Лекция 6
Графы 2
Алгоритмы и структуры данных

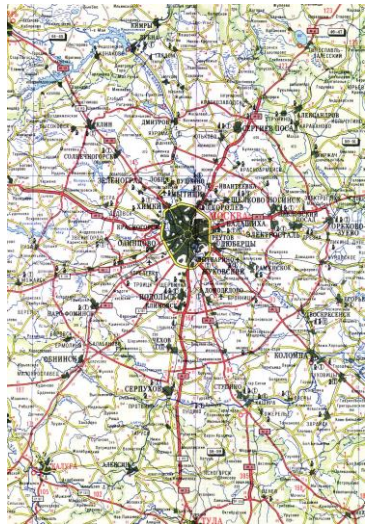
Глушенков Д.А.

План лекции

1. Задачи поиска кратчайших путей.
   - Алгоритм Дейкстры.
   - Алгоритм A*.
   - Алгоритм Беллмана-Форда.
2. Минимальные остовные деревья.
   - Алгоритм Прима.
   - Алгоритм Крускала.
   - Системы непересекающихся множеств.
3. Задача коммивояжера

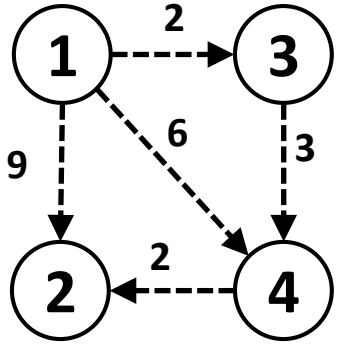
Взвешенный граф

Во **взвешенном графе** с каждым ребром связано некоторое число (вес), которое обычно интерпретируется как расстояние либо стоимость.



В **евклидовом графе** узлы соответствуют точкам на плоскости, а вес рёбер равен евклидову расстоянию между вершинами.

Пример: карта дорог.

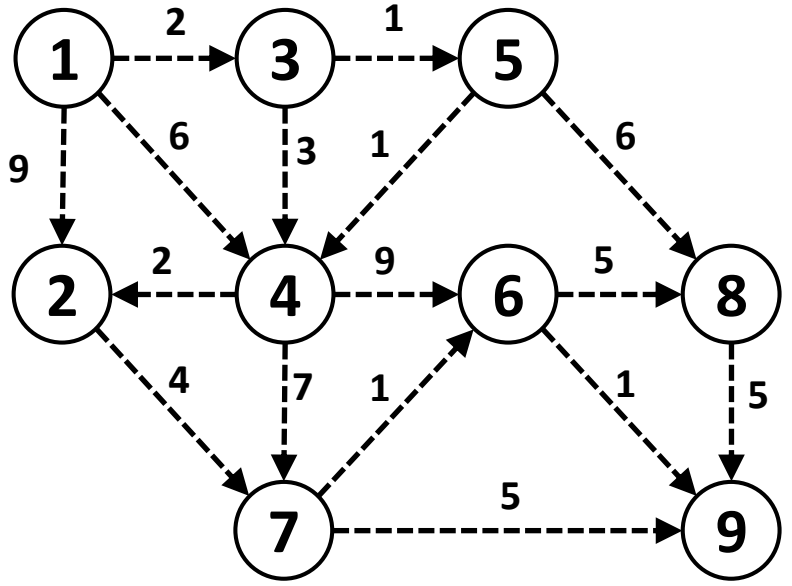


Задачи поиска кратчайших путей

G – ориентированный взвешенный граф

Кратчайшим путём между двумя вершинами u и v в графе G называется такой направленный простой путь из u в v, что никакой другой путь не имеет меньшего веса.

- Веса рёбер не обязательно пропорциональны их длинам.
- Вес – это не количество рёбер.
- Может существовать несколько кратчайших путей.
- А может не существовать ни одного пути.

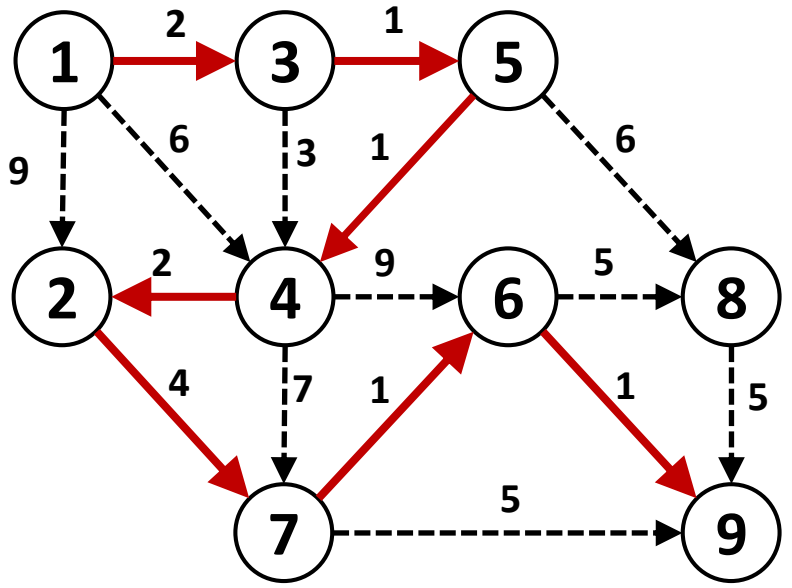


Задачи поиска кратчайших путей

G – ориентированный взвешенный граф

Кратчайшим путём между двумя вершинами u и v в графе G называется такой направленный простой путь из u в v, что никакой другой путь не имеет меньшего веса.

- Веса рёбер не обязательно пропорциональны их длинам.
- Вес – это не количество рёбер.
- Может существовать несколько кратчайших путей.
- А может не существовать ни одного пути.

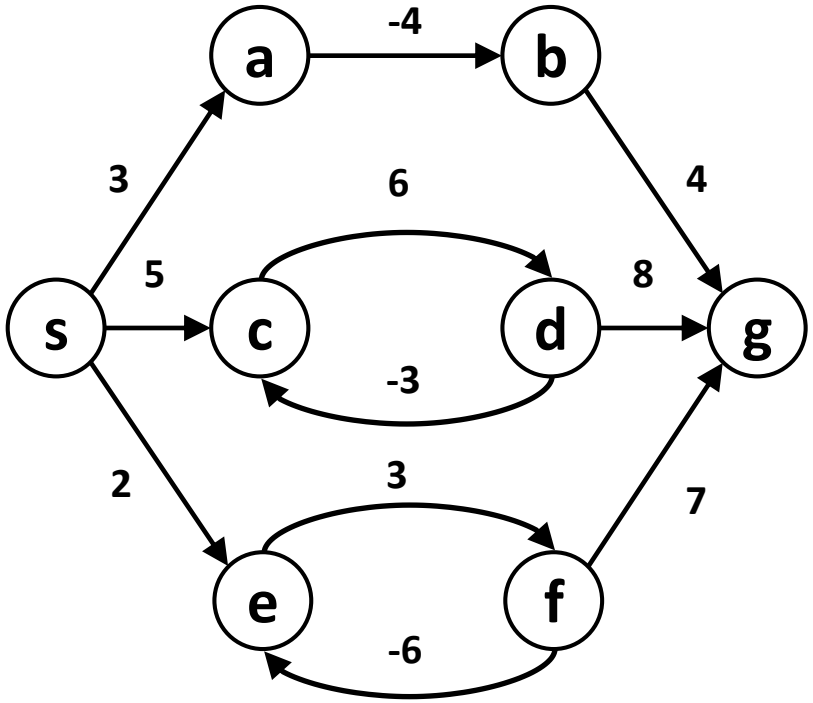


Рёбра с отрицательным весом

Рёбра с отрицательным весом допустимы:
(s, a, b) – кратчайший путь из s в b.

Циклы с положительным весом допустимы –
$w(c, d) + w(d, c) = 3 > 0$.
Путь (s, c, d) – кратчайший из s в d.

При наличии на пути цикла с отрицательным весом –
$w(e, f) + w(f, e) = 3 - 6 = -3 < 0$ кратчайшего пути между вершинами s и f не существует.



Задачи поиска кратчайших путей

G – ориентированный взвешенный граф.

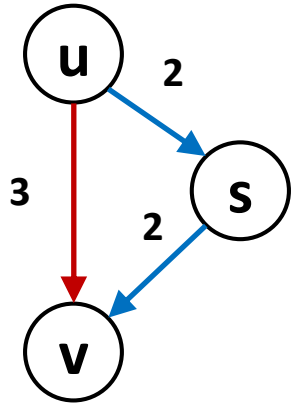
1. SPSP (Single Pair Shortest Path problem) – поиск кратчайшего пути между двумя вершинами.
   Алгоритмы Дейкстры, A, IdaStar.*
2. SSSP (Single Source Shortest Paths problem) – поиск кратчайших путей из выделенной вершины до всех остальных.
   Алгоритмы Дейкстры, Беллмана-Форда.
3. APSP (All Pairs Shortest Paths problem) – поиск кратчайших путей между всеми парами вершин.
   Алгоритмы Флойда, Джонсона.

Релаксация

Релаксация ребра – это проверка того, даёт ли продвижение по данному ребру новый кратчайший путь к конечной вершине.

Процедура релаксации ребра:

```
bool Relax( u, v ) {
    if( d[v] > d[u] + w( u, v ) ) {
        d[v] = d[u] + w( u, v );
        pi[v] = u;
        return true;
    }
    return false;
}
```



d[v] = 4
При релаксации (u, v) d[v] получит новое значение 3.

Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры похож на BFS, но вместо обычной очереди используется очередь с приоритетом.

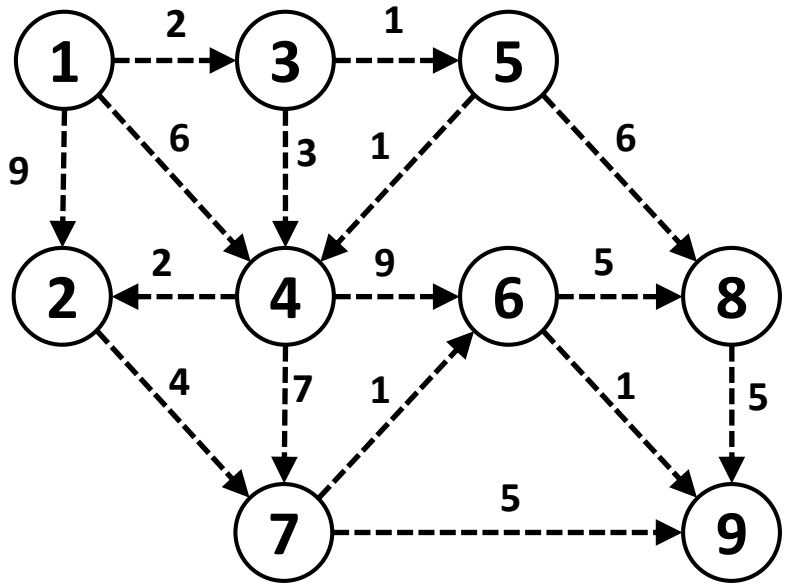
Веса рёбер больше 0.

Встретили вершину в первый раз

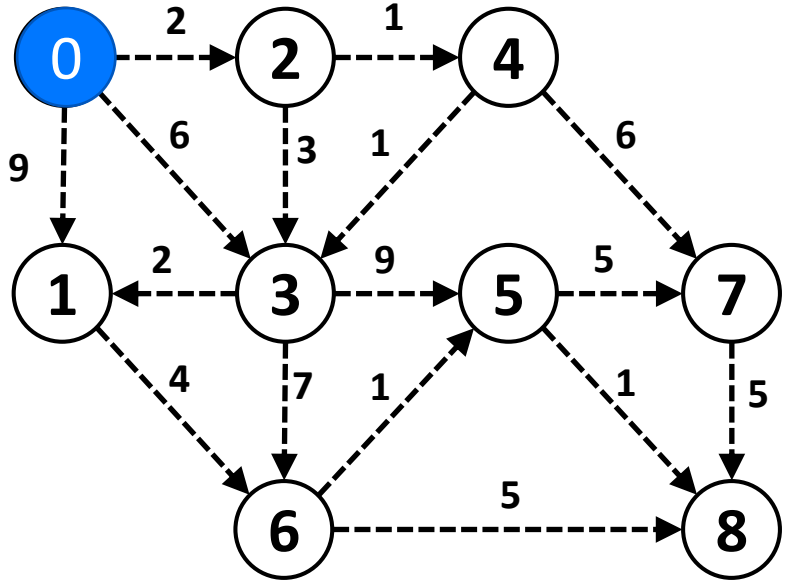
Если удалось релаксировать ребро, то надо изменить ее позицию в очереди с приоритетом.

```
void Dijkstra( G, s ) {
    pi[V] = -1;
    d[V] = INT_MAX;
    d[s] = 0;
    priority_queue<int> q; q.push( s );
    while( !q.empty() ) {
        u = q.top(); q.pop();
        for( ( u, v ) : ребра из u ) {
            if( d[v] == INT_MAX ) {
                d[v] = d[u] + w(u, v);
                pi[v] = u;
                q.push( v );
            } else if(Relax( u, v )) {
                q.DecreaseKey( v, d[v] );
        }   }
    }
}
```

Алгоритм Дейкстры



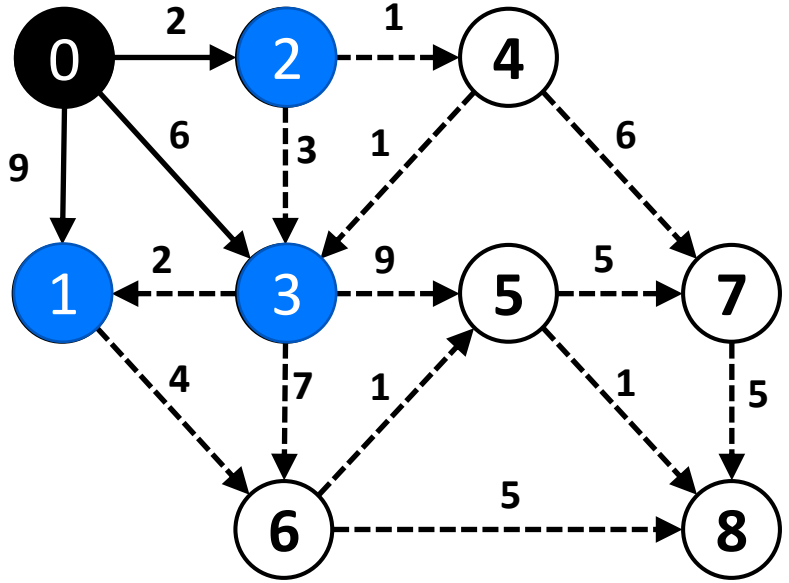
Алгоритм Дейкстры



	pi	d
0	-1	0
1	-1	
2	-1	
3	-1	
4	-1	
5	-1	
6	-1	
7	-1	
8	-1	

Q: (0, 0)

Алгоритм Дейкстры

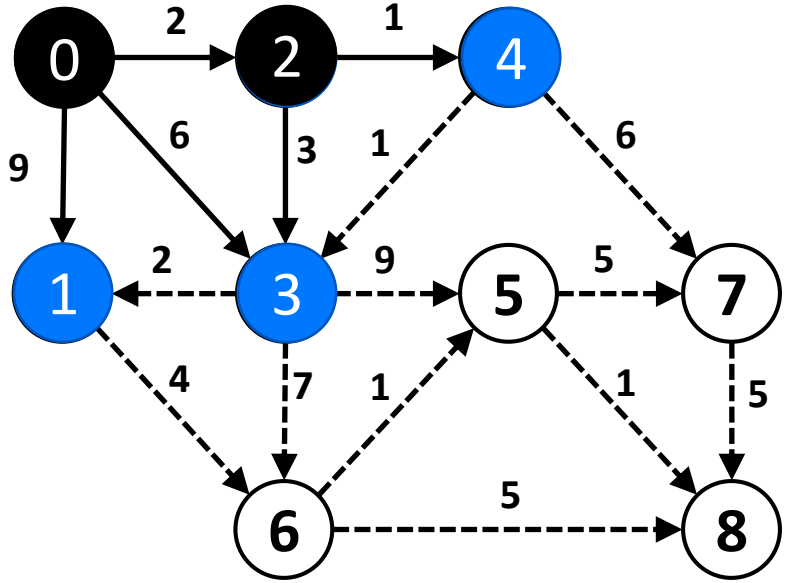


(0, 0)

	pi	d
0	-1	0
1	0	9
2	0	2
3	0	6
4	-1	
5	-1	
6	-1	
7	-1	
8	-1	

Q: (2, 2) (3, 6) (1, 9)

Алгоритм Дейкстры

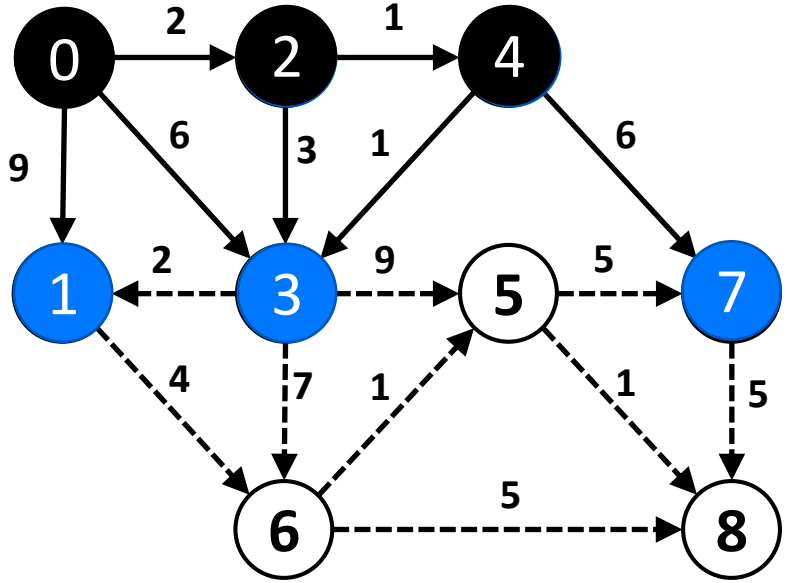


(2, 2)

	pi	d
0	-1	0
1	0	9
2	0	2
3	2	5
4	2	3
5	-1	
6	-1	
7	-1	
8	-1	

Q: (4, 3) (3, 5) (1, 9)

Алгоритм Дейкстры

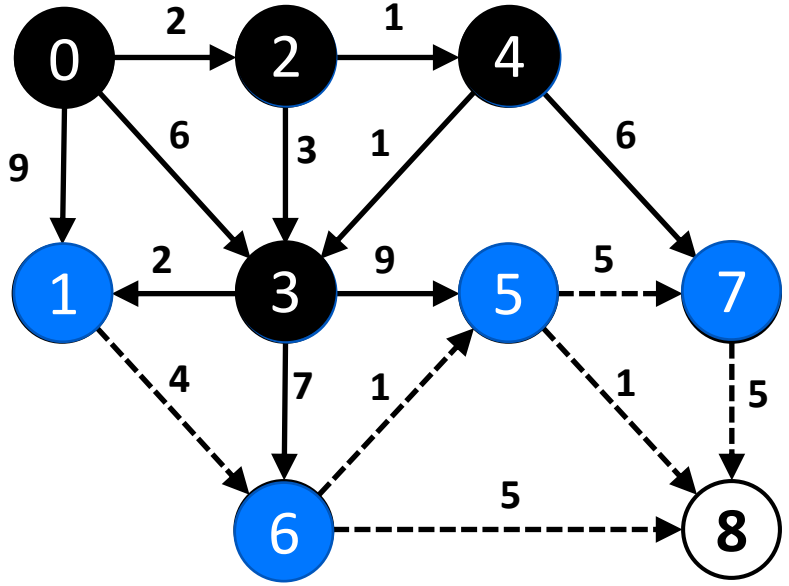


(4, 3)

	pi	d
0	-1	0
1	0	9
2	0	2
3	4	4
4	2	3
5	-1	
6	-1	
7	4	9
8	-1	

Q: (3, 4) (1, 9) (7, 9)

Алгоритм Дейкстры

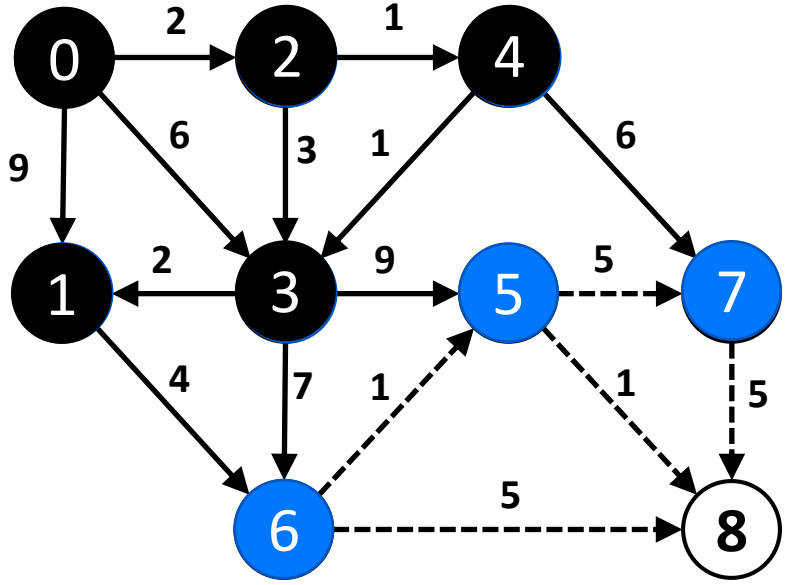


(3, 4)

	pi	d
0	-1	0
1	3	6
2	0	2
3	4	4
4	2	3
5	3	13
6	3	11
7	4	9
8	-1	

Q: (1, 6) (7, 9) (5, 13) (6, 11)

Алгоритм Дейкстры

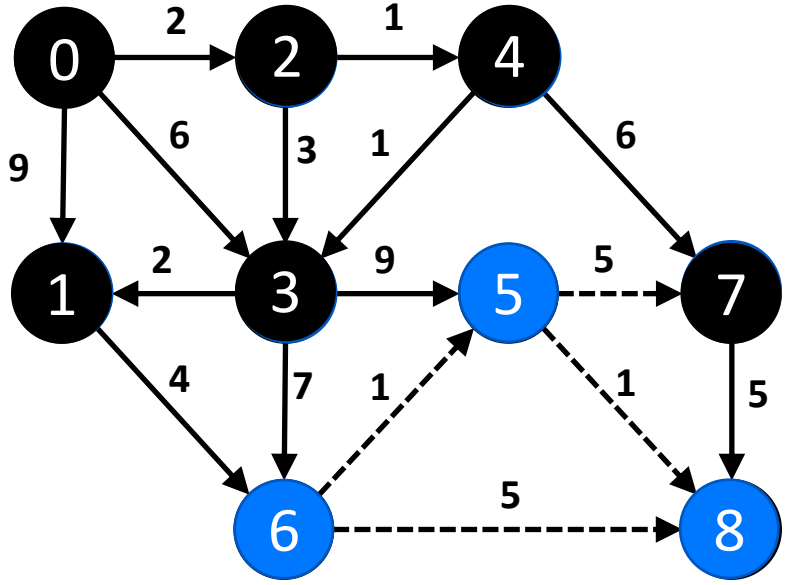


(1, 6)

	pi	d
0	-1	0
1	3	6
2	0	2
3	4	4
4	2	3
5	3	13
6	1	10
7	4	9
8	-1	

Q: (7, 9) (5, 13) (6, 10)

Алгоритм Дейкстры

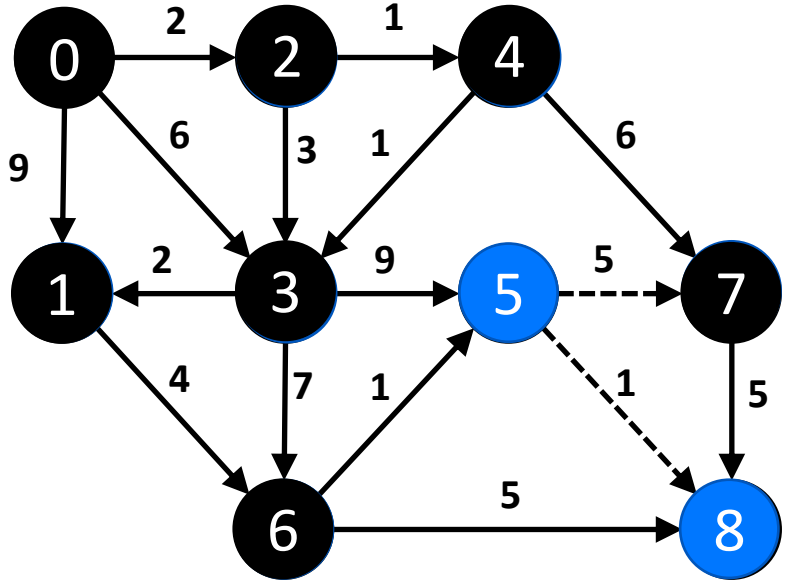


(7, 9)

	pi	d
0	-1	0
1	3	6
2	0	2
3	4	4
4	2	3
5	3	13
6	1	10
7	4	9
8	7	14

Q: (6, 10) (5, 13) (8, 14)

Алгоритм Дейкстры

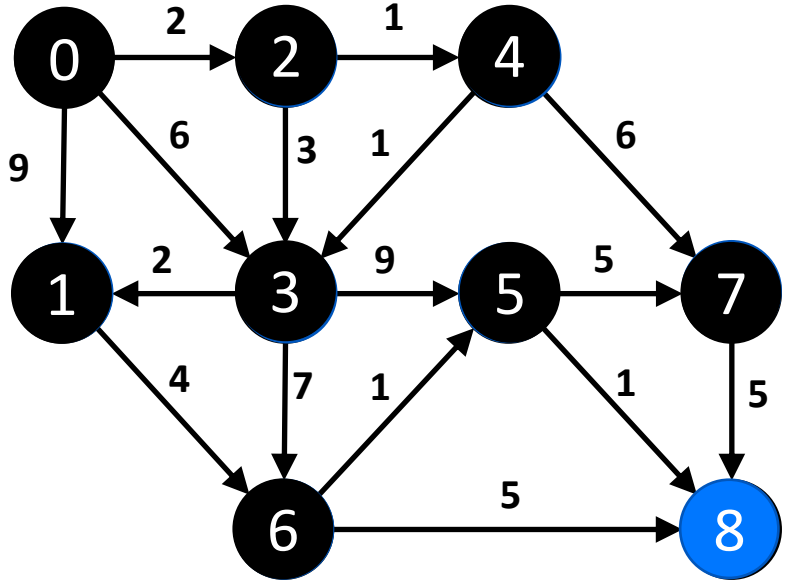


(6, 10)

	pi	d
0	-1	0
1	3	6
2	0	2
3	4	4
4	2	3
5	6	11
6	1	10
7	4	9
8	7	14

Q: (5, 11) (8, 14)

Алгоритм Дейкстры



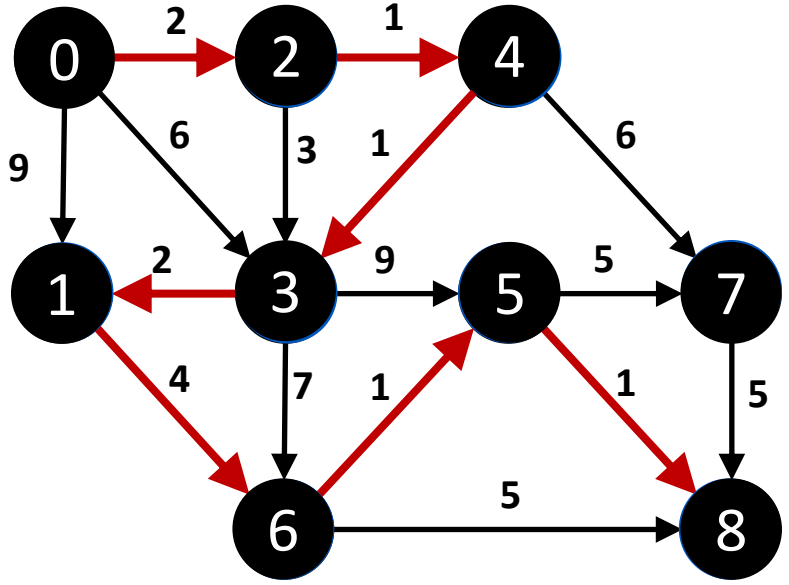
(5, 11)

	pi
0	-1
1	3
2	0
3	4
4	2
5	6
6	1
7	4
8	5

	d
0	0
1	6
2	2
3	4
4	3
5	11
6	10
7	9
8	12

Q: (8, 12)

Алгоритм Дейкстры



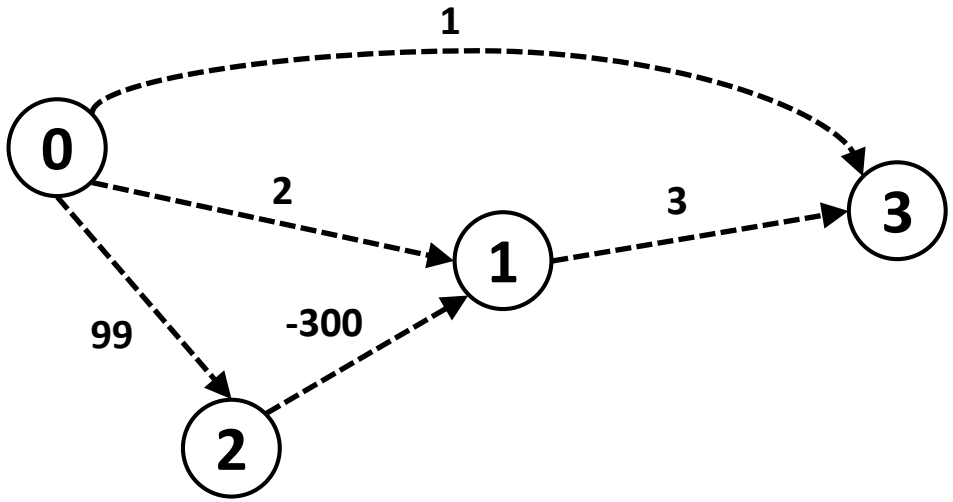
(8, 12)

	pi
0	-1
1	3
2	0
3	4
4	2
5	6
6	1
7	4
8	5

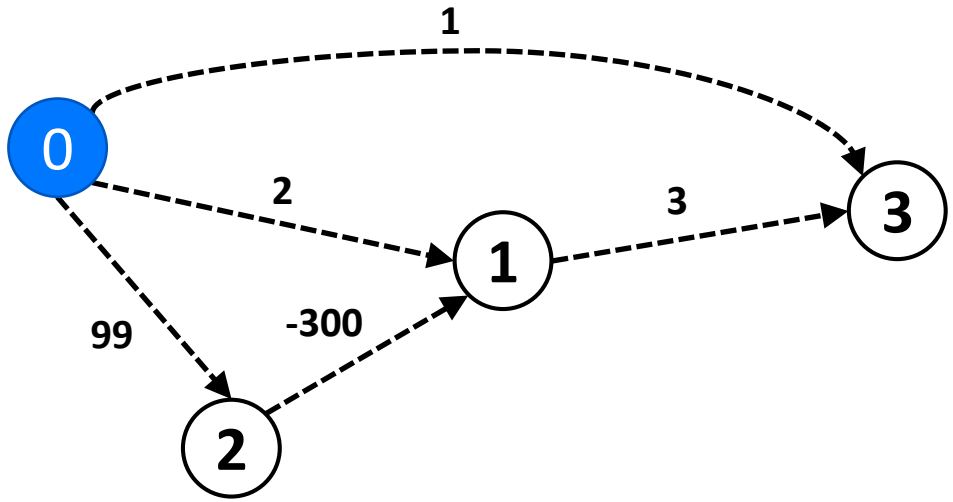
	d
0	0
1	6
2	2
3	4
4	3
5	11
6	10
7	9
8	12

Кратчайший путь из 0 в 8 восстанавливаем по массиву pi:
0, 2, 4, 3, 1 ,6, 5, 8

Алгоритм Дейкстры. Недопустимость отрицательных ребер.



Алгоритм Дейкстры. Недопустимость отрицательных ребер.



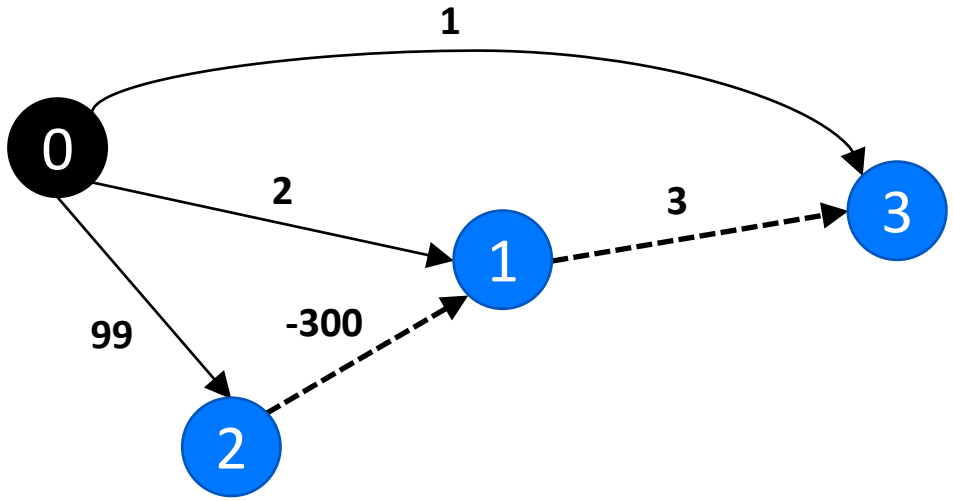
	pi
0	-1
1	-1
2	-1
3	-1

	d
0	0
1	
2	
3	

Q: (0, 0)

Алгоритм Дейкстры. Недопустимость отрицательных ребер.

(0, 0)



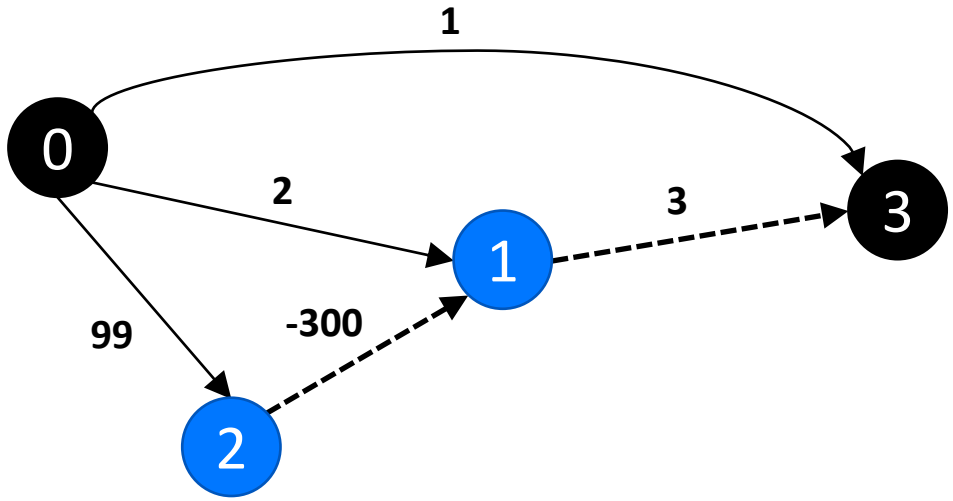
	pi
0	-1
1	0
2	0
3	0

	d
0	0
1	2
2	99
3	1

Q: (3, 1) (1, 2) (2, 99)

Алгоритм Дейкстры. Недопустимость отрицательных ребер.

(3, 1)



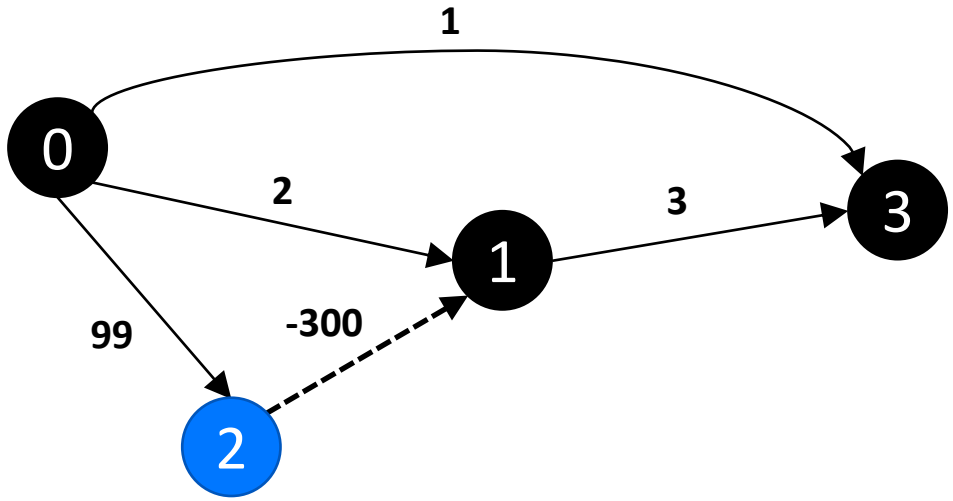
	pi
0	-1
1	0
2	0
3	0

	d
0	0
1	2
2	99
3	1

Q: (1, 2) (2, 99)

Алгоритм Дейкстры. Недопустимость отрицательных ребер.

(1, 2)



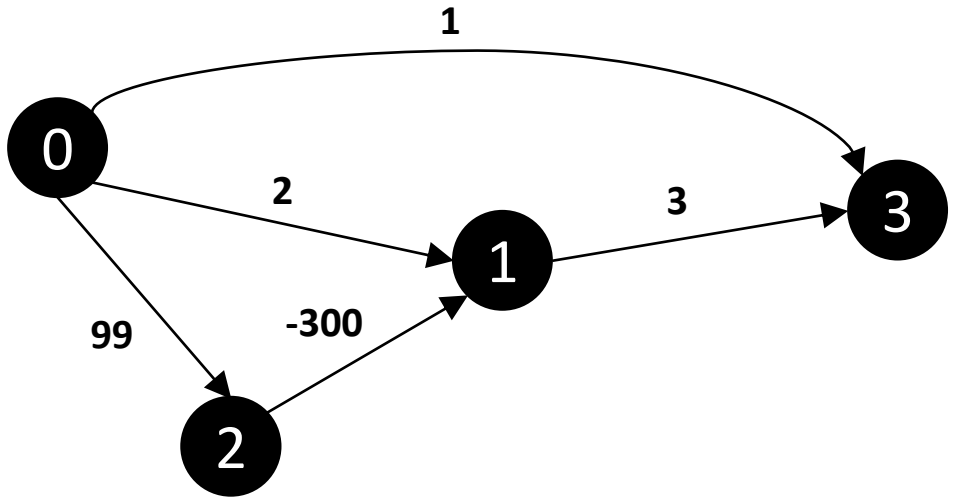
	pi
0	-1
1	0
2	0
3	0

	d
0	0
1	2
2	99
3	1

Q: (2, 99)

Алгоритм Дейкстры. Недопустимость отрицательных ребер.

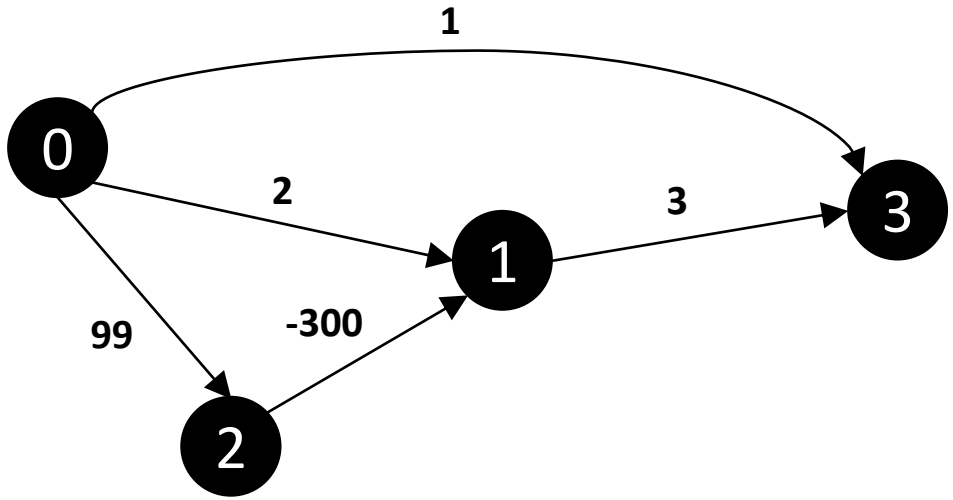
(2, 99)



	pi
0	-1
1	2
2	0
3	0

	d
0	0
1	-201
2	99
3	1

Алгоритм Дейкстры. Недопустимость отрицательных ребер.



	pi
0	-1
1	2
2	0
3	0

	d
0	0
1	-201
2	99
3	1

Очередь опустела — алгоритм завершился. Но кратчайший путь из 0 в 3 должен проходить через вершину 1 и иметь вес -198. Ошибочный результат!

Алгоритм Дейкстры

Оценка времени работы. Будем использовать в качестве реализации очереди с приоритетом двоичную кучу.

- Добавление узла: $O(\log V)$. Не более V операций.
- Уменьшение значения ключа: $O(\log V)$. Не более E операций.

Общее время работы $T = O((E + V) \cdot logV\ )$.

Используемая память $M = O(V)$.

Алгоритм Дейкстры

Важная тонкость.

Как найти узел v в двоичной куче, чтобы вызывать $q.DecreaseKey(v, d[v])$?

0	1	2	3
(1, 6)	(7, 9)	(6, 11)	(5, 13)

Решение 1. Хранить позицию i в куче для каждого узла v. В момент изменения позиции в куче обновлять эту позицию, хранящуюся в описании узла.

Решение 2. Использовать вместо бинарной кучи множество set<pair<d, v>>.
Во время релаксации удалять старую пару $< d[v], v >$, добавлять новую.

Алгоритм A*

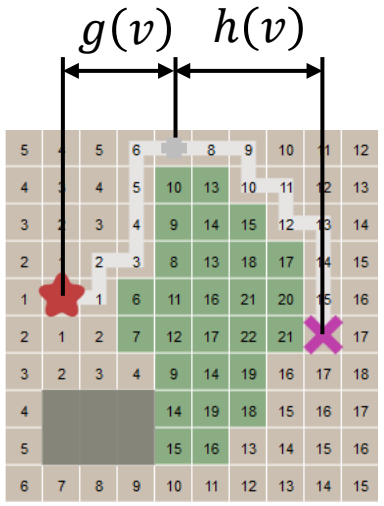
Алгоритм A* (A-star) - это алгоритм поиска кратчайшего пути между *двумя* вершинами графа.

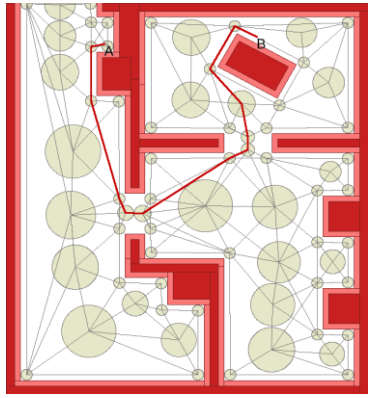
В процессе работы алгоритма рассчитывается функция

$f(v) = g(v) + h(v)$, где

$g(v)$ - наименьшая стоимость пути из стартовой вершины в v

$h(v)$ - эвристическое приближение стоимости пути от v к конечной цели





Алгоритм A*

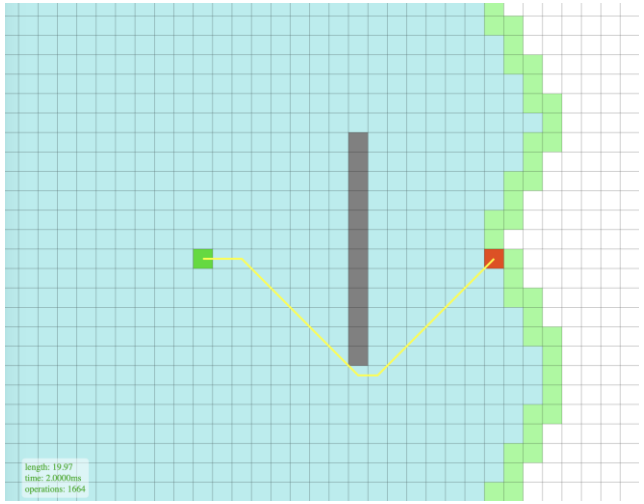
Сравнение как и в алгоритме Дейкстры

Значение эвристики используем только для для изменения порядка в очереди с приоритетом

```
void aStar( G, s ) {
    pi[V] = -1;
    d[V] = INT_MAX;
    d[s] = 0;
    priority_queue<int> q; q.push( s );
    while( !q.empty() ) {
        u = q.top(); q.pop();
        for( ( u, v ) : E ) {
            if( d[v] == INT_MAX ) {
                q.push( v );
            }
            if( d[v] > d[u] + w(u, v) ) {
                d[v] = d[u] + w(u, v);
                pi[v] = u;
                q.DecreaseKey( v, d[v] + h(v) );
            }
        }
    }
}
```

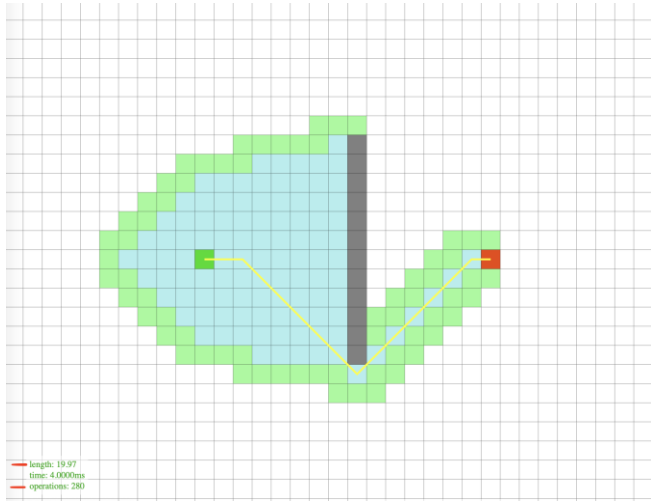
Алгоритм A*

Дейкстра



Длина пути – 19.97
Кол-во итераций – 1664

A*

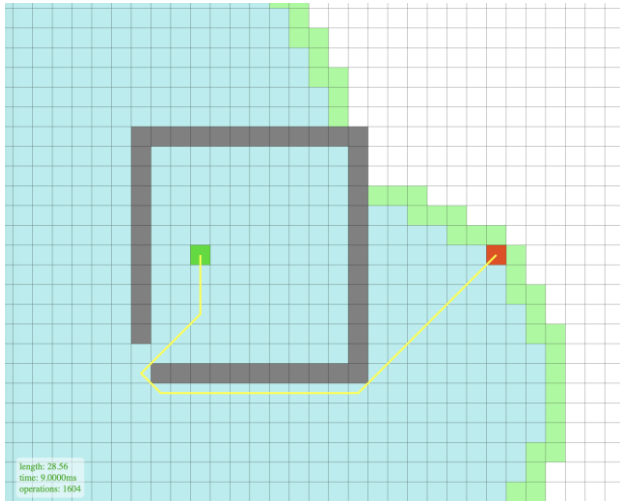


Длина пути – 19.97
Кол-во итераций – 280

http://qiao.github.io/PathFinding.js/visual/

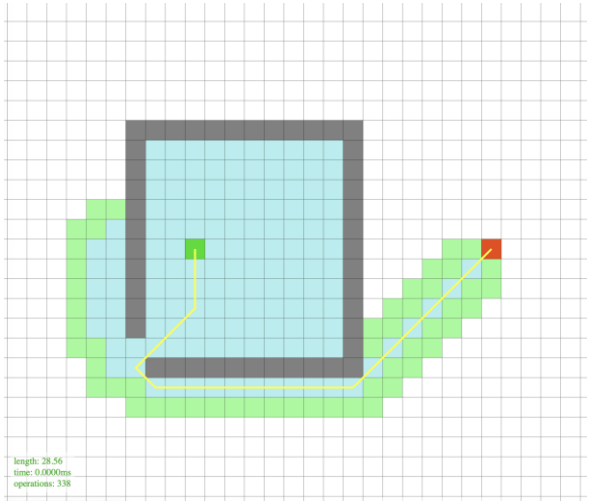
Алгоритм A*

Дейкстра



Длина пути – 28.56
Кол-во итераций – 1604

A*



Длина пути – 28.56
Кол-во итераций – 338

http://qiao.github.io/PathFinding.js/visual/

Алгоритм A*

Эвристика $h(v)$ должна быть:

- **Допустимой** – для любой вершины v значение $h(v)$ меньше или равно весу кратчайшего пути от v до цели.
- **Монотонной** – для любой вершины v_1 и ее потомка v_2 разность $h(v_1)$ и $h(v_2)$ не превышает фактического веса ребра $w(v_1, v_2)$ от v_1 до v_2, а эвристическая оценка целевого состояния равна нулю.

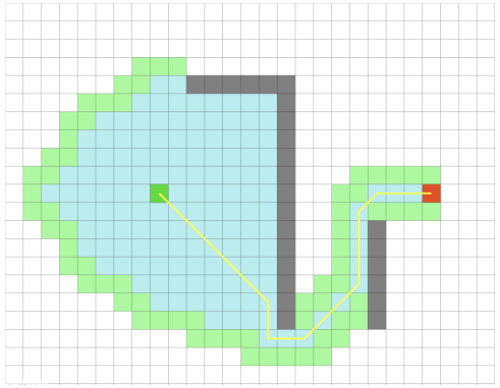
Любая монотонная эвристика допустима, но обратное неверно.

Примеры эвристик:

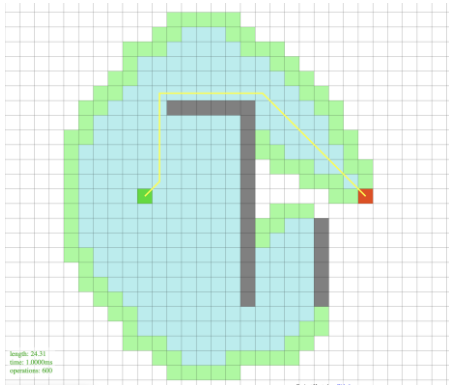
- Манхеттенское расстояние - $h(v) = |v.x - u.x| + |v.y - u.y|$
- Расстояние Чебышёва - $h(v) = \max(|v.x - u.x|, |v.y - u.y|)$
- Евклидово расстояние - $h(v) = \sqrt[2]{(v.x - u.x)^2 + (v.y - u.y)^2}$

Алгоритм A*

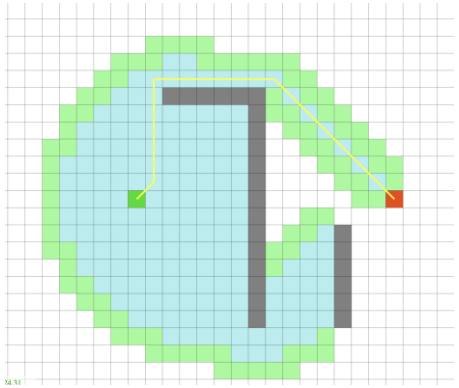
Манхеттенское расстояние



Расстояние Чебышёва



Евклидово расстояние



Длина пути во всех примерах одинаковая – 24.31

http://qiao.github.io/PathFinding.js/visual/

Алгоритм Беллмана-Форда

Поиск кратчайших путей из выделенной вершины до всех остальных (SSSP).

Если в графе нет циклов отрицательного веса, достижимых из s, то алгоритм Беллмана-Форда находит все кратчайшие пути из s до остальных вершин.

Если в графе есть достижимый из s цикл отрицательного веса, то алгоритм Беллмана-Форда сообщит о его наличии (и может выдать его).

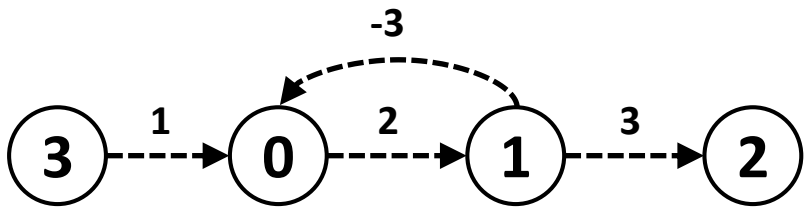
Сложность: $O(|V| \cdot |E|)$

```
bool BellmanFord( G, s ) {
    d[s] = 0;
    for( int i = 0; i < V - 1; ++i ) {
        for( (u, v) : E ) Relax( u, v );
    }
    // Детектирование цикла.
    for( (u, v) : E ) {
        if( Relax( u, v ) )
            return false;
    }
    return true;
}
```

Поиск отрицательного цикла

Релаксируем все рёбра $V - 1$ раз

Стартовая вершина 3, инициализируем d[3] = 0



	pi
0	-1
1	-1
2	-1
3	-1

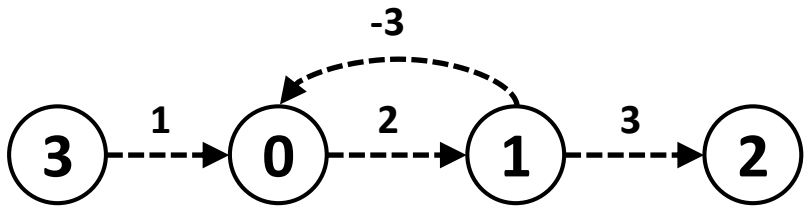
	d
0	inf
1	inf
2	inf
3	0

Процедура релаксации ребра:

```
bool Relax( u, v ) {
    if( d[v] > d[u] + w( u, v ) )
{
        d[v] = d[u] + w( u, v );
        pi[v] = u;
        return true;
    }
    return false;
}
```

Поиск отрицательного цикла

Релаксируем все рёбра $V - 1$ раз. Итерация 1.

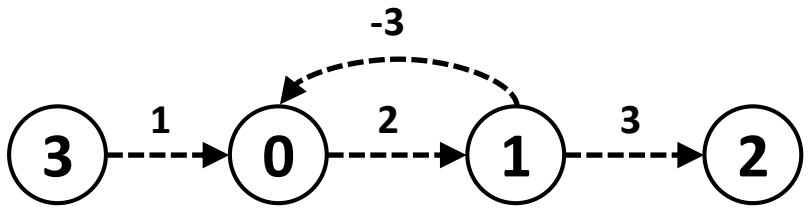


	pi
0	3
1	-1
2	-1
3	-1

	d
0	1
1	inf
2	inf
3	0

Поиск отрицательного цикла

Релаксируем все рёбра $V - 1$ раз. Итерация 2.

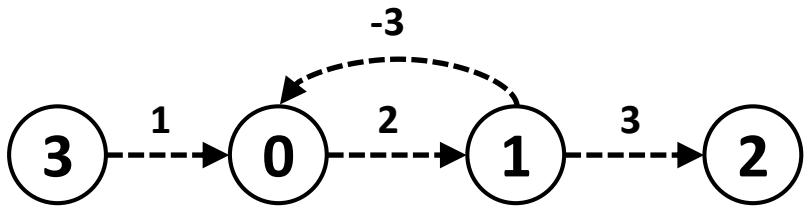


	pi
0	1
1	0
2	1
3	-1

	d
0	0
1	3
2	6
3	0

Поиск отрицательного цикла

Релаксируем все рёбра $V - 1$ раз. Итерация 3.

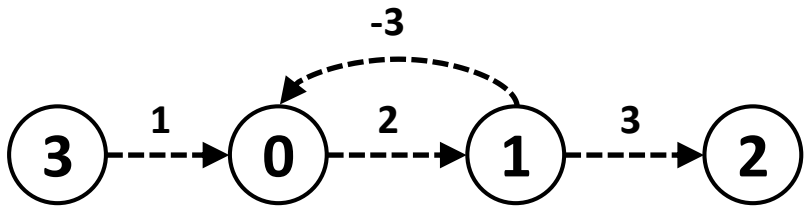


	pi
0	1
1	0
2	1
3	-1

	d
0	-1
1	2
2	5
3	0

Поиск отрицательного цикла

Итерация 4. Если отрицательный цикл есть, то на этой итерации должна произойти релаксация. Нужно запомнить номер вершины, на которой она произойдет.

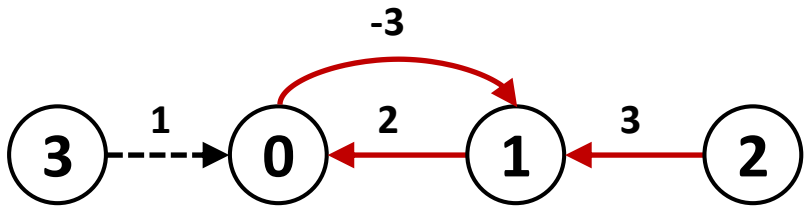


	pi
0	1
1	0
2	1
3	-1

	d
0	-2
1	1
2	4
3	0

Поиск отрицательного цикла

Для поиска вершины, лежащей на цикле, проходим по предкам V раз от запомненной на предыдущем шаге вершины. После этого мы точно окажемся внутри цикла.

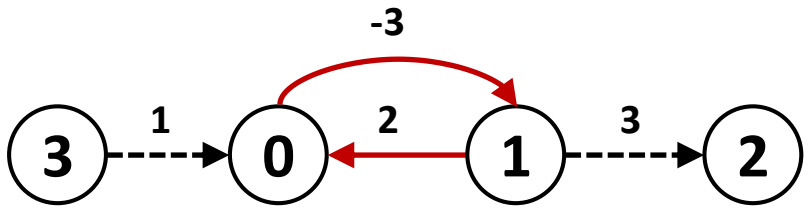


	pi
0	1
1	0
2	1
3	-1

	d
0	-2
1	1
2	4
3	0

Поиск отрицательного цикла

Для поиска цикла от найденной вершины проходим по предкам, пока не встретим её снова. А она нам встретится обязательно, потому что находимся внутри цикла.



	pi
0	1
1	0
2	1
3	-1

	d
0	-2
1	1
2	4
3	0

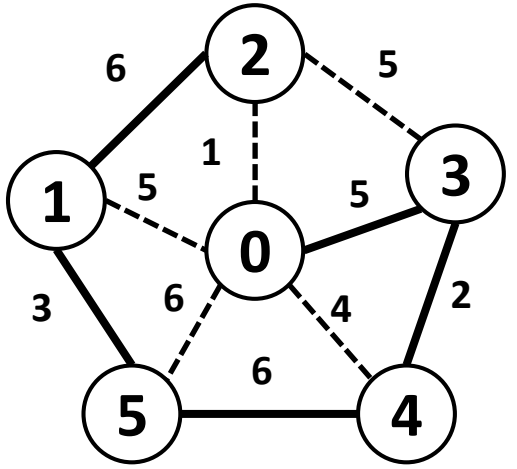
Остовные деревья

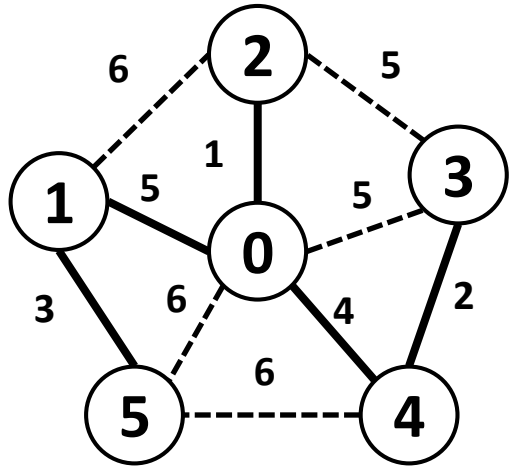
Пусть G – связный неориентированный граф.

Остовное дерево графа G состоит из минимального подмножества рёбер графа, таких, что из любой вершины графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим рёбрам.

Остовное дерево графа G — ациклический связный подграф данного связного неориентированного графа, в который входят все его вершины.

Минимальное остовное дерево (MST) графа G — это его ациклический связный подграф, в который входят все его вершины, обладающий минимальным суммарным весом ребер.





Алгоритм Прима

Алгоритм Прима – алгоритм поиска минимального остовного дерева.

1) Выбираем произвольную стартовую вершину – начало строящегося дерева. Строим очередь с приоритетом вершин, до которых есть ребро от стартовой. Приоритет – длина ребра до стартовой.

2) Итеративно добавляем к дереву вершину из очереди с ребром до дерева, имеющим вес = приоритет вершины. Добавляем новые вершины, доступные из добавленной вершины по ребрам графа с соответствующими приоритетами. Либо обновляем приоритет вершины в очереди, если от добавленной вершины к ней ведет более легкое ребро.

Алгоритм Прима

Похож на Дейкстру, но в качестве весовой функции используем длину кратчайшего ребра от текущей вершины до дерева.

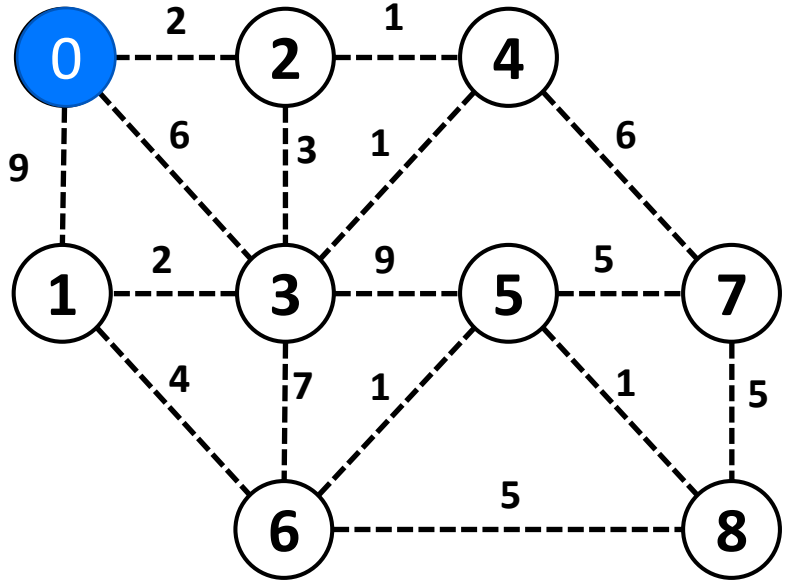
Веса рёбер больше 0.

Встретили вершину в первый раз

Если удалось релаксировать вершину, то надо изменить ее позицию в очереди с приоритетом.

```
void Prima( G, s ) {
    pi[V] = -1;
    min_e[V] = INT_MAX;
    min_e[s] = 0;
    priority_queue<int> q; q.push( s );
    while( !q.empty() ) {
        u = q.top(); q.pop();
        for( ( u, v ) : ребра из u ) {
            if( min_e[v] == INT_MAX ) {
                min_e[v] = w(u, v);
                pi[v] = u;
                q.push( v );
            } else if(Relax( u, v )) {
                q.DecreaseKey( v, min_e[v] );
        }   }
    }
}
```

Алгоритм Прима

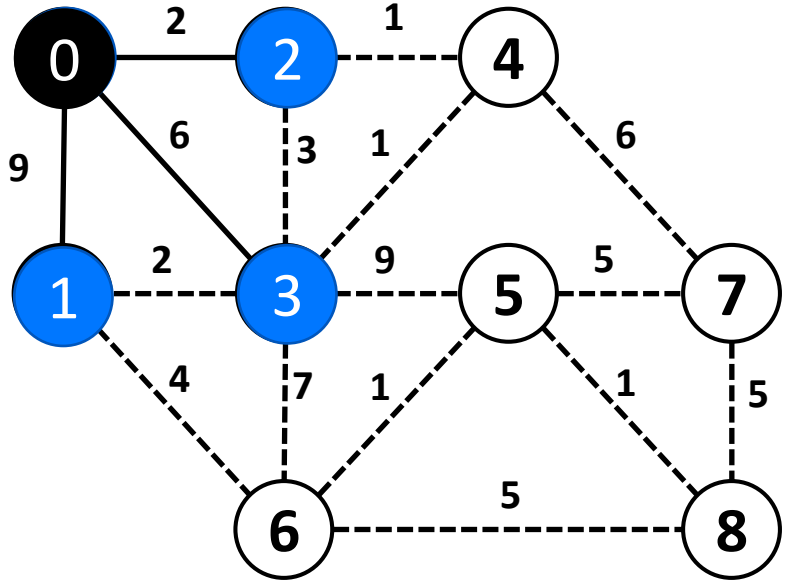


	pi
0	-1
1	-1
2	-1
3	-1
4	-1
5	-1
6	-1
7	-1
8	-1

	min_e
0	0
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Q: (0, 0)

Алгоритм Прима

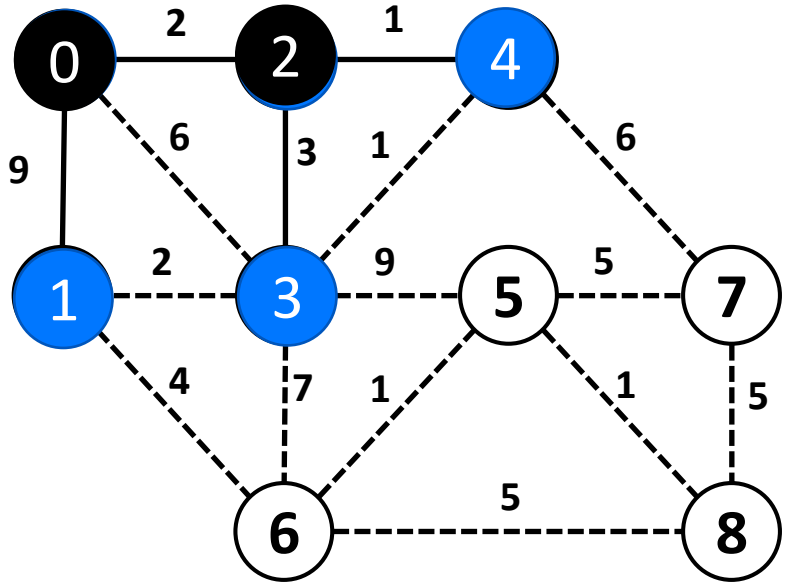


(0, 0)

	pi	min_e
0	-1	0
1	0	9
2	0	2
3	0	6
4	-1	
5	-1	
6	-1	
7	-1	
8	-1	

Q: (2, 2) (3, 6) (1, 9)

Алгоритм Прима

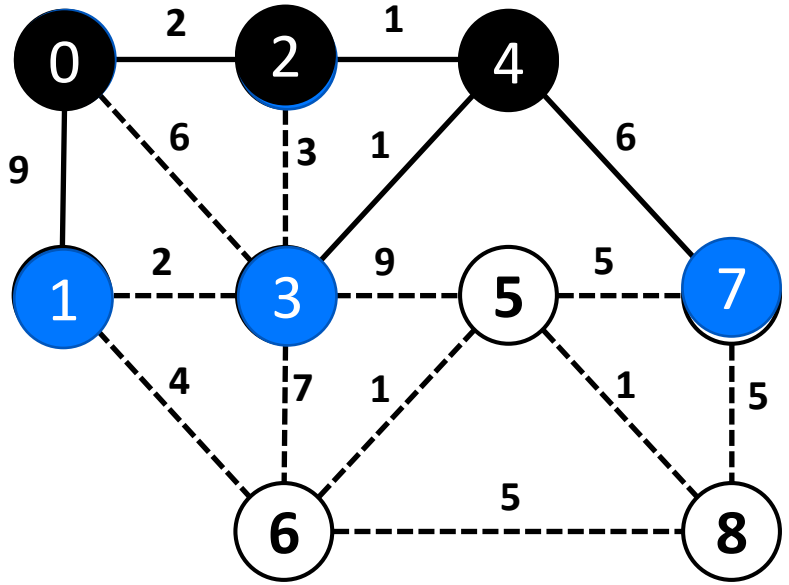


(2, 2)

	pi	min_e
0	-1	0
1	0	9
2	0	2
3	2	3
4	2	1
5	-1	
6	-1	
7	-1	
8	-1	

Q: (4, 1) (3, 3) (1, 9)

Алгоритм Прима

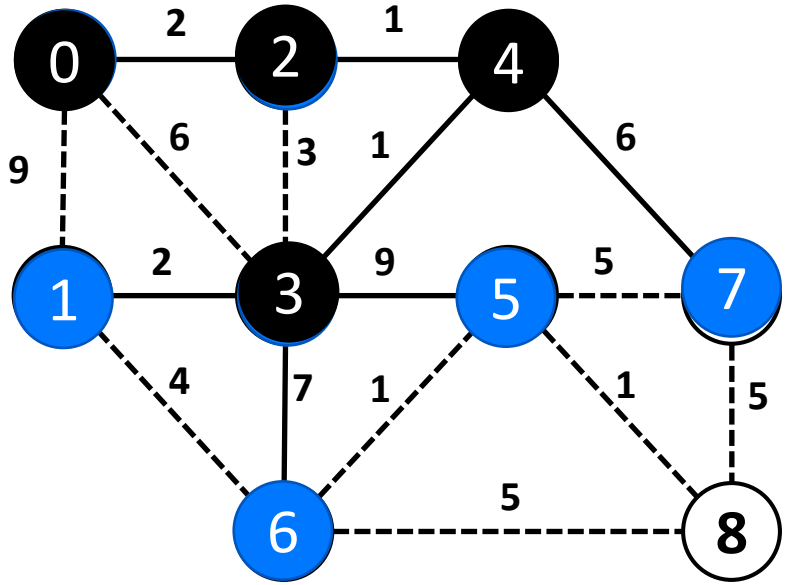


(4, 1)

	pi	min_e
0	-1	0
1	0	9
2	0	2
3	4	1
4	2	1
5	-1	
6	-1	
7	4	6
8	-1	

Q: (3, 1) (1, 9) (7, 6)

Алгоритм Прима

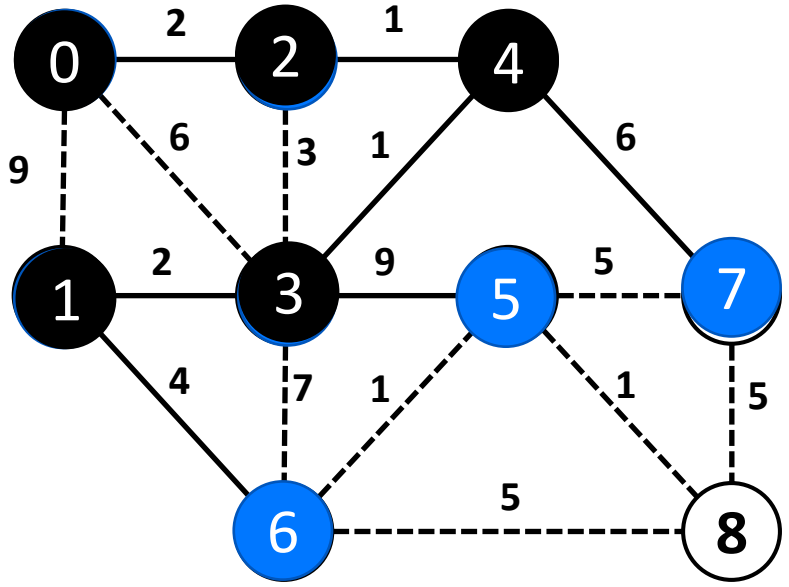


(3, 1)

	pi	min_e
0	-1	0
1	3	2
2	0	2
3	4	1
4	2	1
5	3	9
6	3	7
7	4	6
8	-1	

Q: (1, 2) (7, 6) (6, 7) (5, 9)

Алгоритм Прима



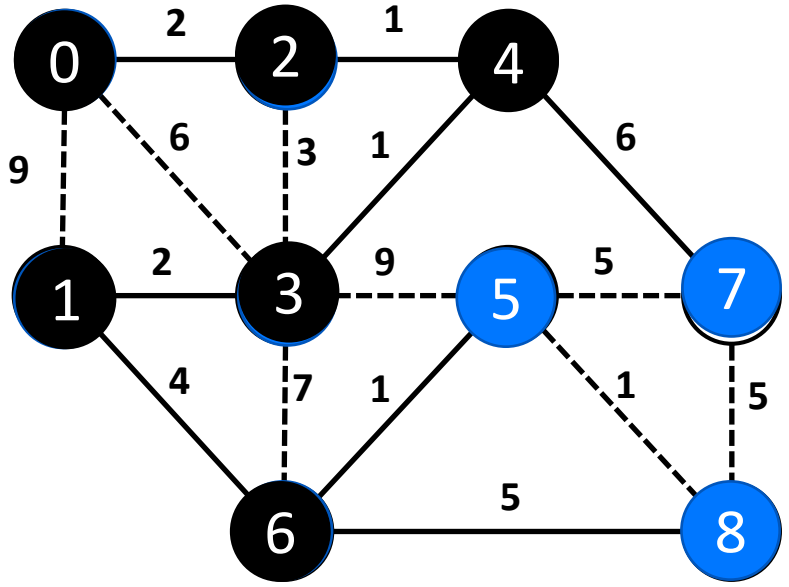
(1, 2)

	pi
0	-1
1	3
2	0
3	4
4	2
5	3
6	1
7	4
8	-1

	min_e
0	0
1	2
2	2
3	1
4	1
5	9
6	4
7	6
8	

Q: (6, 4) (7, 6) (5, 9)

Алгоритм Прима



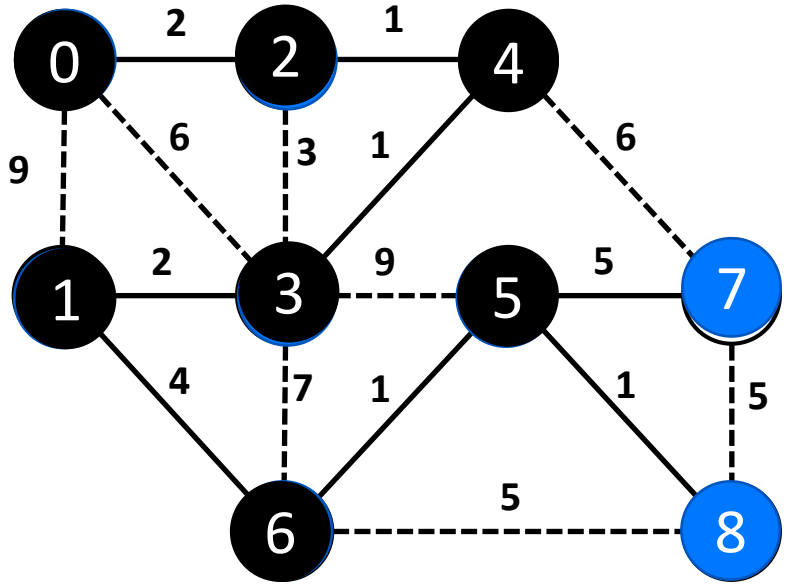
(6, 4)

	pi
0	-1
1	3
2	0
3	4
4	2
5	6
6	1
7	4
8	6

	min_e
0	0
1	2
2	2
3	1
4	1
5	1
6	4
7	6
8	5

Q: (5, 1) (8, 5) (7, 6)

Алгоритм Прима



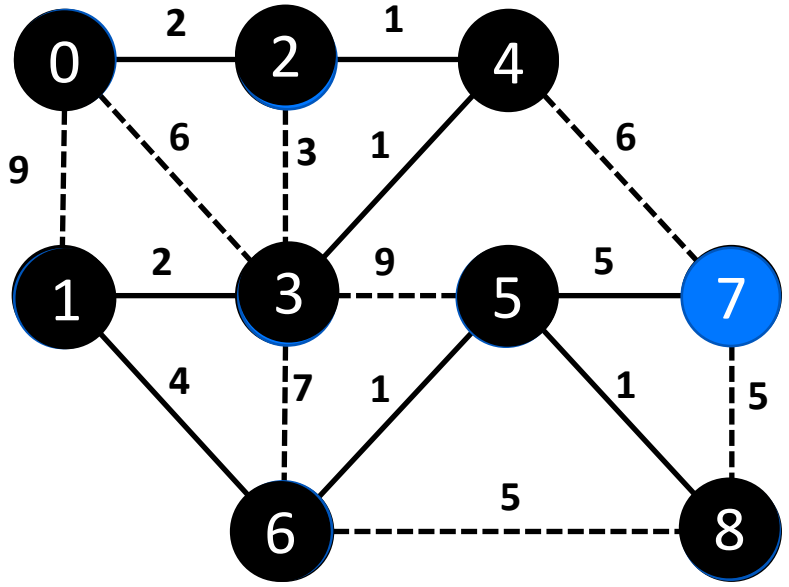
(5, 1)

	pi
0	-1
1	3
2	0
3	4
4	2
5	6
6	1
7	5
8	5

	min_e
0	0
1	2
2	2
3	1
4	1
5	1
6	4
7	5
8	1

Q: (8, 1) (7, 5)

Алгоритм Прима



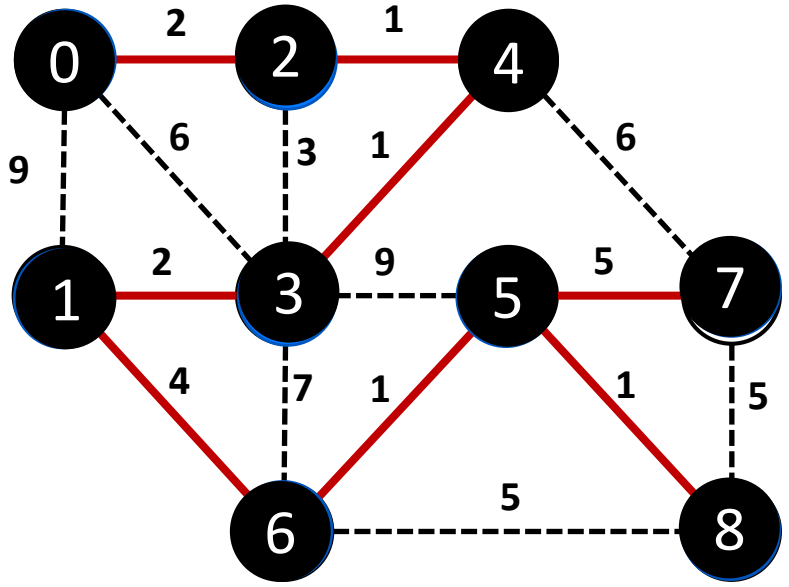
(8, 1)

	pi
0	-1
1	3
2	0
3	4
4	2
5	6
6	1
7	5
8	5

	min_e
0	0
1	2
2	2
3	1
4	1
5	1
6	4
7	5
8	1

Q: (7, 5)

Алгоритм Прима



(7, 5)

	pi
0	-1
1	3
2	0
3	4
4	2
5	6
6	1
7	5
8	5

	min_e
0	0
1	2
2	2
3	1
4	1
5	1
6	4
7	5
8	1

Q:

Алгоритм Прима. Оценка.

В качестве очереди с приоритетом для вершин можно использовать кучу или сбалансированное дерево поиска, как в алгоритме Дейкстры.

В этом случае одна итерация состоит из

1. Извлечение вершины из очереди с приоритетом – $O(\log V)$
2. Обработка ребер, инцидентных извлеченной вершине – $O(\log V)$ на каждое ребро.

Пункт 1) будет выполнять V раз.

Пункт 2) будет выполняться E раз.

Оценка времени работы: $T = O\big((E + V) \cdot logV\ \big)$

Оценка памяти: $M = O(V)$.

Алгоритм Крускала

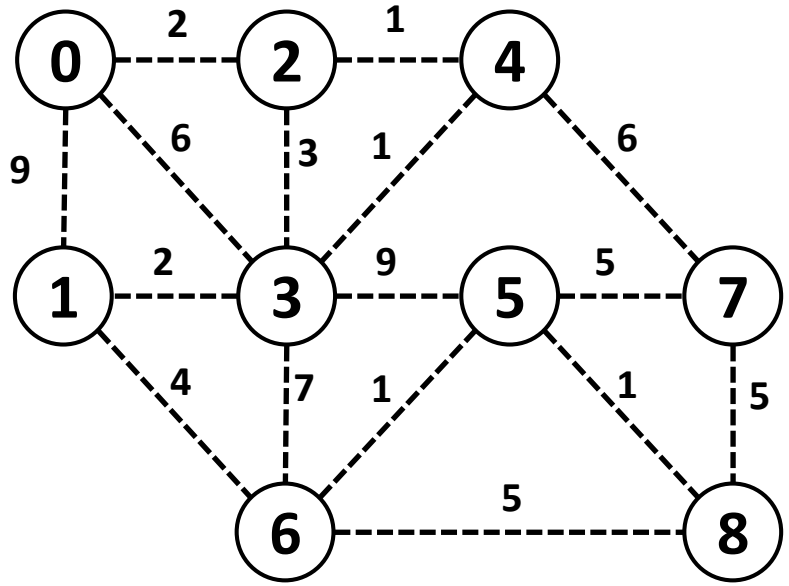
Алгоритм Крускала – еще один алгоритм поиска минимального остовного дерева.

1. Сортируем все ребра графа по весу.
2. Инициализируем лес деревьев. Изначально каждая вершина – маленькое дерево (пень).
3. Последовательно рассматриваем ребра графа в порядке возрастания веса.
   - Если очередное ребро соединяет два разных дерева из леса, то объединяем эти два дерева этим ребром в одно дерево.
   - Если очередное ребро соединяет две вершины одного дерева из леса, то пропускаем такое ребро.

   Повторяем 3), пока в лесу не останется одно дерево.

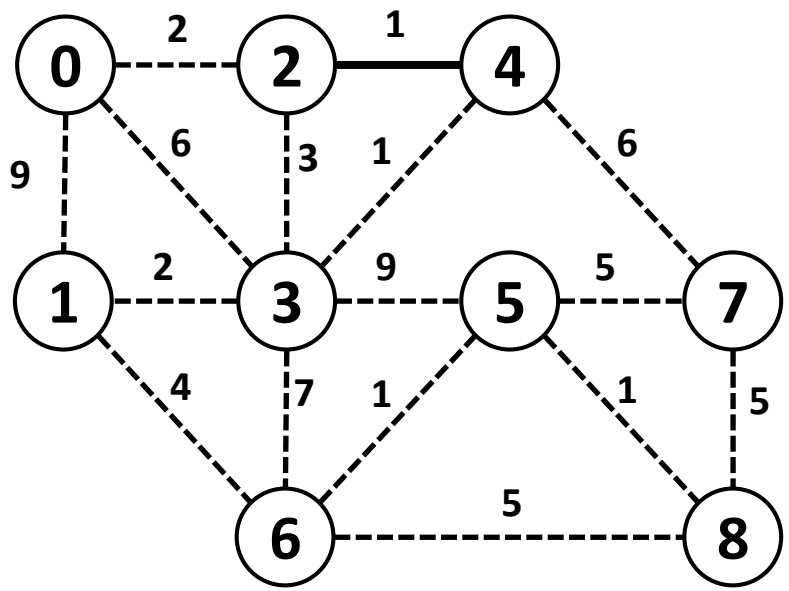
Алгоритм Крускала

w(2, 4) = 1
w(3, 4) = 1
w(5, 6) = 1
w(5, 8) = 1
w(0, 2) = 2
w(1, 3) = 2
w(2, 3) = 3
w(1, 6) = 4
w(5, 7) = 5
w(6, 8) = 5
w(7, 8) = 5
w(0, 3) = 6
w(4, 7) = 6
w(3, 6) = 7
w(0, 1) = 9
w(3, 5) = 9



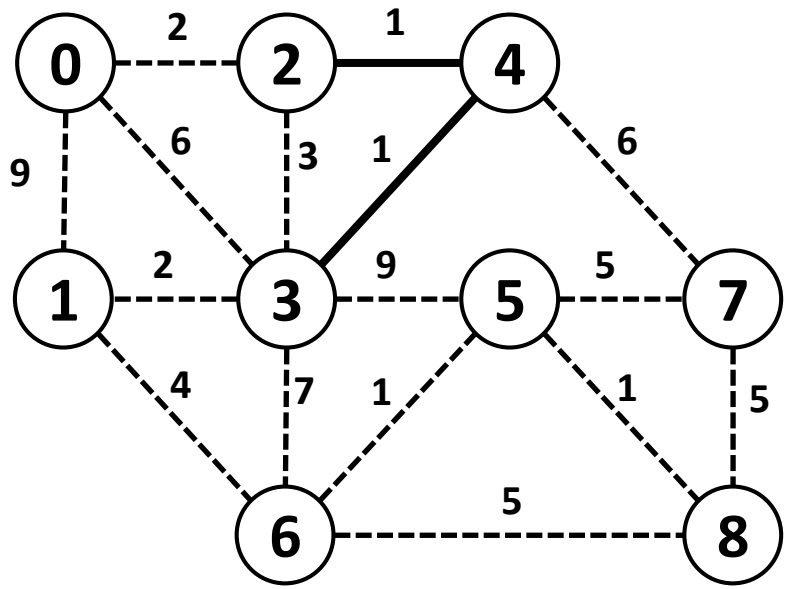
Алгоритм Крускала

~~w(2, 4) = 1~~
w(3, 4) = 1
w(5, 6) = 1
w(5, 8) = 1
w(0, 2) = 2
w(1, 3) = 2
w(2, 3) = 3
w(1, 6) = 4
w(5, 7) = 5
w(6, 8) = 5
w(7, 8) = 5
w(0, 3) = 6
w(4, 7) = 6
w(3, 6) = 7
w(0, 1) = 9
w(3, 5) = 9



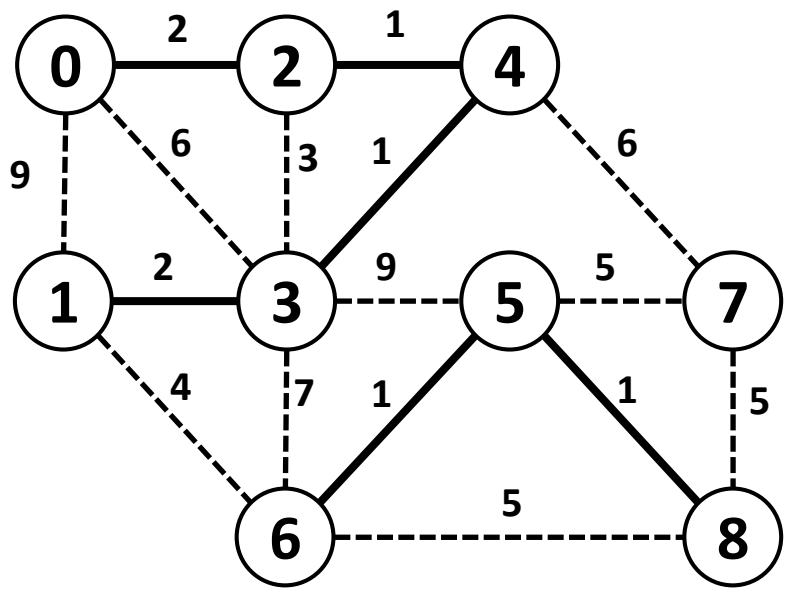
Алгоритм Крускала

~~w(2, 4) = 1~~
~~w(3, 4) = 1~~
w(5, 6) = 1
w(5, 8) = 1
w(0, 2) = 2
w(1, 3) = 2
w(2, 3) = 3
w(1, 6) = 4
w(5, 7) = 5
w(6, 8) = 5
w(7, 8) = 5
w(0, 3) = 6
w(4, 7) = 6
w(3, 6) = 7
w(0, 1) = 9
w(3, 5) = 9



Алгоритм Крускала

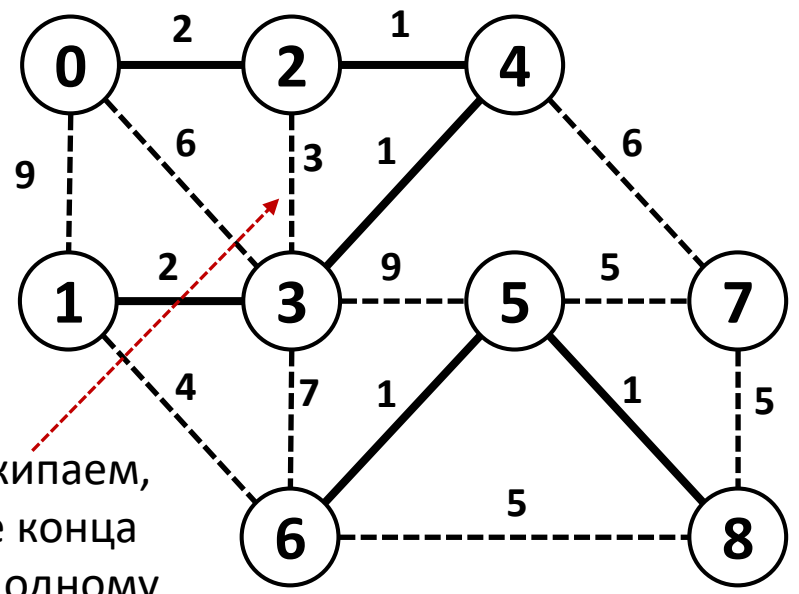
~~w(2, 4) = 1~~
~~w(3, 4) = 1~~
~~w(5, 6) = 1~~
~~w(5, 8) = 1~~
~~w(0, 2) = 2~~
~~w(1, 3) = 2~~
w(2, 3) = 3
w(1, 6) = 4
w(5, 7) = 5
w(6, 8) = 5
w(7, 8) = 5
w(0, 3) = 6
w(4, 7) = 6
w(3, 6) = 7
w(0, 1) = 9
w(3, 5) = 9



Алгоритм Крускала

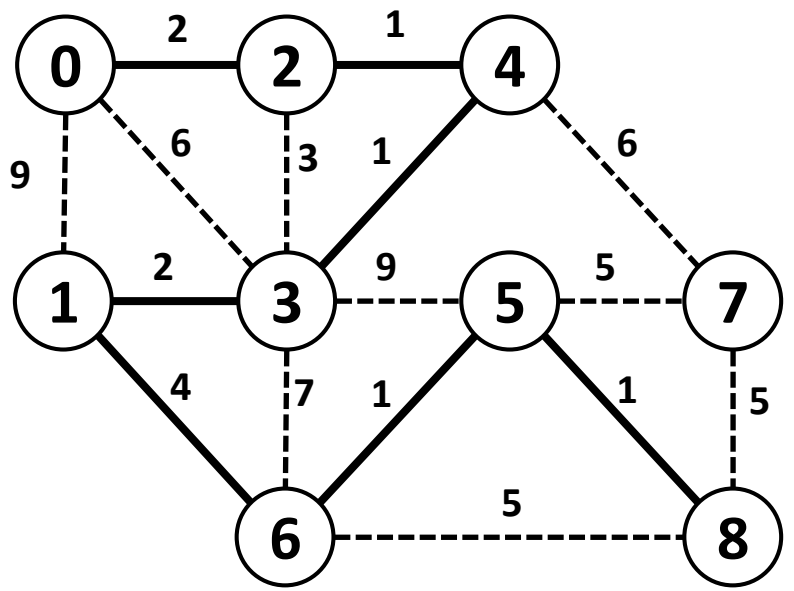
~~w(2, 4) = 1~~
~~w(3, 4) = 1~~
~~w(5, 6) = 1~~
~~w(5, 8) = 1~~
~~w(0, 2) = 2~~
~~w(1, 3) = 2~~
~~w(2, 3) = 3~~
w(1, 6) = 4
w(5, 7) = 5
w(6, 8) = 5
w(7, 8) = 5
w(0, 3) = 6
w(4, 7) = 6
w(3, 6) = 7
w(0, 1) = 9
w(3, 5) = 9

Ребро (2, 3) скипаем, так как оба ее конца принадлежат одному дереву.



Алгоритм Крускала

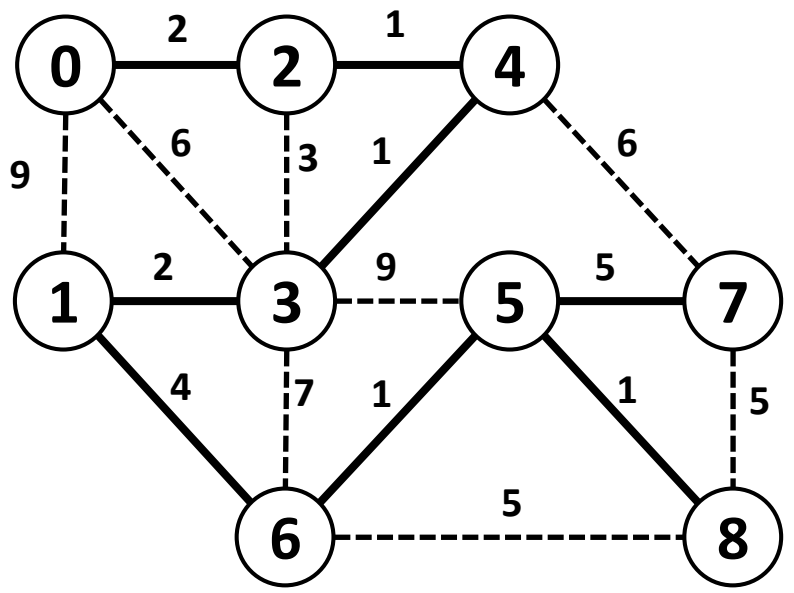
~~w(2, 4) = 1~~
~~w(3, 4) = 1~~
~~w(5, 6) = 1~~
~~w(5, 8) = 1~~
~~w(0, 2) = 2~~
~~w(1, 3) = 2~~
~~w(2, 3) = 3~~
~~w(1, 6) = 4~~
w(5, 7) = 5
w(6, 8) = 5
w(7, 8) = 5
w(0, 3) = 6
w(4, 7) = 6
w(3, 6) = 7
w(0, 1) = 9
w(3, 5) = 9



Ребро (1, 6)
объединило 2
больших поддерева.

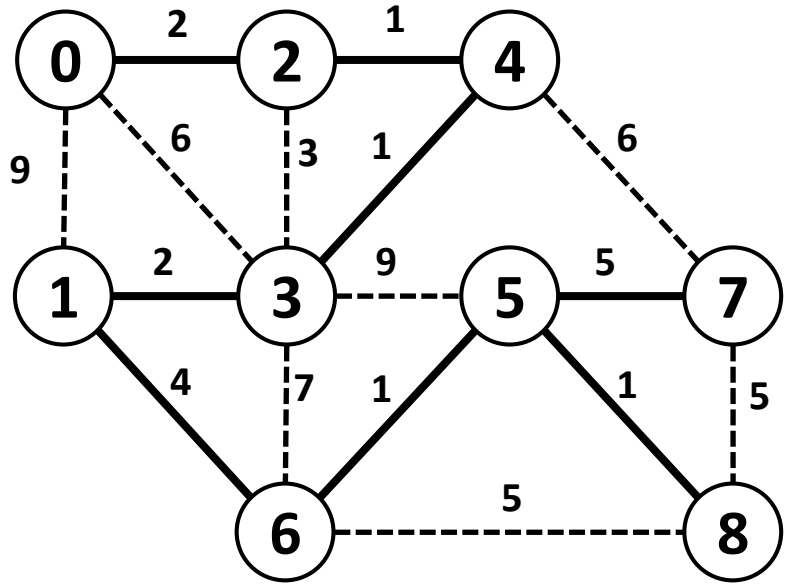
Алгоритм Крускала

~~w(2, 4) = 1~~
~~w(3, 4) = 1~~
~~w(5, 6) = 1~~
~~w(5, 8) = 1~~
~~w(0, 2) = 2~~
~~w(1, 3) = 2~~
~~w(2, 3) = 3~~
~~w(1, 6) = 4~~
~~w(5, 7) = 5~~
w(6, 8) = 5
w(7, 8) = 5
w(0, 3) = 6
w(4, 7) = 6
w(3, 6) = 7
w(0, 1) = 9
w(3, 5) = 9



Алгоритм Крускала

~~w(2, 4) = 1~~
~~w(3, 4) = 1~~
~~w(5, 6) = 1~~
~~w(5, 8) = 1~~
~~w(0, 2) = 2~~
~~w(1, 3) = 2~~
~~w(2, 3) = 3~~
~~w(1, 6) = 4~~
~~w(5, 7) = 5~~
~~w(6, 8) = 5~~
~~w(7, 8) = 5~~
~~w(0, 3) = 6~~
~~w(4, 7) = 6~~
~~w(3, 6) = 7~~
~~w(0, 1) = 9~~
~~w(3, 5) = 9~~



Начиная с ребра (6, 8), у оставшихся рёбер концы принадлежат одному поддереву. Скипаем их.

Алгоритм Крускала. Оценка.

Время работы алгоритма складывается из:

- Сортировка рёбер = $O(E \log E)$
- Объединение поддеревьев $O(V^2)$

Общее время работы = $O(E \log E) + O(V^2)$

Алгоритм Крускала. СНМ.

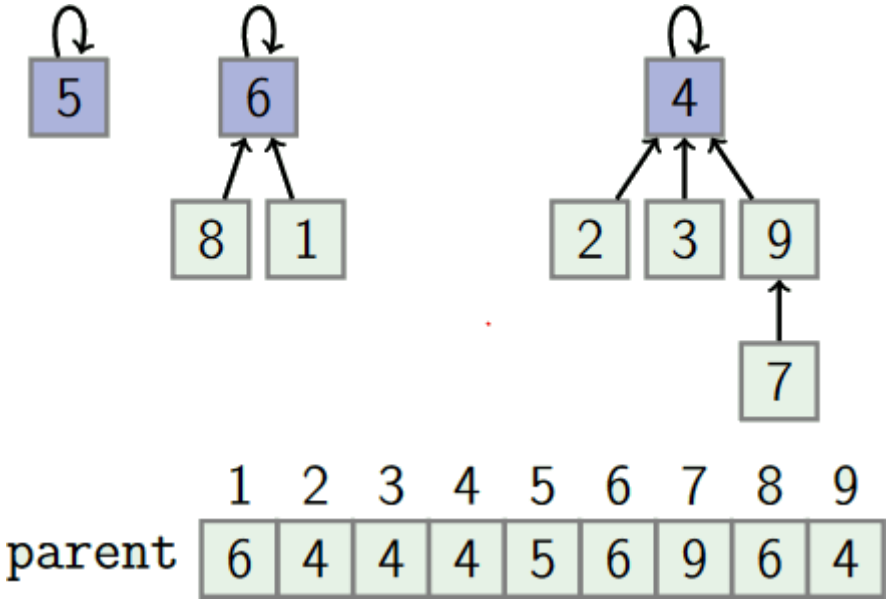
Требуется СД «Система Непересекающихся Множеств» (СНМ=DSU) с операциями

1. Make_set(u) – создать множество с одним элементом u.
2. Find_set(u) – найти множество по элементу u, чтобы можно было сравнить их (Find_set(u) == Find_set(v)).
3. Union_set(u, v) – объединить два множества, одно из которых содержит элемент u, а другое – элемент v.

Алгоритм Крускала. СНМ.

Особенности реализации:

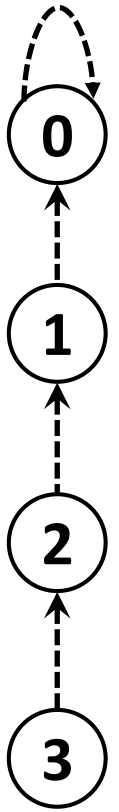
- Храним элементы каждого множества в виде дерева. Корень дерева называется **представителем** или **лидером**. Он возвращается методом Find_set.



Алгоритм Крускала. СНМ.

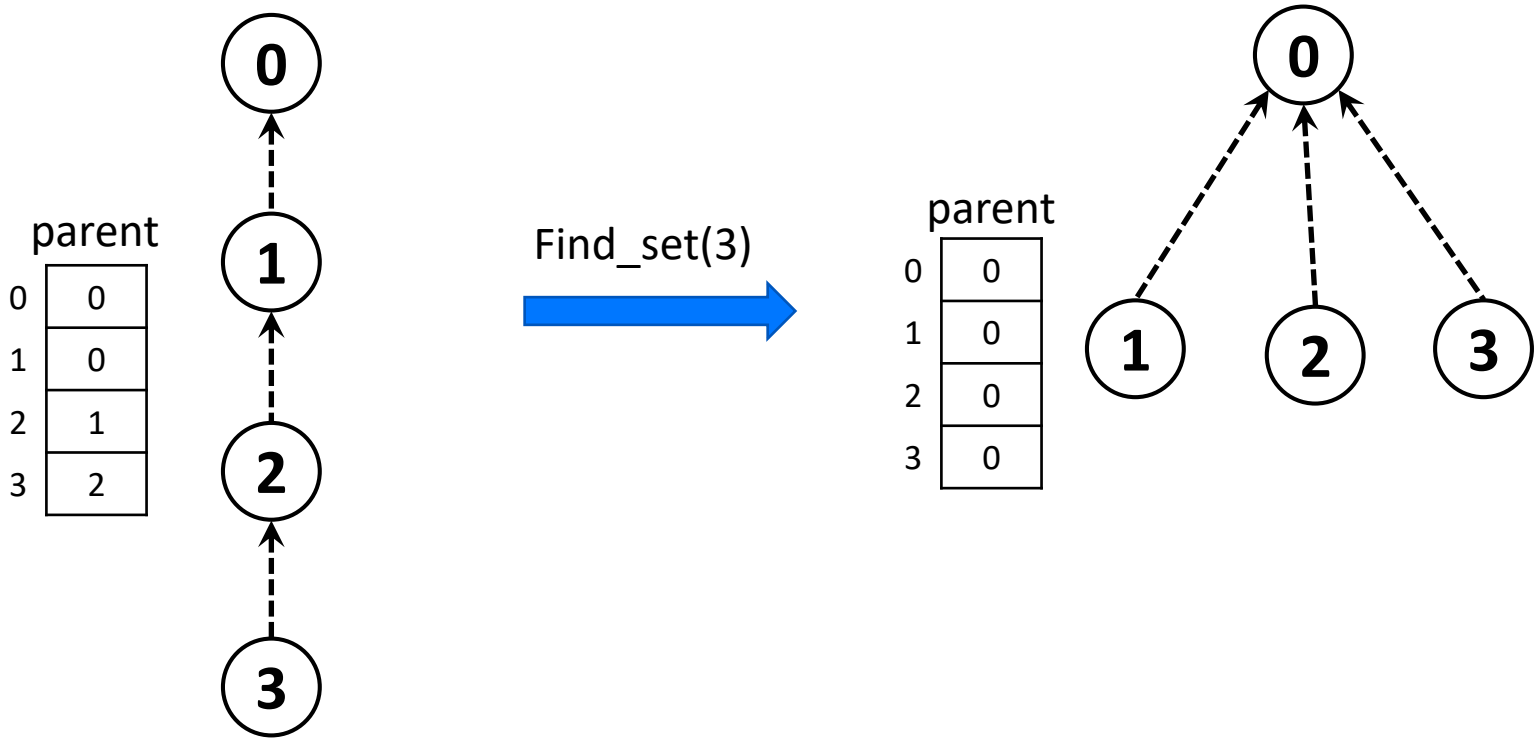
Особенности реализации:

- Сравнение двух деревьев – сравнение представителей.
- Объединение двух деревьев – одному представителю в качестве родителя устанавливается другой представитель.
- Родитель корня (представителя) – сам представитель.



СНМ. Эвристика сжатия пути.

При каждом новом поиске все элементы, находящиеся на пути от корня до искомого элемента, вешаются под корень дерева.

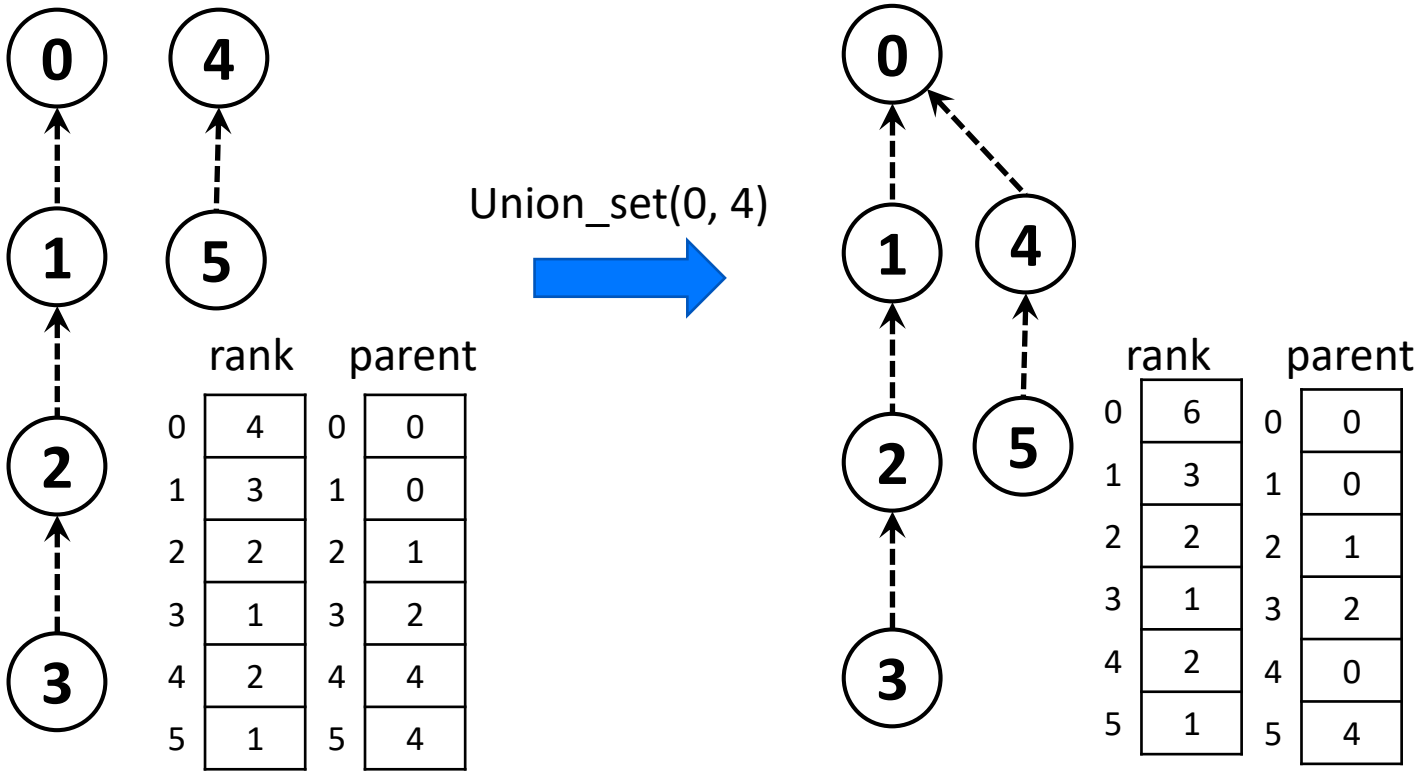


СНМ. Эвристика сжатия пути.

```
// Сжатие пути
int find_set (int v) {
        if (v == parent[v])
            return v;
        return parent[v] = find_set (parent[v]);
}
```

СНМ. Эвристика объединения по рангу.

Идея в том, что мы присоединяем дерево с меньшим рангом к дереву с большим рангом. В качестве ранга можно брать количество элементов в подмножестве или максимальную глубину дерева.



Алгоритм Крускала. СНМ. Оценка.

Время работы алгоритма складывается из:

- Сортировка рёбер = $O(E \log E)$
- Объединение поддеревьев с помощью СНМ = $O\left(A^{-1}(V)\right) \approx O(1)$

Общее время работы = $O(E \log E)$

$A^{-1}(V)$ - обратная функция Аккермана.
Это настолько медленно растущая функция, что для любых мыслимых применений ее значение не превышает 4 (примерно для $n \leq 10^{600}$).

NP-полнота

Классы сложности алгоритмов:

- Класс P – задачу можно решить за полиномиальное время от количества входных данных ($O(n^k)$, где n – кол-во входных данных, k - константа)
- Класс NP – задача поддается проверке за полиномиальное время
- Класс NP - полных задач – подмножество задача класса NP, к которой можно свести любую задачу из этого класса за полиномиальное время.

Точно понятно, что $P \subseteq NP$

Проблема равенства классов $P = NP$ – математическая проблема тысячелетия.

Большинство исследователей склонятся к тому, что $P \neq NP$

NP-полнота. Примеры задач.

Примеры NP-полных задач:

- Задача коммивояжёра
- Задача выполнимости булевских формул
- Кратчайшее решение пятнашек размером $n \times n$
- Сапёр
- Тетрис

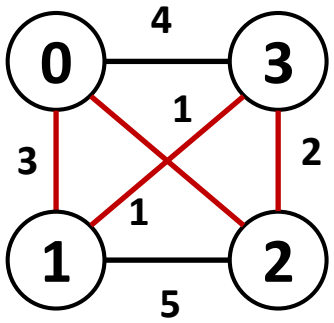
Задача коммивояжёра

Пусть G – полный неориентированный взвешенный граф.

Коммивояжеру нужно совершить *кратчайший* тур, или гамильтонов цикл, посетив каждый город ровно по одному разу и завершив путешествие в том же городе, из которого он выехал.

Метрическая задача коммивояжера - на матрице стоимостей выполняется неравенство треугольника.

Задача коммивояжёра - NP-полная, то есть существование быстрого алгоритма маловероятно.



Приближённые алгоритмы

Многие задачи, представляющие практический интерес, являются NP-полными.

Варианты решения:

- Если объем входных данных небольшой, то может подойти алгоритм, время работы которого выражается показательной функцией.
- Иногда удается выделить важные частные случаи, разрешимые в течение полиномиального времени.
- Иногда есть возможность найти за полиномиальное время решение, близкое к оптимальному.

Алгоритм, возвращающий решения, близкие к оптимальным, называется **приближённым алгоритмом**.

Оценка качества приближённых алгоритмов

Говорят, что алгоритм обладает **коэффициентом аппроксимации** $\rho(n)$, если

$$\max\left(\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right) \leq \rho(n)$$

n – размер входных данных

C – стоимость решения

C^* – стоимость оптимального решения

$\rho(n)$-приближенный алгоритм – алгоритм, в котором достигается коэффициент аппроксимации $\rho(n)$

Задача коммивояжёра

2-приближённый алгоритм

- $G = (V, E)$ – полный неориентированный граф
- Каждому ребру $(u, v) \in E$ ставим в соответствие целочисленную стоимость $c(u, v) \geq 0$
- $c(u, v)$ удовлетворяют неравенству треугольника, то есть для всех $u, v, w \in V$

$$c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$$

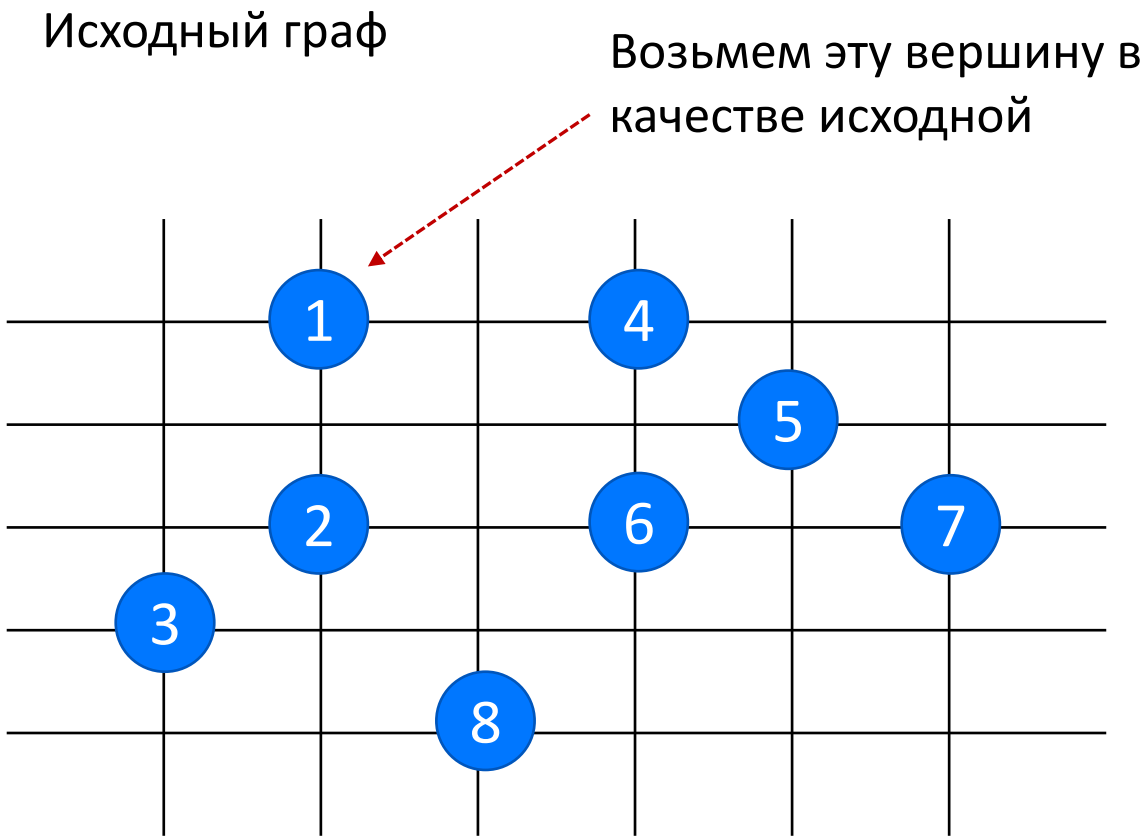
Если неравенство треугольника не выполняется, то приближенного алгоритма с полиномиальным временем работы не существует, если только не справедливо соотношение $P = NP$.

Задача коммивояжёра

2-приближённый алгоритм Approx_TSP_Tour:

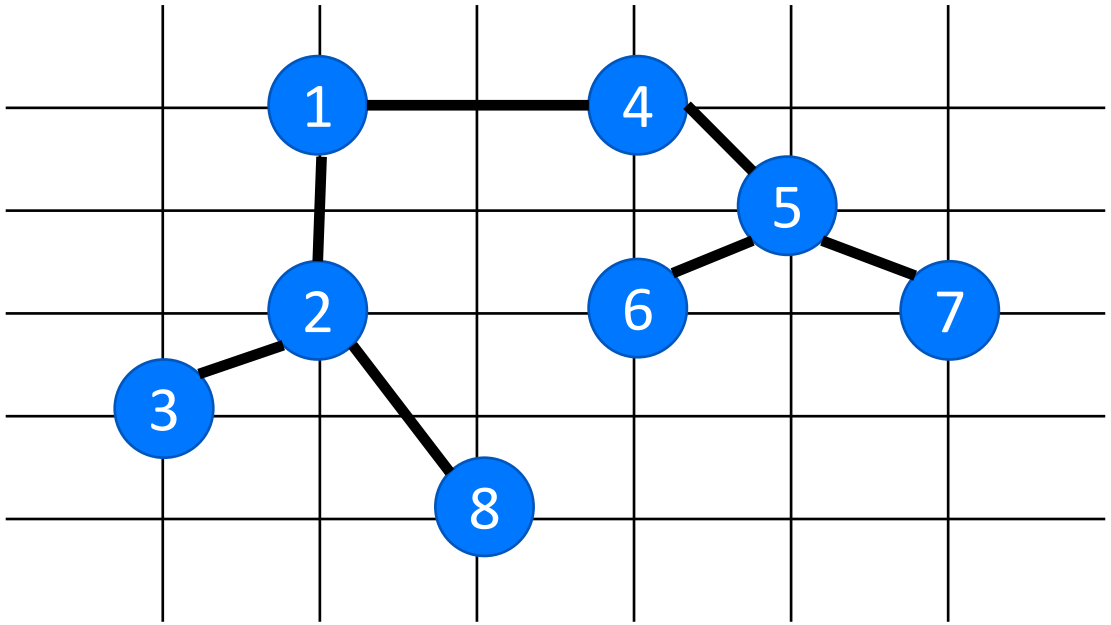
1. Выбирается произвольная вершина, которая будет корневой
2. Из этой вершины строится минимальное остовное дерево T для графа G
3. Обходим дерево T в прямом порядке, получаем список вершин L в порядке прямого обхода дерева T.
4. Получаем гамильтонов цикл H, который посещает вершины в порядке их перечисления в списке L.

Задача коммивояжёра



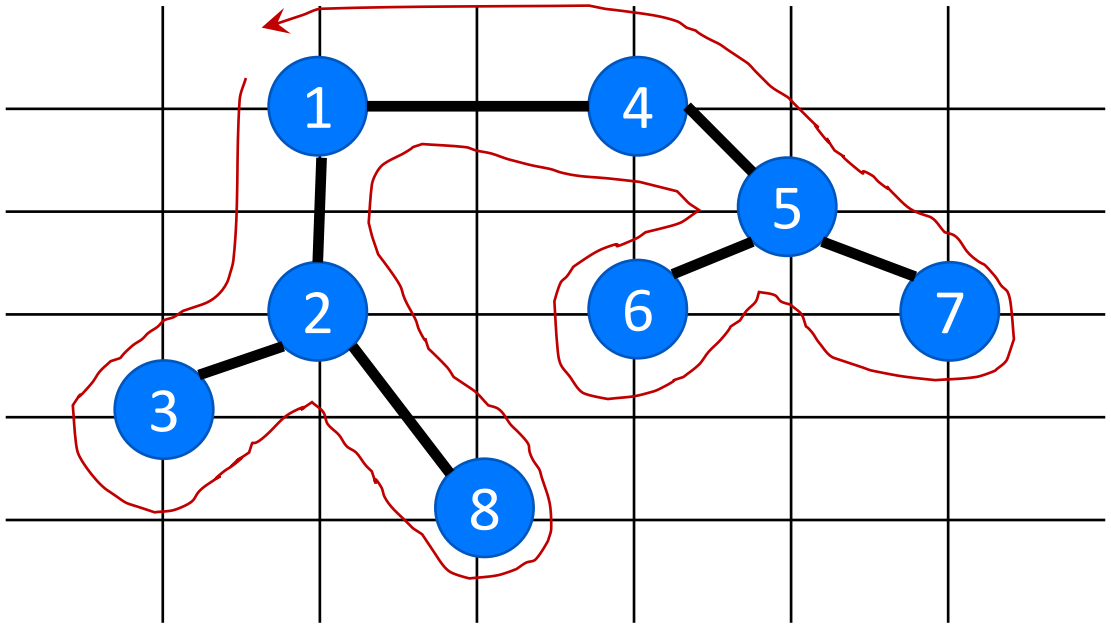
Задача коммивояжёра

Строим минимальное остовное дерево



Задача коммивояжёра

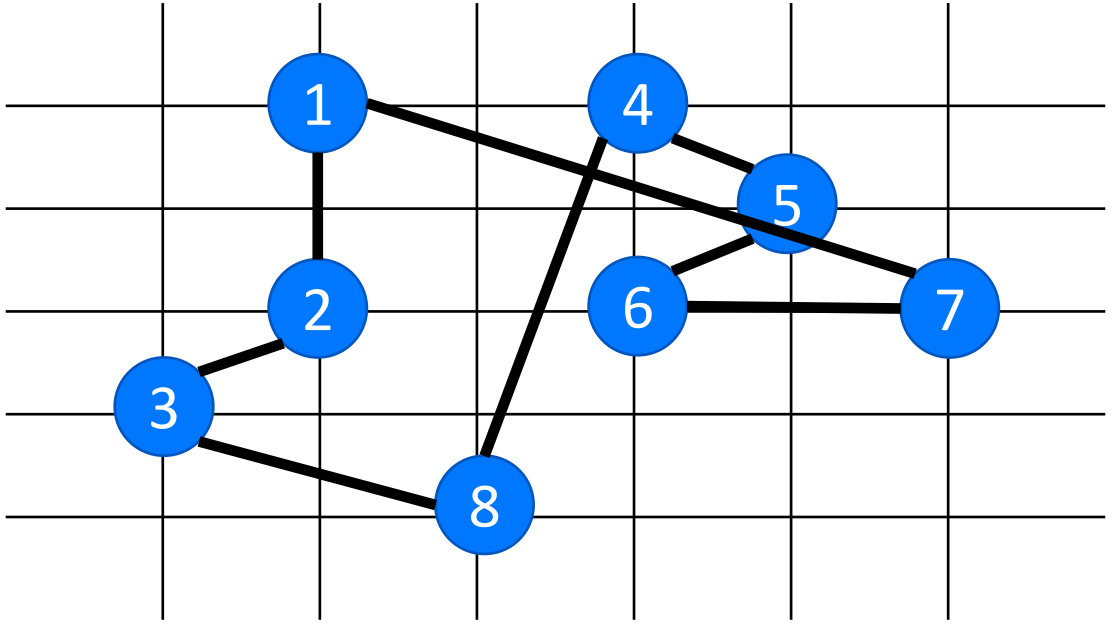
Обходим дерево в прямом порядке,
получаем список вершин L



L = {1, 2, 3, 8, 4, 5, 6, 7}

Задача коммивояжёра

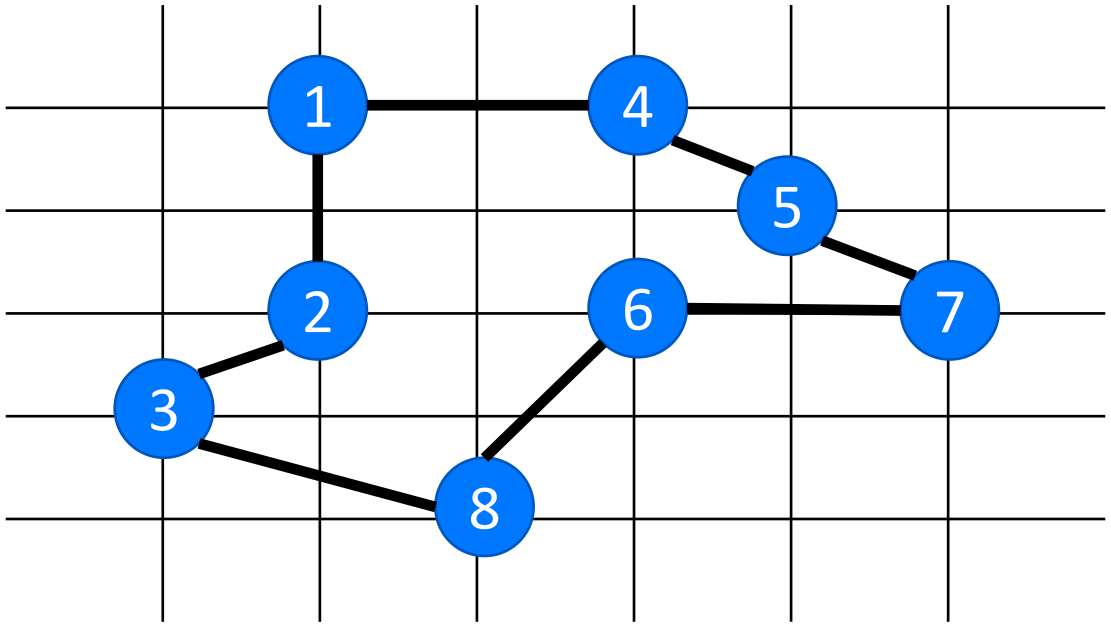
Получаем гамильтонов цикл H, который посещает вершины в порядке их перечисления в списке L.



L = {1, 2, 3, 8, 4, 5, 6, 7}

Задача коммивояжёра

Оптимальный тур H^*



Длина тура H ~ 19.074

Длина оптимального тура H^* ~ 14.715

Задача коммивояжёра

Теорема. Алгоритм Approx_TSP_Tour является 2-приближённым алгоритмом с полиномиальным временем работы, позволяющим решить задачу коммивояжёра, в которой удовлетворяется неравенство треугольника.

Док-во.

H^* - оптимальный тур. Удалив из него одно ребро получим остовное дерево, причем вес минимального остовного дерева T является нижней границей стоимости оптимального тура, то есть $c(T) \leq c(H^*)$.

При полном обходе минимального остовного дерева все ребра посещаются 2 раза, обозначим этот обход через W. Из этого следует, что $c(W) = 2c(T) \Rightarrow c(W) \leq 2c(H^*)$, то есть стоимость обхода W не более чем в 2 раза больше стоимости оптимального тура.

Задача коммивояжёра

Док-во (продолжение).

Но W – не тур, он посещает некоторые вершины более 1 раза. Но исходя из неравенства треугольника можно исключить из обхода все посещения вершины, кроме первой, и при этом стоимость пути не возрастет. То есть мы получим цикл H, он является гамильтоновым, так как вершины посещаются по одному разу. Так как H получается путем удаления вершин из W, то

$$c(H) \leq c(W) \Rightarrow c(H) \leq 2c(H^*)$$

Спасибо
за внимание!

Дмитрий Глушенков