18.02.2023

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ и ее вторая производная ограничены (локально ограничены): $|f(\xi)| < M_0$ и $|f''(\xi)| < M_2$, тогда:

$$|f'(x) - \frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h}| =$$

$$= |f'(x) - \frac{-3f(x)+4f(x)+4hf'(x)+2h^2f''(\xi_1)-f(x)-2hf'(x)-2h^2f''(\xi_2)}{2h} - \frac{-3f(x)\epsilon+4f(x+h)\epsilon-f(x+2h)\epsilon}{2h}| \le \frac{hM_2}{2} + \frac{4\epsilon M_0}{h}.$$

Оптимальное h такое, что $\frac{hM_2}{2} + \frac{4\epsilon M_0}{h}$ минимально:

$$\frac{hM_2}{2} = \frac{4\epsilon M_0}{h} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{8\epsilon M_0}{M_2}}.$$

Задача 2

$$\forall x, y \in \mathbb{C} \;\; \|x\|_2\|y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{n} |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=0}^{n} |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |x_i|^2|y_j|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |x_i|^2|\overline{y_j}|^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |x_i\overline{y_j}|^2} = \|xy^*\|_2$$