

Устный Зачёт по Геометрии

Скорбенко Егор

Апрель 2018

Содержание

1	Дайте определение угла между векторами, скалярного произведения векторов. Сформулируйте условие перпендикулярности. Докажите теорему о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты. Выведите формулу для вычисления угла между векторами.	5
1.1	Определения	5
1.2	Теорема о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты.	5
1.3	Вывод формулы для вычисления угла между векторами. .	6
2	Сформулируйте и докажите свойства скалярного произведения векторов.	7
3	Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность.	7
3.1	Определения	7
3.2	Доказательство	8
4	Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.	8
4.1	Определения	8
4.2	Доказательство	9

- 5 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (длина стороны, радиус вписанной окружности, площадь) через радиус описанной окружности. 9
- 6 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности, площадь) через длину стороны. 10
- 7 Выведите формулы для вычисления радиуса описанной окружности и радиуса вписанной окружности в произвольном треугольнике 10
- 8 Дайте определения градуса и радиана. Выразите приближенное значение одного радиана в градусах. Выведите формулы для нахождения длины дуги через ее градусную меру и радианную. 10
 - 8.1 Определения 10
 - 8.2 Формула через радианную меру 10
 - 8.3 Формула через градусную меру 11
- 9 Выведите формулы для нахождения площадей частей круга. 11
- 10 Сформулируйте свойства и признаки равнобедренной трапеции. Сформулируйте и допишите свойство равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями. 11
- 11 Дайте определение движения. сформулируйте общие свойства. Перечислите виды движений и их свойства. 11
 - 11.1 Определения 11
 - 11.2 Общие свойства 11
 - 11.3 Виды движений 11
- 12 Докажите теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности. Докажите теорему о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки. 12

13	Сформулируйте и докажите теорему о величине угла между касательной и хордой.	12
14	Сформулируйте и докажите теоремы о величине углов между пересекающимися хордами, между секущими.	13
15	Сформулируйте и докажите теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.	14
16	Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма и формулу для вычисления длины медианы.	14
17	Сформулируйте признаки подобия треугольников. Докажите один из них по выбору.	14
17.1	Определения	14
17.2	Доказательство	15
18	Сформулируйте и докажите обобщенную теорему синусов.	16
19	Выведите формулы для нахождения пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике. Выведите формулу для нахождения высоты прямоугольного треугольника через его стороны.	17
20	Выведите формулы для нахождения площади треугольника. (Не менее 4)	18
20.1	Стандартная	18
20.2	Формула Герона	18
20.3	Полупериметр и вписанная окружность	19
20.4	Формула через синус	19
21	Выведите формулу площади произвольного четырехугольника и формулу площади дельтоида.	20
22	Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, вписанной в треугольник. Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, описанной около треугольника.	20

- 23 Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника. 20
- 24 Сформулируйте и докажите свойство биссектрис параллелограмма. 20
- 25 Сформулируйте и докажите три свойства равнобедренной трапеции 20
- 26 Сформулируйте и докажите признаки прямоугольного треугольника. (Теорема, обратная теореме Пифагора и соотношение медианы и стороны, к которой она приведена. 20
- 27 Выведите формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей через стороны правильных треугольника, квадрата и шестиугольника. 21
- 28 Дайте определение вписанного угла. Сформулируйте и докажите теорему о величине вписанного угла. 21
- 29 Сформулируйте и докажите свойство медиан в произвольном треугольнике. 21
- 30 Сформулируйте теорему Чебы. Сформулируйте и докажите теорему Менелая. 22
- 31 Сформулируйте и докажите свойства площадей треугольников с равными высотами, треугольников с равным углом и треугольников с равными основаниями. 22
- 32 Сформулируйте и докажите свойства вписанного и описанного четырехугольника. 22
- 33 Найдите радиус вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника. 22
- 34 Сформулируйте и докажите условия перпендикулярности и коллинеарность векторов через их координаты. 22

- 1 Дайте определение угла между векторами, скалярного произведения векторов. Сформулируйте условие перпендикулярности. Докажите теорему о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты. Выведите формулу для вычисления угла между векторами.

1.1 Определения

Угол между векторами- угол между направлениями этих векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Условие перпендикулярности- скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

начается так: $a \cdot b$ или $a b$.

По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}). \quad (1)$$

1.2 Теорема о вычислении скалярного произведения векторов через их координаты.

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} выражается формулой

$$\vec{a} * \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Доказательство

Если хотя бы один из векторов \vec{a} и \vec{b} нулевой, то справедливость равенства (2) очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю. Рассмотрим случай, когда векторы \vec{a} и \vec{b} ненулевые. Отложим от произвольной точки O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны (рис. 304, а), то по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны (рис. 304, б, в).

Так как $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, то равенство (3) можно записать так: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$, откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2). \quad (4)$$

Векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{b} - \vec{a}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$, $\{x_2; y_2\}$ и $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, поэтому

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= x_1^2 + y_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2, \\ |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (4), после несложных преобразований получим формулу (2). Теорема доказана.

1.3 Вывод формулы для вычисления угла между векторами.

Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.

Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, деленному на произведение модулей векторов.

$$\cos a = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

2 Сформулируйте и докажите свойства скалярного произведения векторов.

начается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $a \cdot b$.

По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}}). \quad (1)$$

3 Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

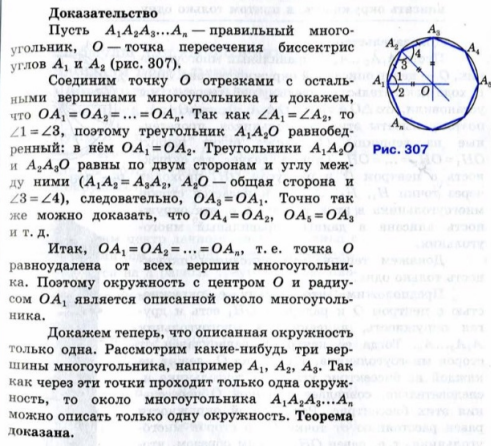
3.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Окружность называется описанной, если все вершины многоугольника лежат на данной окружности.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

3.2 Доказательство



4 Дайте определение правильного многоугольника. Докажите, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

4.1 Определения

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Окружность называется **вписанной**, если все стороны многоугольника касаются данной окружности.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4.2 Доказательство

Доказательство

Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — правильный многоугольник. O — центр описанной окружности (рис. 308). В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \dots = \triangle OA_{n-1}A_n$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины O , также будут равны: $OH_1 = OH_2 = \dots = OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, \dots, H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т.е. эта окружность вписана в данный правильный многоугольник.

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2\dots A_n$. Тогда её центр O_1 равноудалён от сторон многоугольника, т.е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т.е. равен OH_1 . Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. Теорема доказана.

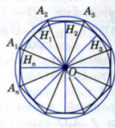


Рис. 308



5 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (длина стороны, радиус вписанной окружности, площадь) через радиус описанной окружности.

Докажем, что $S = \frac{1}{2}Pr$.

$$S = \frac{1}{2}Pr = n * \frac{1}{2} * a * r = \frac{1}{2} * (n * a)r$$

ЧТД.

Далее: $a_n = 2R * \sin \frac{180^\circ}{n}$

$$r = R * \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n} * 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

$$a_n = 2 * A_1 * H_1$$

$$r = O * H_1$$

- 6 Выведите формулы для вычисления элементов правильного многоугольника (радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности, площадь) через длину стороны.

???????????

- 7 Выведите формулы для вычисления радиуса описанной окружности и радиуса вписанной окружности в произвольном треугольнике

???????

- 8 Дайте определения градуса и радиана. Выразите приближенное значение одного радиана в градусах. Выведите формулы для нахождения длины дуги через ее градусную меру и радианную.

8.1 Определения

Градус- единица измерения дуг и углов, равная $1/360$ окружности.

Радиан- угол, соответствующий дуге, длина которой равна её радиусу.

1 Градус ≈ 0.0175 Радиан

8.2 Формула через радианную меру

$$l = \frac{\pi R}{180} n$$

8.3 Формула через градусную меру

Градус -> радиан и аналогично пункту 2.

9 Выведите формулы для нахождения площадей частей круга.

10 Сформулируйте свойства и признаки равнобедренной трапеции. Сформулируйте и допишите свойство равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями.

11 Дайте определение движения. сформулируйте общие свойства. Перечислите виды движений и их свойства.

11.1 Определения

Движение плоскости- отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Центральная симметрия плоскости также является движением.

11.2 Общие свойства

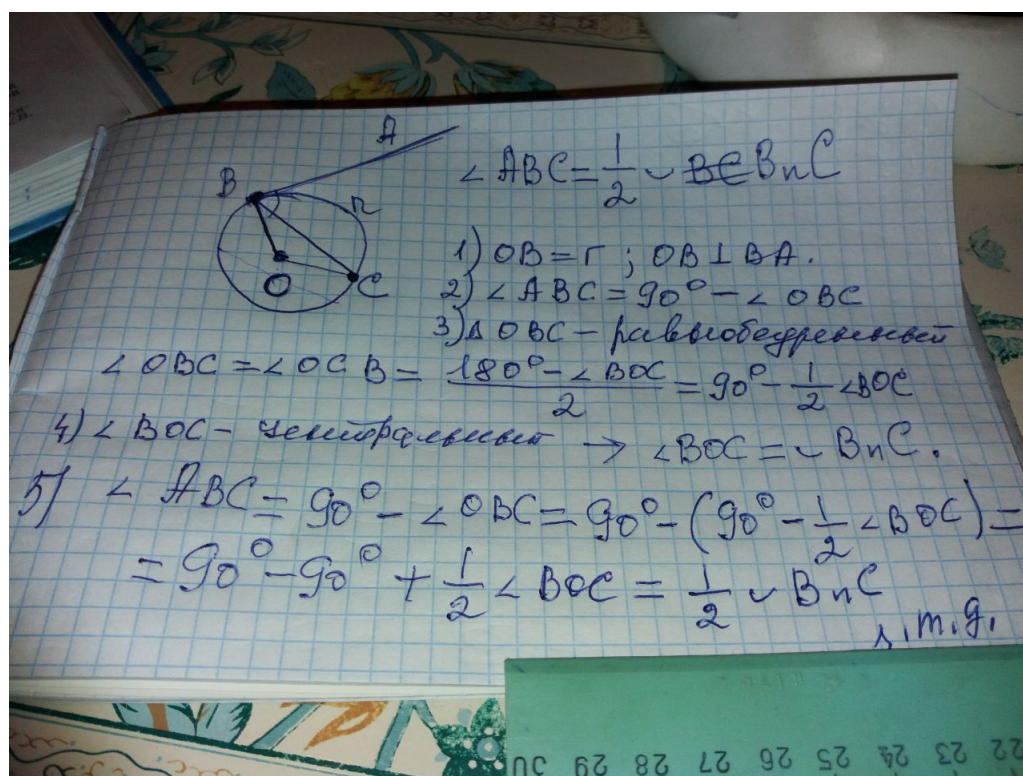
11.3 Виды движений

1. Симметрия осевая 2. Симметрия центральная 3. Симметрия зеркальная 4. Симметрия скользящая 5. Параллельный перенос 6. Поворот

- 12 Докажите теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности. Докажите теорему о произведении отрезков секущей и квадрате касательной, проведенных из одной точки.

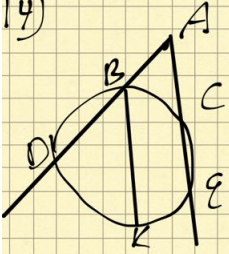
пункт 73 последняя теорема + телеграм фото

- 13 Сформулируйте и докажите теорему о величине угла между касательной и хордой.



14 Сформулируйте и докажите теоремы о величине углов между пересекающимися хордами, между секущими.

14)



$$\angle DAE = \frac{1}{2} (\angle DE - \angle BC)$$

- 1) $BK \parallel CE$
- 2) $\angle DBK = \angle DAE$

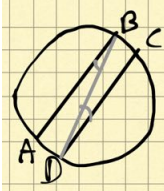
как соответствующие углы

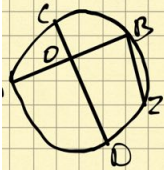
т.к. $BK \parallel CE$

$$\angle DBK = \frac{1}{2} \angle DK = \frac{1}{2} (\angle DE - \angle KE)$$

$$\angle KE = \angle BC \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} (\angle DE - \angle BC)$$

Бо дуги, заключенные между параллельными хордами равны.
оказательство:



$$\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \angle AD = \angle CB \\ \text{1) } BD - \text{сек} \\ \text{2) } \angle ABD = \angle BDC \quad \text{как накрестлежащие при AB и CD и сек. BD.} \\ \text{3) } \angle AD = 2\angle ABD = 2\angle BDC = \angle CB \quad \text{ЧТД.} \end{array}$$


$$\angle COB = \frac{1}{2} (\angle AD + \angle CB)$$

- 1) $BZ \parallel AD$
- 2) $\angle AOD = \angle ABZ$ как соответственные при CD и BZ и сек. AB.

$$\angle ABZ = \frac{1}{2} \angle AZ = \frac{1}{2} (\angle AD + \angle DZ) = \frac{1}{2} (\angle AD + \angle CB)$$

$$\angle DZ = \angle CB$$

15 Сформулируйте и докажите теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

в предыдущем зачете

16 Сформулируйте и докажите свойство диагоналей параллелограмма и формулу для вычисления длины медианы.

в предыдущем зачете

17 Сформулируйте признаки подобия треугольников. Докажите один из них по выбору.

17.1 Определения

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. 2 стороны пропорциональны + угол равен
3. 3 стороны пропорциональны

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = K$$

17.2 Доказательство

Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 192, а). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим треугольник ABC_2 , у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 192, б). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$.

С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle 1 = \angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

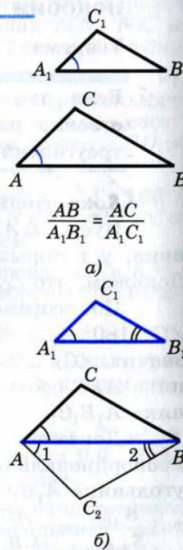
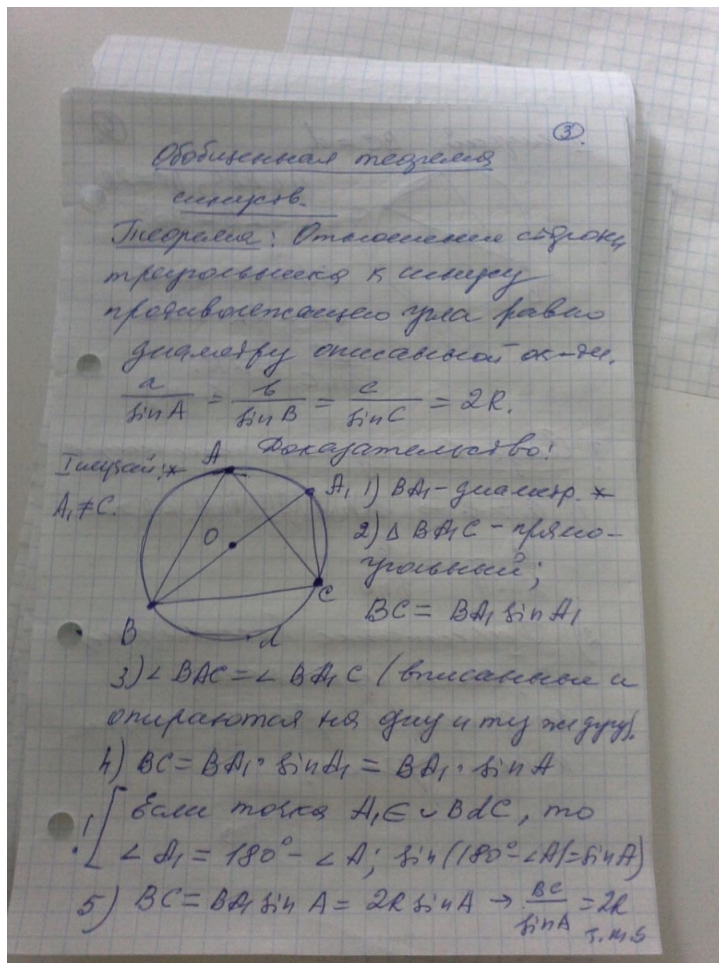
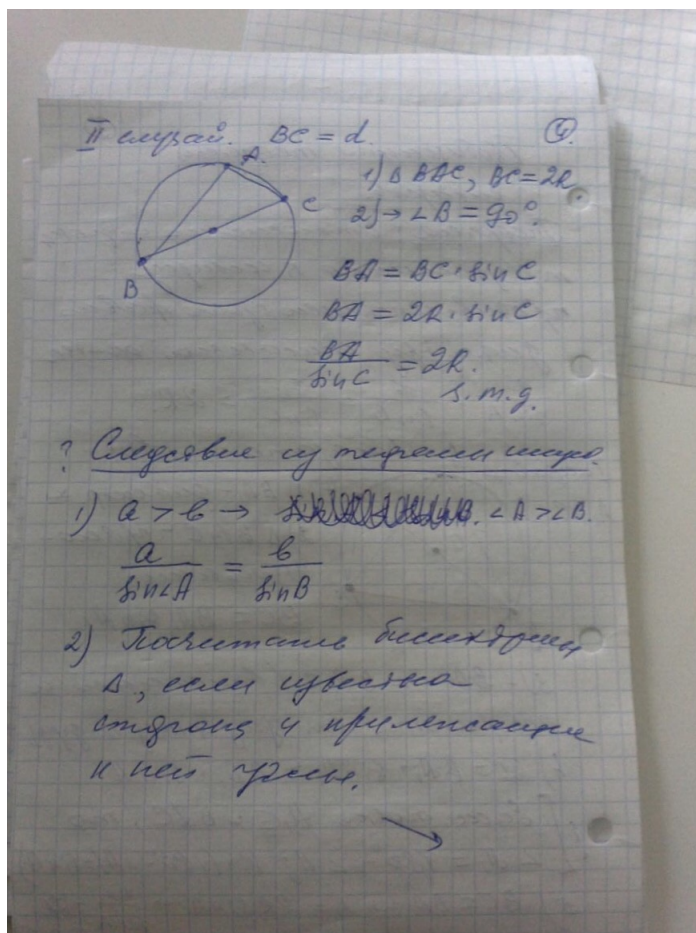


Рис. 192

18 Сформулируйте и докажите обобщенную теорему синусов.





19 Выведите формулы для нахождения пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике. Выведите формулу для нахождения высоты прямоугольного треугольника через его стороны.

в предыдущем зачете

20 Выведите формулы для нахождения площади треугольника. (Не менее 4)

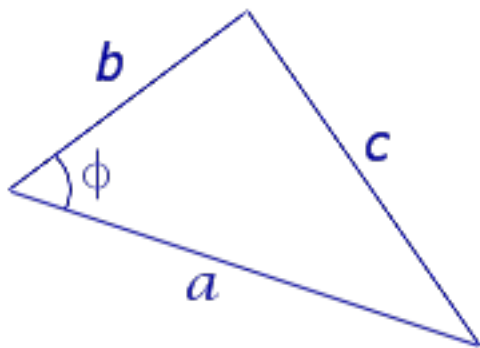
20.1 Стандартная

$$S = \frac{1}{2}ah$$

Доказательство: достроим до параллелограмма ABCD,

$$\triangle ABC = \triangle DCB = \frac{1}{2}ABCD.$$

20.2 Формула Герона



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\phi \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\phi = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2\phi).$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos^2\phi$$

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2\phi) =$$

$$\frac{1}{4}a^2b^2\left(1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2\right) =$$

$$\frac{1}{16}(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) =$$

$$\frac{1}{16}((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) = \\ & \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b+c-2c)(c+a+b-2b)(a+b+c-2a) = \\ & \frac{1}{16}2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a) = p(p-c)(p-b)(p-a) \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))} \text{ ЧТД.}$$

20.3 Полупериметр и вписанная окружность

$$S = \frac{1}{2}Pr$$

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2}Pr = n * \frac{1}{2} * a * r = \frac{1}{2} * (n * a)r$$

20.4 Формула через синус

$$S = \frac{1}{2}ab * \sin \alpha$$

Доказательство:

$$h_a = b * \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2}a * h_a = \frac{1}{2}ab * \sin \alpha$$

- 21 Выведите формулу площади произвольного четырехугольника и формулу площади дельтоида.
- 22 Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, вписанной в треугольник. Сформулируйте и докажите теорему о центре окружности, описанной около треугольника.
- 23 Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.
- 24 Сформулируйте и докажите свойство биссектрис параллелограмма.
- 25 Сформулируйте и докажите три свойства равнобедренной трапеции
- 26 Сформулируйте и докажите признаки прямоугольного треугольника. (Теорема, обратная теореме Пифагора и соотношение медианы и стороны, к которой она приведена.

ФШФШФШ

27 Выведите формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей через стороны правильных треугольника, квадрата и шестиугольника.

ФОФ

28 Дайте определение вписанного угла. Сформулируйте и докажите теорему о величине вписанного угла.

ОО

29 Сформулируйте и докажите свойство медиан в произвольном треугольнике.

фофо

- 30 Сформулируйте теорему Чебы. Сформулируйте и докажите теорему Менелая.
- 31 Сформулируйте и докажите свойства площадей треугольников с равными высотами, треугольников с равным углом и треугольников с равными основаниями.
- 32 Сформулируйте и докажите свойства вписанного и описанного четырехугольника.
- 33 Найдите радиус вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника.

фофо

- 34 Сформулируйте и докажите условия перпендикулярности и коллинеарности векторов через их координаты.

фффо