

Semana 6: Relaciones

1. Una clasificación primaria

Comenzaremos con una lista de propiedades que una relación sobre un conjunto puede satisfacer y que son relevantes en muchas aplicaciones de la teoría de relaciones. Estos conceptos serán utilizados en diversas ocasiones no sólo durante este capítulo, por lo que es importante que se lean detenidamente para entender su significado.

Definición 6.1. Sea R una relación en A . La relación R se dice *reflexiva* si y sólo si, para todo a de A , se cumple aRa . Por otro lado, R se dice *irreflexiva* si y sólo si, para todo a de A es falso aRa .

Es posible interpretar una relación reflexiva en la cual todo elemento está relacionado con sí mismo. De la misma forma, una relación es irreflexiva si ningún elemento está relacionado con sí mismo.

Ejemplo. Definimos $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como el conjunto

$$R = \{(m, n) \mid m \neq n\}.$$

En ese caso R es una relación irreflexiva en \mathbb{N} al ser imposible tener $m \neq m$.

Ejemplo. Tomamos $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como el conjunto

$$R = \{(a, b) \mid a \leq b\}.$$

Entonces, la relación R es reflexiva pues siempre se cumple $a \leq a$.

Es importante notar que, si una relación no es reflexiva, no es necesariamente irreflexiva y de la misma forma una relación que no es irreflexiva no es necesariamente reflexiva. A pesar de esto, es imposible tener una relación no vacía que sea tanto reflexiva como irreflexiva aunque es posible obtener relaciones que no son ni reflexivas ni irreflexivas.

Ejemplo. Sea $R = \{(0, 0)\}$ una relación en \mathbb{N} . En ese caso, la relación R no puede ser reflexiva pues 1 no se relaciona con sí mismo y tampoco puede ser irreflexiva pues 0 se relaciona con sí mismo.

Por elemental que parezca el ejemplo anterior, éste se puede usar como la base para crear otro mucho más elaborados. La idea de fondo es sencilla: Hay relaciones en las que no todos los elementos están relacionados con sí mismos aunque algunos de ellos lo están.

Definición 6.2. Sea R una relación en A . La relación R se dice *transitiva* si y sólo si, para cualesquiera a, b y c en A , aRb y bRc implican aRc .

Ejemplo. Sea $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el conjunto definido como

$$R = \{(m, n) \mid m < n\}.$$

En ese caso R es una relación transitiva en \mathbb{N} pues si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Ejemplo. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea R una relación en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ dada por

$$R = \{(i, j) \mid A_{ij} = 1\}.$$

En ese caso, 1 se relaciona con 2 y 2 se relaciona con 3 pero es falso que 1 se relacione con 3. Concluimos que la relación no puede ser transitiva al existir al menos una terna de elementos que contradice su definición. Como curiosidad, este ejemplo modela la relación x *derrota a* y en el juego *piedra papel o tijeras*.

Las relaciones transitivas son de fundamental importancia y serán usadas como base de muchos otros tipos de relaciones. Es importante detenerse a entender el concepto y distinguir que no se trata de uno trivial al existir tanto relaciones transitivas como relaciones que no lo son.

Definición 6.3. Sea R una relación en A . La relación R se dice *simétrica* si y sólo si para cualesquiera elementos a y b en A , aRb implica bRa . Por otro lado, la relación se dice *antisimétrica* si y sólo si aRb y bRa implican $a = b$ para cualesquiera elementos a y b de A .

Una relación simétrica se puede interpretar como aquella en la que no importa el orden en que se presenten los elementos relacionados. Es importante también distinguir los enunciados que definen las relaciones simétricas y antisimétricas.

Ejemplo. Sea E un conjunto cualquiera. Definimos la relación R en el conjunto 2^E de forma que A está relacionado con B si y sólo si existe una función biyectiva de A en B . En ese caso, si A está relacionado con B entonces existe una función biyectiva $f: A \rightarrow B$. Como f es invertible, la función $f^{-1}: B \rightarrow A$ es una función biyectiva que garantiza que B está relacionado con A , mostrando con esto que R es simétrica.

Ejemplo. Sea E un conjunto cualquiera. Definimos la relación R en el conjunto 2^E de forma que A está relacionado con B si y sólo si $A \subseteq B$. En ese caso, si A está relacionado con B y B está relacionado con A , tenemos $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ por lo que $A = B$. Lo anterior muestra que la relación es antisimétrica.

En contraste con la reflexividad, es posible tener una relación simétrica y antisimétrica al mismo tiempo. De la misma forma, existen relaciones que no son ni simétricas ni antisimétricas.

Ejemplo. Sea 1_A la relación identidad sobre un conjunto A . Entonces, como $a = b$ implica $b = a$, la relación es simétrica. Por otro lado, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$, lo que permite concluir que la relación es también antisimétrica.

Ejemplo. Sea $A = \{0, 1, 2\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$. Entonces, R no es simétrica pues 1 está relacionado con 3, pero 3 no lo está con 1. Tampoco es antisimétrica pues 1 está relacionado con 2 y 2 lo está con 1 pero $1 \neq 2$.

2. Equivalencia

Una vez explicadas algunas clasificaciones primarias, podemos comenzar a combinarlas. Una de éstas posibilidades resultan las relaciones de equivalencia. Las relaciones de equivalencia juegan un importante rol en muchas ramas de la matemática moderna. En esencia, se trata de una generalización de la igualdad aunque a diferencia de ésta, las relaciones de equivalencia no son necesariamente triviales.

Definición 6.4. Sea E una relación en A . La relación E se dice de *equivalencia* en A si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Como se comentó, al ser una generalización de la igualdad, la relación identidad para un conjunto cualquiera es una relación de equivalencia. La identidad es el ejemplo más sencillo que existe de una equivalencia aunque bajo ningún motivo el único.

Ejemplo. Sea m un número natural. En \mathbb{Z} definimos E de manera que aEb si y sólo si existe un entero q de forma que $a = qm + b$. No es difícil probar que E es una relación de equivalencia que es además completamente diferente a la identidad. A esta relación se le conoce como *la congruencia módulo m* y por lo regular se denota como $a \equiv b \pmod{m}$.

Ejemplo. Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Definimos en el conjunto A la relación E_f como $E_f(a, a')$ si y sólo si $f(a) = f(a')$. Entonces, E_f es una relación de equivalencia. A la relación E_f se le conoce como la relación de equivalencia inducida por f .

Al interpretar como una igualdad este tipo de relaciones, la equivalencia de dos elementos nos permitiría afirmar, de manera alegórica, que los elementos no son *suficientemente* distintos. En ese sentido, parecería irrelevante distinguir elementos equivalentes pues podríamos tratarlos como un sólo objeto. Para dar exactamente ese tratamiento, usaremos la siguiente definición.

Definición 6.5. Sea E una relación de equivalencia en A y sea a un elemento de A . La *clase de equivalencia de a respecto de E* , es el subconjunto de A definido por

$$E[a] = \{x \in A \mid xEa\}.$$

Si en contexto la relación queda implícita, haremos solamente referencia a *la clase de equivalencia de a* y escribiremos $[a]$ en lugar de $E[a]$.

Es necesario notar las clases de equivalencia son no vacías al tener por definición aEa para cada elemento de A . Las clases de equivalencia no son sólo no vacías sino que extraen información relevante del conjunto donde se define la relación.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(m) = |m|$. Sabemos que E_f es una relación de equivalencia y podemos calcular sus clases de equivalencia de manera sencilla. Observamos primero un caso particular, si n es equivalente con 1, entonces $|n| = 1$ por lo que $n = 1$ o $n = -1$ y en ese caso

$$E_f[1] = \{1, -1\}.$$

En general, n está relacionado con m si y sólo si $n = m$ o $n = -m$ por lo que

$$E_f[m] = \{m, -m\}.$$

Teorema 6.1. Para una relación de equivalencia E en A , son equivalentes

1. $[a] = [b]$
2. aEb
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración. Para probar que de 1. sigue 2., supongamos que $[a] = [b]$. Entonces, como $a \in [a] = [b]$, debemos tener que aEb .

Si ahora suponemos que aEb , entonces $a \in [a]$ y al mismo tiempo $a \in [b]$, o en otras palabras, $a \in [a] \cap [b]$, por lo que este último es no vacío. Luego, 2. implica 3.

Finalmente, si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, es posible tomar un elemento $c \in [a] \cap [b]$. Esto significa que cEa y cEb , y por simetría y transitividad, tenemos que aEb . Entonces, 3. implica 2.

Por último, supongamos que aEb . Si $c \in [a]$, entonces cEa y por transitividad esto implica que cEb . En consecuencia, $c \in [b]$ por lo que $[a] \subseteq [b]$. De manera similar, se puede probar que $[b] \subseteq [a]$ para concluir $[a] = [b]$. Lo anterior muestra que 2. implica 3., probando que todos los enunciados son equivalentes. ■

El siguiente corolario es una formulación ligeramente distinta de las equivalencias que aparecen en el teorema. Su prueba es una simple observación.

Corolario 6.2. Siempre se cumple que, o $[a] \cap [b] = \emptyset$ o $[a] = [b]$ pero no ambas.

Esta última propiedad de las relaciones de equivalencia es lo que da pie a su uso en singular número de ocasiones. En particular, ofrece una perspectiva algebraica a un concepto ligado a la teoría de conjuntos.

Definición 6.6. Sea A un conjunto cualquiera. Una familia $\{P_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A se dice una *partición de A* si:

- $P_i \neq \emptyset$ para cada índice i .
- $P_i \cap P_j = \emptyset$ para cualesquiera índices $i \neq j$.
- $\bigcup_{i \in I} P_i = A$.

Lo primero que hay que notar de las particiones, es lo distintas que son de una relación de equivalencia. Por un lado, una relación de equivalencia es un subconjunto de $A \times A$, mientras las particiones son subconjuntos de 2^A . A pesar de esta clara diferencia conceptual.

Lema 6.3. Sea E una relación de equivalencia en A . Entonces, la familia de subconjuntos de A definida como $A/E = \{[a] \mid a \in A\}$, es una partición de A .

Demostración. Para cada $a \in A$, el conjunto $[a]$ es no vacío. Además, por el teorema 6.1, si $[a] \neq [b]$, tendremos $[a] \cap [b] = \emptyset$. Finalmente como $\{a\} \subset [a]$ y $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$, debemos tener que

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A.$$

En conclusión, la familia A/E es una partición de A . ■

Hemos explicado con este lema, como una relación de equivalencia resulta en una partición: Basta tomar sus clases de equivalencia para obtener un subconjunto de 2^A de forma que este cumpla con las características que definen a una partición. Podemos proponer también un resultado recíproco.

Lema 6.4. Sea $P = \{P_i\}_{i \in I}$ una partición de A . Entonces, la relación E_P , definida como $E_P(a, b)$ si y sólo si existe un índice i tal que $a \in P_i$ y $b \in P_i$, es una relación de equivalencia.

Demostración. Como $\bigcup_{i \in I} P_i = A$, la relación E_P es reflexiva. La relación es también simétrica al notar que el orden en que se presentan a y b como elementos de P_i es indistinto. Basta entonces probar que es transitiva.

Supongamos para esto que $E_P(a, b)$ y que $E_P(b, c)$. En ese caso, existen conjuntos P_i y P_j de forma que a y b pertenecen a P_i , mientras que b y c pertenecen a P_j . En ese caso b debe pertenecer a la intersección de $P_i \cup P_j$. Por definición de partición, esto sólo es posible si $P_i = P_j$ y en ese caso, a y c son ambos elementos de P_i . En otras palabras $E_P(a, c)$. Esto muestra que la relación E_P es transitiva como buscábamos. ■

Estos dos lemas sugieren un especial transformación entre las particiones y las relaciones de equivalencia. Para establecerlos necesitamos primero precisar sobre que conjunto aplicamos la transformación.

Definición 6.7. Al conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A se denota como $\mathcal{E}[A]$ mientras que al conjunto de todas las particiones de A se denota como $\mathcal{P}[A]$.

Teorema 6.5. La función $\varphi: \mathcal{E}[A] \rightarrow \mathcal{P}[A]$, dada por $\varphi(E) = A/E$, es biyectiva.

Demostración. Sea $\gamma: \mathcal{P}[A] \rightarrow \mathcal{E}[A]$ una función definida como $\gamma(P) = E_P$. Mostraremos que $\gamma \circ \varphi = 1_{\mathcal{E}[A]}$ y que $\varphi \circ \gamma = 1_{\mathcal{P}[A]}$ para asegurar que φ es una biyección.

Probaremos primero que, dada una partición P de A ,

$$(\varphi \circ \gamma)(P) = P,$$

o en otras palabras,

$$A/E_P = P.$$

Tomemos $P = \{P_i\}_{i \in I}$. Por un lado, si $E_P[a] \in A/E_P$ con $a \in A$ y como $\bigcup_{i \in I} P_i = A$, entonces existe un índice i de forma que $a \in P_i$. Afirmamos ahora que $P_i = E_P[a]$. En efecto, si $b \in P_i$ entonces $E_P(a, b)$ al estar ambos en P_i y esto quiere decir que $b \in E_P[a]$. Por otro lado, si $b \in E_P[a]$ entonces $E_P(a, b)$ lo que significa que existe un índice j de forma que a y b sean ambos miembros de P_j , en ese caso $a \in P_i \cap P_j$ por lo que $i = j$ y en consecuencia $b \in P_i$. Con esto podemos concluir $P_i = E_P[a]$ y en ese caso $E_P[a] \in P$ por lo que $A/E_P \subseteq P$. Si ahora tomamos $P_i \in P$, al ser P una partición, P_i es no vacío y tomamos algún $a \in P_i$. Entonces, debemos tener $E_P[a] = P_i$ pues $b \in E_P[a]$ si y sólo si $b \in P_i$ y en ese caso $P_i \in A/E_P$ por lo que $P \subseteq A/E_P$. En ese caso $A/E_P = P$ como buscábamos probar.

Probaremos ahora que dada una relación de equivalencia E en A , tenemos que

$$(\gamma \circ \varphi)(E) = E$$

o en otras palabras

$$E_{A/E} = E.$$

Supongamos primero que $E_{A/E}(a, b)$. En ese caso debe existir un conjunto $E[c] \in A/E$ de forma que $a \in E[c]$ y $b \in E[c]$. En ese caso, $E(a, c)$ y $E(b, c)$ y por transitividad y simetría obtenemos $E(a, b)$. Si ahora suponemos $E(a, b)$, podemos afirmar que $a \in E[b]$ y $b \in E[b]$. Por definición $E[b] \in A/E$ y en consecuencia $E_{A/E}(a, b)$ al pertenecer ambos elementos a algún conjunto de la partición A/E . En resumen $E_{A/E}(a, b)$ si y sólo si $E(a, b)$ por lo que $E_{A/E} = E$, mostrando lo que buscábamos.

Todo lo anterior muestra que γ es la inversa de φ por lo que podemos concluir que φ es una función biyectiva, terminando con esto la prueba. ■

Introducimos ahora algunos conceptos adicionales acerca de las relaciones de equivalencia de mucha utilidad en diversas aplicaciones.

Definición 6.8. Dada una relación de equivalencia R en A , al conjunto A/R lo llamaremos *el conjunto cociente de A respecto de R* . También, a la función $\pi: A \rightarrow A/R$ definida por $\pi(a) = [a]$ la llamaremos la función canónica de A en el cociente A/R .

Esta función π , satisface una propiedad destacable que es muy interesante (aunque no difícil) de probar: $\pi(a) = \pi(b)$ si y sólo si $a \sim b$. En los ejercicios se pedirá probar que esta función exhibe muchas otras propiedades notables.

Ejercicios

Ejercicio 6.1. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Determina si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas, transitivas, simétricas o antisimétricas.

1. $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 3), (4, 4)\}$
2. $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3. $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$
4. $U = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

Ejercicio 6.2. Usando las relaciones del ejercicio 6.1, calcula las cerraduras reflexiva y simétrica de cada una.

Ejercicio 6.3. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea R la relación definida en A de forma que aRb si y sólo si $2^b \leq a^2$. Determina si la relación es o no reflexiva, transitiva y simétrica.

Ejercicio 6.4. En \mathbb{Z} define la relación E como aEb si y sólo si $|x| = |y|$. Demuestra que E es una relación de equivalencia y calcula su conjunto cociente.

Ejercicio 6.5. En el conjunto \mathbb{N}^2 define la relación $(a, b)E(c, d)$ si y sólo si $a + b = c + d$. Demuestra que E es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento $(3, 1)$.

Ejercicio 6.6. En el conjunto \mathbb{N}^2 define la relación $(a, b)E(c, d)$ si y sólo si $ad = bc$. Demuestra que E es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento $(3, 7)$.

Ejercicio 6.7. Sea $m \in \mathbb{R}$. Definimos la relación E en \mathbb{R}^2 por $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ si y sólo si $y_1 + mx_2 = y_2 + mx_1$. Demuestra que la relación E es una relación de equivalencia y encuentra la clase de equivalencia del punto $(1, 0)$. Calcula además el conjunto cociente.

Ejercicio 6.8. Demuestra que la relación $\cdot \equiv \cdot \text{ mód } m$ definida en uno de los ejemplos es una relación de equivalencia en \mathbb{Z} .

Ejercicio 6.9. Demuestra que una relación R definida en A es:

1. Reflexiva si y sólo si $1_A \subset R$.
2. Irreflexiva si y sólo si $1_A \cap R = \emptyset$.
3. Transitiva si y sólo si $R \circ R \subset R$.
4. Simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.
5. Antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} \subset 1_A$.

Ejercicio 6.10. Sea R una relación no vacía definida en A . Concluye que R no puede ser al mismo tiempo reflexiva e irreflexiva mostrando que, si R es reflexiva entonces R no es irreflexiva y, si R es irreflexiva entonces R no es reflexiva.

Ejercicio 6.11. Sea R una relación reflexiva y transitiva definida en A . Prueba que $R \circ R = R$.

Ejercicio 6.12. Sea R una relación transitiva definida en A . Muestra que R es irreflexiva si y sólo si aRb implica que bRa es falso.

Ejercicio 6.13. Sean E_1 y E_2 relaciones de equivalencia definidas en A . Demuestra que $E_2 \circ E_1$ es una relación de equivalencia si y sólo si $E_2 \circ E_1 = E_1 \circ E_2$.

Ejercicio 6.14. Sea E una relación de equivalencia definida en A . Sea $S \subset E$ tal que la imagen de S bajo la primera proyección coincide con A , i.e., $\pi_1[S] = A$. Demuestra que $E \circ S = E$ y que si T es una relación cualquiera en A , entonces $(E \cap T) \circ S = E \cap (T \circ S)$.

Ejercicio 6.15. Demuestra que $\pi(a) = \pi(b)$ si y sólo si a es equivalente b .

Ejercicio 6.16. Sea $f: A \rightarrow B$ una función y sea $E_f = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$ la relación inducida por f . Demuestra que E_f es en verdad una relación de equivalencia como se afirmó.

Ejercicio 6.17. Sea E una relación de equivalencia definida en A y sea $\pi: A \rightarrow A/E$ la función canónica del cociente A/E . Demuestra que E es la relación de equivalencia inducida por π .

Para entregar: Ejercicio 6.16

Referencias

[CLRT90] Cárdenas, Humberto, Luis, Emilio, Raggi, Francisco y Tomás, Francisco: *Álgebra Superior*. Editorial Trillas, 1990.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objetivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.

El contenido original que aparezca en estas notas (si es que lo hay), se distribuye bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). ©Eduardo Antonio Gomezcaña Alanis.