Notas a Fundamentos de [Spi92] (Parte 1)*

Cálculo Diferencial e Integral I
Actuaría 2016-I

1. Funciones

1.1. Definiciones

Vamos a tomar una dirección contraria a [?]. El presenta una noción primitiva de función, nos muestra sus propiedades elementales, muchos ejemplos y después presenta la definición formal. Por supuesto, en las notas se asume que el lector está familiarizado con el texto; con esto en mente propondremos las dos definiciones en [?] y caminaremos al empate entre los los resultados intuitvos del texto pero presentados de la manera más técnica posible. Comenzamos con la definiciones presentadas en [?].

Definición 1.1 (versión intuitiva)**.** Una función es una regla que asigna a cada elemento de un cierto conjunto de números reales otro número real.

Definición 1.2 (versión formal)**.** Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras la colección no puede contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

El primer concepto que debemos aclarar es el de pares de números. En este punto podemos imaginar que tipo de objeto buscamos, sin embargo no podemos afirmar con claridad que son exactamente. Para buscar una definición formal buscaremos un resultado en la teoría de conjuntos.

Definición 1.3. Sea a y b números reales cualesquiera. Definimos *la pareja ordenada de a y b* como el conjunto

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Proposición 1.1. *Sean a, b, c y d números reales cualesquiera. Entonces, $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*

*Secciones 3 y 4 de [Spi92]

Demostración. Comencemos suponiendo que $(a,b) = (c,d)$, entonces

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}\,.$$

Debemos notar que el conjunto al lado izquierdo de la igualdad contiene a los conjuntos $\{a\}$ y $\{a,b\}$ los cuales tienen como único elemento en común al número a; de la misma forma, el conjunto a la derecha de la igualdad contiene dos conjuntos que contiene como único elemento en común al número c, una vez establecida la igualdad, el argumento anterior nos permite afirmar que $a = c$ y concluimos que

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}\,.$$

Para probar $b = d$, distinguiremos dos casos.

Supongamos primero que $b = a$. Si esto esto es cierto, entonces $\{a\} = \{a,b\}$ por lo que tenemos que

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\}\}$$

y por tanto

$$\{\{a\},\{a,d\}\} = \{\{a\}\}\,.$$

Por igualdad de conjuntos, debemos tener que $\{a\} = \{a,d\}$ y por tanto $a = d$, en otras palabras $b = a = d$ tal como deseábamos.

Supongamos ahora lo contrario, $b \neq a$, entonces b sólo pertenece a $\{a,b\}$ pero no a $\{a\}$. Debemos tener en ese caso que b pertenece a $\{a,d\}$ y como $b \neq a$ debe ser $b = d$, justo como buscábamos.

Si suponemos que $a = c$ y $b = d$ es inmediato admitir que las parejas (a,b) y (c,d) son iguales desde el punto de vista de conjuntos. $\square$

Al conjunto de las parejas de números se le conoce como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ y se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o simplemente por $\mathbb{R}^2$. Por supuesto, la proposición anterior modela de un modo particular una pareja de números y la propiedad que exhibe es precisamente la que deseamos. Estamos ahora en posición de aclarar que una pareja de números (a,b) es simplemente un elemento del conjunto $\mathbb{R}^2$, en ese caso una función f será simplemente un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la propiedad propuesta en la definición 1.2. De momento una función, a secas, será únicamente un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Un argumento similar a la construcción de $\mathbb{R}^2$ (pensando en la proposición 1.1 los elementos a y c no como números sino una pareja de números), nos dejaría proveer la siguiente definición recursiva para $\mathbb{R}^n$:

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Definiremos ahora dos conjuntos que resultan muy informativos en el marco de la teoría de funciones: el dominio y el rango de una función.

Definición 1.4. Sea f una función. *El dominio de* f es el conjunto de todos los números reales a tales que $(a,b) \in f$ para algún número real b. A este conjunto lo denotaremos por $\mathrm{dom}(f)$. Por otro lado *el rango de* f es el conjunto de todos los números reales b tales que $(a, b) \in f$ para algún número real a. A este conjunto lo denotaremos por $\mathrm{ran}(f)$.

Es interesante ahora notar que siempre a esté en el dominio de la función f, a estará acompañado de un único número b en dicha función. Es por eso, que para indicar a dicho elemento b escribiremos $f(a)$ y dicha notación no presentará ambigüedad alguna. Esta notación presenta una caracterización interesante sobre funciones, está caracterización es en realidad un resultado en el marco de la teoría de conjuntos, sin embargo aquí se usará sin más como una definición.

Definición 1.5. Sean f y g funciones. Se dice que las funciones son *iguales* (en símbolos $f = g$), si $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ y para cada número a en el dominio de f,

$$f(a) = g(a).$$

Como la definición propone, será suficiente para definir una función proporcionar un dominio y una regla de asociación (¡tal como la definición intuitiva propone!). Es quizá importante mencionar una notación muy común para funciones, si $f \subset \mathbb{R}^2$ es una función, se escribe $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para hacer esto patente. Es interesante aclarar que de momento no tendremos necesidad de usar dicha notación tan aparatosa, esto a razón de tampoco haber presentado un concepto más general de función; más adelante nos veremos obligados por la necesidad a usarla y a pesar de esto, no debería causarnos temor aplicarla indiscriminadamente.

Comencemos entonces proponiendo, a manera de ejemplo, una función muy sencilla: La función identidad. La función identidad es la función cuyo dominio son todos los reales y cuya regla esta dada por

$$I(x) = x.$$

Esta función presenta propiedades muy peculiares, por eso hemos tenido la osadía de asignarle un símbolo para distinguirla de las otras. Esto no es realmente común y generalmente usaremos las letras f, g y h para denotar funciones de manera genérica o cuando definamos situaciones que solo sirven de manera temporal.

Una lista mucho más elaborada de ejemplos de funciones puede encontrarse en [**?**]. En el texto existen un número considerable de ejemplos tanto sencillos como elaborados y su lectura nos debería parecer interesante.

1.2. Operaciones

En esta sección, extenderemos las operaciones que conocemos de los números reales a funciones y agregaremos una operación que se puede realizar sobre funciones naturales. Propondremos todo como definiciones.

Definición 1.6. Sean f y g funciones. Definimos la función $f + g$, como la función con dominio

$$\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$

y para cada a en ese dominio

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a).$$

Definición 1.7. Sean f y g funciones. Definimos la función $f-g$, como la función con dominio

$$\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$$

y para cada a en ese dominio

$$(f-g)(a) = f(a) + (-g(a)).$$

Definición 1.8. Sean f y g funciones. Definimos la función $f \cdot g$, como la función con dominio

$$\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$$

y para cada a en ese dominio

$$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a).$$

Definición 1.9. Sean f y g funciones. Definimos la función f/g, como la función con dominio

$$\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \cap \{x \mid g(x) \neq 0\}$$

y para cada a en ese dominio

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Una vez establecidas estas operaciones, podemos comenzar a jugar con estas ideas. Por ejemplo, podemos definir sin más trámite una función κ_c constante en c como la función con $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$ y para cada real a la regla está dada $f(a) = c$. Entonces, podemos definir la multiplicación de una función f por el número real c como

$$c \cdot g = \kappa_c \cdot g.$$

Estamos ahora en posición de definir una operación más fuera del marco de los resultado que hemos establecido para números.

Definición 1.10. Sean f y g funciones cualesquiera. Entonces, definimos la función $f \circ g$, se lee la composición f con g, como la función con dominio

$$\{x \in \operatorname{dom}(g) \mid g(x) \in \operatorname{dom}(f)\}$$

dada por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Como hemos hecho con los números, podemos generalizar las sumas y productos de funciones usando definiciones recursivas. Para esto proponemos lo siguiente. Sean $f_1, \ldots, f_{n+1}$ funciones. Definimos entonces *la suma de las funciones como sigue:*

- $\sum_{i=1}^{1} f_i = f_1$
- $\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1}$.

Y los productos

- $\prod_{i=1}^{1} f_i = f_1$
- $\prod_{i=1}^{n+1} f_i = (\prod_{i=1}^{n} f_i) \cdot f_{n+1}$.

Es importante notar que los elementos aquí definimos resultan funciones y se deben poder evaluar, si por ejemplo $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{dom}(f_i)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right)(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)$$

de la misma forma,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)(a) = \prod_{i=1}^{n} f_i(a).$$

Debemos notar que las expresiones anteriores resultan ser números al ser únicamente funciones evaluadas en un número a en su dominio. Usaremos este hecho para desprender el concepto de una función polinomio.

Con estas definiciones podemos realizar las potencias de la función identidad de manera recursiva. A esta la escribiremos de las siguiente manera

$$I^{\bar{n}} = \prod_{i=1}^{n} I.$$

Por ejemplo $I^{\bar{2}}(a) = a^2$ y $I^{\bar{5}}(a) = a^5$. De manera general

$$I^{\bar{n}}(a) = a^n$$

. Y con esto estamos listo para definir que son los polinomios.

Definición 1.11. Sea f una función. La función f se dice un polinomio si existen números a_1,. . . , a_n tal que

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot I^{\bar{i}}.$$

A los números $a_1, \ldots, a_n$ les llamamos *los coeficientes del polinomio.*

Bajo las observaciones que hemos hecho con anterioridad, f será un polinomio si podemos expresar su regla de correspondencia como

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^n$$

1.3. Polinomios

1.3.1. Operaciones

Sería deseable encontrar algunas propiedades de los polinomios la ser estos funciones relativamente simples de estudiar. De hecho son funciones relativamente simples.

Por ejemplo veamos su dominio. El dominio del polinomio f debe ser la intersección del dominio de las funciones $c \cdot I^{\bar{i}}$ para cada i. Ahora, $c \cdot I^n$ es simplemente la intersección del dominio de una función constante y la intersección del dominio de alguna potencia de la función identidad, las cuales son ambas igual a $\mathbb{R}$ por lo que podemos segurar que el dominio de un polinomio es simplemente la totalidad del conjunto $\mathbb{R}$.

Habrá tres cosas a notar sobre las operaciones que hemos definido sobre polinomios: Sean

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i$$

y

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i$$

Además, si $\min(m, n) < i \leq \max(m, n)$, definimos $a_i = b_i = 0$. Esto nos permite expresar la regla de la función $f + g$ con la siguiente expresión

$$\begin{aligned}(f+g)(a) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot a^i + \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot a^i \\ &= \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) a^i.\end{aligned}$$

De lo que podemos concluir que $f + g$ es también un polinomio. De manera más general con esto se prueba que si $c_1, \ldots, c_l$ son números reales y $f_1, \ldots, f_l$ polinomios, entonces

$$\sum_{i=1}^{l} c_i \cdot f_i$$

es de nueva cuenta un polinomio.

De manera similar, si definimos para $m < i \leq m + n$ $a_i = 0$ y para $n < j \leq m + n$ $b_j = 0$, entonces podemos expresar el producto tiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(a) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot a^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot a^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) a^k.\end{aligned}$$

Por lo que debemos concluir que $f \cdot g$ es también un polinomio. En particular, por inducción podríamos probar que $g^{\bar{n}}$ es un polinomio.

Para probar que la composición de polinomios es un polinomio, nos apoyaremos en los resultados anteriores.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (g(a))^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (g^n)(a).\end{aligned}$$

Así que la composición es simplemente la suma de polinomios por lo que debe resultar en un polinomio también.

1.3.2. Algoritmo de Horner

El algoritmo de Horner es un método que nos permite calcular la evaluación de un número en un polinomio de manera óptima. Procederemos de la siguiente manera para un polinomio

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot I^{\bar{i}}$$

y un elemento a: Se calculan los números $b_0, \ldots, b_n$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + a \cdot b_n \\ b_{n-1} &= a_{n-2} + a \cdot b_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 &= a_0 + a \cdot b_1.\end{aligned}$$

Obtendremos en ese caso que b_0 es simplemente $f(a)$. Para verificar el método manipularemos la expresión del polinomio de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot a^i &= a_0 + a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i a^{i-1}\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i a^{i-1}\right) &= a_1 + a \cdot \left(\sum_{i=2}^{n} a_i a^{i-2}\right) \\ &\vdots \\ \left(\sum_{i=n-1}^{n} a_i a^{i-n+1}\right) &= a_{n-1} + a \cdot \left(\sum_{i=n}^{n} a_i a^{i-n}\right) \\ \left(\sum_{i=n}^{n} a_i a^{i-n}\right) &= a_n\end{aligned}$$

Como se ha definido que $b_n = a_n$,

$$a_n = b_n = \left(\sum_{i=n}^{n} a_i a^{i-n}\right)$$

$$\left(\sum_{i=n-1}^{n} a_i a^{i-n+1}\right) = a_{n-1} + a \cdot b_n$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i a^{i-1}\right) = a_1 + a \cdot b_2$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot a^i = a_0 + a \cdot b_1$$

De donde $f(a) = b_0$, como se deseaba. La exposición anterior de alguna muestra cual es el proceso por el cual el algoritmo de Horner funciona sin falla alguna. Es de destacar que este algoritmo es capaz de cambiar operaciones que involucran el exponente

1.3.3. Interpolación

Los polinomios exhiben propiedades bastante notables en cuanto a las información que requieren para definirse unívocamente. Para poder obtener esa información definiremos el grado de un polinomio.

Definición 1.12. Decimos que un polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ tiene *grado* n si $a_n \neq 0$. Debemos notar que si todos los números a_i son cero, el grado queda indefinido. En ese caso escribiremos $f = 0$.

Podemos explorar un poco, gracias a que la suma de polinomios es un polinomio, el grado de la suma y el producto de polinomios.

Teorema 1.2. *Sean $f \neq 0$ y $g \neq 0$ polinomios con grados m y n respectivamente. Entonces para sólo una de las siguientes posibilidades*

- $f + g = 0$
- *El grado de $f + g$ es menor o igual que* $\text{máx}(m, n)$.

Demostración. Supongamos que $a_1, \ldots, a_m$ son los coeficientes del polinomio f y que $b_1, \ldots, b_n$ son los coeficientes del polinomio g. Se ha probado anteriormente que el polinomio $f + g$ se puede expresar por

$$\sum_{i=0}^{\text{máx}(m,n)} (a_i + b_i)x^i.$$

Entonces, si $f + g$ es distinto de cero, al menos unos de sus coeficientes es distinto cero, tomemos entonces el número natural más grande k tal que

$a_k + b_k \neq 0$ por lo que k es el grado de la suma de los polinomios f y g. Basta observar la expresión anterior para verificar que $k \leq \text{máx}(m, n)$ como deseábamos. □

Teorema 1.3. *Sean $f \neq 0$ y $g \neq 0$ polinomios con grado m y n respectivamente. Entonces el grado de $f \cdot g$ es $m + n$.*

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_m$ los coeficientes del polinomio f y $b_1, \ldots \{_n\}$ los coeficientes del polinomio g. Como en el caso anterior usamos la expresión que hemos dado para verificar que el producto es una polinomio:

$$\sum_{k=0}^{m+n} c_k a^k,$$

de donde

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Deseamos probar que $c_{m+n} \neq 0$. Para esto necesitamos tomar en cuenta dos consideraciones de la manera en que hemos definido el producto. La primera de ellas resulta en observar que si $0 \leq j < m$, el número $b_{m+n-j} = 0$; mientras la segunda resulta en observar que si $m < j \leq m+n$, $a_j = 0$. Ahora por definición del grado de un polinomio debemos tener que$a_m \cdot b_n \neq 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} c_{m+n} &= \sum_{j=0}^{m+n} a_j b_{m+n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m+n-j} + a_m b_n + \sum_{j=m+1}^{m+n} a_j b_{m+n-j} \\ &= a_m b_n \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Lo que prueba que el grado del producto $f \cdot g$ es precisamente $m + n$. □

El grado de un polinomio es determinante en cuanto a su comparación con otros polinomios. Esto es bastante interesante, pues es una función que se puede reconstruir con una cantidad mínima de información. Esto es lo que afirman el siguiente teorema y su corolario.

Teorema 1.4. *Para un polinomio con grado $n \geq 1$, existen a lo más n números distintos para los que su evaluación en el polinomio es cero.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre el grado de los polinomios. Probaremos primero esto primero para un polinomio de grado $n = 1$. Sea f un polinomio de grado 1, en ese caso existen números $a_1 \neq 0$ y a_0 tales que

$f(x) = a_1x + a_0$ por lo que si ,b y c fuera números tales que $f(b) = f(c) = 0$, tendríamos

$$\begin{aligned} a_1 \cdot b + a_0 &= f(b) \\ &= f(c) \\ &= a_1 \cdot c + a_0 \end{aligned}$$

Por lo que $b = c$, por lo que sólo existe uno y sólo un número tal que $f(b) = 0$. Esto prueba el resultado para $n = 1$.

Supongamos ahora el resultado para $n = k$, i.e., cualquier polinomio con grado k tiene a lo más k números distintos que anulan al polinomio. Supongamos entonces un polinomio de grado $k + 1$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i$$

y supongamos que existen $k + 2$ números distintos $a_1, \ldots, a_{k+2}$ de forma que $f(a_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k + 2$. Entonces, por el ejercicio 1.5, podemos encontrar un polinomio de grado k tal que

$$f(x) = (x - a_{k+2})g(x).$$

Como los números a_i fueron tomamos todos distintos, si $1 \leq i \leq k+1$, entonces $a_i - a_{k+2} \neq 0$; y como estos números también anulan al polinomio f, entonces

$$(a_i - a_{k+2})g(a_i) = f(a_i) = 0,$$

por lo que deberíamos tener que o $a_i - a_{k+2} = 0$ o $g(a_i) = 0$, pero lo primero es imposible, por lo que debemos tener que si $1 \leq i \leq k + 1$ entonces $g(a_i) = 0$. Eso querría decir que los g tiene $k + 1$ números distintos que lo anulan lo que es una contradicción con la hipótesis de inducción. Por lo tanto, los números $a_1, \ldots, a_{k+2}$ no son todos diferentes y debe ser que al menos exista uno repetido, eso implica que hay a lo más $k + 1$ números distintos que anulan al polinomio f de lo que sigue el resultado para $n = k + 1$. Por inducción sigue el resultado que buscábamos. □

Corolario 1.5. *Para dos polinomios con grados n y m con $m \geq n \geq 1$, si los polinomios coinciden en $m + 1$ puntos distintos, entonces los polinomios son iguales.*

Demostración. Supongamos los polinomios f y g con grados n y m respectivamente, Supongamos también que $m \geq n$ y que existen números distintos $a_1, \ldots, a_{m+1}$ tales que $f(a_i) = g(a_i)$ para $1 \leq i \leq m + 1$. Afirmamos que $f = g$.

Para probar la igualdad procedemos por contradicción. Tomemos $h = f - g$ para la cual afirmáremos $h(b) \neq 0$ para algún número b. Como h es sólo la suma de polinomios, debe ser en consecuencia un polinomio, además este polinomio es distinto de la función constante 0 por la hipótesis que hemos hecho. Esto implica que tenemos dos opciones, que h sea o una función constante o un polinomio con grado $1 \leq l \leq \text{máx}(m, n)$.

Si por un lado la función h fuera constante, entonces existe un número c tal que $h(x) = c$, pero de la manera que hemos tomado h,

$$\begin{aligned} c &= h(a_1) \\ &= f(a_1) - g(a_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo que contradice que h sea una función distinta del cero. Por otro lado, si h fuera un polinomio con grado $1 \leq l \leq \text{máx}(m, n)$, este tendría $m+1$ números distintos que lo anulan, lo que constituye una contradicción del teorema anterior. De cualquier forma esto deriva en contradicción por lo que debemos concluir que $h = 0$.

Como los dominios de un polinomio abarcan todos los números reales, bastará que las reglas de los polinomios coincidan. En efecto, como la función h es constante en 0, para todo número x

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 + g(x) \\ &= h(x) + g(x) \\ &= f(x) - g(x) + g(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Por lo que debemos concluir que $f = g$ tal como afirma el corolario. □

Corolario 1.6. *Si f es un polinomio expresado por*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

y existen $n+1$ números distintos a tal que $f(a) = 0$, entonces el polinomio f es el polinomio nulo.

Demostración. Basta notar que la hipótesis del corolario es la negación de la conclusión del teorema. Entonces, el grado de f deberá ser o 0 o f ser el polinomio nulo. En cualquier caso podemos expresar f como un función constante, digamos $f(x) = c$ para toda x. Pero como existen $n+1$ números que lo anulan podemos tomar uno de estos, a decir a, para obtener que $c = f(a) = 0$. Por lo que f es en verdad el polinomio nulo como deseábamos. □

Teorema 1.7 (Teorema de aproximación de Lagrange)**.** *Sean $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_{n+1}$ números reales de forma que $a_1, \ldots, a_{n+1}$ sean todos números distintos. Entonces existe un único polinomio p con a lo más grado n que satisface la siguiente propiedad: Siempre que $1 \leq j \leq n+1$,*

$$p(a_j) = b_j.$$

Demostración. Sea k un número entre 1 y $n+1$. Definimos las siguientes funciones

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{x - a_i}{a_k - a_i}.$$

Debemos observar que

$$\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - a_i}{a_k - a_i} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - a_i) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_i},$$

y agregando el resultado del ejercicio 1.4, podemos afirmar que cada l_k es un polinomio. Además este polinomio satisface para $1 \leq j \leq n+1$

$$l_k(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Podemos tomar entonces el polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k l_k(x),$$

el cual afirmamos, satisface la propiedad que buscamos; en efecto

$$p(a_j) = \sum_{k=0}^{n} b_k l_k(a_j)$$

pero

$$b_k l_k(a_j) = \begin{cases} b_k & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases},$$

Por lo que la suma sólo involucrará el termino b_j para obtener sencillamente que $p(a_j) = b_j$.

Una vez mostrado que existe una función, debemos garantizar que ésta es única. Para esto suponemos un polinomio f de grado m tal que $n \geq m$ tal que $f(a_i) = b_j$, lo que implica que p y f coinciden en $n+1$ puntos. Del corolario anterior, podemos simplemente concluir que $p = f$, por lo que el polinomio p descrito es el único con la propiedad deseada. $\square$

Al polinomio descrito en la prueba del teorema anterior se le conoce comúnmente como *polinomio de Lagrange*, la cual es una función muy interesante al permitirnos aproximar otra a través de un polinomio.

1.3.4. Funciones racionales

Hemos expuesto ya diversas propiedades de los polinomios. Estos resultan ser funciones relativamente sencillas de definir al sólo presentar sumas y multiplicaciones en su definición. No sólo eso, el algoritmo de Horner exhibe que éstas sólo requieren de sumas y multiplicaciones para calcular su evaluación por lo que su computo en extremo efectivo. No sólo eso, como funciones están determinadas de manera única por su grado y además con $n+1$ puntos también es posible encontrar un polinomio de grado n que pasa por todos. Estas funciones parecerían idílicas, cabe entonces preguntarnos si existen funciones fuera de los polinomios. La respuesta es sí. Pero no debemos verlo como algo lamentable, sino exactamente lo contrario. ¡Habrá que descubrir alguna otra clase de funciones!

Definición 1.13. Una función f se dice *racional* si existen polinomios p y q tales que

$$f = \frac{p}{q}.$$

Por supuesto, lo primero que debemos preguntarnos es si estas funciones no acabarán siendo solamente polinomios de nueva cuenta. Por supuesto, la respuesta es no, al menos no de manera general. Consideremos por ejemplo el polinomio

$$x^2 - 1,$$

este polinomio se anula en 1 y -1 por lo que al tomarlo como el denominador de otra función, por ejemplo en

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

, el dominio de la función queda restringido a todos los reales menos 1 y -1, sin embargo, un polinomio tiene como dominio a todos los números reales. Este hecho, al considerar la definición que hemos proveído para la igualdad de funciones, resulta en afirmar precisamente que la función f no puede ser un polinomio por el simple hecho que su dominio está restringido.

Que el dominio no coincida no parecería una razón lo suficientemente fuerte para que algo no resultara ya no en un polinomio, sino que se comportara como uno. Por ejemplo en la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 25}{x - 5},$$

el dominio queda restringido a todos los reales sin contar el 5, sin embargo en todos los otros valores se comporta idéntica a la función

$$g(x) = x + 5$$

y a pesar de esto, la definición de igualdad prohíbe que sean iguales. Podríamos proponer sin embargo la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5. \end{cases}$$

En ese caso ¡la función h resulta igual a la función g! Esto tendría que abrir pregunta sobre pregunta: ¿Cuándo es posible "arreglar" el dominio de una función para que sea igual a otra? ¿Qué significa "arreglar" el dominio? ¿Bajo qué circunstancias obtendríamos algo que, dejando el dominio de lado, no se comporta como un polinomio? ¿Existen funciones de este tipo? Estas preguntas son fundamentales en análisis y motivan prácticamente todo el desarrollo teórico que presentaremos. El primero de ellos por supuesto es la continuidad. Antes de abordarla, desarrollaremos una herramienta que nos permitirá desarrollar un poco de intuición: Las gráficas.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sea $\phi(x) = |x-3| + |x-1|$. Calcula los valores $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(-1)$ y $\phi(-2)$. Determina los valores para los cuales $\phi(t+2) = \phi(t)$.

Ejercicio 1.2. Sea $f(x) = x^2$. Determine en cada caso los conjuntos de números reales para los cuales la fórmula es válida.

1. $f(-x) = f(x)$.
2. $f(y) - f(x) = (y-x)(x-y)$.
3. $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$.
4. $f(2y) = 4f(y)$.
5. $f(t^2) = f(t)^2$.
6. $\sqrt{f(a)} = |a|$.

Ejercicio 1.3. Sea $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las siguientes fórmulas y determinar para que valores son válidas.

1. $g(-x) = g(x)$.
2. $g(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$.
3. $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$
4. $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$.
5. $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$.
6. $\frac{1}{2+g(x)} = \frac{2-g(x)}{x^2}$.

Ejercicio 1.4. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales cualquiera y sea

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

una función. Demuestra que f es un polinomio de grado n de forma tal que $f(a_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 1.5. Sea

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

un polinomio de grado $n \geq 1$. Demuestra las siguientes propiedades.

1. Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, entonces $f(x) = x \cdot g(x)$ para algún polinomio g de grado $n-1$.

2. Para real a, la función dado por $p(x) = f(x + a)$.

3. Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para algún número real a, entonces $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$ para algún g de grado $n - 1$ (Sugerencia: considérese $p(x) = f(x + a)$).

Ejercicio 1.6. Encuentra el polinomio p de grado 2 que para el cual se satisface $p(-1) = 3$, $p(1) = 7$ y $p(2) = 15$.

Ejercicio 1.7. ¿Para que números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

Ejercicio 1.8. Sea A un conjunto de los números reales, define la función

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Encuentre expresiones para $\chi_{A \cup B}$, $\chi_{A \cap B}$ y $\chi_{\mathbb{R} \setminus A}$.

Ejercicio 1.9. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$ e impar si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo f es par si $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$, mientras que es impar si $f(x) = x$ o $f(x) = \sin(x)$.

1. ¿Cuándo es $f + g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

2. ¿Cuándo es $f \cdot g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

3. ¿Cuándo es $f \circ g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

Ejercicio 1.10. Demuestre que, si $f \circ g = I$, entonces

1. si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$.

2. cada número b puede escribirse como $b = f(a)$ para algún número a.

Ejercicio 1.11. Si f es una función, defina una nueva función $|f|$ mediante la regla $|f|(x) = |f(x)|$, por supuesto el dominio de la nueva función el dominio de f. Si g es otra función, podemos definir las funciones $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ como sigue:

$$\text{máx}(f, g)(x) = \text{máx}(f(x), g(x)),$$
$$\text{mín}(f, g)(x) = \text{mín}(f(x), g(x)).$$

Halla una expresión para $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ en términos de la función derivada $|\cdot|$.

Ejercicio 1.12. Encuentra en cada caso polinomios que satisface las condiciones dadas

1. $p(0) = p(1) = p(2) = 1$

2. $p(0) = p(1) = 1$ y $p(2) = 2$.

3. $p(-1) = 3p(0) = 1$ y $p(1) = 3$.

4. $p(-1) = p(0) = p(1)$.

2. Gráficas

Nota de advertencia

Estas notas no tienen la intención de substituir al texto clásico [Spi92]. En ese sentido, este absurdo texto sirve sólo como un compendio de los conceptos que se vierten en el capítulo 4 de [Spi92] que resultan ser numerosos y por lo regular importante. Es por eso que la sección lleve por título «gráficas» esto es una mera referencia al texto que se anota y no describe en absoluto el contenido que se presenta. Se espera, por supuesto, que el lector esté familiarizado con el texto o al menos haya transitado alguna vez por sus conceptos.

2.1. Intervalos

Para comenzar interpretaremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como una linea en la cual está indicado el número 0 y a la derecha el número 1. Además a la misma distancia en que se escribe el número 1, a la izquierda se escribirá el número -1. A la derecha del 1 y con la misma distancia que hay del 0 al 1, escribimos el número $2 = 1 + 1$ y los mismo realizamos para el -2 escribiéndolo a la izquierda -1. De igual forma todos los números que no son enteros pueden escribirse entre los enteros, por ejemplo $3/4$ se escribirá entre 0 y 1 y lo mismo deberá realizarse para $\sqrt{2}$; bajo la interpretación sobre $\mathbb{R}$ podemos notar que el valor absoluto de un número es la distancia que existe de este número al cero, en particular $|a - b|$ es la distancia que existe entre a y b. Por supuesto todo lo anterior requiere justificación, justificación que no se presenta de momento entendiendo que este proceso se realiza sólo para ilustrar algunos conceptos de manera visual.

Podemos tomar conjuntos de $\mathbb{R}$ que sean "bloques inseparables", estos son llamados intervalos

Definición 2.1. Sean a y b número reales tales que $a \leq b$. *El intervalo abierto de a a b* es el conjunto

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

mientras *el intervalo cerrado de a a b* es el conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

Esta notación puede abrir la puerta a la ambigüedad a usar de nueva cuenta el símbolo designado para un par de números, sin embargo en contexto debe quedar claro a que se refiere el objeto (a, b). También es de notar que según la definición es posible tomar $a \geq b$ en cuyo caso debemos tener

$$(a, b) = \varnothing$$

y si $a > b$ entonces

$$[a, b] = \varnothing.$$

En general asumiremos cuando hablemos de intervalos que $a < b$ salvo en algunos casos muy particulares.

En ese sentido, un intervalo se puede describir como todos los elementos en la recta a la derecha de a y a la derecha de b. Existe un conjunto interesante a expresar por intervalos: dados números a y $\varepsilon > 0$, coleccionamos todos los números x tales que $|x - a| < \varepsilon$. Esto se puede expresar como un intervalo por

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Existen algunas otras clases de intervalos que interpretan el infinito, no como un número, ni siquiera como un concepto.

Definición 2.2. Sea a un número. Definimos los conjuntos

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\},$$

y

$$[-\infty, a) = \{x \mid x \leq a\}.$$

Podemos también escribir algunas combinaciones de estos intervalos como $[a, b)$ y con la terminología que hemos introducido debe quedar claro a que nos referimos.

2.2. Geometría cartesiana

Así como podemos "dibujar" los reales, podemos dibujar su producto cartesiano $\mathbb{R}^2$. Esto comúnmente se le conoce como el plano cartesiano. Este se ilustra dibujando dos lineas, una vertical y otra horizontal, ambas etiquetadas como se etiquetó la recta real y se crucen de manera tal que coincidan en el 0, ese punto se le denomina $(0, 0)$. Además el punto (a, b) se dibuja como el cruce de dos rectas, tomando la primera como una vertical que pasa sobre a ubicado sobre la recta horizontal y la segunda una recta horizontal que pasa por b ubicado en la recta vertical. Vayamos entonces a definir un concepto estrictamente relacionado al plano

Definición 2.3. Sea (a, b) una pareja de números reales. Definimos *la norma de* (a, b) como el número

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La norma de una pareja es simplemente la distancia que existe entre la pareja y el origen. Entonces, de la misma forma en que se realizó para el valor absoluto, en el plano, la norma de la pareja

$$\|(a - c, b - d)\| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

es la distancia entre las parejas (a, b) y (c, d). Uno debe observar esta analogía y de hecho probar que la norma juega el rol del valor absoluto en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1. *Sean (a, b) y (c, d) parejas de números. Entonces*

$$\|(a + c, b + d)\| \leq \|(a, b)\| + \|(c, d)\|.$$

Demostración. Comencemos notando algunos hechos derivados de la definición

$$\begin{aligned}\|(a + c, b + d)\|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &= \|(a, b)\|^2 + 2(ac + bd) + \|(c, d)\|^2\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned}ac + bd &\leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\ &= \|(a, b)\| \cdot \|(c, d)\|\end{aligned}$$

por lo que debemos tener que

$$\begin{aligned}\|(a + c, b + d)\|^2 &\leq \|(a, b)\|^2 + 2\|(a, b)\| \cdot \|(c, d)\| + \|(c, d)\|^2 \\ &= \left(\|(a, b)\|^2 + \|(c, d)\|^2\right)^2.\end{aligned}$$

Ambos números en la desigualdad son positivos o cero por lo que podemos tomar sin más, la raíz de la desigualdad que es resultado que buscamos. □

2.3. Rectas

Ahora, como el plano nos permite dibujar puntos, esta nos permite dibujar funciones. Recordemos que una función es un conjunto de parejas ordenadas de $\mathbb{R}^2$. En otras palabras, la gráfica de una función f, se realiza indicando los puntos en el plano tales que $(x, f(x))$, donde x es un número real.

Las funciones más sencillas que podemos tener son las funciones constantes, por ejemplo $f(x) = c$ es simplemente una linea horizontal que pasa por el punto $(0, c)$. Podemos pensar también en otra función sencilla: la identidad. Esta es simplemente una linea horizontal que "corta" el plano en dos trozos iguales si multiplicamos la identidad por una constante obtenemos funciones de la forma $g(x) = cx$ que tienen la peculiaridad que sus gráficas todas pasan por $(0, 0)$. Las gráficas de estas funciones son exactamente todas las rectas que pasan por el origen del plano. Podemos ahora sumar una constante para mostrar funciones de la forma $h(x) = cx + d$ donde obtenemos rectas que pasan por el punto $(0, d)$; como estas funciones son todas rectas podemos darles un nombre.

Definición 2.4. Una función se dice *lineal* si tiene la forma

$$f(x) = mx + c.$$

De hecho podemos preguntarnos cual es la función lineal que pasa por lo puntos (a, b) y (a', b) con $a \neq a'$ (si fueran iguales no podríamos tener dos puntos distintos y una función). Podríamos utilizar el teorema 1.7 para calcular una recta, sin embargo al ser un caso particular podemos usarlo para ilustrar la construcción geométrica de una recta que pasa por estos puntos.

Tomemos una función lineal $f(x) = mx + c$. Si tuviéramos $b = b'$, evidentemente tendríamos que tomar $f(x) = b$ para obtener una recta que pase por lo puntos dados. Supongamos entonces $b \neq b'$. En ese caso $f(a) = b$ y además $f(a') = b'$, en ese caso $b = ma + c$ y $b' = ma' + c$. Podemos obtener una nueva igualdad a partir de las dos anteriores:

$$b' - ma' = b - ma$$

o lo que es lo mismo

$$b' - b = m(a' - a).$$

y como $a' - a \neq 0$ podemos expresar lo anterior de la siguiente manera

$$m = \frac{b' - b}{a' - a}.$$

Podemos en ese caso calcular c usando $c = b - \left(\frac{b'-b}{a'-a}\right) a$, de esta forma podemos expresar la función lineal original de la siguiente manera

$$f(x) = \left(\frac{b' - b}{a' - a}\right)(x - a) + b.$$

2.4. Funciones potenciales

Después de las funciones lineales, quizá la forma más sencilla de continuar es considerando la función

$$f(x) = x^2.$$

Los puntos que forman esta función tienen la forma (x, x^2) y se encuentran sobre la curva que se denomina parábola. Podemos preguntarnos si la gráfica será distinta a la gráfica de una función lineal por ejemplo de la identidad I. Sólo con nuestras propiedades de los números podemos determinar que son distintas, por ejemplo para $1 < x$, tenemos que $x^2 > x$ y en caso que $0 < x < 1$ tenemos que $x^2 < x$ mientras que $x = x^2$ para $x = 1$; por esto las gráficas deben ser distintas.

Continuando con la complejidad en las funciones, podemos proponer las funciones potenciales, las cuales se pueden escribir como

$$f(x) = x^n.$$

Con la misma facilidad que hemos probado que la gráfica de la identidad es distinta al cuadrado, podemos probar que para cada número natural n la función potencial que resulta es distinta a todas las demás.

Podemos de nueva cuenta tomar el siguiente paso en volver más complejas nuestras funciones y este paso constituye simplemente una combinación de sumas de las funciones potenciales lo que resulta precisamente los polinomios. Es quizá interesante intentar realizar gráfica de algunos polinomios funciones que como hemos visto presentar propiedades sencillas y su comportamiento es relativamente sencillo. En contraste, las funciones racionales muestran mucha más diversidad en su comportamiento.

2.5. Algunas secciones cónicas

Citamos un pequeño párrafo de [Spi92]

> «Las peculiaridades que presentar las funciones son tan atrayentes que es fácil olvidar a algunos subconjuntos del plano más secillos y más importantes que no corresponden a la gráfica de alguna función. . . »

Así comienza [Spi92] para describir algunos puntos del plano que presentan propiedades bastante notables. Por ejemplo el círculo de radio 1 es simplemente el conjunto

$$S_1 = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

y en extensión la circunferencia de radio r se podrá expresar por

$$S_r = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r\right\}.$$

Uno puede convencerse que la circunferencia de radio r es simplemente el conjunto de puntos que tienen distancia r al origen (¡intenta demostrarlo!).

Una curva relacionada con la circunferencia, es la elipse que se define como la curva que resulta de tomar dos puntos, llamados focos, y la elipse resulta en coleccionar los puntos los cuales la suma de las distancias a los focos es constante que es llamada excentricidad. Podemos describir a la elipse con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ y excentricidad $2a$ como el conjunto de puntos que satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Por lo regular se acostumbra escribir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ notando que$a > c$ para que todo lo anterior tenga sentido, la razón reside en notar que los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ pertenecen a la gráfica de la que representa la elipse y lo mismo sucede con los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ (la mitad de la excentricidad). Ahora, podemos notar que a y b determinan por completo la elipse, por lo que reciben los nombres de radio mayor y radio menor, respectivamente, así podemos describir la elipse con focos $(0, -c)$ y $(0, c)$, radio mayor a y radio menor b como el conjunto

$$E = \left\{x \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

Así como la elipse tiene sumas iguales a una constante, podemos pedir que la diferencia de las distancias sea constante, en ese caso lo que obtenemos es una hipérbola. De igual forma que con la elipse, podemos describir los puntos de esta gráfica tomando los puntos $(0,-c)$ y $(0,c)$ como los focos y $2a$ como su excentricidad por los puntos que satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

A diferencia de la elipse, en este caso debemos tener que $a < c$ por lo que $c^2 - a^2 > 0$ por lo que podemos tomar $b = \sqrt{c^2-a^2}$. Expresamos entonces la hipérbola con focos en $(0,-c)$ y $(0,c)$, radio mayor a y radio menor b como el conjunto

$$H = \left\{ x \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Existe una forma muy útil de descrbir a los puntos del intervalo cerrado $[a,b]$ (suponemos que $a < b$).

1. Considere el intervalo $[0,b]$, siendo $b > 0$. Demuestra que si $x \in [0,b]$, entonces $x = tb$ para algún t con $0 \leq t \leq 1$. ¿Cúal es el significado del número t?¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo $[0,b]$?

2. Demuestra que si $x \in [a,b]$ existe un número t con $0 \leq t \leq 1$ tal que $x = (1-t)a + tb$.¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo (a,b)? ¿Cuál es el punto situado a $3/4$ del intervalo $[a,b]$?

3. Demuestra recíprocamente, si $0 \leq t \leq 1$, entonces $(1-t)a + tb \in [a,b]$.

4. Demuestra que los puntos del intervalo abierto (a,b) son aquellos números que se pueden expresar por $(1-t)a + tb$ con $0 < t < 1$.

Ejercicio 2.2. Usa el teorema de aproximación de Lagrange para obtener el polinomio de grado cuando menos 2 que que pasa por los puntos (a,b) y (c,d) con $a \neq c$. Compara el resultado con la construcción visual que se realizó.

Ejercicio 2.3. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |x|$. ¿En qué puntos se cruza con la gráfica de la función $g(x) = x^2$.

Ejercicio 2.4. El símbolo $\lfloor x \rfloor$ denomina al entero más grande menor que x, por ejemplo $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$, $\lfloor 1{,}1 \rfloor = 1$ $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$. De manera similar , el símbolo $\lceil x \rceil$ denomina al entero más pequeño mayor que x, por ejemplo $\lceil 5{,}5 \rceil = 5$, $\lceil \frac{4}{3} \rceil = 2$ o $\lceil \sqrt{5} \rceil = 3$. Dibuja las gráficas de

1. $f(x) = \lceil x \rceil$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$.

2. $f(x) = x - \lceil x \rceil$ y $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

3. $f(x) = \lceil \frac{1}{x} \rceil$ y $g(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

Ejercicio 2.5. Las gráficas de los polinomios $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibuja una parte suficiente de su gráfica para ver donde se cortan.

Ejercicio 2.6. Las gráficas de los polinomios $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ se cortan en dos puntos. Dibuja una parte suficiente de sus gráficas para observar donde se cortan. ¿Puedes determinar en que puntos se cortan?

Ejercicio 2.7.

1. Los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2$ son de la forma (x, x^2). Demuestra que cada uno de tales puntos equidista del punto $(0, \frac{1}{4})$ y de la gráfica de la función $g(x) = -\frac{1}{4}$.

2. Dada una recta horizontal L, que es la gŕafica de la función constante $g(x) = c$, y un punto $P = (a, b)$ fuera de de la recta L, de manera que $c \neq b$, demuestra que el conjunto de todos los puntos (x, y) equidistantes a P y a L es la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ejercicio 2.8. Para un número $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto

$$B(x : \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}.$$

Demuestra que, si $a < x < b$, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x : e) \subset (a, b).$$

Ejercicio 2.9. Sea $f(x) = mx + c$ una función lineal que pasa por los puntos (a, b) y (a', b) con $a \neq a'$. Demuestra que f es una función constante.

Ejercicio 2.10. Sean a, b, c y d números tales que $a \neq c$.

1. Calcule el polinomio de Lagrange de grado cuando más 1, que pase por los puntos (a, b) y (c, d).

2. Determine bajo que condiciones el polinomio anterior resulta un polinomio de grado 1.

3. Compare la función que resulta con la función lineal que pasa por los mismos puntos.

Ejercicio 2.11. Determina las condiciones para las cuales las gráficas de las funciones $f(x) = mx + b$ y $g(x) = m'x + b'$, resultan en rectas paralelas.

Ejercicio 2.12. Sea $n \geq 1$ un número natural. Demuestre que las gŕaficas de las funciones poentenciales $f(x) = x^n$ y $g(x) = x^{n-1}$, son distintas.

Ejercicio 2.13. Construye las gŕaficas de las siguientes funciones:

1. $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$.
2. $x + 1/x$.
3. $x^2 + 1/x$.
4. $f(x) = (x-c)^2$ con $c = 1$ y $c = 2$.
5. $2x/(1 + x^2)$.
6. $|x|$.

Referencias

[Spi92] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 2ª edición, 1992.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Cálculo Integral y Diferencial I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.