Устный Зачёт по Геометрии

Скорбенко Егор

Апрель 2018

Содержание

1 Дайте определение угла между векторами, скалярного произведения векторов. Сформулируйте условие перпендикулярности. Докажите теорему о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты. Выведите формулу для вычисления угла между векторами.

1.1 Определения

Угол между векторами- угол между направлениями этих векторов. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Условие перпендикулярности- скалярное произведенеие ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

начается так: $a \cdot b$ или $a\,b$.

По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}). \qquad (1)$$

1.2 Теорема о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты.

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой

$$\vec{a} * \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Доказательство

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость равенства (2) очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 304, *а*), то по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\alpha. \qquad (3)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (рис. 304, *б*, *в*).

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то равенство (3) можно записать так: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right). \qquad (4)$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b} - \vec{a}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$, $\{x_2; y_2\}$ и $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, поэтому

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2, \ |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2,$$
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (4), после несложных преобразований получим формулу (2). **Теорема доказана.**

1.3 Вывод формулы для вычисления угла между векторами.

Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.

Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, деленному на произведение модулей векторов.

$$\cos a = \frac{\overline{a} * \overline{b}}{\overline{|a|} * |b|}$$

2 Сформулируйте и докажите свойства скалярного произведения векторов.

начается так: $a \cdot b$ или $a\,b$.

По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}). \qquad (1)$$

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1^0. $\vec{a}^2 \geqslant 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.

2^0. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3^0. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4^0. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

Утверждение 1^0 непосредственно следует из формулы $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, а утверждение 2^0 — из определения скалярного произведения. Докажем утверждения 3^0 и 4^0.

Введём прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ так:

$$\vec{a}\{x_1;\ y_1\},\ \vec{b}\{x_2;\ y_2\},\ \vec{c}\{x_3;\ y_3\}.$$

Используя формулу (2), получаем

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2)\,x_3 + (y_1 + y_2)\,y_3 =$$
$$= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Утверждение 3^0 доказано.

Докажем теперь утверждение 4^0. Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1;\ ky_1\}$, поэтому $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = (kx_1)\,x_2 + (ky_1)\,y_2 = k\,(x_1x_2 + y_1y_2) = k\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Замечание

Ясно, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,

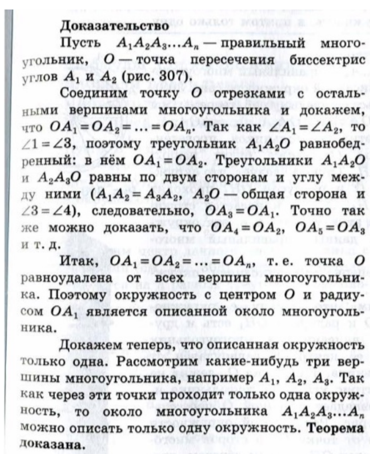
$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}.$$

3 Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

3.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.
Окружность называется описанной, если все вершины многоугольника лежат на данной окружности.
Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

3.2 Доказательство



Доказательство

Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 307).

Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$. Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 1 = \angle 3$, поэтому треугольник A_1A_2O равнобедренный: в нём $OA_1 = OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_2A_3O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — общая сторона и $\angle 3 = \angle 4$), следовательно, $OA_3 = OA_1$. Точно так же можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

Итак, $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ можно описать только одну окружность. **Теорема доказана.**

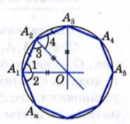


Рис. 307

4 Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

4.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.
Окружность называется вписанной, если все стороны многоугольника касаются данной окружности.
В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4.2 Доказательство

Доказательство

Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 308). В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = ... = \triangle OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины O, также будут равны: $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в данный правильный многоугольник.

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда её центр O_1 равноудалён от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. **Теорема доказана.**

Рис. 308

5 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (длина стороны, радиус вписанной окружности, площадь) через радиус описанной окружности.

Докажем, что $S = \frac{1}{2}Pr$.
$S = \frac{1}{2}Pr = n * \frac{1}{2} * a * r = \frac{1}{2} * (n * a)r$
ЧТД.
Далее: $a_n = 2R * \sin\frac{180°}{n}$
$r = R * \cos\frac{180°}{n}$
$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n} * 180° = 90° - \frac{180°}{n}$.
$a_n = 2 * A_1 * H_1$
$r = O * H_1$

6 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности, площадь) через длину стороны.

6.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

6.2 Формулы

ss112 $l = \frac{\pi R}{180} * \alpha$

Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем сначала, что

$$S = \frac{1}{2} Pr. \qquad (1)$$

Соединим центр данного многоугольника с его вершинами (см. рис. 308). Тогда многоугольник разобьётся на n равных треугольников, площадь каждого из которых будет равна $\frac{1}{2} a_n r$. Следовательно,

$$S = n \cdot \frac{1}{2} a_n r = \frac{1}{2}(n a_n) r = \frac{1}{2} Pr.$$

Выведем далее формулы:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \qquad (2)$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}. \qquad (3)$$

Для вывода этих формул воспользуемся рисунком 308. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O

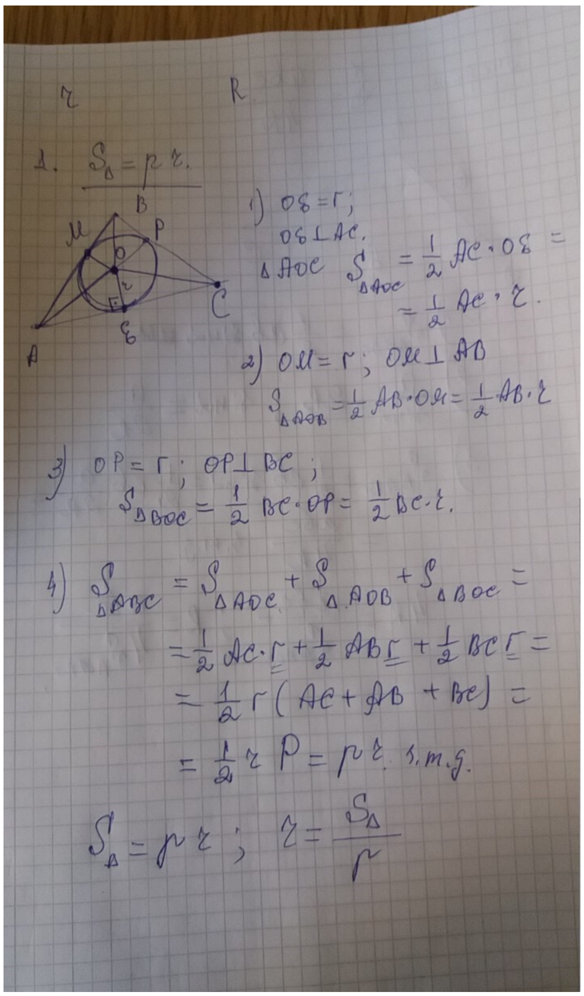
$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n} \cdot 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно,

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R \cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$r = O * H_1 = R * \sin(90 - \frac{180}{n}) = R \cos \frac{180}{n}$$

7 Выведите формулы для вычисления радиуса описанной окружности и радиуса вписанной окружности в произвольном треугольнике



r R

1. $S_\Delta = pr$.

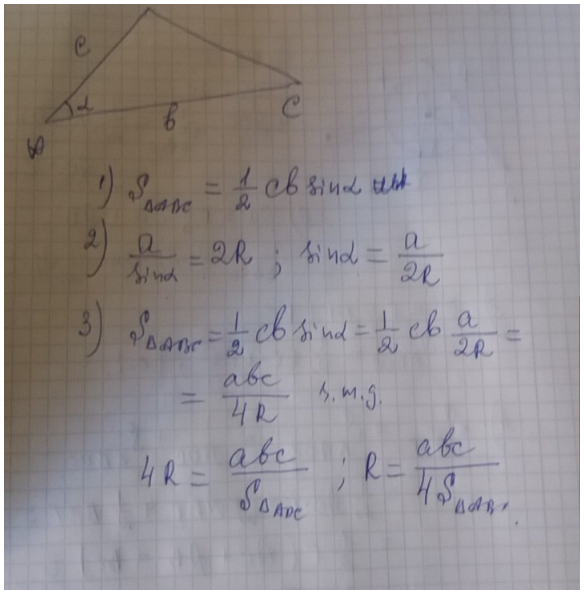
1) $OE = r$; $OE \perp AC$.
ΔAOC $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot OE = \frac{1}{2} AC \cdot r$.

2) $OM = r$; $OM \perp AB$
$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} AB \cdot r$

3) $OP = r$; $OP \perp BC$;
$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OP = \frac{1}{2} BC \cdot r$.

4) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} =$
$= \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} AB r + \frac{1}{2} BC r =$
$= \frac{1}{2} r (AC + AB + BC) =$
$= \frac{1}{2} r P = pr$ ч.т.д.

$S_\Delta = pr$; $r = \frac{S_\Delta}{p}$



8 Дайте определения градуса и радиана. Выразите приближенное значение одного радиаиа в градусах. Выведите формулы для нахождения длины дуги через ее градусную меру и радианную.

8.1 Определения

Градус- единица измерения дуг и углов, равная 1/360 окружности.
Радиан- угол, соответствующий дуге, длина которой равна её радиусу.
1 Градус $\approx$ 0.0175 Радиан

8.2 Формула через радианную меру

$l = \frac{\pi R}{180} n$

8.3 Формула через градусную меру

Градус -> радиан и аналогично пункту 2.

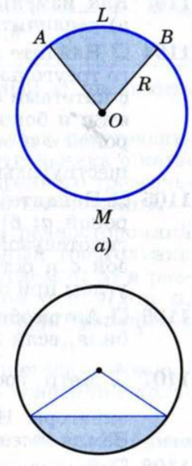
9 Выведите формулы для нахождения площадей частей круга.

Круговым сектором или просто **сектором** называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора**. На рисунке 315, *а* изображены два сектора с дугами ALB и AMB. Первый из этих секторов закрашен.

Выведем формулу для вычисления площади S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α.

Так как площадь всего круга равна πR^2, то площадь кругового сектора, ограниченного дугой в $1°$, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь S выражается формулой

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$



10 Сформулируйте свойства и признаки равнобедренной трапеции. Сформулируйте и допишите свойство равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями.

10.1 Определения

Равнобедренная трапеция – это трапеция, у которой боковые стороны равны.

10.2 Свойства

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
2. Сумма противолежащих углов равнобедренной трапеции равна 180
3. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

4. Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность. ...

10.3 Признаки

1. Если углы при основании трапеции равны, то она – равнобедренная.
2. Если сумма противолежащих углов трапеции равна 180^{o}, то она - равнобедренная.
3. Если диагонали трапеции равны, то она – равнобедренная.
4. Если около трапеции можно описать окружность, то она – равнобедренная...

10.4 Если диагонали перпендикулярны...

Если в равнобдренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота трапеции равна полусумме оснований. $CH = \frac{1}{2}AF = \frac{AD+BC}{2}$

11 Дайте определение движения. сформулируйте общие свойства. Перечислите виды движений и их свойства.

11.1 Определения

Движение плоскости- отображерние плоскости на себя, сохраняющее расстояния.
Центральная симметрия плоскости также является движением.

11.2 Общие свойства

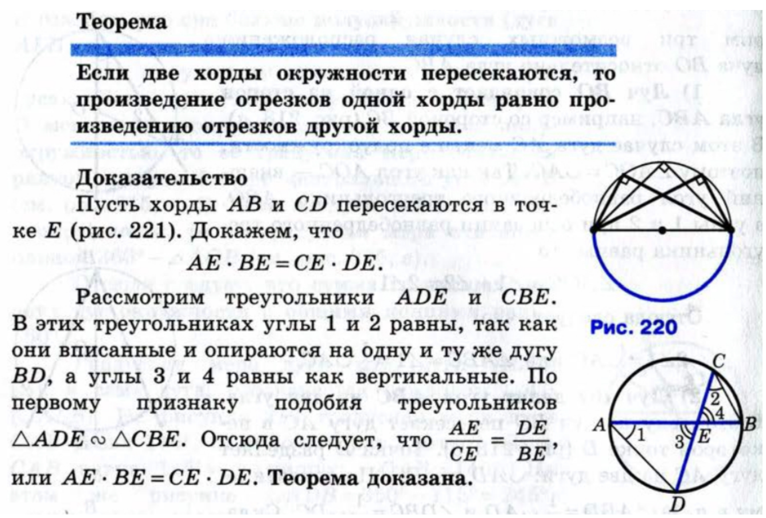
11.3 Виды движений

1. Симметрия осевая

2. Симметрия центральная
3. Симметрия зеркальная
4. Симметрия скользащая
5. Параллельный перенос
6. Поворот

12 Докажите теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности. Докажите теорему о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки.

12.1 Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности



Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E (рис. 221). Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Теорема доказана.

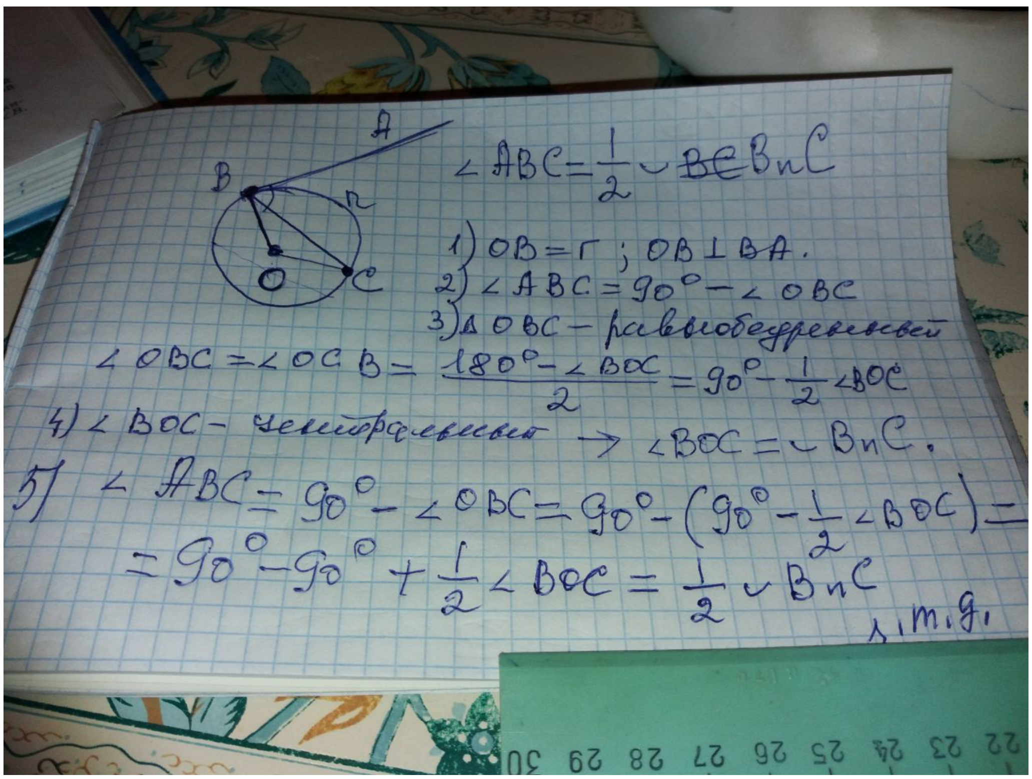
Рис. 220

12.2 Теорема о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки.

$CB * AC = CD^2$

ΔACD и ΔDCB
$\angle ACD = \angle DCB$
$\angle ADC = \frac{1}{2}$6.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$
$\angle ABD = \frac{1}{2}$6.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$
$\angle ABD = \angle ADC$
ΔACD подобен ΔDCB.

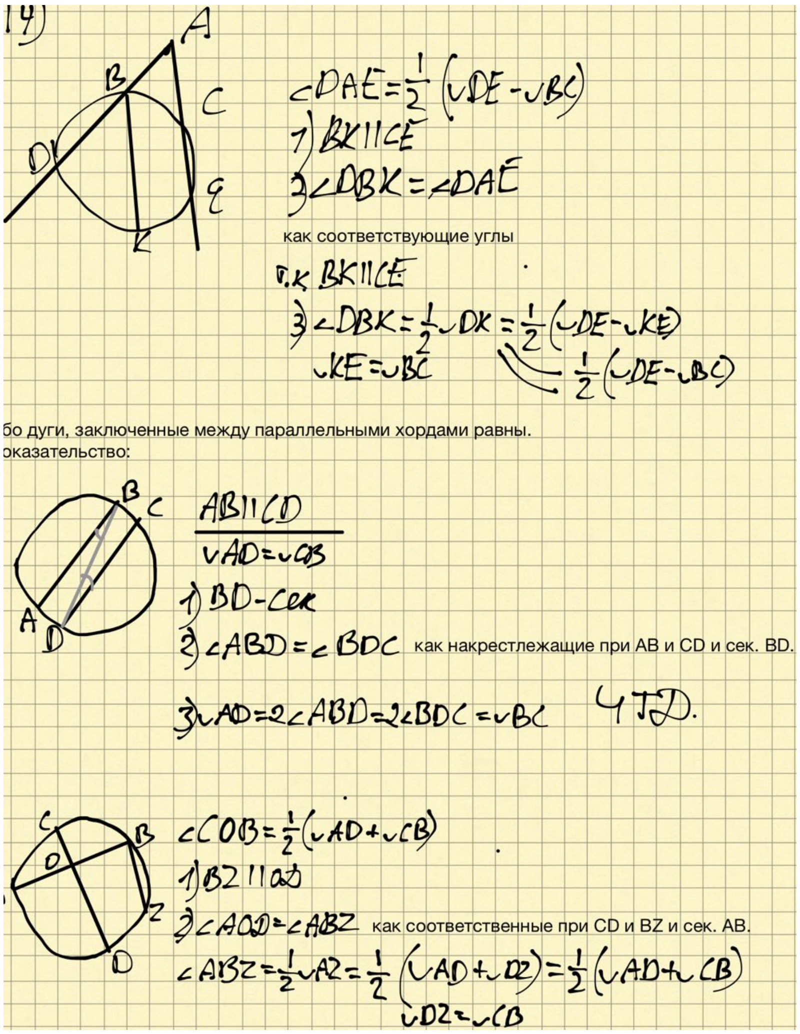
13 Сформулируйте и докажите теорему о величине угла между касательной и хордой.



$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile \cancel{BE} BnC$

1) $OB = r$; $OB \perp BA$.
2) $\angle ABC = 90^\circ - \angle OBC$
3) ΔOBC – равнобедренный
$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC$
4) $\angle BOC$ – центральный $\to \angle BOC = \smile BnC$.
5) $\angle ABC = 90^\circ - \angle OBC = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC) =$
$= 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \smile BnC$
ч.т.д.

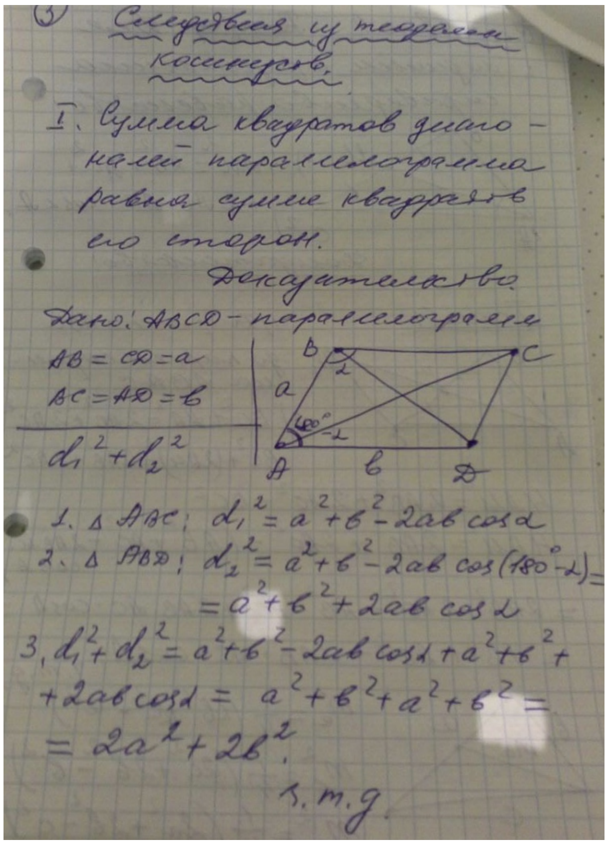
14 Сформулируйте и докажите теоремы о величине углов между пересекающимися хордами, между секущими.



15 Сформулируйте и докажите теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

$BD^2 = BK^2 + KD^2$
$AC^2 = CF^2 + AF^2$
$BD^2 + AC^2 = CF^2 + AF^2 + BK^2 + KD^2$
BK=CF
$AC^2 + BD^2 = 2BK^2 + KD^2 + AF^2$
$BK^2 = AB^2 - AK^2$
KD=AD-AK, AF=AD+FD
$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 - AK^2) + (AD - AK)^2 + (AD + FD)^2$
BK=CF, AB=CD, ABK=DCF -> AK=DF
$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 - AK^2) + (AD - AK)^2 + (AD + AK)^2$
$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$

16 Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма и формулу для вычисления длины медианы.



③ Следствия из теоремы косинусов.

I. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Доказательство.

Дано: ABCD – параллелограмм

AB = CD = a

BC = AD = b

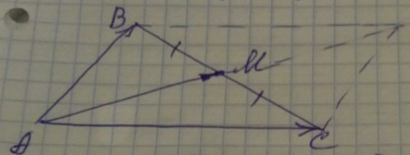
$d_1^2 + d_2^2$

1. △ABC: $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$
2. △ABD: $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$
3. $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2$.

ч.т.д.

③

II способ доказательства.



1) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2) $4\overrightarrow{AM}^2 = 2\overrightarrow{AM}\cdot 2\overrightarrow{AM} =$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) =$

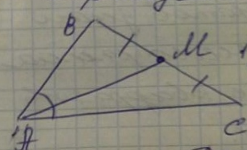
$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

$= \cancel{\overrightarrow{AB}}\ AB^2 + AC^2 + 2\,AB\cdot AC\cdot\cos A$

ч.т.д.

④

Следствие 2 ~~В треуг~~ Для медианы треугольника справедливо равенство:

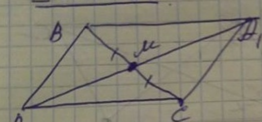


1) $4AM^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$.

2)

Доказательство:

I способ:



1) Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма ABA_1C.

2) $BC^2 + AA_1^2 = 2AB^2 + 2AC^2$

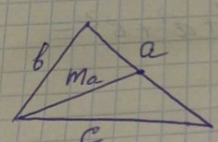
$BC^2 + (2AM)^2 = 2AB^2 + 2AC^2$

$4AM^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$

$4AM^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - (AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A) =$

$= 2AB^2 + 2AC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB\cdot AC\cdot\cos A =$

$= AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A$, ч.т.д.



$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

$m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

17 Сформулируйте признаки подобия треугольников. Докажите один из них по выбору.

17.1 Определения

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.
1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. 2 стороны пропорциональны + угол равен
3. 3 стороны пропорциональны

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = K$$

17.2 Доказательство

Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 192, *а*). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 192, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$.

С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle 1 = \angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

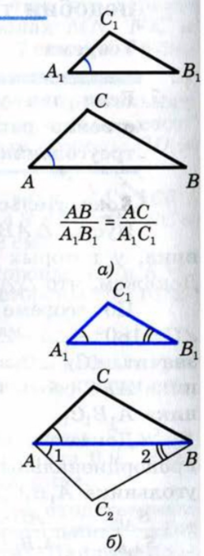
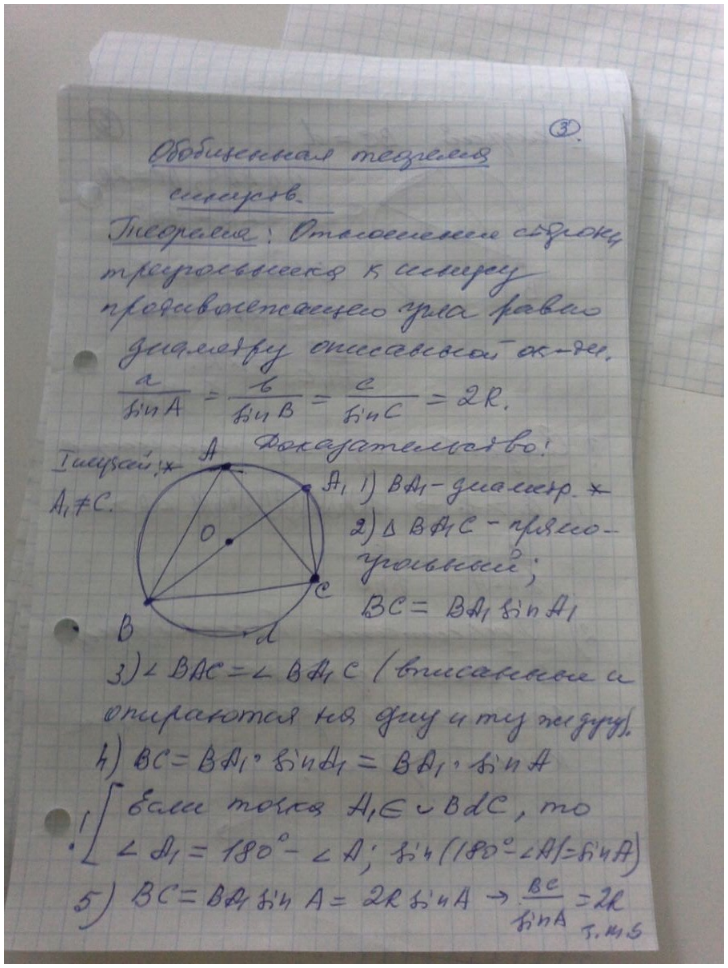


Рис. 192

18 Сформулируйте и докажите обобщенную теорему синусов.



Обобщенная теорема синусов.

Теорема: Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окр-ти.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Доказательство:

I случай: $A_1 \neq C$.

1) BA_1 – диаметр.

2) $\triangle BA_1C$ – прямоугольный; $BC = BA_1 \sin A_1$

3) $\angle BAC = \angle BA_1C$ (вписанные и опираются на одну и ту же дугу).

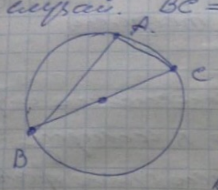
4) $BC = BA_1 \cdot \sin A_1 = BA_1 \cdot \sin A$

! Если точка $A_1 \in \smile BdC$, то $\angle A_1 = 180^\circ - \angle A$; $\sin(180^\circ - \angle A) = \sin A$

5) $BC = BA_1 \sin A = 2R \sin A \rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R$

ч.т.д.

II случай. $BC = d$. ④



1) $\triangle ABC$, $BC = 2R$

2) $\to \angle B = 90^\circ$.

$BA = BC \cdot \sin C$

$BA = 2R \cdot \sin C$

$\dfrac{BA}{\sin C} = 2R$.

ч.т.д.

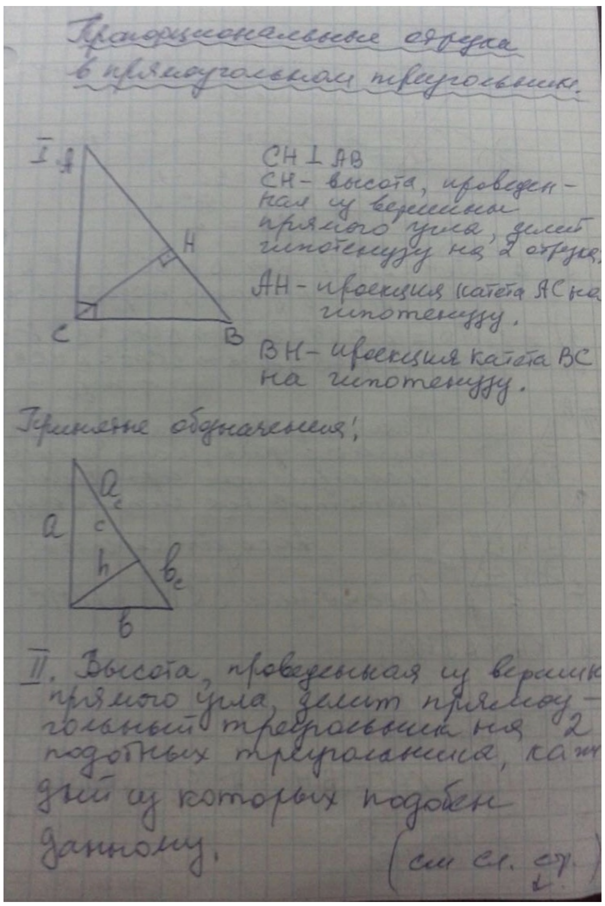
? Следствие из теоремы синусов.

1) $a > b \to$ ~~[illegible]~~ $\angle A > \angle B$.

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin B}$$

2) Посчитать биссектрису $\triangle$, если известна сторона и прилежащие к ней углы.

19 **Выведите формулы для нахождения пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике. Выведите формулу для нахождения высоты прямоугольного треугольника через его стороны.**



Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.

I. $CH \perp AB$

CH – высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на 2 отрезка:

AH – проекция катета AC на гипотенузу.

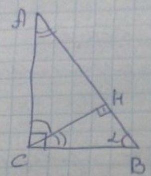
BH – проекция катета BC на гипотенузу.

Принятые обозначения:

II. Высота, проведенная из вершины прямого угла, делит прямоугольный треугольник на 2 подобных треугольника, каждый из которых подобен данному.

(см сл. стр.)

Доказательство:



1) $CH \perp AB$;

$\triangle AHC$, $\triangle CHB$ – прямоугольные.

2) $\angle CBH = \alpha$, тогда

$\angle CAH = 90^\circ - \alpha$;

$\angle HCB = 90^\circ - \alpha$;

$\angle HCA = \alpha$

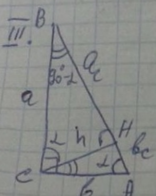
3) $\angle CBH = \angle HCA = \alpha \to \triangle HBC \sim \triangle HCA$ (следствие из I признака подобия $\triangle$-ов)

4) $\angle CAB = \angle CAH = 90^\circ - \alpha \to \triangle CAB \sim \triangle HAC$ — " —

5) $\angle CAB = \angle HCB = 90^\circ - \alpha \to \triangle CAB \sim \triangle HCB$ — " —

ч. т. д.

III.



Высота, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle CHA$ и $\triangle AHC$.

$\triangle CHA \sim \triangle AHC$;

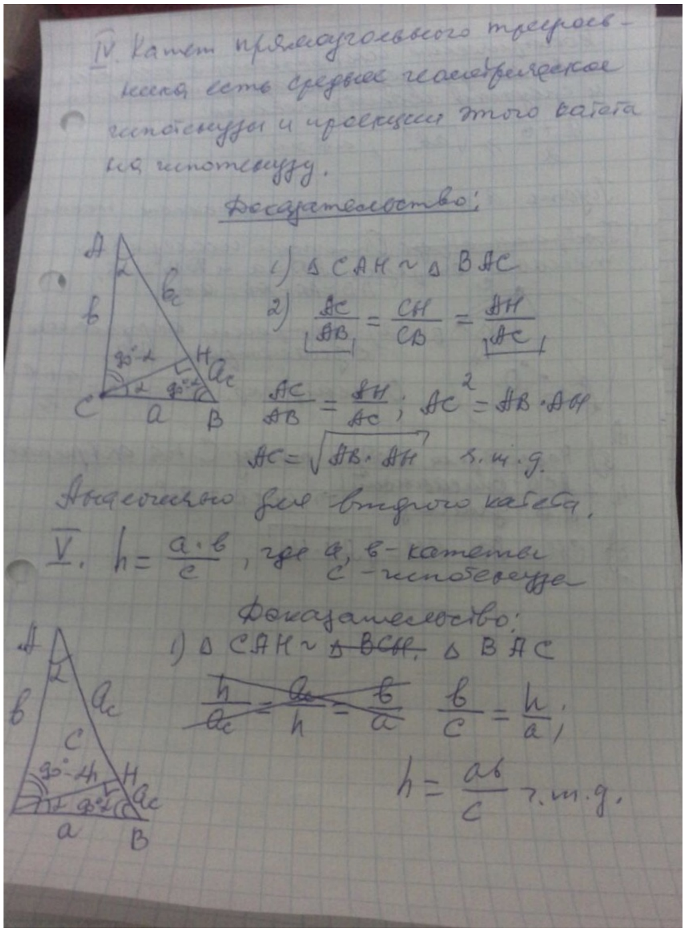
$$\frac{CA}{BC} = \frac{CH}{BH} = \frac{HA}{CH};$$

$$\frac{CH}{BH} = \frac{HA}{CH};\quad CH^2 = BH \cdot HA;\quad CH = \sqrt{BH \cdot HA}.$$

ч. т. д.

$$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$

(см. далее).



IV. Катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Доказательство:

1) $\triangle CAH \sim \triangle BAC$

2) $\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{CB} = \frac{AH}{AC}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$; $AC^2 = AB \cdot AH$

$AC = \sqrt{AB \cdot AH}$ ч.т.д.

Аналогично для второго катета.

V. $h = \frac{a \cdot b}{c}$, где a, b – катеты, c – гипотенуза

Доказательство:

1) $\triangle CAH \sim \cancel{\triangle BCH}\ \triangle BAC$

$\cancel{\frac{h}{a_c} = \frac{b_c}{h} = \frac{b}{a}}$ $\frac{b}{c} = \frac{h}{a}$;

$h = \frac{ab}{c}$ ч.т.д.

20 Выведите формулы для нахождения площади треугольника. (Не менее 4)

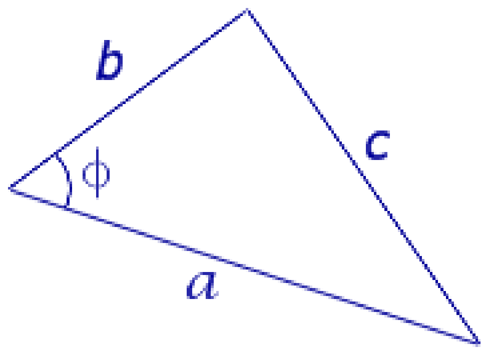
20.1 Стандартная

$S = \frac{1}{2}ah$

Доказательство: достроим до параллелограмма ABCD,

$\Delta ABC = \Delta DCB = \frac{1}{2}ABCD.$

20.2 Формула Герона



$S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}$
$p = \dfrac{P}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$
Доказательство:

$S = \dfrac{1}{2}absin\phi => S^2 = \dfrac{1}{4}a^2b^2sin^2\phi = \dfrac{1}{4}a^2b^2(1-cos^2\phi).$

$c^2 = a^2+b^2-2abcos\phi => cos\phi = \dfrac{a^2b^2-c^2}{2ab} = cos^2\phi$

$S^2 = \dfrac{1}{4}a^2b^2(1-cos^2\phi) =$

$\dfrac{1}{4}a^2b^2(1-(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2) =$

$\dfrac{1}{16}(4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2) =$

$\dfrac{1}{16}((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2) =$

$\dfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) =$

$\dfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b+c-2c)(c+a+b-2b)(a+b+c-2a) =$

$\dfrac{1}{16}2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a) = p(p-c)(p-b)(p-a)$

$S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}$ **ЧТД.**

20.3 Полупериметр и вписанная окружность

$S = \dfrac{1}{2}Pr$

Доказательство:

$S = \frac{1}{2}Pr = n * \frac{1}{2} * a * r = \frac{1}{2} * (n * a)r$

20.4 Формула через синус

$S = \frac{1}{2}ab * sin\alpha$
Доказательство:

$h_a = b * \sin\alpha$
$S = \frac{1}{2}a * h_a = \frac{1}{2}ab * \sin\alpha$

21 Выведите формулу площади произвольного четырехугольника и формулу площади дельтоида.

21.1 Определения

Дельтоид- четырехугольник, в котором есть две пары равных смежных сторон.

21.2 Формула площади произвольного четырехугольника

$S = \frac{1}{2}BD * AC * \sin\phi$
$S_\Delta = \frac{1}{2}l * m * \sin$
$S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}AO * OB * \sin\phi + \frac{1}{2}BO * OC * \sin 180 - \phi + \frac{1}{2}OC * OD * \sin\phi + \frac{1}{2}OD * OA * \sin 180 - \phi = \frac{1}{2}\sin\phi(AO * OB + OB * OC + OC * OD + OD * OA) = \frac{1}{2}\sin\phi(OB(AO + OC) + OD(OC + OA)) = \frac{1}{2}\sin\phi(OB + OD)(AO + OC) = \frac{1}{2}\sin\phi BD * AC$
ЧТД.
Синусы смежных углов равны.

21.3 Формула площади дельтоида

1. BD перпендикулярен AC
2. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi$ **но** $\angle\phi = 90 => \sin\phi = 1$

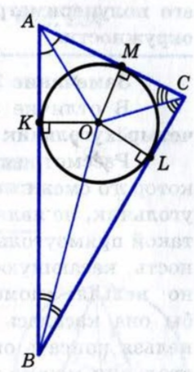
22 Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, вписанной в треугольник. Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, описанной около треугольника.

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведём из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA (см. рис. 232). Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK = OL = OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. Теорема доказана.



Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведём отрезки OA, OB и OC (рис. 235). Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC. Теорема доказана.

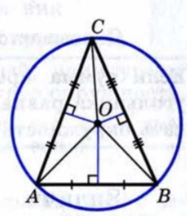
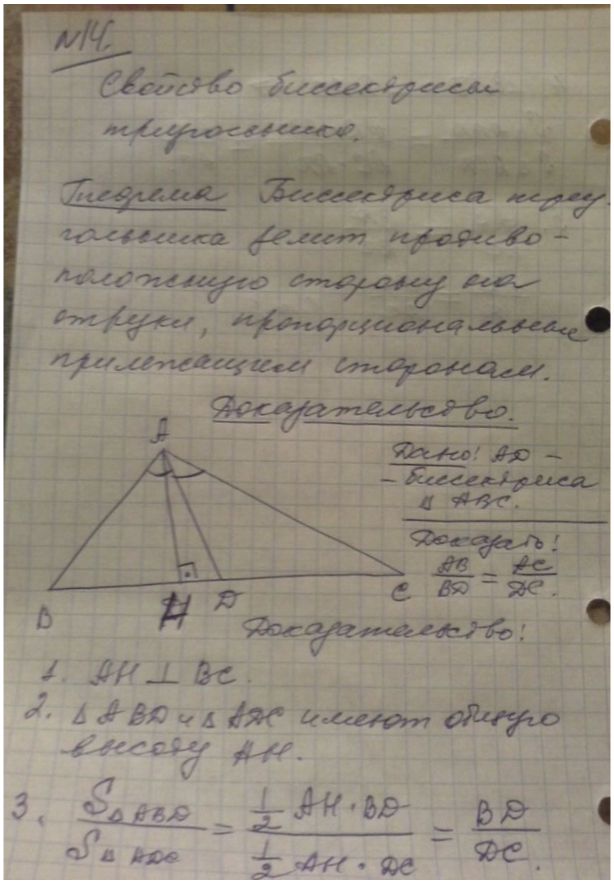


Рис. 235

23 Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.



№14.

Свойство биссектрисы треугольника.

Теорема Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

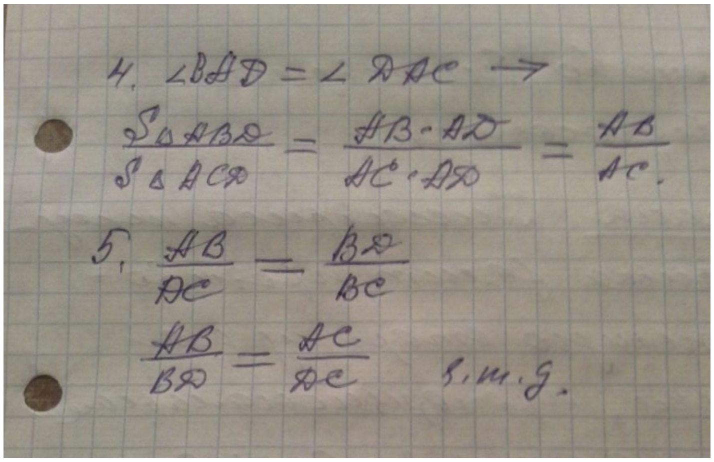
Доказательство.

Дано: AD — биссектриса $\triangle ABC$.

Доказать: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$.

Доказательство:

1. $AH \perp BC$.
2. $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ имеют общую высоту AH.
3. $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BD}{\frac{1}{2} AH \cdot DC} = \frac{BD}{DC}$.



4. $\angle BAD = \angle DAC \rightarrow$

$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}.$

5. $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ ч.т.д.

24 Сформулируйте и докажите свойства биссектрис параллелограмма.

24.1 Биссектриса отсекает равнобедренный треугольник

$\angle NAD = \angle BNA$ как накрестлежащие при BC || AD и секущей AN.
$\angle 1 = \angle 2$ по условию.
ЧТД по признаку

24.2 Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, взаимно перпендикулярны.

$180 - 90 = \frac{1}{2} * 180$

25 Сформулируйте и докажите три свойства равнобедренной трапеции

Если углы при основании трапеции равны, то она – равнобедренная.

Выполним стандартное дополнительное построение, которое очень часто используется при решении различных задач на трапецию: проведём прямую CK параллельно боковой стороне AB (см. Рис. 4).

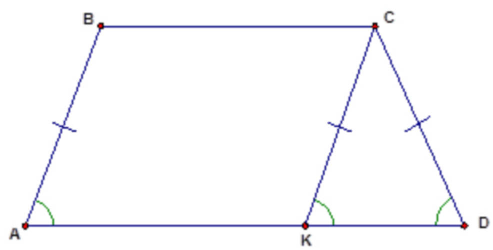


Рис. 4

$$\left.\begin{matrix} AB \parallel CK (\text{по построению}) \\ BC \parallel AK (\text{как основания трапеции}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCK$$ – параллелограмм.

Отсюда следует, что: $AB = CK = CD$. Значит, треугольник ΔKCD – равнобедренный. А значит, углы при его основании равны, то есть: $\angle CKD = \angle CDK \Rightarrow \angle CDK = \angle CKD = \angle BAK$ (последние два угла равны, как соответственные при параллельных прямых $AB \parallel CK$).

Если сумма противолежащих углов трапеции равна 180^{o}, то она - равнобедренная.

$\angle A + \angle C = 180$

$\angle A = 180 - \angle C$

$\angle C + \angle D = 180$

$\angle D = 180 - \angle C$

$=> \angle A = \angle D$

Если диагонали трапеции равны, то она – равнобедренная.

Для доказательства этого свойства воспользуемся предыдущим. Действительно, рассмотрим треугольники: ΔABD и ΔDCA (см. Рис. 5.).

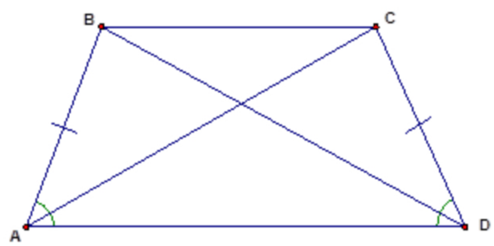


Рис. 5

$$\left.\begin{array}{c} AB = CD \\ AD - \text{общая} \\ \angle A = \angle D \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD = \Delta DCA$$ (по первому признаку равенства треугольников: две стороны и угол между ними).

Из этого равенства сразу следует, что: $AC = BD$.

26 Сформулируйте и докажите признаки прямоугольного треугольника. (Теорема, обратная теореме Пифагора и соотношение медианы и стороны, к которой она приведена.

26.1 Признаки

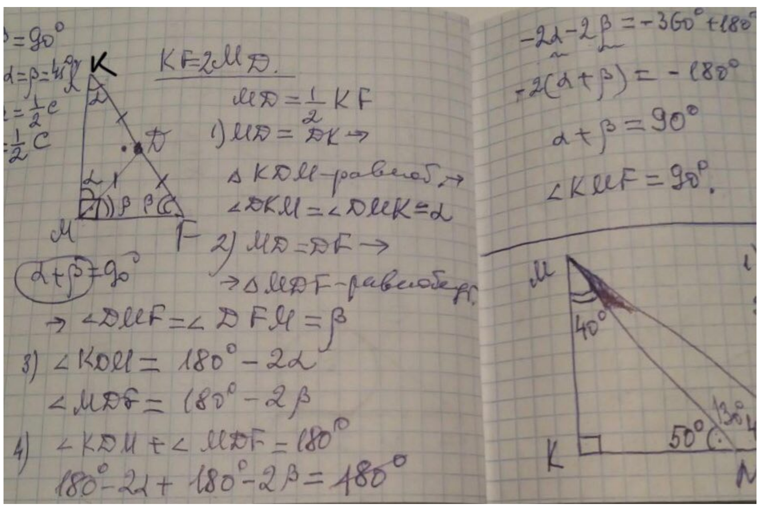
1. Теорема, обратная теореме Пифагора.
2. Теорема о соотношении медианы и стороны, к которой она проведена.

26.2 Теорема, обратная теореме Пифагора.

Дано: ΔABC, $c^2 = a^2 + b^2$
1. Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, такой что $\angle C_1 = 90$, $b_1 = b$, $a_1 = a$

2. $\angle C_1 = 90; A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + C_1B_1^2 = b^2 + a^2$, однако по условию:
3. $b^2 + a^2 = c_1^2 = A_1B_1^2$; так как $A_1B_1 > 0, c > 0$, то:
4. $A_1B_1 = C$
=>
5. $AC = A_1C_1$ по построению
5. $BC = B_1C_1$ по построению
5. $AB = A_1B_1$ по пунктам выше, то есть
6. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 => \angle C = \angle C_1 = 90$

26.3 Теорема соотношения медианы и стороны, к которой она приведена?



27 Выведите формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей через стороны правильных треугольника, квадрата и шестиугольника.

Пусть S — площадь правиль
ника, a_n — его сторона, P — пери
R — радиусы соответственно вписа
санной окружностей. Докажем снач

$$S = \frac{1}{2}Pr.$$

Соединим центр данного мно
его вершинами (см. рис. 308). Тогд
ник разобьётся на n равных треуго
щадь каждого из которых будет ра
довательно,

$$S = n \cdot \frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}(na_n)\, r =$$

Выведем далее формулы:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$a_3 = 2R\sin\frac{180}{3}$$

$$a_4 = 2R\sin\frac{180}{4}$$

$$a_6 = 2R\sin$$

28 Дайте определение вписанного угла. Сформулируйте и докажите теорему о величине вписанного угла.

Вписанный угол- это угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: точка O принадлежит лучу AC (см. Рис. 5).

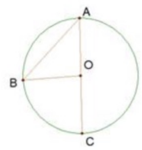


Рис. 5

Доказать, что $\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\angle BOC$

Обозначим угол $\angle A$ через α, тогда угол $\angle B$ также будет равен α, так как треугольник ΔAOB равнобедренный, его стороны OB и OA равны как радиусы окружности. Угол $\angle BOC$ является внешним для треугольника ΔAOB, внешний угол равен сумме двух других углов, не смежных с ним, получаем: $\angle BOC = \alpha + \alpha = 2\alpha$, то есть угловое измерение дуги $\overset{\frown}{BC}$ есть 2α. Таким образом, мы доказали, что вписанный угол равен половине измерения дуги, на которую он опирается.

Случай 2: точка O лежит внутри вписанного угла $\angle BAC$ (см. Рис. 6).

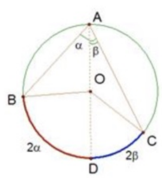


Рис. 6

Доказать, что $\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\angle BOC$

Доказательство сводится к предыдущему случаю. Проведем диаметр AD, обозначим угол $\angle BAD$ за α, и тогда дуга $\overset{\frown}{BD}$ равна 2α (объяснение см. случай 1). Угол $\angle DAC$ за β, тогда дуга $\overset{\frown}{DC}$ равна 2β (объяснение см. случай 1). Вся дуга $\overset{\frown}{BC}$ равна:

$$\overset{\frown}{BC} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$$

Угол $\angle BAC$, в свою очередь, равен $\alpha + \beta$.

Таким образом, мы доказали, что вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Случай 3: точка O находится вне вписанного угла (см. Рис. 7).

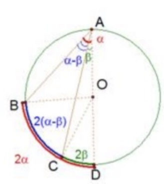


Рис. 7

Доказать, что $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\angle BOC$

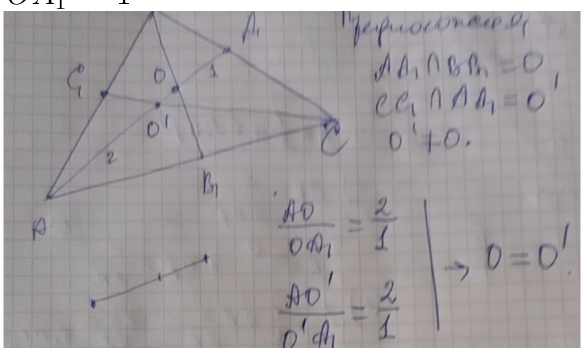
Доказательство снова сводится к первому случаю. Проведем диаметр AD, обозначим угол $\angle BAD$ через α, тогда дуга $\overset{\frown}{BD} = 2\alpha$ (объяснение см. случай 1). Угол $\angle CAD$ обозначим через β, тогда дуга $\overset{\frown}{DC}$ равна 2β (объяснение см. случай 1). Дуга $\overset{\frown}{BC}$ является разностью большой дуги $\overset{\frown}{BD}$ и дуги $\overset{\frown}{DC}$:

$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{DC} = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta)$$

Вписанный угол $\angle BAC$ равен $\alpha - \beta$. Таким образом, мы доказали, что вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

29 Сформулируйте и докажите свойство медиан в произвольном треугольнике.

$AM = MO; BN = NO$
$MN = \dfrac{1}{2}AB; MN||AB$
$BA_1 = A_1C; AA_1 = A_1C => A_1B_1 -$ средняя линия в ABC
$A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB$, A_1B_1 ||AB
рассмотрим MNA_1B_1
MN||AB|| A_1B_1
MN=$\dfrac{1}{2}AB$= A_1B_1 -> MNA_1B_1 - параллелограмм
NO=OB_1, MO=OA_1
AM=MO=OA_1
$\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{2}{1}$



30 Сформулируйте теорему Чевы. Сформулируйте и докажите теорему Менелая.

30.1 Чевы

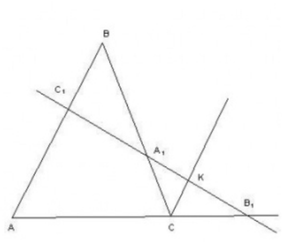
Если AL, BM и CK пересекаются в одной точке, то:
$\dfrac{AK}{KB} * \dfrac{BL}{LC} * \dfrac{CM}{MA} = 1$

30.2 Менелая

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Доказательство. Проведем через точку C прямую, параллельную AB. Обозначим через K ее точку пересечения с прямой B_1C_1.



Треугольники AC_1B_1 и CKB_1 подобны ($\angle C_1AB_1=\angle KCB_1$, $\angle AC_1B_1=\angle CKB_1$). Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CK}=\frac{B_1A}{B_1C}$$

Треугольники BC_1A_1 и CKA_1 также подобны ($\angle BA_1C_1=\angle KA_1C$, $\angle BC_1A_1=\angle CKA_1$). Значит,

$$\frac{C_1B}{CK}=\frac{BA_1}{A_1C}$$

Из каждого равенства выразим CK:

$$CK=\frac{AC_1\cdot B_1C}{B_1A}=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1},$$

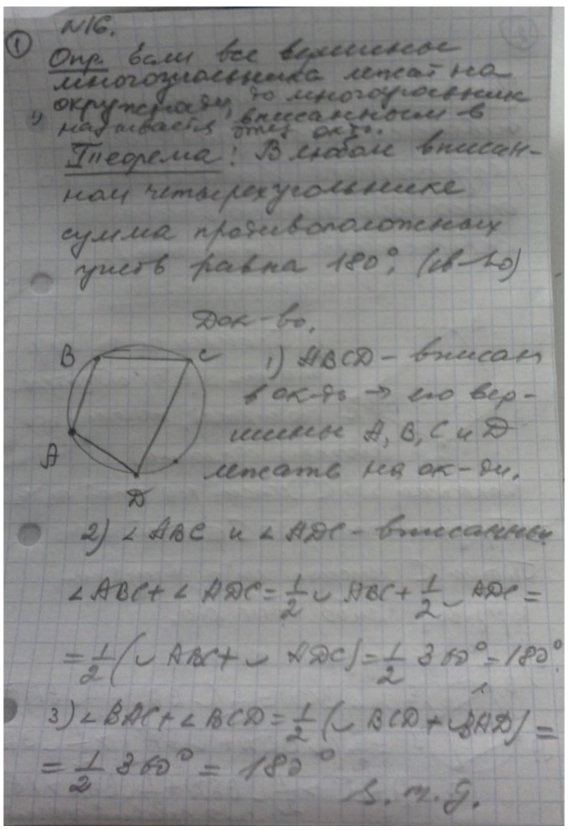
откуда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

что и требовалось доказать.

31 Сформулируйте и докажите свойства площадей треугольников с равными высотами, треугольников с равным углом и треугольников справными основаниями.

32 Сформулируйте и докажите свойства вписанного и описанного четырехугольника.



№16.

① Опр. Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то многоугольник называется вписанным в эту окр.

Теорема: В любом вписанном четырехугольнике сумма противолежащих углов равна 180°. (св-во)

Док-во.

1) ABCD – вписан в ок-ть → его вершины A, B, C и D лежат на ок-ти.

2) $\angle ABC$ и $\angle ADC$ – вписанные

$\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2} \smile ABC + \frac{1}{2} \smile ADC =$

$= \frac{1}{2}(\smile ABC + \smile ADC) = \frac{1}{2}\, 360^\circ = 180^\circ$

3) $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) =$

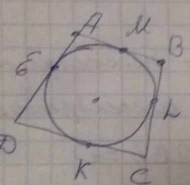
$= \frac{1}{2}\, 360^\circ = 180^\circ$

ч.т.д.

N7. Опр. стр. 181 п. 74. (1)

Т. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (св-во).

Доказательство:



1) $AE = AM$

$BM = BL$

$CL = CK$

$DK = DE$

(св-во отрезков касательных)

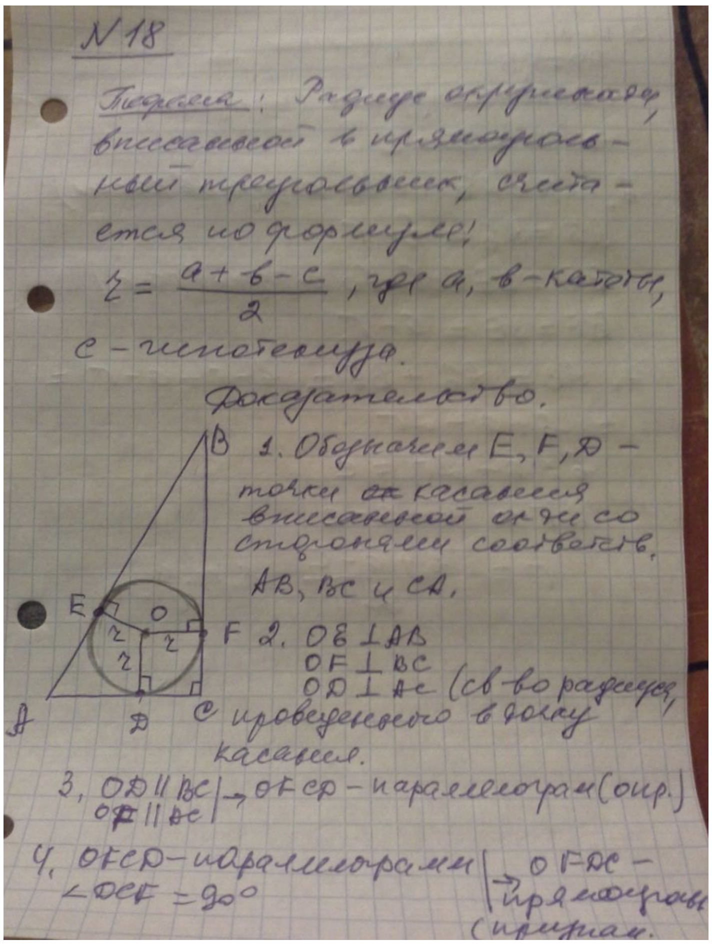
2) $AD + BC = AE + ED + BL + CL$

$AB + DK = DK + KC + AM + BM$

$\rightarrow AD + BC = AB + DC$.

ч. т. д.

33 Найдите радиус вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника.



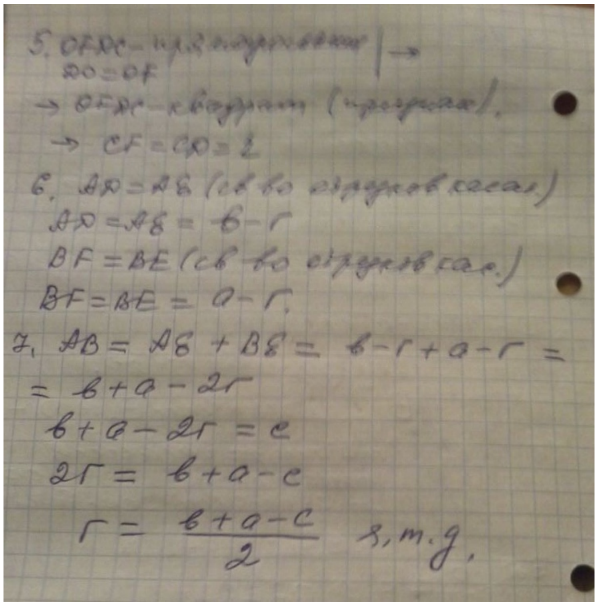
№18

Теорема: Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, считается по формуле:

$r = \frac{a+b-c}{2}$, где a, b – катеты, c – гипотенуза.

Доказательство.

1. Обозначим E, F, D – точки касания вписанной окр-ти со сторонами соответств. AB, BC и CA.
2. $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, $OD \perp AC$ (св-во радиуса, проведенного в точку касания.
3. $OD \parallel BC$, $OF \parallel AC$ $\rightarrow$ $OFCD$ – параллелограм (опр.)
4. $OFCD$ – параллелограмм, $\angle DCF = 90^\circ$ $\rightarrow$ $OFDC$ – прямоугольн (признак.



5. OFDC – прямоугольник |→
DO = OF
→ OFDC – квадрат (признак).
→ CF = CD = г
6. AD = AE (св-во отрезков касат.)
AD = AE = в − г
BF = BE (св-во отрезков кас.)
BF = BE = а − г.
7. AB = AE + BE = в − г + а − г =
= в + а − 2г
в + а − 2г = с
2г = в + а − с
$г = \frac{в + а - с}{2}$ ч.т.д.

34 Сформулируйте и докажите условия перпендикулярности и коллинеарность векторов через их координаты.