Semana 6: Otra vez límites

1. Algunos límites trigonométricos

En esta sección haremos uso de los teoremas que hemos probado en la sección pasada y al mismo tiempo lograremos describir un importante límite que involucra funciones trigonométricas. Comenzaremos utilizando la definición de límite para obtener un límite conocido y de ahí desprender algunos otros, entre ellos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Teorema 6.1.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que la función seno es estrictamente creciente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ por lo que si $|x| < \pi/2$, entonces,

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| < |\operatorname{sen}(x)|.$$

Basta entonces elegir $\delta = \min(\pi/2, \varepsilon)$, pues si $0 < |x| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| &< |\operatorname{sen}(x)| \\ &< |x| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que el límite existe y es 0. ∎

Este límite anterior abrirá la puerta para calcular otros límites que involucren funciones trigonométricas. Proponemos ahora un límite más.

Teorema 6.2.

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1.$$

Demostración. Podemos expresar

$$\cos(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

y así hacer uso de los teoremas de la suma y producto de límites de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\cos(x) &= \lim_{x\to 0}\left(1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0} 1 - \left(\lim_{x\to 0} 2\right)\left(\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\\
&= 1-2\cdot 0\\
&= 1.
\end{aligned}$$

∎

Corolario 6.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1.$$

Demostración. Es una aplicación directa del teorema del inverso del límite, utilizando el resultado anterior, i.e.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\cos(x)}.$$ ∎

Hemos llegado a un punto donde podremos derivar sin mucho trabajo un límite que en principio es complicado suponer a donde tiende, sin embargo y con todo el trabajo que hemos hecho, resultará sencillo y no involucraremos la definición de límite, solamente resultados que ya hemos expuesto.

Teorema 6.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Demostración. Debemos recordar que para $0 < x < \pi/2$

$$\cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Podemos ir más allá para afirmar que lo mismo sucede cuando $\pi/2 < x < \pi/2$. Esto se debe a que $\cos(-x) = \cos(x)$ y

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}.$$

Podemos entonces usar el teorema de la intercalación junto al teorema anterior y su corolario:

$$1 = \lim_{x\to 0}\cos(x) \le \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \le \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1.$$

Esto simplemente significa que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$ ∎

Terminamos esta sección presentando un ejemplo de la utilidad del resultado anterior.

Ejemplo. Calculemos el siguiente, con $b \neq 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$$

En ahora relativamente sencillo, usando el ejercicio 6.6, realizar la estimación:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}} \\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

2. Límites laterales

Existen modificaciones que se pueden realizar a la definición de límite para poder interactuar diferente con algunas clases de funciones. Por ejemplo, podríamos tener que una función sólo está definida para números $x \geq a$ para algún número a, en ese caso el límite tradicional no sería aplicable. Sin embargo, podemos proponer la siguiente función de límite para evaluar si en la región que está definida, la función tiende hacia algún número.

Definición 6.1. Se dice que *el límite de la función f tiende hacia L en a por la derecha*, si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ de forma que,$0 < x - a < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por otro lado, se dice que *el límite de la función f tiende hacia L en a por la izquierda*, si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que $0 < a - x < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición 6.2. Denotaremos que el límite de la función f tiende hacia L en a por la derecha, escribiendo

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

De manera similar, denotaremos que el límite de la función f tiende hacia L en a por la izquierda, escribiendo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Teorema 6.5. *El* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe si y sólo si*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

En ese caso, además se debe cumplir

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Demostración. La prueba se debe realizar como ejercicio (6.14). ∎

Ejemplo. Hemos probado ya que la función $f(x) = |x|/x$ carece de límite en 0. La prueba de este hecho, debe recordarse, resultó algo elaborada. Podemos usar el teorema 6.5 y notar sencillamente que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

De esta forma, podemos concluir que el $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe.

Ejemplo. Supongamos que $\lim_{x \to 0^+} f(x)) = L$ y que f es una función impar, i.e., $f(-x) = -f(x)$ para todo x. Según el ejercicio 6.11, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(-x)$$

por lo que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0^+} f(x) \\ &= \lim_{x \to 0^-} f(-x) \\ &= \lim_{x \to 0^-} -f(x) \\ &= -L. \end{aligned}$$

Es ese caso, podemos concluir que $L = 0$. Esto quiere decir que las funciones impares deben tener límite 0 al aproximarse a 0, si es que éste existe.

Por analogía con los teoremas fundamentales de límites, uno puede probar los dos siguientes teoremas que involucran no ya límites comunes, sino límites laterales. No por ello habrá cambio en los resultados.

Teorema 6.6. *Si se cumplen* $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to a^+} g(x) = M$*, entonces:*

$$\lim_{x \to a^+} (f + g)(x) = L + M$$

$$\lim_{x \to a^+} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$$

y además, si $M \neq 0$*, entonces*

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}.$$

Teorema 6.7. *Si se cumplen* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to a^-} g(x) = M$*, entonces:*

$$\lim_{x \to a^-} (f + g)(x) = L + M$$

$$\lim_{x \to a^-} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$$

y además, si $M \neq 0$*, entonces*

$$\lim_{x \to a^-} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}.$$

3. Límites al infinito

Podemos de igual forma pensar de manera formal en el infinito. Habrá que tener cuidado con la siguiente definición, pues podemos vernos tentados a concluir que ∞ es un número. Por el contrario, se trata sólo de una manipulación formal.

Definición 6.3. Decimos que *el límite de f tiende hacia L en ∞*, cuando para toda $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que, si $x > k$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. De igual forma afirmamos que *el límite de f tiende hacia L en $-\infty$*, cuando para toda $\varepsilon > 0$ existe $k < 0$ tal que, si $x < k$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición 6.4. Para expresar que el límite de f tiende hacia L en ∞, escribiremos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

De manera similar, para expresar que el límite de f tiende hacia L en $-\infty$, escribiremos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Ejemplo. Vamos a mostrar la siguiente igualdad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x-4} = 3.$$

Para mostrar esto, supongamos que tenemos $x \neq 4$, en ese caso

$$\begin{aligned}\frac{3x+5}{x-4} - 3 &= \frac{3x+5-3x+12}{x-4} \\ &= \frac{17}{x-4}.\end{aligned}$$

En ese caso, para $\varepsilon > 0$, basta elegir $M = 17\varepsilon + 4$ y obtener, para $x > M$ que

$$\left|\frac{3x+5}{x-4} - 3\right| = \left|\frac{17}{x-4}\right| < \varepsilon.$$

Esto es suficiente para afirmar que el límite que afirmamos que existe.

Ejemplo. Podemos usar la definición para obtener el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{5x^2+3x+1}.$$

Para encontrar este límite, supongamos que $x > 1$ para obtener que

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{5x^2+3x+1} &= \frac{2x+1}{5x^2+3x+1} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-1}} \\ &= \frac{2+x^{-1}}{5x+3+x^{-1}} \\ &< \frac{3}{5}x^{-1}.\end{aligned}$$

En ese caso podemos tomar $M = \text{máx}(1, 3/(5\varepsilon))$, pues si $x > M$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x+1}{5x^2+3x+1}\right| &< \frac{3}{5}x^{-1} \\ &< \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\varepsilon \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

De lo que podemos simplemente afirmar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{5x^2+3x+1} = 0.$$

Ejemplo. Podemos usar la definición anterior para evaluar el límite de un función que nos hemos encontrado a menudo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y elijamos $M = 1/\varepsilon > 0$, si $x > M$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\right| &= \frac{1}{x} \\ &< \frac{1}{M} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Ejemplo. Vamos a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

La prueba será muy similar al ejemplo anterior. Supongamos que $\varepsilon > 0$ y elijimos de nueva cuenta $M = 1/\varepsilon > 0$ y si $x > M$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| &\leq \frac{1}{x} \\ &< \frac{1}{M} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Lo que implica precisamente que el límite es 0 como buscábamos.

Ejemplo. El ejemplo anterior se puede generalizar un poco más, supongamos que f es acotada con cota K. Si suponemos que $\varepsilon > 0$ y elejimos $M = K/\varepsilon$, entonces, para cualquier $x > M$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \frac{|f(x)|}{x} \\ &\leq \frac{K}{x} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Así como en el caso de los límites que no involucran infinito, podemos formular una versión de los teoremas fundamentales de límites los cuales deben ser sencillos de probar por analogía y su prueba debe realizarse como un ejercicio (6.15).

Teorema 6.8. *Si se cumplen* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$*, entonces:*

$$\lim_{x\to\infty} (f+g)(x) = L+M,$$

$$\lim_{x\to\infty} (f\cdot g)(x) = L\cdot M$$

y además, si $M \neq 0$*, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}.$$

Teorema 6.9. *Si se cumplen* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = M$*, entonces:*

$$\lim_{x\to-\infty} (f+g)(x) = L+M,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f\cdot g)(x) = L\cdot M$$

y además, si $M \neq 0$*, entonces*

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}.$$

Ejemplo. Vamos a mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Mostraremos el resultado por inducción. El caso en que $n = 1$, es un ejemplo que ya hemos probado. Supongamos entonces que es válido para $n = k$, i.e.,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Debemos notar que

$$\frac{1}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^k}\cdot\frac{1}{x}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{k+1}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k}\right)\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ejemplo. Vamos a mostrar que

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2+2}{t^3+t^2-1} = 0.$$

Para conseguirlo, usaremos una serie de igualdades entre límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2+2}{t^3+t^2-1} &= \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{t^2+2}{t^3}}{\frac{t^3+t^2-1}{t^3}} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1}{t}+\frac{2}{t^3}}{1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}} \\
&= \frac{0}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Este tipo de límite guarda también relación con la no existencia del límite clásico como una transformación de variable indicada en el siguiente teorema.

Teorema 6.10.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $M > 0$ tal que para todo $y > M$, entonces

$$|f(y) - L| < \varepsilon.$$

Basta entonces elegir $\delta = 1/M$, en ese caso si $0 < x < \delta$ entonces $1/x > M$ y en consecuencia

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - L \right| < \varepsilon,$$

lo anterior significa que

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Por el contrario, supongamos $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < y < \delta$, se tiene

$$\left| f\left(\frac{1}{y}\right) - L \right|.$$

De manera análoga al párrafo anterior podemos elegir $M = 1/\delta > 0$, pues en caso de tener $x > M$, $1/x > \delta$ por lo que

$$\left| f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) - L \right| = |f(x) - L| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Teorema 6.11.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Demostración. La prueba es similar al teorema anterior y debe realizarse como ejercicio (6.16). ■

Definición 6.5. Afirmamos que *el límite de f tiende hacia ∞ en a*, si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para todo x si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M$. De la misma forma *f tiende hacia $-\infty$ en a*, si para todo M existe $\delta > 0$, tal que para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) < N$.

Definición 6.6. Denotaremos que el de límite de f tiende hacia ∞ en a como

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

De manera similar, denotaremos que el límite de f tiende hacia ∞ en a como

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Ejemplo. Afirmamos que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Sea $M > 0$. Tomemos

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{M}\right),$$

en ese caso si $0 < |x| < \delta$, entonces $|x| < 1$ y $0 < x^2 < |x|$ como además $|x| < 1/M$, entonces

$$\frac{1}{x^2} > M,$$

lo que satisface la definición que hemos proveído y así afirmar

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Vamos por último a dejar sin definición algunos otros conceptos de límite a razón que bajo estas definiciones no debería de existir problema en encontrar el significado preciso de expresiones como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

o

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

Ejemplo. Para ilustrar los límites combinados, se pueden probar muy fácilmente que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

y también

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ejercicios

Ejercicio 6.1. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$.

Ejercicio 6.2. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 3} \frac{4}{(x-3)^2}$.
2. $\lim_{x\to 4} \frac{x+3}{x^2-16}$.
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x+3}$.
4. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$.
5. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2+3}$.
6. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^3}$.
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.
8. $\lim_{h\to \infty} \frac{3x+2}{x^2+3x+1}$.
9. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{3x^2+2}$.
10. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x+1}$.

Ejercicio 6.3. Encuentra los siguientes límites usando los métodos que creas convenientes.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.
2. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{-x^2+1}$.
3. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.
4. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.
7. $\lim_{x\to a} \frac{x^3-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.
8. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.
9. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

Ejercicio 6.4. Demuestrese que si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces el

$$\lim_{x\to 0} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Podemos generalizar lo anterior. Suponga que para una función h existe un número M tal que

$$|h(x)| \leq M,$$

si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, demuestra que

$$\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0.$$

Ejercicio 6.5. Sea c un número distinto de 0. Demuestra que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(cx)}{x} = c.$$

Ejercicio 6.6. Sea c un número cualquiera. Demuestra que, siempre que exista algunos los límites,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(cx).$$

Ejercicio 6.7. Sea c un número distinto de 0. Demuestra que, siempre que exista alguno de los límites,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a/c} f(cx).$$

Ejercicio 6.8. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$$

Ejercicio 6.9. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

existe si y sólo si $m \geq n$. (Sugerencia: El límite fácil es

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0;$$

realiza las operaciones necesarias para mostrar que esta es la única posibilidad).

Ejercicio 6.10. Demuestra que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h^2)$$

.

Ejercicio 6.11. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x)$$

.

Ejercicio 6.12. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0^+} f(-x)$$

.

Ejercicio 6.13. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

.

Ejercicio 6.14. Demuestra que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Ejercicio 6.15. Demuestra los teoremas 6.8 y 6.9.

Ejercicio 6.16. Demuestra que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Ejercicio 6.17. Proporciona una definición para las expresiones

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.
3. $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.
4. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$.

Ejercicio 6.18. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \infty.$$

Ejercicio 6.19. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x).$$

Ejercicio 6.20. Calcula el valor de el

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a+h)$$

y demuestra con esto que

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a).$$

Ejercicio 6.21. Calcula el valor de el

$$\lim_{h\to 0} \cos(a+h)$$

y demuestra con esto que

$$\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a).$$

Para entregar: Ejercicio 6.19

Referencias

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencia e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.