УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Функциональный анализ**
по направлению
подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Аксиома выбора. Лемма о неподвижном множестве. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальности и лемма Цорна.
2. Вполне упорядоченные множества, теорема Цермело. Пример Серпинского к теореме Фубини.
3. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, аксиома счётности.
4. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств. Критерий топологической непрерывности отображения.
5. Аксиомы отделимости в топологических пространствах. Хаусдорфово топологическое пространство.
6. Компактные, счётно компактные и секвенциально компактные подмножества топологического пространства. Теорема Александера о предбазе.
7. Декартово произведение топологических пространств, топология Тихонова. Теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.
8. Топологические векторные пространства. Замкнутость локально компактного подпространства и локальная компактность конечномерного подпространства топологического векторного пространства.
9. Факторпространство и факторопология. Теорема о замкнутости суммы замкнутого и конечномерного подпространств топологического векторного пространства.
10. Метрические пространства и метрическая топология. Полнота метрического пространства, критерий полноты (принцип вложенных шаров).
11. Теорема Бэра о категории. Теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства.
12. Пополнение метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Изометричность двух пополнений неполного метрического простарнства.
13. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.
14. Вполне ограниченные подмножества метрического пространства. Критерий Фреше компактности подмножества метрического пространства.
15. Критерий Колмогорова нормируемости векторной топологии в топологическом векторном пространстве. Критерий полноты линейного нормированного пространства.

16. Факторпространство замкнутого подпространства линейного нормированного пространства, факторнорма. Полнота факторпространства замкнутого подпространства банахова пространства.
17. Эквивалентные нормы в линейном пространстве. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве.
18. Евклидово пространство и евклидова норма. Неравенство Коши—Буняковского—Шварца и равенство параллелограммов. Критерий евклидовости нормы в нормированном пространстве.
19. Гильбертово пространство. Теоремы Рисса о проекции и об ортогональном разложении.
20. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
21. Линейное нормированное пространсво $C(K)$ для компактного метрического пространства (K, ρ), его полнота. Критерий Арцела—Асколи вполне ограниченности подмножества пространства $C(K)$.
22. Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_p(E)$ для $1 \le p < +\infty$ и измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^m$, его полнота. Критерий Рисса вполне ограниченности подмножества пространства $\mathbb{L}_p(E)$.
23. Линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах X и Y. Теорема о полноте пространства $\mathcal{L}(X, Y)$.
24. Теорема Банаха—Штейнгауза и полнота пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ относительно поточечной сходимости.
25. Критерий непрерывной обратимости линейного оператора, действующего в нормированных пространствах. Теоремы Банаха об открытом отображении, обратном операторе и замкнутом графике.
26. Компактные операторы в пространтве $\mathcal{L}(X, Y)$. Замкнутость подпространства компактных операторов $\mathcal{K}(X, Y)$ в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Приближение компактного оператора конечномерным оператором.

Литература

Основная

1. *Рудин У.* Функциональный анализ. — Москва : Мир, 1975.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Наука, 1981.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — Москва : Наука, 1993.
4. *Константинов Р. В.* Лекции по функциональному анализу: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2009.

5. *Треногин В. А., Писаревский Б;. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Москва : Наука, 1984.

<u>*Дополнительная*</u>

6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — Москва : Издательство иностранной литературы, 1962.
7. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — Москва : МЦНМО, 2004.
8. *Архангельский А.В., Пономарёв В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — Москва : Наука, 1974.
9. *Кириллов А.А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1988.
10. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — Москва : Мир, 1970.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В., Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–19 октября)

I. Частично упорядоченные множества. Лемма Цорна

1.1. Пусть X — нетривиальное линейное пространство. Множество $\Gamma \subset X$ называется *базисом Гамеля*, если любой нетривиальный вектор $x \in X$ можно единственным образом представить конечной линейной комбинацией элементов Γ. Доказать, что в X существует базис Гамеля. Привести пример линейного пространства со счётным базисом Гамеля.

1.2. Пусть X — линейное пространство, L — линейное подпространство в X. Доказать, что существует линейное подпространство M в X, такое, что $L \oplus M = X$, то есть выполнены два условия:

$$L \cap M = \{0\} \quad \text{и} \quad L + M = X.$$

1.3. Пусть X и Y — линейные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейное отображение. Обозначим $\operatorname{Im} A = \{\ A(x)\ :\ x \in X\ \} \subset Y$ — множество значения отображения A. Доказать, что существует линейное отображение $T\colon \operatorname{Im} A \to X$, такое, что выполнено

$$A(T(y)) = y \quad \forall\, y \in \operatorname{Im} A.$$

1.4. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $S \subset X$ называется *связным*, если для любых $U, V \in \tau$ вида $S \subset U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$ следует либо $S \cap U = \varnothing$, либо $S \cap V = \varnothing$. *Компонентой* непустого множества $M \subset X$ называется максимальное связное множество $S \subset M$. Доказать, что любое непустое множества $M \subset X$ представимо объединением своих компонент.

II. Топологические пространства и их компактные подмножества

1.5. Множество $C[0,1]$ состоит из всех непрерывных на $[0,1]$ вещественных функций. Топология τ в $C[0,1]$ индуцирована из топологического пространства $\mathbb{R}^{[0,1]}$, содержащего множество $C[0,1]$. Исследовать отображение $f\colon (C[0,1], \tau) \to [0,1]$ вида

$$f(x) = \int_0^1 \frac{x(t)\,dt}{1 + |x(t)|} \qquad \forall\, x \in C[0,1],$$

на секвенциальную и топологическую непрерывность.

1.6. Исследовать отображение $f\colon [0,1]^{[0,1]} \to [0,1]$ вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x(2^{-k}) \qquad \forall\, x \in [0,1]^{[0,1]},$$

на секвенциальную и топологическуюнепрерывность.

1.7. Множество $\mathcal{M}[0,1]$ состоит из всех измеримых по Лебегу на $[0,1]$ вещественных функций. Доказать, что отображение $f\colon [0,1]^{[0,1]} \to [0,1]$, имеющее для любого $x \in [0,1]^{[0,1]}$ вид

$$f(x) = \sup \left\{ \int_0^1 z(t)\,dt \ \ : \ \ z \in \mathcal{M}[0,1], \ \ 0 \le z(t) \le x(t) \ \ \forall\, t \in [0,1] \right\}$$

не является секвенциально непрерывным.

1.8. Доказать, что топологическое пространство $[0,1]^{[0,1]}$ не является секвенциально компактным. Можно ли утверждать, что любое бесконечное множество из $[0,1]^{[0,1]}$ имеет в $[0,1]^{[0,1]}$ предельную точку ?

1.9. Привести пример множества из топологического пространства $[0,1]^{[0,1]}$, которое является секвенциальным компактом и не является топологическим компактом.

1.10. Доказать, что топологическое пространство $\mathbb{R}^{[0,1]}$ является топологическим векторным пространством. Найти все линейные непрерывные отображения $\Phi\colon \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathbb{R}$.

1.11. Привести пример множества из $\mathbb{R}^{[0,1]}$, секвенциальное замыкание которого не совпадает с его топологическим замыканием в пространстве $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

1.12. Привести пример множества из $\mathbb{R}^{[0,1]}$, секвенциальное замыкание которого в пространстве $\mathbb{R}^{[0,1]}$ не является секвенциально замкнутым.

1.13. В линейном пространстве L задана линейная функция $f\colon L \to \mathbb{R}$. Какова может быть размерность факторпространства $L/\operatorname{Ker} f$?

III. Метрические и линейные нормированные пространства: полнота, сепарабельность, пополнение

§ 1: 3; 4; 5; 7; 13.
§ 2: 2; 3; 6; 7.
§ 4: 1; 7; 8.

1.14. Пусть $1 \le p < q \le +\infty$. Доказать, что пространство $(\ell_p\,, \|\cdot\|_q)$ является неполным, представить его в виде счётного объединения нигде не плотных подмножеств, и построить его пополнение, состоящее из числовых последовательностей.

1.15. Пусть $1 \le p < q \le +\infty$. Доказать, что линейное нормированное пространство $(\mathbb{L}_q[0,1], \|\cdot\|_p)$ является неполным, а его пополнением является пространство $(\mathbb{L}_p[0,1], \|\cdot\|_p)$.

1.16. Пусть в линейном пространстве $F = \mathbb{L}_2[1,+\infty)$ норма имеет вид

$$\|f\| = \int_1^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x}\,dx, \qquad f \in F.$$

Исследовать пространство $(F, \|\cdot\|)$ на полноту и сепарабельность. Если пространство $(F, \|\cdot\|)$ окажется неполным, то построить его пополнение.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 декабря)

I. Компактные и вполне ограниченные множества в метрических пространствах

§ 3: 4; 8; 10; 11; 12.

2.1. Пусть множество

$$S = \left\{ f \in C^1[0,1] \ : \ \|f\|_{c^1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|f\|_c + \|f'\|_c = 1 \right\}.$$

а) Исследовать S в пространстве $(C[0,1], \|\cdot\|_c)$ на вполне ограниченность и замкнутость.

б) Исследовать замыкание S в пространстве $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_c\big)$ на вполне ограниченность и полноту.

в) Исследовать S в пространстве $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_{c^1}\big)$ на вполне ограниченность и замкнутость.

2.2. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества:

$$1)\ S_1 = \left\{ f \in \mathbb{L}_1[0,1] \ : \ 0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{п. в. } x \in (0,1) \right\};$$

$$2)\ S_2 = \left\{ f \in C^1[0,1] \ : \ f(0) = 0, \ \ |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall\ x \in (0,1) \right\}$$

в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$.

2.3. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множеств:

$$1)\ S_1 = \left\{ x \in c_0 \ : \ \exists\, f \in \mathbb{L}_1[0,1], \ \|f\|_1 \le 1, \ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \ x(k) = \int\limits_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)\, dt \right\};$$

$$2)\ S_2 = \left\{ x \in c_0 \ : \ \exists\, f \in \mathbb{L}_2[0,1], \ \|f\|_2 \le 1, \ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \ x(k) = \int\limits_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)\, dt \right\}$$

в пространстве c_0.

2.4. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества:

$$1)\ S_1 = \left\{ f \in C[0,1] \ : \ \exists\, g \in C[0,1], \ \|g\|_1 \le 1, \ \forall\, x \in [0,1] \ \ f(x) = \int\limits_0^x g(t)\, dt \right\};$$

$$2)\ S_2 = \left\{ f \in C[0,1] \ : \ \exists\, g \in C[0,1], \ \|g\|_2 \le 1, \ \forall\, x \in [0,1] \ \ f(x) = \int\limits_0^x g(t)\, dt \right\}$$

в пространстве $C[0,1]$.

II. Линейные нормированные, банаховы и гильбертовы пространства

§ 4: 2, 3.

§ 5: 1, 3, 4.

2.5. Доказать, что в бесконечномерном банаховом пространстве не существует счётного базиса Гамеля.

2.6. В линейном пространстве ℓ_1 построить две нормы, такие, что некоторая последовательность элементов ℓ_1 является сходящейся по каждой из них к разным элементам ℓ_1. Показать, что пару норм с таким свойством можно построить на любом линейном бесконечномерном пространстве.

2.7. В бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве привести пример двух замкнутых подпространств, сумма которых незамкнута.

2.8. В пространстве $L = \mathbb{L}_1[0,1]$ рассматривается подпространство

$$N = \left\{ x \in L \ : \ \int_0^1 tx(t)\,dt = 0 \right\}.$$

Доказать, что N замкнуто в L, и вычислить факторнорму в L/N.

III. Линейные ограниченные операторы, обратный оператор

§ 6: 2; 3; 6; 13; 22.

§ 7: 5; 6; 8.

2.9. Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, такие что X бесконечномерно, а Y нетривиально. Доказать, что существует неограниченный линейный оператор $A\colon X \to Y$.

2.10. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$.

а) Доказать, что существует такой неограниченный линейный оператор $A\colon X \to X$, что его ядро тривиально, множество значений равно X, и обратный оператор $A^{-1}\colon X \to X$ неограничен.

б) Доказать, что $\|x\|_A = \|Ax\|$, $x \in X$, является нормой в X, относительно которой оно также является банаховым пространством.

в) Можно ли показать, что две топологии в X, порождённые соответственно $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_A$, сравнимы ?

IV. Компактные операторы

§ 12: 1; 7; 8; 10; 11.

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
____________ А. А. Воронов
15 июня 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: квантовая физика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ**
кафедра: **общей физики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть – 2 зач. ед.;
физ. практикум: базовая часть – 3 зач. ед.;
лекции – 30 часов — Диф. зачёт – 5 семестр
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов — Диф. зачёт – 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 30 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. Глазков В.Н.
к.ф.-м.н., доц. Гуденко С.В.
д.ф.-м.н., проф. Катанин А.А.
д.т.н., проф. Кубышкин А.В.
д.ф.-м.н., проф. Морозов А.И.
д.ф.-м.н., проф. Петров Ю.В.
к.ф.-м.н., доц. Раевский А.О.

Программа принята на заседании кафедры общей физики 17 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой — А. В. Максимычев
д.ф.-м.н., профессор

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

1. Ультрафиолетовая катастрофа. Гипотеза Планка. Законы излучения АЧТ. Основные нерешенные проблемы классической физики на рубеже XIX–XX веков. Подсчет числа состояний поля в заданном объеме; фазовый объём, приходящийся на одно квантовое состояние, плотность состояний. Формула Рэлея–Джинса и ультрафиолетовая катастрофа, формула Вина. Гипотеза Планка, распределение Планка. Закон смещения Вина. Равновесное излучение, как идеальный газ фотонов. Абсолютно черное тело. Законы Кирхгофа, Ламберта и Стефана–Больцмана.

2. Корпускулярные свойства электромагнитных волн. Основные экспериментальные результаты по внешнему фотоэффекту. Гипотеза Эйнштейна относительно квантов света Уравнение Эйнштейна и объяснение фотоэффекта. Импульс фотона. Эксперимент Комптона по рассеянию рентгеновских лучей на лёгких ядрах, формула для изменения длины волны фотонов при рассеянии на свободных электронах, комптоновская длина волны.

3. Волновые свойства частиц. Соотношение неопределенностей. Гипотеза де Бройля о волновых свойствах материальных частиц – корпускулярно-волновой дуализм. Длина волны де Бройля нерелятивистской частицы. Опыты Девиссона–Джермера и Томсона по дифракции электронов. Критерий квантовости системы. Соотношения неопределенностей (координата-импульс; энергия-время). Виртуальные частицы. Радиус взаимодействия при обмене виртуальными частицами (фундаментальными бозонами). Волновая функция свободной частицы (волна де Бройля). Вероятностная интерпретация волновой функции, выдвинутая Борном. Понятие о скрытых параметрах (гипотеза Эйнштейна) и неравенствах Белла.

4. Формализм квантовой механики. Понятие об операторах физических величин. Операторы координаты, импульса, потенциальной и кинетической энергии системы, гамильтониан. Собственные функции и собственные значения. Уравнение Шредингера. Свойства волновой функции стационарных задач: непрерывность, конечность, однозначность, непрерывность производной. Принцип суперпозиции квантовых состояний. Формула для среднего значения физической величины в заданном состоянии. Закон сохранения вероятности, вектор плотности потока вероятности. Процесс квантового измерения физической величины — возможность получения только ее собственных значений в процессе идеального измерения. Редукция волновой функции в процессе измерения. Необходимость серии идентичных измерений. Критерий возможности одновременного измерения нескольких физических величин.

5. Потенциальные барьеры. Потенциальные ямы. Осциллятор. Рассеяние частиц на потенциальной ступеньке конечной высоты, прохождение частицы над ямами и барьерами конечной ширины, эффект Рамзауэра. Прохождение частицы через прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины (туннельный эффект), вывод формулы для прозрачности барьера произвольной формы в квазиклассическом приближении. Бесконечно глубокая потенциальная яма. Связанные состояния частицы в одномерной симметричной потенциальной яме конечной глубины. Уровни энергии одномерного гармонического осциллятора (без вывода).

6. Движение в центральном поле. Колебательные и вращательные спектры молекул. Оператор момента импульса. Квантование собственных значений проекции момента на выделенную ось и квадрата момента импульса, сложение моментов. Движение в центральном поле, центробежная энергия, радиальное квантовое число, кратность вырождения. s-состояния в трёхмерной сферически симметричной яме конечной глубины, условие существования связанного состояния. Адиабатическое приближение в теории молекул. Вращательный и колебательный спектры, энергетические масштабы соответствующих возбуждений.

7. Водородоподобные атомы. Магнитный момент. Спин. Закономерности оптических спектров атомов. Движение в кулоновском поле. Спектр атома водорода и водородоподобных атомов, главное квантовое число, кратность вырождения. Изотопический сдвиг, модель атома Бора. Мезоатомы. Волновая функция основного состояния атома водорода. Качественный характер поведения радиальной и угловой частей волновых функций возбужденных состояний. Магнитный орбитальный момент электронов, гиромагнитное отношение, магнетон Бора. Опыт Штерна–Герлаха, гипотеза о спине электрона, спиновый g-фактор. Опыт Эйнштейна–де Гааза. Оператор полного момента импульса, g-фактор Ланде. Тонкая и сверхтонкая структура спектра атома водорода.

8. Тождественность частиц. Обменное взаимодействие. Сложные атомы. Тождественность частиц, симметрия волновой функции относительно перестановки частиц, бозоны и фермионы, принцип Паули. Обменное взаимодействие. Самосогласованное поле в сложных атомах, электронная конфигурация атома. Правило Маделунга–Клечковского. Таблица Менделеева. Атомные термы, метод нахождения термов для заданной электронной конфигурации, спектроскопическая запись состояния атома. Правила Хунда. Характеристическое рентгеновское излучение (закон Мозли).

9. Спин-орбитальное и сверхтонкое взаимодействие. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана. Излучение, правила отбора. Спин-орбитальное взаимодействие. Типы связи: Рассела–Саундерса (LS) и j-j. Сверхтонкое взаимодействие. Тонкая структура терма для случая LS-связи. Эффект Зеемана для случаев слабого и сильного магнитных полей на примере $3P$–$3S$-переходов. Сверхтонкое взаимодействие. Классификация фотонов по полному моменту и чётности (E- и M-фотоны). Интенсивность электродипольного излучения, соотношение интенсивностей излучения фотонов различных типов и мультипольностей. Естественная ширина уровня.

10. ЭПР и ЯМР. Спонтанное и вынужденное излучение. Лазеры. Ядерный и электронный магнитный резонанс (квантовомеханическая трактовка). Строгие и нестрогие правила отбора при поглощении и испускании фотонов атомами (на примере эффекта Зеемана и ЯМР). Двухуровневая квантовая система в поле равновесного излучения, принцип детального равновесия, спонтанные и индуцированные переходы, соотношения Эйнштейна. Прохождение излучения через среду, условие усиления (инверсная заселённость уровней). Принцип работы лазера.

11. Ядерные модели. Открытие ядра атома (опыты Резерфорда, Гейгера и Марсдена) и его строения (опыты Блэкетта и Чедвика). Энергия связи ядра, экспериментальная зависимость удельной энергии связи ядра от массового числа A. Свойства ядерных сил: радиус действия, глубина потенциала, насыщение ядерных сил, спиновая зависимость. Ядерные силы как проявление сильного взаимодействия. Модель Юкавы. Модель жидкой заряженной капли. Формула Вайцзеккера для энергии связи ядра. Оболочечная модель и магические числа в осцилляторном потенциале. Одночастичные и коллективные возбуждённые состояния ядра.

12. Радиоактивность. Альфа-, бета-, гамма-распады. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада, константа распада, период полураспада, среднее время жизни, вековое уравнение. Альфа-распад, закон Гейгера–Нэттола и его вывод (формула Гамова). Бета-распад, энергетический спектр бета-распада, гипотеза нейтрино и его опытное обнаружение, внутренняя конверсия электронов, K-захват. Гамма-излучение, изомерия ядер. Спонтанное деление ядер, механизм формирования барьера деления — зависимость кулоновской и поверхностной энергии от деформации, параметр делимости, энергия, выделяемая при делении ядер, предел стабильности ядер относительно деления.

13. Ядерные реакции. Оценка сечений. Ядерные реакции: экзотермические и эндотермические реакции, порог реакции, сечение реакции (полное и парциальные сечения), каналы реакции, ширины каналов. Модель составного ядра Бора: классическое геометрическое сечение, поправки на волновой характер движения частиц, закон Бете. Резонансные реакции, формула Брейта–Вигнера. Деление ядер под действием нейтронов, мгновенные и запаздывающие нейтроны, цепная реакция деления. Роль запаздывающих нейтронов в работе ядерного реактора. Схема реактора на тепловых нейтронах.

14. Фундаментальные взаимодействия и частицы. Элементарные частицы. Методы регистрации элементарных частиц. Стандартная модель. Законы сохранения и внутренние квантовые числа. Кварковая структура адронов — мезоны и барионы. Новое квантовое число «цвет», обобщенный принцип Паули. Магнитные моменты протона и нейтрона. Резонансы. Адронные струи. Элементы квантовой хромодинамики: асимптотическая свобода, гипотеза конфайнмента кварков и глюонов, кварковый потенциал. Оценка адронных сечений при высоких энергиях. Несохранение чётности при слабом взаимодействии, опыт Ву. Проблема солнечных нейтрино, нейтринные осцилляции.

Литература

Основная литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.5. Ч.I. Ч.II. М.: Наука, 1989.
2. *Ишханов Б.С., Капитонов И.М., Юдин Н.П.* Частицы и атомные ядра. М.: URSS, 2013.
3. *Ципенюк Ю.М.* Квантовая микро- и макрофизика. М.: Физматкнига, 2019.
4. *Фаддеев М.А., Чупрунов Е.В.* Лекции по атомной физике. М.: Физматлит, 2008.
5. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Начальные главы квантовой механики. М.: Физматлит, 2006
6. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Т.II / Под ред. Ю.М. Ципенюка. М.: Физматлит, 2006.

Дополнительная литература

1. *Гольдин Л.Л., Новикова Г.И.* Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988.
2. *Крылов И.П.* Основы квантовой физики и строение вещества: учебное пособие. М.: МФТИ, 1989.
3. *Рубаков В.А.* К открытию на Большом адронном коллайдере новой частицы со свойствами бозона Хиггса. // УФН. 2012. Т. 182. №10. С.1017.
4. *Казаков Д.И.* Хиггсовский бозон открыт: что дальше? // УФН. 2014. Т. 184. №10. С. 1004.
5. *Казаков Д.И.* Перспективы физики элементарных частиц//УФН. 2019. Т. 189. №4. С. 387.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
для студентов 3-го курса
на осенний семестр 2020-2021 учебного года

№ сем.	Даты	Темы семинарских занятий	Задачи	
			0	1
1	1 – 4 сен.	Законы излучения АЧТ.	0-1-1, 0-1-2	1.26*, 1.30*, 1.38*, 1.44*, 1.50*, Т.1
2	6 – 11 сен.	Фотоэффект. Эффект Комптона.	0-2-1, 0-2-2	1.7, 1.18, 1.23, 1.35, 1.39, 1.48
3	13 – 18 сен.	Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей.	0-3-1, 0-3-2	2.10, 2.15, 2.26, 2.30, 2.38. 2.44
4	20 – 25 сен.	Уравнение Шредингера. Потенциальные барьеры. Туннельный эффект.	0-4-1, 0-4-2	3.27, 3.33, 3.41, 3.45, Т.2, Т.3
5	27 сен. – 2 окт.	Потенциальные ямы. Квазиклассическое приближение.	0-5-1, 0-5-2	3.5, 3.6, 3.14, 3.21, 3.23, 3.49
6	4 – 9 окт.	Колебательные и вращательные уровни. Водородоподобные атомы.	0-6-1, 0-6-2	4.29, 4.38, 4.45, 5.16, 5.25, 5.51
7	11 − 16 окт.	Магнитный момент. Спин. Обменное взаимодействие.	0-7-1, 0-7-2	6.8. 6.10, 6.15, 6.66, 6.68, 6.78
8	18 – 23 окт.	Контрольная работа		
9	25 – 30 окт.	Сдача 1-го задания		
10	1 – 6 нояб.	Сложные атомы. Тонкая и сверхтонкая структуры.	0-10-1, 0-10-2	6.20, 6.48, 6.75, 6.77, 6.80, Т4
11	8 – 13 нояб.	Эффект Зеемана. Излучение, правила отбора. ЭПР и ЯМР. Лазеры	0-11-1, 0-11-2	6.21, 6.34, 1.57*, 1.59* Т.5, Т.6
12	15 – 20 нояб.	Ядерные модели. Радиоактивность.	0-12-1, 0-12-2	7.5, 7.16, 7.20, 7.51, 7.58, 7.64
13	22 – 27 нояб.	Ядерные реакции.	0-13-1, 0-13-2	7.10, 8.45, 8.62, 8.68, 9.4, 9.11
14	29 нояб. – 4 дек.	Фундаментальные взаимодействия и частицы. Сильное взаимодействие.	0-14-1, 0-14-2	10.7, 10.24, 10.62, 10.70, Т.7, Т.8
15	6 – 11 дек.	Фундаментальные взаимодействия и частицы. Слабое взаимодействие.	0-15-1, 0-15-2	10.52, 10.73, 10.75, 10.85, 10.92, Т.9
16	13 – 18 дек.	Сдача 2-го задания		

Номера задач указаны по задачнику «Сборник задач по общему курсу физики. Ч. III. Атомная и ядерная физика. Строение вещества» / под ред. В.А.Овчинкина. — М.: Физматкнига, 2009. Задачи, отмеченные «*», — из раздела 2 этого задачника.

В каждой теме семинара имеются задачи 2-х групп:

0 — задачи для самостоятельного решения студентами к предстоящему семинару. При необходимости эти задачи разбираются на семинаре.

1 — задачи, рекомендованные для обсуждения на семинаре и для самостоятельного решения после него.

Все задачи должны быть решены и оформлены в тетради для сдачи задания. Преподаватель по своему усмотрению разбирает часть задач на семинаре. Возможен разбор и других равноценных задач.

Задачи группы 0

0-1-1. Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?

0-1-2. Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна $1{,}3 \cdot 10^7$ К.

0-2-1. В опытах П. Н. Лебедева, доказавшего существование светового давления, падающий световой поток составлял 6 Вт/см^2. Вычислить давление, которое испытывали зачернённые и зеркальные лепестки его измерительной установки.

0-2-2. Монохроматическое гамма-излучение рассеивается на покоящихся электронах. Найти частоту излучения, рассеиваемого назад, если энергия налетающего фотона равна энергии покоя электрона.

0-3-1. Определить кинетическую энергию электрона, при которой его дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой.

0-3-2. Исходя из соотношения неопределенностей, оцените минимальную энергию осциллятора с частотой ω.

0-4-1. Найти минимальную кинетическую энергию электрона, при которой он без отражения пройдёт над одномерной прямоугольной потенциальной ямой глубиной U = 2,5 эВ размером $a = 2r_Б$, $r_Б$ — боровский радиус.

0-4-2. Электрон с энергией 3 эВ проходит через прямоугольный потенциальный барьер высотой 5 эВ и шириной 3 Å. Во сколько раз должна возрасти высота барьера, чтобы вероятность прохождения через барьер упала в 10 раз?

0-5-1. Частица массы m заключена в одномерном потенциальном ящике шириной l с непроницаемыми стенками. Найти работу, которую надо затратить на квазистатическое сжатие ящика вдвое, если частица находится в основном состоянии.

0-5-2. Частица массы m заключена в одномерном потенциальном ящике с непроницаемыми стенками. Какова масса частицы, если при ширине ящика 3 Å. расстояние между первым и третьим уровнями частицы в яме составляет 5 эВ?

0-6-1. При какой температуре средняя энергия поступательного движения молекулы O_2 равна энергии, необходимой для возбуждения ее на первый вращательный уровень? Межъядерное расстояние в молекуле равно 1,2 Å.

0-6-2. Электрон с энергией 12,5 эВ сталкивается с неподвижным атомом водорода, находящимся в основном состоянии. Найдите минимально возможную энергию рассеянного электрона. Энергию отдачи атома не учитывать.

0-7-1. Найти возможные значения полного спина атома водорода в основном состоянии.

0-7-2. Оценить энергетическое расщепление состояний, найденных в предыдущей задаче, при учете магнитного взаимодействия протона и электрона, рассматриваемых, как точечные магнитные диполи.

0-10-1. Определить возможные значения полного углового момента электрона и его проекции на выделенную ось в атоме водорода, находящемся в возбужденном состоянии с главным квантовым числом n = 3.

0-10-2. Атом водорода находится в $2p$-состоянии. Определить возможные значения полного момента количества движения.

0-11-1. Для получения тепловых нейтронов (с максвелловским распределением скоростей, отвечающим температуре T = 300 К) поток нейтронов из реактора направляют в сосуд с тяжёлой водой (модератор), размер которого много больше длины пробега нейтрона в воде. Избавляясь от избытка энергии в столкновениях с ядрами дейтерия, нейтроны термализуются после нескольких десятков столкновений. Найти, чему будет равна относительная разность чисел тепловых нейтронов, магнитные моменты которых направлены по полю или против поля, если модератор поместить в магнитное поле индукцией B = 10 Тл. g-фактор нейтрона равен –3,8.

0-11-2. При какой температуре абсолютно черного тела вероятность индуцированного излучения в видимой области превосходит вероятность спонтанного излучения?

0-12-1. Свободное покоившееся ядро ^{191}Ir с энергией возбуждения 129 кэВ перешло в основное состояние, испустив γ-квант. Вычислить относительное изменение энергии γ-кванта, возникающее в результате отдачи ядра.

0-12-2. Препарат полония активностью $3{,}7 \cdot 10^9$ распад/с помещен в калориметр теплоёмкостью 1 кал/К. Найти повышение температуры калориметра за 1 час, если известно, что полоний испускает α-частицы с энергией 5,3 МэВ. Считать период полураспада полония много большим времени эксперимента.

0-13-1. В реакции синтеза ядер дейтерия и трития $d + t \to \alpha + n + Q$ выделяется энергия Q = 17,8 МэВ. Какова энергия, уносимая нейтроном**?**

0-13-2. Сечение поглощения нейтрино с энергией более 5 МэВ ядром железа составляет $\sigma = 10^{-42}$ см^2. Какова вероятность поглотиться для такого нейтрино, двигающегося по диаметру в ядре Земли? Считать, что ядро состоит из железа (A = 56 а.е.м., ρ = 7,8 г/см^3), его радиус R = 3000 км.

0-14-1. Определите минимальную кинетическую энергию протона, налетающего на неподвижный протон, необходимую для рождения пары протон–антипротон.

0-14-2. Оценить среднюю длину свободного пробега и среднее время между двумя соударениями протонов в галактических космических лучах. Считать, что их концентрация n = 10^5 м$^{-3}$, скорость хаотического движения $v \approx c$, радиус протона R_p = 10^{-13} см.

0-15-1. Определить энергию релятивистского электрона, если радиус кривизны его следа в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле B = 10^5 Гс, составляет 2 м.

0-15-2. Какой минимальной энергией должен обладать γ-квант, чтобы он смог родить электрон-позитронную пару? Возможен ли данный процесс в вакууме?

Текстовые задачи

Т1. Средняя температура поверхности Земли составляет 15°С. В результате природных процессов или влияния промышленных выбросов прозрачность атмосферы может измениться. Оценить, как изменится равновесная температура земной поверхности если прозрачность атмосферы уменьшится на 5% для излучения: а) с длиной волны меньше λ_0 = 20000 Å; б) с длиной волны более λ_0 = 20000 Å. Под прозрачностью понимается доля излучения, преодолевающая расстояние от верхних слоёв атмосферы до поверхности. Считать для оценки, что прозрачность атмосферы постоянна для $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$

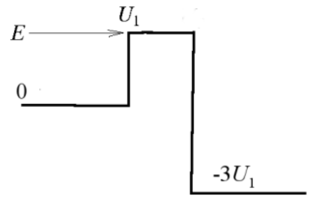
Ответ: случай а): «ядерная осень», температура понизится на 4°С; случай б): «глобальное потепление», температура повысится на 4°С.

Т2. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $E = U_0/4$. На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Бройля) плотность вероятности обнаружения частицы будет максимальна и на каком — минимальна?

Ответ: $|x|_{\max} = \lambda/6$, $|x|_{\min} = 5\lambda/12$.

Т3. Какая доля электронов с энергией $E = 1$ эВ, падающих слева на показанный на рисунке несимметричный потенциальный барьер, сможет его преодолеть? Ширина барьера $l = 7{,}8$ Å.

Ответ: 8/73.



Т4. Найти все термы невозбужденного атома углерода, на внешней оболочке $2p$ оболочке которого находятся два электрона (электронная конфигурация $1s^2 2s^2 2p^2$).

Ответ: ^1D, ^3P, ^1S.

Т5. В спектре полярных сияний самая интенсивная желто-зеленая линия с $\lambda = 5577$ Å (aurora borealis) соответствует переходу между состояниями $^1S_0$ и $^1D_2$ нейтрального атома кислорода. Определить тип перехода и оценить время жизни возбужденного состояния, считая, что размер атома кислорода равен $a = 1{,}25$ Å, а время электрических дипольных переходов составляет порядка $\tau_1 \sim 10^{-7}$ с.

Ответ: испускается фотон $E2$, время жизни состояния $^1S_0$ составляет примерно $\tau_2 \sim \tau_1/(ka)^2 = \tau_1\lambda^2/(2\pi a)^2 = 0{,}5\cdot 10^6\cdot 10^{-7}$ с $= 0{,}05$ с (точный ответ: $\tau_2 = 0{,}7$ с).

Т6. Ион меди Cu^{2+}, входящий в состав многих магнитных солей, имеет электронную конфигурацию внешней незаполненной оболочки $3d^9$.
1) Определить квантовые числа свободного иона меди Cu^{2+}; записать его спектроскопический символ и вычислить g-фактор.
2) В ионных кристаллах магнитный ион взаимодействует с электрическим полем своих соседей, поэтому его более нельзя считать свободным и формула Ланде становится неприменимой. В соли $CuGeO_3$ (магнитным моментом в этом соединении обладает только ион Cu^{2+}) в одной из ориентаций магнитного поля относительно кристалла резонансное поглощение наблюдается на частоте $\nu = 36{,}5$ ГГц в поле $H = 11{,}48$ кЭ. Определить по этим данным эффективный g-фактор иона меди в этом кристалле.

Ответ: 1) $L = 2$, $S = 1/2$, $J = L+S = 5/2$; $^2D_{5/2}$, $g = 6/5 = 1{,}2$.
2) $g_{эф} = h\nu/(\mu_B B) = 2{,}27$.

Т7. В августе 2008 г. группа BABAR Collaboration сообщила о регистрации $\eta_b(1S)$-мезона — основного состояния боттомониума, соответствующего антипараллельной ориентации спинов пары ($b\tilde{b}$) (так называемый паработтомониум в состоянии 1 $^1S_0$. На встречных (e^-, e^+)-пучках при суммарной энергии E = 10355 МэВ рождался $\Upsilon(3S)$-мезон, соответствующий возбужденному состоянию пары ($b\tilde{b}$) с параллельными спинами (так называемый ортоботтомониум в состоянии 3 $^3S_0$). Рожденный мезон распадался на мезон $\eta_b(1S)$ и γ-квант: $\Upsilon(3S) \to \eta_b(1S) + \gamma$. Определить массу $\eta_b(1S)$-мезона и тип испускаемого γ-кванта, если энергия γ-кванта E_γ = 921,2 МэВ. Какова разница в энергиях основных состояний орто- и паработтомониума, определяемая переворотом спинов одного из кварков. Масса основного состояния ортоботтомония $m_{\Upsilon(1S)}$ = 9460,4 МэВ/c^2.

Ответ: $m_{\eta_b(1S)}c^2 = E\sqrt{1-2E_\gamma/E} = 9388{,}7$ МэВ,

$$\Delta mc^2 = \left(m_{\Upsilon(1S)} - m_{\eta_b(1S)}\right)c^2 = 71{,}7 \text{ МэВ},$$

испускается магнитный дипольный γ-квант ($M1$).

Т8. В экспериментах 2011–2012 гг. на Большом адронном коллайдере (ЦЕРН, Женева) в протон-протонных столкновениях была открыта частица, напоминающая по своим свойствам бозон Хиггса (хиггсон), предсказанный в 1964 г. В соответствии с выводами Стандартной модели был обнаружен распад предполагаемого бозона Хиггса на два фотона, причем энергии фотонов оказались равными E_1 = 70 ГэВ и E_2 = 92 ГэВ, а угол разлета фотонов — $\alpha = 103^\circ$. Найти массу распавшейся частицы.

Ответ: $m_H c^2 = [2E_1E_2(1-\cos\alpha)]^{1/2}$ = 130 ГэВ.

Т9. Мюонное нейтрино, попав в жидководородную камеру, рождает промежуточный бозон W^+ ($m_W c^2$ = 81 ГэВ). Найти минимальную энергию нейтрино.

Ответ: $E \approx (m_W)^2c^2/(2m_p)$ = 3500 ГэВ.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **физики и исследований им. Ландау, ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Введение**
   Вывод некоторых уравнений математической физики. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка от n независимых переменных с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Понятие о задаче Коши и характеристической поверхности. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду на плоскости. Понятие о методе характеристик.

2. **Волновое уравнение в $\mathbb{R}^1$**
   Общее решение однородного волнового уравнения. Постановка и решение задачи Коши, формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Корректность задачи. Пример Адамара некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа). Понятие об обобщённом (негладком) решении, как пределе гладких решений. Постановка и решение смешанной задачи для полубесконечной струны с закреплённым концом. Условия согласования начальных и граничного данных.
   Нелинейное уравнение Бюргерса без учёта вязкости. Задача Коши для этого уравнения и ее решение. Законы сохранения. Понятие о слабом решении.

3. **Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$**
   Формулы Пуассона–Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Принцип Гюйгенса. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Общая формула Кирхгофа.
   Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Метод спуска, формула Пуассона. Диффузия волн в $\mathbb{R}^2$. Единственность классического решения задачи Коши (метод интеграла энергии).

4. **Задача Коши для уравнения теплопроводности**
   Постановка задачи Коши. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^1$ и в $\mathbb{R}^n$, бесконечная дифференцируемость решений. Фундаментальное решение. Метод Дюамеля для неоднородного уравнения. Принцип максимума. Единственность решения в классе Тихонова.
   Нелинейное уравнение Бюргерса с вязкостью. Преобразование Хопфа–Коула и его применение для сведения уравнения Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности.

5. **Начальные сведения об операторе Лапласа и о задаче на собственные значения при однородных краевых условиях**

Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Симметричность и положительность оператора $-\Delta$ с однородными условиями Дирихле. Задача на собственные значения. Вещественность и положительность собственных значений. Ортогональность собственных функций.

6. **Задача Дирихле для уравнения Лапласа–Пуассона в круге**
   Построение формального решения задачи Дирихле методом Фурье. Бесконечная дифференцируемость решения в области, разложение решения по гармоническим многочленам в случае уравнения Лапласа. Интеграл Пуассона. Существование классического решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге при непрерывной граничной функции.

Литература

Основная

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Изд-во МГУ, 2004.
2. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.
3. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2016, 5-е изд., перераб. и доп.

Дополнительная

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
5. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
6. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2003.
7. *Пальцев Б. В.* Сферические функции: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге [3].

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–26 октября)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, приведение к каноническому виду

1. Определить тип уравнения и указать те множества плоскости (x, y), на которых он сохраняется:

а) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y = 5x$;

б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xyu_{yy} - u_x = 0$.

2. Определить при различных вещественных значениях α, β тип уравнения

$$u_{xx} + 2\alpha u_{xz} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0.$$

3. 2.1(5); 2.2(6).

II. Метод характеристик, решение краевых задач на плоскости

4. Найти общие решения уравнений:

а) $u_{xy} = x^2 - y^2$; б) $u_{xy} + xu_y = 2xy$; в) 2.3(6); 2.11(4,6).

5. Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

а) 12.3; 12.15 (рассмотреть при ограничении $0 < y < 2$ в граничных условиях);

б) $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0$,
$u|_{y=0} = 2x^2, \quad u_y|_{y=0} = 2x, \quad 1 < x < 4$;

в) $u_{xx} + \cos x \cdot u_{xy} + (\cos x - 1)u_{yy} = \frac{\sin x}{(2-\cos x)}(u_x + u_y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$u|_{x=0} = 3y, \quad u_{x|_{x=0}} = -2, \quad 1 < y < 3$;

г) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^4$,
$u|_{y=1} = 3x^4, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 1 < x < 2$;

д) $yu_{xx} + (1 + y)u_{xy} + u_{yy} + \frac{(u_x+u_y)}{(1-y)} = 0, \quad y < 1$,
$u|_{y=0} = x^2 + 2x, \quad u_y|_{y=0} = -2x, \quad 0 < x < \frac{3}{2}$.
Принадлежит ли точка с координатами $(1, 2)$ области, в которой решение задачи определено однозначно?

6. Решить задачу Гурса: 14.43; 14.57(7).

7. Решить задачу, указав наибольшую область, в которой решение определено единственным образом:
$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 8x, \quad -2 < x \le 0$,
$u|_{y=x} = 8x^2 + 9x^3, \quad 0 \le x < 1$.

III. Волновое уравнение

8. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2 \cos 2x, & (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = e^x, \quad u_t|_{t=0} = x^2, & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

9. 12.41.

10. Решить смешанные задачи для полубесконечной струны:

а) <u>21.4</u>; 21.14; 21.17; <u>21.21</u>;

б) $9u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = 6x, \quad u_{t|_{t=0}} = 4e^{-3x} + 2, \quad x \geq 0,$
$u_{x|x=0} = -6t + 6e^{-t}, \quad t \geq 0;$

в) $4u_{tt} = u_{xx} - 4te^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_{t|_{t=0}} = 0, \quad x \geq 0,$
$(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0;$

г) $2xu_{tt} + (1-2x)u_{xt} - u_{xx} + \frac{2}{(2x+1)}(u_x - u_t) = 0, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = \sin x^2, \quad u_{t|_{t=0}} = -\cos x^2, \quad x \geq 0,$
$(u - u_x)|_{x=0} = -t, \quad t > 0;$

д) $u_{tt} = u_{xx} - \frac{8(x+t)}{1+(x+t)^2}, \quad t > 0 \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = 2x\ln(1+x^2) + x\operatorname{ch} x, \quad x \geq 0,$
$u_{t|_{t=0}} = \frac{4x^2}{1+x^2} - x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x, \quad x \geq 0,$
$(u - u_x)|_{x=0} = -1 - t - 2\ln(1+t^2), \quad t \geq 0.$

Проверить, что решение $u(t,x) \in C^2(t > 0, x > 0)$. Ответ обосновать.

<u>*Указание.*</u> Частное решение уравнения искать, перейдя к характеристическим переменным $\xi = x + t, \quad \eta = x - t$.

11. Решить задачи Коши:

а) 12.38; 12.43(<u>3</u>,7); 12.44(3,7);

б) $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = u_0(x) \equiv \alpha(r), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \equiv \beta(r), \quad x \in \mathbb{R}^3,$
$u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3), \quad u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$

<u>*Указание.*</u> Искать решение в виде $u(t,x) = \dfrac{v(t,r)}{r}$;

<u>в)</u> $u_{tt} = \Delta u + (\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4})\cos t, \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3,$
$u_{t|_{t=0}} = e^{-(x-y)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

г) $u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t}\cos(x - y + z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = xy^2z, \quad u_{t|_{t=0}} = 3\cos(x - y + z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

д) $u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2\cos(x + 2y), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = yz^3, \quad u_{t|_{t=0}} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

<u>е)</u> $u_{tt} = \Delta u, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = e^{-x^2}(y^2 - z^2), \quad u_{t|_{t=0}} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

12. Найти $u(t,0,0,0)$, $t > 0$, где $u(t,x,y,z)$ — решения задач Коши:

а) $4u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2), & (x, y, z) \in G, \\ 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \end{cases}$

где $G = \{(x, y, z) : y > 0, \ 0 < x < z\}$;

б) $u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} b = \text{const} > 0, & (x, y, z) \in G, \\ 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \end{cases}$

где $G = \{(x, y, z) : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 < R^2\}, \quad 0 < R < 1.$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Уравнение теплопроводности. Задача Коши

1. 13.5(6,8); 13.2; 13.6(2,4); 13.7(4).

2. Решить задачи Коши:

а) $10u_t = \Delta u + 2x \cos(x + y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$u|_{t=0} = (3x + y)^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

б) $u_t = \Delta u + (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = x \cos(x + y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

в) $u_t = \Delta u + 27(t^2 - 1) \cos(x + y + z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = (x - y + z) \sin z - (z - 1)^3 e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

3. Найти $u(t, 0, 0)$, $t > 0$, где $u(t, x, y)$ — решение задачи Коши:

$$4u_t = \Delta u, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} xy(1 - x^2 - y^2), & (x, y) \in G = \{x > 0, \ y > 0, \ \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus G. \end{cases}$$

4. Найти при каждом $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{t \to \infty} u(t, x)$, где $u(t, x)$ — решение задачи Коши:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u_0(x) \in C(\mathbb{R}), \qquad \lim_{x \to -\infty} u_0(x) = A, \qquad \lim_{x \to +\infty} u_0(x) = B.$$

II. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце. Метод Фурье

5. 16.1(2) (решить и внешнюю задачу с тем же граничным условием).

6. Выяснить, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение задача Неймана:

$$\Delta u = y, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2,$$

$$u_r|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

и решить задачу при таких α.

7. Решить задачи ($r = \sqrt{x^2+y^2}$):

а) $\Delta u = 12y^2 - 2, \quad r < 1, \quad (u_r + u)|_{r=1} = 5y^4;$

б) $\Delta u = 3\frac{x}{r}, \quad 1 < r < 2, \quad u_r|_{r=1} = 2xy, \quad u|_{r=2} = x\left(\frac{5}{2} + y\right);$

в) $\Delta u = 15r^2\sin\varphi, \quad \frac{1}{2} < r < 1,$
$u_r|_{r=1/2} = 2\sin^2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = \cos^2\varphi;$

г) $\Delta u = 0, \quad (x,y) \in D = \{0 < r < R, \quad 0 < \varphi < \alpha\}, \quad \pi < \alpha < 2\pi,$ $(x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi),$
$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad 0 \le r \le R, \quad u|_{r=R} = f(\varphi)$. Найти необходимое и достаточное условие на функцию $f(\varphi) \in C^1([0,\alpha]), f(0) = f(\alpha) = 0$, обеспечивающее ограниченность первых производных решения в окрестности точки $(0,0)$;

д) $\Delta u = -\frac{9}{r^2}\cos 3\varphi, \quad r > 1, \quad (u - u_r)|_{r=1} = \cos^3\varphi.$

III. Сферические функции

8. 16.26(2); 16.27(3,5); 16.28(1); <u>16.29(1)</u>; 16.30(6); 16.31(1); 16.24.

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школы: **физики и исследований им. Ландау, ФПМИ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 39 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
2. Комплексная дифференцируемость функции комплексного переменного и условия Коши–Римана. Понятие функции, регулярной в области. Понятие гармонической функции двух переменных, связь с регулярной функцией.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, экспонента и тригонометрические, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви логарифмической функции и корня n-ой степени.
4. Комплексное интегрирование. Интеграл и его свойства. Первообразная и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути.
5. Лемма Гурса и интегральная теорема Коши для односвязной области. Обобщенная интегральная теорема Коши по границе области (доказательство для звездной области).
6. Интеграл Коши и его свойства. Интегральная формула Коши и бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Интегральная формула Коши для производных.
7. Степенные ряды, первая теорема Абеля. Радиус и круг сходимости. Ряд Тейлора. Разложение в степенной ряд функции, регулярной в круге. Теоремы Вейерштрасса для локально равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
8. Нули регулярной функции и теорема единственности. Теорема Морера и теорема о стирании разреза. Взаимосвязь первообразных регулярной функции.
9. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце, его единственность.
10. Изолированные особые точки. Связь их классификации с видом ряда Лорана.
11. Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
12. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$ в односвязной области, не содержащей нуля.

13. Теорема о существовании регулярной ветви логарифма регулярной в области функции. Теорема о существовании регулярной ветви корня регулярной в области функции. Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня. Вычисление интегралов с использованием регулярных ветвей.
14. Целые функции. Теорема Лиувилля, теорема Сохоцкого и теорема Пикара (последняя без доказательства) для целых функций.
15. Мероморфные функции. Теорема о представлении мероморфной функции в виде ряда элементарных дробей. Разложение котангенса в виде суммы элементарных дробей.
16. Аналитическое продолжение. Аналитические продолжения элементов с помощью конечной цепочки областей и вдоль пути, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие о (полной) аналитической функции и ее римановой поверхности. Теорема о монодромии (без доказательства).
17. Особые точки аналитических функций. Точки ветвления. Теорема Коши–Адамара.
18. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и локальная однолистность. Принцип максимума модуля регулярной функции и лемма Шварца. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Теорема о среднем для гармонической функции.
19. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформность отображения и критерий конформности в точке. Конформность в расширенной комплексной плоскости.
20. Элементарные конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства: конформность, групповое, круговое и принцип симметрии.
21. Конформные отображения с использованием степенной и экспоненциальной функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательство единственности). Теорема о соответствии границ при конформном отображении (без доказательства).
22. Принцип симметрии при конформных отображениях.
23. Классическая и общая задачи Дирихле на плоскости. Теорема единственности решения общей задачи Дирихле. Конформная инвариантность гармонической функции. Интеграл Пуассона и решение общей задачи Дирихле в круге.

Литература

Основная

1. *Половинкин Е. С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2015.
2. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.
3. *Горяйнов В. В., Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : МФТИ, 2017.

Дополнительная

4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Санкт-Петербург : Лань, 2002.
5. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч, 1, 2. — Москва : Наука, 1985; Санкт-Петербург : Лань, 2004.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге:
Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином, 2006.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 05 октября)

I. Комплексные числа. Стереографическая проекция

§1: 1(4); <u>4(2)</u>; <u>10(5)</u>; 11;16.

§2: 1(3).

Т.1. Покажите, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана соответствует в комплексной плоскости окружность или прямая.

II. Элементарные функции. Ряды

§3: <u>12</u>; <u>13(3)</u>; 17(2,3); 20(1).

§4: 6(4).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: <u>1(5)</u>; 7(4,6); 17(5,7,8).

Т.2. Найти области, в которых функция

$$f(z) = 2|xy| + i|x^2 - y^2|, \qquad z = x + iy,$$

является регулярной.

Т.3. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, является регулярной в области G функцией. Докажите, что $|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|$ во всех точках области G.

IV. Ряд Тейлора

§7: <u>3(6,10)</u>; 4; 6(3,5); 8; 12(2).

Т.4. Найти все значения 3^i, i^i, $(-1)^{3i}$.

V. Теорема единственности

§9: 2(<u>4</u>,7,8).

Т.5. Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено равенство $f^n(z) = 0$. Доказать, что f - полином степени меньше n.

Т.6*. Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть для любой точки $z \in G$ существует натуральное число n такое, что $f^n(z) = 0$. Является ли f полиномом?

VI. Ряд Лорана

§11: <u>4(3)</u>; 5(4); 7(2); 9(2); 10(9).

VII. Особые точки однозначного характера

§12: <u>8(2,7)</u>;11; 15(4); 17(6); 20(5).

Т.7. Найти и исследовать все особые точки функции (для полюса указать порядок)

$$f(z) = \frac{(4z^2 + \pi^2)^2(\cos\frac{3}{z} - 1)}{z^3(2\pi z - 3)^2(1 + e^{2z})^3}.$$

Т.8. Пусть дана регулярная в кольце $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ функция f такая, что найдутся действительные числа $A > 0$, $B > 0$ и $\alpha \in [0,1]$, при которых справедливы неравенства

$$\frac{A}{|z|^\alpha} \le |f(z)| \le \frac{B}{|z|^{\alpha+1}}, \quad \forall z \in G.$$

Определить при различных α тип особой точки 0 функции f.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–09 ноября)

I. Вычеты и вычисление интегралов

§13: 1(3); 3(1); <u>5(5,6)</u>.

§14: 1(5); 2(3,8,<u>17</u>,22); 3(2).

§23: 1(3,6); 2(7,15,<u>19</u>).

<u>Т.1</u>. Вычислить интегралы

$$a) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x+i)}{x^2-2x+5}dx; \quad b) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-4x+1-4i}dx$$

<u>Т.2</u>. Используя равенство $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-ix^2}dx$.

II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

§16: 3; <u>5</u>; 6*.

§17: 4, 6,7, 8*.

§18: 9(1,<u>2</u>); 20(2); <u>24</u>; 25; 27; <u>35</u>; 37*; 38*..

Т.3*. Доказать, что функция

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{z}}\,dt, \quad \mathrm{Re}z > 0,$$

является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt{\pi z}\}$. Разложить $F(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и указать радиус сходимости этого ряда.

III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: <u>1(4)</u>; 5; 10; <u>24</u>; 25*; <u>42</u>; 45*; 48*.

§23: 5(<u>3</u>,4,7); 6(4,<u>6</u>,<u>8</u>); 7(<u>3</u>,7*).

IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(<u>3</u>,6,7,10); 4.

Т.4. Найти число корней многочлена $2z^6 + 2z^3 - 5z - 2$ в круге $|z| < 1$.

Т.5. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{iz^3}{4z^3-2iz^2+1}\right)\,dz.$$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Конформные отображения

§26: 3; 4; 10.

§27: <u>3(2)</u>; 6(2); 7(3); 8(<u>2</u>,4); 9(2).

§28: 5 (рис.28.31, 28.34, <u>28.38</u>, 28.42; 28.45); 10 (рис. <u>28.51</u>, 28.53, 28.57; <u>28.61</u>); 12 (рис. 28.65); <u>13</u>; 19 (рис. 28.71, <u>28.75</u>, 28.81, <u>28.84</u>, 28.85); 20 (рис. 28.89).

§29: 3(рис.29.19, <u>29.21</u>); 4^*; 5.

II. Задача Дирихле

<u>Т.1</u>. Решить классическую задачу Дирихле в единичном круге с заданным граничным условием:

а) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \dfrac{\sin\theta}{5 + 4\cos\theta}$;

б) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \dfrac{4 + 5\cos\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2}$.

Т.2*. Решить общую задачу Дирихле в области $G = \{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ с заданным граничным условием:

$$\Delta u = 0, \quad z \in G; \quad u|_{\operatorname{Im} z = 0} = 0,\ u|_{|z|=1} = 1.$$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория поля**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **теоретической физики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоемкость:
лекции – 30 часов
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

Экзамен – 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
А. В. Дорофеенко

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
28 мая 2021 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор Ю. М. Белоусов

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Введение. Принцип относительности. Механика Ньютона и преобразования Галилея. Электродинамика Максвелла и преобразования Лоренца. Существование максимальной скорости распространения сигналов. Изменение наших представлений о свойствах пространства и времени.

Пространство Минковского. Мировая точка (событие) и мировая линия. Интервал. Причинно связанные события. Инерциальные системы отсчёта.

Кинематика. Собственное время. 4-скорость, 4-ускорение. 4-импульс. Лабораторная система отсчёта и система центра инерции. Эффективная масса. Упругие и неупругие столкновения частиц. Порог реакции.

2. Преобразования Лоренца. Преобразования Лоренца и их геометрическая интерпретация. Относительность понятий «здесь» и «сейчас». Изменение масштабов длины и времени. Сложение скоростей. Пространство скоростей.

3. Некоторые сведения из геометрии. Декартовы координаты. Общие преобразования координат. Контра- и ковариантные векторы. Понятие тензора. Скалярное произведение векторов. Метрический тензор. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства. Движения, сохраняющие метрику. Примеры 4-векторов: 4-скорость, 4-ускорение, 4-импульс, 4-сила, волновой 4-вектор, 4-потенциал, 4-вектор плотности тока. Эффект Доплера и аберрация света. Тензор электромагнитного поля, его преобразования и инварианты.

4. Действие для частицы. Понятие элементарной частицы. Ковариантная форма принципа наименьшего действия. Уравнения движения. Функции Лагранжа и Гамильтона. Закон сохранения 4-импульса замкнутой системы как следствие однородности пространства–времени.

Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Действие для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Обобщенный и кинематический импульсы. Функции Лагранжа и Гамильтона. Уравнения движения и сила Лоренца. Электрическое и магнитное поля. Движение в постоянных электрическом и магнитном полях. Дрейф в скрещенных полях.

Движение заряда в медленно меняющемся и слабонеоднородном магнитных полях. Магнитный дипольный момент. Гиромагнитное отношение. Энергия магнитного момента в магнитном поле. Адиабатический инвариант. Движение ведущего центра орбиты. Продольный и поперечный дрейф заряженных частиц в неоднородном магнитном поле. Магнитные зеркала.

5. Описание электромагнитного поля. Тензор электромагнитного поля, 4-потенциалы и напряжённости. Калибровочная инвариантность. Первая пара уравнений Максвелла. Преобразование Лоренца для электромагнитного поля и его инварианты.

Уравнения Максвелла. Переход от точечных зарядов к распределенной системе зарядов и токов с помощью δ-функции. Закон сохранения электрического заряда. Уравнение непрерывности. 4-вектор плотности тока. Вторая пара уравнений Максвелла. Энергия и импульс электромагнитного поля.

6. Волновое уравнение для электромагнитного поля. Уравнения для 4-потенциалов в кулоновской калибровке и калибровке Лоренца. Запаздывающая функция Грина. Запаздывающие потенциалы. Электро- и магнитостатика. Энергия поля и потенциальная энергия зарядов и токов.

7. Мультипольные моменты. Электрический и магнитный диполи. Энергия диполя во внешнем поле. Электрический квадруполь. Общее понятие о высших мультипольных моментах. Энергия взаимодействия двух систем зарядов, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Энергия системы зарядов в слабонеоднородном внешнем электромагнитном поле.

8. Свободное электромагнитное поле. Плоские монохроматические волны. Волновой 4-вектор. Линейная, круговая и эллиптическая поляризации. Усреднение по времени и поляризации.

9. Излучение электромагнитных волн. Дипольное приближение и условия его применимости. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в квазистационарной (ближней) и волновой (дальней) зонах. Интенсивность излучения в дипольном приближении, его угловое и спектральное распределения. Интенсивность излучения магнитного диполя и электрического квадруполя (без вывода). Понятие о мультипольном разложении для излучения.

10. Излучение релятивистских частиц. Потенциалы Лиенара–Вихерта. Синхротронное излучение в ультрарелятивистском случае. Полная интенсивность излучения. Угловое и спектральное распределения (качественно). Оценка длины когерентности.

Реакция излучения. Сила радиационного трения. Естественная ширина спектральной линии. Пределы применимости классической электродинамики на малых расстояниях и в сильных полях.

11. Рассеяние электромагнитных волн. Дифференциальное и полное сечения рассеяния. Рассеяние на свободном заряде, формула Томсона. Поляризация рассеянного света. Рассеяние электромагнитных волн в дипольном приближении. Резонансы в рассеянии.

12. Элементы электродинамики сплошных сред. Уравнения Максвелла для поля в диэлектрике. Отражение волны от плоской границы диэлектрика.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — Москва : Физматлит, 2014, 2016.

2. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.П., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. — Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2013.

3. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — Москва : РХД, 2002.

Дополнительная

1. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — Москва : Мир, 1965.

2. *Паули В.* Теория относительности. — Москва : Наука, 1991.

3. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — Москва : Наука, 1987.

4. *Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Движение заряженной частицы во внешнем слабонеоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория: учебно-методическое пособие. — Москва : МФТИ, 2001.

5. *Толоконников С.В., Фомичев С.В.* Излучение заряженных частиц в вакууме: учебно-методическое пособие. — Москва : МФТИ, 2003.

6. *Андрианов Е.С., Виноградов А.П., Дорофеенко А.В., Зябловский А.А., Пухов А.А., Лисянский А.А.* Квантовая наноплазмоника: учебное пособие. — Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2015.

7. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. Часть 1. Микроскопическая теория. — Москва : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

8. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2005.

9. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. — Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2009.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ

1. Тензорные обозначения и векторный анализ

В евклидовом пространстве в декартовых координатах можно не различать верхние и нижние индексы, базис — $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, координаты — $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$. Правило Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, абсолютно симметричный тензор второго ранга. $e_{\alpha\beta\gamma}$ — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга.

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma\alpha}, \qquad e_{xyz} = e_{123} = 1,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\rho} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \end{pmatrix},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\,,$$
$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}\,.$$

Векторный оператор дифференцирования (набла):

$$\nabla = \left\{ \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right\} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,,$$

$$\Delta = (\nabla\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\,, \quad \operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \equiv (\nabla\mathbf{a}) = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv [\nabla \times \mathbf{a}] = \mathbf{e}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta}\,.$$

Разложение в ряд Тейлора:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{a}\nabla)^2\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathbf{a}\nabla)^n \mathbf{F}(\mathbf{r}) = e^{(\mathbf{a}\nabla)}\mathbf{F}(\mathbf{r})\,.$$

2. Преобразование Фурье

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{kr} - \omega t)}\, d^3\mathbf{r}\, dt\,,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{k},\omega) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \, \frac{d^3\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4}\,.$$

3. Разложение плоской волны и кулоновского потенциала

$$e^{i\mathbf{kr}} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)\,,$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta),$$

где $r < R$. Здесь $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, $j_l(z)$ — сферические функции Бесселя:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z)\,.$$

Ортогональность полиномов Лежандра:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2\delta_{l\,l'}}{(2l+1)}\,, \quad P_l(1) = 1\,.$$

$$P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,.$$

4. Дельта-функция

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x-x_0)\, dx = \begin{cases} f(x_0)\,, & a < x_0 < b\,, \\ 0\,, & x_0 < a\,, x_0 > b\,; \end{cases}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}, \quad \delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|},\ f(x_n) = 0,$$

$$\delta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, \frac{dk}{2\pi}.$$

Формула Сохотского: $\lim\limits_{\delta\to+0} \frac{1}{x-i\delta} = \mathcal{P}\,\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)\,.$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

0. Тензорные обозначения

- Всегда (кроме декартовых координат в евклидовом пространстве) надо различать верхние (контравариантные) и нижние (ковариантные) индексы.

- Сворачивать (суммировать по повторяющимся индексам) можно, только если один из них сверху, а другой снизу.

Для произвольной метрики:

Элемент интервала (или длины), обратная метрика

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,, \quad g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k.$$

Поднимание и опускание индексов

$$V_n\, g^{nm} = V^m\,, \quad V^j\, g_{jk} = V_k\,,$$

$$F_{sp}\, g^{mp} = F_s{}^m\,, \quad F^{ij}\, g_{mj} = F^i{}_m\,, \quad F^{ij}\, g_{ni}\, g_{mj} = F_{nm}\,.$$

Для метрики Минковского:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{ij}\,.$$

Контравариантный 4-вектор $A^i \equiv (A^0, \mathbf{A}) \equiv (A^0, A^\alpha)$.
Ковариантный 4-вектор $A_i \equiv (A^0, -\mathbf{A}) \equiv (A^0, -A^\alpha)$.
Скалярное произведение векторов

$$A^i B_i = A^0 B^0 - \mathbf{AB} = A^0 B^0 - A^\alpha B^\alpha\,.$$

4-вектор координаты $x^i = (ct, \mathbf{r})$.
Интервал $ds = cd\tau = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2} = = cdt\sqrt{1-(v/c)^2}$.
Преобразование Лоренца (буст), скорость направлена параллельно оси x, матрица перехода от новых координат к старым:

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \operatorname{th}\vartheta\,,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \operatorname{ch}\vartheta\,,\ \beta\gamma = \operatorname{sh}\vartheta\,.$$

1. Кинематика релятивистской частицы
4-скорость частицы

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,,\ \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right), \qquad u^i u_i = 1\,.$$

4-импульс

$$p^i = mcu^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right)\,,\ \mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}\,,\ p^i p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2\,,$$

m — масса, $\mathcal{E}$ — энергия, $\mathbf{p}$ — импульс частицы.

2. Уравнения электромагнитного поля
4-потенциал $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, где φ — скалярный, а $\mathbf{A}$ — векторный потенциалы. Электрическое и магнитное поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Тензор электромагнитного поля:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,,$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & -e_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma \end{pmatrix}\,.$$

Калибровочное (градиентное) преобразование:

$$A_i \to A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Leftrightarrow \varphi \to \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla f.$$

Дуальный тензор:

$$\widetilde{F}_{ik} = \tfrac{1}{2}\, e_{iklm} F^{lm}\,, \quad e^{0123} = -e_{0123} = 1\,.$$

Инварианты электромагнитного поля:

$$F^{ik}F_{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)\,, \quad F^{ik}\widetilde{F}_{ik} = -4(\mathbf{EH})\,,$$

$$S[A] = \int\limits_{ct_\mathrm{A}}^{ct_\mathrm{B}} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[\frac{-F^{ik}F_{ik}}{16\pi c} - \frac{1}{c^2} j^i A_i \right] .$$

Уравнения движения заряженной частицы:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \left[\mathbf{v} \times \mathbf{H} \right] , \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} .$$

Уравнения Максвелла:

1-я пара

$$\frac{\partial \widetilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0 \Leftrightarrow (dF)_{ijk} \equiv \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 , \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} .$$

2-я пара

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho , \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \Rightarrow$$

Уравнение непрерывности:

$$\Rightarrow \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \qquad j^i = (c\rho, \mathbf{j}).$$

Микроскопические плотности заряда и тока:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t) \right) , \; \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}(t) \delta \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t) \right) ;$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) , \; \delta(\mathbf{r}) = \iiint e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} .$$

3. Постоянное электромагнитное поле

Дипольный момент системы зарядов:

$$\text{электрический } \; \mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a ,$$

$$\text{магнитный } \; \mathbf{M} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a] .$$

Тензор квадрупольного момента:

$$D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a \left(3x_{a\alpha}x_{a\beta} - (\mathbf{r}_a)^2\delta_{\alpha\beta}\right) .$$

Разложение потенциалов по мультипольным моментам:

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{dn})}{r^2} + \frac{D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2r^3} + \cdots$$

Поле магнитного диполя (усреднённое по времени):

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{M}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{Mn})\mathbf{n} - \mathbf{M}}{r^3} .$$

Система зарядов во внешнем поле:

$$U_\mathrm{e} = e\varphi - (\mathbf{dE}) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}D_{\alpha\beta} + \cdots ;$$

$$U_\mathrm{m} = -(\mathbf{MH})\,, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H}.$$

4. Волновые уравнения

$$-\Box A^i \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \Delta A^i = \frac{4\pi}{c} j^i\,.$$

Калибровка (калибровочное условие) Лоренца:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0\,.$$

Запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \iiint \frac{\rho\left(\mathbf{r}\,', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|} d^3\mathbf{r}\,' ;$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\iiint \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}\,', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|} d^3\mathbf{r}\,' .$$

Плотность W и поток $\mathbf{S}$ энергии электромагнитного поля:

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right] .$$

Плотность импульса $\mathbf{g}$ и тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ электромагнитного поля:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] = \frac{\mathbf{S}}{c^2}\,, \quad \sigma_{\alpha\beta} = W\delta_{\alpha\beta} - \frac{E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta}{4\pi}\,.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\mathrm{g}^{ik}F_{lm}F^{lm} - F^{il}F^{k}{}_{l}\right)\,;$$

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}\,.$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c}F^{ik}j_k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{S} + (\mathbf{jE}) = 0, \\ \frac{\partial \mathrm{g}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho E_\alpha + \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]_\alpha = 0. \end{cases}$$

5. Плоская монохроматическая волна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{-ik^m x_m}\right\}\,,$$

$$k^m = (\omega/c, \mathbf{k}), \quad k_m\,k^m \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 = 0.$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\,, \quad (\mathbf{nH}) = 0\,, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}\,, \quad k = \frac{\omega}{c}\,, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Вектор поляризации:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} = e_1\mathbf{e}^{(1)} + e_2\mathbf{e}^{(2)}\,, \quad \left((\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)*}) = 0\,,\ (\mathbf{e}^{(1,2)}\mathbf{n}) = 0\right)\,.$$

Линейный базис: $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(x)}\,,\ \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(y)}\,,\ (\mathbf{n}\parallel z)\,,$
циркулярный базис:

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)} + i\mathbf{e}^{(y)}\right)\,,\ \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)} - i\mathbf{e}^{(y)}\right)\,.$$

Усреднение по времени:
$\overline{\mathrm{Re}\,\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}\}\,\mathrm{Re}\,\{\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}\}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^*)\,.$
Усреднение по поляризации: $\langle e_\alpha e_\beta^*\rangle = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\right)\,.$

6. Разложение поля на осцилляторы

Вектор-потенциал (в ящике с периодическими граничными условиями) раскладывается на плоские волны (в ряд Фурье)

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a_k} e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{a_k^*} e^{-i\mathbf{kr}}\right).$$

Гамильтониан

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathcal{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2}\left(P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}j}^2\right),$$

где $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ — волновой вектор, $\omega_k = |\mathbf{k}|/c$, $j = 1, 2$ — номер поляризации, $V = L^3$ — объём ящика,

$$Q_{\mathbf{k}j} = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\left(\mathbf{a_k} + \mathbf{a_k^*}\right) \cdot \mathbf{e}^{(j)},$$

$$P_{\mathbf{k}j} = -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\left(\mathbf{a_k} - \mathbf{a_k^*}\right) \cdot \mathbf{e}^{(j)} = \dot{Q}_{\mathbf{k}j}.$$

7. Излучение и рассеяние электромагнитных волн

Интенсивность мультипольного излучения:

$$dI_d = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$I_d = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2; \quad I_m = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{M}}^2; \quad I_D = \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta}.$$

Сила радиационного трения:

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

«Классический радиус», сечение рассеяния э.м. волны на свободной частице (σ_T) и осцилляторе:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}; \qquad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2; \qquad \sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

ЗАДАНИЕ

УПРАЖНЕНИЯ

Задание 1

1. От матриц к тензорам. В трёхмерном пространстве вычислить свертки:

$$\delta_{\alpha\alpha},\ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma},\ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\alpha};$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma},\ e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma},\ e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha 1}A_{\beta 2}A_{\gamma 3}.$$

2. От векторов к тензорам. Проверить, что скалярное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ равно $a_\alpha b_\alpha$, что компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ равны $c_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$. Показать (используя результат предыдущего упражнения), что

$$[\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,[\mathbf{c}\times\mathbf{d}] = (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d}) - (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c}),$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,[[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]] = (\mathbf{a},[\mathbf{b}\times\mathbf{c}])^2.$$

3. От наблы к тензорам. Используя результат 1-го упражнения:
(а) раскрыть выражения: $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, $\operatorname{rot}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и f — функции координат $\mathbf{r}$;
(б) вычислить: $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a},\mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{a}$ — постоянные векторы;
(в) вычислить: $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{div}\mathbf{r}$, $(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}(r)$, $\operatorname{div}\mathbf{a}(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$;
(г) вычислить: $\operatorname{grad}\exp(i\mathbf{kr})$, $\operatorname{div}(\mathbf{a}\exp(ikr))$, $\operatorname{grad}(f(t-r/c))$.

4. Усреднение по направлениям в 3D и 2D. Найти средние значения произведений компонент единичного вектора n_α на единичной сфере $n_\alpha n_\alpha = 1$, а также на единичной окружности, плоскость которой ортогональна вектору m_α:

$$\langle n_\alpha\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu\rangle.$$

Задание 2

5. Показать, что однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси z, может быть описано векторным потенциалом $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$. Градиентным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A}' = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\times\mathbf{r}]$.

6.* Прямыми вычислениями доказать, что векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\int\limits_0^1 t dt\, [\mathbf{r} \times \mathbf{H}(t\mathbf{r})]$ описывает магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ при условии $\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$.

ЗАДАЧИ

Задание 1

1. Преобразование Лоренца для скорости, непараллельной координатным осям. Начало координат системы K' движется со скоростью $\mathbf{v} = (v_x,\, v_y)$ относительно системы K, а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{v}$ те же самые углы, что и оси системы K. Записать матрицу преобразований Лоренца от системы K к системе K', а также обратного преобразования. Определить положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K.

2. Еще одно упражнение на преобразование Лоренца. Два источника, движущиеся к наблюдателю по одной прямой с релятивистской скоростью V, одновременно (в собственной системе координат) испускают световой сигнал. Какова разность времен прихода обоих сигналов к наблюдателю, если расстояние между источниками (в их системе координат) равно l?

3.* **Прецессия Томаса.** На частицу, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила, сообщающая ей ускорение $\dot{\mathbf{v}}$. Определить, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы относительно лабораторной системы отсчета, если сила, действующая на частицу, не действует на ее спин. *Указание*: использовать результат задачи 2. *Ответ*:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2}\, [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}].$$

4. Встречные пучки. Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?

5. Время жизни ускоряющегося пиона. Пучок π^+-мезонов с начальным импульсом $p_0 = 200$ МэВ/с вводится в линейный ускоритель. Какова должна быть напряженность ускоряющего поля E, чтобы, по крайней мере, половину пионов удалось ускорить до энергии

$\mathcal{E} = 200$ ГэВ? Какую длину должен при этом иметь ускоритель? (Масса π^+-мезона $m_{\pi^+} = 140$ МэВ. Время жизни π^+-мезона равно $\tau_{\pi^+} = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с, а время полураспада $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ равно $\tau_{1/2} = \tau_{\pi^+} \ln 2$.)

6. Движущееся зеркало. Плоское зеркало движется со скоростью v в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом θ к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения. *Указание*: использовать преобразование Лоренца 4-волнового вектора.

7.* Эффект Саньяка. Найти разность фаз двух волн, обходящих вращающийся с угловой скоростью Ω кольцевой интерферометр радиуса R по и против направления вращения.

8. Порог реакции. В ускорителе на встречных пучках идет реакция

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- .$$

Зная энергию каждого из пучков e^+ и e^-, найти энергию и импульсы μ^+ и μ^-. Каков энергетический порог этой реакции? Сравнить с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

9. Комптон-эффект. Для получения γ-квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $E = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Какие малые безразмерные параметры присутствуют в задаче? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния. Обсудить предельные случаи «очень маленького» и «достаточно большого» угла рассеяния. Каков критерий малости угла?

10. Спектры при распаде пиона. Для нейтрино, образующихся при распаде π-мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π-мезона ≈ 140 МэВ, масса мюона ≈ 105 МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π-мезона распад $\pi \to \mu + \nu$ происходит изотропно.

11. Передача возбуждения ядром. Неподвижное ядро массы M с энергией возбуждения W испускает γ-квант.

1. Какую энергию может сообщить испущенный γ-квант ядру с такой же массой, находящемуся в основном состоянии?

2. С какой скоростью должно двигаться возбужденное ядро, чтобы испущенный γ-квант мог возбудить (передать энергию возбуждения W) такое же ядро, находящееся в основном состоянии?

12. Движение в скрещенных полях. Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Определить скорость дрейфа в нерелятивистском случае. *Указание*: записать уравнение движения в 4-мерной форме, решить через матричную экспоненту.

13. Классический эффект Зеемана. Найти частоты колебаний заряженного трехмерного осциллятора, помещенного в однородное магнитное поле. Обсудить форму траектории движения.

14. Адиабатический инвариант в слабопеременном магнитном поле. Релятивистская частица с массой m и зарядом e движется в магнитном поле. Определить изменение энергии частицы за один оборот в случае, когда магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим полем). Доказать, что величина $p_\perp^2/H$ остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2.

15. Слабонеоднородное магнитное поле. Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}, \nabla)\mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле. Найти в нерелятивистском случае уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы, если поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.

16. Радиационные пояса Земли. На больших расстояниях поле Земли представляет поле диполя с магнитным моментом $\mathfrak{m} = 8,1 \cdot 10^{25}$ гаусс·см^3. (а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. (б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол α, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли. (в) Используя результат задачи 13, найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

Задание 2

17. Потенциальная энергия двух диполей. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$.

18. Квадрупольный момент эллипсоида. Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях.

19. Разложение потенциала по мультипольным членам. Потенциал $\phi(r,\theta)$ аксиально-симметричной системы зарядов на оси z ($\theta = 0$) имеет вид

$$\phi(r,0) = \phi_0 \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 + a^2}}\right) , \quad r > a \, .$$

Найти два ведущих члена разложения $\phi(r,\theta)$ в области $r \gg a$. *Указание*: использовать мультипольное разложение.

20. Магнитная линза. Магнитное поле, направленное по оси z вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом $\partial H_z/\partial z = -h = \mathrm{const}$. Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси z? Найти радиальные компоненты поля вне оси z. Представить картину силовых линий.

21. Дипольное излучение в ближней и волновой зонах. Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях r, много бóльших размеров диполя a, но необязательно бóльших длины волны λ.

22.* Интерференция дипольного излучения и отражённого. Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте L над идеально проводящей металлической плоскостью. Для случаев $L \ll \lambda$ и $L \gg \lambda$ найти интенсивность излучения диполя в зависимости от угла наблюдения и угла между диполем и нормалью к плоскости.

23. Атом Резерфорда. Два разноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) обращаются один вокруг другого под действием кулоновского притяжения по круговой орбите радиуса R. Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени. Определить время, за которое один заряд упадет на другой.

24. Излучение при лобовом столкновении в кулоновском поле. Два одноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) испытывают лобовое столкновение. Определить полную излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть дипольный $(e_1/m_1 \neq e_2/m_2)$ и квадрупольный $(e_1/m_1 = e_2/m_2)$ случаи.

25. Излучение колеблющегося сфероида. Тело, ограниченное близкой к сфере поверхностью (сфероид) с уравнением

$$R(\theta) = R_0[1 + \beta \mathrm{P}_2(\cos\theta)] \, ,$$

где $\mathrm{P}_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2$, заряжено с постоянной плотностью. Полный заряд равен q. Малый параметр β ($\beta \ll 1$) гармонически меняется во времени с частотой ω. Удерживая низшие члены разложения по β, вычислить в длинноволновом приближении отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение и полную мощность излучения.

26. Синхротронное излучение. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найти полную мощность (в мегаваттах) синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.

27.* **Ондуляторное излучение.** Пучок релятивистских электронов пролетает через плоский конденсатор, к которому приложено переменное напряжение с частотой ω_0. Найти частоту излучения электронов в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения пучка.

28. Рассеяние электромагнитной волны. Найти дифференциальные и полные сечения рассеяния линейно поляризованного и «естественного» (неполяризованного) света осциллятором с затуханием.

1-я контрольная и сдача 1-го задания: 18.10 – 25.10.2021 г.
2-я контрольная и сдача 2-го задания: 06.12 – 13.12.2021 г.