11.03.2023

Задача 2

$D^{-1}b - x^{k+1} = D^{-1}(L+U)x^k$

$B = -D^{-1}(L+U)$

$\|B\|_\infty = \|D^{-1}\|_\infty \|L+U\|_\infty = \|diag\left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}\right)\|_\infty \cdot (\max_i |l_{i,i-1}| + \max_i |l_{i,i+1}|) \leqslant \frac{1}{4} \cdot (1 + 1) = \frac{1}{2}$

Тогда на k-ом шаге ошибка уменьшится в $\|B\|_\infty^k$ раз:

$10 \cdot \|B\|_\infty^k > \|x_0 - x^*\|_\infty \cdot \|B\|_\infty^k \geqslant 10^{-6} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^k > 10^{-7} \Rightarrow k > 7 \cdot log_2 10 \approx 23,3$

Следовательно минимальное необходимое число итераций $k = 24$.

Задача 3

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

1) Метод Якоби

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{d} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\lambda^2 - \frac{bc}{ad}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{bc}{ad}}.$$

2) Метод Гаусса-Зейделя

$$B_{GS} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda\left(\lambda - \frac{bc}{ad}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{bc}{ad}.$$

По критерию сходимости методы сходятся $\Leftrightarrow \rho(B) < 1:$

$\rho(B_J) = max_i|\lambda_i| = \left|\sqrt{\frac{bc}{ad}}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{bc}{ad}\right| < 1,$

$\rho(B_{GS}) = max_i|\lambda_i| = \left|\frac{bc}{ad}\right| < 1.$

Таким образом, методы сходятся или расходятся одновременно.