Отчёт по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Абакумов Егор Александрович

Содержание

Цель работы

Промоделировать гармонические колебания осциллятора. Отработать навыки моделирования систем дифференциальных уравнений.

Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Здесь x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. ($\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. Его можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

```
$$ \left {\begin{matrix} \dot{x} = y \ \dot{y} = -2\gamma \dot{x} -\omega_0^2x \end{matrix}\right.$$
```

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой лоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

Задание

Вариант 50

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\dot{x} + 3.5x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 11\dot{x} + 11x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + 12\dot{x} + x = 2cos(0.5t)$$

На интервале $t \in [0; 51]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = -1.2$

Выполнение лабораторной работы

На основе полученного варианта пишем код (fig. 1). Здесь каждая функция обозначает одну из ситуаций, res 1-3 - переменные для уравнений, а gr 1-3 - переменные для графиков.

```julia
using DifferentialEquations
using Plots

u0 = [0, -1.2]
t = (0.0, 51.0)
dt = 0.05

function f1(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -3.5*u[1]
end
function f2(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -11*du[1] - 11*u[1]
end
function f3(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -12*du[1] - u[1] + 2*cos(0.5t)
end

res1 = solve(ODEProblem(f1, u0, t), saveat = dt)
res2 = solve(ODEProblem(f2, u0, t), saveat = dt)
res3 = solve(ODEProblem(f3, u0, t), saveat = dt)

plotX(u) = u[1]
plotY(u) = u[2]

gr1 = plot(plotX.(res1.u), plotY.(res1.u))
gr2 = plot(plotX.(res2.u), plotY.(res2.u))
gr3 = plot(plotX.(res3.u), plotY.(res3.u))

plot(gr1, gr2, gr3)
```

Figure 1: Код программы

Полученные графики представленны на иллюстрациях (fig. 2 - 4).

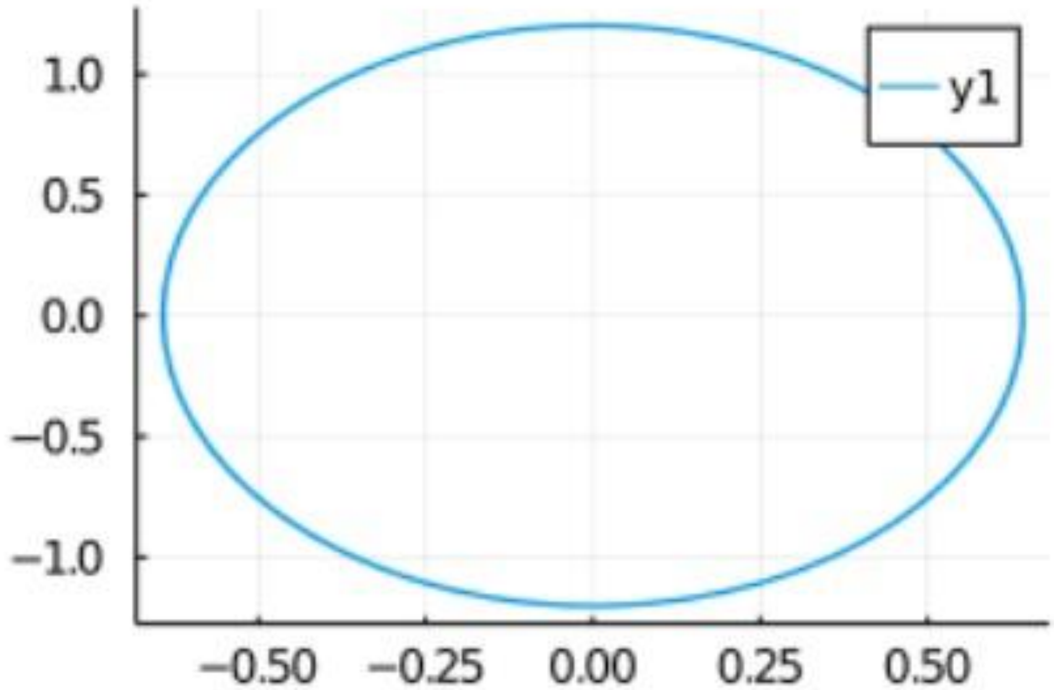

Figure 2: График 1

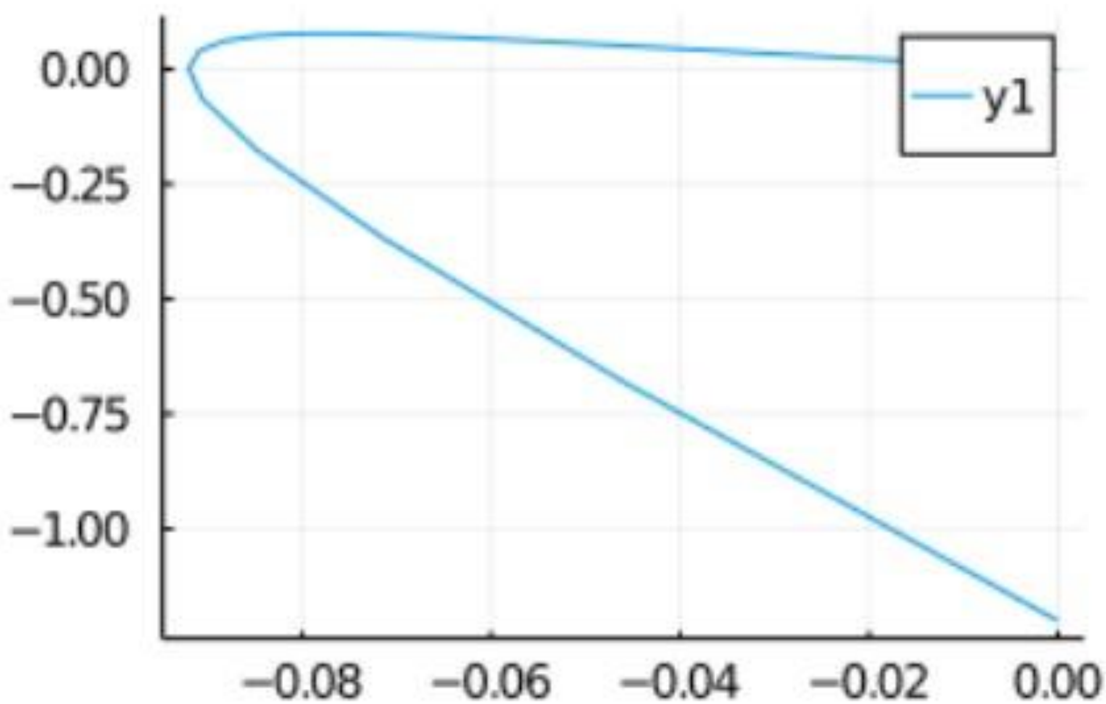

Figure 3: График 2

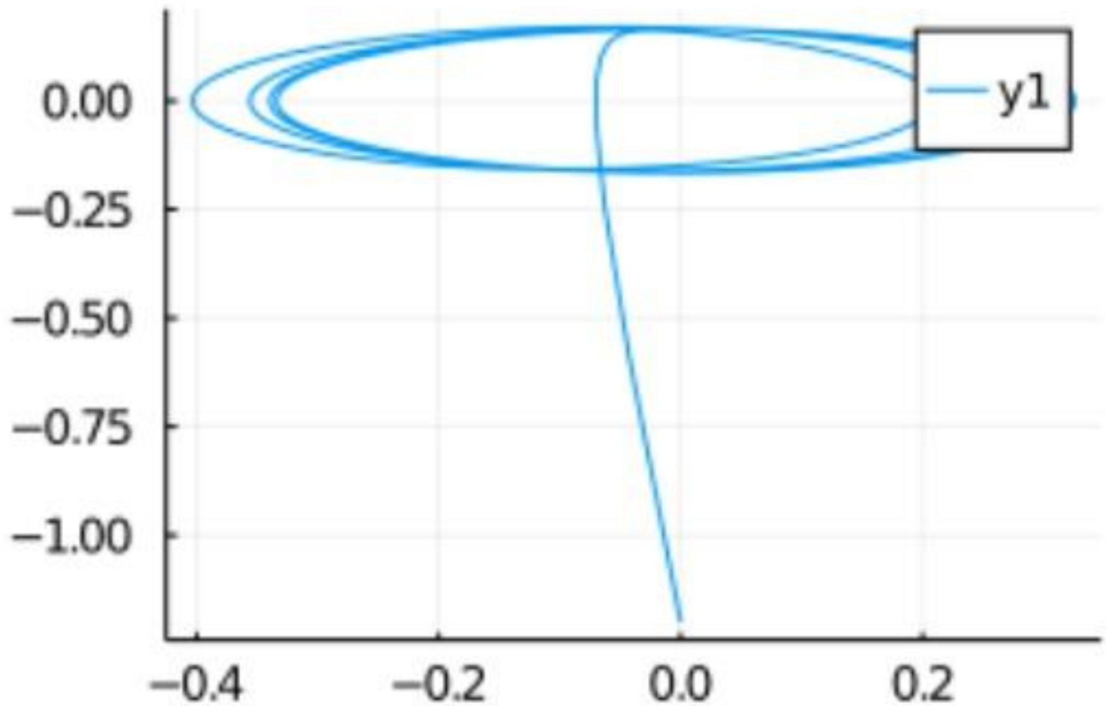

Figure 4: График 3

Выводы

В ходе работы был успешно промоделирован осциллятор, отработаны навыки моделирования систем дифференциальных уравнений.

Ответы на контрольные вопросы

1. x’’ + Ax + Bx = 0, где A - удвоенный параметр потери энергии, а B - квадрат частоты колебаний.
2. Осциллятор - система, совершающая гармонические колебания.
3. x’’ + Bx = 0.
4. x’’ + Ax’ + Bx = C <=> x’=y; y’ = C - Ax’ - Bx.
5.
    - Фазовая траектория - набор состояний системы, выраженный в виде точек.
    - Фазовый портрет - совокупность точек фазовой траектории на графике.