Algunos tipos de retículas

Matemáticas Discretas
Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

En [**OrRe**] hemos propuesto el concepto de retícula completa. Veremos ahora algunas de sus caracterizaciones incluyendo las condiciones de completitud y de cadena para finalmente presentar el teorema de Knaster-Tarski. Este teorema de importancia en teoría de la computación tiene como corolario el teorema de Cantor-Bernstein, mostraremos como deriva de una forma elemental este importante resultado de la teoría de conjuntos notando la intrínseca conexión entre la teoría de retículas y un área fundamental de la matemática. Continuaremos con una exposición breve de las retículas modulares y distributivas, de gran interés resulta aquí el teorema $M_5 - N_5$, que nos permitirá clasificar retículas como no modulares y no distributivas de manera computacional. Una vez expuesto dicho teorema habremos abierto camino para introducir las retículas Booleanas de las cuales se discutirán sólo rudimentariamente sus conceptos más básicos, pues en ellas encontraremos una estructura estelar: Las álgebras Booleanas. Es aquí donde encontraremos diversas aplicaciones.

1. Retículas completas

1.1. Un par caracterizaciones elementales

Lo primero que debemos de preguntar es la existencia de retículas completas. Como hemos visto existen un sin número de ejemplos, sin embargo desde el punto de vista algebraico carecemos de la herramienta para tener conjunciones y disyunciones arbitrarias, al menos en apariencia. Sin embargo, para una retícula $(L, \wedge, \vee)$ podemos definir un orden de manera que obtenemos $a \vee b = \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Ese caso podemos ahora definir

$$\bigvee S = \inf S$$

y de igual forma

$$\bigwedge S = \sup S.$$

Será cuando estos conjuntos existan, cuando tendremos una retícula completa. Como puede verse, una retícula completa está vinculada al orden asociado a ella. Debemos mostrar sin embargo que este concepto así definido coincide con las operaciones de la retícula.

Lema 1.1. *Sea L una retícula y sean $S, T \subset L$. Si $\bigvee S$, $\bigvee T$, $\bigwedge S$ y $\bigwedge T$ todos existen, entonces*

1. *Para todo $s \in S$, $s \leq \bigvee S$ y $\bigwedge S \leq s$.*
2. *Si $x \in L$, $x \leq \bigwedge S$ si y sólo si $x \leq s$ para todo $s \in S$.*
3. *Si $x \in L$, $\bigvee S \leq x$ si y sólo si $s \leq x$ para todo $s \in S$.*
4. *$\bigvee S \leq \bigwedge T$ si y sólo si $s \leq t$ para todo $s \in S$ y para todo $t \in T$.*
5. *Si $S \subset T$, entonces $\bigvee S \leq \bigvee T$ y $\bigwedge T \leq \bigwedge S$.*

Demostración. El enunciado 1 es inmediato de la definición de $\sup S$. Los enunciados 2 y 3 son inmediatos de las definiciones de cota superior y cota inferior. Se probarán los enunciado 4 y 5.

Supongamos que $\bigvee S \leq \bigwedge T$; por 3, esto pasa si y sólo si $\bigvee \leq t$ para todo $t \in T$. Por 2, esto significa que los elementos de T son todos cotas superiores de S por lo que debemos tener que lo anterior sucede si y sólo si $s \leq t$ para todo $s \in S$ y todo $t \in T$. Lo anterior describe lo que afirma 4.

Para probar 5, basta notar que si $s \in S$, entonces $s \in T$ y en consecuencia $s \leq \bigvee T$ y también $\bigwedge T \leq s$, por lo que podemos concluir que $\bigvee T$ es una cota superior de S y de la misma forma $\bigwedge T$ es una cota inferior de S. En ese caso debemos tener que $\bigvee S \leq \bigvee T$ y de la misma forma $\bigwedge T \leq \bigwedge S$. Esto garantiza el lema. $\square$

Corolario 1.2. *En particular debemos tener*

$$\bigvee (S \cup T) = \bigvee S \vee \bigvee T$$

y

$$\bigwedge (S \cup T) = \bigwedge S \wedge \bigwedge T$$

Demostración. Como $S, T \subset S \cup T$, debemos tener que por el lema anterior que

$$\bigvee S \leq \bigvee (S \cup T)$$

y de la misma forma

$$\bigvee T \leq \bigvee (S \cup T).$$

De estas últimas expresiones podemos notar que $\bigvee (S \cup T)$ es una cota superior de $\bigvee S$ y $\bigvee T$ por lo que

$$\bigvee S \vee \bigvee T \leq \bigvee (S \cup T).$$

Por el lema anterior, debemos tener que $s \leq \bigvee S$ para todo $s \in S$ y de la misma forma $t \leq \bigvee T$ para cada $t \in T$.

Ahora, si tomamos $x \in S \cup T$, debemos tener que $x \in S$ o $x \in T$. Si $x \in S$, entonces $x \leq \bigvee S$ y si $x \in T$ entonces $x \leq \bigvee T$, pero $\bigvee S \leq \bigvee S \vee \bigvee T$ y

$\bigvee T \leq \bigvee S \vee \bigvee T$. Al ser un orden transitivo, debemos tener de cualquier forma que

$$x \leq \bigvee S \vee \bigvee T.$$

Esto quiere decir que $\bigvee S \vee \bigvee T$ es una cota superior de $S \cup T$, y en consecuencia.

$$\bigvee (S \cup T) \leq \bigvee S \vee \bigvee T.$$

De esto obtenemos la desigualdad que buscamos.

La segunda igualdad es inmediata por dualidad con lo que obtenemos los resultados que buscamos. □

Lema 1.3. *Sea L una retícula. Entonces $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ existen para cualquier subconjunto finito y no vacío S de L.*

Demostración. Sea $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ para algún $n \leq 1$. Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, es inmediato que el único s elemento en S, debe satisfacer $\sup\{a, a\} = a$ y también $\inf\{a, a\} = a$ por lo que $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ existe. Supongamos ahora que para cualquier subconjunto con k elementos ambas operaciones existen, en ese caso si S es un subconjunto $k + 1$ elementos podemos tomar $s \in S$ y obtener como $T = S \backslash \{s\}$ tiene k elementos podemos obtener que $\bigvee T$ y $\bigwedge T$ existen por la hipótesis de inducción. Por el corolario anterior

$$\bigvee S = \bigvee (T \cup \{s\}) = \left(\bigvee T\right) \vee s$$

y de igual manera

$$\bigwedge S = \bigwedge (T \cup \{s\}) = \left(\bigwedge T\right) \wedge s$$

Lo que comprueba que la disyunción y conjunción del conjunto S existen. Por inducción sigue el resultado. □

Teorema 1.4. *Toda retícula finita es completa.*

Demostración. Por el lema anterior, como la retícula es un conjunto finito, cualquier subconjunto de esta será de igual forma finito. En consecuencia para cualquier subconjunto de la retícula tendremos que tanto la disyunción como la conjunción existen. □

Lema 1.5. *Sea A un conjunto parcialmente ordenado en donde $\bigwedge S$ exista para cualquier subconjunto no vacío S de A. Entonces, $\bigvee S$ existe para cualquier subconjunto que tiene una cota superior.*

Demostración. Sea $S \subset L$ de forma que S tenga una cota superior. Entonces, $S^u \neq \varnothing$. Por hipótesis, cualquier conjunto no vacío tiene conjunción. En ese caso, tomamos $a = \bigwedge S^u$. Afirmamos que $a = \bigvee S$. En efecto, para cada $x \in S$, tenemos $x \leq v$ para cada $v \in S^u$ entonces $x \in (S^u)^l$ lo que por definición implica que

$$x \leq \bigwedge S^u = a,$$

entonces a es una cota superior de S. También por la definición de a, $a \in (S^u)^l$ por lo que para cada $v \in S^u$ $a \leq v$ por lo que a debe ser el mínimo de las cotas superiores de S, en otras palabras

$$a = \bigvee S.$$

□

Teorema 1.6. *Sea A un conjunto no vacío parcialmente ordenado. Los siguientes son equivalentes.*

1. *A es una retícula completa.*
2. *$\bigwedge S$ existe para cada subconjunto A.*
3. *A tiene cima y $\bigwedge S$ existe para cualquier subconjunto no vacío S de A.*

Demostración. El enunciado 1 implica el 2 por definición de retícula completa. El 2 implica el 3 al observar que $\bigwedge \varnothing$ debe existir y ese elemento no puede resultar otro que la cima de la retícula . Probaremos entonces que 3 implica 1.

Debemos probar que cualquier subconjunto S de A tiene conjunción y disyunción. Por hipótesis si $S \neq \varnothing$, $\bigwedge S$ existe, además el lema anterior garantiza que también $\bigvee S$ existe. Ahora $\bigwedge \varnothing$ existe al tener el conjunto una cima; además $\varnothing^u = A \neq \varnothing$, entonces $\bigwedge A$ existe por hipótesis y el conjunto debe tener fondo y eso significa que $\bigvee \varnothing$ existe. □

1.2. El teorema de Knaster-Tarski

El teorema de Knaster-Tarski es en realidad un teorema bastante sencillo aunque no por eso simple. Tiene en realidad consecuencias interesantes en teoría de la computación, en particular en interpretación abstracta. Sin embargo, estos resultados escapan la capacidad de nuestro curso (y del autor). Presentaremos en su lugar una aplicación a la matemática del teorema, donde probaremos que el teorema nos garantiza el famoso (y complicado de probar) teorema de Bernstein–Schroeder.

Definición 1.1. Sea $f\colon A \to A$. Un punto fijo de la función f es un elemento a de A tal que

$$f(a) = a.$$

Teorema 1.7. *Sea L una retícula completa y sea $f\colon L \to L$ una función monótona. Entonces,*

$$\alpha = \bigvee \{x \in L \mid x \leq f(x)\},$$

es un punto fijo de f. Además es el máximo punto fijo de f.

Demostración. Sea

$$H = \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$$

. Por definición si $a \in H$, entonces $a \leq \alpha$; como f es monótona

$$x \leq f(x) \leq f(\alpha).$$

Con lo anterior podemos afirmar que $f(\alpha)$ es una cota superior de H, en otras palabras $f(\alpha) \in H^u$ y por lo tanto $\alpha \leq f(\alpha)$.

Usaremos ésta última igualdad para probar su reversa. Como f es monótona,

$$f(\alpha) \leq f\left(f(\alpha)\right),$$

pero esto último afirma que $f(\alpha)$ satisface la definición de H por lo que $f(\alpha) \in H$ y esto implica que $f(\alpha) \leq \alpha$. Por antisimetría del orden, debemos tener

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Por último supones un punto fijo β; como $\beta = f(\beta)$ en particular $\beta \leq f(\beta)$ por lo que $\beta \in H$ y en consecuencia $\beta \leq \alpha$, por lo que α es el máximo punto fijo de f. $\square$

Corolario 1.8. *La función f tiene un mínimo punto fijo dado por*

$$\bigwedge \{x \in L \mid f(x) \leq x\}.$$

Demostración. Inmediato por dualidad. $\square$

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Si A tiene cima, demuestra que $P^u = \{\top\}$, en caso constrario muestra que $P^u = \varnothing$. Si A tiene fondo, muestra que $P^l = \{\bot\}$, en caso contrario muestra que $P^l = \varnothing$.

Ejercicio 1.2. Sea A un conjunto parcialmente ordenado.

1. Usando un argumento por vacuidad, muestra que $\varnothing^u = A$.
2. Usando un argumento por vacuidad, muestra que $\varnothing^l = A$.
3. Muestra que A tiene un fondo si y sólo si $\sup \varnothing$ existe.
4. Muestra que A tiene una cima si y sólo si $\inf \varnothing$ existe.

Ejercicio 1.3. Dibuja el producto de las retículas $\mathbf{3}$ y $\mathbf{2}^2 \oplus \mathbf{1}$ y encuentra una subretícula isomorfa a $\mathbf{1} \oplus (\mathbf{2} \times \mathbf{3})$.

Ejercicio 1.4. Sean L y K retículas con 0 y 1 y sea $M = L \times K$. Demuestra que existen a y b elementos de M tal que

1. $\downarrow a \cong L$ y $\downarrow b \cong K$
2. $a \wedge b = (0,0)$ y $a \vee b = (1,1)$.

2. Retículas modulares y distributivas

2.1. Definiciones

Comenzaremos mostrando algunos resultados generales para retículas. Estos resultados están inspirados y mostrarán que la mitad de las definiciones que propondremos para la laye distributiva y modular.

Lema 2.1. *Sea L una retícula y sean a, b y c elementos de L. Entonces,*

1. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Lema 2.2. *Sea L una retícula y sean a, b y c elementos de L. Entonces,*

1. $a \geq c$ *implica* $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c$.
2. $a \leq c$ *implica* $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Las pruebas de los dos lemas anteriores se dejan como ejercicios. Ninguno de los resultados es complicado de probar.

Lema 2.3. *Sea L una retícula. Entonces son equivalentes:*

1. *Para todo a, b y c,* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \vee c)$.
2. *Para todo a, b y c,* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Demostración. Supongamos que 1) se cumple. Entonces

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= a \vee (c \wedge (a \vee b)) \\ &= a \vee ((c \wedge a) \vee (c \wedge b)) \\ &= (a \vee (c \wedge a)) \vee (c \wedge b) \\ &= a \vee (c \wedge b) \\ &= a \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

Por lo que 1) implica 2). El hecho que 2) implique 1) resulta por dualidad. □

Definición 2.1. Sea L una retícula.

1. L se dice *distributiva* si cumple la ley deistributiva: Para todo a, b y c,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

2. L se dice *modular* si cumple la ley modular: Para todo a, b y c, si se tiene $a \geq c$, entonces

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Es importante realizar algunos comentarios respecto a estas definiciones. Por el 2.1, cualquier retícula es *casi* distributiva y por el lema 2.2 es *casi* modular. Esto quiere decir que sólo una desigualdad basta para poder garantizar las propuestas en las definiciones. El lema 2.3 nos aclara que la necesidad que las dos operaciones se distribuyan la una a la otra es una ilusión. Basta con que una lo haga y la otra en automático lo hará también. Comencemos ahora el importante proceso de comparar ambas.

Teorema 2.4. *Cada retícula distributiva es modular.*

Demostración. Basta notar que si $a \geq c$, el lema de la conexión implica que $a \wedge c = c$ y por ser L distributiva,

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ &= (a \wedge b) \vee c. \end{aligned}$$

Lo que implica que la retícula sea modular. □

2.2. Subretículas, productos e imágenes homomórficas

Podemos realizar algunas caracterizaciones de las retículas modulares y distributivas a parte de sus retículas, productos e imágenes.

Teorema 2.5. *Sea L una retícula. Si L es modular, entonces cualquier subretícula de L es modular. De la misma forma, si L es distributiva cualquier subretícula de L es distributiva.*

Demostración. Sea $K \subset L$ una subretícula. Si a, b y c son elementos de K y tomemos $a \geq c$; como los elementos de K son elementos de L, entonces $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$. Ahora como K es cerrado para las operaciones de la retícula lo anterior implica que K es modular.

Supongamos ahora que la retícula es distributiva. Entonces para elementos a, b y c en K debemos tener $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pues K es un subconjunto de L, además esos elementos están en K por lo que K debe ser distributiva. □

Teorema 2.6. *Sean L y K retículas. Si L y K son modulares, entonces $L \times K$ es modular. De igual forma, si son distributivas, entonces $L \times K$ es distributiva.*

Demostración. Supongamos que L y K son modulares. Si $(l_1, k_1) \geq (l_2, k_2)$, debemos tener $l_1 \geq l_2$ y $k_1 \geq k_2$ por lo que

$$l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) = (l_1 \wedge l_2) \vee l_3$$

y de igual forma

$$k_1 \wedge (k_2 \vee k_3) = (k_1 \wedge k_2) \vee k_3.$$

Lo anterior implica que

$$\begin{aligned} (l_1, k_1) \wedge ((l_2, k_2) \vee (l_3, k_3)) &= (l_1 \wedge (l_2 \vee l_3), k_1 \wedge (k_2 \vee k_3)) \\ &= ((l_1 \wedge l_2) \vee l_3, (k_1 \wedge k_2) \vee k_3) \\ &= ((l_1, k_1) \wedge (l_2, k_2)) \vee (l_3, k_3). \end{aligned}$$

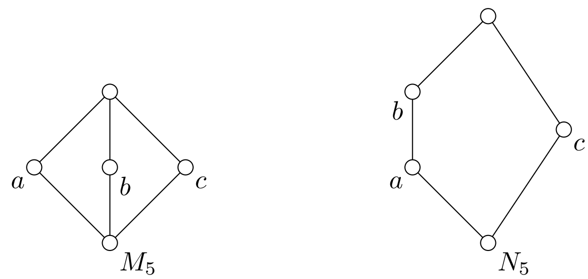

Figura 1: Retículas especiales con 5 elementos.

Lo que muestra que $L \times K$ es modular.

La segunda parte del teorema se deja como ejercicio. $\square$

Teorema 2.7. *Sean L y K retículas y sea $\phi\colon K \to L$ un homomorfismo de retículas de forma que* $\operatorname{ran}(\phi) = L$*. Si L es modular, entonces K es modular. De igual forma, si L es distributiva entonces K es distributiva.*

Demostración. Como ϕ preserva las operaciones de la retícula, el resultado es consecuencia del teorema 2.5. $\square$

2.3. Los teoremas M_5 y N_5

Ahora procedemos a introducir un par de retículas con cinco elementos, una no distributiva pero modular y otra no distributiva y no modular. Estas retículas están representadas en la figura 1. En ellas podemos verificar que M_5 es una retícula modular pero no distributiva pues

$$a \vee (b \wedge c) = a$$

pero

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1.$$

Por otro lado en N_5, podemos verificar que $b > a$ y sin embargo debemos tener

$$(a \wedge b) \vee c = 1$$

y

$$a \wedge (b \vee c) = a.$$

De esto sigue que N_5 es no modular y por el teorema 2.4 también es no distributiva. No es difícil convencerse que cualquier retícula que tenga como subretícula a N_5 debe ser no modular y que cualquier retícula que contenga a M_5 o N_5 como subretícula debe ser no distributiva. De hecho, la relación que guardan éstas particulares subretículas con la no distributividad y no modularidad resulta en una caracterización increíble.

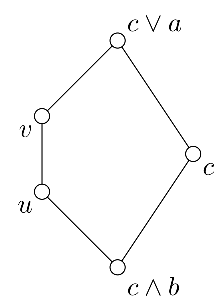

Figura 2: Asignación de la subretícula

Teorema 2.8 (Dedekind)**.** *Una retícula es no modular si y sólo si podemos sumergir N_5 en ella.*

Demostración. Sea L un retícula cualquiera. Por los comentarios anteriores podemos verificar que si N_5 se puede sumergir en la retícula, entonces L no puede ser modular. Probemos entonces la otra implicación.

Supongamos que L es no modular. En ese caso existen elementos a, b y c de forma que $a \leq b$ pero $a \vee (b \wedge c) < (a \vee c) \wedge b$. Tomemos $u = a \vee (b \wedge c)$ y $v = (a \vee c) \wedge b$, por lo que $u \leq v$

$$\begin{aligned} c \wedge v &= c \wedge ((a \vee c) \wedge b)) \\ &= (c \wedge (b \vee c)) \wedge b \\ &= c \wedge b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c \vee u &= c \vee (a \vee (c \wedge b)) \\ &= (c \vee (c \wedge b)) \vee a \\ &= c \vee a. \end{aligned}$$

En ese caso

$$c \wedge b = c \wedge (c \wedge b) \leq c \wedge u \leq c \wedge v = c \wedge b$$

y de igual forma

$$c \vee a = c \vee u \geq c \vee v \geq c \vee (a \vee c) = c \vee a.$$

Con estos elementos podemos construir la subretícula de L como se muestra en la figura 2. Esto prueba el teorema.

□

Referencias

[DP02] Davey, Brian A. y Priestley, Hilary A.: *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, 2002.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Matemáticas Discretas impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.