Semana 4: Primeros pasos en relaciones

1. Relaciones

En diversas situaciones, es indispensable relacionar elementos de un conjunto con otro. Por ejemplo, cuando afirmamos que un número es más grande que otro, establecemos una relación entre ellos, lo mismo que al describir una regla de correspondencia. Esta idea, aunque intuitivamente clara, requiere de precisión para evitar ambigüedades.

Definición 4.1. Sean A y B dos conjuntos. Por *una relación definida de A en B* entenderemos un subconjunto R del conjunto $A \times B$. Cuando tengamos el caso particular en que $B = A$, nos limitaremos a decir que *R es una relación definida en A*. Si $(a, b) \in R$ diremos que *a está relacionado con b a través de R* y en algunas ocasiones, simbolizaremos este hecho como aRb o $R(a, b)$.

Ejemplo. Una posible relación definida en $\mathbb{Z}$ es $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, -5), (3, -1)(4, -7)\}$. Otra posibilidad igual de legítima es $S = \{(-2, 1), (-3, 1), (4, 0), (5, 5)\}$.

El objetivo de esta definición es proveer un punto de corte conceptual que nos permite estudiar relaciones desde un punto de vista teórico. Un par de ejemplos en ese sentido se presentan a continuación y es importante constrastar su naturaleza con el ejemplo anterior.

Ejemplo. Para un conjunto cualquiera A, el conjunto

$$1_A = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\},$$

es una relación definida en A. A esta relación se le conoce como *la relación identidad en A*.

Ejemplo. En el conjunto $\mathbb{N}$ se puede decir que m está relacionado con n si y sólo si $n = m^2$. Lo anterior se puede traducir fácilmente a un conjunto expresando

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^2\}.$$

En ese conjunto viven parejas de la forma (m, m^2), esto quiere decir que mRn si y sólo si $n = m^2$, mostrando con esto que se trata de la relación de donde partimos.

Es posible encontrar algunas patologías usando esta definición, sin embargo no se sacrifica nada en admitirlas como posibilidades legítimas. Por ejemplo, si A y B son conjuntos cualquiera, entonces $\varnothing \subseteq A \times B$ por lo que $R = \varnothing$ es una relación definida de A en B. Esta relación es peculiar y se le conoce como *la relación vacía*.

Definición 4.2. Sea R una relación definida de A en B. Se definen los conjuntos

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \in A \mid (x, y) \in R \text{ para algún } y \in B\}$$
$$\mathrm{im}(R) = \{y \in B \mid (x, y) \in R \text{ para algún } x \in A\}$$

Al conjunto $\mathrm{dom}(R)$ se le llama *el dominio de* R, mientras el conjunto $\mathrm{im}(R)$ recibe el nombre de *la imagen de* R.

Ejemplo. Para la relación en $\mathbb{Z}$ definida como $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, -5), (3, -1)(4, -7)\}$ se tiene

$$\mathrm{dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$$

y

$$\mathrm{im}(R) = \{-7, -5, -1, 2, 3\}.$$

Podemos calcular el dominio y el rango de la relación vacía de manera relativamente sencilla pues estos resultan simplemente el conjunto vacío. De manera similar, se puede verificar sin problema que

$$\mathrm{dom}(1_A) = \mathrm{im}(1_A) = A.$$

Ejemplo. Para un conjunto cualquiera A, podemos definir *la relación de pertenencia de* A, como el conjunto

$$\epsilon_A = \{(x, Y) \in A \times 2^A \mid x \in Y\}.$$

El dominio de esta relación es simplemente A, pues para cualquier $a \in A$,

$$(a, \{a\}) \in \epsilon_A.$$

Por otro lado el rango de dicha relación es el conjunto $2^A \setminus \{\varnothing\}$, pues siempre que tomemos $S \in 2^A$ de forma que $S \neq \varnothing$, existirá un elemento $a \in S$ para el cual,

$$(a, S) \in \epsilon_A.$$

Definición 4.3. Sean R y S relaciones definidas de A en B y de B en C respectivamente. *La composición de* R *con* S es la relación

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}.$$

En la definición se usa al conjunto B como un conjunto pivote para relacionar elementos de A y C a condición que esto estén relacionados con el mismo elemento del conjunto B. En otras palabras si para una pareja $(a, b) \in R$ podemos encontrar una pareja $(b, c) \in S$, entonces $(a, c) \in S \circ R$.

Ejemplo. Sea $R = \{(1, 2), (2, 3), (3,4)\}$ y $S = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$ relaciones definidas en $\mathbb{Z}$. Entonces las compisiciones resultan

$$S \circ R = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

y

$$R \circ S = \{(2, 2), (3, 3)\}.$$

Esto en particular muestra que en general la composición no es conmutativa, i.e., $R \circ S \neq S \neq R$. De manera similar, podemos calcular

$$R \circ R = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

y

$$S \circ S = \{(2, 0), (3, 1)\}$$

La composición entre relaciones presenta un sin número de propiedades, sin embargo una de las más relevantes es el hecho de ser asociativa como operación.

Teorema 4.1. *Sean $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset B \times C$ y $R_3 \subset C \times D$. Entonces,*

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1.$$

Demostración. Comencemos notando que, tanto $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ como $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ son relaciones definidas de A en D, por lo que el enunciado anterior tiene sentido.

Mostraremos primero que

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq (R_3 \circ R_2) \circ R_1.$$

Si $(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$, entonces existe $c \in C$ de forma que $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ y $(c, d) \in R_3$. Igualmente, existe un elemento $b \in B$ de forma que $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$ pues tenemos $(a, c) \in R_2 \circ R_1$. En tal caso, como c satisface que $(b, c) \in R_2$ y $(c, d) \in R_3$, debemos tener $(b, d) \in R_3 \circ R_2$. De la misma forma, como b satisface que $(a, b) \in R_1$ y $(b, d) \in R_3 \circ R_2$, debemos tener $(a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. En ese caso $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subset (R_3 \circ R_2) \circ R_1$.

La contención

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 \subseteq R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

se prueba de manera similar y en ese caso

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1. \qquad \blacksquare$$

Por útlimo, introduciremos un tipo especial de relación el cual exploraremos con mucho detalle durante el siguiente tema. Es importante familiarizarnos con ésta para evitar obstaculos durante el desarrollo de lo que denominaremos *teoría de funciones*.

Definición 4.4. Una relación f definida de A en B se dice *una función* si satisface:

1. $\operatorname{dom}(f) = A$.
2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$, entonces $b = b'$.

Ejemplo. Para el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, la relación $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 7)\}$ de A en A es una función al tener $\operatorname{dom} = \{1, 2, 3\} = A$ y cada elemento de A aparece en una y sólo una pareja. Sin embargo, si tomamos f como una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ entonces f no es una función pues en ese caso $\operatorname{dom}(f) = \{1, 2, 3\} \neq \mathbb{Z}$.

2. Funciones como relaciones

El concepto de función es ubicuo en matemáticas, lo que hace necesario establecer las ideas básicas asociadas a una función con la mayor precisión posible. Para conseguir esto, consideraremos una función como un tipo particular de relación.

Definición 4.5. Una relación f definida de A en B se dice *una función* si satisface:

1. $\operatorname{dom}(f) = A$.

2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$, entonces $b = b'$.

Ejemplo. Para el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, la relación $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 7)\}$ de A en A es una función al tener dom $= \{1, 2, 3\} = A$ y cada elemento de A aparece en una y sólo una pareja. Sin embargo, si tomamos f como una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ entonces f no es una función pues en ese caso $\mathrm{dom}(f) = \{1, 2, 3\} \neq \mathbb{Z}$.

Ejemplo. La relación
$$f = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m^2\}$$
es una función. En efecto, si $(m, n) \in f$ y $(m, n') \in f$, entonces $n = m^2 = n'$.

Es interesante notar que según la definición, es posible denominar sin ambigüedad al conjunto A como *el dominio de* f al coincidir ambos. Por analogía, al conjunto B se le denomina *el contradominio de* f. Todo esto se acostumbra resumir simbolizando una función f definida de A en B, escribiendo
$$f \colon A \to B.$$

La definición de función, nos permite tomar de manera unívoca al elemento b de una pareja $(a, b) \in f$. Así, b es el único elemento relacionado con a a través f y podemos distinguirlo escribiendo $b = f(a)$. De esta forma, $f(a)$ será el único elemento tal que $(a, f(a)) \in f$ y el cual se denomina *la imagen de* a *bajo* f. Esto permite interpretar $f(a)$ como la regla de correspondencia asociada de la función. De hecho, una descripción adecuada de una regla de correspondencia es suficiente para determinar completamente una función como se muestra a continuación.

Teorema 4.2. *Sean $f \colon A \to B$ y $g \colon A \to B$ funciones. Entonces, $f = g$ si y sólo si para todo $a \in A$ se tiene $f(a) = g(a)$.*

Demostración. Si suponemos primero $f = g$, el resultado debe ser inmediato. Supongamos entonces que para toda $a \in A$, $f(a) = g(a)$. Si tomamos $(a, b) \in f$ al ser f una función debe ser el caso $b = f(a)$ y bajo nuestra hipótesis, esto significa que $b = g(a)$ y por definición esto implica que $(a, b) \in g$, mostrando que $f \subseteq g$. De manera análoga podemos probar $g \subseteq f$, obteniendo al final que $f = g$. ■

Ejemplo. Sea A un conjunto. La relación identidad, 1_A, es una función definida de A en A. Esta función jugará un rol importante en algunos de nuestros desarrollos y su relevancia radica en su regla de correspondencia:
$$1_A(a) = a.$$

Ejemplo. Sean A y B conjuntos. Las relaciones
$$\pi_1 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times A \mid x = z\}$$
y
$$\pi_2 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times B \mid y = z\},$$
constituyen ejemplos de funciones donde $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$. Por complicadas que parezcan, estás producen sencillas reglas de correspondencia, descritas por $\pi_1(a, b) = a$ y $\pi_2(a, b) = b$. Por esta razón, se les conoce como *las proyecciones del producto cartesiano* $A \times B$.

Como las funciones se han definido usando relaciones, la composición de relaciones define, en particular, la composición de funciones.

Teorema 4.3. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones. Entonces, la composición $g \circ f$ resulta una función definida de A en C.*

Demostración. Comencemos notando que $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) = A$. Considerando esto, supongamos entonces que $(a, c) \in g \circ f$ y $(a, c') \in g \circ f$. En ese caso, existen elementos b y b' del conjunto B de forma que $(a, b) \in f$, $(b, c) \in g$, $(a, b') \in f$ y $(b', c') \in g$. Como asumimos que f es una función, lo anterior implica que $b = b'$ y en ese caso, tenemos $(b, c) \in g$ y $(b, c') \in g$. Como g también es una función, esto implica que $c = c'$ y en consecuencia, podemos concluir que $g \circ f$ es una función. ∎

Corolario 4.4. *Para todo $a \in A$, se cumple que*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Demostración. Como f es una función, para cualquier $a \in A$, debemos tener $(a, f(a)) \in f$. Además, como g es una función y $f(a) \in B$, entonces $(f(a), g(f(a))) \in g$. Usando la definición de composición, podemos concluir que

$$(a, g(f(a))) \in g \circ f.$$

Según el teorema anterior, $g \circ f$ es también una función siendo $(g \circ f)(a)$ el único elemento que acompaña al elemento a en dicha función. En ese caso,

$$(g \circ f)(a) = g\left(f(a)\right).$$ ∎

Debemos notar de este último corolario, que cada lado de la fórmula es conceptualmente distinto y no obstante, las definiciones proveídas bastan para asegurar su igualdad. No sólo eso, el teorema y el corolario describen en su totalidad la función composición al exponer explícitamente su regla de correspondencia.

Ejemplo. Sean $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las funciones definidas como $f(m) = m^2$ y $g(m) = m + 1$. Por un lado, la composición $f \circ g$ tiene como regla a la expresión

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) = f(m+1) = (m+1)^2;$$

mientras la composición $g \circ f$ tiene como regla a la expresión

$$(g \circ f)(m) = g(f(m)) = g(m^2) = m^2 + 1.$$

Esto nos pertmie concluir fácilmente que $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición 4.6. Sea $f : A \to B$ una función y sean S y T subconjuntos de A y B, respectivamente. Entonces, al conjunto

$$f[S] = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in S\},$$

lo llamaremos *la imagen de S bajo f*, mientras al conjunto

$$f^{-1}[T] = \{x \in A \mid f(x) = y \text{ para algún } y \in T\}$$

lo llamaremos *la imagen inversa de T bajo R*.

La definición anterior guarda cierta relación con los conceptos de dominio y rango de una función, heredados al ser ésta última una relación: Si $f\colon A \to B$ es una función cualquiera, entonces $\operatorname{dom}(f) = f^{-1}[B]$ y $\operatorname{im}(f) = f[A]$. De esta forma, la imagen de un conjunto y la imagen inversa son conjuntos que generalizan dominio y rango desde un punto de vista local.

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ una función definida por $f(n) = n^2$. La imagen inversa de del conjunto $\{4, 9\} \subset \mathbb{N}$ es simplemente

$$f^{-1}\left[\{4,9\}\right] = \{-3, -2, 2, 3\}.$$

Por otro lado, la imagen del conjunto $\{4, 9\} \subset \mathbb{Z}$ es

$$f\left[\{4,9\}\right] = \{16, 81\}.$$

La definición que hemos dado de función, nos permite hablar de algunas patologías de manera mucho más concisa. Por ejemplo, es posible considerar una función $f\colon \varnothing \to A$ sin mucho problema: Al ser f una función, es en particular una relación $f \subseteq \varnothing \times A$ lo cual es posible si y sólo si $f = \varnothing$. De manera similar, podemos también considerar una función $f\colon A \to \varnothing$ y de igual forma la única posibilidad es $f = \varnothing$; sin embargo se debe cumplir también que a cada elemento $a \in A$ le corresponde otro $b \in \varnothing$ de forma que $(a, b) \in f$, esto último resulta imposible a menos que $A = \varnothing$. En conclusión, para cualquier conjunto A existe una única función $f\colon \varnothing \to A$ y si $A \neq \varnothing$, es imposible tener una función $f\colon A \to \varnothing$. En particular, existe una única función $1_{\varnothing}\colon \varnothing \to \varnothing$.

Definición 4.7. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $S \subseteq A$, se define *la restricción de f sobre S* como la función $f|_S\colon S \to B$ que satisface $f|_S(a) = f(a)$.

De alguna forma, la restricción de una función a un conjunto es la misma si nos atenemos a la regla de correspondencia; sin embargo, es importante notar que bajo nuestra definición de función, el dominio y el contradominio son tan importantes como la regla misma y en particular si $S \subset A$ entonces $f|_S \neq f$.

Definición 4.8. Sea $S \subseteq A$ y $f\colon S \to B$ una función. Una función $g\colon A \to B$ se dice *una extensión de f sobre A* si $g|_S = f$.

La anterior definición puede interpretarse sin hacer referencia a la retricción de una función afirmando que g es una extensión de f si y sólo si $f(s) = g(s)$, para todo $s \in S$.

Ejemplo. Consideremos la función $f\colon \{1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ y $f(3) = 9$. Bajo estos valores podemos extender f sobre $\mathbb{Z}$ tomando $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $g(m) = m^2$. Podemos en ese caso afirmar dos cosas: Primero, que f es la restricción de g sobre el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y segundo, que g es una extensión de f sobre $\mathbb{Z}$.

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determina el dominio y la imagen de las siguientes relaciones definidas de A en A son funciones.

- $R_1 = \{(1,1),(2,3),(3,3)\}$.
- $R_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3)\}$.
- $R_3 = \{(1,1),(2,3),(3,3)\}$.
- $R_4 = \{(1,3),(3,2),(2,2)\}$.

Ejercicio 4.2. Usando las relaciones del ejercicio 4.1 calcula las siguientes composiciones de relaciones.

- $R_1 \circ R_2$.
- $R_2 \circ R_1$.
- $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.
- $R_2 \circ R_1 \circ R_3 \circ R_4$.

Ejercicio 4.3. Para cada relación del ejercicio 4.1 determina si ésta es una función.

Ejercicio 4.4. Determina si las siguientes relaciones definidas de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ son o no funciones. Argumenta tu respuesta.

- $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2 + 7\}$.
- $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 = x\}$.
- $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 3x + 1\}$.
- $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejercicio 4.5. Considérense las funciones $f, g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas como $f(m) = m + 1$ y $g(m) = m^2$. Para los conjuntos $S = \{1,2\}$ y $U = \{1,2,3\}$, ambos subconjuntos de $\mathbb{Z}$, calcula la imagen de S y la imagen inversa de U bajo f y bajo g.

Ejercicio 4.6. Sea $f \colon A \to B$ una función, sean también S y T subconjuntos de A y, U y V subconjuntos de B. Demuestra

1. $f[S \cup T] = f[S] \cup f[T]$.
2. $f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.
3. $f[S \cap T] \subseteq f[S] \cap f[T]$.
4. $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$

Ejercicio 4.7. Da un contraejemplo de una función f y conjuntos S y T de forma que

$$f[S \cap T] \neq f[S] \cap f[T].$$

Para entregar: Ejercicio 4.7

Referencias

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Las prensas de Ciencias, 2007.

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Compañia Editorial Continental, 1966.

[Sig76] Sigler, L. E.: *Exercises in set theory*. Springer-Verlag, 1976.

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.