

# Вопрос по выбору: Работа 4.7.1 ”Двойное лучепреломление”

Батарин Егор

30 мая 2021 г.

## Аннотация

В данной работе изучается зависимость показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле.

## 1 Явление двойного лучепреломления

Запишем уравнения Максвелла с учетом отсутствия свободных зарядов и токов:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Далее учтем, что  $\vec{H} = \vec{B}$  и будем рассматривать гармонические волны:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}, \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$$

Это приводит к следующим соотношениям эквивалентных операций в уравнениях Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \operatorname{div} \rightarrow -i\vec{k} \cdot, \operatorname{rot} \rightarrow -i\vec{k} \times$$

Теперь можно привести уравнения Максвелла к следующему эквивалентному виду:

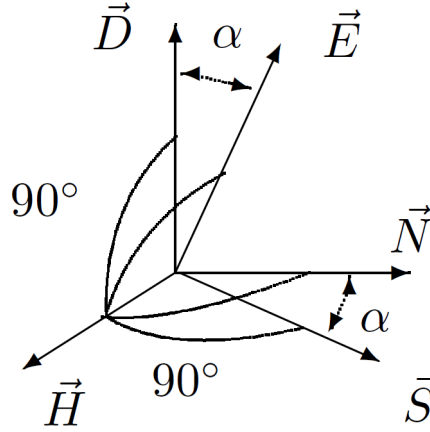
$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{H}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \vec{D}$$

Это приводит к следующему взаимному расположению векторов, показанных на рисунке ниже:



Далее рассмотрим явление двойного лучепреломления с точки зрения классической теории дисперсии. Предположим, что направления колебания электроном под действием внешнего гармонического электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$  ограничены направлением единичного вектора  $\vec{n}$ . Тогда уравнение движения электрона можно записать так:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{n} \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \vec{n}$$

Это приводит к следующему выражению для вектора поляризации:

$$\vec{P} = N\vec{r}_0 = \frac{N \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \vec{n}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i \omega} \vec{n} = \hat{\alpha} \vec{E}$$

В общем случае  $\hat{\alpha}$  представляет с собой матрицу  $3 \times 3$ , поскольку направление разрешенных колебаний электрона не обязано совпадать с направлением внешнего электрического поля. Этим определяется тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon} = 1 + 4\pi\hat{\alpha}$ . Удачным выбором координатных осей, его можно привести к диагональному виду:  $\hat{\epsilon} = \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$

Мы будем рассматривать случай  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o, \varepsilon_3 = \varepsilon_e$ . В этом случае получаем следующее соотношение между вектором электрического смещения и электрического поля:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \hat{\varepsilon} \vec{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_o E_1 \\ \varepsilon_o E_2 \\ \varepsilon_e E_3 \end{pmatrix}$$

Введем обозначения:

$$\vec{D}_\perp = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_o E_1 \\ \varepsilon_o E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_o \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_o \vec{E}_\perp, \vec{D}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_e E_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_e \vec{E}_\parallel$$

Преобразуем уравнения Максвелла с учетом вышесказанного:

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} \Rightarrow \\ (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} \Rightarrow \\ (\vec{k} \cdot \vec{E}) (\vec{k} \cdot \vec{D}) - k^2 (\vec{E} \cdot \vec{D}) &= -\frac{\omega^2}{c^2} D^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{n^2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{D^2} &= \frac{\left( \frac{\vec{D}_\perp}{\varepsilon_o} + \frac{\vec{D}_\parallel}{\varepsilon_e} \right) \cdot (\vec{D}_\perp + \vec{D}_\parallel)}{D^2} = \frac{\left( \frac{D_\perp^2}{n_o^2} + \frac{D_\parallel^2}{n_e^2} \right)}{D^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим далее 2 случая:

1) Обыкновенная волна.

Этом случае  $\vec{D} = \vec{D}_\perp$  - электрическое смещение направлено перпендикулярно оси кристалла, значит то же самое можно сказать и про вектор напряженности электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_\perp$ , поэтому получаем  $n = n_o$ .

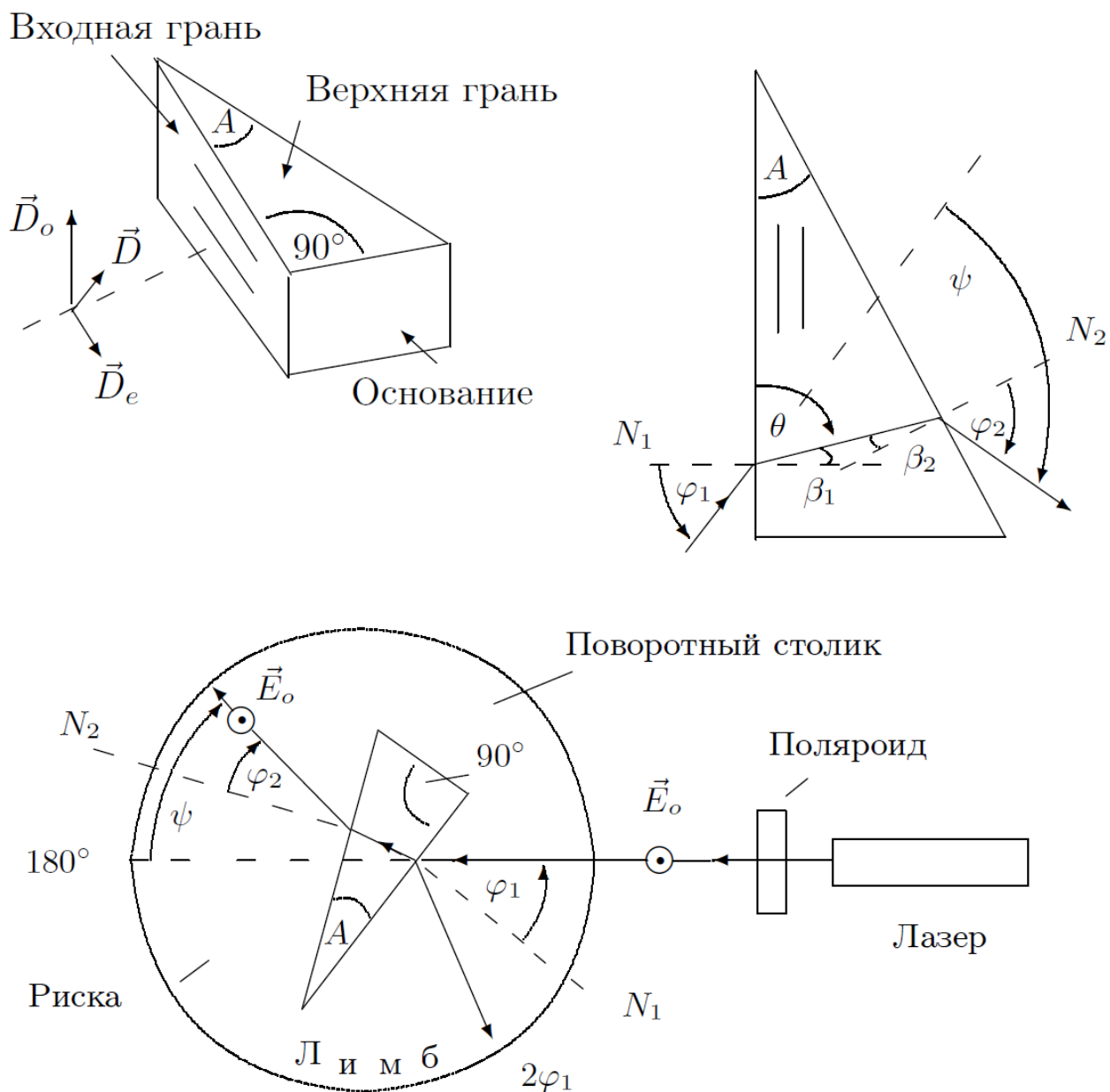
2) Необыкновенная волна.

Пусть теперь вектор  $\vec{D}$  не лежит в плоскости, перпендикулярной оси кристалла, а направлен под углом  $\alpha$  к ней. Тогда  $D_\perp = D \cos \alpha$  и  $D_\parallel = D \sin \alpha$ , значит

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{n_o^2}$$

## 2 Ход и выполнение лабораторной работы

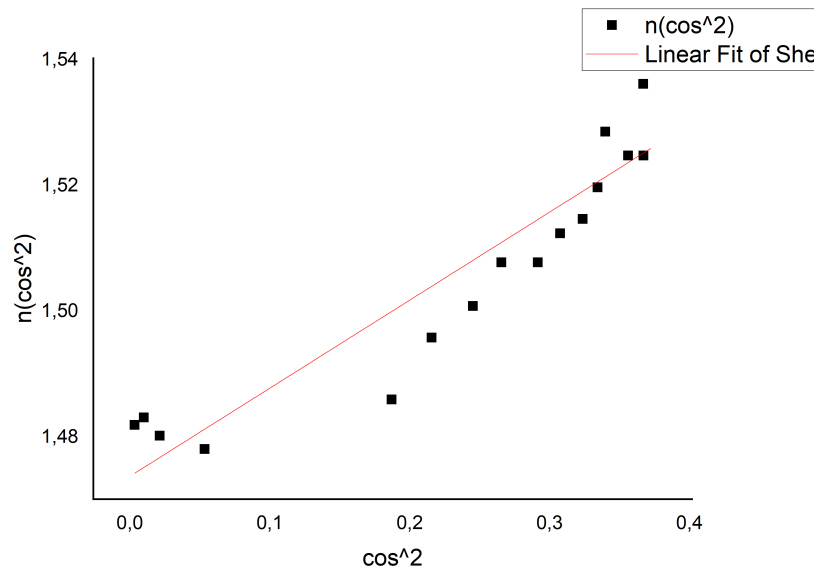
Ниже представлено графическое описание лабораторной работы:



В работе использовался исландский шпат:  $n_o = 1.655$ ,  $n_e = 1.485$ . Пользуясь приближением  $n_o - n_e = 0.17 \ll n_o, n_e$ , упростим формулу для показателя преломления:

$$n(\theta) = n_e + (n_o - n_e)\cos^2\theta$$

В результате получается график:



### 3 Итоги работы

Точка пересечения равна  $1.5 \pm 0.7 \approx n_e$ , наклон равен  $0.15 \pm 0.04 \approx n_o - n_e$ , что неплохо совпадает со справочными данными.

Зависимость также похожа на линейную, что согласуется с теорией.