

## 7. Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний)

*Метод Монте-Карло. Происхождение метода Монте-Карло. Общая схема ММК. Особенности метода Монте-Карло.*

**Метод Монте-Карло (ММК) – это численный метод решения математических (физических) задач при помощи моделирования случайных чисел.**

Или

### Определение 7.1

**Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний) – общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с аналогичными величинами решаемой задачи.**

Используется для решения задач в различных областях физики, химии, математики, экономики, оптимизации, теории управления и др.

## Происхождение метода Монте-Карло.

Создателями метода статистических испытаний (метода Монте-Карло) считают американских математиков *Неймана, С. Улама, Н.Метрополиса*, а также *Г.Кана и Э.Ферми*. В 1944 году, в связи с работами по созданию атомной бомбы Нейман предложил широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Первая работа, где этот вопрос систематически излагался, принадлежит *Метрополису и Уламу*. Принято считать 1949 г., когда появилась их работа (*Metropolis N., Ulam S.M., The Monte Carlo method. J.Am.Statistical assoc. 1949 № 247 v.44 p.335-341*) датой рождения метода.



Рисунок 8: Монте-Карло, Монако



Рисунок 9: Казино в Монте-Карло

Теоретическая основа метода была известна уже давно, однако возникновение метода Монте-Карло как весьма универсального численного метода стало возможным только благодаря появлению компьютеров.

## Общая схема метода Монте-Карло

Сущность метода статистического моделирования заключается в следующем. Выбирается определенная модель, описывающая исследуемый процесс, явление, систему. На основании математического описания модели и численных методов разрабатывается моделирующий алгоритм, имитирующий внешние воздействия на систему, поведение ее элементов, их взаимодействие и последовательное изменение состояний всей системы во времени.

Затем осуществляется одна случайная реализация моделируемого явления, например: один “распад” радиоактивного атома, один “процесс” прохождения элементарной частицы через вещество, один “обстрел” цели, один “день работы” транспорта, и т.п..

После осуществления единичной реализации моделируемого явления эксперимент многократно повторяется, и по результатам моделирования определяются различные характеристики модели. При этом полнота и достоверность полученной путем моделирования информации о свойственных системе закономерностях зависят от того, насколько точно использованная математическая модель описывает реальную систему, от точности вычислительных методов, использованных при разработке моделирующего алгоритма, и от числа проведенных испытаний.

Суть решения физических задач методом Монте-Карло заключается в следующем:

- Физическому явлению или описывающим его уравнениям сопоставляется имитирующий вероятностный процесс.
- Величинам, являющимся решением задачи, сопоставляются математические ожидания случайных величин вероятностного процесса.
- На основе специального алгоритма псевдослучайных чисел производится расчет реализаций случайных величин имитирующего процесса и решение (вместе со стандартной погрешностью) находится в виде средних значений, соответствующих математическим ожиданиям.

Рассмотрим эту схему несколько более детально. Допустим, нам необходимо вычислить некоторую неизвестную величину со значением  $m$  (если она случайная, то  $m$  - среднее значение этой величины).

Попытаемся придумать такую случайную величину  $\xi$ , для которой

$$M\xi = m \quad \text{и} \quad D\xi = b^2.$$

Рассмотрим  $N$  независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ , для которых функции распределения совпадают с распределением случайной величины  $\xi$ . Если  $N$  достаточно велико, то согласно центральной предельной теореме (см. раздел “Центральная предельная теорема”) распределение суммы  $\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  будет приблизительно нормальным с параметрами  $a = N m$ ,  $\sigma = N \sqrt{b}$ .

Используя правило “ $3\sigma$ ” для нормального распределения

$$\text{Prob}(a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma) = \text{erf}(3) = 0,997 \quad (7.1)$$

в нашем случае имеем:

$$\text{Prob}\left(N m - 3b\sqrt{N} < \rho_N < N m + 3b\sqrt{N}\right) \approx 0,997 \quad (7.2)$$

или

$$\text{Prob}\left(m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{\rho_N}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right) \approx 0,997 \quad (7.3)$$



$$\text{Prob} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j - m \right| < \frac{3b}{N} \right) \approx 0,997 . \quad (7.4)$$

Из этого соотношения следует метод расчета  $m$  и оценка погрешности метода.

Итак для получения значения некоторой величины с помощью случайных чисел, найдем  $N$  значений случайной величины  $\xi$  (т.к. все  $\xi_i$  имеют одно распределение, то это эквивалентно нахождению одного значения каждой из  $\xi_i$ ).

Из соотношения (7.4) следует, что среднее значение (среднее арифметическое) этой величины равно с большой вероятностью величине  $m$ , т. е.

$$m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j , \quad (7.5)$$

а погрешность вычисления  $\sigma$  не превышает  $3b/\sqrt{N}$ .

Иногда для оценки погрешности используют вероятностную ошибку  $r_N$

$$r_N = 0,6745 \frac{b}{\sqrt{N}} .$$

Очевидно, эта ошибка стремится к нулю с ростом  $N$ .

**Отметим две особенности метода статистического моделирования.**

Первая – относительная простота вычислительного алгоритма. Как правило, составляется программа для одной реализации, а затем эта процедура  $N$  раз повторяется.

Вторая – погрешности вычислений обычно пропорциональны  $1/\sqrt{N}$ , т. е. метод нецелесообразно применять там, где требуется очень высокая точность вычислений.

Таким образом, единичная реализация является основным элементом метода статистического моделирования и представляет один случай осуществления моделируемого процесса (явления) со всеми присущими ему случайностями. Каждый раз, когда в ход моделируемого процесса вмешивается случайность, должен быть реализован какой-то механизм случайного выбора (бросание монет, костей, вынимание жетона из вращающегося барабана, числа из набора чисел, и т.д.), называемый “единичным жребием”.

Единичный жребий должен давать ответ на один из вопросов: произошло или не произошло некое событие  $A$ ? Какое из возможных событий  $A_1, A_2, \dots, A_k$  произошло? Какое значение приняла случайная величина  $X$ ? какую совокупность значений приняла система случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_k$ ? и т.п..

Например, при моделировании прохождения элементарной частицы через вещество единичный жребий должен отвечать на вопросы: произошло или не произошло взаимодействие частицы с веществом (событие  $A$ )? Какой процесс произошел при взаимодействии . поглощение или рассеяние (события  $A_1, A_2, \dots, A_k$ )?

Если произошло рассеяние, то на какой угол частица рассеялась (случайная величина  $X$ )? Какие координаты точки взаимодействия частицы с веществом (система случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_k$ )? и т.д..

Каждая реализация случайного явления методом Монте-Карло рассматривается как последовательность конечного числа элементарных случайных событий (единичных жребиев), перемежающихся обычными расчетами. Расчетами учитывается влияние исхода единичного жребия на ход моделирования (в частности, на условия, в которых будет осуществляться следующий единичный жребий).

Для того, чтобы реализовать единичный жребий, необходимо получать на ЭВМ последовательности значений случайных величин (скалярных или векторных) с заданными законами распределения. Поскольку при решении конкретных задач могут потребоваться случайные величины с самыми разнообразными распределениями (пуассоновское, гауссовское, биномиальное, равномерное, экспоненциальное и т.д.), то задача моделирования необходимой случайной величины может показаться невероятно сложной. Однако, все эти задачи могут быть разрешены с помощью одного стандартного механизма, позволяющего решить одну единственную задачу . получить случайную величину, распределенную с равномерной плотностью от 0 до 1.

## 8. Получение случайных и псевдослучайных чисел

*Случайные числа и их применение при решении физических задач. Методы генерации случайных чисел. Недостатки использования случайных чисел в компьютерных экспериментах. Псевдослучайные числа.*

При решении многих физических (и не только физических) необходимы случайные числа. И следовательно, нам необходим механизм получения случайных чисел или *генератор случайных чисел*.

Различают три способа получения случайных величин: таблицы случайных чисел, генераторы случайных чисел и метод псевдослучайных чисел.

Табличный метод основан на использование заранее созданных таблиц случайных чисел с различными распределениями. В ходе расчета, когда требуется значение случайной величины, берется значение из таблицы. Необходимо отметить, что составить хорошую таблицу случайных чисел не так просто, как это может показаться. Поэтому составленные таблицы тщательно проверяются с помощью специальных статистических тестов. Такой метод ввиду низкой скорости вычислений в настоящее время практически не используется.

В качестве генераторов случайных величин используют различные приборы. Наиболее известным прибором для получения равномерно распределенных случайных чисел является рулетка. В настоящее время используют электронные приборы. Так например, случайные числа с распределением типа орел-решка можно получить измеряя уровень шумов электронных приборов. Однако и этот метод не свободен от недостатков, так как трудно проверить "качество" полученных чисел.

Отметим недостатки и достоинства датчиков случайных чисел.

### **Недостатки:**

- Необходимо специальное устройство.
- Неповторимость результатов.

### **Достоинства:**

- Числа, получаемые при помощи этих генераторов являются действительно случайными.

В настоящее время при расчетах используют не случайные величины, а числа имитирующие их поведение. Такие числа называются **псевдослучайными числами**. Имитировать поведение случайных чисел можно с помощью формул. Большинство алгоритмов для получения псевдослучайных чисел  $\gamma$  имеют вид

$$\gamma_{k+1} = \Phi(\gamma_k) . \quad (8.1)$$

В качестве, элементарного примера, рассмотрим **метод середины квадратов** (предложен Дж.Нейманом) для получения равномерно распределенной величины в промежутке от 0 до 1.



Выберем произвольное действительное число  $\gamma_0$  с 4 знаками после запятой, которое лежит от 0 до 1 и возведем его в квадрат:

$$\gamma_0 = 0,9876 \quad (\gamma_0)^2 = 0,97\boxed{5353}76 \quad (8 \text{ знаков}) .$$

Из середины  $(\gamma_0)^2$  берем 4 цифры и получаем число  $\gamma_1$  и возводим его также в квадрат

$$\gamma_1 = 0,5353 \quad (\gamma_1)^2 = 0,28\boxed{6546}09 \rightarrow$$

Аналогично процедуре получения  $\gamma_1$  находим число

$$\gamma_2 = 0,6546 .$$

Выполняя эту процедуру  $N$  раз получим набор чисел

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\} = \{0,9876, 0,5353, 0,6546, \dots\}$$

имитирующих поведение случайной величины равномерно распределенной в промежутке  $(0,1)$ . Отметим сразу, что от этого метода вычислители отказались, так как в последовательностях, построенных таким образом, получается больше чем нужно малых чисел.

Известно, что случайные числа, равномерно распределенные в интервале  $(0,1)$ , могут быть получены из трансцендентных чисел, таких, как  $\pi = 3.14159265358\dots$  "разрезанием" мантиссы этого числа на части, содержащие определенное количество цифр, если каждую из них считать мантиссой очередного случайного числа:  $0.141, 0.592, 0.653, \dots$  В микрокалькуляторах последовательность случайных чисел часто получают с помощью рекуррентной формулы:  $\gamma_{k+1} = M(37 \gamma_k)$ , где символ  $M(x)$  означает мантиссу числа  $x$ . Встроенные программы в ЭВМ используют близкую идею.

Отметим, достоинства и недостатки псевдослучайных чисел.

### Достоинства:

- Скорость генерирования псевдослучайных чисел очень большая.
- Затрачивается мало памяти.
- Данную последовательность случайных чисел можно легко воспроизвести.

## Недостатки:

- Ограниченность количества случайных чисел  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ . Ибо, если последовательность вычисляется по формуле  $\gamma_{k+1} = \Phi(\gamma_k)$ , то эта последовательность обязательно периодическая.

Происходит это из-за того, что в ячейках памяти ЭВМ можно записать конечное число нулей и единиц и рано или поздно одно из значений  $\gamma$ , например  $\gamma_L$  совпадает с одним из предыдущих  $\gamma_k$  и тогда:

$$\gamma_{L+i} = \gamma_{k+i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots \quad (L > k) \quad ,$$

где  $P = L - k$  — длина периода .

## 9. Методы генерации псевдослучайных чисел

*Розыгрыш дискретной случайной величины. Метод обратной функции. Метод Неймана. Метод суперпозиции. Метод Батлера. Комбинированный метод. Методы тестирования генераторов псевдослучайных чисел.*

При решении различных задач приходится моделировать различные распределения вероятностей случайных величин. Поэтому возникает задача: как это сделать наиболее экономным способом.

Для решения этой задачи предложена идея конструктивного задания случайных процессов (Н.Винер, П.Леви). Идея состоит в том, чтобы моделировать все распределения исходя из одной “стандартной” случайной величины. Таким распределением является равномерное распределение случайной величины  $\gamma$  на интервале  $(0, 1)$ . Значения же других случайных величин можно получить путем преобразования из “стандартной”.

### Определение 9.1

Процесс получения некоторой случайной величины  $\xi$  путем преобразования одного или нескольких значений “стандартного” случайной величины  $\gamma$  называют **розыгрышем случайной величины  $\xi$** .

Рассмотрим несколько методов розыгрыша  $\xi$  для разных видов распределений.

Дискретная случайная величина  $\chi$ , как правило, задается законом распределения в виде таблицы

$$\chi = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — значения случайной величины  $\chi$ , а  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — вероятности появления этих значений. Другими словами  $\text{Prob}(\chi = x_i) = p_i$ .

Наша задача состоит в воспроизведении значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайной величины  $\chi$ , с вероятностями появления равными  $p_1, p_2, \dots, p_n$  соответственно.

## Алгоритм розыгрыша дискретной случайной величины

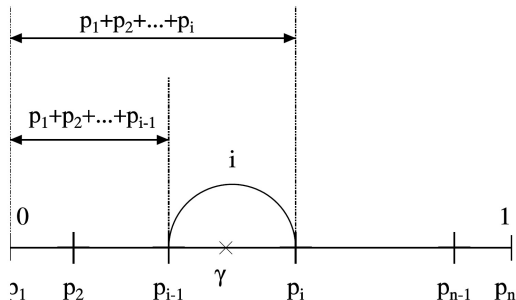
- 1 Необходимо разбить интервал  $(0, 1)$  на  $n$  - интервалов, длины которых равны  $p_1, p_2, \dots, p_n$  соответственно.
- 2 Разыгрываем значение стандартной случайной величины  $\gamma$ .
- 3 Проверяем условие попадания значения  $\gamma$  в  $i$ -тый интервал длиной  $p_i$ :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \dots + p_i . \quad (9.2)$$

Если неравенство верно, то приписываем случайной величине  $\chi$  значение, соответствующее данному интервалу т.е.  $x_i$ .

- 4 При необходимости повторяем шаги 1 — 3 несколько раз с помощью новых значений стандартной величины  $\gamma$  для получения других значений дискретной случайной величины с законом распределения вероятностей (9.1).

На рисунке 10 представлено графическая иллюстрация алгоритма розыгрыша дискретной величины.



$$p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \dots + p_i$$

Рисунок 10: Схема розыгрыша дискретной величины

Для экономии времени выгодно расположить значения дискретной случайной величины  $x_i$ , так чтобы выполнялось соотношение  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ .

## Метод обратной функции

Метод обратной функции основан на теореме

### Теорема 9.2

Если случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения вероятности  $p(x) > 0$  на интервале  $(a, b)$  ( $a < x < b$ ), то случайная величина  $\xi$  удовлетворяющая уравнению

$$F(\xi) = \gamma \quad (9.3)$$

где  $F(x)$  функция распределения

$$F(x) = \int_a^x p(x') dx' ,$$

а  $\gamma$  стандартная равномерно распределенная величина на интервале  $(0, 1)$  величина имеет плотность распределения  $p(x)$ .



Как следует из этой теоремы, с помощью генератора случайных чисел  $\gamma$  уравнение

$$\gamma = F(x) = \int_a^x p(x') dx' \quad (9.4)$$

позволяет воспроизвести значения случайной величины  $\xi$  с плотностью распределения  $p(x)$  на интервале  $(a, b)$  путем обращения (инверсии) уравнения (9.4):

$$x = F^{-1}(\gamma) . \quad (9.5)$$

Такой метод получения называют **методом обратной функции** (или **методом инверсии**).

Рассмотрим примеры:

### Пример 1.

Пусть случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения вероятности  $p(x) = Ce^{-\alpha x}$  на интервале  $(a, b)$ , где константа  $C$  определяется из условия нормировки.

**Пример 2.**

Аналогично легко получить, если  $\gamma$  равномерно распределенная случайная величина на  $(0, 1)$ , то значения случайной величины, рассчитанной по формуле

$$x = (b - a)\gamma + a$$

равномерно распределены на  $(a, b)$  т.е. имеют плотность распределения вероятности

$$p(x) = \frac{1}{b - a} .$$

**Пример 3. Выбор случайного направления в пространстве.**

Когда говорят о случайном направлении, подразумевают выбор в ситуации, когда все направления равновероятны. Направление в трехмерном пространстве удобно задать с помощью единичного вектора  $\vec{\Omega}$ :

$$\vec{\Omega} = \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta\}, \quad (9.6)$$

где углы сферические углы  $\theta, \phi$  изменяются в пределах:  $0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ .  
Формулы для выбора случайного направления имеют вид

$$\cos \theta = 2\gamma_1 - 1, \quad \phi = 2\pi\gamma_2. \quad (9.7)$$

Как видно, из примеров, этот метод применим, если удастся решить уравнение (9.4) относительно значения случайной величины  $x$ . Однако, для большого класса распределений это сделать не удастся. Тогда используются другие методы.

## Метод Неймана

Метод Неймана (метод отбраковки) основан на следующей теореме из математической статистики и теории вероятностей.

### Теорема 9.3

Пусть  $\xi$ —случайная величина, с плотностью распределения  $p(x) \leq c$  (— некоторое положительное число) на интервале  $a < x < b$ . Если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — независимые случайные величины и

$$\xi' = a + \gamma_1(b - a) \quad , \quad \nu' = c \gamma_2 \quad (9.8)$$

то случайная величина  $\xi$ , определяемая условием:

$$\xi = \xi' \quad , \quad \text{если} \quad \nu' < p(\xi') \quad (9.9)$$

имеет плотность вероятности равную  $p(x)$ .

Исходя из этой теоремы метод получения значений случайной величины  $\xi$  с плотностью распределения  $p(x) \leq c$  на интервале  $(a, b)$  состоит в следующем:

- 1 Получаем пару значений  $\gamma_1, \gamma_2$  с помощью стандартного генератора.
- 2 С их помощью строим два случайных числа

$$\xi' = a + \gamma_1(b - a) \quad (9.10)$$

равномерно распределенное на интервале  $(a, b)$  и

$$\nu' = c \gamma_2 \quad (9.11)$$

равномерно распределенное на интервале  $(0, c)$

- 3 С помощью чисел  $\xi'$  и  $\nu'$  проверяем выполнение условия

$$\nu' < p(\xi') \quad (9.12)$$

- 4 Если условие (9.12) выполняется, то считаем, что значение случайной величины  $\xi$  равно  $\xi'$ , если условие не выполняется, то повторяем процедуру начиная с шага 1.

Графическая иллюстрация метода Неймана представлена на рисунке 11.

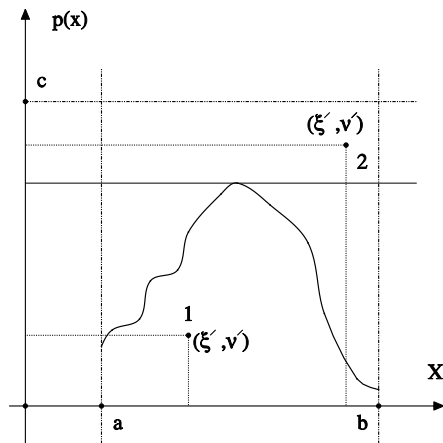


Рисунок 11: Графическое представление метода Неймана

Как видим, в отличие от метода обратной функции здесь возможна ситуация, когда случайное значение полученное с помощью чисел  $\gamma_1, \gamma_2$  может быть отброшено. Для характеристики таких ситуаций введем понятие эффективности метода розыгрыша случайных величин.

### Определение 9.4

Эффективность метода называется вероятность того, что случайное значение полученное с помощью набора стандартных случайных чисел  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  будет принято, а не отброшено.

Для метода Неймана несложно найти

$$\text{Эффективность} \sim \frac{1}{c(b-a)} . \quad (9.13)$$

Так как  $a, b$  являются константами для заданной плотности вероятности, следовательно, чтобы повысить эффективность метода Неймана лучше всего принять  $c = \max p(x)$  на  $(a, b)$ .

## Метод суперпозиции

Первая версия этого метода получения случайных чисел с заданным законом распределения вероятностей была предложен *Дж.Батлером*.

Предположим, что функция распределения  $F(x)$  может быть представлена в виде:

$$F(x) = \sum_{k=1}^n C_k F_k(x) , \quad (9.14)$$

так, что все значения  $C_k > 0$  и  $C_1 + \dots + C_n = 1$ , причем  $F_k(x)$  достаточно "простые" функции (например, могут быть разыграны методом обратной функции).



Введем дискретную величину  $\nu$  с помощью числа слагаемых в (9.14) и коэффициентов  $C_k$

$$\nu = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ C_1, C_2, \dots, C_n \end{pmatrix}, \quad (9.15)$$

т. е. значения случайной величины  $\nu$  представляют собой номер слагаемого в ряде (9.14), а значения коэффициентов этого разложения представляют собой вероятности появления соответствующих номеров слагаемых.

Тогда алгоритм розыгрыша случайной величины  $\xi$  с функцией распределения  $F(x)$  (9.14) методом суперпозиции состоит в следующем:

- ❶ Получаем пару значений  $\gamma_1, \gamma_2$  с помощью стандартного генератора.
- ❷ С помощью  $\gamma_1$  проведем розыгрыш дискретной величины  $\nu$  (9.15) посредством алгоритма, изложенного ранее. Результатом розыгрыша будет **число**  $k$ , нумерующее соответствующее слагаемое в разложении функции распределения (9.14).
- ❸ С помощью полученного числа  $k$  выбираем соответствующую функцию  $F_k(x)$  и проводим розыгрыш значения  $\xi$  методом обратной функции, используя число  $\gamma_2$ :

$$x = F_k^{-1}(\gamma_2) . \quad (9.16)$$

- ❹ При необходимости повторяем шаги 1 – 3 несколько раз с помощью значений стандартной величины  $\gamma$  для получения новых значений случайной величины с законом распределения вероятностей  $F(x)$  (9.14).

## Модифицированный метод суперпозиции

Оказывается при реализации метода суперпозиции можно ограничиться одним случайным числом  $\gamma$  (Г.А.Михайлов Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966 Т.6. № 2, с.380-384.)

В отличие от алгоритма метода суперпозиции вместо числа розыгрыша  $\gamma_2$  можно использовать число  $\eta$ , которое можно рассчитать с помощью числа  $\gamma_1$  и коэффициентов разложения  $C_k$

$$\eta = \frac{\gamma_1 - \sum_{j=1}^{k-1} C_j}{C_k} . \quad (9.17)$$

**Пример.**

Пусть необходимо получить значения случайной величины с плотностью распределения вероятности  $p(x) = \frac{3}{8}(1 + x^2)$  для  $-1 < x < 1$  (закон Релея в оптике или угловое распределение фотонов в комптоновском рассеянии). Представим  $p(x)$  в виде

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{3}{8}(1 + x^2) = \\ &= 3/4 p_1(x) + 1/4 p_2(x) \end{aligned} \tag{9.18}$$

где

$$p_1(x) = 1/2 \qquad p_2(x) = 1,5x^2 .$$

тогда соответствующая функция распределения  $F(x)$  представима в виде суммы

$$F(x) = 3/4 F_1(x) + 1/4 F_2(x) \qquad (9.19)$$

где

$$F_1(x) = \frac{x+1}{2} , \qquad F_2(x) = \frac{x^3}{2} .$$

Тогда процесс получения значений случайной величины с заданным интегральным законом распределения состоит в выполнении следующих шагов

- 1 Разыгрываем номер как значение дискретной величины

$$\nu = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3/4, & 1/4 \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

используя число  $\gamma_1$

- 2 Затем, получаем значение случайной величины из уравнений

$$x = F_1^{-1}(\gamma_2), \text{ если } k = 1 \text{ или}$$

$$x = F_2^{-1}(\gamma_2), \text{ если } k = 2,$$

используя число  $\gamma_2$ . В итоге имеем значение  $x$  случайной величины

$$x = \begin{cases} 2\gamma_2 - 1, & \text{если } \gamma_1 < 0,75 \\ \sqrt[3]{2\gamma_2}, & \text{если } \gamma_1 > 0,75. \end{cases} \quad (9.21)$$

Пусть функцию плотности распределения можно представить в виде:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) g_i(x) \quad (9.22)$$

где  $\alpha_i > 0$ ;  $0 \leq g_i(x) \leq 1$ .

Функции  $f_i(x)$  являются плотностями распределений т.е.  $f_i(x) \geq 0$  для всех  $x$  из области определения ( $a < x < b$ ) и

$$\int_a^b f_i(x) dx = 1 \quad (9.23)$$

Обозначим функции распределений вероятностей как  $F_i(x)$  для соответствующих  $f_i(x)$ :

$$F_i(x) = \int_a^x f_i(x') dx' . \quad (9.24)$$

Тогда алгоритм розыгрыша случайной величины  $x$  подчиняющейся закону распределения с плотностью вероятности  $p(x)$  (9.22) выглядит следующим образом:



- 1 Получаем пару значений  $\gamma_1, \gamma_2$  с помощью стандартного генератора.
- 2 С помощью  $\gamma_1$  выбираем случайное число  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) нумерующее соответствующее слагаемое в разложении функции распределения (9.22) с вероятностью пропорциональной  $\alpha_i$  посредством алгоритма, изложенного в (??) т.е. такое для которого выполняется условие

$$\left( \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) < \gamma_1 < \left( \sum_{i=1}^j \alpha_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) . \quad (9.25)$$

- 3 Разыгрывается случайная величина  $x$  с плотностью распределения  $f_j(x)$  методом обратной функции т.е.

$$x = F_j^{-1}(\gamma_2)$$

- 4 Далее, отбирается такая случайная величина  $x$  для которой

$$g_j(x) \leq \gamma_2$$

В противном случае величина  $x$  бракуется и процедура повторяется вновь.

Этот метод удобен, если число слагаемых  $n$  в разложении (9.22) невелико, а розыгрыш плотностей распределений  $f_i(x)$  производится методом обратной функции. Для повышения эффективности важно, чтобы значение  $g_i(x)$  не сильно отличаются от 0 для всех  $x$  (т.е. пункт 3 выполнялся бы достаточно редко).

Среднее число попыток для розыгрыша одной случайной величины:

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Данный метод активно используется при моделировании характеристик процессов взаимодействия элементарных частиц.

## Моделирование специальных распределений

Пусть имеется случайная величина  $\xi$  с нормальным распределением, которое имеет математическое ожидание  $a$  и дисперсию  $D$ :

$$a = 0, \quad \sigma = \sqrt{D} = 1 \quad (9.26)$$

Тогда для ее розыгрыша можно использовать:

**Метод с использованием центральной предельной теоремы**

$$\xi^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \left( \gamma_i - \frac{1}{2} \right) \quad (9.27)$$

при  $n \rightarrow \infty$  случайная величина  $\xi^{(n)}$  имеет нормальное распределение с параметрами (9.26). Обычно, для удобства выбирают  $n = 12$  т.е.

$$\xi^{(12)} = \sum_{i=1}^{12} (\gamma_i) - 6$$

В ряде случаев для улучшения свойств применяют специальное преобразование, которое дает случайную величину  $\nu^{(n)}$  с нормальным распределением:

$$\nu^{(n)} = \xi^{(n)} + \frac{1}{20n} ((\xi^{(n)})^3 - 3\xi^{(n)}) . \quad (9.28)$$

### Двумерное нормальное распределение

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} .$$

Величины  $\xi, \nu$  имеют нормальное стандартное распределение:

$$\xi = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \cos ( 2\pi \gamma_2 ) , \quad \nu = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \sin ( 2\pi \gamma_2 ) . \quad (9.29)$$

Заметим, что  $\xi$  и  $\nu$  подчиняются совместно распределению (9.28).

Отметим, что для получения значений случайной величины  $x$ , имеющего нормальное распределение с произвольными значениями параметров  $a$ ,  $\sigma$  используют преобразование

$$x = a + \sqrt{2}\sigma\xi . \quad (9.30)$$

где  $\xi$  – значения стандартизированного нормального распределения