6. Центральная предельная теорема

В основе моделирования любой величины с помощью случайных чисел лежит одна из центральных предельных теорем.

Пусть имеется N одинаковых независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, так что распределения вероятностей этих величин совпадают (они могут быть как дискретные, так и непрерывные). Значит их математические ожидания и дисперсии совпадают:

$$\mathbf{M}\xi_1 = \mathbf{M}\xi_2 = \ldots = \mathcal{M}\xi_N = m \ ,$$

$$\mathbf{D}\xi_1 = \mathbf{D}\xi_2 = \ldots = \mathbf{D}\xi_N = b^2 \ .$$

Введем случайную величину ρ_N, которая является суммой случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N \tag{6.1}$$

Так как для произвольных независимых случайных величин ξ и ν выполняются соотношения

$$\mathbf{M}(\xi+\nu)=\mathbf{M}\xi+\mathbf{M}\nu \quad \text{и} \quad \mathbf{D}(\xi+\nu)=\mathbf{D}\xi+\mathbf{D}\nu \quad ,$$

то

$$\mathbf{M}\rho_N=\mathbf{M}(\xi_1+\xi_2+...+\xi_N)=N\;m\;,$$

$$\mathbf{D}\rho_N=\mathbf{D}(\xi_1+\xi_2+...+\xi_N)=N\;b^2\;.$$

Центральная предельная теорема.

При больших N (т.е. при $N \to \infty$) случайная величина ρ_N (6.1) описывается нормальным распределением с математическим ожиданием равным Nm и дисперсией $\mathbf{D} = Nb^2$ т.е. плотность распределения $p\,(x)$ равна

$$p\,(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \ , \tag{6.2}$$

где

$$a = Nm\ , \quad \sigma = \sqrt{Nb^2} = b\sqrt{N}\ . \tag{6.3}$$

Следовательно, вероятность найти случайную величину ρ_N (6.1) в пределах от α до β можно рассчитать с помощью соотношения

$$\mathrm{Prob}\,(\alpha < \rho_N < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x \tag{6.4}$$

или

$$\text{Prob}\,(\alpha < \rho_N < \beta) = 1/2\left(\text{erf}\left(\frac{\beta - a}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \text{erf}\left(\frac{\alpha - a}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)\ , \tag{6.5}$$

где

$$\text{erf}\,(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \tag{6.6}$$

является интегралом вероятностей.

Эта теорема эта справедлива и для более широких условий: все слагаемые не обязательно должны быть независимыми и одинаковыми; существенно чтобы отдельные слагаемые не играли слишком большой роли в сумме. Эта теорема объясняет почему нормальные распределения часто встречаются при описании физических явлений.