# Teoría Clásica de Conjuntos

Álgebra Superior I / Actuaría 2016-I

## 1. Introducción

Uno de los pilares en los que descansa la matemática moderna es la teoría de conjuntos. Pero no sólo hallamos aquí un tema fundamental, en el estudio de todas las ramas de la matemática podemos encontrar un frecuente e inequívoco uso de ésta; esta teoría de conjuntos ha sido incluso capaz de unificar ideas aparentemente inconexas y contribuido a reducir conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos.

Uno de los objetivos que perseguimos en este curso consiste en presentar una teoría de conjuntos capaz de fundamentar la matemática moderna sin introducir ambigüedad alguna. Esta teoría, como muchas otras que intentan perfeccionar un concepto y establecerlo sin ambigüedades, descansa en el concepto de axioma. La palabra axioma proviene del griego que significa *proposición admitida*; por axioma se entiende un enunciado lógico cuya verdad es tan obvia que su prueba es innecesaria. Desde el punto de vista deductivo, los axiomas constituyen la estructura básica de una teoría al ser todas las verdades deducciones lógicas de dichos axiomas.

Sin embargo, se debe tener cuidado al considerar un enunciado como verdad sin necesidad de una prueba. En muchas ocasiones, nuestra propensión de aceptar un enunciado como axioma depende en buena medida de nuestra experiencia. Esto es especialmente cierto en la teoría de conjuntos.

Es por eso que las presentes notas, existen con un doble propósito. El primero es introducir de manera intuitiva nociones clave de la teoría de conjuntos con el objeto de familiarizarnos con su lenguaje, construcciones y razonamientos; mientras el segundo es hacer patente la necesidad que existe de introducir el concepto de conjunto con la mayor claridad posible. De esta forma, cuando presentemos los axiomas de la teoría de conjuntos, los veremos como propiedades subyacentes de los conjuntos.

Para conseguir esto, primero trataremos el tema de conjuntos de la manera clásica, esto es, como originalmente fue propuesto por personajes como Georg Cantor y George Boole. Una vez que la teoría parezca sólida a través de un tratamiento informal, procederemos a mostrar la Paradoja de Russel, resultado que resalta una inconsistencia en la teoría clásica. Esta paradoja es quizá la más famosa de todas y fue encontrada por Bertrand Rusell en 1901, con ella abriremos las puertas a la necesidad de precisar el concepto de conjunto, dando paso a la teoría axiomática de conjuntos.

# 2. Tratamiento Clásico

## 2.1. Conceptos básicos

Para comenzar, consideraremos los términos «conjunto», «elemento» y la relación de «pertenencia» como conceptos primitivos, i.e., tomaremos estos conceptos de forma tal que correspondan al uso ordinario que les damos. Por ejemplo, por conjunto entenderemos una colección de elementos distinguidos de alguna forma.

Por lo general, denotaremos a los conjuntos con letras mayúsculas mientras que a los elementos con letras minúsculas. Si un objeto $a$ pertenece a un conjunto $A$, escribiremos $a \in A$; si el objeto $a$, por el contrario, no pertenece a $A$, escribiremos $a \notin A$.

Para especificar los elementos de un conjunto, usaremos la escritura entre llaves; por ejemplo, si $A$ es el conjunto que consta exactamente de los elementos $a, b$ y $c$, escribiremos

$$A = \{a, b, c\} .$$

Bajo este argumento, se pueden pensar conjuntos en los que sus elementos son conjuntos; por ejemplo, $\{A\}$ sería el conjunto cuyo único elemento es el conjunto $A$. Es importante notar la diferencia conceptual que existe entre $A$ y $\{A\}$: el primero es un conjunto que contiene elementos, el segundo es un conjunto que tiene como único elemento al conjunto $A$.

Al presentar los conjuntos como colecciones, abrimos la posibilidad de describir un conjunto algo peculiar: un conjunto sin elementos, éste es llamado *conjunto vacío* o *nulo* que denotamos por el símbolo $\varnothing$. Hay quien imagina a los conjuntos como alguna clase de contenedores, como una bolsa o una caja, en ese sentido el conjunto vacío sería una bolsa o caja vacía.

## 2.2. Subconjuntos

Cuando pensamos en una colección de objetos o elementos, podemos llegar a pensar que tomando una cantidad limitada de elementos de esta colección somos capaces de formar una nueva colección, una colección que, bajo la inspección adecuada, resulta ser «más pequeña» que la anterior. Un subconjunto captura esta idea de forma precisa.

**Definición 2.1.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. $B$ se dice *subconjunto de* $A$, si cada elemento de $B$ es también un elemento de $A$. Este hecho se denota por $B \subset A$.

Con base en esta definición, podemos afirmar que $B \subset A$ si y sólo si, $x \in B$ implica que $x \in A$. De la afirmación anterior, debemos notar que, al ser el vacío el conjunto sin elementos, el conjunto $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto.

Debemos notar también que la relación de subconjunto $B \subset A$ no excluye la posibilidad que $A \subset B$. En realidad, se pueden tener esas dos relaciones al mismo tiempo y si ese fuera el caso, los conjuntos $A$ y $B$ tendrían exactamente los mismos elementos, de hecho, este resultado se puede usar para definir la igualdad de conjuntos.

**Definición 2.2.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. Decimos que $A$ y $B$ son iguales, y escribimos $A = B$, si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Como para cada conjunto, el vacío y el conjunto mismo son subconjuntos por definición, es deseable distinguir aquellos subconjuntos de un conjunto que no resultan ser trivialmente un subconjunto.

**Definición 2.3.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. $B$ se dice *subconjunto propio de A, si* $B \neq \varnothing$*,* $B \neq A$ *y* $B \subset A$*.*

## 2.3. Universos y Propiedades

En la teoría clásica de conjuntos, se asume que existe un conjunto subyacente en el discurso. En ocasiones este se aclara de manera explícita en otras queda indicado implícitamente; este conjunto recibe el nombre de *conjunto universo*, al cual designaremos usando la letra en cursiva $\mathcal{U}$.

Del conjunto universo deseamos especificar subconjuntos y la manera en que lo realizaremos es indicando alguna propiedad que describa a ese subconjunto. Para indicar de manera abstracta una propiedad usaremos letras Griegas. Por ejemplo, sea $\alpha$ una propiedad, indicaremos que «*un elemento* $x$ *satisface la propiedad* $\alpha$» escribiendo $\alpha(x)$. Por supuesto, el elemento $x$ que se indica, hace referencia a un elemento del conjunto universo y las propiedades deben describir elementos del conjunto universo dado. Lo anterior hace posible introducir una notación relativamente cómoda que permitirá describir un conjunto $A$ (subconjunto del conjunto universo) como

$$A = \{x \mid \alpha(x)\}\,;$$

lo anterior se debe leer: «$A$ es el conjunto de todos los elementos en el universo $\mathcal{U}$ que satisfacen la propiedad $\alpha$». Es importante notar que el conjunto universo queda especificado en contexto y no aparece de manera explícita en la notación que hemos introducido.

A manera de ejemplo, podemos resaltar que esta notación nos permite describir al conjunto vacío en términos de una propiedad, a decir:

$$x \neq x.$$

Esto resulta de notar que esta propiedad es falsa para cualquier elemento, sin importar realmente el universo que tomemos, así, podemos simplemente definir

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}\,.$$

Esta idea no entra en conflicto con la manera en que hemos introducido al conjunto vacío: como una colección sin elementos; al contrario, es complementaría al localizar al conjunto vacío como subconjunto de un universo dado.

## 2.4. Operaciones con conjuntos

Podemos crear nuevos conjuntos a partir de otros conjuntos dados usando determinadas operaciones lógicas, en esta sección presentaremos sólo tres de estas operaciones reconociendo que se pueden definir muchas más. Estas son la unión, intersección y diferencia de conjuntos.

Comenzaremos con la unión de los conjuntos $A$ y $B$. Primero propondremos la propiedad:

$$x \in A \text{ o } x \in B;$$

debemos aclarar que en matemáticas a la disyunción, se le da un significado inclusivo, esto quiere decir que la interpretaremos como «lo uno, lo otro o los dos». El enunciado anterior entonces se leerá como: «$x$ está en $A$, $x$ está en $B$ o $x$ está en $A$ y $B$». Una vez aclarado esto, definimos entonces la unión de $A$ y $B$.

**Definición 2.4.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. La *unión de $A$ con $B$* es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

La expresión $A \cup B$, se lee «$A$ unión $B$» y este conjunto contiene a todos los elementos que pertenezcan al menos a uno de los conjuntos $A$ y $B$.

Con la unión formamos un conjunto, de manera coloquial, «más grande» de los conjuntos de donde hemos partido partido, podemos pensar en hacer algo similar para tener uno más «pequeño» usando la contrapartida lógica de la disyunción: la conjunción. De esta forma proponemos para dos conjuntos $A$ y $B$, la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \in B;$$

la cual se satisface únicamente cuando $x$ está al mismo tiempo tanto en$A$ como en $B$, lo que nos lleva a poder definir la intersección de $A$ y $B$.

**Definición 2.5.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. La *intersección de $A$ y $B$* es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

La expresión $A \cap B$ se lee «$A$ intersección $B$» y este conjunto contiene a todos los elementos que están al mismo tiempo, tanto en $A$ como $B$. Podría ser el caso, por supuesto, que los conjuntos en cuestión no tengan elementos en común. En ese caso tenemos $A \cap B = \varnothing$ y diremos que los conjuntos son *disjuntos*.

Otra operación consiste en excluir elementos de un conjunto dado. Para clarificar esto, consideremos los conjuntos $A$ y $B$; y analicemos la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \notin B.$$

Esta propiedad será cierta para un elemento $x$ dado, cuando ese $x$ esté en $A$ pero no sea un miembro de $B$. Esto quiere decir que excluiremos a todos los elementos de $A$ que estén $B$, esto es precisamente lo que se intenta realizar en la diferencia de conjuntos

**Definición 2.6.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. La *diferencia de $A$ con $B$* es el conjunto

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

La expresión $A \backslash B$ se lee «$A$ menos $B$» y simplemente es el conjunto $A$ donde los elementos que tiene en común con $B$ han sido removidos.

## 2.5. Operaciones con familias de conjuntos

Como se mencionó al principio de la sección, un conjunto puede tener como elementos a otros conjuntos. Una *familia de conjuntos* será entonces este caso particular, i.e., un conjunto $\mathcal{F}$ tal que todos sus elementos sean conjuntos.

Por ejemplo, si $A$ es un conjunto, podemos considerar la familia con un único elemento:

$$\{A\}.$$

Es importante notar que conceptualmente son distintos el conjunto $A$ y el conjunto que contiene como único elemento a dicho conjunto, esto es $\{A\}$. Es más, para cualquier conjunto $A$, será siempre cierto que $A \in \{A\}$; en otras palabras, $A$ es un elemento (el único) que pertenece al conjunto $\{A\}$.

De manera similar a como hemos definido la unión y la intersección entre conjuntos, podemos definir la unión e intersección de una familia de conjuntos. Esto, aunque parecería abstracto en principio, es una generalización relativamente sencilla de lo anterior. Pensemos por ejemplo en la familia de conjuntos con dos elementos, i.e.,

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos reunir los elementos de los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos entonces simplemente tomar

$$\bigcup \mathcal{F} = A \cup B;$$

esto querría decir que $a$ es un elemento de $\bigcup \mathcal{F}$, si $a$ pertenece al menos a uno de los conjuntos $A$, $B$. Expresarlo de esta manera, nos ayuda a tener una idea más general de como tratar con una familia de conjuntos. Consideremos ahora una familia $\mathcal{F}$ arbitraria, con ella podemos formar la siguiente propiedad

$$\text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X.$$

Si un elemento satisface esta propiedad, dicho elemento debe pertenecer por lo menos a uno de los conjuntos que constituyen la familia $\mathcal{F}$, entonces podemos definir lo siguiente.

**Definición 2.7.** Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *unión de los elementos de $\mathcal{F}$*, como el conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X\}.$$

La expresión $\bigcup \mathcal{F}$ se lee «la unión de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión anterior, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen por lo menos a uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

De manera muy similar podemos proceder para definir la intersección de una familia de conjuntos. Consideremos de nuevo la familia

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos encontrar los elementos que comparten todos los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos simplemente tomar

$$\bigcap \mathcal{F} = A \cap B;$$

podemos expresar esto de una manera ligeramente distinta: lo anterior querría decir que un elemento pertenece a $\bigcap \mathcal{F}$, si es miembro de los conjuntos $A$, $B$. De nueva cuenta, esto nos entrega una forma cómoda de presentar la idea de intersección, para esto tomamos una familia $\mathcal{F}$ arbitraria de conjuntos y presentamos con la cual definimos la propiedad:

$$x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}.$$

Los elementos que satisfacen esta propiedad son aquellos que comparten los conjuntos en la familia $\mathcal{F}$, esto es una sugerencia para proponer la siguiente definición.

**Definición 2.8.** Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *intersección de los elementos de* $\mathcal{F}$, como el conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}\}.$$

La expresión $\bigcap \mathcal{F}$ se lee «la intersección de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión que se presentó, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen a todos y cada uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

## 2.6. Conjunto Potencia

Consideremos ahora un conjunto $A$. Como hemos definido, un conjunto $B$ es un subconjunto de $A$ cuando todos los elementos de $B$ son al mismo tiempo elementos de $A$. Esta definición compara dos conjuntos con la siguiente propiedad

$$\text{Para todo } x, \text{ si } x \in B \text{ entonces } x \in A.$$

Debemos considerar también, que hemos acordado escribir la anterior simplemente como

$$B \subset A,$$

así, lo que hemos hecho es asignar al símbolo $\subset$ un significado muy particular.

De esta forma, podemos formar una familia importante de conjuntos, a decir, la colección de conjuntos que son subconjuntos de $A$. Para dejar esto asentado presentamos la siguiente definición.

**Definición 2.9.** Sea $A$ un conjunto. Entenderemos por *el conjunto potencia de* $A$ al conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

Dos resultados inmediatos de la definición de un subconjunto de $A$ son que, primero $\varnothing \subset A$ y segundo $A \subset A$. Esto implica simplemente que

$$\{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(A),$$

por lo que el conjunto potencia de cualquier conjunto debe ser no vacío, incluso el conjunto potencia del vacío debe ser no vacío. Específicamente

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

A partir de resolver el ejercicio 2.4, el lector debe ser capaz de observar este hecho simplemente siguiendo las definiciones que se han proporcionado.

## Ejercicios

*Ejercicio* 2.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

*Ejercicio* 2.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

*Ejercicio* 2.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

*Ejercicio* 2.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

*Ejercicio* 2.5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

*Ejercicio* 2.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

*Ejercicio* 2.7. Sea $A$ un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

*Ejercicio* 2.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos $A$ y $B$, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

*Ejercicio* 2.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos $A$, $B$ y $C$, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

*Ejercicio* 2.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos $A$, $B$ y $C$, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*Ejercicio* 2.11. Sea $A$ un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

*Ejercicio* 2.12. Demostrar que $A \backslash B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

*Ejercicio* 2.13. Demuestra que $A$ y $B$ son ambos subconjuntos de $A \cup B$.

*Ejercicio* 2.14. Demostrar que

- $\varnothing \cup A = A$.
- $A \cup B = \varnothing$ implica que $A = \varnothing$ $B = \varnothing$.
- $A = A \cap A$.
- $A = A \cup A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$.
- $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

*Ejercicio* 2.15. Demuestra que $A \backslash B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

*Ejercicio* 2.16. Demuestra que $A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Sea $A$ un subconjunto de un conjunto universo $\mathcal{U}$. Se define el complemento de $A$ como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A.$$

*Ejercicio* 2.17. Determinar los conjuntos $\varnothing^c$ y $\mathcal{U}^c$.

*Ejercicio* 2.18. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

*Ejercicio* 2.19. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$

*Ejercicio* 2.20. Demuestra que $A \subset B$ implica $B^c \subset A^c$.

# 3. Paradojas y Conjuntos

## 3.1. Paradojas

Una paradoja es un resultado que escapa de la intuición o que resulta sorprendente en su naturaleza. Por ejemplo, sobre la teoría especial de la relatividad se formula la «paradoja de los gemelos», situación en la cual uno de dos hermanos gemelos ha viajado durante años por el espacio a velocidades cercanas a las de la luz, sólo para encontrarse que su hermano ha envejecido dramáticamente ha su vuelta a la tierra. Esta posibilidad se puede demostrar en el marco de dicha teoría, sin embargo, su resultado es inesperado, o paradójico, al contrastar con lo que comúnmente esperamos.

Ese contraste puede tener matices; algunas paradojas son sólo absurdas en apariencia, pues su veracidad puede ser alcanzada de manera válida, a estas se les llama *paradojas verídicas*, como «la paradoja de los gemelos». Existen otras que por el contrario, su resultado exhibe deficiencias en algún razonamiento o definición, éstas son llamadas *antinomias*.

Las antinomias son indeseables y deben evitarse a toda costa cuando se desarrolla una teoría. En una teoría que presenta una contradicción por ejemplo, es posible comprobar también cualquier enunciado. Una teoría de este tipo dice mucho y no afirma nada, contiene un discurso cuando más vacío.

Hasta ahora no hemos probado ningún resultado real de la teoría de conjuntos, sin embargo estamos ya en posición de mostrar que la teoría hasta ahora expuesta, presenta una paradoja. Pero no una paradoja verídica, como otros muchos resultados en ella que sólo son paradójicos en apariencia, sino una antinomia que desafía el principio del medio excluido, el cual afirma lo siguiente:

> «Un enunciado sólo puede ser verdadero o falso, no hay una tercera posibilidad».

En ese sentido, el resultado de la paradoja que expondremos a continuación, resulta inaceptable en la lógica que, aceptamos, rige nuestros razonamientos.

## 3.2. La paradoja de Russell

Cuando Cantor introdujo los conjuntos como colecciones que compartían alguna propiedad, éste no impuso ninguna restricción en dichas propiedades más allá de parecer razonables. Es este reducto de ambigüedad en donde Russell hizo nacer una contradicción.

Russell comenzó advirtiendo que si las restricciones eran virtualmente inexistentes sería posible pensar conjuntos que se contuvieran a si mismos. Esto quiere decir que la relación

$$A \in A$$

sería posible para determinados conjuntos. Russell usa un ejemplo coloquial para exponer esta posibilidad:

> «El conjunto de las cucharillas de té no es, ciertamente, una cucharilla de té. Sin embargo, el conjunto de las cosas que no son una cucharilla de te, resulta ser algo muy diferente a una cucharilla de té y por tanto debe ser un elemento de si mismo».

Lo que afirma Russell, es de gran importancia, basta tomar un universo lo suficientemente grande y la negación de una propiedad para obtener conjuntos que se contienen a si mismos. Por supuesto, este hecho no presenta contradicción alguna y podría ser perfectamente posible que esto sucediera, sin embargo parecería algo excepcional.

Llamemos entonces *ordinarios* a los conjuntos que no se contienen a si mismos y *excepcionales* a los que se contienen a si mismos. Esto quiere decir que $A$ es ordinario si y sólo si $A \notin A$, mientras que $A$ será excepcional si y sólo si $A \in A$; en ese caso, un conjunto es ordinario o excepcional, pero no los dos. Estas propiedades, pueden definir a su vez conjuntos como hemos visto. Consideremos entonces el conjunto

$$\mathcal{C} = \{X \mid X \text{ es ordinario}\} .$$

Cabe entonces preguntarnos si $\mathcal{C}$ constituye un conjunto ordinario o excepcional. A falta de mayor información podemos suponer que es ordinario, esto querría decir que $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$, o lo que es lo mismo que $\mathcal{C}$ no satisface la propiedad que define a $\mathcal{C}$, lo que implica que el conjunto no es ordinario, por lo que debería ser excepcional. Esto es por supuesto una contradicción pues $\mathcal{C}$ sería al mismo tiempo ordinario y excepcional, lo que es imposible.

Hemos entonces derivado que $\mathcal{C}$ no es ordinario, entonces ha de ser excepcional; sin embargo si $\mathcal{C}$ fuera excepcional, deberíamos tener que $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, lo que implicaría que $\mathcal{C}$ satisface la propiedad que define a $\mathcal{C}$, la cual obligaría a $\mathcal{C}$ a ser ordinario. De nueva cuenta esto es una contradicción, por lo que $\mathcal{C}$ tampoco puede ser excepcional.

Tenemos con esto una situación inaceptable, al contener esta teoría un verdad que deriva en contradicción. Es precisamente esto lo paradójico: ninguna teoría puede contener una situación así y ser consistente. Los trabajos de Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel proporcionaron una teoría de conjuntos reformada, basada en axiomas y libre de inconsistencias. Hasta el día de hoy, esta teoría, la teoría axiomática de conjuntos, proporciona un fundamento ampliamente aceptado para toda teoría matemática conocida. En este curso exploraremos, en la medida de nuestras posibilidades, sus principales resultados.

## Ejercicios

*Ejercicio* 3.1. He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. ¿Cuál?

*Ejercicio* 3.2. Se considera que un ser es omnipotente cuando nada escapa de sus posibilidades. ¿Puede un ser omnipotente crear una piedra que él mismo no pueda levantar?

*Ejercicio* 3.3. Diremos que una palabra es *autológica* si se describe a sí misma. Por ejemplo «corto» y «esdrújula» son autológicas, ya que la palabra «corto» es relativamente corta y la palabra «esdrújula» es esdrújula. Las palabras que no son autológicas se denominan heterológicas. «Largo» es una palabra heterológica, al igual que «monosilábico». ¿Es heterológica la palabra «heterológico»?

*Ejercicio* 3.4. En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas. Sin embargo, As-Samet era el único barbero de su pueblo. ¿Quién afeitaba a As-Samet?

*Ejercicio* 3.5. Antiguamente, cuando algún prisionera era sentenciado a muerte y ejecutado, se le permitía pronunciar sus últimas palabras en público. Existía sin embargo una prisión en que y ejecución procedía de un modo singular. Si las últimas palabras de un prisionero eran verdad, se le colgaba en la horca; si por el contrario, el prisionero decía una mentira se le decapitaba.

Cierto día, un sentenciado a muerte pronunció como últimas palabras lo siguiente: «Me cortarán la cabeza». ¿Cómo fue ejecutado el prisionero?

# A. Cálculo proposicional

## A.1. Proposiciones

En 2.3 se introdujo un concepto que puede parecer extraño: las propiedades. Quizá es conveniente aclarar a nos referimos y como es que se usan dichos objetos, para esto sirve este pequeño apéndice, para aclarar determinados huecos que deliberadamente se han dejado en las lecturas.

Comenzaremos definiendo el significado de proposición y para esto usaremos una definición inspirada por [SH92]:

**Definición A.1.** «Por *proposición* entenderemos un **enunciado declarativo** en lengua castellana o que pueda entenderse en lengua castellana.»

En ese sentido, una proposición es un enunciado que transmite una idea de manera objetiva y clara, de esta forma, quedan descartadas exclamaciones o imperativos al contener estos otro tipo de información a transmitir.

Al ser una proposición un enunciado declarativo, es posible desarmar su estructura gramatical; asumiremos entonces que cada proposición contiene un *predicado* que acciona sobre algunos *términos*. Por ejemplo, en la proposición

«Dos es menor que tres»,

es posible identificar el predicado «es menor que» y notar que este acciona sobre los términos «dos» y «tres».

Puede el lector buscar más oraciones, y desarmarlas de la misma manera en que hemos hecho con la anterior, esto con el objetivo de convencerse que las siguientes definiciones de término y predicado, describen con moderada elocuencia estos conceptos. Dichas definiciones están basadas en las propuestas en [SH92].

**Definición A.2.** Un *término* es una expresión con la que se nombra o se designa un único objeto.

**Definición A.3.** Se dice *predicado* a la expresión en una proposición que dice algo acerca de un término o términos

## A.2. Términos variables

En muchas ocasiones deseamos abstraer la idea de proposición debido a que algunas manipulaciones son en extremo convenientes. Por ejemplo, podemos afirmar la proposición

«Toluca es una ciudad»

e identificar que, «es una ciudad» es el predicado de la proposición y «Toluca» su único término. Además, podemos notar que dicho predicado acciona sobre sólo un término. Podemos ahora preguntarnos qué otros objetos satisfacen el predicado «es una ciudad» aparte del término «Toluca». Podemos usar la expresión «$x$» para acompañar a un predicado, así, si $\alpha$ fuera el predicado «es una ciudad», con $\alpha(x)$ obtendríamos la expresión «$x$ es una ciudad».

Debemos entonces preguntarnos si la expresión «$x$» es un término. La respuesta debe ser no, sin embargo, dicha forma de expresarnos resulta muy conveniente al permitirnos aglutinar proposiciones de diversas formas. Por ejemplo, «Toluca es una ciudad» es una especificación de lo anterior y ésta, es una proposición; en ella «$x$» toma el valor del término «Toluca». Esta facilidad nos lleva considerar expresiones similares a «$x$» como un tipo de términos sin serlo realmente, a estos los llamaremos *términos variables* para hacer notar con claridad la diferencia. Para denotar los términos variables reservaremos las últimas letras del alfabeto en minúsculas con fuente romana. Resumiendo: un término variable puede ser substituido por un término y en caso de estar junto a un predicado, esta sustitución resulta ser una proposición.

Existe una consecuencia deseable en admitir que existen términos que pueden tomar un valor determinado dependiendo del contexto, o ser especificados, que consiste en abrir la posibilidad a obtener proposiciones que tienen en común un predicado y en las que podemos cambiar sus términos variables. Con esta anotación estamos listos a presentar a lo que nos referimos con *una propiedad*.

## A.3. Propiedades

En lógica clásica existen tres postulados que modelan todo razonamiento, el principio de identidad, no contradicción y medio excluido. El principio de identidad afirma simplemente que,

«Es siempre cierto que cualquier elemento es idéntico a si mismo».

Mientras el principio de no contradicción nos dice,

«No puede ser cierto un enunciado y su contrario al mismo tiempo».

Por último, el principio del medio excluido (que ya hemos mencionado), reza,

> «Un enunciado sólo puede ser verdadero o falso, no hay una tercera posibilidad».

Algo que tienen en común estos principios, es hablar de la certeza de los enunciados, o proposiciones como nosotros hemos nombrado a estos objetos. El concepto de certeza está ligado a cada enunciado, i.e., cada proposición tiene asociado un valor de certeza modelado en términos de los anteriores principios. Una vez explicado con generosa ligereza el concepto de certeza, nos encontramos en posición de definir qué es una propiedad. La siguiente definición está inspirada en la que aparece en [Her03] y ha sido adaptada a nuestra presentación.

**Definición A.4.** Una *propiedad* será un predicado junto a sus términos variables correspondientes, tal que, para cualquier sustitución de los términos variables, sea posible decidir sin ambigüedad la certeza de la proposición resultante.

Así, por ejemplo,

> «$x$ pertenece a $Y$»

es una propiedad con dos términos variables. Por supuesto, no es coincidencia que dicha proposición pertenezca al contexto de particular de la teoría de conjuntos.

Habría que remarcar que basta obtener un predicado bien construido, para construir una proposición con términos variables que resulte en una propiedad. Se deja al lector buscar otros ejemplos de esto.

## A.4. Operaciones y cuantificación

Con propiedades arbitrarias $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ podemos construir nuevas:

- $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ (la conjunción de $\alpha$ y $\beta$).
- $\alpha(x) \vee \beta(x)$ (la disyunción de $\alpha$ y $\beta$).
- $\neg\alpha(x)$ (la negación de $\alpha$).

Estas operaciones son clave para construir otras más complejas, por ejemplo, como abreviación de

$$\neg\alpha(x) \vee \beta(x)$$

usaremos la expresión

$$\alpha(x) \to \beta(x).$$

De la misma forma escribiremos

$$\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)$$

en lugar de

$$\alpha(x) \to \beta(x) \wedge \beta(x) \to \alpha(x).$$

El hecho de que podamos construir operaciones más elaboradas de algunas más sencillas, nos permitiría asignarle un valor de certeza a las propiedades una vez conocidos los valores de certeza de las propiedades que las forman. Presentamos a continuación esas reglas, descritas de manera exhaustiva, a través de una herramientas conocida como tablas de verdad, en donde se debe entender la letra C como el caso en que la propiedad toma el valor de «cierto» al substituir los términos variables de manera adecuado, mientras que F será el valor de «falso» el mismo caso.

| $\alpha(x)$ | $\beta(x)$ | $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ | $\alpha(x) \vee \beta(x)$ | $\alpha(x) \to \beta(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| C | C | C | C | C |
| C | F | F | C | F |
| F | C | F | C | C |
| F | F | F | F | C |

Cuadro 1: Tabla de verdad para la conjunción, disyunción e implicación.

| $\alpha(x)$ | $\neg\alpha(x)$ |
|---|---|
| C | F |
| F | C |

Cuadro 2: Tabla de verdad para la negación.

Existen otras dos operaciones sobre las propiedades, éstas son las llamadas de cuantificación. Reciben ese nombre al realizar una observación sobre los términos variables de las propiedades. La primera de ellas es la *cuantificación existencial*, la cual nos otorga una propiedad de la forma $\exists x.\alpha(x)$, de donde $\alpha$ es una propiedad cualquiera. Diremos que $\exists x.\alpha(x)$ es cierta, siempre que $\alpha(x)$ sea cierta cuando menos para un objeto $x$, de otra forma será falsa. Por otro lado la *cuantificación universal*, nos otorgará la fórmula $\forall x.\alpha(x)$, para una propiedad $\alpha$ cualquiera. Diremos que $\forall x.\alpha(x)$ si la propiedad $\neg\left(\exists x.\neg\alpha(x)\right)$ es cierta. Esto quiere decir que será cierta solamente cuando $\alpha(x)$ sea cierto sin importar que objeto sea $x$.

## Ejercicios

*Ejercicio* A.1. Escriba las siguientes proposiciones como predicados acompañados por los términos adecuados.

- Si el señor Sabines no está feliz, el señor Sabines no está feliz.
- Una de dos, Samuel vendrá a la fiesta y Pedro no, o Samuel no vendrá a la fiesta y Pedro se divertirá por cuenta propia.
- Una condición suficiente para que $x$ sea impar es que $x$ sea primo.
- Una condición necesaria para que una sucesión converga, es que esté acotada.

- Una condición necesaria y suficiente para que Sheik sea feliz, es que tenga vino y música.
- Fiorello va al cine sólo si hay una comedia en cartelera.
- El soborno será pagado si y sólo si los productos son recibidos.
- Si $x$ es positivo, $x^2$ es positivo.
- Karpov ganará el torneo de ajedrez a menos que Kasparov gane hoy.

*Ejercicio* A.2. Determine si los siguientes argumentos son lógicamente correctos representando cada enunciado como una proposición y verificando si la conclusión es una implicación lógica de la conjunción de las hipótesis (Para realizar esto, asigna el valor de C a cada oración que sea una hipótesis y F a la conclusión y determina si existe una contradicción).

- Si Juan es un comunista, Juan es un ateo. Juan es un ateo. Por tanto, Juan es comunista.
- Si la temperatura y la presión son constantes, no habriá lluvia. La temperatura se mantuvo constante. Entonces, si no hubiera lluvia la presión no se mantendría constante.
- Si Pedro gana la elección, entonces los impuestos se incrementarán si el déficit se mantiene alto. Si Pedro gana la elección, el déficit se mantendrá alto. Por tanto, si Pedro gana la elección, los impuesto subirán.
- Si el número $x$ termina con cero, entonces el número es divisible por cinco. $x$ no es divisible por cero. Así, $x$ no es divisible por cinco.
- Si el número $x$ termina con cero, entonces el número es divisible por cinco. $x$ no es divisible por cinco. Así, $x$ no es divisible por cinco.
- Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $ab = 0$. Pero $ab \neq 0$. Por tanto $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
- Salomón no puede ser una estrella del atletismo y se un fumador. Salomón no es una estrella del atletismo. Por tanto, Salomon fuma cigarrillos.
- Si Juan manejó el automovil, entonces Pedro es inocente. Si Alonso disparó el arma, entonces Pedro no es inocente. Por tanto, si Alonso disparó el arma, entonces Juan no manejo el coche.
- Una condición suficiente y necesaria para que $f$ sea integrable es que $g$sea acotada. Una condición necesaria para que $h$ sea continua es que $f$ sea integrable. Por tanto, si $g$ es continua o $h$ es continua, entonces $f$ es integrable.

# Referencias

[Her03] Hernández Hernández, Fernando: *Teoría de conjuntos, una introducción.* Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[SH92] Suppes, Patrick y Hill, Shirley: *Introducción a la Lógica Matemática.* Editorial Reverté, 1992.

*Comentario.* Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Álgebra Superior I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.