Semana 3: Relaciones y funciones

1. Relaciones

En diversas situaciones, es indispensable relacionar elementos de un conjunto con otro. Por ejemplo, cuando afirmamos que un número es más grande que otro, establecemos una relación entre ellos, lo mismo que al describir una regla de correspondencia. Esta idea, aunque intuitivamente clara, requiere de precisión para evitar ambigüedades.

Definición 3.1. Sean A y B dos conjuntos. Por *una relación definida de A en B* entenderemos un subconjunto R del conjunto $A \times B$. Cuando tengamos el caso particular en que $B = A$, nos limitaremos a decir que *R es una relación definida en A*. Si $(a, b) \in R$ diremos que *a está relacionado con b a través de R* y en algunas ocasiones, simbolizaremos este hecho como aRb o $R(a, b)$.

Ejemplo. Una posible relación definida en $\mathbb{Z}$ es $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, -5), (3, -1)(4, -7)\}$. Otra posibilidad igual de legítima es $S = \{(-2, 1), (-3, 1), (4, 0), (5, 5)\}$.

El objetivo de esta definición es proveer un punto de corte conceptual que nos permite estudiar relaciones desde un punto de vista teórico. Un par de ejemplos en ese sentido se presentan a continuación y es importante constrastar su naturaleza con el ejemplo anterior.

Ejemplo. Para un conjunto cualquiera A, el conjunto

$$1_A = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\},$$

es una relación definida en A. A esta relación se le conoce como *la relación identidad en A*.

Ejemplo. En el conjunto $\mathbb{N}$ se puede decir que m está relacionado con n si y sólo si $n = m^2$. Lo anterior se puede traducir fácilmente a un conjunto expresando

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^2\}.$$

En ese conjunto viven parejas de la forma (m, m^2), esto quiere decir que mRn si y sólo si $n = m^2$, mostrando con esto que se trata de la relación de donde partimos.

Es posible encontrar algunas patologías usando esta definición, sin embargo no se sacrifica nada en admitirlas como posibilidades legítimas. Por ejemplo, si A y B son conjuntos cualquiera, entonces $\varnothing \subseteq A \times B$ por lo que $R = \varnothing$ es una relación definida de A en B. Esta relación es peculiar y se le conoce como *la relación vacía*.

Definición 3.2. Sea R una relación definida de A en B. Se definen los conjuntos

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \in A \mid (x,y) \in R \text{ para algún } y \in B\}$$

$$\mathrm{im}(R) = \{y \in B \mid (x,y) \in R \text{ para algún } x \in A\}$$

Al conjunto $\mathrm{dom}(R)$ se le llama *el dominio de R*, mientras el conjunto $\mathrm{im}(R)$ recibe el nombre de *la imagen de R*.

Ejemplo. Para la relación en $\mathbb{Z}$ definida como $R = \{(1,2),(2,3),(2,-5),(3,-1)(4,-7)\}$ se tiene

$$\mathrm{dom}(R) = \{1,2,3,4\}$$

y

$$\mathrm{im}(R) = \{-7,-5,-1,2,3\}.$$

Podemos calcular el dominio y el rango de la relación vacía de manera relativamente sencilla pues estos resultan simplemente el conjunto vacío. De manera similar, se puede verificar sin problema que

$$\mathrm{dom}(1_A) = \mathrm{im}(1_A) = A.$$

Ejemplo. Para un conjunto cualquiera A, podemos definir *la relación de pertenencia de A*, como el conjunto

$$\epsilon_A = \{(x,Y) \in A \times 2^A \mid x \in Y\}.$$

El dominio de esta relación es simplemente A, pues para cualquier $a \in A$,

$$(a,\{a\}) \in \epsilon_A.$$

Por otro lado el rango de dicha relación es el conjunto $2^A \setminus \{\varnothing\}$, pues siempre que tomemos $S \in 2^A$ de forma que $S \neq \varnothing$, existirá un elemento $a \in S$ para el cual,

$$(a,S) \in \epsilon_A.$$

Definición 3.3. Sean R y S relaciones definidas de A en B y de B en C respectivamente. *La composición de R con S* es la relación

$$S \circ R = \{(x,z) \in A \times C \mid \text{ existe } y \in B \text{ tal que } (x,y) \in R \text{ y } (y,z) \in S\}.$$

En la definición se usa al conjunto B como un conjunto pivote para relacionar elementos de A y C a condición que esto estén relacionados con el mismo elemento del conjunto B. En otras palabras si para una pareja $(a,b) \in R$ podemos encontrar una pareja $(b,c) \in S$, entonces $(a,c) \in S \circ R$.

Ejemplo. Sea $R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ y $S = \{(1,0),(2,1),(3,2)\}$ relaciones definidas en $\mathbb{Z}$. Entonces las compisiciones resultan

$$S \circ R = \{(1,1),(2,2)\}$$

y

$$R \circ S = \{(2,2),(3,3)\}.$$

Esto en particular muestra que en general la composición no es conmutativa, i.e., $R \circ S \neq S \neq R$. De manera similar, podemos calcular

$$R \circ R = \{(1,3),(2,4)\}$$

y

$$S \circ S = \{(2,0),(3,1)\}$$

La composición entre relaciones presenta un sin número de propiedades, sin embargo una de las más relevantes es el hecho de ser asociativa como operación.

Teorema 3.1. *Sean $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset B \times C$ y $R_3 \subset C \times D$. Entonces,*

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1.$$

Demostración. Comencemos notando que, tanto $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ como $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ son relaciones definidas de A en D, por lo que el enunciado anterior tiene sentido.

Mostraremos primero que

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq (R_3 \circ R_2) \circ R_1.$$

Si $(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$, entonces existe $c \in C$ de forma que $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ y $(c, d) \in R_3$. Igualmente, existe un elemento $b \in B$ de forma que $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$ pues tenemos $(a, c) \in R_2 \circ R_1$. En tal caso, como c satisface que $(b, c) \in R_2$ y $(c, d) \in R_3$, debemos tener $(b, d) \in R_3 \circ R_2$. De la misma forma, como b satisface que $(a, b) \in R_1$ y $(b, d) \in R_3 \circ R_2$, debemos tener $(a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. En ese caso $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subset (R_3 \circ R_2) \circ R_1$.

La contención

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 \subseteq R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

se prueba de manera similar y en ese caso

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1. \qquad \blacksquare$$

2. Funciones como relaciones

El concepto de función es ubicuo en matemáticas, lo que hace necesario establecer las ideas básicas asociadas a una función con la mayor precisión posible. Para conseguir esto, consideraremos una función como un tipo particular de relación.

Definición 3.4. Una relación f definida de A en B se dice *una función* si satisface:

1. $\mathrm{dom}(f) = A$.
2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$, entonces $b = b'$.

Ejemplo. Para el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, la relación $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 7)\}$ de A en A es una función al tener dom $= \{1, 2, 3\} = A$ y cada elemento de A aparece en una y sólo una pareja. Sin embargo, si tomamos f como una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ entonces f no es una función pues en ese caso $\mathrm{dom}(f) = \{1, 2, 3\} \neq \mathbb{Z}$.

Ejemplo. La relación

$$f = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m^2\}$$

es una función. En efecto, si $(m, n) \in f$ y $(m, n') \in f$, entonces $n = m^2 = n'$.

Es interesante notar que según la definición, es posible denominar sin ambigüedad al conjunto A como *el dominio de* f al coincidir ambos. Por analogía, al conjunto B se le denomina *el contradominio de* f. Todo esto se acostumbra resumir simbolizando una función f definida de A en B, escribiendo

$$f\colon A \to B.$$

La definición de función, nos permite tomar de manera unívoca al elemento b de una pareja $(a, b) \in f$. Así, b es el único elemento relacionado con a a través f y podemos distinguirlo escribiendo $b = f(a)$. De esta forma, $f(a)$ será el único elemento tal que $(a, f(a)) \in f$ y el cual se denomina *la imagen de* a *bajo* f. Esto permite interpretar $f(a)$ como la regla de correspondencia asociada de la función. De hecho, una descripción adecuada de una regla de correspondencia es suficiente para determinar completamente una función como se muestra a continuación.

Teorema 3.2. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon A \to B$ funciones. Entonces, $f = g$ si y sólo si para todo $a \in A$ se tiene $f(a) = g(a)$.*

Demostración. Si suponemos primero $f = g$, el resultado debe ser inmediato. Supongamos entonces que para toda $a \in A$, $f(a) = g(a)$. Si tomamos $(a, b) \in f$ al ser f una función debe ser el caso $b = f(a)$ y bajo nuestra hipótesis, esto significa que $b = g(a)$ y por definición esto implica que $(a, b) \in g$, mostrando que $f \subseteq g$. De manera análoga podemos probar $g \subseteq f$, obteniendo al final que $f = g$. ■

Ejemplo. Sea A un conjunto. La relación identidad, 1_A, es una función definida de A en A. Esta función jugará un rol importante en algunos de nuestros desarrollos y su relevancia radica en su regla de correspondencia:

$$1_A(a) = a.$$

Ejemplo. Sean A y B conjuntos. Las relaciones

$$\pi_1 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times A \mid x = z\}$$

y

$$\pi_2 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times B \mid y = z\},$$

constituyen ejemplos de funciones donde $\pi_1\colon A \times B \to A$ y $\pi_2\colon A \times B \to B$. Por complicadas que parezcan, estás producen sencillas reglas de correspondencia, descritas por $\pi_1(a, b) = a$ y $\pi_2(a, b) = b$. Por esta razón, se les conoce como *las proyecciones del producto cartesiano* $A \times B$.

Como las funciones se han definido usando relaciones, la composición de relaciones define, en particular, la composición de funciones.

Teorema 3.3. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones. Entonces, la composición $g \circ f$ resulta una función definida de A en C.*

Demostración. Comencemos notando que $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) = A$. Considerando esto, supongamos entonces que $(a, c) \in g \circ f$ y $(a, c') \in g \circ f$. En ese caso, existen elementos b y b' del conjunto B de forma que $(a, b) \in f$, $(b, c) \in g$, $(a, b') \in f$ y $(b', c') \in g$. Como asumimos que f es una función, lo anterior implica que $b = b'$ y en ese caso, tenemos $(b, c) \in g$ y $(b, c') \in g$. Como g también es una función, esto implica que $c = c'$ y en consecuencia, podemos concluir que $g \circ f$ es una función. ■

Corolario 3.4. *Para todo $a \in A$, se cumple que*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Demostración. Como f es una función, para cualquier $a \in A$, debemos tener $(a, f(a)) \in f$. Además, como g es una función y $f(a) \in B$, entonces $(f(a), g(f(a))) \in g$. Usando la definición de composición, podemos concluir que

$$(a, g(f(a))) \in g \circ f.$$

Según el teorema anterior, $g \circ f$ es también una función siendo $(g \circ f)(a)$ el único elemento que acompaña al elemento a en dicha función. En ese caso,

$$(g \circ f)(a) = g\left(f(a)\right). \qquad \blacksquare$$

Debemos notar de este último corolario, que cada lado de la fórmula es conceptualmente distinto y no obstante, las definiciones proveídas bastan para asegurar su igualdad. No sólo eso, el teorema y el corolario describen en su totalidad la función composición al exponer explícitamente su regla de correspondencia.

Ejemplo. Sean $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las funciones definidas como $f(m) = m^2$ y $g(m) = m + 1$. Por un lado, la composición $f \circ g$ tiene como regla a la expresión

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) = f(m+1) = (m+1)^2;$$

mientras la composición $g \circ f$ tiene como regla a la expresión

$$(g \circ f)(m) = g(f(m)) = g(m^2) = m^2 + 1.$$

Esto nos pertmie concluir fácilmente que $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición 3.5. Sea $f : A \to B$ una función y sean S y T subconjuntos de A y B, respectivamente. Entonces, al conjunto

$$f[S] = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in S\},$$

lo llamaremos *la imagen de S bajo f*, mientras al conjunto

$$f^{-1}[T] = \{x \in A \mid f(x) = y \text{ para algún } y \in T\}$$

lo llamaremos *la imagen inversa de T bajo R*.

La definición anterior guarda cierta relación con los conceptos de dominio y rango de una función, heredados al ser ésta última una relación: Si $f\colon A \to B$ es una función cualquiera, entonces $\operatorname{dom}(f) = f^{-1}[B]$ y $\operatorname{im}(f) = f[A]$. De esta forma, la imagen de un conjunto y la imagen inversa son conjuntos que generalizan dominio y rango desde un punto de vista local.

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ una función definida por $f(n) = n^2$. La imagen inversa de del conjunto $\{4, 9\} \subset \mathbb{N}$ es simplemente

$$f^{-1}\left[\{4, 9\}\right] = \{-3, -2, 2, 3\}.$$

Por otro lado, la imagen del conjunto $\{4, 9\} \subset \mathbb{Z}$ es

$$f\left[\{4, 9\}\right] = \{16, 81\}.$$

La definición que hemos dado de función, nos permite hablar de algunas patologías de manera mucho más concisa. Por ejemplo, es posible considerar una función $f\colon \varnothing \to A$ sin mucho problema: Al ser f una función, es en particular una relación $f \subseteq \varnothing \times A$ lo cual es posible si y sólo si $f = \varnothing$. De manera similar, podemos también considerar una función $f\colon A \to \varnothing$ y de igual forma la única posibilidad es $f = \varnothing$; sin embargo se debe cumplir también que a cada elemento $a \in A$ le corresponde otro $b \in \varnothing$ de forma que $(a, b) \in f$, esto último resulta imposible a menos que $A = \varnothing$. En conclusión, para cualquier conjunto A existe una única función $f\colon \varnothing \to A$ y si $A \neq \varnothing$, es imposible tener una función $f\colon A \to \varnothing$. En particular, existe una única función $1_\varnothing\colon \varnothing \to \varnothing$.

Definición 3.6. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $S \subseteq A$, se define *la restricción de f sobre S* como la función $f|_S\colon S \to B$ que satisface $f|_S(a) = f(a)$.

De alguna forma, la restricción de una función a un conjunto es la misma si nos atenemos a la regla de correspondencia; sin embargo, es importante notar que bajo nuestra definición de función, el dominio y el contradominio son tan importantes como la regla misma y en particular si $S \subset A$ entonces $f|_S \neq f$.

3. Inversa de una función

De manera intuitiva, nos referimos por inversa de una función a otra función que deshace los cambios hechos por la función original, a condición que esto sea posible. Se pueden caracterizar completamente las funciones que poseen determinadas inversas con tres tipos de funciones relativamente simples

Definición 3.7. Sea $f\colon A \to B$ una función. Diremos que f es *inyectiva* si para cualesquiera elementos $a \in A$ y $a' \in A$, la igualdad $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.

Es posible interpretar la definición de una función inyectiva expresando por contraposición la definición, i.e., si $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$. Esto nos permite afirmar que una función es inyectiva si y sólo si a elementos distintos les corresponden imágenes distintas.

Ejemplo. Sea $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ una función. Si definimos f por $f(n) = n + 1$, entonces $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 4$. Al ser todas las imágenes distintas, la función f, así definida, resulta inyectiva. En contraste, si definimos $f(n) = (n-2)^2$, entonces $f(1) = 1 = f(3)$ lo que permite concluir que f no es inyectiva pues al menos a un par de elementos distintos les corresponde la misma imagen.

Definición 3.8. Sea $f\colon A \to B$ una función. Diremos que f es *sobreyectiva* si para cada elemento $b \in B$, existe $a \in A$ de forma que $f(a) = b$.

De acuerdo con la definición del rango de una función, $\operatorname{im}(f) \subseteq B$ sin importar cual función f tengamos. Si además f es sobreyectiva, debemos notar que todo elemento $b \in B$ resulta un elemento del rango, implicando entonces la contención $B \subseteq \operatorname{im}(f)$. En otras palabras, una función f es sobreyectiva si y sólo si $\operatorname{im}(f) = B$. Esto nos permite interpretar las funciones sobreyectivas como aquellas en que ningún elemento del contradominio escapa del rango.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n + 1$. Es sencillo afirmar que la función f es sobreyectiva: Para cada entero m, el entero $m - 1$ satisface $f(m-1) = m$. En contraste, si tomamos la función $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida con la misma regla, su rango resulta $\operatorname{im}(g) = \mathbb{N} \backslash \{0\}$, mostrando que hay un elemento en su contradominio fuera del rango. En consecuencia, g no es sobreyectiva.

Es importante mencionar que las condiciones impuestas a las funciones inyectivas y sobreyectivas son independientes una de otra. Esto quiere decir que existen funciones inyectivas que no son sobreyectivas y viceversa.

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ una función definida por $f(n) = |n|$, donde $|n|$ es el valor absoluto de n. Es inmediato verificar que f es sobreyectiva, pues para cada natural n, $|n| = n$. Por otro lado, la función satisface $f(-1) = 1 = f(1)$ mostrando con esto que no es inyectiva. La función f constituye un ejemplo de una función sobreyectiva pero no inyectiva.

Ejemplo. Sea $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función definida por $g(n) = n + 1$. Hemos mostrado ya, que g no es sobreyectiva. Sin embargo, g resulta inyectiva pues si $g(n) = g(m)$, entonces $n + 1 = m + 1$ con lo cual $n = m$. En ese caso, la función g constituye un ejemplo de una función que es inyectiva pero no sobreyectiva.

Teorema 3.5. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones.*

1. *Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.*
2. *Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.*
3. *Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.*

Demostración. Para probar la primer parte del teorema supondremos f y g inyectivas. Ahora, supongamos que a y a' son elementos de A que satisfacen

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a').$$

por el corolario 3.4, tenemos que $g(f(a)) = g(f(a'))$. Pero al ser g inyectiva, entonces $f(a) = f(a')$; y de la misma forma al ser f inyectiva, tenemos $a = a'$. Lo anterior prueba que $g \circ f$ es también inyectiva como se deseaba.

Para la segunda parte, supondremos f y g suprayectivas. Deseamos mostrar que para todo $c \in C$, existe un elemento a dentro de $\operatorname{dom}(g \circ f)$ de forma que $c = (g \circ f)(a)$. En efecto, como g es suprayectiva, existe un elemento b dentro de $\operatorname{dom}(g)$, de forma que $c = g(b)$. También, al ser f suprayectiva, existe un elemento a dentro de $\operatorname{dom}(f)$, de forma que $b = f(a)$. Basta entonces afirmar que

$$\begin{aligned} c &= g(b) \\ &= g(f(a)) \\ &= (g \circ f)(a), \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $g \circ f$ es suprayectiva como se deseaba.

La tercera parte es un resultado inmediato de las anteriores. ■

Recordemos ahora que hemos interpretado a las funciones inyectivas como aquellas que no repiten elementos. En ese sentido, parece natural que podamos deshacer los cambios que una función realiza a un conjunto observando el único elemento del cual provienen. Esta idea intuitiva es la base del siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea $f\colon A \to B$ una función con $B \neq \varnothing$. Entonces, f es inyectiva si y sólo si existe una función $g\colon B \to A$ de forma que $g \circ f = 1_A$.*

Demostración. Supongamos que la función f es inyectiva y supongamos que B es un conjunto no vacío con $b_0 \in B$. Para un elemento b de la imagen de f, existe al menos un elemento a en el conjunto a de forma que $f(a) = b$, además, como f es una función inyectiva, para cualquier elemento a' que cumpla $f(a') = b$, se debe tener $a' = a$. En otras palabras para cada b existe un único elemento a de forma que $f(a) = b$. Definimos entonces la función $h\colon \operatorname{im}(f) \to A$ tomando $h(b) = a$ de forma que $f(a) = b$. Podemos extender esta regla a todo el conjunto B definiendo la función $g\colon B \to A$ como

$$g(b) = \begin{cases} h(b) & \text{si } b \in \operatorname{im}(f) \\ b_0 & \text{si } b \notin \operatorname{im}(f) \end{cases}.$$

En ese caso es inmediato que $g(f(a)) = a$ por lo que $g \circ f = 1_A$.

Supongamos ahora que existe una función $g\colon B \to A$ de forma que $g \circ f = 1_A$. Si $f(a) = f(a')$ entonces

$$a = g(f(a)) = g(f(a')) = a',$$

de lo que podemos concluir que f es una función inyectiva como deseábamos. ∎

El teorema anterior revela un tipo de inversa asociada a las funciones inyectivas. Precisamos ahora en que sentido las funciones inyectivas son invertibles.

Definición 3.9. Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ funciones. La función g se dice *una inversa por la izquierda de* f si $g \circ f = 1_A$.

Bajo la anterior definición, las funciones inyectivas son aquellas que poseen una inversa por la izquierda y esta propiedad caracteriza por completo este tipo de funciones. Sin embargo, la existencia de una inversa por la izquierda no garantiza su unicidad.

Ejemplo. Ya hemos mostrado que la función $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n) = n + 1$ es inyectiva. Siguiendo la prueba del teorema anterior, podemos definir la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

mostrando que $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$. Podemos de igual forma definir $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como

$$h(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

de manera que satisface $h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$. Sin embargo, $f \neq h$, mostrando que las inversas por la izquierda no son necesariamente únicas.

De manera similar a las funciones inyectivas, las funciones suprayectivas resultan la operación que deshace la acción de otra función. Precisemos esta observación en el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sea $f\colon A \to B$ una función. Entonces, f es suprayectiva si y sólo si existe una función $g\colon B \to A$ de forma que $g \circ f = 1_A$*

Demostración. Supongamos que f es suprayectiva. Entonces, para cada elemento b, la imagen inversa $f^{-1}[\{b\}]$ es no vacía. Con esto en mente, definimos $g \colon B \to A$ de forma que para cada b *elegimos* $g(b)$ como un elemento en el conjunto $f^{-1}[\{b\}]$. En ese caso, $f(g(b)) = b$ lo cual implica $f \circ g = 1_B$.

Supongamos ahora que existe una función $g \colon B \to A$ de forma que $f \circ g = 1_B$. Entonces para cada elemento b del conjunto B tomamos $a = g(b)$ el cual cumple que

$$f(a) = f(g(b)) = b.$$

Lo anterior implica que la función f es suprayectiva como buscábamos. ■

Como en el caso de las funciones inyectivas, el teorema anterior advierte sobre un tipo especial de inversas asociado a las funciones suprayectivas.

Definición 3.10. Sean $f \colon A \to B$ y $g \colon B \to A$ funciones. La función g se dice *una inversa por la derecha de* f si $f \circ g = 1_B$.

Ejemplo. Hemos mostrado ya que la función $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida como $f(n) = |n|$ es suprayectiva. Usando la prueba del teorema anterior, podemos proponer una función $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ que resulte su inversa tomando $g(n) = -n$. De igual forma podemos tomar $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiendo $h(n) = n$. Ambas cumplen $f \circ h = 1_A = f \circ g$ pero $g \neq h$, mostrando con esto que las inversas por la derecha no son únicas.

En ese punto, podemos notar que las funciones que admiten inversa por la izquierda o por la derecha no son las funciones que buscamos llamar invertibles. Ambas presentan al menos una deficiencia insuperable (la unicidad) por lo que debemos presentar una alternativa.

Lema 3.8. *Sean $f \colon A \to B$, $g \colon B \to A$ y $h \colon B \to A$ funciones. Si $g \circ f = 1_A$ y $f \circ h = 1_B$, entonces se cumple la igualdad $g = h$.*

Demostración. La prueba es una simple observación,

$$\begin{aligned} g &= g \circ 1_B \\ &= g \circ (f \circ h) \\ &= (g \circ f) \circ h \\ &= 1_A \circ h \\ &= h. \end{aligned}$$

Esto muestra la igualdad entre las funciones indicadas. ■

El lema anterior, descubre una interesante propiedad acerca de funciones que admiten al mismo tiempo una inversa por la izquierda y una por la derecha: Las inversas coinciden. Además, para una función de este tipo no pueden existir dos inversas izquierdas o dos inversas derechas distintas. Esto vuelve a este tipo de funciones nuestros candidatos a funciones invertibles.

Definición 3.11. Una función $f \colon A \to B$ se dice *invertible* si existe una función $g \colon B \to A$ de forma que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Toda nuestra discusión anterior puede ser resumida en el siguiente teorema que es probablemente uno de los más importantes resultados en la teoría de funciones.

Teorema 3.9. *Una función es biyectiva si y sólo si es invertible.*

Demostración. Sea $f: A \to B$ una función cualquiera y supongamos que es biyectiva. En ese caso, existen funciones $g: B \to A$ y $h: B \to A$ de forma que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ h = 1_B$. Según el lema anterior $g = h$ y debemos concluir entonces que f es invertible. Si suponemos ahora que f es invertible, entonces f admite inversa tanto por la izquierda como por la derecha f debe ser tanto inyectiva como suprayectiva y en consecuencia biyectiva. Esto termina la prueba. ∎

Podemos volver sobre nuestros pasos para observar lo natural del resultado anterior. Si interpretamos a un función biyectiva como una función que no repite valores y que agota su contradominio entonces es posible deshacer los cambios efectuados por f, esa posibilidad es lo que indica la definición de función invertible.

Ejemplo. Sea a un número entero cualquiera. Definimos la función $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $f(n) = n + a$. En ese caso, la función $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(n) = n - a$ resulta la inversa de f. Esto prueba en particular que f es invertible y por tanto biyectiva.

Terminamos esta sección realizando una aclaración que debe parecer en este punto exageradamente obvia pero de la que no hemos hecho mención.

Definición 3.12. Sea $f: A \to B$ una función invertible. *La inversa de* f es entonces la única función $f^{-1}: B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determina el dominio y la imagen de las siguientes relaciones definidas de A en A son funciones.

- $R_1 = \{(1,1), (2,3), (3,3)\}$.
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (2,3)\}$.
- $R_3 = \{(1,1), (2,3), (3,3)\}$.
- $R_4 = \{(1,3), (3,2), (2,2)\}$.

Ejercicio 3.2. Usando las relaciones del ejercicio 3.1 calcula las siguientes composiciones de relaciones.

- $R_1 \circ R_2$.
- $R_2 \circ R_1$.
- $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.
- $R_2 \circ R_1 \circ R_3 \circ R_4$.

Ejercicio 3.3. Para cada relación del ejercicio 3.1 determina si ésta es una función.

Ejercicio 3.4. Determina si las siguientes relaciones definidas de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

- $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2 + 7\}$.
- $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 = x\}$.
- $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 3x + 1\}$.
- $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejercicio 3.5. Sean $S = \{1, 2\}$ y $U = \{1, 2, 3\}$ subconjuntos de $\mathbb{Z}$. Utilizando las relaciones del ejercicio 3.4 que resultan funciones, calcula la imagen de S y la imagen inversa de U.

Ejercicio 3.6. Para cada una de las siguientes funciones $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, determina si es inyectiva o sobreyectiva. En caso de ser ambas (biyectiva), calcula su inversa.

- $f(m) = 2m$.
- $f(m) = 2m + 1$.
- $f(m) = m^3 - m$.
- $f(m) = m^{m+1}$.

Ejercicio 3.7. Sea $f\colon A \to B$ una función, sean también S y T subconjuntos de A y, U y V subconjuntos de B. Demuestra

1. $f[S \cup T] = f[S] \cup f[T]$.
2. $f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.
3. $f[S \cap T] \subseteq f[S] \cap f[T]$.
4. $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$

Ejercicio 3.8. Da un contraejemplo de una función f y conjuntos S y T de forma que

$$f[S \cap T] \neq f[S] \cap f[T].$$

Ejercicio 3.9. Sea $f\colon A \to B$ una función y sean además $F, G\colon 2^A \to 2^B$ las funciones definidas por $F(S) = f[S]$ y $G(U) = f^{-1}[U]$. Demuestra que

1. Si f es suprayectiva, entonces $F \circ G = 1_{2^B}$.
2. Si f es inyectiva, entonces $G \circ F = 1_{2^A}$.

Ejercicio 3.10. Sea $f\colon A \to B$ y sean S y U subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar

- $f^{-1}[B \backslash U] = A \backslash f^{-1}[U]$.
- f es suprayectiva si y sólo si $B \backslash f[S] \subseteq f[A \backslash S]$.
- f es inyectiva si y sólo si $f[A \backslash S] \subseteq B \backslash f[S]$.

Referencias

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.

[Rot05] Rotman, Joseph J.: *A first course in abstract algebra*. Pearson, 3ª edición, 2005.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos textos que han sido usados para preparar el curso de «Matemáticas discretas» impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y sea sujeto a cambios constantes.