Semana 12: Conjuntos finitos y contables II

1. Funciones entre conjuntos finitos

Hemos determinado ya *el tamaño* de dos operaciones elementales de conjuntos: LA unión y el producto cartesiano. Junto a éstas, hemos logrado también determinar *el tamaño* de otras operaciones que dependen de la alguna de ellas o las dos (resvisa los ejercicios de la semana pasada). Vamos ahora a estudiar un par de objetos un poco más complicados: Conjuntos de funciones. No debe preocuparnos demasiado que los objetos que manipularemos sean funciones, en el fondo no hay mucha diferencia tan pronto esté claro el concepto de función.

Definición 12.1. Para conjuntos A y B, definimos *el conjunto de todas las funciones de A en B* como

$$B^A = \{f \mid f\colon A \to B\}.$$

Lo que intentaremos realizar en esta sección es encontrar el número de funciones entre A y B, i.e., la cardinalidad del conjunto B^A. La idea recae, como se podría predecir, en formular una función que tome funciones como sus argumentos. En esencia, una función de este tipo no es significativamente diferente a una que transforma números a las cuales (con un poco de suerte) ya nos hemos acostumbrado.

Lema 12.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, son equivalentes los conjuntos*

$$B^{[n+1]} \quad y \quad B^{[n]} \times B$$

Demostración. Para una función $f\colon [n+1] \to B$, podemos simplemente tomar la restricción de f al conjunto $[n]$ para obtener la función $f\mid_{[n]}\colon [n] \to B$ junto al elemento $f(n+1)$. Por otro lado, si tenemos una función $g\colon [n] \to B$ una función y elemento de $b \in B$, simplemente podemos extender la función al conjunto $[n+1]$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [n] \\ b & \text{si } x = n+1, \end{cases}$$

notando particularmente que $f\mid_{[n]} = g$. No es difícil ver que estas asignaciones son inversas una de la otra por lo que los conjuntos son equivalentes como se afirmó. ■

Como se puede observar, desde el punto de vista de la equivalencia entre funciones, la notación para el conjunto de funciones se asemeja a un exponente. Aunque técnicamente son conceptos distintos, el lema anterior justifica la notación como exponentes.

Lema 12.2. *Sean A_1, A_2 y B conjuntos de forma que A_1 y A_2 son equivalentes. Entonces, también son equivalentes los conjuntos*
$$B^{A_1} \quad y \quad B^{A_2}.$$

Demostración. En realidad no es difícil ver esto tomando una función biyectiva $h\colon A_1 \to A_2$. En ese caso, si $f\colon A_1 \to B$ es una función cualquiera, entonces se puede construir la función

$$f \circ h^{-1}\colon A_2 \to B$$

y también, si $g\colon A_2 \to B$ es una función entonces se puede también construir la función

$$g \circ h\colon A_1 \to B.$$

En ese caso, podemos tomar las asignaciones $f \mapsto f \circ h^{-1}$ para cualquier $f \in B^{A_1}$ y $g \mapsto f \circ h$ para cualquier $g \in B^{A_2}$. No es complicado ver que estas reglas definen un par de funciones inversas una con la otra por lo que los conjuntos son equivalentes. ■

Las pruebas a los resultado anteriores evitan algunos pasos cruciales (aunque no por eso dejan de ser válidas). Para aumentar la comprensión de las pruebas, se pueden consultar los primeros ejercicios de estas notas, en los cuales se obliga a escribir muchos de los detalles omitidos y con los cuales se ganará comprensión del tema en cuestión.

Teorema 12.3. *Sean A y B conjuntos finitos. Entonces, el conjunto B^A es finito. Además,*

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}.$$

Demostración. Como A es finito, el conjunto es equivalente a un conjunto $[m]$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Según el lema anterior, es suficiente probar que $|B^{[m]}| = n^m$ tomando n como la cardinalidad de B. Mostraremos esta última igualdad por inducción. Para $m = 0$, debemos notar que $B^{[0]}$ es un conjunto que tiene sólo un elemento pues sólo existe una función que tiene como dominio al conjunto vacío y en ese caso
$$\left|B^{[0]}\right| = 1 = n^0.$$

Supongamos ahora que se satisface $\left|B^{[m]}\right| = n^m$; entonces por el lema 12.1, son equivalentes los conjuntos $B^{[m+1]}$ y $B^{[m]} \times B$. En ese caso,

$$\left|B^{[m+1]}\right| = |B^{[m]}| \cdot |B| = n^m \cdot n = n^{m+1}.$$ ■

Es interesante notar que la prueba de teorema anterior no hace uso de ninguna función biyectiva para determinar la cardinalidad del conjunto. Simplemente, utiliza los lemas que han sido probados con anterioridad para reconstruir el resultado. Más interesante es que el teorema anterior sea capaz de resolver un problema en matemáticas: La cardinalidad del conjunto potencia. En el fondo, esto es un ejemplo de matemáticas aplicadas a las matemáticas (sugiriendo que la distinción entre matemáticas y matemáticas aplicadas no parece ser significativa). Para mostrar el resultado comentado, debemos primero dar garantía de un lema muestra que el conjunto potencia es, en el fondo, un conjunto de funciones particular.

Lema 12.4. *Para un conjunto cualquiera A, son equivalentes los conjuntos*

$$2^A \quad y \quad [2]^A$$

Demostración. No es complicado observar que para cada $B \subseteq A$, existe una función $\chi_B \colon A \to [2]$ definida como

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 2 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

Además, si $\chi \colon A \to [2]$ es una función definimos el conjunto

$$B = \{x \in A \mid \chi(x) = 1\}.$$

Por la construcciones que hemos dado, no es difícil ver que estas asignaciones son inversas la una con la otra por lo que son equivalentes los conjuntos como se mencionó. ■

Teorema 12.5. *Para un conjunto finito A, se tiene*

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|}.$$

Demostración. Como el conjunto $[2]^A$ es finito y tiene cardinalidad 2^m donde m es el cardinalidad del conjunto A, el lema anterior garantiza que el conjunto 2^A debe tener la misma cardinalidad de lo que sigue el resultado. ■

2. Aplicaciones

No es difícil ver el teorema 12.3 es una expresión particular del principio del producto pero podemos formular el teorema como un principio de conteo de la siguiente manera:

Principio de las ordenaciones con repetición: Si queremos elegir de manera ordenada y permitiendo repetición, m objetos de un total de n objetos distintos, entonces podemos realizar esto de n^m maneras distintas.

Ejemplo. Para realizar un sorteo se deben elegir 5 dígitos de manera ordenada. Para conseguir esto, se escriben todos los dígitos en papeletas y se introducen a una caja y se extraen uno a uno devolviendo en cada ocasión la papeleta a la caja. Para poder analizar cuántas posibilidades existen en total se deben considerar simplemente que hay 10 dígitos y deseamos extraer 5 papeletas en total por lo que hay $9^5 = 59049$ posibles resultados del sorteo.

Ejemplo. El sistema de numeración *octal* utiliza la base 8 para expresar los números naturales. Esto quiere decir, por ejemplo, que el número 123 en base 8 representa al número:

$$1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 83.$$

Podemos entonces afirmar que, usando 5 dígitos, podemos representar $8^5 = 32768$ números distintos en base 8. Podemos extender el resultado de manera sencilla: En general, usando n dígitos, podemos representar 8^n números distintos usando la base 8.

Es importante notar que los ejemplos anteriores pueden resolverse utilizando la regla del producto pero en algunas ocasiones resulta más sencillo identificar el problema utilizando alguno de los principios que han sido estudiados y que pueden proveernos de una respuesta directa con muy poco análisis. También, podemos combinar este principio con otros de los que hemos visto para simplificar algunos problemas.

Ejemplo. El código Morse está compuesto por dos símbolos $\cdot$ y $-$. Una *palabra* en código Morse es una secuencia de estos símbolos a la cual se da un significado especial en nuestro lenguaje. Por ejemplo, la letra A está representada por la palabra $\cdot\ -$ mientras la letra B se representa por la palabra $-\ \cdot\ \cdot\ \cdot$ Por mucho tiempo, este código se usó para transmitir mensajes telegráficos y es de cierta utilidad limitar el tamaño de la palabra al transmitir un mensaje. Fijando el tamaño de la palabra en 10 y concluir que existen $2^{10} = 1,024$ palabras de ese tamaño exactamente. En general, si la palabra tiene tamaño n, entonces existen 2^n formas diferentes de elegir una palabra en código Morse. Podemos además preguntar cuantas palabras hay de tamaño a lo más 10, lo cual se puede obtener sumando el total de palabras de los tamaños hasta 10, i.e.,

$$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = 2046.$$

De igual manera, podemos generalizar esto preguntado cuál será el total de palabras de tamaño a lo más n lo cual resulta simplemente

$$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1).$$

Ejercicios

Ejercicio 12.1. En el lema 12.1, parecen omitirse muchos detalles, en este ejercicio intentaremos resolver la mayoría.

a) El primera parte se toma un función $f\colon [n+1] \to B$ y se define una pareja en $B^{[n]} \times B$ utilizando la restricción $f\mid_{[n]}$ y el elemento $f(n+1)$. Muestra que este proceso define una función $F\colon B^{[n+1]} \to B^{[n]} \times B$, encontrando su regla de correspondencia.

b) En el segundo paso se toma una pareja (g, b) en el conjunto $B^{[n]} \times B$ y se define una función $f\colon [n+1] \to B$. Muestra que este proceso define una función $G\colon B^{[n]} \times B \to B^{[n+1]}$ encontrando su regla de correspondencia.

c) Finalmente, se afirma que los procesos son inversos uno con otro. Demuestra que esto es el caso, mostrando que las funciones F y G son inversas una con otra, concluyendo con esto que los conjuntos son equivalentes.

Ejercicio 12.2. En el lema 12.2 se proponen un par de funciones las cuales muestran la equivalencia entre los conjuntos. Vamos a completar ahora los detalles:

a) Utilizando la discusión de la prueba, define las funciones $F\colon B^{A_1} \to B^{A_2}$ y $G\colon B^{A_2} \to B^{A_1}$ utilizando las reglas de correspondencia que se proveen.

b) Demuestra que F y G son inversas una con otra, concluyendo con esto que los conjuntos son equivalentes.

Ejercicio 12.3. Como afirma el teorema 12.3, convéncete que es suficiente probar que la cardinalidad de $B^{[n]}$ es n^m para mostrar que la cardinalidad de B^A es la misma, tomando m como la cardinalidad de A y n como la cardinalidad de B.

Ejercicio 12.4. En el lema 12.4, se proponen un par de funciones para mostrar la equivalencia entre los conjuntos en cuestión. Vamos a explicar un poco más su naturaleza.

a) Primero, para cada conjunto $B \subseteq A$, se exhibe una función $\chi_B \colon A \to [2]$. Convéncete que este proceso define una función $F \colon 2^A \to [2]^A$.

b) De manera similar, para cada función $\chi \colon A \to [2]$ se exhibe un subconjunto $B \subseteq A$ asociado. Convéncete que este proceso define una función $G \colon [2]^A \to 2^A$.

c) Finalmente, muestra que F y G son inversas una con otra, concluyendo con esto que los conjuntos son equivalentes.

Ejercicio 12.5. Sean A, B y C conjuntos de forma que $B \cap C \neq \varnothing$. Demuestra que son equivalentes los conjuntos

$$A^{B \cup C} \quad \text{y} \quad A^B \times A^C.$$

Ejercicio 12.6. Para conjuntos A, B y C demuestra que son equivalentes los conjuntos

$$(A \times B)^C \quad \text{y} \quad A^C \times B^C$$

Ejercicio 12.7. ¿Cuántas sucesiones de 10 dígitos se pueden formar con los símbolos 1, 2, 3, A, B y C permitiendo que éstos se repitan?

Ejercicio 12.8. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden escribir con los dígitos 3,4,5? ¿Cuántos números de 7 cifras se pueden escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?

Ejercicio 12.9. Entre un grupo de 30 personas se debe elegir una comisión formada por cuatro. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar dicha comisión?

Ejercicio 12.10. Para cada punto en el plano, podemos elegir una de cuatro direcciones para desplazarnos una unidad en dicha dirección: arriba, abajo, derecha o izquierda. ¿De cuántas formas distintas es posible movernos si queremos elegir 7 de estos desplazamientos?

Ejercicio 12.11. El software para el procesamiento de palabras en cierto sistema operativo permite elegir el nombre de un archivo de forma que tenga entre uno y ocho caracteres. Cada caracter puede ser alguno de los caracteres alfanuméricos (26 letras y 10 dígitos) o cualquiera de otros 15 símbolos determinados con la condición que el programa distingue entre mayúsculas y minúsculas. Esto quiere decir que son válidos los nombres «Adeu17», «z35» o «t6Y8uI».

a) ¿Cuántos nombres de archivo hay que utilicen 6 caracteres?

b) ¿Cuántos nombres de archivo comienzan con «A5» que tengan 5 caracteres?

c) ¿Cuántos nombres de archivo utilizan solamente los caracteres alfanuméricos?

d) ¿Cuántos nombre de archivo se pueden elegir en total?

Ejercicio 12.12. En un sistema operativo, cada archivo tiene tres niveles de acceso: «Propietario», «Grupo» y «Otros». Además, cada nivel de acceso tiene permisos asociados para leer, escribir y ejecutar dicho archivo independientes uno del otro. Esto permite asociar a cada nivel de acceso una cadena de bits que represente sus permisos donde el primero de dichos bits indica si se tiene permiso para leer, el segundo para escribir y el tercero para ejecutar. Usando estas cadenas, se forma *la cadena de permisos del archivo*, tomando la cadena de permisos de «Propietario», seguida de la cadena de permisos de «Grupo» y finalmente la cadena de permisos de «Otros». ¿De cuántas formas se puede elegir la cadena de permisos de un archivo en este sistema operativo?

Para entregar: Ejercicio 12.6

Referencias

[CLRT90] Cárdenas, Humberto, Luis, Emilio, Raggi, Francisco y Tomás, Francisco: *Álgebra Superior*. Editorial Trillas, 1990.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Las prensas de Ciencias, 2007.

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Compañia Editorial Continental, 1966.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.