Notas a [Hal66] (Parte 1: Axiomas básicos)*

Álgebra Superior I / Actuaría 2016-I

Algunos comentarios previos

Hemos visto ya la necesidad de aclarar el concepto de conjunto para poder solidificar la matemática dentro del marco de una teoría consistente. La teoría que nos concierne y que nos ayudará a establecer éste concepto será la teoría axiomática de conjuntos.

En dicha teoría se presentarán postulados (los axiomas), que nos deben resultar razonables en el marco de nuestra intuición. Estos axiomas estarán formulados como enunciados que llamaremos *propiedades en la teoría de conjuntos*. Una propiedad en la teoría de conjuntos será cualquier propiedad formada por los predicados «$\in$» y «$=$», y cualquier número de disyunciones, conjunciones, negaciones o cuantificaciones necearias. Por ejemplo, la expresión

$$\forall x \exists y . x \in y \wedge x = Z$$

será una propiedad en la teoría de conjuntos al ser la cuantificación universal sobre la variable x de la cuantificación existencial sobre la variable y de la conjunción de las propiedades $x \in y$ y $x = Z$. Además de la forma muy particular que tiene una propiedad en la teoría de conjuntos, los términos variables podrán ser únicamente sustituidos por conjuntos. Haremos un par de abreviaciones cuando nos enfrentemos a cuantificadores en teoría de conjuntos. Para un conjunto A, escribiremos

$$\exists x \in A . \alpha(x)$$

en lugar de escribir $\exists x . x \in A \wedge \alpha(x)$. También cuando afirmemos que

$$\forall x \in A . \alpha(x)$$

esto simplemente significará $\forall x . x \in A \to \alpha(x)$.

Como una aclaración final es deseable remarcar que seguimos tomando como conceptos primitivos a conjunto pertenencia. Sin embargo, los axiomas modelarán (y ese es el objetivo de la teoría) el comportamiento adecuado de lo que llamaremos conjunto de forma tal que los problemas que presentó la teoría

*Secciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de [Hal66]

preaxiomática (que nosotros tuvimos a mal llamarla clásica) serán desechados. De igual forma cabe destacar que la teoría presentada aquí será la teoría Zermelo-Fraenkel, está teoría constituye un ejemplo de teoría predicativa, i.e. que describe únicamente los objetos de interés (en este caso los conjuntos) y nada más. Así, los conjuntos a pesar de ser tomados como primitivos no son libremente interpretados sino acabarán restringidos por los postulados que la teoría presenta como axiomas.

1. Axioma de extensión

1.1. Discusión general

El axioma de extensión es simplemente el paso axiomático por el cual somos capaces de definir la igualdad entre conjuntos. Esta nos define como es que la pertenencia guarda relación con la igualdad. El axioma afirma lo siguiente:

Axioma (de extensión)**.** Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

En este punto nos debemos preguntar si el enunciado del axioma está en verdad formulado sobre la teoría de conjuntos. La respuesta es afirmativa, este afirma de manera simbólica

$$\forall X \forall Y . X = Y \leftrightarrow (\forall x . x \in X \leftrightarrow x \in Y) .$$

Lo cual afirma de manera llana lo mismo que el axioma de extensión. Como comenta Halmos en [Hal66]:

> «Con mayor pretensión y menos claridad: un conjunto está determinado por su *extensión*».

La definición de la igualdad de conjuntos parecería trivial o incluso innecesaria, sin embargo no es un hecho obvio, de hecho es muy particular. Pensemos por un momento en otro tipo de relación que no sea el de pertenencia, por ejemplo la de ancestro. Diremos que si x y y son seres humanos, definiremos $x \epsilon y$ si x es ancestro de y. Por ancestro identificamos a los padres, los abuelos, etc. Estamos en posición de preguntarnos lo siguiente: si los humanos y y z tienen los mismos ancestros, ¿será $x = y$? Basta tomar dos hermanos para verificar que ambos tienen exactamente los mismos ancestros, sin embargo son humanos distintos, por lo que en el caso de la relación de ancestro, algo parecido al axioma de extensión desafiaría el significado mismo de la relación.

Estamos ahora en posición de proveer de nuestra primera definición, que a pesar de todo no será para nada nueva.

Definición 1.1. Si A y B son conjuntos y todo elemento de A es elemento de B, decimos que A es un *subconjunto de* B o que B *incluye a* A o que A *está contenido en* B y escribimos

$$A \subset B.$$

Esta definición presenta algunas propiedades notables que listamos a continuación:

- Para todo conjunto A, $A \subset A$ (La inclusión es reflexiva).
- Si A, B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$ (La inclusión es transitiva).
- Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$ (La inclusión es anti-simétrica).

Las propiedades anteriores por supuesto requieren prueba, el lector tendrá oportunidad de proveer los anteriores resultados de contenido resolviendo los ejercicios 1.1, 1.2 y 1.3.

Habrá entonces que distinguir aquellos conjuntos tales que $A \subset B$ pero $A \neq B$; para designarlos usaremos el término *propio*. Así un subconjunto se dirá subconjunto propio de otro, si es un subconjunto y si los conjuntos en cuestión son diferentes.

Una última nota. Podemos observar que la propiedad que define que A es un subconjunto de B, se puede escribir de manera formal como

$$\forall x . x \in A \rightarrow x \in B,$$

por lo que el axioma de extensión tiene otra posible forma basada en el concepto que se introdujo para subconjuntos.

Teorema 1.1. *Sean A y B dos conjuntos. $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.*

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Demuestra que $A \subset A$.

Ejercicio 1.2. Si A, B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, demuestra que $A \subset C$.

Ejercicio 1.3. Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 1.4. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

2. Axioma de especificación

2.1. Discusión general

Uno de nuestros problemas durante la discusión clásica de la teoría de conjuntos fue la amplitud de los enunciados. Ahí eramos capaces de construir un conjunto bajo la premisa que la propiedad que los definía pareciera razonable, en realidad esta libertad con que hemos manejado a los enunciados acarrea el primer problema que la teoría axiomática ha de solucionar.

Para postular el axioma de especificación, hemos de antes que lo citado como propiedad en el axioma será simplemente una propiedad en la teoría de conjuntos.

Axioma (de especificación)**.** A todo conjunto A y a toda propiedad $\alpha(x)$, corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente los elementos x de A para los cuales se cumple $\alpha(x)$.

El axioma afirma de manera simbólica que, siempre que $\alpha(x)$ sea una propiedad entonces,

$$\forall X \exists Y . \forall x . x \in X \wedge \alpha(x) \leftrightarrow x \in Y.$$

Lo que nos dice éste axioma es que dado un conjunto A y una condición α, existirá un conjunto B de forma tal que $x \in B$ si y sólo si

$$x \in A \wedge \alpha(x).$$

En otras palabras, el resultado de remover los elementos de A que no satisfacen α resulta de nueva cuenta en un conjunto. En ese sentido, el axioma no parece descabellado y hasta deseable.

Debemos notar dos cosas. Ya no podemos crear conjuntos libremente, ahora necesitamos un conjunto base, por lo que habremos paliado una de la deficiencias del teoría clásica de conjunto. La segunda es que el axioma sólo postula la existencia de un conjunto con la propiedad que define, no su unicidad. Esto en realidad no es un problema.

Teorema 2.1. *Sea A un conjunto, α una propiedad cualquiera y sea B el conjunto indicado en el axioma de especificación. Si C es un conjunto tal que $a \in C$ si y sólo si $a \in A$ y $\alpha(a)$, entonces $B = C$.*

Demostración. Basta observar la definición del conjunto B para concluir lo siguiente, $a \in C$ si y sólo si $a \in A$ y $\alpha(a)$ lo que sucede si y sólo si $a \in B$, de lo que podemos concluir que B y C son subconjuntos uno de otro y por tanto iguales. $\square$

Del teorema anterior podemos concluir la unicidad del conjunto descrito en el axioma. Para indicar este conjunto usaremos la siguiente notación

$$\{x \in A \mid \alpha(x)\}.$$

El axioma comienza a abrir las aclaraciones necesarias en la teoría de la siguiente manera. Sea A un conjunto. Debemos admitir que el enunciado

$$x \notin x$$

es una propiedad en la teoría de conjuntos. Por el axioma de especificación, es posible considerar el conjunto

$$B = \{x \in A \mid x \notin x\}$$

y preguntar si éste será un elemento de A, i.e. $B \in A$. Supongamos entonces que $B \in A$. Entonces, debemos tener uno de dos casos, a decir $B \in B$ o que $B \notin B$. Pero si $B \in B$, entonces $B \notin B$ lo cual es evidentemente contradictorio; ahora si $B \notin B$, entonces es falso que $B \notin B$, por lo que $B \in B$, lo que es de nueva cuenta contradictorio, como las única posibilidad han derivado en contradicción, hemos de concluir que la hipótesis $B \in A$ resulta en contradicción por lo que es falsa y por tanto $B \notin A$. Esto constitute la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Sea A un conjunto. Entonces existe un conjunto B tal que $B \notin A$.*

Ahora A fue como un conjunto cualquiera y a pesar de esto, hemos sido capaces de mostrar la existencia de un elemento que no pertenece a él, por lo que hemos de concluir que no existe algo a lo que todo pertenece. Esto comienza a resolver algunos problemas que presentaba la teoría clásica de conjuntos.

2.2. Discusión mínima de clases

El argumento del que nos nutre el axioma nos dota de algunos huecos en el lenguaje. Para intentar aclararlos intentaremos describir brevemente el concepto de clase (que no ha de ser confundido con el de conjunto). Decimos que $\mathcal{C}$ una clase es una colección de objetos que satisfacen un propiedad (una propiedad por supuesto de la teoría de conjuntos) a la cual denotaremos por

$$\mathcal{C} = \langle x \mid \alpha(x) \rangle$$

cuando colecciones los objetos que satisfagan α. La discusión del último párrafo de la sección anterior nos permite concluir el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *La clase universo, i.e. $\mathcal{U} = \langle x \mid x = x \rangle$, no es un conjunto.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que es un conjunto. Entonces por la proposición 2.2 deberá existir un conjunto B tal que $B \notin \mathcal{U}$, sin embargo $B = B$ por lo que deberíamos tener que $B \in \mathcal{U}$, este hecho es por supuesto una contradicción. Debemos entonces admitir que $\mathcal{U}$ no puede ser un conjunto como afirma el teorema. $\square$

Con esto hemos probado que no toda colección es un conjunto, y que debemos tener cuidados en especial cuando no tengamos garantía alguna que la colección en cuestión deriva en ser conjunto a través de algunos de los axiomas. Notemos sin embargo, que cualquier conjunto es siempre una clase aunque no toda clase resultará ser un conjunto. Cuando tengamos una clase que no es conjunto (como en la clase universo) diremos que es una *clase propia*.

Basta comentar que de manera coloquial, se afirma que los conjuntos no son colecciones tan grades ni tan arbitrarias, sino bastante claras y concisas o en otras palabras especificadas. Esto nos pone un paso más lejos de las tan indeseables paradojas.

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Asuma que los números naturales son un conjunto. Especifica los siguientes conjuntos.

- El conjunto de los números pares.
- El conjunto de los número impares.
- El conjunto de los números primos.
- El conjunto de los cuadrados perfecto.
- El conjunto de los múltiplos de tres.

Ejercicio 2.2. Asuma que los números reales constitye un conjunto. Especifica los siguiente conjuntos.

- El conjunto de los número mayores a cinco.
- El conjunto de los números cuya raíz es un entero.
- El conjunto de los números que son o uno o menos uno.
- El conjunto de los números racionales.

Ejercicio 2.3. Discute si la teoría hasta ahora presentada nos presenta ejemplos de conjuntos. ¿Por qué es esto importante?

3. Parejas no ordenadas

3.1. Discusión general

Comenzaremos afirmando un axioma que debe resultar inmediato sin embargo no existe postulado previo que justifique su veracidad.

Axioma (de existencia)**.** Existe al menos un conjunto.

Podríamos preguntarnos entonces como formular este axioma de manera que sea una propiedad en la teoría de conjuntos. En realidad es muy sencillo, basta dar certeza a la propiedad

$$\exists X.X = X$$

La propiedad que califica el cuantificador existencial es una propiedad trivial que nada afecta en realidad al conjunto que cuantifica. De ahí que esa propuesta sea la propiedad que afirma el axioma.

Aunque parezca un postulado inocente, tiene una implicación interesante. Como los conjuntos existen (el axioma garantiza al menos uno), la hipótesis «sea A un conjunto» ya no es descabellada. Supongamos entonces un conjunto

A. Por el axioma de especificación, podemos tomar todos los elementos x de A que satisfagan $x \neq x$, en otras palabras el conjunto

$$\{x \in A \mid x \neq x\}.$$

El conjunto anterior por supuesto coincide con nuestra idea de un conjunto sin elementos que anteriormente denominamos vacío. Sin embargo, este conjunto ahora existe no por un capricho nuestro, sino como consecuencia de los axiomas hasta ahora postulados.

El conjunto que se postula como sin elementos tiene la peculiaridad que está especificado de un conjunto A, esto podría llevarnos a pensar en la existencia de diferentes conjuntos sin elementos dependiendo del conjunto que se especifique. Vamos a discutir la razón detrás de la existencia incondicional del conjunto vacío.

Definición 3.1. Diremos que un conjunto A es *un conjunto sin elementos*, siempre que para todo a, entonces $a \notin A$.

Existe una propiedad intrínseca en la definición de un conjunto sin elementos.

Lema 3.1. *Sean A y B conjuntos. Si A es un conjunto sin elementos, entonces $A \subset B$.*

Demostración. Basta demostrar que la implicación, si $a \in A$ entonces $a \in B$ es cierta para cualquier a. Sin embargo lo es: al ser el enunciado $a \in A$ falso para cualquier a, la implicación deberá ser cierta (revisa la tabla de verdad de la implicación). Por tanto $A \subset B$ como deseábamos. □

Teorema 3.2. *Existe un conjunto sin elementos. Este conjunto es además el único sin elementos.*

Demostración. Por el axioma de existencia, obtenemos un conjunto A. Ahora, por el axioma de especificación obtenemos el conjunto

$$B = \{x \in A \mid x \neq x\}.$$

Afirmamos que B no tiene elementos. En efecto, si $a \in B$, entonces $a \neq a$ lo cual es una contradicción, por tanto debemos concluir que B es un conjunto sin elementos.

Si C fuera un conjunto sin elementos, entonces por el lema anterior $C \subset B$; ahora, hemos mostrado que B es también un conjunto sin elementos por lo que el lema puede ser aplicado nuevamente para obtener $B \subset C$, por tanto $C = B$. De lo que podemos concluir que existe un único conjunto con la propiedad que no tenga elementos. □

Con el teorema anterior podemos simplemente definir lo que antes fue inmediato, el conjunto vacío es aquel conjunto sin elementos y será denotado por

$$\varnothing.$$

A pesar de lo técnico del resultado anterior, nuestra teoría dice muy poco de como construir conjuntos nuevos. El siguiente axioma nos comienza a delinear con algo más de claridad otra forma de crear nuevos conjuntos de otros dados.

Axioma (de apareamiento)**.** Para dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto al cual pertenecen ambos.

De manera simbólica, para notar que el axioma es de igual forma un enunciado en la teoría de conjuntos, lo anterior se escribe

$$\forall x \forall y \exists Z . x \in Z \wedge y \in Z.$$

Debemos ser cuidados con este axioma; no se afirma que existe un conjunto que *únicamente* contiene a los conjuntos, simplemente afirma que los contiene y quizá otros más.

Teorema 3.3. *Sean a y b conjuntos. Entonces existe uno y sólo un conjunto que contiene exclusivamente a y b como elementos.*

Demostración. Sea A el conjunto indicado por el axioma de apareamiento de forma que $a \in A$ y $b \in A$. Usando el axioma de especificación, delinea el siguiente conjunto:

$$B = \{x \in A \mid x = a \vee x = b\}.$$

Este conjunto contiene evidentemente sólo a y b como elementos. Debe resultar inmediato que cualquier otro conjunto que contenga sólo a los elementos a y b será igual a B por el axioma de extensión. □

El conjunto que contiene sólo a y b, se le llama *la pareja formada por a y b* al cual denotaremos por

$$\{a, b\}.$$

Como caso especial, tendríamos la pareja $\{a, a\}$ a la cual denotaremos simplemente como $\{a\}$. A este conjunto se le denomina *el conjunto unitario de a*.

Ejercicios

Ejercicio 3.1. ¿Son distintos los conjuntos $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$?

Ejercicio 3.2. Aparte de los conjuntos citados en el ejercicios anterior. ¿Qué otros conjuntos serán derivados de la existencia del conjunto vacío?

Ejercicio 3.3. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$.

4. Uniones e Intersecciones

4.1. Discusión general

Como en la teoría clásica, deseamos obtener un conjunto que nos permita reunir los elementos de otros dos dados. Dados dos conjuntos A y B, el axioma del apareamiento nos permite conjugar estos como elementos de un tercer conjunto, a decir $\{A, B\}$. Ahora, para unir dichos conjuntos sería necesario tomar sus elementos y coleccionarlos; no tenemos garantía por el momento que aquella colección sea un conjunto. Esta es la razón de ser del siguiente axioma.

Axioma (de las uniones)**.** Para cada colección de conjuntos existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de los conjuntos de la colección.

De manera simbólica, lo anterior afirma que

$$\forall \mathcal{F} \exists U \forall X \forall x . X \in \mathcal{F} \wedge x \in X \to x \in U.$$

Habrá que tener cuidado, el anterior axioma no afirma la existencia de la unión sino de un conjunto probablemente más amplio. Sin embargo, para un conjunto $\mathcal{F}$ cualquiera, tenemos ya a la mano el axioma de especificación que podemos usar junto al predicado

$$\exists X \in \mathcal{F} . x \in X$$

para formar el conjunto

$$S = \{x \in U \mid \exists X \in \mathcal{F} . x \in X\} .$$

El conjunto anterior es precisamente el conjunto que buscamos. De nueva cuenta, debe ser inmediato que el axioma de extensión hace al conjunto anterior único. Estamos entonces ahora facultados en afirmar el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto. Entonces existe un único conjunto S tal que $a \in S$ si y sólo si existe un elemento $A \in \mathcal{F}$ tal que $a \in A$.*

Definición 4.1. Al conjunto S del teorema anterior se llama la unión de $\mathcal{F}$ y se le denota por

$$\bigcup \mathcal{F}.$$

Algunas consecuencias de la anterior definición son

$$\bigcup \varnothing = \varnothing$$

y

$$\bigcup \{A\} = A.$$

Volvamos ahora al caso que comenzó la discusión. Para resolver la unión de dos conjuntos basta seguir una definición (que es más un asunto de notación):

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} .$$

Por lo que la unión de dos elementos queda definida de manera única. Basta realizar un pequeño comentario que motivará una nueva notación. Sea U el conjunto que está garantizado por el axioma de las uniones para el conjunto

$\{A, B\}$, podríamos también definir al siguiente conjunto como la unión de A con B

$$\{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

A pesar que estos conjuntos parecen ser distintos, una sencilla observación nos permitirá ver que sus condiciones son en realidad las mismas: un conjunto a pertenece a A o a B si y sólo si existe $C \in \{A, B\}$ tal que $a \in A$. Una vez que estemos convencidos de los anterior podemos afirmar sin más trámite la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *Sean A y B conjuntos cualesquiera y sea U el conjunto resultado del axioma de las uniones para el conjunto $\{A, B\}$. Entonces,*

$$\{x \in U \mid \exists Y \in \{A, B\}.x \in Y\} = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Debemos discutir ahora la intersección de un par de conjuntos de A y B. Para esto usaremos simplemente el axioma de especificación sobre A; para ser más claros especificamos el conjunto

$$\{x \in A \mid x \in B\},$$

recordando que un elemento pertenecerá a dicho conjunto si y sólo si pertenece a A y satisface la propiedad dada, que en este caso es que el elemento pertenezca a B. Podemos entonces simplemente definir

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\},$$

notando que también podríamos usar otra definición que resulta simétrica

$$A \cap B = \{x \in B \mid x \in A\}.$$

Describiremos ahora un fenómeno que sucede a menudo en matemáticas, que dos conjuntos no tengan elementos en común.

Definición 4.2. Sean A y B conjuntos. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces llamaremos a los conjuntos A y B *disjuntos*.

Podemos extender la anterior definición a una familia de conjuntos sin mucho trámite.

Definición 4.3. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto. Entonces $\mathcal{F}$ se dirá *una familia disjunta por pares* si para cada par de conjuntos A y B en $\mathcal{F}$ tales que $A \neq B$, tenemos que A y B son disjuntos.

Digresiones atrás, volvemos a enfocarnos en la intersección, no ahora de dos conjuntos, sino de un conjunto amplio de conjuntos. Para esto dependeremos que el conjunto $\mathcal{F}$ sea distinto del vacío, así la intersección de $\mathcal{F}$ deberá quedar definida por el conjunto S tal que un conjunto $a \in S$ si y sólo si para todo A en $\mathcal{F}$, $a \in A$. Este conjunto por supuesto debe existir siempre que $\mathcal{F}$ sea distinto del vacío a razón de tomar el conjunto $A \in \mathcal{F}$ (lo cual es posible al ser $\mathcal{F} \neq \varnothing$) y usar el axioma de comprensión para formar el conjunto

$$S = \{x \in A \mid \forall X \in \mathcal{F}.x \in X\}.$$

Como es común, debemos convencernos con el axioma de extensión que este conjunto es en verdad el único con esta propiedad. Enunciamos entonces el teorema correspondiente.

Teorema 4.3. *Sea $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Entonces existe un único conjunto S tal que $a \in S$ si y sólo si para todo $A \in \mathcal{F}$ tenemos que $a \in A$.*

Al conjunto S del teorema anterior lo denotaremos por

$$\bigcap \mathcal{F}$$

Necesitamos ahora que este conjunto sea coincida con el que hemos propuesto para la intersección de los conjuntos A y B. Sin embargo, no es difícil convencerse que esto es así, basta echar un vistazo a lo siguiente: $a \in A$ y $a \in B$ si y sólo si existe un conjunto $C \in \{A, B\}$ tal que $a \in C$. Una vez convencidos de esto, podemos verificar sin más la siguiente proposición

Proposición 4.4. *Sean A y B conjuntos. Entonces,*

$$\{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in A \mid \forall Y \in \{A, B\}.x \in Y\}.$$

4.2. Intersecciones vacías

Habrá que tener cuidado al realizar la intersección de conjunto vacíos. Supongamos para esto el conjunto $\mathcal{F} = \varnothing$. Entonces, $a \in \bigcap \mathcal{F}$ si y sólo si para todo $A \in \mathcal{F}$, tenemos que $a \in A$. Para esto debemos notar que lo anterior se escribe de manera muy clara de la siguiente forma

$$\forall X.X \in \mathcal{F} \to a \in X;$$

con esta expresión podemos ver que el antecedente de la implicación será siempre falso a ser la colección original vacía, por tanto la implicación que define a la intersección sera siempre cierta sin importar de quien se trate el elemento a. En otras palabras deberemos tener que la intersección de un conjunto vacío es la clase de todos los conjuntos, que hemos visto, no es un conjunto. Para evitar que las intersecciones resulten en clases propias, debemos garantizar que el conjunto involucrado en ella sea distinto del vacío.

4.3. Algunos comentarios de notación

Hemos estado discutiendo la importancia de especificar un conjunto con enorme detalle. Éste es un punto fino dentro de la teoría que estamos desarrollando; sin embargo, hemos visto que en la mayoría de los casos, una vez especificado el conjunto este resulta ser el único con esta propiedad, con lo que se pierde de alguna forma la importancia del conjunto donde éste fue obtenido por especificación (de hecho, la notación que hemos usado, refleja este hecho). Por ejemplo sabemos que la unión de dos conjuntos, A y B, puede derivar de especificar (Proposición 4.2)

$$\{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

En ese caso el conjunto U se vuelve irrelevante y lo omitiremos cuando quede implícito el conjunto de donde tomamos los elementos. Así podremos escribir sin ambigüedad

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

pues la propiedad que define a la unión es precisamente la que indica la notación anterior. De igual forma podemos convencernos que (Teorema 3.2)

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

o que (Proposición 4.4)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Conforme desarrollemos más teoría entenderemos las ventajas de expresarnos de la manera anterior.

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Demuestra que

- $A \cup \varnothing = A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cup A = A$.

Ejercicio 4.2. Demuestra que

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}.$$

Ejercicio 4.3. Demuestra que

- $A \cap \varnothing = \varnothing$.
- $A \cap B = B \cup A$.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cap A = A$.

Ejercicio 4.4. Demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejercicio 4.5. Demuestra que una condición suficiente y necesaria para que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

es que $C \subset A$. Observe que la condición no tiene nada que ver con B.

Ejercicio 4.6. $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Ejercicio 4.7. $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

5. Complementos y potencias

5.1. Discusión general

En la teoría de conjuntos clásica, suponíamos el concepto de universo. Como hemos visto, ese concepto es bastante problemático en la teoría axiomática al resultar una colección de este tipo en una clase propia. Sin embargo en la práctica es muy frecuente encontrarnos con una situación ya no de un universo pero si que exista un conjunto E para dos conjuntos A y B de forma que $A \subset E$ y $B \subset E$. Aunque esto no parecería una generalidad, lo asumiremos durante esta sección[1].

Comencemos nuestra discusión con la diferencia de dos conjuntos de manera arbitraria, pues usaremos esta como base para algunas otras operaciones complementarias que hemos dejado de lado.

Definición 5.1. Sean A y B conjuntos. La diferencia A con B es el conjunto

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Observando la definición anterior, no debería existir problema en usar la notación

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

al representar sin ambigüedad el conjunto en cuestión.

Definición 5.2. Sean A y E conjuntos tales que $A \subset E$. Se define *el complemento de A relativo a E* como el conjunto

$$A^c = E \backslash A.$$

Notemos que la notación A^c deja implícito el conjunto E por lo que éste debe quedar implícito en contexto en caso de que no se mencione de manera explícita. Tendremos la posibilidad de descubrir algunas propiedades elementales de la

[1]Basta pensar que para cualesquiera dos conjuntos A y B, podemos tomar el conjunto $E = A \cup B$ y obtener que $A \subset E$ y $B \subset E$, con lo que podemos convencernos que al menos existe un conjunto con esta propiedad.

complementación en los ejercicios aunque quizá por su importancia debamos destacar en estas lineas uno de los más importantes: Las leyes de DeMorgan. Éstas afirman que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

y

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

(No debe ser difícil ver que se trata de las mismas leyes de DeMorgan estudiadas en lógica proposicional, éstas sólo han sido presentadas dentro de la teoría de conjuntos). Respecto a los complementos, tenemos también un resultado que si bien se presenta de manera informal, es muy representativo: El principio de dualidad para conjuntos. Éste afirma que siempre que se den ecuaciones indicadas por uniones intersecciones y complementos (relativos a un conjunto E), se pueden cambiar cada conjunto por su complemento, las intersecciones por uniones, las uniones por intersecciones y revertir las inclusiones (para un ejemplo de esto, podemos revisar el ejercicio 5.5).

En el marco de la existencia del conjunto E, podemos intentar resolver el problema que ha surgido al proponer la intersección de una familia vacía. Podríamos para esto, tomar una conjunto $\mathcal{C}$ de forma que, si $A \in \mathcal{C}$ entonces $A \subset E$. Para una colección de este tipo podríamos usar el conjunto E como base y especificar el siguiente conjunto

$$\{x \in E \mid \forall Y \in \mathcal{C}. x \in Y\}.$$

En ese caso, si el conjunto $\mathcal{C}$ fuera vacío, el conjunto ya no resulta en la clase universo, sino en el conjunto E. Esto es en realidad deseable, sin embargo debemos verificar que este conjunto coincide con anterior definición de intersección. La siguiente proposición no sólo argumentará en favor de esto, incluso verificará que la definición alternativa no tiene nada de alternativa, sino se puede obtener de la definición original de la intersección

Proposición 5.1. *Sea $\mathcal{C}$ un conjunto. Entonces,*

$$\bigcap (\mathcal{C} \cup \{E\}) = \{x \in E \mid \forall Y \in \mathcal{C}. x \in Y\}.$$

Demostración. Supongamos primero que

$$S = \{x \in E \mid \forall Y \in \mathcal{C}. x \in Y\}.$$

Ahora bien, si $x \in \bigcap (\mathcal{C} \cup \{E\})$, entonces debe pertenecer a cualquier elemento de la familia $\mathcal{C} \cup \{E\}$ en particular a E. De igual forma debe pertenecer a cualquier miembro de la familia $\mathcal{C}$ por lo que podemos simplemente afirmar que

$$x \in E \wedge (\forall Y \in \mathcal{C}. x \in Y);$$

lo cual por el axioma de especificación significa simplemente que $x \in S$ por lo que

$$\bigcap (\mathcal{C} \cup \{E\}) \subset S.$$

La otra contención se prueba de manera similar (¡debemos convencernos de esto!). □

Hemos estado trabajando con subconjuntos de E y durante nuestra exposición a la teoría clásica encontramos que existían conjuntos cuyos elementos eran subconjuntos de algún otro. De hecho consideramos el formar el conjunto de todos los subconjuntos de una conjunto dado, el llamado conjunto potencia. Sin embargo, en la teoría axiomática no tenemos garantía de obtener dicha colección como un conjunto, para esto proponemos el siguiente axioma.

Axioma (de las potencias)**.** Para cada conjunto existe una colección de conjuntos que contiene entre sus elementos a todos los subconjuntos del conjunto dado.

De manera simbólica el anterior axioma afirma simplemente que

$$\forall X \exists Y \forall Z. Z \subset X \to Z \in Y.$$

Como hemos hecho en otras ocasiones podremos ver que el anterior conjunto puede ser más amplio de lo que deseamos. Consideremos entonces un conjunto E y definamos el conjunto por especificación

$$S = \{x \in P \mid x \subset E\}.$$

Bajo el axioma de extensión, el conjunto S es el único con la propiedad deseada, en ese caso es razonable proponer que el conjunto S es precisamente *el conjunto potencia de* E el cual denotaremos por

$$\mathcal{P}(E).$$

El conjunto potencia de un conjunto dado es por supuesto *más grande* (más tarde aclararemos el significado del término grande); podemos dar algunos ejemplos para convencernos intuitivamente de esto:

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\},$$

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\},$$

y

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

La existencia del conjunto potencia nos facilita algunas expresiones. Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ es un conjuntos de subconjuntos de E, definimos

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid \exists Y \in \mathcal{C} \wedge [\forall x. x \in X \leftrightarrow (x \in E \wedge x \notin Y)]\}$$

o de manera más sucinta

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X^c \in \mathcal{C}\}.$$

La intersección y unión de este conjunto $\mathcal{D}$ pueden ser representadas por

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X^c$$

y

$$\bigcup_{X\in\mathcal{C}} X^c$$

respectivamente. En ese sentido, las leyes de DeMorgan para colecciones de subconjuntos de E toman la siguientes formas:

$$\left(\bigcup_{X\in\mathcal{C}} X\right)^c = \bigcap_{X\in\mathcal{C}} X^c$$

y

$$\left(\bigcap_{X\in\mathcal{C}} X\right)^c = \bigcup_{X\in\mathcal{C}} X^c$$

Para terminar, presentaremos con la diferencia de conjuntos otra operación: *la diferencia simétrica*. Exploraremos algunas propiedades de la diferencia simétrica y los complementos durante los ejercicios, bastará por el momento definirla.

Definición 5.3. Sean A y B conjuntos. Definimos *la diferencia simétrica de A con B* como el conjunto

$$A + B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)\,.$$

Ejercicios

Recuerda que en esta sección hemos asumido que los conjuntos A y B son subconjuntos de un conjunto E que sólo se da en contexto.

Ejercicio 5.1. Demuestra que

1. $(A^c)^c = A$.
2. $(\varnothing)^c = E$.
3. $A \cap A^c = \varnothing$.
4. $A \cup A^c = E$.

Ejercicio 5.2. Demuestra que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Ejercicio 5.3. Demuestra que

1. $P \subset Q$ si y sólo si $P^c \cup Q = E$.
2. $P \subset Q$ si y sólo si $(P \cap Q)^c \subset P^c$.
3. $P \subset Q$ si y sólo si $P \cap Q^c = \varnothing$.

Ejercicio 5.4. Demuestra que

- $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B^c = \varnothing$.
- $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B^c = E$.

Ejercicio 5.5. Demuestra que $A \subset B$ si y sólo si $B^c \subset A^c$.

Ejercicio 5.6. $A \subset B$ si y sólo si $A^c \cup B^c = A^c$.

Ejercicio 5.7. $A \subset B$ si y sólo si $A^c \cap B^c = B^c$.

(Es de notar que los dos anteriores resultados son duales a los ejercicios 4.6 y 4.7)

Ejercicio 5.8. Demuestra que $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$

Ejercicio 5.9. Demuestra que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

Ejercicio 5.10. Da un ejemplo de conjuntos A y B tales que

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Ejercicio 5.11. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subsconjuntos de E. Demuestra que

$$\bigcap_{X \in \mathcal{P}(C)} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right)$$

y

$$\bigcup_{X \in \mathcal{P}(C)} \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right).$$

Ejercicio 5.12. Demuestra que

$$\left(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X^c$$

y

$$\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X^c.$$

Ejercicio 5.13. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$.

Ejercicio 5.14. Demuestra que $A \subset B$ si y sólo si $A \backslash B = \varnothing$.

Ejercicio 5.15. Demuestra que

1. $A + \varnothing$.
2. $A + B = B + A$.
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
4. $A \backslash B \subset A + C$.

Ejercicio 5.16. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A + B = \varnothing$

Ejercicio 5.17. Demuestra que $A + C = B + C$ implica que $A = B$.

6. Parejas ordenadas

6.1. Discusión general

Como hemos visto, dados conjuntos a y b podemos formar la pareja

$$\{a, b\}.$$

Sin embargo, por la teoría presentada, esa familia es idéntica al conjunto

$$\{b, a\}$$

por lo que debemos notar que dicha aproximación no distingue el orden de aparición aun que intuitivamente podamos asignarle uno de manera inmediata.

Necesitamos una estructura en conjuntos en la cual el orden en que aparezcan los elementos sea relevante. Incluso que sea su propiedad definitoria. Proponemos entonces la siguiente definición de una pareja ordenada de conjuntos.

Definición 6.1. Sean a y b conjuntos cualesquiera. Se llama la pareja ordenada de a y B al conjunto

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

La notación de la pareja ordenada sugiere que se han de comparar los elementos tal cual aparecen en la lista, contrastando esto con la pareja no ordenada. Veamos con precisión a que se refiere esto en la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *Sean a, b, c y d conjuntos cualesquiera. Entonces, $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*

Demostración. Comencemos suponiendo que $(a, b) = (c, d)$, entonces

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Debemos notar que el conjunto al lado izquierdo de la igualdad contiene a los conjuntos $\{a\}$ y $\{a, b\}$ los cuales tienen como único elemento en común al conjunto a; de la misma forma, el conjunto a la derecha de la igualdad contiene dos conjuntos que contienen como único elemento en común al conjunto c; una vez establecida esta igualdad, el argumento anterior nos permite afirmar que $a = c$ y concluimos que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}.$$

Para probar $b = d$, distinguiremos dos casos.

Supongamos primero que $b = a$. Si esto esto es cierto, entonces $\{a\} = \{a, b\}$ por lo que tenemos que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$$

y por tanto

$$\{\{a\}, \{a, d\}\} = \{\{a\}\}.$$

Ahora, por igualdad de conjuntos, debemos tener $\{a\} = \{a, d\}$ y por tanto $a = d$; en otras palabras $b = a = d$ tal como deseábamos.

Supongamos ahora lo contrario, $b \neq a$, entonces b sólo pertenece a $\{a, b\}$ pero no a $\{a\}$. Debemos tener en ese caso que b pertenece a $\{a, d\}$ y como $b \neq a$ debe ser $b = d$, justo como buscábamos.

Si suponemos que $a = c$ y $b = d$ es inmediato admitir que las parejas (a, b) y (c, d) son iguales desde el punto de vista de conjuntos. $\square$

La proposición nos otorga toda la información que deseamos. Las parejas ordenadas deben coincidir no sólo en los elementos dentro de ellas, sino en el orden en que se presentan.

Como nos debe resultar natural ahora, podemos preguntemos ahora si es podemos coleccionar todas las parejas ordenadas cuyos elementos sean miembros algún par de conjuntos. Podríamos plantear un axioma que lo hiciera posible, sin embargo nuestra teoría es suficiente robusta para soportar un enunciado tan fuerte como este. Exploremos cómo.

Sean A y B conjuntos cualesquiera y sean a y b elementos de A y B respectivamente. Primero debemos notar que

$$\{a, b\} \subset A \cup B$$

o en otras palabras

$$\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

Como $A \subset A \cup B$ y como $\{a\} \subset A$, debemos entonces tener que

$$\{a\} \subset A \cup B$$

que implica simplemente que

$$\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

Juntando en un sólo enunciado todo lo anterior podemos afirmar que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B),$$

que puede ser formulado simplemente como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

Una vez establecido esto, estamos en posición de presentar la colección de pares ordenados.

Definición 6.2. Sean A y B conjuntos cualesquiera. Entonces el *producto cartesiano de A con B* se define como el conjunto

$$A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists y \exists z. y \in A \wedge z \in B \wedge x = (y, z)\}.$$

El conjunto cartesiano es el conjunto de todas las parejas ordenadas de A y B. Está colección esta perfectamente definida por el axioma de especificación y constituye un conjunto. Como se menciona en [Hal66], es posible transitar en la otra dirección.

Teorema 6.2. *Sea R un conjunto tal que todos sus elementos son parejas ordenadas. Entonces existen conjuntos A y B tales que $R \subset A \times B$ y además si C y D son conjuntos tales que $R \subset C \times D$ entonces $A \subset C$ y $B \subset D$.*

Demostración. Supongamos primero que $R \neq \varnothing$ y notemo que los elementos de R tienen todos la forma

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Tomemos entonces el conjunto

$$\bigcup R$$

el cual resulta bien definido notando que los elementos que lo forman tienen dos posibilidades,

$$\{a\} \in \bigcup R$$

y

$$\{a, b\} \in \bigcup R.$$

Podemos una vez más unir dichos conjuntos para obtener el conjunto

$$\bigcup \bigcup R,$$

que contendrá todos los conjuntos que potencialmente empareja R. Llamemos a este conjunto S.

Definamos ahora

$$A = \{x \in S \mid \exists y \in S.(x, y) \in R\}$$

y

$$B = \{y \in S \mid \exists x \in S.(x, y) \in R\}.$$

Afirmamos que dichos conjuntos son los que buscamos. En efecto, por definición $R \subset A \times B$; además si $R \subset C \times D$ para algunos otros, si $a \in A$, entonces existe un elemento $b \in S$ tal que $(a, b) \in R$ y por tanto $(a, b) \in C \times D$ por lo que $a \in C$, probando que $A \subset C$. La contención $B \subset D$ se prueba de manera similar.

$\square$

Ejercicios

Ejercicio 6.1. Sean A, B, X y Y conjuntos. Entonces

1. $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times Y)$.

2. $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cup (B \times Y)$.

3. $(A \backslash B) \times X = (A \times X) \backslash (B \times X)$.

Ejercicio 6.2. Demuestra que

$$\bigcap \bigcap (x, y) = x$$

Ejercicio 6.3. Demuestra que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$ si y sólo si $A \times B = \varnothing$.

Ejercicio 6.4. Demuestra que, si $A \subset X$ y $B \subset Y$, entonces $A \times B \subset X \times Y$. Recíprocamente demuestra que siempre que $A \times B \neq \varnothing$ entonces $A \subset X$ y $B \subset Y$.

Ejercicio 6.5. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto no vacío. Demuestra que

1. $B \times \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}}\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} (B \times A)$.
2. $B \times \left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}}\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} (B \times A)$.

Ejercicio 6.6. Sean A y B conjuntos tales que $A \neq B$. Suponga que Z es un conjunto tal que $A \times Z = B \times Z$, demuestra que $Z = \varnothing$.

Ejercicio 6.7. Sean A y B conjuntos. Definimos $\langle a, b \rangle = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$ para elementos $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que $\langle a, b \rangle$ es un conjunto, y $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Lo anterior constituye una definición alternativa para una pareja ordenada.

Ejercicio 6.8. Demuestra que $A \times B = A \times A$ implica $A = B$.

Ejercicio 6.9. Sea A un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(A)$ se dice una *dirección en* A si satisface

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Para conjuntos B y C tal que $B, C \in \mathcal{F}$, existe un conjunto $D \in \mathcal{F}$ tal que $D \subset B \cap C$

Demuestra que el conjunto $N_a = \{Y \in \mathcal{P}(A) | a \in Y\}$ es una dirección en A.

Ejercicio 6.10. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ direcciones en A_1 y A_2 respectivamente. Si

$$\mathcal{F} = \{X \times Y | X \in \mathcal{F}_1 \wedge Y \in \mathcal{F}_2\}$$

entonces $\mathcal{F}$ es una dirección en $A_1 \times A_2$.

Referencias

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Compañia Editorial Continental, 1966.

[Lav07] Laveaga Gómez, Carmen: *Introducción a la Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Las prensas de Ciencias, 2007.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Álgebra Superior I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.