Варианты задач для вычисления определённых интегралов методом Монте-Карло

Инструкция: Для каждого варианта вычислить интегралы методом Монте-Карло с $N = 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5$ точек, сравнить с аналитическим решением, оценить погрешность

Алада Шуаиб. Вариант 1

1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

Афанасьев Владимир Александрович. Вариант 2

1) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$

Бекиш Егор Павлович. Вариант 3

1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3+1)\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

Белов Иван Сергеевич. Вариант 4

1) $\displaystyle\int_0^2 x\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

Волобуев Андрей Владимирович. Вариант 5

1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^2 (4-x^2)\,dx$

Давлетмендов Роберт Альбертович. Вариант 6

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx$

Зак Анатолий Юрьевич. Вариант 7

1) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

Коннов Илья Андреевич. Вариант 8

1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (особенность в точке x=1)

Кулибали Махамаду. Вариант 9

1) $\displaystyle\int_0^2 (x^3 - 3x + 2)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Потапов Александр Евгеньевич. Вариант 10

1) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx$

Стукалова Александра Михайловна. Вариант 11

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} (1+\cos x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Тронев Владимир Николаевич. Вариант 12

1) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 - 6x + 2)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Фаттахов Андрей Сергеевич. Вариант 13

1) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos x}\,dx$

Ответы для проверки

Вариант 1

1) $\frac{1}{3} \approx 0.3333$
2) 1
3) $e - 1 \approx 1.7183$
4) $\ln 2 \approx 0.6931$

Вариант 2

1) $\frac{1}{4} = 0.25$
2) 2
3) $\frac{4}{3} \approx 1.3333$
4) 1

Вариант 3

1) $\frac{2}{3} \approx 0.6667$
2) $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$
3) 2
4) $\ln 2 \approx 0.6931$

Вариант 4

1) 2
2) $\ln \sqrt{2} \approx 0.3466$
3) 1
4) $\frac{2}{\pi} \approx 0.6366$

Вариант 5

1) 2
2) $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.5708$
3) $\frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.3466$
4) $\frac{16}{3} \approx 5.3333$

Вариант 6

1) $\frac{1}{2} = 0.5$
2) $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$
3) 1
4) 1

Вариант 7

1) 0
2) $e - 1 \approx 1.7183$
3) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.4388$
4) $\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \approx 0.3799$

Вариант 8

1) $\frac{1}{6} \approx 0.1667$
2) $\ln 2 \approx 0.6931$
3) 4
4) $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$

Вариант 9

1) 0
2) 1
3) $2 \ln 2 - 1 \approx 0.3863$
4) 1

Вариант 10

1) $\frac{14}{3} \approx 4.6667$
2) 1
3) $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$
4) ≈ 1.1981 (через бета-функцию)

Вариант 11

1) $\pi \approx 3.1416$
2) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0.6095$
3) $\frac{2}{3} \approx 0.6667$
4) $\frac{\pi}{6} \approx 0.5236$

Вариант 12

1) 0
2) $\ln 2 \approx 0.6931$
3) $\frac{e-1}{3} \approx 0.5728$
4) $\frac{\pi^2}{8} \approx 1.2337$

Вариант 13

1) $\frac{16}{15} \approx 1.0667$
2) 1
3) $\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right) \approx 0.3799$
4) $2\sqrt{2} \approx 2.8284$

Рекомендации по выполнению

1. Для каждого интеграла:
   - Запишите аналитическое решение
   - Реализуйте метод Монте-Карло с заданым количевом точек двумя методами.
   - Вычислите относительную погрешность: $\varepsilon = \frac{|I_{MC} - I_{analyt}|}{|I_{analyt}|}$
   - Проанализируйте, какие интегралы считаются точнее и почему
2. Метод Монте-Карло: $I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$, где $x_i \sim U[a, b]$
3. Для интегралов с особенностями (напр., Вариант 8.4) можно:
   - Применить метод "попаданий-промахов"
4. Рекомендуемый код на Python: Случайные значения генерировать с помощью **метода середины квадратов** и стандарной функции

```
import random, math

def monte_carlo(f, a, b, N=100000):
    s = 0
    for _ in range(N):
        x = random.uniform(a, b)
        s += f(x)
    return (b - a) * s / N
```

5. Отчет должен содержать для каждого варианта:
   - Таблицу с результатами
   - Анализ погрешностей
   - Выводы о точности метода для разных типов функций