

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Вычислительная стохастика и статистические модели

Барсуков Егор Вячеславович

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ В  
ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ БЕЗ СВОБОДНОГО  
ЧЛЕНА

Отчет о научно-исследовательской работе

Научный руководитель:  
д. ф.-м. н., профессор В. Б. Мелас

Санкт-Петербург  
2019

# Оглавление

<b>Введение</b>	3
<b>Глава 1. С-оптимальные планы эксперимента</b>	4
1.1. Определения	4
1.2. Теорема Элвинга	5
1.3. Явная формула для весов оптимального плана	5
<b>Глава 2. План для нахождения производной на промежутке с началом в нуле</b>	6
2.1. План для нахождения производной на промежутке $[0, 1]$	6
2.2. Промежуток вида $[0, d]$	11
<b>Список литературы</b>	12

## Введение

Рассмотрим регрессионную модель

$$y_j = \theta^\top f_j(x_j) + \varepsilon_j, \quad j = 1 \dots N, \quad x_j \in \mathcal{X}, \quad (1)$$

где  $N$  — количество экспериментов,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^\top$  — регрессионная функция,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^\top$  — неизвестные параметры,  $\varepsilon_i$  — некоррелированные ошибки наблюдения. При этом  $E[\varepsilon_i] = 0$ ,  $D[\varepsilon_i] = \sigma^2$ .

Для улучшения в каком-либо смысле некоторых оценок по данной модели при минимизации  $N$  строят *планы эксперимента*, т.е. наборы точек  $x_i \in \mathcal{X}$  в каждой из которых должно быть произведено  $n_i$  экспериментов так, что  $\sum_i^N n_i = N$ . В каком именно смысле будет улучшена оценка зависит от одного из множества критериев оптимальности. В этой работе будут рассматриваться  $c$ -оптимальные планы эксперимента, определение которым будет дано далее.

В работе будут рассматриваться полиномиальные регрессионные модели, т.е.  $f_i(x) = x^{k_i}$ . Такие модели были хорошо изучены и для многих случаев были построены явные аналитические решения. Множество работ были посвящены нахождению D-оптимальных планов [1–4]. Также существуют для такой модели явные решения для нахождения E-оптимальных планов [5–8].

$c$ -оптимальным планом эксперимента является план минимизирующий дисперсию значения скалярного произведения  $\theta$  и  $c$  для заданного  $c \in \mathbb{R}^n$ . В общем случае нахождение  $c$ -оптимальных планов может быть достаточно сложно. Некоторые решения с очень маленьким количеством неизвестных параметров описаны опираясь на использование теоремы Элвинга [9].

Часто рассматриваются задача нахождения оптимального плана при  $c = f(z)$  для произвольного  $z$  — задача экстраполяции и  $c = f'(z)$  — задача оценки производной, они были решены в общем виде для обычной полиномиальной регрессии вида  $f(x) = (1, x, \dots, x^n)^\top$  [10, 11].

В этой работе рассмотрен случай нахождения плана для оценивания производной при полиномиальной модели без свободного члена при  $\mathcal{X} = [0, d]$ . Этот случай существенно отличается от  $\mathcal{X} = [-1, 1]$ , который был рассмотрен в [12].

## Глава 1

## С-оптимальные планы эксперимента

## 1.1. Определения

Согласно [13] непрерывным планом эксперимента в регрессионной модели (1) будем называть дискретную вероятностную меру

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ \omega_1 & \dots & \omega_m \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathcal{X}.$$

Для проведения  $N$  измерений с таким планом эксперимента необходимо провести  $n_i \approx N\omega_i$  измерений в точке  $x_i$  таким образом, чтобы  $\sum_i^m n_i = N$ .

Для непрерывного плана эксперимента определим информационную матрицу следующим образом

$$M(\xi) = \int_{\mathcal{X}} f(x)f^\top(x)\xi(dt).$$

**Определение 1.** *c-оптимальным планом* для некоторого вектора  $c$  называется план эксперимента  $\xi$  минимизирующий следующую функцию

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} c^\top M(\xi)^- c, & \text{если существует } v, \text{ такой, что } c = M(\xi)v \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases},$$

где  $M(\xi)^-$  — матрица, обобщенно обратная к информационной матрице плана  $\xi$ . План называется допустимым, если существует такое  $v$ , что  $c = M(\xi)v$ .

Как было отмечено в введении,  $c$ -оптимальный план минимизирует дисперсию несмещенной МНК оценки  $c^\top \hat{\theta}$  линейной комбинации  $c^\top \theta$  [8].

**Определение 2.** Если  $c = f(z)$  для некоторого  $z \in \mathbb{R}$ , то соответствующий  $c$ -оптимальный план называется *оптимальным планом экстраполяции* в точке  $z$ .

**Определение 3.** Если  $c = f'(z)$  для некоторого  $z \in \mathbb{R}$ , то соответствующий  $c$ -оптимальный план называется *оптимальным планом для оценки производной* в точке  $z$ .

## 1.2. Теорема Элвинга

Для решения задачи нахождения  $s$ -оптимальных планов в множестве случаев (в том числе в данной работе) используется теорема Элвинга, являющаяся геометрически интерпретируемым критерием  $s$ -оптимальности плана эксперимента.

**Теорема 1.** (Элвинга) [9] Допустимый план  $\xi^*$  с носителем  $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{X}$  и весами  $\omega_1, \dots, \omega_m$  является  $s$ -оптимальным тогда и только тогда, когда существует  $p \in \mathbb{R}^k$  и константа  $h$  такие, что выполняются следующие условия:

$$|p^\top f(x_i)| = 1 \quad i = 1..m \leq n \quad (1.1a)$$

$$|p^\top f(x)| \leq 1 \quad x \in \mathcal{X} \quad (1.1b)$$

$$c = h \sum_{i=1}^m \omega_i f(x_i) p^\top f(x_i). \quad (1.1c)$$

Кроме того

$$h^2 = c^\top M^-(\xi^*)c$$

Функцию  $p^\top f(x_i)$  в определениях теоремы Элвинга называют *экстремальным мно-  
гочленом*.

## 1.3. Явная формула для весов оптимального плана

**Теорема 2.** Оптимальный план для оценивания производной полиномиальной модели без свободного члена с опорными точками  $t_1^*, \dots, t_m^*$ , где  $m = n$  или  $m = n - 1$  имеет веса вычисленные по следующей формуле:

$$\omega_i = \frac{|L'_i(z)|}{\sum_{j=1}^m |L'_j(z)|}, \quad (1.2)$$

где  $L_i$  задается следующим образом

$$L_i(x) = \frac{x \prod_{l=1}^n (x - t_l^*)}{t_i^* \prod_{l \neq i}^n (t_i^* - t_l^*)}, \quad (1.3)$$

то есть является  $i$ -ым базисным многочленом Лагранжа без нулевого члена построенным по точкам  $t_1^*, \dots, t_m^*$ .

## Глава 2

## План для нахождения производной на промежутке с началом в нуле

Здесь будут описаны оптимальные планы для нахождения производной на промежутке вида  $[0, d]$  в модели без нулевого члена. Для промежутков вида  $[-1, 1]$  такие планы были описаны в [12], однако в таком случае полученные решения значительно отличаются от полученных в этом разделе. Здесь, не умаляя общности, будет доказана теорема для случая  $[0, 1]$ , а в конце главы будет показано, как он переносится в общий вид.

Везде в этой главе считается, что  $f(x) = (x, x^2, \dots, x^n)^\top$ , то есть рассматривается модель без нулеого члена.

### 2.1. План для нахождения производной на промежутке $[0, 1]$

При доказательстве основной теоремы этой главы будет использована следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  — многочлены степени  $n$  с корнями  $t_1^1 < \dots < t_n^1$  и  $t_1^2 < \dots < t_n^2$  соответственно. При этом корни располагаются следующим образом:

$$t_1^1 \leq t_1^2 < t_2^1 \leq t_2^2 < \dots < t_n^1 \leq t_n^2,$$

где хотя бы одно из неравенств  $t_l^1 \leq t_l^2$  ( $l = 1, \dots, n$ ) является строгим. Также обозначим корни многочленов  $P_1'(x)$  и  $P_2'(x)$  как  $v_1^1, \dots, v_{n-1}^1$  и  $v_1^2, \dots, v_{n-1}^2$ . Тогда справедливо следующее выражение

$$v_1^1 < v_1^2 < v_2^1 < v_2^2 < \dots < v_n^1 < v_n^2.$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [14] или в приложении к [12].

**Теорема 3.** Пусть для  $i = 1, \dots, n$

$$x_i^* = \frac{\cos \frac{(n-i)\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{2n}}{1 + \cos \frac{\pi}{2n}}, \quad (2.1)$$

и корни производной многочлена  $L_i$  из формулы (1.3) построенного по точкам  $\{x_j^*\}_j^n$  равны  $u_1^i, \dots, u_{n-1}^i$ , причем  $u_k^i \leq u_l^i$  при  $k < l$ . Тогда при  $z \in (-\infty, u_1^1) \cup (u_{n-1}^n, +\infty)$  или

$z \in (u_{n-1}^j, u_1^{j+1})$  для  $j = 1, \dots, n-2$  оптимальный план для нахождения производной в точке  $z$  в полиномиальной модели степени  $n$  без свободного члена на промежутке  $[0, 1]$  имеет опорные точки  $\{x_j\}_j^n$  и веса вычисленные по формуле (1.2). Также при  $z$  не лежащих в этих промежутках не существует оптимального плана состоящего из  $n$  точек.

*Доказательство.* Полученное здесь решение основывается на применении варианта теоремы Элвинга описанного на странице 5, которая, в том числе, утверждает, что для любого  $s$ -оптимального плана должен существовать соответствующий многочлен  $p^\top f(x)$ , который не превосходит по модулю единицу на соответствующем промежутке и достигает её в опорных точках плана. Поэтому первым шагом будет нахождение таких многочленов степени  $n$ .

Построим полином без свободного члена  $S_n(x)$  степени  $n$ , не превосходящий по модулю единицу на промежутке  $[0, 1]$ , и достигающий её в  $n$  точках. Пусть  $T_n(x)$  — многочлен Чебышёва степени  $n$ . Тогда по свойствам многочленов Чебышёва  $T_n$  не превосходит по модулю единицу на промежутке  $[-1, 1]$  и достигает её в  $n+1$  точках, в том числе в точках  $-1$  и  $1$ . Известно, что корни  $T_n$  имеют следующий вид

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i+1/2)}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Если мы возьмём самый маленький корень  $t_{\min} = -\cos \frac{\pi}{2n}$  и положим  $\widehat{S}_n(x) = T_n(x+t_{\min})$ , то  $\widehat{S}_n$  будет являться полиномом степени  $n$  с нулевым свободным членом, так как  $\widehat{S}_n(0) = 0$  по построению. При этом  $|\widehat{S}_n(x)| \leq 1$  для  $x$  на промежутке  $[0, 1 + \cos(\frac{\pi}{2n})]$  и в этом промежутке абсолютная величина достигает единицы  $n$  раз в силу того, что левый край не равен  $1$ .

Для того, чтобы привести промежуток к виду  $[0, 1]$  достаточно добавить множитель  $1 + \cos \frac{\pi}{2n}$  к  $x$  в левой части определения  $\widehat{S}_n$ . После этого получается многочлен, удовлетворяющий всем требуемым свойствам

$$S_n(x) = T_n\left(x\left(1 + \cos \frac{\pi}{2n}\right) - \cos \frac{\pi}{2n}\right).$$

Экстремальные точки  $T_n(x)$  расположены в точках

$$\widehat{x}_i^* = \cos \frac{(n-i)\pi}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

поэтому экстремальные точки  $S(x)$  на промежутке  $[0, 1]$  расположены в точках

$$x_i^* = \frac{\cos \frac{(n-i)\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{2n}}{1 + \cos \frac{\pi}{2n}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

при этом важно, что индексы у  $x_i^*$  начинаются с 1, в то время как у  $\widehat{x_i^*}$  с 0. Так происходит из-за того, что наименьшая экстремальная точка  $S_n$  на всем промежутке оказывается меньше нуля и не попадает в требуемый промежуток.

Также нужно отметить, что

$$0 < x_1^* < x_2^* < \dots < x_n^*, \quad i = 1, \dots, n$$

и

$$S_n(x_i^*) = (-1)^{n+i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Покажем, что  $S_n(x)$  — это единственный многочлен (с точностью до знака) без нулевого члена, удовлетворяющий свойствам (1.1a) и (1.1b) на промежутке  $[0, 1]$ . Пусть  $P_n(x)$  — многочлен степени  $n$  и при этом  $P_n(0) = 0$ ,  $P_n(1) = 1$  и в промежутке  $[0, 1)$  этот многочлен имеет ровно  $n - 1$  экстремум  $t_1 < \dots < t_{n-1}$  в которых он равен  $\pm 1$ . В силу того, что нам требуется единственность с точностью до знака, тот факт, что  $P_n(1)$  был положен положительным, не умаляет общности. Так как  $P'_n(x)$  имеет степень  $n - 1$  и, соответственно, имеет  $n - 1$  корней, которые были обозначены как  $t_1, \dots, t_{n-1}$ , то только в этих точках этот многочлен может менять свою монотонность, но также  $|P_n(t_i)| = 1$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ , поэтому в этих точках он меняет свою монотонность и  $P_n(t_i) = (-1)^{n-1-i}$ . Также поэтому при  $x \leq t_1$  (ранее было определено, что  $t_1 > 0$ )  $\text{sign}(P'_n(x)) = (-1)^n$ , а учитывая, что  $P(0) = 0$  и  $P(t_1) = (-1)^n$ , то должна существовать такая единственная точка  $t_0 < 0$ , что  $P(t_0) = (-1)^{n+1}$ . После введения обозначения  $t_n = 1$  из факта, что  $P_n(t_i) = (-1)^{n-1-i}$  для  $i = 0, \dots, n$  следует, что  $P_n(x)$  является чебышевским многочленом на отрезке  $[t_0, 1]$ , то есть  $P_n = S_n$ .

Из единственности многочлена без нулевого члена степени  $n$ , удовлетворяющего свойствам (1.1a) и (1.1b) на отрезке  $[0, 1]$  следует, что оптимальный план состоящий из  $n$  опорных точек сосредоточен в экстремальных точках многочлена  $S_n(x)$ , которые имеют вид (2.1).

Осталось показать, когда выполняется условие (1.1c) при  $c = f'(z)$  и, соответственно, точки (2.1) являются опорными точками оптимального плана для оценки производной в точке  $z$ .



Построим базисные полиномы Лагранжа степени  $n$  без нулевого члена по точкам  $\{x_i^*\}_{i=1}^n$

$$L_i(x) = \frac{x \prod_{l=1}^n (x - x_l^*)}{x_i^n \prod_{l \neq i} (x_i^* - x_l^*)}$$

Так как теорема 4 о весах оптимального плана для оценки производной в случае полиномиальной модели работает для любых промежутков, то для нахождения весов можно использовать её и тогда, соответственно, веса имеют следующий вид

$$\omega_i = \frac{|L'_i(z)|}{\sum_{j=1}^n |L'_j(z)|}.$$

Введем обозначения  $F = ((x_j^*)^i)_{i,j=1}^n$  и  $\beta = (\omega_i (-1)^{i+n})_{i=1}^n$ . Так как  $x_j^*$  при  $i = 1, \dots, n$  являются экстремальными точками многочлена  $S_n$  и при этом  $S_n(x_j^*) = (-1)^{j+n}$ , то выполнение равенства

$$f'(z) = hF\beta \quad (2.2)$$

эквивалентно выполнению условия (1.1с) теоремы Элвинга для нахождения оптимального плана оценки производной в точке  $z$ .

Так как равенство  $F^{-1}F = I_n$ , где  $I_n$  — единичная матрица размера  $n$ , а  $i$ -ый столбец матрицы  $F$  на самом деле равен  $f(x_i^*)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) можно переписать, как систему равенств

$$e_i^\top F^{-1} f(x_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера, а  $e_i$  —  $i$ -ый единичный вектор. Поскольку в левой части равенств (??) содержатся многочлены без нулевого коэффициента степени не больше  $n$  вычисленные в точках  $x_j^*$ ,  $j = 1, \dots, n$ , а для каждого  $i$  существует только одно  $j$ , такое, что  $\delta_{ij} \neq 0$ , то они определяют все базисные многочлены Лагранжа без нулевого члена степени  $n$  вычисленные в точках  $x_j^*$ ,  $j = 1, \dots, n$ , таким образом

$$e_i^\top F^{-1} f(z) = L_i(z), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если в предыдущем выражении вычислить производную по  $z$  и переписать полученное выражение в векторной форме получим

$$f'(z) = F (L'_1(z), \dots, L'_n(z))^\top. \quad (2.3)$$

Приравняв правые части (2.3) и (2.2) и домножив равенство на  $F^{-1}$  слева, получаем, что

$$h\beta = (L'_1(z), \dots, L'_n(z))^\top,$$

что с учетом введенных ранее обозначений влечет, что  $\text{sign}(L'_i(z)) = \text{sign}((-1)^{i+n})$ ,  $i = 1, \dots, n$  или, вспомнив, что экстремальным многочленом также может быть  $-S(x)$ ,  $\text{sign}(L'_i(z)) = \text{sign}((-1)^{i+n+1})$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Таким образом для того, чтобы доказать, что оптимальный план находится в точках  $(x_i^*)_{i=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$  с указанными ранее весами, осталось доказать равенство знаков  $L'_i(z)$  и  $\pm S_n(x_i^*)$ . Но так как знаки экстремальных точек многочлена  $S_n$  чередуются, достаточно показать при каких  $z$  выражения  $(-1)^i L'_i(z)$  имеет одинаковый знак для  $i = 1, \dots, n$ .

Так как корни многочленов  $L_i$  и  $L_j$  для любых  $i$  и  $j$  таких, что  $i < j$  удовлетворяют условию леммы 1, условие которой было приведено на странице 6, то последовательно её применяя ко всем базисным многочленам получаем, что корни их производных, обозначения для которых были описаны в условии этой теоремы, удовлетворяют следующему соотношению:

$$u_1^n < u_1^{n-1} < \dots < u_1^1 < u_2^n < u_2^{n-1} < \dots < u_{n-1}^1.$$

Можно видеть, что, так как все узловые точки больше нуля, знак многочлена  $L_i(z)$  при  $z \rightarrow -\infty$  будет равен  $(-1)^{n+i+1}$ . В то же время знак  $L'_i(z)$  будет противоположным  $L_i(z)$ , так как меняется четность многочлена и при этом не меняется знак при старшем коэффициенте, то есть  $\text{sign}(L'_i(z)) = \text{sign}((-1)^{n+i})$  при  $z \rightarrow -\infty$ . И, следовательно,  $\text{sign}((-1)^i L'_i(z)) = \text{sign}((-1)^{n+2i}) = \text{sign}((-1)^n)$  при  $z \rightarrow -\infty$ , то есть  $\text{sign}((-1)^i L'_i(z))$  не зависит от  $i$  и имеет постоянный знак для любых  $i$ , что означает, что при  $z \in (-\infty, u_1^n)$  третье условие теоремы Элвинга выполняется и план является оптимальным.

Осталось изучить как ведут себя знаки  $\text{sign}((-1)^i L'_i(z))$  на остальных промежутках. На промежутках  $[u_j^1, u_j^n]$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) каждый базисный многочлен меняет свой знак ровно 1 раз и на этих промежутках знаки производных не совпадают со знаками экстремального многочлена, а на промежутках  $(u_j^n, u_{j+1}^1)$  ( $j = 1, \dots, n-2$ ) нет ни одного корня и поэтому  $\text{sign}((-1)^i L'_i(z)) = \text{sign}((-1)^{n+j})$  при  $z \in (u_j^n, u_{j+1}^1)$  ( $j = 1, \dots, n-2$ ), что также подтверждает третье условие теоремы Элвинга в этих промежутках и показывает, что показанный план оптимален.

На промежутке  $(-\infty, u_{n-1}^n]$  каждый базисный многочлен поменял свой знак одинаковое количество раз, а так как при  $z \rightarrow -\infty$  условие выполнялось, то при  $z \in (u_{1,n-1}, +\infty)$  план также является оптимальным.

Таким образом план эксперимента с опорными точками (2.1) и соответствующими

им весами (1.2) является оптимальным планом для оценки производной в точке  $z$  в модели без нулевого члена тогда и только тогда, когда  $z \in (-\infty, u_1^n) \cup (u_{1,n-1}, +\infty)$  или  $z \in (u_j^n, u_{j+1}^1)$  для  $j = 1, \dots, n-2$ . Причем в силу единственности (с точностью до знака) экстремального многочлена с  $n$  экстремальными точками, не существует других планов состоящих из  $n$  опорных точек, что доказывает теорему.  $\square$

## 2.2. Промежуток вида $[0, d]$

В общем случае оптимальный для всех промежутков, начинающихся в нуле, существенно не отличается от случая промежутка  $[0, 1]$ , что будет показано в следующей теореме.

**Теорема 4.** Пусть для  $i = 1, \dots, n$  и для некоторого  $d$

$$\widehat{x}_i^* = dx_i^*, \quad (2.4)$$

где  $x_i^*$  из (2.1), и корни производной многочлена  $L_i$  из формулы (1.3) построенного по точкам  $\{\widehat{x}_j^*\}_j^n$  равны  $u_1^i, \dots, u_{n-1}^i$ , причем  $u_k^i \leq u_l^i$  при  $k < l$ . Тогда при  $z \in (-\infty, u_1^1) \cup (u_{n-1}^n, +\infty)$  или  $z \in (u_{n-1}^j, u_1^{j+1})$  для  $j = 1, \dots, n-2$  оптимальный план для нахождения производной в точке  $z$  в полиномиальной модели степени  $n$  без свободного члена на промежутке  $[0, 1]$  имеет опорные точки  $\{x_j\}_j^n$  и веса вычисленные по формуле (1.2). Также при  $z$  не лежащих в этих промежутках не существует оптимального плана состоящего из  $n$  точек.

*Доказательство.* Построим многочлен  $S_n^d(x) = S_n(\frac{x}{d})$ . Из построения ясно что его экстремальные точки равны (2.4). Он по построению будет являться экстремальным многочленом степени  $n$  на отрезке  $[0, d]$  и будет повторять все свойства многочлена  $S_n(x)$ . Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 3 с заменой многочлена  $S_n$  на  $S_n^d$ .  $\square$

## Список литературы

1. Hoel P. G. Efficiency problems in polynomial estimation // Annals of Mathematical Statistics. — 1958. — Vol. 29, no. 4. — P. 1134–1145.
2. Studden W. J.  $D_s$ -optimal designs for polynomial regression using continued fractions // Annals of Statistics. — 1980. — Vol. 8, no. 5. — P. 1132–1141.
3. Dette H. A generalization of D- and  $D_1$ -optimal designs in polynomial regression // Annals of Statistics. — 1990. — Vol. 18. — P. 1784–1805.
4. Dette H., Franke T. Robust designs for polynomial regression by maximizing a minimum of D- and  $D_1$ -efficiencies // Annals of Statistics. — 1990. — Vol. 29, no. 4. — P. 1024–1049.
5. Pukelsheim F., Studden W. J. E-optimal designs for polynomial regression // Annals of Statistics. — 1990. — Vol. 21, no. 1. — P. 402–415.
6. Dette H. A note on E-optimal designs for weighted polynomial regression // Annals of Statistics. — 1990. — Vol. 21, no. 2. — P. 767–771.
7. Heiligers B. E-optimal designs in weighted polynomial regression // Annals of Statistics. — 1994. — Vol. 22, no. 2. — P. 917–929.
8. Dette H., Studden W. J. Geometry of E-optimality // Annals of Statistics. — 1993. — Vol. 21, no. 1. — P. 416–433.
9. Elfving G. Optimal allocation in linear regression theory // The Annals of Mathematical Statistics. — 1952. — Vol. 23. — P. 255–262.
10. Hoel P. G., Levine A. Optimal spacing and weighting in polynomial prediction // The Annals of Statistics. — 1964. — Vol. 35, no. 4. — P. 1553–1560.
11. Dette H., Melas V., A. P. Optimal designs for estimating the slope of a regression // Statistics. — 2010. — Vol. 44, no. 6. — P. 617–628.
12. Dette H., Melas V., Shpilev P. Some explicit solutions of c-optimal design problems for polynomial regression with no intercept // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. — 2019.
13. Kiefer J. General equivalence theory for optimum designs (approximate theory) // The Annals of Statistics. — 1974. — Vol. 2, no. 5. — P. 416–433.
14. Sahm M. Optimal designs for estimating individual coefficients in polynomial regression : Ph.D. thesis / M. Sahm ; Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Germany. — 1998.

15. L-bfgs-b - fortran subroutines for large-scale bound constrained optimization : Rep. / ACM Trans. Math. Software ; Executor: Ciyou Zhu, Richard H. Byrd, Peihuang Lu, Jorge Nocedal : 1994.
16. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // Journal of Global Optimization. — 1997. — Dec. — Vol. 11, no. 4. — P. 341–359.
17. Lawson C. L., Hanson R. J. Solving least squares problems. — Siam, 1995. — Vol. 15.
18. Jones E., Oliphant T., Peterson P. et al. SciPy: Open source scientific tools for Python. — 2001—. — Access mode: <http://www.scipy.org/>.
19. Van Der Walt S., Colbert S. C., Varoquaux G. The numpy array: a structure for efficient numerical computation // Computing in Science & Engineering. — 2011. — Vol. 13, no. 2. — P. 22.