Notas a Fundamentos de [Spi12] (Parte 2)*

Cálculo Diferencial e Integral I
Actuaría 2016-I

1. Límites

1.1. Primer contacto

Comencemos simplemente con la definición formal de límite para el cálculo infinitesimal. Esta definición será pertinente aprenderla de memoria, de aquí en adelante jugará un rol imperante en la teoría que desarrollemos.

Definición 1.1. Sea f una función. Se dice que *la función f tiende hacia el límite L en a* si: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Existen algunos comentarios que hacer sobre la definición, pero quizá por el momento será interesante dar algunos ejemplos de la definición en acción.

Ejemplo. Para la función $f(x) = 1/x$, para cualquier número $a \neq 0$, $f(x)$ tiende a $1/a$. Primero debemos notar que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| &= \left|\frac{a-x}{ax}\right| \\ &= \frac{1}{|a|}\frac{1}{|x|}|x-a| \end{aligned}$$

Debemos conseguir entonces acotar $1/|x|$, para esto propondremos

$$|x - a| < \frac{|a|}{2}$$

o en otras palabras

$$-\frac{|a|}{2} + a < x < \frac{|a|}{2} + a$$

por lo que podemos obtener que

$$\frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|},$$

*Secciones 5 y 6 de [Spi12]

lo que acota el termino que buscamos ahora. Si proponemos

$$\delta = \text{mín}\left(\frac{2}{|a|}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right),$$

entonces si $0 < |x - a| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| =& \frac{1}{|a|}\frac{1}{|x|}|x - a| \\
<& \frac{2}{|a^2|}|x - a| \\
<& \frac{2}{|a|^2}\frac{|a|^2}{2}\varepsilon \\
=& \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo que de acuerdo a la definición f tiende hacia a $1/a$ en a.

Ejemplo. Demostraremos que el límite de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

en 2 es 4. Para esto usaremos simplemente la definición de límite. Supongamos $\varepsilon > 0$, entonces si tomamos $\delta = \varepsilon$ y suponemos $0 < |x - 2| < \delta$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(x) - 4| &= \left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 2\right| \\
&= \left|\frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} - 4\right| \\
&= |x + 2 - 4| \\
&= |x - 2| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Con lo que hemos probado lo que deseábamos.

Ejemplo. Para la función $f(x) = 0$ el límite en a es a. Para probar esto procedemos siguiendo como siempre la definición. Sea $\varepsilon > 0$, en ese caso tomamos $\delta = \varepsilon$ y en consecuencia si $0 < |x - a| < \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(x) - a| &= |x - a| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Probando la afirmación que pretendíamos.

Ejemplo. Probemos que el limite de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en 3 es 10. Sea $\varepsilon > 0$, entonces podemos tomar $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/11)$. Si asumimos que $0 < |x - 3| < \delta$, en particular tenemos que $|x - 3| < 1$ y en consecuencia

$2 < x < 4$ y entonces $7 < 2x+3 < 11$ de lo que podemos concluir que el número $2x+3$ es positivo y en consecuencia tenemos que $|2x+3| < 11$. Ahora,

$$\begin{aligned}
|2x^2 - 3x + 1 - 10| &= |2x^2 - 3x - 9| \\
&= |2x+3||x-3| \\
&< 11|x-3| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que la definición sigue y podemos afirmar que el límite es precisamente 10.

Ejemplo. El límite para la función $f(x) = x^2 + x + 1$ es 7 en a. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/6)$, en ese caso si $|x-2| < \delta$, debemos tener por un lado que $|x-2| < 1$ por lo que $1 < x+3 < 6$ y en consecuencia $|x+3| < 6$. También

$$\begin{aligned}
|x^2 + x + 1 - 7| &= |x^2 + x - 6| \\
&= |x+3||x-2| \\
&< 6|x-2| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que el límite es el que afirmamos.

Es quizá momento de presentar un ejemplo de un caso en que el límite no existe, en ese caso debemos interpretar la definición en negación: Cuando sea falso que el límite de f es L en a, debe verificarse que ([Spi12])

> existe **algún** $\varepsilon > 0$ tal que para **todo** $\delta > 0$ existe **algún** x que satisface $0 < |x-a| < \delta$ pero no que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En ese sentido, el límite no existe cuando lo anterior se verifica para cualquier número L. En importante notar que el límite no exista implica satisfacer un enunciado ¡con 4 cuantificadores lógicos!

Ejemplo. Mostraremos que la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

no tiene un límite en 0. Usaremos la negación que acabamos de presentar para mostrar este hecho. Supongamos L como un número cualquiera. Podemos comenzar nuestro análisis como aparece en la figura 1.

Si $L \leq 0$, tomemos $\varepsilon = 1$, entonces para cualquier $\delta > 0$ elegimos $x = -\delta/2$ de lo que $|x - \delta| = \delta/2 < \delta$ y como $|x| = -x$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(x) - L| &= |-1 - L| \\
&= L + 1 \\
&> \varepsilon.
\end{aligned}$$

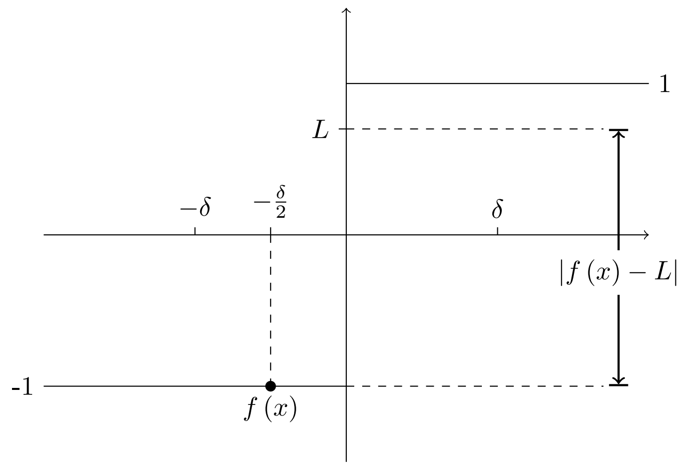

Figura 1: Para la función $1/x$, si tomamos $L > 0$ y $x = -\delta/2$ $|f(x) - L| > 1$.

Si ahora $L < 0$, tomamos de igual forma $\varepsilon = 1$, y para todo $\delta > 0$ podemos elegir $x = \delta/2$, por lo que $|x - \delta| = \delta/2 < \delta$ y como $1 - L > 1$ y $|x| = x$, tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x) - L| &= |1 - L| \\ &= 1 - L \\ &> \varepsilon\end{aligned}$$

Por la propiedad de tricotomía, $L \leq 0$ o $L < 0$, sea cualquiera que fuera el caso, podemos encontrar que es falso que el límite de f en 0 sea L para cualquiera que sea L.

Ejemplo. Afirmamos que el límite de la función $f(x) = 1/x$ no existe. Tomemos primero un caso particular.

Si $L = 0$ podemos tomar $\varepsilon = 1$ pues si δ es cualquier número mayor que 0, bastará proponer cualquier número

$$0 < x \leq \text{mín}\left(1, \frac{\delta}{2}\right),$$

para garantizar que $|x| < \delta$ y además que $1/|x| \geq 1$; en ese caso

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - L\right| &\geq \frac{1}{|x|} \\ &\geq 1 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Un caso particular de esto puede observarse en la figura 2.

Observemos ahora el caso general. Si L es cualquier número, elegimos $\varepsilon = 1$ entonces para cualquier $\delta > 0$ podemos elegir alguno de los números

$$x \leq \text{mín}\left(\frac{1}{|L| + 1}, \frac{\delta}{2}\right),$$

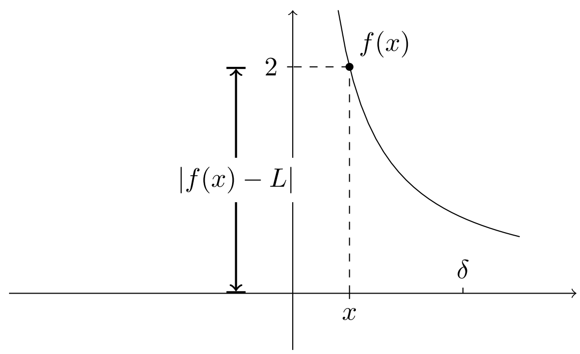

Figura 2: Cuando $L = 0$ podemos tomar $x = \min(1/2, \delta/2)$ para verificar que $|f(x) - L| > 1$ para cualquiera que sea el valor de δ.

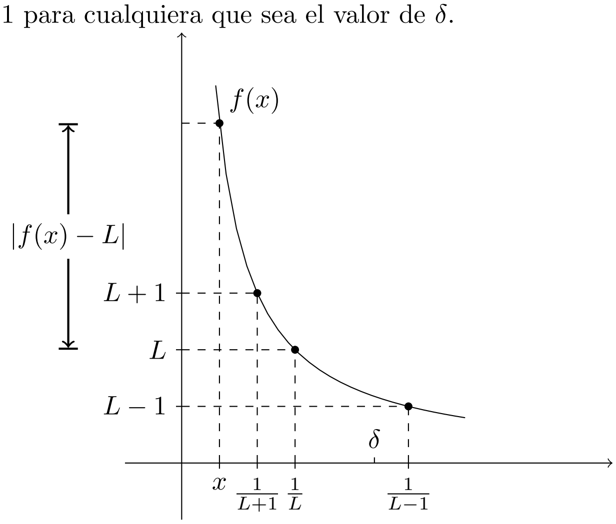

Figura 3: Cuando L toma cualquier valor podemos tomar $x = 1/2(|L| + 1)$ el cual es menor que $\min(1/(|L|+1), \delta/2)$ y verificar$|f(x) - L| > 1$ para cualquiera que sea el valor de δ.

para tener que

$$\frac{1}{|x|} \geq |L| + 1$$

además de $|x| < \delta$ y por tanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - L\right| &\geq \frac{1}{|x|} - |L| \\ &\geq |L| + 1 - |L| \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Un caso particular se ilustra en la figura 3, donde podemos ver la razón de elegir x de la manera que se eligió.

Propondremos ahora una notación para los límites, sin embargo antes debemos verificar que estos son únicos cuando es posible encontrar el valor L que es el límite.

Lema 1.1. *Si $|a| \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.*

Demostración. Probaremos el resultado por contraposición; supongamos que $a \neq 0$ entonces $\frac{1}{2}|a| > 0$ y como $\frac{1}{2}|a| < |a|$, podemos afirmar que existe $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$ de forma que $\varepsilon < |a|$. De esto sigue el resultado. $\square$

Teorema 1.2. *Sea f una función cualquiera. Si f tiende hacia L_1 en a y f tiende hacia L_2 en a, entonces $L_1 = L_2$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f tiende hacia L_1 en a, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$ se tiene que $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ y como f tiende hacia L_2 en a, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_2$ se tiene que $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$. En ese caso si $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$ entonces $0 < |x - a| < \delta$ implicará ambos $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ y $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Tomemos entonces $x_0 = a + \delta/2$, en ese caso

$$\begin{aligned}|L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x_0) + f(x_0) - L_2| \\ &\leq |f(x_0) - L_1| + |f(x_0) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

En conclusión, para todo $\varepsilon > 0$, se obtiene $|L_1 - L_2| < \varepsilon$. Por el lema anterior tenemos que $L_1 = L_2$. $\square$

El teorema anterior nos faculta para afirmar que existe sólo un límite cuando una función tiende hacia un punto, si es que el límite existe. En ese caso podemos escribir, cuando la función f tienda hacia L en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Cuando no sea posible encontrar un número L tal que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, diremos que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe. De forma similar, cuando afirmemos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe afirmamos entonces que existe algún número L para el cual el cual se verifica $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

1.2. Algunos teoremas fundamentales

Existen algunas formas alternativas de evaluar límites sin recurrir a la definición. Los siguientes teoremas nos permiten evaluarlos El siguiente teorema es una de ellas, este tipo de resultados nos permite manipular de manera mecánica algunos de los resultados más sencillos. Veremos algunos resultados de este tipo en esta sección.

Teorema 1.3. *Sea f una función. Entonces si alguno de los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ o $\lim_{h\to 0} f(a+h)$ existe, entonces el otro también existe y estos límites deben ser iguales.*

Demostración. Supongamos primero que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ para algún número L. Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que para cualquier $0 < |x-a| < \delta$, debemos tener $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si $0 < |h| < \delta$, en particular podemos tomar $x = h + a$ por lo que debemos tener $|f(h+a) - L| < \varepsilon$ y por definición debemos tener que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L$ como deseábamos.

Supongamos ahora que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L$ para algún número L. Sea $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que para cualquier $0 < |h| < \delta$ debemos tener que $|f(a+h) - L| < \varepsilon$. Ahora si $0 < |x-a| < \delta$, lo anterior debe ser válido para $h = x-a$ por lo que debemos tener que $|f(x) - L| = |f(a+x-a) - L)| < \varepsilon$ por lo que podemos afirmar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ que es lo que queríamos probar. $\square$

Los siguientes ejemplos ilustran como usar el teorema anterior, usando algunos ejemplos que ya hemos probado.

Ejemplo. Afirmamos que

$$\lim_{h\to 0} (h+2)^2 + h + 3 = 7.$$

En efecto, en un ejemplo anterior hemos calculado ya

$$\lim_{x\to 2} x^2 + x + 1 = 7.$$

Ademas,

$$f(h+2) = (h+2)^2 + (h+2) + 1 = (h+2)^2 + h + 3,$$

por lo que el teorema anterior nos indica

$$\lim_{h\to 0} (h+2)^2 + h + 3 = \lim_{x\to 2} x^2 + x + 1 = 7.$$

Podemos sin embargo proceder siguiendo simplemente la definición, para esto suponemos cualquier $\varepsilon > 0$, en ese caso debemos notar que si $|h| < 1$, entonces $|h+5| < 6$. Elegimos $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/6)$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned}
|(h+2)^2 + h + 3 - 7| &= |h^2 + 5h| \\
&= |h+5||h| \\
&< 6|h| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que la definición implica el límite que buscamos. Podemos observar que la elección en ambos casos para δ es la misma. Si observamos la demostración del teorema, ésta nos indica como hacer la elección adecuada.

Teorema 1.4 (de intercalación)**.** *Sean f, g y h funciones cualquiera y sea también $x_0 \in (a,b)$. Si para todo $x \in (a,b)$ pero $x \neq x_0$, se tiene*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

y

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x),$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

Demostración. Se debe mostrar que el $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por hipótesis sobre los límites de f y h, podemos encontrar $\delta_1, \delta_2 > 0$ de forma que si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ tenemos

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

y si $0 < |x - x_0| < \delta_2$, tenemos

$$|h(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomemos $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$, en ese caso si $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}
L - \varepsilon &< f(x) \\
&\leq g(x) \\
&\leq h(x) \\
&< L + \varepsilon;
\end{aligned}$$

lo anterior implica que

$$|g(x) - L| < \varepsilon.$$

Todo lo anterior significa

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

□

Teorema 1.5. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $a < L < b$*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$a < f(x) < b$$

para todo $|x - x_0| < \delta$*.*

Demostración. Como $\lim_{x\ tox_0} f(x) = L$, podemos elegir el número $\delta > 0$ dado para el número $\varepsilon = \min(b - L, L - a)$ de forma que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

o en otras palabras

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Por un lado, $\varepsilon < b - L$ y por otro $\varepsilon < L - a$ o $a - L < -\varepsilon$. En ese caso

$$\begin{aligned} a &= L + a - L \\ &< L - \varepsilon \\ &< f(x) \\ &< L + \varepsilon \\ &< L + b - L \\ &= b. \end{aligned}$$

Lo anterior resulta en lo que queríamos probar. □

Comenzaremos ahora con tres teoremas que involucran las operaciones sobre funciones que hemos definido operadas sobre límites. Estos resultados nos ayudarán a calcular algunos límites sin tener que recurrir a las definición de límite.

Lema 1.6. *Sea* $\varepsilon > 0$ *y sean* x*,* y*,* x_0 *y* y_0 *números cualesquiera. Si*

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad y \qquad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon.$$

Demostración. Basta observar lo siguiente

$$\begin{aligned} |(x + y) - (x_0 - y_0)| &= |(x - x_0) - (y - y_0)| \\ &\leq |x - x_0| + |y - y_0| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 1.7. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *entonces*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L + M.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$; también podemos encontrar $\delta_2 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$. En ese caso si $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, y tomamos $0 < |x-a| < \delta$ se verificarán simultáneamente

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y del lema anterior se sigue que

$$|\,(f(x) - g(x) - (L+M))\,| < \varepsilon.$$

Por lo que el límite existe y es igual al valor que buscábamos. □

Lema 1.8. *Sea* $\varepsilon > 0$ *y sean* x, y, x_0 *y* y_0 *números cualesquiera. Si*

$$|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right) \qquad y \qquad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$

entonces

$$|xy - x_0y_0| < \varepsilon.$$

Demostración. Al tener

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1,$$

obtenemos la desigualdad,

$$|x| < 1 + |x_0|,$$

además,

$$\frac{|y_0|}{|y_0|+1} < 1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
|xy - x_0y_0| &= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \\
&\leq |x| \cdot |y-y_0| + |y_0| \cdot |x-x_0| \\
&< (1+|x_0|)\,\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)} + |y_0|\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.9. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *entonces*

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = L\cdot M.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces

$$|f(x) - L| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}\right);$$

también podemos encontrar $\delta_2 > 0$ de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}.$$

Tomamos entonces $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$ y si $0 < |x-a| < \delta$ se satisfacen simultáneamente

$$|f(x) - L| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}.$$

Por el lema anterior, lo anterior implica que

$$|(f \cdot g)(x) - L \cdot M| < \varepsilon.$$

Lo anterior indica que el límite existe e igual al valor que buscábamos. □

Lema 1.10. *Sea $\varepsilon > 0$ y sean y y y_0 números cualesquiera. Si $y_0 \neq 0$ y*

$$|y - y_0| < \text{mín}\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right)$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right|.$$

Demostración. Por una lado tenemos que

$$|y_0| - |y| \leq |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

y por tanto

$$\frac{|y_0|}{2} < |y|,$$

por lo que $y \neq 0$ y además

$$\frac{1}{|y|} < \frac{1}{|y_0|}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| &= \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} \\
&< \frac{2}{|y_0|} \frac{1}{|y_0|} \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.11. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ $L \neq 0$, *entonces*

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L| < \min\left(\frac{|M|}{2}, \frac{\varepsilon|M|^2}{2}\right),$$

entonces por el lema anterior debemos tener que $f(x) \neq 0$ y además,

$$\left|\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon.$$

Esto significa que el límite existe y le corresponde el valor que buscábamos. $\square$

Uno de los usos frecuentes de los anteriores teoremas es por supuesto encontrar el límite de cualquier polinomio. Gracias a estos podemos calcularlo de manera inmediata ahora. No sólo eso, uno de sus usos más interesantes es la posibilidad de evaluar funciones en donde exista el límite pero sea imposible obtener una evaluación directa. Esto lo ilustraremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Probemos ahora que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2 - h}{h} = 2a - 1.$$

Procedamos usando la definición. Supongamos primero que $h \neq 0$ para determinar la primer expresión

$$\begin{aligned}(a+h)^2 - a^2 - h &= a^2 + 2ah + h^2 - a^2 - h\\ &= 2ah - h + h^2\\ &= (2a-1)h + h^2\\ &= (2a - 1 + h)h.\end{aligned}$$

Tomemos ahora $\varepsilon > 0$, proponemos $\delta = \varepsilon$. En ese caso si $0 < |h| < \delta$ debemos tener que

$$\begin{aligned}\left|\frac{(a+h)^2 - a^2 - h}{h} - (2a-1)\right| &= |2a - 1 + h - (2a-1)|\\ &= |h|\\ &< \delta\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Podemos sin embargo usar el teorema anterior notando que,

$$(a+h)^2 - a^2 - h = h^2 + h(2a-1) = h\left[h + (2a-1)\right],$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2 - h}{h} &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} h + 2a + 1\right) \\
&= \lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} 2a + 1 \\
&= 2a + 1
\end{aligned}$$

1.3. Algunos límites trigonométricos

En esta sección haremos uso de los teoremas que hemos probado en la sección pasada y al mismo tiempo lograremos describir un importante límite que involucra funciones trigonométricas. Comenzaremos utilizando la definición de límite para obtener un límite conocido y de ahí desprender algunos otros, entre ellos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Teorema 1.12.

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que la función seno es estrictamente creciente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ por lo que si $|x| < \pi/2$, entonces,

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| < |\operatorname{sen}(x)|.$$

Basta entonces elegir $\delta = \min(\pi/2, \varepsilon)$, pues si $0 < |x| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| &< |\operatorname{sen}(x)| \\
&< |x| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que el límite existe y es 0. □

Este límite anterior abrirá la puerta para calcular otros límites que involucren funciones trigonométricas. Proponemos ahora un límite más.

Teorema 1.13.

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1.$$

Demostración. Podemos expresar

$$\cos(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

y así hacer uso de los teoremas de la suma y producto de límites de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \cos(x) &= \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} 1 - \left(\lim_{x\to 0} 2\right)\left(\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \\
&= 1 - 2 \cdot 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.14.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1.$$

Demostración. Es una aplicación directa del teorema del inverso del límite, utilizando el resultado anterior, i.e.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{\lim_{x\to 0} \cos(x)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Hemos llegado a un punto donde podremos derivar sin mucho trabajo un límite que en principio es complicado suponer a donde tiende, sin embargo y con todo el trabajo que hemos hecho, resultará sencillo y no involucraremos la definición de límite, solamente resultados que ya hemos expuesto.

Teorema 1.15.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Demostración. Debemos recordar que para $0 < x < \pi/2$

$$\cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Podemos ir más allá para afirmar que lo mismo sucede cuando $\pi/2 < x < \pi/2$. Esto se debe a que $\cos(-x) = \cos(x)$ y

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}.$$

Podemos entonces usar el teorema de la intercalación usando el teorema anterior y su corolario. Este teorema implica sencillamente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

□

Terminamos esta sección presentando un ejemplo de la utilidad del resultado anterior.

Ejemplo. Calculemos el siguiente, con $b \neq 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$$

En ahora relativamente sencillo, usando el ejercicio 1.18, realizar la estimación:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}} \\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

1.4. Otros tipos de límites

Existen modificaciones que se pueden realizar a la definición de límite para poder interactuar diferente con algunas clases de funciones. Por ejemplo, podríamos tener que una función sólo está definida para números $x \geq a$ para algún número a, en ese caso el límite tradicional no sería aplicable. Sin embargo, podemos proponer la siguiente función de límite para evaluar si en la región que está definida, la función tiende hacia algún número.

Definición 1.2. Se dice que *el límite de la función f tiende hacia L en a por la derecha*, si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ de forma que,$0 < x - a < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por otro lado, se dice que *el límite de la función f tiende hacia L en a por la izquierda*, si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que $0 < a - x < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Denotaremos que el límite de la función f tiende hacia L en a por la derecha, escribiendo

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

De manera similar, denotaremos que el límite de la función f tiende hacia L en a por la izquierda, escribiendo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Este concepto está vinculado al del límite original de la siguiente manera

Teorema 1.16. *Tenemos que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

si y sólo si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Podemos de igual forma pensar de manera formal en el infinito. Habrá que tener cuidado con la siguiente definición, pues podemos vernos tentados a concluir que ∞ es un número. Por el contrario, se trata sólo de una manipulación formal.

Definición 1.3. Decimos que *el límite de f tiende hacia L en ∞*, cuando para toda $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que, si $x > M$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. De igual forma afirmamos que *el límite de f tiende hacia L en $-\infty$*, cuando para toda $\varepsilon > 0$ existe $M < 0$ tal que, si $x < M$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Para denotar que el límite de f tiende hacia L en ∞, escribiremos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Mientras que el límite de f tiende hacia L en $-\infty$, escribiremos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ejemplo. Podemos usar la definición anterior para evaluar un límite que ha resultado problemático:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y elijamos $M = 1/\varepsilon > 0$, si $x > M$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x}\right| &= \frac{1}{x} \\ &< \frac{1}{M} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ejemplo. Podemos usar la definición para obtener el siguiente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{5x^2+3x+1}.$$

Para encontrar este límite, supongamos que $x > 1$ para obtener que

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{5x^2+3x+1} &= \frac{2x+1}{5x^2+3x+1} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-1}} \\ &= \frac{2+x^{-1}}{5x+3+x^{-1}} \\ &< \frac{3}{5}x^{-1}. \end{aligned}$$

En ese caso podemos tomar $M = \text{máx}(1, 3/(5\varepsilon))$, pues si $x > M$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x+1}{5x^2+3x+1}\right| &< \frac{3}{5}x^{-1}\\ &< \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\varepsilon\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

De lo que podemos simplemente afirmar que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{5x^2+3x+1} = 0.$$

Este tipo de límite guarda también relación con la no existencia del límite clásico como una transformación de variable indicada en el siguiente teorema.

Teorema 1.17. *El* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *si y sólo si* $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$. *De la misma forma* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *si y sólo si* $\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $M > 0$ tal que para todo $y > M$, entonces

$$|f(y) - L| < \varepsilon.$$

Basta entonces elegir $\delta = 1/M$, en ese caso si $0 < x < \delta$ entonces $1/x > M$ y en consecuencia

$$\left|f\left(\frac{1}{x}\right) - L\right| < \varepsilon,$$

lo anterior significa que

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Por el contrario, supongamos $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < y < \delta$, se tiene

$$\left|f\left(\frac{1}{y}\right) - L\right|.$$

De manera análoga al párrafo anterior podemos elegir $M = 1/\delta > 0$, pues en caso de tener $x > M$, $1/x > \delta$ por lo que

$$\left|f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) - L\right| = |f(x) - L| < \varepsilon.$$

□

Definición 1.4. Afirmamos que el límite de f tiende hacia ∞ en a, si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para todo x si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M$. De la misma forma f tiende hacia $-\infty$ en a, si para todo M existe $\delta > 0$, tal que para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) < N$.

Denotamos la anterior definición afirmando

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

y por

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Ilustremos este concepto con un par de ejemplos.

Ejemplo. Afirmamos que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Sea $M > 0$. Tomemos

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{M}\right),$$

en ese caso si $0 < |x| < \delta$, entonces $|x| < 1$ y $0 < x^2 < |x|$ como además $|x| < 1/M$, entonces

$$\frac{1}{x^2} > M,$$

lo que satisface la definición que hemos proveído y así afirmar

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Vamos por último a dejar sin definición algunos otros conceptos de límite a razón que bajo estas definiciones no debería de existir problema en encontrar el significado preciso de expresiones como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

o

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Usando el límite L propuesto, demuestra o refuta que efectivamente se trata del límite hallando $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

1. $\lim_{x \to 0} 1 = 1$.
2. $\lim_{x \to 2} 3 - x = 2$.
3. $\lim_{x \to 7} 2x + 1 = 15$.
4. $\lim_{x \to 0} 2x + 1 = 1$.
5. $\lim_{x \to 2} x^2 - x = 2$.
6. $\lim_{x \to 2} x^2 + x = 12$.
7. $\lim_{x \to 5} x^3 + x^2 - 2x = 140$.
8. $\lim_{x \to 0} x^3 + 2x + 3 = 3$.

Ejercicio 1.2. Demuestra que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Ejercicio 1.3. Demuestra que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a} |f(x) - L| = 0$.

Ejercicio 1.4. Prueba que, si $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Ejercicio 1.5. Suponga las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x > 0 \\ x-5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -5 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestra que ni $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$ existen, pero $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x)$ existe y es 0.

Ejercicio 1.6. Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(2x)$.

Ejercicio 1.7. Demuestra que el límite en 0 de la función $f(x) = 1/x^2$ no existe.

Ejercicio 1.8. En este ejercicio se probará que el límite en $1/2$ de la función $f(x) = 1/(2x-1)$ no existe.

1. Para un número L cualquiera, demuestra que existe un número K tal que

$$|L| + 1 = \frac{1}{2K-1}.$$

2. Demuestra que $x \leq K$ implica $|f(x)| \geq |L| + 1$.
3. Exhibe un número x tal que $|x - 1/2| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq 1$.
4. Concluye que el límite de la función no existe eligiendo $\varepsilon = 1$.

Ejercicio 1.9. Da un ejemplo de una función f para la cual sea falsa la afirmación: si $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x - a| < \delta/2$.

Ejercicio 1.10. Da un ejemplo de una función f de forma que $\lim_{x\to a} |f(x)|$ exista pero no $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejercicio 1.11. Demuestra que si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ para algún número L entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Ejercicio 1.12. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x-a).$$

Ejercicio 1.13. Demuestra $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

Ejercicio 1.14. Construye un ejemplo para el cual $\lim_{x\to a} f(x^2)$ existe pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejercicio 1.15. Suponga que $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Demuestra que

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x),$$

siempre que los límites involucrados existan.

Ejercicio 1.16. Demuestrese que si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces el

$$\lim_{x\to 0} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Podemos generalizar lo anterior. Suponga que para una función h existe un número M tal que

$$|h(x)| \leq M,$$

si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, demuestra que

$$\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0.$$

Ejercicio 1.17. Sea c un número distinto de 0. Demuestra que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(cx)}{x} = c.$$

Ejercicio 1.18. Sea c un número cualquiera. Demuestra que, siempre que exista algunos los límites,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(cx).$$

Ejercicio 1.19. Sea c un número distinto de 0. Demuestra que, siempre que exista alguno de los límites,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a/c} f(cx).$$

Ejercicio 1.20. Sea $x_0 \in (a, b)$. Si

$$c < f(x) < d$$

para todo $x \neq x_0$ en (a, b) y si existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$, prueba que

$$c \leq \lim_{x\to x_0} f(x) \leq d.$$

Ejercicio 1.21. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.
2. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.
3. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.
4. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.
7. $\lim_{x\to a} \frac{x^3-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.
8. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.
9. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

Ejercicio 1.22. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$$

Ejercicio 1.23. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$.

Ejercicio 1.24. Encuentra los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 3} \frac{4}{(x-3)^2}$.
2. $\lim_{x\to 4} \frac{x+3}{x^2-16}$.
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x+3}$.
4. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$.
5. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2+3}$.
6. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^3}$.
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.
8. $\lim_{h\to \infty} \frac{3x+2}{x^2+3x+1}$.
9. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{3x^2+2}$.
10. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x+1}$.

Ejercicio 1.25. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

existe si y sólo si $m \geq n$. (Sugerencia: El límite fácil es

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0;$$

realiza las operaciones necesarias para mostrar que esta es la única posibilidad).

Ejercicio 1.26. Demuestra que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h^2)$$

.

Ejercicio 1.27. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x)$$

.

Ejercicio 1.28. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0^+} f(-x)$$

.

Ejercicio 1.29. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

.

Ejercicio 1.30. Demuestra que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Ejercicio 1.31. Demuestra que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Ejercicio 1.32. Proporciona una definición para las expresiones

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
2. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.
3. $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.
4. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$.

Ejercicio 1.33. Demuestra que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \infty.$$

Ejercicio 1.34. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(-x).$$

2. Continuidad

2.1. Definiciones

Definición 2.1. Una función f es continua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es continua por no estar siquiera definida en 0 y lo mismo pasa para $g(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$. Sin embargo, el límite para g existe como hemos probado, en ese caso podemos definir la función

$$G(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Por lo que G resulta continua en todo punto.

La función

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

no es continua para cada punto $a \neq 0$ y continua en 0.

2.2. Algunos resultados elementales

Teorema 2.1. *Si f y g son continuas en a, entonces*

1. *$f + g$ es continua en a.*
2. *fg es continua en a.*
3. *Si $f(a) \neq 0$, entonces $1/f$ es continua en a.*

Demostración. Es una consecuencia directa de los teoremas 1.7, 1.9 y 1.11. $\square$

Podemos interpretar en la definición de continuidad una consecuencia inmediata de esta. Si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Esto, a razón de tener que en $x = a$, se verifica ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Teorema 2.2. *Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.*

Demostración. Deseamos probar que

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = f(g(a)),$$

esto bajo las hipótesis

$$\lim_{x\to a} g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to g(a)} f(x) = f\left(g(a)\right).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Del límite de f podemos garantizar que existe δ_0 de forma que, si $0 < |y - g(a)| < \delta_0$ entonces

$$|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Por hipótesis también debemos tener que existe δ_1 de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces

$$|g(x) - g(a)| < \delta_0.$$

Tomemos $\delta = \delta_1$, entonces, si $0|x - a| < \delta$, tenemos $|g(x) - g(a)| < \delta_0$. En ese caso se debe tener

$$|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Esto es lo que se buscada originalmente. $\square$

Teorema 2.3. *Sea f una función continua en a de forma que $f(a) > 0$. En ese caso, existe $\delta > 0$ de forma que, si $|x - a| < \delta$ entonces $f(x) > 0$.*

Demostración. Como f es continua en a, entonces debe existir $\delta > 0$ de forma que $|x - a| < \delta$ implica que

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}.$$

Como $f(a) - f(x) \leq |f(x) - f(a)|$, lo anterior implica que

$$f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0.$$

$\square$

Podemos extender nuestra definición de continuidad a intervalos abiertos sin mucho trabajo. Sin embargo para un intervalo cerrado será un poco más elaborado pero no imposible, presentamos las dos posibilidades.

Definición 2.2. Diremos que f *es continua en* (a, b) si es continua para cada $x \in (a, b)$. Por otro lado diremos que f *es continua en* $[a, b]$ si

1. f es continua en (a, b).
2. $\lim_{x \to a^+} = f(a)$.
3. $\lim_{x \to b^-} = f(b)$.

3. Tres teoremas fuertes

3.1. Enunciados de los teoremas

En [Spi12] se proponen tres teoremas de lo que se pospone su prueba. Para poder demostrarlos se requiere una propiedad adicional. A continuación los presentamos y después analizamos sus implicaciones.

Teorema 3.1. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $x \in [a, b]$ con $f(x) = 0$.*

Teorema 3.2. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe N tal que $f(x) \leq N$ para todo $x \in [a, b]$.*

Teorema 3.3. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

3.2. Teorema del valor intermedio

El teorema 3.1 aunque parecería limitado, en realidad es un teorema muy general. No debemos engañarnos, el siguiente teorema parecería un resultado general de 3.1 sin embargo no es más que un caso que deriva de este.

Teorema 3.4. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. Tomamos la función $g = f - c$, observando que g es continua en $[a,b]$ de la misma forma que f lo es. Además

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - c \\ &< 0 \\ &< f(b) - c \\ &= g(b); \end{aligned}$$

en ese caso podemos aplicar el teorema 3.1, para garantizar que existe $x \in [a,b]$ tal que $g(x) = 0$, est por definición significa simplemente que $f(x) - c = 0$ de lo que sigue el resultado. □

Teorema 3.5. *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. De manera similar al teorema anterior tomamos ahora $g = -f$, función que debe resultar continua en $[a,b]$. Además,

$$g(a) = -f(a) < -c < -f(b) = g(b),$$

de lo que podemos utilizar el teorema anterior para concluir que existe $x \in [a,b]$ tal que $g(x) = -c$ o en otras palabras $-f(x) = -c$ de lo que sigue el resultado. □

Los teoremas 3.4 y 3.5 afirman que cualquier valor que suceda entre los extremos de un intervalo puede ser alcanzado en ese intervalo a condición que la función involucrada sea continua. A menudo a este resultado compuesto entre 3.4 3.5 se le denomina *Teorema del valor intermedio.*

3.3. Teorema del acotamiento

Teorema 3.6. *Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe N tal que $f(x) \geq N$ para todo $x \in [a,b]$.*

Demostración. La función $g = -f$ es continua en $[a,b]$ por la hipótesis de continuidad sobre f. Por el teorema 3.2, debemos tener que existe N tal que $g(x) \leq N$ para todo $x \in [a,b]$. En otras palabras, $-f(x) \leq N$ o lo que es lo mismo $f(x) \geq -N$ para todo $x \in [a,b]$. De lo que sigue el resultado. □

Se dice que una función está acotada superiormente en $[a,b]$ si para todo $x \in [a,b]$, $f(x) \leq N$ para algún N; y que está acotada inferiormente si para todo $x \in [a,b]$, $f(x) \geq N$ para algún N. En ese sentido los teorema 3.2 y **??** dicen que una función está acotada superior e inferiormente cuando sea continua en $[a,b]$. Podemos obtener un resultado conjugado de estos dos teoremas. Sean N_1 y N_2 una cota superior y una cota inferior respectivamente, de una función f continua en $[a,b]$. En ese caso

$$N_2 \leq f(x) \leq N_1$$

para todo $x \in [a, b]$. Si se toma $N = \text{máx}(|N_1|, |N_2|)$ entonces para todo $x \in [a, b]$,

$$-N \leq f(x) \leq N,$$

o lo que es lo mismo

$$|f(x)| \leq N.$$

Esto amerita escribirlo como un resultado mayor. Este resultado es en ocasiones llamado *el teorema del acotamiento para funciones continuas.*

Teorema 3.7. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$, i.e., existe N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo $x \in [a, b]$.*

3.4. Raíces y polinomios

Exploraremos ahora un resultado que hemos pospuesto quizá demasiado tiempo. La existencia de raíces cuadradas. Formularemos ahora la definición de raíz.

Definición 3.1. *Una raíz cuadrada del número* α es un número no negativo de forma que $x^2 = \alpha$.

Primero debemos observar que los números negativos no admiten una raíz cuadrada pues ningún cuadrado de un número real es negativo. Ahora, queda en el aire el hecho que si α posee una raíz ésta debe ser única. Supongamos que x y y son ambos raíces de α, en ese caso $x^2 = \alpha = y^2$. También

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0,$$

por lo que una de dos o $x = y$ o $x = -y$; pero al ser ambos positivos la segunda igualdad es imposible, por lo que si α admite una raíz ésta debe ser única. Formulamos lo anterior en forma de lema.

Lema 3.8. *Si α admite una raíz cuadrada, entonces la raíz es única.*

Teorema 3.9. *Todo número $\alpha \geq 0$ admite una única raíz cuadrada.*

Demostración. Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, el número admite una raíz a través de los número $x = 0$ y $x = 1$. Supongamos entonces que $\alpha > 0$ y $\alpha \neq 1$, y definamos

$$b = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < 1 \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

En ese caso debemos tener que $0 < \alpha < b^2$. Si tomamos $f(x) = x^2$ entonces lo anterior se traduce en

$$f(0) < \alpha < f(b).$$

Usando el teorema 3.1 podemos concluir que existe $x \in [0, b]$ de forma que $f(x) = \alpha$ o lo que es lo mismo que $x^2 = \alpha$. Como x es positivo lo anterior garantiza que x es una raíz de α como buscábamos. $\square$

Podemos de hecho averiguar aún más acerca de raíces ahora que poseemos estos teoremas. Podemos preguntarnos en general sobre un polinomio

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Comencemos indagando que pasa cuando n es impar.

Teorema 3.10. *Si n es impar, entonces cualquier polinomio*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

admite una raíz, i.e., existe un número y tal que $f(y) = 0$.

Demostración. Supongamos primero algún número $x \neq 0$, podemos escribir

$$f(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Estudiemos el segundo término del producto a la derecha de la igualdad. Sabemos que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|x^n|}.$$

Ahora, si $M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$ y $|x| \geq M$ entonces para $0 < k \leq n$, debemos tener $|x^k| \geq |x| \geq 2n|a_{n-k}|$ o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{x^k} \leq \frac{1}{2n|a_{n-k}|},$$

en ese caso

$$\frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|x^n|} \leq \frac{|a_{n-1}|}{2|a_{n-1}|} + \cdots + \frac{|a_0|}{2n|a_0|} = \frac{1}{2}.$$

Bajo lo anterior podemos afirmar que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{1}{2}$$

y en consecuencia

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Podemos entonces afirmar con este argumento que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}$$

siempre que $|x| \geq M$.

Elegimos

$$x_1 = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$$

y

$$x_2 = \min(-1, -2n|a_{n-1}|, \ldots, -2n|a_0|),$$

en ese caso tendríamos en ambos casos que $|x_1| \geq M$ y $|x_2| \geq M$, por lo que el resultado final del párrafo anterior es válido para ambos. Por un lado $x_1 > 0$ por lo que $x_1^n > 0$ y por otro lado $x_2 < 0$ por lo que $x_2^n < 0$ al ser n impar. Obtenemos las siguientes desigualdades:

$$0 < \frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \cdots + \frac{a_0}{x_1^n}\right) = f(x_1)$$

y

$$f(x_2) = x_2^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \cdots + \frac{a_0}{x_2^n}\right) \leq \frac{x_2^n}{2} < 0.$$

En resumen

$$f(x_2) < 0 < f(x_1);$$

del teorema 3.1 podemos concluir que debe existir un número $y \in [x_2, x_1]$ tal que $f(y) = 0$. Esto prueba el resultado. □

Teorema 3.11. *Si n es par, entonces para un polinomio*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

existe y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.

Demostración. Retomamos el segundo párrafo de la prueba del teorema anterior tomando $M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$. Afirmamos anteriormente,

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}$$

siempre que $|x| \geq M$ y como $x^n \geq 0$ al ser n par, podemos además concluir

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x)$$

Definimos ahora

$$b = \max(M, \sqrt[n]{|2f(0)|})$$

En ese caso debemos tener que $b^n \geq 2f(0)$ y si $x \geq b \geq M$, entonces,

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

De la misma forma si $x \leq -b$, entonces $|x| > b$ y consecuencia

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{(-b)^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

En resumen, si $x \leq -b$ o $x \geq b$ entonces $f(x) \geq 0$. Además como en el intervalo $[-b, b]$ debe existir un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in [-b, b]$, en particular $f(y) \leq f(0)$. Ahora, para todo $x \in \mathbb{R}\backslash[-b, b]$, obtenemos que $f(y) \leq f(0) \leq f(x)$, por lo que $f(y) \leq f(x)$ para todo número real x. Esto último es el resultado que buscábamos probar. □

Teorema 3.12. *Si n es par, entonces para un polinomio*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

existe m tal que:

1. *Si $c < m$ entonces no existe x_0 tal que $f(x_0) = c$.*
2. *Si $c \geq m$ entonces existe x_0 tal que $f(x_0) = c$.*

Demostración. Por el teorema anterior, debe existir y tal que, $f(y) \leq f(x)$ para todo x. Elegimos $m = f(y)$. En ese caso si $c < m$ entonces debemos tener que $c \neq f(x)$ para todo x, de lo que sigue el primer enunciado. Si, por otro lado, $c = m$, entonces $f(y) = c$, además si $c > m$, entonces $f(y) < c$. Sea b un número tal que $b > y$ y $f(b) > c$, en ese caso, de acuerdo al teorema 3.4, podemos encontrar x_0 tal que $f(x_0) = c$. Esto muestra el resultado. $\square$

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Para cada uno de los siguientes funciones polinómicas encuentra un entero n tal que $f(x) = 0$ para $n \leq x < n + 1$.

1. $x^3 - x + 3$.
2. $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
3. $x^5 + x + 1$.
4. $4x^2 - 4x + 1$.

Ejercicio 3.2. Suponga que f es continua en $[-1, 1]$ y que $x^2 + f(x)^2 = 1$ para todo x. Demuestra que o $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Ejercicio 3.3. Suponga que f y g son continuas y que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demuestra que sólo habrá dos posibilidades que $f = -g$ o que $f = g$.

Ejercicio 3.4. Sea f el polinomio,

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0.$$

Muestra que para cada número c, existe b de forma que $f(b) > c$ (Sugerencia: ¿Qué pasa con los números $x > \max(1, 2|c|)$?).

Ejercicio 3.5. Suponga que f y g es continua en $[a, b]$ y $f(a) < g(b)$ pero $g(b) < f(b)$. Demuestra que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

Ejercicio 3.6. Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y que $f(x) \in [0, 1]$ para cada x. Demuestra que $f(x) = x$ para algún x.

Ejercicio 3.7. Sea f el polinomio,

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0.$$

Muestra que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Ejercicio 3.8. Suponga que f es continua en $[0,1]$ y que $f(0) = f(1)$. Sea n un número natural. Encuentra un número x tal que

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Sugerencia: Considere la función

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

4. Cotas superiores mínimas

4.1. Axioma del supremo

Existe una propiedad que hace falta describir de los números reales. Para formularla, es necesario presentar algunos conceptos.

Definición 4.1. Sea A un conjunto de números reales. Decimos que un número M es *una cota superior de* A si para todo $x \in A$, se tiene $x \leq M$. Si un conjunto tiene un cota superior decimos que está acotado superiormente. Denotamos al conjunto cotas superiores de A por el símbolo A^u.

Debemos notar que esta definición no obliga a que el número M sea un elemento del conjunto original y que el conjunto A puede ser vacío. Por ejemplo $\mathbb{N}^u = \varnothing$ y lo mismo $\mathbb{R}$. Por otra parte, siempre que el conjunto admita una cota superior, podríamos evaluar si entre éstas es posible elegir un mínimo. Tendremos primero que definir un mínimo.

Definición 4.2. Sea A un conjunto de números reales. *Un mínimo de* A es un número $a \in A$ de forma que, para todo $x \in A$, tenemos $a \leq x$.

Proposición 4.1. *Los elementos mínimos si existen, son únicos.*

Demostración. Supongamos que A tiene como elementos mínimos a los números s y t. Debemos notar que tanto s como t deben ser por definición elementos de A. Como s es mínimo eso significa que $s \leq t$ y por la misma razón $t \leq s$, por la propiedad de tricotomía de los números reales, la única posibilidad entonces tener $s = t$. En ese caso no es posible tener dos elementos mínimo en un conjunto. □

Estamos ahora en posición de hablar con precisión del concepto de la mínima cota superior, i.e., el elemento mínimo del conjunto del conjunto de cotas superior de un conjunto. Debemos preguntarnos en que casos existen estas cotas. Por ejemplo, cuando un conjunto no tenga al menos una cota superior no podemos hablar de un mínimo así que para hablar de una mínima cota superior el conjunto debe estar acotado superiormente. Sin embargo, debemos notar que usando un argumento por vacuidad, podemos afirmar

$$\varnothing^u = \mathbb{R},$$

por lo que tampoco tendríamos garantía que un conjunto acotado superiormente tenga una mínima cota superior; a pesar de esto no es difícil convencernos que el caso de los números reales cualquier conjunto acotado y no vacío, debería admitir una mínima cota superior.

Propiedad 13 (Axioma del supremo)**.** Cualquier conjunto no vacío y acotado superiormente admite una mínima cota superior.

Definición 4.3. A la mínima cota superior de un conjunto A, lo llamamos *el supremo de* A y la denotamos por $\sup A$.

Teorema 4.2. *Para cualquier* $\epsilon > 0$ *existe un número natural* n *tal que*

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Demostración. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo n natural, tenemos $1/n \geq \epsilon$. Por tanto $n \leq 1/\epsilon$ para todo natural n. Pero esto significaría que $1/\epsilon$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ lo que es una contradicción. □

Esta propiedad es la propiedad que faltaba para distinguir a los números reales de los racionales. Pero fundamentalmente sirve para demostrar los teoremas de la section anterior que repercuten en muchos de los resultados que presentamos para continuidad. Presentamos de nueva cuenta los teoremas y sus demostraciones.

4.2. Demostraciones a los teoremas fuertes

Lema 4.3. *Sea* $h > 0$ *y sea* A *un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, entonces existe* $x_0 \in A$ *tal que*

$$x_0 > \sup A - h.$$

Demostración. Procedemos por contradicción, si para todo $x \in A$, tenemos $x \leq \sup A - h$ entonces $\sup A - h$ es una cota superior con $\sup A - h < \sup A$ lo que es una contradicción. En ese caso debe existir un elemento $x_0 \in A$ de forma que $x_0 > \sup A - h$. □

Teorema (3.1)**.** *Si* f *es continua en* $[a, b]$ *y* $f(a) < 0 < f(b)$*, entonces existe* $x \in [a, b]$ *con* $f(x) = 0$.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ y } f(x) < 0\},$$

para el cual definimos $\alpha = \sup A$. Primero debemos notar al ser f continua en $[a, b]$ y tener $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ deben existir (ejercicios y) números δ_1 y δ_2 de forma que, si $0 < x - a < \delta_1$, entonces $f(x) < 0$ y si $0 < b - x < \delta_2$ entonces $f(x) > 0$. Esto quiere decir que

$$a + \delta_1 \leq \alpha \leq b - \delta_2,$$

y en consecuencia

$$a < \alpha < b.$$

Deseamos probar que $f(\alpha) = 0$ para esto supondremos que $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$ son situaciones imposibles.

Supongamos que $f(\alpha) < 0$, en ese caso por el teorema 2.3, debe existir $\delta > 0$ de forma que si $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ entonces $f(x) < 0$. Pero al tomar $y = \alpha + \delta/2$ es un número descrito en el intervalo anterior, eso quiere decir que $\alpha < y < \alpha + \delta$ por lo que $f(y) < 0$ pero esto afirmaría que $y \in A$ siendo un número más grande que α por lo que deberíamos tener $y \leq \alpha$ de lo que deriva una contradicción.

Supongamos ahora que $f(\alpha) > 0$. En ese caso debe existir un número $\delta > 0$ de forma que si $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$, entonces $f(x) > 0$. Ahora, de acuerdo con el lema 4.3 debe existir un número $y \in A$ tal que $\alpha - \delta < y \leq \alpha$ pero esto quiere decir que $f(y) < 0$ lo cual es una contradicción pues $f(y) > 0$ y $f(y) < 0$ al mismo tiempo.

Por la propiedad de tricotomía, la única posibilidad entonces es $f(\alpha) = 0$ por lo cual el resultado del teorema sigue. □

Lema 4.4. *Si f es continua en a, entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en el intervalo $a - \delta, a + \delta$.*

Demostración. Por hipótesis, debe existir $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < 1$. De esto sigue que

$$f(x) < f(a) + 1.$$

para todo $|x - a| < \delta$. De lo anterior podemos afirmar el resultado al notar que $|x - a| < \delta$ si y sólo si $x \in (a - \delta, a + \delta)$. □

Teorema (3.2)**.** *Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ entonces f está acotada superiormente en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración. Sea

$$A = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ está acotada superiormente en } [a, x]\}.$$

Primero debemos notar que $a \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$. Además $b \leq x$ para cada $x \in A$ por lo que A está acotado. Sea $\alpha = \sup A$, mostraremos primero que $\alpha = b$. Supongamos que $\alpha < b$.

Si $a < \alpha$ por el lema 4.4, existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Además, por el lema 4.3, debe existir $y_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < y_0 \leq \alpha$, y si también tomamos algún $\alpha < y_1 < \alpha + \delta$, podemos afirmar dos cosas: primero, que$f$ está acotada en $[a, y_0]$ y segundo que f está acotada en $[y_0, y_1]$ y por tanto f debe estar acotada en $[a, y_1]$, lo que indica que $y_1 \in A$, pero eso implica que $\alpha \geq y_1$ lo que es una contradicción.

Si $a = \alpha$, entonces debe existir $\delta > 0$ tal que f está acotada en $[a, a + \delta)$ basta entonces tomar $y_1 \in (a, a + \delta)$ para concluir que $y_1 \in A$ lo que de nueva cuenta deriva en una contradicción.

Ahora, $a < \alpha$ y $a = \alpha$ son las únicas posibilidades y ambas derivan en contradicción, por lo que debemos concluir que $\alpha = b$. Ahora, debe existir $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(b-\delta, b]$; por el lema 4.3 debe existir $b - \delta < y \leq b$ de manera que f está acotada en $[a, y]$ y también en $[y, b]$ por tanto f está acotada en $[a, b]$. $\square$

Teorema (3.3)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Definimos el conjunto A como

$$A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Por el teorema 3.2, debemos tener que f está acotada en $[a, b]$, entonces A está acotado y además debe ser también diferente del vacío. Sea $\alpha = \sup A$. Queremos mostrar que $\alpha = f(y)$ para algún $y \in [a, b]$.

Supongamos que para todo $y \in [a, b]$ entonces $\alpha \neq f(y)$. Entonces, la función definida como

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$$

es continua en $[a, b]$. Vamos a mostrar que g no está acotada en $[a, b]$ contradiciendo el resultado del teorema anterior. Sea M un número cualquiera, según el lema 4.3 debe existir un número $f(x_0) \in A$ tal que $f(x_0) > \alpha - 1/M$ en otras palabras $g(x_0) > M$ por lo que g no está acotada alcanzado la contradicción que buscábamos. Esto quiere decir que debe existir $y \in [a, b]$ de forma que $\alpha = f(y)$. $\square$

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Encuentra la cota superior mínima (si existe) de los siguiente conjuntos

1. $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\left\{x \mid x^2 + x + 1 \geq 0\right\}$.
3. $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\}$.
4. $\left\{x \mid x^2 + x + 1 < 0\right\}$.

Ejercicio 4.2. Prueba que el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene una cota superior.

Ejercicio 4.3. Prueba que el conjunto $\mathbb{R}$ no tiene una cota superior.

Ejercicio 4.4. Define, en analogía con el concepto de cota superior, el concepto de cota inferior de un conjunto de números reales. De igual manera, define el concepto de máximo de un conjunto de número reales.

Ejercicio 4.5. Comprueba si el siguiente conjunto tiene máximo

$$\left\{x \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \text{ racional}\right\}.$$

Ejercicio 4.6. Podríamos pensar se requiere una propiedad adicional para garantizar la existencia de una máxima cota inferior para cualquier conjunto no vacío de números reales. Muestra que esto no es necesario usando el conjunto

$$-A = \{-a \mid a \in A\},$$

para mostrar que cualquier conjunto A no vacío y acotado inferiormente tiene un cota inferior.

Ejercicio 4.7. Supongamos A y B son conjuntos de números reales. Si $x \leq y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$, demuestra que $\sup A \leq \sup B$.

Ejercicio 4.8. Supongamos A y B son conjuntos de números reales acotados y no vacíos de números reales. Definamos el conjunto

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Demuestra que

$$\sup A + B = \sup A + \sup B.$$

Ejercicio 4.9. Suponga que f está acotada superiormente en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Demuestra que f está acotada superiormente en $[a, c]$.

Ejercicio 4.10. Sea f una función continua de forma que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y $f(a) > 0$. Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $x \in [a, a + \delta)$ entonces $f(x) > 0$. ¿Qué sucede si $f(a) < 0$?

Ejercicio 4.11. Sea f una función continua de forma que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

y $f(a) > 0$. Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $x \in (a - \delta, a]$ entonces $f(x) > 0$. ¿Qué sucede si $f(a) < 0$?

Ejercicio 4.12. Demuestra que si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en $[a, a + \delta)$.

Ejercicio 4.13. Demuestra que si $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en $(b - \delta, b]$.

Ejercicio 4.14. Supongamos que la función f está definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Si f está acotada superiormente en A, entonces para cualquier $B \subset A$, demuestra que f está acotada superiormente en B.

Referencias

[HLS90] Hasser, Norman B., LaSalle, Joseph P. y Sullivan, Joseph A.: *Análisis matemático. Curso de Introducción Vol. 1.* Editorial Trillas, 2ª edición, 1990.

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Cálculo Integral y Diferencial I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.