Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Рабочая тетрадь

по начертательной геометрии

Студент: ______________________________

Группа: ______________________________

Преподаватель: ______________________________

Москва 2023

Общие положения

Рабочая тетрадь по начертательной геометрии предназначена для студентов (бакалавров, специалистов и магистров) всех факультетов. Материал данной рабочей тетради скомпонован по блочному принципу и предназначен для самостоятельной работы. Максимальное количество блоков равно десяти. Каждый студент в зависимости от количества часов, выделенных в семестровом плане на изучение предмета, обязан изучить определённое количество блоков (последнее определяется программой курса). Знания теоретического материала и решение задач, включённых в блок, контролируются преподавателем на семинарских занятиях и оцениваются по пятибалльной системе. Студент, не освоивший материал конкретного блока, направляется на дополнительные занятия. В конце семестрового периода по результатам изучения всех блоков выставляется средняя оценка. Знания студента, не сдавшего хотя бы один блок, не оцениваются, и до ликвидации задолженности этот студент не допускается ни к зачёту, ни к экзамену. Преподаватель, выставивший среднюю оценку учащемуся, имеет право, с согласия студента, засчитать её как зачётную или экзаменационную.

1 Предисловие

Задачи данного учебного пособия составлены в соответствии с программой курса начертательной геометрии. Преподаватель, ведущий практические занятия в группе студентов, имеет право уменьшить или увеличить количество решаемых задач. Теоретический материал, изложенный в тетради, является базой для подготовки студентов к решению задач.

Решение каждой задачи состоит из двух этапов:

1. пространственное (стереометрическое) решение, при котором определяется последовательность действий для получения искомого геометрического ответа;
2. выполнение составленного плана решения задачи на чертеже с учётом закономерностей метода проекций начертательной геометрии. Решение пространственной задачи с помощью плоскостного (планиметрического) чертежа является главным в начертательной геометрии.

Для успешного решения задач студенту необходимы твёрдые знания основных теорем элементарной геометрии — планиметрии и стереометрии.

В данной рабочей тетради все чертежи должны быть выполнены максимально аккуратно и точно, с соблюдением всех требований **Государственных стандартов ЕСКД** по оформлению чертежа (типы линий, шрифт и т. п.)

Все построения (вспомогательные линии, линии связи) следует выполнять тонкими линиями простым карандашом. Результаты решения задач рекомендуется обводить основной линией чертежа.

Все заданные и получаемые элементы чертежа необходимо обозначать следующим образом:

точки — прописными буквами латинского алфавита — A, B, C, D, ..., или арабскими цифрами — 1, 2, 3, 4, ... (для вспомогательных построений);

прямые — строчными буквами латинского алфавита — a, b, c, d, ...;

прямые уровня — горизонталь — h, фронталь — f, профильная прямая — p;

поверхности и плоскости — прописными буквами греческого алфавита — Γ, Δ, Θ, Λ, Σ, Φ, Ψ, Ω, ...;

углы — строчными буквами греческого алфавита — α, β, γ, δ, ϕ, ...;

плоскости проекций — прописной буквой греческого алфавита Π (пи) с соответствующим нижним индексом: Π_1 — горизонтальная, Π_2 — фронтальная, Π_3 — профильная плоскости проекций;

дополнительные плоскости проекций — прописной буквой греческого алфавита Π (пи) с соответствующим нижним индексом — Π_4, Π_5, ...;

проекции точек, линий и поверхностей — теми же буквами с добавлением индекса плоскости проекций, на которую спроецирован объект. Так, проекции точки A, прямой a и плоскости Γ соответственно надо обозначать: на плоскости Π_1 — A_1, a_1, Γ_1, на плоскости Π_2 — A_2, a_2, Γ_2, на плоскости Π_3 — A_3, a_3, Γ_3;

$=$ — проекции двух элементов совпадают: $A_2 = B_2$;

$\in$ — точка (элемент множества) принадлежит геометрической фигуре (множеству): $A \in m$, $B \in \Sigma$;

$\cap$ — пересечение множеств: $a \cap \Delta$, $b \cap c$;

$\cup$ — объединение множеств: $[AB] \cup [BC]$ — ломаная ABC;

2 Свойства ортогонального проецирования

1. Проекция точки — всегда точка.
2. Проекция прямой в общем случае — прямая.
3. Если прямая параллельна направлению проецирования, то она проецируется в точку. Такая проекция прямой обладает собирательным свойством: все точки прямой проецируются в одну точку.
4. Проекция точки, принадлежащей некоторой прямой, принадлежит проекции этой прямой.
5. Точка пересечения прямых проецируется в точки пересечения проекций этих прямых, как принадлежащая им обеим, согласно предыдущему свойству.

6. Проекция прямой, принадлежащей какой-либо поверхности, принадлежит проекции этой поверхности. В свою очередь, проекция точки, лежащей на поверхности, принадлежит проекции хотя бы одной прямой этой поверхности.
7. Параллельные прямые пространства проецируются в параллельные.
8. Если плоская фигура принадлежит плоскости, параллельной плоскости проекций, то проекция этой фигуры конгруэнтна (равна) самой фигуре.
9. Проекция точки на отрезке делит проекцию отрезка в том же отношении, в каком точка делит отрезок.

Блок №1

Комплексный чертёж точки, прямой, плоскости

1.1 Теоретические положения

Три взаимно перпендикулярных плоскости Π_1, Π_2, Π_3 делят пространство на восемь частей — октантов.

Рассмотрим первый октант. Он представлен на рис. 1.1. Π_1 — горизонтальная, Π_2 — фронтальная и Π_3 — профильная плоскости проекций. Оси X, Y, Z являются осями проекций (осями координат). Осям присваивают индексы плоскостей, по ним пересекающихся: X_{12}, Y_{13}, Z_{23}. Для получения плоского комплексного чертежа (он может быть двухкартинным или трёхкартинным) плоскость Π_1 поворачивают вокруг оси X, а плоскость Π_3 — вокруг оси Z до совмещения с плоскостью Π_2. Ось Y_{13} раздваивается на Y_1, уходящую вниз вместе с Π_1, и на Y_3, уходящую вправо вместе с Π_3.

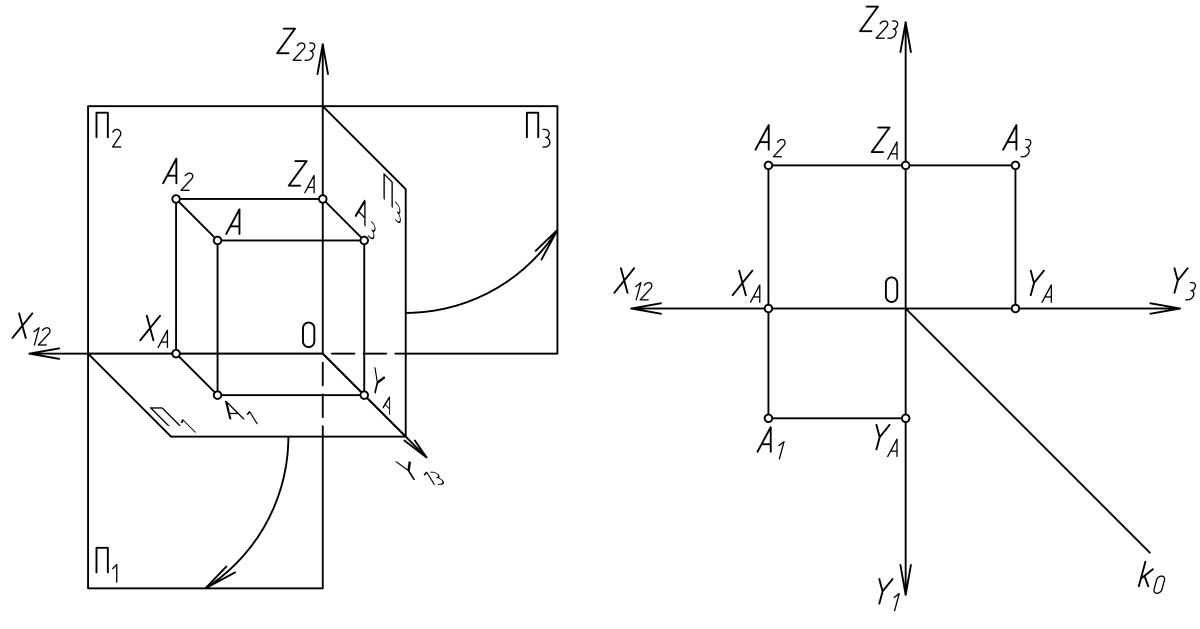


Рис. 1.1 Трёхкартинный комплексный чертёж

Комплексный чертёж точки

Точку A, расположенную в пространстве первого октанта, проецируем ортогонально на каждую из плоскостей проекций (рис. 1.1):

A_1 — горизонтальная, A_2 — фронтальная, A_3 — профильная проекции точки A.

AA_1 — высота точки A (координата Z), AA_2 — глубина точки A (координата Y), AA_3 — широта точки A (координата X).

На комплексном чертеже прямые A_1A_2 и A_2A_3 связывают соответствующие проекции и передают координаты X и Z. Они называются *вертикальной и горизонтальной линиями связи*. Для графической трансляции координаты Y используют *ломаную линию связи*, которая преломляется под прямым углом на *постоянной прямой чертежа* k_0, проведённой под углом 45° к оси Y (рис. 1.2).

Комплексный чертёж прямой

Прямая линия бесконечна. Две точки прямой определяют её положение в пространстве. Положение прямой можно задать также одной точкой и направлением (рис. 1.3).

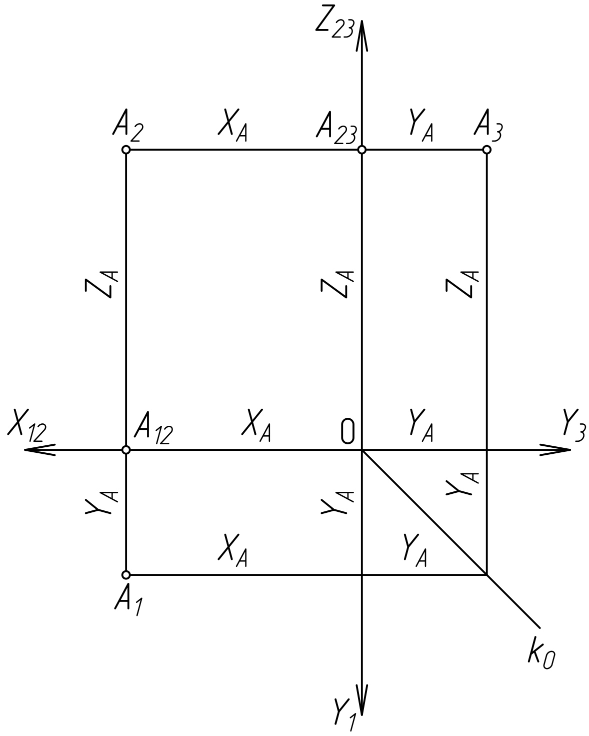


Рис. 1.2 Комплексный чертёж точки

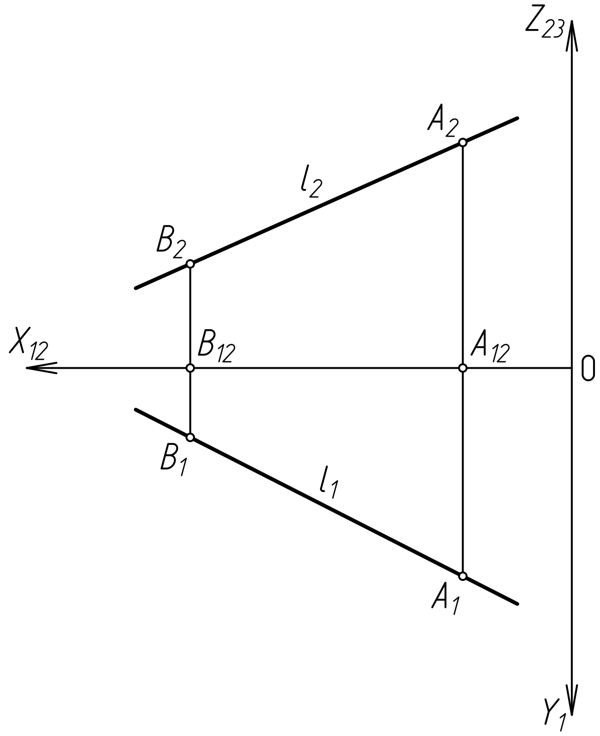


Рис. 1.3 Комплексный чертёж прямой

Комплексный чертёж плоскости

Плоскость в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой — $\Sigma(A, B, C)$. Ту же плоскость можно задать точкой и прямой — $\Sigma(a, C)$, двумя пересекающимися прямыми — $\Sigma(a \cap b)$, двумя параллельными прямыми — $\Sigma(a \parallel b)$. Наиболее наглядно задание плоскости представляется тремя точками, соединёнными отрезками прямых, то есть треугольником. На комплексном чертеже любая плоскость может быть задана проекциями элементов, определяющих её положение в пространстве (рис. 1.4). В ходе решения задачи иногда приходится переходить от одного задания плоскости к другому.

1.2 Контрольные вопросы

1. В чём состоит метод проецирования?
2. Почему чертежи называются проекционными?

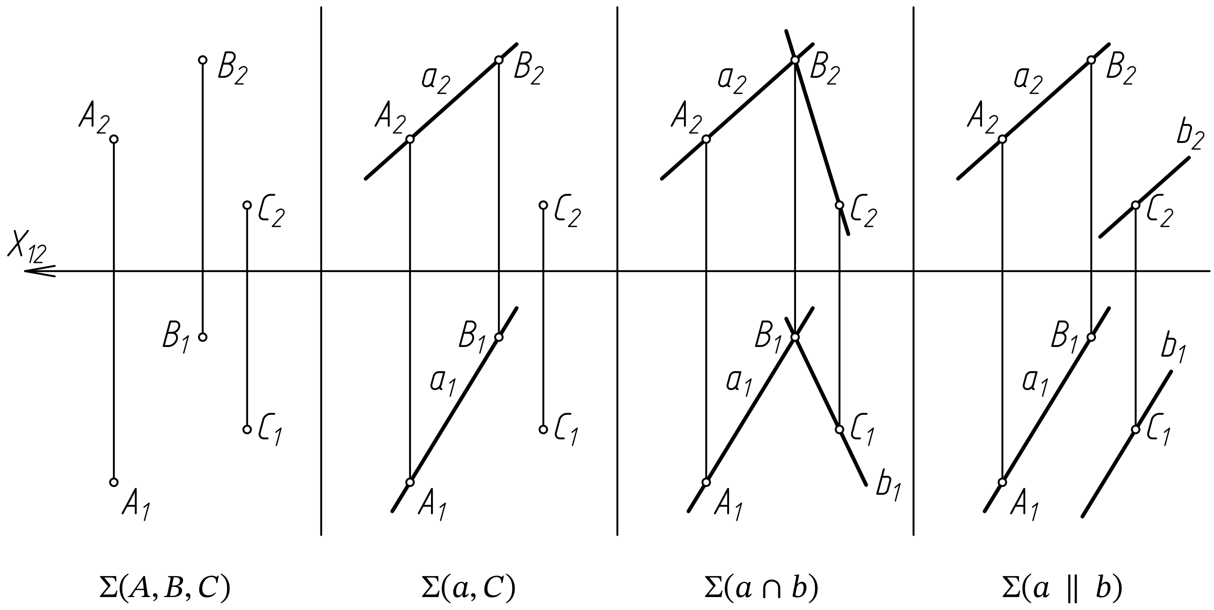
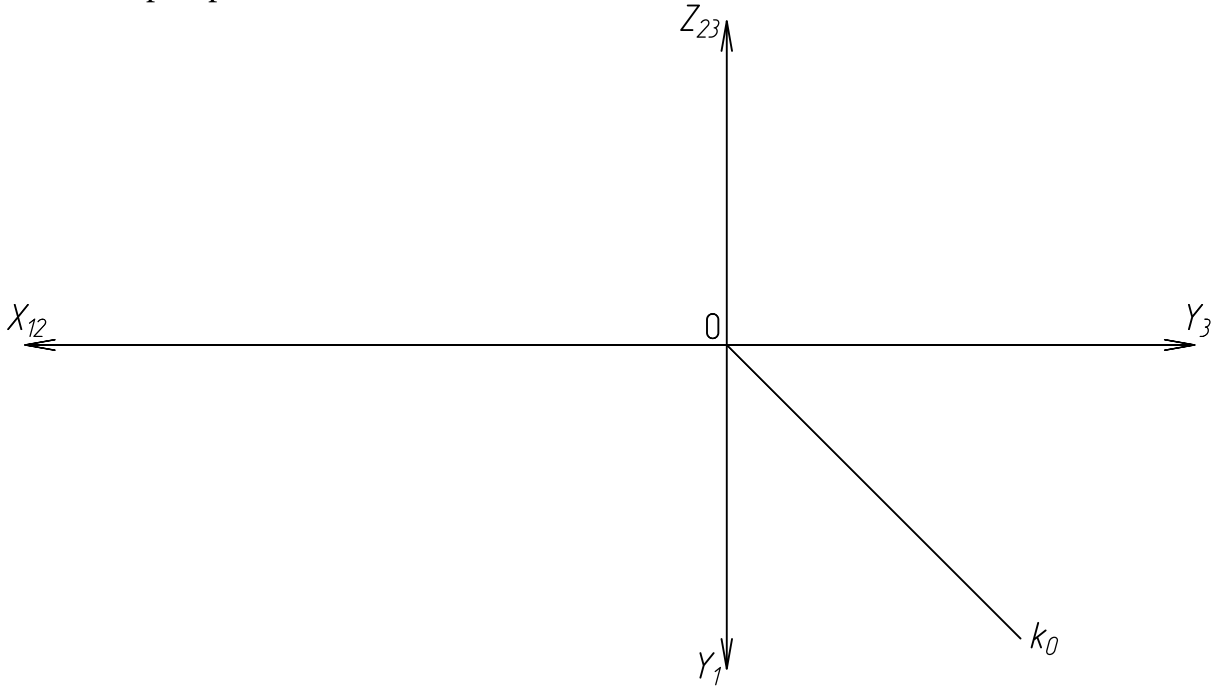


Рис. 1.4 Комплексный чертёж плоскости

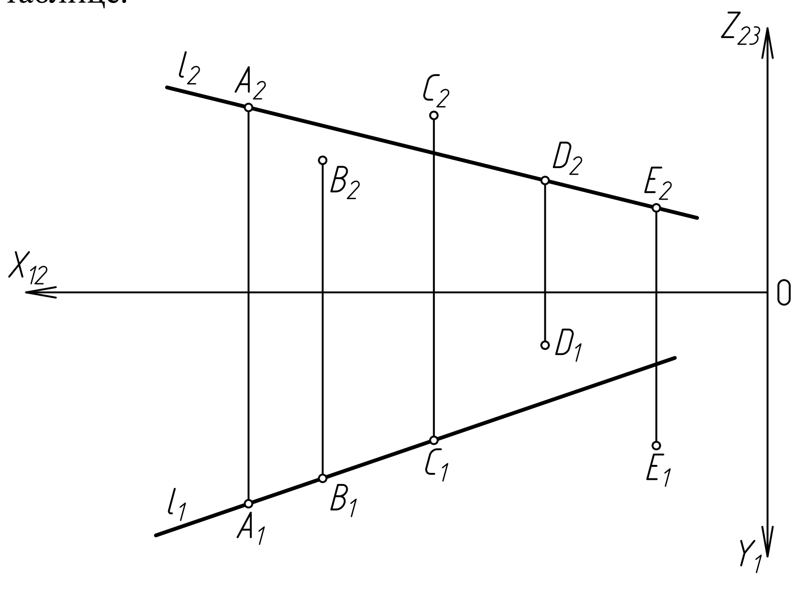
3. Перечислите свойства ортогонального проецирования.
4. Какой проекционный чертёж является обратимым?
5. Как образуется эпюр Монжа? Дайте определение комплексного чертежа.
6. Как образуется трёхкартинный комплексный чертёж?
7. Что представляет собой постоянная прямая чертежа k_0?
8. Что на комплексном чертеже является характерным признаком параллельности прямых в пространстве?
9. Что на комплексном чертеже является характерным признаком пересекающихся в пространстве прямых?
10. Что на комплексном чертеже является характерным признаком скрещивающихся в пространстве прямых?
11. Перечислите варианты взаимного положения точки и прямой.

1.3 Задачи

1. Построить комплексный чертёж точек $A(70, 20, 0)$ и $B(20, 40, 30)$. Обозначить высоту и глубину точек. Через точки A и B провести прямую $a(a_1, a_2)$ и представить её положение в пространстве.

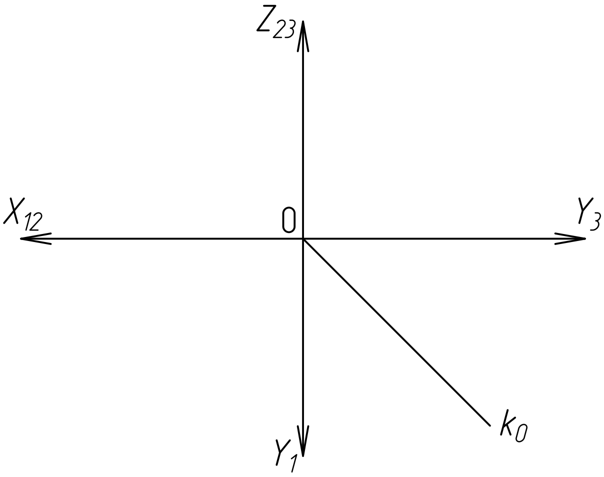


2. Определить положение точек A, B, C, D, E относительно прямой l. Ответ записать в таблице.

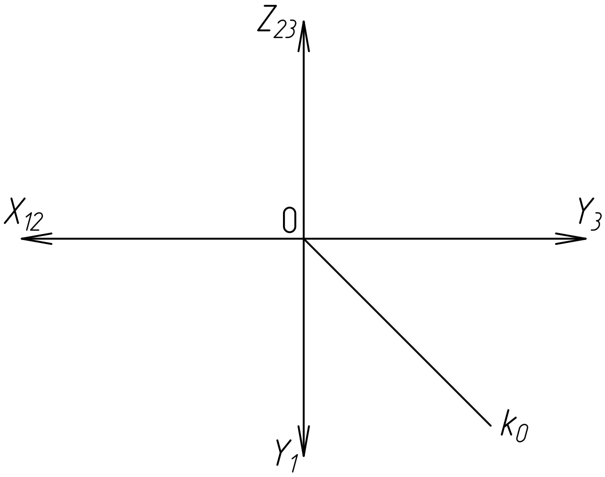


Точка	Положение относительно l
A	
B	
C	
D	
E	

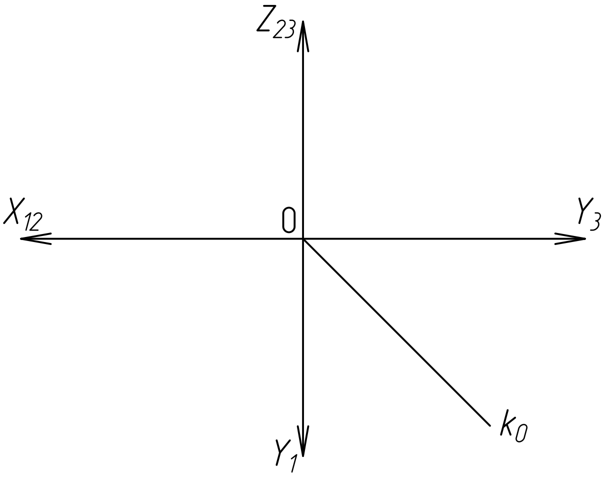
3. На комплексном чертеже задать плоскости общего положения:



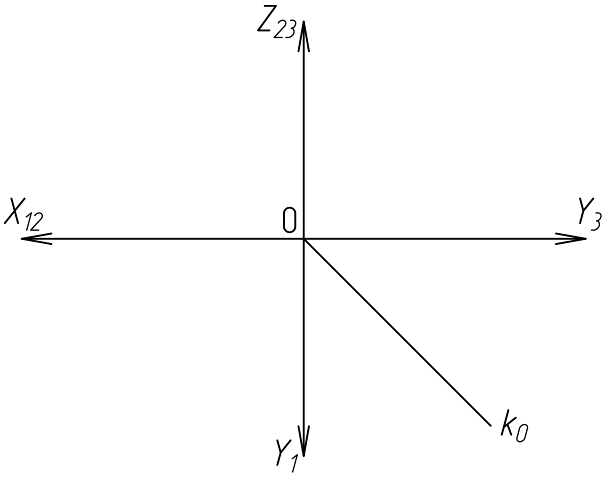
а) $\Sigma(A, B, C)$



б) $\Sigma(a \cap b)$

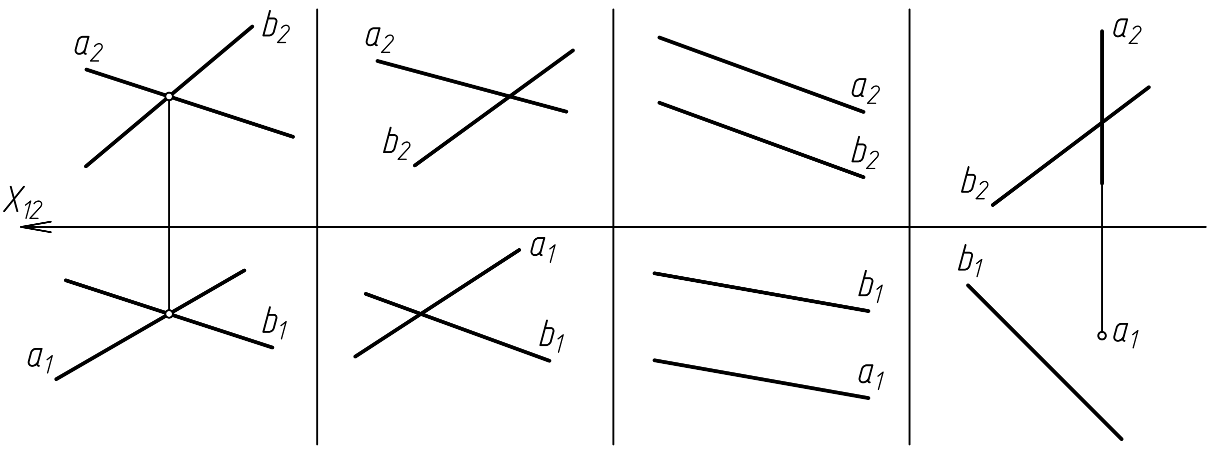


в) $\Sigma(a \parallel b)$



г) $\Sigma(a, A)$

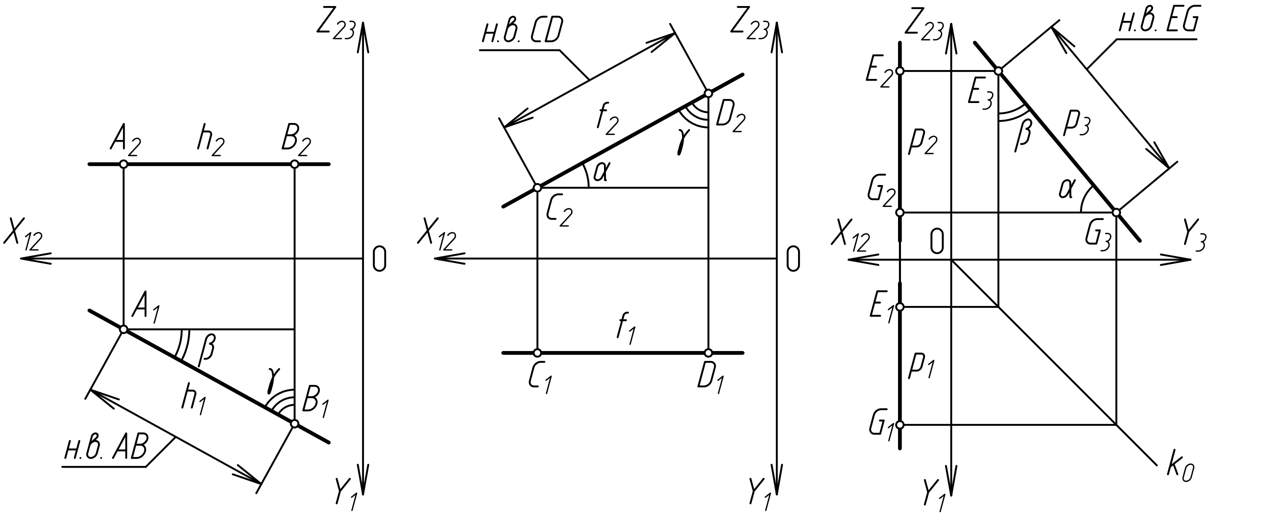
4. Определить взаимное положение двух прямых.



Блок №2

Прямые и плоскости частного положения

2.1 Теоретические положения

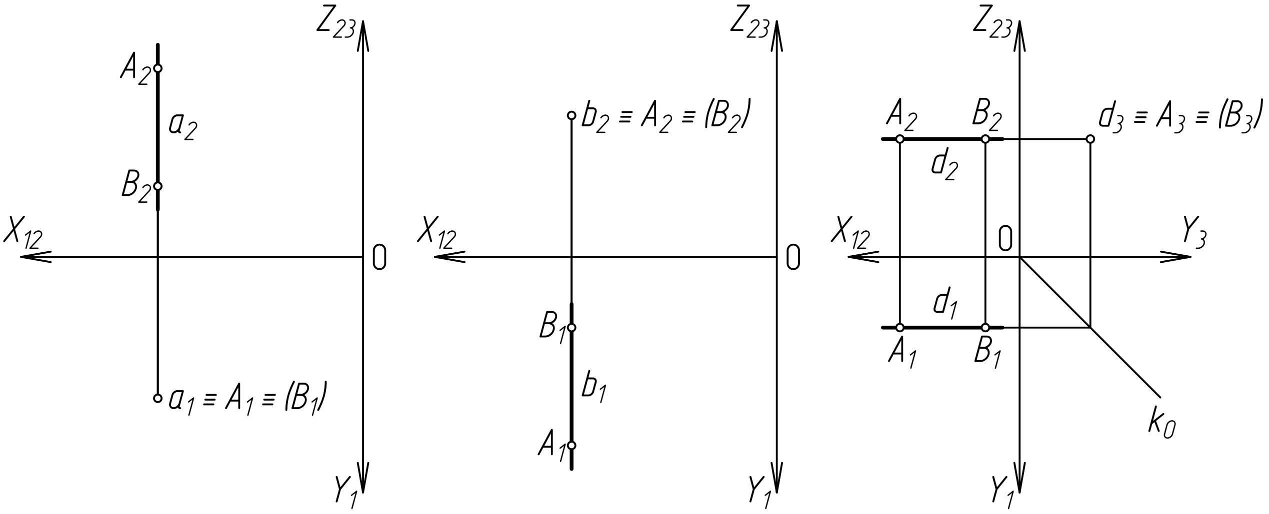


h — горизонталь
$h \parallel \Pi_1$
$Z = \text{const}$

f — фронталь
$f \parallel \Pi_2$
$Y = \text{const}$

p — профильная
$p \parallel \Pi_3$
$X = \text{const}$

Рис. 2.1 Прямые уровня



Горизонтально-
проецирующая

Фронтально-
проецирующая

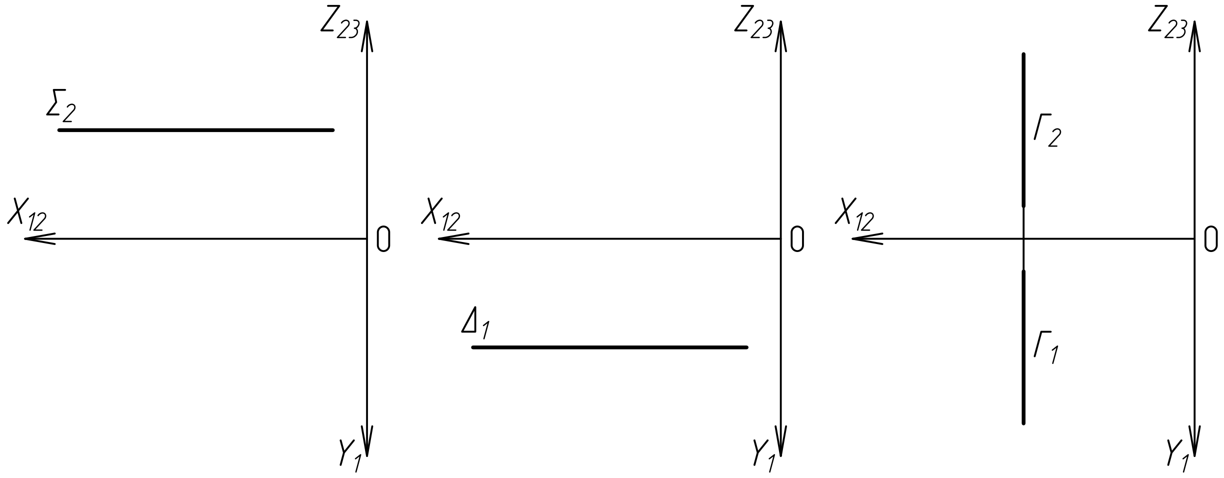
Профильно-
проецирующая

Рис. 2.2 Проецирующие прямые

Прямые и плоскости, перпендикулярные или параллельные плоскостям проекций, называются соответственно прямыми и плоскостями *частного положения*, в отличие от прямых и плоскостей общего положения, которые наклонены к плоскостям проекций.

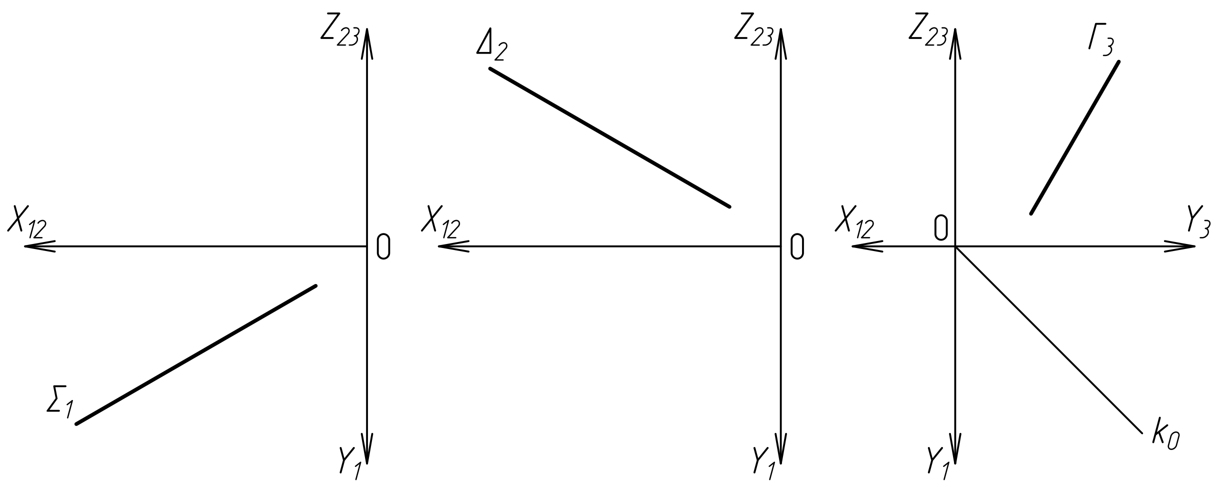
Прямые и плоскости, параллельные какой–либо плоскости проекций, называются прямыми и плоскостями *уровня*.

Прямые и плоскости, перпендикулярные какой–либо плоскости проекций, называются *проецирующими*.



Горизонтальная $\Sigma \parallel \Pi_1$ | Фронтальная $\Delta \parallel \Pi_2$ | Профильная $\Gamma \parallel \Pi_3$

Рис. 2.3 Плоскости уровня



Горизонтально-проецирующая $\Sigma \perp \Pi_1$ | Фронтально-проецирующая $\Delta \perp \Pi_2$ | Профильно-проецирующая $\Gamma \perp \Pi_3$

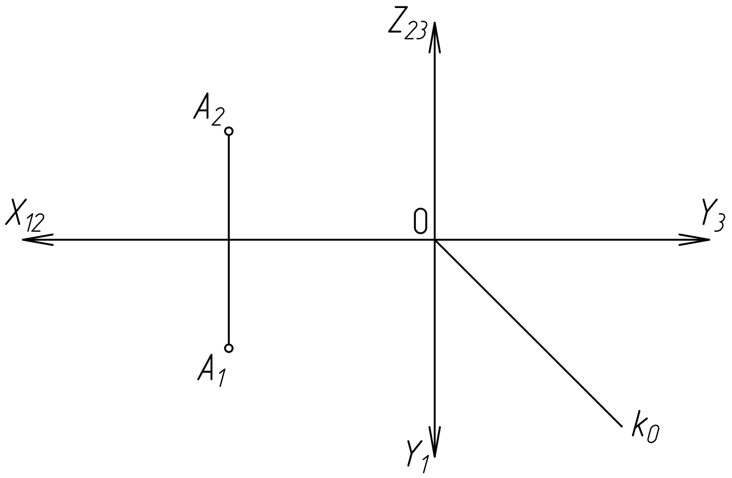
Рис. 2.4 Проецирующие плоскости

2.2 Контрольные вопросы

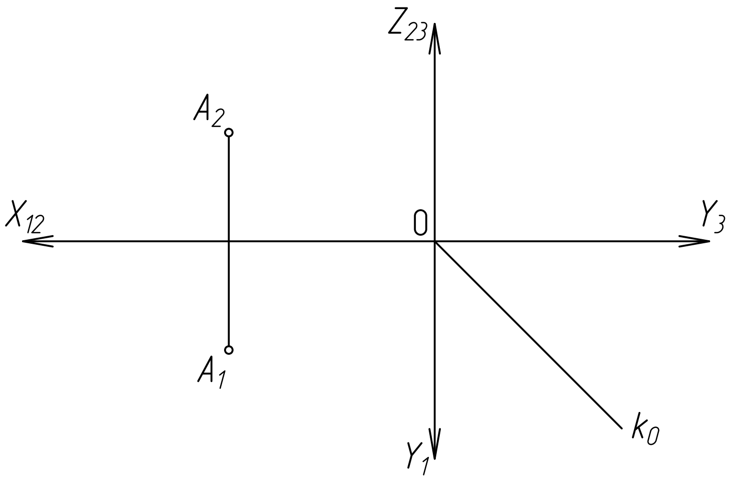
1. Что такое горизонталь? Как расположены её проекции? Основные свойства горизонтали.
2. Что такое фронталь? Как расположены её проекции? Основные свойства фронтали.
3. Что такое профильная прямая? Как расположены её проекции? Основные свойства профильной прямой.
4. Какая прямая называется прямой общего положения?
5. Как отображается ориентация проецирующей прямой в названии?
6. Свойства проецирующей прямой.
7. Что такое конкурирующие точки?
8. Перечислите названия плоскостей в зависимости от их положения по отношению к плоскостям проекций.
9. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?

2.3 Задачи

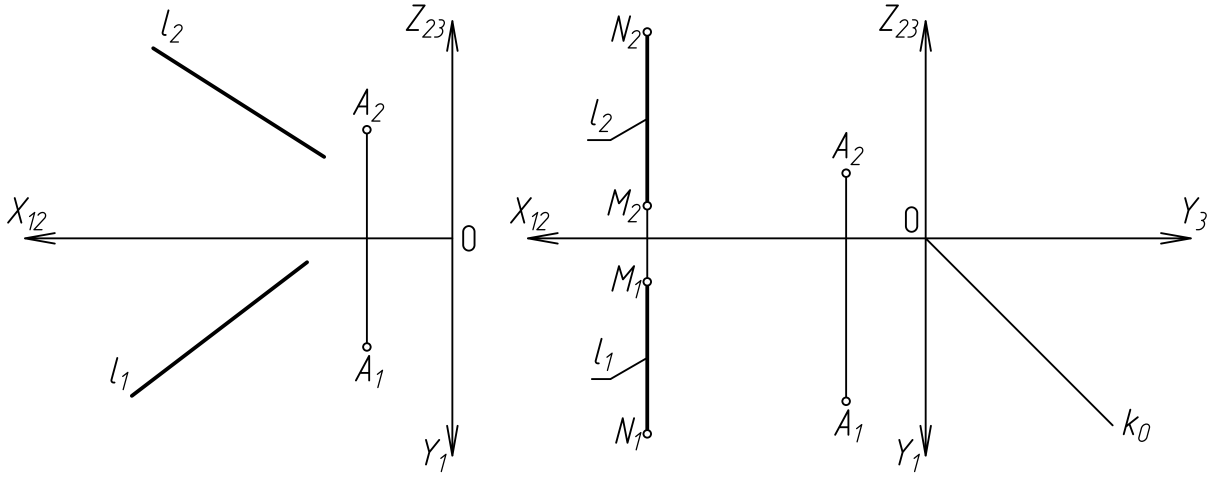
1. Через точку A провести горизонтально–проецирующую прямую $a(a_1, a_2)$, фронтально–проецирующую прямую $b(b_1, b_2)$, профильно–проецирующую прямую $c(c_1, c_2)$.



2. Через точку A провести горизонталь h под углом 45° к Π_2 и фронталь f под углом 30° к Π_1.

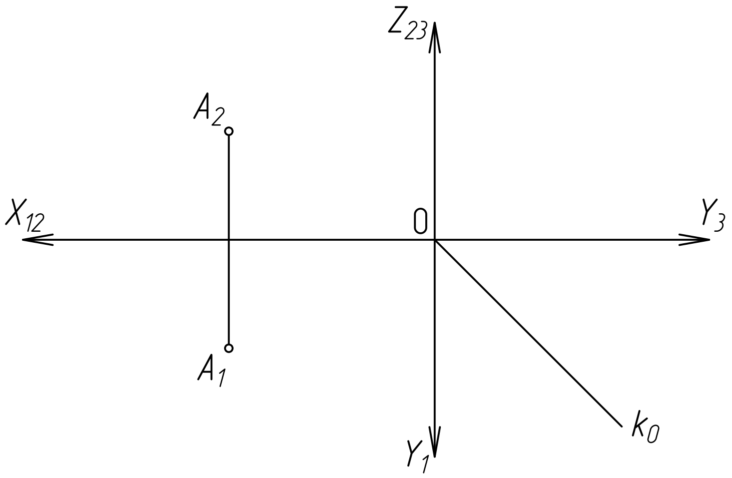


3. Через точку A провести горизонталь h и фронталь f, пересекающие прямую l.

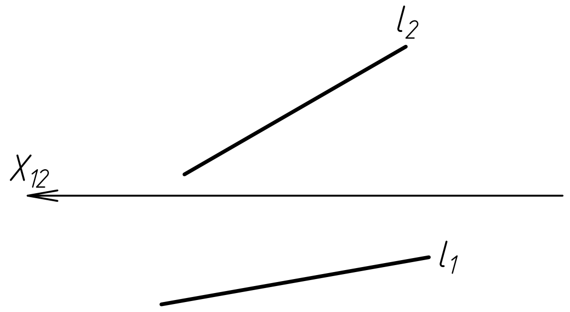


а) б)

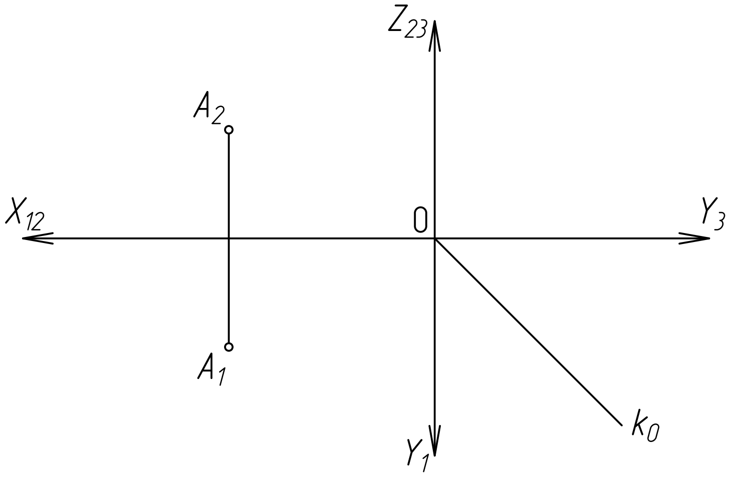
4. Через точку A провести горизонтально–проецирующую плоскость Σ под углом 30° к Π_2, фронтально–проецирующую плоскость Δ под углом 45° к Π_1, а также горизонтальную и фронтальную плоскости уровня Θ и Ψ.



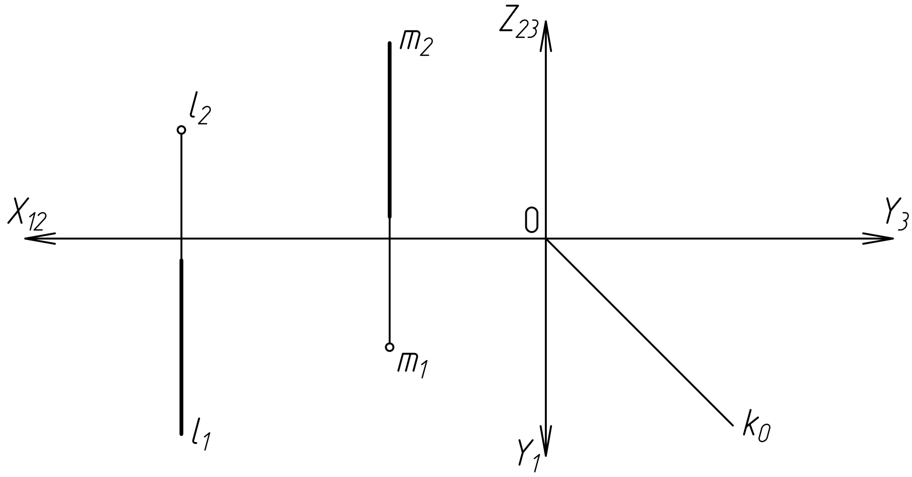
5. Через прямую l провести горизонтально–проецирующую плоскость Σ и фронтально–проецирующую плоскость Δ.



6. Через точку A провести плоскости уровня: горизонтальную Σ, фронтальную Δ и профильную Γ.



7. Через прямые $l \perp \Pi_2$ и $m \perp \Pi_1$ провести всевозможные плоскости частного положения.



Блок №3

Позиционные задачи

3.1 Теоретические положения

Под *позиционными* задачами понимаются задачи на определение взаимного положения различных геометрических фигур. К ним относятся задачи на взаимную принадлежность и на пересечение.

Задачи на взаимную принадлежность

Точка принадлежит прямой, если проекции точки принадлежат одноимённым проекциям прямой: $A \in a \iff A_1 \in a_1,\ A_2 \in a_2$ (рис. ??).

Прямая лежит в плоскости, если две любые её точки принадлежат этой плоскости: $l \subset \Sigma(A, B, C) \iff l \cap AB = 1,\ l \cap AC = 2$ (рис. ??).

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости: $M \in \Sigma(A, B, C) \iff M \in l,\ l \subset \Sigma(A, B, C)$ (рис. ??).

Задачи на пересечение

Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью

Построим точку $K(K_1, K_2) = l(l_1, l_2) \cap \Sigma(\Sigma_2)$ (рис. ??) и определим видимость участков прямой l. Полупрямая, находящаяся выше плоскости Σ, будет видимой на Π_1.

Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения

Построим точку $K(K_1, K_2) = l(l_1, l_2) \cap \Lambda(A, B, C)$, $l \perp \Pi_1$ (рис. ??):

- $l_1 \equiv K_1$;
- строим недостающую проекцию K_2 точки K:
  - проводим прямую $a(a_1)$, проходящую через точку $K(K_1)$ и лежащую в плоскости Λ;
  - строим a_2, учитывая, что $a \subset \Lambda$;
  - получаем $K_2 = a_2 \cap l_2$;
- видимость прямой l определяем способом конкурирующих точек.

Пересечение проецирующей плоскости с плоскостью общего положения

Построим прямую $l(l_1, l_2) = \Delta(\Delta_2) \cap \Psi(A, B, C)$ (рис. ??):

- $l_2 \equiv \Delta_2$;
- строим l_1, учитывая, что $l \subset \Psi$;

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения (***первая основная позиционная задача***)

Построим точку $K(K_1, K_2) = l(l_1, l_2) \cap \Theta(A, B, C)$ и определим видимость прямой l (рис. ??):

- через прямую l проводим вспомогательную проецирующую плоскость, например фронтально–проецирующую плоскость $\Delta(\Delta_2)$;
- строим прямую $m(m_1, m_2) = \Delta \cap \Theta$;
- отмечаем $K_1 = m_1 \cap l_1$, затем $K_2 \in l_2$;
- видимость прямой l определяем способом конкурирующих точек.
  Конкурирующими называются точки, расположенные на одном проецирующем луче. При виде сверху на Π_1 видимой будет та точка, высота которой больше. При виде спереди на Π_2 видимой будет та точка, глубина которой больше.

Пересечение двух плоскостей общего положения (***вторая основная позиционная задача***)

Построим прямую $l(l_1, l_2)$ пересечения двух плоскостей $\Phi(a \cap b)$ и $\Omega(c \parallel d)$ общего положения (рис. ??):

- проводим вспомогательную проецирующую плоскость $\Delta(\Delta_2)$;
- строим две прямые $m = \Phi \cap \Delta$ и $n = \Omega \cap \Delta$;
- отмечаем точку $A = m \cap n$;
- проводим ещё одну вспомогательную проецирующую плоскость Ξ (лучше, если $\Xi \parallel \Delta$);
- строим две прямые $q = \Phi \cap \Xi$ и $r = \Omega \cap \Xi$;
- отмечаем точку $B = q \cap r$;
- получаем искомую прямую $l(A, B)$.

Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельная плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости: $l \parallel m \subset \Sigma \Longrightarrow l \parallel \Sigma$ (рис. ??).

Параллельность двух плоскостей

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости:
$a \cap b,\ m \cap n,\ a \parallel m,\ b \parallel n \Longrightarrow \Theta(a \cap b) \parallel \Phi(m \cap n)$ (рис. ??).

3.2 Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются позиционными?
2. В каких случаях точка принадлежит прямой; плоскости?
3. Когда прямая принадлежит плоскости?
4. Как решается первая основная позиционная задача?
5. Как определить на чертеже видимость точек и прямых?

6. В чём заключается способ плоскостей–посредников?
7. Как решается вторая основная позиционная задача?
8. Сформулируйте условие параллельности прямой и плоскости.
9. Как построить плоскость, параллельную заданной?

3.3 Задачи

1. Определить, лежит ли прямая a в плоскости Θ в следующих случаях:
2. Достроить недостающие проекции прямой l и точки M при условии их принадлежности плоскости $\Lambda(A, B, C)$.
3. Достроить горизонтальную проекцию **плоского** пятиугольника $ABCDE$.
4. Построить горизонталь h и фронталь f, принадлежащие плоскости $\Xi(A, B, C)$.
5. С помощью новых линий уровня построить в плоскости $\Phi(h \cap f)$ отрезок AB, разноимённые концы которого заданы.
6. Построить точку $K = m \cap \Delta$ и определить видимость прямой m.
7. Через точку N провести прямую n, пересекающую скрещивающиеся прямые a и b.
8. Определить проекции прямой q как результат пересечения
9. Определить положение прямой r относительно плоскости Δ.
10. Через точку R провести плоскость, параллельную прямым s и t.
11. Через точку S провести плоскость, параллельную плоскости Ψ.
12. Достроить проекции прямой u, параллельной плоскости Ω.
13. Через точку T провести прямую v, параллельную плоскости Σ.

Блок №4

Метрические задачи

4.1 Теоретические положения

Метрическими называются задачи, связанные с определением расстояний и углов между геометрическими фигурами.

Определение натуральной величины отрезка прямой способом прямоугольного треугольника

Натуральной величиной отрезка AB является гипотенуза прямоугольного треугольника AB^*B, у которого один катет равен горизонтальной проекции отрезка: $AB^* = A_1B_1$, а другой — разности высот концов отрезка: $\delta Z = BB^* = BB_1 - AA_1$.

Рассмотрим комплексный чертёж. Пусть отрезок AB задан проекциями A_1B_1 и A_2B_2. Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1\tilde{B}$ по катетам A_1B_1 и $B_1\tilde{B} = \delta Z_{AB}$. Треугольник $A_1B_1\tilde{B}$ равен треугольнику AB^*B. Гипотенуза $A_1\tilde{B}$ — натуральная величина отрезка AB. Полученный угол α определяет величину наклона отрезка AB к плоскости Π_1.

Аналогично определяется натуральная величина отрезка по его фронтальной проекции и разности глубин его концов.

Ортогональная проекция прямого угла

Теорема. Прямой угол, одна сторона которого параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, проецируется в прямой угол.

Следствие. Если одна из сторон прямого угла является горизонталью, то прямой угол проецируется без искажения на Π_1; если фронталью — на Π_2; если профильной прямой — на Π_3.

Теорема верна как для пересекающихся прямых, так и для скрещивающихся. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол, образованный двумя пересекающимися прямыми, параллельными скрещивающимся.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Теорема. Если прямая l перпендикулярна плоскости Θ, то горизонтальная проекция прямой l перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали ($l_1 \perp h_1$), а фронтальная проекция — фронтальной проекции фронтали ($l_2 \perp f_2$) плоскости Θ:

$l \perp \Theta(h \cap f) \Longleftrightarrow l_1 \perp h_1,\ l_2 \perp h_2.$

Перпендикулярность плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. Через точку можно провести сколь угодно много плоскостей, перпендикулярных другой плоскости; через прямую — только одну.

$a_1 \perp h_1, a_2 \perp f_2 \Longrightarrow \Lambda(h \cap f) \perp \Gamma(a \cap b)$

Линии наибольшего наклона

Линии наибольшего наклона данной плоскости к плоскости проекций — прямые, лежащие в плоскости и составляющие с плоскостями проекций наибольшие углы.

Теорема. Прямые, лежащие в плоскости и перпендикулярные линиям уровня этой плоскости, являются линиями наибольшего наклона.

$AH \perp h$ — линия наибольшего наклона плоскости $\Psi(A, B, C)$ к плоскости Π_1,
$\alpha = \angle(\Psi,\ \Pi_1)$;

$AF \perp f$ — линия наибольшего наклона плоскости $\Omega(A, B, C)$ к плоскости Π_2,
$\beta = \angle(\Omega,\ \Pi_2)$.

4.2 Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются метрическими?
2. Как можно определить углы наклона прямой к плоскостям проекций?
3. В чём состоит способ прямоугольного треугольника?
4. В каком случае прямой угол проецируется в прямой?
5. Как определить угол между скрещивающимися прямыми?
6. Когда две плоскости взаимно перпендикулярны?
7. Что такое линии наибольшего наклона?
8. Как определить угол наклона плоскости к плоскостям проекций?

4.3 Задачи

1. Определить натуральную величину отрезков AB и CD способом прямоугольного треугольника, используя
2. Достроить недостающие проекции прямого угла, образованного пересекающимися прямыми m и n.
3. Из точки A опустить перпендикуляр на горизонталь h и фронталь f и определить его длину.
4. Через точку E провести горизонталь h и фронталь f, перпендикулярные прямой l.
5. Построить проекции ромба $ABCD$, если даны диагональ и проекция A_1 точки A.
6. Через точку T провести прямую r, перпендикулярную данной плоскости:
7. Определить расстояние от точки S до плоскости $\Delta(A, B, C)$.
8. Построить точку N, симметричную точке M относительно плоскости $\Gamma(A, B, C)$.
9. Через точку Q провести плоскость Σ, перпендикулярную данной прямой:
10. Определить расстояние от точки R до прямой t.
11. Построить геометрическое место точек, равноудалённых от точек U и V.

12. На прямой v найти точку, равноудалённую от точек U и W.
13. Из точки A построить перпендикуляр к плоскости $\Theta(A, B, C)$ длиной 40 мм.
14. Используя линии наибольшего наклона, определить угол наклона плоскости $\Lambda(Q, R, S)$:
15. Через прямую $n(n_1, n_2)$ провести перпендикулярную плоскость Ξ:
16. Построить горизонтальную проекцию **равнобедренного** треугольника RST, основанием которого служит отрезок $RS \parallel \Pi_1$.