Semana 10: Inducción

En esta semana, tomaremos prestados los números reales de otros cursos. Asumiremos que tienen todas las propiedades necesarias y los ocuparemos para ilustrar el concepto y teoría de inducción. Cualquier libro de cálculo contiene una descripción breve de estos números y se recomienda elegir uno como consulta.

1. Inducción matemática

De entre los axiomas de los números naturales, el último merece algo de antención. Éste pone de manifiesto una asombrosa propiedad que distingue a los números naturales: El principio de inducción matemática. Vamos a explorar sus consecuencias teóricas.

Principio de inducción. *Sea α una propiedad cualquiera de forma que se cumplan las siguientes propiedades:*

- *El enunciado $\alpha(0)$ es cierto.*
- *Si $\alpha(k)$ es cierto, entonces $\alpha(k+1)$ es cierto.*

Entonces, $\alpha(n)$ será válido para cualquier número natural n.

La segunda condición del principio de inducción es una implicación, donde se afirma que siempre que $\alpha(k)$ sea cierta, entonces $\alpha(k+1)$; además dicha implicación debe ser válida para cualquier natural k. Esto implicaría, al ser $\alpha(1)$ cierta, que $\alpha(2)$ será cierta; de igual forma, si $\alpha(2)$ es cierta, entonces $\alpha(3)$ lo será también. Podemos continuar este razonamiento indefinidamente y convencernos que en verdad, la propiedad en cuestión será válida para todo natural y basta satisfacer las condiciones impuestas por el principio de inducción.

Ejemplo. Para cualquier número natural n se tiene que

$$1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Para demostrar esto, usaremos el principio de inducción. Por supuesto, el resultado es válido para $n = 0$ (no hay nada que sumar). Ahora, supongamos que el resultado es válido para algún número k, i.e.,

$$1 + 4 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

deseamos mostrar que el resultado será igualmente válido para $k+1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
1+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\
&= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right] \\
&= (k+1)\left[\frac{2k^2+7k+6}{6}\right] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Podemos afirmar para cualquier natural n, se cumple la desigualdad $2^{n+4} < (n+4)!$. Para $n=0$, tenemos

$$2^4 = 16 < 24 = 4!.$$

Supongamos ahora el resultado para un entero k, i.e., $2^{k+4} < (k+4)!$, entonces

$$\begin{aligned}
2^{(k+1)+4} &= 2^{k+4}\cdot 2 \\
&< (k+4)!\cdot(k+5) \\
&= (k+5)!
\end{aligned}$$

Hemos planteado ya el principio de inducción de manera que los objetos involucrados constituyen únicamente conjuntos. Esta aproximación será de utilidad en esta sección por lo que repetimos su planteamiento a continuación.

Principio de inducción (versión en conjuntos)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ de forma que satisfaga las siguientes propiedades:*

- $0 \in A$.
- *Si $k \in A$, entonces $k+1 \in A$.*

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Existe otra versión del principio de inducción que parecería ser una afirmación distinta, sin embargo podemos probar que se trata de la misma. Primero formulemos el principio del que hablamos.

Principio de indcucción completa. *Sea α una propiedad cualquiera de forma que se cumplan las siguientes propiedades:*

- *El enunciado $\alpha(0)$ es cierto.*
- *Si los enunciados $\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(k)$ son todos ciertos, entonces $\alpha(k+1)$ es cierto.*

Entonces, $\alpha(n)$ será válido para cualquier número natural n.

Vamos a mostrar ahora como es que este principio, aunque parecería más fuerte, es en realida una consecuencia prácticamente inmediata del princpio de inducción.

Teorema 10.1. *El principio de inducción completa es consecuencia del principio de inducción.*

Demostración. Sea α una propiedad acerca de los números naturales de forma que satisface las siguientes propiedades:

- El enunciado $\alpha(0)$ es cierto.
- Si los enunciados $\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(k)$ son todos ciertos, entonces $\alpha(k+1)$ es cierto.

Para mostrar que α es válido para todo n vamos a usar el conjunto

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(k) \text{ son ciertos}\},$$

notando que $k \in B$ implica que $\alpha(k)$ es cierto. Basta entonces que $B = \mathbb{N}$. Por la forma en que hemos propuesto α, debemos concluir que $0 \in B$. Supongamos ahora que $k \in B$, entonces, por definición, $\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(k)$ son todos cierto y, por la forma en que hemos tomado α, debemos concluir que $\alpha(k+1)$ también lo es. Entonces, $\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(k)$ y $\alpha(k+1)$ son todos ciertos. Por definición de B esto implica que $k+1 \in B$. Entonces, por el principio de inducción, $B = \mathbb{N}$. Como afirmamos, esto suficiente para afirmar que α es válido para todo natural n, lo cual es precisamente lo que concluye el principio de inducción completa. ∎

De manera similar, podemos formular el principio de inducción completa usando conjuntos. Ahora que podemos dar por hecho el principio de inducción completa, no debería encontrarse dificultad alguna en derivarlo de éste.

Principio de indcucción completa (versión en conjuntos)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ de forma que satisfaga las siguientes dos propiedades:*

- $0 \in A$.
- *Si* $0, 1, \ldots, k \in A$*, entonces* $k+1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Existe otra afirmación impresionante de acerca de los números naturales que los distingue de muchas formas. Éste es el principio de buena ordenación. Dicho principio parecerá ajeno a lo que hemos presentado por inducción, sin embargo probaremos que es un resultado derivado.

Principio de buena ordenación. *Cualquier subconjunto $A \neq \varnothing$ de los números naturales tiene un mínimo, i.e., un número $k \in A$ tal que para todo número $a \in A$, se satisface $k \leq a$.*

Debe notarse que el principio de buen orden puede no cumplirse en caso que se tome un subconjunto vacío de los naturales.

Teorema 10.2. *El principio de buena ordenación es consecuencia del principio de inducción.*

Demostración. Deseamos probar que A tiene un elemento mínimo y para esto procedemos por contraposición. Supongamos que A no tiene un elemento mínimo. Definamos el conjunto

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \notin A\}.$$

En ese caso, $0 \in B$ pues si no estuviera, entonces sería parte de A por lo que A tendría un mínimo. Supongamos ahora que los números $0, 1, \ldots, k$ pertenecen a B, entonces el número $k+1$ no puede pertenecer a A, pues si lo hiciera, este deberá ser el mínimo del conjunto. Por lo tanto $k+1 \in B$. Por el principio de inducción completa (que deriva del principio de inducción), $B = \mathbb{N}$ por lo que $A = \varnothing$. Podemos entonces concluir que si un subconjunto de los naturales no posee un mínimo entonces este es el conjunto vacío, o en otras palabras, un conjunto no vacío tiene un elemento mínimo. Esto último es el principio de buena ordenación. ∎

2. El teorema del binomio

Definición 10.1. Sean n y k números enteros no negativos. Si definimos $0! = 1$, podemos definir *el coeficiente binomial* como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lema 10.3. *Para n y k números enteros no negativos,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Lema 10.4 (Triángulo de Pascal)**.** *Para n y k números enteros no negativos,*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Demostración. Observemos primero que

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{n}{k-1} &= \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= k\frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} \\ &= k\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

y de manera similar

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{n}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} \\ &= (n-k+1)\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= (n-k+1)\binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{n}{k-1} + (n+1)\binom{n}{k} &= k\binom{n+1}{k} + (n-k+1)\binom{n+1}{k} \\ &= (n+1)\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

Como $n+1 > 0$, la ley de cancelación para el producto, garantiza el resultado deseado. ∎

Teorema 10.5 (Teorema del binomio)**.** *Sean a y b números reales y sea n cualquier natural. Entonces,*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} a^{1-i} b^i = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b.$$

Supongamos entonces que el resultado es válido para n. Veamos primero que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{(i+1)-1} a^{n+1-(i+1)} b^{i+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \right) (a+b) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i.
\end{aligned}$$

Que es simplemente el resultado para $n+1$. Por inducción sigue el resultado deseado. ∎

Corolario 10.6.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Corolario 10.7. *Para $n > 0$*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i} = 0$$

3. Desigualdades

Teorema 10.8 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Sea $h > -1$. Entonces, para todo número natural n se tiene*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado sigue de inmediato. Supongamos que es válido para $n = k$, i.e.,

$$(1+h)^k \geq 1 + kh.$$

Entonces, como $1 + h > 0$

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h) \\ &\geq (1+kh)(1+h) \\ &= 1 + (k+1)h + kh^2; \end{aligned}$$

pero $kh^2 \geq 0$, por lo que $1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$. Uniendo ambas desigualdades

$$(1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h.$$

Por lo que el resultado es cierto para $n = k+1$. Por inducción el resultado sigue. ∎

Teorema 10.9 (Desigualdad del triangulo generalizada)**.** *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ números cualesquiera. Entonces,*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado es elemental. Supongamos entonces el resultado para $n = k$, i.e.,

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i|.$$

Entonces, por la desigualdad del triangulo

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| + |x_{k+1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} |x_i| + |x_{k+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} |x_i|. \end{aligned}$$

Por lo que el resultado es válido para $n = k+1$. Por inducción, el resultado sigue. ∎

Teorema 10.10 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ números cualesquiera. Entonces*

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Demostración. Procederemos por inducción. El caso para $n = 1$ debe ser inmediato pues

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{1} x_i y_i\right)^2 &= x_1^2 y_1^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{1} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{1} y_i^2\right).\end{aligned}$$

Supongamos ahora el caso para $n = k$

$$\left(\sum_{i=0}^{k} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\right),$$

entonces, usando el ejercicio 10.8,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} y_i^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + x_{k+1}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2 + y_{k+1}^2} \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2} + |x_{k+1} y_{k+1}| \\ &\geq \left|\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right| + |x_{k+1} y_{k+1}| \\ &\geq \left|\sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i\right|.\end{aligned}$$

De la anterior desigualdad sigue el resultado para $n = k + 1$. ■

Lema 10.11. *Sean $x_1, \cdots, x_n$ números reales tales que*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n.$$

Demostración. Procedemos por inducción, el caso en que $n = 1$ es sencillo pues de la definición recursiva del producto tenemos que

$$1 = \prod_{i=1}^{1} x_i = x_1,$$

por lo que obtendremos, como se espera, que

$$\sum_{i=1}^{1} x_1 = x_1 = 1.$$

Supongamos ahora que para cualesquiera números $y_1, \ldots, y_k$

$$\prod_{i=1}^{k} y_i = 1,$$

implica

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \geq k.$$

Tomemos entonces por hecho que

$$\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1,$$

podemos tener dos casos, el primero es que todos los números x_i involucrados en el producto sean la unidad, esto implicaría

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = k+1,$$

lo que es garantiza el resultado; el segundo es que al menos uno sea distinto de la unidad, pero si sólo uno fuera la unidad el producto no podría ser uno así que al menos existirían dos de ellos distintos con la peculiaridad que uno será mayor que la unidad y el otro menor que ésta. Supongamos que estos números son $x_k > 1$ y $x_{k+1} < 1$. Tomemos entonces los siguientes k números

$$x_1, \ldots, x_{k-1}, (x_k x_{k+1}),$$

notando que el producto de estos números es simplemente la unidad. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k x_{k+1} \geq k.$$

Sumemos ahora $x_k + x_{k+1}$ a esta desigualdad junto al inverso aditivo de $x_k x_{k+1}$, con lo que obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} x_i &\geq k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \\
&= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 \\
&= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) \\
&= k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \\
&\geq k + 1.
\end{aligned}$$

Lo cual es es resultado para $n = k+1$. Por inducción el resultado que buscábamos es válido. ■

Teorema 10.12 (Desigualdad entre medias)**.** *Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Entonces*

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Demostración. Debemos hacer una observación muy simple acerca de los números que tenemos con nosotros. A saber, que (¡demuéstralo!)

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = 1.$$

Entonces, por el lema 10.11, debemos tener que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \geq n,$$

pero

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

por lo que conjugando esto con la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$$

de lo que sigue que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

■

Definición 10.2. A la expresión

$$M_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

se le denomina *media aritmética de los números* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mientras que la expresión

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

recibe el nombre de *media geométrica de los números* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Bajo la definición anterior, el teorema anterior simplemente afirma que

$$M_n \geq G_n.$$

Esta desigualdad es una expresión muy interesante cuando en la realización de algunas estimaciones.

Ejercicios

Ejercicio 10.1. Podemos definir el exponente de un número real bajo un número natural de forma recursiva como sigue:

- $a^0 = 1$.
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Demuestra que

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$
$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}.$$

(Sugerencia: Realiza inducción sobre n o m pero no los dos a vez.)

Ejercicio 10.2. Para números enteros n y a, demuestra que es válida la fórmula

$$n \cdot a = \sum_{i=1}^{n} a.$$

Ejercicio 10.3. Definase el producto de la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$ de manera recursiva como

- $\prod_{i=0}^{1} a_i = 1$,
- $\prod_{i=0}^{n+1} a_i = (\prod_{i=1}^{n}) \cdot a_n$.

Demuestra que

$$\prod_{i=1}^{n} m = m^n.$$

Ejercicio 10.4. Muestra que las versiones en conjuntos de los principios de inducción e inducción completa son en verdad válidos.

Ejercicio 10.5. Sea n_0 un natural y sea α un enunciado acerca de los naturales de forma que satisface:

- $\alpha(n_0)$ es cierto.
- Si $\alpha(k)$ es cierto, entonces $\alpha(k+1)$ es cierto.

Demuestra que $\alpha(n)$ es cierto para cualquier natural $n \geq n_0$. En ocasiones, este enunciado se denominada *princpio de inducción desplazada*.

Ejercicio 10.6. Formula el principio de inducción desplazada como un enunciado de conjunto y prueba su validez.

Ejercicio 10.7. Sea $x_1, x_2, \ldots$ una secuencia de números de forma que que, para todo natural n, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{2}.$$

Demuestra que para todo natural n también se cumple,

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geq \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 10.8. En este ejercicio nos convenceremos de uno de los pasos en la prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

1. Sean a, b c y d números cualesquiera. Demuestra que
$$(ac + bd)^2 \leq \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right).$$

2. Demuestra que la anterior desigualdad implica que
$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$
(Cuidado, hay un paso que puede perderse con facilidad. Recuerda que para cualquier número se tiene que $\sqrt{x^2} = |x|$).

3. Sean $x_1, \ldots, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1}$ números reales. Usa el inciso anterior para concluir que
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2} + |x_{k+1}| \cdot |y_{k+1}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + x_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2 + y_{k+1}^2}$$

Ejercicio 10.9. En este ejercicio nos convenceremos que el primer paso en la prueba de la desigualdad de las medias es verdadero. Demuestra por inducción sobre n que
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = 1.$$

Para entregar: Ejercicio 10.5

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.