

Semana 3: Distintas clases de números

1. Naturales e inducción

Los primeros números a distinguir son aquellos que nos permiten «contar»:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

A este conjunto se le conoce como el conjunto de *los números naturales* y a sus elementos como *números naturales*. Es común indicar este conjunto por el símbolo

$$\mathbb{N}.$$

A pesar de sus importancia, si revisamos la propiedades que hemos propuesto para número, la gran mayoría no se cumple para los números naturales. Esto no debe desmotivar, hemos encontrado una clase de número que satisface otras propiedades y que ciertamente forma parte del conjunto de números que hemos descrito. Sin embargo, éstos poseen una asombrosa propiedad que los distingue: El principio de inducción matemática.

Principio de inducción. Sea α una propiedad acerca de los números naturales de forma que satisface las siguientes condiciones:

- $\alpha(1)$ es cierta.
- Para cualquier número natural k , si $\alpha(k)$ es cierta, entonces $\alpha(k+1)$ es cierta.

Entonces $\alpha(n)$ será cierta para cualquier número natural n .

La segunda condición del principio de inducción es *una implicación*, donde se afirma que siempre que $\alpha(k)$ sea cierta, entonces $\alpha(k+1)$ lo será también; además dicha implicación debe ser válida para cualquier natural k que tomemos. Especificando la implicación anterior para el caso $k = 1$, podríamos concluir que $\alpha(2)$ será cierta también y, procediendo de manera similar, podemos concluir que $\alpha(3)$ deberá ser cierta también. Podemos continuar este razonamiento indefinidamente y convencernos que en verdad, la propiedad en cuestión será válida para todo natural y basta satisfacer las condiciones impuestas por el principio de inducción.

Ejemplo. Para cualquier número natural n se tiene que

$$1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Para demostrar esto, usaremos el principio de inducción. Por supuesto, el resultado es válido para $n = 1$. Ahora, supongamos que el resultado es válido para algún número k , i.e.,

$$1 + 4 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

deseamos mostrar que el resultado será igualmente válido para $k + 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left[\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \right] \\ &= (k+1) \left[\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Que es precisamente lo que deseábamos. Por el principio de inducción el resultado sigue.

Ejemplo. Considerando el ejercicio 3.9, podemos afirmar para cualquier natural n , se cumple $2^{n+3} < (n+3)!$. Para $n = 1$, tenemos

$$2^4 = 16 < 24 = 4!.$$

Supongamos ahora el resultado para un entero k , i.e., $2^{k+3} < (k+3)!$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{(k+1)+3} &= 2^{k+3} \cdot 2 \\ &< (k+3)! \cdot (k+4) \\ &= (k+4)! \end{aligned}$$

Podemos volver a plantear de manera muy natural el principio de inducción entendiendo que un conjunto de alguna manera está definido por una propiedad. Esto nos permitiría formular el principio en términos de conjuntos.

Principio de inducción (versión en conjuntos). Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ de forma que satisfaga las siguientes dos propiedades:

- $1 \in A$.
- Para todo k , si $k \in A$, entonces $k + 1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Vamos ahora a analizar las consecuencias del principio de inducción desde un punto de vista teórico mostrando que el principio de inducción tiene otras versiones que se desprenden en automático. Una de las más socorridas es el llamado «principio de inducción completa». Éste puede parecer una afirmación completamente distinta, sin embargo hemos de mostrar que se trata de una consecuencia sencilla. Primero formulemos el principio del que hablamos.

Principio de inducción completa. Sea α una propiedad acerca de los números naturales de forma que satisface las siguientes condiciones:

- $\alpha(1)$ es cierta.
- Para cualquier número natural k , si $\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(k)$ son ciertos, entonces $\alpha(k+1)$ es cierto.

Entonces $\alpha(n)$ será cierta para cualquier número natural n .

De la misma forma en que el principio de inducción tiene una versión en conjuntos interpretando a un conjunto como una propiedad, la versión en conjuntos del principio anterior debe ser inmediata. La establecemos ahora para dar un panorama completo.

Principio de inducción completa (versión en conjuntos). Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ de forma que satisfaga las siguientes dos propiedades:

- $1 \in A$.
- Para cualquier número natural k , si $1, \dots, k \in A$, entonces $k+1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Teorema 3.1. El principio de inducción completa es consecuencia del principio de inducción.

Demostración. Sea A un subconjunto de los números naturales de forma que :

- $1 \in A$.
- Si $1, \dots, k \in A$, entonces $k+1 \in A$.

Tomamos entonces el conjunto

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid 1, \dots, k \in A\},$$

notando que $B \subseteq A$. Ahora, por la forma en que hemos propuesto A , debemos concluir que $1 \in B$. Supongamos ahora que $k \in B$, entonces $1, \dots, k \in A$ por definición de B y, por la forma en que hemos tomado a A , debemos tener que $k+1 \in A$, por lo que $1, \dots, k, k+1 \in A$. Por definición de B , esto implica que $k+1 \in B$. Entonces, por el principio de inducción, $B = \mathbb{N}$, por lo que debemos concluir que $\mathbb{N} = B \subseteq A$. De lo que tenemos que $A = \mathbb{N}$, que es lo que concluye el principio de inducción completa. ■

Existe otra afirmación impresionante de acerca de los números naturales que los distingue de muchas formas. Esta es el «principio de buena ordenación». Este principio parecerá ajeno a lo que hemos presentado por inducción, sin embargo probaremos que es una de sus muchas consecuencias.

Principio de buena ordenación. Cualquier subconjunto $A \neq \emptyset$ de los números naturales tiene un mínimo, i.e., un número $k \in A$ tal que para todo número $a \in A$, se satisface $k \leq a$.

Teorema 3.2. El principio de buena ordenación es consecuencia del principio de inducción.

Demostración. Deseamos probar que A tiene un elemento mínimo y para esto procedemos por contraposición. Supongamos que A no tiene un elemento mínimo y definamos el conjunto

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \notin A\}.$$

En ese caso, $1 \in B$ pues si no estuviera, entonces sería parte de A por lo que A tendría un mínimo. Supongamos ahora que los números $1, \dots, k$ pertenecen a B , entonces el número $k + 1$ no puede pertenecer a A , pues si lo hiciera, este deberá ser el mínimo del conjunto. Por lo tanto $k + 1 \in B$. Por el principio de inducción completa (que deriva del principio de inducción), $B = \mathbb{N}$ por lo que $A = \emptyset$. Podemos entonces concluir que si un subconjunto de los naturales no posee un mínimo entonces este es el conjunto vacío, o en otras palabras, un conjunto no vacío tiene un elemento mínimo. Esto último es precisamente, el principio de buena ordenación. ■

Debe notarse que el principio de buen orden puede no cumplirse en caso que se tome un subconjunto vacío de los naturales.

2. Otros conjuntos de números

Algunas de las deficiencias de los números naturales pueden ser paliadas por lo denominados *números enteros*. El conjunto de los números enteros, es el conjunto de los números naturales, sus inversos aditivos y el cero, i.e.,

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Al conjunto de los enteros lo denotaremos por

$$\mathbb{Z}.$$

Podemos continuar un camino similar y presentar a los números formados por cocientes de números enteros, o en otras palabras aquellos números que se pueden expresar a través de números enteros $n \neq 0$ y m por m/n . Estos números se denominan *números racionales* y se usará la notación

$$\mathbb{Q}$$

para referirse al conjunto de éstos. Una colección más amplia de números entre todos estos es el conjunto que hemos definido de los números reales. Podríamos caer fácilmente en la trampa de creer que los números racionales son aquellos números descritos por las propiedades que hemos usado para distinguir a nuestro concepto de número. Debemos convencernos entonces que existe una clase de números que no pueden estar contenidos en el conjunto de los números racionales.

Teorema 3.3. *El número $\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Demostración distinta a la de [Spi12]. Procedemos por contradicción. Supongamos por un momento que el número $\sqrt{2}$ es racional, esto quiere decir que existen números enteros m y n de forma que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

En ese caso, el conjunto

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$$

debe resultar no vacío. Vamos a contradecir el principio de buen orden, mostrando que B no posee un mínimo. Supongamos entonces que $s \in B$. Vamos a mostrar que existe un número menor que s que pertenece al mismo conjunto y por tanto B no puede tener un mínimo. Sea

$$t = s \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

demostramos primero que $0 < t < s$. Para esto basta la siguiente observación

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

de lo que podemos concluir

$$0 < \sqrt{2} - 1 < 1$$

y además

$$0 < s \cdot (\sqrt{2} - 1) < s.$$

Queremos mostrar ahora que $t \cdot \sqrt{2}$ es un entero y como $t > 0$, podremos concluir que t es un natural. Procedemos entonces,

$$\begin{aligned} t &= s \cdot (\sqrt{2} - 1) \\ &= s \cdot \sqrt{2} - s. \end{aligned}$$

El primer término, $s \cdot \sqrt{2}$, debe ser un entero pues $s \in B$. De la misma forma, al ser $s \in B \subseteq \mathbb{N}$, el número $-s$ debe ser igualmente un entero. Como la suma entre enteros es cerrada, esto prueba que $t \in \mathbb{Z}$ y como se comentó con anterioridad esto último implica que $t \in \mathbb{N}$.

Notemos ahora que $t \cdot \sqrt{2} > 0$, además

$$\begin{aligned} t \cdot \sqrt{2} &= s \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{2} \\ &= 2s - s \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por lo que $t \cdot \sqrt{2}$ es un entero y al ser mayor que cero, debemos concluir que $t \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. El número t entonces pertenece al conjunto B y es además menor que el mínimo de dicho conjunto, lo que es contradictorio. Debemos entonces concluir que la raíz de dos no es un número racional. ■

Hemos entonces probado que existen números que no son racionales. Estos números tienen una propiedad que los distingue y que los números racionales no poseen. Ésta propiedad misteriosa, se discutirá con todo detalle más adelante en el curso. Mientras tanto, notemos que en total, hemos descrito cuatro conjuntos de números que intuitivamente reconocemos como tales. Podemos resumir, en el marco de la teoría de conjuntos, parte de nuestra discusión anterior con un simple enunciado:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

3. Definiciones recursivas

Buena parte de la importancia del principio de inducción, recae en la forma en que nos permite presentar determinadas definiciones por ejemplo, la del factorial de un número natural. El factorial de un número n , corresponde al número

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

sin embargo, esta notación tiene poco o ningún significado (a pesar de esto, la hemos usado ya para construir la fórmula para la suma de los primeros n números). Podemos, como alternativa, expresarnos con más precisión usando una fórmula recursiva.

Ejemplo. El factorial del natural n , en símbolos $n!$, es el natural definido de manera recursiva como:

$$1! = 1$$

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Una definición de este tipo usa de manera muy clara la relación entre el factorial de un número y el de su antecesor, y acaba por explicar lo que significan los puntos.

Ejemplo. La suma arbitraria de los n primeros elementos de la sucesión de números a_1, a_2, \dots está definida de manera recursiva como

$$\sum_{i=1}^1 a_i = a_1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) + a_n$$

Si tomamos $a_i = i$, en [Spi12], se prueba por inducción que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si ahora $a_i = i^2$, también se ha probado que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Debemos convencernos que esto en verdad explica con precisión la suma de una cantidad arbitraria de números y que en realidad podemos simplemente afirmar que

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

En los ejercicios se propondrán algunas definiciones adicionales usando estos principios.

4. El teorema del binomio

Definición 3.1. Sean n y k números enteros no negativos. Si definimos $0! = 1$, podemos definir el *coeficiente binomial* como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lema 3.4. Para n y k números enteros no negativos,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Lema 3.5 (Triángulo de Pascal). Para n y k números enteros no negativos,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Demostración. Observemos primero que

$$\begin{aligned} (n+1)\binom{n}{k-1} &= \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= k \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= k \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

y de manera similar

$$\begin{aligned} (n+1)\binom{n}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} \\ &= (n-k+1) \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= (n-k+1) \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (n+1)\binom{n}{k-1} + (n+1)\binom{n}{k} &= k \binom{n+1}{k} + (n-k+1) \binom{n+1}{k} \\ &= (n+1) \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Como $n+1 > 0$, la ley de cancelación para el producto, garantiza el resultado deseado. ■

Teorema 3.6 (Teorema del binomio). Sean a y b números reales y sea n cualquier natural. Entonces,

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . Para $n = 1$, tenemos que

$$\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} a^{1-i} b^i = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b.$$

Supongamos entonces que el resultado es válido para n . Veamos primero que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{(i+1)-1} a^{n+1-(i+1)} b^{i+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \right) (a + b) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i. \end{aligned}$$

Que es simplemente el resultado para $n + 1$. Por inducción sigue el resultado deseado. ■

Corolario 3.7.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

Corolario 3.8. Para $n > 0$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

5. Desigualdades

Teorema 3.9 (Desigualdad de Bernoulli). Sea $h > -1$. Entonces, para todo número natural n se tiene

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado sigue de inmediato. Supongamos que es válido para $n = k$, i.e.,

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh.$$

Entonces, como $1 + h > 0$

$$\begin{aligned} (1 + h)^{k+1} &= (1 + h)^k(1 + h) \\ &\geq (1 + kh)(1 + h) \\ &= 1 + (k + 1)h + kh^2; \end{aligned}$$

pero $kh^2 \geq 0$, por lo que $1 + (k + 1)h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h$. Uniendo ambas desigualdades

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)h.$$

Por lo que el resultado es cierto para $n = k + 1$. Por inducción el resultado sigue. ■

Teorema 3.10 (Desigualdad del triángulo generalizada). Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ números cualesquiera. Entonces,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado es elemental. Supongamos entonces el resultado para $n = k$, i.e.,

$$\left| \sum_{i=1}^k x_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |x_i|.$$

Entonces, por la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{k+1} x_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^k x_i + x_{k+1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^k x_i \right| + |x_{k+1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |x_i| + |x_{k+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} |x_i|. \end{aligned}$$

Por lo que el resultado es válido para $n = k + 1$. Por inducción, el resultado sigue. ■

Teorema 3.11 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ números cualesquiera. Entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Demostración. Procederemos por inducción. El caso para $n = 1$ debe ser inmediato pues

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^1 x_i y_i \right)^2 &= x_1^2 y_1^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^1 x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^1 y_i^2 \right). \end{aligned}$$

Supongamos ahora el caso para k , i.e.,

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^k y_i^2 \right),$$

entonces, usando el ejercicio 3.14,

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} y_i^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2 + x_{k+1}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i^2 + y_{k+1}^2} \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i^2} + |x_{k+1} y_{k+1}| && \text{Ejercicio 3.4} \\ &\geq \left| \sum_{i=1}^k x_i y_i \right| + |x_{k+1} y_{k+1}| && \text{Hipótesis de inducción} \\ &\geq \left| \sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i \right|. \end{aligned}$$

De la anterior desigualdad sigue el resultado para $n = k + 1$. ■

Lema 3.12. Sean x_1, \dots, x_n números reales tales que

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq n.$$

Demostración. Procedemos por inducción, el caso en que $n = 1$ es sencillo pues de la definición recursiva del producto tenemos que

$$1 = \prod_{i=1}^1 x_i = x_1,$$

por lo que obtendremos, como se espera, que

$$\sum_{i=1}^1 x_i = x_1 = 1.$$

Supongamos ahora que para cualesquiera números y_1, \dots, y_k

$$\prod_{i=1}^k y_i = 1,$$

implica

$$\sum_{i=1}^k y_i \geq k.$$

Tomemos entonces por hecho que

$$\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1,$$

podemos tener dos casos, el primero es que todos los números x_i involucrados en el producto sean la unidad, esto implicaría

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = k + 1,$$

lo que garantiza el resultado; el segundo es que al menos uno sea distinto de la unidad, pero si sólo uno fuera la unidad el producto no podría ser uno así que al menos existirían dos de ellos distintos con la peculiaridad que uno será mayor que la unidad y el otro menor que ésta. Supongamos que estos números son $x_k > 1$ y $x_{k+1} < 1$. Tomemos entonces los siguientes k números

$$x_1, \dots, x_{k-1}, (x_k x_{k+1}),$$

notando que el producto de estos números es simplemente la unidad. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k x_{k+1} \geq k.$$

Sumemos ahora $x_k + x_{k+1}$ a esta desigualdad junto al inverso aditivo de $x_k x_{k+1}$, con lo que obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} x_i &\geq k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \\ &= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 \\ &= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) \\ &= k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \\ &\geq k + 1. \end{aligned}$$

Lo cual es el resultado para $n = k + 1$. Por inducción el resultado que buscábamos es válido. ■

Teorema 3.13 (Desigualdad entre medias). Sean x_1, \dots, x_n números reales positivos. Entonces

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Demostración. Debemos hacer una observación muy simple acerca de los números que tenemos con nosotros. A saber, que ¡ demuéstalo!

$$\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}} = 1.$$

Entonces, por el lema 3.12, debemos tener que

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}} \geq n,$$

pero

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}} \sum_{i=1}^n x_i$$

por lo que conjugando esto con la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}} \sum_{i=1}^n x_i \geq n$$

de lo que sigue que

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

■

Definición 3.2. A la expresión

$$M_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

se le denomina *media aritmética de los números* x_1, x_2, \dots, x_n , mientras que la expresión

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

recibe el nombre de *media geométrica de los números* x_1, x_2, \dots, x_n .

Bajo la definición anterior, el teorema anterior simplemente afirma que

$$M_n \geq G_n.$$

Esta desigualdad es una expresión muy interesante cuando en la realización de algunas estimaciones.

Ejercicios

Ejercicio 3.1. ¿Qué propiedades fundamentales de los números no son válidas para los números naturales?

Ejercicio 3.2. ¿Qué propiedades fundamentales de los números no son válidas para los números enteros?

Ejercicio 3.3. ¿Qué propiedades fundamentales de los números no son válidas para los números racionales?

Ejercicio 3.4. Demuestra que los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ son irracionales.

Ejercicio 3.5. Demuestra la validez de la siguiente desigualdad para todo número $n > 1$.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i - 1} < n.$$

Ejercicio 3.6. Encuentra una fórmula para $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$.

Ejercicio 3.7. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2.$$

(Sugerencia: Observa que el lado derecho de la igualdad involucra la suma de los n primeros naturales de la cual ya hemos visto cual es su valor).

Ejercicio 3.8. Sea $r \neq 1$ un número real cualquiera. Demuestra por inducción

$$\sum_{i=1}^n r^i = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r}$$

Ejercicio 3.9. Podemos definir el exponente de un número real bajo un número natural de forma recursiva como sigue:

- $a^1 = a$.
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Demuestra que

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n, \\ (a^n)^m &= a^{m \cdot n}. \end{aligned}$$

(Sugerencia: Cuidado. Realiza inducción sobre n o m pero no los dos a vez.)

Ejercicio 3.10. Para un entero n y un real a , demuestra que es válida la fórmula

$$n \cdot a = \sum_{i=1}^n a.$$

Ejercicio 3.11. Definase el producto de la sucesión de números a_1, a_2, \dots de manera recursiva como

- $\prod_{i=1}^1 a_i = a_1$,

$$\blacksquare \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \cdot a_{n+1}.$$

Demuestra que

$$\prod_{i=1}^n m = m^n.$$

Ejercicio 3.12. Sea x_1, x_2, \dots una secuencia de números de forma que que, para todo natural n , se cumple

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{2}.$$

Demuestra que para todo natural n también se cumple,

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \geq \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 3.13. Suponga se conocen las propiedades 1 y 4 de los números naturales, pero no se ha hablado de la multiplicación. Se puede definir la multiplicación de manera recursiva como sigue

- $1 \cdot m = m$,
- $(n + 1) \cdot m = n \cdot m + m$.

Demuestra que

$$n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k.$$

Ejercicio 3.14. En este ejercicio nos convenceremos de uno de los pasos en la prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

1. Sean a, b y c, d números cualesquiera. Demuestra que

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

2. Demuestra que la anterior desigualdad implica que

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

(Cuidado, hay un paso que puede perderse con facilidad. Recuerda que para cualquier número se tiene que $\sqrt{x^2} = |x|$).

3. Sean $x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_{k+1}$ números reales. Usa el inciso anterior para concluir que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i^2} + |x_{k+1}| \cdot |y_{k+1}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2 + x_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i^2 + y_{k+1}^2}$$

Ejercicio 3.15. En este ejercicio nos convenceremos que el primer paso en la prueba de la desigualdad de las medias es verdadero. Demuestra por inducción sobre n que

$$\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}} = 1.$$

Para entregar: Ejercicio 3.14

Referencias

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencia e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.