Ejercicios de Clase

1. Teoría clásica de conjuntos

1.1. Tratamiento clásico

Ejercicio 1.1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

Ejercicio 1.1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 1.1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Ejercicio 1.1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

Ejercicio 1.1.5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

Ejercicio 1.1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

Ejercicio 1.1.7. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.1.11. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

Ejercicio 1.1.12. Demostrar que $A \backslash B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.13. Demuestra que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.14. Demostrar que

- $\varnothing \cup A = A$.
- $A \cup B = \varnothing$ implica que $A = \varnothing$ $B = \varnothing$.
- $A = A \cap A$.
- $A = A \cup A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$.
- $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

Ejercicio 1.1.15. Demuestra que $A \backslash B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

Ejercicio 1.1.16. Demuestra que $A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Sea A un subconjunto de un conjunto universo $\mathcal{U}$. Se define el complemento de A como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A.$$

Ejercicio 1.1.17. Determinar los conjuntos $\varnothing^c$ y $\mathcal{U}^c$.

Ejercicio 1.1.18. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

Ejercicio 1.1.19. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$

Ejercicio 1.1.20. Demuestra que $A \subset B$ implica $B^c \subset A^c$.

1.2. Paradojas y Conjuntos

Ejercicio 1.2.1. He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. ¿Cuál?

Ejercicio 1.2.2. Se considera que un ser es omnipotente cuando nada escapa de sus posibilidades. ¿Puede un ser omnipotente crear una piedra que él mismo no pueda levantar?

Ejercicio 1.2.3. Diremos que una palabra es *autológica* si se describe a sí misma. Por ejemplo «corto» y «esdrújula» son autológicas, ya que la palabra «corto» es relativamente corta y la palabra «esdrújula» es esdrújula. Las palabras que no son autológicas se denominan heterológicas. «Largo» es una palabra heterológica, al igual que «monosilábico». ¿Es heterológica la palabra «heterológico»?

Ejercicio 1.2.4. En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas. Sin embargo, As-Samet era el único barbero de su pueblo. ¿Quién afeitaba a As-Samet?

Ejercicio 1.2.5. Antiguamente, cuando algún prisionera era sentenciado a muerte y ejecutado, se le permitía pronunciar sus últimas palabras en público. Existía sin embargo una prisión en que y ejecución procedía de un modo singular. Si las últimas palabras de un prisionero eran verdad, se le colgaba en la horca; si por el contrario, el prisionero decía una mentira se le decapitaba.

Cierto día, un sentenciado a muerte pronunció como últimas palabras lo siguiente: «Me cortarán la cabeza». ¿Cómo fue ejecutado el prisionero?

2. Notas de [Hal66] (Parte 1)

2.1. Axioma de extensión

Ejercicio 2.1.1. Demuestra que $A \subset A$.

Ejercicio 2.1.2. Si A, B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, demuestra que $A \subset C$.

Ejercicio 2.1.3. Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 2.1.4. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

2.2. Axioma de especificación

Ejercicio 2.2.1. Asuma que los números naturales son un conjunto. Especifica los siguientes conjuntos.

- El conjunto de los números pares.
- El conjunto de los número impares.

- El conjunto de los números primos.
- El conjunto de los cuadrados perfecto.
- El conjunto de los múltiplos de tres.

Ejercicio 2.2.2. Asuma que los números reales constitye un conjunto. Especifica los siguiente conjuntos.

- El conjunto de los número mayores a cinco.
- El conjunto de los números cuya raíz es un entero.
- El conjunto de los números que son o uno o menos uno.
- El conjunto de los números racionales.

Ejercicio 2.2.3. Discute si la teoría hasta ahora presentada nos presenta ejemplos de conjuntos. ¿Por qué es esto importante?

2.3. Parejas no ordenadas

Ejercicio 2.3.1. ¿Son distintos los conjuntos $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$?

Ejercicio 2.3.2. Aparte de los conjuntos citados en el ejercicios anterior. ¿Qué otros conjuntos serán derivados de la existencia del conjunto vacío?

Ejercicio 2.3.3. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$.

2.4. Uniones e intersecciones

Ejercicio 2.4.1. Demuestra que

- $A \cup \varnothing = A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cup A = A$.

Ejercicio 2.4.2. Demuestra que

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}.$$

Ejercicio 2.4.3. Demuestra que

- $A \cap \varnothing = \varnothing$.
- $A \cap B = B \cup A$.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cap A = A$.

Ejercicio 2.4.4. Demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejercicio 2.4.5. Demuestra que una condición suficiente y necesaria para que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

es que $C \subset A$. Observe que la condición no tiene nada que ver con B.

Ejercicio 2.4.6. $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Ejercicio 2.4.7. $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

2.5. Complementos y potencias

Recuerda que en esta sección hemos asumido que los conjuntos A y B son subconjuntos de un conjunto E que sólo se da en contexto.

Ejercicio 2.5.1. Demuestra que

1. $(A^c)^c = A$.
2. $(\varnothing)^c = E$.
3. $A \cap A^c = \varnothing$.
4. $A \cup A^c = E$.

Ejercicio 2.5.2. Demuestra que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Ejercicio 2.5.3. Demuestra que

1. $P \subset Q$ si y sólo si $P^c \cup Q = E$.
2. $P \subset Q$ si y sólo si $(P \cap Q)^c \subset P^c$.
3. $P \subset Q$ si y sólo si $P \cap Q^c = \varnothing$.

Ejercicio 2.5.4. Demuestra que

- $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B^c = \varnothing$.
- $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B^c = E$.

Ejercicio 2.5.5. Demuestra que $A \subset B$ si y sólo si $B^c \subset A^c$.

Ejercicio 2.5.6. $A \subset B$ si y sólo si $A^c \cup B^c = A^c$.

Ejercicio 2.5.7. $A \subset B$ si y sólo si $A^c \cap B^c = B^c$.

(Es de notar que los dos anteriores resultados son duales a los ejercicios 2.4.6 y 2.4.7)

Ejercicio 2.5.8. Demuestra que $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$

Ejercicio 2.5.9. Demuestra que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

Ejercicio 2.5.10. Da un ejemplo de conjuntos A y B tales que

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Ejercicio 2.5.11. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subsconjuntos de E. Demuestra que

$$\bigcap_{X \in \mathcal{P}(C)} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right)$$

y

$$\bigcup_{X \in \mathcal{P}(C)} \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right).$$

Ejercicio 2.5.12. Demuestra que

$$\left(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X^c$$

y

$$\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X^c.$$

Ejercicio 2.5.13. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$.

Ejercicio 2.5.14. Demuestra que $A \subset B$ si y sólo si $A \backslash B = \varnothing$.

Ejercicio 2.5.15. Demuestra que

1. $A + \varnothing$.
2. $A + B = B + A$.
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
4. $A \backslash B \subset A + C$.

Ejercicio 2.5.16. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A + B = \varnothing$

Ejercicio 2.5.17. Demuestra que $A + C = B + C$ implica que $A = B$.

2.6. Parejas ordenadas

Ejercicio 2.6.1. Sean A, B, X y Y conjuntos. Entonces

1. $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times Y)$.
2. $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cup (B \times Y)$.
3. $(A \backslash B) \times X = (A \times X) \backslash (B \times X)$.

Ejercicio 2.6.2. Demuestra que

$$\bigcap \bigcap \{(x, y)\} = x$$

Ejercicio 2.6.3. Demuestra que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$ si y sólo si $A \times B = \varnothing$.

Ejercicio 2.6.4. Demuestra que, si $A \subset X$ y $B \subset Y$, entonces $A \times B \subset X \times Y$. Recíprocamente demuestra que siempre que $A \times B \neq \varnothing$ entonces $A \subset X$ y $B \subset Y$.

Ejercicio 2.6.5. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto no vacío. Demuestra que

1. $B \times \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} (B \times A)$.
2. $B \times \left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} (B \times A)$.

Ejercicio 2.6.6. Sean A y B conjuntos tales que $A \neq B$. Suponga que Z es un conjunto tal que $A \times Z = B \times Z$, demuestra que $Z = \varnothing$.

Ejercicio 2.6.7. Sean A y B conjuntos. Definimos $\langle a, b \rangle = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$ para elementos $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que $\langle a, b \rangle$ es un conjunto, y $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Lo anterior constituye una definición alternativa para una pareja ordenada.

Ejercicio 2.6.8. Demuestra que $A \times B = A \times A$ implica $A = B$.

Ejercicio 2.6.9. Sea A un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(A)$ se dice una *dirección en* A si satisface

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Para conjuntos B y C tal que $B, C \in \mathcal{F}$, existe un conjunto $D \in \mathcal{F}$ tal que $D \subset B \cap C$

Demuestra que el conjunto $N_a = \{Y \in \mathcal{P}(A) | a \in Y\}$ es una dirección en A.

Ejercicio 2.6.10. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ direcciones en A_1 y A_2 respectivamente. Si

$$\mathcal{F} = \{X \times Y | X \in \mathcal{F}_1 \wedge Y \in \mathcal{F}_2\}$$

entonces $\mathcal{F}$ es una dirección en $A_1 \times A_2$.

3. Notas de [Hal66] (Parte 2)

3.1. Relaciones

Ejercicio 3.1.1. Encuentra todas las relaciones de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{s\}$.

Ejercicio 3.1.2. Sea R una relación en A. Prueba que $R \circ 1_A = 1_A \circ R = R$.

Ejercicio 3.1.3. Sea R una relación de A en B. Prueba que $R \circ 1_A = 1_B \circ R = R$

Ejercicio 3.1.4. Sean S y T relaciones de A en B. Demuestra que

1. $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$.
2. $(S \cup T)^{-1} = S^{-1} \cup T^{-1}$.

Ejercicio 3.1.5. Demuestra que una relación S en A es:

1. Reflexiva si y sólo si $1_A \subset S$.
2. Irreflexiva si y sólo si $1_A \cap S = \varnothing$.
3. Transitiva si y sólo si $S \circ S \subset S$.
4. Intransitiva si y sólo si $(S \circ S) \cap S = \varnothing$.
5. Simétrica si y sólo si $S = S^{-1}$.
6. Antisimétrica si y sólo si $S \cap S^{-1} \subset 1_A$.

Ejercicio 3.1.6. Sea $\mathcal{F}$ una familia de relaciones de A en B y sea R una relación de B en C. Probar que

$$R \circ \left(\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \right) = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} (R \circ X).$$

Ejercicio 3.1.7. Sea R una relación en A. Demuestra que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $R \subset S$, entonces $R \cup R^{-1} \subset S$.

Ejercicio 3.1.8. Sea R una relación en A. Demuestra que $R \cap R^{-1}$ es la relación simétrica más grande contenida en R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $S \subset R$, entonces $S \subset R \cap R^{-1}$.

Ejercicio 3.1.9. Sea R una relación reflexiva y transitiva en un conjunto A. Probar que $R \circ R = R$.

3.2. Funciones

Ejercicio 3.2.1. Demuestra que las proyecciones π_1 y π_2 del producto cartesiano de $A \times B$ son en verdad funciones. Determine la regla de correspondencia que define a dichas proyecciones

Ejercicio 3.2.2. Sea $h\colon C \to A \times B$. Demuestra que para toda $c \in C$,

$$h(c) = ((\pi_1 \circ h)(c), (\pi_2 \circ h)(c))$$

Ejercicio 3.2.3. Sean A y B conjuntos y sean $\pi_1\colon A \times B \to A$ y $\pi_2\colon A \times B \to B$ las proyecciones de $A \times B$ en A y B respectivamente. Demuestra que para cualquier conjunto C y para cualesquiera funciones $f\colon C \to A$ y $g\colon C \to B$ existe una única función $h\colon C \to A \times B$ de forma que $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$. (Sugerencia: Para probar la unicidad usa el ejercicio anterior).

Ejercicio 3.2.4. Sea f una función de A en B. Si $S \subset A$ definimos la relación

$$g = f \cap (S \times B).$$

Demuestra que g es una función es una función. A esta función se le conoce como *la restricción de f sobre S* y se denota $f|_S$

Ejercicio 3.2.5. Supongamos la colección de números reales es un conjunto y denotemos este por $\mathbb{R}$. Sean entonces las funciones $f(x) = -x$ $g(x) = x^2$ y $h(x) = 1/x$, determine los siguiente conjuntos

- $\mathrm{dom}(h)$.
- $f^{-1}[\mathbb{R}^+]$ donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- $g^{-1}[\mathbb{R}^-]$ donde $\mathbb{R}^{-1}\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.
- $h[\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}]$.

Ejercicio 3.2.6. Sea $f\colon A \to B$. Desmuestra que

- Si $S \subset T \subset A$, entonces $f[S] \subset f[T]$.
- Si $U \subset V \subset B$, entonces $f^{-1}[U] \subset f^{-1}[V]$.

Ejercicio 3.2.7. Sea $f\colon A \to B$ una función, sean también S y T subconjuntos de A y, U y V subconjuntos de B. Demuestra

- $f[S \cup T] = f[S] \cup f[T]$.
- $f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.
- $f[S \cap T] \subset f[S] \cap f[T]$.
- $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$

Ejercicio 3.2.8. Sea A un conjunto y sea a un elemento de A. Si $\kappa_a\colon A \to A$ es la función constante de a, demostrar que $\kappa_a \circ g = \kappa_a$ para cualquier función $g\colon A \to A$. Recíprocamente, si $f\colon A \to A$ es una función tal que $f \circ g = f$ para cualquier función $g\colon A \to A$, demostrar que existe un elemento $b \in A$ de forma que $f = \kappa_b$, i.e., que f es una función constante. (Sugerencia: Una función f es constante si y sólo si existe $a \in A$ de forma que para toda $b \in A$, $f(b) = a$. Usa contraposición afirmando que f no es constante y concluye $f \circ g \neq f$ para alguna función g).

Ejercicio 3.2.9. Sea $f\colon A \to A$ una función. Prueba que si $f \subset 1_A$, entonces $f = 1_A$.

Ejercicio 3.2.10. Sea $f\colon A \to A$ una funciòn. Prueba que si $1_A \subset f$, entonces $f = 1_A$.

Ejercicio 3.2.11. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de A y $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos de B, demuestra que

$$f\left[\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S\right] = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} f(S)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcup_{T \in \mathcal{G}} T\right] = \bigcup_{T \in \mathcal{G}} f^{-1}(T)$$

Ejercicio 3.2.12. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de A y $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos de B, demuestra que

$$f\left[\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S\right] \subset \bigcap_{S\in\mathcal{F}} f(S)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcap_{T\in\mathcal{G}} T\right] = \bigcap_{T\in\mathcal{G}} f^{-1}(T)$$

3.3. Inversas

Ejercicio 3.3.1. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea inyectiva y g no lo sea.

Ejercicio 3.3.2. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea suprayectiva y f no lo sea.

Ejercicio 3.3.3 (Notación de la inversa). Existe un nicho de ambigüedad que acarreamos desde la definición de relación inversa y en el marco de la teoría de funciones puede causar confusión. ¿Qué significa el símbolo $R^{-1}[T]$ para una relación R de A en B con $T \subset B$? ¿La imagen inversa de T bajo R o la imagen de T bajo R^{-1}? Intentaremos argumentar que estos dos conjuntos coinciden por lo que cualquiera que sea la forma que queramos responder, no importará elimininado así la ambiguüedad. Sea entonces R una relación de A en B y sea $T \subset B$. Si tomamos $S = R^{-1}$, demuestra que $R^{-1}[T]$, la imagen inversa de T bajo R, coincide con el conjunto $S[T]$, la imagen de T bajo S. En otras palabras demuestra que $R^{-1}[T] = S[T]$.

Ejercicio 3.3.4. Sea $f\colon A \to B$ una función total y sean además $F, G\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ las funciones definidas por

$$F(S) = f[S]$$

y

$$G(U) = f^{-1}[U].$$

Demuestra que

- Si f es suprayectiva, entonces $F \circ G = 1_{\mathcal{P}(B)}$.
- Si f es inyectiva, entonces $G \circ F = 1_{\mathcal{P}(A)}$.

Ejercicio 3.3.5. Sean $f\colon A \to C$ y $g\colon B \to D$ funciones totales. Demuestra que existe una función $h\colon A \times B \to C \times D$ de forma que, si f y g son biyectivas, entonces h es biyectiva.

3.4. Relaciones de equivalencia

Ejercicio 3.4.1. Sea R una relación en A. Demuestra que $R\cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $R\subset S$, entonces $R\cup R^{-1}\subset S$.

Ejercicio 3.4.2. Sea R una relación en A. Demuestra que $R\cap R^{-1}$ es la relación simétrica más grande contenida en R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $S\subset R$, entonces $S\subset R\cap R^{-1}$.

Ejercicio 3.4.3. Sea R una relación reflexiva y transitiva en un conjunto A. Probar que $R\circ R=R$.

Ejercicio 3.4.4. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en A. Demuestra que $R_2\circ R_1$ es una relación de equivalencia si y sólo si $R_2\circ R_1=R_1\circ R_2$.

Ejercicio 3.4.5. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en un conjunto A tal que $R_2\circ R_1=R_1\circ R_2$. Demuestra que $R_2\circ R_1$ es la intersección del conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A que contienen R_1 y R_2, i.e.

$$R_2\circ R_1=\bigcap\left\{X\in \mathbf{R}_A \mid R_1\subset X\wedge R_2\subset X\right\}.$$

Ejercicio 3.4.6. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $S\subset R$ tal que la imagen de la proyección π_1 en S es A. Demostrar que $R\circ S=R$ y que si T es una relación cualquiera en A, entonces $(R\cap T)\circ S=R\cap(T\circ S)$.

Ejercicio 3.4.7. Sea $f\colon A\to B$ una función y sea

$$R_f=\left\{(x,y)\in A\times A \mid f(x)=f(y)\right\}.$$

Demuestra que R_f es una relación de equivalencia y que si

$$F=\left\{(a,f(a)) \mid a\in A\right\},$$

entonces $R_f=F^{-1}\circ F$. A la relación R_f se le conoce como la *relación de equivalencia asociada a* f.

Ejercicio 3.4.8. Sea R una relación de equivalencia en A y sea $\pi\colon A\to A/R$ la función canónica de A a A/R. Probar que R es la relación de equivalencia asociada a π.

Ejercicio 3.4.9. Sean $f\colon A\to B$ una función, R una relación de equivalencia en A y S una relación de equivalencia en B, sean también $\pi_R\colon A\to A/R$ y $\pi_S\colon B\to B/S$ las funciones canónicas de A a A/R y B a B/S respectivamente. Demostrar que existe una función $h\colon A/R\to B/S$ tal que $h\circ\pi_R=\pi_S\circ f$ si sólo si para todo $(a,a')\in R$ tenemos que $(f(a),f(a'))\in S$.

Ejercicio 3.4.10. Sea $m\in\mathbb{R}$. Definimos la relación R en $\mathbb{R}^2$ por $(x_1,y_1)\sim_R(x_2,y_2)$ si y sólo si $y_1+mx_2=y_2+mx_1$. Demuestra que la relación R es una relación de equivalencia y encuentra la clase de equivalencia del punto $(1,0)$. Calcula además el conjunto cociente.

Ejercicio 3.4.11. En $\mathbb{R}$ se define la relación R como $a\sim_R b$ si y solo si $a^2-b^2=a-b$. Demuestra que R es una relación de equivalencia y determina la clase de equivalencia de 5.

Ejercicio 3.4.12. En $\mathbb{R}$ se define la relación R como $a \sim_R b$ si y sólo si $|x| = |y|$. Demuestra que R es una relación de equivalencia y calcula su conjunto cociente.

Ejercicio 3.4.13. En el conjunto $\mathbb{N}^2$ se define la relación $(a, b) \sim_R (c, d)$ si y sólo si $a + b = c + d$. Demuestra que R es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento $(3, 1)$.

Ejercicio 3.4.14. En el conjunto $\mathbb{N}^2$ se define la relación $(a, b) \sim_R (c, d)$ si y sólo si $ad = bc$. Demuestra que R es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento $(3, 7)$.

Ejercicio 3.4.15. Demuestra que $\pi(a) = \pi(b)$ si y sólo si $a = b$.

3.5. Familias indicadas

Ejercicio 3.5.1. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indicada de conjuntos. Prueba que

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

y

$$B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (B \cup A_i)$$

Ejercicio 3.5.2. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias indicadas de conjuntos. Prueba que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

y

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$

Ejercicio 3.5.3. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones de A en B. Si para cualesquiera i y j en I, tenemos que

$$f_i(a) = f_j(a),$$

para cualquier $a \in \operatorname{dom}(f_i)\cap\operatorname{dom}(f_j)$, demuestra que existe una función $f\colon A \to B$ no necesariamente total de forma que,

$$\operatorname{dom}(f) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{dom}(f_i)$$

y, para cada $i \in I$ y cada $a \in \operatorname{dom}(f_i)$,

$$f(a) = f_i(a).$$

4. Notas de [Hal66] (Parte 3)

4.1. Números como conjuntos

Ejercicio 4.1.1. Sean m y $n$elementos de $\mathbb{N}$. Si $m = n$ prueba que $m^+ = n^+$.

Ejercicio 4.1.2. Prueba que $n \notin n$ para cada elemento de $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.1.3. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 0$, entonces $0 \in n$.

4.2. Aritmética

Ejercicio 4.2.1. Recuerda que para $m \in \mathbb{N}$ se definió la función s_m de manera inductiva como: $s_m(0) = m$ y $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$. Sea

$$s = \{((m,n), l) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid l = s_m(n)\},$$

demuestra que s es una función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Ejercicio 4.2.2. Prueba que $n \neq n^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.2.3. Usando el teorema de recursión, encuentra para cada $m \in \mathbb{N}$ una función p_m de forma que: $p_m(0) = 0$ y $p_m(n^+) = p_m(n) + m = s_m(p_m(n))$. Sea

$$p = \{((m,n), l) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid l = p_m(n)\},$$

demuestra que p es una función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Ejercicio 4.2.4. Sea R la relación en $\mathbb{N}$ definida por

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{existe } r \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \text{ tal que } n = m + r\}.$$

1. Demuestra que R es una relación irreflexiva y transtiva.
2. Demuestra que para todo m, $(0, m) \in R$.
3. Demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(n, n^+) \in R$.
4. Si $m \in \mathbb{N}$ y

   $$T = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq m \text{ o } (n,m) \in R \vee (m,n) \in R\},$$

   demuestra que $T = \mathbb{N}$ (Sugerencia: Usa inducción).

Ejercicio 4.2.5. Sea R la relación en $\mathbb{N}$ definida por

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = m + r\}.$$

Demuestra lo siguiente

1. R es una relación reflexiva, transtiva y antisimétrica.
2. Demuestra que para todo m, $(0, m) \in R$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $(m,n) \in R$ y (n, m^+) entonces $n = m$ o $n = m^+$.

4. Si $m \in \mathbb{N}$ y
$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid (n, m) \in R \text{ o } (m, n) \in R\},$$
demuestra que $T = \mathbb{N}$ (Sugerencia: Usa inducción).

Ejercicio 4.2.6. Demuestra que $m + 1 = m^+$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.2.7. Demuestra que

1. $0 \cdot n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $m^+ \cdot n = m \cdot n + n$ para todo m y n en $\mathbb{N}$.
3. $m \cdot n = n \cdot m$ para todo m y n en $\mathbb{N}$.

Ejercicio 4.2.8. Demuestra que para cualesquiera m, n y k,
$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$

Ejercicio 4.2.9. Demuestra que $m \cdot 1 = m$.

Ejercicio 4.2.10. Demuestra que para cualesquiera m, n y k,
$$(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n).$$

Ejercicio 4.2.11. Sea $r \neq 0$. Demuestra que para todo m y n en $\mathbb{N}$ si $r \cdot m = r \cdot n$ entonces $m = n$

Ejercicio 4.2.12. Demuestra que existe una función $e\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera k y m, $e(k, 0) = 1$ y $e(k, m^+) = e(k, m) \cdot k$. Denotamos a esta función como
$$k^m = e(k, m)$$
.

Ejercicio 4.2.13. Demuestra que para cualesquiera k, m y n,
$$k^{m+n} = k^m \cdot k^n.$$

Ejercicio 4.2.14. Demuestra que para cualesquiera k, m y n,
$$(k^m)^n = k^{(m \cdot n)}$$

Ejercicio 4.2.15. Demuestra para todo n,
$$k^1 = k.$$

4.3. Orden

Ejercicio 4.3.1. Sea R una relación transitiva, reflexiva y antisimétrica en A. Si definimos R^* como $(a, b) \in S$ si y sólo si $(a, b) \in R$ y $a \neq b$, demuestra que S es un orden parcial estricto.

Ejercicio 4.3.2. Recuerda que dado un orden parcial estricto $<$ la relación asociada $\leq$ es transitiva, reflexiva y antisimétrica. Usando la construcción del problema anterior, demuestra que $<=\leq^*$.

Ejercicio 4.3.3. Sea E un conjunto cualquier y sean A y B subconjuntos de E. Decimos que $A < B$ si $A \subset B$ y $A \neq B$. Muestra que $<$ define una relación de orden parcial estricto.

Ejercicio 4.3.4. Sean A y B conjuntos no vacíos. Definimos un orden sobre el conjunto

$$B^A = \{f\colon A \to B\}.$$

como: $f \leq g$ si y sólo si $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ y para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$ se tiene $f(x) = g(x)$. Muestra que la relación es transitiva, reflexiva y antisimétrica. ¿Por qué esto es suficiente para probar que es un orden?

4.4. Inducción y orden

Ejercicio 4.4.1. Sean m y n un par de números naturales y sea A cualquier subconjunto de números naturales. Si para todo $n \leq m$ se tiene que $n \notin A$, demuestra que

$$A \subset \{k \in \mathbb{N} \mid m + 1 \leq k\}.$$

Ejercicio 4.4.2. Para cualesquier números naturales, demuestra que $m < n$ si y sólo si $m + 1 < n + 1$.

Ejercicio 4.4.3. Demuestra que si $n < m$ entonces $n + k < m + k$. Sugerencia: Usa inducción sobre k.

Ejercicio 4.4.4. Si $m < n$ y $k < l$, entonces $m + k < n + l$.

Ejercicio 4.4.5. Demuestra que si $m < n + 1$ entonces $m \leq n$.

Ejercicio 4.4.6. En este ejercicio demostraremos que $m \leq n$ si y sólo si existe un único número natural k tal que $n = m + k$.

1. Usando inducción sobre n, demuestra que $m \leq n$ implica que existe un número natural k tal que $n = m + k$.

2. Usando inducción sobre k, demuestra que $m + k = n$ implica que $m \leq n$. Sugerencia: Recuerda que $0 < k + 1$.

3. Finalmente, asume que, si $n = m + k'$, entonces $k = k'$

El número k descrito en este ejercicio, usalmente se denota por $n - m$.

Ejercicio 4.4.7. Demuestra que $m < n$ si y sólo si existe un número natural $r \neq 0$ tal que $n = m + r$. Sugerencia: Usa el ejercicio anterior.

Ejercicio 4.4.8. Demuestra que, para $r \neq 0$, si $m < n$ entonces $m \cdot r < n \cdot r$

4.5. Algunas definiciones recursivas

Ejercicio 4.5.1. En este ejercicio daremos otra construcción del conjunto de predecesores de m.

1. Muestra que existe una función $P\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de forma que $P(0) = \{0\}$ y $P(m+1) = P(m) \cup \{m+1\}$. Sugerencia: Usa la función $f\colon \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por

$$f(m, S) = (m+1, S \cup \{m+1\}) .$$

2. Demuestra que para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$P(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$$

.

Ejercicio 4.5.2. Para definir el producto arbitrario, demuestra que para cada función $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, existe una función $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de forma que $F(0) = a_0$ y $F(n+1) = F(n) \cdot a_{n+1}$. A esta función la denotamos

$$\prod_{i=0}^{n} a_i.$$

Ejercicio 4.5.3. Encuentra una defnición adecuada para

$$\prod_{i=k}^{n} a_i$$

y también para

$$\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k+1}}^{n} a_i$$

Ejercicio 4.5.4. Demuestra que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Ejercicio 4.5.5. Demuestra que

$$\sum_{i=0}^{n} m = (n+1) \cdot m.$$

Ejercicio 4.5.6. Demuestra que

$$\prod_{i=0}^{n} m = m^{n+1}.$$

Ejercicio 4.5.7. Demuestra que

$$(n+m)! = \left(\prod_{k=m+1}^{n+m} k\right) \cdot m! = \left(\prod_{k=n+1}^{n+m} k\right) \cdot n!$$

Ejercicio 4.5.8. Demuestra que si $n|m$ existe un único número k tal que $n{\cdot}k = m$.

Ejercicio 4.5.9. Demuestra que

$$\frac{n+m}{k} = \frac{n}{k} + \frac{m}{k}.$$

Ejercicio 4.5.10. Demuestra que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4.6. Conjuntos Finitos

Ejercicio 4.6.1. Sean A y B conjuntos y sea $f\colon A \to B$ una función biyectiva. Demuestra que, si $a \in A$, entonces $g\colon A\backslash\{a\} \to B\backslash\{f(a)\}$ definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A\backslash\{a\}$, es también una función biyectiva.

Ejercicio 4.6.2. Sea $A \cong B$ y sea también $a \in A{\cap}B$. Demuestra $A\backslash\{a\} \cong B\backslash\{a\}$

Ejercicio 4.6.3. Sea $f\colon A \to B$ una función inyectiva. Si $S \subset A$ es un subconjunto propio, entonces $f[S] \subset B$ es un subconjunto propio.

Ejercicio 4.6.4. Sea $f\colon A \to B$ una función inyectiva. Si $S \subset A$, demuestra que $S \cong f[S]$.

Ejercicio 4.6.5. Demuestra que si $m + i < m + j$ entonces $i < j$.

Ejercicio 4.6.6. Demuestra que si A y B son conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Ejercicio 4.6.7. Sean A y B conjunto cualquiera. Si $S \cong B$, prueba que

$$\bigcup_{b\in B} A \times \{b\} \cong \bigcup_{s\in S} A \times \{s\},$$

5. Principio de conteo

5.1. Conceptos básicos

Ejercicio 5.1.1. Para dos naturales cualquiera m y n, si $m < n$ y $f\colon m \to n$ es una función inyectiva cualquiera demuestra que $\operatorname{ran}(f) \cong m$.

Ejercicio 5.1.2. En una liga con diez equipos, ¿en cuántas formas puede terminar la tabla de clasificación al final de la temporada?

Ejercicio 5.1.3. Nueve escuelas organizan un torneo de baloncesto entre sus equipos. ¿Cuántos juegos habrá si cada equipo juega contra otro exactamente una vez?

Ejercicio 5.1.4. ¿En cuántas formas se puede elegir un comité conformado por un presidente, secretario y tesorero, entre un grupo de veinte personas?

Ejercicio 5.1.5. Un número hexadecimal es un número que puede tomar dieciséis valores por dígito. ¿Cuántas números hexadecimales se pueden forman que tengan ocho dígitos?

Ejercicio 5.1.6. ¿Cuántas posibilidades hay de tomar una mano de cuatro cartas de un mazo de cincuenta y dos?

Ejercicio 5.1.7. Considerando que el código Morse usa sólo dos símbolos, ¿cuántas palabras de hasta tamaño diez se pueden formar?

Ejercicio 5.1.8. ¿Cuántas formas hay de arreglar la palabra TUYO si ninguna letra se usa más de una vez?

Ejercicio 5.1.9. ¿Cuántas placas de automóvil hay que consten de dos letras y tres cifras? (Considérense 27 letras).

Ejercicio 5.1.10. En una bolsa hay ocho canicas, tres rojas y cinco blancas.

1. ¿De cuántas formas posibles se pueden sacar tres canicas?

2. ¿De cuántas formas posibles se pueden sacar tres canicas rojas?

Ejercicio 5.1.11. ¿Cuántos números de teléfono de seis cifras hay que comiencen con 1, 2, 3 o 4?

Ejercicio 5.1.12. ¿De cuántas formas puedes ordenar tu librero si tienes siete libros?

Ejercicio 5.1.13. De un grupo de quince estudiantes, cinco de ellos deben realizar exposiciones

Ejercicio 5.1.14. Un candado requiere cinco dígitos para abrirse. ¿De cuántas formas puedes intentar abrirlo?

Referencias

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Compañia Editorial Continental, 1966.

[Sig76] Sigler, L. E.: *Exercises in set theory.* Springer-Verlag, 1976.