Notas Breves de Lógica Matemática

Álgebra Superior I
FES Acatlán
2015

Introducción

La lógica es comúnmente considerada una rama de la filosofía y es uno de los temas más antiguos de los que se tiene registro. La lógica matemática es, sin embargo una disciplina joven, fundada en en la primera mitad del siglo anterior por los esfuerzos de Frege, Peano y Russell, entre otros, para reducir enteramente la matemática a la lógica. En su incesante desarrollo han participado importantes matemáticos y filósofos, como Gödel, Turing y Tarski, y su trabajo condujo a excepcionales resultados fundacionales en matemáticas y que probablemente constituyen de los más grandes logros del siglo veinte.

En estas notas describiremos muy brevemente y tomándonos algunas (o muchas) libertades, elementos de lógica proposicional, en particular de lógica proposicional bivalente, junto al cálculo proposicional en ella; estas herramientas nos facilitarán un marco común en donde la teoría que abordará el curso pueda existir.

1. Proposiciones

El primer concepto que requeriremos en nuestro estudio de la lógica es el de *proposición*. Como proposición, deseamos una oración capaz de informar de manera objetiva algún hecho, en gramática a este tipo de oraciones se les conoce como *declarativas*. Estas oraciones carecen de estructuras modales, interrogaciones, exclamaciones, etc., y por eso nos permiten evaluar su certeza de manera concisa, de ahí la importancia de su uso.

Con lo anterior es razonable convenir lo siguiente:

Definición 1. Por *proposición* entenderemos una oración declarativa en lengua castellana o que pueda entenderse en lengua castellana.

Debemos notar que en nuestro lenguaje, existen algunos términos que nos permiten enlazar enunciados. Por ejemplo, un término de enlace en el enunciado «Hoy es Sábado y no hay clase», sería «y», el cual enlaza la proposición «Hoy es Sábado» con la proposición «no hay clase» de una manera particular. En la gramática castellana se les denomina a veces con otros nombres, pero a dichos términos nosotros los llamaremos *términos de enlace de proposiciones* o simplemente *términos de enlace*. Nosotros solamente consideraremos los términos de enlace «y», «o», «no» y «si ..., entonces»; de estos, los términos «y», «o» y «si ..., entonces» actúan sobre dos proposiciones, mientras que «no» actúa exclusivamente sobre una.

Una vez aclarado como operan los términos de enlace, debemos observar que una proposición que los contenga estará formada a su vez por una o dos proposiciones *más sencillas*, si estas nuevas proposiciones incluyen también términos de enlace, podremos repetir este proceso hasta obtener proposiciones sin ningún termino de enlace. Una proposición sin términos de enlace es lo más simple posible y esto nos lleva a distinguirla.

Definición 2. Una proposición será llamada *atómica* si no contiene ningún término de enlace. En caso contrario, la proposición será llamada *molecular*.

Es interesante que debido a la riqueza de nuestro lenguaje, es posible tener dos proposiciones que comuniquen la misma idea al mismo tiempo. Por ejemplo, la proposición

> «A la vez, Alicia y Roberto tienen ojos cafés»

expresa lo mismo que la proposición

> «Alicia tiene ojos cafés y Roberto tiene ojos cafés».

Apelaremos entonces a nuestra experiencia para distinguir cuándo dos proposiciones comuniquen la misma idea.

Definición 3. A dos proposiciones se les dirá que son *equivalentes* si significan lo mismo.

2. Simbolización de Proposiciones

Uno puede llegar a creer que las proposiciones atómicas son proposiciones cortas por el hecho de ser las más simples a razón de no contener términos de enlace. Sin embargo, una proposición atómica puede llegar a ser también extensa; pensemos por ejemplo en la proposición:

> «Los números naturales son aquellos objectos matemáticos que satisfacen los axiomas de Peano».

Es claro que la anterior proposición es atómica y no por eso corta. En lógica, esto se resuelve simbolizando los enunciados; por ejemplo, podemos convenir que la anterior proposición se denote por **A** y así, cuando necesitemos citarla, simplemente haremos una referencia explícita a **A**. Una de las ventajas que acarrea esta práctica es escribir proposiciones de manera concisa, por ejemplo, conviniendo que **A** simbolice la proposición «Alicia habla muchos idiomas» y **B** simbolice la proposición «Roberto sólo habla un idioma», podemos simplemente escribir

A y **B**

en lugar de

> «Alicia habla muchos idiomas y Roberto sólo habla uno».

De esta forma, seremos capaces de escribir una proposición molecular usando únicamente símbolos para las proposiciones atómicas que la forman y algunos términos de enlace. De lo anterior, se ve la necesidad de introducir símbolos también para los términos de enlace.

Uso del paréntesis. Consideremos **A** como la proposición «Alicia busca a Roberto» mientras que **B** será la proposición «Roberto busca a Alicia». En ese caso, no existe ambigüedad en la proposición

A o **B**.

Sin embargo no tenemos aún forma de conocer el significado de la proposición

No **A** o **B**,

por un lado, podría significar

> «No es cierto ni que Alicia busque a Roberto ni que Roberto busque a Alicia»

pero al mismo tiempo

> «Alicia no busca a Roberto o Roberto si busca a Alicia».

El problema radica en la inexistencia de un orden en la aplicación de los términos de enlace. Podemos evitar estos casos al convenir que para cualesquiera proposiciones **A** y **B**, se escribirá (**A** y **B**), (**A** o **B**), (Si **A**, entonces **B**) y (No **A**). Así, para nuestro ejemplo, lo correcto será escribir

(No (**A** o **B**))

para obtener el primer significado, mientras que escribiremos

((No **A**) o **B**),

para el segundo. Debemos notar que cada proposición tiene un término de enlace *dominante*, este término será bajo la notación que hemos introducido, el término al que pertenece el último paréntesis escrito.

Conjunción. La unión de dos proposiciones con el término de enlace «y», se denomina *conjunción de las proposiciones*. Asimismo a una conjunción de dos proposiciones, se le llama también *proposición conjuntiva*. Una conjunción es por supuesto un tipo de proposición molecular para la que designaremos un símbolo. Con este propósito, nosotros utilizaremos:

$$\wedge.$$

Así, para dos proposiciones **A** y **B** escribiremos

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$$

para denotar cualquier proposición equivalente a la proposición (**A** y **B**).

Disyunción. A la unión de dos proposiciones a través del término de enlace «o» se le denomina *disyunción de las proposiciones*; también a la disyunción de dos proposiciones se llama *proposición disyuntiva*. Una disyunción es, de nueva cuenta, un tipo de proposición molecular e introduciremos un símbolo para denotarla. Con este propósito usaremos:

$$\vee.$$

Así, para dos proposiciones **A** y **B** escribiremos

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

para denotar cualquier proposición equivalente a la proposición (**A** o **B**).

Negación. Al resultado de agregar el término de enlace «no» a una proposición se le llama *negación de la proposición*. Una vez más, una negación es otro tipo de proposición molecular al que de igual forma simbolizaremos. Para este propósito utilizaremos:

$$\neg.$$

Así, para la proposición **A** escribiremos $(\neg\mathbf{A})$ para cualquier proposición equivalente a la proposición (No **A**).

Condicional. La proposición resultante de unir dos proposiciones con el término de enlace «si ..., entonces» se le denomina *proposición condicional*. Una proposición condicional es también una proposición molecular para la que utilizaremos el símbolo:

$$\rightarrow.$$

Así, para dos proposiciones **A** y **B** escribiremos

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$$

para cualquier proposición equivalente a la proposición (Si **A**, entonces **B**).

A diferencia de los otros términos de enlace que actúan sobre dos proposiciones, en una proposición condicional el orden en que el término de enlace actúa sobre las proposiciones, es importante. Comúnmente en lógica para una proposición condicional

$$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}),$$

a la proposición **A** se le llama el *antecedente de la proposición condicional*, mientras a **B** el *consecuente de la proposición condicional.*

3. Certeza

Hasta ahora hemos descrito brevemente el concepto de proposición e introducido símbolos que facilitan su manipulación, sin embargo, las proposiciones no son nuestro objecto de estudio, sino las inferencias que podemos obtener de las proposiciones. Para conseguir esto, debemos asumir que cada proposición posee *un valor de certeza* y en nuestro caso, el de la lógica bivalente, estos valores de certeza podrán ser tomados solamente de entre *cierto* y *falso.* Entonces, podemos afirmar:

> «A cada proposición le corresponde uno y sólo un valor de certeza, o cierto o falso».

A lo anterior se le conoce comúnmente como *principio de bivalencia* y se le puede considerar la piedra angular de nuestro estudio de la lógica.

3.1. Tablas de Verdad

Deseamos definir los valores de certeza de una proposición molecular a partir de los valores de certeza asociados a las proposiciones que componen dicha proposición molecular. Para lograr esto, debemos preguntarnos cómo opera la asignación de los valores de certeza sobre los términos de enlace. Para lograr este propósito introducimos una nueva herramienta: *Las tablas de verdad.* Una tabla de verdad es, de manera sencilla, un dispositivo que muestra exhaustivamente los posibles valores de certeza que ciertas proposiciones enlazadas en una proposición molecular pueden tomar, junto la acción de estos valores sobre la certeza de la proposición molecular. En los cuadros 1 y 2 se presentan las tablas de verdad para los términos de enlace. En ellas, se define la forma en que se asignarán los valores de certeza a las proposiciones con un término de enlace a partir de los valores de certeza asignados a las proposiciones que las componen. Se reitera, estas tablas se dan como una definición.

Para escribir la tabla de verdad de una proposición cualquiera, empezaremos por expresar la proposición en proposiciones más simples, tan simples como se desee, en muchas ocasiones usaremos para este propósito proposiciones atómicas. En seguida escribiremos una columna por cada una de estas proposiciones y expresaremos en su totalidad, los posibles valores de certeza que en conjunto

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$
C	C	C	C	C
C	F	F	C	F
F	C	F	C	C
F	F	F	F	C

Cuadro 1: Tabla de verdad para la conjunción, disyunción e implicación.

$\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$
C	F
F	C

Cuadro 2: Tabla de verdad para la negación.

tomen, por ejemplo, en una proposición que contenga tres proposiciones atómicas, **A**, **B** y **C**, su tabla de verdad deberá contener una columna para cada una de ellas (Paso 1 en el cuadro 3).

Para continuar, escribiremos en las columnas siguientes las proposiciones moleculares que hagan uso directo de las proposiciones en las columnas anteriores y se calculará el valor de certeza de cada linea usando tablas de verdad antes conocidas. Por ejemplo, para la proposición

$$(((\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})),$$

escribiremos columnas para las proposiciones $(\neg\mathbf{A})$ y $((\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))$, (Paso 2 en el cuadro 3). Esta asignación de valores es consistente con las tablas presentadas en los cuadros 1 y 2.

Finalmente, repetiremos el proceso hasta agotar todas las proposiciones. En nuestro ejemplo, esto significa por último incluir columnas para las proposiciones $((\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B})$ y $(((\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))$, (Paso 3 en el cuadro 3)

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{C}$	$\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$	$\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	$((\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$
C	C	C	F	C	C	C
C	C	F	F	C	C	C
C	F	C	F	C	F	F
F	C	C	C	C	C	C
F	F	C	C	C	C	C
F	C	F	C	F	C	F
C	F	F	F	C	F	F
F	F	F	C	F	C	F
Paso 1			Paso 2		Pasos 3 y 4	

Cuadro 3: Pasos en la construcción de una tabla de verdad.

Ejemplo. Para proposiciones **A** y **B**, deseamos construir la tabla de verdad para la proposición

$$((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A})).$$

Esto significa que escribiremos columnas para las proposiciones: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ y la proposición misma. La tabla de verdad se muestra en el cuadro 4

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \to \mathbf{A}$	$((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A}))$
C	C	C	C	C
C	F	F	C	F
F	C	C	F	F
F	F	C	C	C

Cuadro 4: Tabla de verdad para equivalencia de dos proposiciones

A la proposición $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A}))$ se lo conoce como la *equivalencia entre las proposiciones* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$. Para expresar la equivalencia entre proposiciones escribiremos «$\mathbf{A}$ si y sólo si $\mathbf{B}$», mientras para denotarla usaremos $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$. De esta forma se puede decir que el término «si y sólo si» es un término de enlace compuesto.

Uso del paréntesis 2. Nuestra convención para el uso del paréntesis, se torna abrumadora fácilmente. Para evitar escribir el uso de algunos paréntesis podemos ampliar lo antes convenido. Primero, removiendo el paréntesis del término de enlace dominante, y segundo asignando un orden de precedencia a los términos de enlace. Nosotros usaremos el siguiente en orden descendiente: $\leftrightarrow, \to, \wedge, \vee, \neg$. Por ejemplo al escribir

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$$

no debería existir confusión pues la precedencia que hemos establecido indica que lo anterior corresponde a la proposición

$$(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))\,.$$

Además, acordaremos que la implicación y la equivalencia asocian a la derecha; esto es, por ejemplo, que la proposición

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C}$$

significa

$$\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C});$$

mientras, los otros términos de enlace se asociarán a la izquierda; esto es, por ejemplo, que

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$$

refiere simplemente a la proposición

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}.$$

De esta forma, daremos un significado implícito de los símbolos. Cuando el significado que queramos da una proposición difiera de éste, recurriremos entonces al uso del paréntesis como antes se había acordado.

3.2. Tautología y Contradicción

Las tablas de verdad nos permiten conocer completamente los valores de certeza que una proposición puede tomar, con esta posibilidad abierta debemos preguntarnos si existen proposiciones en las que la proposición tome un único valor de certeza, en otras palabras, que la proposición sea siempre cierta o siempre falsa.

Definición 4. Decimos que proposición molecular es una *tautología* si su valor de certeza es siempre cierto sin importar los valores de certeza de sus proposiciones atómicas. Por el contrario decimos que es una *contradicción* si su valor de certeza es falso sin importar los valores de certeza de sus proposiciones atómicas.

Considere $\mathbf{A}$ una proposición atómica cualquiera. Deseamos conocer la certeza de las proposiciones

$$\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$$

para esto, ocuparemos por supuesto sus tablas de verdad (cuadro 5). Por una simple inspección de esta tabla, podemos garantizar que la proposición $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ es siempre cierta sin importar el valor de certeza de $\mathbf{A}$, mientras que la proposición $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ es siempre falsa, sin importar de nueva cuenta el valor de certeza que tome $\mathbf{A}$. Así, estos constituyen ejemplos para una tautología y una contradicción respectivamente.

$\mathbf{A}$	$\neg \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \vee \neg A$	$\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$
C	F	C	F
F	C	C	F

Cuadro 5: Una tautología y una contradicción.

El hecho de que la proposición $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ sea una tautología se le denomina frecuentemente *principio del tercero excluido*. Mientras al hecho que la proposición $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ sea una contradicción se conoce habitualmente como *principio de no contradicción*.

4. Inferencia Lógica

Con las herramientas desarrolladas hasta ahora, podemos comenzar uno de los temas más importantes en lógica: la inferencia. Existen *reglas de inferencia* que rigen a las proposiciones y hace uso de sus términos de enlace para obtener ciertas conclusiones. Podemos resumir la idea de la inferencia lógica de la siguiente manera [2]:

«De premisas verdaderas se obtienen sólo conclusiones verdaderas.»

Antes de continuar, debemos aclarar como interpretaremos lo anterior, para esto usaremos las siguientes definiciones.

Definición 5. A una lista de proposiciones le llamaremos *argumento*. A un argumento con $n + 1$ proposiciones lo de denotaremos como

$$(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{B};$$

llamaremos a las primeras n proposiciones *premisas del argumento* mientras que a la última proposición la llamaremos *conclusión del argumento*.

Definición 6. Un argumento será *válido* si es imposible que su conclusión sea falsa y sus premisas ciertas. Por otro lado se dirá *falaz* cuando sea posible obtener una conclusión falsa de premisas ciertas.

Es importante aclarar que estas definiciones no afirman nada acerca de la certeza de las proposiciones involucradas, solamente establecen una conexión entre sus valores de certeza. Parte de nuestros propósitos es explicar esas conexiones. Esto lo conseguiremos introduciendo principios, explicando los mismos como argumentos válidos y usándolos para construir otras proposiciones.

4.1. Reglas de Inferencia

Una regla de inferencia lógica es un principio con el cual podemos obtener argumentos en los que la conclusión sea una *deducción lógica* de sus premisas. Sin embargo, al operar sobre argumentos, dichas reglas deben ser idealmente consistentes con nuestra definición de argumento válido, esto con el objetivo de decidir sin dejar espacio a la duda, que cualquier argumento en que su conclusión sea una deducción lógica de sus premisas deberá ser también un argumento válido. Las reglas de inferencia que se presentan a continuación son todas de esta naturaleza, en todas ellas podremos justificar que los argumentos derivados de éstas, sean válidos. Sin embargo, en algunas ocasiones se presentará dicha conclusión, en otras, el lector debe convencerse de este hecho.

4.1.1. Modus Ponendo Ponens

El modus ponendo ponens es una regla de inferencia que toma su nombre del latín «el método en que se afirma afirmando». Este método sostiene que dada una proposición condicional, si el antecedente es cierto, el consecuente debe serlo también. En otras palabras, siempre que supongamos que las premisas $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$ son ciertas, debemos concluir $\mathbf{B}$ como una consecuencia lógica de ellas. Abreviaremos esta regla como `PP`.

El modus ponendo ponens nos permite asegurar que para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, será válido el argumento

$$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{A}) \vdash \mathbf{B}.$$

Debe notarse que las premisas usadas pueden ser tanto proposiciones atómicas como moleculares y pueden darse en el orden que sea; así, por ejemplo,

$$(\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}, \mathbf{A}) \vdash \neg\mathbf{B}$$

y

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vdash \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$$

constituyen argumentos en los cuales sus conclusiones han sido derivadas como consecuencia lógica de sus premisas a través del modus ponendo ponens.

Ejemplo. Sean las proposiciones

> $\mathbf{A}$ = «Si el número cinco es mayor que cero, entonces el número cinco es distinto de cero»,
>
> $\mathbf{B}$ = «El número cinco es mayor que cero»

y

> $\mathbf{C}$ = «El número cinco es distinto de cero».

Entonces, el modus ponendo ponens nos permite afirmar que la conclusión en el argumento

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \vdash \mathbf{C},$$

es una consecuencia lógica de sus premisas. Esto también podemos expresarlo de manera escrita como:

> «Si el número cinco es mayor que cero, entonces el número cinco es distinto de cero. Ahora, el número cinco es mayor que cero. Se deduce entonces que el número cinco es distinto de cero.»

Es importante preguntarnos qué razones tenemos para afirmar como principio el modus ponendo ponens a parte de la intuición emanada del lenguaje. Para responder, usaremos la tabla de verdad de la proposición $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ (cuadro 1) de la siguiente forma: Debemos responder qué pasa con el valor de certeza de la proposición $\mathbf{B}$ cuando las proposiciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ son ciertas. La única posibilidad de que ambas sean ciertas, se encuentra en la primera linea de la tabla de verdad, todas las otras lineas consideran posibilidades en las que una o ambas son falsas. Al tener sólo una posibilidad el valor de certeza asociado $\mathbf{B}$ está dado en esa linea, así, tan pronto como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sean ciertos, $\mathbf{B}$ lo será también. Lo anterior imposibilita que la conclusión de nuestro argumento sea falsa y sus premisas ciertas por lo que el modus ponendo ponens garantiza argumentos válidos.

4.1.2. Doble negación

La doble negación es una regla inferencia que nos permite obtener información de proposiciones como «No es cierto que Alicia no estudie». Intuitivamente, de la anterior proposición podemos concluir que «Alicia estudia». Esta idea se encuentra capturada en la *doble negación*, ésta afirma que las conclusiones en los argumentos

$$(\mathbf{A}) \vdash \neg\neg\mathbf{A}$$

y

$$(\neg\neg\mathbf{A}) \vdash \mathbf{A}$$

son consecuencias lógicas de sus premisas. Usaremos la abreviatura `DN` para denotar cualquiera de las formas de esta regla. Cabe de nuevo preguntarse por alguna justificación de esta regla, y de nueva cuenta, podemos encontrar respuesta en una tabla de verdad. El lector no debería encontrar problema en proveer dicha justificación y así poder afirmar que los argumentos antes presentados son realmente válidos.

4.1.3. Modus Tollendo Tollens

La regla de inferencia *modus tollendo tollens* recibe su nombre del latín, «el método en que se niega negando», y afirma que dada una proposición condicional, si su consecuente es negado, entonces el antecedente será negado también. Esto implica que la conclusión del argumento

$$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \neg\mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A},$$

es consecuencia lógica de sus premisas. Para abreviarla, usaremos simplemente `TT`.

Ejemplo. Sea

> $\mathbf{A}$ = «Si Alicia está en Buenos Aires, entonces Alicia está en Argentina»,
>
> $\mathbf{B}$ = «Alicia está en Argentina»

y

> $\mathbf{C}$ = «Alicia está en Buenos Aires».

El modus tollendo tollens nos permite afirmar que la conclusión en el argumento

$$(\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{C}$$

es consecuencia lógica de sus premisas y por tanto constituye un argumento válido. Podemos expresar de manera escrita también:

> «Si Alicia está en Buenos Aires, entonces Alicia está en Argentina. Pero Alicia no está en Argentina. Inferimos que Alicia no está en Buenos Aires».

De nueva cuenta, podemos encontrar una justificación de este hecho con ayuda de las tablas de verdad para afirmar que el argumento que al que evalúa el modus tollendo tollens es en realidad un argumento válido. Es un buen ejercicio intentar hacerlo.

4.1.4. Leyes conmutativas

Las leyes conmutativas son una regla de inferencia que, al parecer obvia, podemos justificar con tablas de verdad. Dicha regla afirma el orden en una conjunción, disyunción o equivalencia se presenten, es irrelevante. En otras palabras para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, las conclusiones de los argumentos

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vdash \mathbf{B} \wedge \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$$

y

$$(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \vdash \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{A},$$

se deducen de sus premisas. Para justificar estos hechos, debemos simplemente observar las tablas de verdad que definen la conjunción, la disyunción (cuadro 1) y la equivalencia (cuadro 4). De esta forma las leyes conmutativas nos proveen de argumentos válidos. Para abreviar cualquiera de sus formas usaremos `LC`.

4.1.5. Conjunción y Simplificación en las premisas

La definición de argumento usa implícitamente determinadas definiciones en nuestro lenguaje que se ven reflejadas en nuestras definiciones de certeza. Por ejemplo al afirmar que

> «Es imposible que su conclusión sea falsa y sus premisas ciertas»,

nos lleva precisamente a afirmar que concluir la conjunción de las premisas de en cualquier argumento debe ser válido. Así, para cualquier lista de proposiciones $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, la conclusión del siguiente argumento es consecuencia de sus premisas,

$$(\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n.$$

A lo anterior se le conoce como *ley de la conjunción de las premisas*, usaremos la abreviatura `LCP` para esta regla de inferencia.

De la misma forma en que la ley de la adjunción conjuntiva reúne en una proposición las premisas, podemos realizar la acción opuesta igualmente como una consecuencia válida. Con esto queremos decir que para cualquier lista de proposiciones $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, los argumentos

$$(\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$$

son válidos. A lo anterior se le conoce como *ley de la simplificación conjuntiva* o simplemente como *ley de simplificación*. Para abreviarla usaremos `LS`.

La justificación de estas dos leyes se basa en el simple hecho que la proposición

$$\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n$$

será cierta cuando las proposiciones $\mathbf{A}_1$,..., $\mathbf{A}_{n-1}$ y $\mathbf{A}_n$ sean todas ciertas y viceversa, i.e., cuando dichas proposiciones sean todas ciertas, será cierta también su conjunción. Lo anterior nos permite concluir que ambas leyes nos entregan argumentos válidos.

4.1.6. Equivalencia Conjuntiva

Con la ley de la conjunción de las premisas, podemos vincular las premisas de un argumento con la conjunción de ellas. De la misma forma, la *regla de la equivalencia conjuntiva*, que abreviaremos como `EC`, nos permite afirmar que para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ y $\mathbf{C}$, siempre que el argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ sea válido, el argumento $(\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ lo será también. Lo anterior es posible presentarlo de manera esquemática de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C} & \\ \hline (\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C} & \texttt{RE: } 1 \end{array}$$

A lo anterior lo llamaremos *esquema demostrativo*, cada linea representa un argumento válido y en cada una se indicará la regla en uso para mostrar su validez. Las lineas en blanco se asumirán como las hipótesis del esquema. Veremos otros ejemplos más adelante.

Esta regla puede justificarse al analizar la definición de argumento válido. Al ser el argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ válido, al asumir la proposición $\mathbf{C}$ como falsa, las proposiciones $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{m-1}$ y $\mathbf{B}_m$ no serán todas ciertas. Esto implica que alguna de las proposiciones $\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ es falsa, siguiendo la definición de los valores de certeza para la conjunción. Así, en el argumento $(\mathbf{A}_1 \wedge, \cdots \wedge \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$, será imposible tener su conclusión como falsa y sus premisas ciertas, esto nos permite decir que la regla de equivalencia conjuntiva entrega argumentos válidos.

4.1.7. Transitividad y Subargumentos

Otra regla que nos permite obtener argumentos válidos de otros que sabemos de antemano válidos es regla de la *transitividad argumentativa*, ésta postula una manera de conectar dos argumentos válidos en un tercero. Afirmamos entonces que, para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ y $\mathbf{C}$, siempre que sean válidos los argumentos

$$(\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{B}$$

y

$$(\mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C},$$

el argumento
$$(\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$$
será igualmente válido. Para abreviar este hecho utilizaremos TA. Podemos esquematizar el hecho anterior de la siguiente manera

$$\begin{array}{lcr} 1. & (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{B} & \\ 2. & (\mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C} & \\ \hline & (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C} & \texttt{TA}: 1,2 \end{array}$$

Para justificar esta transitividad, podemos recurrir simplemente a la definición de argumento válido. Para esto debemos preguntarnos si es posible que las premisas del argumento sean ciertas teniendo la proposción $\mathbf{C}$ como falsa. Como el argumento $(\mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n) \vdash \mathbf{C}$ es válido, al ser $\mathbf{C}$ falsa, es imposible que las premisas sean ciertas. Esto implica que al menos una es falsa. Si $\mathbf{B}$ fuera alguna de esas premisas falsas, la validez del argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \vdash B$ implica que al menos una de las proposiciones en la lista $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ es falsa, por lo que el argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ debe ser válido. Si $\mathbf{B}$ no fuera una de las premisas falsas, en automático el argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ será válido. En consecuencia, es imposible que las premisas $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{n-1}$ y $\mathbf{B}_n$ sean ciertas siendo $\mathbf{C}$ falsa. El argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ es por esta razón válido.

Otra regla de inferencia que garantiza la validez de un argumento a través de la validez de otros, es la llamada *regla del subargumento*. Esta afirma que de un argumento válido podemos obtener otro igualmente válido si mantenemos la conclusión y aumentamos las premisas. En otras palabras, para cualesquiera premisas $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ y $\mathbf{C}$, siempre que el argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{C}$ sea válido, el argumento $(\mathbf{A}_1 \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ también lo será. Abreviaremos lo anterior como RS.

Para justificarlo, de nueva cuenta recurriremos a las definición de argumento válido. Como asumimos que $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{C}$ es un argumento válido, sera imposible tener obtener $\mathbf{C}$ como falso junto a las proposiciones $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ y $\mathbf{A}_n$ ciertas y con esto junto a $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_m$ y $\mathbf{B}_m$ ciertas al mismo tiempo. En consecuencia el argumento $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C}$ es igualmente válido.

Como esquema demostrativo, escribiremos,

$$\begin{array}{lcr} 1. & (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{C} & \\ \hline & (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m) \vdash \mathbf{C} & \texttt{RS}: 1 \end{array}$$

Las dos reglas que introducimos, a pesar de lo simples que puedan parecer, son extremadamente útiles para derivar y extender otras reglas de inferencia, esto debido a que dependen de la validez de otros argumentos.

4.1.8. Conjunción y Simplificación en las conclusiones

Parecida a las ley de la conjunción de las premisas, tenemos la *regla de la conjunción de las conclusiones*, que abreviaremos como RCC. Esta afirma que dados dos argumentos válidos, podemos construir otro argumento válido con la conjunción de sus conclusiones y las premisas de los dos argumentos juntas como las premisas del nuevo argumento. En otras palabras, para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, siempre que los argumentos $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{C}$ y $(\mathbf{B}) \vdash \mathbf{D}$ sean válidos, el argumento

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \vdash \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$$

será igualmente válido. Como esquema demostrativo, tenemos

$$\begin{array}{ll} 1. & (\mathbf{A}) \vdash \mathbf{C} \\ 2. & (\mathbf{B}) \vdash \mathbf{D} \\ \hline & (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \vdash \mathbf{C} \wedge \mathbf{D} \quad \texttt{RCC: } 1,2 \end{array}$$

Como la ley de simplificación de las premisas, existe la *regla de la simplificación de la conclusión*, ésta nos permite simplificar conclusiones que contengan una conjunción de la siguiente manera. Para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, si el argumento $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$ es válido, entonces los argumentos $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B}$ y $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{C}$ son válidos. Como esquema demostrativo, escribiremos

$$\begin{array}{ll} 1. & (\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \\ \hline 2. & (\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B}, \mathbf{C} \quad \texttt{RSC: } 1 \end{array}$$

Las justificaciones para estas reglas se pueden obtener a través de sus tablas de verdad o usando la definición de argumento válido. Usando la definición de validez, dicha justificación es muy similar a la ofrecida para la ley de la conjunción de las premisas y la ley de simplificación de las premisas.

4.1.9. Disyunción en las conclusiones

Como analogía a las reglas que involucran la conjunción, existen reglas de inferencia que nos permiten adjuntar proposiciones a través de disyunciones en las conclusiones de un argumento. En particular tenemos la *regla de la adjunción disyuntiva*, ésta afirma que para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ siempre que el argumento $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B}$ sea válido, el argumento $(\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ lo será también. Para ésta regla usaremos la abreviatura `RAD`. De manera esquemática

$$\begin{array}{ll} 1. & (\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} \\ \hline & (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \quad \texttt{RAD: } 1 \end{array}$$

Para brindar una justificación, debemos preguntarnos cuál es la interpretación que hemos dado a la conclusión que deseamos. Entonces, cuando afirmamos la conclusión $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ es falsa, por al asignación de la tabla de verdad, la única posibilidad de que esto suceda es que tanto $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ sean falsas; debido a la validez del argumento $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B}$, esto implicará que $\mathbf{A}$ es falso y en consecuencia $\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ será también también falso; esto quiere decir que si $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ es falso, será imposible tener $\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ cierto, haciendo el argumento que deseamos válido.

4.1.10. Inserción de premisas

Cuando obtenemos conclusiones de argumentos válidos, es posible notar la estrecha relación que guarda la obtención de la conclusión con la implicación. La *regla de la premisas* expresa dicha relación de manera formal al afirmar que es posible introducir una premisa en cualquier punto del argumento y cualquier conclusión que se derive, será el consecuente de una proposición condicional. Para ser más claros, para cualesquiera premisas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, si el argumento $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \vdash \mathbf{C}$ es válido, entonces el argumento $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ será igualmente válido. Usaremos la abreviatura `RP` para referirnos a esta regla. Como esquema demostrativo, a lo anterior lo escribiremos

$$\begin{array}{ll} 1. \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \vdash \mathbf{C} & \\ \hline (\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C} & \texttt{RP}: 1 \end{array}$$

Como en muchos de los otros casos es posible obtener una justificación de este hecho usando tablas de verdad.

4.1.11. Reducción al Absurdo

La *reducción al absurdo* es un regla que nos permite obtener argumentos válidos de manera indirecta. Esto quiere decir que realmente no buscamos la conclusión deseada, sino en su lugar que su negación derive en contradicción. Por lo regular y aunque la regla oculta la construcción de una prueba para la afirmación, es una herramienta poderosa y admitida ampliamente en la matemática moderna. La reducción al absurdo, que abreviaremos `RAA` afirma que, dadas proposiciones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, si el argumento $(\mathbf{A}) \vdash \neg\mathbf{B} \to \mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{C}$ es válido, de igual forma lo será el argumento $(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B}$. De manera esquemática escribiremos

$$\begin{array}{ll} 1. \quad (\mathbf{A}) \vdash \neg\mathbf{B} \to \mathbf{C} \wedge \neg\mathbf{C} & \\ \hline (\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} & \texttt{RAA}: 1 \end{array}$$

Debemos notar cómo la construcción que hace posible esta regla, afirma válido al segundo argumento pero no está relacionada con él, al contrario, esta relacionada con su negación y a pesar de esto introduce información acerca de la proposición que buscamos. Una prueba de esta naturaleza constituye un ejemplo de *prueba indirecta*.

Para proveer una justificación a este hecho basta escribir las tablas de verdad de las proposiciones involucradas.

4.2. De las demostraciones

Un esquema demostrativo representa una demostración de la validez de un argumento. Éste constituye una serie de pasos donde se explica a través de las reglas de inferencia, la deducción lógica que resulta en la validez del argumento en cuestión, indicando en cada paso la regla de inferencia usada. Hay que notar que ni un esquema demostrativo, ni una demostración están aquí definidas de forma alguna, sino que se explican en contexto y simplemente nos ayudan a clarificar y a estandarizar el proceso deductivo. De esta forma cuando se describa o se pida una demostración, se presentará la descripción del proceso deductivo por el cual se da un argumento por válido, ya sea a través de un esquema demostrativo o un argumento escrito.

5. Fórmulas Lógicas

Hasta ahora hemos estudiado diversas reglas de inferencia y hemos establecido su operación formal para formular argumentos válidos. A pesar de que logramos establecer la enorme capacidad de construir nuevas proposciones como deducciones lógicas, es posible presentar argumentos válidos para los que no contamos con una regla de inferencia para deducir la conclusión. Para convencernos de lo anterior, consideremos el siguiente hecho,

> «Todos los sabios Griegos fueron filósofos. Sócrates fue un sabio Griego. Concluimos que Sócrates fue un filósofo».

A pesar de no contar con una regla de inferencia que nos permita obtener la conclusión de manera deductiva, nuestra definición de validez es lo suficientemente flexible para dejarnos establecer lo anterior como un argumento válido. De la misma forma podemos considerar el argumento

> «Alicia es la mejor programadora del mundo. La mejor programadora del mundo usa Linux. En consecuencia Alicia usa Linux»,

y notar que satisface la definición de validez aunque de nueva cuenta, no tenemos una regla de inferencia que nos permita derivar su construcción.

Estos ejemplos ponen de manifiesto la necesidad de reglas de inferencia adicionales, reglas de inferencia que tomen en cuenta la estructura usada en la construcción de una proposición y no la proposición misma. Para esto requeriremos una aproximaciòn distinta al concept de proposción. de proposición.

5.1. Términos y Predicados

Para construir las reglas de inferencia que necesitamos, debemos explicar el significado de expresiones como «Todos los sabios Griegos fueron filósofos», debemos comenzar a analizar las indicaciones de una proposición atómica. Consideremos para esto las siguientes proposiciones atómicas

> «Alicia fue al centro de la ciudad de México».
> «Sócrates fue un filósofo».
> «Tales de Mileto es el padre de la filosofía».

En cada una de ellas, existen palabras que señalan a un objeto o persona con completa claridad: «Alicia», «Sócrates» y «Tales de Mileto» hacen referencia a una persona, «el centro de la ciudad de México» hace referencia a un lugar, mientras que «es el padre de la filosofía» hace una descripción particular. Podemos entonces proponer una definición [2].

Definición 7. Un *término* es una expresión con la que se nombre o se designa a un único objeto.

Es importante notar que bajo nuestra definición hemos excluido de ser términos expresiones como «un filósofo», debido a que éstas no hacen referencia particular a un objeto de manera clara. Igual de importante es distinguir que existen términos que hacen referencia a individuos u objectos, «Alicia» o «Sócrates», y términos que hacen referencia a descripciones únicas, «el padre de la filosofía».

Una vez establecida una definición de término, podemos preguntarnos por el resto de la oración. Consideremos para esto la proposición atómica «Sócrates fue un filósofo», en ella la expresión «fue un filósofo» nos logra proveer de información adicional acerca de Sócrates. En ese sentido queremos definir lo que es un predicado [2].

Definición 8. Se dice *predicado* a la expresión en una oración que dice algo acerca de un término.

La anterior definición no excluye de ninguna forma la posibilidad que un predicado pueda contener dos o más términos de enlace. Por ejemplo, es predicado «es el profesor de», predicado con el podemos formar la proposición «Roberto es el profesor de Alicia». Esto nos lleva a siguiente definición

Definición 9. A un predicado que califique a un sólo término le llamaremos *predicado simple.*

Debemos notar que ni los términos ni los predicados, aunque elementos que forman parte de una proposición atómica, son por si solos proposiciones. Ni «Alicia», ni «es un filósofo» nos proveen información susceptible de ser evaluada cierta o falsa contraviniendo la definición que hemos proporcionado para una proposición. Es de esta forma que, aunque una proposición atómica es divida, ninguna de estas divisiones es una proposición por si misma y por ello, la clasificación de atómica tiene perfecto sentido al ser estás las expresiones *indivisibles* que comunican una proposición bajo la definición que hemos proporcionado.

5.2. Términos variables

De la misma forma que hemos hecho hasta ahora, podemos simbolizar tanto términos como predicados. Por ejemplo podemos simbolizar el término «Sócrates» por s mientras que el predicado «fue un filósofo» lo escribiremos simplemente como F; así podemos escribir la proposición «Sócrates fue un filósofo» simplemente como $\mathrm{F}(s)$. Consideremos ahora un predicado no simple, por ejemplo simbolicemos por P al predicado «es el profesor de», con lo anterior podemos escribir la proposición «Roberto es el profesor de Alicia», simbolizando con r y a a los términos «Roberto» y «Alicia», simplemente como $\mathrm{P}(r, a)$. Una alternativa a la anterior simbolización consiste en escribir $r\mathrm{P}a$. Una ventaja de esta última notación es que indica el order en que el predicado utiliza los términos que describe. No se tendrá preferencia por ninguna de estas formas para predicados no simples.

Dado un predicado simple A, podemos usar la expresión «x» para acompañarlo, así, si A fuera el predicado «es un alumno», con A(x) obtendríamos la expresión «x es un alumno». Debemos entonces preguntarnos si la expresión «x» es un término. La respuesta debe ser no, sin embargo, dicha forma de expresarnos resulta muy conveniente al permitirnos describir proposiciones atómicas de diversas formas. Por ejemplo, «Roberto es un alumno» es una especificación de lo anterior y ésta, es una proposición; en ella «x» toma el valor del término «Roberto». Esta facilidad nos lleva considerar expresiones similares a «x» como un tipo de términos sin serlo realmente, a estos los llamaremos *términos variables* para notar con claridad la diferencia. Para denotar los términos variables reservaremos las últimas letras del alfabeto en minúsculas con fuente romana. Resumiendo: un término variable puede ser substituido por un término y en caso de estar junto a un predicado, esta sustitución resulta ser una proposición. Esto debe dar paso de manera natural a la definición de fórmula atómica [2].

Definición 10. Una *fórmula atómica* es un predicado solo, junto con el número apropiado de términos y términos variables unidos al mismo.

Con la anterior definición, podemos decir que una fórmula atómica, aunque no es necesariamente una proposición, resultará en una con cada sustitución de sus términos variables por términos.

Para definir una formula haremos uso de un símbolo que comúnmente es utilizado para expresar equivalencia, «:». Por ejemplo

$$\mathrm{F}(x)\colon x \text{ es un filósofo}$$

se leerá

F(x) es equivalente a «x es un filósofo»

y con esto indicaremos simplemente que F es el predicado «es un filósofo».

De la misma forma que hemos usado las proposiciones atómicas para construir las proposiciones moleculares, podemos usar las fórmulas atómicas para construir fórmulas más elaboradas. Podemos para esto definir lo siguiente.

Definición 11. Una *fórmula molecular* es una y sólo una de las situaciones siguientes:

- Una fórmula atómica.
- El resultado de unir otras fórmulas con algún término de enlace.

Por ejemplo, podemos considerar predicados A y B, y los términos variables x, y y z para construir la expresión

$$\mathrm{A}(x,z) \wedge \mathrm{B}(y).$$

Esta expresión es por supuesto un ejemplo de fórmula molecular. Podemos por ejemplo escribir

$$\alpha(x,y,z)\colon \mathrm{A}(x,z) \wedge \mathrm{B}(y)$$

para decir que $\alpha(x, y, z)$ es una fórmula molecular.

Una fórmula atómica o molecular contendrá un número determinado de términos variables usados junto con un número determinado de predicados que están vinculados con ciertos de términos de enlace. Una fórmula puede simplemente contener un predicado para ser una fórmula atómica, e.g.

$$\alpha(x)\colon \mathrm{A}(x),$$

o varios vinculados por términos de enlace, e.g.

$$\alpha(x, y, z)\colon \mathrm{A}(x, y) \to \mathrm{B}(x) \vee \neg\mathrm{C}(y, z).$$

Como se puede ver, este hecho se deja claro al escribir los términos variables de la fórmula en forma de lista. De manera general podemos hacer notar este hecho escribiendo

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n),$$

para referirnos a una formula con n términos variables.

Por último, es importante notar la posibilidad de sustituir los términos variables por términos: suponiendo que sean términos las expresiones $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y a_n, escribiremos

$$\alpha(a_1, \ldots, a_n).$$

Igual de importante es notar que, cuando esa sustitución se realize obtendremos una proposición en el sentido en el cual las hemos definido. De esta forma, las fórmulas tienen una conexión estricta con la proposiciones.

5.3. Cuantificadores

Como hemos visto, es posible obtener proposiciones de fórmulas atómicas o moleculares a través de sustituir sus términos variables por términos, sin embargo, existe otra forma de obtener proposiciones de una fórmula: cuantificado los términos variables. Tenemos dos cuantificadores lógicos, el universal y el existencial. Estos cuantificadores operarán sobre las fórmulas derivando en proposiciones que hagan afirmaciones generales o particulares acerca de las fórmulas que los acompañen.

5.3.1. Cuantificador Universal

El cuantificador universal nos permite establecer proposiciones que califiquen todas las posibles sustituciones de los términos variables en una fórmula; éste está representado por expresiones como «todos», «para todo» o «cada». A este cuantificador lo simbolizaremos por

$$\forall.$$

En cualquier ocasión en que escribamos el anterior símbolo seguido de un término variable, $\forall x$, equivaldrá a la expresión «Para todo x». De esta forma, podemos simbolizar la proposición «Todos los sabios Griegos fueron filósofos», utilizando G como el predicado «fue un sabio Griego», F como el predicado «fue un filósofo» y escribiendo

$$\forall x.\mathrm{G}(x) \rightarrow \mathrm{F}(x),$$

lo anterior expresa «para todo x, si x fue un sabio Griego, entonces x fue un filósofo» lo cual es equivalente a la proposición de donde partimos.

Es interesante que en nuestro lenguaje el cuantificador universal presenta diferentes formas y expresiones. Una que podemos destacar es «ninguno», por ejemplo, para simbolizar la proposición

«Ninguna persona tiene branquias»

usamos la fórmula

$$\mathrm{B}(x)\colon x \text{ tiene branquias}$$

y escribimos

$$\forall x.\neg \mathrm{B}(x).$$

De esta forma podemos ver que la expresión «ninguno», y sus equivalentes, cuantifican universalmente la oración que le sigue de manera negativa y no niegan a expresión en su totalidad. Esto contrasta con una proposición que comience con la expresión «no todos», por ejemplo, «No todos tienen un automóvil». Para simbolizar lo anterior utilizamos A como el predicado «tiene un automóvil» y escribimos

$$\neg\left(\forall x.\mathrm{A}(x)\right),$$

lo que constituye la negación de una proposición que contiene un cuantificador.

5.3.2. Cuantificador Existencial

El cuantificador existencial nos permite evaluar casos particulares de una fórmula, éste está representado por expresiones como «existe», «hay» o «podemos encontrar». Para simbolizar a este cuantificador usaremos el símbolo

$$\exists.$$

Cuando de este símbolo siga un término variable, $\exists x$, se leerá «existe x». De esta forma la proposición «Existen personas que están a favor de la eutanasia», podrá ser simbolizada a través del predicado «está a favor de la eutanasia», representado por E y escribiendo

$$\exists x.E(x).$$

Vale la pena notar que al formalizar proposiciones, no distinguiremos entre la expresiones «existe» y «existen», para nosotros el singular y el plural convergen, esto quiere decir que deben ser consideradas como la misma modificación sobre el enunciado. Por ejemplo, cuando afirmamos «Existe un político corrupto» no estamos limitando nuestra afirmación al singular, sino abrimos la posibilidad encontrar otros «políticos corruptos» pues al menos existe uno. Por esta razón preferiremos el uso de la expresión «existe» cuando no presentemos una proposición de manera formal.

5.3.3. Fórmulas con cuantificadores

Hasta ahora hemos introducido la cuantificación solamente para describir proposiciones, sin embargo las fórmulas atómicas y moleculares al contener más de un término variable y ser cuantificadas, pueden resultar también en fórmulas. Por ejemplo para una fórmula atómica $\alpha(x, y, z)$ con tres términos variables, deberíamos de reconocer como fórmula a la expresión

$$\exists y \forall x . \alpha(x, y, z).$$

Sin embargo, durante nuestra discusión no hemos tocado el caso en que una fórmula contenga cuantificadores, ni que las variables cuantificadas sean múltiples. Debemos entonces ampliar nuestra noción de fórmula (esta vez de manera definitiva) para incluir los casos de cuantificación. La siguiente definición nos permite prescindir de la distinción entre fórmulas atómicas, moleculares o cuantificadas.

Definición 12. Como *fórmula* entenderemos una y sólo una de las siguientes opciones:

- Una fórmula atómica.
- Una fórmula o fórmulas enlazadas con un término de enlace.
- Una fórmula con un término variable cuantificado.

Debemos notar la naturaleza de la definición, cuando usamos la expresión «una fórmula» en el segundo y tercer punto no damos carta en blanco, ni una definición circular. Estamos, primeramente, permitiendo a todas las fórmulas atómicas ser fórmulas; con ellas como fórmulas, podemos construir otras con términos de enlace o, en su defecto, cuantificar alguna de sus variables y con esto ampliar lo que denominamos fórmula. De nueva cuenta, usamos todas esas nuevas expresiones para construir algunas más, usando los términos de enlace o la cuantificación para obtenerlas; de esta manera podemos continuar el proceso indefinidamente y así incluir un universo considerable de expresiones que serán fórmulas. A modo de anotación, éste es un ejemplo de definición conocida como *recursiva*.

Intentaremos aclarar lo anterior con un ejemplo, consideremos para esto los predicados definidos por

$$\mathrm{M}(x, y) \colon x \text{ es madre de } y$$

y

$$\mathrm{P}(z, y) \colon z \text{ es el padre de } y.$$

Podemos entonces aceptar que la expresión $\alpha(x, y)$ defina por

$$\alpha(x, y) \colon \mathrm{M}(x, y)$$

constituye una fórmula, en el sentido que lo anterior es una fórmula atómica y, de acuerdo a la definición, ésta constituye la primera de las posibilidades permitidas para que una expresión sea considerada una fórmula. Podemos de igual manera considerar la expresión

$$\beta(x, y, z)\colon \mathrm{M}(x, y) \wedge \mathrm{P}(z, y)$$

como una fórmula, justificado en que la anterior expresión es una conjunción de fórmulas atómicas, la segunda de las posibilidades establecidas en la definición. De manera similar podemos definir la expresión

$$\gamma(y, z)\colon \exists x.\mathrm{M}(x, y) \wedge \mathrm{P}(z, y)$$

y notar que lo anterior es de nueva cuenta una fórmula, recargándonos en la tercera de las posibilidades que la definición permite, notando que la anterior expresión es simplemente la fórmula $\beta(x, y, z)$ con el término variable «x» cuantificado existencialmente. Un caso adicional de fórmula descrito en la definición, de nueva cuenta por la tercera posibilidad, resulta la expresión

$$\delta(y)\colon \forall z \exists x.\mathrm{M}(x, y) \wedge \mathrm{P}(z, y);$$

lo anterior sigue de considerar que la expresión es simplemente la cuantificación universal de la variable «z» en la fórmula descrita por $\gamma(y, z)$. Existe un caso adicional, en cual encontramos todas las variables cuantificadas; por ejemplo, en la expresión

$$\forall y \exists z \exists x.\mathrm{M}(x, y) \wedge \mathrm{P}(z, y).$$

Bajo la definición que hemos propuesto, esto califica como fórmula al ser simplemente la cuantificación universal sobre la variable «y» de la fórmula $\delta(y)$. Como habíamos referido, sin ser minuciosos en ello, una fórmula con todas las variables cuantificadas, resulta en un proposición. Lo anterior es un hecho importante, las proposiciones son entonces un expresión particular de una generalidad: las fórmulas.

5.3.4. Dominio de cuantificación

Un punto a remarcar acerca de la cuantificación, es la dominio de esta cuantificación. Asumiremos que ésta sucede en un *dominio de referencia* implícito en el contexto o explícito en convención. Por ejemplo podemos establecer que nuestro dominio de referencia son los seres humanos que viven en México y expresar, tomando E como el predicado «trabaja en exceso»,

$$\forall x.\mathrm{E}(x).$$

De esta forma la anterior proposición nos informa de un hecho acerca de todos los seres humanos que viven en México. Por lo regular, un dominio de referencia se establece, implícita o explícitamente, para un grupo amplio de proposiciones, como en el curso de la discusión de una determinada teoría, y es de alguna manera inamovible. En particular convendremos que en un esquema demostrativo el dominio de cuantificación es fijo.

La importancia del dominio de referencia es la capacidad que nos otorga de interpretar una proposición que incluya cuantificadores, en otras palabras, asignar un valor de certeza a este tipo de proposiciones. Consideremos $\alpha(x)$ como una fórmula cualquiera; en ese caso la proposición

$$\forall x.\alpha(x)$$

tendrá el valor de certeza cierto cuando la sustitución de cualquier término en el dominio de referencia sobre la fórmula $\alpha(x)$, resulta en una proposición cierta, de otra forma tendrá el valor de falso. De manera similar a la proposición

$$\exists x.\alpha(x)$$

le asignaremos el valor de certeza de cierto si de la sustitución de alguno de los términos en el dominio de referencia sobre la fórmula $\alpha(x)$, resulta una proposición cierta, de otra forma tendrá el valor de falso.

5.4. Inferencia y cuantificación

5.4.1. Especificación

Cuando hablamos de especificación, hablamos de producir un caso particular de una verdad general; por ejemplo, podemos considerar la discusión que ha dado origen nuestro actual desarrollo: «Todos los sabios Griegos fueron filósofos». Precisamente, queremos proporcionar una persona como término y evaluar si esa persona «fue un sabio Griego». Es así como transitamos de lo general a lo particular. Nuestra generalidad, una fórmula cuantificada, nuestra particularidad, una proposición, de esta forma enunciaremos los dos principios que rigen la especificación.

La *ley de la especificación universal* nos permite concluir una proposición de una fórmula cuantificada universalmente; ésta afirma que dada una proposición que cuantifique universalmente una fórmula, podemos concluir cualquier sustitución en dicha fórmula por un término. De esta forma, la conclusión del argumento, donde a es un término cualquiera,

$$(\forall x.\alpha(x)) \vdash \alpha(a),$$

será consecuencia lógica de la premisa dada. Es importante remarcar que lo anterior resulta simplemente de la forma en que hemos interpretado la certeza de una proposición que contiene un cuantificador universal. Hemos afirmado que dicha proposición será cierta si cualquier sustitución del término variable al que cuantifica es cierta. En ese sentido, será imposible tener a la conclusión $\alpha(a)$ como falsa y a la premisa $\forall x.\alpha(x)$ cierta, pues esto implicaría que no toda sustitución de un término variable por un término resulta en una proposición cierta, contraviniendo la certeza de la premisa. Es de esta manera en que el anterior argumento es válido. Cuando la especificación sea usada en un esquema demostrativo, aclararemos la sustitución que se ha hecho como «`EU:` x/a», esto es, escribiremos

$$(\forall x.\alpha(x)) \vdash \alpha(a) \qquad \texttt{EU:}\ x/a.$$

Existe también la *ley de la especificación existencial*, ésta nos permite deducir una proposición particular de una fórmula con un cuantificador existencial. Esta nos permite derivar de una implicación que se deshaga de una especificación, su consecuente. Para ser claro, afirmamos para cualquier término a, cualquier fórmula α y cualquier proposición $\mathbf{A}$ que no contenga en su expresión como fórmula el término a, la conclusión del argumento

$$(\exists x.\alpha(x), \alpha(a) \to \mathbf{A}) \vdash \mathbf{A}$$

se derivada de la premisa. Es sencillo ver que lo anterior resulta de igual forma en un argumento válido, esto se debe a que al negar la proposición $\mathbf{A}$, para que la proposición $\alpha(a) \to \mathbf{A}$ sea cierta, debemos tener $\alpha(a)$ falsa. Como el término a fue tomado de manera arbitraria, lo anterior simplemente afirma que la premisa $\exists x.\alpha(x)$, es falsa. De aquí, concluimos que es imposible obtener la conclusión del argumento falsa y las premisas ciertas, por tanto es un argumento válido. Cuando la regla anterior sea usada en un argumento válido, escribiremos

$$(\exists x.\alpha(x), \alpha(a) \to \mathbf{A}) \vdash \mathbf{A} \quad \texttt{EE:}\ x/a$$

5.4.2. Generalización

La generalización es el proceso inverso de la especificación, en ella intentamos construir verdades generales a partir de comprobar casos arbitrarios particulares. Queremos entonces obtener una expresión con una fórmula cuantificada, a través de una fórmula con un término.

La primera de estas reglas, la *ley de la generalización existencial*, que abreviaremos `GE`, dice que si para una fórmula un término resulta en una proposición bajo sustitución, podemos concluir la fórmula cuantificada existencialmente; en otras palabras, para cualquier término a y cualquier fórmula α, la conclusión del argumento

$$(\alpha(a)) \vdash \exists x.\alpha(x)$$

resulta de sus premisas. En un esquema demostrativo, aclararemos este hecho escribiendo `GE`: a/x. No debemos titubear en notar que la regla lógica anterior presenta un argumento válido. Esto sigue directamente de la forma en que hemos asociado un valor de certeza a cuantificador existencial, pues si no fuera cierto $\exists x.\alpha(x)$ entonces para ningún término en el dominio de referencia, la sustitución en α resultaría como proposición cierta, en particular para el término a, por tanto es imposible tener la conclusión falsa, y su premisa cierta.

Existe otra ley que considera cuando podemos introducir un cuantificador universal. Esta es la *ley de la generalización universal*, abreviando `GU`, la cual nos otorga condiciones para concluir una proposición que contenga un cuantificador universal. Ésta afirma que dado un término a, una fórmula α y una proposición $\mathbf{A}$ que no contenga en su expresión como fórmula el término a, que la conclusión del argumento

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \alpha(a)) \vdash \forall x.\alpha(x)$$

se deriva de las premisas. En un esquema demostrativo, aclararemos este hecho escribiendo `GU`: a/x. De nueva cuenta la validez del argumento puede ser justificada de manera sencilla, se recomienda al lector realizar esta labor.

5.4.3. Ejemplos de especificación y generalización

La manera en que presentamos las anteriores reglas de inferencia, es profundamente abstracta y resulta complicado encontrar su razón de ser, sin embargo, son principios que siguen de manera inmediata de las definiciones que hemos dado, no sólo eso, siguen nuestra manera de interpretar el razonamiento. Para aclarar su uso y su alcance, presentamos a continuación algunos ejemplos.

Para el primero de los ejemplos, regresaremos a uno de los argumentos que ha dado origen a nuestra discusión.

> «Todos los sabios Griegos fueron filósofos. Sócrates fue un sabio Griego. Concluimos que Sócrates fue un filósofo».

Nuestro primer paso, será simbolizarlo, para esto definiremos la fórmula en el dominio de referencia de las personas

$$\mathrm{S}(x) \to \mathrm{F}(x)\colon x \text{ fue un sabio griego } \to x \text{ fue un filósofo,}$$

de esta forma, podemos escribir el argumento anterior como

$$(\forall x.\mathrm{S}(x) \to \mathrm{F}(x), S(a)) \vdash F(a).$$

A continuación presentamos un esquema demostrativo de la prueba de este hecho,

$$\begin{array}{lcc} 1. & (\forall x.\mathrm{S}(x) \to \mathrm{F}(x)) \vdash \mathrm{S}(a) \to \mathrm{F}(a) & \texttt{EU: } x/a \\ 2. & (\mathrm{S}(a) \to \mathrm{F}(a), \mathrm{S}(a)) \vdash \mathrm{F}(a) & \texttt{PP} \\ \hline & (\forall x.\mathrm{S}(x) \to \mathrm{F}(x), \mathrm{S}(a)) \vdash \mathrm{F}(b) & \texttt{TA: } 1,2 \end{array}$$

La anterior prueba garantiza que la conclusión del argumento es resultado de la deducción lógica de sus premisas y por tanto válido. De esta forma, estamos capacitados a afirmar, que el argumento donde partimos es válido.

Continuaremos con otro ejemplo donde el argumento a analizar se presenta de forma escrita, a decir

> «Todas las arañas son venenosas. Algunas arañas son tienen una picadura mortal. Concluimos que algunos animales venenosos, tienen una picadura mortal.»

De nueva cuenta, el primer paso es simbolizar, para esto definiremos los predicados

$$\mathrm{A}(x)\colon x \text{ es una araña,}$$

$$\mathrm{V}(x)\colon x \text{ es venenosa}$$

y

$$\mathrm{M}(x)\colon x \text{ tiene una picadura mortal.}$$

En ese caso, tomamos el dominio de referencia como el de los animales y podemos escribir el argumento anterior como

$$(\forall x.\mathrm{A}(x) \to \mathrm{V}(x), \exists x.\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \vdash \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x).$$

A continuación se presenta el esquema demostrativo del argumento anterior,

1.	$(\forall x.\mathrm{A}(x) \to \mathrm{V}(x)) \vdash \mathrm{A}(a) \to \mathrm{V}(a)$	`EU`: x/a
2.	$(\mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{M}(a)) \vdash \mathrm{A}(a), \mathrm{M}(a)$	`LS`
3.	$(\mathrm{A}(a) \to \mathrm{V}(a), \mathrm{A}(a)) \vdash \mathrm{V}(a)$	`PP`
4.	$(\mathrm{A}(a) \to \mathrm{V}(a), \mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{M}(a)) \vdash \mathrm{V}(a)$	`TA`: 2,3
5.	$(\mathrm{A}(a) \to \mathrm{V}(a), \mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{M}(a)) \vdash \mathrm{V}(a) \wedge \mathrm{M}(a)$	`RCC`: 2,4
6.	$(\mathrm{V}(a) \wedge \mathrm{M}(a)) \vdash \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x)$	`GE`
7.	$(\mathrm{A}(a) \to \mathrm{V}(a), \mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{M}(a)) \vdash \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x)$	`TA`: 5,6
8.	$(\forall x.\mathrm{A}(x) \to \mathrm{V}(x), \mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{M}(a)) \vdash \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x)$	`TA`: 1,7
9.	$(\forall x.\mathrm{A}(x) \to \mathrm{V}(x)) \vdash \mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{M}(a) \to \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x)$	`RP`
10.	$(\exists x.\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{M}(x), \mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{M}(a) \to \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \vdash \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x)$	`EE`
11.	$(\forall x.\mathrm{A}(x) \to \mathrm{V}(x), \exists x.\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \vdash \exists x.\mathrm{V}(x) \wedge \mathrm{M}(x)$	`TA`: 9,10

Por último, consideraremos un ejemplo de carácter teórico, el probaremos como opera el cuantificador universal sobre una implicación. Probaremos como válido al argumento

$$(\forall x.\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash (\forall x.\alpha(x)) \to (\forall x.\beta(x))$$

para fórmulas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ cualesquiera. Presentamos el esquema demostrativo de este hecho a continuación.

1.	$(\forall x.\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash \alpha(a) \to \beta(a)$	`EU`: x/a
2.	$(\forall x.\alpha(x)) \vdash \alpha(a)$	`EU`: x/a
3.	$(\alpha(a), \alpha(a) \to \beta(a)) \vdash \beta(a)$	`PP`
4.	$(\forall x.\alpha(x) \to \beta(x), \forall x.\alpha(x)) \vdash \beta(a)$	`TA`: (1,3),2
5.	$(\forall x.\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash (\forall x.\alpha(x)) \to \beta(a)$	`RP`: 4
6.	$(\forall x.\alpha(x), (\forall x.\alpha(x)) \to \beta(a)) \vdash \forall x.\beta(x)$	`GU`
7.	$((\forall x.\alpha(x)) \to \beta(a)) \vdash (\forall x.\alpha(x)) \to (\forall x.\beta(x))$	`RP`: 6
8.	$(\forall x.\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash (\forall x.\alpha(x)) \to (\forall x.\beta(x)$	`TA`: 5,7

5.4.4. Relación entre los cuantificadores

Nos interesa introducir reglas de inferencia que nos permitan manipular proposiciones donde los cuantificadores estén presentes, la primera de estas reglas establece la relación que guardan los cuantificadores entre ellos. La ley de la negación de los cuantificadores que abreviaremos `LNC`, establece que la negación del cuantificador universal es el cuantificador existencial y viceversa, i.e., la negación del cuantificador existencial es el cuantificador universal; esto nos permite afirmar que dada una fórmula α, las conclusiones en los argumentos

$$(\neg\forall x.\alpha(x)) \vdash \exists x.\neg\alpha(x)$$

y

$$(\neg\exists x.\alpha(x)) \vdash \forall x.\neg\alpha(x),$$

se obtienen como deducciones lógicas de sus premisas.

De nueva cuenta estos hechos no deben de sorprendernos, son resultado inmediato de la forma en que hemos asignado valores de certeza a los cuantificadores. Para el primero, tener falsa la conclusión significa que no podemos sustituir un término en $\neg\alpha(x)$ y obtener una proposición cierta, en otras palabras, cualquier sustitución sobre $\neg\alpha(x)$ resultará en una proposición falsa, por que cualquier sustitución sobre $\alpha(x)$ resultará en una proposición cierta. Por tanto es imposible tener la conclusión del argumento falsa y la premisa en él, cierta. El argumento, por esta razón, resulta válido. Un argumento parecido se puede usar para validar el segundo argumento y será un ejercicio interesante a realizar por el lector.

5.5. Identidad

En lengua castellana, las conjugaciones del verbo «ser» tienen una peculiaridad, nombran, designan o refieren a una misma cosa. Por ejemplo al afirmar la proposición

«Alicia es la mejor programadora del mundo»,

indicamos que el término «Alicia» equivale o es el mismo «la mejor programadora del mundo». En otras palabras ambos son *idénticos*. Por esta razón, es posible escribir

«Alicia = La mejor programadora del mundo».

O, simbolizando los términos «Alicia» por a y «La mejor programadora del mundo» por p,

$$a = p.$$

Al símbolo $=$ se le denomina *signo de identidad* y usaremos el símbolo $\neq$ para denotar la negación de la identidad.

Cualquier conjugación del verbo «ser», entendiendo que es un predicado no simple, identificará dos términos; podemos de igual forma tener variantes como «es idéntico a», «es lo mismo que», etc. sin embargo, estos predicados son fácilmente distinguibles en nuestro lenguaje y siempre admiten sólo dos términos. Habrá de tener cuidado de no confundir estos predicados con otros que solamente admiten un término, por ejemplo, «es un filósofo», en éste no hay forma de escribir a que es idéntico el término que describe, pues «un filósofo» forma parte intrínseca del predicado.

Debemos notar que hasta ahora no tenemos forma de manipular proposiciones que contengan una identidad, a pesar de que en nuestro lenguaje, cuando un término lo identificamos con otro, podemos sustituirlo y operar con el. Necesitamos entonces hacer sensible nuestra presentación de la lógica a este hecho, precisamente a través de la *ley de la identidad.* Esta afirma que de una proposición que identifique dos términos, estos pueden ser sustituidos indistintamente sin alterar la veracidad de las proposiciones donde participen, en otras palabras, para cualesquiera términos a y b, y cualquier fórmula $\alpha(x)$, la conclusión se deriva de las premisas en el siguiente argumento,

$$(a = b, \alpha(a)) \vdash \alpha(b).$$

El anterior argumento es perfectamente válido en la forma en que comúnmente interpretamos la identidad, lo que afirmemos de a será cierto para b y viceversa. Esta regla de inferencia la abreviaremos usando `I`.

Volvamos ahora a uno de los ejemplos que originó la actual discusión:

> «Alicia es la mejor programadora del mundo. La mejor programadora del mundo usa Linux. En consecuencia Alicia usa Linux».

Establecemos nuestro dominio de referencia como las personas y simbolizamos los términos «Alicia» por a y «La mejor programadora del mundo» por p, además de la fórmula

$$L(x)\colon x \text{ usa Linux},$$

en ese caso podemos simbolizar el razonamiento dado con el argumento

$$(a = p, \mathrm{L}(p)) \vdash \mathrm{L} < ++ > (a),$$

el cual es simplemente la aplicación directa de la ley de la identidad, por lo que el esquema demostrativo resulta tener una sola linea,

1.	$(a = p, \mathrm{L} < ++ > (p)) \vdash \mathrm{L} < ++ > (a)$	`I`

Consideremos un ejemplo más elaborado:

> «La persona que intervino la red estaba en Toluca. Ahora, si alguien estaba en Toluca, no estaba en la ciudad de México. En efecto, Alicia estaba en la ciudad de México. Por tanto Alicia no es la persona que intervino la red».

Para comenzar fijaremos nuestro dominio de referencia a las personas. Simbolizamos entonces los términos «Alicia» por a y «la persona que intervino la red» por i,y los predicados

$$\mathrm{T}(x) : x \text{ estaba en Toluca}$$

$$\mathrm{M}(x) : x \text{ estaba en la ciudad de México.}$$

Entonces, debemos probar la validez del argumento

$$(\forall x.\mathrm{T}(x) \to \neg\mathrm{M}(x), \mathrm{T}(i), \mathrm{M}(a)) \vdash a \neq i.$$

A continuación se presenta el esquema demostrativo que prueba la validez de nuestra afirmación,

1.	$(\forall x.\mathrm{T}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)) \vdash \mathrm{T}(a) \to \neg\mathrm{M}(a)$	`EU`: x/a
2.	$(\mathrm{T}(a) \to \neg\mathrm{M}(a), \mathrm{M}(a)) \vdash \neg\mathrm{T}(a)$	`TT` , `DN`
3.	$(a = i, \mathrm{T}(i)) \vdash \mathrm{T}(a)$	`I`
4.	$(\mathrm{T}(a) \to \neg\mathrm{M}(a), \mathrm{T}(i), \mathrm{M}(a), a = i) \vdash \neg\mathrm{T}(a)$	`RS`: 2
5.	$(\mathrm{T}(a) \to \neg\mathrm{M}(a), \mathrm{T}(i), \mathrm{M}(a), a = i) \vdash \mathrm{T}(a)$	`RS`: 3
6.	$(\mathrm{T}(a) \to \neg\mathrm{M}(a), \mathrm{T}(i), \mathrm{M}(a), a = i) \vdash \mathrm{T}(a) \wedge \neg\mathrm{T}(a)$	`RCC`: 4,5
7.	$(\mathrm{T}(a) \to \neg\mathrm{M}(a), \mathrm{T}(i), \mathrm{M}(a)) \vdash a = i \to \mathrm{T}(a) \wedge \neg\mathrm{T}(a)$	`RP`: 6
8.	$(\mathrm{T}(a) \to \neg\mathrm{M}(a), \mathrm{T}(i), \mathrm{M}(a)) \vdash \neg(a = i)$	`RAA`: 7
9.	$(\forall x.\mathrm{T}(x) \to \neg\mathrm{M}(x), \mathrm{T}(i), \mathrm{M}(a)) \vdash \neg(a = i)$	`TA`: 1,8

Basta entonces identificar $\neg(a = i)$ con $a \neq i$, como se describió anteriormente, y concluir que el razonamiento presentado es válido.

Referencias

[1] Rautenberg, Wolfgang: *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. Springer, 2000.

[2] Suppes, Patrick y Hill, Shirley: *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté, 2004.

Comentario. Las notas anteriores constituyen una versión muy preliminar. Intentan pobremente resumir lo que se ha presentando en el curso de Álgebra Superior I en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es susceptible a cambios sin previo aviso.