22.04.2023

Задача 1

$f(x) = \sin x.$

Погрешность интерполяции:

$$|f(x) - L_3(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}w(x)\right| \leqslant \left|\frac{\max \sin x}{4!}w(x)\right| = \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) \approx$$

$$\approx 0.00018.$$

Погрешность задания функции:

$$E \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{3} |l_j(x)| \approx 10^{-2} \cdot 1.176 = 0.01176.$$

Суммарная ошибка:

$$|f(x) - L_3(x)| + E \leqslant 0.01194.$$

Задача 2

$f(x) = \sin x, \quad P(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2.$

$$(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) dx.$$

$$\varGamma = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) & \left(1,x^2\right) \\ (x,1) & (x,x) & \left(x,x^2\right) \\ \left(x^2,1\right) & \left(x^2,x\right) & \left(x^2,x^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$\varGamma c = \begin{pmatrix} (1,f) \\ (x,f) \\ \left(x^2,f\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \sin x dx \\ \int_0^1 x \sin x dx \\ \int_0^1 x^2 \sin x dx \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.4597 \\ 0.3012 \\ 0.2232 \end{pmatrix} \Rightarrow c \approx \begin{pmatrix} -0.0099 \\ 1.1052 \\ -0.249 \end{pmatrix},$$

т.е.: $P(x) = -0.0099 + 1.1052x - 0.249x^2.$

Задача 3

$f(x) = x^{1/3}, \quad P(x) = a + bx.$

По теореме Чебышёва об альтернансе необходимо найти 3 точки альтернанса для разности

$f(x) - P(x) := d(x)$. Рассмотрим две крайние точки 0, 1 и экстремум разности:

$d'(x) = 0 \Rightarrow \left(x^{1/3} - a - bx\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} - b = 0 \Rightarrow x_0 = (3b)^{-3/2}$.

$$d(0) = -d(x_0) = d(1) \Rightarrow \begin{cases} a = -(3b)^{-1/2} + a + b(3b)^{-3/2} \\ 1 - a - b = -(3b)^{-1/2} + a + b(3b)^{-3/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3\sqrt{3b}} \\ 1 - a - b = \dfrac{2}{3\sqrt{3b}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \\ b = 1 \end{cases}.$$

т.е.: $P(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + x$.

Задача 4

$x = e^{2x} - 1 := F(x)$.

$x_{k+1} = e^{2x_k} - 1$.

Есть корень 0, но в его окрестности метод может не сходиться, поскольку $|F'(0)| = 2 > 1$.

Область сходимости:

$|F'(x)| < 1 \Rightarrow 2e^{2x} < 1 \Rightarrow x < \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.35$.

Возьмем в качестве начального приближения второго корня $x_0 = -0.8$.

Скорость сходимости:

$|F'(x_0)| = q = 2e^{-1.6} \approx 0.4038 < 0.5$,

$|x_k - z| \leqslant \dfrac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0| = \dfrac{1}{2^{k-1}}|x_1 - x_0|$.

Задача 5

$f(x) = \log(x+2) - x^2 = 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x+2} - 2x, \quad f''(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2} - 2.$

Метод Ньютона: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Положим начальное приближение $z = -0.6$ в области $D = [-0.7,\ -0.5]$.

Число итераций:

$$e^{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}e_k^2 \leqslant -\frac{\max_{x\in D} f''(x)}{2\min_{x\in D} f'(x)}e_k^2 := \alpha e_k^2 \Rightarrow e_k = \alpha^{2^k-1}e_0^{2^k} = \frac{(\alpha e_0)^{2^k}}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\log_{\alpha e_0}\alpha e_k,$$

$$\alpha = -\frac{\max_{x\in D} f''(x)}{2\min_{x\in D} f'(x)} = -\frac{f''(-0.7)}{2f'(-0.5)} \approx \frac{2.5917}{2\cdot 1.6667} \approx 0.7775,$$

$$e_0 = z - x_0 = z - z - \frac{f(z)}{f'(z)} \approx 0.0123,$$

$$k = \frac{1}{2}\log_{\alpha e_0}\alpha e_k = \frac{1}{2}\log_{0.0096} 0.7775\cdot 10^{-6} \approx 3.$$