



ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ

Лабораторная работа № 406

Цель работы: изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления n_o — обыкновенной и n_e — необыкновенной волны в кристалле¹; наблюдение эффекта полного внутреннего отражения.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляририд.

При падении световой волны на границу изотропной среды в этой среде от границы распространяется одна волна. Если среда анизотропна, то в ней в общем случае возникают две волны, распространяющиеся от границы в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление называется *двойным лучепреломлением*. Оно было открыто Бартолинусом в 1669 г. в кристаллах исландского шпата, призма из которого исследуется в нашей работе.

Плоские волны в кристаллах. Фундаментальные уравнения Максвелла справедливы без всяких изменений и в кристаллических средах. В отсутствие электрических зарядов и токов они имеют вид

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

Если среды прозрачны и однородны, то в них могут распространяться плоские монохроматические волны. Запишем такую волну в комплексном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{B} = \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}.$$

Здесь ω — круговая частота, \vec{k} — волновой вектор, а амплитуды \vec{E}_0 , \vec{H}_0 , \vec{D}_0 постоянны. Вектор \vec{B} совпадает с \vec{H} , так как $\mu = 1$. Дифференцируя по времени, получаем $\partial \vec{D} / \partial t = i\omega \vec{D}$, т.е. операция дифференцирования сводится в этом случае к умножению на $i\omega$. Аналогично дифференцирование по координатам x , y , z сводится к умножению на $-ik_x$, $-ik_y$, $-ik_z$. Заметив это и обозначив координатные орты через \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z , получаем

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i[\vec{k} \vec{H}]$$

и аналогично для $\text{rot} \vec{E}$. В результате (1) перейдут в

$$[\vec{k} \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D}; \quad [\vec{k} \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}.$$

Введем единичный вектор нормали \vec{N} к фронту волны и скорость распространения фронта в направлении этой нормали v . Тогда $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{N}$ и предыдущие соотношения перейдут в

$$\vec{D} = -\frac{c}{v} [\vec{N}\vec{H}]; \quad \vec{B} = \frac{c}{v} [\vec{N}\vec{E}]. \quad (2)$$

Отсюда видно, что векторы \vec{D} , \vec{H} , \vec{N} взаимно перпендикулярны. Значит, плоские волны в кристалле поперечны в отношении векторов \vec{D} и \vec{H} . Однако в общем случае они не поперечны в отношении вектора \vec{E} .

В изотропной среде связь между вектором напряжённости электрического поля \vec{E} и вектором индукции \vec{D} дается материальным уравнением $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, где ϵ — постоянная, не зависящая от направления величина, называемая *диэлектрической проницаемостью*. Для характеристики оптических свойств анизотропной среды требуется девять величин ϵ_{ij} , образующих тензор диэлектрической проницаемости. Он вводится посредством соотношений

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (3)$$

Благодаря тензорной связи между \vec{D} и \vec{E} направления этих векторов в кристаллах, вообще говоря, не совпадают. Плоскость (\vec{E}, \vec{H}) обладает тем свойством, что перпендикуляр к ней определяет направление вектора Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]$, т.е. направление распространения световых лучей. Четыре вектора \vec{D} , \vec{E} , \vec{N} , \vec{S} лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору \vec{H} . Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 1.

Оптически одноосные кристаллы. Всю совокупность возможных значений тензора диэлектрической проницаемости можно представить при помощи трехосного эллипсоида. Значение диэлектрической проницаемости для любого направления выражается длиной радиуса-вектора эллипсоида, проведенного по этому направлению. Три значения диэлектрической проницаемости ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , соответствующие осям эллипсоида, называются *главными значениями диэлектрической проницаемости* и соответственно $\sqrt{\epsilon_x}$, $\sqrt{\epsilon_y}$, $\sqrt{\epsilon_z}$ — *главными показателями преломления*.

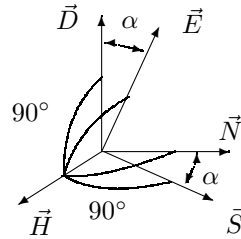


Рис. 1. Расположение векторов \vec{D} , \vec{E} , \vec{N} , \vec{S} в анизотропной среде

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида, тензор диэлектрической проницаемости приводится к диагональному виду, и проекции векторов \vec{D} и \vec{E} на оси координат связаны простыми соотношениями:

$$D_x = \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_z E_z.$$

В оптически одноосном кристалле, каковым является исландский шпат, эллипсоид диэлектрической проницаемости представляет собой эллипсоид вращения. В нем оптическая ось² совпадает с осью вращения эллипсоида диэлектрических проницаемостей. Для главных значений диэлектрических проницаемостей приняты обозначения: $\epsilon_z = \epsilon_{||}$ и $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}$. В дальнейшем нам потребуется связь между проекциями векторов \vec{D} и \vec{E} на оптическую ось кристалла ($\vec{D}_{||}$ и $\vec{E}_{||}$) и на плоскость, перпендикулярную оси (\vec{D}_{\perp} и \vec{E}_{\perp}):

$$\vec{D}_{||} = \epsilon_{||}\vec{E}_{||}, \quad \vec{D}_{\perp} = \epsilon_{\perp}\vec{E}_{\perp}. \quad (4)$$

Волну, распространяющуюся в одноосном кристалле, можно разделить на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции \vec{D}_o которой перпендикулярен главному сечению, и необыкновенную, с вектором электрической индукции \vec{D}_e , лежащим в главном сечении (рис. 2). *Главным сечением кристалла* называется плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль к фронту волны.

Рассмотрим вначале обыкновенную волну, в которой вектор \vec{D}_o перпендикулярен главному сечению. Тогда $D_{oz} = 0$, и из условия $D_z = \epsilon_z E_z$ следует, что $E_{oz} = 0$.

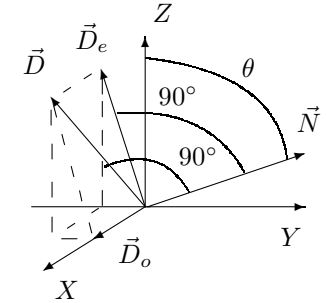


Рис. 2. Расположение векторов \vec{N} и \vec{D} в анизотропной среде:
($\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{D}_e$; $\vec{D}_o \perp \vec{D}_e$; $\vec{D} \perp \vec{N}$);
 \vec{N} и \vec{D}_e лежат в плоскости (Z, Y) ; \vec{D}_o перпендикулярен плоскости (Z, Y)

²Оптическая ось — определённое направление в кристалле, вдоль которого лучи с ортогональной поляризацией распространяются с одной скоростью, как в обычной изотропной среде. Величина ϵ в направлении оптической оси имеет экстремальное значение, а во всех направлениях, перпендикулярных оси, значения ϵ для одноосного кристалла одинаковы.

Кроме того, так как $D_{oy} = \varepsilon_{\perp} E_{oy}$ и $D_{ox} = \varepsilon_{\perp} E_{ox}$, то можно записать

$$\vec{D}_o = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_o. \quad (5)$$

Таким образом, для обыкновенной волны материальное уравнение имеет такой же вид, как и в изотропной среде. Найдем с помощью этого уравнения скорость распространения обыкновенной волны и соответствующий показатель преломления. Из (2) имеем

$$D_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o$$

или, учитывая (5),

$$\varepsilon_{\perp} E_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o,$$

откуда

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \quad \text{и} \quad n_o = \frac{c}{v_o} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}.$$

Таким образом, скорость распространения обыкновенной волны и ее показатель преломления не зависят от направления распространения.

У необыкновенной волны вектор \vec{D}_e не параллелен \vec{E}_e , и связь между ними сложнее, чем в (5).

Для того чтобы найти скорость распространения v и показатель преломления необыкновенной волны $n = c/v$, достаточно найти связь между вектором электрической индукции этой волны \vec{D}_e и проекцией на него вектора электрического поля волны E_{eD} . Тогда, подставляя $D_e = \varepsilon E_{eD}$ в (2), приходим к соотношениям

$$\varepsilon E_{eD} = \frac{c}{v} H_e; \quad H_e = \frac{c}{v} E_{eD},$$

формально тождественным с соотношениями для обыкновенной волны. Роль величины ε_{\perp} теперь играет величина ε , а показатель преломления необыкновенной волны равен $\sqrt{\varepsilon}$.

Найдем связь между D_e и E_{eD} . Для этого разложим векторы \vec{D}_e и \vec{E}_e на составляющие, параллельные и перпендикулярные оси кристалла:

$$\vec{D}_e = \vec{D}_{e\parallel} + \vec{D}_{e\perp}.$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e\parallel} + \vec{E}_{e\perp}.$$

Учитывая (4), находим

$$E_{eD} = \frac{\vec{E}_e \vec{D}_e}{D_e} = \frac{E_{e\parallel} D_{e\parallel} + E_{e\perp} D_{e\perp}}{D_e} = \frac{D_{e\parallel}^2 / \varepsilon_{\parallel} + D_{e\perp}^2 / \varepsilon_{\perp}}{D_e}$$

или

$$E_{eD} = D_e \left(\frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} \right) = \frac{D_e}{\varepsilon},$$

где θ — угол между оптической осью Z и волновой нормалью N (рис. 2):

$$\sin \theta = \frac{D_{e\parallel}}{D_e}, \quad \cos \theta = \frac{D_{e\perp}}{D_e}. \quad (6)$$

Таким образом, ε и соответственно скорость распространения и показатель преломления необыкновенной волны зависят от угла между оптической осью кристалла и направлением распространения волны.

Выпишем выражение для показателя преломления необыкновенной волны $n = \sqrt{\varepsilon}$ через главные показатели преломления n_o , n_e и угол θ :

$$\frac{1}{[n(\theta)]^2} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}. \quad (7)$$

При $n_o - n_e \ll n_o$ и n_e (для исландского шпата $n_o = 1,655$, $n_e = 1,485$ для $\lambda = 0,63$ мкм) (7) можно упростить:

$$n(\theta) \approx n_e + (n_o - n_e) \cos^2 \theta. \quad (8)$$

Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата. Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можно определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 3).

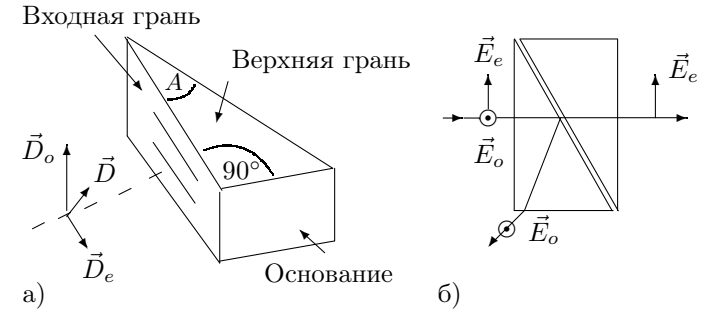


Рис. 3. а) Исследуемая призма из исландского шпата. Штриховкой указано направление оптической оси кристалла. б) Ход лучей в поляризационной призме

В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллельной верхней грани призмы, причем она параллельна входной грани призмы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор \vec{D}_o перпендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне вектор \vec{D}_e параллелен верхней грани.

Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в виде суммы двух ортогональных линейно поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы можно рассматривать независимо. Волна, в которой вектор \vec{D} направлен вертикально (перпендикулярно верхней грани и оси кристалла), внутри кристалла будет распространяться как обыкновенная. Для этой волны выполняется закон Снеллиуса, а показатель преломления призмы для нее равен $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$. Волна, в которой вектор \vec{D} направлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкновенная. Для этой волны также будет выполняться закон Снеллиуса, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для нее будет зависеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

Значение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы φ_1 и угол φ_2 на выходе призмы (рис. 4). Запишем закон Снеллиуса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

$$\sin \varphi_1 = n \sin \beta_1;$$

$$\sin \varphi_2 = n \sin \beta_2 = n \sin(A - \beta_1).$$

При этом мы выразили угол падения на вторую грань призмы β_2 через угол преломления на первой грани призмы β_1 и угол при вершине призмы A . Как видно из рис. 4, эти углы связаны простым соотношением $A = \beta_1 + \beta_2$. Учитывая, что угол преломления β_1 связан с углом θ между осью кристалла и волновой нормалью \vec{N} соотношением $\theta + \beta_1 = \pi/2$, находим n и θ :

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A}; \quad (9)$$

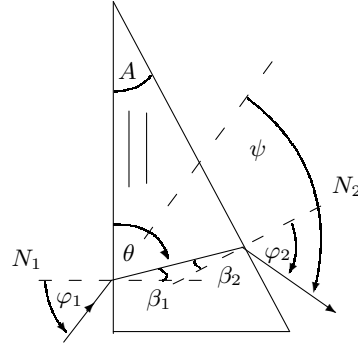


Рис. 4. Ход лучей в призме

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi_1}{n}.$$

Для обыкновенной волны n не будет зависеть от угла θ , а для необыкновенной волны зависимость n от θ должна описываться выражением (7).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу наименьшего отклонения луча от первоначального направления. Угол отклонения луча призмой (ψ на рис. 4) минимален для симметричного хода лучей, т.е. когда $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда показатель преломления можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin(\frac{\psi_m + A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}, \quad (10)$$

где ψ_m — угол наименьшего отклонения.

Если призма неизотропна, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал, и при угле наименьшего отклонения преломлённый луч в призме распространяется под углом к оси кристалла близким к $\pi/2$, то в качестве оценки формулу (10) можно использовать для определения n_e .

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 5. Источником излучения служит He-Ne лазер ($\lambda = 0,63$ мкм). Излучение лазера поляризовано линейно за счет наличия брестерских окошек в кювете лазера. Направление вектора \vec{E} в луче можно изменять с помощью поляроида, установленного на выходе лазера. Исследуемая призма из исландского шпата закреплена в центре поворотного столика с неподвижным лимбом для отсчета углов.

Преломляющий угол A призмы (рис. 4) можно рассчитать, если известны угловые координаты нормалей N_1 и N_2 к преломляющим (рабочим) граням призмы, прилежащим преломляющему углу. Грань, противоположная преломляющему углу, называется *основанием* призмы. Штриховкой указано направление оптической оси.

Обычно ход лучей в призме таков, что и падающий, и преломлённый лучи отклоняются от нормалей в сторону основания призмы, при этом углы φ_1 и φ_2 считаются положительными.

Угол падения φ_1 определяется по положению луча, отражённого от передней (входной) грани призмы (рис. 5). Из рис. 4 можно получить связь углов φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_2 = A + \psi - \varphi_1, \quad (11)$$

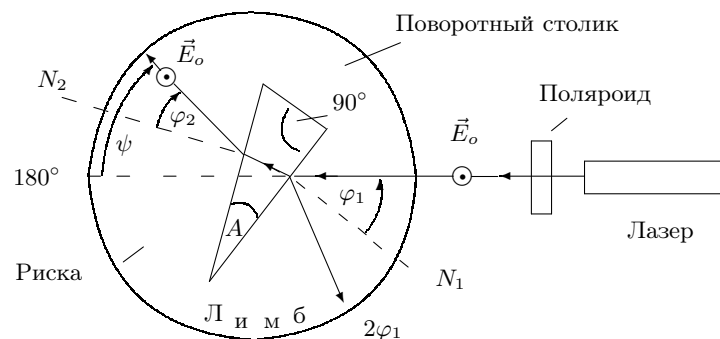


Рис. 5. Схема экспериментальной установки

а угол ψ — отклонение преломлённого луча от первоначального направления — определяется по разности отсчётов на лимбе между точками, куда попадает луч в отсутствие призмы, и точкой, куда попадает преломлённый луч.

При монотонном увеличении угла падения угол ψ сначала уменьшается, а затем снова начинает увеличиваться. Минимальное отклонение соответствует симметричному ходу луча: внутри призмы луч идёт перпендикулярно биссектрисе угла A , а $\varphi_1 = \varphi_2$. Углы наименьшего отклонения ψ_m различны для обыкновенного и необыкновенного лучей.

Угол A подобран так, что призма может выполнять роль поляризатора: при нормальном падении луча на первую преломляющую грань из призмы выходит только один луч, а другой испытывает полное внутреннее отражение на второй грани. При повороте призмы на небольшой угол на экране появляются оба преломлённых луча. Можно подобрать такой угол падения, при котором исчезнет второй преломлённый луч. Область углов поворота призмы, в которой обеспечивается пространственное разделение лучей с взаимно ортогональной поляризацией, определяется относительной разницей главных показателей преломления n_o и n_e .

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается измерить преломляющий угол призмы A и определить главные показатели преломления n_o и n_e исландского шпата тремя способами: сняв зависимость $\psi = f(\varphi_1)$ для обыкновенной и необыкновенной волны³; определив углы наименьшего отклонения ψ_m для обыкновенной и необыкновенной волны; измерив для каждого из лучей угол падения φ_1 в условиях полного внутреннего отражения.

1. Особенностью этой работы является то, что собственно измерения выполняются относительно быстро, но результат расчётов зависит от точности юстировки системы.

Чтобы отъюстировать установку, отцентрируйте экран по лучу лазера, т.е. убедитесь в том, что луч проходит под отметками «0» и «180», если его направить вдоль грани призмы (или над призмой). Настроив установку, закрепите оба винта на рейтере столика.

2. Определите угол A при вершине призмы; для этого вначале нужно добиться, чтобы луч, отражённый от входной грани (длинного катета), шёл точно назад, заметить положение отсчётной риски на лимбе, а затем повторить эту операцию для второй рабочей грани (гипотенузы). По разнице этих двух отсчётов найдите угол A и оцените точность измерения. Формулу для расчёта студентам предлагается вывести самостоятельно.
3. Определите разрешённое направление поляризатора: глядя через него на отраженный от горизонтальной поверхности (стола или подоконника) дневной свет, установите его в положение минимального пропускания. Так как отраженный свет преимущественно поляризован так, что вектор \vec{E} направлен параллельно отражающей поверхности, у настроенного на минимум пропускания поляризатора разрешенное направление \vec{E} вертикально.
4. Получите на лимбе изображения преломлённых лучей так, как показано на рис. 5 (падающий и преломлённый лучи отклоняются от нормалей к преломляющим граням в сторону основания призмы). Установите поляризатор в луче лазера перед призмой. Вращая поляризатор, определите, какой луч соответствует вертикально поляризованному свету, а какой — горизонтально поляризованному; определите, какой из лучей представляет обыкновенную волну, а какой — необыкновенную.
5. Вращая столик с призмой, снимите зависимость углов отклонения на выходе из призмы для обыкновенной и необыкновенной волн от угла падения луча на призму; удобно определять координату $2\varphi_1$ луча, от-

³Во время занятий эти расчеты могут быть выполнены на компьютере с помощью программы SIGMA PLOT.

раженного от входной грани призмы — длинного катета, и координаты каждого из преломлённых лучей ($180^\circ + \psi$) (или $180^\circ - \psi$).

Для проверки качества юстировки сначала проведите предварительную серию измерений, меняя угол падения φ_1 в диапазоне $10\text{--}70^\circ$ через 10° ($2\varphi_1$ — через 20° до 140°).

Для расчёта показателей преломления на компьютере с установленной программой SIGMA PLOT (для работы 406) подготовьте таблицу: (φ_1) , (ψ_o) , (ψ_e) . Обсчитайте результаты на компьютере.

6. Если рассчитанное значение n_o зависит от угла падения, следует повторить юстировку, если нет — проведите основную серию измерений в том же диапазоне, меняя угол φ_1 через 5° , а вблизи минимального угла ψ_m — через $2,5^\circ$.

Снова проведите расчет на компьютере; покажите преподавателю, как выглядят графики, и запишите рассчитанные значения $\cos^2 \theta$, $n_o(\theta)$ и $n_e(\theta)$ и окончательный результат — n_o и n_e .

Если работа с программой SIGMA PLOT невозможна, рассчитайте на калькуляторе 2–3 значения n_o по формуле (9), а основную серию измерений обработайте дома: с помощью (11) и (9) вычислите n_o и $n_e(\theta)$.

7. Постройте графики n_o и $n_e(\theta)$ от $\cos^2 \theta$ и определите главные показатели преломления n_o и n_e . Сравните рассчитанные значения с табличными, приведенными в описании работы, и оцените погрешности.
8. Из основной серии измерений определите средние значения углов наименьшего отклонения ψ_m ; по формуле (10) рассчитайте показатели преломления n_o и n_e и оцените погрешности.
9. Для определения углов падения, соответствующих полному внутреннему отражению, сначала установите призму так, чтобы были видны оба преломлённых луча; затем, уменьшая угол падения, добейтесь для каждого из лучей выполнения условий полного отражения от второй грани призмы ($\varphi_2 = 90^\circ$); определите соответствующие углы φ_{1e} и φ_{1o} с учётом знака.

Рассчитайте значения n_o и n_e по формуле (9) (с учётом знака угла падения) и сравните с результатами предыдущих измерений.

Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой векторы \vec{D} и \vec{E} в анизотропной среде?
2. Как направлена оптическая ось в одноосном кристалле относительно главных осей эллипсоида диэлектрических проницаемостей?
3. Дайте определение главных показателей преломления.
4. Приведите пример, когда волна, распространяющаяся в кристалле, является обыкновенной и когда необыкновенной.
5. Получите из (7) приближенное выражение (8).
6. Как электромагнитная теория объясняет появление двух преломлённых волн при падении плоской волны на поверхность одноосного кристалла?
7. Как зависит показатель преломления обыкновенной и необыкновенной волны от угла между осью кристалла и волновой нормалью?
8. Как будет зависеть показатель преломления для обыкновенной и необыкновенной волны от угла преломления, если ось кристалла будет параллельна оси вращения призмы?
9. Как направлены векторы \vec{E} в выходящих из призмы лучах?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кингсен А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы Физики. — Т. I. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3. Гл. 10.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. IV. Оптика. — М.: Наука, 1980. Гл. 7, §§ 75, 76, 77.
3. *Бутиков Е.И.* Оптика. М.: Высшая школа, 1986. Гл.4, §§ 4.1–4.4.
4. *Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Наука, 1976. Гл. 17, § 107.
5. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. Гл. 4, §§ 4.1–4.7.