Semana 14: Conjuntos no finitos

1. Conjuntos contables

Aunque no necesario para avanzar en nuestra discusión, en esta sección utlizaremos los conceptos de número como se introducen en un curso de cálculo. El único objetivo al que servirán es enriquecer con ejemplos los conceptos planteados y con éstos hacer los pormenores de la teoría presentada. Se recomienda que ante cualquier duda que involucre temas relacionados con números, se recurra directamente al texto [Spi12] pues en los primeros capítulos de éste se desarrollan las nociones de número como se usan aquí.

Definición 14.1. Un conjunto A se dirá *numerable* si es equivalente con $\mathbb{N}$ y en ese caso escribiremos $|A| = \omega$. Finalmente, un conjunto se dice *contable* si es finito o numerable.

En particular, debemos observar que $|\mathbb{N}| = \omega$. Además, ningún conjunto finito puede ser numerable por lo que hay dos tipos de conjuntos, completamente distintos, que resultan contables. En el fondo, un conjunto es contable si y sólo si es equivalente con algún subconjunto de los numeros naturales.

Lema 14.1. *Si A es contable y $B \subseteq A$, entonces B es contable.*

Demostración. Como A es contable, entonces existe una función biyectiva $f\colon A \to \mathbb{N}$. Basta entonces formar la función $g\colon B \to f[B]$ definida con la misma regla de correspondencia, i. e., $g(x) = f(x)$ para todo $x \in B$. Como f es biyectiva, lo mismo se puede decir de g, luego B es equivalente con algún subconjunto de los números naturales y el resultado sigue. ■

Cualquier subconjunto de naturales debe resultar contable, es necesario también establecer que el concepto no se limita este tipo de conjuntos, aunque para presentarlo habrá que hacer algunas concesiones.

Ejemplo. Aunque no hemos presentado de manera precisa el conjunto $\mathbb{Z}$, la experiencia no permite afirmar que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. De este conjunto, afirmamos además que es equivalente con $\mathbb{N}$. En efecto, no es difícil verificar que la función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(m) = \begin{cases} 2m & x \geq 0 \\ 2(-m) + 1 & x < 0 \end{cases}$$

es biyectiva mostrando con esto que los conjuntos son equivalentes. En ese caso $\mathbb{Z}$ es numerable y por tanto contable. Es interesante notar que aunque $\mathbb{Z}$ parezca *más grande* que $\mathbb{N}$ por número de elementos, nuestra noción de equivalencia nos muestra que esto es una mera ilusión y que en el fondo, ambos conjuntos poseen igual cantidad de elementos.

Lema 14.2. *Para un conjunto no vacío A, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es contable.*
2. *Existe una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ en A.*
3. *Existe una función inyectiva de A en $\mathbb{N}$.*

Demostración. Si A es contable e infinito, entonces existe un función biyectiva $f\colon \mathbb{N} \to A$ y en ese caso 1 implica 2. Si por otro lado, A es finito, entonces existe una función biyectiva $f\colon [n] \to A$ con la cual podemos definir la función $h\colon \mathbb{N} \to A$ como

$$h(m) = \begin{cases} f(m) & \text{si } m \in [n] \\ f(n) & \text{si } m \notin [n]. \end{cases}$$

Dicha función debe ser sobreyectiva al f ser sobreyectiva. Lo anterior indica que de 1 sigue 2. Supongamos ahora que $f\colon \mathbb{N} \to A$ es una función sobreyectiva. En ese caso, tiene inversa por la derecha $g\colon A \to \mathbb{N}$ la cual debe ser inyectiva. Finalmente, si $f\colon A \to \mathbb{N}$ es una función inyectiva, entonces $\operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{N}$ por lo que A debe ser un conjunto contable. ∎

2. Operaciones con conjuntos contables

Vamos a establecer una serie de resultados acerca de conjuntos numerables que podremos trasladar sin mucho problema a conjuntos contables.

Lema 14.3. *Sean A y B conjuntos contables. Entonces, $A \cup B$ es contable.*

Demostración. Como A y B son contables, podemos encontrar funciones inyectivas $f\colon A \to \mathbb{N}$ y $g\colon B \to \mathbb{N}$. Entonces, la función $h\colon A \cup B \to \mathbb{N}$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} 2 \cdot f(x) & \text{si } x \in A \backslash B \\ 2 \cdot g(x) + 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es una función inyectiva. Según el lema 14.2, el conjunto $A \cup B$ debe ser contable. ∎

Lema 14.4. *El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto contable.*

Demostración. Según el lema 14.2, solamente necesitamos demostrar que existe una función inyectiva $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la cual definimos por

$$f(m,n) = 2^m 3^n.$$

Entonces, si $f(m,n) = f(k,l)$, debemos tener $2^m 3^n = 2^k 3^l$. Para obtener una contradicción, supongamos que $m < k$, la ley de cancelación del producto entre naturales implica $3^n = 2^{k-m} 3^l$ lo cual implicaría que 3^n es un número par lo cual es una contradicción. Luego $m \leq k$. Para descartar $k < m$ procedemos de modo similar y concluir que $m = k$, lo cual implica que $3^n = 3^l$ lo cual implica que $n = l$. En ese caso, la función f es inyectiva y el resultado sigue. ∎

Ejemplo. No es difícil definir la función $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ como $f(m, n) = m/n$. Por la definición del conjunto $\mathbb{Q}$, no es difícil convencernos que dicha función es sobreyectiva. En ese caso, es posible concluir que el conjunto $\mathbb{Q}$ es contable. En particular, como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, dicho conjunto debe ser numerable.

Teorema 14.5. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjunto de modo que el índice I es un conjunto contable. Entonces, es contable también el conjunto*

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

Demostración. Para cada A_i debe existir una función sobreyectiva $f_i \colon \mathbb{N} \to A_i$. Además, como I es contable, debe existir una función $g \colon \mathbb{N} \to I$. En ese caso, podemos definir una función

$$h \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

definida como $h(m, n) = f_{g(m)}(n)$ la cual debe resultar ser sobreyectiva. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es contable, lo anterior es suficiente para mostrar que la unión debe ser también contable. ■

El teorema anterior se abrevia frecuentemente afirmado que la unión contable de conjuntos contables, es contable.

Teorema 14.6. *Para conjuntos contables A y B, $A \times B$ es también contable.*

Demostración. Al ser A y B contables, existen funciones sobreyectivas $f \colon \mathbb{N} \to A$ y $g \colon \mathbb{N} \to B$. Con éstas, es posible definir la función $h \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ como $h(m, n) = (f(m), g(n))$ la cual debe resultar ser sobreyectiva. En ese caso $A \times B$ es contable como se afirma. ■

Ejemplo. Un número real se dice *algebraico* si dicho número es la raíz de un polinomio con coeficientes enteros, i. e., α es algebraico si existe un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ donde $a_k \in \mathbb{Z}$ y $p(\alpha) = 0$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{5}$ es algebraico pues es una raíz del polinomio $x^3 - 5$. Vamos a denotar por A_k al conjunto de números algebraicos que sean raíz de un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con $n < k$ y $\max\{|c_0|, |c_1|, \cdots, |c_n|\} < k$. Debemos notar que hay a lo más k^k polinomios de esta forma y que cada uno tiene a lo más k raíces distintas lo que quiere decir que A_k es finito y tiene a lo más k^{k+1} elementos distintos. Además, el conjunto de números algebraicos resulta simplemente

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

lo cual indica que se puede expresar como la unión contable de contables y por tanto hay *una cantidad contable de números algebraicos* para nuestra sorpresa.

3. Conjuntos no contables

Lema 14.7. *Si B no es contable y $B \subseteq A$, entonces A no es contable.*

Demostración. Es una consecuencia del lema 14.1 pues, si A fuera contable, lo mismo sería B. ■

Toca ahora el turno de explorar la sorprendente posibilidad de tener conjuntos que no resultan contables. Vamos primero a mostrar que ésta es una posibilidad legítima para un conjunto usando un ejemplo muy común para este propósito: $\mathbb{R}$. Vamos a necesitar un resultado preliminar.

Teorema 14.8 (Teorema de los intervalos encajados)**.** *Supongamos que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos cerrados de modo que éstos satisfacen $I_{n+1}I_n$ para todo n. Entonces,*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing.$$

Demostración. Para cada uno de los intervalos en la familia, tomamos $I_n = [a_n, b_n]$. En ese caso, la hipótesis significa simplemente que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ y en consecuencia se deben tener las desigualdades $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Lo anterior, nos permite definir $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ los cuales podemos afirmar sin mucho problema que son no vacíos. Además, si $a_m \in A$, entonces $a_m \leq b_n$ para cualesquiera n y m por lo que $\sup(A) \leq \text{ínf}(B)$. Basta entonces tomar $\sup(A) \leq x \leq \text{ínf}(B)$ lo cual siempre es posible y el cual cumple con $a_n \leq x \leq b_n$ lo que garantiza que x está en todos los intervalos de la familia. Luego, la intersección indicada no puede resultar vacía, confirmando el resultado. ∎

Ejemplo. Supongamos que existe una función inyectiva $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de modo que podemos numerar el conjunto como $f(0), f(1), \ldots$ vamos a mostrar que es imposible que dicha función sea sobreyectiva. Comenzamos tomando un intervalo I_0 de modo que $f(0) \notin I_0$. Continuamos tomando $I_1 \subseteq I_0$ de modo que $f(1) \notin I_1$ y repetimos este proceso para obtener intervalos $I_{n+1} \subseteq I_n$ de modo que $f(n+1) \notin I_{n+1}$. Según el teorema de los intervalos encajados, debe existir un número real x de modo que para todo n se tiene $x \in I_n$, implicando que $x \neq f(n)$ para todo n por lo que el número real x no aparece en la imagen de f y con esto f no puede ser sobreyectiva. Esto quiere decir que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ no son equivalentes y como $\mathbb{R}$ es no finito, entonces constituye un ejemplo de conjunto no contable.

El resultado contenido en el ejemplo anterior es aparentemente paradójico pues, si denotamos como $\mathbb{I}$ al complemento de los racionales sobre $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{I}$ no puede ser contable. Este conjunto $\mathbb{I}$ es llamado *conjunto de los números irracionales* y, según nuestra interpretación de la cardinalidad, hay *significativamente más* irracionales que racionales. Sin embargo, conocemos *muchos más* números racionales que irracionales, ¿dónde están entonces? Este es un ejemplo perfecto para convencernos que la intuición es insuficiente y si queremos confiar en algo, han de ser nuestros razonamientos, los más obscuros y lóbregos, al ser éstos capaces de darnos las respuestas que buscamos aunque no siempre sean de nuestro agrado.

Ejemplo. Hemos mostrado ya que los números algebraicos forman un conjunto contable por lo que podemos indagar de su complemento relativo a $\mathbb{R}$, i. e., los números trascendentes. Como los números reales deben ser la unión de los números algebraicos y los trascendentes, los trascendentes deben ser no contables pues de otra forma los números reales serían contables. Esto quiere decir que existe una cantidad no contable de números trascendentes.

Ejemplo. Consideremos *el conjunto de las sucesiones binarias*, i. e.,

$$\Sigma^* = \{f \mid f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}\}.$$

Debemos observar que es este conjunto no es finito. Además, este conjunto no es contable: Supongamos por el contrario que lo es, esto quiere decir que, al no ser finito, existe una función biyectiva

$H\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ lo cual nos permite escribir el conjunto como si de una lista se tratara tomando $f_n = H(n)$. En ese caso podemos definir una sucesión $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tomando

$$f(n) = 1 - H(n)(n).$$

Es de notar que $f \neq f_n$ para todo n pues $f(n) \neq f_n(n)$ lo cual constituye una contradicción pues en ese caso f no sería una sucesión binaria pero obviamente fue definida como una. Luego, el conjunto Σ^* no es contable.

4. Un jerarquía de conjunto infinitos

Teorema 14.9 (Cantor)**.** *Para un conjunto cualquiera A, no existe una función sobreyectiva de A en 2^A.*

Demostración. Sabemos que existe una función inyectiva del conjunto A a su potencia y lo único que debemos mostrar es que no existe una función sobreyectiva. Procedemos por contradicción suponiendo que existe una función sobreyectiva $f\colon A \to 2^A$. Podemos entonces definir el conjunto

$$S = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

y al ser f sobreyectiva y $S \in 2^A$, debería existir un elemento $s \in A$, de modo que $f(s) = S$. Deben existir solo dos posibilidades:

- Si $s \in S$, entonces $s \notin f(s) = S$. Lo anterior es una contradicción.
- Si $s \notin S$, entonces $s \in f(s) = S$. Lo anterior es de nueva cuenta contradictorio.

Debemos entonces concluir que ninguna de las posibilidades es legítima y eso nos lleva a que no puede existir tal función f. De esto sigue el resultado. ■

Corolario 14.10. *El conjunto $2^{\mathbb{N}}$ no es contable.*

En la teoría de conjuntos axiomática, existe una forma de estrablecer con precisión el significado de la cardinalidad de un conjuntos, situación que hemos obviado en nuestra presentación. Sin embargo, una noción intuitiva fue presentada por Alfred Tarski y que puede ser usada para explicar el significado de la cardinalidad de un conjunto cualquiera. Asumimos, entonces, las siguientes proposiciones:

- Cada conjunto A está asociado con un objeto el cual es su *número cardinal*.
- Dos conjuntos equivalentes tienen el mismo número cardinal.

De esta forma, los números cardinales de los conjuntos finitos son los distintos números naturales y el cardinal de un conjunto numerable es ω. En general, seguiremos usando la notación $|A|$ para denotar la cardinalidad de un conjunto A, abriendo con esto la posiblidad de evaluar *el tamaño* de un conjunto cualquiera. Ahora, podemos dar una aproximación que nos permite comparar dos números cardinales.

Definición 14.2. Para conjuntos cualquiera A y B, diremos que $|A| \leq |B|$ si existe una función inyectiva $f\colon A \to B$. Diremos además que $|A| < |B|$ si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$.

Esta definición, debe observarse que es compatible para conjuntos finitos. De hecho, dicha definición nos permite afirmar sin mucho problema que $n < \omega$ para cualquier natural n. Podemos ir todavía más lejos: Para cualquier conjunto A, sabemos que $|A| < 2^{|A|}$ donde $2^{|A|} = |2^A|$. En particular, debemos tener la siguiente secuencia ordenada de números cardinales:

$$\omega < 2^{\omega} < 2^{2^{\omega}} < \dots$$

lo cual indica que la cardinalidad de estos conjuntos crece y aunque no tenemos la teoría adecuada para probarlo, la cardinalidad de los números reales es uno de tales miembros y puede ser establecida como $|\mathbb{R}| = 2^{\omega}$. Lo anterior exhibe que deben existir conjuntos *más numerosos* que el conjunto de los números reales. Una interesante pregunta que surge de este hecho es intentar conseguir un conjunto A de modo que

$$\omega < |A| < 2^{\omega}.$$

El problema fue planteado por Georg Cantor en 1890 y fue el problema 1 de la famosa lista de David Hilbert presentada en el congreso internacional de matemáticas de 1900. La respuesta negativa a tal problema recibe el nombre de *hipótesis del continuo* y, actualmente, se tiene mucha más información acerca de tal enunciado. Por un lado Kurt Gödel probó que el enunciado es consistente con la teoría de conjuntos y por otro lado Paul Cohen, en 1963, mostró que la hipótesis es independiente de la misma teoría (obteniendo con este trabajo la medalla Fields, el más prestigioso premio en matemáticas). Lo anterior quiere decir que la hipótesis podría ser aceptada como un axioma más, aunque esto ha sido señalado como algo indeseable al no favorecer un universo mucho más rico de objetos y además, como axioma, no parece ni intuitivo ni práctico. Otros, por el contrario creen que un universo de esta naturaleza resulta lo suficientemente predecible y en consecuencia deseable. De cualquier forma, su exploración e investigación han abierto inesperados y versátiles desarrollos que han contribuido no sólo con el avance de lógica matemática sino de la matemática en general.

Ejercicios

Ejercicio 14.1. Demuestra que para un conjunto no finito $A \subseteq \mathbb{N}$ se debe cumplir que $|A| = \omega$.

Ejercicio 14.2. Encuentra un par de conjuntos numerables $A \neq B$ de modo que $A \backslash B$ sea un conjunto finito.

Ejercicio 14.3. Encuentra un par de conjuntos numerables $A \neq B$ de modo que $A \backslash B$ sea de nueva cuenta numerable.

Ejercicio 14.4. Sin usar el teorema 14.5, demuestra que la unión finita de conjuntos contables, es contable.

Ejercicio 14.5. Encuentra un ejemplo de una familia con índice no contable para la cual su unión resulte un conjunto no contable.

Ejercicio 14.6. Sea B un conjunto no contable. Si $f\colon A \to B$ es una función sobreyectiva, demuestra que A no es contable.

Ejercicio 14.7. Demuestra que el conjunto Σ^* de las cadenas binarias no es finito.

Ejercicio 14.8. Dos cadenas binarias, f y g, se dicen relacionadas si existe un natural k de modo que, si $n > k$, entonces $f(n) = g(n)$. Demuestra que dicha relación es de equivalencia en el conjunto Σ^* y que cada clase de equivalencia es un conjunto contable.

Referencias

[CLRT90] Cárdenas, Humberto, Luis, Emilio, Raggi, Francisco y Tomás, Francisco: *Álgebra Superior*. Editorial Trillas, 1990.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Compañia Editorial Continental, 1966.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.