Semana 13: Un análisis geométrico de funciones

1. Convexidad y concavidad

Mucho de lo que expondremos aquí es un resumen que conecta lo que afirman los textos [Spi12] y [Pis77], los cuales se complementan uno al otro. Es importante comentar que existen varias definiciones para convexidad y a pesar de que todas parecen ligeramente distintas una de la otra, todas siguen el mismo principio. Aquí presentamos dos ellas y mostraremos que en el fondo son dos caras de la misma moneda.

Definición 13.1. Una función es *convexa en un intervalo*, si para todo a y b en el intervalo, el segmento rectilíneo que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la gráfica de f.

El único punto que requiere aclaración de la definición, es la expresión *se sitúa*. Es sencillo predecir que esto significa que, si $L_{a,b}$ es la recta que uno los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ entonces, para todo $x \in (a, b)$, se cumple

$$L_{a,b}(x) > f(x).$$

Lema 13.1. *Una función es convexa en el intervalo I si y sólo si, dados $a, b \in I$, para todo $x \in (a, b)$ se satisface*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. Observemos primero que el segmento rectilíneo que pasa por lo puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está representado por la función

$$L_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

En ese caso, si asumimos que la función es convexa en I, eso quiere decir que, para todo $x \in I$, se cumple $f(x) < L_{a,b}(x)$. En otras palabras,

$$f(x) - f(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

En particular, lo anterior se debe cumplir si $x \in (a, b)$ y de lo cual obtenemos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si suponemos ahora que la desigualdad es cierta, entonces no es difícil manipularla para obtener para cada $a, b \in I$ y $x \in (a, b)$ que

$$f(x) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Lo cual quiere decir simplemente que para cada par de números $a, b \in I$, el segmento rectilíneo que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está por encima de la gráfica de la función. ∎

Es de notar que el lema anterior permite caracterizar por completo el concepto de función convexa por lo que se puede reemplazar por completo a la definición que hemos dado con, la ventaja de no depender de conceptos geométricos sino de desigualdades.

Definición 13.2. Sea f una función cualquiera y sea a un punto en su dominio. El punto $(a, f(a))$, donde la recta tangente y la gráfica de la función f se cruzan, se denomina *punto de contacto*.

Lema 13.2. *Sea f una función convexa en un intervalo I. Si f es diferenciable para algún $a \in I$, entonces la gráfica de f se sitúa por encima de la tangente a f en el punto $(a, f(a))$, excepto en el mismo punto de contacto.*

Demostración. Definimos la función

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si $0 < h_1 < h_2$, como f es convexa, el lema 13.1 garantiza que se satisface $g(h_1) < g(h_2)$ cuando se aplica a los puntos $a < a + h_1 < a + h_2$. Esto implica que g es creciente y a su vez que, para $h > 0$, se cumple

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} g(h) < \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De manera similar podemos concluir

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^-} g(h) > \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

para $h < 0$ observando que la función decrece g para estos valores. De la primera desigualdad podemos concluir que la recta tangente en a para f tiene pendiente menor que la secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$. Como ambas pasan por el punto $(a, f(a))$ podemos concluir que para $h > 0$ la recta secante está encima de la recta tangente. De manera similar, para $h < 0$ la recta tangente tiene una pendiente mayor que la secante que pasa por los puntos $(a + h, f(a + h))$ y $(a, f(a))$ pasando ambas por el punto $(a, f(a))$. Esto quiere decir que la recta secante para por encima de la recta tangente. En resumen, si $b \in I$ tal que $b \neq a$, entonces podemos escribirlo como $b = a + h$ y como la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ pasa siempre por encima de la función. Esto es suficiente para garantizar el resultado. ∎

Corolario 13.3. *Si la función f es diferenciable en I, entonces f' es creciente en I.*

Demostración. Supongamos que $a < b$. Según el resultado anterior,

$$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y también

$$f'(b) > \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De esto simplemente resulta $f'(a) < f'(b)$ mostrando que f' es creciente en I. ∎

Vamos ahora a construir un resultado que revela más estructura de la funciones convexas y representa un paso adicional a una caracterización del concepto en el marco de las funciones diferenciables.

Lema 13.4. *Sea f una función diferenciable en I de forma que f' es creciente. Entonces, si se cumplen $a < b$ y $f(a) = f(b)$, debemos tener $f(x) < f(a) = f(b)$ para todo $x \in (a, b)$.*

Demostración. Procedemos por contradicción considerando dos casos. Supongamos primero que $f(x) > f(a)$ para algún $x \in (a, b)$. Como la función f es diferenciable en I ha de ser continua en $[a, b]$ y en ese caso, la función alcanza un máximo en dicho intervalo, en algún punto $c \in (a, b)$ y en ese caso $f'(c) = 0$ al ser la función diferenciable en I. Pero según el teorema del valor medio, debe existir, además, un punto $c_1 \in (a, c)$ de forma que

$$f'(c_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0.$$

la anterior desigualdad afirma que $f'(c) < f'(c_1)$ lo que contradice que f' sea creciente. Supongamos ahora que $f(x) = f(a)$ para algún $x \in (a, b)$. Según el caso anterior, no puede existir un valor en el intervalo mayor que éste lo que indica que x es un punto mínimo por lo que $f'(x) = 0$. Además, debe observarse que la función no es constantes pues f' es una función creciente y en ese caso podemos garantizar la existencia de un número $a < x_1 < x$ de forma que $f(x_1) < f(a) = f(x)$. También, el teorema de valor medio garantiza que existe un elemento $x_2 \in (x_1, x)$ de forma que

$$f'(x_2) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0$$

por lo que $f(x) < f(x_2)$ lo que contradice que f' creciente. ∎

Teorema 13.5. *Si f es diferenciable en I y f' es creciente, entonces f es convexa.*

Demostración. Sean $a < b$ elementos del intervalo I. Definimos

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Entonces, g es diferenciable en I y además, $g'(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$ exhibiendo con esto que g' es creciente en el intervalo I. Además, $g(a) = g(b) = f(a)$ por lo que aplica el lema anterior permitiendo afirmar que $g(x) < g(a) = f(a)$ para todo $x \in (a, b)$, i.e.,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$ ∎

Corolario 13.6. *Si f es 2-diferenciable en I y $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa.*

Demostración. No es más que una observación acerca de f''. Como $f''(x) > 0$ en I, podemos concluir que f' es creciente en I y el resultado sigue del teorema. ∎

Corolario 13.7. *Si f es diferenciable en I y la tangente a cada punto está debajo de la gráfica de f, entonces f es convexa.*

Demostración. Considerando $a < b$ podemos definir las rectas tangentes a la función en los puntos a y b, i.e.,

$$L_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

y

$$L_b(x) = f'(b)(x-b) + f(b).$$

Según las hipótesis, se debe satisfacer $f(b) > L_a(b)$ y $f(a) > L_b(a)$ lo cual nos lleva a tener

$$f(b) > f'(a)(b-a) + f(a) > (f'(a) - f'(b))(b-a) + f(b)$$

lo cual se puede simplificar en la desigualdad

$$(f'(a) - f'(b))(b-a) < 0.$$

Lo anterior, solo es posible si $f'(a) < f'(b)$ pues $b - a > 0$ y en ese caso, f' es creciente en el intervalo I y según el teorema, la función debe ser convexa. ∎

Este último corolario y el lema 13.2 nos permiten caracterizar por completo la convexidad en una función diferenciable pues f es convexa si y sólo si la tangente a cada punto está debajo de la gráfica de f.

Ejemplo. La función $f(x) = x^4$ es convexa en cualquier intervalo. Lo anterior se debe a que su segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ es siempre positiva según el corolario 13.6, esto es suficiente para garantizar que la función es convexa en cualquier intervalo.

Definición 13.3. Una función f se dice *cóncava en un intervalo*, si $-f$ es convexa en el mismo intervalo.

Todos los resultados de funciones convexas pueden ser formulados para funciones cóncavas de manera muy sencilla, basta escribirlos con todas la paciencia del mundo y es quizá un experimento entretenido para comprobar que los conceptos se entienden sin dificultad.

Ejemplo. La función $f(x) = -x^2 + 7x$ es cóncava en todo punto pues al calcular $f''(x) = -2 < 0$ para todo x lo cual garantiza, según el corolario 13.6 formulado para funciones cóncavas, que la función f es cóncava en todo punto.

Finalmente, podemos dar una imagen mucho más general de las gráficas de las funciones diferenciables al estudiar su convexidad combinando los criterios establecidos en esta sección.

Ejemplo. Para estudiar el comportamiento de la función $f(x) = 2 - x^3$ usaremos los criterios que hemos descrito, primero observamos que $f''(x) = -6x$. Esto quiere decir que, si $x < 0$, entonces $f''(x) > 0$ y de la misma manera, si $x > 0$, entonces $f''(x) < 0$. Esto quiere decir que la función es convexa para $x < 0$ y cóncava para $x > 0$.

2. Puntos de inflexión

Como podría haberse notado en la discusión de máximos y mínimos, cuando un punto crítico no resultaba ni máximo ni mínimo, afirmábamos simplemente que éste era un punto de inflexión. Esta posición es por supuesto injustificada desde un punto de vista geométrico pero no es hasta ahora estamos en posición de dar un análisis completo y así justificar la terminología.

Definición 13.4. Un punto a se dice *de inflexión* de la función f si existe $\delta > 0$ de forma que f sea cóncava en $(a-\delta, a)$ y convexa en $(a, a+\delta)$ o viceversa.

En esencia, un punto de inflexión es aquel punto donde una función cambia su comportamiento entre cóncavo y convexo. Geométricamente, esta idea modela adecuadamente lo que debe resultar un punto de inflexión. Sin embargo, debemos conectarlo con nuestra posición en el análisis de los puntos críticos. Esto es en realidad fácil de responder al no ser difícil mostrar que si a es un mínimo local, entonces existe un intervalo alrededor de a donde f será convexa. De manera similar, si a es un máximo local, existirá un intervalo alrededor de a de modo que f será cóncava. Esto quiere decir que en alrededor de un punto máximo o un punto mínimo la convexidad y concavidad de cada uno se preserva por lo que, si el punto crítico no es ni máximo ni mínimo, entonces cambiará la convexidad por concavidad o viceversa al pasar la función por éste. Esta nueva definición de punto de inflexión es ligereamente más amplio, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 13.8. *Sea f una función 2-diferenciable para todo $x \in I$ con $x \neq a$ para $a \in I$. Si f'' no existe en a o existe y satisface $f''(a) = 0$, entonces a es un punto de inflexión si f'' cambia de signo al pasar por a.*

Demostración. Si $f''(x) < 0$ para $x < a$ y $f''(x) > 0$ para $x > a$, entonces f debe ser cóncava para $x < a$ y convexa para $x > a$ lo cual indica que a es un punto de inflexión. El otro caso sigue de manera similar. ∎

El teorema anterior, aparte de permitirnos ampliar los objetos que llamamos puntos de inflexión, nos provee con un nuevo criterio para la clasificación de puntos críticos. En el fondo, nos dice que si la segunda derivada se anula, debemos observar los signos alrededor de ésta para determinar si el punto no será un punto de inflexión.

Ejemplo. Para estudiar la función $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ debemos observar su segunda derivada:

$$f''(x) = -2/9(x-1)^{-5/3}.$$

Dicha función simplemente no está definida en 1 pero debemos observar que $f''(x) > 0$ si $x < 1$ y también $f''(x) < 0$ si $x > 1$ por lo que 1 es un punto de inflexión de la función f.

Ejemplo. La función $f(x) = -x^4$ al cumplir con $f''(x) = -12x^2$ no puede tener puntos de inflexión pues f nunca cambia de signo y resulta cóncava en todos los números reales.

3. Asíntotas

Como en la sección anterior, abordaremos el tema desde un punto de vista geométrico e intentaremos dar una descripción analítica y en el marco la teoría que hemos estado desarrollando. En esencia y de manera muy simplificada, una asíntota a una función es una recta de forma que *el* *punto móvil* de la función se acerca de manera indefinida a la recta mientras éste tiende al infinito. Esta descripción, es profundamente limitada pues contiene muchas ambigüedades, la primera por supuesto es que hay rectas que no se pueden describir como funciones. Vamos entonces a distinguir entre dos tipos de asíntotas: Las verticales y las oblicuas.

Definición 13.5. Sea f una función y sea a un número real. Decimos que f *tiene una asíntota vertical por la derecha de a* si

$$\lim_{x\to a^+} = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

De manera similar, f *tiene una asíntota vertical por la izquierda de a* si

$$\lim_{x\to a^-} = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Si a es tanto una asíntota por la izquierda como por la derecha diremos simplemente que a es *una asíntota vertical de f*.

Como la definición sugiere, no es difícil determinar si una función presenta asíntotas verticales. Basta comprobar un par de límites, proceso con el cual ya estamos familiarizados.

Ejemplo. La función $f(x) = 1/x$ presenta una asíntota vertical en 0 pues

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ejemplo. La función $f(x) = -2/(x-5)$ tiene una asíntota vertical en 5, pues

$$\lim_{x\to 5^+} -\frac{2}{x-5} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} -\frac{2}{x-5} = \infty.$$

Ejemplo. La función $f(x) = \tan(x)$ tiene una asíntota vertical en $\pi/2$ pues

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty.$$

Aunque parecería que hemos ya descrito en su totalidad el comportamiento asintótico de una función, la teoría que hemos presentado hasta ahora, tiene también el potencial de estudiar asíntotas que no son necesariamente verticales.

Definición 13.6. Sea L una recta y sea f una función. Diremos que la recta L es *asíntota oblicua de f por la derecha* si

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - L(x)| = 0.$$

De manera similar, diremos que L es *una asíntota oblicua de f por la izquierda* si

$$\lim_{x\to-\infty} |f(x) - L(x)| = 0.$$

Vamos ahora explorar ahora las consecuencias de la definición tomando explícitamente la regla de correspondencia de la recta $L(x) = mx + b$. Supongamos que en efecto, L es una asíntota oblicua de f, entonces

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - mx - b| = 0.$$

En ese caso, debemos de igual forma tener

$$\lim_{x\to\infty} |x| \left| \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right| = 0.$$

Para que al anterior igualdad entre límites se cumpla, debemos tener que

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right| = 0$$

y como $\lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0$, lo anterior implica que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Conociendo m, ahora es fácil calcular b como

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx.$$

Esto indica que si la recta L es una asíntota, entonces los límites anteriores existen y éstos determinan la pendiente y la ordenada al origen. Recíprocamente, si los ĺimites existen, estos determinan una recta, la cual debe ser asíntota de la función f. Por consiguiente, si uno de los límites no existe entonces la recta no presenta asíntota. Resumimos esto en el siguiente teorema.

Teorema 13.9. *Una función f tiene un asíntota oblicua por la derecha en la recta $L = mx + b$ si y sólo si*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx.$$

Realmente, el teorema anterior resuelve el problema de encontrar una asíntota oblicua de f por la izquierda. Esto se debe a que el mismo argumento y el mismo resultado puede ser planteado si tomamos $x \to -\infty$ en lugar de $x \to \infty$.

Podemos de hecho combinar los métodos que hemos expuesto, por ejemplo, encontrar las asíntotas verticales y oblicuas para dar una idea mucho más precisa de la gráfica de una función.

Ejemplo. Para la función $f(x) = (x^2 + 2x - 1)/x$ procedemos encontrando primero sus asíntotas verticales a través de los límites

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} x + 2 - \frac{1}{x} = \infty$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} x + 2 - \frac{1}{x} = -\infty$$

Por lo que f presenta una asíntota vertical en 0. Para las asíntotas oblicuas, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 1$$

por lo que tomamos $m = 1$ y calculamos ahora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2.$$

Esto indica que f tiene una asíntota oblicua por la derecha en $L(x) = x + 2$. De manera muy similar se puede probar que la misma recta es también una asíntota oblicua por la izquierda.

4. Esquema general para el análisis de funciones

Hasta ahora hemos desarrollado varios métodos sobre las funciones diferenciables que nos permiten conseguir una idea razonablemente precisa del comportamiento del una función sin recurrir a la tabulación. Estas ideas están basadas en el desarrollo que hemos conseguido a través de la teoría de funciones diferenciables. Antes de continuar, vamos a dar una nueva definición de punto crítico que amplié nuestro interés a los puntos donde la derivada no existe.

Definición 13.7. En general, para una función f diremos que c es *punto crítico de de* f si, $f'(c)$ no existe o si existe y $f'(c) = 0$.

¿Por qué ahora permitimos que la derivada no exista? Es posible que una función no sea diferenciable en un punto y que en ese punto sea un máximo o mínimo de la función.

Ejemplo. Considerando la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ la cual está definida en todo punto y es continua, podemos explorar sus puntos críticos obteniendo su derivada:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

donde sgn es la función signo definida como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

En ese caso, $c = 0$ es el único punto crítico de la función al no existir en éste la derivada. Además, como la función es continua y se tiene $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$, podemos concluir que $c = 0$ debe ser un mínimo de la función.

Es interesante observar que el análisis de los puntos críticos de la función no difiere de lo que ya hemos hecho, la única restricción que seguimos imponiendo es hablar de funciones continuas. En el fondo, podemos resumir el análisis en diferentes actividades:

- Encontrar los puntos donde la función no es continua y determinar los intervalos donde sí lo es.
- Obtener los puntos donde es diferenciable y obtener su derivada en ellos.
- Con esta información encontrar los puntos críticos, i. e., los puntos donde la derivada no existe o es cero.
- Estudiar el comportamiento del punto crítico para determinar si es máximo, mínimo o punto de inflexión (para conseguir esto se pueden usar diversos métodos, e. g., el criterio de la segunda derivada si es que aplica).
- Determinar los intervalos de convexidad y concavidad de la función.
- Encontrar las asíntotas verticales y oblicuas de la función, si es que existen, a través del cálculo de los límites correspondientes.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = (x^2 - 2x + 2)/x - 1$. Notamos primero que la función no es continua en 1 por lo que podemos comenzar preguntándonos que comportamiento tiene alrededor de 1 calculando

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty.$$

Una vez establecido esto, podemos derivar la función para obtener

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

por lo que sus puntos críticos son $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$ el primero ya lo hemos estudiado, es un punto de discontinuidad por lo que podemos enfocarnos en los puntos c_1 y c_2 para estudiarlos, obtenemos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

lo que nos permite garantizar que $f''(0) < 0$ y en consecuencia c_1 es un máximo y también $f''(2) > 0$ por lo que c_2 es un máximo. Junto a la segunda derivada podemos concluir que si $x > 1$, entonces $f''(x) > 0$ y de igual manera si $x < 1$, entonces $f''(x) < 0$ lo que indica que la función no presenta puntos de inflexión y es convexa para $x > 1$ y cóncava para $x < 1$. Finalmente, calculamos los límites asociados a las asíntotas para obtener

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

y

$$b = \lim_{x \to infty} -\frac{x-2}{x-1} = -1$$

por lo que la función presenta una asíntota oblicua en la recta $L(x) = x - 1$.

Sin problema alguno, podríamos agregar también el cálculo de máximos y mínimos, junto a la convexidad y al análisis asintótico.

Ejemplo. Sea $f(x) = x/(x^2 + 1)$. Para estudiarla, encontraremos primero sus puntos críticos obteniendo su derivada:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

la cual presenta solamente $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$ como puntos críticos. Para determinar si éstos son máximo o mínimo, obtenemos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

con la cual $f''(-1) = 4 > 0$ por lo que $c_1 = -1$ es un mínimo y también $f''(1) = -1/2 < 0$ por lo que $c_2 = 1$ es un máximo de la función. Con la segunda derivada podemos también determinar sus cambios de signo encontrando donde se anula y no es difícil ver que esto sucede en $i_1 = -\sqrt{3}$, $i_2 = 0$ y $i_3 = \sqrt{3}$. No es difícil verificar que:

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ se tiene $f''(x) < 0$ por lo que la función debe ser cóncava.
- En el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$ se tiene $f''(x) > 0$ por lo que la función debe ser convexa.
- El intervalo $(0, \sqrt{3})$ se tiene $f''(x) < 0$ por lo que la función debe ser cóncava.
- El intervalo $(\sqrt{3}, \infty)$ se tiene $f''(x) > 0$ por lo que la función debe ser convexa.

Lo anterior indica que $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$ son puntos de inflexión. Finalmente, notamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

y por consiguiente la recta $L(x) = 0$ es la única asíntota oblicua y no tiene asíntotas verticales pues no existe valor alguno en que la función crezca de manera arbitraria.

Ejercicios

Ejercicio 13.1. Encuentra los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = 1 - x^2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

d) $f(x) = (x - b)^3$

e) $f(x) = x^4$.

f) $f(x) = 1/(x^2 + 1)$

g) $f(x) = \tan(x)$

h) $f(x) = a - \sqrt[3]{x - b}$

Ejercicio 13.2. Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 1/(x - 1)$

b) $f(x) = 1/(x + 2)^3$

c) $f(x) = 5 + 3/(x - 4)^2$

d) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 + x^3}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{a^3 - x^3}$

f) $f(x) = \sqrt{x^3/(2a - x)}$

g) $f(x) = x^2/(x + 1)$

h) $f(x) = 6x/(x^2 + 1)$

Ejercicio 13.3. Da una análisis lo más detallado posible (máximos y mínimos, convexidad y concavidad, comportamiento asíntotico, etc.) de las siguientes funciones y utiliza lo anterior para bosquejar su gráfica.

a) $f(x) = (x^2 + 1)/(x + 1)$

b) $f(x) = x^3/2(x + 1)^2$

c) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

d) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ en $(-2\pi, 2\pi)$

f) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

g) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)| + x$

h) $f(x) = \cos^3(x) + \operatorname{sen}^3(x)$

Ejercicio 13.4. Demuestra que la f es convexa en un intervalo si y sólo si para todo x e y en el intervalo se verifica, para todo $0 < t < 1$,

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Ejercicio 13.5. Demuestra que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $f \circ g$ es convexa.

Ejercicio 13.6. Usando el ejercicio, muestra un ejemplo que ilustre la razón de pedir que f sea creciente, i.e., da un ejemplo donde $f \circ g$ no es convexa a pesar de que f y g lo son.

Ejercicio 13.7. Supongamos que f y g son 2-diferenciables. Muestra que se pueden usar las segundas derivadas para garantizar lo mismo que se afirma en el ejercicio 13.5.

Ejercicio 13.8. Si f es diferenciable y convexa en intervalo, demuestra que o bien f es creciente o bien f es decreciente, o sino que existe un número c tal que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c.

Para entregar: Ejercicio 13.3, inciso e)

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Pis77] Piskunov, N.: *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir, Moscú, 1977.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencial e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.