Оптимальные планы для оценивания производных в полиномиальной регрессионной модели без свободного члена

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Преддипломная практика

Санкт-Петербург, 2020

Оптимальные планы для оценивания производных в полиномиальной регрессионной модели без свободного члена
Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели
Преддипломная практика
Санкт-Петербург, 2020

Тема работы — Оптимальные планы для оценивания производных в полиномиальной регрессионной модели без свободного члена. Работа выполнена на кафедре статистического моделировния. Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор В. Б. Мелас.

Уравнение регрессии

$$y_j = \theta^\top f(x_j) + \varepsilon_j, \quad j = 1 \dots N,\, x_j \in \mathcal{X}$$

- N — количество экспериментов;
- $f(x)$ — вектор регрессионных функций;
- $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^\top$ — неизвестные параметры;
- $x_1, \dots, x_N$ — условия проведения эксперимента;
- $\mathcal{X}$ — множество планирования;
- $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ — случайные величины, характеризующие ошибки наблюдений.
  - Несмещенные $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$
  - Некоррелированные $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ для $i \neq j$
  - Равноточные $\mathbb{E}\varepsilon_i^2 = \sigma^2$ для всех i

Уравнение регрессии
$y_j = \theta^\top f(x_j) + \varepsilon_j, \quad j = 1 \dots N,\, x_j \in \mathcal{X}$
- N — количество экспериментов;
- $f(x)$ — вектор регрессионных функций;
- $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^\top$ — неизвестные параметры;
- $x_1, \dots, x_N$ — условия проведения эксперимента;
- $\mathcal{X}$ — множество планирования;
- $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ — случайные величины, характеризующие ошибки наблюдений.
  - Несмещенные $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$
  - Некоррелированные $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ для $i \neq j$
  - Равноточные $\mathbb{E}\varepsilon_i^2 = \sigma^2$ для всех i

Для того, чтобы сформулировать задачу введем несколько определений. Пусть задано уравнение регрессии, с количеством экспериментов N и количеством параметров n на некотором множестве планирования $\mathcal{X}$ с несмещенными (средним ноль) некоррелированными равноточными (с одинаковой дисперсией) ошибками.

План эксперимента и информационная матрица

Определение

Планом эксперимента называется следующая дискретная вероятностная мера

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ \omega_1 & \dots & \omega_m \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathcal{X}.$$

Определение

Для плана эксперимента определим его информационную матрицу

$$M(\xi) = \int_{\mathcal{X}} f(x) f^\top(x) \xi(dx).$$

2020-05-16

Оптимальные планы для оценивания производных
└─Постановка задачи

└─План эксперимента и информационная матрица

План эксперимента и информационная матрица
Определение
Планом эксперимента называется следующая дискретная вероятностная мера
$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ \omega_1 & \dots & \omega_m \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathcal{X}.$$
Определение
Для плана эксперимента определим его информационную матрицу
$$M(\xi) = \int_{\mathcal{X}} f(x) f^\top(x) \xi(dx).$$

Для такого уравнения регрессии определим план эксперимента, то есть дискретную вероятностную меру носитель которой сосредоточен на множестве планирования. Далее носитель этой меры будет называться опорными точками плана, а сооствeтствующие вероятности — весами этих опорным точек.
При практическом применении (когда возможно проводить только целое количество измерений) в точке x_i проводят приблизительно N/ω_i измерений так, чтобы всего было проведено N измерений.
Для планов эксперимента также определим информационную матрицу следующим образом.

С-оптимальный план эксперимента

Определение

С-оптимальным планом эксперимента для данного вектора c называется план минимизирующий функцию Φ

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} c^\top M(\xi)^- c, & \text{если } \exists v, \text{ такой, что } \ c = M(\xi)v \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases},$$

где $M(\xi)^-$ — псевдообратная матрица к информационной матрице плана

- С-оптимальный план минимизирует дисперсию МНК-оценки $\theta^\top c$;
- В общем виде задача нахождения таких планов не решена

С-оптимальный план эксперимента
Определение
С-оптимальным планом эксперимента для данного вектора c называется план минимизирующий функцию Φ
$\Phi(\xi) = \begin{cases} c^\top M(\xi)^- c, & \text{если } \exists v, \text{ такой, что } \ c = M(\xi)v \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases},$
где $M(\xi)^-$ — псевдообратная матрица к информационной матрице плана
С-оптимальный план минимизирует дисперсию МНК-оценки $\theta^\top c$;
В общем виде задача нахождения таких планов не решена

В этой работе изучены с-оптимальные планы, которые определены как минимум показанного здесь функционала для некоторого вектора c.

Важной особенностью таких планов, которая дает им практическую ценность, является то, что они минимизируют оценку по методу наименьших квадратов значения $\theta^\top c$.

Явных решений в общем виде для произвольного c не существует, но изучаются некоторые важные частные случаи (например $c = f(z)$). Рассмотрение одного из таких случаев и является одной из целей этой работы.

Постановка задачи

Определение

Если $c = f'(z) = (f_1'(z), \dots, f_m'(z))^\top$ *то соответствующий план называется планом для оценки производной в точке* z*.*

- Целью работы является описание оптимальных планов для оценки производной в модели $f(x) = (x, \dots, x^m)$ при носителе $\mathcal{X} = [0, d]$.
- Это имеет практический смысл, если существует априорное знание о значении функции в нулевой точке и эксперимент проводится на положительном отрезке.
- Решение задачи отличается от того, которое получается при носителе, границе которого не принадлежит ноль, которое описано в [Dette et al., 2019].
- Разработать алгоритм численно решающий задачу нахождения c-оптимальных планов для произвольного c.

Постановка задачи

Определение

Если $c = f'(z) = (f_1'(z), \dots, f_m'(z))^\top$ то соответствующий план называется планом для оценки производной в точке z.

- Целью работы является описание оптимальных планов для оценки производной в модели $f(x) = (x, \dots, x^m)$ при носителе $\mathcal{X} = [0, d]$.
- Это имеет практический смысл, если существует априорное знание о значении функции в нулевой точке и эксперимент проводится на положительном отрезке.
- Решение задачи отличается от того, которое получается при носителе, границе которого не принадлежит ноль, которое описано в [Dette et al., 2019].
- Разработать алгоритм численно решающий задачу нахождения c-оптимальных планов для произвольного c.

Если вектор c составлен из значений производных компонент вектора f в некоторой точке z, то такой план называется планом для оценки производной в точке z.

В силу сказанного на предыдущем слайде свойства c-оптимальных планов такой план минимизирует дисперсию оценки производной функции $\theta^\top f(x)$ в точке z.

В работе будет рассматриваться полиномиальная модель без нулевого члена, при этом множество планирования — положительный отрезок с началом в нуле.

Такая модель имеет смысл, когда рассматривается зависимость некоторого значения от параметра, определенного только на положительной полуоси. При этом с известным значением в точке 0. Простым примером такой зависимости может являться зависимость расстояния от времени.

Также целью работы является построение алгоритма для численного нахождения c-оптимальных планов в общем случае.

Теорема Элвинга [Dette et al., 2010]

Теорема

Допустимый план $\xi^\star$ *с носителем* $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{X}$ *и весами* $\omega_1, \dots, \omega_m$ *является* c*-оптимальным тогда и только тогда, когда существует* $p \in \mathbb{R}^k$ *и константа* h *такие, что выполняются следующие условия:*

$$\left| p^\top f(x_i) \right| = 1 \qquad i = 1..m \leqslant n, \tag{1a}$$

$$\left| p^\top f(x) \right| \leqslant 1 \qquad x \in \mathcal{X}, \tag{1b}$$

$$c = h \sum_{i=1}^{m} \omega_i f(x_i) p^\top f(x_i). \tag{1c}$$

Кроме того,

$$h^2 = c^\top M^-(\xi^*) c.$$

Теорема Элвинга [Dette et al., 2010]
Теорема
Допустимый план $\xi^\star$ с носителем $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{X}$ и весами $\omega_1, \dots, \omega_m$ является c-оптимальным тогда и только тогда, когда существует $p \in \mathbb{R}^k$ и константа h такие, что выполняются следующие условия:
$\left| p^\top f(x_i) \right| = 1 \quad i = 1..m \leqslant n,$ (1a)
$\left| p^\top f(x) \right| \leqslant 1 \quad x \in \mathcal{X},$ (1b)
$c = h \sum_{i=1}^{m} \omega_i f(x_i) p^\top f(x_i).$ (1c)
Кроме того,
$h^2 = c^\top M^-(\xi^*) c.$

Существует критерий c-оптимальности — теорема Элвинга. Здесь представлена одна из её формулировок.
План является c-оптимальным тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

1. Существуют такие параметры p что значение функции $p^\top f(x)$ по модулю равно единице в опорных точках плана
2. При этом на всей области планирования это значение по модулю не превышает единицу
3. Выполнено следующее соотношение связывающее вектор c и веса.

Веса у плана для оценки производной [Dette et al., 2019]

Для набора точек $x_1^*, \dots, x_k^*$ определим множество базисных многочленов

$$L_i(z) = \frac{z \prod_{l \neq i}(z - x_l^*)}{x_i^* \prod_{l \neq i}(x_i^* - x_l^*)}, \; i = 1, \dots k.$$

Теорема

Оптимальный план для оценивания производной полиномиальной модели без свободного члена с опорными точками $x_1^*, \dots, x_m^*$, где $m = n$ или $m = n - 1$ имеет веса вычисленные по следующей формуле:

$$\omega_i = \frac{|L_i'(z)|}{\sum_{j=1}^m \left|L_j'(z)\right|}.$$

Веса у плана для оценки производной [Dette et al., 2019]

Для набора точек $x_1^*, \dots, x_k^*$ определим множество базисных многочленов

$$L_i(z) = \frac{z \prod_{l \neq i}(z - x_l^*)}{x_i^* \prod_{l \neq i}(x_i^* - x_l^*)}, \; i = 1, \dots k.$$

Теорема

Оптимальный план для оценивания производной полиномиальной модели без свободного члена с опорными точками $x_1^*, \dots, x_m^*$, где $m = n$ или $m = n - 1$ имеет веса вычисленные по следующей формуле:

$$\omega_i = \frac{|L_i'(z)|}{\sum_{j=1}^m \left|L_j'(z)\right|}.$$

Для рассматриваемых в данной работе оптимальных планов для оценки производной в полиномиальной модели без нулевого члена существует результат, описывающий значение весов такого плана.
Для набора точек определим базисные многочлены без нулевого члена следующим образом. i-ый многочлен равен нулю во всех точках $x_1, \dots, x_k$ кроме точки x_i, в которой равен 1.
С помощью таких многочленов можно явно выразить веса для оптимального плана для оценки производной в точке z с известными опорными точками следующим образом.

Носитель плана

С помощью теоремы Элвинга было доказано, что если оптимальный план для оценивания производной с носителем $[0, 1]$ состоит из n точек, то носитель состоит из экстремальных точек следующего многочлена

$$S_n(x) = T_n\left(x\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) - \cos\frac{\pi}{2n}\right),$$

где T_n — многочлен Чебышева первого рода степени m. Таким образом носитель плана находится в точках

$$x_i^* = \frac{\cos\frac{(n-i)\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{2n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Носитель плана

С помощью теоремы Элвинга было доказано, что если оптимальный план для оценивания производной с носителем $[0, 1]$ состоит из n точек, то носитель состоит из экстремальных точек следующего многочлена

$$S_n(x) = T_n\left(x\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) - \cos\frac{\pi}{2n}\right),$$

где T_n — многочлен Чебышева первого рода степени m. Таким образом носитель плана находится в точках

$$x_i^* = \frac{\cos\frac{(n-i)\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{2n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В работе доказано, что если оптимальный план для оценки производной с областью планирования [0, 1] состоит из n точек (степень многочлена в модели), то его носитель состоит из экстремальных точек следующего многочлена, где T_n — многочлен Чебышёва.
Из свойств многочлена Чебышёва следует, что эти точки могут быть описаны следующим выражением.

Корни производных базисных многочленов

- $\{L_i(z)\}_{i=1}^n$ — базисные многочлены, построенные по точкам $x_1^*, \ldots, x_n^*$
- $u_1^i, \ldots, u_{n-1}^i$ — корни производной i-го базисного многочлена, упорядоченные по возрастанию

Было доказано, что тогда корни производных базисных многочленов упорядочены следующим образом

$$u_1^n < u_1^{n-1} < \ldots < u_1^1 < u_2^n < u_2^{n-1} < \ldots < u_{n-1}^1.$$

Корни производных базисных многочленов
- $\{L_i(z)\}_{i=1}^n$ — базисные многочлены, построенные по точкам $x_1^*, \ldots, x_n^*$
- $u_1^i, \ldots, u_{n-1}^i$ — корни производной i-го базисного многочлена, упорядоченные по возрастанию

Было доказано, что тогда корни производных базисных многочленов упорядочены следующим образом
$$u_1^n < u_1^{n-1} < \ldots < u_1^1 < u_2^n < u_2^{n-1} < \ldots < u_{n-1}^1.$$

Также в работе показано, что корни производных описанных ранее базисных многочленов L_i упорядочены особым образом: наименьшим является наименьший корень мночлена L_n', затем идет наименьший корень L_{n-1}' и так до 1. Затем идет вторые по возрастанию корни этих производных и так далее.

Здесь за u_k^i обозначен k-ый по возрастанию корень многочлена L_i'

Оптимальный план на отрезке с началом в нуле для оценки производной

Теорема

План с носителем $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ является оптимальным планом для оценивания производной полиномиальной модели без свободного члена в точке z при $\mathcal{X} = [0, 1]$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- $z \in (-\infty, u_1^n)$
- $z \in (u_i^1, u_{i+1}^n)$, $i = 1, \ldots, n-2$
- $z \in (u_{n-1}^1, +\infty)$

Оптимальный план на отрезке с началом в нуле для оценки производной

Теорема

План с носителем $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ является оптимальным планом для оценивания производной полиномиальной модели без свободного члена в точке z при $\mathcal{X} = [0, 1]$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- $z \in (-\infty, u_1^n)$
- $z \in (u_i^1, u_{i+1}^n)$, $i = 1, \ldots, n-2$
- $z \in (u_{n-1}^1, +\infty)$

Основным результатом работы является следующая теорема.
План с носителем в экстремальных точках многочлена S_n и весами определенными в ранее приведенной теореме является оптимальным планом для оценки производной полиномиальной модели без нулевого члена с областью планирования [0, 1] тогда и только тогда, когда z находится в одном из следующих промежутков.
То есть оно либо больше любого корня производной базисных многочленов построенных по опорным точкам, либо меньше любого корня, либо находится между i-ым корнем многочлена L_1' и $i+1$ корнем многочлена L_n'

Пример $m = 3$

С помощью этой теоремы найдем планы для оценки производной в случае $f(x) = (x, x^2, x^3)^\top$, $\mathcal{X} = [0, 1]$ и покажем их оптимальность. Опорные точки плана будут совпадать с экстремальными точками многочлена $S_3(x)$:

$$S_3(x) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^3 x^3 - 6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 x^2 + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) x,$$

Которыми являются

$$x_1^* = 3\sqrt{3} - 5, \quad x_2^* = \sqrt{3} - 1, \quad x_3^* = 1.$$

Пример $m = 3$
С помощью этой теоремы найдем планы для оценки производной в случае $f(x) = (x, x^2, x^3)^\top$, $\mathcal{X} = [0, 1]$ и покажем их оптимальность. Опорные точки плана будут совпадать с экстремальными точками многочлена $S_3(x)$:
$$S_3(x) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^3 x^3 - 6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 x^2 + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) x,$$
Которыми являются
$$x_1^* = 3\sqrt{3} - 5, \quad x_2^* = \sqrt{3} - 1, \quad x_3^* = 1.$$

Рассмотрим пример применения этой теоремы. Пусть множество планирования – отрезок $[0, 1]$ и моделью является многочлен третьей степени без нулевого члена. Тогда многочлен, определяющие опорные точки выглядит следующим образом. Его максимумы на промежутке $[0, 1]$ показаны ниже, соответственно они и являются опорными точками плана для оценки производной в этой задаче при выполнениях условий теоремы на точку z.

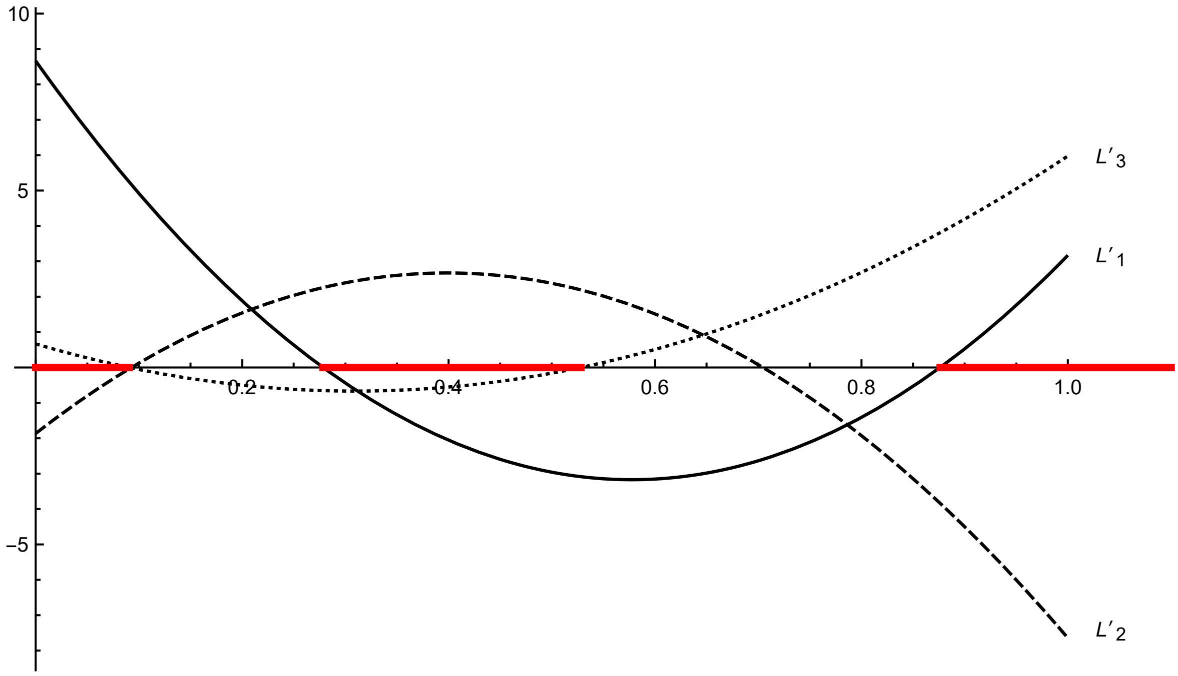
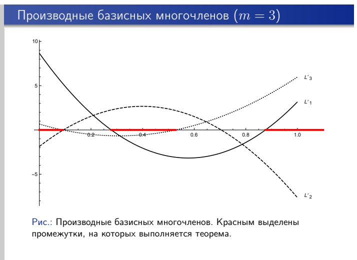


Рис.: Производные базисных многочленов. Красным выделены промежутки, на которых выполняется теорема.



Так как опорные точки уже известны, построим соответствующие базисные многочлены. На представленном графике показаны графики их производных, а красным выделены участки оси, при нахождении z в которых выполняется условие теоремы. На графике видно свойство, определяющее эти промежутки: на них знаки производных базисных чередуются. То есть полученный план является оптимальным планом для оценки производной в точке z, если z меньше 0.1, больше 0.9 или находится на $[0.3, 0.5]$ (все значения приближенные)

Численное нахождение оптимальных планов

- C-оптимальность плана определяется как решение задачи оптимизации
- Теорема Элвинга дает критерий C-оптимальности
- Поэтому численный алгоритм может быть устроен следующим образом:
  1. Численно оптимизируем функцию $\Phi(\xi)$ из определения со случайным начальным планом
  2. Проверяем выполнение условий теоремы Элвинга
     - Если они выполнены — у нас есть результат
     - Если нет — возвращаемся к п. 1

Численное нахождение оптимальных планов
- C-оптимальность плана определяется как решение задачи оптимизации
- Теорема Элвинга дает критерий C-оптимальности
- Поэтому численный алгоритм может быть устроен следующим образом:
  1. Численно оптимизируем функцию $\Phi(\xi)$ из определения со случайным начальным планом
  2. Проверяем выполнение условий теоремы Элвинга
     - Если они выполнены — у нас есть результат
     - Если нет — возвращаемся к п. 1

Далее рассмотрен алгоритм численного нахождения c-оптимальных планов в общем случае для произвольного c. Само определение c-оптимальных планов содержит задачу минимизации, а теорема Элвинга дает критерий того, является ли данный план c-оптимальным. Поэтому очевидным алгоритмом нахождения ответа для данного c будет следующий: найти минимум функции Φ из определения c-оптимальности с помощью подходящего алгоритма оптимизации со случайной начальной точкой, проверить результат с помощью теоремы Элвинга, и, если критерий выполнен, вывести результат, иначе повторить процедуру. Остаются технические вопросы: как оптимизировать функцию $\Phi(\xi)$ и как проверять теорему Элвинга численно.

Оптимизация $\Phi(\xi)$

- У любой матрицы $A^{-}(x)$ при условии постоянного ранга существует непрерывная вторая производная выражающаяся через производные $A(x)$
- Так как $\Phi(\xi) = c^{\top} M^{-}(\xi) c$, а ранг $M(\xi)$ зависит только от количества опорных точек, то существуют вторые производные у Φ по опорным точкам и весам
- Поэтому был использован квазиньютоновский алгоритм оптимизации с ограничениями L-BFGS-B

Оптимизация $\Phi(\xi)$
- У любой матрицы $A^{-}(x)$ при условии постоянного ранга существует непрерывная вторая производная выражающаяся через производные $A(x)$
- Так как $\Phi(\xi) = c^{\top} M^{-}(\xi) c$, а ранг $M(\xi)$ зависит только от количества опорных точек, то существуют вторые производные у Φ по опорным точкам и весам
- Поэтому был использован квазиньютоновский алгоритм оптимизации с ограничениями L-BFGS-B

Для оптимизации необходим алгоритм поддерживающий ограничения на область значений (хотя бы типа “коробка”) и который бы сходился с приемлемой скоростью на нашей задаче (потому что возможно, что алгоритм будет множество раз попадать в локальный минимум перед тем, как попадет в глобальный). Существует формула, которая выражает в явном виде производную к псевдообращению матрицы A(x), если её ранг не зависит от x (и далее можно перейти ко второй производной). А функция Φ выражается через псевдообращение информационной матрицы. Поэтому при фиксированном размере плана можно эффективно использовать квазиньютоновские методы оптимизации с ограничениями (здесь использован L-BFGS-B).

Проверка условий теоремы Элвинга

Нужно найти такой вектор p, что $\left|p^\top f(x)\right| \leqslant 1$, при этом равенство достигается в опорных точках. Такие p будут решением уравнения

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \\ f_1'(x_{i_1}) & \dots & f_n'(x_{i_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1'(x_{i_m}) & \dots & f_n'(x_{i_m}) \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где x_{i_j} — опорные точки не на границе области планирования, а $s_i = \pm 1$.

Проверка условий теоремы Элвинга

Нужно найти такой вектор p, что $\left|p^\top f(x)\right| \leqslant 1$, при этом равенство достигается в опорных точках. Такие p будут решением уравнения

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \\ f_1'(x_{i_1}) & \dots & f_n'(x_{i_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1'(x_{i_m}) & \dots & f_n'(x_{i_m}) \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где x_{i_j} — опорные точки не на границе области планирования, а $s_i = \pm 1$.

Встает вопрос: как проверять существующий критерий c-оптимальности? По теореме Элвинга должен существовать такой вектор коэффициентов p, что его скалярное произведение с регрессионными функциями по модулю не превосходит единицу, а при этом строгое равенство достигается в точках плана. Такой вектор p будет удовлетворять одной из таких систем уравнений: $p^\top f(x)$ равен плюс или минус единице в данных точках плана (будут перебираться все варианты), а во всех точках плана, лежащих не на границах отрезка, производная функции $p^\top f(x)$ равна нулю, так как в этих точках по определению должен быть локальный экстремум.

Для всех p с нулевой невязкой для предыдущего уравнения и данного плана ξ, проверяем третье условие теоремы Элвинга:

$$c = h \sum_{i=1}^{m} \omega_i f(x_i) p^\top f(x_i)$$

- Для того, чтобы не вычислять h достаточно проверять коллинеарность векторов
- Все сравнения с точностью до машинного нуля
- Если равенство выполняется, то ξ — c-оптимальный план

Проверка условий теоремы Элвинга

Для всех p с нулевой невязкой для предыдущего уравнения и данного плана ξ, проверяем третье условие теоремы Элвинга:

$$c = h \sum_{i=1}^{m} \omega_i f(x_i) p^\top f(x_i)$$

- Для того, чтобы не вычислять h достаточно проверять коллинеарность векторов
- Все сравнения с точностью до машинного нуля
- Если равенство выполняется, то ξ — c-оптимальный план

Взяв все такие p, невязка которых с предыдущим уравнением равна нулю, можно проверять третье условие теоремы Элвинга, которое выглядит как следующее равенство, в котором известно всё, кроме константы h, нахождение которой можно опустить, так как ясно, что она существует, если вектора в левой и правой части коллинеарны. Произведя все сравнения с точностью до машинного нуля, выполнение этого равенства для уже найденного вектора p и данного плана ξ равносильно тому, что план ξ является c-оптимальным, а иначе — не является. Таким образом процедура нахождения c-оптимальных планов в общем случае построена.

Результаты

- Описаны оптимальные планы размера n для нахождения производной в полиномиальной модели без свободного члена с $\mathcal{X} = [0, 1]$
- Приведен пример применения этого результата
- Разработан алгоритм численного нахождения c-оптимальных планов в общем случае

Результаты

- Описаны оптимальные планы размера n для нахождения производной в полиномиальной модели без свободного члена с $\mathcal{X} = [0, 1]$
- Приведен пример применения этого результата
- Разработан алгоритм численного нахождения c-оптимальных планов в общем случае

В работе на текущий момент были описаны некоторые явные решения для нахождения планов для оценки производной в модели без нулевого члена, рассмотрен пример применения полученных результатов и построен алгоритм нахождения c-оптимальных планов в общем случае.