Пусть каждый индивид определяется каким-то вектором параметров $\theta \in \mathcal{A}$. Пусть эти параметры имеют распределение G, то есть вероятность того, что θ принадлежит какому-то множеству A определяется следующим образом:

$$P_G(A) = \int\limits_A G(d\theta),$$

при этом $P_G(\mathcal{A}) = 1$.

Пусть $\tilde{\omega}(\theta', \theta'') \geqslant 0$ — вес, показывающий влияние индивида θ'' на θ' при составлении социальной нормы. Чтобы оценивать среднее, а не агрегированное влияние на индивида, введем нормированные веса ω:

$$\omega(\theta', \theta'') = \frac{\tilde{\omega}(\theta', \theta'')}{\int\limits_{\theta \in \mathcal{A}} \tilde{\omega}(\theta, \theta'')G(d\theta)}.$$

Тогда социальная норма $\overline{x}(\theta)$ описывается как

$$\overline{x}(\theta) = \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta')\omega(\theta, \theta')G(d\theta').$$

Так как по определению ω

$$\int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} \omega(\theta, \theta')G(d\theta') = 1 \quad \forall \theta \in \mathcal{A},$$

то

$$G_\theta(A) = \int\limits_{\theta' \in A} \omega(\theta, \theta')G(d\theta')$$

определяет распределение для каждого индивида. Его можно интерпретировать как распределение внимания индивида θ при составлении социальной нормы. Тогда

$$\overline{x}(\theta) = \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta')G_\theta(d\theta').$$

Пусть полезность каждого индивида определяется следующим образом:

$$u(\theta) = -\frac{1}{2}(x(\theta) - \alpha(\theta))^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{1-\lambda}\left(x(\theta) - \overline{x}(\theta)\right)^2,$$

где $\lambda \in (0, 1)$. Условие первого порядка (для x)записывается как

$$x(\theta) = (1-\lambda)\alpha(\theta) + \lambda\overline{x}(\theta). \tag{1}$$

Предложение 1 *Существует единственная функция $x(\theta)$ удовлетворяющая условию* (1).

Доказательство. Пусть $\rho(x', x'') = \|x' - x''\|_\infty = \sup\limits_\theta |x'(\theta) - x''(\theta)|$ — метрика, порожденная sup-нормой. Также пусть $\mathbb{A} = (1-\lambda)\alpha(\theta) + \lambda\overline{x}(\theta)$ — оператор, воздействующий, как правая часть (1). Для того, чтобы у (1) существовала единственная неподвижная точка, достаточно показать, что $\mathbb{A}$ — сжимающее отображение, т.е. существует такое $\alpha \in (0,1)$, что $\rho(\mathbb{A}x', \mathbb{A}x'') \leqslant \alpha\rho(x', x'')$ для любых x', x''.

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbb{A}x', \mathbb{A}x'') &= \left\|(1-\lambda)\alpha + \lambda\overline{x'} - ((1-\lambda)\alpha + \lambda\overline{x''})\right\|_\infty \\
&= \lambda \left\|\overline{x'} - \overline{x''}\right\|_\infty = \lambda \sup_\theta \left|\overline{x'}(\theta) - \overline{x''}(\theta)\right| \\
&= \lambda \sup_\theta \left| \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x'(\theta') G_\theta(d\theta') - \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x''(\theta') G_\theta(d\theta') \right| \\
&= \lambda \sup_\theta \left| \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} (x'(\theta') - x''(\theta')) G_\theta(d\theta') \right| \\
&\leq \lambda \sup_\theta \left| \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} \left|x'(\theta') - x''(\theta')\right| G_\theta(d\theta') \right| \\
&\leq \lambda \sup_\theta \left| \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} \left\|x' - x''\right\|_\infty G_\theta(d\theta') \right| \\
&= \lambda \sup_\theta \left| \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} \rho(x', x'') G_\theta(d\theta') \right| \\
&= \lambda \sup_\theta \left|\rho(x', x'')\right| = \lambda\rho(x', x'')
\end{aligned}$$

Но $\lambda < 1$, поэтому $\mathbb{A}$ — сжимающее отображение. Следовательно существует единственная функция x удовлетворяющая (1). ■

Предложение 2 *Если* $\omega(\theta', \theta'') = \omega(\theta'', \theta')$, *то* $\mathbb{E}x = \mathbb{E}\alpha$.

Доказательство. Найдем математическое ожидание от обоих частей равенства (1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}x &= \mathbb{E}\left[(1-\lambda)\alpha(\theta) + \lambda\overline{x}(\theta)\right] \\
&= (1-\lambda)\mathbb{E}\alpha + \lambda\mathbb{E}\overline{x}.
\end{aligned}$$

Вычислим $\mathbb{E}\overline{x}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{x} &= \mathbb{E} \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta')\omega(\theta, \theta') G(d\theta') \\
&= \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta') \mathbb{E}\left[\omega(\theta, \theta')\right] G(d\theta') \\
&= \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta') \mathbb{E}\left[\omega(\theta', \theta)\right] G(d\theta') \\
&= \int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta') G(d\theta') = \mathbb{E}x.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x &= (1-\lambda)\mathbb{E}\alpha + \lambda\mathbb{E}x,\\ (1-\lambda)\mathbb{E}x &= (1-\lambda)\mathbb{E}\alpha,\\ \mathbb{E}x &= \mathbb{E}\alpha.\end{aligned}$$

■

Пусть

$$\tilde{\omega}(\theta', \theta'') = x(\theta'')^{\beta(\theta')},$$

тогда нормированные веса равны

$$\omega(\theta', \theta'') = \frac{x(\theta'')^{\beta(\theta')}}{\int\limits_{\theta\in\mathcal{A}} x(\theta)^{\beta(\theta')} G(d\theta)}. \tag{2}$$

Предложение 3 *Пусть веса заданы как (2) и $x(\theta) \geq 0$ для любого θ. Тогда*

1. $\bar{x}(0) = \int\limits_{\theta\in\mathcal{A}} x(\theta) G(d\theta) = \mathbb{E}x$
2. $\lim\limits_{\beta\to\infty} \bar{x}(\beta) = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\theta} x(\theta)$
3. $\lim\limits_{\beta\to-\infty} \bar{x}(\beta) = \operatorname*{ess\,inf}\limits_{\theta} x(\theta)$.

.

Доказательство. Если вспомнить, что $G(\mathcal{A}) = 1$, то первое утверждение доказывается просто подстановкой $\beta = 0$.

Далее будет доказано второе утверждение. Третье доказывается абсолютно аналогичным способом.

Обозначим $\operatorname{ess\,sup} x$ как M. Для какого-то $\varepsilon > 0$ разобьем множество $\mathcal{A}$ на два дизъюнктных подмножества: $\mathcal{D}_\varepsilon = \{\theta \in \mathcal{A} \mid x(\theta) > M - \varepsilon\}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon = \mathcal{A} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon$. По определению M множество $\mathcal{D}_\varepsilon$ имеет ненулевую меру. Разделим интегралы в числителе и знаменателе $\bar{x}$ на два:

$$\bar{x}(\theta') = \frac{\int\limits_{\theta\in\mathcal{A}} x(\theta)^{\beta(\theta')+1} G(d\theta)}{\int\limits_{\theta\in\mathcal{A}} x(\theta)^{\beta(\theta')} G(d\theta)} = \frac{\int\limits_{\theta\in\mathcal{D}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')+1} G(d\theta) + \int\limits_{\theta\in\widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')+1} G(d\theta)}{\int\limits_{\theta\in\mathcal{D}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')} G(d\theta) + \int\limits_{\theta\in\widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')} G(d\theta)}.$$

По теореме о среднем, непрерывности и монотонности возведения в степень положительного числа существуют такие $x_{M_1}, x_{M_2}, x_{m_1}, x_{m_2}$, что

$$0 \le x_{m_1}, x_{m_2} \le M - \varepsilon$$
$$M - \varepsilon < x_{M_1}, x_{M_2} \le M$$
$$\int\limits_{\theta \in \mathcal{D}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')+1} G(d\theta) = G(\mathcal{D}_\varepsilon) x_{M_1}^{\beta+1}$$
$$\int\limits_{\theta \in \widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')+1} G(d\theta) = G(\widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon) x_{m_1}^{\beta+1}$$
$$\int\limits_{\theta \in \mathcal{D}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')} G(d\theta) = G(\mathcal{D}_\varepsilon) x_{M_2}^{\beta}$$
$$\int\limits_{\theta \in \widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} x(\theta)^{\beta(\theta')} G(d\theta) = G(\widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon) x_{m_2}^{\beta}.$$

Поэтому

$$\bar{x}(\beta) = \frac{G(\mathcal{D}_\varepsilon) x_{M_1}^{\beta+1} + G(\widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon) x_{m_1}^{\beta+1}}{G(\mathcal{D}_\varepsilon) x_{M_2}^{\beta} + G(\widetilde{\mathcal{D}}_\varepsilon) x_{m_2}^{\beta}}.$$

Так как $x_{M_1} > x_{m_1}$ по определению то, при $\beta \to \infty$, $x_{m_1}^\beta = o(x_{M_1}^\beta)$. Аналогично $x_{m_2}^\beta = o(x_{M_2}^\beta)$. Из определения чисел x_{M_1} и x_{M_2}, следует, что $|x_{M_i} - M| < \varepsilon$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ оба x_{M_i} стремятся к M. А так как $G(\mathcal{D}_\varepsilon) \neq 0$, то

$$\lim_{\substack{\beta\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \bar{x}(\beta) = \lim_{\substack{\beta\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{G(\mathcal{D}_\varepsilon) x_{M_1}^{\beta+1} + o(x_{M_1}^{\beta+1})}{G(\mathcal{D}_\varepsilon) x_{M_2}^{\beta} + o(x_{M_2}^{\beta})} = \lim_{\substack{\beta\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{G(\mathcal{D}_\varepsilon) M^{\beta+1}}{G(\mathcal{D}_\varepsilon) M^{\beta}} = M = \operatorname{ess\,sup} x.$$

■

Предложение 4 *Если $\beta(\theta_1) > \beta(\theta_2)$, и веса заданы как (2), тогда $\bar{x}(\theta_1) > \bar{x}(\theta_1)$.*

Доказательство. ff ■

Такая функция весов имеет смысл потому что при $\beta(\theta) \to \infty$ распределение G_θ слабо сходится к $\delta_{\max x}$, а при $\beta(\theta) \to -\infty$ оно слабо сходится к $\delta_{\min x}$. То есть при больших параметрах β индивид строит свою социальную норму из наиболее успешных соседей, а при маленьких значениях β социальной нормой для индивида будут являться наименее успешные соседи что и выражает «амбиции». Тогда (1) принимает следующий вид

$$x(\theta) = (1-\lambda)\alpha(\theta) + \lambda \frac{\int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta')^{\beta(\theta)+1} G(d\theta')}{\int\limits_{\theta' \in \mathcal{A}} x(\theta')^{\beta(\theta)} G(d\theta')}.$$

Или, в случае m атомарных индивидов,

$$x_i = (1-\lambda)\alpha_i + \lambda \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^{\beta_i+1}}{\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^{\beta_i}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$