Semana 7: Continuidad

1. Funciones continuas

Definición 7.1. Una función f se dice *continua en a* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Comentario. Hay que tener en cuenta todas las cosas que deben cumplirse en la definición de continuidad. Primero el límite debe existir; segundo, la función debe tener en su dominio al número a; y tercero el límite debe coincidir con la evaluación. Entonces, podemos concluir que una función *no es continua* si sucede al menos una de las tres siguientes posiblidades:

- El $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.
- El número a no está en el dominio de f.
- Si el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y $f(a)$ esté definido, pero

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a).$$

Ejemplo. Conocemos varias funciones continuas en todo número. Una de ellas es $I_2(x) = x^2$ de la cual sabemos

$$\lim_{x \to a} I_2(x) = a^2 = I_2(a)$$

por lo que podemos concluir que es continua en todo número real.

Ejemplo. La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es continua en 0 por no estar siquiera definida en 0 y lo mismo pasa para $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$.

Ejemplo. Sabemos que la función seno es continua en 0 pues

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = 0 = \operatorname{sen}(0).$$

Es además continua en todo número real y para mostrarlo debemos considerar la siguiente igualdad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen}(a)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(a);$$

en ese caso, los teoremas fundamentales de límites garantizan que

$$\lim_{h \to a} \operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen}(a)\cos(0) + \operatorname{sen}(0)\cos(a) = \operatorname{sen}(a).$$

En otras palabras, para todo real a se satisface

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a).$$

La anterior igualdad muestra que la función seno es continua en todo número real. Además, un argumento similar muestra que la función coseno es también continua (pruébalo, es un ejercicio de la semana pasada).

Comentario. Podemos interpretar una consecuencia inmediata de la definición de continuidad: Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, se debe cumplir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Esto, a razón de saber que en $x = a$, se verifica ciertamente que $0 = |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Teorema 7.1. *Si f y g son continuas en a, entonces*

1. *$f + g$ es continua en a.*
2. *$f \cdot g$ es continua en a.*
3. *Si $f(a) \neq 0$, entonces $1/f$ es continua en a.*

Demostración. Es una consecuencia directa de los teoremas fundamentales de límites. ■

Ejemplo. No es difícil convencernos que la funciones constantes son continuas en todo punto, lo mismo que la funciones $I_k(x) = x^k$. Segun el lema lo mismo debe ser el producto entre éstas. Debe notarse que un polinomio $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, puede expresarse como la suma de tales funciones, pues si tomamos funciones $f_k(x) = a_k x^k$ (las cuales deben ser continuas en todo punto), entonces

$$f = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Esto quiere decir que un polinomio se puede expresar como la suma de funciones continuas en todo punto. Según el teorema anterior, esto implica que la función f debe ser igualmente continua en todo punto. En resumen, los polinomios son funciones continuas en todo número real.

Teorema 7.2. *Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.*

Demostración. Deseamos probar que

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(g(a)),$$

esto bajo las hipótesis

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to g(a)} f(x) = f\left(g(a)\right).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Del límite de f podemos garantizar que existe δ_0 de forma que, si $0 < |y - g(a)| < \delta_0$ entonces

$$|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Por hipótesis también debemos tener que existe δ_1 de forma que, si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces

$$|g(x) - g(a)| < \delta_0.$$

Tomemos $\delta = \delta_1$, entonces, si $0 < |x-a| < \delta$, tenemos $|g(x) - g(a)| < \delta_0$. En ese caso se debe tener también

$$|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Esto prueba la afirmación que buscada originalmente. ■

Corolario 7.3. *Sea f una función continua en a y sea $\lim_{x\to b} g(x) = a$. Entonces,*

$$\lim_{x\to b} f(g(x)) = f(a).$$

Demostración. Definimos la función

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq b \\ a & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Entonces G es continua en a, por lo que el teorema anterior garantiza que

$$\lim_{x\to b} f(g(x)) = \lim_{x\to b} f\left(G(x)\right) = f(G(b)) = f(a).$$ ■

Comentario. Los resultados anteriores nos permiten garantizar que las funciones son continuas siempre y cuando se puedan construir de otras funciones continuas usando las operaciones de suma, producto y composición. Esto dará lugar a un sin número de ejemplos en los que poco nos molestaremos en mostrar la continuidad.

Definición 7.2. Diremos que una función f tiene *una discontinuidad evitable en a* si no es continua en a pero el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

Comentario. Debe notarse que si una función f presenta una discontinuidad evitable en a, debemos tener sólo una de las siguientes posibilidades:

- $f(a)$ no está definido.
- $f(a)$ está definido pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Ejemplo. No es difícil probar que el límite de $g(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ existe en 0 y su valor es 0 a pesar que la función no está definida en 0. Esto en particular, muestra que g presenta una discontinuidad evitable en 0. Esta discontinuidad se dice evitable pues de manera alegórica podemos arreglarla definiendo la función

$$G(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

la cual exhibe la siguiente igualdad (garantizando su continuidad en 0):

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = G(0).$$

Ejemplo. La función
$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
no es continua para cada punto $a \neq 0$, pues el límite de la función no existe; en particular esto indica esas discontinuidades no son evitables. Por otro lado, $\lim_{x\to 0} F(x) = 0 = F(0)$, por lo que la función es continua en $a = 0$.

Teorema 7.4. *Sea f una función continua en a de forma que $f(a) > 0$. En ese caso, existe $\delta > 0$ de forma que, si $|x - a| < \delta$ entonces $f(x) > 0$.*

Demostración. Como f es continua en a, entonces debe existir $\delta > 0$ de forma que $|x - a| < \delta$ implica
$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}.$$
Como $f(a) - f(x) \leq |f(x) - f(a)|$, lo anterior implica que
$$f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0. \qquad \blacksquare$$

Podemos extender nuestra definición de continuidad a intervalos abiertos sin mucho trabajo. Sin embargo para un intervalo cerrado será un poco más elaborado pero no imposible, presentamos las dos posibilidades.

Definición 7.3. Diremos que f *es continua en* (a, b) si es continua para cada $x \in (a, b)$. Por otro lado diremos que f *es continua en* $[a, b]$ si

1. f es continua en (a, b).
2. $\lim_{x\to a^+} = f(a)$.
3. $\lim_{x\to b^-} = f(b)$.

Ejemplo. Una función que ha resultado conflictiva (aunque una maravillosa fuente de ejemplos) es $I_{-1}(x) = 1/x$. De esta función sabemos que es continua en todo punto $a \neq 0$. Según la definición anterior, esto se implica que I_{-1} debe ser continua en el intervalo $(0, 1)$ pero que no es el intervalo $[-1, 1]$. De manera general, será continua en todo intervalo que no contenga al 0.

2. Tres teorema fuertes...

En [Spi12] se proponen tres teoremas de lo que se pospone su prueba. Su prueba de momento se escapa de nuestras manos, pero será presentada posteriormente, cuando identifiquemos la última propiedad que caracteriza a los números reales. De momento nos contentaremos con analizar algunas de sus consecuencias.

Teorema fuerte 1. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $x \in [a, b]$ con $f(x) = 0$.*

Teorema fuerte 2. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe N tal que $f(x) \leq N$ para todo $x \in [a, b]$.*

Teorema fuerte 3. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe $x_0 \in [a, b]$, de forma que $x \in [a, b]$,*
$$f(x_0) \geq f(x).$$

3. ... el teorema del valor intermedio...

Teorema 7.5 (Teorema del valor intermedio para extremos crecientes). *Si f es continua en $[a,b]$ y*

$$f(a) < c < f(b),$$

entonces existe $x \in [a,b]$ tal que

$$f(x) = c.$$

Demostración. Tomamos la función $g = f - c$, observando que g es continua en $[a,b]$ de la misma forma que f lo es. Además

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - c \\ &< 0 \\ &< f(b) - c \\ &= g(b); \end{aligned}$$

en ese caso podemos aplicar el teorema fuerte 1, para garantizar que existe $x \in [a,b]$ de forma que $g(x) = 0$, esto por definición significa simplemente que $f(x) - c = 0$ de lo que sigue el resultado. ■

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^3 - x$ y consideremos el intervalo $[-2,2]$. Sabemos que f es continua en dicho intervalo y además, $f(-2) = -6$ y $f(2) = 6$. Según el teorema anterior, podemos elegir $c = 0$ y debemos ser capaces de encontrar un número $x \in [-2,2]$ de forma que $f(x) = 0$. Esto es equivalente a resolver la ecuación

$$x^3 - x = 0$$

la cual tiene tres sóluciones en dicho intervalo $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. En otras palabras,

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 1.$$

Comentario. Como lo muestra el anterior ejemplo, el teorema no garantiza que el enunciado del teorema suceda en uno y sólo un punto. La garantía es que existe *al menos un punto del intervalo* que satisface la igualdad indicada.

Teorema 7.6 (Teorema del valor intermedio para extremos decrecientes). *Si f es continua en $[a,b]$ y*

$$f(b) < c < f(a),$$

entonces existe $x \in [a,b]$ tal que

$$f(x) = c.$$

Demostración. De manera similar al teorema anterior tomamos ahora $g = -f$, función que debe resultar continua en $[a,b]$. Además,

$$g(a) = -f(a) < -c < -f(b) = g(b),$$

de lo que podemos utilizar el teorema anterior para concluir que existe $x \in [a,b]$ tal que $g(x) = -c$ o en otras palabras $-f(x) = -c$ de lo que sigue el resultado. ■

Ejemplo. Consideremos $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x$. Como $f(-3) = 18$ y $f(3) = -18$ por lo que según el teorema anterior para $c = 2$ existe un número $x \in [-3, 3]$ de forma que $f(x) = 2$. Esto implica que se satisface la ecuación

$$-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$$

la cual tiene como soluciones a los números $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 2$, todos en el intervalo en cuestión como asegura el teorema.

Ejemplo. Consideremos la función conseno en el intervalo $[0, \pi]$. Como $\cos(0) = 1$ y $\cos(\pi) = -1$, el teorema anterior indica que eligiendo $c = 1/2$ podemos encontrar un número $x \in [0, \pi]$ de forma que $\cos(x) = 1/2$. En este caso deberíamos resolver una ecuación trigonométrica lo cual en general no es fácil, pero este caso es bien conocido que $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Los teoremas 7.5 y 7.6 afirman que cualquier valor que suceda entre las imágenes de los extremos de un intervalo puede ser alcanzado en ese intervalo a condición que la función involucrada sea continua. A menudo al resultado compuesto entre 7.5 y 7.6 se le denomina genericamente *El teorema del valor intermedio*.

4. ... el teorema del acotamiento...

Teorema 7.7. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe N tal que $f(x) \geq N$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. La función $g = -f$ es continua en $[a, b]$ por la hipótesis de continuidad sobre f. Por el teorema fuerte 2, debemos tener que existe N tal que $g(x) \leq N$ para todo $x \in [a, b]$. En otras palabras, $-f(x) \leq N$ o lo que es lo mismo $f(x) \geq -N$ para todo $x \in [a, b]$. De lo que sigue el resultado. ■

Definición 7.4. Se dice que una función está *acotada superiormente en un intervalo I*, si existe un real N de forma que, para todo $x \in I$, se cumple $f(x) \leq N$ y a dicho número N se le denomina *una cota superior de f en I*. De manera similar se dice que está *acotada inferiormente en un intervalo I*, si para todo $x \in I$, se cumple $f(x) \geq N$ y a dicho número N se le denomina *una cota inferior de f en I*.

Comentario. En el sentido de la defininción anterior, el teorema fuerte 2 y el teorema 7.7, afirman que una función está acotada superior e inferiormente en intervalo a condición que ésta sea continua en dicho intervalo. Esto no quiere decir que, de manera global, la función esté acotada, la observación que realiza la consigue limitándose a observar los valores de la función en el intervalo. Por ejemplo, los polinomios son funciones que crecen o decrecen mientras más grande sea el número en que son evaluadas, sin embargo, al ser funciones continuas, deben estar acotadas superior e inferiormente en cualquier intervalo cerrado.

Definición 7.5. Una función f se dice acotada en un intervalo I, si existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo $x \in I$. Al número N en cuestión se le denomina *una cota de la función f en I*.

Teorema 7.8 (Teorema del acotamiento para funciones continuas). *Si f es continua en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Podemos obtener el resultado agregando los teorema fuerte 2 y 7.7. Sean N_1 y N_2 una cota superior y una cota inferior, respectivamente, de la función f. En ese caso, para todo $x \in [a, b]$, se tiene

$$N_2 \leq f(x) \leq N_1.$$

Si se toma $N = \text{máx}(|N_1|, |N_2|)$ entonces para todo $x \in [a, b]$,

$$-N \leq f(x) \leq N,$$

o lo que es lo mismo

$$|f(x)| \leq N. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo. Consideremos el polinomio $f(x) = x^2 - 9$ del cual sabemos

$$\lim_{x \to \infty} x^2 - 9 = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 9 = \infty.$$

La anterior igualdad entre límites, indica que la función no está acotada superiormente en $\mathbb{R}$. Sin embargo, al ser continua en el intervalo $[0, 2]$ debe estar acotada superiormente ahí. En efecto, lo está y una de todas las posibles cotas es $N = 15$. Esto pues, para $x \in [0, 2]$, se cumple

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| \leq 3 \cdot 5 = 15.$$

Con esto podemos concluir que f está acotada en $[0, 2]$ como esperábamos de la afirmación en el teorema.

5. ... el teorema de los valores extremos...

Teorema 7.9. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe $x_0 \in [a, b]$ de forma que $x \in [a, b]$ implica*

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Demostración. Basta observar que la función $-f$ es continua en $[a, b]$ por lo que según el teorema fuerte 3, debe existir $x_0 \in [a, b]$ de forma que $-f(x) \leq -f(x_0)$ para todo $x \in [a, b]$. En otras palabras, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. $\blacksquare$

El teorema fuerte 3 y el teorema anterior se conjugan para dar paso a un teorema que aborda todas las posibilidades. El enunciado del teorema está repartido en los teoremas mencionados por lo que no requiere prueba.

Teorema 7.10 (El teorema de los valores extremos)**.** *Si f es continua en $[a, b]$, entonces existen números x_0 y x_1 en intervalo $[a, b]$ de forma que $x \in [a, b]$, implica*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

6. ... y otro para el camino: Continuidad uniforme

Definición 7.6. Para un intervalo I, la función f se dice *uniformemente continua en I* si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que, para cualesquiera x e y en el intervalo,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Comentario. La definición anterior por supuesto requiere que la función esté definida en todo el intervalo I. Además, es diferente a la continuidad por la forma de cuantificar. Cuando decimos que f es continua en el intervalo I, afirmamos que para todo $a \in I$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con determinada propiedad. Esto quiere decir que la elección de δ no depende sólo de ϵ sino también de a; podemos escribir $\delta(\epsilon, a)$. A diferencia de la continuidad, la continuidad uniforme exige que δ dependa solamente de ϵ y que está elección cumpla una propiedad para todo elemento del intervalo I. En otras palabras, se debe poder elegir $\delta(\epsilon)$.

Ejemplo. La función $I(x) = x$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. En efecto, para $\epsilon > 0$, podemos elegir $\delta(\epsilon) = \epsilon$ de forma que si x e y son números reales de forma que $|x - y| < \delta$ entonces

$$|I(x) - I(y)| = |x - y| < \delta = \epsilon.$$

Ejemplo. La función sen es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Para mostrarlo, primero observemos que

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| &= \left|2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

y en ese caso, para todo $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta = \varepsilon/2$ de forma que, si $|x - a| < \delta$ entonces igualmente $|(x-y)/2| < \delta$ y además

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| &\leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que, en efecto, la función sen es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo. La función $I_2(x) = x^2$ no es uniformente continua en $\mathbb{R}$. Vamos a mostrar esto de manera indirecta suponiendo que en verdad es uniformemente continua. Si esto fuera cierto, entonces para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que para cualesquiera x e y de forma que, si $|x - y| < \delta$, se cumple

$$|x-y||x+y| = |x^2 - y^2| = |I_2(x) - I_2(y)| < \epsilon.$$

Ahora, si $x = \epsilon/\delta$ y $y = x + \delta/2$ ciertamente tenemos

$$|x - y| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

pero

$$|I_2(x) - I_2(y)| = (x+y)|x-y| = \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > (2x)\frac{\delta}{2} = 2\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{2}\right) = \epsilon.$$

Lo cual es una contradicción que anula a la posibilidad de tener a I_2 como una función uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

Comentario. El ejemplo anterior ilustra que la continuidad uniforme no es algo que sigue trivialmente de la continuidad. Con esto, se quiere afirmar que una función podría ser continua en un intervalo pero no uniformemente continua. A pesar de esto, debe ser rutina observar que lo contrario es cierto: Cualquier función uniformemente continua en un intervalo, debe ser también continua.

Ejemplo. Aunque parezca contradictorio, la función $I_2(x) = x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $[0,1]$. Esto se basa en observar que $|x+y|$ (el factor clave para no ser uniformente continua en todos los reales) no puede crecer arbitrariamente en $[0,1]$. En particular, debemos observar que si x e y son ambos elementos de dicho intervalo, entonces $x+y \leq 2$, esto indica que si elegimos $\delta(\epsilon) = \epsilon/2$ entonces para cualesquiera x e y en el intervalo $[0,1]$ que satisfacen $|x-y| < \delta$ tenemos

$$|I_2(x) - I_2(y)| = |x^2 - y^2| = (x+y)|x-y| \leq 2|x-y| < \epsilon,$$

mostrando con esto que I_2 es uniformemente continua en $[0,1]$.

El ejemplo anterior es un caso particular y de hecho podemos conseguir que cualquier función continua sea uniformemente continua en un intervalo cerrado. La prueba, sin embargo, la presentaremos junto a la prueba de los tres teoremas fuertes.

Teorema fuerte 4. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.*

7. Raíces y polinomios

Exploraremos ahora un resultado que hemos pospuesto quizá demasiado tiempo. La existencia de raíces cuadradas. Formularemos ahora la definición de raíz.

Definición 7.7. Una raíz cuadrada del número α es un número no negativo x de forma que $x^2 = \alpha$.

Primero debemos observar que los números negativos no admiten una raíz cuadrada pues ningún cuadrado de un número real es negativo. Ahora, queda en el aire el hecho que si α posee una raíz ésta debe ser única. Supongamos que x y y son ambos raíces de α, en ese caso $x^2 = \alpha = y^2$. También

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 0,$$

por lo que una de dos o $x = y$ o $x = -y$; pero al ser ambos positivos la segunda igualdad es imposible, en consecuencia $x = y$ por lo que, si α admite una raíz ésta debe ser única. Formulamos lo anterior en forma de lema.

Lema 7.11. *Si α admite una raíz cuadrada, entonces la raíz es única.*

Teorema 7.12. *Todo número $\alpha \geq 0$ admite una única raíz cuadrada.*

Demostración. Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, el número admite una raíz a través de los número $x = 0$ y $x = 1$. Supongamos entonces que $\alpha > 0$ y $\alpha \neq 1$, y definamos

$$b = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < 1 \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

En ese caso, se debe cumplir necesariamente que $0 < \alpha < b^2$. Si tomamos $I_2(x) = x^2$ entonces lo anterior se traduce en

$$I_2(0) < \alpha < I_2(b).$$

Usando el teorema fuerte 1, podemos concluir que existe $x \in [0, b]$ de forma que $I_2(x) = \alpha$ o lo que es lo mismo que $x^2 = \alpha$. Como x es positivo lo anterior garantiza que x es una raíz de α como buscábamos. ■

Comentario. Debemos notar que la prueba del teorema de las ráices cuadradas, hace uso de tomar a una raíz cuadrada α como un solución de la ecucación $I_2(\alpha) = 0$. No sólo eso, la prueba puede generalizarse para usar a cualquier función I_n obteniendo con esto que las raíces n-ésimas existen. La distinción de fondo se realiza únicamente analizando la paridad de n: Si n es par, entonces existe solamente la raíz n-ésima de los números no negativos y si n es impar, entonces existe para todo real. En realidad, esto es un fénomeno todavía más general al notar que las funciones I_n son polinomios y que las *las raíces* son soluciónes de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$ donde f es un polinomio.

Lema 7.13. *Para números a_0, a_1, ..., a_n cualquiera, la desigualdad $|x| \geq \text{máx}\,(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$, implica*

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Demostración. Si tomamos $M = \text{máx}\,(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$, entonces la hipótesis se convierte en tener $|x| \geq M \geq 1$. También, por hipótesis, se debe tener para cualquier $0 < k \leq n$,

$$2n|a_{n-k}| \leq |x| \leq |x^k|$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{x^k} \leq \frac{1}{|x^k|} \leq \frac{1}{2n|a_{n-k}|}.$$

Ahora, realizando la suma de estos términos para $0 < k \leq n$, obtenemos

$$\frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|x^n|} \leq \frac{|a_{n-1}|}{2n|a_{n-1}|} + \cdots + \frac{|a_0|}{2n|a_0|} = \frac{1}{2}.$$

En resumen, tenemos

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Sobre la anterior desigualdad, podemos explorar el resultado sin valor absoluto, consiguiendo que

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2};$$

si nos limitandos a observar a la desigualdad de la izquierda y sumando 1 ambos lados de ésta, concluimos finalmente que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$ ■

Teorema 7.14. *Si n es impar, entonces cualquier polinomio*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

admite una raíz, i.e., existe un número y tal que $f(y) = 0$.

Demostración. Comenzaremos eligiendo los números

$$x_1 = \text{máx}\,(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$$

y

$$x_2 = \text{mín}\,(-1, -2n|a_{n-1}|, \ldots, -2n|a_0|)\,,$$

los cuales satisacen $|x_1| \geq M$ y $|x_2| \geq M$. Según el lema 7.13, lo anterior implica la validez de las desigualdades

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \cdots + \frac{a_0}{x_1^n}$$

y

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \cdots + \frac{a_0}{x_2^n}.$$

Debemos observar además dos cosas adicionales de la elección de x_1 y x_2: como $x_1 > 0$, también $x_1^n > 0$ y de manera similar, como $x_2 < 0$ también $x_2^n < 0$ al ser n impar. Combinando estas desigualdades tenemos

$$0 < \frac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \cdots + \frac{a_0}{x_1^n}\right) = f(x_1)$$

y

$$f(x_2) = x_2^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \cdots + \frac{a_0}{x_2^n}\right) \leq \frac{x_2^n}{2} < 0.$$

En resumen

$$f(x_2) < 0 < f(x_1).$$

La anterior igualdad, según el teorema fuerte 1, implica que existe un número $y \in [x_2, x_1]$ de forma que $f(y) = 0$ mostrando que y es una raíz de f. ∎

Teorema 7.15. *Si n es par, entonces para un polinomio*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

existe y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.

Demostración. Tomemos $M = \text{máx}\,(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$. Según el lema 7.13, si $|x| \leq M$

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Este caso, debemos tener también $x^n \geq 0$ al ser n par podemos además concluir que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x)$$

Definimos ahora

$$b = \text{máx}(M, \sqrt[n]{2|f(0)|}),$$

el cual es un número que satisface $b^n \geq 2|f(0)|$ además de $b \geq M$. Por otro lado, si tomamos $x \geq b$, por lo expuesto en el primer párrafo, debemos tener

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

De la misma forma si $x \leq -b$, entonces $|x| \geq b$ y como n es par, tenemos

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{(-b)^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Dicho de otra manera, si $x \in \mathbb{R}\backslash[-b, b]$, entonces $f(0) \leq f(x)$. Como todo polinomio es una función continua, el teorema 7.7, garantiza la existencia de un número $y \in [-b, b]$ de forma que $f(y) \leq f(x)$, en particular para $x = 0$, lo anterior afirma que $f(y) \leq f(0)$. Si ahora tomamos $x \in \mathbb{R}\backslash[-b, b]$, debemos tener

$$f(y) \leq f(0) \leq f(x).$$

Esto quiere decir que sin importar si x pertenece o no al intervalo $[-b, b]$, se debe tener

$$f(y) \leq f(x). \qquad \blacksquare$$

Teorema 7.16. *Si n es par, entonces para un polinomio*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

existe m tal que:

1. *Si $c < m$ entonces no existe y tal que $f(y) = c$.*
2. *Si $c \geq m$ entonces existe y tal que $f(y) = c$.*

Demostración. Por el teorema anterior, debe existir y_0 tal que, $f(y_0) \leq f(x)$ para todo x. Elegimos $m = f(y_0)$. En ese caso si $c < m$ entonces debemos tener que $c \neq f(x)$ para todo x, de lo que sigue el primer enunciado. Si, por otro lado, $c = m$, entonces $f(y) = c$, además si $c > m$, entonces $f(y) < c$. Sea b un número tal que $b > y$ y $f(b) > c$, en ese caso, de acuerdo al teorema 7.5, podemos encontrar x_0 tal que $f(x_0) = c$. Esto muestra el resultado. $\blacksquare$

Ejercicios

Ejercicio 7.1. Encuentra los puntos (si es que lo hay) donde las funciones no son continuas y explica por qué no lo son.

1. $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3-4x^2+4x}$.
2. $f(x) = x^5 - x + 1$.
3. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x+1}$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \in (-\infty, 3] \\ 2x + 1 & \text{si } x \in (3, \infty) \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (\infty, 0] \\ x & \text{si } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$

Ejercicio 7.2. Demuestra que las siguiente funciones son continuas en todo punto.

1. $f(x) = \text{sen}(ax + b)$.
2. $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$.
3. $f(x) = \text{sen}(x^2 + x)$

Ejercicio 7.3. Para cada uno de los siguientes funciones polinómicas encuentra un entero n tal que $f(x) = 0$ para $n \leq x < n + 1$.

1. $x^3 - x + 3$.
2. $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
3. $x^5 + x + 1$.
4. $4x^2 - 4x + 1$.

Ejercicio 7.4. Demuestra que existe un número x de forma que $\text{sen}(x) = x - 1$.

Ejercicio 7.5. Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y que $f(0) = f(1)$. Demuestra que para cada natural existe un número x tal que

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Sugerencia: Considere la función

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Ejercicio 7.6. Suponga que f es continua en a y que $f(a) = 0$. Demuestra que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de cero en algún intervalo abierto de a.

Ejercicio 7.7. Sea f una función continua en a de forma que $f(a) < 0$. Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $|x - a| < \delta$ entonces $f(x) < 0$. Sugerencia: Constrasta éste enunciado con el enunciado de teorema 7.4 ¿Pueden encontrarse coincidencias?

Ejercicio 7.8. Si $\lim_{x \to b} g(x) = a$, pero f no es continua en a, demuestra que en lo general es falso

$$\lim_{x \to b} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to b} g(x)\right).$$

Sugerencia: Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ 1 & x = a \end{cases}.$$

Ejercicio 7.9. Suponga que g y h son continuas en a y que $g(a) = h(a)$. Demuestra que la siguiente función es continua en a:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq a \\ h(x) & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Ejercicio 7.10. Sean g continua en $[a,b]$ y h continua en $[b,c]$ tales que $g(b) = h(b)$. Demuestra que la siguiente función es continua en $[a,c]$:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ h(x) & \text{si } x \in (b,c]. \end{cases}$$

Ejercicio 7.11. Demuestra que si f es continua en a, entonces $|f|$ es continua en a.

Ejercicio 7.12. Si f y g son continuas en a, demuestra que $\text{máx}(f,g)$ y $\text{mín}(f,g)$ son funciones continuas en a.

Ejercicio 7.13. Suponga que una función $|f(x)| < |x|$ para todo x. Demuestra que la función f debe ser continua en 0. Sugerencia: Es prácticamente inmediato al notar $f(0) = 0$.

Ejercicio 7.14. Suponga que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y que f es continua en 0. Demuestra que f es continua en todo punto.

Ejercicio 7.15. Suponga que f es continua en $[-1,1]$ y que $x^2 + f^2(x) = 1$ para todo x. Demuestra que o $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Ejercicio 7.16. Suponga que f y g son continuas en todo punto y que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demuestra que sólo habrá dos posibilidades o $f = -g$ o $f = g$.

Ejercicio 7.17. Suponga que f es continua en $[0,1]$ y que $f(x) \in [0,1]$ para cada x. Demuestra que $f(x) = x$ para algún x.

Ejercicio 7.18. Demuestra que si f es continua en $\mathbb{R}$ entonces puede escribirse como $f = E + O$ donde E es una función par continua y O es una función impar continua.

Ejercicio 7.19. Demuestra que si f es continua en a entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que, si $|x-a| < \delta$ y $|y-a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ejercicio 7.20. Sea f una función continua de forma que $f(a) > 0$ y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $x \in [a, a+\delta)$ entonces $f(x) > 0$.

Ejercicio 7.21. Sea f una función continua de forma que $f(a) > 0$ y

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Demuestra que existe $\delta > 0$ de forma que, si $x \in (a-\delta, a]$ entonces $f(x) > 0$.

Ejercicio 7.22. Suponga que f y g es continua en $[a,b]$ y $f(a) < g(b)$ pero $g(b) < f(b)$. Demuestra que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

Ejercicio 7.23. Hallar una función f que sea continua y acotada en $(0,1]$, pero no uniformemente continua en $(0,1]$.

Ejercicio 7.24. Hallar una función f que sea continua y acotada en $[0,\infty)$, pero no uniformemente continua en $[0,\infty)$.

Para entregar: Ejercicios 7.14 y 7.18

Referencias

[Spi12] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 3ª edición, 2012.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos de los temas contenidos en [Spi12] y con ellos preparar el curso de «Cálculo Diferencia e Integral I» impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y es sujeto a cambios constantes.