



Московский физико-технический институт
(государственный университет)

САМОРЕПРОДУКЦИЯ

Лабораторная работа № 402

Цель работы: Изучение явления саморепродукции и применение его к измерению параметров периодических структур.

В работе используются: лазер, кассета с сетками, мира, короткофокусная линза с микрометрическим винтом, экран, линейка.

При дифракции на предмете с периодической структурой наблюдается интересное явление: на некотором расстоянии от предмета вдоль направления распространения волны появляется изображение, которое потом периодически повторяется — *репродуцируется*.

Этот эффект имеет простое физическое объяснение. Если на пути распространения плоской волны в плоскости $z = 0$ расположить транспарант (например, изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания, отличной от константы, то на выходе из него в плоскости $z = 0_+$ волна уже перестанет быть плоской. Если при этом функция пропускания транспаранта — периодическая функция координат, периодической функцией будет и комплексная амплитуда волны на выходе из транспаранта, т. е. в плоскости $z = 0_+$. Периодическому распределению комплексной амплитуды в плоскости $z = 0_+$ будет соответствовать дискретный набор плоских волн с кратными пространственными частотами. При этом оказывается, что существуют плоскости (при $z > 0$), где все плоские волны имеют те же самые фазовые соотношения, что и в плоскости $z = 0_+$. В результате интерференции этих волн получается изображение, тождественное исходному периодическому объекту.

Найдём выражение для расстояния между этими плоскостями. Напомним, что плоской монохроматической волной называется волна вида

$$E(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \psi_0)}, \quad (1)$$

где амплитуда a_0 — действительная постоянная, ω — круговая частота, \mathbf{k} — волновой вектор ($|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$), ψ_0 — начальная фаза. Колебания происходят синфазно во всех точках плоскости:

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = ux + vy + \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z = \text{const}. \quad (2)$$

Направление распространения плоской монохроматической волны характеризуется волновым вектором \mathbf{k} , а u и v есть проекции его на оси координат x и y соответственно. В дальнейшем мы будем опускать зависимость от времени $e^{-i\omega t}$ и использовать для описания монохроматической волны комплексную амплитуду. Для плоской волны (1) комплексную амплитуду можно представить в виде

$$f(x, y, z) = a_0 e^{i\psi_0} e^{i(u x + v y)} e^{i\sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z} = f(x, y, 0) \cdot e^{i\sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z}. \quad (3)$$

Таким образом, для того чтобы получить комплексную амплитуду плоской волны в произвольной плоскости $z = \text{const}$, надо ее значение в плоскости $z = 0$ домножить на фазовый множитель $e^{i\sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z}$.

Пусть плоская волна падает перпендикулярно на транспарант, расположенный в плоскости $z = 0$, тогда для падающей волны $u = v = 0$, и комплексная амплитуда волны на входе в транспарант является константой $a_0 e^{i\psi_0}$. Комплексную амплитуду волны в плоскости $z = 0_+$ на выходе из транспаранта получаем, умножив комплексную амплитуду на входе в транспарант на функцию пропускания транспаранта $t(x, y)$. Это правило является определением понятия *функции пропускания транспаранта*. Если функция пропускания периодическая с периодом d (для простоты рассмотрим одномерный случай $t(x, y) = t(x)$), то комплексная амплитуда на выходе из транспаранта $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$ также периодическая функция с тем же периодом d . Согласно теореме Фурье (доказываемой в курсе математического анализа) периодическая функция $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье — суммы гармонических составляющих с кратными пространственными частотами $u_n = 2\pi n/d$:

$$f(x, 0_+) = a_0 e^{i\psi_0} t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nu_n x) + b_n \sin(nu_n x)]$$

или в комплексной форме —

$$f(x, 0_+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{d} n x}. \quad (4)$$

Опираясь на теорему единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях, мы можем утверждать, что периодическому распределению комплексной амплитуды в плоскости $z = 0_+$ будет соответствовать при $z > 0$ дискретный набор плоских волн с кратными пространственными частотами u_n . Как видно из (3), для плоской волны с пространственной частотой u_n волновой вектор \mathbf{k} имеет проекции $u_n, 0, \sqrt{k^2 - u_n^2}$. Разложение волны, продифрагировавшей на транспаранте, в ряд по плоским волнам позволяет легко найти комплексную амплитуду волны в произвольной плоскости $z = \text{const}$. Для этого достаточно домножить комплексные амплитуды плоских волн в суперпозиции (4) на соответствующий фазовый множитель $\exp(i\sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z)$:

$$f(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} e^{i\sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z}. \quad (5)$$

Каждая плоская волна в суперпозиции (4) приобрела при распространении от транспаранта до плоскости наблюдения $z = \text{const}$ набег фазы:

$$\varphi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z.$$

Для параксиальных волн ($u_n \ll 1$)

$$\varphi_n \approx kz - \frac{u_n^2}{2k} z, \quad (6)$$

и, таким образом, разность набегов фазы для любых двух плоских волн (с индексом n и m) равна

$$\Delta\varphi_{n,m} = (u_m^2 - u_n^2) \frac{z}{2k} = (m^2 - n^2) \frac{\pi\lambda}{d^2} z. \quad (7)$$

Легко видеть, что в плоскости наблюдения $z_0 = 2d^2/\lambda$ разность фазовых набегов оказывается кратной 2π для любых гармоник,

входящих в состав суперпозиции (4), т. е. совпадают фазовые соотношения между колебаниями, которые создаются всеми плоскими волнами, входящими в состав суперпозиции (4) в предметной плоскости $z = 0_+$ и в плоскости изображения $z_1 = 2d^2/\lambda$. Поэтому в результате интерференции этих волн мы получаем изображение, тождественное исходному периодическому объекту. Описанное явление называется *эффектом саморепродукции*. Световая волна сама (без каких-либо линз или зеркал) создает изображение исходного объекта. Ясно, что все сказанное справедливо и для любого расстояния z_N , кратного z_1 :

$$z_N = \frac{2d^2}{\lambda} N. \quad (8)$$

На опыте, вследствие ограниченности поперечного сечения светового пучка лазера, наблюдаются только несколько репродуцированных изображений решетки. Поясним этот эффект с помощью рис. 1.

На нем изображены только три продифрагировавших луча соответственно нулевого ($n = 0$) и \pm первого порядка ($n = \pm 1$). Там, где эти лучи перекрываются, образуется интерференционная картина с периодом, как раз равным периоду решетки d . Спроектировав картину с помощью линзы на экран, мы увидим изображения синусоидальной решетки с плавным переходом от максимумов к минимумам. Для того чтобы наблюдать более тонкие детали, необходимо, чтобы в плоскости наблюдения перекрывались лучи более высоких дифракционных порядков. На краях, где перекрываются только два луча ($n = 0$ и $n = +1$ или $n = 0$ и $n = -1$), также образуется интерференционная картина с периодом d , но менее контрастная.

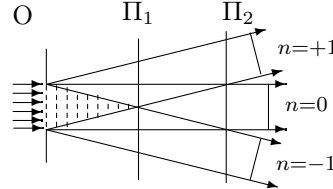


Рис. 1. Принципиальная схема дифракции на сетке. Между сеткой 0 и плоскостью Π_1 наблюдаются репродуцированные изображения сетки

Таким образом, левее плоскости Π_1 мы будем наблюдать, хотя и слегка размытые, репродуцированные изображения решетки. Правее плоскости Π_2 репродуцированных изображений не будет.

Экспериментальная установка. Хорошим приближением к плоской волне в нашем эксперименте является излучение лазера. Луч лазера падает перпендикулярно на периодический объект О, установленный в плоскости P_0 (рис. 2).

За плоскостью P_0 (в плоскостях P_1-P_N) периодически по z возникают изображения объекта, которые с помощью линзы Л можно поочередно проецировать на экран, установленный в плоскости Э. Если убрать линзу, то на экране наблюдается картина дифракции луча лазера на периодическом объекте.

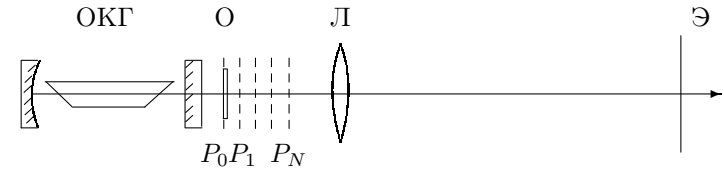


Рис. 2. Схема установки: ОКГ — гелий-неоновый лазер, 0 — двумерная решетка, P_N — плоскости, где наблюдаются репродуцированные изображения, Л — короткофокусная линза, Э — экран для наблюдения изображения объекта

Экран устанавливается достаточно далеко от объекта, так что продифрагировавшие лучи, соответствующие различным порядкам дифракции ($\sin \varphi_n = n\lambda/d$), разделяются.

Измерив расстояние между дифракционными максимумами и расстояние от объекта до экрана, мы определим $\sin \varphi_n$ и d .

В нашей работе в качестве периодических объектов применяется мира — набор различным образом ориентированных одномерных решеток разного периода (рис. 4), а также двумерная решетка-сетка. Сетку можно рассматривать как две взаимно перпендикулярные решетки. Узкий пучок монохроматического света, пройдя через первую решетку с вертикальными штрихами, должен дать совокупность максимумов, расположенных вдоль горизонтальной линии.

Световой пучок, соответствующий каждому максимуму, проходя через вторую решетку, распадается на новую совокупность пучков, дающих максимумы вдоль вертикальной линии. В результате главные максимумы возникают тогда, когда одновременно выполняются условия

$$d \sin \varphi_x = n_x \lambda, \quad d \sin \varphi_y = n_y \lambda, \quad (9)$$

где n_x и n_y — два целых числа, характеризующих порядки дифракционных максимумов, φ_x и φ_y — направления на главные дифракционные максимумы в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно (рис. 3). Максимумы показаны кружками, размеры которых характеризуют интенсивность.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается:

А) определить периоды сеток сначала по их спектру на удалённом экране; затем по увеличенному с помощью линзы изображению сеток и, наконец, по результатам измерения расстояний между репродуцированными изображениями сеток;

Б) повторить измерения для нескольких элементов мира (рис. ??).

А. Исследование двумерных решёток

1. Определение периода решёток по их пространственному спектру

1. Включите в сеть блок питания лазера. Пронаблюдайте на экране распределение интенсивности в излучении лазера. Из-за переотражения в выходных стёклах лазера на его выходе может быть несколько лучей. Следите за лучом с максимальной яркостью.

Настройку системы следует вести, наблюдая за пятном света на листе бумаги. Яркость излучения зелёного лазера можно ослабить с помощью светофильтра.

Попадание прямого луча на сетчатку глаза опасно!

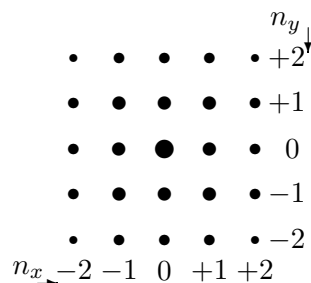


Рис. 3. Спектр решётки-сетки

2. Закрепите кассету с двумерными решётками (сетками) вблизи выходного окна лазера так, чтобы в окошке под отверстием с сеткой был виден её номер (в каждой кассете 6 разных решёток). Вращением барабана (наружного кольца кассеты) решётки можно менять.
3. Для каждой сетки определите расстояние x между соседними дифракционными максимумами на экране: измерьте расстояние X между двумя достаточно удалёнными друг от друга максимумами и поделите на число промежутков m между ними ($x = X/m = f(N^\circ)$).
4. Измерьте расстояние L от кассеты до экрана. Длина волны лазера указана на установке.

II. Определение периода решёток по изображению, увеличенному с помощью линзы

5. Закрепите короткофокусную линзу на небольшом расстоянии от лазера. Временно удалите кассету с сетками из луча и центрировкой линзы совместите световое пятно, сформированное линзой, с положением луча на экране в отсутствие линзы. Передвигая линзу с помощью микрометрического винта, сначала убедитесь, что световое пятно на экране неподвижно, затем переместите линзу как можно ближе к кассете.
6. Установите кассету с сетками между лазером и линзой и, перемещая её вдоль оси системы, получите на экране увеличенное изображение одной из сеток.

Изображение сетки периодически повторяется в пространстве, поэтому для того, чтобы среди множества репродуцированных изображений сетки можно было выделить её геометрическое изображение, на одну из сеток наложена тонкая проволочка, т. е. непериодический объект, изображение которого не репродуцируется. Найдите резкое изображение проволочки; убедитесь, что при смене сеток резкость изображений не нарушается.

7. Определите размеры D клеток на экране. Для мелких сеток удобно прижать к экрану дополнительный листок бумаги и отметить на нём необходимые расстояния. Проведите измерения для всех сеток, для которых это возможно.

Обратите внимание, что по спектру можно определять размер мелкой сетки, который не может быть достаточно точно определён с помощью линзы, т. к. размер изображения на экране слишком мал.

- Измерьте расстояния от линзы до сетки (a) и до экрана (b).

III. Исследование эффекта саморепродукции с помощью сеток

- Получите на экране геометрическое изображение сетки. Перемещая линзу с помощью микровинта, определите по нониусной шкале координаты z_N плоскостей саморепродукции, соответствующих чёткому изображению сетки на экране.

Повторите измерения для других сеток.

Для крупных сеток полезно при измерениях строить графики $z_N = f(N)$, чтобы по формуле (8) рассчитать периоды сеток $d_{\text{реп}} = f(N^0)$.

Б. Исследование решёток миры

Ввиду сложности настройки на определённый элемент миры предлагается следующий порядок измерения периодов: для одного элемента сначала по саморепродукции, затем по увеличенному изображению и, наконец, по спектру.

- Рассмотрите миру в отраженном свете. Убедитесь, что самые мелкие решетки расположены внизу. Найдите элемент миры с номером 25 (рис. ??).
- Установите миру на место кассеты (стекло миры обращено к линзе) таким образом, чтобы на экране было видно резкое увеличенное изображение цифры 25. Перемещая рейтер с мирой перпендикулярно лучу, осветите одну из ближайших сеток (горизонтальную или вертикальную). Перемещением миры подведите пятно лазера к центру выбранной решётки и уточните настройку на геометрическое изображение с помощью микровинта.
- Перемещая линзу с помощью микрометрического винта, определите по нониусной шкале координату плоскости, соответствующей изображению миры на экране по законам геометрической оптики, и координаты плоскостей саморепродукции.

- Верните линзу в положение, соответствующее изображению по законам геометрической оптики. Определите параметры изображения миры на экране; измерьте расстояния от линзы до экрана и до миры.
- Поворотом линзы на рейтере вокруг вертикальной оси выведите линзу из луча и проведите измерения спектра миры.
- Повторите всю серию измерений для миры с номером 20.

В. Обработка результатов

- По результатам измерений спектра рассчитайте период каждой решётки $d_{\text{сп}} = f(N^0)$ по формуле (9), полагая $\sin \varphi \approx \varphi \approx x/L$.
- По измерениям с линзой рассчитайте периоды всех сеток $d_{\text{л}} = Da/b = f(N^0)$.
- Постройте графики $z_N = f(N)$; по наклону прямых с помощью (8) рассчитайте периоды сеток $d_{\text{реп}} = f(N^0)$.
- Сведите результаты измерений d разными методами в единую таблицу и оцените, какой из методов точнее.
- Определите периоды решеток миры тремя способами и рассчитайте число штрихов на мм в выбранных элементах.

Контрольные вопросы

- Оцените, на каком расстоянии от экрана до решетки выполняется условие дифракции Фраунгофера.
- Почему в эксперименте получается лишь несколько четких репродуцированных изображений решеток?
- Объясните, как получается выражение для направления на дифракционные максимумы.
- Объясните, почему изображение проволоочной сетки репродуцируется, а изображение одиночной проволоочки не репродуцируется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А. Основы Физики. — Т. I. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III, гл. 8, §§ 8.1, 8.2, 8.7.
- Козел С.М., Листвин В.Н., Локишин Г.Р. Введение в когерентную оптику и голографию: Учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 2001.
- Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. IV. Оптика. — М.: Наука, 1980. Гл. IV, § 52.