

Устный Зачёт по Геометрии

Скорбенко Егор

Апрель 2018

Содержание

1	Дайте определение угла между векторами, скалярного произведения векторов. Сформулируйте условие перпендикулярности. Докажите теорему о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты. Выведите формулу для вычисления угла между векторами.	5
1.1	Определения	5
1.2	Теорема о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты.	6
1.3	Вывод формулы для вычисления угла между векторами. .	7
2	Сформулируйте и докажите свойства скалярного произведения векторов.	8
3	Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность.	9
3.1	Определения	9
3.2	Доказательство	9
4	Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.	10
4.1	Определения	10
4.2	Доказательство	10

5 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (длина стороны, радиус вписанной окружности, площадь) через радиус описанной окружности.	11
6 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности, площадь) через длину стороны.	11
6.1 Определения	11
6.2 Формулы	11
7 Выведите формулы для вычисления радиуса описанной окружности и радиуса вписанной окружности в произвольном треугольнике	12
8 Дайте определения градуса и радиана. Выразите приближенное значение одного радиана в градусах. Выведите формулы для нахождения длины дуги через ее градусную меру и радианную.	12
8.1 Определения	12
8.2 Формула через радианную меру	12
8.3 Формула через градусную меру	12
9 Выведите формулы для нахождения площадей частей круга.	13
9.1 Определения	13
9.2 Формулы	13
10 Сформулируйте свойства и признаки равнобедренной трапеции. Сформулируйте и допишите свойство равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями.	13
10.1 Свойства	13
10.2 Признаки	13
10.3 Если диагонали перпендикулярны	13
11 Дайте определение движения. сформулируйте общие свойства. Перечислите виды движений и их свойства.	13
11.1 Определения	13
11.2 Общие свойства	14
11.3 Виды движений	14

12 Докажите теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности. Докажите теорему о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки.	14
12.1 Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности	14
12.2 Теорема о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки.	15
13 Сформулируйте и докажите теорему о величине угла между касательной и хордой.	16
14 Сформулируйте и докажите теоремы о величине углов между пересекающимися хордами, между секущими.	17
15 Сформулируйте и докажите теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.	18
16 Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма и формулу для вычисления длины медианы.	18
17 Сформулируйте признаки подобия треугольников. Докажите один из них по выбору.	20
17.1 Определения	20
17.2 Доказательство	20
18 Сформулируйте и докажите обобщенную теорему синусов.	21
19 Выведите формулы для нахождения пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике. Выведите формулу для нахождения высоты прямоугольного треугольника через его стороны.	23
20 Выведите формулы для нахождения площади треугольника. (Не менее 4)	25
20.1 Стандартная	25
20.2 Формула Герона	26
20.3 Полупериметр и вписанная окружность	26
20.4 Формула через синус	27

21	Выполните формулу площади произвольного четырехугольника и формулу площади дельтоида.	27
21.1	Определения	27
21.2	Формула площади произвольного четырехугольника	27
21.3	Формула площади дельтоида	28
22	Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, вписанной в треугольник. Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, описанной около треугольника.	28
23	Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.	29
24	Сформулируйте и докажите свойства биссектрис параллелограмма.	30
24.1	Биссектриса отсекает равнобедренный треугольник	30
24.2	Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, взаимно перпендикулярны.	30
25	Сформулируйте и докажите три свойства равнобедренной трапеции	31
26	Сформулируйте и докажите признаки прямоугольного треугольника. (Теорема, обратная теореме Пифагора и соотношение медианы и стороны, к которой она приведена.)	31
26.1	Признаки	31
26.2	Теорема, обратная теореме Пифагора.	31
26.3	Теорема соотношения медианы и стороны, к которой она приведена?	32
27	Выполните формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей через стороны правильных треугольника, квадрата и шестиугольника.	32
28	Дайте определение вписанного угла. Сформулируйте и докажите теорему о величине вписанного угла.	32

29 Сформулируйте и докажите свойство медиан в произвольном треугольнике.	33
30 Сформулируйте теорему Чевы. Сформулируйте и докажите теорему Менелая.	33
30.1 Чевы	33
30.2 Менелая	34
31 Сформулируйте и докажите свойства площадей треугольников с равными высотами, треугольников с равным углом и треугольников с равными основаниями.	35
32 Сформулируйте и докажите свойства вписанного и описанного четырехугольника.	35
33 Найдите радиус вписанной и описанной окружностей прямогоугольного треугольника.	37
34 Сформулируйте и докажите условия перпендикулярности и коллинеарность векторов через их координаты.	38

1 Дайте определение угла между векторами, скалярного произведения векторов. Сформулируйте условие перпендикулярности. Докажите теорему о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты. Выведите формулу для вычисления угла между векторами.

1.1 Определения

Угол между векторами- угол между направлениями этих векторов. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Условие перпендикулярности- скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

начинается так: $a \cdot b$ или $a \cdot b$.

По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\hat{\vec{a}} \hat{\vec{b}}). \quad (1)$$

1.2 Теорема о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты.

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} выражается формулой

$$\vec{a} * \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Доказательство

Если хотя бы один из векторов \vec{a} и \vec{b} нулевой, то справедливость равенства (2) очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю. Рассмотрим случай, когда векторы \vec{a} и \vec{b} ненулевые. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны (рис. 304, а), то по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны (рис. 304, б, в).

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то равенство (3) можно записать так: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$, откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2). \quad (4)$$

Векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{b} - \vec{a}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$, $\{x_2; y_2\}$ и $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, поэтому

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= x_1^2 + y_1^2, & |\vec{b}|^2 &= x_2^2 + y_2^2, \\ |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (4), после несложных преобразований получим формулу (2). Теорема доказана.

1.3 Вывод формулы для вычисления угла между векторами.

Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.

Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, деленному на произведение модулей векторов.

$$\cos a = \frac{\bar{a} * \bar{b}}{|\bar{a}| * |\bar{b}|}$$

2 Сформулируйте и докажите свойства скалярного произведения векторов.

начинается так: $a \cdot b$ или $a b$.

По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\hat{\vec{a}\vec{b}}). \quad (1)$$

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

- 1⁰. $\vec{a}^2 \geq 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.
- 2⁰. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).
- 3⁰. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).
- 4⁰. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

Утверждение 1⁰ непосредственно следует из формулы $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, а утверждение 2⁰ — из определения скалярного произведения. Докажем утверждения 3⁰ и 4⁰.

Введём прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} так:

$$\vec{a} \{x_1; y_1\}, \vec{b} \{x_2; y_2\}, \vec{c} \{x_3; y_3\}.$$

Используя формулу (2), получаем

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (x_1 + x_2) x_3 + (y_1 + y_2) y_3 = \\ &= (x_1 x_3 + y_1 y_3) + (x_2 x_3 + y_2 y_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Утверждение 3⁰ доказано.

Докажем теперь утверждение 4⁰. Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1; ky_1\}$, поэтому $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} =$
 $= (kx_1) x_2 + (ky_1) y_2 = k(x_1 x_2 + y_1 y_2) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Замечание

Ясно, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}.$$

3 Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

3.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Окружность называется описанной, если все вершины многоугольника лежат на данной окружности.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

3.2 Доказательство

Доказательство

Пусть $A_1A_2A_3\dots A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 307).

Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1=OA_2=\dots=OA_n$. Так как $\angle A_1=\angle A_2$, то $\angle 1=\angle 3$, поэтому треугольники A_1A_2O равнобедренные; в нём $OA_1=OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_2A_3O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2=A_2A_3$, A_2O — общая сторона и $\angle 3=\angle 4$), следовательно, $OA_3=OA_1$. Точно так же можно доказать, что $OA_4=OA_2$, $OA_5=OA_3$ и т. д.

Итак, $OA_1=OA_2=\dots=OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1 , A_2 , A_3 . Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$ можно описать только одну окружность. Теорема доказана.



Рис. 307

4 Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

4.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Окружность называется вписанной, если все стороны многоугольника касаются данной окружности.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4.2 Доказательство

Доказательство
Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 308). В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \dots = \triangle OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершин O , также будут равны: $OH_1 = OH_2 = \dots = OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, \dots, H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в данный правильный многоугольник.

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2\dots A_n$. Тогда её центр O_1 равнодалён от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1 . Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. Теорема доказана.



Рис. 308



5 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (длина стороны, радиус вписанной окружности, площадь) через радиус описанной окружности.

Докажем, что $S = \frac{1}{2}Pr$.

$$S = \frac{1}{2}Pr = n * \frac{1}{2} * a * r = \frac{1}{2} * (n * a)r$$

ЧТД.

$$\text{Далее: } a_n = 2R * \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$r = R * \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n} * 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

$$a_n = 2 * A_1 * H_1$$

$$r = O * H_1$$

6 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности, площадь) через длину стороны.

6.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

6.2 Формулы

ss112

- 7 Выведите формулы для вычисления радиуса описанной окружности и радиуса вписанной окружности в произвольном треугольнике

???????

- 8 Дайте определения градуса и радиана. Выразите приближенное значение одного радиана в градусах. Выведите формулы для нахождения длины дуги через её градусную меру и радианную.

8.1 Определения

Градус- единица измерения дуг и углов, равная $1/360$ окружности.
Радиан- угол, соответствующий дуге, длина которой равна её радиусу.
 $1 \text{ Градус} \approx 0.0175 \text{ Радиан}$

8.2 Формула через радианную меру

$$l = \frac{\pi R}{180} n$$

8.3 Формула через градусную меру

Градус -> радиан и аналогично пункту 2.

9 Выведите формулы для нахождения площадей частей круга.

9.1 Определения

9.2 Формулы

10 Сформулируйте свойства и признаки равнобедренной трапеции. Сформулируйте и допишите свойство равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями.

10.1 Свойства

10.2 Признаки

10.3 Если диагонали перпендикулярны...

Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота трапеции равна полусумме оснований.

11 Дайте определение движения. сформулируйте общие свойства. Перечислите виды движений и их свойства.

11.1 Определения

Движение плоскости- отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Центральная симметрия плоскости также является движением.

11.2 Общие свойства

11.3 Виды движений

1. Симметрия осевая
2. Симметрия центральная
3. Симметрия зеркальная
4. Симметрия скользящая
5. Параллельный перенос
6. Поворот

12 Докажите теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности. Докажите теорему о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки.

12.1 Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности

Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E (рис. 221). Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Рассмотрим треугольники ADE и CBE . В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписаные и опираются на одну и ту же дугу BD , а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Теорема доказана.

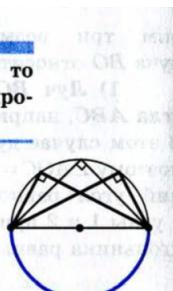
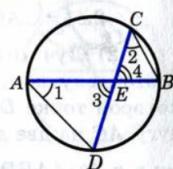


Рис. 220



12.2 Теорема о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки.

$$CB * AC = CD^2$$

ΔACD и ΔDCB

$$\angle ACD = \angle DCB$$

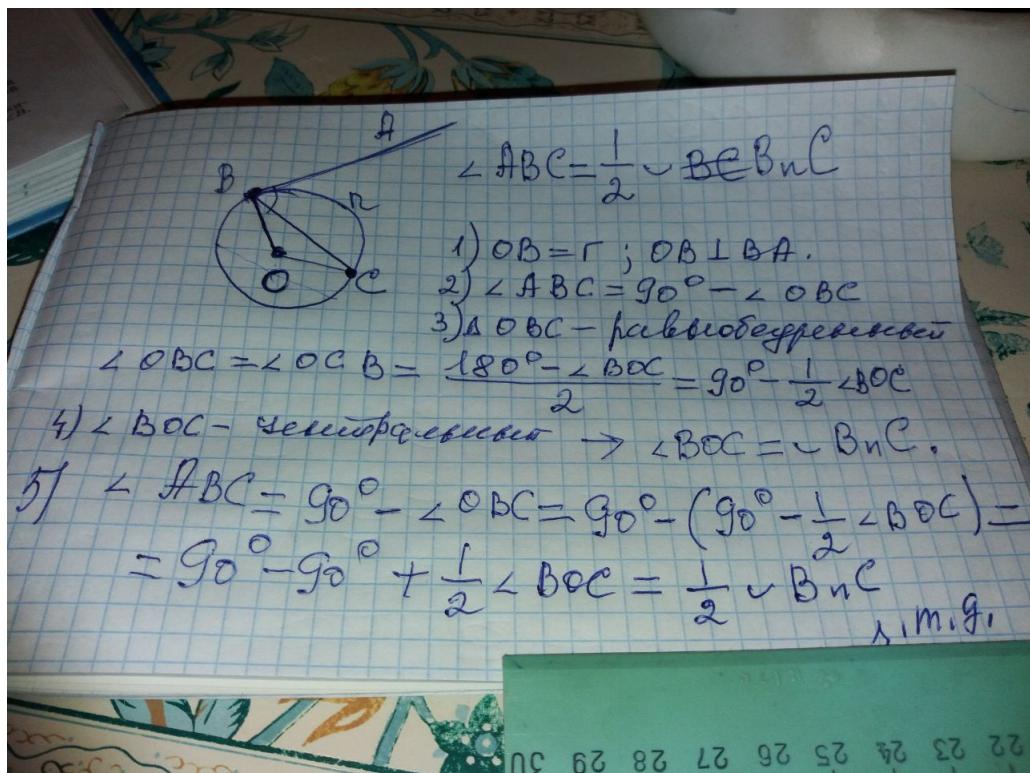
$$\angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AD}$$

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \widehat{AD}$$

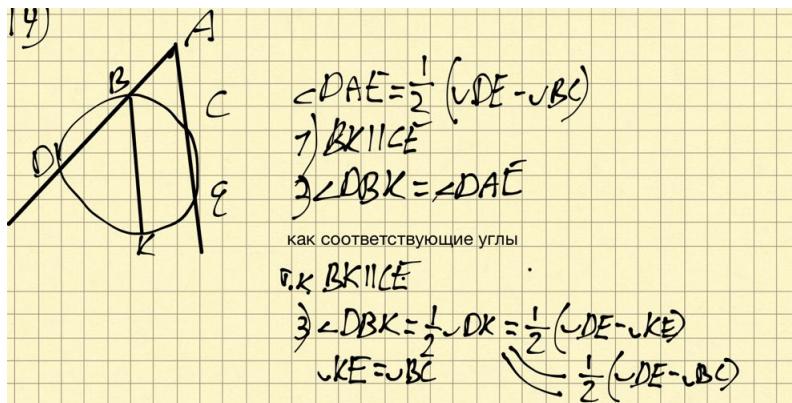
$$\angle ABD = \angle ADC$$

ΔACD подобен ΔDCB .

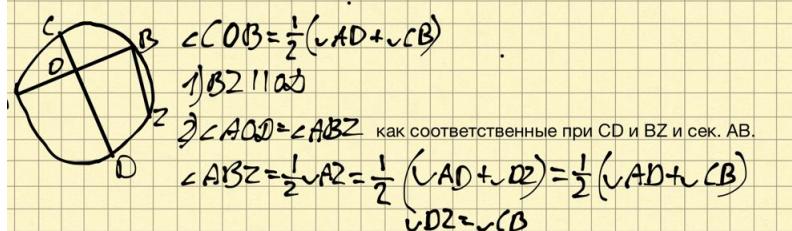
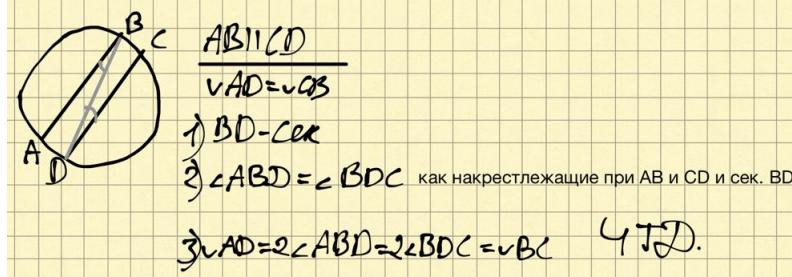
13 Сформулируйте и докажите теорему о величине угла между касательной и хордой.



14 Сформулируйте и докажите теоремы о величине углов между пересекающимися хордами, между секущими.



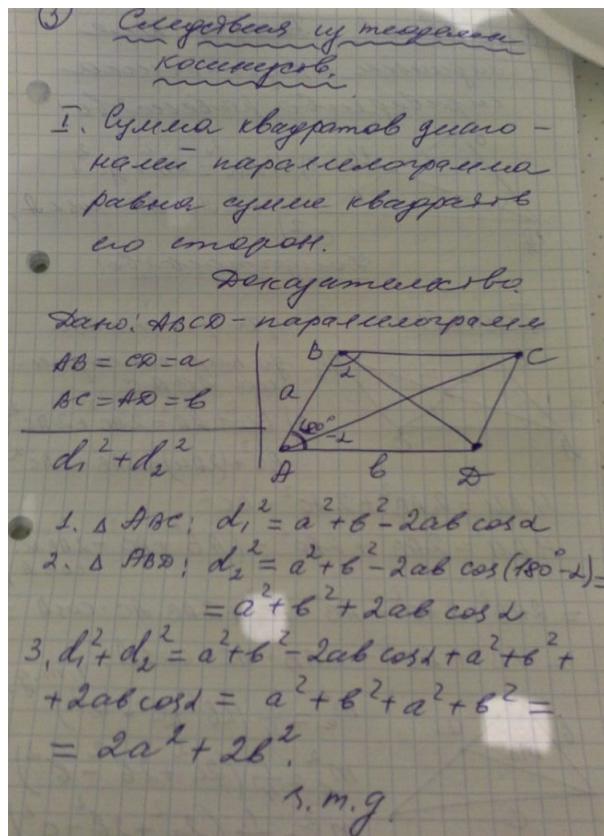
бо дуги, заключенные между параллельными хордами равны.
оказательство:



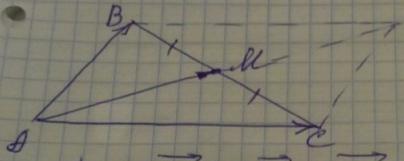
15 Сформулируйте и докажите теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

в предыдущем зачете

16 Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма и формулу для вычисления длины медианы.



(2) II способ доказательство.



$$\begin{aligned}
 1) \quad 2\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
 2) \quad 4\overrightarrow{AM}^2 &= 2\overrightarrow{AM} \cdot 2\overrightarrow{AM} = \\
 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \\
 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \\
 &= AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A
 \end{aligned}$$

т. м. г.

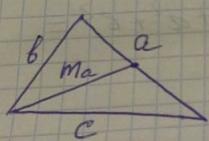
Способ 2 ~~Быстро~~ Доказательство (4)

- известно что сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы

$$\begin{aligned}
 &\text{1) } 4\overrightarrow{AM}^2 = AB^2 + AC^2 + \\
 &\quad + 2AB \cdot AC \cdot \cos A, \\
 &\text{2) } \underline{\text{доказательство!}}
 \end{aligned}$$

I способ:

$$\begin{aligned}
 &\text{1) Достроим в ABC} \\
 &\text{до параллелограмма } \\
 &\text{суммы квадратов} \\
 &\text{катетов равна квадрату} \\
 &\text{гипотенузы.} \\
 &\text{2) } BC^2 + DA^2 = 2AB^2 + 2AC^2 \\
 &BC^2 + (2\text{deg})^2 = 2AB^2 + 2AC^2 \\
 &4\overrightarrow{AM}^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 \\
 &4\overrightarrow{AM}^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - (AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A) = \\
 &= 2AB^2 + 2AC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A = \\
 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A, \quad \text{т. м. г.}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 m_a^2 &= \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \\
 m_b^2 &= \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \\
 m_c^2 &= \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).
 \end{aligned}$$

17 Сформулируйте признаки подобия треугольников. Докажите один из них по выбору.

17.1 Определения

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. 2 стороны пропорциональны + угол равен
3. 3 стороны пропорциональны

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = K$$

17.2 Доказательство

Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 192, а). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим треугольник ABC_2 , у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 192, б). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$.

С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle 1 = \angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

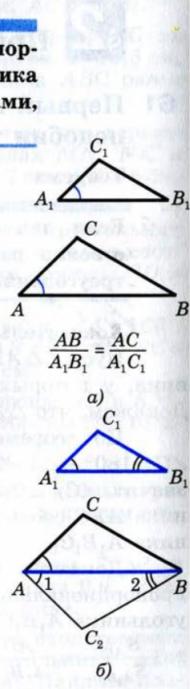
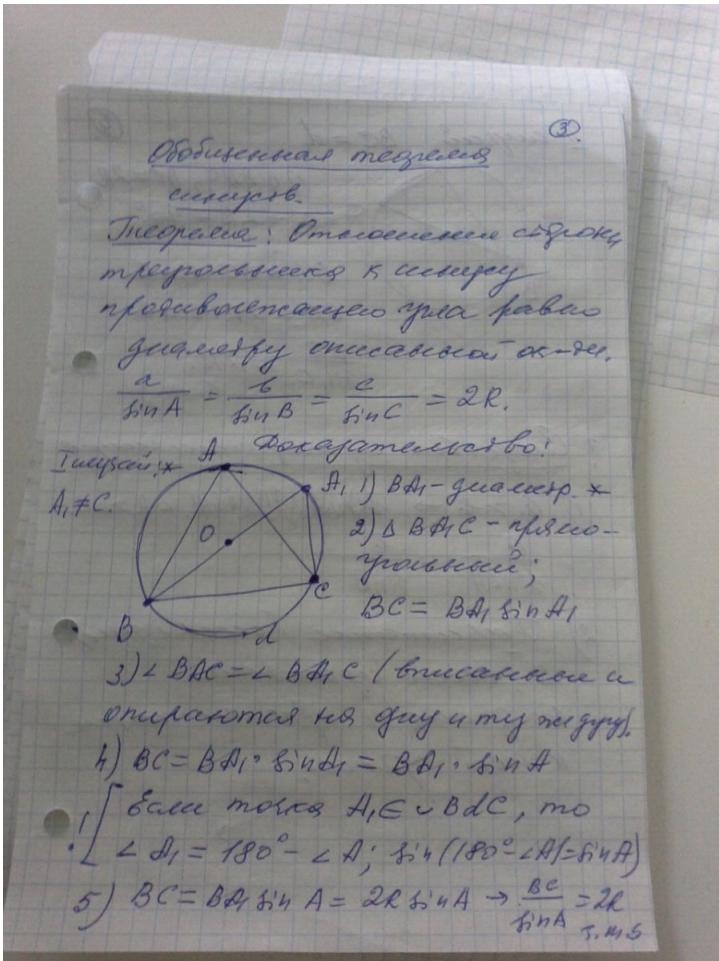
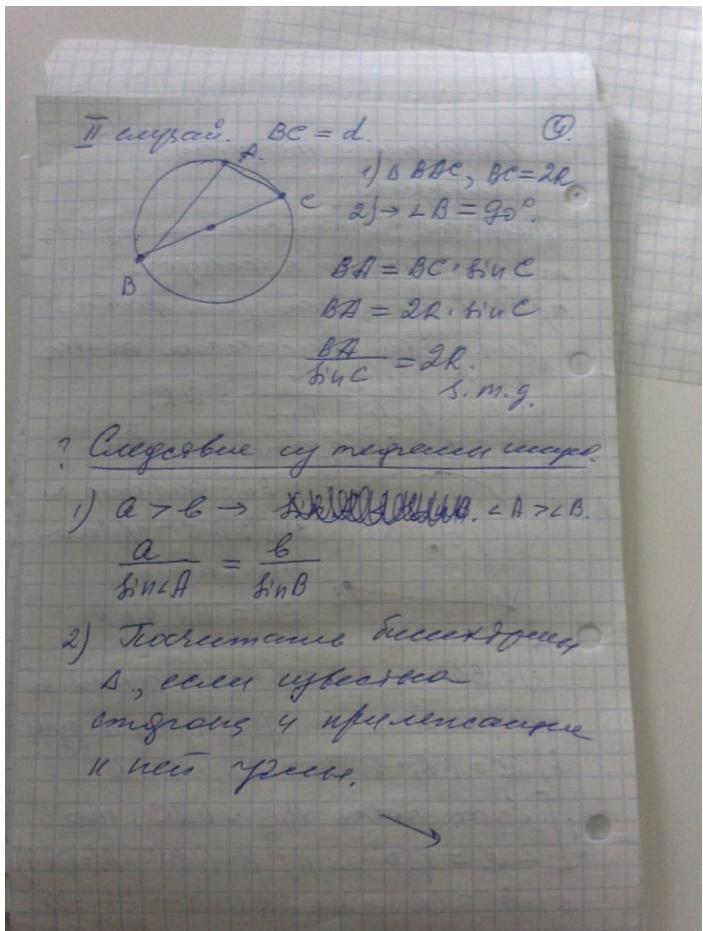


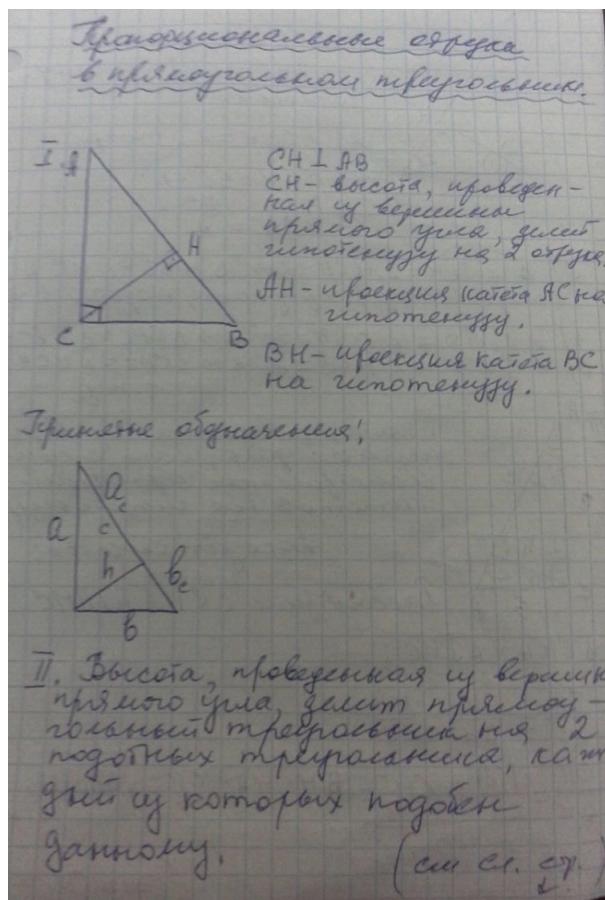
Рис. 192

18 Сформулируйте и докажите обобщенную теорему синусов.





- 19 Выведите формулы для нахождения пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике. Выведите формулу для нахождения высоты прямоугольного треугольника через его стороны.



Доказательство:

1) $CH \perp AB$;
 $\triangle AHC, \triangle CHB$ - искомые
 заслуживающие.

2) $\angle CAB = \alpha$, значит
 $\angle CAH = 90^\circ - \alpha$;
 $\angle HCB = 90^\circ - \alpha$;
 $\angle HCA = \alpha$

3) $\angle CBH = \angle HCA = \alpha \rightarrow \triangle HBC \sim \triangle HCA$
 (по первому признаку подобия)

4) $\angle CAB = \angle CAH = 90^\circ - \alpha \rightarrow \triangle CAB \sim \triangle HAC$ —
 5) $\angle CDB = \angle HCB = 90^\circ - \alpha \rightarrow \triangle CAB \sim \triangle HAC$ —
 т. м. д.

Задача, предложенная в барановской
 книге по геометрии, имеет следующее
 отличие от предыдущей:
 в задаче требуется доказать подобие
 треугольников $\triangle CAB$ и $\triangle HAC$.

Доказательство:

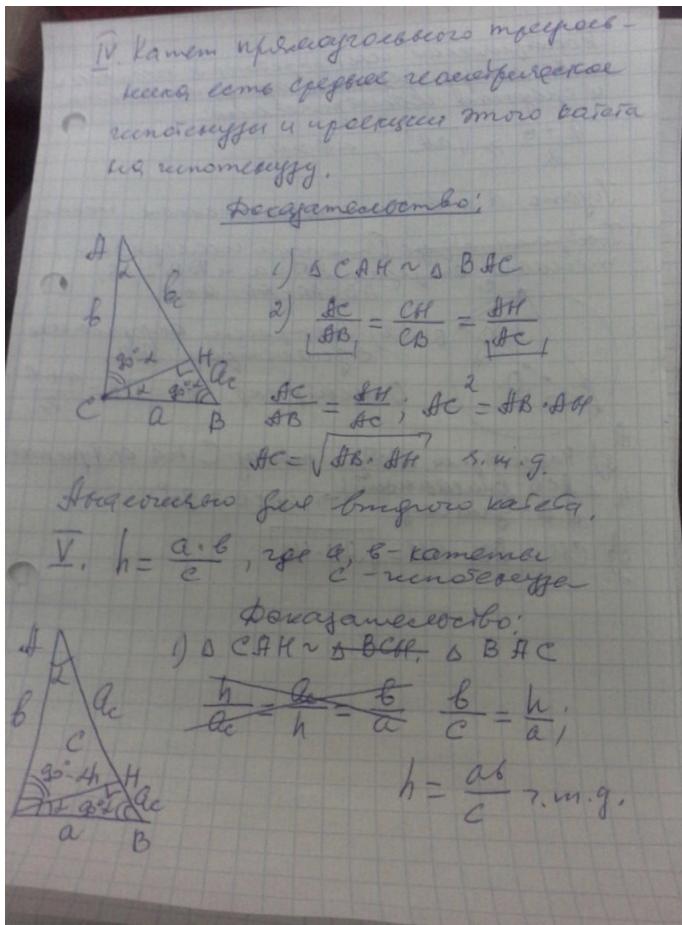
Рассмотрим $\triangle CHA$ и $\triangle HAC$,

$\triangle CHA \sim \triangle HAC$;

$\frac{CA}{BC} = \frac{CH}{BH} = \frac{HA}{CH}$;

$\frac{CH}{BH} = \frac{HA}{CH}$; $CH^2 = BH \cdot HA$; $CH = \sqrt{BH \cdot HA}$.
 т. м. д.

$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$ (дано, след.).



20 Выведите формулы для нахождения площади треугольника. (Не менее 4)

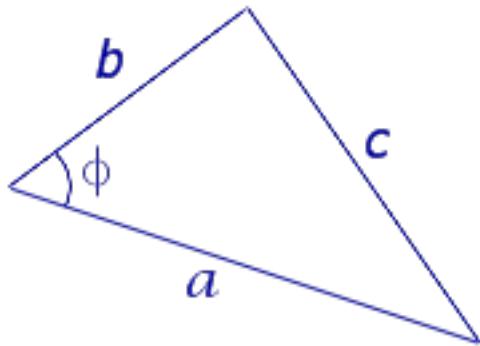
20.1 Стандартная

$$S = \frac{1}{2}ah$$

Доказательство: достроим до параллелограмма ABCD,

$$\Delta ABC = \Delta DCB = \frac{1}{2}ABCD.$$

20.2 Формула Герона



$$S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}$$

$$p = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\phi \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\phi = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2\phi).$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos^2\phi$$

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2\phi) =$$

$$\frac{1}{4}a^2b^2\left(1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2\right) =$$

$$\frac{1}{16}(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) =$$

$$\frac{1}{16}((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) =$$

$$\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) =$$

$$\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b+c-2c)(c+a+b-2b)(a+b+c-2a) =$$

$$\frac{1}{16}2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a) = p(p-c)(p-b)(p-a)$$

$$S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))} \text{ ЧТД.}$$

20.3 Полупериметр и вписанная окружность

$$S = \frac{1}{2}Pr$$

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2}Pr = n * \frac{1}{2} * a * r = \frac{1}{2} * (n * a)r$$

20.4 Формула через синус

$$S = \frac{1}{2}ab * \sin\alpha$$

Доказательство:

$$h_a = b * \sin\alpha$$
$$S = \frac{1}{2}a * h_a = \frac{1}{2}ab * \sin\alpha$$

21 Выведите формулу площади произвольного четырехугольника и формулу площади дельтоида.

21.1 Определения

Дельтоид- четырехугольник, в котором есть две пары равных смежных сторон.

21.2 Формула площади произвольного четырехугольника

$$S = \frac{1}{2}BD * AC * \sin\phi$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}l * m * \sin$$

$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}AO * OB * \sin\phi + \frac{1}{2}BO * OC * \sin 180 - \phi + \frac{1}{2}OC * OD * \sin\phi + \frac{1}{2}OD * OA * \sin 180 - \phi = \frac{1}{2}\sin\phi(AO * OB + OB * OC + OC * OD + OD * OA) = \frac{1}{2}\sin\phi(OB(AO + OC) + OD(OC + OA)) = \frac{1}{2}\sin\phi(OB + OD)(AO + OC) = \frac{1}{2}\sin\phi BD * AC$$

ЧТД.

Синусы смежных углов равны.

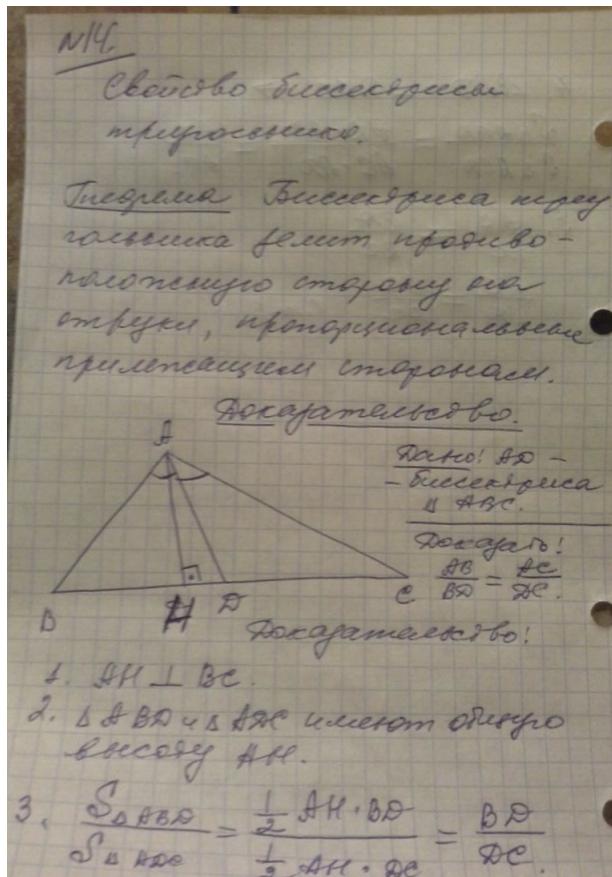
21.3 Формула площади дельтоида

1. BD перпендикулярен AC
2. $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \phi$ но $\angle \phi = 90^\circ \Rightarrow \sin \phi = 1$

22 Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, вписанной в треугольник. Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, описанной около треугольника.

п77, п78

23 Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.



4. $\angle BAD = \angle DAC \rightarrow$
 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$.
 5. $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BC}$
 $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BC}$ в.и.г.

24 Сформулируйте и докажите свойства биссектрис параллелограмма.

24.1 Биссектриса отсекает равнобедренный треугольник

$\angle NAD = \angle BNA$ как накрестлежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AN .

$\angle 1 = \angle 2$ по условию.

ЧТД по признаку

24.2 Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, взаимно перпендикулярны.

$$180 - 90 = \frac{1}{2} * 180$$

- 25 Сформулируйте и докажите три свойства равнобедренной трапеции**
- 26 Сформулируйте и докажите признаки прямоугольного треугольника. (Теорема, обратная теореме Пифагора и соотношение медианы и стороны, к которой она приведена.**

26.1 Признаки

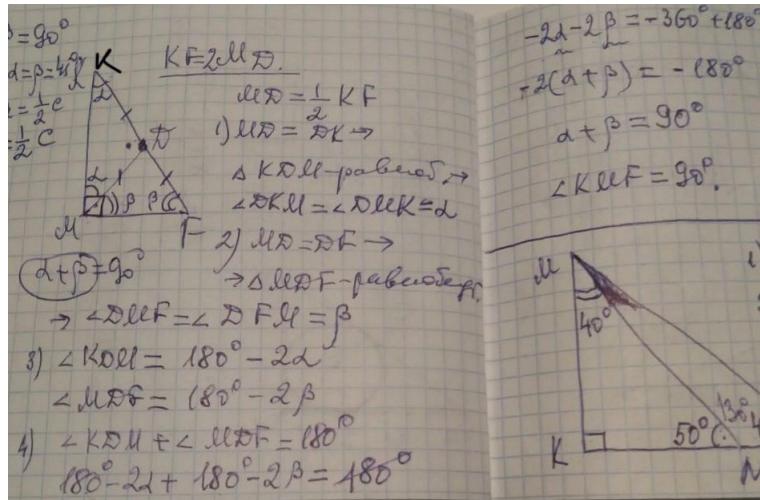
1. Теорема, обратная теореме Пифагора.
2. Теорема о соотношении медианы и стороны, к которой она проведена.

26.2 Теорема, обратная теореме Пифагора.

Дано: ΔABC , $c^2 = a^2 + b^2$

1. Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, такой что $\angle C_1 = 90^\circ$, $b_1 = b$, $a_1 = a$
 2. $\angle C_1 = 90^\circ$; $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + C_1B_1^2 = b^2 + a^2$, однако по условию:
 3. $b^2 + a^2 = c^2 = A_1B_1^2$; так как $A_1B_1 > 0$, $c > 0$, то:
 4. $A_1B_1 = C$
- \Rightarrow
5. $AC = A_1C_1$ по построению
 5. $BC = B_1C_1$ по построению
 5. $AB = A_1B_1$ по пунктам выше, то есть
 6. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \angle C = \angle C_1 = 90^\circ$

26.3 Теорема соотношения медианы и стороны, к которой она приведена?



27 Выведите формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей через стороны правильных треугольника, квадрата и шестиугольника.

ФОФ

28 Дайте определение вписанного угла. Сформулируйте и докажите теорему о величине вписанного угла.

в предыдущем зачете декабре

29 Сформулируйте и докажите свойство медиан в произвольном треугольнике.

фофо

30 Сформулируйте теорему Чевы. Сформулируйте и докажите теорему Менелая.

30.1 Чевы

Если AL, BM и CK пересекаются в одной точке, то:

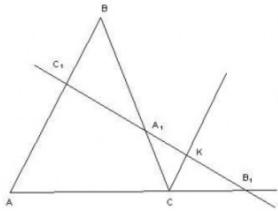
$$\frac{AK}{KB} * \frac{BL}{LC} * \frac{CM}{MA} = 1$$

30.2 Менелая

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает треугольник ABC , причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB , A_1 – точка ее пересечения со стороной BC , и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC . Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Доказательство. Проведем через точку C прямую, параллельную AB . Обозначим через K ее точку пересечения с прямой B_1C_1 .



Треугольники AC_1B_1 и CKB_1 подобны ($\angle C_1AB_1 = \angle CKB_1, \angle C_1B_1B_1 = \angle CKB_1$).

Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}$$

Треугольники BC_1A_1 и CKA_1 также подобны ($\angle B_1A_1C_1 = \angle KCA_1, \angle B_1C_1A_1 = \angle KCA_1$). Значит,

$$\frac{C_1B}{CK} = \frac{B_1A_1}{A_1C}$$

Из каждого равенства выразим CK :

$$CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{CB_1 \cdot A_1C}{BA_1},$$

откуда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

что и требовалось доказать.

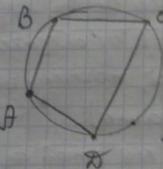
- 31 Сформулируйте и докажите свойства площадей треугольников с равными высотами, треугольников с равным углом и треугольников с равными основаниями.
- 32 Сформулируйте и докажите свойства вписанного и описанного четырехугольника.

① *N16.*

Определим все возможные четырехугольники, вписанные в окружность, то четырехугольник называется вписаным в окружность.

Понятие! В любом вписанном четырехугольнике сумма противолежащих углов равна 180° . (в-то)

Доказ-бо.



1) $\angle ABC$ и $\angle ADC$ - вписаны в окружность \rightarrow по вершины A, B, C и D лежат на окружности.

2) $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$

$$\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2} (\angle BCD + \angle BAD) =$$

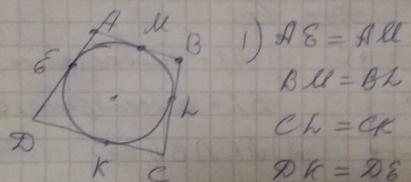
$$= \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

S.m.g.

Мф. Оуп опр. 181 п. 44. ①

Г. Т. В любой окружности
сумма угловов между
противоположных точек
равна ($\text{об} \text{то}$)

Доказательство:



$$1) AE = AL$$

$$BM = BL$$

$$CL = CR$$

$$DK = DE$$

($\text{об} \text{то}$ доказано)

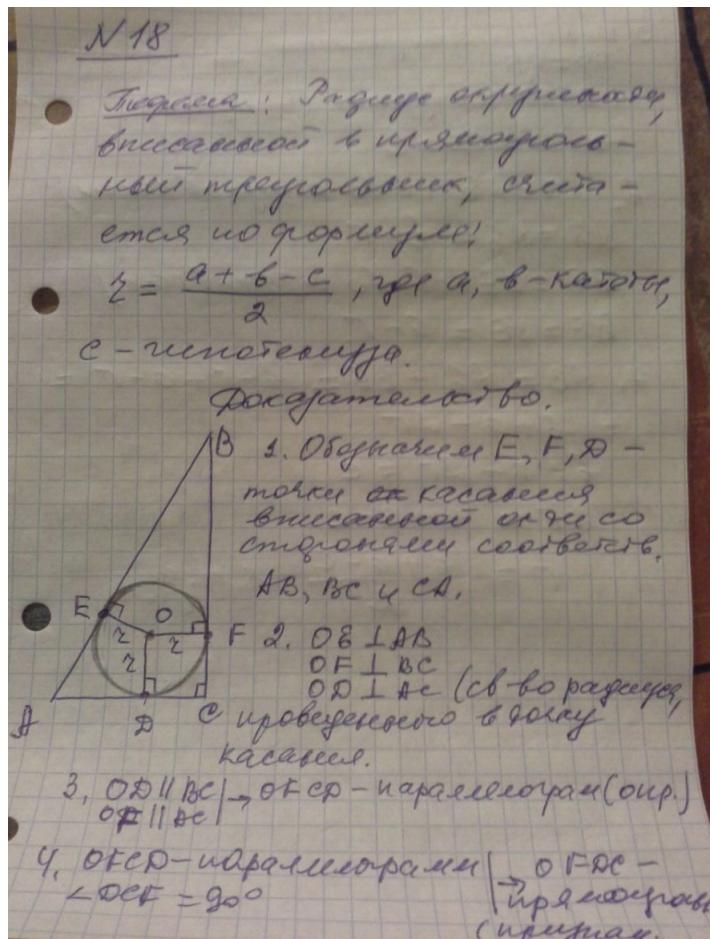
$$\hookrightarrow 2) AD + BC = AE + ED + EB + BC$$

$$AD + DK = DK + KE + EM + BL$$

$$\rightarrow AD + BC = DK + DE.$$

А. М. Г.

33 Найдите радиус вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника.



5. $OFCG$ -квадратик | \rightarrow
 $DO = OF$
 $\rightarrow OFCG$ -квадрат (признак). ●
 $\rightarrow CF = CG = \angle$

6. $AR = AG$ (cb то отрезок в сас.)
 $AR = AG = b - r$
 $BF = BE$ (cb то отрезок в сас.) ●
 $BF = BE = a - r$

7. $AB = AG + BG = b - r + a - r =$
 $= b + a - 2r$
 $b + a - 2r = c$
 $2r = b + a - c$
 $r = \frac{b + a - c}{2}$ 8, m.g.

34 Сформулируйте и докажите условия перпендикулярности и коллинеарность векторов через их координаты.