Semana 13: Retículas

1. Retículas

Definición 13.1. Sea $P = (A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada par a y b de elementos de A definimos, si existen, *la disyunción de a y b en P* como $a \vee b = \sup\{a, b\}$ y *la conjunción de a y b en P* como $a \wedge b = \text{ínf}\{a, b\}$. De manera general, para un conjunto $S \subseteq A$, definimos *la disyunción de S en P* como $\bigvee S = \sup S$ y *la conjunción de S en P* como $\bigwedge S = \text{ínf}\, S$.

Ejemplo. El conjunto 2^A ordenado por divisibilidad tiene como el supremo de los conjuntos S y T como $S \cup T$ y como el ínfimo de los mismos al conjunto $S \cap T$. Esto permite afirmar que 2^A es una retícula.

Es interesante preguntar en que casos fallará en existir la conjunción y la disyunción de dos elementos en un conjunto parcialmente ordenado. Para conseguir esto, es importante recordar que el supremo de los elementos a y b corresponde al mínimo del conjunto de cotas superiores, mientras el ínfimo corresponde la máximo del conjunto de cotas inferiores. Esto quiere decir que, si la disyunción de los elementos a y b no existe, esto sólo se puede deber a dos razones: La primera resulta de no existir una cota superior para a y b y la segunda de ser imposible elegir la mínima al existir más de una.

Ejemplo. Consideremos el conjunto $B = \{2, 3, 6, 9\}$ ordenado por divisibilidad (figura 1a). En ese caso, no existen ni cotas superiores ni inferiores para 2 y 9 por lo que no pueden existir ni el supremo ni el ínfimo de estos. En otras palabras, ni $2 \vee 9$ ni $2 \wedge 9$ existen y por tanto el conjunto no es una retícula.

Ejemplo. Consideremos el conjunto $A = \{2, 3, 12, 18\}$ ordenado por divisibilidad del cual podemos observar el diagrama en la figura 1b. Por un lado, el conjunto de cotas superior de 2 y 3 no es vacío pues tanto como 12 como 18 pertenecen a este. A pesar de la apariencias, ordenados por divisibilidad, 12 y 18 no son comparables por lo que $2 \vee 3$ no existe y por razones similares, tampoco existe $12 \wedge 18$.

Definición 13.2. Para un conjunto parcialmente ordenado $P = (A, \leq)$ decimos que P es *una retícula* si para cualesquiera a y b elementos de ésta, existen $a \vee b$ y $a \wedge b$. Además, decimos que P es *una retícula completa* si para cada conjunto $S \subseteq A$, existen $\bigvee S$ y $\bigwedge S$.

En el caso de una retícula completa, puede ser interesante preguntarse que sucede en un caso extremo donde S es el conjunto vacío, supongamos entonces que $S = \varnothing$. Por un lado, todo elemento de A es una cota superior de éste y como debe tener un mínimo, podemos entonces concluir que $\bigvee \varnothing = \text{mín}\, A$. De manera similar, cualquier elemento de A es también una cota inferior del vacío y como se debe tener un máximo, entonces $\bigwedge \varnothing = \text{mín}\, A$. En resumen, una retícula completa debe tener siempre un máximo y un mínimo.

(a) 2 y 9 no tienen cota superior ni cota inferior.

(b) 2 y 3 no tienen mínima cota superior y 12 y 18 no tienen máxima cota inferior.

Figura 1: Conjuntos parcialmente ordenados en los que falla la existencia de algunos supremos e ínfimos en al menos un par de elementos.

Definición 13.3. Sea $L = (A, \leq)$ una retícula. Si A tiene mínimo en L, a este lo representaremos como 0_L y si tiene máximo, a este lo representaremos como 1_L.

Ejemplo. El conjunto 2^A ordenado por contención, es una retícula. No sólo una retícula, una retícula completa. En uno de los ejercicios se prueba que el supremo y el ínfimo en 2^A están dados por la unión y a la intersección respectivamente; esto sugiere que para cualquier subconjunto $S \subseteq 2^A$, indicado como $S = \{A_i\}_{i \in I}$, podemos inferir lo siguiente:

$$\bigvee S = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{y} \quad \bigwedge S = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Esto permite concluir que 2^A debe ser una retícula completa y en consecuencia tiene un máximo y mínimo dados por $0_{2^A} = \varnothing$ y $1_{2^A} = A$.

Ejemplo. Sea D el conjunto de los naturales ordenados por divisibilidad. En ese caso D es una retícula. No es difícil observar que las cotas superiores del conjunto formado por los números m y n son los múltiplos comunes, esto quiere decir que $m \vee n$ es el mínimo común múltiplo de m y n. De manera similar, las cotas inferiores de los números m y n son los divisores comunes, indicando que $m \wedge n$ es el máximo común divisor de m y n. En esta retícula en particular tenemos $0_D = 1$ y $1_D = 0$. A pesar de esto, la retícula no resulta completa.

Como ilustran los ejemplos, ya nos hemos topado en varias ocasiones con retículas aunque no hemos estudiado sus propiedades. Vamos ahora a listar enunciar algunas de las propiedades inmediatas que satisfacen la conjunción y la disyunción.

Proposición 13.1. *Sea $L = (A, \leq)$ una retícula y sean a y b elementos de A. Si $a \leq b$, entonces $a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$. En particular, se debe tener $a \vee a = a$ y $a \wedge a = a$.*

Demostración. Debemos notar que bajo la hipótesis

$$\{a, b\}^u = \{x \in L \mid b \leq x\}$$

y también

$$\{a, b\}^l = \{x \in L \mid x \leq a\}.$$

Entonces el mínimo del conjunto $\{a, b\}^u$ es el elemento b mientras que el máximo del conjunto $\{a, b\}^l$ es el elemento a. En otras palabras $a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$ como buscábamos. La segunda afirmación es inmediata de este hecho. ∎

Proposición 13.2. *Sea $L = (A, \leq)$ una retícula y sean a, b, c y d elementos de A. Si se tienen $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.*

Demostración. Supongamos que $a \leq b$ y $c \leq d$. Afirmamos que $\{b, d\}^u \subseteq \{a, c\}^u$. En efecto, si $s \in \{b, d\}^u$, por definición se cumplen $a \leq b \leq s$ y $c \leq d \leq s$ y por tanto, $s \in \{a, c\}^u$. Ahora, como $b \vee d = \sup\{b, d\} \in \{b, d\}^u$, debemos tener que $b \vee d \in \{a, c\}^u$ y en consecuencia $a \vee c = \sup\{a, c\} \leq b \vee d$. La segunda desigualdad se prueba de manera similar. ■

Proposición 13.3. *Sea $L = (A, \leq)$ una retícula y sean a, b y c elementos de A.*

- *Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $b \vee c = a \vee c$.*
- *Si $b \wedge c \leq a \leq b$ entonces $b \wedge c = a \wedge a$.*

Demostración. Por definición, tenemos que $c \leq \sup\{b, c\} = b \vee c$ y por la proposición 13.1 $(b \vee c) \vee c = b \vee c$ y también $c \leq c$, entonces

$$b \vee c \leq a \vee c \leq (b \vee c) \vee c = b \vee c.$$

Por la antisimetría del orden, lo anterior implica $b \vee c = a \vee c$. La prueba del segundo enunciado sigue del principio de dualidad al ser el dual del primero. ■

Hemos expuesto algunos ejemplos de retículas, sin embargo, hemos ignorado una clase muy atractiva de ellas: Los conjuntos linealmente ordenados. Estos conjunto son retículas pues de acuerdo a la proposición 13.1, si $a \leq b$ entonces $a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$ y en una cadena, cualesquiera elementos son comparables por lo que la disyunción y conjunción siempre existen. Esto en particular indica que son retículas los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ ordenados de manera convencional. De manera curiosa, ninguno es una retícula completa al no presentar ni máximo o mínimo de sí mismos. Sin embargo, si tomamos un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, digamos $[a, b]$ con $a < b$, entonces éste resulta una retícula completa. En contraste, un intervalo cerrado en $\mathbb{Q}$, no es necesariamente una retícula completa, e.g., $[0, \sqrt{2}]$.

Ejemplo. Consideremos el conjunto linealmente ordenado $\mathbf{n}$. Por la discusión anterior, éste debe ser una retícula. Debemos recordar que hemos definido el producto entre conjuntos parcialmente ordenados y bajo lo anterior no es difícil mostrar que $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ es también una retícula. De hecho, la idea intuitiva que podemos tener de retícula es de *red* o *rejilla*. En la figura 2 se puede apreciar una de las tantas posibilidades.

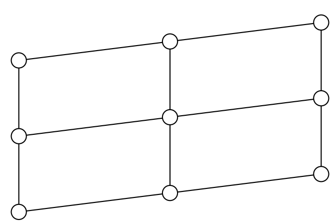

Figura 2: La retícula $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$

Lema 13.4 (Lema de la conexión)**.** *Sea $L = (A, \leq)$ una retícu la y sean a y b elementos de A. Entonces, son equivalentes:*

1. $a \leq b$. *2.* $a \vee b = b$. *3.* $a \wedge b = a$.

Demostración. En la proposición 13.1, hemos probado que 1 implica ambos 2 y 3. Ahora, si asumimos 2 entonces, b es una cota superior de $\{a, b\}$ por lo tanto $a \leq b$ y en ese caso 2 implica 1. De manera similar, si asumimos 3, entonces a es una cota inferior de $\{a, b\}$ por lo que $a \leq b$ mostrando que 3 implica 1. Esto es suficiente para comprobar la equivalencia descrita en el lema. ■

Teorema 13.5. *Sea $L = (A, \leq)$ una retícula y sean a y b elementos cualquiera de A. Entonces, son ciertas las siguiente igualdades:*

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c). \tag{D1}$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c). \tag{C1}$$

$$a \vee b = b \vee a. \tag{D2}$$

$$a \wedge b = b \wedge a. \tag{C2}$$

$$a \vee a = a. \tag{D3}$$

$$a \wedge a = a. \tag{C3}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a. \tag{D4}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a. \tag{C4}$$

Demostración. Debemos comenzar notando que los enunciados **D1**, **D2**, **D3** y **D4** tienen, respectivamente, como enunciados duales a **C1**, **C2**, **C3** y **C4**. En ese caso, sólo se deben probar los primeros. Procedemos a mostrar estas ecuaciones.

D1: Tomemos $s = a \vee b$, $t = s \vee c$, $u = b \vee c$ y $v = a \vee u$. Afirmamos primero que $v \leq t$. En efecto, como s es el supremo del conjunto $\{a, b\}$ y $s \leq t$, entonces $b \leq t$. Bajo un argumento similar, podemos también concluir que $c \leq t$. Las desigualdades $b \leq t$ y $c \leq t$, implican que t es una cota superior del conjunto $\{b, c\}$ y en consecuencia $u \leq t$ al ser u el supremo del conjunto $\{b, c\}$. Ahora, debemos igualmente tener $a \leq t$ y por tanto t es una cota superior del conjunto $\{a, u\}$ y en consecuencia, $v \leq t$ al ser v el supremo del conjunto $\{a, u\}$. Lo anterior, es precisamente lo que se afirmó. Afirmamos ahora que $t \leq t'$. Por definición $a \leq v$ y $u \leq v$, pero como u es el supremo entre b y c, debemos tener $b \leq t$ y por tanto v es una cota superior de a, b. En ese caso, $s \leq v$ y esto afirma que v es una cota superior de $\{s, c\}$ y por tanto $t \leq v$. Lo anterior prueba la afirmación. En resumen, tenemos $t = v$ lo que nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} (a \vee b) \vee c &= s \vee c \\ &= a \vee u \\ &= a \vee (b \vee c). \end{aligned}$$

D2: Basta notar que $\{a, b\} = \{b, a\}$ y por tanto $a \vee b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \vee a$.

D3: El segundo enunciado de la proposición 13.1.

D4: Por definición, $a \wedge b \leq a$ lo cual según el lema de la conexión, es equivalente a tener $(a \wedge b) \vee a = a$. Por **D2**, el resultado que buscamos sigue. ■

El teorema anterior descubre como es que por un lado, si $L = (A, \leq)$ es una retícula como conjunto parcialmente ordenado, podemos inducir operaciones $\vee$ y $\wedge$ que resultan en una retícula como estructura algebraica. Esta aproximación tiene varias ventajas, entre ellas dos al menos aparecerán en lo inmediato. La primera es brindar una representación, a través de los diagramas de Hasse, de un concepto que parecería profundamente algebraico y la segunda proporcionar de manera directa el principio de dualidad para retículas.

Definición 13.4. A cada enunciado p en el marco de la teoría de retículas se le asocia otro enunciado, llamado *el enunciado dual de* p, en símbolos p^{∂}, definido de la siguiente manera:

- Cada ocurrencia de $\vee$ en p será sustituida por $\wedge$ en p^{∂}.
- Cada ocurrencia de $\wedge$ en p será sustituida por $\vee$ en p^{∂}.

Teorema 13.6 (Principio de dualidad). *Si un enunciado p sobre retículas es válido para toda retícula, entonces el enunciado dual de p es también válido para toda retícula.*

2. Subretículas y homomorfismos

Una de las ventajas de tratar a las retículas como estructura algebraica, es que muchos conceptos aparecen de manera natural.

Definición 13.5. Sea L una retícula. Un conjunto $B \neq \varnothing$ tal que $B \subseteq A$, se dice *una subretícula de* L cuando para cualesquiera a y b elementos de B, se tiene también que $a \vee b \in B$ y $a \wedge b \in B$.

Ejemplo. Consideremos el conjunto $2^{[3]}$ ordenado por contenición. No es difícil notar que los conjuntos $B_1 = \{\varnothing, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ y $B_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$ forman subretículas. La comprobación de este hecho puede observar en la figura 3

Figura 3: Dos subretículas (en gris) de $2^{[3]}$.

A diferencia de otras estructuras algebraicas, es posible que un subconjunto de una retícula sea por si sólo una retícula, usando la restricción del orden o la operaciones, sin ser una subretícula. Esto indica que debemos divorciar la dualidad entre orden y operaciones que poseen las retículas del concepto de subretícula que está dominado únicamente por las operaciones y no por el orden.

Ejemplo. De nueva cuenta consideramos la retícula $2^{[3]}$. Entonces, el conjunto

$$B = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

no forma una subretícula de $2^{[3]}$ pues $\{1\} \vee \{3\} = \{1,3\} \notin B$. Si tomamos la restricción de este orden sobre B, no es difícil observar que éste forma una retícula. En la figura 4 se pueden observar los diagramas que representan a B como subconjunto y como retícula.

(a) El conjunto B (en gris) como subconjunto no vaćio no resulta una subretícula.

(b) El conjunto B, sin embargo, forma una retícula por sí mismo.

Figura 4: Un subconjunto no vacío que no es una subretícula pero es una retícula.

Definición 13.6. Sean $L = (A, \vee, \wedge)$ y $K = (B, \curlyvee, \curlywedge)$ retículas y sea $f\colon A \to B$ una función. La función f se dice:

- *Un homomorfismo de retículas* si, para cualesquiera a y b elementos de A,

$$f(a \vee b) = f(a) \curlyvee f(b) \quad \text{y} \quad f(a \wedge b) = f(a) \curlywedge f(b).$$

- *Una inmersión de retículas* si es inyectiva y un homomorfismo de retículas.
- *Un isomorfismo de retículas* si es biyectiva y una inmersión de retículas.

Si entre las retículas L y K existe una inmersión de retículas, diremos que *L se sumerge en K*, lo cual denotaremos por $L \hookrightarrow K$. Por otro lado, si existe un isomorfismo entre las retículas L y K, diremos que *L y K son retículas isomorfas*, lo cual denotaremos usando el símbolo $L \cong K$.

Ejemplo. Observemos primero que $2^{[2]} \subset 2^{[3]}$ por lo que podemos considerar *la función de inclusión*, $i\colon 2^{[2]} \to 2^{[3]}$ definida como $i(S) = S$. A pesar de las apariencias debe notarse que esta función no es la identidad pero la restricción de ésta a un subconjunto. Por esta razón, no es difícil convencernos que i es inyectiva y además resulta un homomorfimo entre retículas. Esto indica que podemos sumergir la retícula $2^{[2]}$ en la retícula $2^{[3]}$ usando la inclusión como subconjunto. Este hecho puede observarse en la figura 5.

Es importante no dejarse llevar por las apariencias y confundir las funciones funciones que preservar el orden en un retícual (funciones monótonas) con las funciones que preservan la estructura algebraica en las retículas (homomorfismos entre retículas). En realidad, es posible tener una función monótona que sea un homomorfismo entre retículas.

Ejemplo. Consideremos los naturales ordenados por divisibilidad, los subconjuntos $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{0,1,2,3,6\}$. No es difícil convencernos que este par de conjuntos resultan subretículas y por tanto retículas. Consideremos, también, $i\colon A \to B$ como la función inclusión al ser $A \subset B$, i.e.,

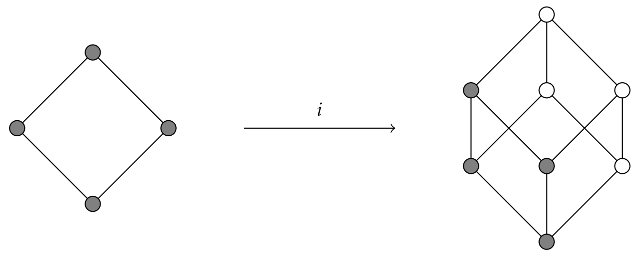

Figura 5: Una inmersión de la retícula $2^{[2]}$ en la retícula $2^{[3]}$.

$i(m) = m$. No es difícil observar que i es monótona a razón que los conjuntos están ordenados por divisibilidad. Sin embargo (al ser retículas y tomando $\vee$ y $\curlyvee$ como las disyunciones para A y B, respectivamente) debemos tener $2 \vee 3 = 0$ pero $2 \curlyvee 3 = 6$, eso implica que

$$i(2 \vee 3) = 0 \neq 6 = i(2) \curlyvee i(3).$$

La anterior igualdad contradice la definición de homomorfismo entre retículas y la función i no es un homomorfismo a pesar de ser monótona.

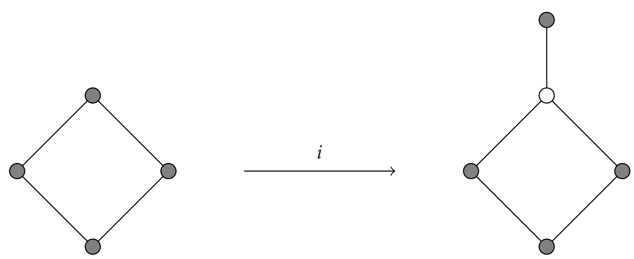

Figura 6: Una función monótona que no es un homomorfismo de orden.

Proposición 13.7. *La función inversa de un isomorfismo de retículas, es un isomorfismo de retículas.*

Demostración. Sean $L = (A, \vee, \wedge)$ y $K = (B, \curlyvee, \curlywedge)$ retículas y sea $f\colon A \to B$ un isomorfismo entre estas retículas. Si $f^{-1}\colon B \to A$ es la inversa de f, debemos probar que ésta es un homomorfismo. Para conseguir esto, supongamos que k y l son elementos de B. Como f es suprayectiva, debemos tener $f(a) = k$ y $f(b) = l$ para algunos a y b elementos de A. En ese caso,

$$f(a \vee b) = f(a) \curlyvee f(b) = k \curlyvee l,$$

y en consecuencia

$$f^{-1}(k \curlyvee l) = a \vee b = f^{-1}(k) \vee f^{-1}(l).$$

De manera similar, podemos probar que

$$f^{-1}(k \curlywedge l) = f^{-1}(k) \wedge f^{-1}(l).$$ ■

Ejemplo. Consideremos los conjuntos $\{0,1,2,3\}$ y $2^{[2]}$ ordenados por divisibilidad y contención, respectivamente. No es difícil convencernos que la función $f\colon \{0,1,2,3\} \to 2^{[3]}$ definida por $f(0) = \{1,2\}$, $f(1) = \varnothing$, $f(2) = \{1\}$ y $f(3) = \{2\}$ es biyectiva. Además, basta inspeccionar el orden en cada uno para convercernos que f es una inmersión de orden por lo que f es un isomorfismo de orden. El teorema anterior, entonces, garantiza que f es también un isomorfismo entre retículas y esto quiere decir que las retículas son isomorfas.

Ejercicios

Ejercicio 13.1. Sea A un conjunto parcialmente ordenado.

a) Usando un argumento por vacuidad, muestra que $\varnothing^u = A$.

b) Usando un argumento por vacuidad, muestra que $\varnothing^l = A$.

Ejercicio 13.2. Considera el siguiente subconjunto de $2^{\{a,b,c,d,e\}}$:

$$B = \{\varnothing, \{e\}, \{a,c\}, \{d,e\}, \{c,d,e\}, \{a,d,e\}, \{a,b,e\}, \{a,c,d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}$$

Si B está ordenado por contención, dibuja su diagrama de Hasse y determina si

a) B es una retícula.

b) B es una retícula completa.

c) B es una subretícula de $2^{\{a,b,c,d,e\}}$.

Ejercicio 13.3. En este ejercicio vamos a tomar una posición distinta a la definición que hemos dado. Diremos que $L = (A, \vee, \wedge)$ es una retícula si se satisfacen las igualdades **D1**, **D2**, **D3**, **D4**, **C1**, **C2**, **C3** y **C4**. En ese caso, se puede definir la relación en A como $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$. Demuestra que la relación en cuestión es un orden en A.

Ejercicio 13.4. Usando la definición anterior, convéncete que $N = (\mathbb{N}, (\cdot,\cdot), [\cdot,\cdot])$ es una retícula, donde (a,b) y $[a,b]$ son el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números enteros. Demuestra además que la retícula N está acotada y $0_N = 1$ y $1_N = 0$.

Ejercicio 13.5. Demuestra que si $L = (A, \leq)$ y $K = (B, \leq)$ son retículas, el conjunto $L \times K$ puede resultar de igual forma en retícula definiendo $(a,b) \leq (c,d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$.

Ejercicio 13.6. Sean L y K retículas acotadas y sea $M = L \times K$. Demuestra que existen a y b elementos en la retícula M de forma que

$$a \wedge b = (0_L, 0_K) \quad \text{y} \quad a \vee b = (1_L, 1_K).$$

Ejercicio 13.7. Demuestra que una retícula L se satisfacen los siguientes enunciados:

1. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
3. $a \geq c$ implica $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c$.
4. $a \leq c$ implica $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Para entregar: Ejercicio 13.5

Referencias

[DP02] Davey, Brian A. y Priestley, Hilary A.: *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, 2002.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos textos que han sido usados para preparar el curso de «Matemáticas discretas» impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y sea sujeto a cambios constantes.