# Semana 2: Propiedades básicas de los números

A pesar que este curso se basa en [Spi12], nunca está de más consultar otros textos, por ejemplo [Apo84]. Vale la pena constrastar ambos. En [Apo84] se puede encontrar un desarrollo profundamente técnico, donde, de manera llana y lisa, se presenta una lista de axiomas y sus implicaciones lógicas. En contraste, [Spi12] es un texto mucho más constructivo y exploratorio. Este último, comienza con una discusión de la razón de ser del número e intenta describir las propiedades que comúnmente asociamos a la idea de número; así es como el autor nos convence que los axiomas propuestos no son para nada descabellados.

Realmente los contenido en [Spi12] es suficiente para entender el concepto de número que queremos alcanzar. Aquí sólo resumiremos las propiedades y los resultados expuesto para conseguir una referencia rápida al resolver los ejercicios.

## 1. Propiedades de cuerpo o campo

Se llaman propiedades de cuerpo a aquellas que describen la naturaleza de las operaciones de suma y multiplicación en los reales. Esto quiere decir, en el marco de la teoría de conjuntos, que existe un conjunto, *el conjunto de números reales*: $\mathbb{R}$, el cual viene acompañado de dos operaciones la suma $+$ y el producto $\cdot$ que están gobernados por las siguientes propiedades.

**Propiedad 1** (Ley asociativa para la suma)**.** *Para cualesquiera números $a$, $b$ y $c$, tenemos que*

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

**Propiedad 2** (Existencia del neutro aditivo)**.** *Existe un número, 0, de forma que para todo número $a$:*

$$a + 0 = a.$$

**Propiedad 3** (Existencia de inversos aditivos)**.** *Para cualquier número $a$, existe un número, $-a$, de forma que*

$$a + (-a) = 0.$$

De alguna manera, la notación anterior sugiere que la operación a la que designamos resta, es simplemente una operación derivada de la suma. Así, usaremos

$$a - b$$

como una abreviación de

$$a + (-b).$$

**Propiedad 4** (Ley conmutativa para la suma). *Para cualesquiera números a y b, se tiene*

$$a + b = b + a.$$

**Propiedad 5** (Ley asociativa para la multiplicación). *Para cualesquiera números a, b y c, tenemos que*

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

**Propiedad 6** (Existencia del neutro multiplicativo). *Existe un número,* $1 \neq 0$*, de forma que para todo número a:*

$$a \cdot 1 = a.$$

**Propiedad 7** (Existencia de inversos multiplicativos). *Para cualquier número* $a \neq 0$*, existe un número,* $a^{-1}$*, de forma que*

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

**Propiedad 8** (Ley conmutativa para la mutiplicación). *Para cualesquiera números a y b, se tiene*

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

**Propiedad 9** (Ley distributiva). *Para números cualesquiera a, b y c*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

**Proposición 2.1.** *Dados número a y b, el número* $x = a - b$ *es el único que satisface la igualdad*

$$b + x = a.$$

*Demostración.* Comprobemos primero que satisface la igualdad; en efecto

$$\begin{aligned}
b + x &= b + (a - b) && \text{(Definición)}\\
&= b + ((-b) + a) && \text{(Propiedad 4)}\\
&= (b + (-b)) + a && \text{(Propiedad 1)}\\
&= 0 + a && \text{(Propiedad 3)}\\
&= a + 0 && \text{(Propiedad 4)}\\
&= a && \text{(Propiedad 2)}
\end{aligned}$$

Ahora, si algún número $y$ satisface, de la misma forma que $x$, la igualdad

$$b + y = a,$$

debemos entonces tener que

$$\begin{aligned}
y &= 0 + y && \text{(Propiedad 2)}\\
&= (b + (-b)) + y && \text{(Propiedad 3)}\\
&= ((-b) + b) + y && \text{(Propiedad 4)}\\
&= (-b) + (b + y) && \text{(Propiedad 1)}\\
&= (-b) + a && \text{(Hipótesis sobre } y\text{)}\\
&= (-b) + (b + x) && \text{(Conclusión sobre } x\text{)}\\
&= ((-b) + b) + x && \text{(Propiedad 1)}\\
&= (b + (-b)) + x && \text{(Propiedad 4)}\\
&= 0 + x && \text{(Propiedad 3)}\\
&= x + 0 && \text{(Propiedad 4)}\\
&= x && \text{(Propiedad 2)}
\end{aligned}$$

Por lo que nos vemos obligados a concluir que cualquier número que satisfaga dicha igualdad será irremediablemente $x$ sin existir otra posibilidad. De esto se sigue el resultado. ∎

**Proposición 2.2** (Simplificación para la multiplicación)**.** *Sean $a$, $b$ y $c$ números cualesquiera. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.*

*Demostración.* Por hipótesis, $a$ es un número distinto de cero, entonces posee un inverso multiplicativo que denotamos por $a^{-1}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{(Propiedad 6)}\\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{(Propiedad 7)}\\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{(Propiedad 5)}\\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{(Propiedad 8)}\\
&= (a \cdot c) \cdot a^{-1} && \text{(Hipótesis sobre } b \text{ y } c\text{)}\\
&= (c \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{(Propiedad 8)}\\
&= c \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{(Propiedad 5))}\\
&= c \cdot 1 && \text{(Propiedad 7)}\\
&= c && \text{(Propiedad 6).}
\end{aligned}$$

Esto es lo que se quería mostrar. ∎

**Proposición 2.3.** *Sea $a$ un número cualquiera. Entonces,*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

*Demostración.* Comenzamos notando que la igualdad siguiente se satisface por las propiedades que hemos enunciado,

$$\begin{aligned}
a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) && \text{(Propiedad 9)}\\
&= a \cdot 0 && \text{(Propiedad 2)}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{(Propiedad 2)} \\ &= a \cdot 0 + (a \cdot 0 - a \cdot 0) && \text{(Propiedad 3)} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) - a \cdot 0 && \text{(Propiedad 1)} \\ &= a \cdot 0 - a \cdot 0 && \text{(Igualdad concluída)} \\ &= 0 && \text{(Propiedad 3)} \end{aligned}$$

de lo que obtenemos que efectivamente $a \cdot 0 = 0$, como deseábamos. ■

Es quizá importante notar que esta operación presenta una peculiaridad: el inverso multiplicativo existe para cualquier número excepto el cero. Esta exclusión tiene por supuesto una razón de ser, si el cero poseyera un inverso multiplicativo, podríamos contar con la existencia de un número, $0^{-1}$, de forma que $0 \cdot 0^{-1} = 1$; pero al ser $0^{-1}$ un número, deberíamos de igual forma tener $0 \cdot 0^{-1} = 0$ (pues $0 \cdot a = 0$ para cualquier número), con lo que $0 = 1$, contradiciendo la propiedad 6. Nos vemos entonces obligados a aceptar que, a consecuencia de nuestras definiciones, el número cero no puede poseer inverso multiplicativo, sin embargo por la propiedad 7, este es el único número que no lo presenta.

Una vez aclarado esto podemos definir simplemente la división como una operación asociada a la multiplicación. Expresaremos $a/b$ como una abreviación de $a \cdot b^{-1}$. Lo anterior tiene una implicación interesante que probablemente nos resultará familiar: la división por cero carece de sentido.

**Lema 2.4.** *Para cualesquiera números a y b,*

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

*Demostración.* Para demostrar esto, basta mostrar que $a \cdot (-b)$ es el inverso aditivo de $a \cdot b$. Para esto afirmamos que $a \cdot b + [a \cdot (-b)] = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot (-b) &= a \cdot (b - b) && \text{(Propiedad 9)} \\ &= a \cdot 0 && \text{(Propiedad 3)} \\ &= 0 && \text{(Proposición 2.3)} \end{aligned}$$

La segunda igualdad se puede verificar de manera análoga (¡inténtalo!), de lo que sigue el resultado que buscábamos. ■

**Proposición 2.5.** *Para cualesquiera números a y b,*

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

*Demostración.* Verificamos primero una igualdad,

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] &= (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b && (2.4) \\ &= (-a) \cdot (b - b) && \text{(Propiedad 9)} \\ &= (-a) \cdot 0 && \text{(Propiedad 3)} \\ &= 0 && (2.3) \end{aligned}$$

Basta ahora sumar $a \cdot b$ a ambos lados de la igualdad para verificar el resultado que buscamos. ■

**Proposición 2.6.** *Para cualesquiera números $a$ y $b$, se tiene $a \cdot b = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $a \cdot b = 0$. Si $a \neq 0$, entonces tiene inverso $a^{-1}$ por lo que

$$\begin{aligned} b &= 1 \cdot b \\ &= (a^{-1} \cdot a) \cdot b \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) \\ &= a^{-1} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Que se cumpla $b = 0$ es suficiente para afirmar que $a \cdot b = 0$ implica que $a = 0$ o $b = 0$. Por otro lado, si $a = 0$ o $b = 0$, entonces debe ser inmediato que $a \cdot b = 0$ según la proposición 2.3. ■

Hasta ahora, hemos presentado algunas manipulaciones algebraicas bien conocidas y hemos presentado el razonamiento que nos lleva a deducirlas con bastante detalle. En la práctica esto es demasiado engorroso y hasta ocioso de realizar, por lo que de ahora en adelante se dejará de lado. Resulta, sin embargo, un excelente ejercicio, comprobar las reglas que conocemos por experiencia, por lo que algunos otros casos aparecerán como ejercicios y lo ideal es que esos ejercicios sean resueltos tal y como las demostraciones se han presentado hasta ahora, esto con el único objeto de que el lector se convenza de todos estos detalles.

## 2. Propiedades de orden

Así como los axiomas de cuerpo describen al conjunto $\mathbb{R}$, los axiomas de orden describiran a otro conjunto. Admitimos que existe un subconjunto $P \subset \mathbb{R}$, *el conjunto de los números reales positivos*, que satisface las siguientes propiedades.

**Propiedad 10** (Ley de tricotomía)**.** *Para todo número $a$ se cumple una y sólo una de las tres afirmaciones siguientes:*

- $a = 0$.
- $a \in P$.
- $-a \in P$.

**Propiedad 11** (Cerradura aditiva)**.** *Si los números $a$ y $b$ ambos pertenecen a $P$, entonces $a + b$ pertenece también a $P$.*

**Propiedad 12** (Cerradura multiplicativa)**.** *Si los número $a$ y $b$ ambos pertenecen a $P$, entonces $a + b$ pertenece también a $P$.*

**Definición 2.1.** Para números $a$ y $b$ se define:

$$\begin{aligned} a > b &\qquad \text{si } a - b \in P. \\ a \geq b &\qquad \text{si } a > b \text{ o } a = b. \end{aligned}$$

Los símbolos $<$ y $\leq$ se definen por analogía.

**Proposición 2.7.** *$a > 0$ si y sólo si $a \in P$.*

*Demostración.* Realmente es una observación directa de las propiedades de cuerpo y la definición del símbolo $>$ pues si $a$ es positivo, entonces $a - 0 = a \in P$. Ahora, si $a \in P$, entonces $a - 0 \in P$ y por tanto $a > 0$. ■

**Proposición 2.8** (La ley de tricotomía II)**.** *Sean $a$ y $b$ un par de números. Entonces, se cumple uno y sólo uno de los siguientes enunciados:*

- $a = b$.
- $a > b$.
- $a < b$.

*Demostración.* Consideremos $x = a - b$. Por la ley de triconotomia, debemos tener sólo una de las siguiente posibilidades:

- $x = 0$: Entonces, $a - b = 0$ y en consecuencia $a = b$.
- $x \in P$: En ese caso, $a - b = x \in P$ y por definición $a > b$.
- $-x \in P$: En ese caso, $b - a = -(a - b) = -x \in P$ y por definicion $a < b$.

■

**Proposición 2.9.** *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.*

*Demostración.* Por definición, $a < b$ implica que $b - a \in P$. Pero

$$(b + c) - (a + c) = b - a;$$

de lo que podemos concluir que $a + c < b + c$ como deseábamos. ■

**Proposición 2.10.** *Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

*Demostración.* Por la definición de orden, debemos tener que $b - a \in P$ y que $c - b \in P$; por la clausura aditiva, la suma de estos dos números debe pertenecer de igual forma a $P$. En ese caso,

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in P,$$

por lo que $a < c$. ■

**Proposición 2.11.** *Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$.*

*Demostración.* Por hipótesis, $0 - a \in P$, sin embargo $0 - a = -a$, por lo que $-a$ es un número positivo. De igual forma podemos concluir que $-b$ es un número positivo.

Ahora, por la clausura multiplicativa y por la proposición 1,

$$ab = (-a)(-b) \in P,$$

por lo que $ab > 0$ como buscábamos. ■

**Corolario 2.12.** *Para cualquier número $a \neq 0$, $a^2 > 0$.*

*Demostración.* Debemos tener dos casos: O $a > 0$ o $a < 0$. Si $a > 0$, la cerradura multiplicativa implica que $a^2 > 0$. Por otro lado, si $a < 0$, la proposición anterior implica que $a^2 > 0$. Así, $a^2 > 0$, sin importar si $a$ es positivo o negativo. ■

**Corolario 2.13.** $1 > 0$.

*Demostración.* La prueba consiste en una sencilla observación de la propiedad 6, en el caso en que $a = 1$. Tenemos $1 \cdot 1 = 1$ o en otras palabras $1^2 = 1$. Como hemos propuesto que $1 \neq 0$, entonces por la proposición anterior $1 = 1^2 > 0$ como buscábamos. ∎

**Definición 2.2.** Sea $a$ un número cualquiera. Entonces definimos el *valor absoluto de a*, como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

**Teorema 2.14** (Desigualdad del triangulo)**.** *Para números a y b, se satisface*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

*Demostración.* Distinguiremos los cuatro casos posibles,

$$a \geq 0 \text{ y } b \geq 0 \tag{1}$$
$$a \leq 0 \text{ y } b \leq 0 \tag{2}$$
$$a \leq 0 \text{ y } b \geq 0 \tag{3}$$
$$a \geq 0 \text{ y } b \leq 0. \tag{4}$$

Analicemos estas cuatro posibilidades:

- En el caso (1), el resultado se sigue inmediatamente pues $a + b \geq 0$ y entonces

  $$|a + b| = a + b = |a| + |b|.$$

- El caso (2) es también inmediato, pues $-a - b \leq 0$ y esto implica

  $$|a + b| = -a - b = |a| + |b|.$$

- Para el caso (3) debemos observar primero que, al ser $a \leq 0$, entonces se cumple

  $$a \leq -a,$$

  al ser $a$ negativo o cero y en consecuencia $-a$ positivo o cero. Además, usando un argumento similar podemos concluir también que

  $$-b \leq b.$$

  Ahora analizaremos dos subcasos del caso (3):

  - El primero cuando $a + b \geq 0$; si esto se cumpliera, entonces

    $$\begin{aligned} |a + b| &= a + b \\ &\leq -a + b \\ &= |a| + |b|. \end{aligned}$$

- El segundo se presenta cuando $a + b < 0$; si es esto se cumpliera, entonces

$$\begin{aligned} |a+b| &= -a-b \\ &\leq -a+b \\ &= |a|+|b|. \end{aligned}$$

De esto último podemos concluir que en cualquiera de los subcasos de (3) se cumpla la desigualdad

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

- El caso (4) es en realidad el caso (3) con los roles de $a$ y $b$ invertidos, por lo que el argumento que proporcionamos para (3) funcionará de igual forma para (4).

Como en cualquiera de los casos sigue la desigualdad que buscábamos, esto es suficiente para validar el resultado. ■

**Comentario.** Podemos en realidad obtener otra demostración de la desigualdad del triangulo de manera que no tengamos que depender examinar todos los casos. Sin embargo, dicha demostración requiere de un tema que todavía no estamos en posición de tratar con el suficiente detalle: la raíces cuadradas.

**Definición 2.3.** Sea $a$ un número cualquiera. Un número $x \geq 0$ se dirá *una raíz cuadrada de $a$* si

$$x^2 = a.$$

**Comentario.** Lo primero que debemos notar es que los números negativos no poseen raíz cuadrada al ser imposible que el cuadrado de un número resulte en un número menor que cero. Existe un importante resultado que rebasará nuestra capacidad deductiva por el momento: para todo número $a \geq 0$, existe una única raíz cuadrada, la cual se denota por

$$\sqrt{a}.$$

La prueba de este hecho se pospondrá hasta que la última propiedad, la que distingue con mucha más precisión nuestro concepto de número, quede finalmente aclarada. Mientras tanto, no estamos impendidos en realizar una simple observación que se deduce de la definición, ésta es:

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Finalmente con este comentario, estamos en posición de presentar una demostración alternativa de la desigualdad del triangulo.

*Demostración de 2.14 por raíces cuadradas.* Basta observar la siguiente lista de igualdades y desigualdades,

$$\begin{aligned} (|a+b|)^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2 \\ &\leq a^2+2|a|\cdot|b|+b^2 \\ &= |a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2, \end{aligned}$$

de lo que puede concluirse la desigualdad. ■

## 3. Intervalos

Hemos ya establecido los números como un conjunto, lo cual nos permite hablar sin trabajo alguno de su subconjuntos. Algunos de ellos, los usaremos con frecuencia y se describen a continuación.

**Definición 2.4.** Sean $a \leq b$ números reales. *El intervalo abierto determinado por los números $a$ y $b$* es el conjunto de todos los números $x$ para los que $a < x < b$. A este intervalo lo denotamos por $(a, b)$. En otras palabras,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

**Definición 2.5.** Sean $a \leq b$ números reales. *El intervalo cerrado determinado por los números $a$ y $b$* es el conjunto de todos los números $x$ para los que $a \leq x \leq b$. A este intervalo lo denotamos por $[a, b]$. En otras palabras,

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

Estas dos definiciones podemos interepretarlas visualmente como subconjuntos de la recta numérica observando que cada un intervalo abierto, contiene a todos los puntos que se encuentran estrictamente entre $a$ y $b$. Un intervalo cerrado, en contraste, contiene a todos los elementos entre los números $a$ y $b$ además de $a$ y $b$. También, es importante observar que según la definición podríamos considerar el intervalo abierto $(a, a)$ sin embargo, siguiendo la definición debemos concluir de inmediato que $(a, a) = \varnothing$. Esto nos lleva considerar que el conjunto vacío puede ser considerado un intervalo abierto y por comodidad, consideraremos de manera similar como un intervalo abierto al conjunto $\mathbb{R}$. De manera similar, podemos considerar el intervalo cerrado $[a, a] = \{a\}$ y considerar a los conjuntos unitarios como intervalos cerrados.

**Definición 2.6.** Sean $a \leq b$ números reales. *Un intervalo semi-cerrado* cae en una de las siguientes posibilidades:

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

**Definición 2.7.** Sea $a$ un número real. *Un intervalo infinito* es un conjunto que cae en una de las siguientes posibilidades:

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$

En general tendremos la necesidad de hablar de intervalos y cuando exista tal necesidad mencionaremos el término de manera genérica y nos referiremos a cualquiera de los conceptos plasmados en esta sección. En otras palabras, el término *intervalo* estará reservado para conjuntos que presenten alguna de las descripciones plasmadas en las definiciones 2.4, 2.5, 2.6 o 2.7.

## Ejercicios

*Ejercicio* 2.1. ¿Qué número es el inverso aditivo del cero?

*Ejercicio* 2.2. ¿Qué número es el inverso multiplicativo del uno?

*Ejercicio* 2.3. Demuestra lo siguiente:

1. Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, $x = 1$.
2. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
3. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
4. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

*Ejercicio* 2.4. ¿Dónde esta el fallo en el siguiente argumento? Sea $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y) \\ x + y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

*Ejercicio* 2.5. Demuestra lo siguiente:

1. Si $b, c \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$
2. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$
3. Si $a, b \neq 0$, entonces
$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$
4. Si $b \neq 0$, entonces
$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$
5. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$
6. Si $b, c, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

*Ejercicio* 2.6. Demuestra que los inversos aditivos y multiplicativos son únicos.

*Ejercicio* 2.7. Demuestra lo siguiente:

1. Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.
2. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.
3. Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$.
4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
5. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
6. Si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.
7. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
8. Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.
9. Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.
10. Si $a, b \geq 0$, entonces $a^2 < b^2$ implica que $a < b$.

*Ejercicio* 2.8. Demuestra que, si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

*Ejercicio* 2.9. Demuestra lo siguiente:

1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Si $x \neq 0$, entonces
$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$
3. Si $y \neq 0$, entonces
$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|.$$
4. $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

*Ejercicio* 2.10. Demuestra que

$$\text{máx}(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}$$

y

$$\text{mín}(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

Intenta ahora deducir una fórmula para el mínimo y el máximo de tres números.

*Ejercicio* 2.11. Pruébese que la intersección de dos intervalos abiertos es un intervalo abierto. (Sugerencia: Recuerda que el conjunto nulo puede considerarse un intervalo abierto).

*Ejercicio* 2.12. Pruébese que la si la intersección de dos intervalos abierto es distinta del conjunto vacío, entonces la unión de estos intervalos resulta un intervalo abierto.

*Ejercicio* 2.13. Si $[a, b] \subset (a, b)$, demuestra que $c < a$ y $b < d$.

*Ejercicio* 2.14. Existe una forma muy útil de descrbir a los puntos del intervalo cerrado $[a, b]$ suponiendo que $a < b$ de la siguiente manera.

1. Considere el intervalo $[0, b]$, siendo $b > 0$. Demuestra que si $x \in [0, b]$, entonces $x = tb$ para algún $t$ con $0 \leq t \leq 1$. ¿Cúal es el significado del número $t$?¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo $[0, b]$?
2. Demuestra que si $x \in [a, b]$ existe un número $t$ con $0 \leq t \leq 1$ tal que $x = (1 - t)a + tb$.¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo $(a, b)$? ¿Cuál es el punto situado a $3/4$ del intervalo $[a, b]$?
3. Demuestra recíprocamente, si $0 \leq t \leq 1$, entonces $(1 - t)a + tb \in [a, b]$.
4. Demuestra que los puntos del intervalo abierto $(a, b)$ son aquellos números que se pueden expresar por $(1 - t)a + tb$ con $0 < t < 1$.

| **Para entregar**: Ejercicio 2.8 |
| --- |

## Referencias


[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.


Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencia e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.