Semana 11: Diferenciación

1. El álgebra de la derivada

Teorema 11.1. *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f+g$ es diferenciable en a, y*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demostración. Basta utilizar la definición de la derivada sobre la función $f+g$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}
\end{aligned}$$

Como las funciones f y g son diferenciables por hipótesis, entonces la anterior igualdad de límites muestra que

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Esta se puede expresar como la suma de funciones: $f = I_3 + I_2 + \kappa_1$ donde κ_1 es la función constante en 1. El teorema anterior garantiza

$$f'(a) = I_3'(a) + I_2'(a) + \kappa_1'(a).$$

Las derivadas en el lado derecho de la igualdad han sido calculadas con anterioridad por lo que el teorema garantiza que

$$f'(a) = 3a^2 + 2a.$$

Hay que tener cuidado al utilizar el teorema anterior pues si la suma de dos funciones es diferenciable, esto no quiere decir que las funciones involucradas también lo son.

Ejemplo. Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

No es difícil verificar que $f+g = \kappa_0$ donde κ_0 es la función constante en 0 la cual es diferenciable en todo punto. Sin embargo, ni f ni g son diferenciables en 0 al no ser siquiera continuas.

Teorema 11.2. *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f \cdot g$ es diferenciable en a, y*

$$(f \cdot g)' = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Demostración. Basta utilizar la definición de la derivada de sobre la función $f \cdot g$ de manera ingeniosa:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a))g(a+h) + f(a)(g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(a+h) + f(a) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Considerando que las funciones son diferenciables, y por tanto continuas, la anterior igualdad entre límites indica que

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

■

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x \operatorname{sen}(x)$. Podemos calcular su derivada de manera sencilla usando el teorema anterior notando que $f = I \cdot g$, donde $g(x) = \operatorname{sen}(x)$; entonces,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= I'(a) \operatorname{sen}(a) + I(a) \cos(a) \\
&= \operatorname{sen}(a) + a \cos(a)
\end{aligned}$$

De nueva cuenta es importante notar que la diferenciabilidad del producto de dos funciones no acarrea de ninguna forma la diferenciabilidad de las funciones involucradas.

Ejemplo. Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

No es difícil verificar que $f \cdot g = \kappa_0$, donde κ_0 es la función constante en 0, la cual es diferenciable en todo punto, incluido el 0. Sin embargo, ni f ni g son diferenciables pues no son continuas.

Teorema 11.3. *Si $g(x) = cf(x)$ y f es diferenciable en a, entonces g es diferenciable en a, y*

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

Demostración. Es una consecuencia del teorema anterior, pues si tomamos $\kappa_c(x) = c$, entonces $g = \kappa_c \cdot f$ y entonces

$$\begin{aligned}
g'(a) &= (\kappa_c \cdot f)'(a) \\
&= \kappa_c'(a)f(a) + \kappa_c(a)f'(a) \\
&= cf'(a).
\end{aligned}$$

La anterior igualdad es resultado de considerar que la derivada $\kappa_c'(a) = 0$ para todo real a. ■

Teorema 11.4. *Si $I_n(x) = x^n$ para algún natural n, entonces*

$$I'_n(a) = na^{n-1}.$$

Demostración. La prueba se realizará por inducción (aunque en realidad un ejercicio de la semana anterior, lo que se ilustra ahora es lo sencillo que es realizarlo conociendo resultados adicionales). La función I_1 es simplemente la identidad y como $I'(a) = 1$ para todo a el resultado sigue para $n = 1$. Supongamos ahora que el resultado sigue para I_n, i.e., $I'_n(a) = na^{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned} I'_{n+1}(a) &= (I_n \cdot I)'(a) \\ &= I'_n(a)I(a) + I_n(a)I'(a) \\ &= na^n + a^n \\ &= (n+1)a^n. \end{aligned}$$

Por inducción el resultado que buscamos sigue. ∎

Teorema 11.5. *Si g es diferenciable en a, y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es diferenciable en a, y*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Demostración. De nueva cuenta se trata de usar la definición de derivada de manera creativa:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a)g(a+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(a)g(a+h)}. \end{aligned}$$

Como la función g es diferenciable, y en consecuencia continua, la anterior igualdad de límites garantiza que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$ ∎

Teorema 11.6. *Si f y g es diferenciable en a, y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Demostración. El teorema es en realidad una consecuencia de las fórmulas para el producto y el inverso:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \end{aligned}$$

Lo anterior es el resultado que buscábamos. ∎

Ejemplo. Consideremos la función $\tan(x) = \operatorname{sen}(x)/\cos(x)$. Como la derivada del la función coseno en a es $-\operatorname{sen}(a)$, entonces dónde ésta no se anule la derivada existe y además

$$\tan'(a) = \frac{\cos^2(a) + \operatorname{sen}^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

Todos los teoremas anteriores aparecían en las interminables tablas de derivación que insisten en darnos en curso de cálculo a nivel básico. Es importante no tomar nada por hecho y por eso se presentan de esta manera. Aunque ahora podemos obtener las derivadas de manera mecánica, en muchas ocasiones (y más en el desarrollo de la teoría) recurriremos a la definición. Ahora presentaremos un resultado que no es ni inmediato y que en muchos cursos se ahorra su prueba. Sin embargo, el resultado es tan importante que recibe el nombre de *regla de la cadena*.

Teorema 11.7. *Si g es diferenciable en a, y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a, y*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Demostración. A diferencia de otras demostraciones respecto a derivadas aquí será necesario precisar varias cosas, para esto habrá que regresar a la definición de límite original. Comencemos entonces definiendo,

$$\phi(h) = \begin{cases} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} & \text{si } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\ f'(g(a)) & \text{si } g(a+h) - g(a) = 0. \end{cases}$$

Definimos también $t(h) = g(a+h) - g(a)$. Deseamos probar que ϕ es continua en 0.

Usaremos la definición de límite para probar que ϕ es continua en 0, i.e.,

$$\lim_{h \to 0} \phi(h) = f'(g(a)).$$

Tomamos entonces $\varepsilon > 0$. Por un lado, sabemos que f' es diferenciable en $g(a)$. Esto significa que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k},$$

recurriendo a la definición de límite, esto quiere decir que existe $\delta' > 0$ de forma que si $0 < |k| < \delta'$ entonces

$$\left| \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon.$$

Por otro lado, g es diferenciable en a por lo que es también continua en a, por lo que

$$\lim_{h \to 0} g(a+h) = g(a).$$

Lo anterior implica que existe $\delta > 0$ de forma que, si $|h| < \delta$ entonces

$$|g(a+h) - g(a)| < \delta'.$$

Elegimos ahora $|h| < \delta$. Si $t(h) \neq 0$, debemos notar dos cosas, primero,

$$0 < |t(h)| = |g(a+h) - g(a)| < \delta'$$

y además
$$t(h) + g(a) = g(a+h) - g(a) + g(a) = g(a+h).$$
En ese caso, tenemos que
$$\begin{aligned}\phi(h) &= \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \\ &= \frac{f(g(a) + t(h)) - f(g(a))}{t(h)}\end{aligned}$$
y en consecuencia
$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$
Por otro lado si $t(h) = 0$, entonces $\phi(h) = f'(g(a))$ de manera que trivialmente se verifica
$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$
Por lo que hemos demostrado lo que buscábamos.

Una vez establecido este hecho, debemos notar que si $h \neq 0$, entonces
$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$
Por tanto
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} &= \left(\lim_{h\to 0} \phi(h)\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a).\end{aligned}$$
Esto es exactamente lo que queríamos probar. ■

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+1)$. Antes del teorema anterior, no teníamos forma de calcular la derivada de tal función, sin embargo, ahora la tenemos identificando que $f = h \circ g$ donde $h = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x^2 + 1$. Según la regla de la cadena
$$\begin{aligned}f'(a) &= (h \circ g)'(a) = h'(g(a))g'(a) \\ &= 2x \cos(x^2+1).\end{aligned}$$

Realmente la regla de la cadena, abre muchas puertas cuando se intenta derivar funciones pues muchas veces podemos expresarlas como composiciones. En realidad, podemos ahora resolver un problema que decidimos posponer hasta que tuviéramos las herramientas adecuadas.

2. Ejemplos de diferenciación

Aunque no lo parezca, en muchas funciones se hará uso de muchos de los resultados anteriores calcular su derivada y habrá que tenerlos presentes en lo que sigue. Realmente, hemos conseguido mecanizar el proceso de diferenciación y de aquí en adelante, lo obviaremos en la medida de lo posible.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(x^3 + x^2)$. Debemos observar que f se puede expresar usando las funciones $I_2(x) = x^2$, $I_3(x) = x^3$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ como sigue

$$f = (I_2 \circ g) \circ (I_3 + I_2)$$

Esto quiere decir que podemos usar la regla de la cadena, observando que $(I_3 + I_2)(x) = x^3 + x^2$ y también $(I_3 + I_2)'(x) = 3x^2 + 2x$. Además, podemos usar la regla de la cadena para calcular primero

$$\begin{aligned}(I_2 \circ g)'(x) &= I_2'(g(x))g'(x) \\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\end{aligned}$$

para finalmente calcular

$$\begin{aligned}f'(a) &= (I_2 \circ g)'((I_3 + I_2)(a)) \cdot (I_3 + I_2)'(a) \\ &= 2\operatorname{sen}(a^3 + a^2)\cos(a^3 + a^2)(3a^2 + 2a) \\ &= (6a^2 + 4a)\operatorname{sen}(a^3 + a^2)\cos(a^3 + a^2).\end{aligned}$$

Los resultado anteriores nos habilitan no sólo en el cálculo de la primera derivada sino de derivadas de orden superior. Veamos algunos ejemplos de funciones que hemos tratado ya con anterioridad. Por ejemplo, de las derivadas de un polinomio

Ejemplo. Consideremos ahora un polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Hemos visto ya que podemos expresar a un polinomio como

$$p = \sum_{k=0}^{k} \kappa_{a_k} I_k$$

lo cual nos permite usar los resultados de esta sección para calcular su derivada

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

de igual manera, la segunda derivada puede conseguirse de manera muy sencilla

$$p''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

En general, para $m \leq n$, se tiene que

$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{(k-m)!} a_k x^{k-m}$$

en particular la n-ésima derivada resulta

$$p^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{n} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n} = n! a_n.$$

Lo cual indica que, para $m > n$, se tiene

$$p^{(m)}(x) = 0.$$

Gracias a estas expresiones podemos también concluir que los polinomios son funciones ∞-diferenciables y su derivada se puede calcular a través de las fórmulas especificadas aquí.

Ejemplo. Consideremos la función

$$E_n(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Hemos visto ya que E_1 es continua en 0 pero falla en ser diferenciable. Para remediar esto, hemos tomado ya E_2 y determinamos que la función es continua y diferenciable en 0 con derivada 0. Sin embargo, nos vimos incapacitados para preguntar si podíamos obtener su derivada y los teorema anteriores nos permiten calcular esta sin mucho trabajo. A decir,

$$E_2'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La anterior expresión nos permite concluir que E_2 a pesar de ser diferenciable en 0 no es continua en 0 pues el término $\cos(1/x)$ cuando x tiende a 0, existe. Esto es por supuesto lo que no es deseable de la función que su derivada exista pero que no sea continua. Podemos entonces considerar E_3 la cual tiene derivada

$$E_3'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En este caso, podemos observar que E_3' es en efecto continua en 0 pero $E_3''(0)$ no existe. En general, las funciones E_{2n} son n-diferenciable en 0 pero la n-ésima derivada no es continua en 0. También, las funciones E_{2n+1} son n-diferenciables en 0 y además la n-ésima derivada en 0 es continua pero la función E_{2n+1} no es $n+1$-diferenciable en 0 (ejercicio 11.11).

3. Diferenciales

Sin una función f es diferenciable en a, entonces podemos definir la función $\phi_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\phi_a(h).$$

Debemos notar que ese caso, la función $\phi_a(0) = 0$ y además

$$\lim_{h\to 0} \phi_a(h) = 0$$

al ser la función diferenciable. En otras palabras, la función ϕ_a es continua en 0. Debemos notar que la función ϕ_a mide de manera debil la diferencia entre la pendiente la recta secante dado un incremento h y la pendiente de la recta tangente a la función. Esto en particular no permite expresar

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\phi_a(h)$$

lo cual permite observar que si conseguimos hacer $\phi_a(h)$ lo suficientemente pequeño, podemos usar $hf'(a)$ como una aproximación de $f(a+h) - f(a)$. Por esta razón, a la expresión $hf'(a)$ se le denomina *la diferencial de f en a* y se le denota como df_a. En muchas ocasiones se toma $df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para dejar claro que es necesario dar un valor a donde la función f sea diferenciable para encontrar la diferencial. En particular, la diferencial debe satisfacer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h} = 0.$$

No sólo eso, es la única función lineal que hace eso posible.

Lema 11.8. *Sea f una función diferenciable en a. Entonces, si λ es una función lineal de forma que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0$$

se debe cumplir igualmente que

$$\lambda = df_a.$$

Demostración. Como df_a y λ son ambas funciones lineales, es suficiente probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|df_a(h) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

y para abreviar las estimaciones definiremos $d(h) = f(a+h) - f(a)$. En ese caso,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{|df_a(h) - \lambda(h)|}{|h|} &= \lim_{h\to 0} \frac{|df_a(h) - d(h) + d(h)\lambda(h)|}{|h|} \\
&\leq \lim_{h\to 0} \frac{|df_a(h) - d(h)|}{|h|} + \lim_{h\to 0} \frac{|d(h) - \lambda(h)|}{|h|} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

lo cual indica que las funciones df_a y λ coinciden al ser lineales como ser afirmó. ■

Realmente el teorema anterior nos permite dar una interpretación de la diferenciabilidad en términos de la existencia de la diferencial.

Teorema 11.9. *Una función f es diferenciable en a si y sólo si existe una única función lineal λ de forma que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0.$$

La prueba del teorema anterior queda distribuida en en el lema y la discusión previa a éste. Este teorema nos habilita a usar la difencial para realizar aproximaciones y algún incremento.

Ejercicios

Ejercicio 11.1. Encuentra la derivada de las siguientes funciones sin preocuparse por el dominio de la función o el de su derivada.

- $f(x) = (x^3 - x^2 + 1)/5$.
- $g(s) = (s+4)^2/(s+3)$.
- $h(x) = (a-x)/(a+x)$.
- $i(t) = (t^3 - 1)/(t^2 - t)$.
- $j(u) = \sqrt{u^2 + a^2}$.
- $k(x) = x^p/(x^m - x^n)$.
- $l(t) = \operatorname{sen}^2(t)$.
- $m(s) = \operatorname{sen}^3(s)\cos(s)$.
- $n(y) = (\operatorname{sen}(y))/(1+\cos(y))$.
- $o(t) = t\operatorname{sen}(t) + \cos(t)$.

Ejercicio 11.2. Encontrar formulas de derivación para las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Ejercicio 11.3. Encuentra una fórmula para la función $I_\alpha(x) = x^\alpha$ donde α es un número racional.

Ejercicio 11.4. Para cada una de las siguientes fórmulas, hallar $f'(f(x))$.

- $f(x) = 1/(1+x)$.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.
- $f(x) = x^2$.
- $f(x) = 17$.

Ejercicio 11.5. Hallar f' en términos de g' si:

- $f(x) = g(x + g(a))$.
- $f(x) = g(x \cdot g(a))$.
- $f(x) = g(x + g(x))$.
- $f(x) = g(x)(x-a)$.
- $f(x) = g(a)(x-a)$.
- $f(x+3) = g(x^3)$.

Ejercicio 11.6. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

Ejercicio 11.7. Encuentra valores a y b que dependan del valor c de modo que la derivada de las siguientes funciones exista en c:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq c \\ ax+b & \text{si } x = c \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq c \\ a+bx^2 & \text{si } x = c \end{cases} \quad \text{y} \quad h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \neq c \\ ax+b & \text{si } x = c \end{cases}$$

Ejercicio 11.8. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones diferenciables en a, demuestra que la función definida como $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ es diferenciable en a y

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a).$$

Ejercicio 11.9. Supongamos que f y g son n-diferenciables. Demuestra *la fórmula de Leibniz*:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k(a) g^{n-k}(a).$$

Ejercicio 11.10. Consideremos funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, todas diferenciables. Demuestra que para aquellos valores de x donde ninguno de los números $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es cero, tenemos

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

Ejercicio 11.11. Sea

$$E_n(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestra que E_{2n} es n-diferenciable en 0 pero no su n-ésima derivada no es continua en 0. Demuestra también que E_n es n-diferenciable en 0 y su n-ésima derivada es continua en 0 pero ésta no es $n+1$-diferenciable.

Ejercicio 11.12. El número α se dice *una raíz doble de la función polonimio f*, si ésta se puede escribir como

$$f(x) = (x-a)^2 g(x)$$

para alguna función polinomio g. Demuestra que α es una raíz doble f si y sólo si α es raíz de f y raíz de f'.

Para entregar: Ejercicio 11.9

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1*. Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[KKCS89] Kudriávtsev, L. D., Kutásov, A. D., Chejlov, V. I. y Shabunin, M. I.: *Problemas de análisis matemático*. Editorial Mir, Moscú, 1989.

[Spi88] Spivak, Michael: *Cálculo en variedades*. Editorial Reverté, 3ª edición, 1988.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencial e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.