Численное интегрирование с использованием метода Монте-Карло

Задание 1.

Реализовать на языке программирования Python **метод середины квадратов** для получения равномерно распределенной величины в промежутке от 0 до 1.

Метод Монте-Карло

Написать программу вычисления определенного интеграла методом Монте-Карло и оценить ошибку расчёта, используя два способа:

1. Геометрический метод,
2. Метод среднего.

Суть геометрического метода

Представим, что нам нужно вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$.

Для этого мы:

1. Заключаем график функции в прямоугольник с известной площадью S_{rect}. Его ширина — $(b-a)$, а высота H должна быть такой, чтобы функция не выходила за его пределы (т.е. $H \geq \max(f(x))$).
2. Генерируем N случайных точек (x_i, y_i) внутри этого прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек M, которые попали под график функции (то есть $y_i \leq f(x_i)$).
4. Искомая площадь (интеграл) примерно равна доле попавших точек от общей площади прямоугольника.

Математическая формула $I \approx \frac{M}{N} \cdot S_{rect} = \frac{M}{N} \cdot (b-a) \cdot H$

Метод Монте-Карло через среднее значение

Математически это выглядит так. Если нам нужно найти $I = \int_a^b f(x)dx$, мы можем представить это как:

$$I \approx (b-a) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Где: $(b-a)$ — длина интервала интегрирования.x_i — случайные точки, равномерно распределенные на отрезке $[a,b]$.$\frac{1}{N}\sum f(x_i)$ — среднее арифметическое значений функции в этих точках.

Задачи для вычисления определённых интегралов методом Монте-Карло

1. Вычислите интеграл методом Монте-Карло и сравните с аналитическим решением:

$$\int_0^1 x^3 \, dx$$

2. Используя метод Монте-Карло с $N = 10^4$ точек, найдите приближённое значение:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$

3. Оцените с помощью метода Монте-Карло значение интеграла от функции с особенностью:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Почему этот интеграл требует осторожности при численном вычислении?

4. Вычислите двумерный интеграл:

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (x+y) \, dx \, dy$$

5. Используя метод "попаданий-промахов оцените значение:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$$

   Сравните эффективность этого метода с методом средних значений.

6. Найдите методом Монте-Карло:

$$\int_1^4 \ln x\, dx$$

7. Оцените интеграл от разрывной функции:

$$\int_{-1}^2 f(x)\, dx, \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

8. Вычислите трёхмерный интеграл:

$$\iiint\limits_{[0,1]^3} xyz\, dx\, dy\, dz$$

9. Используя 5 различных значений N (например, $10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$), проанализируйте сходимость метода для:

$$\int_0^1 e^x\, dx$$

   Постройте график зависимости ошибки от N.

10. Вычислите интеграл с бесконечным пределом, используя замену переменной $t = 1/x$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx$$

11. Методом Монте-Карло найдите площадь области, ограниченной кривыми:

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x} \quad \text{на} \quad [0,1]$$

12. Оцените интеграл от осциллирующей функции:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$$

13. Вычислите интеграл, представляющий математическое ожидание равномерно распределённой случайной величины:

$$\int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx, \quad a = 2, b = 5$$

Указания к решению

- Для задачи 4 и 8 используйте многомерный аналог:

$$\int\cdots\int\limits_V f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \approx V \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i)$$

  где V – объём области интегрирования.

- Для задачи 5 (метод "попаданий-промахов"):
  1. Найдите $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$
  2. Генерируйте точки (x_i, y_i) в прямоугольнике $[a,b] \times [0,M]$
  3. Отношение точек под кривой к общему числу точек даст отношение площади под кривой к площади прямоугольника

- Для задачи 11 площадь между кривыми равна:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$