Лабораторная работа №6

Задача об эпидемии

Абакумов Егор Александрович

Содержание

List of Tables

List of Figures

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция (изолированная) из N особей подразделяется на 3 группы. Первая - восприимчивые к болезни здоровые особи, обозначим их S(t). Вторая - число инфицированных распространителей болезни, обозначим их I(t). Третья - здоровые люди с иммунитетом, обозначим R(t).

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда же $I(t) \leq I^*$, тогда инфицированные заражают здоровых. Тогда скорость изменения числа S(t) изменяется по закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, I(t) > I^* \\ 0, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболеваем, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, I(t) > I^* \\ -\beta I I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постояныые пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялись однозначно, необходимо задать начальные условия, которые будут заданы в ходе решения задачи.

Задание

Вариант 50

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове (N=4 289 в момент начала эпидемии (t=0) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) I(0)=82, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни R(0)=15. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени S(0) = N - I(0) - R(0). Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(t) \leq I^*$,
2. $I(t) > I^*$.

Ход работы

1. Пишем программный код для решения задачи (Figure 0.1). Здесь альфа и бета - переменные для коэффициента выздоровления и заболеваемости, foo - функция вычисления уравнения, u0 - начальные условия, t - время моделирования, diff и tmp - временные переменные для хранения графика, а функция plot рисует график.

```julia
using Plots
using DifferentialEquations

alpha = 0.01
beta = 0.02

function foo(du, u, p, t)
    du[1] = 0
    du[2] = -beta * u[2]
    du[3] = beta * u[2]
end

u0 = [4192, 82, 15]
t = (0.0, 800.0)

diff = ODEProblem(foo, u0, t)
tmp = solve(diff)

plot(tmp, label="")
```

Figure 0.1: Код для первого случая

2. В результате получаем следующий график, где видим, что достаточно быстро число выздоровевших сравнивается с числом больных, которые вскоре все выздоравливают, а здоровые вообще не изменились в численности (Figure 0.2).

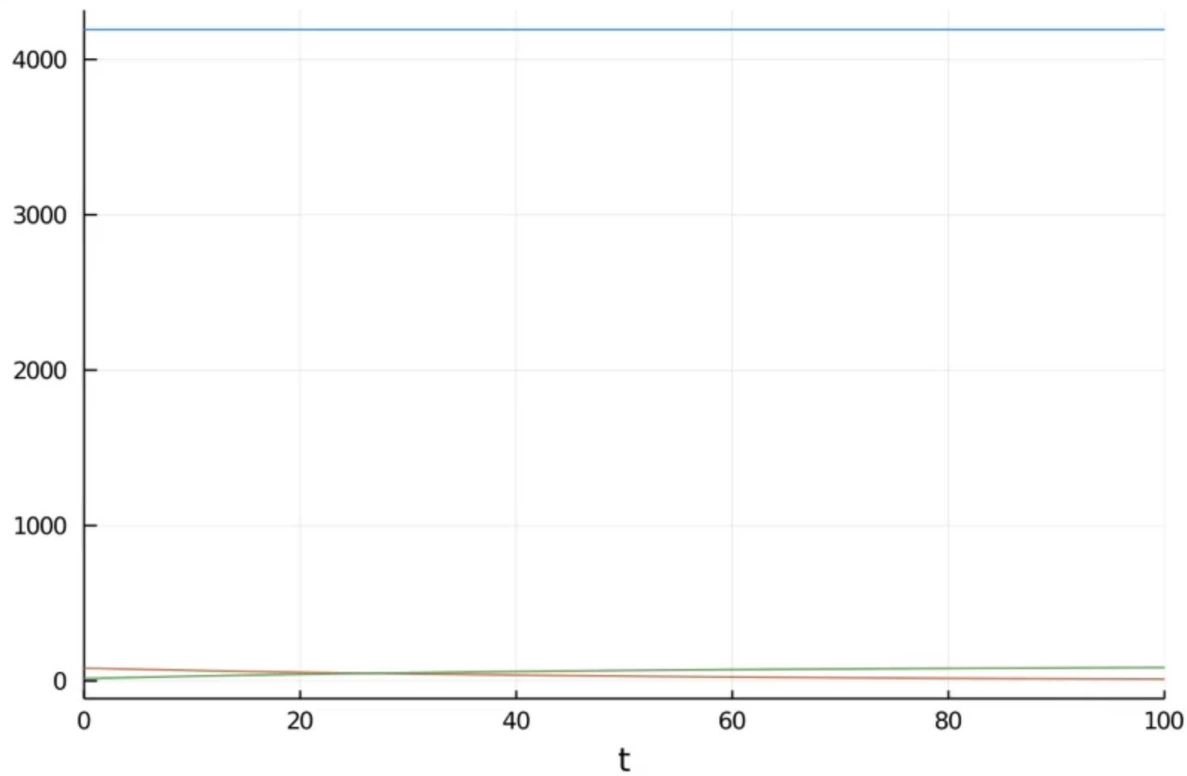

Figure 0.2: График для первого случая

3. Теперь для изменения случая примем, что скорость изменения числа здоровых ненулевая. Тогда функция и код изменятся и примут следующий вид (Figure 0.3).

source.jl

```julia
using Plots
using DifferentialEquations

alpha = 0.01
beta = 0.02

function foo(du, u, p, t)
    du[1] = -alpha * u[1]
    du[2] = alpha * u[1] - beta * u[2]
    du[3] = beta * u[2]
end

u0 = [4192, 82, 15]
t = (0.0, 800.0)

diff = ODEProblem(foo, u0, t)
tmp = solve(diff)

plot(tmp, label="")
```

Figure 0.3: Код для второго случая

4. В результате получим график (Figure 0.4). По нему видим, что число здоровых уменьшается к нулю, то есть все люди переболели, число инфицированных сначала растет, но после перегиба в момент равенства с выздоровевшими начинает снижаться к нулю, а количество выздоровевших со временем становится равно N.

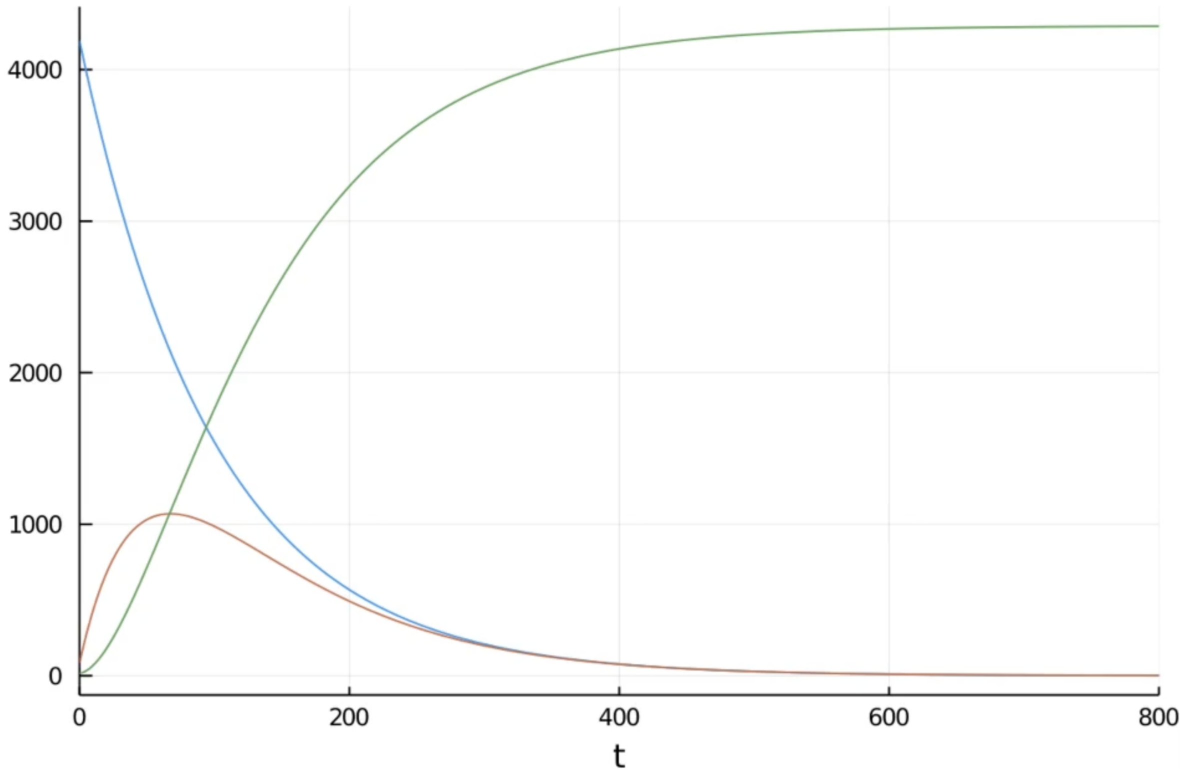

Figure 0.4: График для второго случая

Вывод

В ходе работы мы успешно промоделировали распространение эпидемии и построили наглядные графики.