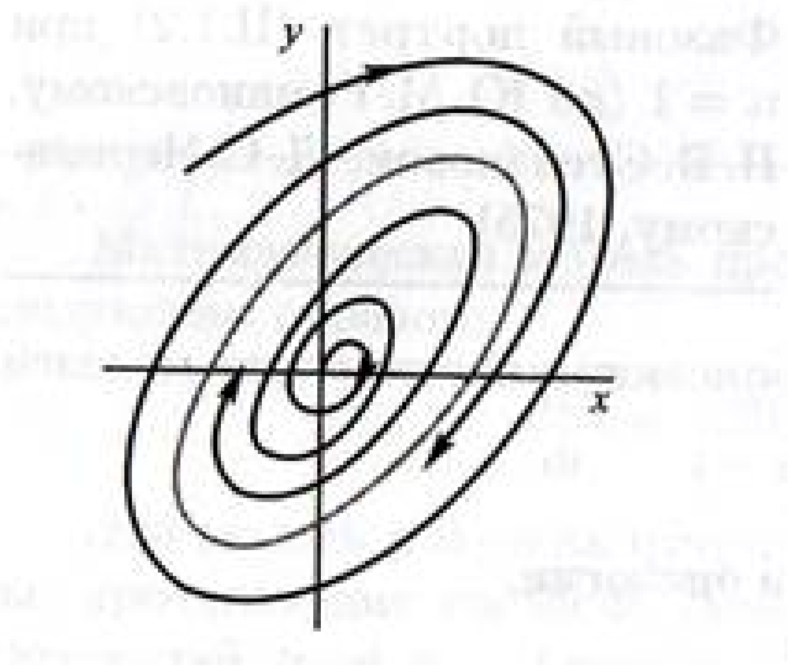
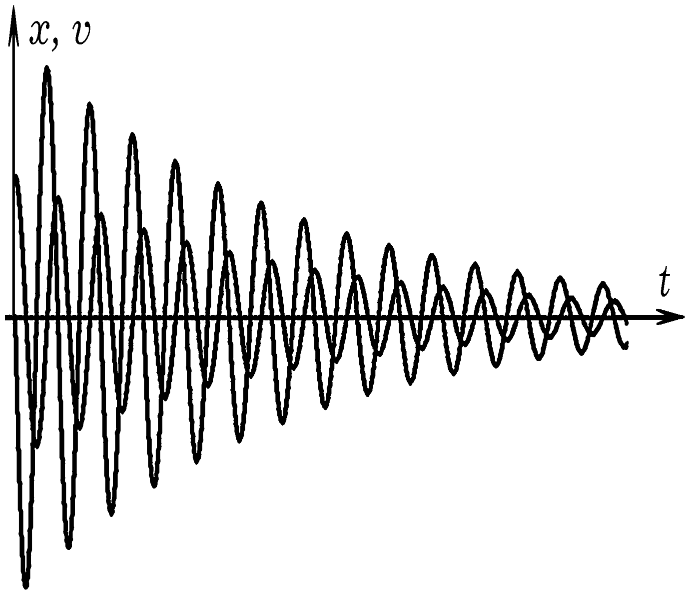
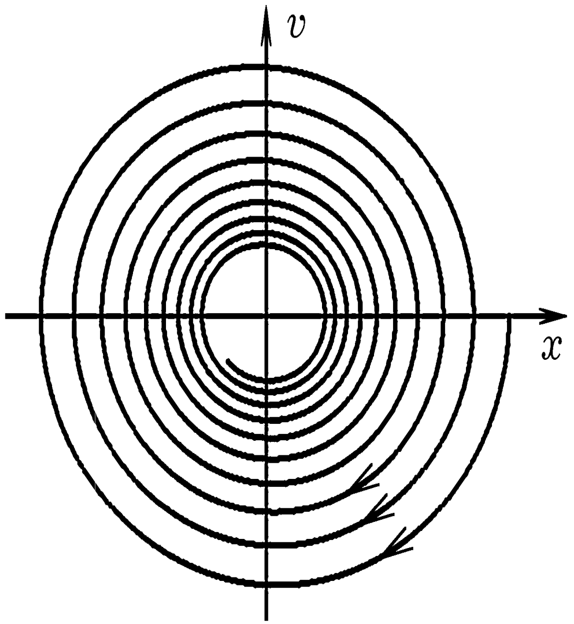
Фазовые портреты электрических колебаний







Батарин Егор, Б01-903

Содержание

1) Фазовое пространство
2) Фазовый портрет свободных колебаний
3) Фазовый портрет затухающих колебаний
4) Автоколебания Ван-дер-Поля, их связь с предельными циклами

Фазовое пространство

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, \ldots, y_n, t) \qquad i = 1 \ldots n$$

Построим n – мерное фазовое пространство, по осям координат которого отложены y_i

Динамическая система – система, эволюция которой определяется детерминированной функцией.

$\Rightarrow$ можно строить кривые $L = \left\{ \left(y_1(t), \ldots, y_n(t) \right) \middle| \, t \in T \right\}$ - фазовые траектории

Совокупность всех (непересекающихся) фазовых траекторий, отвечающих различным начальным значениям образуют фазовый портрет системы.

Фазовая плоскость – двумерное фазовое пространство.

Свободные колебания, уравнения фазовых траекторий

$$\ddot{y} + \omega_0 y = 0,\ y_1 = y,\ y_2 = \dot{y}$$

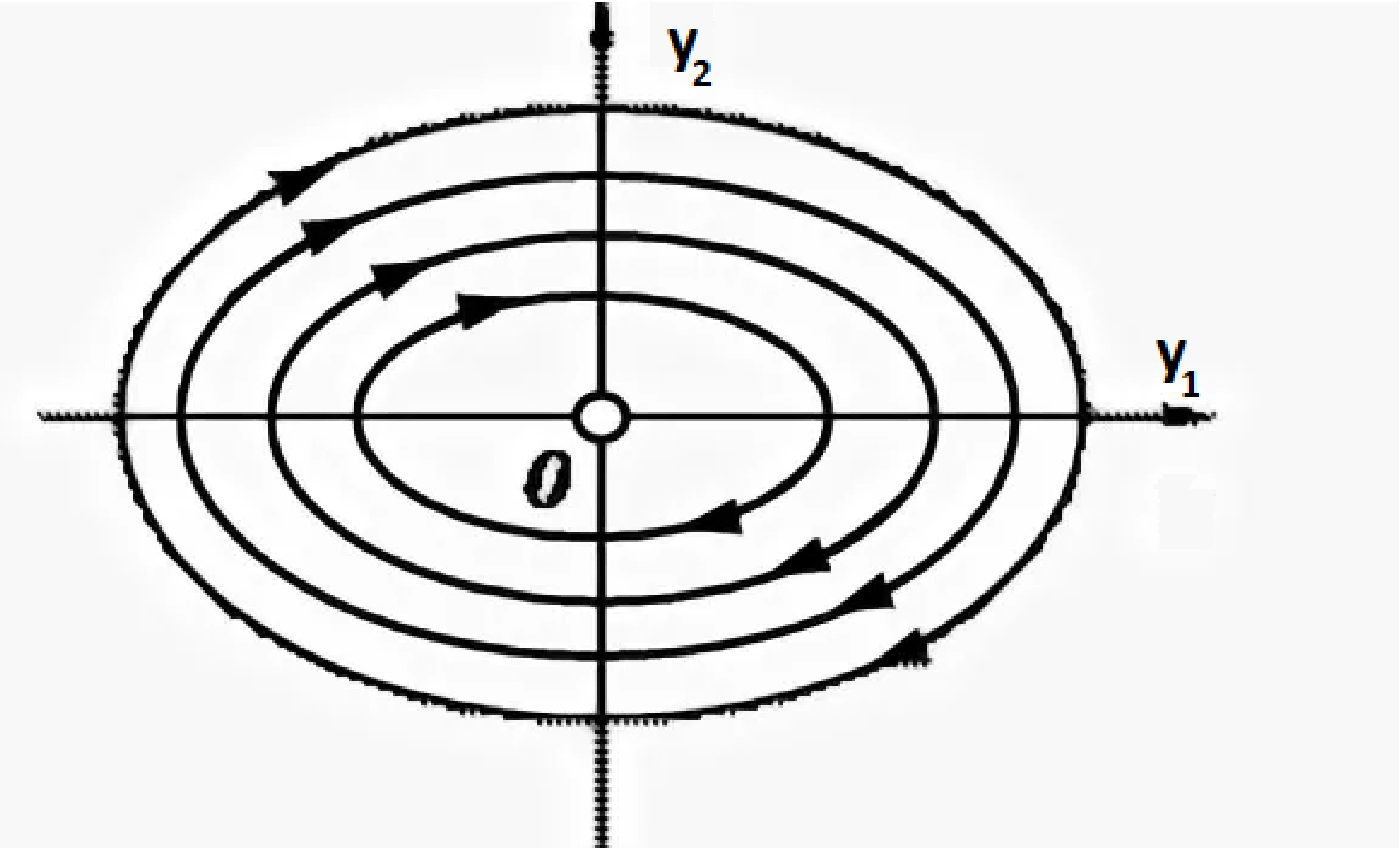
Способ 1

$$y_1 = y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow y_2 = \dot{y}(t) = -\omega_0 y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\omega_0 y_0}\right)^2 = 1$$

Способ 2

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = E = \mathrm{const} \Leftrightarrow \frac{y_2^2}{2} + \frac{y_1^2 \omega_0^2}{2} = \mathrm{const}$$

Фазовый портрет свободных колебаний



Затухающие колебания, уравнения фазовых траекторий

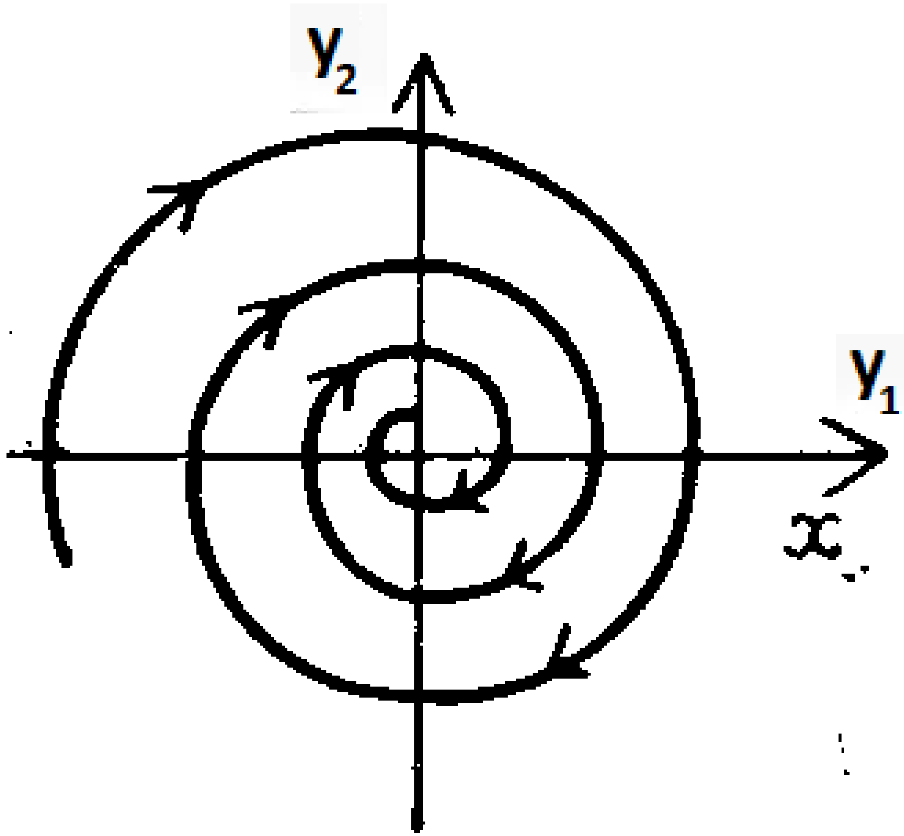
$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0,\ y_1 = y,\ y_2 = \dot{y}$$

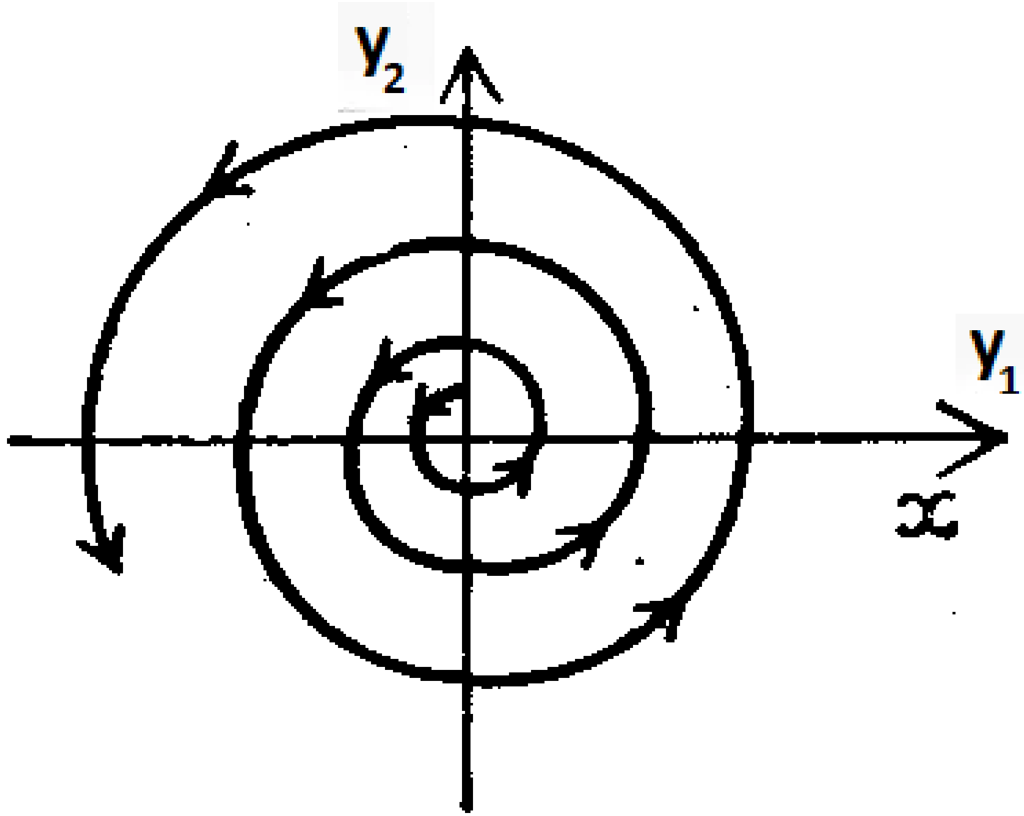
$$y_1 = y_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y_2 = -\gamma y_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega y_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{y_1}{y_0 e^{-\gamma t}}, \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{y_2 + \gamma y_0 e^{-\gamma t}\cdot\dfrac{y_1}{y_0 e^{-\gamma t}}}{\omega y_0 e^{-\gamma t}} = -\frac{y_2 + \gamma y_1}{\omega y_0 e^{-\gamma t}} \Rightarrow$$

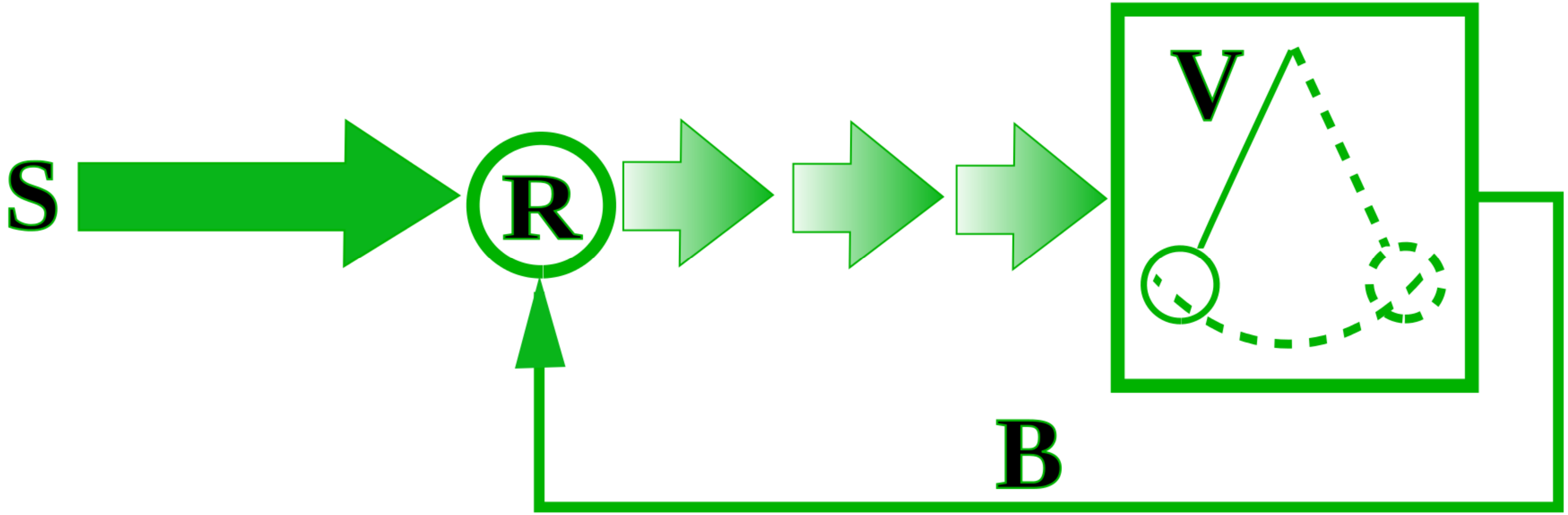
$$\left(\frac{y_1}{y_0 e^{-\gamma t}}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + \gamma y_1}{\omega y_0 e^{-\gamma t}}\right)^2 = 1$$

Фазовые портреты затухающих колебаний

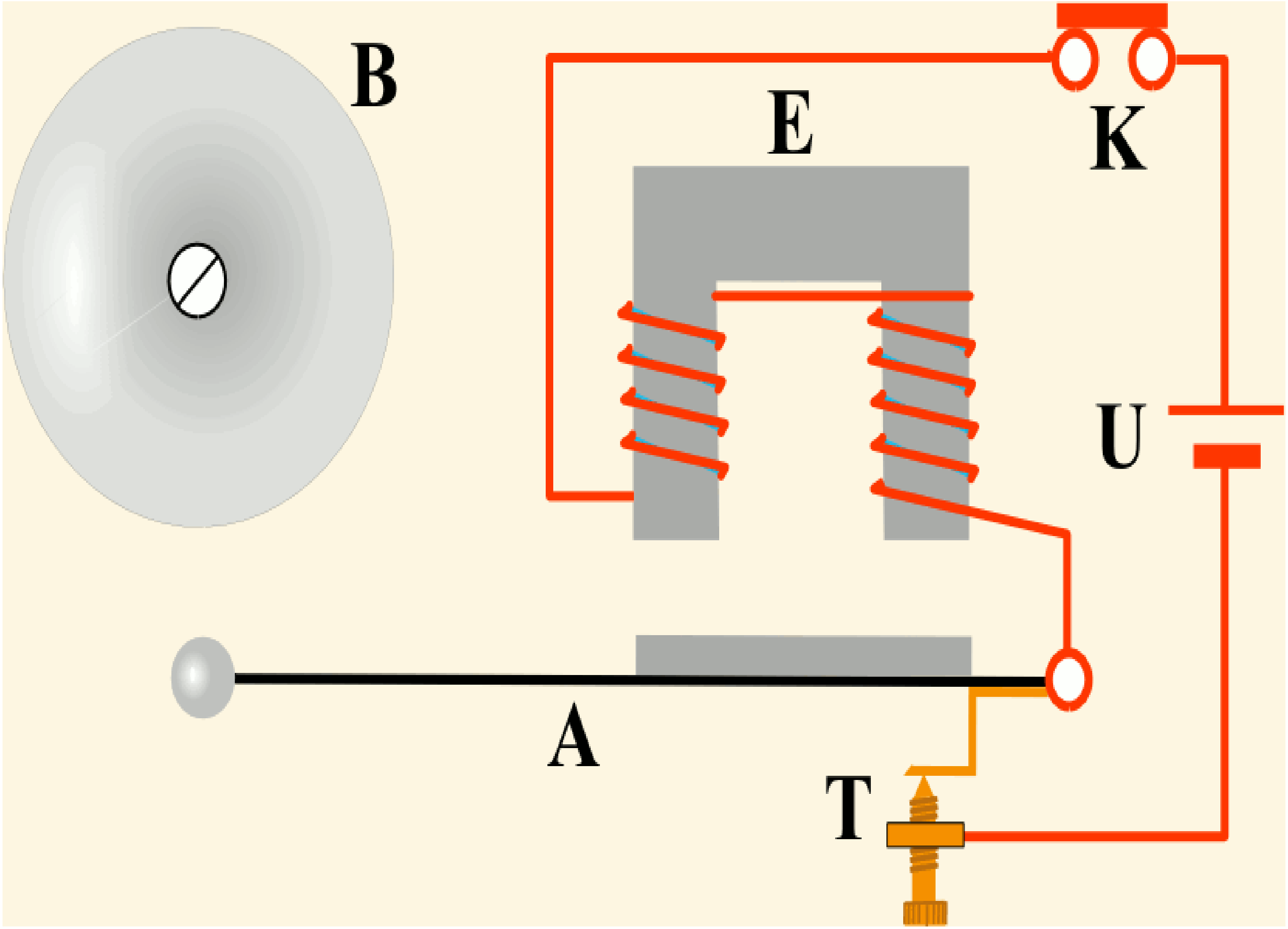




Автоколебательные системы



Электрозвонок



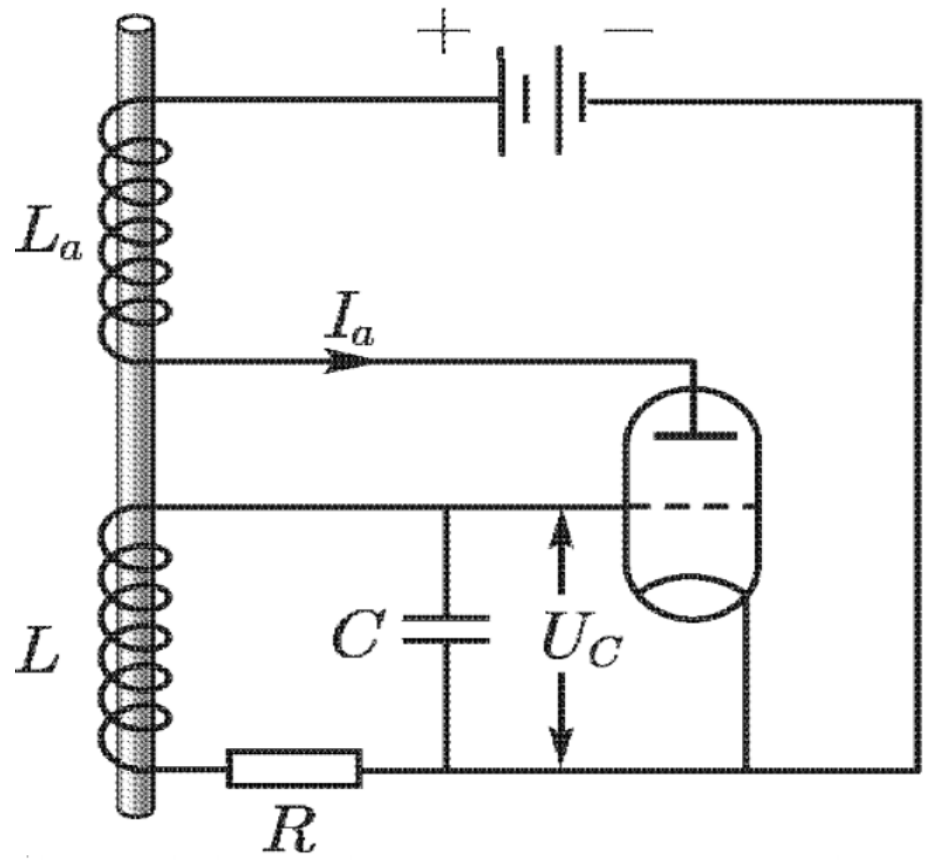
S – батарея

R – прерыватель T

V – якорь A

B – магнитное + гравитационное поле

Генератор Ван-дер-Поля



S – ЭДС батарейки

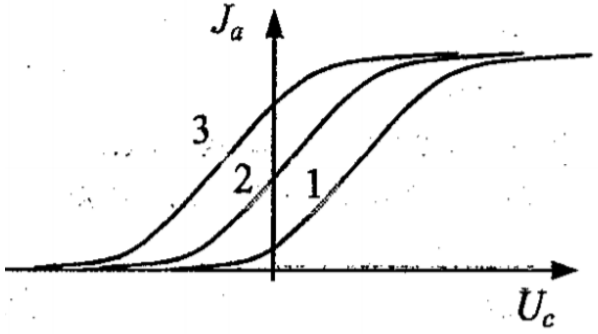
R – ламповый триод

V – колебание напряжения на конденсаторе

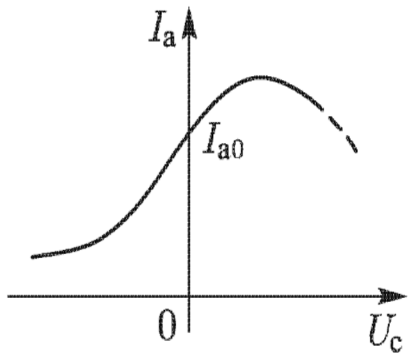
B – взаимная индукция + зависимость анодного тока от сеточного напряжения $I_а = I_а(U_с), S(U_с) = \dfrac{dI_а}{dU_с}$

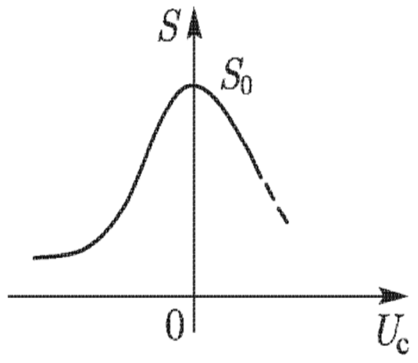
Подберем $U_а$ такое, что $U_а = \arg\max S(U_а)$ при $U_с = 0$.

Тогда $S = S_0 - S_2 U_с^2, I_а = I_{а0} + S_0 U_с - \dfrac{1}{3} S_2 U_с^3$



Сеточная характеристика триода для трёх значений анодного напряжения: $U_{a1} < U_{a2} < U_{a3}$ (кривые 1, 2 и 3 соответственно)





Уравнение Ван-дер-Поля

$$L\frac{dI}{dt}+RI+U_{\text{c}}=M\frac{dI_{\text{a}}}{dt},\ I=\frac{dQ}{dt},\ U_{\text{c}}=\frac{Q}{C},I=C\frac{dU_{\text{c}}}{dt}\Rightarrow$$

$$LC\frac{d^2U_{\text{c}}}{dt^2}+RC\frac{dU_{\text{c}}}{dt}+U_{\text{c}}=M\frac{dI_{\text{a}}}{dt}\Rightarrow$$

$$\frac{d^2U_{\text{c}}}{dt^2}-\frac{M}{LC}\left(S_0-S_2U_{\text{c}}^2-\frac{RC}{M}\right)\frac{dU_{\text{c}}}{dt}+\omega_0^2U_{\text{c}}=0\Rightarrow$$

$$\ddot{x}-2\gamma\dot{x}(1-x^2)+\omega_0^2x=0$$

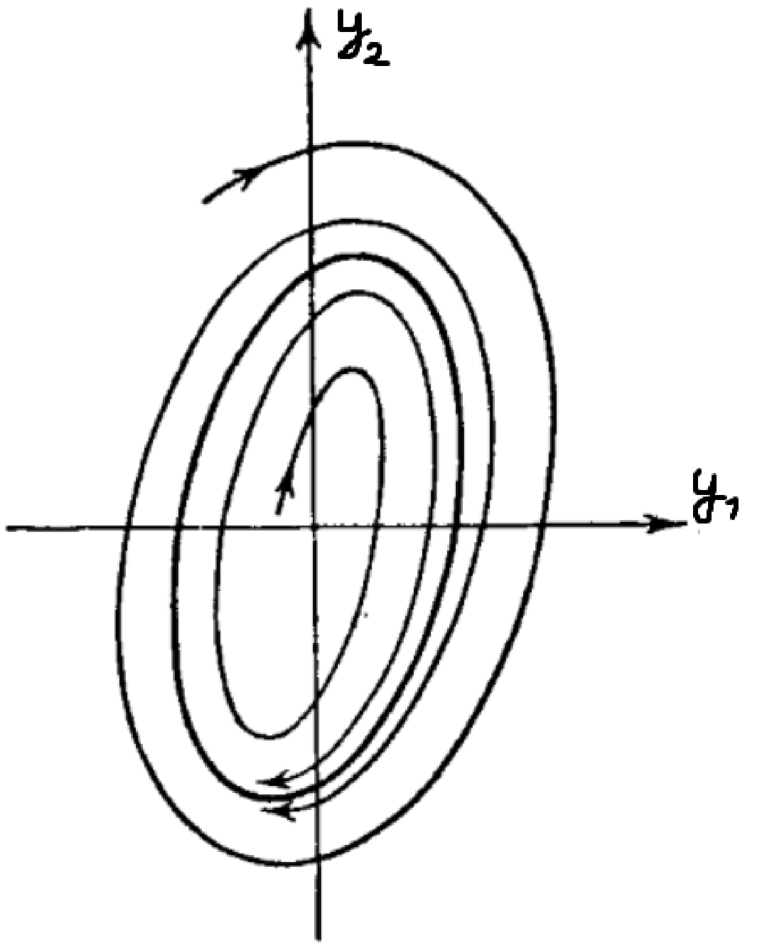
Здесь

$$x=U_{\text{c}}\sqrt{\frac{MS_2}{MS_0-RC}},\ 2\gamma=\frac{MS_0-RC}{LC}$$

Рассмотрим случай $x \approx 0 \Rightarrow \ddot{x} - 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Если $\gamma < 0$, то имеем обычные затухающие колебания. Фазовый портрет в осях $y_1 = x, y_1 = \dot{x}$ при $x \approx 0$ представляет из себя спираль с устойчивым фокусом $x = \dot{x} = 0$

Пусть теперь $\gamma > 0$. Начальное движения из $x = \dot{x} = 0$ описывается уравнением $\ddot{x} - 2\left|\gamma\right|\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow$ самовозбуждение, + обратная связь. При достаточно больших x (при большом $U_с$)начивает играть роль слагаемое $2\gamma\dot{x}x^2$.Тогда анодный ток перестает расти, заканчивается самовозбуждение и устанавливается равновесные колебания. При этом, это равновесие устойчивое $\Rightarrow$ $-$ обратная связь.

Фазовый портрет автоколебаний



Устойчивый предельный цикл – замкнутая кривая на фазовой плоскости, к которой неограниченно приближаются прочие фазовые траектории.

Понятие «автоколебания» (1928)

Александр Александрович Андронов

Определение А.А. Андронова:
«Автоколебания – такие колебания, которым на фазовом пространстве соответствуют математически устойчивые предельные циклы Пуанкаре»

Используемая литература

1) Андронов А А "Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний" *УФН* **93** 329–331 (1967)

2) Карлов Н.В., Кириченко Н.А. «Колебания, волны, структуры»

3) «Теория колебаний», Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э., 1959

4) Арнольд «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

5) Н.А. Кириченко «Электричество и магнетизм»