

*Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)*

# *Рабочая тетрадь*

*по начертательной геометрии*

*Студент:* \_\_\_\_\_

*Группа:* \_\_\_\_\_

*Преподаватель:* \_\_\_\_\_

*Москва 2023*



# Общие положения

Рабочая тетрадь по начертательной геометрии предназначена для студентов (бакалавров, специалистов и магистров) всех факультетов. Материал данной рабочей тетради скомпонован по блочному принципу и предназначен для самостоятельной работы. Максимальное количество блоков равно десяти. Каждый студент в зависимости от количества часов, выделенных в семестровом плане на изучение предмета, обязан изучить определённое количество блоков (последнее определяется программой курса). Знания теоретического материала и решение задач, включённых в блок, контролируются преподавателем на семинарских занятиях и оцениваются по пятибалльной системе. Студент, не освоивший материал конкретного блока, направляется на дополнительные занятия. В конце семестрового периода по результатам изучения всех блоков выставляется средняя оценка. Знания студента, не сдавшего хотя бы один блок, не оцениваются, и до ликвидации задолженности этот студент не допускается ни к зачёту, ни к экзамену. Преподаватель, выставивший среднюю оценку учащемуся, имеет право, с согласия студента, засчитать её как зачётную или экзаменационную.

## 1 Блоки рабочей тетради

### Блок №1

- Метод проекций. • Центральное проецирование. • Дополнение Евклидова пространства несобственными элементами. • Параллельное проецирование и его свойства. • Частный случай параллельного проецирования — ортогональное проецирование. • Комплексный чертёж точки, прямой и плоскости. • Изображение пересекающихся, параллельных и скрещивающихся прямых. • Угол между двумя прямыми.

### Блок №2

- Прямые и плоскости частного положения. • Прямые уровня: горизонталь, фронталь, профильная прямая. • Углы между прямыми уровня и плоскостями проекций. • Проецирующие прямые: горизонтально-, фронтально-, профильно-проецирующие. • Плоскости уровня: горизонтальная, фронтальная, профильная. • Проецирующие плоскости: горизонтально-, фронтально-, профильно-проецирующие. • Углы между проецирующими плоскостями и плоскостями проекций. • Длины отрезков, расположенных на прямых частного положения.

### **Блок №3**

• Позиционные задачи. • Взаимная принадлежность элементов пространства: точки — прямой, прямой — плоскости, точки — плоскости. • Позиционные задачи на пересечение. • Первая и вторая вспомогательные задачи. • Плоскости-посредники. • Первая основная позиционная задача. Алгоритм решения. • Конкурирующие точки. • Определение видимости прямой. • Вторая основная позиционная задача. Алгоритм решения.

### **Блок №4**

• Метрические задачи. Определение. • Теорема о проецировании прямого угла. Обобщение теоремы. • Угол между скрещивающимися прямыми. • Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости на комплексном чертеже. • Перпендикулярность двух плоскостей общего положения. • Перпендикулярность двух прямых общего положения. • Линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций. Определение. Теорема. • Определение натуральной величины длины отрезка и его наклона к плоскостям проекций.

### **Блок №5**

• Способы преобразования комплексного чертежа. Общие положения и закономерности. • Способ замены плоскостей проекций. Основные закономерности. Задачи, решаемые данным способом. • Способ плоскопараллельного перемещения. Главные закономерности. Задачи, решаемые данным способом. • Способ вращения вокруг проецирующих прямых. Главные закономерности. Задачи, решаемые данным способом. • Способ вращения вокруг линии уровня. Задачи, решаемые данным способом.

### **Блок №6**

• Кривые. Определение. • Плоские кривые. • Особые точки кривых. • Пространственные кривые. • Касательные к кривым. • Кривизна кривых. • Алгебраические и трансцендентные кривые. • Порядок и жанр кривых. • Составные кривые. • Порядок гладкости составных кривых. • Обводы. • Сплайны. • Трёхгранник Френе. • Кривые второго порядка. Способы задания. Эллипс как кривая, родственная окружности. • Изображение окружности на комплексном чертеже: в плоскости уровня, в проецирующей плоскости, в плоскости общего положения.

### **Блок №7**

• Поверхности. Определение. Задание на комплексном чертеже. Признак полноты задания поверхности. Порядок поверхности. • Кривизна поверхности в точке. • Кинематические поверхности. • Направляющие и образующие. • Классификационные признаки поверхностей. • Поверхности вращения. Определение. Параллели и меридианы поверхности вращения. Теоремы о вращении прямой и кривой второго порядка вокруг оси. Поверхности вращения второго порядка. • Сетчатые поверхности. Поверхности Кунса и их получение на заданной инцидентной сетке кривых. • Линейчатые поверхности. Конические, цилиндрические, торсовые.

Кривизна линейчатых поверхностей. Поверхности Каталана. Цилиндроид, коноид, косая плоскость. Задание на чертеже. • Построение проекций точек, принадлежащих поверхности. Способ случайной линии. Инженерный способ задания линейчатой поверхности. • Циклические поверхности. Определение. Задание на чертеже. • Особенности разных способов задания.

### **Блок №8**

• Обобщённые позиционные задачи. • Поверхности-посредники. • Пересечение кривой с поверхностью. Алгоритм решения. Определение видимости • Пересечение плоскости и поверхности. • Конические сечения. • Построение линии пересечения двух поверхностей. Алгоритм решения. • Рядовые точки. Опорные точки: экстремальные точки и точки границ видимости. • Способ плоскостей уровня. Условия применения. • Способ сфер. Концентрические и эксцентрические сферы. Условия применения сфер. • Правило определения видимости линии пересечения поверхностей. • Взаимное пересечение поверхностей второго порядка. Особые случаи пересечения. • Теорема Монжа.

### **Блок №9**

• Плоскости, касательные к поверхности. Основные понятия. • Очертание поверхности вращения. • Развёртки поверхностей. Основные свойства развёртки кривых поверхностей. Приближённые построения развёрток. • Спрямление кривой линии. Способ триангуляции.

### **Блок №10**

• Аксонометрические проекции. Основные понятия и определения. • Теорема Польке. • Виды аксонометрических проекций. • Определение натурального масштаба. • Треугольник следов и показатели искажения. • Свойства прямоугольной и косоугольной аксонометрии. • Позиционные и метрические задачи на комплексном чертеже. • Точный и приведённый аксонометрические чертежи. • Аксонометрический масштаб. • Стандартные аксонометрические системы.

## **2 Предисловие**

Задачи данного учебного пособия составлены в соответствии с программой курса начертательной геометрии. Преподаватель, ведущий практические занятия в группе студентов, имеет право уменьшить или увеличить количество решаемых задач. Теоретический материал, изложенный в тетради, является базой для подготовки студентов к решению задач.

Решение каждой задачи состоит из двух этапов:

1. пространственное (стереометрическое) решение, при котором определяется последовательность действий для получения искомого геометрического ответа;
2. выполнение составленного плана решения задачи на чертеже с учётом закономерностей метода проекций начертательной геометрии. Решение пространственной задачи с помощью плоскостного (планиметрического) чертежа является главным в начертательной геометрии.

**Для успешного решения задач студенту необходимы твёрдые знания основных теорем элементарной геометрии — планиметрии и стереометрии.**

В данной рабочей тетради все чертежи должны быть выполнены максимально аккуратно и точно, с соблюдением всех требований **Государственных стандартов ЕСКД** по оформлению чертежа (типы линий, шрифт и т. п.)

Все построения (вспомогательные линии, линии связи) следует выполнять тонкими линиями простым карандашом. Результаты решения задач рекомендуется обводить основной линией чертежа.

Все заданные и получаемые элементы чертежа необходимо обозначать следующим образом:

- точки** — прописными буквами латинского алфавита —  $A, B, C, D, \dots$ , или арабскими цифрами —  $1, 2, 3, 4, \dots$  (для вспомогательных построений);
- прямые** — строчными буквами латинского алфавита —  $a, b, c, d, \dots$ ;
- прямые уровня** — горизонталь —  $h$ , фронталь —  $f$ , профильная прямая —  $p$ ;
- поверхности и плоскости** — прописными буквами греческого алфавита —  $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Sigma, \Phi, \Psi, \Omega, \dots$ ;
- углы** — строчными буквами греческого алфавита —  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi, \dots$ ;
- плоскости проекций** — прописной буквой греческого алфавита  $\Pi$  (пи) с соответствующим нижним индексом:  $\Pi_1$  — горизонтальная,  $\Pi_2$  — фронтальная,  $\Pi_3$  — профильная плоскости проекций;
- дополнительные плоскости проекций** — прописной буквой греческого алфавита  $\Pi$  (пи) с соответствующим нижним индексом —  $\Pi_4, \Pi_5, \dots$ ;
- проекции точек, линий и поверхностей** — теми же буквами с добавлением индекса плоскости проекций, на которую спроецирован объект. Так, проекции точки  $A$ , прямой  $a$  и плоскости  $\Gamma$  соответственно надо обозначать: на плоскости  $\Pi_1$  —  $A_1, a_1, \Gamma_1$ , на плоскости  $\Pi_2$  —  $A_2, a_2, \Gamma_2$ , на плоскости  $\Pi_3$  —  $A_3, a_3, \Gamma_3$ ;
- $=$  — проекции двух элементов совпадают:  $A_2 = B_2$ ;
- $\in$  — точка (элемент множества) принадлежит геометрической фигуре (множеству):  $A \in m, B \in \Sigma$ ;
- $\cap$  — пересечение множеств:  $a \cap \Delta, b \cap c$ ;
- $\cup$  — объединение множеств:  $[AB] \cup [BC]$  — ломаная  $ABC$ ;

### 3 Свойства ортогонального проецирования

1. Проекция точки — всегда точка.
2. Проекция прямой в общем случае — прямая.
3. Если прямая параллельна направлению проецирования, то она проецируется в точку. Такая проекция прямой обладает собирательным свойством: все точки прямой проецируются в одну точку.
4. Проекция точки, принадлежащей некоторой прямой, принадлежит проекции этой прямой.
5. Точка пересечения прямых проецируется в точки пересечения проекций этих прямых, как принадлежащая им обеим, согласно предыдущему свойству.
6. Проекция прямой, принадлежащей какой-либо поверхности, принадлежит проекции этой поверхности. В свою очередь, проекция точки, лежащей на поверхности, принадлежит проекции хотя бы одной прямой этой поверхности.
7. Параллельные прямые пространства проецируются в параллельные.
8. Если плоская фигура принадлежит плоскости, параллельной плоскости проекций, то проекция этой фигуры конгруэнтна (равна) самой фигуре.
9. Проекция точки на отрезке делит проекцию отрезка в том же отношении, в каком точка делит отрезок.

# Блок №1

## Комплексный чертёж точки, прямой, плоскости

### 1.1 Теоретические положения

Три взаимно перпендикулярных плоскости  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  делят пространство на восемь частей — октантов.

Рассмотрим первый октант. Он представлен на рис. 1.1.  $\Pi_1$  — горизонтальная,  $\Pi_2$  — фронтальная и  $\Pi_3$  — профильная плоскости проекций. Оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  являются осями проекций (осями координат). Осям присваивают индексы плоскостей, по ним пересекающихся:  $X_{12}$ ,  $Y_{13}$ ,  $Z_{23}$ . Для получения плоского комплексного чертежа (он может быть двухкартинным или трёхкартинным) плоскость  $\Pi_1$  поворачивают вокруг оси  $X$ , а плоскость  $\Pi_3$  — вокруг оси  $Z$  до совмещения с плоскостью  $\Pi_2$ . Ось  $Y_{13}$  раздваивается на  $Y_1$ , уходящую вниз вместе с  $\Pi_1$ , и на  $Y_3$ , уходящую вправо вместе с  $\Pi_3$ .

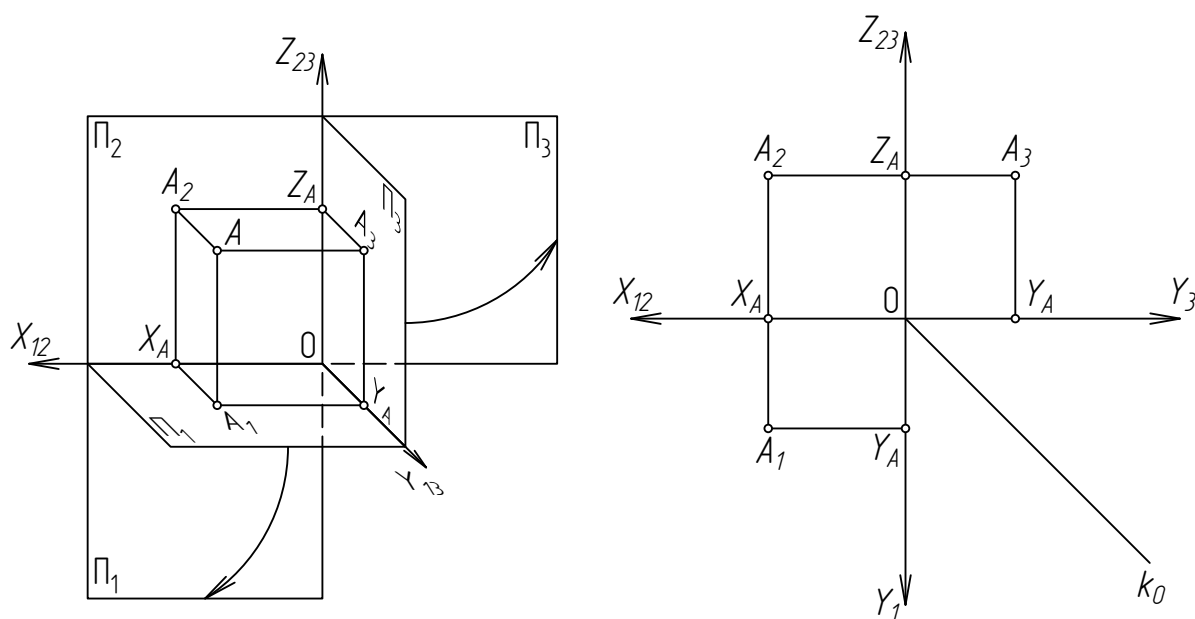


Рис. 1.1 Трёхкартинный комплексный чертёж

#### Комплексный чертёж точки

Точку  $A$ , расположенную в пространстве первого октанта, проецируем ортогонально на каждую из плоскостей проекций (рис. 1.1):

$A_1$  — горизонтальная,  $A_2$  — фронтальная,  $A_3$  — профильная проекции точки  $A$ .

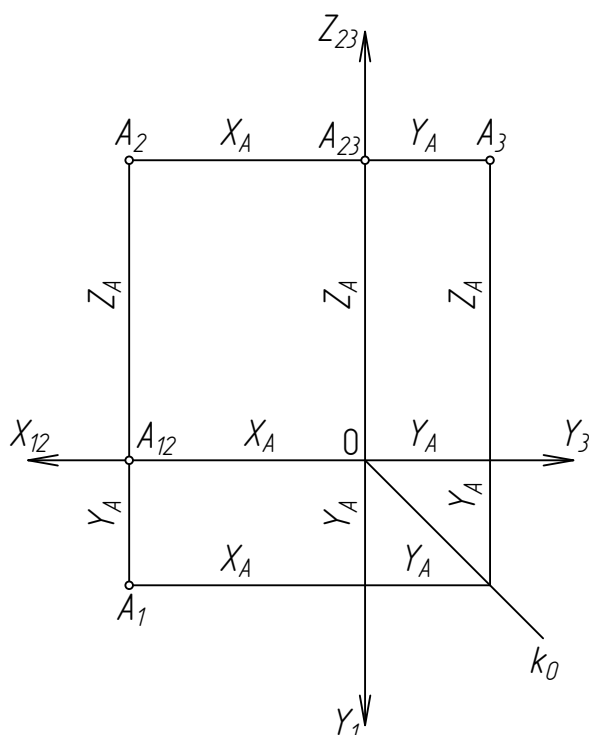
$AA_1$  — высота точки  $A$  (координата  $Z$ ),  $AA_2$  — глубина точки  $A$  (координата  $Y$ ),  $AA_3$  — широта точки  $A$  (координата  $X$ ).



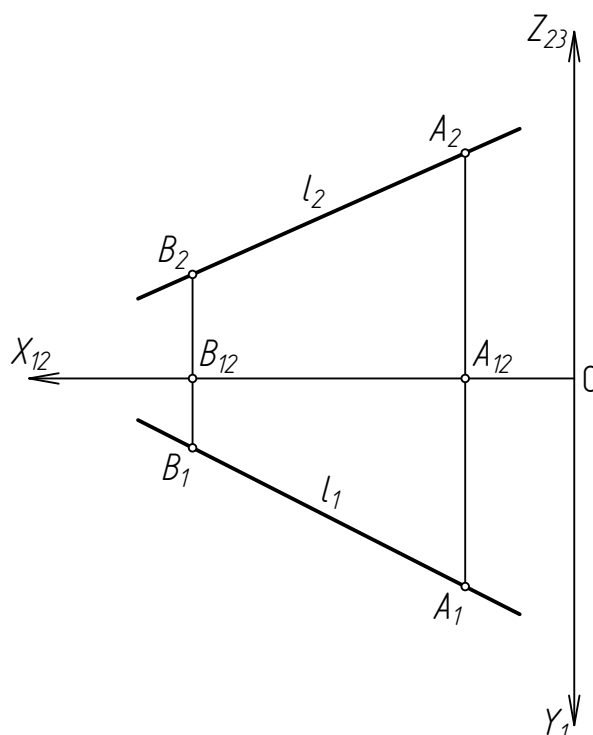
На комплексном чертеже прямые  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$  связывают соответствующие проекции и передают координаты  $X$  и  $Z$ . Они называются *вертикальной и горизонтальной линиями связи*. Для графической трансляции координаты  $Y$  используют *ломаную линию связи*, которая преломляется под прямым углом на *постоянной прямой* чертежа  $k_0$ , проведённой под углом  $45^\circ$  к оси  $Y$  (рис. 1.2).

### Комплексный чертёж прямой

Прямая линия бесконечна. Две точки прямой определяют её положение в пространстве. Положение прямой можно задать также одной точкой и направлением (рис. 1.3).



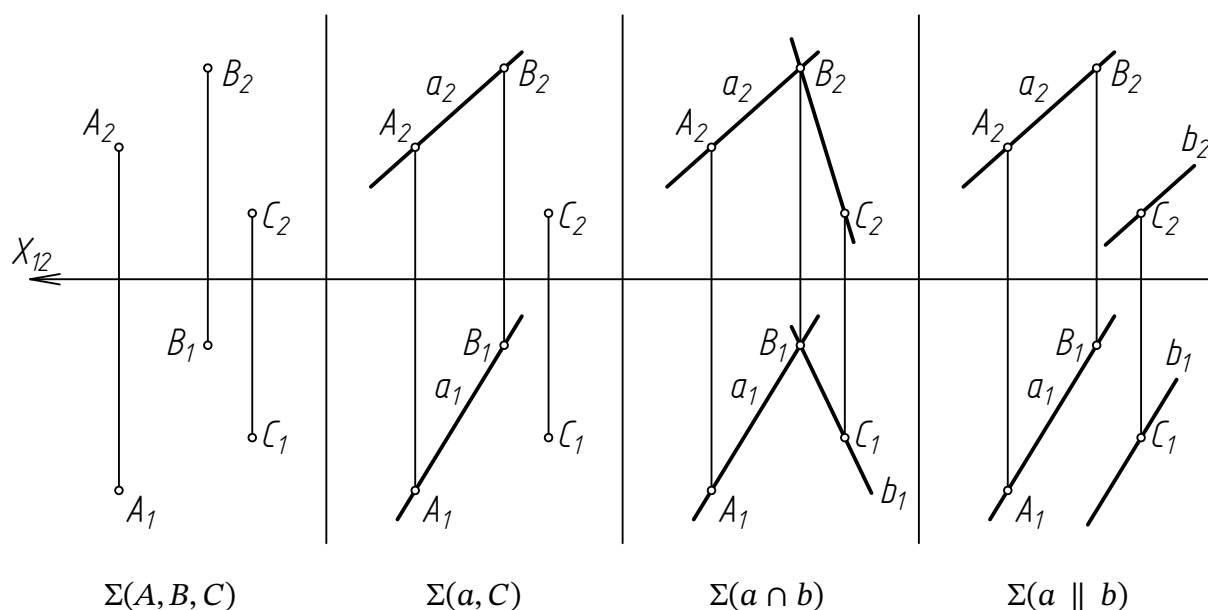
**Рис. 1.2** Комплексный чертёж точки



**Рис. 1.3** Комплексный чертёж прямой

### Комплексный чертёж плоскости

Плоскость в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой —  $\Sigma(A, B, C)$ . Ту же плоскость можно задать точкой и прямой —  $\Sigma(a, C)$ , двумя пересекающимися прямыми —  $\Sigma(a \cap b)$ , двумя параллельными прямыми —  $\Sigma(a \parallel b)$ . Наиболее наглядно задание плоскости представляется тремя точками, соединёнными отрезками прямых, то есть треугольником. На комплексном чертеже любая плоскость может быть задана проекциями элементов, определяющих её положение в пространстве (рис. 1.4). В ходе решения задачи иногда приходится переходить от одного задания плоскости к другому.



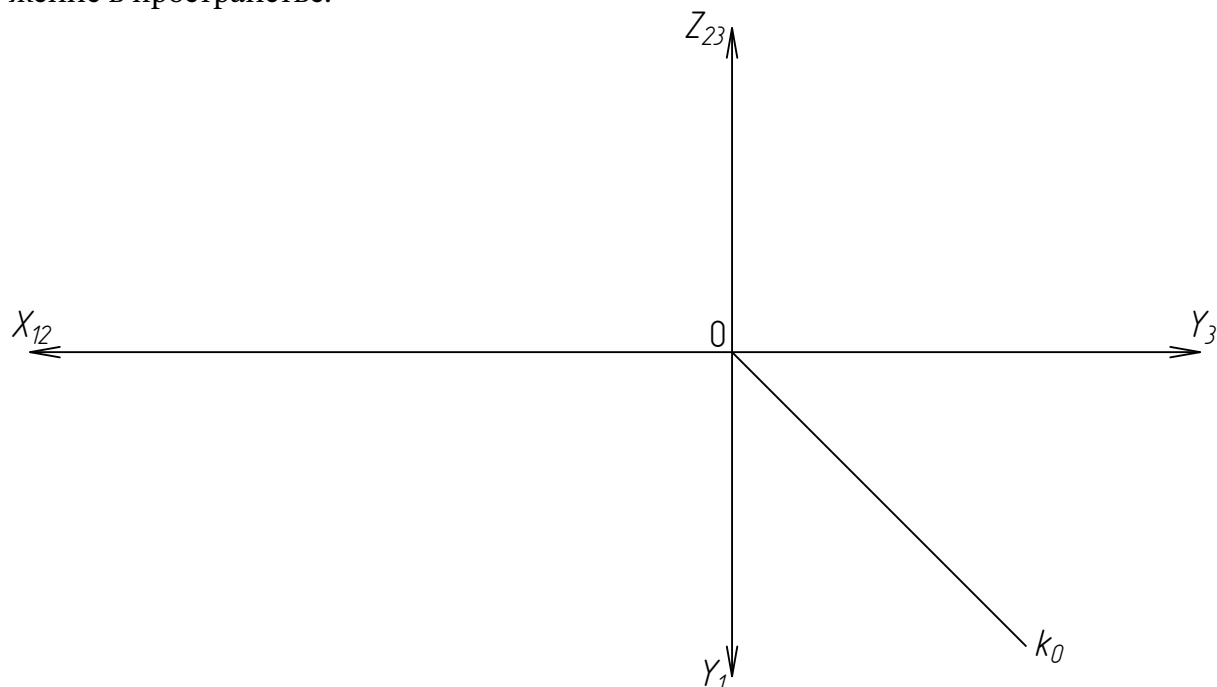
**Рис. 1.4** Комплексный чертёж плоскости

## 1.2 Контрольные вопросы

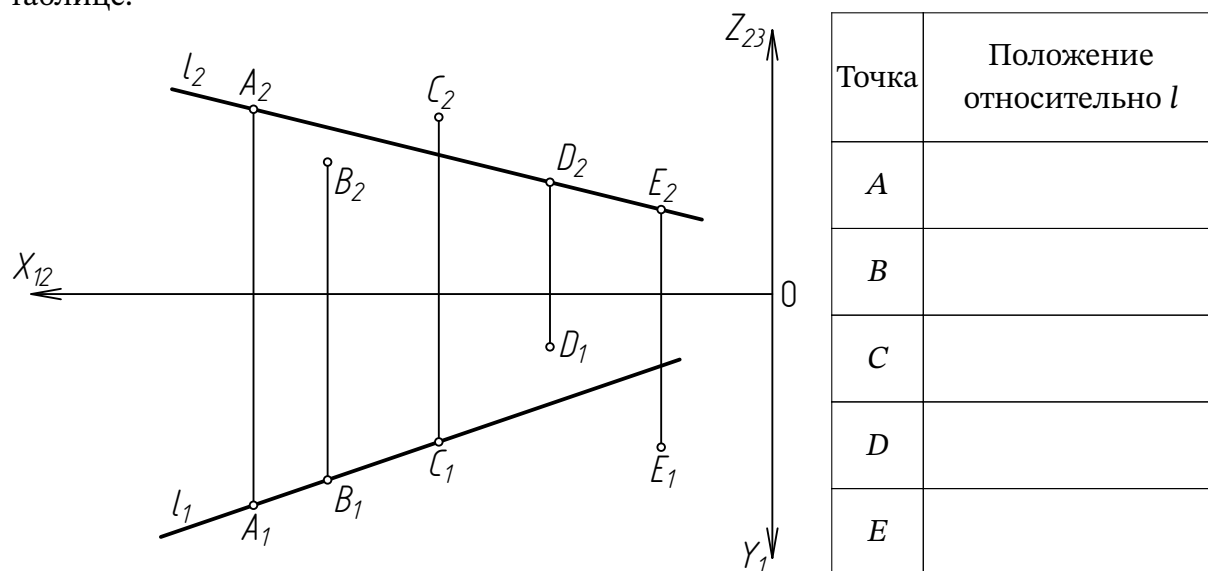
1. В чём состоит метод проецирования?
2. Почему чертежи называются проекционными?
3. Перечислите свойства ортогонального проецирования.
4. Какой проекционный чертёж является обратимым?
5. Как образуется эпюр Монжа? Дайте определение комплексного чертежа.
6. Как образуется трёхкартинный комплексный чертёж?
7. Что представляет собой постоянная прямая чертежа  $k_0$ ?
8. Что на комплексном чертеже является характерным признаком параллельности прямых в пространстве?
9. Что на комплексном чертеже является характерным признаком пересекающихся в пространстве прямых?
10. Что на комплексном чертеже является характерным признаком скрещивающихся в пространстве прямых?
11. Перечислите варианты взаимного положения точки и прямой.

### 1.3 Задачи

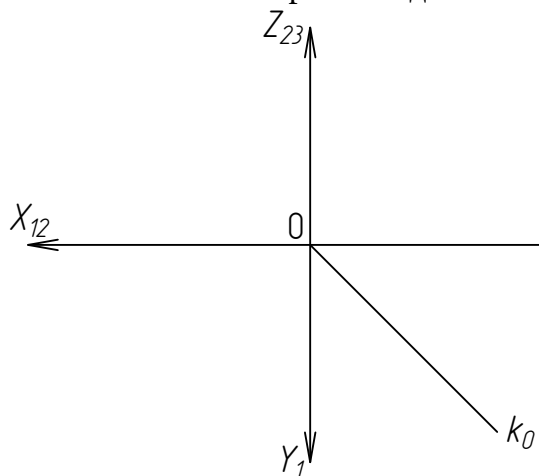
1. Построить комплексный чертёж точек  $A(70, 20, 0)$  и  $B(20, 40, 30)$ . Обозначить высоту и глубину точек. Через точки  $A$  и  $B$  провести прямую  $a(a_1, a_2)$  и представить её положение в пространстве.



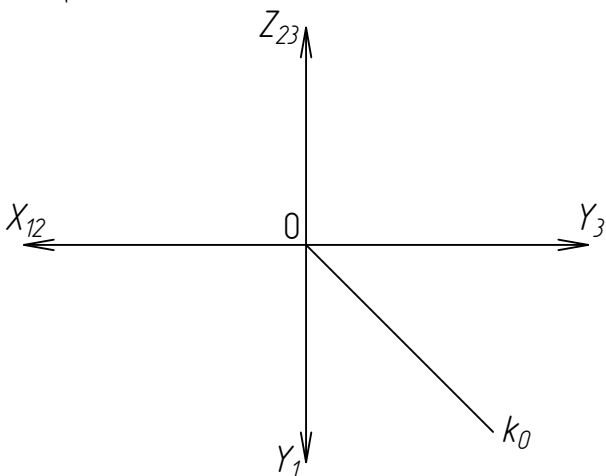
2. Определить положение точек  $A, B, C, D, E$  относительно прямой  $l$ . Ответ записать в таблице.



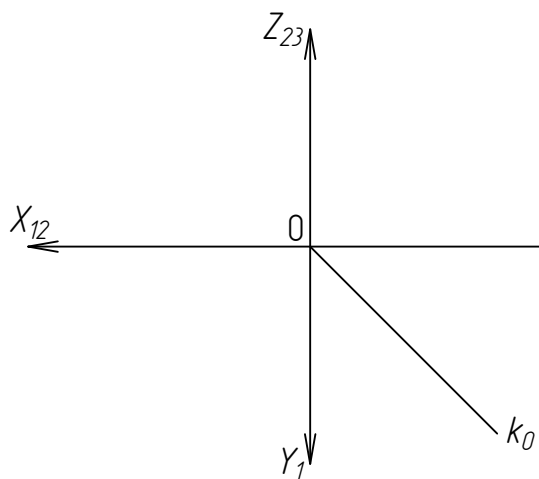
3. На комплексном чертеже задать плоскости общего положения:



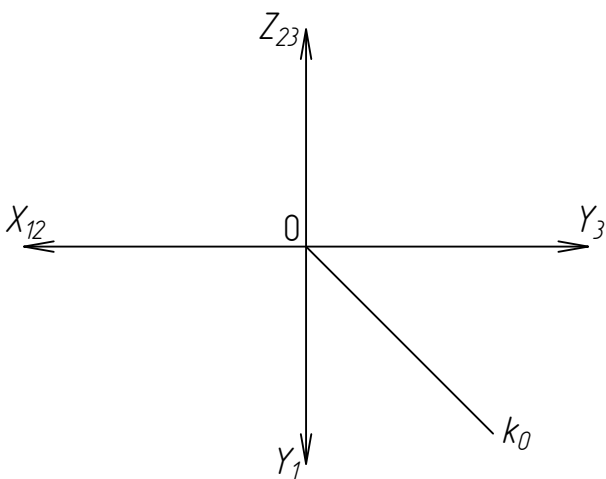
а)  $\Sigma(A, B, C)$



б)  $\Sigma(a \cap b)$

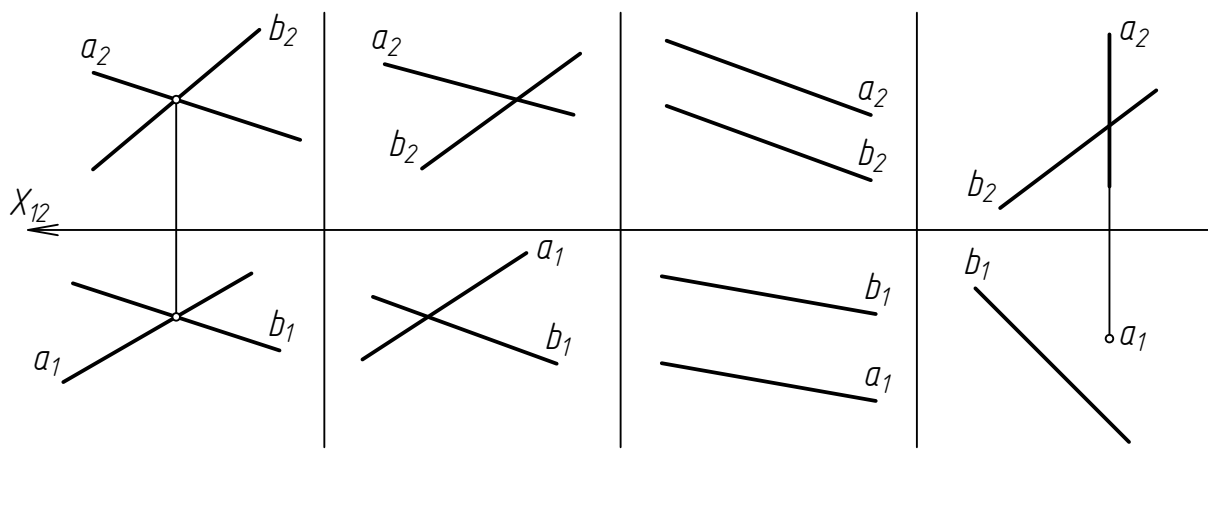


в)  $\Sigma(a \parallel b)$



г)  $\Sigma(a, A)$

4. Определить взаимное положение двух прямых.



# Блок №2

## Прямые и плоскости частного положения

### 2.1 Теоретические положения

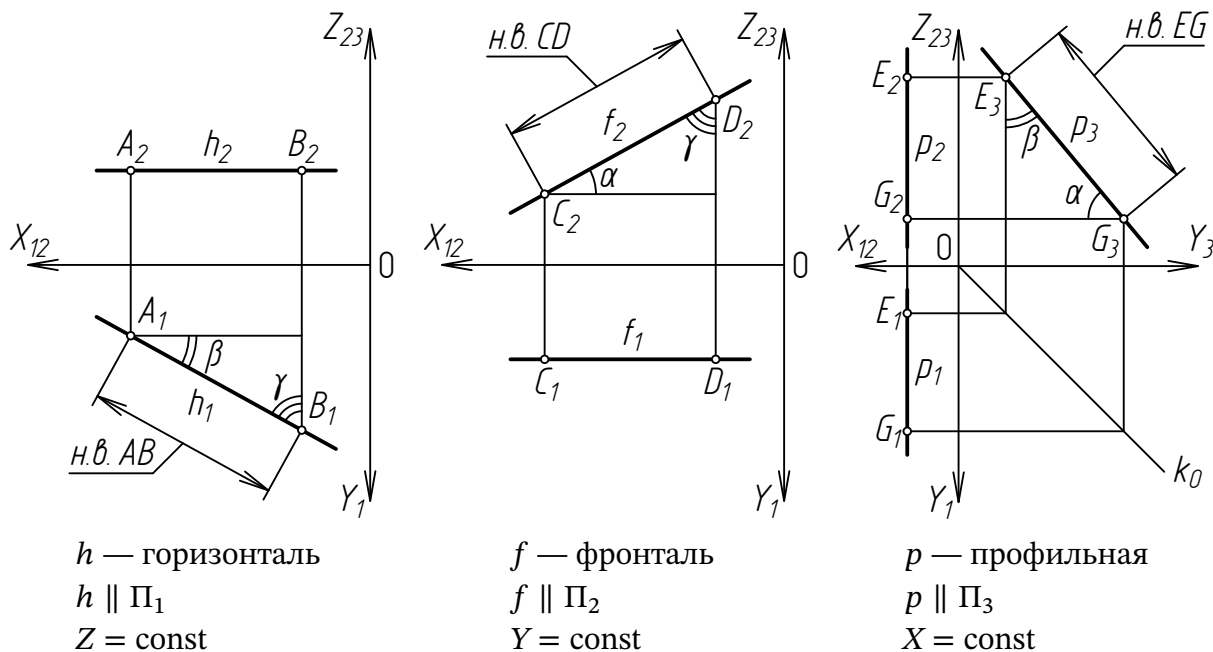


Рис. 2.1 Прямые уровня

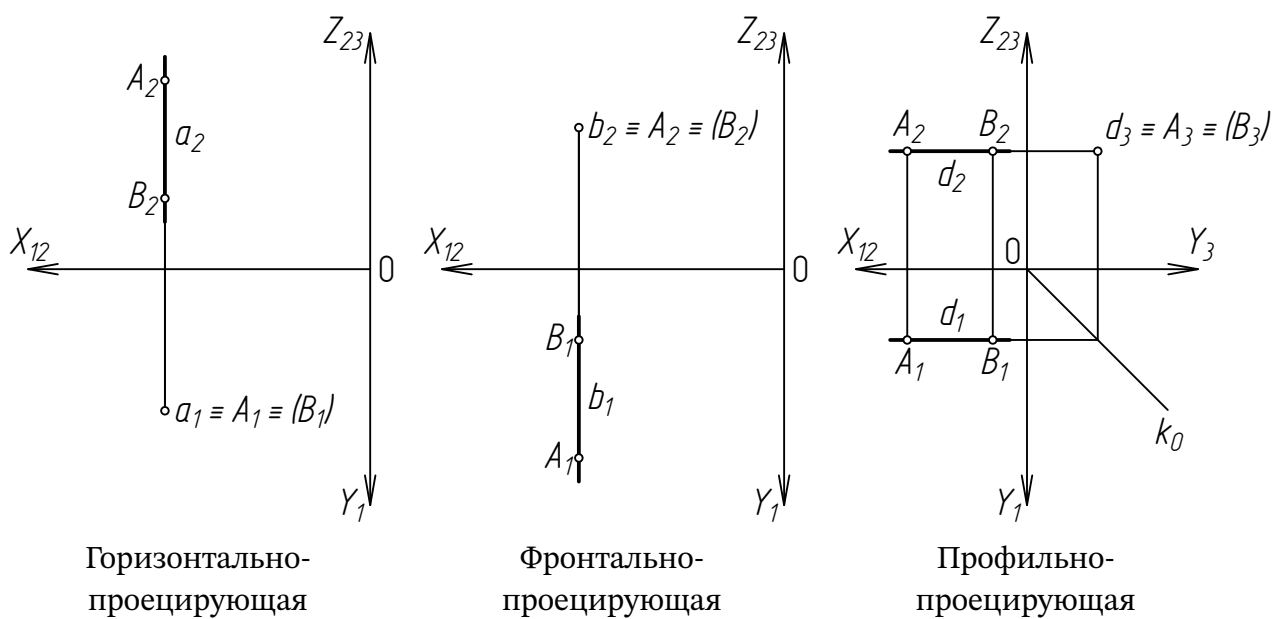
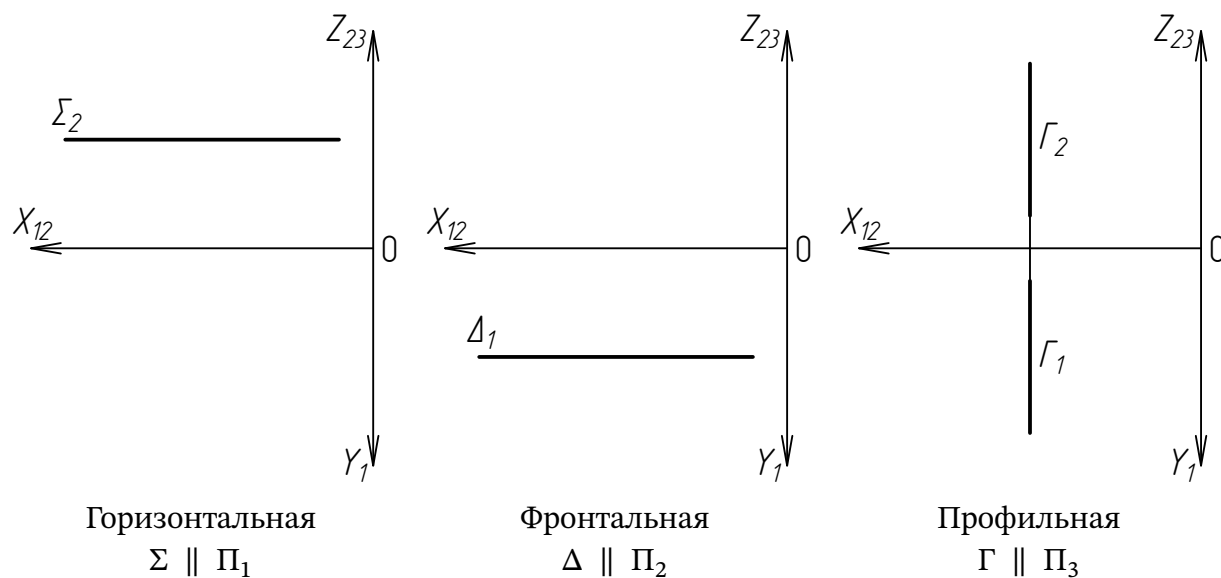


Рис. 2.2 Проецирующие прямые

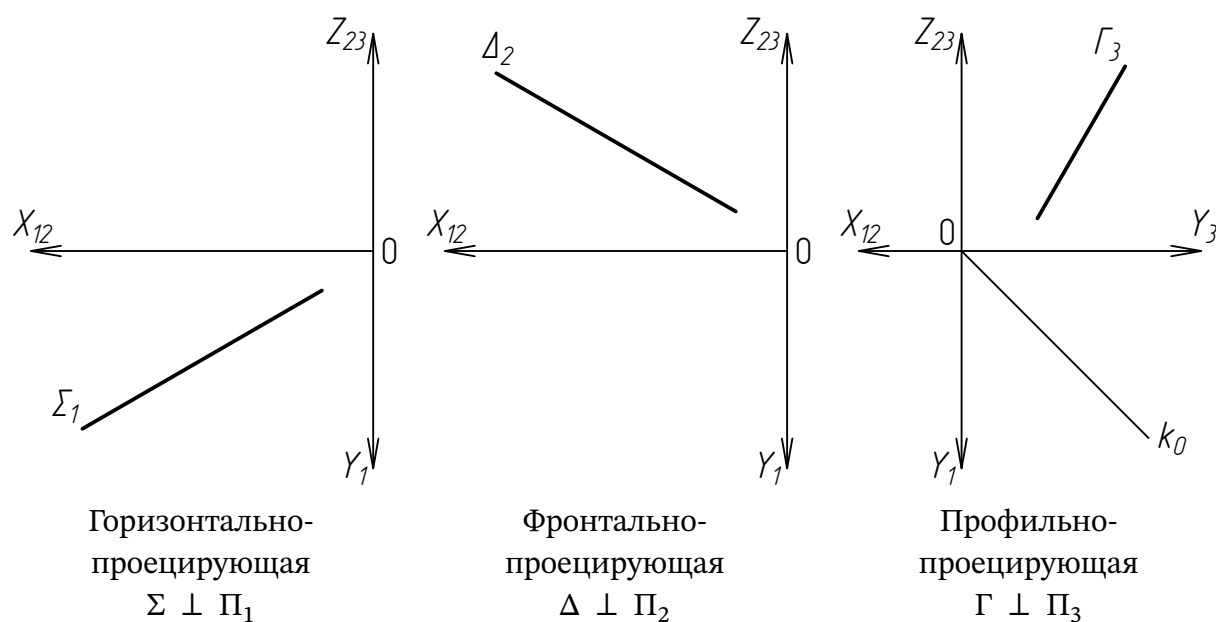
Прямые и плоскости, перпендикулярные или параллельные плоскостям проекций, называются соответственно прямыми и плоскостями *частного положения*, в отличие от прямых и плоскостей общего положения, которые наклонены к плоскостям проекций.

Прямые и плоскости, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются прямыми и плоскостями *уровня*.

Прямые и плоскости, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций, называются *проецирующими*.



**Рис. 2.3** Плоскости уровня



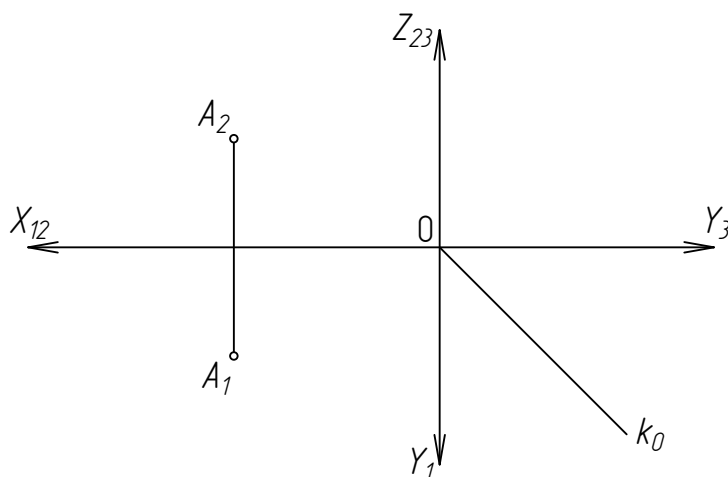
**Рис. 2.4** Проецирующие плоскости

## 2.2 Контрольные вопросы

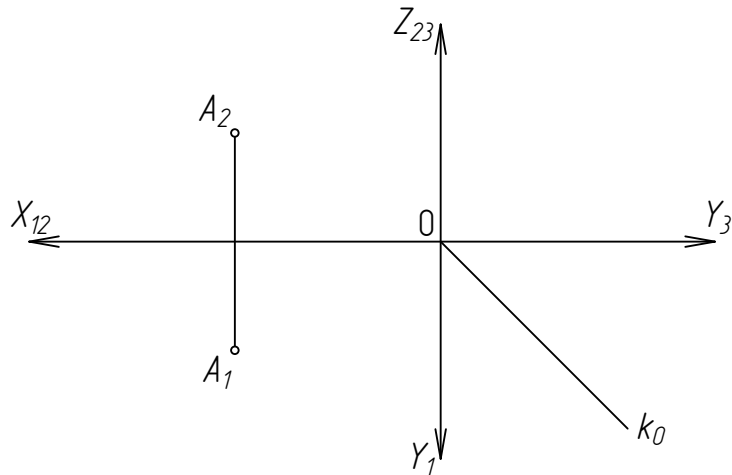
1. Что такое горизонталь? Как расположены её проекции? Основные свойства горизонтали.
2. Что такое фронталь? Как расположены её проекции? Основные свойства фронтали.
3. Что такое профильная прямая? Как расположены её проекции? Основные свойства профильной прямой.
4. Какая прямая называется прямой общего положения?
5. Как отображается ориентация проецирующей прямой в названии?
6. Свойства проецирующей прямой.
7. Что такое конкурирующие точки?
8. Перечислите названия плоскостей в зависимости от их положения по отношению к плоскостям проекций.
9. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?

## 2.3 Задачи

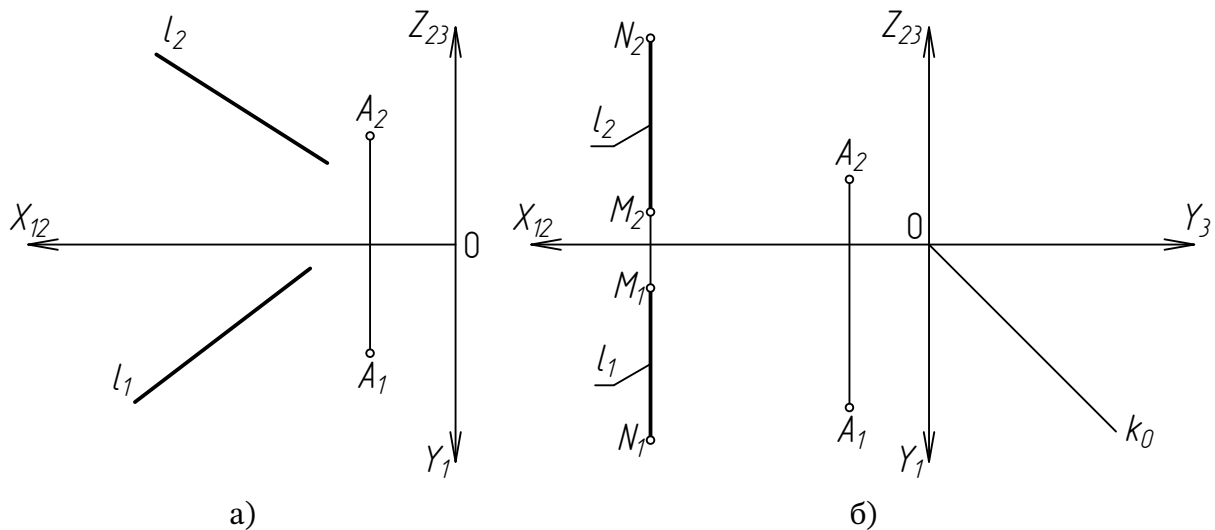
1. Через точку  $A$  провести горизонтально–проецирующую прямую  $a(a_1, a_2)$ , фронтально–проецирующую прямую  $b(b_1, b_2)$ , профильно–проецирующую прямую  $c(c_1, c_2)$ .



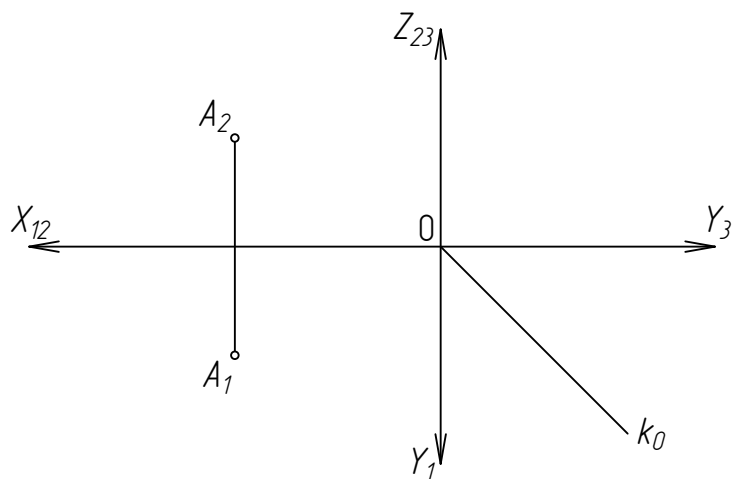
2. Через точку  $A$  провести горизонталь  $h$  под углом  $45^\circ$  к  $\Pi_2$  и фронталь  $f$  под углом  $30^\circ$  к  $\Pi_1$ .



3. Через точку  $A$  провести горизонталь  $h$  и фронталь  $f$ , пересекающие прямую  $l$ .

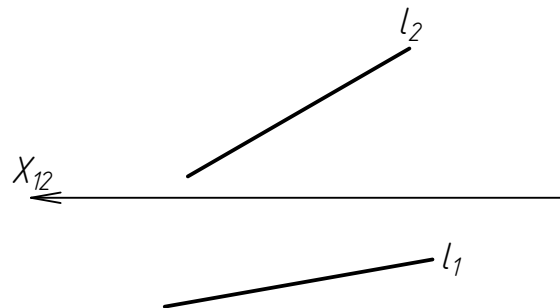


4. Через точку  $A$  провести горизонтально-проецирующую плоскость  $\Sigma$  под углом  $30^\circ$  к  $\Pi_2$ , фронтально-проецирующую плоскость  $\Delta$  под углом  $45^\circ$  к  $\Pi_1$ , а также горизонтальную и фронтальную плоскости уровня  $\Theta$  и  $\Psi$ .

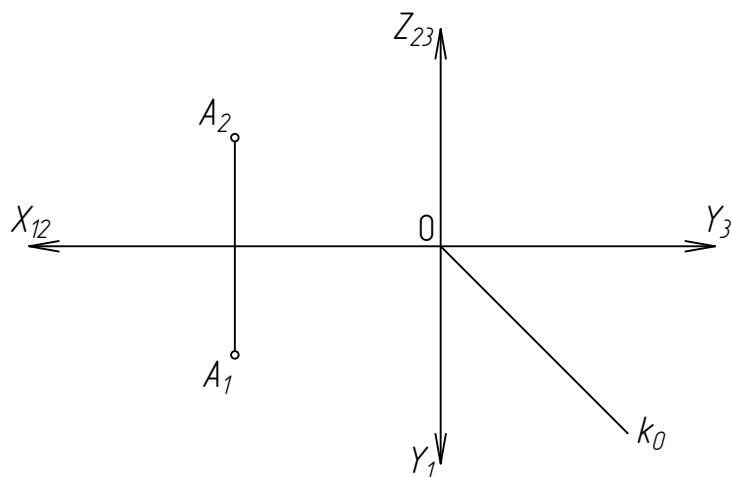




5. Через прямую  $l$  провести горизонтально-проецирующую плоскость  $\Sigma$  и фронтально-проецирующую плоскость  $\Delta$ .



6. Через точку  $A$  провести плоскости уровня: горизонтальную  $\Sigma$ , фронтальную  $\Delta$  и профильную  $\Gamma$ .



7. Через прямые  $l \perp \Pi_2$  и  $m \perp \Pi_1$  провести всевозможные плоскости частного положения.

