Саморепродукция

Батарин Егор

28 апреля 2021 г.

Аннотация

Цель работы: изучения явления саморепродукции и применение его к измерению праметров периодических структур.

1 Теория

При дифрации на предмете с периодической структурой наблюдается явление саморепродукции: на некотором расстоянии от предмета вдоль волны направления распространения волны появляется изображение, которое потом периодически повторяется. Покажем, почему такой эффект имеет место быть:

Выражение для плоской монохроматической волны имеет вид:

$$E(\vec{r};t) = a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \psi_0)}$$

Здесь a_0 - действительное число, $\vec{k}\vec{r} = ux + vy + \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z$. Будем в дальнейшем опускать зависимость от времени $e^{-i\omega t}$. Тогда комлексная амплитуда запишется в виде:

$$f(x,y,z) = a_0 e^{i\psi_0} e^{i(ux+vy)} e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}\cdot z} = f(x,y,0) e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}\cdot z}$$

Пусть плоская волна падает на транспорант, описываемый функцией $t(x,y)$ (рассмотрим, для простоты, одномерный случай $t(x,y) = t(x)$, положим $y = 0$). Если комплексная амплитуда на входе равна $a_0 e^{i\psi_0}$, то на выходе получится $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$.

Считая транспорант периодической структурой, применим теорему Фурье:

$$f(x,0_+) = a_0 e^{i\psi_0} t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos{(n u_n x)} + b_n \sin{(n u_n x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i u_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{d} x}$$

Тогда решение уравнения Гельмгольца будет иметь вид:

$$f(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i u_n x} e^{i\sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z}$$

Каждая плоская волна в данной сумме приобрела при распространении от транспоранта до плоскости $z = \text{const}$ набег фазы равный

$$\phi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z \approx kz - \frac{u_n^2}{2k} z$$

Положим $z = z_n = \frac{2d^2}{\lambda} \cdot N$, тогда $\frac{u_n^2}{2k} z = 2\pi \cdot p$, где p - целое число, поэтому получим:

$$f(x,z) = e^{ikz} \cdot f(x,0_+)$$

Отсюда получаем, что поле волны в плоскости $z = \text{const}$ полностью повторяет структуру поля волны в плоскости $z = 0_+$, отличаясь лишь на фазовый множитель e^{ikz}.

2 Выполнение