Tres tipos de relaciones

Matemáticas Discretas
Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

1. Funciones

Definición 1.1. Sea f una relación de A a B. Decimos que f es una *función* si para todo a en A y, b y b' en B, f satisface: $b = b'$ siempre que $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$. Adicionalmente, llamaremos a una función *total* si se cumple que $\mathrm{Dom}(f) = A$, en caso contrario la función se dirá *parcial*.

Cuando una relación $f \subset A \times B$ resulte ser una función, escrbiremos

$$f\colon A \to B,$$

para indicar la naturaleza de la relación en cuestion.

Ejemplo. Sea A un conjunto. Podemos considerar una función de $\varnothing$ a A. Por definición está debe ser un subconjunto de $\emptyset \times A$. Al ser este último conjunto el conjunto vacío, el único subconjunto posible es $f = \emptyset$. Así, existe sólo una función de $\emptyset$ a A, la *función vacía*.

Ejemplo. Sea A un conjunto. La relación identidad, 1_A es una función total de A a A. Esta función tiene un rol importante en la teoría de funciones a satsifacer, para una función $f\colon A \to B$, las igualdades $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$.

Ejemplo. Sean A y B conjuntos. Las relaciones

$$\pi_1 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times A \mid x = z\}$$

y

$$\pi_2 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times B \mid y = z\},$$

constituyen ejemplos de funciones. A éstas se les conoce como las *proyecciones del producto cartesiano* $A \times B$.

Teorema 1.1. *Sea f una función de A a B y sea g una función de B a C. La composición de f con g es una función de A a C.*

Demostración. La composición de funciones está definida al ser f y g relaciones. Consideremos la realción $g \circ f$, y supongamos que $(a, c) \in g \circ f$ y $(a, c') \in g \circ f$. En ese caso, existen elementos b y b' del conjunto B de forma que $(a, b) \in f$, $(b, c) \in g$, $(a, b') \in f$ y $(b', c') \in g$. Como asumimos que f era una función, entonces tenemos que $b = b'$ y en ese caso, tenemos que $(b, c) \in g$ y $(b, c') \in g$. Como g es una función por hipótesis, debemos tener que $c = c'$. Por tanto, $g \circ f$ es una función. $\square$

Corolario 1.2. *Se tiene que* $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) \cap f^{-1}[\mathrm{dom}(g)]$

Demostración. Supogamos que $a \in \mathrm{dom}(g \circ f)$, por definición debe existir un elemento $c \in C$, de forma que $(a, c) \in g \circ f$. Por la definición de composición esto sucede cuando existe un elemento $b \in B$ de forma que $(a, b) \in f$ y $(b, c) \in g$. Que ese elemento b exista, significa que $a \in \mathrm{dom}(f)$. Por otro lado, al tener $(b, c) \in g$, tenemos que $b \in \mathrm{dom}(g)$ y como $(a, b) \in f$, también $a \in f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$. De lo anterior concluimos que $\mathrm{dom}(g \circ f) \subset \mathrm{dom}(f) \cap f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$.

La otra contención se puede probar de manera análoga. □

La definición de función, nos permite tomar de manera unívoca al elemento b de una pareja $(a, b) \in f$; así, éste es el único elemento que acompaña al elemento a y podemos distinguirlo escribiendo $b = f(a)$. De esta forma podemos afirmar que $f(a)$ será el único elemento tal que $(a, f(a) \in f$.

Corolario 1.3. *Para todo* $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$*, se cumple que*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Demostración. Por definición, para un elemento $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, tenemos que $(g \circ f)(a)$ es el único elemento tal que $(a, (g \circ f)(a)) \in g \circ f$; como f es una función, esto implica que $(a, f(a)) \in f$ mientras que $(f(a), (g \circ f)(a)) \in g$. Como además $(f(a), g(f(a))) \in g$ y al ser g una función, debemos tener $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. □

Debemos notar de este último corolario, que cada lado de la fórmula es conceptualmente distinto, nuestras definiciones bastan para asegurar si igualdad.

Teorema 1.4. *Sean* f *y* g *funciones de* A *a* B*. Entonces,* $f = g$ *si y sólo si* $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ *y para cualquier* $a \in \mathrm{Dom}(f)$*,* $f(a) = g(a)$*.*

Demostración. A pesar de ser absolutamente obvio que la propiedad se satisface cuando $f = g$, supongamos esto cierto. En ese caso, si $a \in \mathrm{dom}(f)$ entonces por definición existe $b = f(a)$ tal que $(a, b) \in f$; por la igualdad de f y g debemos tener $f \subset g$ y por tanto $(a, b) \in g$ y en consecuencia $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ (la otra contención se prueba de manera análoga). Podemos concluir de lo anterior dos cosas, la primera que $a \in \mathrm{dom}(g)$ al existir b, y la segunda que $b = g(a)$ o en otras palabras que $f(a) = g(a)$. Esto prueba la necesidad.

Supongamos ahora que $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ y además que si $a \in \mathrm{Dom}(f)$ entonces $f(a) = g(a)$. Tomamos $(a, b) \in f$. Al ser f una función, debemos simplemente admitir que $b = f(a)$, esto significa que $b = g(a)$ al ser a un elemento del dominio de f. Pero por definición $(a, g(a)) \in g$ al ser los dominios de f y g iguales, de lo que obtenemos $(a, b) \in g$, por lo que $f \subset g$. De manera análoga podemos probar que $g \subset f$. Con esto se prueba la suficiencia. □

Introducimos ahora una notación nueva para funciones: para indicar que f es una función de A a B, escribimos

$$f : A \to B.$$

Definición 1.2. Sea $f\colon A \to B$. Diremos que

- f es *inyectiva* si, para todo a y a' en $\mathrm{dom}(f)$, si $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$.
- f es *suprayectiva* siempre que $\mathrm{Im}(f) = B$.
- f es *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Es de remarcar que una función es inyectiva si expresamos la definición contrapositivamente, i.e. siempre que a y a' pertenezcan a $\mathrm{Dom}(f)$ y se cumpla que $a \neq a'$, debemos tener $f(a) \neq f(a')$. También, la definición de función suprayectiva nos permite afirmar que para cada $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ de forma que $b = f(a)$, esto sigue simplemente de la definición que hemos dado para la imagen de f y afirmar que no existen elementos de B fuera de ella.

Teorema 1.5. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones totales.*

1. *Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.*
2. *Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.*

Demostración. Para probar la primer parte del teorema supondremos f y g inyectivas. Ahora, si a y a' son elementos de $\mathrm{dom}(f)$ tales que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, por el corolario 1.3, tenemos que $g(f(a)) = g(f(a'))$. Pero al ser g inyectiva, entonces $f(a) = f(a')$; y de la misma forma al ser f inyectiva, tenemos $a = a'$. Lo anterior prueba que $(g \circ f)$ es también inyectiva como se deseaba.

Para la segunda parte, supondremos f y g suprayectivas. Deseamos mostrar que para $c \in C$ hay un elemento $a \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ de forma que $c = (g \circ f)(a)$. En efecto, como g es suprayectiva, existe un elemento b dentro del conjunto $\mathrm{dom}(g)$, de forma que $c = g(b)$. También, al ser f suprayectiva, existe un elemento a dentro del conjunto $\mathrm{dom}(f)$, de forma que $b = f(a)$. Además,

$$
\begin{aligned}
c &= g(b) \\
&= g(f(a)) \\
&= (g \circ f)(a),
\end{aligned}
$$

de lo que se concluye que $g \circ f$ es suprayectiva como se deseaba. $\square$

Corolario 1.6. *Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$.*

Teorema 1.7. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones totales.*

1. *Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*
2. *Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.*

Demostración. Para probar la primera parte supondremos que $g \circ f$ es inyectiva. Supongamos entonces que a y a' son elementos de $\mathrm{dom}(f)$ de forma que $f(a) = f(a')$. En ese caso, debemos tener que $g(f(a)) = g(f(a'))$ por el corolario 1.3, esto significa que $(g\circ f)(a) = (g\circ f)(a')$ y por tanto $a = a'$ al tener la composición de f con g como una función inyectiva. Lo anterior prueba que f es inyectiva.

Para probar la segunda parte del teorema, supondremos que $g \circ f$ es suprayectiva y tomemos c como un elemento del conjunto C. Bajo nuestra hipótesis, existe un elemento a en el conjunto A tal que $c = (g\circ f)(a)$, en ese caso, podemos tomar $b = f(a)$ como un elemento del conjunto B y bajo lo anterior afirmar que $c = g(b)$. Por tanto g es suprayectiva como se deseaba. $\square$

Corolario 1.8. *Si $g\circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es suprayectiva.*

2. Relaciones de orden

2.1. Definiciones

¿Qué significado le damos al orden? ¿Qué significará un conjunto ordenado en matemáticas? En esta sección exploraremos el concepto de orden de manera formal proponiendo una definición matemática. Comencemos identificando que los siguientes enunciados tienen todos que ver con orden[1].

1. $0 < 1$ y $1 < 10^{23}$.
2. Dos primos tienen a un abuelo en común.
3. $22/7$ es una peor a aproximación a π que 3,141592654.
4. Los planetas ordenados de forma creciente por su distancia al sol son Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.
5. Ninguno de los conjuntos $\{1, 2, 4\}$ y $\{2, 3, 5\}$ es un subconjunto uno del otro pero $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ los contiene a ambos.
6. Dados dos números reales a y b distintos entre si, se tiene una de dos $a > b$ o $b > a$.

Debemos notar que más allá de ser el orden una definición intrínseca a un único objeto, es la comparación de dos lo que le otorga sentido.

Definición 2.1 (Orden parcial)**.** Sea $\leq$ una relación de A a A. Llamaremos a $\leq$ un *orden parcial en A* si satisface

- Para cada $a \in A$ se cumple $(a, a) \in\leq$. (Reflexiva)
- Si $(a, b) \in\leq$ y $(b, a) \in\leq$, entonces $a = b$. (Antisimétrica).
- Si $(a, b) \in\leq$ y $(b, c) \in\leq$ entonces $(a, c) \in\leq$. (Transitiva).

[1]Traducción libre de la introducción a [DP02].

Estamos en la posición de introducir una notación especial para un orden parcial. Si $\leq$ es un orden parcial en A, en lugar de $(a, b) \in\leq$ escribiremos $a \leq b$. De igual forma cuando afirmemos $b \geq a$ esto significará $a \leq b$. Introduciremos ahora un símbolo especial para la relación estricta, cuando tengamos el caso en que $a \leq b$ pero $a \neq b$, escribiremos $a < b$. Para terminar basta realizar una última acotación, escribiremos $a \nleq b$ cuando $(a, b) \notin\leq$.

Definición 2.2. A la pareja entre un conjunto A y orden parcial $\leq$ en A, en notación de conjuntos $(A, \leq)$, se le designa como un *conjunto parcialmente ordenado* o abreviando *copo*[2].

2.2. Algunos Ejemplos

Ejemplo (Orden en un conjunto potencia)**.** Como un ejemplo de orden, tomemos A como un conjunto cualquiera, y definamos la relación en $\mathcal{P}(A)$, como $S \leq T$ si y sólo si $S \subset T$. Entonces, $(\mathcal{P}(A), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Los resultados que se han probado para teoría de conjuntos hacen la prueba de este hecho inmediata. El lector debe convencerse por cuenta propia.

Ejemplo (Cadenas Binarias)**.** Sea Σ el conjunto $\{0, 1\}$ y sea también

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{u \colon \mathbb{N} \to \Sigma \mid u \text{ es total}\}$$

el conjunto[3] de todas las sucesiones en Σ. Decimos que una sucesión u es *finita*, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u(n) = 0$ si $n \geq m$. Para una secuencia finita u definimos la longitud de ésta por el número

$$l(u) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq m.u(n) = 0\}.$$

Definiremos ahora un orden en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $u \leq v$ si y sólo si $u = v$ o u es una cadena finita de forma que para $0 \leq n < l(u)$,

$$u(n) = v(n).$$

Si $u < v$ con u finita, entonces u se dice *un prefijo de v*.

Ejemplo (Funciones parciales)**.** Sean A y B conjuntos no vacíos cualesquiera. Definimos el conjunto de todas las funciones de A a B por

$$B^A = \{f \mid f \colon A \to B\}.$$

Definiremos un orden en B^A como sigue: diremos que $f \leq g$ para elementos de B^A, siempre que $\operatorname{dom}(f) \subset \operatorname{dom}(g)$ y para cada elemento $x \in \operatorname{dom}(f)$

$$f(a) = g(a).$$

[2]En inglés, a un conjunto parcialmente ordenado se le llama *poset* (**p**artially **o**reder **set**) sería natural entonces que designaramos un terminó en castellano para acortar y referirnos con comodidad a esta clase de conjuntos. Para esto se acuña *copo* (**co**njunto **p**arcialmente **o**rdenado). la primera vez que al autor escuchó esto, fue en una plática hace poco tiempo. Sin embargo, en la discusión del tema en Wikipedia, la palabra aparece como una posibilidad desde 2008 por lo que probablemente el término tiene otro origen.

[3]Tomaremos el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

2.3. Diagramas

Definición 2.3 (La relación de conbertura)**.** Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sean a y b elementos de A. Diremos que b *cubre* a *a* o que a *está cubierto por* b, en símbolos $a \ll b$, si $a < b$ y $a \leq s < b$ implica $s = a$.

Teorema 2.1. *Sea $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde A es un conjunto finito. Entonces, $a \leq b$ si existe una secuencia finita $a_1, \ldots, a_n$ de elementos de A tal que $a \ll a_1 \cdots \ll a_n \ll b$. En otras palabras, en el caso finito, un conjunto parcialmente ordenado está determinado por la relación de cobertura.*

Podemos ilustrar la relación de cobertura de diferentes maneras.

- En los números naturales $m \ll n$ si y sólo si $n = m + 1$.
- En los números reales no hay pareja de números x y y tal que $x \ll y$.
- En $(\mathcal{P}(A), \subset)$, tenemos que $S \ll T$ si y sólo si existe $b \in A \backslash S$ tal que $T = S \cup \{b\}$.

Una de sus principales usos sin embargo, reside en la creación de diagramas de copos.

Definición 2.4. Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Representamos a P por un diagrama de Hasse que se construye de la siguiente manera

1. A cada punto x de P le asignamos un punto $p(x)$ en el plano euclidiano que notaremos por un pequeño círculo.
2. Para cada par a y b en P tales que $a \ll b$, dibujaremos una linea uniendo $p(a)$ con $p(b)$.
3. Se desarrollan los pasos 1 y 2 de la siguiente manera:
   a) Si $a \ll b$ el punto $p(a)$ se dibuja abajo de $p(y)$.
   b) El circulo $p(c)$ no atraviesa ninguna linea entre $p(a)$ y $p(b)$ si $c \neq a$ y $c \neq b$.

2.4. Algunas clasificaciones de orden

Definición 2.5. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $S \subset A$. Definimos

- Un elemento $s \in S$ se dice un *máximo en* S, si para todo elemento $t \in S$, tenemos $t \leq s$.
- Un elemento $s \in S$ se dice un *mínimo en* S, si para todo elemento $t \in S$, tenemos $s \leq t$.

Proposición 2.2. *En un conjunto parcialmente ordenado, si un máximo o un mínimo de un subconjunto existen, entonces son únicos.*

Demostración. Supongamos que a y b son mínimos de un subconjunto S en un conjunto parcialmente ordenado. Por definición a es menor o igual que cualquier otro elemento en S, en particular lo es de b, en ese caso$a \leq b$. De la misma forma debemos tener que $b \leq a$. Por antisimetría de $\leq$, tenemos que $a = b$. Por lo que si S tiene un mínimo, éste es único. De manera análoga, podemos probar que si S tiene un máximo, éste es también único. □

Definición 2.6. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $S \subset A$. Definimos

- Un elemento $s \in S$ se llama *elemento maximal de* S, si $s \leq a$ y $a \in S$ implican que $s = a$.

- Un elemento $s \in S$ se llama *elemento minimal de* S, si $a \leq s$ y $a \in S$ implican que $s = a$.

Definición 2.7. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, cualesquiera dos elementos a y b se dicen *comparables* si es cierto que $a \leq b$ o $b \leq a$.

Definición 2.8. Un orden parcial en un conjunto A, se dice *total* o *lineal*, si para cualesquiera elementos a y b de A, a y b son comparables. Un conjunto parcialmente ordenado cuyo orden es total se dice *conjunto totalmente ordenado*.

Definición 2.9. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subset A$. Un elemento a de A se dice una *cota superior de B en A* , si para cada b en el conjunto B se tiene $b \leq a$. Recíprocamente, un elemento de a se dice una *cota inferior de B en A*, si para cada b en B, se tiene que $a \leq b$.

Definición 2.10. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $B \subset A$. Entonces, si el conjunto de cotas superiores de B en A tiene un mínimo, a éste mínimo lo llaremos *supremo de B en A*. Recíprocamente, si el conjunto de cotas inferiores de B en A tiene un máximo, a éste lo llamaremos *supremo de B en A*.

Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \leq)$ definido con anterioridad. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$, entonces el subconjunto de A

$$\bigcup \mathcal{F}$$

es un supremo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(A)$; mientras que el subconjunto de A

$$\bigcap \mathcal{F}$$

es un ínfimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(A)$.

Definición 2.11. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. A un subconjunto B de A se le denomina una *cadena en* $(A, \leq)$, si $(B, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Definición 2.12. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden $\leq$ se dice que es un *buen orden* si cada subconjunto no vacío de A tiene mínimo, en este caso decimos que $(A, \leq)$ es *un conjunto bien ordenado.*

Proposición 2.3. *Todo buen orden es un orden total.*

Demostración. Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Deseamos concluir que dos elementos cualquiera a y b en A sean comparables. Para esto consideremos el subconjunto de A $\{a, b\}$; al estar el conjunto bien ordenado, dicho conjunto debe tener un mínimo, sea c el mínimo. Esto quiere decir por definición que $c \in \{a, b\}$, en otras palabras, o $c = a$ o $c = b$, si $c = a$, entonces $c \leq b$, mientras que si $c = b$ entonces $b \leq a$. Por lo que a y b resultan comprables como se deseaba. □

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Sea A un conjunto y sea $<$ una relación en A de forma que

- para cada $a \in A$, $a < a$ es falso y
- si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demuestra que si definimos la relación $\leq$ en A como $x \leq y$ si y sólo si $x < y$ o $x = y$, entonces $\leq$ es un orden parcial[4]

Ejercicio 2.2. Sea $P = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$. Dibuja el diagrama de$P$ ordenado con las siguientes reglas. $v < a$, $v < b$, $v < c$, $v < d$, $v < e$, $v < f$, $v < u$, $a < c$, $a < d$, $a < e$, $a < f$, $a < u$, $b < c$, $b < d$, $b < e$, $b < f$, $b < u$, $c < d$, $c < e$, $c < f$, $c < u$, $d < e$, $d < f$, $d < u$, $e < u$ y $f < u$.

Ejercicio 2.3. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que la pareja

$$(\mathcal{P}(A), \subset)$$

es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejercicio 2.4. Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y sea

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{u \colon \mathbb{N} \to \Sigma \mid u \text{ es total}\}.$$

Definiremos ahora un orden en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $u \leq v$ si y sólo si $u = v$ o u es finita de forma que para $0 \leq n < l(u)$,

$$u(n) = v(n).$$

1. Demuestra que $\leq$ es un orden parcial en Σ^*.
2. Demuestra que si $\mathbf{O}(n) = 0$ para todo n, entonces $\mathbf{O} \leq u$ si $u \in \Sigma^*$.
3. Sea $u \in \Sigma^*$, determine que elementos $v \in \Sigma^*$ satisfacen $u \ll v$.

[4]Una relación binaria $<$ con esas propiedades se le conoce como orden parcial estricto.

4. Demuestra que para una cadena binaria no finita u, no existe elemento v tal que $u \ll v$.

Ejercicio 2.5. Tomemos el conjunto de todas las funciones de A a B por

$$B^A = \{f \mid f\colon A \to B\}.$$

Definiremos un orden en B^A como sigue: diremos que $f \leq g$ para elementos de B^A, siempre que $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ y para cada elemento $x \in \mathrm{dom}(f)$

$$f(a) = g(a).$$

1. Demuestra que $(B^A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
2. Demuestra que $\varnothing \leq f$ para cada $f \in B^A$.
3. Encuentra un cadena en B^A.

Ejercicio 2.6. Para el orden que conocemos para $\mathbb{N}$, demuestra que $m \ll n$ si y sólo si $n = m + 1$.

Ejercicio 2.7. Para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subset)$, demuestra que $S \ll T$ si y sólo si existe $b \in A \backslash S$ tal que $T = S \cup \{b\}$.

3. Relaciones de equivalencia

Definición 3.1. Sea R una relación de A a A. La relación se dice de *equivalencia* en A si satisface para todo a, b y c en A,

- $(a.a) \in R$ (Reflexiva).
- Si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$ (Simétrica).
- Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$ (Transitiva).

Proposición 3.1. *Si R es una relación de equivalencia en A, entonces* $\mathrm{dom}(R) = A$ *y* $\mathrm{im}(R) = A$

Demostración. El hecho de que para cualquier a en el conjunto A, implique que $(a, a) \in R$, implica la conjunción en la proposición. □

Si R es una clase de equivalencia en A. Escribiremos

$$a \sim_R b,$$

en lugar de $(a, b) \in R$. Lo anterior se lee «a es equivalente a b». Si en contexto la relación está implícita, escribiremos simplemente

$$a \sim b.$$

Definición 3.2. Sea R una relación de equivalencia en A y sea a un elemento de A. La *clase de equivalencia de a respecto de R*, es el subconjunto de A definido por

$$[a]_R = \{x \in A \mid x \sim_R a\} .$$

Sin importar que relación de equivalencia tengamos, el conjunto $[a]_R$ es no vacío al tener por definición $a \sim a$ para cada elemento de A.

Teorema 3.2. *Para una relación de equivalencia R, son equivalentes*

1. $[a]_R = [b]_R$
2. $a \sim_R b$
3. $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Demostración. Supongamos que $[a]_R = [b]_R$. Entonces, como $a \in [a]_R = [b]_R$, debemos tener que $a \sim_R b$.

Si ahora suponemos que $a \sim_R b$, entonces $a \in [a]_R$ y al mismo tiempo $a \in [b]_R$, o en otras palabras, $a \in [a]_R \cap [b]_R$, por lo que este último es no vacío.

Finalmente, si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, es posible tomar un elemento $s \in [a]_R \cap [b]_R$. Esto significa que $s \sim_R a$ y $s \sim_R b$, y, por simetría y transitividad, tenemos que $a \sim_R b$. Tomemos ahora $c \in [a]_R$, entonces $c \sim_R a$; por transitividad, esto implica que $c \sim_R b$, y en consecuencia $c \in [b]_R$. Lo anterior prueba que $[a]_R \subset [b]_R$. De manera análoga se prueba que $[b]_R \subset [a]_R$, por lo que $[a]_R = [b]_R$, haciendo los tres enunciados equivalentes. □

Corolario 3.3. *Una de dos, o* $[a]_R = [b]_R$ *o* $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Cuando el significado de R esté implícito y podamos escribir $a \sim b$, podremos también escribir $[a]$ en lugar de $[a]_R$.

Definición 3.3. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$. Diremos que $\mathcal{F}$ es una *partición de A* si

- $S \neq \emptyset$ para cada S en $\mathcal{F}$.
- $S \cap T = \emptyset$ para cada $S \neq T$ en $\mathcal{F}$.
- $\bigcup \mathcal{F} = A$.

Lema 3.4. *Sea R una relación de equivalencia en A. Entonces, el conjunto*

$$\mathcal{F}_R = \{[a] \mid a \in A\}$$

es una partición.

Demostración. Para cada a en A, el conjunto $[a]$ es no vacío. Además, por el teorema 3.2, si $[a] \neq [b]$, tendremos que $[a] \cap [b] = \emptyset$. Finalmente como $\{a\} \subset [a]$, y $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$, debemos tener que

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A.$$

Esto prueba que $\mathcal{F}_R$ es una partición. □

Lema 3.5. *Sea $\mathcal{F}$ una partición de A y sea $R_{\mathcal{F}}$ la relación en A definida por: $(a, b) \in R_{\mathcal{F}}$ si y sólo si existe un elemento $P \in \mathcal{F}$ tal que $a \in P$ y $b \in P$. Entonces, $R_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Como $\bigcup \mathcal{F} = A$, la relación $R_{\mathcal{F}}$ es reflexiva y simétrica. Basta entonces probar que es transitiva. Supongamos para esto que $a \sim b$ y que $b \sim c$ bajo $R_{\mathcal{F}}$. En ese caso existen conjuntos P y P' de forma que a y b pertenecen a P, mientras que b y c pertenecen a P'. En ese caso b debe pertenecer a la intersección de P con P'. Por definición de partición, esto sólo es posible si $P = P'$, si ese es el caso, a y c son elementos de P. En otras palabras $a \sim c$. De aquí que la relación $R_{\mathcal{F}}$ sea transitiva. □

Los dos lemas anteriores nos permiten construir una partición de una relación de equivalencia y viceversa. Esto es una asignación entre estos dos conceptos. Si podemos caracterizar a los conceptos por conjuntos, podremos usar estos lemas para construir una función. Para aclarar esto, formaremos los conjuntos de la relaciones de equivalencia en A, $\mathfrak{E}(A)$, y el de las particiones de A, $\mathfrak{P}(A)$. Notese cuan distintos son dichos conjuntos, el primero es un subconjunto de $\mathcal{P}(A \times A)$ mientras que el segundo es un subconjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. A pesar de esto, la teoría de conjuntos los vincula y aglutina como si de un mismo objeto se tratara.

Teorema 3.6. *Sea A un conjunto. Entonces, existe una biyección de $\mathfrak{E}(A)$ a $\mathfrak{P}(A)$.*

Demostración. Definimos primero a $\phi\colon \mathfrak{E}(A) \to \mathfrak{P}(A)$ como la función

$$\phi(R) = \mathcal{F}_R,$$

mientras que $\psi\colon \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{E}(A)$ será la función

$$\psi(\mathcal{F}) = R_{\mathcal{F}}.$$

Estas expresiones son en verdad funciones entre los conjuntos a partir de los resultados de los lemas 3.4 y 3.5. Mostrearemos que ϕ es invertible con ψ como su inversa.

Probaremos primero que, dada una pariticion $\mathcal{F}$ de A,

$$(\psi \circ \phi)(\mathcal{F}) = \mathcal{F},$$

o en otras palabras,

$$\psi(R_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}.$$

Para esto tomamos primero $P \in \psi(R_{\mathcal{F}})$, en ese caso, debe existir $a \in A$ de forma que $P = [a]_{R_{\mathcal{F}}}$. Como $\bigcup \mathcal{F} = A$, debe existir un elemento $Q \in \mathcal{F}$ de forma que $a \in Q$. Afirmamos que $P = Q$. En efecto, $b \in [a]_{R_{\mathcal{F}}}$ si y sólo si $b \sim_{R_{\mathcal{F}}} a$ lo que sucede si y sólo si existe un elemento $Q' \in \mathcal{F}$ de forma que a y b pertenezcan a Q', pero en ese caso $a \in Q$ y $a \in Q'$ por lo que la intersección es no vacía, debido a la definición de partición, debemos tener que $Q' = Q$. De lo anterior podemos concluir que $b \in [a]_{R_{\mathcal{F}}}$ si y sólo si $b \in Q$ como afirmamos con anterioridad. Como $P = Q$ y $Q \in \mathcal{F}$, podemos simplemente afirmar que $P \in \mathcal{F}$ y así $\psi(R_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$. Supongamos ahora que $P \in \mathcal{F}$. P debe ser no vacío por la definición de partición, tomamos entonces $a \in P$. En ese caso, debemos tener $P = [a]_{R_{\mathcal{F}}}$ de manera análoga en la prueba de la anterior contención, como $[a]_{R_{\mathcal{F}}} \in \psi(R_{\mathcal{F}})$, se tiene que $P \in \psi(R_{\mathcal{F}})$ y en consecuencia $\psi(R_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$. Estas dos contenciones implican la igualdad de los conjuntos dados.

Probaremos ahora que dada una relación de equivalencia R en A, tenemos que

$$(\phi \circ \psi)(R) = R$$

o en otras palabras

$$\phi\left(\mathcal{F}_R\right) = R.$$

Supongamos primero que $(a, b) \in \phi(\mathcal{F}_R)$. En ese caso debe existir un conjunto $P \in \mathcal{F}_R$ de forma que $a \in P$ y $b \in P$. Por definición $P = [c]_R$ para algún $c \in A$, de lo anterior debemos entonces tener que $a \sim_R c$ y $b \sim_R c$, por transitividad y simetría, $a \sim_R b$, lo anterior significa simplemente que $(a, b) \in R$ y en consecuencia $\phi(\mathcal{F}_R) \subset R$. Supongamos ahora que $(a, b) \in R$. De lo anterior podemos afirmar que $a \in [b]_R$ y $b \in [b]_R$. Como por definición $[b]_R \in \mathcal{F}_R$, entonces existe $P = [b]_R$ de forma que $a \in P$ y $b \in P$. En ese caso debemos tener $(a, b) \in \phi(\mathcal{F}_R)$. Por tanto $\phi(\mathcal{F}_R) \subset R$. De las contenciones es posible concluir con la igualdad.

Como ψ es la inversa de ϕ, entonces ϕ es invertible y por tanto una biyección entre $\mathfrak{E}(A)$ y $\mathfrak{P}(A)$. $\square$

Para finalizar esta sección, introducimos algunos conceptos adicionales acerca de las relaciones de equivalencia. Dada una relación de equivalencia R en A, al conjunto $\{[a] \mid a \in A\}$, lo llamaremos el *conjunto cociente de A respecto de R* al cual denotaremos por A/R. Existe además una funcíon $\pi \colon A \to A/R$ definida por $\pi(a) = [a]$, llamada la función canónica de A en su conjunto cociente A/R. Esta función es suprayectica y además satisface $\pi(a) = \pi(b)$ si y sólo si $a \sim b$.

Referencias

[DP02] Davey, Brian A. y Priestley, Hilary A.: *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, 2002.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Matemáticas Discretas impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.