Semana 4: Otras operaciones con conjuntos

1. Producto cartesiano

Como hemos mencionado, el orden en que se describe un conjunto es irrelevante. Por ejemplo, el conjunto $\{1,2\}$ resulta idéntico al conjunto $\{2,1\}$. Sin embargo, en algunas situaciones es importante distinguir el orden en que se presentan los elementos.

Definición 4.1. Sean a y b elementos del conjunto universal. Se llama *la pareja ordenada de a y b*, al conjunto

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}\,.$$

Proposición 4.1. *Sean a, b, c y d elementos del conjunto universal. Entonces,*

$$(a,b) = (c,d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d.$$

Demostración. Si suponemos primero que $a = c$ y $b = d$ es inmediato admitir que las parejas (a,b) y (c,d) son iguales desde el punto de vista de conjuntos.

Supongamos ahora que $(a,b) = (c,d)$, entonces

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}\,.$$

Debemos notar que el conjunto al lado izquierdo de la igualdad contiene a los conjuntos $\{a\}$ y $\{a,b\}$ los cuales tienen en común solamente al elemento a; de la misma forma, el conjunto a la derecha de la igualdad contiene dos conjuntos que tienen en común solamente al elemento c. Usando la definición para la igualdad de conjuntos, lo anterior nos permite afirmar que $a = c$ y en consecuencia

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}\,.$$

Para probar $b = d$, distinguiremos dos casos:

- Supongamos primero que $b = a$. Entonces, $\{a\} = \{a,b\}$ por lo que tenemos

  $$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\}\}$$

  y por tanto

  $$\{\{a\},\{a,d\}\} = \{\{a\}\}\,.$$

  Ahora, por igualdad de conjuntos, debemos tener $\{a\} = \{a,d\}$ y por tanto $a = d$; en otras palabras $b = a = d$ tal como deseábamos.

- Supongamos ahora lo contrario, $b \neq a$. Entonces, b sólo pertenece a $\{a, b\}$ pero no al conjunto $\{a\}$. En ese caso, b es un miembro de $\{a, d\}$ y como $b \neq a$ debe ser $b = d$, justo como buscábamos.

En resumen, $a = c$ y $b = d$ como buscábamos. ■

La proposición anterior, describe la clase de cosas que esperaríamos de una pareja ordenada y a pesar de esto, es imposible leer la definición sin sentir desconfianza de su significado. El problema reside en descubrir propiedades accidentales de la definición, por ejemplo, al tener $\{a\} \in (a, b)$. Estas excentricidades son el precio a pagar por describir una pareja ordenada en el marco de la teoría de conjuntos y podrán ser ignoradas a conveniencia. Realmente la única propiedad que nos interesará es la descrita en la proposición y bien prodríamos haber usado ésta como la propiedad que define a las parejas ordenadas.

Definición 4.2. Sean A y B conjuntos. Definimos *el producto cartesiano de A y B* como el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Ejemplo. Para los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, el producto cartesiano es un conjunto formado por parejas ordenadas y descrito en su totalidad por

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

En una pareja ordenada (a, b), al elemento a se le denomina *primer componente de la pareja* o *primera coordenada de la pareja* y de manera similar al elemento b se le denomina *segundo componente de la pareja* o *segunda coordenada de la pareja*. De esta forma, podemos describir al conjunto $A \times B$ como aquel formado por todas las parejas ordenadas donde su primer componente es miembro de A y su segundo componente es miembro de B.

Proposición 4.2. *Sean A y B conjuntos cualquiera. Entonces, $A \times B = \varnothing$ si y sólo si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.*

Demostración. Supongamos primero que A o B son el conjunto vacío. En ese caso, si $(a, b) \in A \times B$, se debe cumplir $a \in A$ o $b \in B$. Lo anterior es imposible pues hemos dado como hipótesis que al menos uno de los dos es vacío, debemos entonces concluir que $A \times B$ no puede tener elementos. Supongamos ahora que tanto A como B son no vacíos, eso quiere decir que existen $a \in A$ y $b \in B$ de forma que $(a, b) \in A \times B$ mostrando con esto que $A \times B$ no es vacío. El resultado sigue entonces por contraposición. ■

Proposición 4.3. *Para cualesquiera conjuntos A, B y C,*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Demostración. Mostraremos el resultado usando dos contenciones. La primera igualdad se deduce como sigue: Si $(a, b) \in A \times (B \cup C)$ entonces $a \in A$ y $b \in B \cup C$. La segunda pertenencia, indica que $b \in B$ o $b \in C$, esto indica que $(a, b) \in A \times B$ o $(a, c) \in A \times C$, lo cual lleva a la definición de unión. Entonces,

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C).$$

Para mostrar la otra contención, supongamos $(a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C$, esto implica que $(a, b) \in A \times B$ o $(a, b) \in A \times C$. Por definición, lo anterior significa que $a \in A$ y, $b \in B$ o $binC$. Esto último se puede interpretar afirmando que $b \in B \cup C$ y en ese caso $(a, b) \in A \times (B \cup C)$. La segunda igualdad se puede mostrar usando un argumento análogo (inténtalo). ■

2. Conjunto potencia

Hasta ahora, ninguno de nuestros conceptos asociados a conjuntos, excluye la posibilidad de tener un conjunto cuyos elementos sean otros conjuntos. Conjuntos de esta naturaleza constituyen una clase muy peculiar y uno muy importante define una operación sobre conjuntos.

Definición 4.3. Sea A un conjunto. Se define *el conjunto potencia de* A como el conjunto

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

El conjunto 2^A, colecciona todos todos los subconjuntos de A. Es decir, $B \in 2^A$ si y sólo si $B \subseteq A$. En particular, los conjuntos $\varnothing$ y A son miembros de 2^A, mostrando con esto que 2^A no es vacío, sin importar cual conjunto A tomemos. Esto puede ser interpretado de manera alegórica, afirmando que el conjunto potencia de A es más grande en comparación con A.

Ejemplo. Si $A = \varnothing$, la situación resulta bastante sencilla al obtener $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$. Tampoco es difícil calcular el conjunto potencia de *un conjunto unitario*, i.e., un conjunto con un solo elemento,

$$2^{\{a\}} = \{\varnothing, \{a\}\};$$

o el conjunto potencia de un conjunto con dos elementos,

$$2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

A pesar de parecer sencillo, incrementar el número de elementos del conjunto, vuelve muy pronto inmanejable el conjunto potencia. Por ejemplo, el conjunto potencia de un conjunto con seis elementos, está formado por sesenta y cuatro conjuntos.

Proposición 4.4. *Sean A y B conjuntos. Entonces se cumplen:*

1. $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$.
2. $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$.
3. $B \subseteq A$ *implica* $2^B \subseteq 2^A$.

Demostración. Para probar 1, debemos notar que $S \in 2^A \cap 2^B$ si y sólo si $S \in 2^A$ y $S \in 2^B$ lo que sucede si y sólo si $S \subseteq A$ y $S \subseteq B$ lo que de igual forma sucede si y sólo si $S \subseteq A \cap B$ y por último esto sucede si y sólo si $S \in 2^{A \cap B}$. En otras palabras

$$2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}.$$

Para mostrar 2, suponemos que $S \in 2^A \cup 2^B$, esto quiere decir que $S \in 2^A$ o $S \in 2^B$ lo que implica que $S \subseteq A$ o $S \subseteq B$. De cualquiera de las posibilidades podemos concluir que $S \subseteq A \cup B$ por lo que $S \in 2^{A \cup B}$. En conclusión,

$$2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}.$$

Por último, para mostrar 3, suponemos que $B \subseteq A$ y $S \in 2^B$. Entonces, si$S \subseteq B$ debemos también tener $S \subseteq A$. En otras palabras $S \in 2^A$. Luego

$$2^B \subseteq 2^B.$$

■

3. Relaciones

En diversas situaciones, es indispensable relacionar elementos de un conjunto con otro. Por ejemplo, cuando afirmamos que un número es más grande que otro, establecemos una relación entre ellos, lo mismo que al describir una regla de correspondencia. Esta idea, aunque intuitivamente clara, requiere de precisión para evitar ambigüedades.

Definición 4.4. Sean A y B dos conjuntos. Por *una relación definida de A en B* entenderemos un subconjunto R del conjunto $A \times B$. Cuando tengamos el caso particular en que $B = A$, nos limitaremos a decir que *R es una relación definida en A*. Si $(a, b) \in R$ diremos que *a está relacionado con b a través de R* y en algunas ocasiones, simbolizaremos este hecho como aRb o $R(a, b)$.

Ejemplo. Una posible relación definida en $\mathbb{Z}$ es $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, -5), (3, -1)(4, -7)\}$. Otra posibilidad igual de legítima es $S = \{(-2, 1), (-3, 1), (4, 0), (5, 5)\}$.

El objetivo de esta definición es proveer un punto de corte conceptual que nos permite estudiar relaciones desde un punto de vista teórico. Un par de ejemplos en ese sentido se presentan a continuación y es importante constrastar su naturaleza con el ejemplo anterior.

Ejemplo. Para un conjunto cualquiera A, el conjunto

$$1_A = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\},$$

es una relación definida en A. A esta relación se le conoce como *la relación identidad en A*.

Ejemplo. En el conjunto $\mathbb{N}$ se puede decir que m está relacionado con n si y sólo si $n = m^2$. Lo anterior se puede traducir fácilmente a un conjunto expresando

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^2\}.$$

En ese conjunto viven parejas de la forma (m, m^2), esto quiere decir que mRn si y sólo si $n = m^2$, mostrando con esto que se trata de la relación de donde partimos.

Es posible encontrar algunas patologías usando esta definición, sin embargo no se sacrifica nada en admitirlas como posibilidades legítimas. Por ejemplo, si A y B son conjuntos cualquiera, entonces $\varnothing \subseteq A \times B$ por lo que $R = \varnothing$ es una relación definida de A en B. Esta relación es peculiar y se le conoce como *la relación vacía*.

Definición 4.5. Sea R una relación definida de A en B. Se definen los conjuntos

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \in A \mid (x, y) \in R \text{ para algún } y \in B\}$$

$$\mathrm{im}(R) = \{y \in B \mid (x, y) \in R \text{ para algún } x \in A\}$$

Al conjunto $\mathrm{dom}(R)$ se le llama *el dominio de R*, mientras el conjunto $\mathrm{im}(R)$ recibe el nombre de *la imagen de R*.

Ejemplo. Para la relación en $\mathbb{Z}$ definida como $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, -5), (3, -1)(4, -7)\}$ se tiene

$$\mathrm{dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$$

y

$$\mathrm{im}(R) = \{-7, -5, -1, 2, 3\}.$$

Podemos calcular el dominio y el rango de la relación vacía de manera relativamente sencilla pues estos resultan simplemente el conjunto vacío. De manera similar, se puede verificar sin problema que

$$\operatorname{dom}(1_A) = \operatorname{im}(1_A) = A.$$

Ejemplo. Para un conjunto cualquiera A, podemos definir *la relación de pertenencia de A*, como el conjunto

$$\epsilon_A = \{(x, Y) \in A \times 2^A \mid x \in Y\}.$$

El dominio de esta relación es simplemente A, pues para cualquier $a \in A$,

$$(a, \{a\}) \in \epsilon_A.$$

Por otro lado el rango de dicha relación es el conjunto $2^A \setminus \{\varnothing\}$, pues siempre que tomemos $S \in 2^A$ de forma que $S \neq \varnothing$, existirá un elemento $a \in S$ para el cual,

$$(a, S) \in \epsilon_A.$$

Definición 4.6. Sean R y S relaciones definidas de A en B y de B en C respectivamente. *La composición de R con S* es la relación

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}.$$

En la definición se usa al conjunto B como un conjunto pivote para relacionar elementos de A y C a condición que esto estén relacionados con el mismo elemento del conjunto B. En otras palabras si para una pareja $(a, b) \in R$ podemos encontrar una pareja $(b, c) \in S$, entonces $(a, c) \in S \circ R$.

Ejemplo. Sea $R = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ y $S = \{(1,0), (2,1), (3,2)\}$ relaciones definidas en $\mathbb{Z}$. Entonces las compisiciones resultan

$$S \circ R = \{(1,1), (2,2)\}$$

y

$$R \circ S = \{(2,2), (3,3)\}.$$

Esto en particular muestra que en general la composición no es conmutativa, i.e., $R \circ S \neq S \neq R$. De manera similar, podemos calcular

$$R \circ R = \{(1,3), (2,4)\}$$

y

$$S \circ S = \{(2,0), (3,1)\}$$

La composición entre relaciones presenta un sin número de propiedades, sin embargo una de las más relevantes es el hecho de ser asociativa como operación.

Teorema 4.5. *Sean $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset B \times C$ y $R_3 \subset C \times D$. Entonces,*

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1.$$

Demostración. Comencemos notando que, tanto $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ como $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ son relaciones definidas de A en D, por lo que el enunciado anterior tiene sentido.

Mostraremos primero que

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq (R_3 \circ R_2) \circ R_1.$$

Si $(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$, entonces existe $c \in C$ de forma que $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ y $(c, d) \in R_3$. Igualmente, existe un elemento $b \in B$ de forma que $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$ pues tenemos $(a, c) \in R_2 \circ R_1$. En tal caso, como c satisface que $(b, c) \in R_2$ y $(c, d) \in R_3$, debemos tener $(b, d) \in R_3 \circ R_2$. De la misma forma, como b satisface que $(a, b) \in R_1$ y $(b, d) \in R_3 \circ R_2$, debemos tener $(a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. En ese caso $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subset (R_3 \circ R_2) \circ R_1$.

La contención

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 \subseteq R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

se prueba de manera similar y en ese caso

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1. \qquad \blacksquare$$

Por útlimo, introduciremos un tipo especial de relación el cual exploraremos con mucho detalle durante el siguiente tema. Es importante familiarizarnos con ésta para evitar obstaculos durante el desarrollo de lo que denominaremos *teoría de funciones*.

Definición 4.7. Una relación f definida de A en B se dice *una función* si satisface:

1. $\mathrm{dom}(f) = A$.
2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$, entonces $b = b'$.

Ejemplo. Para el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, la relación $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 7)\}$ de A en A es una función al tener dom $= \{1, 2, 3\} = A$ y cada elemento de A aparece en una y sólo una pareja. Sin embargo, si tomamos f como una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ entonces f no es una función pues en ese caso $\mathrm{dom}(f) = \{1, 2, 3\} \neq \mathbb{Z}$.

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Para los conjuntos $A = \{3, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$ encuentra:

1. $A \times A$.
2. $A \times B$.
3. $B \times A$.
4. $B \times B$.

Ejercicio 4.2. Usando como referencia el ejercicio anterior, determina si es lo mismo $A \times B$ y $B \times A$.

Ejercicio 4.3. Usando los conjunto del ejercicio 4.1, encuentra:

1. $(A \times A) \cup (A \times B)$.
2. $A \cup (A \times B)$.

Ejercicio 4.4. Sean A y B conjuntos de forma que $A \neq B$. Si Z es un conjunto tal que $A \times Z = B \times Z$, demuestra que $Z = \varnothing$.

Ejercicio 4.5. Sean A y B conjuntos. Si $A \times B = A \times A$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 4.6. Para conjuntos A, B y C, demuestra que

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Ejercicio 4.7. Sean A, B, X y Y conjuntos. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, demuestra que $A \times B \subseteq X \times Y$. Reciprocamente, si $A \times B \subseteq X \times Y$ demuestra que $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

Ejercicio 4.8. Encuentra una pareja de conjuntos A y B de forma que

$$2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}.$$

Ejercicio 4.9. Si para dos conjuntos A y B se tiene $2^A = 2^B$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 4.10. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determina el dominio y la imagen de las siguientes relaciones definidas de A en A son funciones.

- $R_1 = \{(1,1), (2,3), (3,3)\}$.
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (2,3)\}$.
- $R_3 = \{(1,1), (2,3), (3,3)\}$.
- $R_4 = \{(1,3), (3,2), (2,2)\}$.

Ejercicio 4.11. Usando las relaciones del ejercicio 4.10 calcula las siguientes composiciones de relaciones.

- $R_1 \circ R_2$.
- $R_2 \circ R_1$.
- $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.
- $R_2 \circ R_1 \circ R_3 \circ R_4$.

Ejercicio 4.12. Para cada relación del ejercicio 4.10 determina si ésta es una función.

Ejercicio 4.13. Determina si las siguientes relaciones definidas de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ son o no funciones. Argumenta tu respuesta.

- $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2 + 7\}$.
- $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 = x\}$.
- $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 3x + 1\}$.
- $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Referencias

Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ridículamente baja de ocasiones, intentan pobremente aumentarlo. El único objectivo real (o imaginario) al que sirven, es preparar el curso de «Álgebra Superior I» impartido en la carrera de Actuaría en la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.