Notas a Derivadas e Integrales de [Spi12]*

Cálculo Diferencial e Integral I
Actuaría 2016-I

1. Derivadas

1.1. Definiciones

Exploramos la idea directamente de las definiciones de la derivada.

Definición 1.1. La función f se dice *diferenciable* en a si existe el

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

En ese caso, dicho límite se representa por $f'(a)$ y se le denomina la derivada de f en a.

Por lo regular se afirma f es diferenciable y esto significa que f es diferenciable en todos los elementos del dominio de f.

Podemos formular una función asociada a una función que capture su derivada. Para esto definiremos la función f', que tendrá como dominio al conjunto de puntos para los cuales existe el

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

y cuyo valor en esos puntos está dado por el límite. Eso quiere decir que f' contiene parejas ordenadas de forma que

$$\left(a, \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right).$$

La función f' se le denomina la derivada de f.

En muchas ocasiones la derivada de una función se denota por

$$\frac{df(a)}{dx}$$

*Secciones 9, 10 y 11 de [Spi12]

o de manera más concreta,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}.$$

De la misma forma, es común encontrarse con la notación

$$\frac{df}{dx}$$

para denotar la derivada de f como función.

1.2. Derivadas elementales

Calcularemos algunas derivadas de funciones que hemos explorado con anterioridad y que resultarán interesantes en ésta primer exploración.

Ejemplo (Derivada de una función constante)**.** Supongamos que f es una función constante, sea por ejemplo $f(x) = c$ para todo x. Tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Esto quiere decir que $f'(x) = 0$ para todo x. △

Ejemplo (Derivada de una función lineal)**.** Supongamos que $f(x) = ax + b$ para todo real x. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} \\
&= a
\end{aligned}$$

Por lo que $f'(x) = a$ para todo x. △

Ejemplo (Derivada del cuadrado de un número)**.** Proponemos $f(x) = x^2$ para todo real x. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $f'(x) = 2x$ para todo x. △

Ejemplo (Derivada de la función seno)**.** Debemos notar un par de cosas antes de proponer la derivada del seno:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(x + h/2\right).$$

Por un lado,
$$\lim_{h\to 0}\cos(x+h/2)=\lim_{h\to 0}\cos(x+h)=\cos(x)$$
y por otro
$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}=1.$$
Por lo que
$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}=\cos(x),$$
por lo que la derivada de sen es el cos. △

Ejemplo (Derivada de la función coseno)**.** Al igual que con el seno, debemos notar primero
$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\operatorname{sen}\left(x+h/2\right).$$
De manera similar tenemos que
$$\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x+h/2)=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x+h)=\operatorname{sen}(x)$$
y en consecuencia
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\operatorname{sen}(x),$$
por lo que la derivada de cos es $-\operatorname{sen}$. △

Ejemplo (Una función no diferenciable en un punto)**.** Proponemos la función $f(x)=|x|$ y queremos buscar la derivada en 0. En ese caso
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}.$$
Eso quiere decir que el límite en 0 no existe por lo que derivada en 0 de f tampoco lo hace. Podemos afirmar simplemente: $0\notin\operatorname{dom}(f')$. △

Podemos también estudiar la idea de las derivadas por la derecha e izquierda observando los límites
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
y
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
con los cuales podemos afirma que una función es diferenciable en a si ambas derivadas, por la izquierda y por la derecha, existe y son iguales. En el ejemplo anterior, $f(x)=|x|$, podemos concluir que la derivada no existe al verificar que las derivadas por la izquierda y por la derecha no coinciden. Podemos usar estos conceptos para definir el significado de una función diferenciable en un intervalo.

Definición 1.2. Sea f un función. Decimos que f *es diferenciable en* (a, b) si es diferenciable en cada elemento de (a, b). Decimos también que es diferenciable en $[a, b]$ si es diferenciable en (a, b) y es diferenciable por la derecha en a y diferenciable por la izquierda en b.

Es quizá interesante ahora que hemos formalizado el concepto de derivada, intentar conciliar éste con la idea subyacente que lo origina: La recta tangente. Hemos interpretado los conjuntos de parejas como gráficas y es en ese sentido que le daremos forma a la recta tangente. Esto con la intención de tener una herramienta visual para entender el concepto de derivada. No es difícil establecer que una recta tiene pendiente m y pasa por el punto (x_0, y_0), entonces también pasa por el punto $(x_0 + 1, y_0 + m)$. Con lo anterior podemos afirmar que si f es una función diferenciable en a entonces el conjunto de puntos

$$L = \{(a, f(a)) + t(1, f'(a)) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

por lo que una expresión analítica es $L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. Por la forma en que hemos propuesto este conjunto, su gráfica cruza el punto $(a, f(a))$, como deseamos de la recta tangente; sin embargo no es necesariamente el único punto en las gráficas presentan una intersección. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^3$, derivada está dada por $f'(x) = 3x^2$, por lo que la expresión de la recta tangente de f en $a \neq 0$, es

$$L(x) = 3a^2(x - a) + a^3;$$

es inmediato verificar que $L(a) = f(a)$, pero también que $L(-2a) = f(-2a)$. Esto sin embargo, no es problemático (Ejercicio 1.9).

Teorema 1.1. *Si f es diferenciable en a, entonces es continua en a.*

Demostración. La prueba es realmente una observación de la definición de derivada. Como f es diferenciable en a,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(a) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos deducir que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a),$$

lo que ya hemos probado implica la continuidad de f en a. □

1.3. Derivadas de orden superior

Hemos discutido que las funciones continuas constituyen entidades deseables desde el punto del estudio de funciones con valores reales por múltiples razones.

Hemos incluso presentado una forma de resolver problemas de continuidad en algunas funciones (discontinuidades evitables). Sin embargo, el teorema anterior afirma que las funciones diferenciables *se comportan mejor* que las funciones continuas, al tener funciones continuas que no son diferenciables. Comenzaremos explorando algunos ejemplos para intentar aclarar el significado de un comportamiento mejor.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

No es dificil ver que esta función es continua. Es sin embargo no diferenciable en 0. Esto se debe a que

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} h & h > 0 \\ 1 & h < 0 \end{cases}$$

Esto indica que las derivadas por la izquierda y por la derecha de f no coinciden. Este ejemplo abunda en la falsedad del inverso del teorema 1.1. Es sin embargo muy ilustrativo que la función parecía atractiva antes de presentar el concepto de derivada. $\triangle$

Ejemplo. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Sabemos que esta función es continua en el intervalo $[0, \infty)$. Calculemos la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x + h - x}{h \cdot \left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Es de notarse que para $a > 0$, lo anterior implica que $f'(a) = 1/2\sqrt{a}$. Esto contrasta cuando intentamos obtener la derivada por la derecha para $a = 0$ esto implicaría obtener el

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}},$$

límite que sin embargo no existe. Este ejemplo resulta algo extraño pues esperaríamos que una función que no definimos a pedazos fuera un candidato a no presentar comportamientos extraños en su derivada y en este caso, esta crece indefinidamente cuando nos acercamos a 0. Podríamos culpar de esto a falta definición de f en los negativos; para nuestra sorpresa la función x^3 presenta el mismo comportamiento en 0 por lo que la razón debe ser intrínseca. $\triangle$

Ahora exploraremos dos ejemplos que hemos presentado ya como discontinuidades evitables, mostraremos que uno de ellos es insalvable, tanto como los dos ejemplos anteriores.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Entonces, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

pero sabemos que el

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right).$$

Por lo que la función no es diferenciable en 0. $\triangle$

A pesar que la anterior función no presenta desde el punto de vista de su derivada un comportamiento deseable, podemos preguntar que pasa con otra función muy parecida.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Entonces, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

pero sabemos que el

$$\lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Por lo que la función es diferenciable en 0. $\triangle$

Lo que muestra el anterior ejemplo es sorprendente; no parece que existiera realmente diferencia en extender continuamente $x \operatorname{sen}(x)$ o $x^2 \operatorname{sen}(x)$, pero la segunda tiene derivada y la primera no. Por supuesto, cualquier aceptación de algún comportamiento adecuado en una de estas funciones debe implicar lo mismo para la otra función.

Para resolver el problema pensaremos en restringir más la funciones. Podemos de hecho observar que al ser f' una función, es susceptible de ser analizada a través de su derivada, i.e., estudiar f'', la segunda derivada. Observemos que pasa en el ejemplo anterior si usamos este nuevo tratamiento.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Podemos calcular la derivada de esta función de manera sencilla,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

Obteniendo simplemente que $f'(x) = 2|x|$, en consecuencia $0 \notin \mathrm{dom}(f'')$. Este es un ejemplo en el que la primera derivada existe, pero no la segunda. $\triangle$

El ejemplo anterior presenta una función que debería ser adecuada y aceptable, pero el criterio que pedimos al agregar que no sólo sea derivable si no que su derivada sea de igual forma derivable es mucho más restrictivo. Veremos, una vez que tengamos algunos resultado respecto a derivadas, que la extensión de $x^2 \operatorname{sen}(x)$ resulta tan insatisfactoria que la de $x \operatorname{sen}(x)$. Terminamos presentando la definición de derivadas de orden superior.

Definición 1.3. Para una función f presentamos la siguiente definición recursiva:

$$f^{(1)} = f'$$
$$f^{(n+1)} = (f^n)'.$$

En caso en que $f^n(a)$ exista diremos que f es n-diferenciable en a.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Demuestra que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}.$$

Ejercicio 1.2. Sea $L = \{(x, y) \mid y = mx + b\}$. Si $(x_0, y_0) \in L$, demuestra que $(x_0 + 1, y_0 + m) \in L$.

Ejercicio 1.3. Calcula la derivada de $f(x) = x^3$. ¿En qué puntos es diferenciable?

Ejercicio 1.4. Demuestra que, si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ para $x \neq 0$. Además muestra que la recta tangente a f en $a \neq 0$ sólo corta a la gráfica de f en ese punto.

Ejercicio 1.5. Demuestra que, si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(x) = -2/x^3$ para $x \neq 0$.

Ejercicio 1.6. Sea $S_n(x) = x^n$. Deduciremos una fórmula para S_n'.

1. Encuentra $S_3'(x)$.
2. Observa que $S_1'(x) = 1$, $S_2'(x) = 2x$ y el resultado obtenido para S_3'. Encuentra una fórmula para S_n'.
3. Recuerda que

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} y^i.$$

   Usa este hecho para calcular $(x+h)^n - x^n$ y comprobar la fórmula obtenida en el paso anterior.

Ejercicio 1.7. Encuentra f' si $f(x) = \lceil x \rceil$.

Ejercicio 1.8. Supongamos que f es diferenciable en todo punto. Si tomamos $g(x) = f(x+c)$, demuestra que $g'(x) = f'(x+c)$. En contraste, si $g(x) = f(cx)$ demuestra que $g'(x) = c \cdot f'(cx)$.

Ejercicio 1.9. Sea f diferenciable en a y sea L la recta tangente de f en a. ¿Es posible encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - L(x)| > 0$?

Ejercicio 1.10. Encuentra f'' para las funciones:

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = (x-3)^3$

Ejercicio 1.11. Sea $S_n(x)$. Encontraremos una fórmula para las derivadas de orden superior de S_n, para $0 \leq k \leq n$ demuestra que

$$S_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Ejercicio 1.12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Demuestra que $f^{(n-1)}$ existe pero que $f^{(n)}(0)$ no existe.

2. Diferenciación

2.1. Teoremas básicos

Salvo el último teorema, que se presenta de manera ligeramente (e incluso eso, es una exageración), los resultados de esta sección se presentan sin prueba, todas ellas aparecen de manera muy clara en [Spi12] y no hay necesidad de limpiarlos. Es incluso una buena idea leer el capítulo 10 de de [Spi12].

Teorema 2.1. *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f+g$ es diferenciable en a, y*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Teorema 2.2. *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f \cdot g$ es diferenciable en a, y*

$$(f \cdot g)' = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Teorema 2.3. *Si $g(x) = cf(x)$ y f es diferenciable en a, entonces g es diferenciable en a, y*

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

Teorema 2.4. *Si $f(x) = x^n$ para algún natural n, entonces*

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

Teorema 2.5. *Si g es diferenciable en a, y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es diferenciable en a, y*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Teorema 2.6. *Si f y g es diferenciable en a, y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Teorema 2.7. *Si g es diferenciable en a, y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a, y*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Demostración. A diferencia de otras demostraciones respecto a derivadas aquí será necesario precisar varias cosas, para esto habrá que regresar a la definición de límite original. Comencemos entonces definiendo,

$$\phi(h) = \begin{cases} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} & \text{si } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\ f'(g(a)) & \text{si } g(a+h) - g(a) = 0. \end{cases}$$

Definimos también $t(h) = g(a+h) - g(a)$. Deseamos probar que ϕ es continua en 0.

Usaremos la definición de límite para probar que ϕ es continua en 0, i.e.,

$$\lim_{h \to 0} \phi(h) = f'(g(a)).$$

Tomamos entonces $\varepsilon > 0$. Por un lado, sabemos que f' es diferenciable en $g(a)$. Esto significa que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k},$$

recurriendo a la definición de límite, esto quiere decir que existe $\delta' > 0$ de forma que si $0 < |k| < \delta'$ entonces

$$\left| \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon.$$

Por otro lado, g es diferenciable en a por lo que es también continua en a, por lo que $\lim_{h \to a} g(a+h) = g(a)$; esto implica que existe $\delta > 0$ de forma que, si $|h| < \delta$ entonces

$$|g(a+h) - g(a)| < \varepsilon.$$

Elegimos ahora $|h| < \delta$. Si $t(h) \neq 0$, debemos notar dos cosas, primero,

$$0 < |t(h)| = |g(a+h) - g(a)| < \delta'$$

y además

$$t(h) - g(a) = g(a+h) - g(a) + g(a) = g(a+h).$$

En ese caso, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(h) &= \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \\ &= \frac{f(g(a) + t(h)) - f(g(a))}{t(h)}\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Por otro lado si $t(h) = 0$, entonces $\phi(h) = f'(g(a))$ de manera que trivialmente se verifica

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Por lo que hemos demostrado lo que buscábamos.

Una vez establecido este hecho, debemos notar que si $h \neq 0$, entonces

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} &= \left(\lim_{h\to 0} \phi(h)\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a).\end{aligned}$$

Esto es exactamente lo que queríamos probar. □

Ejercicios

Ejercicio 2.1.

3. Significado de la derivada

3.1. Máximos y mínimos

En esta sección, se explorarán algunas de las consecuencias de la existencia de derivada en una función, en particular se probarán resultado importantes que permiten el cálculo de máximos y mínimos. Primero aclaremos algunos términos.

Definición 3.1. Sea f una función y sea A un conjunto en donde f está definida. Decimos que

- Un elemento $x \in A$ se dice *un punto máximo de f en A* si para todo $y \in A$ se tiene
$$f(x) \geq f(y).$$
- Para un punto máximo x de f en A, en valor $f(x)$ se dice *el valor máximo de la función en A*.

- Un elemento $x \in A$ se dice *un punto mínimo de f en A* si para todo $y \in A$ se tiene
$$f(x) \leq f(y).$$
- Para un punto mínimo x de f en A, en valor $f(x)$ se dice *el valor mínimo de la función en A*.

Teorema 3.1. *Sea f una función definida en (a,b). Si x es un punto máximo o mínimo de f en (a,b) y f es diferenciable en c, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f esta definida en todo (a,b) y $c \in (a,b)$, entonces debe existir δ de forma que $|h| < \delta$ implica $c + h \in (a,b)$. Supongamos que c es un máximo en el intervalo, en ese caso tenemos

$$f(x) \geq f(x+h).$$

Si por un lado $0 < h < \delta$, entonces debemos tener

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Por otro lado, si $-\delta < h < 0$, entonces

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Estos dos límites deben coincidir, por lo que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= f'(c) \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Resumiendo $0 \leq f'(c) \leq 0$, por lo que $f'(c) = 0$.

El caso en que x es un mínimo, resulta completamente análogo. □

Definición 3.2. Sea f una función y sea A un conjunto en donde la función está definida. Definimos

- Un elemento $x \in A$ se dice *un máximo local de f en A*, si existe $\delta > 0$ de forma que x es un punto máximo de f en $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.

- Un elemento $x \in A$ se dice *un mínimo local de f en A*, si existe $\delta > 0$ de forma que x es un punto mínimo de f en $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.

Teorema 3.2. *Sea f defnida en (a, b). Entonces, si f es diferenciable en x y x es máximo o mínimo local de f en (a, b), entonces $f'(x) = 0$.*

Demostración. La prueba es una consecuencia directa del teorema anterior, al estar definida la función en el intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ en donde x es una máximo o mínimo local. □

A pesar que podría parecernos ideal, que la derivada de una función se anule en un punto no garantiza la existencia de un máximo o un mínimo. Puede de hecho suceder que no sea ninguno de los dos. Para ilustrar esto, consideremos para el siguiente ejemplo, que por supuesto, motiva la definición que le sigue.

Ejemplo. Para la función $f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$, sabemos que alcanza su máximo en 1 y su mínimo en -1; además $f'(x) = 3x^2$ por lo que $f'(0) = 0$. Sin embargo, con el argumento que utilizamos anteriormente, 0 no es ni máximo ni mínimo.

Definición 3.3. Un punto crítico de una función f es un número x tal que $f'(x) = 0$. A la vez $f(x)$ se dice valor crítico de f. Un punto crítico que no es ni un máximo local ni un mínimo local de f se le denomina *punto de inflexión de f*.

3.2. Teorema del valor medio

Esta sección está destinada a presentar y probar el teorema del valor medio y sus corolarios inmediatos. Estos están relacionados con el comportamiento de la función respecto al comportamiento que tenga su derivada. Presentamos primero un famoso resultado previo.

Teorema 3.3 (de Rolle)**.** *Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) de forma que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ de forma que satisface $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$ entonces existen elementos x y y en $[a, b]$ de forma que x es un punto máximo y y un punto mínimo de f en $[a, b]$. Entonces, o $x \in (a, b)$ o $x \in \{a, b\}$; si por un lado $x \in (a, b)$ entonces por el teorema 3.1 debemos tener $f'(x) = 0$, por lo que basta tomar $c = x$. Ahora, si $x \in \{a, b\}$, entonces tenemos dos posibilidades o $y \in (a, b)$ o $y \in \{a, b\}$; si $y \in (a, b)$ entonces por el teorema 3.1 debemos tener que $f'(y) = 0$ por lo que basta tomar $c = y$. Por otro lado si $y \in \{a, b\}$, como $x \in \{a, b\}$, debemos entonces tener que $f(x) = f(y)$. Probaremos que f en este caso es constante, en efecto si $z \in [a, b]$, entonces $f(y) \leq f(z) \leq f(x)$ por lo que el valor de $f(z)$ es siempre el mismo; basta entonces tomar cualquier elemento $c \in (a, b)$, como la función es constante en automático $f'(c) = 0$. Una vez agotados los casos, sigue el resultado. □

El teorema de Rolle es una expresión particular del teorema del valor medio, sin embargo, se puede usar para demostrarlo de manera muy sencilla notando precisamente que la restricción $f(a) = f(b)$ implica vincular los extremos de la función sobre una recta horizontal. El teorema del valor medio, lo hace sobre la recta que une los extremos sin importar si estos están a la altura o no.

Teorema 3.4 (del valor medio)**.** *Sea f una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Entonces, existe $c \in (a,b)$ de forma*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Demostración. Usaremos el teorema de Rolle sobre una función muy peculiar,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Se deben notar varias cosas sobre esta función; la primera resulta en notar que h es continua en $[a,b]$, en efecto, f es continua en $[a,b]$ por hipótesis y $x - a$ lo es en todo intervalo; lo segundo es notar que h es diferenciable en (a,b), de nueva cuenta esto resulta de observar que f es diferenciable en (a,b) por hipótesis y $x - a$ lo de igual forma en todo intervalo; por último,

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - (f(b) - f(a)) \\ &= f(a) \\ &= h(a). \end{aligned}$$

De lo anterior podemos aplicar el teorema de Rolle a h para obtener un elemento $c \in (a,b)$ de forma que $h'(c) = 0$.

Ahora calculamos la derivada de h,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

por lo que

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esto implica directamente el resultado que se afirma en el teorema. □

Corolario 3.5. *Si f es diferenciable en (a,b) de forma que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en (a,b)*

Demostración. Sean a_0 y b_0 elementos del intervalo (a,b) de forma que $a_0 < b_0$; en ese caso, la función f es continua en $[a_0, b_0]$ y diferenciable en (a_0, b_0). Por el teorema del valor medio existe $c \in (a_0, b_0)$ de forma que

$$\frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} = f'(c),$$

pero $f'(c) = 0$ por hipótesis. En ese caso

$$f(b_0) - f(a_0) = 0,$$

por lo que $f(b_0) = f(a_0)$. Esto implica que en todo el intervalo el valor de la función no cambia por lo que podemos concluir que la función es constante. $\square$

Corolario 3.6. *Si f y g son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) de forma que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe una constante c tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Basta notar que $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, por lo que la función $f - g$ cumple las hipótesis del corolario anterior. En ese caso, esta función es constante y podemos escribir simplemente que para todo $x \in [a, b]$

$$f(x) = g(x) + c;$$

esto es lo que se deseaba probar. $\square$

Antes de continuar con el siguiente corolario al teorema del valor medio, paliaremos una descripción de un comportamiento que no hemos formalizado en las gráficas de las funciones.

Definición 3.4. Sea f una función definida en un intervalo I y sean a y b números en dicho intervalo. Decimos

- f es creciente en I si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$.
- f es decreciente en I si $a < b$ implica $f(a) > f(b)$.

Es interesante notar que una función que no es creciente, no es necesariamente decreciente al tener la posibilidad que comportamiento pase de crecer a ser constante, situación en la cual la función no crece ni decrece. De manera análoga, si una función no es decreciente no es necesariamente creciente. Ahora estamos en una mejor posición para formular el corolario.

Corolario 3.7. *Sea f una función diferenciable en (a, b). Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$; por el contrario si $f'(x) < 0$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.*

Demostración. Sea a_0 y b_0 elementos del intervalo de forma que $a_0 < b_0$. En ese caso f debe ser continua en $[a_0, b_0]$ y diferenciable en (a_0, b_0), según el teorema del valor medio debe existir $c \in (a_0, b_0)$ de forma que

$$f'(c) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}.$$

Supongamos entonces que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$; en ese caso, como $(a_0, b_0) \subset (a, b)$, debemos tener $f'(c) > 0$. Esto implica a su vez que

$$\frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} > 0$$

y como $b_0 - a_0 > 0$ entonces debemos tener que $f(b_0) - f(a_0) > 0$. Esto quiere decir que $a_0 < b_0$ implica que $f(a_0) < f(b_0)$ por lo que función es creciente en el intervalo (a, b). La prueba para el caso en que $f'(x) < 0$ es análoga. $\square$

Este último corolario nos proporciona una criterio bastante sencillo con el cual decidir cuando obtenemos un máximo o un mínimo de un punto crítico de una función. De hecho, estudiando si la función crece o decrece en los intervalos a la derecha e izquierda de un punto crítico, somos capaces de decidir si dicho punto es máximo, mínimo o ninguno de ellos. Existe sin embargo una manera más fácil (aunque no absolutamente segura) de decidir este mismo resultado.

3.3. Criterio de la segunda derivada

Este criterio se recarga en las proposición de dos teoremas que probaremos en esta sección.

Teorema 3.8. *Supongamos que f es 2-diferenciable en a y que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f. Además si $f''(a) < 0$ entonces a es un máximo local de f.*

Demostración. Comenzamos utilizando la definición de la segunda derivada, i.e.,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Si $f''(a) > 0$, entonces podemos encontrar δ de forma que, si $0 < |h| < \delta$, se tiene

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$$

y como $f'(a) = 0$, debemos tener simplemente que

$$\frac{f'(a+h)}{h} > 0.$$

Tenemos dos posibilidades: para todo h tal que $0 < h < \delta$, debemos tener $f'(a+h) > 0$, en ese caso, de acuerdo con el corolario 3.7, la función debe ser creciente en el intervalo $(a, a+\delta)$; también para todo h tal que $-\delta < h < 0$, debemos tener $f'(a+h) < 0$, otra vez, de acuerdo al corolario 3.7, la función debe ser creciente en el intervalo $(a-\delta, a)$. Lo anterior quiere decir que a es un mínimo en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ por lo que a resulta un mínimo local como se buscaba. El caso en que $f''(a) < 0$ es completamente análogo. $\square$

Teorema 3.9. *Supongamos que f es 2-diferenciable en a. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$; por otro lado si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Procedemos por contradicción, si $f''(a) < 0$, entonces por el el teorema 3.8 tenemos que a es un máximo local en a. Eso quiere decir que f es constante en el intervalo en donde

a es tanto un máximo como mínimo. Pero esto quiere decir que ese intervalo también la segunda derivada es también cero, en particular $f''(a) = 0$ lo que es una contradicción. Entonces $f''(a) \geq 0$ como buscábamos. El caso en que a sea un máximo local es análogo. Esto termina la prueba. $\square$

Se debe notar que usar este criterio puede simplificar el problema de decidir si los puntos críticos son en verdad máximos o mínimos. Sin embargo, no es determinante en el sentido que podría pasar que $f''(a) = 0$. En ninguno de los teoremas se muestra como decidir esto. Esto sucede porque es posible tener un máximo, un mínimo o un punto sin ninguna de estas propiedades en ese caso. Esto nos dice que criterio de la segunda derivada no es conclusivo cuando se anula. Proponemos algunos ejemplos para ilustrar este hecho.

Ejemplo. Sean $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ y $h(x) = x^3$. Debemos notar que las tres funciones tienen un punto crítico en $x = 0$, pues su derivada se anula. Además en $x = 0$ su segunda derivada en todos los tres casos se anula de igual forma, sin embargo $x = 0$ es un mínimo local de f, $x = 0$ un máximo local de g y un simple punto crítico de h.

3.4. Consecuencias del teorema del valor medio

Teorema 3.10. *Sea I un intervalo cualquiera de forma que $a \in I$. Supongamos que f es continua en a y diferenciable en $I \setminus \{a\}$. Supongamos además que existe*

$$\lim_{x \to a} f'(x).$$

Entonces existe también $f'(a)$ y además

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

Demostración. Tomemos t de forma que $(a - t, a + t) \subset I$. Definiremos una función α_h en el intervalo $(-t, t)$ usando el teorema del valor medio. Para un número h tal que $0 < |h| < t$, si $h > 0$, entonces f será continua en $[a, a + h]$ y diferenciable en $(a, a + h)$ por hipótesis; usando el teorema del valor medio elegimos α_h de forma que $a < \alpha_h < a + h$ y

$$f'(\alpha_h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Si por otro lado $h < 0$, entonces f es continua en $[a + h, a]$ y diferenciable en $(a + h, a)$ de forma que tomamos α_h de forma que $a + h < \alpha_h < a$ y

$$f'(\alpha_h) = \frac{f(a) - f(a + h)}{-h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Podemos resumir las propiedades que tiene α_h: Para cada $0 < |h| < t$, tenemos que $0 < |\alpha_h - a| < |h|$ y además

$$f'(\alpha_h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Probaremos ahora que

$$\lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

Sea L el límite en cuestión y sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que, para todo número x, si $0 < |x-a| < \delta$ entonces, $|f'(x) - L| < \varepsilon$. En ese caso, si tomamos $0 < |h| < \min(\delta, t)$, por la discusión del párrafo anterior

$$0 < |\alpha_h - a| < |h| < \delta$$

por lo que $|f'(\alpha_h) - L| < \varepsilon$, que es lo que se afirmo al inicio de este párrafo.

Por último, sólo basta notar lo siguiente

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{x\to a} f'(\alpha_h) \\ &= \lim_{x\to a} f'(x). \end{aligned}$$

Lo anterior es lo que se afirma en el enunciado del teorema. □

Teorema 3.11 (del valor medio de Cauchy)**.** *Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b), entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

Demostración. De la misma forma en que se probó el teorema del valor medio a través del teorema de Rolle, usaremos una función auxiliar para probar este teorema. Sea

$$h(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x),$$

entonces por hipótesis, h es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), además

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$

y también

$$h'(x) = (g(b) - g(a))\, f'(x) - (f(b) - f(a))\, g'(x).$$

Ahora, por el teorema del Rolle, debe existir $c \in (a,b)$ de forma que $h'(c) = 0$, en otras palabras

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c),$$

que es lo que afirma el teorema. □

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Hallar los extremos (máximos y mínimos), si es que los hay, de las siguientes funciones.

1. $x^2 - 2x + 3$.
2. $(1/3)x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.
3. $(x-2)(3-x)/x^2$.
4. $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.
5. $\operatorname{sen}(x) - 2x$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.
6. $x/(1+x^2)$.
7. $\operatorname{sen}(3x) - 3\operatorname{sen}(x)$.
8. $(x-1)/(x+1)$.

Ejercicio 3.2. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

1. $x + 1/x$.
2. $x + 3/x^2$.
3. $x^2/(x^2-1)$.
4. $1/(1+x^2)$.

Ejercicio 3.3. Hallar el triángulo rectángulo con área máxima cuya hipótenusa es h.

Ejercicio 3.4. Sea (x_0, y_0) una pareja de números reales de forma que ambos sean positivos. Encuentra una recta que pase por este punto y que cruce ambos ejes formando un triángulo con área mínima.

Ejercicio 3.5. Sea (x_0, x_1) un punto en el plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$.

1. Encuentra el número y tal que la distancia de (x_0, x_1) a $(y, f(y))$ sea la mínima posible. Ten en cuenta hacer mínima esta distancia es lo mismo que hacer mínimo el cuadrado de ésta.
2. Concluye que la recta que pasa por los puntos (x_0, x_1) y $(y, f(y)))$ es perpedicular a L. Sugerencia: Compara las pendientes.
3. Encuentra la distancia de (x_0, x_1) a L, i.e., la distancia de (x_0, x_1) a $(y, f(y)))$.

Ejercicio 3.6. Demostrar que la suma de un número positivo y su inverso multiplicativo es por lo menos 2.

Ejercicio 3.7. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, encuentra el de menor superficie.

Ejercicio 3.8. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales. Demuestra que el número x para el que la suma de los cuadrados de los errores

$$(x_1 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2$$

es el mínimo, resulta ser

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Ejercicio 3.9. Demuestra que si $f'(x) \geq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.

Ejercicio 3.10. Hallar todas las funciones tales que

1. $f'(x) = \text{sen}(x)$.
2. $f''(x) = x^3$.
3. $f'''(x) = x + x^2$.

Ejercicio 3.11. Supóngase que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demostrar que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

Ejercicio 3.12. Demostrar que si

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces existe un número $c \in [0, 1]$

$$a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n = 0.$$

Ejercicio 3.13. Supóngase que f es $n-$diferenciable y que $f(x) = 0$ para $n + 1$ diferentes valores de x. Demuestra que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x.

Ejercicio 3.14. Sean $a_1, \ldots, a_{n+1}$ puntos arbitrarios de $[a, b]$ y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - a_i).$$

Supóngase que f es $n+1$-diferenciable y que p es un polinomio de grado menor o igual que n tal que $p(a_i) = f(a_i)$. Demostrar que para todo x de $[a, b]$ existe un número c de $[a, b]$ tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Sugerencia: Considera la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)]$$

y aplica el ejercicio anterior mostrando que ésta anula en $n + 2$ puntos distintos de $[a, b]$.

4. Consecuencias de la derivada

4.1. Cálculo de límites indeterminados

Teorema 4.1 (Regla de L'Hôpital)**.** *Supongamos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

y supongamos también que existe el

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración. Por hipótesis, $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$; esto implica que al menos alrededor de a la expresión $f'(x)/g'(x)$ tiene sentido. Esto quiere decir que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen y además $g'(x)$ al rededor de a. Supongamos entonces que $t > 0$ es un número de forma que, si $x \in (a-t, a+t)$ y $x \neq a$, entonces $f'(x)$ y $g'(x)$ existen y $g'(x) \neq 0$.

No tenemos información acerca de si las funciones f y g están definidas en a, pero podemos definir funciones que las extiendan de manera continua:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

y

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Debemos notar una consecuencia de esta última función, por un lado si $x \in (a, a+t)$, entonces las función G es continua en $[a, x]$ y diferenciable en (a, x). Afirmamos que $G(x) \neq 0$, en efecto si $G(x) = 0$, podemos utilizar el teorema del valor medio sobre G, para garantizar que existe $x_1 \in (a, x)$ de forma que

$$g'(x_1) = G'(x_1) = \frac{G(x) - G(a)}{x - a} = 0,$$

pero esto entra en contradicción con lo que se afirma en el primero párrafo, por lo que $G(x) \neq 0$. Un argumento similar funciona para $x \in (a-t, a)$.

Definimos ahora una función sobre los intervalos $(a-t, a)$ y $(a, a+t)$ de la siguiente manera, si $x \in (a, a+t)$, entonces F y G son funciones continuas en $[a, x]$ y diferenciables en (a, x), por lo que podemos utilizar el teorema del valor medio de Cauchy para encontrar el número α_x de forma que $a < \alpha_x < x$ y

$$F'(\alpha_x)\,(G(x) - G(a)) = G'(\alpha_x)\,(F(x) - F(a))$$

y por la manera en que se definieron las funciones F y G,

$$f'(\alpha_x) g(x) = g'(\alpha_x) f(x)$$

y por la discusión del párrafo anterior, esto significa que

$$\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

lo mismo se puede concluir si $x \in (a-t, a)$ a condición que $a - t < \alpha_x < a$. En resumen, si $x \neq a$ y $x \in (a-t, a+t)$, entonces $0 < |\alpha_x - a| < |x - a|$ y

$$\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Afirmamos ahora

$$\lim_{x\to a} \frac{f(\alpha_x)}{g(\alpha_x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En efecto, sea L el límite en cuestión y sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ de forma que $0 < |y - a| < \delta$ implica que

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \varepsilon$$

en ese caso, si tomamos $0 < |x - a| < \min(\delta, t)$, por la discusión en el párrafo anterior, sabemos $0 < |\alpha_x - a| < |x - a| < \delta$, por lo que

$$\left| \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L \right| < \varepsilon.$$

En ese caso, el resultado que se afirmo sigue.

Por último basta notar

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Esto último es lo que se buscaba demostrar. □

Corolario 4.2. *Supongamos que*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

y supongamos también que existe el

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración. Por hipótesis,

$$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} g\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Entonces, basta usar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Lo que constituye el resultado que buscamos. □

Teorema 4.3 (Regla de L'Hôpital II)**.** *Supongamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

y supongamos también que existe el

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración. Vamos a probar la existencia del límite a través de la definición y vamos a necesitar establecer algunas estimaciones que resultarán importantes para determinarlo. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Tenemos lo siguiente

1. Por hipótesis, existe L de forma que

   $$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

   Esto quiere decir que existe $\delta_0 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_0$, entonces

   $$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

2. Elegimos ahora $b = a - \delta_0/2$ y $c = a + \delta_0/2$ de forma que $|b-a| < \delta_0$ y de igual forma $|c-a| < \delta_0$. Además, $x \neq a$ y $b < x < c$ si y sólo si

   $$0 < |x-a| < \frac{\delta_0}{2}.$$

3. Al tener

   $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

   debe existir $\delta_1 > 0$ de forma que $0 < |x-a| < \delta_1$ implica que $f(x) > 1$ y $g(x) > 1$, por lo que $f(x)$ y $g(x)$ son ambos distintos de cero.

4. De nueva cuenta como

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

existe $\delta_2 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces

$$g(x) > \max(|g(b)|, |g(c)|) + 1.$$

Esto quiere decir que $g(x) \neq g(b)$ y $g(x) \neq g(c)$, cuando x satisface la desigualdad planteada.

5. La función

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1-g(b)/g(x)}{1-f(b)/f(x)} & \text{si } x < a \\ \frac{1-g(c)/g(x)}{1-f(c)/f(x)} & \text{si } a < x \end{cases}$$

queda perfectamente definida para todos los números x que satisfacen $0 < |x-a| < \delta_1$; además por la hipótesis sobre los límites de f y g,

$$\lim_{x\to a} S(x) = 1$$

por lo que existe $\delta_3 > 0$ de forma que $0 < |x-a| < \delta_3$ implica

$$|S(x) - 1| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right).$$

Como hemos hecho en la prueba de la regla de L'Hôpital, definimos ahora una función para cada elemento $x \neq a$ que satisface $b < x < c$ de la siguiente manera: Si $b < x < a$,por la forma en que se eligió b, f y g deben ser continuas en $[b, x]$ y diferenciables en (b, x); podemos entonces usar el teorema del valor medio de Cauchy y encontrar el número $\alpha_x \in (b, x)$ de forma que

$$f'(\alpha_x)\left(g(x) - g(b)\right) = g'(\alpha_x)\left(f(x) - f(b)\right).$$

De la misma forma podemos argumentar para un número $x \neq a$ que satisface $a < x < c$, la existencia del número $\alpha_x \in (x, c)$ que cumple

$$f'(\alpha_x)\left(g(x) - g(c)\right) = g'(\alpha_x)\left(f(x) - f(c)\right).$$

Basta notar que el número α_x debe cumplir, siempre que este definido,

$$\left|\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

al tener satisfacer $0 < |\alpha_x - a| < |b - a| < \delta_0$.

Notaremos ahora que si $0 < |x-a| < \delta_1$, $0 < |x-a| < \delta_2$ y $b < x < a$, entonces

$$\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{1 - \frac{f(b)}{f(x)}}{1 - \frac{g(b)}{g(x)}} \cdot \frac{f(x)}{g(x)},$$

o en otras palabras

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\frac{g(b)}{g(x)}}{1-\frac{f(b)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = S(x)\cdot\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

La misma igualdad se puede concluir si cambiamos $b < x < a$ por $a < x < c$.

Estamos ahora listos para concluir lo que deseamos, para esto haremos uso de un lema acerca de límites . Si $\delta = \text{mín}(\delta_0/2, \delta_1, \delta_2)$ entonces $0 < |x-a| < \delta$ implica que

$$|S(x)-1| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right),$$

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$\frac{f(\alpha_x)}{g(\alpha_x)} = S(x)\cdot\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Podemos entonces concluir por el lema 1.8 en [Fun2] que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|S(x)\cdot\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Uno puede extender este par de resultados, para resolver muchos límites problemáticos. Por ejemplo cuando los límites tienden a $-\infty$ o son iguales a $-\infty$. De igual forman los límites pueden presentar alguna combinación de ambos casos y las reglas de L'Hôpial funcionan de la misma forma, por ejemplo si un límite resulta 0 y otro ∞. Algunos de estos resultados se contemplan en algunos ejercicios.

Existen tambíen algunas advertencias sobre el uso de estas reglas. La existencia del límite de $f(x)/g(x)$ sigue de la existencia del límite para $f'(x)/g'(x)$, sin embargo esta condición no es necesaria, i.e., puede suceder que el límite $f'(x)/g'(x)$ no existe pero y a pesar de esto, el límite $f(x)/g(x)$ puede existir. Como ejemplo de esto, presentamos el siguiente caso.

Ejemplo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\text{sen}(x)}{x}.$$

El límite anterior existe y es 1. Pero al calcular las derivadas

$$\frac{(x+\text{sen}(x))'}{(x)'} = 1+\cos(x)$$

el cual no existe cuando $x\to\infty$. De hecho oscila entre 0 y 2.

Ejemplo. Para calcular e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+6}$$

usaremos una de las variantes de la la regla de L'Hôpital expuesta en los ejercicios (¡identifícala!). Calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{8x} = \frac{1}{4}$$

y como $(2x^2+3)' = 4x$ y $(4x^2+6)' = 8x$, el teorema anterior afirma

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+6} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo. No es difícil probar que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(3x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x) = \infty,$$

lo que nos permite realizar la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 3\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= 3\frac{(-1)}{1} \\ &= -3.\end{aligned}$$

4.2. Polinomio de Taylor

Nos interesa ahora estudiar el comportamiento de la derivada para reconstruir una función por sus valores. Supongamos para esto una función f que sea n-diferenciable en a. Deseamos encontrar un polinomio $P_{n,a}$de grado no superior a n de forma que

$$P_{n,a}(a) = f(a), \quad P_{n,a}^{'}(a) = f'(a), \quad \ldots P_{n,a}^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

De forma más concisa, para $0 \le k \le n$,

$$P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Proponemos con este objetivo que el polinomio tenga la siguiente forma

$$P_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

sus derivadas en a están dadas por las siguiente expresiones

$$P_{n,a}(a) = a_0,$$

$$P_{n,a}^{'}(a) = a_1,$$

$$P_{n,a}^{'}(a) = 2a_2,$$

$$\vdots$$

$$P_{n,a}^{(n)} = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n,$$

o de forma concisa para $0 \leq k \leq n$,

$$P_{n,a}^{(k)}(a) = k! a_k.$$

Esto nos permite expresar al polinomio P_n como

$$P_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Al polinomio P_n se le denomina *el polinomio de Taylor de grado n para f en a*. Es sencillo notar que cualquier otro polinomio que contenga la misma propiedad coincidirá con P_n. Formulamos la discusión anterior como un teorema.

Teorema 4.4. *Sea f una función n-diferenciable. Entonces existe un único polinomio $P_{n,a}$ tal que*

$$P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Designemos ahora a $R_{n,a}$ como la diferencia entre los valores de la función y su polinomio de Taylor de grado n en a, i.e.,

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x).$$

Podemos entonces escribir

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Teorema 4.5 (Fórmula de Lagrange del resto)**.** *Sea f cualquier función. Si f es $n+1$-diferenciable en $[a,b]$, entonces, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$R_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Demostración. De acuerdo con el enunciado del teorema, para todo número x en $[a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{n,x}(b) + R_{n,x}(b) \\ &= f(x) + f'(x)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + R_{n,x}(b). \end{aligned}$$

No es difícil observar que ambas expresiones son en realidad funciones sobre x. En ese caso, derivar la expresión anterior, para auxiliarnos, definimos

$$S(x) = R_{n,x}(b);$$

además podemos calcular las derivadas involucradas calculando, para $0 \leq k \leq n$, las derivadas de las funciones

$$g_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k,$$

las cuales son

$$g_0'(x) = f^{'}(x)$$

y para $1 \leq k \leq n$

$$g_k^{'}(x) = -\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

Ahora

$$P_{n,x}(b) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
P_{n,x}^{'}(b) &= g_0'(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k^{'}(x) \\
&= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{f^{(n+1)(x)}}{n!}(b-x)^n \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(n+1)(x)}}{n!}(b-x)^n \\
&= \frac{f^{(n+1)(x)}}{n!}(b-x)^n.
\end{aligned}$$

En ese caso debemos tener que

$$0 = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + S'(x)$$

o en otras palabras

$$S'(x) = -\frac{f^{(n+1)(x)}}{n!}(b-x)^n.$$

Aplicamos ahora el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones S y $g(x) = (b-x)^{n+1}$, para las cuales obtenemos un número $\xi \in (a,b)$

$$\frac{S(b)-S(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{S'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n}{-(n+1)(b-\xi)^n},$$

como $S(b) = R_{n,b}(b) = 0$ y como $S(a) = R_{n,a}(b)$, lo anterior significa que

$$\frac{R_{n,a}(b)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

o expresado de otra forma

$$R_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Esto último, es lo que afirma el teorema. $\square$

Teorema 4.6. *Sea f una función $n+1$-diferenciable en a. Entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Teorema 4.7. *Sea f una función n-diferenciable en a que satisface para cada número entero k tal que $1 \leq k < n$,*

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad y \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces,

- *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a.*
- *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.*
- *Si n es par, entonces a es un punto de inflexión de f.*

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Calcula los siguiente límites.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{8x-5}{2x}$.
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{8x-5}{2x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{x^2}$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$.
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$.
6. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Ejercicio 4.2. Vamos a revisitar un problema, pero ahora se intentará resolver con las técnicas que hemos aprendido ahora. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

existe si y sólo si $m \geq n$. (Sugerencia: Separa los caso en que $m = n$ y $m \neq n$ y usa L'Hôpital).

Ejercicio 4.3. Usa la regla de L'Hôpital para calcular el $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

Ejercicio 4.4. En este ejercicio se exploran algunas otras formas de la regla de L'Hôpital. Demuestra los siguientes enunciados.

1. Si
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$$
y
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$
entonces
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$
.

2. Si
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
y
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty,$$
entonces
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

3. Si
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$$
y
$$\lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$
entonces
$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$
.

Ejercicio 4.5. Existen incluso otras variantes de la regla de L'Hôpital que combinan posibilidades, exploraremos una de ellas. Si

Ejercicio 4.6. Sea f una función con un mínimo local en a. Demuestra que $g(x) = f(x) + c$ tiene un mínimo local en a. Usa este hecho para concluir el mismo resultado para máximo locales.

Ejercicio 4.7. Sea f una función en donde a a es un punto de inflexión. Demuestra que $g(x) = f(x) + c$ tiene un punto de inflexión en a.

Ejercicio 4.8. Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 en 0 para la función $\cos(x)$.

Ejercicio 4.9. Encuentra los puntos críticos de las funciones y clasificalos.

1. $3x^2$.
2. $-x^4 + 2x^2$.
3. $x^4 - 4x^3 - 6x^2$.
4. $(x-2)^3(2x+1)$.

Ejercicio 4.10. Utiliza derivadas para mostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

cuando $x \neq 0$ y $x > -1$.

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* Editorial Reverté, 1984.

[Pis77] Piskunov, N.: *Cálculo diferencial e integral: Tomo I.* Editorial Mir, Moscú, 1977.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Cálculo Integral y Diferencial I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.