Ошибки (Погрешности вычислен) [Глава I]

8.16 $z = f(x;y)$, $\Delta x = 10^{-3}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

а) $z = x + 10y$

$\Delta z = \Delta x + 10\Delta y$, т.к. $\Delta x = 10^{-3}$, то

$10\Delta y = 10^{-3}$

$\Delta y = 10^{-4}$

б) $z = xy + xy^2$

$\Delta z = (y + y^2)\Delta x + (x + 2xy)\Delta y = (1+y)y\Delta x +$

$+ (1+2y)x\Delta y$

Порядок $(1+2y)x\Delta y$ такой же как у

$(1+y)y\Delta x = 10^{-3}(1+y)y \Rightarrow$

$$\Delta y \sim \frac{10^{-3}(1+y)y}{(1+2y)x} \sim 10^{-3}\frac{y}{x}$$

в) $z = \frac{x}{y}$;

$$\Delta z = \frac{\Delta x}{y} - \frac{x\Delta y}{y^2} = \frac{1}{y}\left(\Delta x - \frac{x}{y}\Delta y\right) \Rightarrow$$

$$\Delta y \sim 10^{-3}\frac{y}{x}$$

№ 8.23

1) $ay^3+by^2+d=0$ $\qquad$ $y^3+2y^2-3=0$

$a=1$, $\Delta a=10^{-2}$ $\qquad$ $(y-1)(y^2+3y+3)=0$
$b=2$, $\Delta b=10^{-2}$
$d=-3$ $\Delta d=10^{-2}$

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y^2+3y+3=0 \end{array}\right.$$

2) $f(y)=ay^3+by^2+d$

$0=df=y^3da+3ay^2dy+y^2db+2bydy+dd.$

$$\Rightarrow dy=-\frac{y^3da+y^2db+dd}{3y^2a+2yb}=-\cancel{\frac{y^3\Delta a+}{}}$$

3) т.к рассматриваем вещ-ые корни

$$\Delta y\sim\frac{10^{-2}+10^{-2}+10^{-2}}{3+4}\sim\frac{3\cdot10^{-2}}{7}$$

№ 6.5 $\quad p$ бит.

1) $a=\operatorname{sign}a\cdot2^q\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_p}{2^p}+\ldots\right)$ – представление произвольного действительного числа. $\left(a_i=\begin{cases}0\\1\end{cases}\right.$

2) $\tilde{a}=\operatorname{sign}a\,2^q\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_p}{2^p}\right).$

3) $|a-\tilde{a}|=2^q\sum\limits_{i=p+1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}\le\frac{2^q}{2^p}=2^{q-p}=\Delta(\tilde{a})$

4) $\left|\frac{a-\tilde{a}}{\tilde{a}}\right|\le\frac{\Delta(\tilde{a})}{\tilde{a}}=\frac{1}{2^p}=2^{-p}$

№8.20 $\Delta x = 10^{-3}$, $y = f(x)$

$$y \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

а) 1) $f(x) = \sin x$, $0 < x < 1$ $\quad f^{(2n+1)}(x) = \pm\cos x$

$10 < x \leq 1$ $\quad f^{2n}(x) = \pm\sin x$

2) $$\Delta y = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \Delta x$$

3) на $x \in (0;1)$:

$|\sin x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\cos x| \leq 1$, $x^{n+1} \leq 1$, $f^{(n+1)}(x) \leq 1 \Rightarrow$

$$\Delta y \leq \left|\frac{1}{(n+1)!}\right| \leq \Delta x$$

4) на $x \in (10;11)$: $|\sin x| \leq 1$ $\quad f^{(n+1)}(x) \leq 1$

$|\cos x| \leq 1$ $\quad x^{n+1} \leq 11^{n+1}$

$$\left|\frac{11^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \Delta x$$

б) $$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k - \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x^*)^k\right| \leq \Delta x \qquad \left(\frac{x^*}{x} = 1 + \mathcal{E}\right)$$

$\mathcal{E}$ – отн. погрешн.

$$\frac{x^k}{k!}\left(1 - (1+\mathcal{E})^k\right) \leq \Delta x$$

$$(1+\mathcal{E})^k \geq 1 - \frac{\Delta x}{x^k}k!$$

на $x \in (0,1)$: $(1+\mathcal{E})^k \geq 1 - \Delta x \cdot k!$

на $x \in (10;11)$: $(1+\mathcal{E})^k \geq 11 - \frac{\Delta x}{11^k}k!$

в) $10 < x < 11$ $\quad x = 10.$

ряд Тейлора:

$$y = f(10) + \frac{f'(10)}{1!}(x-10) + \ldots + \frac{f^{(n)}(10)}{n!}(x-10)^n$$

$$\Delta y = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-10)^{n+1} \right| \leq \left| \frac{1}{(n+1)!} \right|$$

№ 8.15. $y = f(x)$

Δx , $\min \Delta y$ - ?

1) $|y^* - y| < \Delta y$; $\Delta y = f'(x^*)\Delta x$ для Δy.

2) $y^* = f(x^*)$

3) $y = f(x)$

а) ~~f(x) =~~ $f(x) = \sin x$

б) $f(x) = \ln x$

в) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

а) ~~f(x)~~ $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$|f'(x)| \leq 1 \Rightarrow \Delta y \leq \Delta x$ - при любом x

б) $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\Delta y \leq \frac{1}{x}\Delta x$, но при $x \to 0$

$\Delta y >> \Delta x$

$(\Delta y \to \infty)$.

в) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow \Delta y \leq \left(\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}\right)\Delta x$

но при $x \to 2$, $x \to 3$ $\hookrightarrow \Delta y >> \Delta x$.

№ 8.33. $f(x)$

$f(x + kh)$, $k = \overline{1,3}$

$f'(x)$ в x с max точностью

1) $f(x+kh) = f(x) + f'(x)\cdot kh + f''(x)\frac{(kh)^2}{2!} + \dots$

2) $f'(x) = \dfrac{\alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(x+2h) + \alpha_3 f(x+3h)}{h}$ $^{+kh}$

~~$f'(x) = \frac{1}{h}(f(x)$~~

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2$

$f(x+2h) = f(x) + f'(x)2h + f''(x)2h^2$

$f(x+3h) = f(x) + f'(x)3h + f''(x)\frac{9h^2}{2}$

3) $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \frac{1}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{9}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 1/2\,\alpha_1 - 3/2\,\alpha_3 = 1 \\ 1/2\,\alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{9}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 + 4\alpha_3 = -\alpha_2 \\ \alpha_1 = 2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_2 = -(2 + 4\alpha_3) \\ \alpha_1 = 2 + 3\alpha_3 \\ 2 + 3\alpha_3 - 8 - 16\alpha_3 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_2 = -2 + 4\frac{6}{4} \\ \alpha_1 = 2 + 3\left(-\frac{6}{4}\right) \\ -4\alpha_3 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1 = 6,5 - \frac{5}{2} \\ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_3 = -3/2 \end{cases}$ //

8.33 (продолжение)

4) $f'(x) = f'(x) + d_1 \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) + d_2 \frac{(2h)^3}{6} f'''(\xi_2) + d_3 \frac{27h^3}{6} f'''(\xi_3)$

$$\varepsilon_{мет} = \frac{1}{h}\left(\left|\frac{5}{12} h^3 f'''(\xi_1)\right| + \left|\frac{16}{3} h^3 f'''(\xi_2)\right| + \frac{27}{4}\left|h^3 f'''(\xi_3)\right|\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{5}{12} + \frac{16}{3} + \frac{27}{4}\right) h^2 = \frac{25}{2} h^2$$

5) $\varepsilon_{вх}$: $f(x^*) = f(x) + \delta_i$; $f'(x_0) = f'(x_0) + \frac{d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2}{h}$

$\varepsilon_{вх} = \frac{1}{h}\left(|d_0\delta_0| + |d_1\delta_1| + |d_2\delta_2|\right) = 8\frac{\varepsilon}{h}$, где ε - $\max \delta_i$

6) $\varepsilon = \varepsilon_{вх} + \varepsilon_{мет} = \frac{25}{2}h^2 + \frac{8\varepsilon}{h}$.

Глава №2. Элементы прикладной линейной алгебры

№7.4

а) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|$

$\|A\|_1 = \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\|Au\|_1}{\|u\|_1} = \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\|\sum_j A_{ij} u_j\|_1}{\|u\|_1} =$

$Au = V$, где $v_i = \sum\limits_j A_{ij} u_j$

$= \cancel{\sup\limits_{\|u\| \ne 0} \max\limits_i \sum\limits_j A_{ij}} \; \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} |\sum_j A_{ij} u_j|}{\max\limits_{1 \le i \le n} |u_i|} \le$

$\le \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \sum_j |A_{ij}||u_j|}{\max\limits_{1 \le i \le n} |u_i|} \le \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} (\sum_j |A_{ij}|) \max\limits_j |u_j|}{\max\limits_j |u_j|} \le$

$= \max\limits_{1 \le i \le n} |\sum A_{ij}| \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\max\limits_j |u_j|}{\max\limits_j |u_j|} = \max\limits_{1 \le i \le n} |\sum A_{ij}|$

б) $\|A\|_2 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

$\|A\|_2 = \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} = \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\sum_i |\sum_j^n A_{ij} u_j|}{\sum_j |u_j|} \le$

$\le \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\sum_i \sum_j |A_{ij}||u_j|}{\sum_j |u_j|} = \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\sum_j |u_j| \sum_i |A_{ij}|}{\sum_j |u_j|} \le$

$\le \max\limits_j \sum\limits_i |A_{ij}| \sup\limits_{\|u\| \ne 0} \frac{\sum_j |u_j|}{\sum_j |u_j|} = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|$

в) $\|A\|_3 = \sqrt{\max\limits_{1 \le i \le n} \lambda^i (A^* \cdot A)}$

$$\|A\|_3 = \sup_{\|u\| \ne 0} \frac{\|Au\|_3}{\|u\|_3} = \sup_{\|u\| \ne 0} \left(\frac{(Au, Au)}{(u, u)} \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{\|u\| \ne 0} \left(\frac{(A^*Au, u)}{(u, u)} \right)^{1/2} = \sqrt{\sup_{\|u\| \ne 0} \frac{A^*A\,(u, u)}{(u, u)}} =$$

$$= \left| u = \sum_i \xi_i w_i \right| = \sup_u \left(A^*A \left(\frac{\sum \xi_i w_i, \sum \xi_i w_i}{(\sum \xi w_i, \sum \xi_i w_i)} \right) \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_u \left(\frac{\sum \lambda_i \xi_i w_i, \sum \xi_i w_i}{\sum \xi_i w_i, \sum \xi_i w_i} \right) = \sup_u \sqrt{\frac{\sum \lambda_i \xi_i^2}{\sum \xi_i^2}} = \sup_u (\max_i (\lambda_i (A^*A)))^{1/2}$$

$$= \sqrt{\max_i (\lambda_i (A^*A))}$$

№7.5 1) Пусть λ – собственное число матрицы A, тогда

2) $Ax = \lambda x \Rightarrow$ $\|\lambda x\| = \|Ax\|$

$|\lambda| \|x\| = \|Ax\| \le \cancel{\|A\|} \|A\| \|x\| \Rightarrow$

3) $|\lambda| \le \|A\|$ чтд.

№7.25 $\mu(AB) \le \mu(A)\mu(B)$

1) $\mu(AB) = \|AB\| \|(AB)^{-1}\| = \|AB\| \|B^{-1}A^{-1}\| \le$

$\|A\| \|B\| \|B^{-1}\| \|A^{-1}\| = \mu(A)\mu(B)$ чтд.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

$\mu(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \cancel{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 1 = 3$

$\mu(B) = \|B\|_1 \|B^{-1}\| = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{24} & +\frac{7}{24} \\ +\frac{7}{24} & -\frac{5}{24} \end{pmatrix}$

$\mu(AB) = \|AB\|_1 \|(AB)^{-1}\|_1 = 12 \cdot 1/2 = 6$

$\cancel{\|AB\|_1 = 12 \frac{1}{2}} =$

3) $\mu(AB) = 6 = \mu(A)\mu(B) = 3 \cdot 2$ — неравенство $\mu(AB) \leq \mu(A)\mu(B)$ выполняется.

№ 7.30 $f = (f_1, f_2)$, $\min \nu(f)$: $\|\delta u\| \leq \nu(f)\|\delta f\|$

$\cancel{б)}$ $\begin{cases} u_1 + u_2 = f_1 \\ u_1 - u_2 = f_2 \end{cases}$

$(Au = f)$
$u = A^{-1}f$
$\delta u = A^{-1}\delta f$

1) $\|\delta u\| \leq \nu(f)\|\delta f\|$

$\nu(f) = \sup\limits_{\delta f} \frac{\|\delta u\|}{\|\delta f\|} = \sup\limits_{\delta f} \frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \frac{\|f\|}{\|\delta f\|} =$

$= \sup\limits_{\delta f} \frac{\|A^{-1}\delta f\|}{\|u\|} \frac{\|f\|}{\|\delta f\|} = \frac{\|f\|}{\|u\|} \sup\limits_{\delta f} \frac{\|A^{-1}\delta f\|}{\|\delta f\|} =$

$= \frac{\|f\|}{\|u\|} \cdot \frac{\|A^{-1}\| \cancel{\|\delta f\|}}{\cancel{\|\delta f\|}} = \frac{\|A^{-1}\|\|f\|}{\|u\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|f\|}{\|A^{-1}f\|}$

2) $\|A^{-1}f\| \nu(f) = \|A^{-1}\|\|f\|$

3) $\cancel{\|A^{-1}\|} \|A^{-1}f\| \nu(f) \leq \|A^{-1}\|\|f\| \nu(f)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nu(f) = 1$

б) 4) $f : \|\cdot\|_1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$\nu(f) = \frac{\|A^{-1}\|_1 \|f\|_1}{\|A^{-1} f\|_1} = \frac{1 \|f\|_1}{\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1+f_2 \\ f_1-f_2\end{pmatrix}\right\|_1} \ominus$$

При $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\ominus \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2} = 1_{//}$$

5) $\|\cdot\|_2$

$$\nu(f) = \frac{\overset{=1}{\|A^{-1}\|_2} \|f\|_2}{\|A^{-1} f\|_2} = \frac{\|f\|_2}{\|A^{-1} f\|_2} \ominus$$

$$\frac{1}{2} \max(|f_1+f_2|, |f_1-f_2|) = \max(|f_1|+|f_2|)$$

$$\frac{1}{2}(|f_1+f_2|+|f_1-f_2|) = |f_1|+|f_2|$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ominus$ 1

6) $\|\cdot\|_3$

$$B = \cancel{A^*} (A^{-1})^* A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda E| = 0$$

$$\cancel{(\tfrac{1}{2} - \lambda)(} - 1/2 -$$

$$\|A^{-1}\|_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix}\right| = (1/2 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$$

$$\nu(f) = \frac{\|f\|_3}{\sqrt{2}\, \|A^{-1} f\|_3}$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{(f_1+f_2)^2}{4}+\frac{(f_1-f_2)^2}{4}\right)^{1/2}=\left(f_1^2+f_2^2\right)^{1/2}$$

$$\Downarrow$$

$$f_1^2+f_2^2=f_1^2+f_2^2 \Rightarrow \text{верно } \forall f_1, f_2.$$

в) $\begin{cases} u_1+0{,}99u_2=f_1 \\ 0{,}99u_1+u_2=f_2. \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}99 \\ -0{,}99 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A=0{,}0199.$

1) $f: \|\cdot\|_1$

$\|A^{-1}f\|_1=\|f\|_1\|A^{-1}\|_1$

$$\nu(f)=\frac{\|A^{-1}\|_1\|f\|_1}{\|A^{-1}f\|_1}=\frac{\frac{1{,}99}{0{,}0199}\|f\|_1}{\left\|\frac{1}{0{,}0199}\begin{pmatrix} f_1-0{,}99f_2 \\ -0{,}99f_1+f_2 \end{pmatrix}\right\|} =$$

$$\Big/ \text{при } f=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\Big/ = \frac{100\cdot 1}{100}=1$$

2) $f: \|\cdot\|_2$

$(\ \lambda)=()$

$$\nu(f)=\frac{\|A^{-1}\|_2\|f\|_2}{\|A^{-1}f\|_2}=\frac{\frac{1{,}99}{0{,}0199}\|f\|_2}{\left\|\frac{1}{0{,}0199}\begin{pmatrix} f_1-0{,}99f_2 \\ -0{,}99f_1+f_2 \end{pmatrix}\right\|}=$$

$$=\Big/ \text{при } f=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{200}{200}=1$$

3) $f: \|\cdot\|_3$

$(1-\lambda)^2=0{,}99^2$

$\left[\ \lambda=1\pm 0{,}99.\right.$

$$\nu(f)=\frac{\|A^{-1}\|_3\|f\|_3}{\|A^{-1}f\|_3}=1$$

$$\|A^{-1}\|_3=\sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)}=\max|\lambda_i|(A)=\frac{1}{\min_i \lambda(A^{-1})}=\frac{1}{0{,}01}=100.$$

$$\frac{1}{0{,}0199}\left((f_1-0{,}99f_2)^2+(0{,}99f_1+f_2)^2\right)^{1/2}=(f_1^2+f_2^2)^{1/2} \Rightarrow f_1+f_2=0 \Rightarrow f=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

№9.1 г) $A = \begin{pmatrix} 101 & -90 \\ -90 & 82 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 112 \\ -98 \end{pmatrix}$

1) $\det(A - \lambda E) = (101-\lambda)(82-\lambda) - 90^2 = 0$

$$\lambda^2 - 183\lambda + 182 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 182. \end{array}\right.$$

2) $x^{k+1} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b.$

Критерий сходимости: $\max|\lambda_i(E - \tau A)| < 1 \iff$

$\max|1 - \tau \lambda_i(A)| < 1$

$$\begin{cases} |1 - \tau\lambda_{max}| < 1 \\ |1 - \tau\lambda_{min}| < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}} = \frac{1}{91}$$

$\tau_{onp} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \frac{2}{183}$; $q_{onp} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \frac{181}{183}$

3) $0 < \tau < \tau_{onp}.$

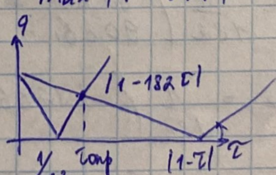
$x^{(i)} = x^0, \quad q = 0.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 101 & -90 & 112 \\ -90 & 82 & -98 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 11 & -8 & 14 \\ -90 & 82 & -98 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 11 & -8 & 14 \\ -2 & 18 & 14 \end{array}\right)$$

4) $\begin{cases} 11x_1 - 8x_2 = 14 \\ -2x_1 + 18x_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2 \quad (x_1 = 2, x_2 = 1)$

5) $q = \|B\|_2 = \|E - \tau A\|_2 = \max|1 - \tau\lambda_i|$

$$\begin{cases} |1 - \tau| < 1 \\ |1 - 182\tau| < 1 \end{cases}$$



$q = 1 - \tau, \quad \tau \in (0; \tau_{onp}).$

№9.2 в) $Ax = b$. $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ - ? Δb - ? min.

$A = \begin{pmatrix} 101 & -90 \\ -90 & 82 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \overset{112}{\cancel{192}} \\ -98 \end{pmatrix}$; $\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \le 0{,}01$; $\|x_2\| = \sum_i |$

1) $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \nu(b) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{\cancel{\|b\|}\,\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\cancel{b}b\|} \frac{\|\Delta b\|}{\cancel{\|b\|}}$

2) $A^{-1} = \frac{1}{182}\begin{pmatrix} 82 & 90 \\ 90 & 101 \end{pmatrix}$, $A^{-1}b = \frac{1}{182}\begin{pmatrix} 82 & 90 \\ 90 & 101 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 112 \\ -98 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{182}\begin{pmatrix} 82\cdot112 - 90\cdot98 \\ 90\cdot112 - 101\cdot98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|b\|_2 = 210$

3) $\|A^{-1}\|_2 = \frac{191}{182}$, $\|A^{-1}b\|_2 = 3$

$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{191}{182}\,\frac{\overset{0,1}{\cancel{0{,}01}}\cdot\overset{70}{\cancel{210}}}{\cancel{3}} = \frac{19{,}1}{26}$ //

4) $\|\Delta b\|_2 = \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}\,\frac{\|A^{-1}b\|_2}{\|A^{-1}\|} =$

$= \frac{19{,}1}{26}\,\frac{3}{\cancel{191}}\,\frac{182}{10} = 2{,}1$

5) $\|A^{-1}\Delta b\|_2 \le \|A^{-1}\|_2\|\Delta b\|_2 = \frac{191}{\underset{26}{\cancel{182}}}\,\overset{0,1}{\cancel{0{,}01}}\cdot 70\cdot 3 = \frac{57{,}3}{26}$

6) $A^{-1}\Delta b = \frac{1}{182}\begin{pmatrix} 82\Delta b_1 + 90\Delta b_2 \\ 90\Delta b_1 + 101\Delta b_2 \end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\Delta b\|_2 = \frac{1}{182}\left(|82\Delta b_1 + 90\Delta b_2| + |90\Delta b_1 + 101\Delta b_2|\right) =$

$= \frac{1}{182}(172\Delta b_1 + 191\Delta b_2) = \cancel{191}\ \frac{57{,}3}{26} \Rightarrow \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$ //

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} = \frac{2,1}{210} = 0,01$$

№9.5. $\begin{cases} 10x + y - z = 1 \\ x - 20y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 10z = -1 \end{cases}$ $A \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 1 & -20 & 3 \\ 2 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_L + \begin{pmatrix} 10 & & 0 \\ & -20 & \\ 0 & & -10 \end{pmatrix}_D + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ & 0 & 3 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_U$$

1) $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$ — условие Адамара

2) Метод Зейделя:

$$(L+D)x^{k+1} = -Ux^k + b \Rightarrow x^{k+1} = -(L+D)^{-1}Ux^k + (L+D)^{-1}b$$

3) $$x^{k+1} = -\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -20 & 0 \\ 2 & 3 & -10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^k + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -20 & 0 \\ 2 & 3 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) $$\|\delta x^k\| \le \|(L+D)^{-1}U\|^k \|\delta x^0\| \le \frac{\|\delta x^0\|}{1000} \Rightarrow$$

$$\cancel{k \ge \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln \|(L+D)^{-1}U\|} = \frac{-3\ln 10}{\ln \|(L+D)^{-1}\|_1 \ln \|U\|}}$$

$\cancel{\|L+D\|_1 = 21}$

$\cancel{\|U\| = 3}$

$\|U\|_1 = 3$

$$\|(L+D)^{-1}U\|^k \le \frac{1}{1000} \qquad \ln \|(L+D)^{-1}U\| \cdot k \le \ln \frac{1}{1000}$$

$$k \ge \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln \|(L+D)^{-1}U\|} \ge \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln \|(L+D)^{-1}\| \ln \|U\|} = \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln \frac{2}{10}} \approx 4,3$$

$$k \ge 4.$$

№ 9.16. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Big| b \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Для Якоби

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 4\lambda^3 - \lambda - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(4\lambda^2 - 3) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm \sqrt{3}/2 \end{array}\right.$$

$\forall i = \overline{1,3} : |\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ выполнено необходимое условие сходимости м. Якоби.

2) Зейдель:

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}\right| = 4\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(4\lambda - 3) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 3/4 \end{array}\right. \quad |\lambda| < 1$$

$\Rightarrow$ выполнена необ-ое условие сходимости м. Зейделя.

№ 9.28 $Ax = f$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) Метод Зейделя:

$$x^{k+1} = -(L+D)^{-1} U x^k + (L+D)^{-1} f$$

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^1 = (L+D)^{-1} f = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = (L+D)^{-1} U x^1 + (L+D)^{-1} f =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \; \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -3 & -5 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}05 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}15 & -0{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 0{,}45 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -0{,}81 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ -0{,}98 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$$

3) $\left| \begin{pmatrix} 5\lambda & -1 & 2 \\ \lambda & 4\lambda & -1 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$ $\quad 20\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 8\lambda^2 + 5\lambda^2 + \lambda^2 =$

$= 20\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow$

$\lambda(20\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda = 0$

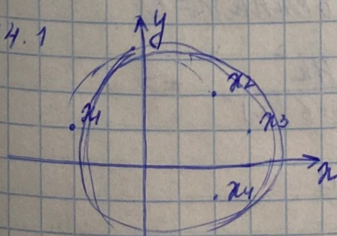
$\lambda = \pm i \frac{1}{\sqrt{20}}$

$|\lambda| < 1$

сход.

Глава III

№4.1



1) $(x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2$

$\Delta l = \sqrt{(x_k-m)^2 + (y_k-n)^2} - R$

$S = \sum_{k=1}^{4} \left(\sqrt{(x_k-m)^2 + (y_k-n)^2} - R \right)^2$

2) $S = \sum(y_i - \sum_k a_i f(x_i))^2$

$$S = \sum_{k=1}^{4}\left((x_k-m)^2 + (y_k-n)^2 - 2R\sqrt{(x_k-m)^2+(y_k-n)^2} + R^2\right)$$

3) $$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial m} = \sum\left(-2(x_k-m) + \frac{2R}{2}\frac{+2(x_k-m)}{\sqrt{(x_k-m)^2+(y_k-n)^2}}\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial n} = \sum\left(-2(y_k-n) + \frac{2R(y_k-n)}{\sqrt{(x_k-m)^2+(y_k-n)^2}}\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial R} = \sum\left(-2\sqrt{(x_k-m)^2+(y_k-m)^2} + 2R\right) \end{cases}$$

4) Решая систему ур-ий можем получить $(m;n)$ - координаты центра, R - радиус

№4.2. $B = H/(a+bH)$

H	8	10	15	20	30	40	60	80
B	13.0	14.0	15.4	16.3	17.2	17.8	18.5	18.8.

1) $$S(a;b) = \sum\left(\frac{H_k}{a+bH_k} - B_k\right)^2 = \sum\frac{(H_k-(a+bH_k)B_k)^2}{(a+bH_k)^2}$$

2) $$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum 2\left(\frac{H_k}{a+bH_k} - B_k\right)\frac{-H_k}{(a+bH_k)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum(H_k - B_k(a+bH_k))H_k = 0 \Rightarrow$$

$$\sum \cancel{B_k a}(H_k - aB_k - bB_kH_k)H_k = 0.$$

3) $$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum 2\left(\frac{H_k}{a+bH_k} - B_k\right)\frac{-H_k^2}{(a+bH_k)^2} \Rightarrow$$

$$\sum(H_k - B_k(a+bH_k))H_k^2 = 0.$$

4) $8(8 - a\cdot 13 - b\cdot 13\cdot 8) + 10(10 - 14\cdot a - b\cdot 14\cdot 10) +$

$+15(15 - 15{,}4a - 15{,}4\cdot \cancel{7{,}5}\,15b) + 20(20 - 16{,}3a - 16{,}3b\cdot 20) +$

$+30(\overset{30}{\cancel{17{,}2}} - 17{,}2a - 17{,}2\cdot 30b) + 40(40 - 17{,}8a - 17{,}8\cdot 40b) +$

$+60(60 - 18{,}5a - 18{,}5\cdot 60b) + 80(80 - 18{,}8a - 18{,}8\cdot 80b) = 0.$

$10789 - 4643a - 199737b = 0.$

5) $64(8 - 13a - 104b) + 100(10 - 14a - 140b) +$

$+225(15 - 15{,}4a - 231b) + 400(20 - 16{,}3a - 326b) +$

$+3600(60 - 18{,}5a - 1110b) + 6400(80 - 18{,}8a - 1504b) = 0$

$740887 - 196905a - 13824631b = 0.$

6) $$\begin{cases} 10789 - 4643a - 199737b = 0 \\ 740887 - 196905a - 13824631b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{— " —} \\ 7235 + 118819a - 242515b = 0 \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} a \approx 0{,}213 \\ b \approx 0{,}506. \end{cases}$$

№ 4.3 $A_1 = 54°5'$, $A_2 = 50°1'$, $A_3 = 76°6'$

$A_1 + A_2 + A_3 = 180°12'$

1) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 180° \\ (a_1 - A_1)^2 + (a_2 - A_2)^2 + (a_3 - A_3)^2 = M \end{cases}$ $(M = \min)$.

2) $S(a_1, a_2, a_3, \varphi) = (a_1 - A_1)^2 + (a_2 - A_2)^2 + (a_3 - A_3)^2 + \varphi(a_1 + a_2 + a_3 - 180)$

3) $\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2(a_1 - A_1) + \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2(a_2 - A_2) + \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_3} = 2(a_3 - A_3) + \varphi = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} a_1 - A_1 = a_2 - A_2 \\ a_1 - A_1 = a_3 - A_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_1 - A_1 + A_2 \\ a_3 = a_1 - A_1 + A_3 \end{cases}$

$3a_1 - 2A_1 + A_2 + A_3 = 180$

5) $\begin{cases} a_1 = (180 + 2A_1 - A_2 - A_3)/3 = 54°1' \\ a_2 = (180 - A_1 + 2A_2 - A_3)/3 = 49°57' \\ a_3 = (180 + 2A_3 - A_1 - A_2)/3 = 76°2' \end{cases}$

№ 4.6* $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi(1+2k)}{2(n+1)}\right)$, $k = 0, \dots, n$

1) $T_{n+1}(x_k) = 0$ - многочлен Чебышева

2) $P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i T_i(x)$

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$

$$\sum T_k(x) T_l(x) = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

3) $A = \begin{pmatrix} T_0(x_0) & \dots & T_n(x_0) \\ T_0(x_n) & \dots & T_k(x_n) \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$A^T A b = A^T y$, $A^T A = \begin{pmatrix} \frac{2(n+1)}{2} & & & \\ & \frac{n+1}{2} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}$

4) $n = 3$

$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 2 & & 0 \\ 0 & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_0 = \cos\frac{\pi}{8}$, $x_1 = \cos\frac{3\pi}{8}$, $x_2 = \cos\frac{5\pi}{8}$; $x_3 = \cos\frac{7\pi}{8}$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos\pi/8 & \cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{8} \\ 1 & \cos 7\pi/8 & \dots & \\ 1 & & & \\ 1 & & \dots & \end{pmatrix}$

$A^T y = \begin{pmatrix} 6 \\ 2\cos\pi/8 + \cos 3\pi/8 - 3\cos 3\pi/8 \\ 2\cos\pi/4 - \cos\pi/4 - 3\cos\pi/4 \\ 2\cos 3\pi/8 - \cos\pi/8 + 3\cos 7\pi/8 \end{pmatrix}$

6) $A^T A b = A^T y = \begin{pmatrix} 6 \\ -2\sqrt{2}\sin\pi/8 \\ -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}\cos\pi/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b_0 \\ 2b_1 \\ 2b_2 \\ 3b_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -\sqrt{2}\sin\pi/8 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}\cos\pi/8 \end{pmatrix}$ //

Глава IV. Численное решение нелинейных уравнений.

№9.6. Д-ть:

У $x + 0{,}5\sin x + a = 0$ – $\exists!$ корень $\forall a$.

Найти с $\varepsilon = 10^{-3}$ для $a = \pm 1, \pm 2, \pm 3$

1) $y = x + 0{,}5\sin x + a$

2) $y' = 1 + 0{,}5\cos x \geq 0{,}5 > 0 \Rightarrow$ y – возрастает $\Rightarrow$

график ф-ии y – пересекает ось x не более одного раза.

3) $y < 0$ при $x + 0{,}5\sin x + a < 0$

$x < -0{,}5\sin x + a$

$x < -0{,}5 + a$ – достигается отрицат.

$y > 0$ при $x > +0{,}5 + a$

4) $\varphi(x) = -0{,}5\sin x - a = x$.

$|\varphi'(x)| = |0{,}5\cos x| \leq 0{,}5 < 1 \Rightarrow$ сходится

5) $a_1 = 1$: $y(x) = x + 0{,}5\sin x + 1$

$y(x) < 0$ при $x \leq -1$
$y(x) > 0$ при $x \geq -0{,}5$ $\Rightarrow$ $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

$x_{n+1} = -0{,}5\sin x_n - 1$

$x_0 = -0{,}5$ $\quad x_1 = +0{,}5\sin 0{,}5 - 1 \approx -0{,}7603$.

$x_2 = +0{,}5\sin(0{,}7603) - 1 = -0{,}6554$

$x_3 = -0{,}6953$, $x_4 = -0{,}67969$ ...

$x = -0{,}684$

$x \in (0{,}5; 1)$

$x + 0{,}5\sin x + 1 = 0$

$a_2 = -1$ $\quad y(x) = -((-x) + 0{,}5\sin(-x) - a_2) \equiv -(g + 0{,}5\sin g + a_1$

$\Rightarrow g = -0{,}684 \Rightarrow x = 0{,}684$

6) $a = 2.$ $x + 0{,}5\sin x + 2 = 0$

$x \in (-2; -1{,}5)$

$x = -1{,}501$ $x_0 = -2.$

$a = -2$

$x = 1{,}501$ — аналогично предыдущему случаю.

7) $a = 3$ $x + 0{,}5\sin x + 3 = 0$

$x \in (-3; -2{,}5)$

$x = -2{,}863$ $x_0 = -3$

$a = -3$

$x = 2{,}863$

№11.4. $x = \ln(x+2)$.

I $f(x) = x - \ln(x+2)$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{|x+2|} > 0$, $x > -1$

$f(0) = -\ln 2 < 0 \Rightarrow$ при $x \geq 0$ $\exists!$ решение.

$\varphi(x) = \ln(x+2)$, $x \geq 0$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$ МПИ сходится

$x_{n+1} = \varphi(x_n) \Rightarrow x_0 = 0$, $x = 1{,}146$

II При $x \leq -1$, при $x \to -2$, $f(x) \to +\infty \Rightarrow$

$f(x) < 0$ при $x \leq -1 \Rightarrow$ на $(-2; -1)$ - убывает $\Rightarrow \exists!$ корень.

$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{|x+2|} > 1$ - расходится при $x \in (-2; -1)$

Используем метод Ньютона: $f(x) = x - \ln(x+2)$;

$f'(x) = 1 - \frac{1}{|x+2|} = 1 - \frac{1}{x+2} < 0$

$$f''(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0;$$

$?x \quad f(x)f''(x) > 0 \rightarrow f(x) > 0 \rightarrow x_0 = -1,9.$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

№11.13. а) $e^x > \frac{1}{x} \rightarrow f(x) = e^x - \frac{1}{x} = 0$

1) $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $f'(x) \neq 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$

$\forall x_0 > 0$ – подходит.

№11.17 $\ln(x+1) - 2x^2 + 1 = 0$, $x \approx 0,9$

1) $x_{n+1} = \sqrt{(\ln(x_n+1)+1)/2}$

$\left|\sqrt{(\ln(x_n+1)+1)/2}'\right| = \frac{1}{2\sqrt{(\ln(x_n+1)+1)/2}} \frac{1}{2(x+1)} < 1$ – сходится $\Rightarrow$

целесообразно

2) $x_{n+1} = \exp(2x_n^2 - 1) - 1$

$\left|(\exp(2x_n^2-1)-1)'\right| = 4x\exp(2x^2-1) > \frac{4x}{e} > 1$ –

нецелесообразно

3) $x_{n+1} = (\ln(x_n+1)+1)/(2x_n)$

$\left|((\ln(x+1)+1)/(2x))'\right| = \left|\frac{\frac{1}{x+1}2x - 2\ln(x+1)+1}{4x^2}\right| =$

$$\left|\frac{2}{4}\,\frac{x-(\ln(x+1)+1)(x+1)}{x^2(x+1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-1 \mp \ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}\right| =$$

$$= \frac{|1+\ln(x+1)(x+1)|}{2x^2(x+1)}$$ — при $x \to 0$ ~~$\varphi'(x) \to 1$~~ $\varphi'(x) > 1$ — нецелесообр.

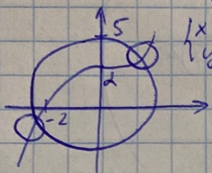
4) $x_{n+1} = x_n + \ln(x_n+1) - 2x_n^2 + 1$

~~φ~~ $|(x+\ln(x+1)-2x^2+1)'| = \left|1-4x+\frac{1}{x+1}\right| > 1$ —

нецелесообр.

№ 1123.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ (x+1)^3-y+1=0. \end{cases}$$

1) 

① $\begin{cases} x\approx 0{,}5 \\ y\approx 4{,}8 \end{cases}$

$\Rightarrow xy>0$

$\begin{cases} x\approx -2{,}9 \\ y\approx -4{,}1 \end{cases}$ ②

2) 1: $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-25} = \varphi_1(x) \\ x=\sqrt[3]{y-1}-1 = \varphi_0(y) \end{cases}$, $\bar{x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-25}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\frac{d\varphi}{d\bar{x}}\right\| = \max\left(\left|\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}\right|, \left|\frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\right|\right)$$

(для 2 области - то же самое)

3) $\left|\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}\right|<1$ при $\left[\begin{array}{l} y\approx 4{,}8 \\ y\approx -4{,}1 \end{array}\right.$

$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\right|<1$ при $x\approx -2{,}9$. $\Rightarrow$ сходятся

$\left|\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\right|<1$ при $x\approx 0{,}5$

4)

1: $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[3]{y_n - 1} - 1 \\ y_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 25} \end{cases}$ $\quad x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 4{,}8$

2: $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[3]{y_n - 1} - 1 \\ y_{n+1} = -\sqrt{25 - x_n^2} \end{cases}$ $\quad x_0 = -2{,}9$, $y_0 = -4{,}1$