

Саморепродукция

Батарин Егор

30 апреля 2021 г.

Аннотация

Цель работы: изучения явления саморепродукции и применение его к измерению параметров периодических структур.

1 Теория

При дифракции на предмете с периодической структурой наблюдается явление саморепродукции: на некотором расстоянии от предмета вдоль волны направления распространения волны появляется изображение, которое потом периодически повторяется. Покажем, почему такой эффект имеет место быть:

Выражение для плоской монохроматической волны имеет вид:

$$E(\vec{r}; t) = a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \psi_0)}$$

Здесь a_0 - действительное число, $\vec{k}\vec{r} = ux + vy + \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z$. Будем в дальнейшем опускать зависимость от времени $e^{-i\omega t}$. Тогда комплексная амплитуда запишется в виде:

$$f(x, y, z) = a_0 e^{i\psi_0} e^{i(ux + vy)} e^{i\sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z} = f(x, y, 0) e^{i\sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z}$$

Пусть плоская волна падает на транспарант, описываемый функцией $t(x, y)$ (рассмотрим, для простоты, одномерный случай $t(x, y) = t(x)$, положим $y = 0$). Если комплексная амплитуда на входе равна $a_0 e^{i\psi_0}$, то на выходе получится $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$.

Считая транспорант периодической структурой, применим теорему Фурье:

$$f(x, 0_+) = a_0 e^{i\psi_0} t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nu_n x) + b_n \sin(nu_n x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{d} n x}$$

Тогда решение уравнения Гельмгольца будет иметь вид:

$$f(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} e^{i\sqrt{k^2 - u_n^2} z}$$

Каждая плоская волна в данной сумме приобрела при распространении от транспоранта до плоскости $z = \text{const}$ набег фазы равный

$$\phi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z \approx kz - \frac{u_n^2}{2k} z$$

Положим $z = z_n = \frac{2d^2}{\lambda} \cdot N$, тогда $\frac{u_n^2}{2k} z = 2\pi \cdot p$, где p - целое число, поэтому получим:

$$f(x, z) = e^{ikz} \cdot f(x, 0_+)$$

Отсюда получаем, что поле волны в плоскости $z = \text{const}$ полностью повторяет структуру поля волны в плоскости $z = 0_+$, отличаясь лишь на фазовый множитель e^{ikz} .

2 Выполнение

2.1 Измерение периодов 5 различных решеток

В начале период d решеток определялся по пространственному спектру. Таблица результатов получилась следующая:

Определение периода решеток по их пространственному спектру						
Номер решетки					λ , м	L , м
1	2	3	4	5	5,32E-07	1,353
X , м					dX , м	dL , м
0,253	0,243	0,266	0,2	0,01	0,0005	0,0005
m						
7	10	22	33	2		
$x = \frac{X}{m}$, м						
0,036142857	0,0243	0,012091	0,006061	0,005		
dx , м						
7,14286E-05	0,00005	2,27E-05	1,52E-05	0,00025		
d , м						
1,99153E-05	2,96E-05	5,95E-05	0,000119	0,000143959		
dd , м						
4,6718E-08	7,19E-08	1,34E-07	3,41E-07	7,25116E-06		

Таблица для результатов периодов по изображению, полученного с помощью линзы:

Определение периода решеток по изображению и линзе						
Номер решетки					a , м	b , м
1	2	3	4	5	0,055	1,2
X , м					da , м	db , м
0,008	0,01	0,003	0,049	0,063	0,0005	0,0005
m						
20	15	2	17	16		
$D = \frac{X}{m}$, м						
0,0004	0,000667	0,0015	0,002882	0,0039375		
dD , м						
0,000025	3,33E-05	0,00025	2,94E-05	0,00003125		
d , м						
1,83333E-05	3,06E-05	0,00006875	0,000132	0,000180469		
dd , м						
1,32014E-06	1,82E-06	1,2112E-05	2,6E-06	3,14811E-06		

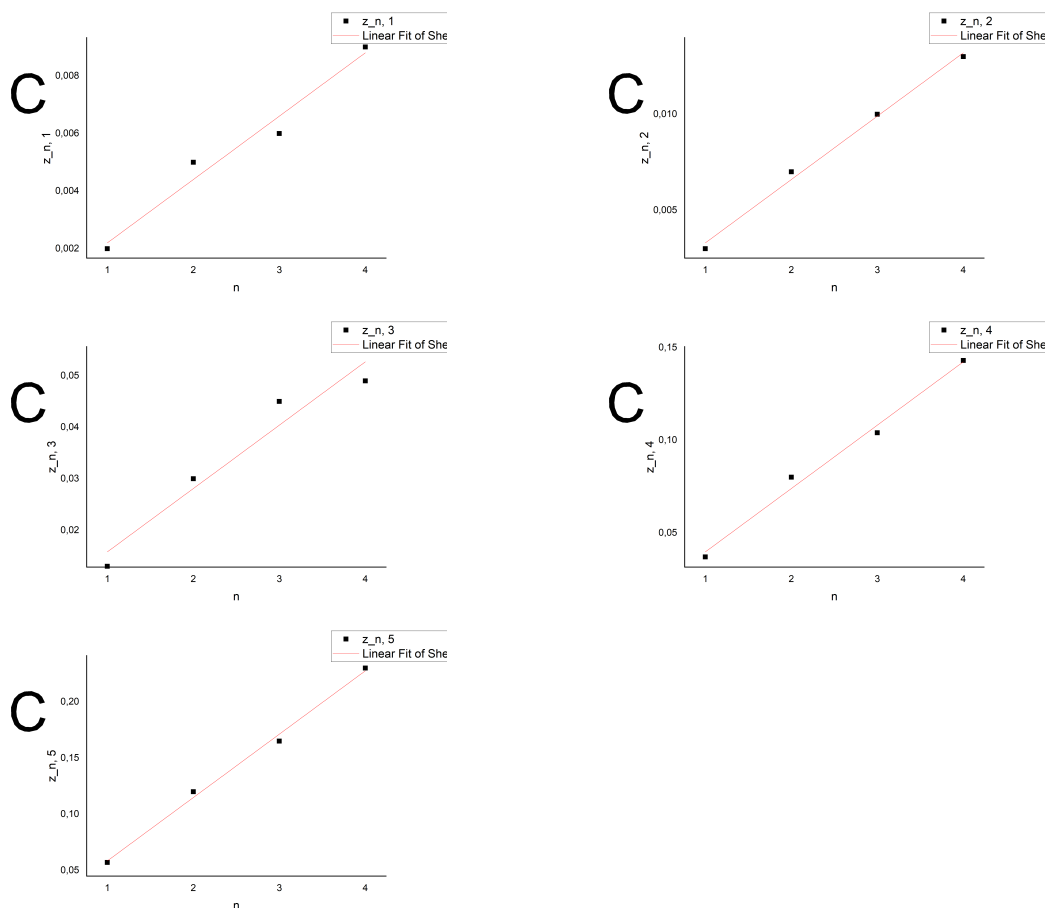
Окончательно, получаем периоды решеток через саморепродукцию:

Определение периода решеток по саморепродукции						
Номер решетки					$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$
1	2	3	4	5	0,055	1,2
$z_1, \text{ м}$						
0,002	0,003	0,013	0,037	0,057		
$z_2, \text{ м}$						
0,005	0,007	0,03	0,08	0,12		
$z_3, \text{ м}$						
0,006	0,01	0,045	0,104	0,165		
$z_4, \text{ м}$						
0,009	0,013	0,049	0,143	0,23		
$d, \text{ м}$						
2,31E-05	2,82E-05	5,88E-05	9,92E-05	0,000123		

Сопоставим результаты измерений:

	$d, \text{ микрон}$				
спектр	19,9153	29,62123	59,532	118,76634	143,9592
линза	18,33333	30,55556	68,75	132,10784	180,4688
саморепродукция	23,06513	28,24889	58,80476171	99,206855	123,1341

Графики саморепродукции имеют вид:



2.2 Мира

Укажем таблицу с результатами измерений периода мира 25 с помощью линзы и изображения на экране:

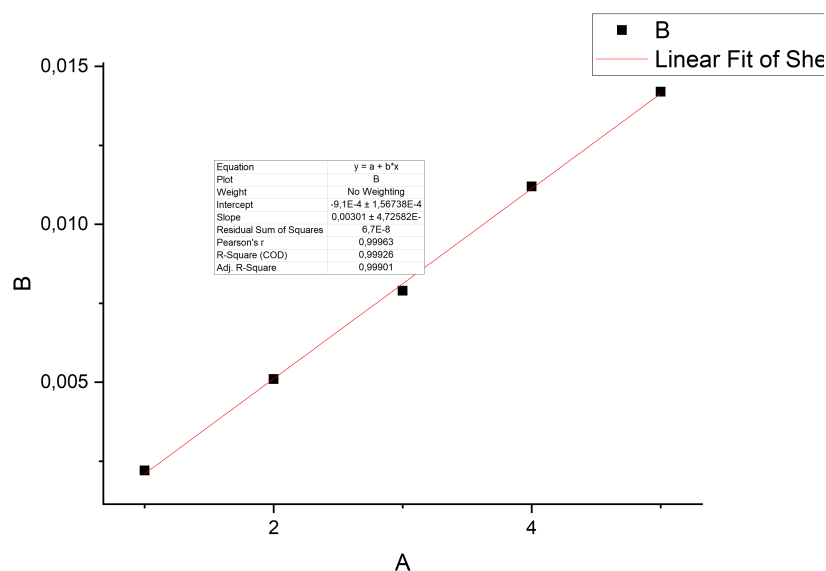
Измерение периода мира 25 с помощью линзы и законов геометрической оптики							
a , м	b , м	da , м	db , м	L , м	m	x , м	d , м
0,054	1,28	0,0005	0,0005	0,018	35	0,000514	2,16964E-05
				dL , м			
				0,0005			

В этом случае получился период $d \approx 22$ микрона.

Далее измеряем период с помощью саморепродукции. Получается таблица: В этом случае получился период $d \approx 22$ микрона. График саморепро-

Измерение периода миры 25 с помощью саморепродукции				
n				
1	2	3	4	5
z_n				
0,0022	0,0051	0,0079	0,0112	0,0142
наклон, м	d , м			
0,003	2,82489E-05			

дукции, из которого был определен период d по МНК:



3 Вывод

В работе были измерены периоды решеток и миры тремя различными способами - везде были получены результаты, близкие друг к другу, что говорит об успешности проделанного эксперимента.