25.02.2023

Задача 1

а) Норма Фробениуса

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times m} \quad ||A||_F^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}|a_{ij}|^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\overline{a_{ij}}a_{ij} = trace\left(A^*A\right)$

$\forall$ унитарных $Q, V \in \mathbb{C}^{n\times m}$

$||QAV||_F^2 = tr\left((QAV)^*QAV\right) = tr\left(V^*A^*Q^*QAV\right) = tr\left(VV^*A^*Q^*QA\right) = tr\left(IA^*IA\right) =$
$= tr\left(A^*A\right) = ||A||_F^2.$

Тогда $||QAV||_F = ||A||_F.$

б) 2-норма

Воспользуемся SVD разложением матрицы A:
$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times m} \quad A = U\Sigma W^*,$ где U, W - унитарные.

Тогда $\forall$ унитарных $Q, V \in \mathbb{C}^{n\times m} \quad QAV$ имеет те же сингулярные числа σ_i, что и A, поскольку $QAV = QU\Sigma W^*V = (QU)\Sigma(V^*W)^*$ - SVD матрицы QAV.

$||QAV||_2^2 = \max_{i\in\overline{1,n}} \sigma_i = ||A||_2^2.$

Тогда $||QAV||_2 = ||A||_2.$