Физический смысл производной $\rho=\frac{\Delta m}{\Delta V}$ и её связь с относительной среднеквадратической флуктуацией $\frac{\sqrt{\overline{\left(\Delta\rho\right)^2}}}{\overline{\rho}}$

Смысл производной в математике

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Объем ΔV как приращение независимого аргумента может быть любым сколь угодно малым положительным числом, функция $m = m(V)$ определена в любой сколь угодно малой окрестности точки $V = 0$

Смысл производной в физике

$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$, где ΔV такая величина, что:

1) Она достаточно мала, чтобы вещество в выделенном объеме было однородно и $\rho_{\text{истинное}} \approx \rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$
2) Очевидно, ΔV достаточно велико, чтобы ее порядок не был порядка объема атома (рассматривается классическая неквантовая модель)
3) ΔV достаточно велико, чтобы можно было пренебречь флуктуациями

Как найти золотую середину?

Решение: рассмотрим модель с $V = 1\ \text{литр} = 1\ \text{дм}^3$ бутылкой, наполненной воздухом при нормальных условиях $P = 10^5\ \text{Па},\ T = 300\ \text{К}$, оценим объемчик v воздуха внутри бутылки такой, чтобы для относительной среднеквадратической флуктуации было выполнено

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta\rho)^2}}}{\overline{\rho}} = 10^{-5}$$

Воспользуемся формулой для флуктуации квадрата объема при $T = \text{const}$

$$\overline{\left(\Delta V\right)^2_T} = -kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

Для идеального газа $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{RT}{P^2} = -\frac{V}{P}$. Поскольку $PV = \overline{n}kT$, где $\overline{n}$ – среднее число частиц в объеме V, то $\overline{\left(\Delta V\right)^2_T} = -kT\cdot\left(-\frac{V}{\overline{n}kT/V}\right) = \frac{V^2}{\overline{n}}$. Считая, что концентрация в бутылке постоянна, можно считать, что если фиксированный $V = \text{const}$ сфлуктурирует на ΔV, то мгновенное число частиц n изменится на $\Delta n = \overline{n}\,\Delta V/V$, причем $\left(\Delta n\right)^2 = \left(\overline{n}/V\right)^2\overline{\left(\Delta V\right)^2_T} = \overline{n}$. Отсюда $\frac{\sqrt{\overline{\left(\Delta n\right)^2}}}{\overline{n}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{n}}}$.

Заметим, что $\rho \sim \overline{n}$, потому $\dfrac{\sqrt{\overline{\left(\Delta\rho\right)^2}}}{\overline{\rho}} = \dfrac{\sqrt{\overline{\left(\Delta n\right)^2}}}{\overline{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\overline{n}}}$. Значит для относительной погрешности 10^{-5} надо брать объемчик v внутри бутылки со средним числом частиц $\overline{n} = 10^{10}$. Оценим его объем с помощью уравнения Менделеева-Клайперона

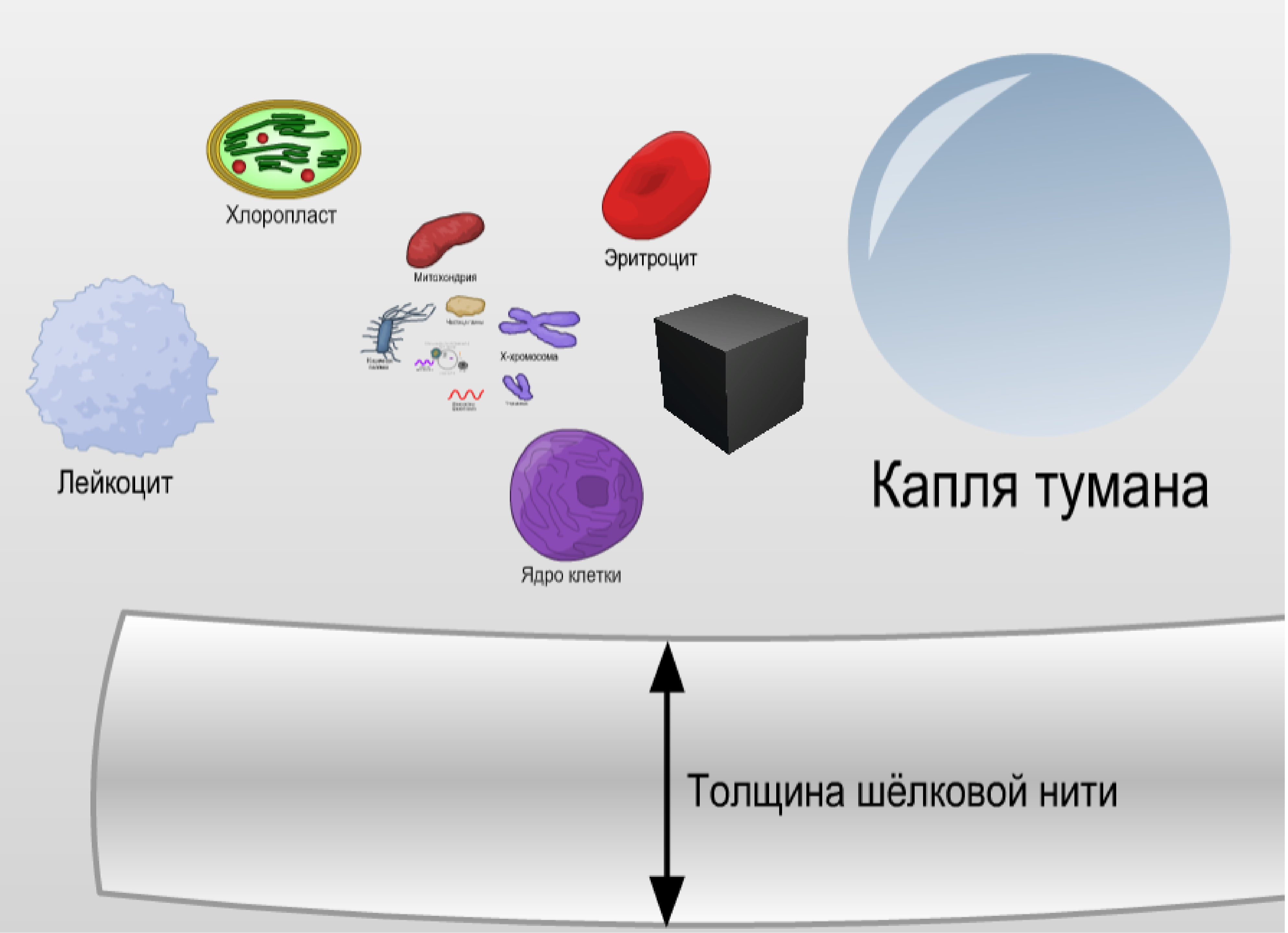
$$v = \frac{\overline{n}RT}{PN_A} = \frac{10^{10} \cdot 8,31 \cdot 300}{10^5 \cdot 6 \cdot 10^{23}} \approx \left(7,5 \cdot 10^{-6}\text{м}\right)^3, \overline{\rho} = \frac{\mu P}{RT} \approx 1163,26\,\frac{\text{гр}}{\text{м}^3}$$

Значит для куба с ребром $7,5 \cdot 10^{-6}$м получим оценку плотности воздуха

$$\overline{\rho} = (1163,26 \pm 0,01)\frac{\text{гр}}{\text{м}^3}$$

Как видим, даже в таком малом объеме теоретический доверительный интервал мал, что выражает малость флуктуаций в

таком объеме. В то же время, величина v достаточно мала для того, чтобы можно было считать однородным газ в таком объеме.



Хлоропласт
Митохондрия
Эритроцит
Х-хромосома
Лейкоцит
Ядро клетки
Капля тумана
Толщина шёлковой нити


Толщина
человеческого волоса
Частица ила
Длина волны
инфракрасного
излучения
Клетка кожи
Мил
Капля тумана
Тип
Яйцеклетка
человека
Наименьшие объекты,
видимые невооружён-
ным глазом

Где могут быть использованы подобные оценки?