Вопрос по выбору: Работа 4.7.1 ”Двойное лучепреломление”

Батарин Егор

27 мая 2021 г.

Аннотация

В данной работе изучается зависимость показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле.

1 Явление двойного лучепреломления

Запишем уравнения Максвелла с учетом отсутствия сводобный зарядов и токов:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Далее учтем, что $\vec{H} = \vec{B}$ и будем рассматривать гармонические волны:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}, \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$$

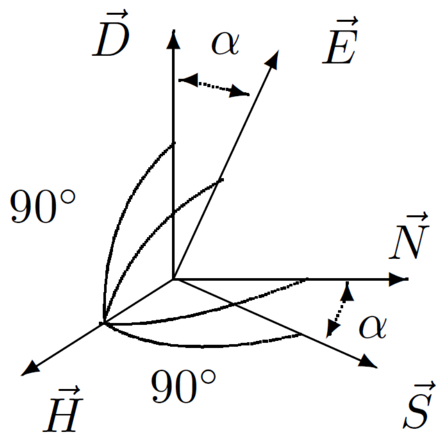
Это приводит к следующим соотношениям эквивалетных операций в уравнениях Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \operatorname{div} \to -i\vec{k}\,\cdot, \operatorname{rot} \to -i\vec{k}\times$$

Теперь можно привести уравнения Максвелла к следующему эквивалетному виду:

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$
$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$
$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{H}$$
$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c}\vec{D}$$

Это приводит к следующему взаимному расположению векторов, показанных на рисунке ниже:



Далее рассмотрим явление двойного лучепреломления с точки зрения классической теории дисперсии. Предположим, что направления колебания электроном под действием внешнего гармонического электрического поля $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ ограничены направлением единичного вектора $\vec{n}$. Тогда уравнение движения электрона можно записать так:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \vec{n}\frac{e}{m}\vec{E} \cdot \vec{n}$$

Это приводит к следующему выражению для вектора поляризации:

$$\vec{P} = N\vec{r}_0 = \frac{N\frac{e}{m}\vec{E} \cdot \vec{n}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}\vec{n} = \hat{\alpha}\vec{E}$$

В общем случае $\hat{\alpha}$ представляет с собой матрицу 3×3, поскольку направление разрешенных колебаний электрона не обязано совпадать с направлением внешнего электрического поля. Этим определяется тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} = 1 + 4\pi\hat{\alpha}$. Удачным выбором координатных осей, его можно привести к диагональному виду: $\hat{\varepsilon} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

Мы будем рассматривать случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o, \varepsilon_3 = \varepsilon_e$. В этом случае получаем следущее соотношение между вектором электрического смещения и электрического поля:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \hat{\varepsilon}\vec{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_o E_1 \\ \varepsilon_o E_2 \\ \varepsilon_e E_3 \end{pmatrix}$$

Введем обозначения:

$$\vec{D}_\perp = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_o E_1 \\ \varepsilon_o E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_o \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_o \vec{E}_\perp, \vec{D}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_e E_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_e \vec{E}_\parallel$$

Преобразуем уравнения Максвелла с учетом вышесказанного:

$$\begin{aligned}
&\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \frac{\omega}{c}\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{D} \Rightarrow \\
&\left(\vec{k} \cdot \vec{E}\right)\vec{k} - k^2\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{D} \Rightarrow \\
&\left(\vec{k} \cdot \vec{E}\right)\left(\vec{k} \cdot \vec{D}\right) - k^2\left(\vec{E} \cdot \vec{D}\right) = -\frac{\omega^2}{c^2}D^2 \Rightarrow \\
&\frac{1}{n^2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{D^2} = \frac{\left(\frac{\vec{D}_\perp}{\varepsilon_o} + \frac{\vec{D}_\parallel}{\varepsilon_e}\right) \cdot \left(\vec{D}_\perp + \vec{D}_\parallel\right)}{D^2} = \frac{\left(\frac{D_\perp^2}{n_0^2} + \frac{D_\parallel^2}{n_e^2}\right)}{D^2}
\end{aligned}$$

Рассмотрим далее 2 случая:

1) Обыкновенная волна.

Этом случае $\vec{D} = \vec{D}_\perp$ - электрическое смещение направлено перпендикулярно оси кристалла, значит то же самое можно сказать и про вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = \vec{E}_\perp$, поэтому получаем $n = n_o$.

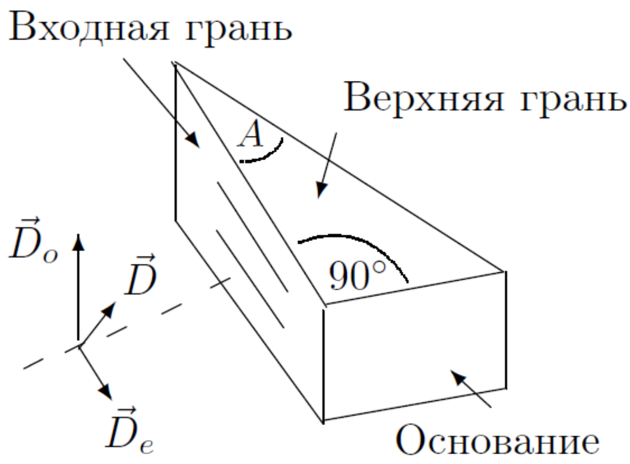
2) Необыкновенная волна.

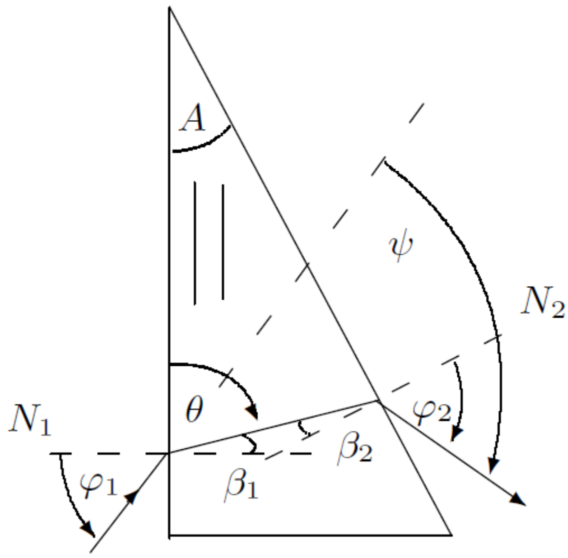
Пусть теперь вектор $\vec{D}$ не лежит в плоскости, перпендикулярной оси кристалла, а направлен под углом α к ней. Тогда $D_\perp = D\cos\alpha$ и $D_\parallel = D\sin\alpha$, значит

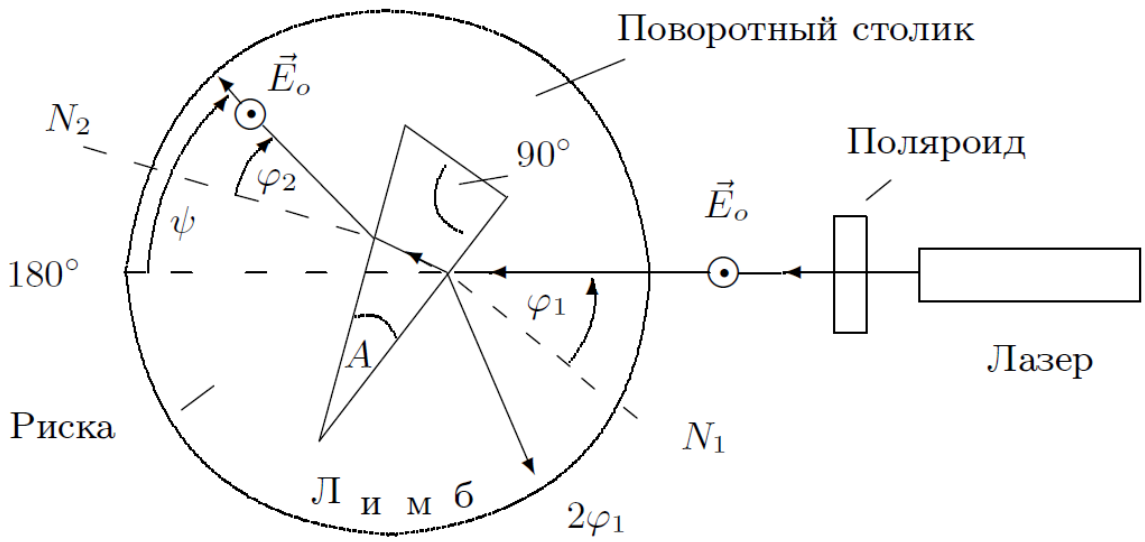
$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2\alpha}{n_e^2} + \frac{\cos^2\alpha}{n_o^2}$$

2 Ход и выполнение лабораторной работы

Ниже представлено графическое описание лаборатной работы:



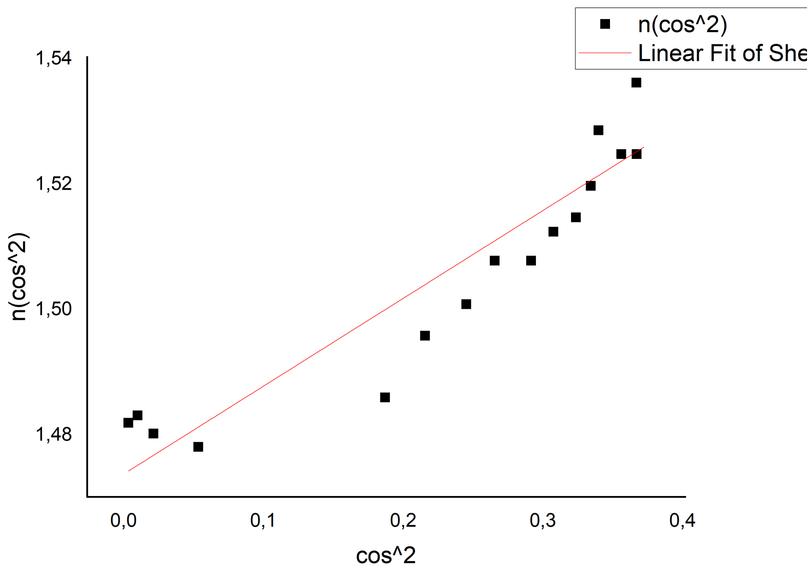




В работе использовался исландский шпат: $n_o = 1.655, n_e = 1.485$. Пользуясь приближением $n_o - n_e = 0.17 \ll n_o, n_e$, упростим формулу для показателя преломления:

$$n(\theta) = n_e + (n_o - n_e)\cos^2\theta$$

В результате получается график:



Точка пересечения равна $1.47 \pm 0.02 \approx n_e$, наклон равен $0.15 \pm 0.03 \approx n_o - n_e$, что хорошо совпадает со справочными данными.

Зависомость также похожа на линейную, что согласуется с теорией.