

## Semana 4: Relaciones de equivalencia

### 1. Una clasificación primaria

Comenzaremos con una lista de propiedades que una relación sobre un conjunto puede satisfacer y que son relevantes en muchas aplicaciones de la teoría de relaciones. Estos conceptos serán utilizados en diversas ocasiones no sólo durante este capítulo, por lo que es importante que se lean detenidamente para entender su significado.

**Definición 4.1.** Sea  $R$  una relación en  $A$ . La relación  $R$  se dice *reflexiva* si y sólo si, para todo  $a$  de  $A$ , se cumple  $aRa$ . Por otro lado,  $R$  se dice *irreflexiva* si y sólo si, para todo  $a$  de  $A$  es falso  $aRa$ .

Es posible interpretar una relación reflexiva en la cual todo elemento está relacionado con sí mismo. De la misma forma, una relación es irreflexiva si ningún elemento está relacionado con sí mismo.

**Ejemplo.** Definimos  $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  como el conjunto

$$R = \{(m, n) \mid m \neq n\}.$$

En ese caso  $R$  es una relación irreflexiva en  $\mathbb{N}$  al ser imposible tener  $m \neq m$ .

**Ejemplo.** Tomamos  $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  como el conjunto

$$R = \{(a, b) \mid a \leq b\}.$$

Entonces, la relación  $R$  es reflexiva pues siempre se cumple  $a \leq a$ .

Es importante notar que, si una relación no es reflexiva, no es necesariamente irreflexiva y de la misma forma una relación que no es irreflexiva no es necesariamente reflexiva. A pesar de esto, es imposible tener una relación no vacía que sea tanto reflexiva como irreflexiva aunque es posible obtener relaciones que no son ni reflexivas ni irreflexivas.

**Ejemplo.** Sea  $R = \{(0, 0)\}$  una relación en  $\mathbb{N}$ . En ese caso, la relación  $R$  no puede ser reflexiva pues 1 no se relaciona con sí mismo y tampoco puede ser irreflexiva pues 0 se relaciona con sí mismo.

Por elemental que parezca el ejemplo anterior, éste se puede usar como la base para crear otro mucho más elaborados. La idea de fondo es sencilla: Hay relaciones en las que no todos los elementos están relacionados con sí mismos aunque algunos de ellos lo están.

**Definición 4.2.** Sea  $R$  una relación en  $A$ . La relación  $R$  se dice *transitiva* si y sólo si, para cualesquiera  $a, b$  y  $c$  en  $A$ ,  $aRb$  y  $bRc$  implican  $aRc$ .

**Ejemplo.** Sea  $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  el conjunto definido como

$$R = \{(m, n) \mid m < n\}.$$

En ese caso  $R$  es una relación transitiva en  $\mathbb{N}$  pues si  $a < b$  y  $b < c$  entonces  $a < c$ .

**Ejemplo.** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea  $R$  una relación en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  dada por

$$R = \{(i, j) \mid A_{ij} = 1\}.$$

En ese caso, 1 se relaciona con 2 y 2 se relaciona con 3 pero es falso que 1 se relacione con 3. Concluimos que la relación no puede ser transitiva al existir al menos una terna de elementos que contradice su definición. Como curiosidad, este ejemplo modela la relación  $x$  *derrota a*  $y$  en el juego *piedra papel o tijeras*.

Las relaciones transitivas son de fundamental importancia y serán usadas como base de muchos otros tipos de relaciones. Es importante detenerse a entender el concepto y distinguir que no se trata de uno trivial al existir tanto relaciones transitivas como relaciones que no lo son.

**Definición 4.3.** Sea  $R$  una relación en  $A$ . La relación  $R$  se dice *simétrica* si y sólo si para cualesquiera elementos  $a$  y  $b$  en  $A$ ,  $aRb$  implica  $bRa$ . Por otro lado, la relación se dice *antisimétrica* si y sólo si  $aRb$  y  $bRa$  implican  $a = b$  para cualesquiera elementos  $a$  y  $b$  de  $A$ .

Una relación simétrica se puede interpretar como aquella en la que no importa el orden en que se presenten los elementos relacionados. Es importante también distinguir los enunciados que definen las relaciones simétricas y antisimétricas.

**Ejemplo.** Sea  $E$  un conjunto cualquiera. Definimos la relación  $R$  en el conjunto  $2^E$  de forma que  $A$  está relacionado con  $B$  si y sólo si existe una función biyectiva de  $A$  en  $B$ . En ese caso, si  $A$  está relacionado con  $B$  entonces existe una función biyectiva  $f: A \rightarrow B$ . Como  $f$  es invertible, la función  $f^{-1}: B \rightarrow A$  es una función biyectiva que garantiza que  $B$  está relacionado con  $A$ , mostrando con esto que  $R$  es simétrica.

**Ejemplo.** Sea  $E$  un conjunto cualquiera. Definimos la relación  $R$  en el conjunto  $2^E$  de forma que  $A$  está relacionado con  $B$  si y sólo si  $A \subseteq B$ . En ese caso, si  $A$  está relacionado con  $B$  y  $B$  está relacionado con  $A$ , tenemos  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$  por lo que  $A = B$ . Lo anterior muestra que la relación es antisimétrica.

En contraste con la reflexividad, es posible tener una relación simétrica y antisimétrica al mismo tiempo. De la misma forma, existen relaciones que no son ni simétricas ni antisimétricas.

**Ejemplo.** Sea  $1_A$  la relación identidad sobre un conjunto  $A$ . Entonces, como  $a = b$  implica  $b = a$ , la relación es simétrica. Por otro lado, si  $a = b$  y  $b = c$ , entonces  $a = c$ , lo que permite concluir que la relación es también antisimétrica.

**Ejemplo.** Sea  $A = \{0, 1, 2\}$  y sea  $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ . Entonces,  $R$  no es simétrica pues 1 está relacionado con 3, pero 3 no lo está con 1. Tampoco es antisimétrica pues 1 está relacionado con 2 y 2 lo está con 1 pero  $1 \neq 2$ .

## 2. Equivalencia

Una vez explicadas algunas clasificaciones primarias, podemos comenzar a combinarlas. Una de éstas posibilidades resultan las relaciones de equivalencia. Las relaciones de equivalencia juegan un importante rol en muchas ramas de la matemática moderna. En esencia, se trata de una generalización de la igualdad aunque a diferencia de ésta, las relaciones de equivalencia no son necesariamente triviales.

**Definición 4.4.** Sea  $E$  una relación en  $A$ . La relación  $E$  se dice de *equivalencia* en  $A$  si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Como se comentó, al ser una generalización de la igualdad, la relación identidad para un conjunto cualquiera es una relación de equivalencia. La identidad es el ejemplo más sencillo que existe de una equivalencia aunque bajo ningún motivo el único.

**Ejemplo.** Sea  $m$  un número natural. En  $\mathbb{Z}$  definimos  $E$  de manera que  $aEb$  si y sólo si existe un entero  $q$  de forma que  $a = qm + b$ . No es difícil probar que  $E$  es una relación de equivalencia que es además completamente diferente a la identidad. A esta relación se le conoce como *la congruencia módulo  $m$*  y por lo regular se denota como  $a \equiv b \pmod{m}$ .

**Ejemplo.** Sea  $f: A \rightarrow B$  una función. Definimos en el conjunto  $A$  la relación  $E_f$  como  $E_f(a, a')$  si y sólo si  $f(a) = f(a')$ . Entonces,  $E_f$  es una relación de equivalencia. A la relación  $E_f$  se le conoce como la relación de equivalencia inducida por  $f$ .

Al interpretar como una igualdad este tipo de relaciones, la equivalencia de dos elementos nos permitiría afirmar, de manera alegórica, que los elementos no son *suficientemente* distintos. En ese sentido, parecería irrelevante distinguir elementos equivalentes pues podríamos tratarlos como un sólo objeto. Para dar exactamente ese tratamiento, usaremos la siguiente definición.

**Definición 4.5.** Sea  $E$  una relación de equivalencia en  $A$  y sea  $a$  un elemento de  $A$ . La *clase de equivalencia de  $a$  respecto de  $E$* , es el subconjunto de  $A$  definido por

$$E[a] = \{x \in A \mid xEa\}.$$

Si en contexto la relación queda implícita, haremos solamente referencia a *la clase de equivalencia de  $a$*  y escribiremos  $[a]$  en lugar de  $E[a]$ .

Es necesario notar las clases de equivalencia son no vacías al tener por definición  $aEa$  para cada elemento de  $A$ . Las clases de equivalencia no son sólo no vacías sino que extraen información relevante del conjunto donde se define la relación.

**Ejemplo.** Sea  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(m) = |m|$ . Sabemos que  $E_f$  es una relación de equivalencia y podemos calcular sus clases de equivalencia de manera sencilla. Observamos primero un caso particular, si  $n$  es equivalente con 1, entonces  $|n| = 1$  por lo que  $n = 1$  o  $n = -1$  y en ese caso

$$E_f[1] = \{1, -1\}.$$

En general,  $n$  está relacionado con  $m$  si y sólo si  $n = m$  o  $n = -m$  por lo que

$$E_f[m] = \{m, -m\}.$$

**Teorema 4.1.** Para una relación de equivalencia  $E$  en  $A$ , son equivalentes

1.  $[a] = [b]$
2.  $aEb$
3.  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

*Demostración.* Para probar que de 1. sigue 2., supongamos que  $[a] = [b]$ . Entonces, como  $a \in [a] = [b]$ , debemos tener que  $aEb$ .

Si ahora suponemos que  $aEb$ , entonces  $a \in [a]$  y al mismo tiempo  $a \in [b]$ , o en otras palabras,  $a \in [a] \cap [b]$ , por lo que este último es no vacío. Luego, 2. implica 3.

Finalmente, si  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ , es posible tomar un elemento  $c \in [a] \cap [b]$ . Esto significa que  $cEa$  y  $cEb$ , y por simetría y transitividad, tenemos que  $aEb$ . Entonces, 3. implica 2.

Por último, supongamos que  $aEb$ . Si  $c \in [a]$ , entonces  $cEa$  y por transitividad esto implica que  $cEb$ . En consecuencia,  $c \in [b]$  por lo que  $[a] \subseteq [b]$ . De manera similar, se puede probar que  $[b] \subseteq [a]$  para concluir  $[a] = [b]$ . Lo anterior muestra que 2. implica 3., probando que todos los enunciados son equivalentes. ■

El siguiente corolario es una formulación ligeramente distinta de las equivalencias que aparecen en el teorema. Su prueba es una simple observación.

**Corolario 4.2.** Siempre se cumple que, o  $[a] \cap [b] = \emptyset$  o  $[a] = [b]$  pero no ambas.

Esta última propiedad de las relaciones de equivalencia es lo que da pie a su uso en singular número de ocasiones. En particular, ofrece una perspectiva algebraica a un concepto ligado a la teoría de conjuntos.

**Definición 4.6.** Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Una familia  $\{P_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de  $A$  se dice una *partición de  $A$*  si:

- $P_i \neq \emptyset$  para cada índice  $i$ .
- $P_i \cap P_j = \emptyset$  para cualesquiera índices  $i \neq j$ .
- $\bigcup_{i \in I} P_i = A$ .

Lo primero que hay que notar de las particiones, es lo distintas que son de una relación de equivalencia. Por un lado, una relación de equivalencia es un subconjunto de  $A \times A$ , mientras las particiones son subconjuntos de  $2^A$ . A pesar de esta clara diferencia conceptual.

**Lema 4.3.** Sea  $E$  una relación de equivalencia en  $A$ . Entonces, la familia de subconjuntos de  $A$  definida como  $A/E = \{[a] \mid a \in A\}$ , es una partición de  $A$ .

*Demostración.* Para cada  $a \in A$ , el conjunto  $[a]$  es no vacío. Además, por el teorema 4.1, si  $[a] \neq [b]$ , tendremos  $[a] \cap [b] = \emptyset$ . Finalmente como  $\{a\} \subset [a]$  y  $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$ , debemos tener que

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A.$$

En conclusión, la familia  $A/E$  es una partición de  $A$ . ■

Hemos explicado con este lema, como una relación de equivalencia resulta en una partición: Basta tomar sus clases de equivalencia para obtener un subconjunto de  $2^A$  de forma que este cumpla con las características que definen a una partición. Podemos proponer también un resultado recíproco.

**Lema 4.4.** Sea  $P = \{P_i\}_{i \in I}$  una partición de  $A$ . Entonces, la relación  $E_P$ , definida como  $E_P(a, b)$  si y sólo si existe un índice  $i$  tal que  $a \in P_i$  y  $b \in P_i$ , es una relación de equivalencia.

*Demostración.* Como  $\bigcup_{i \in I} P_i = A$ , la relación  $E_P$  es reflexiva. La relación es también simétrica al notar que el orden en que se presentan  $a$  y  $b$  como elementos de  $P_i$  es indistinto. Basta entonces probar que es transitiva.

Supongamos para esto que  $E_P(a, b)$  y que  $E_P(b, c)$ . En ese caso, existen conjuntos  $P_i$  y  $P_j$  de forma que  $a$  y  $b$  pertenecen a  $P_i$ , mientras que  $b$  y  $c$  pertenecen a  $P_j$ . En ese caso  $b$  debe pertenecer a la intersección de  $P_i \cap P_j$ . Por definición de partición, esto sólo es posible si  $P_i = P_j$  y en ese caso,  $a$  y  $c$  son ambos elementos de  $P_i$ . En otras palabras  $E_P(a, c)$ . Esto muestra que la relación  $E_P$  es transitiva como buscábamos. ■

Estos dos lemas sugieren un especial transformación entre las particiones y las relaciones de equivalencia. Para establecerlos necesitamos primero precisar sobre que conjunto aplicamos la transformación.

**Definición 4.7.** Al conjunto de todas las relaciones de equivalencia en  $A$  se denota como  $\mathcal{E}[A]$  mientras que al conjunto de todas las particiones de  $A$  se denota como  $\mathcal{P}[A]$ .

**Teorema 4.5.** La función  $\varphi: \mathcal{E}[A] \rightarrow \mathcal{P}[A]$ , dada por  $\varphi(E) = A/E$ , es biyectiva.

*Demostración.* Sea  $\gamma: \mathcal{P}[A] \rightarrow \mathcal{E}[A]$  una función definida como  $\gamma(P) = E_P$ . Mostraremos que  $\gamma \circ \varphi = 1_{\mathcal{E}[A]}$  y que  $\varphi \circ \gamma = 1_{\mathcal{P}[A]}$  para asegurar que  $\varphi$  es una biyección.

Probaremos primero que, dada una partición  $P$  de  $A$ ,

$$(\varphi \circ \gamma)(P) = P,$$

o en otras palabras,

$$A/E_P = P.$$

Tomemos  $P = \{P_i\}_{i \in I}$ . Por un lado, si  $E_P[a] \in A/E_P$ , para algún  $a \in A$ , entonces existe un índice  $i$  de forma que  $a \in P_i$  por ser  $P$  una partición. Afirmamos ahora que  $P_i = E_P[a]$ . En efecto, si  $b \in P_i$  entonces  $E_P(a, b)$  al estar ambos en  $P_i$  y esto quiere decir que  $b \in E_P[a]$ . Por otro lado, si  $b \in E_P[a]$  entonces  $E_P(a, b)$  lo que significa que existe un índice  $j$  de forma que  $a$  y  $b$  sean ambos miembros de  $P_j$ , en ese caso  $a \in P_i \cap P_j$  por lo que  $i = j$  y en consecuencia  $b \in P_i$ . Con esto podemos concluir  $P_i = E_P[a]$  y en ese caso  $E_P[a] \in P$  por lo que  $A/E_P \subseteq P$ . Si ahora tomamos  $P_i \in P$ , al ser  $P$  un partición,  $P_i$  es no vacío y podemos tomar algún elemento  $a \in P_i$ . Entonces, debemos tener  $E_P[a] = P_i$  pues  $b \in E_P[a]$  si y sólo si  $b \in P_i$  y en ese caso  $P_i \in A/E_P$  por lo que  $P \subseteq A/E_P$ . En conclusión,  $A/E_P = P$  como buscábamos probar.

Probaremos ahora que dada una relación de equivalencia  $E$  en  $A$ , tenemos que

$$(\gamma \circ \varphi)(E) = E$$

o en otras palabras

$$E_{A/E} = E.$$

Supongamos primero que  $E_{A/E}(a, b)$ . En ese caso debe existir un conjunto  $E[c] \in A/E$  de forma que  $a \in E[c]$  y  $b \in E[c]$ . En ese caso,  $E(a, c)$  y  $E(b, c)$  y por transitividad y simetría obtenemos  $E(a, b)$ . Si ahora suponemos  $E(a, b)$ , podemos afirmar que  $a \in E[b]$  y  $b \in E[b]$ . Por definición  $E[b] \in A/E$  y en consecuencia  $E_{A/E}(a, b)$  al pertenecer ambos elementos a algún conjunto de la partición  $A/E$ . En resumen,  $E_{A/E}(a, b)$  si y sólo si  $E(a, b)$  por lo que  $E_{A/E} = E$ , mostrando lo que buscábamos.

Todo lo anterior muestra que  $\gamma$  es la inversa de  $\varphi$  por lo que podemos concluir que  $\varphi$  es una función biyectiva, terminando con esto la prueba. ■

Introducimos ahora algunos conceptos adicionales acerca de las relaciones de equivalencia de mucha utilidad en diversas aplicaciones.

**Definición 4.8.** Dada una relación de equivalencia  $R$  en  $A$ , al conjunto  $A/R$  lo llamaremos *el conjunto cociente de  $A$  respecto de  $R$* . También, a la función  $\pi: A \rightarrow A/R$  definida por  $\pi(a) = [a]$  la llamaremos la función canónica de  $A$  en el cociente  $A/R$ .

Esta función  $\pi$ , satisface una propiedad destacable que es muy interesante (aunque no difícil) de probar:  $\pi(a) = \pi(b)$  si y sólo si  $aEb$ . En los ejercicios se pedirá probar que esta función exhibe muchas otras propiedades notables.

### 3. Representación matricial

La discusión que hemos abordado hasta ahora acerca de algunos tipos de relaciones habla de conjuntos de cualquier tamaño, sin embargo, algunas propiedades de las relaciones pueden ser estudiadas desde un punto de visto un poco más computacional.

**Definición 4.9.** Sean  $\vee, \wedge$  y  $\neg$  las operaciones descritas en la figura 1. Al cuarteto  $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg)$  se le denomina *el dominio booleano*.

$\vee$	0	1	$\wedge$	0	1	$\neg$	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1			

Figura 1: Operaciones del dominio booleano.

Es importante mencionar que el dominio booleano es una forma de representar a las operaciones involucradas en la lógica proposicional. Esta es la razón de fondo para usar los mismo símbolos que tradicionalmente se usan en ésta para la disyunción, conjunción y negación. De hecho, estas operaciones comparten muchas propiedades con su contraparte en lógica, entre ellas ser asociativas. Es por ello que las expresiones  $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_m$  y  $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m$  no presentan ambigüedad alguna. Por esta razón, se acostumbra escribir en su lugar

$$\bigvee_{i=1}^m a_i = a_0 \vee a_1 \vee \cdots \vee a_m$$

y

$$\bigwedge_{i=1}^m a_i = a_0 \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_m.$$

**Definición 4.10.** Una matriz con entradas en el conjunto  $\{0, 1\}$  se dirá booleana. Para matrices booleanas  $M = [s_{ij}]$  y  $N = [t_{ij}]$  ambas de tamaño  $m \times m$ , se definen:

- La *disyunción* de  $M$  y  $N$  como la matriz  $M \vee N$  con entradas

$$[M \vee N]_{ij} = s_{ij} \vee t_{ij}.$$

- La *conjunción* de  $M$  y  $N$  como la matriz  $M \wedge N$  con entradas

$$[M \wedge N]_{ij} = s_{ij} \wedge t_{ij}.$$

- La *negación* de  $M$  como la matriz  $\neg M$  con entradas

$$[\neg M]_{ij} = \neg s_{ij}.$$

- El *producto booleano* de  $M$  con  $N$  como la matriz  $M \odot N$  con entradas.

$$[M \odot N]_{ij} = \bigvee_{k=1}^m s_{ik} \wedge t_{kj}.$$

Las tres primeras operaciones, aunque usan los mismos símbolos que el dominio booleano, quedan perfectamente claros en contexto. Además, son una extensión natural al conjunto de matrices de las operaciones en el dominio booleano. El producto booleano sin embargo, por misterioso que parezca en realidad es la misma operación que se realiza entre matrices con entradas numéricas con la salvedad la disyunción juega el papel de la suma y la conjunción del producto. El producto booleano entonces se realiza operando renglón con columna con la conjunción y los resultados se operan con la disyunción.

**Ejemplo.** Sean las matrices booleanas

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la disyunción entre ellas resulta

$$M \vee N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

la conjunción

$$M \wedge N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y sus negaciones

$$\neg M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \neg N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además el producto booleano resulta

$$M \odot N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con todo lo anterior, hemos definido un marco en que podremos interpretar una relación como una matriz, objeto que resulta muy útil de manipular mecánicamente.

**Definición 4.11.** Sea  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  un conjunto con  $m$  elementos y sea  $R$  una relación definida en  $A$ . Entonces, la matriz booleana asociada a la relación  $R$  es la matriz de  $m \times m$ ,  $M = [s_{ij}]$  donde

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (a_i, a_j) \notin R \\ 1 & \text{si } (a_i, a_j) \in R \end{cases}.$$

**Ejemplo.** Sea  $A = \{x, y, z\}$  y sea  $R = \{(x, y), (x, z), (y, y), (z, y), (z, z)\}$  Entonces, etiquetando  $a_1 = x, a_2 = y$  y  $a_3 = z$ , la matriz de  $R$  asociada a  $A$  es la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Algo destacable acerca de esta representación es conseguir volver a las operaciones entre conjuntos, operaciones entre matrices. Precisamos esto en el siguiente teorema.

**Teorema 4.6.** Sea  $A$  un conjunto finito y sean  $R$  y  $S$  relaciones definidas en  $A$  con matrices asociadas  $M$  y  $N$ , respectivamente. Entonces,

1. La matriz asociada a la relación  $R \cup S$  resulta  $M \vee N$ .
2. La matriz asociada a la relación  $R \cap S$  resulta  $M \wedge N$ .
3. La matriz asociada a la relación  $R \circ S$  resulta  $N \odot M$ .

*Demostración.* Sólo se probará 3 pues los enunciados en 1 y 2 deben ser lo suficientemente sencillos para realizarlos como un ejercicio. Para conseguir esto, tomemos el conjunto  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  y las matrices  $M = [s_{ij}]$  y  $N = [t_{ij}]$ . Tomemos también  $L = [u_{ij}]$  como la matriz asociada a la relación  $R \circ S$ . Lo primero que debemos notar es que

$$[N \odot M]_{ij} = \bigvee_{k=1}^m t_{ik} \wedge s_{kj} = 1$$

sucede si y sólo si para algún  $k$ , se cumple  $t_{ik} = 1$  y  $s_{kj} = 1$  lo cual es equivalente a tener, para algún  $k$ , que  $(a_i, a_k) \in S$  y  $(a_k, a_j) \in R$  lo cual por definición garantiza que  $(a_i, a_j) \in R \circ S$  y, también por definición,  $u_{ij} = 1$ . En resumen,  $[N \odot M]_{ij} = 1$  si y sólo si  $u_{ij} = 1$ , lo cual garantiza que  $L = N \odot M$  como buscábamos. ■

Además de caracterizar las operaciones entre conjuntos para las relaciones que representan, también se pueden buscar propiedades en las matrices de forma que estas sean equivalentes a alguna propiedad de la relación. Para conseguir esto necesitamos introducir primero una definición.



**Definición 4.12.** Sean  $M = [s_{ij}]$  y  $N = [t_{ij}]$  un par de matrices booleanas. Decimos que  $M$  precede a  $N$ , en símbolos  $M \leq N$ , si para todas sus entradas  $s_{ij} \leq t_{ij}$ .

Para que en las matrices  $M = [s_{ij}]$  y  $N = [t_{ij}]$  se cumpla  $M \leq N$ , basta que en todas las entradas de  $M$  que sean 1, la matriz  $N$  tenga también 1. Esto se debe a que, si  $s_{ij} = 1$  entonces  $1 \leq t_{ij}$  lo cual solo puede suceder si  $t_{ij} = 1$ . Por lo que  $s_{ij} = 1$  implica que  $t_{ij} = 1$ , lo cual es precisamente nuestra afirmación.

**Lema 4.7.** Sea  $A$  un conjunto finito y sean  $R$  y  $S$  relaciones definidas en  $A$  con matrices asociadas  $M$  y  $N$ , respectivamente. Entonces,  $R \subseteq S$  si y sólo si  $M \leq N$ .

*Demostración.* Sean  $M = [s_{ij}]$  y  $N = [t_{ij}]$ . Comenzamos suponiendo que  $R \subseteq S$ , en ese caso, si  $s_{ij} = 1$  entonces  $(a_i, a_j) \in R$  lo cual implica por hipótesis que  $(a_i, a_j) \in S$  y en consecuencia  $t_{ij} = 1$ . Esto implica que  $M \leq N$ . Supongamos ahora que  $M \leq N$ , lo cual es equivalente a tener que  $s_{ij} = 1$  implica  $t_{ij} = 1$ . En otras palabras, si  $(a_i, a_j) \in R$ , entonces  $s_{ij} = 1$  por lo que  $t_{ij} = 1$  por lo que  $(a_i, a_j) \in S$  y ese caso  $R \subseteq S$  como buscábamos. ■

**Teorema 4.8.** Sea  $A$  un conjunto finito y sea  $R$  una relación definida en  $A$  representada por la matriz  $M$ . Entonces:

1. La relación  $R$  es reflexiva si y sólo si  $I \leq M$ .
2. La relación  $R$  es simétrica si y sólo si  $M^t = M$ .
3. La relación  $R$  es transitiva si y sólo si  $M \odot M \leq M$ .

*Demostración.* La prueba de 1 y 2 es relativamente sencilla y es parte del ejercicio 4.22, basta recordar que  $[M^t]_{ij} = s_{ji}$  es la transpuesta de  $M = [s_{ij}]$ . La prueba de 3 es prácticamente inmediata si hacemos uso del teorema 4.6 y el lema anterior pues sabemos que  $R$  es transitiva si y sólo si  $R \circ R \subseteq R$  lo cual es equivalente a tener  $M \odot M \leq M$  según el lema y el teorema mencionados. ■

## Ejercicios

*Ejercicio 4.1.* Sea  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Determina si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas, transitivas, simétricas o antisimétricas.

1.  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 3), (4, 4)\}$
2.  $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3.  $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$
4.  $U = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

*Ejercicio 4.2.* Encuentra la matriz asociada a las relaciones en el ejercicio 4.1.

*Ejercicio 4.3.* Usando las relaciones del ejercicio 4.1, calcula las cerraduras reflexiva y simétrica de cada una.

*Ejercicio 4.4.* Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y sea  $R$  la relación definida en  $A$  de forma que  $aRb$  si y sólo si  $2^b \leq a^2$ . Encuentra la matriz asociada a  $R$  y úsala para determinar si la relación es o no reflexiva, transitiva y simétrica.

*Ejercicio 4.5.* En  $\mathbb{Z}$  define la relación  $E$  como  $aEb$  si y sólo si  $|x| = |y|$ . Demuestra que  $E$  es una relación de equivalencia y calcula su conjunto cociente.

*Ejercicio 4.6.* En el conjunto  $\mathbb{N}^2$  define la relación  $(a,b)E(c,d)$  si y sólo si  $a + b = c + d$ . Demuestra que  $E$  es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento  $(3, 1)$ .

*Ejercicio 4.7.* En el conjunto  $\mathbb{N}^2$  define la relación  $(a,b)E(c,d)$  si y sólo si  $ad = bc$ . Demuestra que  $E$  es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia del elemento  $(3, 7)$ .

*Ejercicio 4.8.* Sea  $m \in \mathbb{R}$ . Definimos la relación  $E$  en  $\mathbb{R}^2$  por  $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$  si y sólo si  $y_1 + mx_2 = y_2 + mx_1$ . Demuestra que la relación  $E$  es una relación de equivalencia y encuentra la clase de equivalencia del punto  $(1, 0)$ . Calcula además el conjunto cociente.

*Ejercicio 4.9.* Demuestra que la relación  $\cdot \equiv \cdot \text{ mód } m$  definida en uno de los ejemplos es una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z}$ .

*Ejercicio 4.10.* Demuestra que una relación  $R$  definida en  $A$  es:

1. Reflexiva si y sólo si  $1_A \subset R$ .
2. Irreflexiva si y sólo si  $1_A \cap R = \emptyset$ .
3. Transitiva si y sólo si  $R \circ R \subset R$ .
4. Simétrica si y sólo si  $R = R^{-1}$ .
5. Antisimétrica si y sólo si  $R \cap R^{-1} \subset 1_A$ .

*Ejercicio 4.11.* Sea  $R$  una relación no vacía definida en  $A$ . Concluye que  $R$  no puede ser al mismo tiempo reflexiva e irreflexiva mostrando que, si  $R$  es reflexiva entonces  $R$  no es irreflexiva y, si  $R$  es irreflexiva entonces  $R$  no es reflexiva.

*Ejercicio 4.12.* Sea  $R$  una relación reflexiva y transitiva definida en  $A$ . Prueba que  $R \circ R = R$ .

*Ejercicio 4.13.* Sea  $R$  una relación transitiva definida en  $A$ . Muestra que  $R$  es irreflexiva si y sólo si  $aRb$  implica que  $bRa$  es falso.

*Ejercicio 4.14.* ¿Cuál es la matriz asociada a la relación  $1_A$ ? ¿Cuál es la matriz asociada la relación  $R^{-1}$ ?

*Ejercicio 4.15.* Usando las relaciones del ejercicio 4.1, calcula las cerradura transitiva usando la matriz asociada.

*Ejercicio 4.16.* Usando la matriz asociada a una relación, encuentra que debe cumplir la matriz para que la relación sea irreflexiva y antisimétrica.

*Ejercicio 4.17.* Sean  $E_1$  y  $E_2$  relaciones de equivalencia definidas en  $A$ . Demuestra que  $E_2 \circ E_1$  es una relación de equivalencia si y sólo si  $E_2 \circ E_1 = E_1 \circ E_2$ .

*Ejercicio 4.18.* Sea  $E$  una relación de equivalencia definida en  $A$ . Sea  $S \subset E$  tal que la imagen de  $S$  bajo la primera proyección coincide con  $A$ , i.e.,  $\pi_1[S] = A$ . Demuestra que  $E \circ S = E$  y que si  $T$  es una relación cualquiera en  $A$ , entonces  $(E \cap T) \circ S = E \cap (T \circ S)$ .

*Ejercicio 4.19.* Demuestra que  $\pi(a) = \pi(b)$  si y sólo si  $E(a, b)$ .

*Ejercicio 4.20.* Sea  $f: A \rightarrow B$  una función y sea  $E_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$  la relación inducida por  $f$ . Demuestra que  $E_f$  es en verdad una relación de equivalencia como se afirmó.

*Ejercicio 4.21.* Sea  $E$  una relación de equivalencia definida en  $A$  y sea  $\pi: A \rightarrow A/E$  la función canónica del cociente  $A/E$ . Demuestra que  $E$  es la relación de equivalencia asociada a  $\pi$ .

*Ejercicio 4.22.* Termina la prueba de los teorema 4.6 y 4.8.

<b>Para entregar:</b> Ejercicio 4.20
--------------------------------------

## Referencias

[G607] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.

[Rot05] Rotman, Joseph J.: *A first course in abstract algebra*. Pearson, 3ª edición, 2005.

Considerar notas el texto precedente es producto de la imaginación febril de autor. El único propósito al que sirven es dar una interpretación personal de algunos textos que han sido usados para preparar el curso de «Matemáticas discretas» impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Es muy probable que el presente texto esté lleno de errores gramaticales, imprecisiones técnicas y sea sujeto a cambios constantes.