2. Основные понятия теории вероятности и математической статистики

Частота попадания случайной величины.

Для исследования свойств объекта проводят измерения, позволяющие количественно дать характеристики свойств этого объекта. На практике производится ограниченное число измерений n при одинаковых условиях. В результате получаем множество событий (значений) исследуемой величины X: $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, которое представляет собой выборку объема n. Таким образом, возможные исходы некоторого эксперимента (измерения) представляют собой множество точек, которые можно сочетать разными способами. **Такие сочетания называют событиями**.

В том случае,(т.е. когда одна и та же характеристика объекта принимает различные значения) говорят о том, что величина X является ***случайной величиной***. Случайная величина -это действительное число (или набор действительных чисел), которое заключено между $-\infty$ и $+\infty$, которое сопоставляется каждой возможной точке из числа значений этой характеристики. При соответствующих условиях для каждое событие можно характеризовать **частотой появления** ν_n.

2. Основные понятия теории вероятности и математической статистики

Частота попадания случайной величины.

Для исследования свойств объекта проводят измерения, позволяющие количественно дать характеристики свойств этого объекта. На практике производится ограниченное число измерений n при одинаковых условиях. В результате получаем множество событий (значений) исследуемой величины X: $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, которое представляет собой выборку объема n. Таким образом, возможные исходы некоторого эксперимента (измерения) представляют собой множество точек, которые можно сочетать разными способами. **Такие сочетания называют событиями**.

В том случае,(т.е. когда одна и та же характеристика объекта принимает различные значения) говорят о том, что величина X является ***случайной величиной***. Случайная величина -это действительное число (или набор действительных чисел), которое заключено между $-\infty$ и $+\infty$, которое сопоставляется каждой возможной точке из числа значений этой характеристики. При соответствующих условиях для каждое событие можно характеризовать **частотой появления** ν_n.

2. Основные понятия теории вероятности и математической статистики

Частота попадания случайной величины.

Для исследования свойств объекта проводят измерения, позволяющие количественно дать характеристики свойств этого объекта. На практике производится ограниченное число измерений n при одинаковых условиях. В результате получаем множество событий (значений) исследуемой величины X: $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, которое представляет собой выборку объема n. Таким образом, возможные исходы некоторого эксперимента (измерения) представляют собой множество точек, которые можно сочетать разными способами. **Такие сочетания называют событиями**.

В том случае,(т.е. когда одна и та же характеристика объекта принимает различные значения) говорят о том, что величина X является ***случайной величиной***. Случайная величина -это действительное число (или набор действительных чисел), которое заключено между $-\infty$ и $+\infty$, которое сопоставляется каждой возможной точке из числа значений этой характеристики. При соответствующих условиях для каждое событие можно характеризовать **частотой появления** ν_n.

Частотой появления ν_n события A называется отношение числа m появления данного события к общему числу проведенных одинаковых испытаний, в каждом из которых могло появиться или не появиться данное событие:

$$\nu_n = \frac{m}{n} \ . \tag{2.1}$$

Если число испытаний n велико, то, как правило, частоты появления данного события A в различных сериях измерений отличаются мало друг от друга. Это утверждение записывают следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n = p \ . \tag{2.2}$$

Число p ***называются вероятностью (англ.-probability) случайного события*** A . Отметим, что существуют такие события у которых частота появления может сильно отличаться от вероятности, даже при большом числе испытаний.

Частотой появления ν_n события A называется отношение числа m появления данного события к общему числу проведенных одинаковых испытаний, в каждом из которых могло появиться или не появиться данное событие:

$$\nu_n = \frac{m}{n} \ . \tag{2.1}$$

Если число испытаний n велико, то, как правило, частоты появления данного события A в различных сериях измерений отличаются мало друг от друга. Это утверждение записывают следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n = p \ . \tag{2.2}$$

Число p ***называются вероятностью (англ.-probability) случайного события*** A . Отметим, что существуют такие события у которых частота появления может сильно отличаться от вероятности, даже при большом числе испытаний.

Частотой появления ν_n события A называется отношение числа m появления данного события к общему числу проведенных одинаковых испытаний, в каждом из которых могло появиться или не появиться данное событие:

$$\nu_n = \frac{m}{n} \; . \tag{2.1}$$

Если число испытаний n велико, то, как правило, частоты появления данного события A в различных сериях измерений отличаются мало друг от друга. Это утверждение записывают следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n = p \; . \tag{2.2}$$

Число p ***называются вероятностью (англ.-probability) случайного события*** A . Отметим, что существуют такие события у которых частота появления может сильно отличаться от вероятности, даже при большом числе испытаний.

Частотой появления ν_n события A называется отношение числа m появления данного события к общему числу проведенных одинаковых испытаний, в каждом из которых могло появиться или не появиться данное событие:

$$\nu_n = \frac{m}{n} \ . \tag{2.1}$$

Если число испытаний n велико, то, как правило, частоты появления данного события A в различных сериях измерений отличаются мало друг от друга. Это утверждение записывают следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n = p \ . \tag{2.2}$$

Число p ***называются вероятностью (англ.-probability) случайного события*** A . Отметим, что существуют такие события у которых частота появления может сильно отличаться от вероятности, даже при большом числе испытаний.

Как видим из вышеприведенного примера, для описания случайного поведения величины необходима совокупность, содержащая неограниченное число значений измеряемой величины ($n = \infty$). Такая выборка называется генеральной совокупностью. Генеральная совокупность часто используется как важное абстрактное понятие, необходимое в теоретических расчетах, связанных с исследованием поведения физической величины как случайной величины.

Различают два основных типа случайных величин: дискретные случайные величины и непрерывные случайные величины. Если величина X имеет **конечное** число (счетное множество) из последовательности возможных значений $\{x_1, x_2, \dots x_k, \dots,\}$ то такая величина называется *дискретной случайной величиной*. Если случайная величина может принимать любое значение из интервала возможных значений, то такая величина называется *непрерывной случайной величиной*.

Как видим из вышеприведенного примера, для описания случайного поведения величины необходима совокупность, содержащая неограниченное число значений измеряемой величины ($n = \infty$). Такая выборка называется генеральной совокупностью. Генеральная совокупность часто используется как важное абстрактное понятие, необходимое в теоретических расчетах, связанных с исследованием поведения физической величины как случайной величины.

Различают два основных типа случайных величин: дискретные случайные величины и непрерывные случайные величины. Если величина X имеет **конечное** число (счетное множество) из последовательности возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots,\}$ то такая величина называется *дискретной случайной величиной*. Если случайная величина может принимать любое значение из интервала возможных значений, то такая величина называется *непрерывной случайной величиной*.

Как видим из вышеприведенного примера, для описания случайного поведения величины необходима совокупность, содержащая неограниченное число значений измеряемой величины ($n = \infty$). Такая выборка называется генеральной совокупностью. Генеральная совокупность часто используется как важное абстрактное понятие, необходимое в теоретических расчетах, связанных с исследованием поведения физической величины как случайной величины.

Различают два основных типа случайных величин: дискретные случайные величины и непрерывные случайные величины. Если величина X имеет **конечное** число (счетное множество) из последовательности возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots,\}$ то такая величина называется *дискретной случайной величиной*. Если случайная величина может принимать любое значение из интервала возможных значений, то такая величина называется *непрерывной случайной величиной*.

Интегральный закон распределения вероятности.

Для характеристики частоты появления различных значений случайной величины X теория вероятностей предлагает пользоваться указанием **закона распределения вероятностей** различных значений этой величины.

При этом различают два вида описания законов распределения:
1) **интегральный**
2) **дифференциальный.**

Определение 2.1

Интегральным законом, или функцией распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X, называют функцию, значения которой представляют вероятность того, что значения x_k случайной величины X меньше некоторого значения x (x – некоторое произвольное число).

Данное утверждение символически записывается в виде

$$F(x) = \mathrm{Prob}\,(x_k < x)\ , \tag{2.3}$$

где $\mathrm{Prob}\,(x_k < x)$ и представляет собой вероятность события в вышеприведенном определении.

Очевидно, что

$$F\,(a) < F\,(b)\,, \quad \text{при} \quad a \leq b \quad \text{(неубывающая функция)} \tag{2.4}$$

$$F\,(-\infty) = 0\ , \quad F\,(\infty) = 1\ . \tag{2.5}$$

Данное утверждение символически записывается в виде

$$F(x) = \mathrm{Prob}\,(x_k < x)\ , \tag{2.3}$$

где $\mathrm{Prob}\,(x_k < x)$ и представляет собой вероятность события в вышеприведенном определении.

Очевидно, что

$$F\,(a) < F\,(b)\,, \quad \text{при} \quad a \le b \quad \text{(неубывающая функция)} \tag{2.4}$$

$$F\,(-\infty) = 0\ , \quad F\,(\infty) = 1\ . \tag{2.5}$$

Данное утверждение символически записывается в виде

$$F(x) = \mathrm{Prob}\,(x_k < x) \ , \qquad (2.3)$$

где $\mathrm{Prob}\,(x_k < x)$ и представляет собой вероятность события в вышеприведенном определении.

Очевидно, что

$$F\,(a) < F\,(b)\,, \quad \text{при} \quad a \le b \quad \text{(неубывающая функция)} \qquad (2.4)$$

$$F\,(-\infty) = 0\,, \quad F\,(\infty) = 1\,. \qquad (2.5)$$

Дифференциальный закон распределения вероятности.

Для случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(x)$ можно найти **дифференциальный закон распределения вероятностей**:

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \ . \qquad (2.6)$$

$p(x)$ называют кривой плотности распределения вероятностей (или просто **плотность вероятности**).

Свойства $p(x)$: 1) $p(x) \geqslant 0$

2) Из (2.6) следует, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(\xi) d\xi \ . \qquad (2.7)$$

3) Условие нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1 \ . \qquad (2.8)$$

Дифференциальный закон распределения вероятности.

Для случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(x)$ можно найти **дифференциальный закон распределения вероятностей**:

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{2.6}$$

$p(x)$ называют кривой плотности распределения вероятностей (или просто **плотность вероятности**).

Свойства $p(x)$: 1) $p(x) \geqslant 0$

2) Из (2.6) следует, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi\,. \tag{2.7}$$

3) Условие нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1\,. \tag{2.8}$$

Дифференциальный закон распределения вероятности.

Для случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(x)$ можно найти **дифференциальный закон распределения вероятностей**:

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \; . \tag{2.6}$$

$p(x)$ называют кривой плотности распределения вероятностей (или просто **плотность вероятности**).

Свойства $p(x)$: 1) $p(x) \geqslant 0$

2) Из (2.6) следует, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(\xi) d\xi \; . \tag{2.7}$$

3) Условие нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1 \; . \tag{2.8}$$

Дифференциальный закон распределения вероятности.

Для случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F\left(x\right)$ можно найти **дифференциальный закон распределения вероятностей**:

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \; . \tag{2.6}$$

$p(x)$ называют кривой плотности распределения вероятностей (или просто **плотность вероятности**).

Свойства $p\left(x\right)$: 1) $p(x) \geqslant 0$

2) Из (2.6) следует, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi \; . \tag{2.7}$$

3) Условие нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p\left(x\right) \mathrm{d}x = 1 \; . \tag{2.8}$$

Примеры законов распределений:

Нормальное распределение:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (2.9)$$

a и σ -параметры нормального распределения.

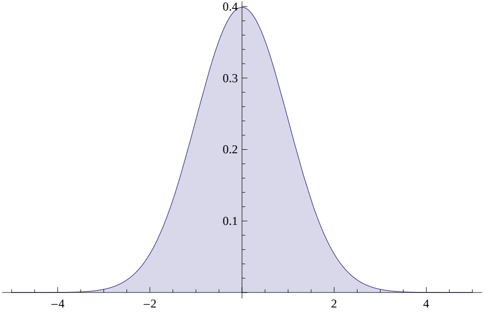

Рисунок 3: Нормальное распределение с $a = 0$ и $\sigma = 1$

Примеры законов распределений:

Нормальное распределение:

$$p\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(x-a\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right], \tag{2.9}$$

a и σ -параметры нормального распределения.

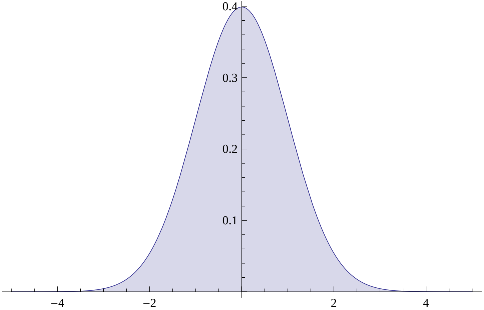

Рисунок 3: Нормальное распределение с $a=0$ и $\sigma=1$

Примеры законов распределений:

Нормальное распределение:

$$p\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}\right] \ , \tag{2.9}$$

a и σ -параметры нормального распределения.

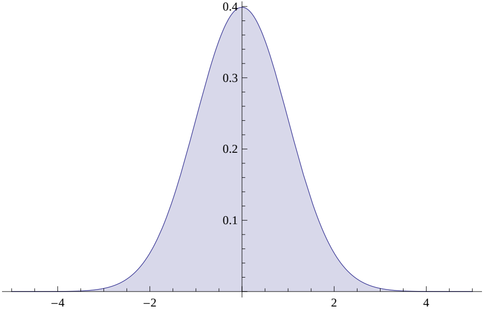

Рисунок 3: Нормальное распределение с $a = 0$ и $\sigma = 1$

Примеры законов распределений:

Нормальное распределение:

$$p\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(x-a\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]\ , \tag{2.9}$$

a и σ -параметры нормального распределения.

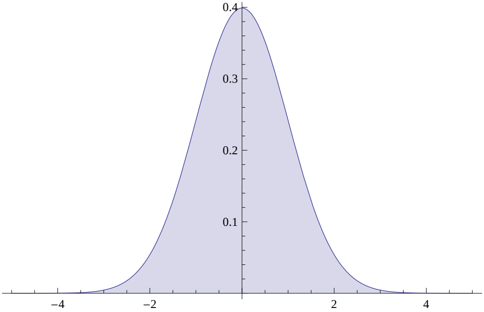

Рисунок 3: Нормальное распределение с $a=0$ и $\sigma=1$

Примеры законов распределений:

Распределение χ^2 с n степенями свободы:

$$p(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (\chi^2 > 0)\,, \tag{2.10}$$

n – параметры χ^2 распределения.

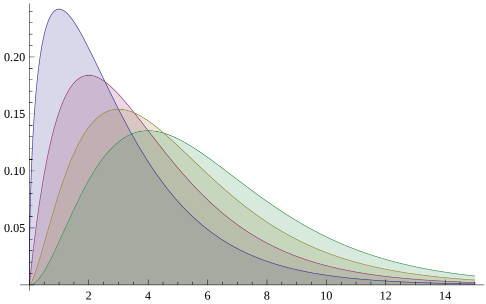

Рисунок 4: Распределение χ^2 с $n = 3, 4, 5, 6$ степенями свободы

Примеры законов распределений:

Распределение χ^2 с n степенями свободы:

$$p(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{(\frac{n}{2}-1)} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad (\chi^2 > 0), \tag{2.10}$$

n – параметры χ^2 распределения.

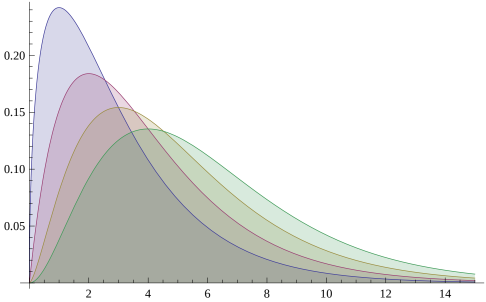

Рисунок 4: Распределение χ^2 с $n = 3, 4, 5, 6$ степенями свободы

Примеры законов распределений:

Распределение χ^2 с n степенями свободы:

$$p(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{(\frac{n}{2}-1)} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \,, \quad (\chi^2 > 0) \,, \qquad (2.10)$$

n – параметры χ^2 распределения.

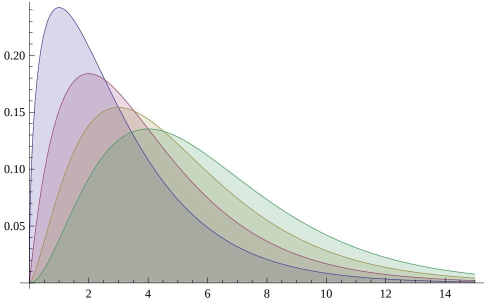

Рисунок 4: Распределение χ^2 с $n = 3, 4, 5, 6$ степенями свободы

Примеры законов распределений:

Распределение χ^2 с n степенями свободы:

$$p(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{(\frac{n}{2}-1)} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\ , \quad (\chi^2 > 0)\ , \qquad (2.10)$$

n – параметры χ^2 распределения.

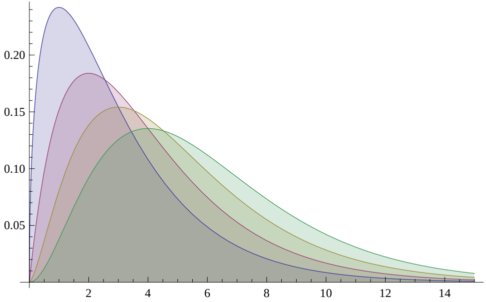

Рисунок 4: Распределение χ^2 с $n = 3, 4, 5, 6$ степенями свободы

Примеры законов распределений:

Равномерное распределение:

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \quad , (b > a) \; , \qquad (2.11)$$

a, b -параметры распределения.

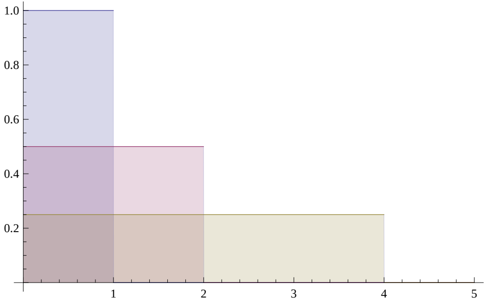

Рисунок 5: Равномерное распределение с $a = 0$ и $b = 1, 2, 4$

Примеры законов распределений:

Равномерное распределение:

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \quad , (b > a) \ , \tag{2.11}$$

a, b -параметры распределения.

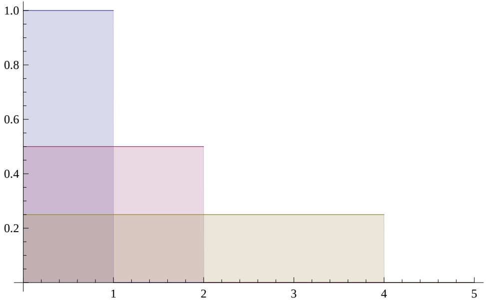

Рисунок 5: Равномерное распределение с $a = 0$ и $b = 1, 2, 4$

Примеры законов распределений:

Равномерное распределение:

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \quad , (b > a) \ , \tag{2.11}$$

a, b -параметры распределения.

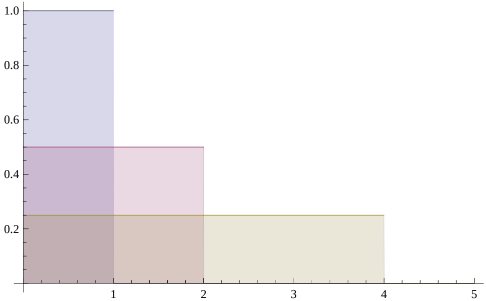

Рисунок 5: Равномерное распределение с $a = 0$ и $b = 1, 2, 4$

Моменты распределения

Моменты k-того порядка для непрерывной случайной величин
записываются в виде:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx \; , \qquad (2.12$$

где μ_k – алгебраический момент k-того порядка.

И

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k p(x)dx \; . \qquad (2.13$$

где ν_k – центральный момент k-того порядка.

Моменты распределения

Моменты k-того порядка для непрерывной случайной величины записываются в виде:

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx \ , \qquad (2.12)$$

где μ_k – алгебраический момент k-того порядка.

И

$$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k p(x) dx \ . \qquad (2.13)$$

где ν_k – центральный момент k-того порядка.

Моменты распределения

Моменты k-того порядка для непрерывной случайной величины записываются в виде:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx \ , \qquad (2.12)$$

где μ_k – алгебраический момент k-того порядка.

И

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k p(x)dx \ . \qquad (2.13)$$

где ν_k – центральный момент k-того порядка.

Первый алгебраический момент называют **математическим ожиданием**:

Определение 2.2

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины с плотностью вероятности $p\left(x\right)$ называется величина $\mathbf{M}x$, определяемая соотношением:

$$\mathbf{M}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p\left(x\right) \mathrm{d}x\ . \tag{2.14}$$

Математическое ожидание характеризует центр распределения $p\left(x\right)$. Однако следует отметить, что не для всех распределений существует математическое ожидание.

Наиболее общей характеристикой центра распределения следует считать медиану. Медиана - прямая, параллельная оси Y, проходящая через точку на оси X, слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайной величины равны между собой и составляют $p_1 = p_2 = 0{,}5$.

Определение 2.3

Дисперсией непрерывной случайной величины с плотностью вероятности $p(x)$ называется величина $\mathbf{D}x$, определяемая соотношением:

$$\mathbf{D}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}x)^2 \; p(x)\, \mathrm{d}x \, . \tag{2.15}$$

Дисперсия характеризует рассеяние отдельных значений случайной величины от центра распределения. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины и выражает как бы мощность рассеяния, поэтому для более наглядной характеристики используют среднеквадратичное отклонение σ:

$$\sigma = +\sqrt{\mathbf{D}x} \, . \tag{2.16}$$

которое имеет размерность самой случайной величины.

1) Точечные оценки.

Пусть дана выборка объема n.

Точечная оценка для математического ожидания (центра распределения) дается выражением:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \tag{2.17}$$

Для дисперсии $D = \sigma^2$ такая оценка дается выражением:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \ . \tag{2.18}$$

Величины $\overline{x}$ и S сами являются случайными величинами и, следовательно, они тоже могут иметь разброс, который характеризуется дисперсией.

Для $\overline{x}$:

$$S_{\overline{x}}^2 = \frac{S^2}{n}\ . \tag{2.19}$$

Для дисперсии:

$$D\left[S^2\right] = \frac{\mu_4}{n} - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)}\ , \tag{2.20}$$

где μ_4 – четвертый алгебраический центральный момент, а σ – с.к.о.