) - q^{(k)}(x) = f^{(k)}(a) - q^{(k)}(a) = 0$$

y también

$$\lim_{x \to a} g^{(k)}(x) = 0.$$

Luego, por L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-q(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-q'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f''(x)-q''(x)}{g''(x)} \\
&\vdots \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-2)}(x)-q^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-q^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}
\end{aligned}$$

Pero, $q^{(n-1)}$ es una función constante, a decir $q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$ y en ese caso

$$\frac{f^{(n-1)}(x)-q^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Debemos observar que en el segundo término de a la derecha de la igualdad, corresponde a la expresión que permite calcular la n-ésima derivada por lo que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-q(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-q(x)}{g(x)} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$ ∎

El teorema anterior nos permite observar que la función f y el polinomo coinciden desde un punto de vista analítico usando la siguiente definición.

Definición 15.2. Dos funciones f y g se dice que *coinciden hasta el grado n en a* si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Corolario 15.3. *Una función f y su polinomio de Taylor $P_{n,a}$ coinciden hasta el grado n.*

2. Estimación del residuo del polinomio de Taylor

Teorema 15.4 (Fórmula de Lagrange del resto)**.** *Sea f cualquier función. Si f es $n+1$-diferenciable en $[a,b]$, entonces, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$R_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Demostración. De acuerdo con el enunciado del teorema, para todo número $x \in [a, b]$ tenemos

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{n,x}(b) + R_{n,x}(b) \\ &= f(x) + f'(x)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + R_{n,x}(b). \end{aligned}$$

No es difícil observar que ambas expresiones pueden ser entendidas como funciones sobre x. Para dejar esto explícito, tomaremos la función

$$S(x) = R_{n,x}(b).$$

Además, podemos calcular las derivadas involucradas considerando las derivadas de las funciones

$$g_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k,$$

las cuales son simplemente

$$g_0'(x) = f^{'}(x)$$

y para $1 \leq k \leq n$

$$g_k^{'}(x) = -\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

Ahora

$$P_{n,x}(b) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

por lo que

$$\begin{aligned} P_{n,x}^{'}(b) &= g_0'(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k^{'}(x) \\ &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n. \end{aligned}$$

En ese caso debemos tener que

$$0 = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + S'(x)$$

o en otras palabras

$$S'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Aplicamos ahora el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones S y $g(x) = (b-x)^{n+1}$, para las cuales obtenemos un número $\xi \in (a,b)$

$$\frac{S(b)-S(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{S'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n}{-(n+1)(b-\xi)^n},$$

como $S(b) = R_{n,b}(b) = 0$ y como $S(a) = R_{n,a}(b)$, lo anterior significa que

$$\frac{R_{n,a}(b)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

o expresado de otra forma

$$R_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

El teorema anterior nos indica que el polinomio de Taylor puede funcionar como una buena aproximación de la función en algún punto. Basta acotar el residuo de la manera adecuada.

Ejemplo. Es común en nuestra educación básica, escuchar que el $\operatorname{sen}(x)$ puede ser remplazado por x para valores *«pequeños»* de x. Para poder justificar este hecho haremos uso de los polinomios de Taylor. Debemos observar que el polinomio de Taylor de grado no mayor que 2 en 0 de sen es $P(x) = x$. Según el teorema anterior, esto quiere decir que podemos encontrar un número $\xi < x$ de modo que

$$\operatorname{sen}(x) - x = -\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{6}x^3.$$

A pesar de no saber que número es exactamente ξ, conocemos que $|\operatorname{sen}(\xi)| \leq 1$ por lo que

$$|\operatorname{sen}(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}.$$

Esto quiere decir que el error de usar x en lugar de $\operatorname{sen}(x)$ es menor que $x^3/6$ lo cual es pequeño mientras más cerca de 0 estemos. Para ilustrar esto, podemos intentar calcular el valor de la función en $x = \pi/9$ observando

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{\pi}{9}\right| \leq \frac{\pi^3}{9^3 \cdot 6} \approx 0{,}007$$

Ejemplo. Para la función $f(x) = \sqrt{x}$ hemos calculado en otro ejemplo el polinomio de Taylor de dicha función. Según el resultado del teorema podemos ocupar dicho polinomio para estimar el valor de $\sqrt{5}$ y para esto, debemos observar que

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16\sqrt{x^7}}.$$

Entonces, según el teorema del residuo, para algún $\xi \in (4,5)$

$$|R_{3,4}(5)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\right| = \frac{5}{128\sqrt{\xi^7}}$$

Además, podemos observar que para cualquier número $x \in (4,5)$, tenemos que $2 < \sqrt{x}$ y además

$$\frac{1}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{x^3\sqrt{x}} < \frac{1}{2 \cdot 4^3}$$

por lo que

$$|R_{3,4}(5)| < \left(\frac{5}{128}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 4^3}\right) = \frac{5}{16384} \approx 0{,}000305.$$

Podemos entonces aproximar $\sqrt{5}$, con un error menor que 0,000305, utilizando el número

$$P_{3,4}(5) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} = \frac{1145}{512}.$$

3. Criterio de la n-ésima derivada

Teorema 15.5. *Sea f una función n-diferenciable en a que satisface para cada número entero k tal que $1 \leq k < n$,*

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad y \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces,

- *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a.*
- *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.*
- *Si n es par, entonces a es un punto de inflexión de f.*

Demostración. Para establecer el resultado, supondremos sin perdida de la generalidad que la función satisface $f(a) = 0$ pues si no fuera el caso, sería suficiente mostrar el resultado para la función $f - f(a)$ la cual se anula en a. Aclarado esto, procedemos a calcular el polinomio de Taylor de la función alrededor de a notando que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)(a)} = 0$:

$$P_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Siguiendo del desarrollo de la prueba del teorema del residuo, podemos verificar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Como el término a la derecha de la igualdad es no nulo, la igualdad anterior implica que existe $\delta > 0$ de modo que, si $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \neq 0$$

donde además la expresión anterior tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$. Debemos entonces dividir los casos en que n es par o impar:

- Si n es par, entonces $(x-a)^n$ es siempre positivo si $0 < |x-a| < \delta$. Eso quiere decir que $f(x) > 0 = f(a)$ si $f^{(n)}(a) > 0$ y $0 < |x-a| < \delta$ por lo que a debe ser un mínimo local. De la misma forma podemos concluir que a es un máximo local si $f^{(n)}(a) < 0$.
- Si n es impar, entonces $(x-a)^n$ es positivo si $0 < x-a < \delta$ y negativo si $0 < a-x < \delta$, indicando que f cambia de signo al pasar por a. Si la función f cambia de signo al pasar por a quiere decir que es imposible que a sea un máximo o un mínimo pues para $0 < |x-a| < \delta$ existen valores tanto más grandes como más pequeños que $f(a) = 0$. Esto indica que a es un punto de inflexión como afirma el teorema. ■

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^6$. Para obtener los máximos y mínimos de la función, obtenemos su derivada $f'(x) = 6x^5$ la cual indica que hay un único punto crítico $c = 0$. Para terminar si este es punto máximo o mínimo, consideramos la segunda derivada $f''(x) = 30x^4$ la cual se anula en $c = 0$ por lo que el criterio de la segunda derivada no es concluyente. Consideramos entonces las derivada de orden superior, $f'''(x) = 120x^3$, $f^{(4)}(x) = 360x^2$, $f^{(5)}(x) = 720x$ y $f^{(6)}(x) = 720$. Como 6 es par y $f^{(6)}(0) = 720 > 0$, el criterio anterior nos permite observar que $c = 0$ es un máximo local de la función, lo cual no es posible concluir con el criterio de la segunda derivada.

Ejemplo. La función $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x)$, tiene derivada $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen}(x) + x^3 \cos(x)$ por lo que $c = 0$ es un punto crítico. Sin embargo, la segunda derivada $f''(x) = 6x \operatorname{sen}(x) + 6x^2 \cos(x) - x^3 \operatorname{sen}(x)$ se anula en $c = 0$. Además, no es difícil verificar que $f'''(0) \neq 0$ por lo que podemos concluir que $c = 0$ es un punto de inflexión.

Ejercicios

Ejercicio 15.1. Calcula el polinomio de Taylor del grado y punto en que se indica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}(x)$ con grado $2n$ en $\pi/2$.

b) $g(x) = x^5 + x^3 + x$ con grado 4 en 0.

c) $h(x) = \text{sen}^2(x)$ con grado 3 en 0.

d) $i(x) = x^5 + x^3 + x$ con grado 4 en 1.

e) $j(x) = x/\sqrt{x^2 - 1}$ con grado 4 en 0.

f) $k(x) = 1/(x^2 + 1)$ con grado $2n + 1$ en 0.

g) $l(x) = \cos(x)$ con grado $2n$ en π.

h) $m(x) = 1/(x + 1)$ con grado n en 0.

Ejercicio 15.2. Escribe cada uno de los siguientes polinomios en x como un polinomio en $x - 3$. Sugerencia: Calcula el polinomo de Taylo en 3.

a) $x^2 - 4x + 9$.

b) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$.

c) x^5.

d) $ax^2 + bx + c$.

Ejercicio 15.3. Encuentra los puntos críticos de las funciones y clasifícalos.

a) $3x^2$.

b) $-x^4 + 2x^2$.

c) $x^4 - 4x^3 - 6x^2$.

d) $(x - 2)^3(2x + 1)$.

Ejercicio 15.4. Escribe una suma que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se indica.

a) $\text{sen}(1)$ con error menor que 10^{-7}.

b) $\text{sen}(1)$ con error menor que 10^{-10}.

c) $\text{sen}(2)$ con error menor que 10^{-5}.

d) $\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$ con error menor que 10^{-5}.

Ejercicio 15.5. Sea f una función con un mínimo local en a. Demuestra que $g(x) = f(x) + c$ tiene un mínimo local en a. Usa este hecho para concluir el mismo resultado para máximo locales.

Ejercicio 15.6. Sea f una función en donde a a es un punto de inflexión. Demuestra que $g(x) = f(x) + c$ tiene un punto de inflexión en a.

Ejercicio 15.7. Utiliza derivadas para mostrar que si $n \geq 1$, $x \neq 0$ y $x > -1$, entonces

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Ejercicio 15.8. Supongamos que a_i y b_i son los coeficientes de las funciones f y g, i. e., $a_i = f^{(i)}(a)/i!$ y $b_i = g^{(i)}(i!)$. Encuentra los coeficientes para las siguientes funciones:

a) $f + g$.

b) f'.

c) $f \cdot g$.

d) $f \cdot g^2$.

Para entregar: Ejercicio 15.7

Referencias

[Pis77] Piskunov, N.: *Cálculo diferencial e integral: Tomo I.* Editorial Mir, Moscú, 1977.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencial e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.